CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemática Educativa

Construcciones geométricas y Pruebas Situadas

Tesis que presenta

María Alejandra Calderón González

Para obtener el grado de

Maestra en Ciencias

En la especialidad de

Matemática Educativa

Director de la tesis: **Dr. Luis Enrique Moreno Armella**

Ciudad de México Agosto, 2020

Agradecimientos

A ***mi familia,*** *mis abuelos, mis padres y mis hermanos,* por escucharme y aconsejarme en los momentos más difíciles de mi vida, por inspirarme en logro de mis metas, por apoyarme en cada una de mis decisiones y por preocuparse siempre por mi felicidad.

A ***mi asesor,*** *el Dr. Luis Moreno Armella,* por su confianza en mi trabajo al acogerme como su estudiante y guiarme en todo el proceso de maestría, por su disponibilidad de tiempo, por sus correcciones, por sus buenos consejos, por su compromiso con mi formación y por todas y cada una de sus enseñanzas.

A ***los estudiantes del seminario de Pensamiento Matemático,*** *de la generación del 2019,* por solucionar las actividades que propuse en el cuestionario y darme de su tiempo libre para desarrollar las entrevistas que me permitieron obtener datos para mi tesis.

A ***mis amigos,*** *Fredy y Andrea,* por su apoyo durante todo el proceso de la tesis, por sus sabios consejos, por su valioso tiempo y por escucharme cuando lo necesité. A *Daniela,* por su apoyo en la etapa más importante de la tesis y por su ayuda incondicional. A *Luis Carlos, Sofi, Alejandra, Cristian, y Carlitos* por el tiempo compartido, por las discusiones académicas, por las pláticas y sobre todo por ayudarme a sobrellevar el tiempo lejos de mi familia.

A ***Adrianita,*** por su diligencia y ayuda durante todo el desarrollo de la maestría, y por su compromiso con cada uno de los estudiantes del departamento.

CONACYT
Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

Agradecimiento especial al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo brindado al otorgarme la beca para la realización de mis estudios de Maestría en Ciencias en el Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN

Becario: 940743

Tabla de contenido

RESUMEN .... **VIII**

ABSTRACT .... **IX**

1. LA PRUEBA MATEMÁTICA EN LAS AULAS DE GEOMETRÍA **1**

1.1. LA GEOMETRÍA EN LA ESCUELA 1
1.2. LA PRUEBA EN GEOMETRÍA 2
1.2.1. Relación histórica entre la geometría y la prueba *3*
1.2.2. La prueba en el salón de clases *5*
1.3. DETERMINACIÓN DEL ESTUDIO 15

2. BASES TEÓRICAS Y CONCEPTUALES **18**

2.1. LOS ENTES MATEMÁTICOS DESDE UNA PERSPECTIVA DIDÁCTICA 18
2.1.1. Las representaciones *19*
2.2. LAS TECNOLOGÍAS: DESDE UN PUNTO DE VISTA GENERAL HASTA LA ESPECIFICIDAD DE LO DIGITAL. 20
2.3. LAS HERRAMIENTAS 21
2.4. CO-ACCIÓN 23
2.5. LOS ARGUMENTOS 25

3. METODOLOGÍA **27**

3.1. 2TIPO DE ESTUDIO 27
3.2. LOS PARTICIPANTES 28
3.3. MÉTODOS DE RECOLECCIÓN DE LOS DATOS 29
3.3.1. El cuestionario *29*
3.3.2. Las entrevistas *32*

4. DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS **34**

4.1. CONSTRUCCIÓN 1 34
4.1.1. Bisectriz *34*
4.2. CONSTRUCCIÓN 2 57
4.2.1. Tangente a circunferencia *57*
4.2.2. Equidistancia *64*
4.2.3. Transformaciones en el plano *65*
4.3. CONSTRUCCIÓN 3 72
4.3.1. Mediatriz *72*
4.3.2. Semejanza *77*
4.3.3. Elipse *80*
4.4. CONSTRUCCIONES 4 Y 5 90
4.4.1. Mediatriz *90*
4.4.2. Semejanza *95*
4.4.3. Hipérbola *97*
4.5. CONSTRUCCIÓN 6 105
4.5.1. Paralelas *106*

5. RESULTADOS Y CONCLUSIONES **115**

5.1. SOBRE LAS PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN 115
5.2. SOBRE LOS RESULTADOS ADICIONALES 119

6. INVESTIGACIÓN FUTURA 121

6.1. ARTICULACIÓN CONCEPTUAL Y PROBLEMAS DE INVESTIGACIÓN 124
6.2. METODOLOGÍA, RECOLECCIÓN DE DATOS Y SU ANÁLISIS 127
6.3. CRONOGRAMA DE ACTIVIDADES 132

REFERENCIAS 134

ANEXOS 140

RESUMEN

El entendimiento y la elaboración de pruebas es uno de los objetivos primordiales dentro de la educación matemática escolar. Sin embargo, la presencia de las tecnologías digitales como GeoGebra en el aula de geometría ha generado una tensión respecto a lo que se considera válido como una prueba cuando se usa un medio digital, ya que el medio responde a la geometría que tiene incrustada y permite —mediante el arrastre— verificar, explicar y comunicar la veracidad de una afirmación, dejando de lado la búsqueda de elementos teóricos que apoyarían la afirmación al proponer una prueba formal.

Identificamos las actividades de construcción como un tipo de actividad que se encuentra estrechamente vinculada con el mundo teórico de la geometría Euclidiana. Por ello, se busca caracterizar las pruebas que permiten garantizar que una construcción es correcta cuando se usa tanto un medio digital como GeoGebra, como cuando se usa papel y lápiz.

Así, en el estudio se reporta la interacción entre el medio digital y el estudiante que le permiten a este último proponer una prueba. Los resultados muestran que el arrastre de los objetos, el uso de las herramientas predeterminadas del sistema digital —que tiene incrustada una teoría geométrica—auxilian al sujeto en la producción de pruebas. Esto sirvió de guía para caracterizar diferentes niveles de prueba en el medio digital. Comprobamos que el uso permanente de las tecnologías digitales puede afectar a la cognición a tal grado que los sujetos razonan como si estuvieran trabajando en el medio digital aun cuando se encuentran trabajando en un medio estático de papel y lápiz.

El trabajo realizado apunta a la caracterización de la geometría dinámica como mediadora en la producción de pruebas geométricas al ofrecer ejemplos de acciones intencionadas del estudiante.

ABSTRACT

The understanding and production of proofs is one of the fundamental goals in school mathematics. However, the presence of digital technologies in the geometry classroom has generated a tension regarding to validity of proofs in a digital environment such as GeoGebra because this digital environment responds with its embedded geometry, allowing —through dragging— to verify, to explain, and to communicate the validity of a proposition while leaving aside theoretical elements that would support the formal proof of the proposition.

We identify construction activities as closely linked to the theoretical world of Euclidean geometry. This is why we intend to characterize the proofs that guarantee that a construction is correct when using both digital media like GeoGebra like when using paper and pencil.

We report the interaction between the digital medium and the student allowing the latter to suggest a proof. The results obtained show the *dragging* of objects and the use of the proper tools of the digital system — with its embedded theory — help in the production of evidence. This worked as a guide to characterize different levels of evidence in the digital medium. We confirmed that the permanent use of digital technologies can affect cognition to such an extent that students continue to reason on paper as if they were working in the digital medium.

The work aims to characterize dynamic geometry as a mediation tool in the production of geometric tests by offering examples of intended student actions.

1. La prueba matemática en las aulas de geometría

En el primer capítulo se presentan algunas de las razones que motivaron la realización de este trabajo en el campo de la geometría, resaltando la estrecha relación histórica que tiene con la prueba y presentando una visión del estado actual de las investigaciones sobre la prueba en la educación matemática. Todas estas ideas permiten realizar una delimitación de la problemática y dar pautas para la ubicación y relevancia del presente trabajo.

1.1. La geometría en la escuela

Desde la antigüedad las ideas geométricas han sido precursoras de las ideas matemáticas actuales y del pensamiento deductivo. En la actualidad es notoria su capacidad de permear en diferentes aspectos del conocimiento de un individuo desde el punto de vista físico y deductivo. En términos de Camargo y Acosta (2012):

> "En su dimensión física, indaga por propiedades espaciales de los objetos físicos y de sus representaciones, modelando el espacio circundante. En su dimensión aplicada, se constituye en una herramienta de representación e interpretación de otras ramas del conocimiento. En su dimensión teórica, integra una colección de diversas teorías que han sido ejemplo de rigor y abstracción" (p. 4)

A pesar de la importancia de la geometría y su capacidad de incidir de diferentes maneras en el conocimiento de las personas, es una de las ramas de la matemática más desatendida por la educación. De acuerdo con nuestra experiencia su papel en secundaria y en primaria ha sido opacado por otras ramas que parecen ser más importantes para la formación de estudiantes.

Revisando los programas escolares desde hace medio siglo se puede apreciar cómo la geometría Euclidiana ha perdido su presencia, sin embargo, en los últimos años ha recuperado importancia por la atención que se le está prestando al razonamiento espacial y por el uso intensivo de las tecnologías digitales (Kilpatrick, 2018). Por lo tanto, parece conveniente que las investigaciones en geometría se desarrollen con relación a lo espacial y al uso de tecnologías digitales desde diferentes puntos de vista, como por ejemplo el físico y deductivo (geometría intuitiva y geometría teórica).

A nivel de preparatoria y secundaria se ha notado la tendencia de las clases de geometría hacia la parte métrica, la visual y la aritmetización geométrica, dejando a un lado los procesos deductivos vinculados a la prueba. Una explicación para dicho fenómeno puede estar en que aún no se tiene claridad sobre cómo hacer que los estudiantes pasen de lo intuitivo a lo formal (Hershkowitz, 2020) y más aún con la aparición de las tecnologías digitales. Sin embargo, sería insuficiente pensar que la discusión actual sobre la prueba solo se centra en el paso de lo intuitivo a lo formal, ya que existen otros factores (que se discutirán más adelante) que se están teniendo en cuenta: como las formas de ver la prueba (según el nivel), el papel que desempeñan cada uno de los actores y nuevamente las tecnologías digitales.

1.2. La prueba en geometría

La geometría por naturaleza es un ambiente propicio para el desarrollo de pruebas, pues históricamente han tenido una relación estrecha. Hershkowitz (2020) resalta algunos aspectos que han sido cruciales en el desarrollo de la geometría, de los cuales identificamos los siguientes:

(a) Interactuar con formas en un espacio. Este aspecto surgió de manera independiente en varias culturas como un cuerpo de saber práctico sobre *longitudes, áreas y volúmenes* y sobre *atributos de las formas* y sus *relaciones* (el aspecto práctico-intuitivo).

(b) Las formas, sus atributos y sus cambios en el espacio como ingredientes fundamentales para *construir una teoría* (el enfoque lógico formal). Los elementos de una geometría matemática formal surgieron en Occidente a través del trabajo de Thales (siglo VI a. C.). En el siglo III a. C., Euclides puso este aspecto de la geometría en *una estructura axiomática* (*geometría Euclidiana*). (p. 774, traducción propia[1])

[1] En el presente documento, todas las citas de documentos en inglés serán traducciones propias.

En el desarrollo del enfoque lógico formal se destaca el trabajo de Thales, ya que demostró por primera vez hechos matemáticos que eran conocidos por los egipcios y Mesopotámicos (Reid y Knipping, 2010) quienes habían adquirido su saber desde un enfoque practico-intuitivo. El trabajo de Euclides también se resalta dentro de este enfoque, pues su obra emblemática —*Los Elementos*— fue el primer referente de organización axiomática global. Partiendo de axiomas (verdades generales aceptadas sin demostración) y postulados (enunciados geométricos evidentes por sí mismos), Euclides logró una organización global del conocimiento matemático, de modo que con estos axiomas y postulados se fueron demostrando una a una proposiciones que a partir de allí servirían como base para la demostración de otras. Es decir, Euclides poco a poco iba preparando el camino para poder *situar* sus nuevos hechos (teoremas) en un sistema axiomático en donde pudiesen ser demostrados.

Los dos enfoques históricos de la geometría que resalta Hershkowitz (2020) no solo sirvieron como fuentes para su desarrollo, sino que también se han llevado a las escuelas. De modo que antes de ver el papel de la prueba en el aula de clases consideramos conveniente conocer las razones históricas por las que surge enfoque formal.

1.2.1. Relación histórica entre la geometría y la prueba

Con la aparición de la primera prueba uno de los interrogantes que surge es: por qué los griegos como Thales vieron la necesidad de probar sus resultados geométricos o dicho de otra manera por qué surge la necesidad de la demostración. Pues bien, Reid y Knipping (2010) mencionan que no hay un motivo claro y que es un hecho ampliamente discutido dentro de la comunidad, destacando las siguientes razones:

- La sociedad ateniense creó un contexto democrático en el que se valoraba el argumento lógico.
- La existencia de tiempo suficiente para actividades filosóficas y matemáticas sin ninguna aplicación práctica inmediata.
- El problema de la inconmensurabilidad del lado y la diagonal de un cuadrado.

Jahnke (2010) por su parte, menciona que los historiadores de la matemática y la ciencia han destacado tres posibles razones por las cuales los griegos empezaron a valorar la prueba:

- Una tesis sociopolítica en donde se asocia el surgimiento de la prueba con el aspecto político y social en donde diferentes grupos debían presentar argumentos para exponer sus ideas.
- Una tesis interna que identificó la necesidad de hacer pruebas con el fin de eliminar proposiciones incorrectas.
- Una tesis que sostiene que la influencia filosófica llevó al origen de la prueba matemática.

Como se puede apreciar, las hipótesis mencionadas por los autores son similares, lo que permite interpretar que no se han producido muchas más hipótesis sobre el interrogante inicial y que a pesar de la existencia de éstas no hay una que se distinga frente a las otras. Lo que si es cierto es que todas parecen razonables, sin embargo, para los fines de este escrito se hará hincapié en la segunda tesis mencionada por Jahnke, a saber, eliminar la incertidumbre sobre los hechos matemáticos.

Existen algunos ejemplos de “pruebas” que en realidad no lo son, pues se apoyan en dibujos que exhiben una situación geométrica en apariencia válida pero que es imposible. Un ejemplo de ello es presentado por Northrop (1968) en donde se ve cómo un dibujo (que en realidad es imposible en el plano convencional) puede llevar a afirmar que por un punto externo a una recta hay dos perpendiculares.

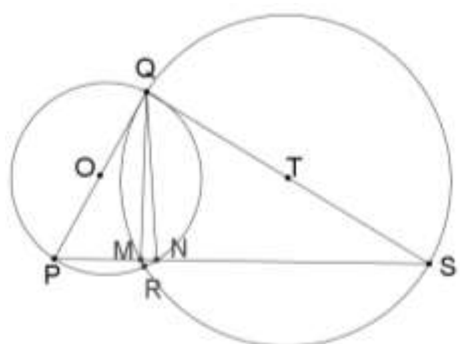


Figura 1. Representación para demostrar que por un punto exterior a una recta pasa más de una perpendicular

Se construyen dos circunferencias que se intersecan en más de un punto, una con centro en O y otra con centro en T. Sean Q y R los puntos de intersección de las dos circunferencias. Ahora se construyen los diámetros $\overline{PQ}$ y $\overline{QS}$ en la circunferencia con centro en O y la circunferencia con centro en T respectivamente. Se prosigue construyendo el segmento PS, de modo que se determinan los puntos M y N como puntos de intersección del segmento y cada una de las circunferencias. Por último, se construyen los segmentos QM y QN (ver Figura 1) que aparentemente resultan ser perpendiculares al segmento PS ya que los ángulos $\angle QMS$ y $\angle QNP$ están inscritos en dos semicírculos.

Al razonar a través de un dibujo, se asume que R no pertenece al segmento $PS,$ pero como R pertenece a las dos circunferencias se tiene que $\angle PRQ$ y $\angle QRS$ también son ángulos rectos. Ahora, teniendo en cuenta que ambos ángulos comparten un lado y suman 180° se concluye que P, R y S deben ser colineales. Esto implica que R debe encontrarse en el segmento PS y en ese sentido el punto de intersección del segmento con las dos circunferencias es único.

Este tipo de falacias ha sido tema de interés desde la época de los griegos. Su estudio se atribuye a Aristóteles, sin embargo, algunos historiadores de la matemática también se afirman que Euclides escribió una obra sobre este tema de la que lastimosamente no se tiene ninguna copia. De modo que se puede creer que existe relación entre las falacias y la necesidad de demostrar.

De acuerdo con expuesto anteriormente no se tiene certeza sobre las razones que llevaron a los Griegos a probar sus afirmaciones. Sin embargo, creemos en la estrecha relación entre la prueba y la necesidad de eliminar la incertidumbre sobre los hechos matemáticos, pues como se vio en la Figura 1 los dibujos pueden llevar a pensar que una afirmación es cierta cuando no lo es. Pero ¿qué pasa cuando la representación se realiza en un medio como GeoGebra en donde la gráfica es construida a partir de la geometría incrustada en el medio?, es decir, si la construcción de la Figura 1 se realiza en GeoGebra el medio digital *responde* al trazado del segmento PS y le permite ver al usuario que el punto R pertenece a dicho segmento, por lo que no habría duda de que en la geometría Euclidiana solo hay una recta perpendicular a PS que pasa por Q, y lo que único que posiblemente habría que probar es que $\overline{QR}$ es perpendicular a $\overline{QS}$.

1.2.2. La prueba en el salón de clases

La prueba, así como otras ideas matemáticas en el campo de la matemática educativa, está permeada por diferentes interrogantes como el porqué de probar, en qué niveles se debe propiciar, cómo validarla, cuál es el fin de la prueba en el aula, entre otros. A esta carga se le suman algunos términos que se vinculan a la prueba, como la justificación, la demostración, los argumentos y la argumentación, los cuales pueden relacionarse o diferir dependiendo de la postura del investigador y del profesor.

Hanna (2020) quien reconoce la dificultad de definir a la prueba, asevera que su papel primordial es *justificar* una determinada proposición. Además, que:

> “Una prueba matemática es una derivación lógica de un enunciado dado a partir de axiomas a través de una cadena explícita de inferencias que obedecen a las reglas de deducción aceptadas. Una " prueba formal " empleará notación formal, sintaxis y reglas de inferencia (“método axiomático”). Por lo tanto, las derivaciones estrictamente formales consistirán en cadenas inequívocas de símbolos y se ajustarán a un procedimiento mecánico que permitirá verificar la exactitud de la prueba” (p. 262).

Sin embargo, de acuerdo con esa autora este tipo de pruebas parecen idealistas, ya que existen investigaciones en donde se presentan pruebas con lenguaje poco formal y solo proporcionan algunos puntos clave de la prueba usando deducciones aceptadas. A este tipo de pruebas se les llama ordinarias y son caracterizadas como argumentos informales o “bosquejos de prueba” (Hanna, 2020; 2014).

Desde un punto de vista matemático la argumentación es el proceso de sacar conclusiones a partir de una cadena de razonamientos cuya validez se determina haciendo uso de la lógica (Umland y Sriraman, 2020). Dentro de la matemática educativa un argumento matemático es una línea de razonamiento que pretende mostrar y/o convencer de que un resultado (que puede ser una declaración general sobre una clase de objeto, solución a un problema) es correcto (Hanna, 2020; Sriraman y Umland, 2020). Bajo esta perspectiva un argumento podría ser una prueba formal o informal, una explicación de cómo se obtuvo una conjetura, el razonamiento sobre un problema o una secuencia de cálculos (*ibid.*).

De acuerdo con Hanna (2020) en la educación matemática durante los últimos años se ha usado el término “argumentación” para referirse a algo que todavía no constituye una prueba y el término “prueba” para referirse a las pruebas matemáticas. En ese sentido, la autora afirma que se ha presentado dos posturas, en la primera algunos autores ven la argumentación como un paso que conduce a la prueba; mientras que otros autores lo ven como un camino que solo distrae de la enseñanza de la prueba.

Existe otro punto de vista en el que probar tienen un significado muy cercano al de argumentar, ya que definen a la prueba como un argumento matemático a favor o en contra de una afirmación (sólida y accesible), el cual se basa en hechos y significados socialmente establecidos y formas de razonamiento válidos dentro de la comunidad en la que se presenta (Stylianides, 2007; Melhuish, Thanheiser, y Guyot[2], 2018; Stylianides y Stylianides, 2017). Además, a partir de esta perspectiva se resalta la diferencia entre la prueba como producto y probar como la actividad que se realiza para obtener dicho producto, de modo que un estudiante puede participar en el acto de probar (durante la clase) aun cuando no ofrezca una prueba.

Otra de las características de la prueba es ofrecida por Hanna (1995) quien distingue entre las pruebas que prueban y las que explican. La primera se refiere al conocimiento del qué y las segundas al por qué, todo en relación con el contexto del aula y la experiencia de los estudiantes.

En general, existen muchas posturas respecto a la prueba, pero para efectos del presente trabajo se tomará la definición presentada por Moreno-Armella (2018) en donde se ve a la prueba como un *argumento que aumenta el grado de coherencia de un fragmento de conocimiento* previo que posea un estudiante. Sin embargo, también se reconoce a la "prueba formal" como aquella en las que las ideas que la componen tienen fundamentos teóricos y se entrelazan mediante reglas de deducción aceptadas.

Entrando a la situación actual de la prueba dentro de la investigación en matemática educativa y en particular en el campo de la geometría, hablamos de tres grandes categorías interconectadas. La primera en donde se pone especial énfasis en el docente, de modo que a través de su visión los investigadores se pueden dar una idea del papel de la prueba en el aula. En la segunda categoría el énfasis se encuentra en las pruebas que presentan los estudiantes, las cuales pueden ayudar a determinar algunos errores que cometen, sus concepciones sobre la prueba o determinar si una propuesta es exitosa. En la tercera y última categoría se trata el tema de cómo las tecnologías

[2] Melhuish, Thanheiser, y Guyot usan la palabra probar como equivalente a justificar; postura que no es mencionada por los hermanos Stylianides. Por tanto, se usa la palabra que es común para todos los autores.

digitales no solo han cambiado la forma en la que se determina la veracidad de un hecho matemático, sino que también han cambiado las miradas de lo que se considera como válido al momento de realizar una prueba.

Prueba y docentes

Un gran número de investigaciones se han enfocado en desentrañar la estrecha relación entre el profesor y el acercamiento a la prueba por parte de los estudiantes desde diferentes puntos de vista, como lo son el *conocimiento del maestro*, la *selección e implementación de tarea*s y desde su rol como *autoridad en el aula de clases* (Steele y Rogers, 2012).

El conocimiento del maestro no se define solamente en relación con su saber matemático, sino que también se refiere al conocimiento en términos del rol que debe desempeñar la prueba en el aula, la importancia de dicho conocimiento, sus consideraciones personales sobre lo que conforma una prueba, entre otros. Sin embargo, el conocimiento del profesor es un factor que, según algunos investigadores, había sido descuidado antes del año 2013, no solo en términos de la prueba, sino de la geometría en general (Steele, 2013).

El saber hacer y el saber para la enseñanza son dos puntos que han sido abordados dentro de la educación matemática en las últimas décadas. Ball, Hill y Bass (2005) propusieron enfoques sobre el conocimiento matemático para la enseñanza (MKT, Mathematical Knowledge for Teaching) y el conocimiento del contenido pedagógico (PCK, Pedagogical Content Knowledge). Sin embargo, estas ideas parecen no haber impactado fuertemente en *la prueba* puesto que el conocimiento de los profesores es limitado, ya que el acercamiento que tienen a ésta durante su formación se restringe a cursos de matemáticas en los que se les solicita realizar pruebas o demostraciones (Montoya-Delgadillo, 2014; Dickerson, y Doerr, 2014) dejando de lado otros componentes que hacen parte del conocimiento matemático para la enseñanza de dicho concepto, como por ejemplo las diferentes posturas de lo que es una prueba, la identificación de lo que no es una prueba, su rol en el aula de matemáticas, entre otras consideraciones (Steele y Rogers, 2012).

Bleiler, Thompson, y Krajčevski (2014) y Lesseig, Hine, Na, y Boardman (2019) han estudiado la capacitación que se le brinda a profesores en ejercicio o en formación con respecto a la prueba.

Ellos encontraron algunas falencias en su formación y por lo tanto realizaron sugerencias al respecto:

- Incluir en los programas de formación cursos en donde se validen argumentos en diferentes sistemas de representación (simbólico, verbal, pictórico, etc) para volver menos restrictivas las concepciones de la prueba (Bleiler et al., 2014).
- Permitir que los futuros profesores de matemática tengan experiencias en las que diseñen actividades para el desarrollo de pruebas en sus clases (Lesseig et al., 2019).
- Aumentar la competencia de los futuros profesores de secundaria en relación con la construcción y evaluación de pruebas (Lesseig et al., 2019).

Otro de los aspectos para tener en cuenta sobre el conocimiento del docente es su concepción sobre la enseñanza de la prueba. En efecto, aunque es un proceso que se debe promover entre los estudiantes (NCTM, 2000), los profesores no tienen una única visión de los propósitos para incluir la prueba en sus clases. Steele y Rogers (2012) en su investigación sobre este asunto logran identificar los siguientes propósitos:

- Verificar la verdad: se refiere a comprobar o confirmar que un conocimiento o idea es verdadero.
- Explicar por qué: se refiere a dar razones de por qué un determinado conocimiento o idea es verdadera.
- Comunicar conocimiento matemático: se refiere a ayudar a otros a comprender una idea matemática, extendiendo el conocimiento del otro.
- Creación de conocimiento matemático nuevo: se refiere a desarrollar nuevas ideas matemáticas confirmando conjeturas.
- Dominio de sistematización: se refiere a organizar una serie de resultados en relación con una serie de axiomas y resultados anteriores.

A pesar de que existen diferentes roles que puede desempeñar la prueba en el aula de matemáticas, no todos son conocidos o potenciados por igual. Por ejemplo, Steele y Rogers (2012) es su investigación realizada con dos profesores encontraron que los roles privilegiados de la prueba son su poder explicativo y comunicativo; mientras que Dickerson y Doerr (2014) en su investigación con 17 maestros de secundaria encontraron que los maestros valoran la prueba porque permite desarrollar comprensión matemática, una visión generalizada de los hechos y pensamiento crítico en sus estudiantes. Ahora bien, así como algunos profesores tienen posturas definidas sobre otros procesos que desarrollan sus estudiantes al incluir la prueba en sus aulas, existen otros casos como el estudio de Furinghetti y Morselli (2011), quienes encontraron un docente italiano (de los 10 pertenecientes a su estudio) que no incluye la prueba en su aula porque es algo que se debe hacer solo en la geometría Euclidiana y dicha asignatura no hace parte del currículo oficial para su tipo de escuela.

Cada profesor tiene sus propias concepciones del porqué se debe o no se debe practicar la prueba en el aula y el rol que desempeña la misma. Por ello, dadas las concepciones de los profesores, se podría tener una idea clara de lo que están aprendiendo los estudiantes, sin embargo, esto último no es completamente cierto, ya que los profesores pueden manifestar una determinada concepción como la más importante en su aula y seleccionar actividades en las que se privilegia un rol completamente distinto (Steele y Rogers, 2012). En relación con este asunto, Furinghetti y Morselli (2011) identificaron dos tendencias en la enseñanza de la prueba, que son: “enseñar teoremas” y “enseñar enseñando”. En la primera de las tendencias el profesor presenta los enunciados matemáticos a los alumnos junto con la prueba con el fin de convencer y sistematizar (que son otros de los roles de la prueba), mientras que en la segunda los estudiantes participan en la construcción de pruebas e incluso son desafiados a producir sus propias pruebas con declaraciones simples a fin de mostrar que la prueba es un medio para la comprensión matemática. De modo que en la primera se privilegia a la prueba como un producto, mientras que en la segunda como un proceso.

La estructura de una prueba es otro de los aspectos en donde se ve presente de manera clara el papel del profesor. La formalidad o la rigurosidad o el nivel de estructuración que debe contener una determinada tarea queda establecido por la autoridad que tiene el docente y, en ese sentido, uno de los conceptos que se ve permeado por esto es la prueba. Ahora bien, bajo la perspectiva de la educación no existe una única concepción de la prueba. Por ejemplo, Bleiler, Thompson y Krajčevski (2014) encontraron que los futuros profesores tienen la creencia de que la prueba debe estructurarse en un modo simbólico formal de argumentación. En esta misma línea de estructura, Lesseig et al., (2019) realizaron un estudio con 34 futuros docentes de Estados Unidos, Australia y Corea encontrando que sin importar su procedencia la mayoría considera que la prueba se basa en declaraciones aceptadas que siguen una estructura lógica y, por lo tanto, eliminan cualquier duda sobre la veracidad de una declaración.

En general, estas investigaciones sugieren que los futuros profesores encuentran necesaria la estructura formal de la prueba, pero ¿sigue siendo así cuando ejercen como docentes? Pues bien, en ese sentido algunas investigaciones se han centrado en comparar las concepciones de los docentes con muchos años de experiencia contra aquellos con poca experiencia (Dickerson y Doerr, 2014), encontrando que los profesores con más de 20 años de experiencia son más propensos a estar satisfechos con argumentos menos formales porque lo que valoran es la comprensión mostrada por parte de los alumnos, mientras que los profesores con menos de diez años de experiencia valoran más las pruebas escritas con argumentos más formales.

En general, los profesores no poseen una única visión respecto de la prueba, lo cual hace que sea un campo fértil con relación a sus concepciones, las pruebas que producen y en general su papel como promotor en la producción de pruebas en el aula de geometría. Pero, la investigación con relación a los docentes es solo una cara del problema, por lo que también es necesario observar el actuar de los estudiantes.

Estudiantes y prueba

Los estudiantes son otro de los actores principales en el desarrollo de la prueba. Aunque el docente se encuentre muy capacitado y busque diferentes actividades que lleven a sus estudiantes a la comprensión de la prueba desde diferentes enfoques, lo que realmente sucede en el entendimiento de cada estudiante es totalmente diferente.

Una de las concepciones que se encuentra presente sobre la prueba en el aula, desde el punto de vista de los estudiantes como desde el punto de vista del profesor, es el rol que se le asigna con el propósito de convencer al otro. Cuando el rol de convencer va del estudiante al profesor, esta actividad se ve afectada por el nivel de formalidad o exigencia que tiene el profesor. Sin embargo, el rol de convencer al estudiante parece innecesario, ya que muchas veces los estudiantes aceptan que un hecho es cierto porque es el maestro quien se lo presenta (Abdelfatah, 2011).

Uno de los problemas vinculados a la prueba y que manifiestan algunos estudiantes, es la confusión que existe entre las implicaciones lógicas del antecedente —hipótesis— y el consecuente —conclusión— (Monroy y Astudillo, 2009) lo que conlleva un mal uso de un argumento dentro de una prueba. En ese mismo sentido, la poca coherencia de los estudiantes al relacionar el antecedente y el consecuente en un argumento los ha llevado a usar garantías que no se corresponden con los datos y a formular argumentos incompletos (Lara y Samper, 2015).

Los problemas que tienen los estudiantes en relación con la prueba no solo están asociados a las implicaciones lógicas de los enunciados, sino también a otros aspectos como la visualización. Ramírez-Uclés, Flores Martínez, y Ramírez-Uclés, (2018) en su investigación con estudiantes con talento matemático encontraron los siguientes problemas: establecer falsas analogías entre el plano y el espacio; no contemplar todos los casos posibles; generalizar a partir de solo un caso (Stylianides y Stylianides, 2017); uso incorrecto de técnicas de argumentación, de contenidos y procedimientos matemáticos. Los autores sugieren que el enriquecimiento de técnicas de argumentación, tanto generales como específicas de la visualización (búsqueda de todos los casos posibles, diferenciación entre un caso particular y general, distinción de implicaciones y condiciones necesarias y suficientes, uso de conjeturas y contraejemplos, entre otros) puede hacer progresar la formación matemática de los alumnos. Además, resaltan la visualización como un componente clave del razonamiento, la resolución de problemas y las demostraciones.

Pero no todo se ha tornado en problemas por parte de los estudiantes. También se reportan algunos aciertos en el aprendizaje de la prueba, como los siguientes:

- Abdelfatah (2011) propone una situación a 21 estudiantes en una universidad de Egipto en donde se les solicita hallar la ubicación de un tanque de agua de modo que este se encuentre a la misma distancia de tres poblados y posteriormente determinar la ubicación de un cuarto poblado que quede a la misma distancia del tanque de agua como los otros tres. Dicha situación fue explorada usando geometría dinámica y fue positiva en la medida que los estudiantes lograron comprender y formular conjeturas geométricas; colaboraron y compartieron ideas; se involucraron en la experimentación fácilmente; lograron obtener ideas claves de la prueba y la finalizaron paso a paso.

- Buchbinder y Zaslavsky (2011) proponen una actividad que llaman "¿es coincidencia?", en donde presentan una serie de enunciados (acompañados cada uno de una gráfica) que podrían estar asociados a hechos matemáticos, y se les pregunta a los sujetos (un grupo de maestros y uno de estudiantes) si es una coincidencia que el fenómeno ocurra. Los problemas presentados a los sujetos tenían la característica de que, en algunos casos, el fenómeno era una regla general mientras que en otros era una conclusión proveniente de un caso particular (el presentado en cada gráfica). Los resultados muestran que la incertidumbre es una pieza clave que actúa como motivadora para generar la necesidad de probar.
- Lara y Samper (2015) realizan un estudio de caso en donde analizan los argumentos que presentan un grupo estudiantes (entre 14 y 16 años) cuando se les plantea la tarea de ubicar unas plantas de tal manera que cada una se encuentre a la misma distancia de dos canales de riego (los cuales forman un ángulo). Los autores resaltan logros de los estudiantes respecto al uso correcto de la gráfica para extraer y reportar información que se aceptó como verdadera, además de la formulación de argumentos de forma grupal e individual.

La prueba y la tecnología digital

Con la presencia de las tecnologías digitales ha habido un cambio en la educación no solo matemática sino a nivel general. Un ejemplo es la forma de acceder a la información, ya que antes un estudiante debía hacer una búsqueda en diversas fuentes como libros o personas especializadas (como el profesor), ahora basta con un clic para llegar a obtener casi siempre la información deseada. Ahora bien, este tipo de situaciones ha hecho que en educación matemática se evalúe cuál es el saber que se debe llevar al aula, cuál es el papel del profesor y cómo se ve afectada la cognición del estudiante cuando su actividad es mediada por una tecnología digital.

Con la presencia de las tecnologías digitales han aparecido diferentes mediadores digitales, como los entornos de geometría dinámica, los cuales permean distintos aspectos dentro del aula de geometría. Estos mediadores no solamente han permitido hacer de un modo más eficiente lo que ya se hacía en el papel, sino que también permiten nuevas acciones que tienen un efecto positivo en el aprendizaje del estudiante. Un ejemplo de esto es la investigación de Soldano y Arzarello (2016), quienes realizaron un estudio con estudiantes de decimo grado en donde su objetivo primordial era reflexionar sobre la importancia del pensamiento estratégico del juego en el aula de matemáticas. Para el estudio diseñaron cinco actividades de juego basados en teoremas geométricos en donde dos estudiantes debían competir uno contra el otro en un entorno de geometría dinámica multi táctil. Los investigadores lograron distinguir tres funciones de la tecnología en el proceso de argumentación, un primer papel heurístico, uno explicativo y un tercero de comprobación. Además, resaltan el papel desempeñado por la tecnología para apoyar los movimientos de los estudiantes en el juego y desencadenar su pensamiento estratégico. Por último, destacan la relevancia del juego para impulsar a los estudiantes hacia una transición por una postura más teórica, sin embargo, también mencionan que sus hallazgos necesitan una investigación más profunda para analizar cómo los juegos de matemáticas no solo pueden convencer a los estudiantes de la verdad de un teorema, sino que también pueden ayudarlos a elaborar una estructura lógica del proceso de prueba.

Cuando se le solicita a un estudiante realizar una prueba matemática, hemos identificado dos formas de hacerlo: la primera, dándoles el hecho matemático que deberán demostrar que es cierto para cualquier caso; y la segunda en la que se les acerca al hecho para que ellos sean quienes lo conjeturen y posteriormente deban realizar una prueba. En el primer caso, cuando se les proporciona el hecho a los estudiantes es común que no vean la necesidad de probar, porque centran su convencimiento en que el conocimiento matemático ya ha sido demostrado (Abdelfatah, 2011; Jahnke y Wamback, 2013). Para el segundo de los casos, y con el creciente desarrollo tecnológico, es usual que se haga uso de entornos de geometría dinámica para que los estudiantes analicen la figura a partir del movimiento y logren generalizar algún hecho, sin embargo, para los estudiantes es un poco difícil o no es tan inmediato el generalizar situaciones que estudian con el uso de geometría dinámica (Lara y Samper, 2015), y cuando lo logran, quedan tan convencidos que no siempre ven la necesidad de dar una prueba deductiva (Buchbinder y Zaslavsky, 2011).

Algunos autores resaltan el papel de la geometría dinámica en la producción de conjeturas (Rubilar y Badillo, 2015; Lara y Samper. 2015; Leung, 2008; Soldano y Arzarello 2016), ya que el entorno dinámico le permite al estudiante explorar las propiedades invariantes de los objetos y generalizar a partir de la variación, las cuales pueden ser posteriormente comprobadas. Otros autores (Arzarello, Olivero., Paola, y Robutti, 2002) argumentan sobre la capacidad del medio para producir pruebas. Por ejemplo. Arzarello et al., proponen la *prueba de arrastre* como una modalidad de prueba en donde el sujeto arrastra un punto para verificar que una figura mantiene ciertas propiedades, sin embargo, dicha verificación se puede considerar una exploración o una prueba en la medida que arrastra para explorar y producir conjeturas o arrastra para probar que una conjetura es cierta, es decir, dependiendo de la intención del estudiante.

El uso de medios digitales en geometría ha permitido replantear algunas cuestiones, como por ejemplo su papel en la suposición de la veracidad de un hecho y la prueba posterior. La veracidad del hecho que se conjeturaba era determinada por la prueba, ya que esta era una de las formas de convencer a los miembros de la comunidad (estudiantes y profesor en este caso) de que el hecho conjeturado era correcto. Sin embargo, con la aparición de los entornos de geometría dinámica en donde los objetos construidos no son estáticos y responden a una geometría incrustada en el medio digital se ha generado una tensión sobre lo que constituye una prueba.

1.3. Determinación del estudio

Los diseños curriculares presentan la pertinencia de incluir a la prueba como uno de los principios que debe integrarse para que las personas tengan una educación matemática de calidad. En particular, el Nacional Council of Teachers of Mathematics (NCTM) propone en su documento de *Principios y estándares para la educación matemática* (2000) al razonamiento y la demostración como uno de los objetivos de la educación matemática. En particular en dicho documento se propone que "al final de la escuela secundaria los alumnos deberán estar capacitados para comprender y elaborar demostraciones matemáticas, es decir, argumentos que consisten en deducciones o conclusiones lógicamente rigurosas a partir de hipótesis" (p. 59). De acuerdo con esto, la argumentación y la demostración son temas que merecen atención dentro de la educación matemática.

Ahora bien, existe una tensión respecto a la naturaleza empírica y teórica del conocimiento matemático (Arzarello, Bartolini Bussi, Leung, Mariotti, 2012), la cual se hace tangible cuando se analiza el papel de la tecnología digital en lo que podría constituir una prueba. Por ejemplo, al arrastrar un punto de una figura (que se encuentra en el medio digital), un estudiante podría proponer una conjetura al percibir un invariante, sin embargo, el arrastre también le permitiría probar que dicha conjetura es cierta al mostrar el invariante percibido para convencer a los demás (profesor y compañeros) de que el hecho conjeturado es cierto. Pero al probar la veracidad del hecho mediante el arrastre no es claro el papel del conocimiento teórico del estudiante[3], por lo que se considera un elemento para tener en cuenta en la caracterización de las pruebas en un medio digital.

Por otra parte, en la revisión de la literatura se encontraron dos tipos de actividades en las que se buscaba propiciar el desarrollo de pruebas. En las primeras, como es el caso de las investigaciones de Buchbinder y Zaslavsky (2011) y Cervantes-Barraza, Cabañas-Sánchez y Reid (2019), se les solicitaba a los estudiantes que intentaran probar la veracidad o falsedad de una afirmación dada. Mientras, que, en el segundo de los casos, se les proponía una situación en donde el hecho a probar debía ser conjeturado previamente (como es el caso de Lara y Samper, 2015; Molina, Font y Pino-Fan, 2019), de modo que el conocimiento teórico del estudiante parece estar vinculado solo al desarrollo de la prueba y no a la actividad de conjeturar. Un tipo de actividad que se encuentra estrechamente ligado al mundo teórico de la geometría euclidiana son las *construcciones geométricas*, las cuales han retomado su valor con la presencia de la geometría dinámica (Arzarello, Bartolini Bussi, Leung, Mariotti, y Stevenson, 2012), ya que cuando se hace uso de esta se puede afirmar que la construcción misma *construye una prueba*, la cual es válida si y solo sí la representación en el medio mantiene sus propiedades bajo la prueba del arrastre (Arzarello et al, 2012). Pero

i) ¿qué pasa si la construcción es en papel?
ii) ¿la única prueba que ofrecerá el estudiante que trabaja con geometría dinámica es la del arrastre?
iii) ¿siempre que el estudiante realiza una construcción en el medio digital, proyecta sus conocimientos de geometría euclidiana sobre la pantalla?

Hay un potencial en las pruebas vinculadas a actividades de construcción geométrica, porque en la escuela dichas construcciones se presentan como recetas y usualmente no se justifican. Además, dependiendo de la riqueza de los argumentos que se produzcan pueden incluirse como partes fundamentales en el diseño de intervenciones prometedoras que permeen en el aula desde el punto

[3] Se entiende por conocimiento teórico al conjunto de teoremas, axiomas, definiciones y procedimientos deductivos que el estudiante emplea para validar una nueva proposición.

de vista de la prueba, ya que algunos investigadores ya han mencionado que este es un aspecto que aún merece trabajo por parte de la investigación (Stylianides et al., 2017).

De acuerdo con lo anterior, se puede decir que las preguntas sobre los que intenta arrojar luz este trabajo son los siguientes:

¿Qué características tienen las pruebas ofrecidas por un grupo de profesores para garantizar que una construcción realizada en el papel y/o en GeoGebra cumple con ciertas propiedades?

¿Qué papel desempeña el conocimiento teórico de los profesores en las construcciones que realizan en el papel y/o GeoGebra, y en la prueba que les permite garantizar que sus construcciones son correctas?

2. Bases teóricas y conceptuales

En este capítulo se presentan los elementos teóricos que fueron escogidos como fuentes para el desarrollo del trabajo y a partir de los cuales se pueden evidenciar algunos elementos para el análisis. De modo que, primero se presenta una postura respecto al aprendizaje para después ir tratando con algunos temas de importancia para la investigación.

2.1. Los entes matemáticos desde una perspectiva didáctica

"La actividad matemática ha sido instrumentalmente mediada desde sus inicios" (Richard, Venant y Gagnon, 2019, p.143). Para la geometría griega el uso de instrumentos como la regla (sin graduación) y el compás para la construcción de figuras fueron cruciales para el conocimiento geométrico desarrollado en dicha época. Los famosos problemas de la trisección del ángulo, cuadratura del círculo y duplicación del cubo, imposibles todos de ser resueltos con regla y compás, mostraron los límites de dichos instrumentos. Aunque no abordaremos su estudio en este trabajo, es pertinente señalarlos pues muestran que las expectativas frecuentes sobre el poder de las tecnologías, hoy en día las digitales, deben ser tomadas con prudencia.

Las tecnologías no son los artefactos materiales o simbólicos que exhiben su exterioridad sino las maneras de pensar que resultan de la apropiación y transformación de los mediadores cuando finalmente se han incorporado a nuestros recursos cognitivos (Moreno-Armella, 2003). Un microscopio electrónico por sí mismo, en manos de un neófito en el campo de las ciencias biológicas, es de poca utilidad para el estudio de estructuras celulares, por ejemplo.

Ahora bien, la sofisticación de algunos de los instrumentos ha permitido que se posicionen como mediadores del conocimiento dentro del aula de clase logrando que los estudiantes tengan un acercamiento a los entes matemáticos. Por ejemplo, el compás es un instrumento mediante el que se puede acercar a los estudiantes a una representación de circunferencia.

Cuando los estudiantes empiezan a tener un acercamiento a entes matemáticos, éstos ya están presentes en la comunidad escolar a través de diferentes representaciones: gráfica, algebraica y tabular son las más frecuentes. Éstas tienen significados y modos de operación establecidos. Las interacciones sociales, en especial en el salón de clases, son primordiales para acercar a los estudiantes a los entes matemáticos, ya que gracias a ellas logran darles un significado *compartido* a las ideas matemáticas que se enseñan.

En general, los entes matemáticos son conceptuales y su única vía de acceso está dada por sus representaciones simbólicas. Por ejemplo, para acercar a los estudiantes al concepto de función se usan frecuentemente representaciones, como la gráfica cartesiana, las tablas de valores, la forma algebraica de la función.

2.1.1. Las representaciones

Las representaciones, como ya explicamos brevemente, son la única manera de tener acceso a los entes matemáticos. Cada registro de representación[4] arroja una mirada distinta del ente matemático que se va revelando a los ojos del estudiante. Los sistemas de la geometría analítica, por ejemplo, ofrecen una mirada distinta pero complementaria al triángulo, a la circunferencia y demás nociones que se estudian primero en los cursos de geometría euclidiana –con menos frecuencia de la deseable.

La aparición de nuevos registros de representación ha permitido complementar la mirada de los entes matemáticos. La definición de circunferencia como ente geométrico que se encuentra en el plano y cuyos puntos equidistan del centro, lleva a fijar la mirada en la equidistancia y la congruencia de los radios. La representación algebraica, por otro lado, cuya forma general es: $x^2 + y^2 = r^2$ donde r es un número real, permite fijar la atención no solo en la equidistancia del centro a los puntos de la circunferencia, sino que también en otros aspectos como aquellos que permiten ver a la circunferencia como un caso particular de la elipse.

[4] Un registro de representación se refiere a una categoría en donde entran ciertas representaciones semióticas que tienen en común alguno aspecto que deja ver una característica particular del objeto representado. Algunos ejemplos de registros de representación son lenguaje, las gráficas, las figuras, entre otros. (Duval, 2017).

En general, lo que se busca con una nueva representación es extender las posibilidades operatorias de los entes matemáticos como vía de su exploración y eventual identificación de las distintas representaciones que se hayan desarrollado como representaciones del mismo ente matemático.

2.2. Las tecnologías: desde un punto de vista general hasta la especificidad de lo digital.

Las matemáticas se han desarrollado y comunicado gracias a la externalización simbólica haciendo uso de sistemas de representación y medios que permitieron incrustar dichas representaciones (Moreno-Armella, 2010); por ejemplo, el Papiro del Rhind donde estaban grabados algunos problemas matemáticos. Al reflexionar sobre los distintos medios utilizados para la externalización de representaciones, observamos que antes de la época digital la mayoría eran *medios de representación estáticos*, en donde las representaciones no se pueden alterar después de producidas; por ejemplo, al dibujar una circunferencia sobre el papel, con el compás, el radio no puede ser modificado, de manera que, si fuese necesario cambiarla, la única alternativa sería dibujar otra circunferencia con un radio diferente.

La presencia de las tecnologías digitales en el aula de matemáticas ha abierto una puerta en torno a la capacidad mediadora de las representaciones y los símbolos, mirando a través de ellos, y transformando los recursos de la cognición matemática (Moreno Armella y Sriraman, 2010).

No todas las representaciones en un medio digital son dinámicas en el sentido que damos a ese término. Asociada a esta idea, algunas investigaciones (Moreno Armella, Hegedus y Kaput, 2008, Moreno Armella y Hegedus, 2013) se han interesado en la transición evolutiva de inscripciones estáticas a dinámicas desde la perspectiva de las tecnologías digitales. De acuerdo con estas investigaciones, dicha transición se puede modelar a través de cinco etapas de desarrollo que serán descritas a continuación:

Etapa 1. Estática Inerte: Esta etapa se caracteriza porque las representaciones son estáticas, de modo que no existe forma de separar la representación del medio en el que se presenta. Es decir, la representación queda incrustada en el medio material. Algunos ejemplos de esta etapa son la escritura sobre papel y las marcas en una tabla, de modo que el usuario interactúa con la representación sin poder modificarla. En ese sentido, se considera *inerte*.

Etapa 2. Estática Cinestésica: Esta etapa es muy similar a la anterior, pero posee la característica de que las inscripciones pueden ser borradas y en ese sentido refinadas. Dicha característica de "*borrabilidad"* está dada por la evolución de los medios de inscripción. Un ejemplo de ello es un archivo en Word en donde se pueden escribir diferentes ideas que pueden ser borradas y refinar.

Etapa 3. Estática Computacional: Aquí las inscripciones son artefactos de una respuesta computacional a la acción intencionada de un humano. Un ejemplo de ello son las calculadoras, que cuando digitamos una operación, su respuesta es el resultado con el que no se puede interactuar de ninguna manera.

Etapa 4. Dinámica discreta: En esta etapa la interacción con el usuario es fluida y las anotaciones se vuelven más maleables. En este caso, la respuesta cambia de forma discreta con la interacción. Por ejemplo, cuando se introducen datos a una hoja de cálculo y se le pide "trazar una gráfica"; la respuesta es la gráfica con que cual se puede interactuar al cambiar un valor de la lista, en cuyo caso la respuesta es una nueva gráfica. Sin embargo, no se ve una correlación inmediata entre las dos representaciones.

Etapa 5. Dinámica continua: Esta etapa es similar a la anterior, con la diferencia de que el medio digital permite al usuario modificar la representación a través de acciones continuas de un ratón o de movimientos de los dedos sobre un *touchpad*. Por ejemplo, cuando se traza una recta sobre la pantalla se puede rotar la recta arrastrando uno de los puntos que la determinan. En este caso los movimientos continuos del punto generan una respuesta inmediata del medio digital.

2.3. Las herramientas

Las herramientas materiales son objetos físicos, en las que están incrustadas tanto una intencionalidad como un diseño ideal. Las herramientas vienen *cargadas* con un uso predeterminado, por lo tanto, si se cambia la actividad se cambia el propósito y esto lleva eventualmente a una redefinición de la herramienta como tal (Moreno Armella y Hegedus, 2009).

Por ejemplo, la cubierta de un libro de pasta dura puede usarse como una regla para trazar rectas sobre el papel.

Un objeto es considerado como una herramienta cuando ejerce su papel como mediador de una acción (Moreno- Armella y Hegedus, 2009). Un cuchillo, por ejemplo, tiene asociadas una amplia diversidad de acciones con propósito. Las herramientas no son únicamente materiales. En matemáticas, por ejemplo, el teorema fundamental del cálculo es una herramienta cuando es usado para hallar una antiderivada; el teorema de Pitágoras es una herramienta cuando es usado para hallar la hipotenusa conociendo los catetos; la derivada es una herramienta cuando se usa para graficar una función o calcular sus puntos críticos; la mediatriz es una herramienta que permite construir una cónica.

De acuerdo con lo anterior, las herramientas no solamente son mediadoras de acciones físicas, sino también de acciones cognitivas, lo que conlleva a hacer una primera distinción entre ellas: pueden ser materiales o simbólicas. Moreno Armella y Sriraman (2010) definen estos tipos de herramienta de la siguiente manera:

- Herramienta material: Es una herramienta laboral que afecta el medio *material* (natural o construido), como por ejemplo el martillo.
- Herramienta simbólica: En una herramienta que afecta el conocimiento y la cognición del sujeto, como por ejemplo el sistema de numeración posicional.

Se puede formular una clasificación de las herramientas de acuerdo con su impacto material o cognitivo:

1. Realizaciones físicas de la herramienta.
2. La versión inmaterial de una herramienta que se van desarrollando gracias al empleo sistemático y reflexivo de una herramienta física.
3. Las herramientas que crean nuevas visiones del mundo.

Lo que en realidad define el nivel de una herramienta en alguna de estas categorías es la acción mediada que se hace posible.

Existen diversos factores que se relacionan para que, al hacer uso de un objeto, éste se consolide como una herramienta (nace la herramienta). Las herramientas inician su vida en un espacio de tres dimensiones: material o simbólico; algorítmico e intencional (L. Moreno-Armella, 2020, comunicación personal, 18 de abril de 2020). La primera dimensión se refiere al objeto en sí mismo, cuya sustancia puede ser material o simbólica; la segunda se refiere al algoritmo que se debe emplear para hacer uso del objeto; y la tercera de las dimensiones se refiere al resultado que se busca obtener, es decir, la intencionalidad. Por ejemplo, si se piensa en un martillo, como una herramienta, esta tiene una dimensión material, la cual tiene incrustado un algoritmo de *cómo* usarlo *para* un determinado fin, como lo es fijar un clavo en una pared. De modo que las tres dimensiones responden al ¿*qué usar*? ¿*cómo usarlo*? ¿*para qué usarlo*? preguntas completamente relacionadas y que permiten definir una herramienta como tal.

En general, toda actividad humana está *mediada por herramientas* (Moreno Armella y Sriraman, 2010), las cuales no solo van cambiado la forma de hacer algunas tareas (de un modo más eficiente), sino que abren el espacio de intervención de esa herramienta llegándose hasta la redefinición misma de la herramienta inicial.

2.4. Co-acción

GeoGebra es un medio semiótico de representación que permite tener una visión más amplia y profunda de los entes matemáticos a través de sus representaciones. Para el caso de la geometría, permite el estudio y exploración de invariantes correspondientes a los entes geométricos. Algunos sistemas de geometría dinámica incorporan características como:

- Navegación: Capacidad de moverse por la pantalla, mover figuras matemáticas, desplazarse y hacer zoom coordinando sistemas, desplazarse por mundos simulados.
- Interacción: Hacer clic y arrastrar o manipular objetos.
- Anotación: Marcas literales o numerales que pueden ser agregados (y ser adheridos) a partes de figuras y diagramas
- Construcción: figuras o diagramas matemáticos que se puede construir por partes, a través de herramientas específicas,

- Simulación: Permite que objetos que son partes asociadas a figuras o diagramas, sean animados, o modelar datos y observar una simulación de estos.
- Manipulación: Las figuras o diagramas construidos pueden ser cambiados al interactuar con características particulares de la construcción, al tiempo que conservan las reglas matemáticas dentro de la construcción. (Hegedus y Moreno Armella, 2010, p. 26)

Dichas características hacen parte de un ambiente (o entorno) digital en donde la actividad de un explorador (estudiante, por ejemplo) se despliega como una *interacción* enriquecedora con las representaciones dinámicas y durante esa actividad el medio digital y cultural (el salón de clases, por ejemplo) transforman activamente el conocimiento original del explorador (ver Figura 2) al hacer explícitas algunas características que aparecen ocultas inicialmente para el explorador (Moreno Armella y Hegedus, 2014).

Una de las premisas de la co-acción afirma que “el uso de herramientas implica una adaptación reflexiva, en la cual todos los componentes -humanos, herramienta, actividad y contexto- se transforman continuamente” (Moreno Armella y Brady, 2018, p. 343).

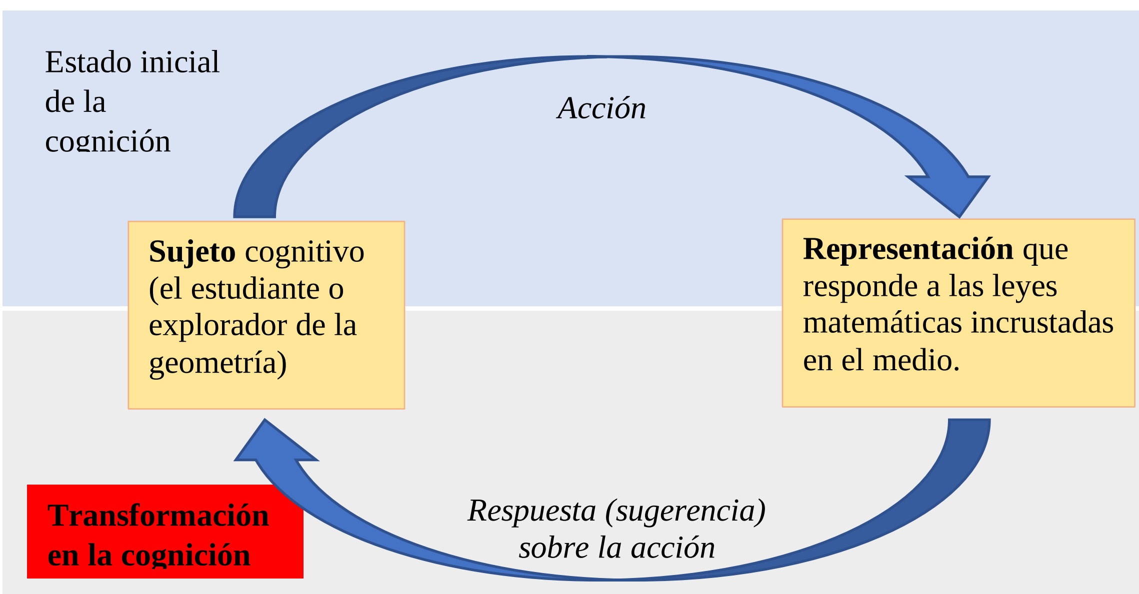


Figura 2. Diagrama del proceso de co-acción

De acuerdo con Hegedus y Moreno Armella (2010), la existencia de puntos libres (*Hot-spots*) en medios como GeoGebra permite que se genere una co-acción entre el usuario y la representación en el medio digital, debido a que el punto libre no es controlado por el usuario y permite que la representación brinde información (no necesariamente es esperada por el usuario) que cambia sus acciones sobre la representación y eventualmente su *conocimiento* matemático. Por ejemplo, sobre una gráfica de una función se ubica un Hot spot que controla la recta tangente a la curva (ver Figura 3), el usuario puede ver cómo cambia la representación algebraica en la medida en que mueve el punto libre. De modo que las *respuestas* del medio dependen de la *acción* del usuario sobre el punto, permitiendo que interprete las respuestas del medio y, por ejemplo, pueda enriquecer el concepto de "mínimo" en una función al relacionar la representación algebraica de la tangente con su representación gráfica.

Figura 3. Punto libre o Hot spots en una construcción

En general, el medio digital permite una interacción con las representaciones de una manera diferente a como se hace en el papel, de modo que la acción del sujeto junto con las respuestas del medio, permiten el enriquecimiento de su conocimiento. Además, el medio digital también permite crear representaciones gráficas (acordes con las reglas geométricas) que resultan ser independientes de su creador y en ese sentido permiten ofrecer pruebas mediante el arrastre de los puntos al verificar, explicar y comprobar que la configuración cumple con ciertas características.

2.5. Los argumentos

En el primer capítulo se mencionaron las diferentes posturas que se tienen respecto a la prueba, y la complejidad de dicho término, afirmando que la postura que se va a tomar para el desarrollo de este trabajo es aquella en donde se ve a la prueba *como un argumento*[5] *que aumenta el grado de*

[5] Puede ser un único argumento o la encadenación lógica de diferentes argumentos que hacer tangible la veracidad de un cierto resultado

coherencia de un fragmento de conocimiento previo que posea un estudiante (Moreno-Armella, 2018). Por lo tanto, resulta relevante ver los argumentos en términos de la co-acción del sujeto con la representación dinámica del medio, ya que es un proceso en el cual se transforma un estado inicial de conocimientos.

Ahora bien, se definen los argumentos matemáticos desde la perspectiva de Sriraman y Umland (2020) y Hanna (2020), como una línea de razonamiento que pretende mostrar y/o convencer de que un resultado (una declaración general sobre un objeto, una solución a un problema, un cálculo) es correcto. En ese sentido, se distinguen dos líneas de razonamiento importantes, la deducción y la inducción, las cuales definen dos tipos de argumentos.

De acuerdo con Pedemonte (2007) la *deducción* es una inferencia que permite realizar una *conclusión* a partir de unos *datos* y una *regla general*, esta última será entendida como *axiomas o teoremas* conocidos dentro de la geometría euclidiana. Los argumentos asociados a este tipo de razonamiento se encuentran en un extremo en donde el estudiante hace uso de su conocimiento teórico para determinar la veracidad de una afirmación. Una situación que permite ejemplificar este tipo de argumentos podría ser: cuando un estudiante tiene como *datos* la respectiva congruencia de los tres lados de dos triángulos y usando el *criterio* de congruencia LLL logra *concluir* que los dos triángulos son congruentes.

Ahora bien, en el otro extremo se encuentra la *inducción*, que se refiere a una inferencia que permite realizar una *conclusión* a partir de algunos casos particulares en los que se obtiene el mismo resultado (*ibid.)*, lo cual permite determinar, gracias a una generalización, que la conclusión es correcta. Una situación que permite ejemplificar este tipo de argumentos podría ser: cuando un estudiante construye en GeoGebra un triángulo isósceles y a partir del análisis de los diferentes casos que se presentan en la pantalla —gracias al arrastre de los puntos— logra *concluir* que en los triángulos isósceles los dos ángulos de la base son congruentes.

3. Metodología

En este capítulo se presenta una descripción del tipo de metodología utilizada, de cada uno de los participantes, y de los métodos e instrumentos de recolección de datos empleados. Además, se presenta una breve descripción de los datos obtenidos y la forma en la que fueron recolectados.

3.1. 2Tipo de estudio

Uno de los intereses particulares del presente trabajo es caracterizar las pruebas en el desarrollo de actividades de construcciones geométricas, *describiendo* los argumentos presentados por un grupo de profesores, por lo que se considera conveniente enmarcar el trabajo dentro de una metodología de corte cualitativo.

La investigación cualitativa se enfoca en comprender, profundizar y describir fenómenos a través de la perspectiva de los participantes (Hernández, Fernández y Baptista, 2010); para este caso se busca comprender y describir los argumentos que presentan los participantes para justificar que una construcción geométrica cumple con determinadas características que la hacen válidas en el marco de la geometría euclidiana.

Los cuestionarios de preguntas abiertas son uno de los métodos de recolección de datos dentro de la metodología cualitativa en donde la interacción ente el investigador y el participante es casi nula, tratando de minimizar la influencia externa sobre las respuestas. Las respuestas a preguntas abiertas “pueden contener "gemas" de información que de otro modo no podrían ser atrapadas […], pueden captar la autenticidad, riqueza, profundidad, honestidad y franqueza de una respuesta” (Cohen, Manion y Morrison, 2007, p.330). De modo que los cuestionarios de preguntas abiertas se consideran un escenario propicio para que los participantes proporcionen argumentos y construcciones usando las herramientas que consideren pertinentes para tales fines.

Creswell (2003) destaca las entrevistas no estructuradas como uno de los métodos de recolección de información dentro de la investigación cualitativa que le permite al individuo hablar abiertamente sobre un tema determinado, permitiendo que el entrevistador profundice en los argumentos de los participantes.

3.2. Los participantes

Los participantes fueron un grupo de 6 profesores de matemáticas que ya habían tenido un acercamiento a las pruebas geométricas durante sus estudios de licenciatura y en su práctica como docentes.

El acercamiento previo de los participantes con hechos y definiciones de la geometría euclidiana y con la prueba matemática, son aspectos que se consideran necesarios, ya que el propósito de la investigación no se centra en acercarlos la prueba o a un sistema axiomático a partir de un diseño, sino que se centra en caracterizar y describir los argumentos que proporcionan sobre construcciones geométrica que deben cumplir con ciertas características.

A continuación, se presenta el perfil de cada uno de los participantes[6]:

María tiene una formación como docente de matemáticas, durante la cual recibió capacitación para orientar cursos en los niveles de secundaria, preparatoria y primeros semestres de universidad. Durante su licenciatura tomó dos cursos de geometría euclidiana[7], y en su experiencia como docente (3 años) dio un curso de este tipo durante seis meses a nivel de secundaria.

Sofía tiene una formación como docente de matemáticas durante la cual recibió capacitación para orientar cursos en preparatoria y primeros niveles de universidad. Durante su licenciatura llevó un curso de geometría al que se le dedicó medio semestre al estudio de la geometría euclidiana. Su experiencia como docente es de 2 años y medio con estudiantes de bachillerato, preparatoria y universidad, durante la cual no ha dado cursos de geometría.

Juan es matemático y durante su formación llevó dos cursos de geometría euclidiana. En su experiencia docente (8 años) se ha desempeñado como profesor de preparatoria dando cursos de

[6] Los nombres de los participantes son seudónimos que son usados para proteger su identidad.
[7] Los participantes manifestaron haber realizado pruebas en cursos de "geometría euclidiana", y en ese sentido solicitarlas a sus estudiantes cuando han tenido que dar clases en este tipo de cursos.

geometría euclidiana, cálculo, trigonometría y álgebra; y como entrenador de olimpiadas matemáticas en el área de geometría.

René es matemático y durante su formación recibió dos cursos de geometría euclidiana. Su experiencia como docente es de 13 años en los que la mayor parte del tiempo ha sido profesor de primaria, sin embargo, también ha dado clases de álgebra lineal, geometría analítica y álgebra superior.

Ana es ingeniera y durante su formación no recibió cursos de geometría euclidiana. Su experiencia como docente es de 20 años con estudiantes de nivel superior, impartiendo cursos de cálculo, ecuaciones diferenciales y física.

Camilo es licenciado en matemáticas aplicadas, y durante su licenciatura tomó solamente un curso de geometría en el que se enfocaron en la enseñanza de la geometría analítica. En sus cinco años de experiencia como profesor de secundaria ha dado un curso de geometría euclidiana.

3.3. Métodos de recolección de los datos

La fase de recolección de datos se dividió en dos momentos: el primero, en el que los participantes solucionaron un cuestionario en el que se les solicitaba realizar construcciones geométricas sobre el papel; y un segundo momento en el que individualmente se les realizó una entrevista semi estructurada para profundizar sobre sus respuestas y argumentos.

3.3.1. El cuestionario

El cuestionario propuesto a los participantes constaba de seis construcciones que debían realizar en papel. Para la elección de cada una de ésta se tuvo en cuenta que la formación en geometría de los participantes no era la misma, de modo que fueron diseñados para que el *conocimiento teórico* fuera conocido por todos[8], por ejemplo, criterios de congruencia y semejanza, definiciones y hechos asociados a la mediatriz, a la bisectriz, entre otros.

[8] Se tenía un cierto grado de certeza de que los hechos geométricos eran conocidos por los participantes ya que habían sido usados en diferentes momentos durante un curso de la maestría que estaban cursando.

A continuación, se presentan cada uno de los puntos del cuestionario junto con su intencionalidad:

Construcción 1: “Dado un ángulo y una recta transversal a los lados del ángulo, encontrar sobre la transversal un punto equidistante de los lados del ángulo”

Con esta construcción se busca que los participantes usen argumentos que les permita afirmar que el punto buscado debe encontrarse en la intersección de la transversal con la bisectriz del ángulo dado.

Construcción 2: “Construya un triángulo conociendo un lado y la bisectriz de un ángulo adyacente a ese lado”

En esta construcción se busca que los participantes pongan en juego diferentes conocimientos sobre la bisectriz (equidistancia de los puntos de la bisectriz a los lados del ángulo, la circunferencia tangente a los lados del ángulo, la coincidencia de la bisectriz con otras rectas notables en ciertos triángulos, etc.), y usen esos mismos conocimientos para probar que la construcción es correcta.

Construcción 3: “Construir un triángulo rectángulo dado un cateto y la suma del otro cateto con la hipotenusa”

En este problema se pretende que los participantes hagan uso de la mediatriz de un segmento como una herramienta (construible con lápiz y papel) que permite determinar puntos de una elipse.

Construcción 4: Construya un triángulo rectángulo dados uno de sus catetos y la diferencia de los otros dos lados.

En este problema se pretende que los participantes nuevamente hagan uno la mediatriz como herramienta que preserva la equidistancia, permitiendo construir puntos de una hipérbola (los cuales cumplen con que la diferencia… es una constante) y en ese sentido argumentar que el triángulo construido cumple con las características solicitadas.

Construcción 5: “Construya un triángulo dada su base, uno de los ángulos adyacentes a la base y la diferencia de los otros dos lados. Considere dos casos: (i) si se da el menor de los ángulos adyacentes a la base; (ii) cuando se da el mayor de los ángulos adyacentes a la base”

Esta construcción es similar a la anterior, solo que para analizar cada uno de los casos deberán usar el hecho de que un triángulo el ángulo mayor es opuesto al lado mayor. De modo que la riqueza se encuentra en los argumentos que deben presentar para afirmar que el triángulo es el solicitado, y en el conocimiento que se debe emplear para analizar cada uno de los casos posibles.

Construcción 6: “Dividir un segmento en cinco partes iguales”.

El propósito de esta construcción es enfrentar a los participantes probar la validez de una construcción conocida, y en cierta medida saber qué ha primado en la enseñanza de ese tipo de construcciones en la escuela: la construcción o los argumentos vinculados a ella.

Cabe resaltar que las construcciones se pueden realizar de diferentes maneras; sin embargo, por el medio en el que son solicitadas (papel y lápiz) se considera el uso de ciertas herramientas matemáticas que podrían ser cruciales en la construcción de los argumentos.

La recolección de los datos por medio del cuestionario se llevó a cabo a mediados del mes de noviembre del año 2019. La instrucción dada fue la de solucionar cada uno de los ítems y en caso de necesitar algún instrumento como pluma, regla, compás, lápiz, u otro, solicitarlo. El tiempo que se dedicó a la solución del cuestionario fue de tres horas, sin embargo, no todos los participantes lo desarrollaron a cabalidad.

En un primer análisis de las respuestas se notó la presencia de propuestas de construcción que no pueden ser realizadas con regla y compás. La Tabla 1 pretende dar una idea general de los datos obtenidos con el cuestionario enumerando la cantidad de propuestas diferentes en cada problema y relacionándolas con cada uno de los participantes. Para conocer a detalle las propuestas y los argumentos presentados por cada uno de los participantes es necesario revisar el capítulo de análisis.

C		María	René	Juan	Sofía	Camilo	Ana
1	Bisectriz	X	X	X	X	X	X
2	Tangente a circunferencia		X			X	NS[9]
	Transformaciones en el plano	X			X		
	Equidistancia			X			
3	Elipse		X	X	X	X	
	Mediatriz	X					X
	Semejanza			X			
4 y 5	Hipérbola		X	X	NS	X	NS
	Semejanza (solo para el 4)			X			
	Mediatriz	X					
6	Paralelas	X	X	X	X	X	X

Tabla 1 Tabla que relaciona las soluciones presentadas en el cuestionario con los participantes

3.3.2. Las entrevistas

Al inicio de la investigación se pretendía realizar otro cuestionario con construcciones similares, pero con la opción de usar de GeoGebra. Sin embargo, por los datos obtenidos en el cuestionario (descripciones de algunos pasos de construcción que no necesariamente correspondían al papel y lápiz) y por la ausencia de argumentos, se decidió entrevistar a los participantes para indagar sobre estos temas. El objetivo de las entrevistas es solicitar a los participantes que realicen sus construcciones (de acuerdo con lo descrito y que no necesariamente corresponde al papel y lápiz) y posteriormente preguntarles sobre los argumentos que permiten garantizar que cada construcción cumple con las características solicitadas.

Dada la particularidad de las soluciones de los participantes y de los argumentos que las sustentan, vemos la necesidad de realizar una entrevista *semiestructurada*. De acuerdo con Cohen, Manion y Morrison (2007) en este tipo de entrevista se escriben los temas y las preguntas que se tomarán en cuenta, sin embargo, no se debe seguir la secuencia exacta ni la redacción con cada encuestado.

Para las entrevistas se propone el uso de preguntas generales y específicas. Las preguntas generales buscan cuestionar a los participantes sobre la validez de sus construcciones con el fin de incitarlos

[9] Siglas utilizadas para decir que el participante no presentó *ninguna solución*.

a que propongan argumentos, mientras que las preguntas específicas son orientadas a que los participantes pongan especial atención en algún aspecto de su construcción o de su argumentación.

Las preguntas que orientaron el desarrollo de las entrevistas se pueden ver en el Anexo A. Las entrevistas individuales fueron video grabadas y desarrolladas en un espacio ajeno al aula de clase. La duración de cada entrevista fue variada según cada partícípate (ver Tabla 2), y en cada una de ellas se les ofreció a los participantes papel, lápiz, compás, regla y un computador con acceso a GeoGebra para que los usaran en caso de considerarlo necesario.

Participante	Duración de la entrevista
María	1 hora y 30 minutos
Juan	1 hora y 20 minutos
Camilo	3 horas y 20 minutos
Ana	2 horas y 20 minutos
Sofía	2 horas y 15 minutos
René	1 hora y 45 minutos

Tabla 2. Duración aproximada de las entrevistas para cada participante

4. Descripción y análisis de resultados

En este capítulo se discuten las construcciones de los participantes con relación a las herramientas y los argumentos empleados. Es importante recalcar que el énfasis recae en los procesos cognitivos vinculados a la producción de argumentos en el papel y en un medio digital.

4.1. Construcción 1

En la primera actividad los participantes debían encontrar un punto sobre una trasversal a un ángulo dado de tal manera que el punto sobre la transversal equidiste de los lados del ángulo. Para “realizar” la construcción solicitada **todos** los participantes mencionaron a la bisectriz como un elemento crucial dentro de su solución.

4.1.1. Bisectriz

La forma en que cada uno de los participantes llega a la construcción de la bisectriz y logra argumentar que la recta construida es efectivamente la bisectriz varía según cada participante. A continuación, se presenta el análisis de cada una de las producciones.

Camilo

Camilo propone usar la bisectriz como una *herramienta que le permite* garantizar equidistancia a los lados del ángulo, complementando su visión de la bisectriz como objeto geométrico que tiene unas determinadas propiedades al cargarla de un *uso* específico junto con una *intencionalidad* (Dimensión algorítmica e intencional), lo que permite que la bisectriz se pueda considerar como una *herramienta para él*. En cuanto a la *materialización* de la herramienta Camilo presenta un dibujo de una recta que aparentemente divide al ángulo B en dos partes iguales (ver Tabla 3).

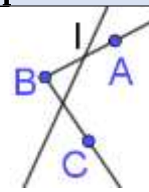
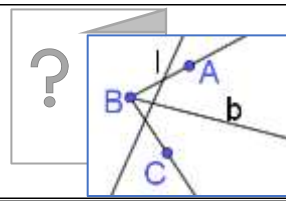
Objetos de la construcción	Construcción en papel y lápiz	
	Representación de lo descrito o de lo que muestra la imagen que acompaña la solución	**Descripción realizada en el cuestionario**
$\angle ABC$ y l transversal		"sea $\angle ABC$ dado y l una transversal cualquiera a los lados del ángulo"
Bisectriz de $\angle ABC$ y punto de intersección de la bisectriz con l		"considere b la bisectriz del ángulo $\angle ABC$ […]el punto buscado sobre l está en la intersección de l con b"

Tabla 3. Propuesta de Camilo para la primera construcción[10]

La construcción de Camilo está guiada por su *conocimiento teórico* dentro del que parece tener claro que la bisectriz es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados de un ángulo. Aun cuando él no menciona el hecho explícitamente escribe que: "todos los puntos de b equidistan de los lados del ángulo", lo que refleja un uso particular del teorema mencionado anteriormente, ya que afirma que al construir la semirrecta b como la bisectriz del ángulo dado se puede *concluir* la equidistancia de sus puntos a los lados del ángulo. Por lo tanto, se puede afirmar que su argumentación es de tipo *deductiva*, ya que a partir de unos datos y gracias a una regla general logró obtener la conclusión deseada.

En el cuestionario Camilo no menciona el teorema que le permitió tener la idea clave para la construcción, pero cuando se le cuestiona sobre la certeza de su solución se desencadena el siguiente dialogo[11]:

C: Ah bueno, de acuerdo con (…) lo que pide el problema tú tienes un ángulo y quieres (…) y tienes sobre ese ángulo una transversal. Y quieres un punto sobre la transversal de manera que ese punto esté a la misma distancia de los lados del ángulo. Entonces lo que yo propongo es trazar la bisectriz del ángulo. De acuerdo con (...) o por definición de bisectriz, todos los puntos, todos, todos, todos los puntos equidistan de los lados del ángulo.

E: ¿Por definición?

[10] La segunda imagen que se presenta en la tabla pretende informar que no se tiene certeza de cómo el participante logró construir un determinado objeto geométrico (por ejemplo, la bisectriz) ya que no es información que se pueda extraer del cuestionario.

[11] Para las transcripciones se usan una serie de códigos que se pueden ver en el anexo B.

C: Bueno, o sea cuando (…) la bisectriz, sabemos que es la recta o semirrecta que divide al ángulo en partes iguales. Entonces, (…) se satisface que (…) o sea, cualquier punto de la bisectriz siempre va a estar a la misma distancia.
E: Ok, eso es algo que tú sabes (…) y, ¿estás seguro de que eso es cierto?
C: Este (…) sí, jajajaja
E: Y, ¿podrías probarlo?
C: ¿Podría yo probarlo? (…. … …) o sea, ¿formalmente la prueba?
E: Sí, ¿podrías?
C: No en este momento, jajaja

Camilo hace explicita la *regla general* que está utilizando cuando en su primera intervención afirma que **todos** los puntos de la bisectriz equidistan de los lados del ángulo. Inicialmente menciona que dicha regla general es una definición, situándolo en un sistema teórico en donde un teorema asociado a la bisectriz es el de dividir a un ángulo en dos ángulos congruentes. Sin embargo, ante una pregunta de la entrevistadora el participante replantea su respuesta afirmando que como la bisectriz divide a un ángulo en dos ángulos congruentes entonces se satisface la equidistancia de los puntos de la bisectriz a los lados del ángulo, exhibiendo una estructura de teorema para la regla general que apoya su argumento.

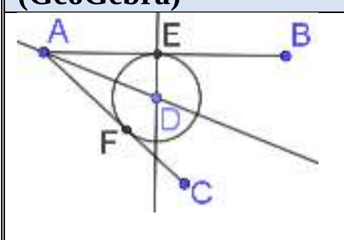
Representación (GeoGebra)	**Descripción de la construcción realizada**
	Construye el ángulo BAC (usando segmentos) y su bisectriz; en esta última ubica un punto D; traza una recta perpendicular a $\overline{AB}$ por D determinando al punto E como el punto de intersección de dicha perpendicular y $\overline{AB}$; por último, construye la circunferencia con centro en D y radio DE.

Tabla 4. Construcción de Camilo para Justificar el teorema de la bisectriz

A pesar de que Camilo afirma no poder probar de manera formal la equidistancia asociada a la bisectriz, él decide ofrecer una prueba que se apoya en una gráfica que realiza en GeoGebra (ver Tabla 4) y en el siguiente discurso:

C: Porque por definición de circunferencia sabes que son todos los puntos que equidistan, o sea todos los puntos están a la misma distancia de un punto, en este caso llamado D, que es el centro. Pero, lo que yo veo es que esta cosa es (…) o sea, la circunferencia es tangente a este (señala el segmento AC) […], o sea, esta (señala al segmento AC) es una recta tangente, entonces es perpendicular al radio (en varias ocasiones Camilo mueve a D para mostrar que la circunferencia siempre es tangente).

El actuar de Camilo está condicionado por el hecho que *anticipa* que puede trazar una circunferencia tangente a un lado del ángulo que será tangente al otro lado. La exactitud visual de los trazos sobre la pantalla y el movimiento de los puntos de la construcción apoyan dicha anticipación y le permiten *concluir*, de manera inductiva, que la circunferencia con centro en D es tangente a los dos lados del ángulo. Si estuviera haciendo "a mano" la figura correspondiente sobre el papel sería su voluntad la que haría pasar la circunferencia tangente por el otro lado del ángulo, y no sería una *respuesta* del medio digital que en este caso re-acciona (o sea, co-acciona) a *su trazado de una circunferencia tangente a uno de los lados*.

Después de tener su construcción y la respuesta del medio digital, a saber, la tangencia de la circunferencia al otro lado del ángulo, Camilo *argumenta* que los segmentos DE y DF son congruentes *basándose* en la definición de circunferencia, ya que resalta el hecho de que los puntos de la circunferencia equidistan del centro y que la recta AC es perpendicular al radio (en este caso FD). Aun cuando Camilo hubiese presentado de forma explícita su argumento vinculado a la congruencia de DE y DF, su prueba no se podría ubicar en lo puramente deductivo, porque a pesar de que su conclusión se basa en una *definición,* los *datos* que utiliza fueron obtenidos gracias a la respuesta del medio digital.

Durante todo su discurso Camilo menciona características propias de la bisectriz y el porqué de su uso, sin embargo, nunca indica cómo la construyó en el papel. Cuando la entrevistadora lo cuestiona sobre este tema él afirma haberla realizado a mano alzada, pero que de ser necesario la podría construir con regla y compás, por lo que la entrevistadora le solicita que la realice (ver Tabla 5).

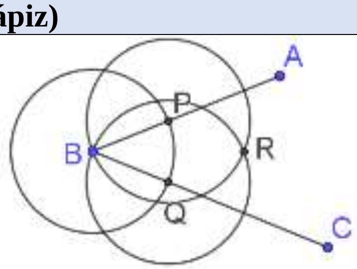
Representación (papel y lápiz)	**Descripción de la construcción realizada**
	Construye el ángulo $\angle ABC$ y una circunferencia con centro en B y radio x de tal manera que P y Q son los puntos de intersección de dicha circunferencia con los lados del ángulo. Por último, determina R como punto de intersección de dos circunferencias con centro en P y con centro en Q, y de radio x.

Tabla 5. Construcción de la bisectriz

Al hacer su construcción Camilo sigue una secuencia de pasos que parece tener bien memorizados, los cuales constituyen un saber práctico de los que no necesariamente sabe por qué funciona.

La entrevistadora le pregunta a Camilo por qué al realizar sus trazos la recta BR resulta ser la bisectriz del ángulo ABC. Él afirma desconocer dichas razones, pero decide buscar un camino a partir de las observaciones que hace sobre la figura, lo que lo lleva a resaltar aspectos como: que las circunferencias con centro en P y Q son congruentes porque poseen el mismo radio y que el ángulo B es inscrito a esas circunferencias. En este caso el instrumento de mediación que posee Camilo es su *conocimiento teórico*, de modo que empieza a buscar dentro de éste hechos que le permitan relacionar sus observaciones con la congruencia de los ángulos $\angle PBR$ y $\angle QBR$.

Después la entrevistadora cuestiona a Camilo sobre la relevancia de cada uno de los objetos de su construcción y la posibilidad de no incluirlos dentro de esta. Dicho cuestionamiento hace que Camilo construya los segmentos BR, PR y QR y después ponga su atención en la congruencia de dos triángulos, así:

C: […] Yo quiero probar que estos ángulos (señala los ángulos determinados por la bisectriz) son iguales. (… … …) A ver, tengo tres puntos importantes, el B, el P y el R, como son tres puntos no colineales yo puedo considerar el triángulo que está ahí. […] o sea, estos triángulos (señala los triángulos BPR y BQR) comparten uno de sus lados (señala el segmento BR), se me ocurre por el criterio ángulo-lado-ángulo.

Después de afirmar que debe usar el criterio ángulo-lado-ángulo, la entrevistadora le pregunta sobre los ángulos que va a usar, y la conversación continúa así:

C: Este ángulo (señala uno de los ángulos determinados por la bisectriz)
E: ¿ese ángulo sabes que es congruente?
C: No, ese es el que quiero demostrar que es congruente. Entonces, a ver (…). ¡Ah!, no, por el criterio lado, lado, lado. Porque tienes, o sea, que este lado (señala el segmento BP) es igual al lado de acá (señala el segmento BQ) por ser radio. Este lado (señala el segmento PR) es igual al lado de acá (señala el segmento QR) por ser radio, y este (señala el segmento BR) lo comparten, o sea, es exactamente el mismo lado para los dos. Entonces, tienes dos triángulos con tres lados iguales, entonces esos triángulos sí son congruentes, y, por lo tanto, sus ángulos correspondientes también son iguales.
E: […] ¿qué usaste?, me recuerdas por favor.
C: Utilicé el hecho (…) o te justifiqué que estos ángulos eran iguales utilizando el hecho de que el triángulo BPR y BQR eran congruentes, por el criterio lado, lado, lado.

En esta parte se ve como Camilo construye una red de argumentos que le permiten llegar a la congruencia de los triángulos BPR y BQR . Inicialmente logra *concluir* la congruencia de BP con

BQ — que son radios de la misma circunferencia— y PR con QR —que son radios de circunferencias congruentes—, según él esas afirmaciones se realizan “por ser radios”, lo que lleva a suponer que su *regla general* es la propiedad de que los radios de la circunferencia son congruentes al igual que lo son los radios de circunferencias congruentes (hecho que había al realizar su construcción). Como segunda parte de su argumentación usa que los triángulos comparten el segmento BR y la congruencia de los lados mencionados anteriormente para *concluir* que los triángulos PBR y QBR son congruentes —*basándose* en criterio de congruencia lado, lado, lado— y por lo tanto llegar a que “sus ángulos correspondientes también son iguales”. A pesar de que en la última conclusión de Camilo queda implícito el uso de la definición de congruencia es innegable el uso de su conocimiento teórico y de inferencias lógicas que le permiten producir su prueba, por lo que se puede decir que ésta es tipo deductiva.

Camilo hace uso de cierto teorema y definiciones como herramienta que le sirven para la producción de argumentos y cuyo uso parece claro para él y para la entrevistadora (ambos poseedores de la misma herramienta). Sin embargo, no siempre hace explícito su uso porque las ha interiorizado a tal punto de que le permiten tener una visión de la realidad geométrica que asume compartida con su interlocutora.

Retomando la solución de Camilo, la entrevistadora lo cuestiona sobre la necesidad de que las tres circunferencias tengan el mismo radio y él decide hacer una nueva construcción, pero de tal manera que las circunferencias con centro en P y Q tuvieran un radio diferente al de la circunferencia con centro en B. Después de realizar su construcción Camilo dice: “mi argumento vuelve a servir [… …], entonces aquí de nuevo tengo congruencia de triángulos, por el mismo criterio, lado, lado, lado. Entonces los angulitos también son iguales”. De modo que su prueba y la interacción con la entrevistadora no solo le permitieron tener el conocimiento de por qué los pasos que había memorizado le permitían construir la bisectriz de un ángulo, sino que también le permitieron modificar su algoritmo sin afectar el resultado deseado, es decir, que camilo ha desarrollado deductivamente un nuevo conocimiento.

Ana

A diferencia de Camilo, Ana usa regla y compás para hacer la construcción de “la bisectriz” del ángulo dado (ver Tabla 6). Ella determina el punto medio del segmento AB construyendo dos circunferencias del mismo radio, una con centro en A y otra con centro en B. Cabe aclarar que la construcción de dichas circunferencias no se encuentra en su solución escrita, sino que son visibles en la figura que ella presentó.

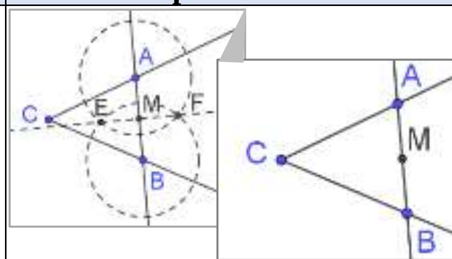
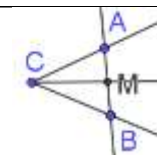
Objetos de la construcción[12]	**Construcción lápiz y papel**	
	Representación de lo descrito o de lo que muestra la imagen que acompaña la solución	**Descripción realizada en el cuestionario**
Punto medio de $\overline{AB}$, donde A y B son los puntos de intersección de la transversal con los lados del ángulo dado.		"Se traza el punto medio de la trasversal entre los puntos de intersección con los lados A y B" [*Se traza el punto medio de: los puntos de intersección de la transversal con los lados del ángulo*]
Supuesta bisectriz		"Se traza la bisectriz con la recta que cruza el ángulo dado [*Se refiere al vértice del ángulo*] y el punto medio"

Tabla 6. Propuesta en el cuestionario de Ana para la primera construcción

Durante la entrevista se le preguntó a Ana cómo hizo para obtener la bisectriz en lápiz y papel, el dialogo que se presentó fue el siguiente:

A: Ah, porque (…) si yo trazo una transversal, que es la que dice, una transversal a los lados, el punto medio de esa transversal va a dar este (señala el punto M) (…) que debe pasar la bisectriz por ese punto.

E: Y, ¿cómo podrías convencerme de que esa efectivamente es la bisectriz?, o sea, si trazas el punto medio, ese punto va a ser el de la bisectriz.

Ante el cuestionamiento de la entrevistadora Ana decide hacer su construcción en GeoGebra (ver Tabla 7) y medir los ángulos $\angle BAJ$ y $\angle CAJ$. Aparentemente dichos ángulos son congruentes, sin embargo, su construcción *responde* de acuerdo con la geometría incrustada en el medio digital mostrando dos valores que, aunque son cercanos son diferentes entre sí (24.8° y 25.82°). De modo que dicha co – acción permite que Ana tenga la certeza de que el punto medio de una transversal al ángulo no necesariamente se encuentra en su bisectriz, y en ese sentido le plantea la necesidad de realizar una construcción diferente.

[12] En la construcción, algunos de los nombres de los puntos fueron incluidos debido a que la construcción original no los tenía.

En este caso GeoGebra se presenta como un amplificador conceptual (como una lupa) que permite ver de una forma más precisa lo que se hubiera podido ver con una construcción a lápiz y papel. Sin embargo, su voluntad de querer la congruencia entre $\angle BAJ$ y $\angle CAJ$ haría que la medida de los ángulos fuese tan cercana que tal vez los instrumentos de medición (un transportador) no serían suficientes para que ella notara su error.

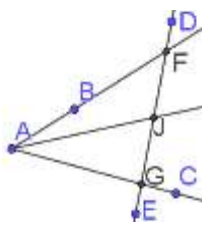
Representación (GeoGebra)	**Descripción de la construcción realizada**
	Construye las semirrectas AB y AC,y después de ello construye la transversal $\overleftrightarrow{DE}$; de modo que los puntos de intersección de dicha transversal con los lados del ángulo son F y G, y J es el punto medio de $\overline{FG}$. Por último, construye la semirrecta AJ .

Tabla 7. Construcción de la bisectriz por parte de Ana

Ana decide eliminar la semirrecta AJ y construir la bisectriz utilizando la herramienta que se presenta en el menú de GeoGebra, de modo que K resulta ser el punto de intersección de la bisectriz y la transversal (ver Figura 4). Al culminar su construcción ella dice:

A: ¡Ah!, pero no va a ser equidistante, Bueno, aquí se ve que no (mueve el punto D) Es que solo serían equidistantes si son perpendiculares, la bisectriz y esta [se refiere a la transversal]

Lo anterior muestra que Ana ha memorizado el hecho de que los puntos de la bisectriz equidistan de cada uno de los lados del ángulo. Sin embargo, no muestra tener claridad sobre lo que significa que un punto equidiste de una recta, por lo que empieza a dudar de que realmente la bisectriz cumpla con dicha propiedad. Cuando Ana afirma que las dos rectas deben ser perpendiculares para que haya una equidistancia exhibe la creencia de que K debe equidistar de los puntos F y G, y como son puntos colineales entonces lo que parece estar buscando es que K sea punto medio del segmento FG, misma relación que garantizó en su cuestionario. De modo que la construcción que Ana presentó en el cuestionario parece haber estado guiada, desde el inicio, por los hechos que ha memorizado parcialmente.

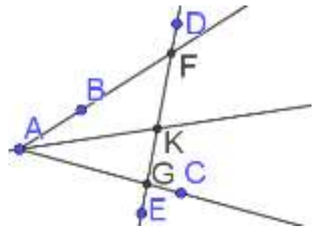


Figura 4.Construcción de la bisectriz haciendo uso de las herramientas de GeoGebra

La *mediación* del hecho geométrico (vinculado a la bisectriz) que Ana tiene parcialmente interiorizado hace que ella busque que el punto se encuentre en la bisectriz, pero su *conocimiento* sobre lo que significa equidistar (transferido de puntos a rectas) entra en conflicto con el hecho geométrico “conocido”. En este caso el papel de GeoGebra está limitado por el conocimiento de Ana, quien no puede ver la equidistancia de los puntos sin conocer la definición de lo que es la distancia de un punto a una recta. En general, se puede decir que Ana no sabe lo que ve, sino que ve a partir de lo que sabe (sus herramientas cognitivas).

Después de buscar en internet la definición de distancia de un punto a una recta, Ana prueba que K debe ser un punto de la bisectriz de la misma manera que lo hizo Camilo (ver el argumento asociado a la construcción de la Tabla 4) ya que construye una perpendicular a AG por K —determinando el punto J en AG— y después la circunferencia con centro en K y radio KJ.

La entrevistadora cuestiona a Ana sobre la necesidad de tener GeoGebra para construir la bisectriz, así que ella decide abrir un nuevo documento y construir un triángulo isósceles (ver Tabla 8), desarrollando la siguiente conversación:

E: ¿Por qué quieres que tu triángulo sea isósceles?
A: Porque así el punto medio de esta (señala lo que sería el lado no congruente en el triángulo isósceles) pues va a caer en la bisectriz.
E: Ok, y ¿estás segura de que eso sucede?
A: Jajaja, pues espero que sí. En teoría así debería de ser.
E: ¿en teoría?
A: Mi lógica me dice que sí

En esta parte Ana presenta de forma explícita su intuición sobre el comportamiento de los objetos geométricos, generando una conjetura sobre lo que va a suceder en su construcción. Ella anticipa que *si* construye un triángulo isósceles y la mediana asociada a la base *entonces* ésta va a coincidir con la bisectriz del ángulo opuesto, lo que corresponde con un teorema dentro de la geometría Euclidiana —a saber, que en un triángulo isósceles la mediana de la base es la bisectriz del ángulo no congruente—. Aunque Ana parece no conocer dicho teorema explícitamente, éste le permite realizar la construcción de la bisectriz deseada, de modo que se puede decir que es un teorema en acto que es invisible ante sus ojos.

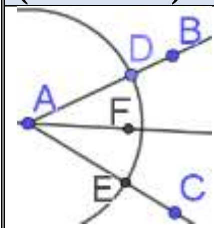
Representación (GeoGebra)	**Descripción de la construcción realizada**
	Construye las semirrectas AB y AC,y después de ello construye la bisectriz del ángulo BAC. Después coloca un punto D sobre la semirrecta AB y construye una circunferencia con centro en A y radio AD de manera que se determina el punto E como punto de intersección de la circunferencia y la semirrecta AC. Por último, determina el punto F como el punto medio de DE el cual resulta estar sobre la bisectriz

Tabla 8. Construcción de la bisectriz sin hacer uso de la herramienta de GeoGebra

El punto F "cae" en la bisectriz del ángulo BAC como una *respuesta* del medio digital que en este caso re-acciona (o sea, co-acciona) a su *acción* de ubicar el punto medio de DE. Si Ana hubiera realizado su construcción en lápiz y papel no tendría la bisectriz proporcionada por el medio digital, que le permite comprobar visualmente que su anticipación es correcta. Podría decirse que Ana ha *incorporado* o interiorizado, por lo menos parcialmente, el medio digital como un socio cognitivo que le permite entablar un dialogo y obtener respuestas sobre las hipótesis que se formula.

Ahora bien, respecto a la prueba de que la recta construida es efectivamente la bisectriz, Ana mueve algunos de los puntos de su construcción y a partir de los casos que se presentan en la pantalla muestra que efectivamente el punto siempre resulta estar en la bisectriz que le otorga una de las herramientas del menú de GeoGebra. Cuando la entrevistadora le pregunta si existe otra manera de probar que F es un punto de la bisectriz, ella basa su propuesta en el hecho de que los centros de las circunferencias tangente a los lados del ángulo pertenecen a la bisectriz, ya que dice:

A: Igual que en el anterior. Trazo la perpendicular de este lado (señala AE) que pase por este punto (señala F), y lo mismo de éste (señala AD). Si eso me da una circunferencia, sí.

A pesar de que lo anterior exhibe un camino a seguir para presentar una prueba de que el punto F esta en la bisectriz ella decide no continuar por ese rumbo cuando dice:

A: Porque este lado y éste (señala FE y DF) son iguales porque F lo construí como un punto medio. Este lado y este lado también son iguales (señala AD y AE) porque igual los construí de la misma medida. Y cómo (…) este ángulo y este ángulo también son congruentes (señala los ángulos AFD y AFE)

E: Y ¿cómo sabemos que (…)? ¿construiste esos ángulos así?

A: No, no construí así.

E: ¿entonces podrías asegurar esa congruencia?, de acuerdo con tu construcción?
A: Sí, Porque si este lado y este lado son iguales (señala AD y AE) y este lado y este lado son iguales (señala DE y DF), entonces este ángulo (señala el ángulo ADF) y este ángulo (señala el ángulo AEF) son iguales, porque es un triángulo isósceles[se refiere al triángulo ADE]. Entonces lado, ángulo, lado, por eso los triángulos son congruentes [… …] Porque si este triángulo es congruente con éste (señala ADF y AFE) entonces quiere decir que este ángulo es congruente con éste (señala los ángulos DAF y FAE).

En su prueba, Ana logra conectar diferentes conclusiones obtenidas deductivamente. La primera *conclusión* es que los segmentos FE y DF son congruentes gracias a que ella construyó el punto F como punto medio del segmento DE, y, aunque la *regla general* en la que basa su deducción no está literalmente especificada, ella está utilizando la definición de punto medio. En la segunda parte Ana tampoco nombra la *regla general* de que los radios de una misma circunferencia son congruentes, la cual usa para *concluir* la congruencia entre AD y AE dada la construcción de la circunferencia con centro en A. En la tercera parte ella menciona la congruencia de los ángulos AFD y AFE, sin embargo, la interacción con la entrevistadora hace que proponga una *conclusión* en donde resalta la congruencia ángulos AFD y AFE, ya que el triángulo ADE es isósceles — porque tiene los lados AD y AE congruentes — y en ese tipo de triángulos los ángulos de la base son congruentes. Aunque nuevamente ella no hace uso explícito la *regla general*, se evidencia su uso consciente cuando dice "porque es un triángulo isósceles".

Ahora, teniendo dos triángulos con dos lados y un ángulo correspondientemente congruentes entre sí, Ana hace uso del *criterio* de congruencia lado-ángulo-lado y logra *concluir* que los triángulos ADF y AFE son congruentes, lo que a su vez le permite *concluir* que los ángulos DAF y FAE son congruentes al usar la *definición* de congruencia de triángulos, la cual no es especificada explícitamente.

En general, la prueba de Ana es de tipo deductiva aun cuando las *reglas generales* que apoyan sus conclusiones no son especificadas.

René

René, al igual que Ana en la última parte de su construcción, busca realizar un triángulo isósceles (ver Tabla 9) basándose en el hecho de que en este tipo de triángulos la bisectriz y la altura coinciden, ya que escribe en su solución lo siguiente:

R: “DAF por construcción es un triángulo isósceles, por lo que la altura por A coincide con la bisectriz de α. Siendo la bisectriz el conjunto de puntos que equidistan de las prolongaciones de los lados del ángulo, en este caso α. Por lo tanto, el punto de intersección de la bisectriz con n es el punto buscado”

En su escrito René no especifica por qué la necesidad de construir un triángulo isósceles, lo que sí afirma es que la solución al problema se encuentra en el punto de intersección de la bisectriz y la transversal [n], ya que la bisectriz es “el conjunto de puntos que equidistan de las prolongaciones de los lados del ángulo”. Él utiliza esta *regla general* (vinculada a la bisectriz) para *concluir* que el punto está en la intersección mencionada anteriormente, por lo que se puede decir que es un argumento de tipo deductivo.

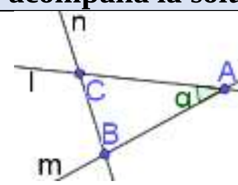
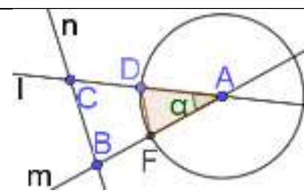
Objetos de la construcción	**Construcción**	
	Representación de lo descrito o de lo que muestra la imagen que acompaña la solución	**Descripción realizada en el cuestionario**
$\angle CAB$ y $\overleftrightarrow{CB}$, de modo que A, $C\ \in l$ y $B, A\ \in m$.		“Sea α el ángulo dado y l y m como prolongaciones y n la recta transversal a ellos”
ΔDAF		“Tomemos $D \in l,$ […] tracemos circunferencia con centro en A y radio DA[…], se define F como la intersección de dicha circunferencia con m”

Tabla 9. Propuesta en el cuestionario de René para la primera construcción

Una de las primeras preguntas que se le formulan a René durante la entrevista se refiere a la necesidad de construir un triángulo isósceles y mencionar (en el cuestionario) que una de sus alturas coincide con la bisectriz de α. La respuesta que el presenta es:

R: Porque es una manera, digamos, no sabía que herramienta podía utilizar realmente para resolver el problema y es más fácil calcular la mediatriz de un segmento, que en este caso coincide con la bisectriz del ángulo.

E: O sea, para ti era más fácil construir una mediatriz que una bisectriz.

R: Pues cuando menos me acuerdo más de esa construcción.

E: Ah, pero me estás hablando ahorita de mediatriz, pero en tú reporte hablas de altura.

R: Mediatriz o altura, dado el hecho que coinciden al ser en un triángulo isósceles.

En su intervención, René muestra que para él la bisectriz es una *herramienta* que le permite construir puntos que equidistan de los lados del ángulo. Él no solo hace explícita su intención de uso de la herramienta, sino también muestra un interés por construirla geométricamente en el medio en el que le fue propuesto el problema (papel). Pero, como es una construcción que no recuerda, su conocimiento geométrico es el que le permite transformar la construcción de una bisectriz en la construcción de la mediatriz del lado no congruente de un triángulo isósceles, la cual es una construcción que parece tener memorizada, ya que dice:

R: La forma general, con la que me acuerdo es, sacar a los dos extremos, los dos puntos del segmento y trazas unas circunferencias del mismo tamaño, con centro en cada uno de los puntos, que sea mayor al punto medio [se refiere a los radios de las circunferencias]. Entonces donde se intersecan esas dos circunferencias va a ser la mediatriz.
E: Ok, entonces por eso usaste (…) Ah, porque no sabes cómo construir una bisectriz.
R: No me acuerdo realmente, entonces es una manera.
E: Ok, y ¿Por qué la construcción de la mediatriz funciona? […]
R: Pues digo, el chiste de las circunferencias que se trazan en los extremos es que midan lo mismo. Entonces en los puntos en los que se intersecan sabemos que están a la misma distancia de ambos puntos del segmento. Entonces tienen que estar en la mediatriz, porque es el conjunto de puntos que están a la misma distancia de los dos puntos fijos. Entonces, tenemos de hecho dos puntos en donde se intersecan, uno inferior y uno superior, digamos, según el sistema de referencias. Y esos puntos me definen una única recta que se llama mediatriz.

En sus intervenciones René no solo muestra tener memorizada la construcción, sino que tiene claridad del por qué funciona. Su razonamiento sobre los objetos construidos lo llevan a afirmar que al ser dos circunferencias que tienen el mimo radio entonces se va a presentar una equidistancia entre los puntos de intersección de las circunferencias y los extremos del segmento. Usando dicha equidistancia como *dato* logra *concluir* que la recta formada por esos dos puntos de intersección es la mediatriz, *ya que* la mediatriz de un segmento se define como el lugar geométrico de todos sus puntos equidistan de los extremos de un segmento.

René "logró construir" la mediatriz de un segmento y por lo tanto la bisectriz del ángulo deseado, gracias al hecho de que en un triángulo isósceles la mediatriz de la base coincide con la bisectriz del ángulo opuesto. Sin embargo, la entrevistadora lo cuestiona sobre la certeza que posee de dicho hecho, por lo que él decide dibujar en lápiz y papel un triángulo ABC junto con una recta que afirma es la bisectriz del ángulo en A (ver Figura 5) y dice:

R: Ok, por el teorema de la bisectriz sé que la razón de los lados es igual a la razón de lo que corta. La razón de los lados en un triángulo isósceles es uno. Entonces la razón de los lados en donde corta tiene que ser uno. Entonces este lado tiene que ser de este mismo tamaño (señala CD y BD). Entonces sé que éste es el punto medio del segmento, y ese punto medio está en la mediatriz

E: ¿por qué?

R: Porque la mediatriz es el conjunto de puntos que están a la misma distancia de estos dos (señala a B y C). Y A también está en la mediatriz, por ser un triángulo isósceles. Entonces estos dos puntos me definen a la mediatriz (señala a A y a la intersección de la bisectriz con CB) y, en particular están en la bisectriz. Entonces son la misma.

En esta parte, René logra *concluir* que el punto D debe ser el punto medio de BC partiendo de que AD es bisectriz. Inicialmente él usa el "*teorema de la bisectriz*" que le permite afirmar que "la razón de los lados es igual a la razón de lo que corta", es decir que en este caso se cumple que: $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{BC}$. Ahora, como "La razón de los lados en un triángulo isósceles es uno" (es decir que $\frac{AB}{AC} = 1$ porque AB Y AC son los lados congruentes del triángulo isósceles), esto le permite concluir que $BD = BC$. En este caso, aunque a la prueba le faltan algunas garantías que le permiten llegar a las conclusiones se puede decir que es de carácter deductivo y está mediada en gran medida por su conocimiento geométrico.

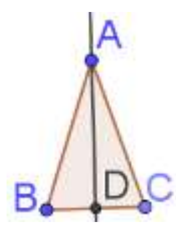


Figura 5. Construcción de René para probar la coincidencia de la mediatriz y la bisectriz.

Sofía

En el cuestionario Sofía presenta un dibujo y una descripción de lo que podría ser la solución al problema, sin presentar algún tipo de argumento que apoye su propuesta. Ella afirma que debe construir la bisectriz del ángulo para solucionar el problema, y que puede construir una circunferencia que sea tangente a uno de los lados del ángulo, pero en su dibujo muestra que dicha circunferencia será tangente al otro lado del ángulo y que su centro estará en el punto de intersección de la bisectriz y la transversal (ver Tabla 10).

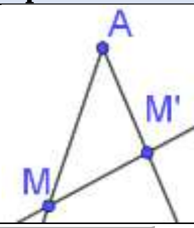
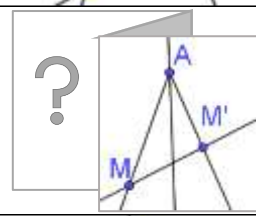
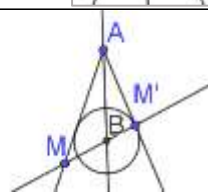
Objetos de la construcción[13]	Construcción lápiz y papel	
	Representación de lo descrito o de lo que muestra la imagen que acompaña la solución	**Descripción realizada en el cuestionario**
$\angle MAM'$ con medida α y recta transversal MM'		“se tiene un ángulo α … se traza una transversal a los lados y corta en dos puntos a los lados M y M'”
Bisectriz del ángulo dado		“Trazamos la bisectriz x al ángulo”
Circunferencia tangente a los lados del ángulo por M'.		“Trazamos una circunferencia que sea tangente ya sea al punto M o al M' con centro sobre la bisectriz”

Tabla 10. Propuesta en el cuestionario de Sofía para la primera construcción

En la entrevista lo primero que se le pregunta a Sofía es por qué usó la bisectriz, a lo que ella afirma que:

S: Porque la bisectriz me va a dar todos los puntos que equidistan de ambos lados (…) Ah, ya me acordé, aquí lo que yo dije fue que todos estos puntos (señala la bisectriz) equidistaban de este y de este (señala los lados del ángulo) [… …]Entonces es éste (señala el puto de intersección de la bisectriz y la transversal)

La construcción de Sofía está mediada por su conocimiento teórico. Ella logra presentar un argumento deductivo, ya que *concluye* que el punto de intersección entre la bisectriz y la transversal equidista de los lados del ángulo porque existe una *regla general* vinculada a la bisectriz que permite afirmar dicha equidistancia. De modo que su *intención* es usar a la bisectriz como una herramienta que le permite garantizar la equidistancia a cada uno de los lados.

[13] En la construcción, algunos de los nombres de los puntos fueron incluidos debido a que la construcción original no los tenía.

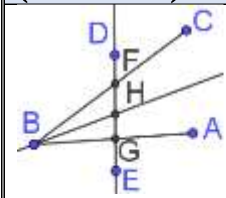
Representación (GeoGebra)	**Descripción de la construcción realizada**
	Construye el ángulo ABC (utilizando segmentos) y su bisectriz (utilizando el menú de GeoGebra); después de ello construye una transversal $\overleftrightarrow{ED}$ de modo que los puntos F y G resultan ser puntos de la transversal y de los lados del ángulo, y F como la intersección entre la transversal y la bisectriz.

Tabla 11. Construcción que apoya la equidistancia de la bisectriz

La entrevista continúa con preguntas vinculadas a la posibilidad de ofrecer una prueba de que la bisectriz equidista de los lados del ángulo, por lo que ella decide hacer una construcción en GeoGebra (ver Tabla 11) en la que surge la siguiente conversación:

S: Así yo lo probaría, diciendo que encontré un punto que está sobre la transversal y que a su vez equidista de ambos lados.
E: Y, ¿cómo sé que equidista?
S: Pues porque puedo dibujar esta circunferencia con centro aquí (señala H) y que es tangente a este y a este (señala los dos lados del ángulo)
E: Ok, y ¿el poder dibujar esa circunferencia me permite saber equidistancia?
S: Ah, pues porque la distancia del centro a cualquier punto, pues es la misma, desde aquí, que desde aquí (señala dos puntos de la circunferencia que dibujó **en el cuestionario**, ya que no la ha construido en GeoGebra)

En esta parte se puede ver como Sofía intenta realizar el mismo argumento que Camilo cuando se le solicitó probar la equidistancia de los puntos de la bisectriz (ver argumento vinculado a la Tabla 4). Sin embargo, Sofía aún no posee los *datos* que permitieron a Camilo garantizar la equidistancia a partir de la bisectriz. Dichos datos eran provenientes de una *respuesta* del medio digital que co-acciona al trazado de una circunferencia tangente a uno de los lados. En el caso de Sofía, ella no posee dicha respuesta del medio, pero prevé que la tangencia entre los lados del ángulo y la circunferencia es algo que se va a presentar. Esta anticipación puede deberse a una representación mental muy arraigada a su cognición o a su experiencia en el uso de la bisectriz para garantizar equidistancia.

Sofía intenta trazar una circunferencia con centro en H y radio FH; sin embargo, la *respuesta* que da el medio digital al trazado de dicha circunferencia es que la tangencia a los lados del ángulo no es una característica que se presenta, de modo que la co-acción con el medio digital empleado "invita" a Sofía a que reformule su acción ya que le permitió poner a prueba su *anticipación*. En ese sentido, Sofía decide construir una recta perpendicular a BC por H determinando al punto J

(ver Figura 6), de manera que ahora sí logra construir una circunferencia tangente a los lados del ángulo.

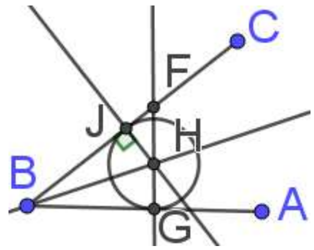


Figura 6. Circunferencia tangente realizada por Sofía

Mientras Sofía realiza su construcción la conversación que se da con la entrevistadora es:

E: Y, ¿cómo sabes que tiene que ser con la perpendicular?
S: Porque, para que sea tangente, tengo que hacer una perpendicular. (construye la circunferencia con radio HJ). ¡Ah!, que interesante.
E: ¿Qué te parece interesante?
S: Que ésta es la perpendicular (señala la recta JH) y ésta es la transversal (señala la recta FG). Entonces va a ser tangente a este punto que lo hice con la perpendicular (señala J) y a este punto que lo hice con la transversal (señala G) [ella cree que el punto de tangencia de la circunferencia con el segmento BA resulta ser un punto de la transversal y reafirma su creencia de que la circunferencia es tangente por uno de los puntos de la transversal, tal y como lo muestra en su reporte (ver Tabla 10). Sin embargo, mueve los puntos del ángulo, y aunque inicialmente parece que se cumple la tangencia por G, logra ver un caso en el que no]
No, no siempre, aquí no se cumple, es tangente a este (señala J) pero a este no (señala el punto G) [...] Pero si sigue siendo tangente al ángulo (...) a los lados del ángulo.

En esta parte se ve como la herramienta reacciona (co-acciona) al trazado de la circunferencia tangente, pero la anticipación que Sofía realizó en el cuestionario parece estar fuertemente arraigada a su cognición. Por lo tanto, aunque ha *incorporado* o interiorizado por lo menos parcialmente el medio digital como uno de sus instrumentos cognitivos, sus anticipaciones dentro del papel y lápiz parecen ser más fuertes y por esto es por lo que inicialmente no mueve los puntos de la construcción. Es como sí lo estuviera haciendo “a mano” la construcción y fuera su voluntad la que hace pasar la circunferencia tangente por el punto G. Pero, las ventajas del medio hacen que pueda utilizar su razonamiento abductivo y encontrar un caso que le permite contrarrestar su hipótesis. De modo que al final deja de lado la idea de que la circunferencia es tangente por los puntos de la transversal y se enfoca en lo que realmente sostiene a su argumento, que es la *respuesta* del medio digital que le permite afirmar que al trazar la circunferencia tangente a uno de los lados del ángulo esta resulta tangente al otro lado.

La entrevistadora le pregunta a Sofía si la única forma de obtener el punto H es construyendo la bisectriz, así que ella decide hacer la recta perpendicular al otro lado del ángulo notando que las dos perpendiculares y la bisectriz concurren en H. En este caso, su razonamiento está mediado por las respuestas del medio digital que le permiten encontrar un camino para proceder, el cual hace explícito cuando dice:

S: Si trazando alguna de estas rectas (señala las dos rectas perpendiculares) me da este punto de aquí, y ese punto va a ser parte de la bisectriz.

La estrategia de Sofía se basa en la construcción de las dos rectas perpendiculares a los lados del ángulo. Ella empieza su construcción en GeoGebra a partir de un ángulo NML y una recta perpendicular por O que es un punto cualquiera de NM, pero cuando intenta hacer lo mismo en ML nota que el "pie" de la perpendicularidad no puede ser ubicado aleatoriamente cuando dice "No puede ser cualquiera". Ella empieza a usar GeoGebra como un medio para guiar su razonamiento, ya que construye un punto P en LM y la recta perpendicular a dicho segmento por P; llama Q a la intersección de las dos perpendiculares y construye la circunferencia con centro en Q y radio QO; por último, mueve a P hasta que parece que la circunferencia es tangente a ML por P (ver Figura 7).

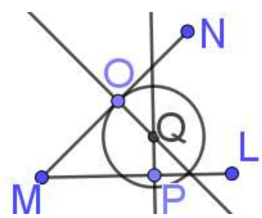


Figura 7.Estrategia en la búsqueda de la construcción de la bisectriz

En esta parte se ve como el medio digital al ser ejecutable "invita" al actor (estudiante) a que le formule preguntas y como respuestas le ofrece una exactitud visual de los trazos. Y gracias a ello es que se le ocurre hacer una circunferencia con centro en M y radio MO después de mover el punto P (por un largo rato) con el fin de caracterizarlo para que resulte ser punto de tangencia de la circunferencia.

E: Y esa circunferencia, ¿por qué se te ocurrió?

S: ¡Ah, sí, si dio! ¿por qué? Porque es lo único que veo.

Con su expresión se puede ver que Sofía ha interiorizado al medio como uno de sus socios cognitivos, el cual sirve como mediador entre ella y el saber geométrico que le permite encontrar el punto P de forma robusta. La prueba que ofrece de que cuando P y O equidistan de M entonces

Q es punto de la bisectriz se basa nuevamente en la construcción de una circunferencia tangente a los lados del ángulo, quedándose nuevamente en ilustrar a partir del movimiento de los puntos de la construcción que efectivamente la circunferencia resulta ser tangente a los dos lados del ángulo.

Juan

Juan al igual que sus compañeros usó la bisectriz como una herramienta (ver Tabla 12) para encontrar el punto B buscado. El argumento que presenta es de tipo deductivo ya que *a partir* de decir que "como B está en b" —es decir en la bisectriz— entonces *concluye* que "B es el punto sobre la transversal que equidista de los lados del ángulo". Aunque no menciona que esto se debe a uno de los teoremas asociados a la bisectriz, los datos y la conclusión son tan cercanos al mismo que su uso parece innegable. De modo que en este caso la bisectriz juega el papel de una herramienta que permite encontrar puntos que equidistan de los lados del ángulo, y el uso de dicha herramienta está mediado por el conocimiento que Juan posee.

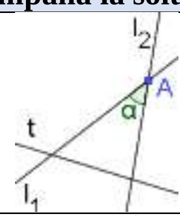
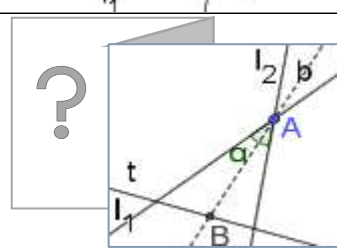
Objetos de la construcción[14]	**Construcción lápiz y papel**	
	Representación de lo descrito o de lo que muestra la imagen que acompaña la solución	**Descripción realizada en el cuestionario**
Ángulo α y recta t transversal a sus lados.		"Sea α un ángulo con vértice en A y lados l_1 y l_2. Sea t una transversal a esos ángulos"
b bisectriz de α		"Trazamos b, la bisectriz de α y llamemos B al punto de intersección de b y t"

Tabla 12. Propuesta en el cuestionario de Juan para la primera construcción

Durante la entrevista se le pregunta a Juan sobre la justificación de su construcción y su respuesta es:

J: La justificación puntual es esta (…). Nos pides, bueno en general nos pides algo que tenga cierta propiedad y yo tengo que justificar que esa propiedad está en mi construcción con alguna cosa de las que sé, digamos, con algún teorema, algún resultado. En este caso es

[14] Algunos de los nombres de los puntos fueron incluidos debido a que la construcción original no los tenía.

> que, nos pides un punto que equidiste de los lados […] y sabemos que los puntos equidistantes de los lados del ángulo están (…) son los de la bisectriz. Entonces sabemos que va a haber una bisectriz. Y entonces tenemos la bisectriz y la transversal, entonces, el único punto que esta sobre la transversal que cumple que equidista de los lados, pues es el que también está en la bisectriz.

En esta parte se puede notar que las acciones de Juan sobre la construcción están mediadas por su conocimiento de que los puntos que se encuentran a la misma distancia de los lados de un ángulo son los de la bisectriz. Es decir, dicho objeto geométrico ya se ha complementado con una visión desde el punto de vista de la utilidad y ha sido interiorizado como una herramienta que le *sirve para*….

A diferencia de sus compañeros, cuando se le preguntó a Juan sobre por qué estaba tan seguro de que los puntos de la bisectriz equidistaban de los lados del ángulo dijo: "Bueno, ya en este nivel, lo puedo tomar como propiedad", y en ese sentido no ofreció ninguna prueba de dicho hecho. La entrevista continuó preguntándole a Juan cómo había obtenido la bisectriz, y su respuesta fue:

> J: ¡Ah!, no lo obtuve de hecho […] La bisectriz la trazamos tomando un compás poniéndola en el ángulo [se le solicita que la construya y decide hacerlo en GeoGebra]

La construcción que presenta Juan en GeoGebra es la misma presentada por Ana (ver Tabla 8) y su argumentación al igual que la de Ana fue de tipo deductivo y se basó en probar la congruencia de dos triángulos que se forman, por lo tanto para efectos de este documento no se ve la necesidad de repetir el análisis que se realizó con la construcción de Ana.

María

María al igual que sus compañeros usa la bisectriz para poder realizar su construcción. Esta última se encuentra cargada de su conocimiento teórico, ya que logra *concluir* que debe hacer uso de la bisectriz (ver Tabla 13) gracias a un conocimiento que posee y que exterioriza al escribir "Teniendo en cuenta que cualquier punto sobre la bisectriz de un ángulo equidista de sus lados, entonces se traza la bisectriz del ángulo ABC".

A diferencia de sus compañeros María ofrece en el cuestionario una prueba deductiva de la equidistancia de los puntos de la bisectriz a los lados del ángulo cuando escribe:

"La justificación de que P equidista de los lados se basa en demostrar la congruencia de los triángulos BDP y BEP, pues comparten el lado BP, los ángulos 1 y 2 son congruentes ya que la recta BP es bisectriz del ángulo ABC, y como los ángulos 3 y 4 son rectos, entonces por el criterio de congruencia LAA, se tiene la congruencia de los triángulos, por lo tanto $DP = EP$".

En dicho escrito se ve cómo María logra *concluir* los ángulos 1 y 2 son congruentes *dado que* BP es bisectriz del ángulo ABC, y el hecho matemático en el que se basa es en la *definición de bisectriz*. Posteriormente *concluye* que los ángulos 3 y 4 son congruentes *dado* que son rectos y una propiedad que cumplen es que todos los ángulos rectos son congruentes entre sí. Ahora bien, utilizando las dos conclusiones anteriores y que los triángulos comparten un lado logra la congruencia de los triángulos como una *conclusión general*, usando como *regla general* el criterio de congruencia de triángulos lado-ángulo-ángulo. Conectando todas las conclusiones, de modo que logra formar una red de argumentos de tipo deductivo que le permiten probar el hecho deseado.

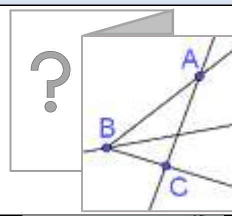
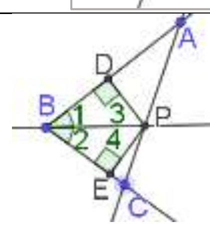
Objetos de la construcción[15]	**Construcción lápiz y papel**	
	Representación de lo descrito o de lo que muestra la imagen que acompaña la solución	**Descripción realizada en el cuestionario**
$\angle ABC$ y $\overleftrightarrow{AC}$ transversal Bisectriz del $\angle ABC$		"se traza la bisectriz del ángulo ABC, el punto de intersección entre la bisectriz y la transversal será el punto que equidista de sus lados"
P punto de intersección de la bisectriz y la transversal.		

Tabla 13. Propuesta en el cuestionario de María para la primera construcción

Al comenzar la entrevista, se le cuestiona a María sobre el usó la bisectriz en su construcción, y ella dice:

María: Porque yo sé que la bisectriz (…), no sé si es un teorema, que cualquier punto de la bisectriz equidista de los lados […] por eso decía que el punto de intersección entre la bisectriz y la transversal va a ser un punto que equidista de los lados.

María presenta las razones de por qué su construcción funciona, ya que menciona que el punto de intersección de la bisectriz y la transversa *cumple* con que equidista de los lados del ángulo *gracias* a que la bisectriz es el lugar geométrico que cumple dicha condición. De modo que su idea de

[15] Algunos de los nombres de los puntos fueron incluidos debido a que la construcción original no los tenía.

construcción está tan vinculada con su argumentación de por qué esta funciona que es difícil ver la diferencia entre estas.

La entrevistadora continúa preguntándole a María cómo haría la construcción de la bisectriz lo más exacta posible, ya que según ella no hizo la construcción exacta. Y su respuesta es: "Uy! yo no me acuerdo como se hace ¿con regla y compás?", exhibiendo que este es un saber adquirido memorísticamente.

María hace un esfuerzo con su memoria y propone una construcción en GeoGebra (ver Tabla 14) la cual desencadena la siguiente conversación:

M: No sé si esta recta (señala la recta AF) sea bisectriz
E: No sabes, ¿cómo podríamos saberlo?
M: Pues midamos los ángulos (Mide los ángulos $FAD \, y \, EAF$ y arrastra el punto D comprobando que la medida se mantiene). Parece que sí (…) que sí es bisectriz
E: ¿Parece que sí? ¿Por qué lo dudas?
M: Porque es que pueda que la construcción que hice sea solamente para este caso particular del ángulo, no sé (mueve el punto C y la medida de los ángulos cambia, pero sigue siendo la misma entre ellos). Pero sí, sí es bisectriz

En este caso GeoGebra presenta una *respuesta* a la *acción* de medir los ángulos mostrando una igualdad entre sus medidas, de modo que las gráficas estructurales del medio digital apoyan el razonamiento de María y le sugieren que los pasos que recordó son los apropiados. Sin embargo, para ella dicha igualdad solo le permite tener completa certeza de que su construcción es cierta, más no constituye una prueba de por qué funciona ni lo considera suficiente para poder probar que efectivamente su construcción funciona.

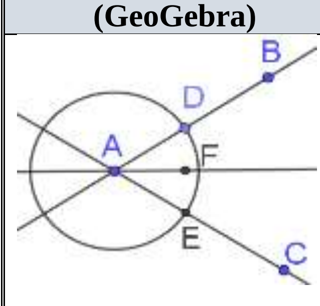
Representación (GeoGebra)	**Descripción de la construcción realizada**
	Construye las rectas $AB \, y \, AC$ para formar el ángulo BAC, luego un punto D sobre la recta AB y construye la circunferencia con centro en A y radio AD. Después, genera el punto de intersección E como punto de intersección de la circunferencia y la recta AC. Por último construye el punto F como el punto medio de DE, el cual le permite determinar la recta AF.

Tabla 14.Construcción de la recta bisectriz por parte de María

La entrevistadora cuestiona a María sobre cómo podría probar que la recta construida es efectivamente la bisectriz y surge la siguiente conversación:

M: Tendría que llegar a que este ángulo es igual a este ¿no? (señala los ángulos $FAD\ y\ EAF$) entonces, podría ser, ver los triángulos $ADF\ y\ AEF,$ entonces yo sé que el lado AD es igual al lado AE porque así lo construí […] Bueno, son radios de la misma circunferencia en este caso, entonces son congruentes. Este es punto medio (señala el punto F) […] el lado DF es igual al lado FE, por ser punto medio. Entonces ya tengo un lado, un lado, debería tener (…) el ángulo entre ellos y no se (… …) no sé por qué ese ángulo, por qué el ángulo ADF podría ser congruente con el ángulo AEF (… …)
E: ¿Es la única forma?
M: […] pues conozco, bueno, los criterios son lado-ángulo-lado, lado-ángulo-ángulo […] y los tres lados, ¡entonces ya! tengo los tres lados iguales, entonces por lo tanto
E: ¿Cuál es el tercero?
M: El AF, lo comparten […] Entonces como ya esos triángulos serian congruentes, entonces el ángulo DAF es congruente con FAE, por lo tanto AF sería bisectriz.
E: Ok, ¿eso te lo da la congruencia de triángulos?
M: Sí.
E: La congruencia dice que si dos triángulos son congruentes entonces puedo concluir directamente una bisectriz.
M: No, solo puedo concluir la congruencia de los ángulos
E: Ah ok
M: Y pues yo sé que la bisectriz divide un ángulo en dos ángulos iguales

En general, el proceso de construcción de María ha pasado de su memoria a la pantalla, la cual le permitió corroborar que la recta AF efectivamente se cumple la definición de bisectriz para después proponer una prueba deductiva. En la prueba, el uso de la gráfica estructural que presenta GeoGebra pasa a ser el mismo de una imagen en papel y lápiz en donde se buscan conectar las observaciones de la figura con hechos que le permitan probar la congruencia de los ángulos. Dicha articulación es lograda por María, se ve presente durante todo su discurso, el cual la lleva a *concluir* que AF es bisectriz del ángulo BAC porque los ángulos FAD y FAE son congruentes al ser partes de triángulos congruentes —haciendo uso de la *definición* de bisectriz y de triángulos congruentes —. Para establecer la congruencia de los triángulos FAD y FAE María usa explícitamente el *criterio* de congruencia lado-lado-lado, gracias a que logró determinar que los triángulos comparten un lado y poseen dos lados congruentes (AD con AE porque "son radios de la misma circunferencia" y DF con FE porque F "es punto medio").

4.2. Construcción 2

En la segunda actividad se les propone a los participantes construir un triángulo dado uno de sus lados y la bisectriz adyacente a este. De modo que los participantes debían idear la manera de construir el otro lado del triángulo que es adyacente a la bisectriz de tal manera que al formar un ángulo con los dos lados del triángulo (el dado y el construido) su bisectriz resulte ser la bisectriz dada desde el inicio.

Para esta actividad se presentaron tres tipos de soluciones diferentes, en la primera los participantes construyeron una circunferencia con centro en un punto de la bisectriz y la recta tangente a dicha circunferencia; en la segunda buscaron garantizar la equidistancia de uno de los puntos de la bisectriz a los lados del ángulo; y en la tercera usaron transformaciones en el plano como la simetría axial y la rotación.

4.2.1. Tangente a circunferencia

En esta construcción los participantes trazaron una circunferencia con centro en un punto de la bisectriz de manera que fuese tangente al segmento dado y se esforzaron en encontrar la recta que pasa por uno de los extremos de segmento inicial y que es tangente a la circunferencia. Sin embargo, la forma en que cada uno de los participantes logró determinar la recta tangente fue diferente, por lo que se hace un análisis individual de cada una de sus producciones.

René

Para su construcción René realiza dos circunferencias con centros en la bisectriz y menciona que A es su centro de homotecia, de modo que los dos lados del ángulo resultan ser tangentes a las circunferencias construidas (ver Tabla 15). Él en ningún momento justifica por qué AF resulta ser la bisectriz del ángulo HAB, además de que lo que presenta es un dibujo que no posee ninguna característica geométrica que se haya garantizado con algún instrumento como el compás. Sin embargo, se puede notar que su saber asociado a la homotecia (bien sea una imagen mental o la definición misma) le hace pensar en el uso de la recta tangente para darse una idea de cómo encontrar el lado faltante.

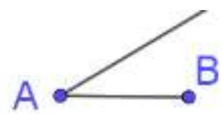
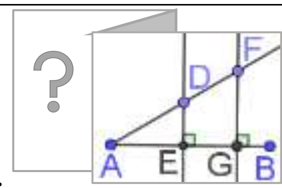
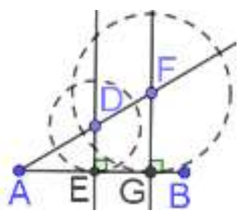
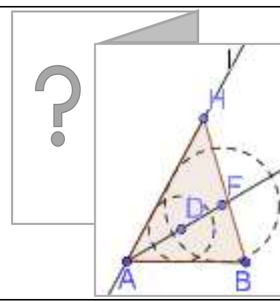
Objetos de la construcción	Construcción lápiz y papel	
	Representación de lo descrito o de lo que muestra la imagen que acompaña la solución	**Descripción realizada en el cuestionario**
$\overline{AB}$ y recta que pasa por A de modo que el ángulo que forma con $\overline{AB}$ es α (ángulo adyacente al lado)		
Rectas perpendiculares a $\overline{AB}$ por D y F que son puntos de la bisectriz	 .	"Se toma un punto en la bisectriz, D, y se traza la perpendicular a $\overline{AB}$ por D. Se repite el proceso para obtener los puntos E y G sobre $\overline{AB}$"
Circunferencia con centro en D radio DE; y circunferencia con centro en F radio FG		"Se trazan las circunferencias con radio definido por $\overline{DE}$ y $\overline{FG}$, por los centros D y F respectivamente. A termina siendo el punto de homotecia de ambas circunferencias"
Recta tangente a las circunferencias		"Llamemos l a la otra tangente a las circunferencias [se refiere a la que no contiene a $\overline{AB}$]. Al tomar un $H \in l$, el triángulo ABH tendrá $\overline{AB}$ como lado, y como a 2α "

Tabla 15. Propuesta en el cuestionario de René para la segunda construcción

En la entrevista cuando se le pregunta a René por qué la construcción de la bisectriz es correcta, su respuesta es:

R: Estoy usando el hecho de que la bisectriz es el conjunto de los puntos que equidista de los dos lados del ángulo.

Lo cual parece referirse a que la semirrecta AD es la bisectriz del ángulo HAB ya que sus puntos (D y F) equidistan de cada uno de los lados del ángulo. En este caso René está abusando del hecho de que, al construir la recta tangente a las dos circunferencias ésta va a "pasar" por el punto A, de modo que lo que tiene hasta el momento es un camino de solución que ha sido *mediado* por su conocimiento asociado a la homotecia.

Cuando la entrevistadora le pregunta a René sobre los elementos necesarios para su construcción, él dice: "Pues, la perpendicularidad; saber hacer una circunferencia y una de las propiedades de la bisectriz", lo que da paso a que la entrevistadora le pregunte cómo construyó las rectas perpendiculares a AB, y su respuesta fue:

R: Dada cualquier circunferencia que pase por D y corte a AB, la perpendicular por D va a estar en el punto medio de donde corta [… …] Porque estoy abusando del hecho de que lo que va a quedar es un triángulo isósceles.
E: Muéstrame
R: Si, digamos por acá pasa la circunferencia con centro en D (*dibuja* una circunferencia con centro en D, de modo que interseca a AB en dos puntos) entonces aquí, esto va a medir lo mismo que esto (construye los segmentos entre dichos puntos de intersección y D — ver Figura 8). Y aquí va a ser la misma propiedad de usé en el primero, la altura por este (señala DE) va a ser la misma que la bisectriz, que la mediatriz y que la mediana.

No se puede afirmar con certeza que el proceso de construcción de René estuviese mediado por su conocimiento teórico, ya que puede ser una construcción que tiene memorizada. Sin embargo, su argumento es de tipo deductivo, ya que en sus intervenciones hace alusión a que el triángulo construido es isósceles porque dos de sus lados son radios de una circunferencia con centro en D, y la *regla general* —no explícita — que apoya su conclusión es la definición de triángulo isósceles. Ahora bien, después de tener que el triángulo es isósceles como *dato*, usa un *hecho* que mencionó en la primera actividad sobre la coincidencia de ciertas líneas notables en un triángulo isósceles (para este caso la mediana con la mediatriz y/o altura), todo para poder *concluir* que al hallar el punto medio de KJ la recta DE va a ser la perpendicular al segmento KJ por el punto D .

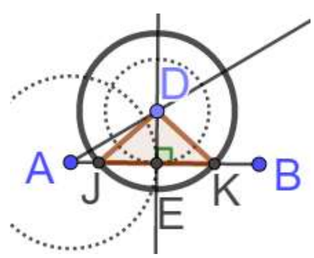


Figura 8. Dibujo en papel de la recta perpendicular a un segmento por un punto exterior

Después de cuestionarlo sobre cómo realizar la recta perpendicular a AB, y por ende la circunferencia tangente a dicho segmento, la pregunta que resulta pertinente es cómo obtener la recta tangente a las circunferencias con centro en D y F a la que pertenezca A. En esta parte de la conversión René afirma que solo es necesaria una de las circunferencias y que la forma de construir la recta tangente es la siguiente:

R: La distancia que se preserva de aquí a acá (señala AE) va a estar del otro lado también (…) Entonces si repito esta distancia, ya sabiendo el punto de tangencia aquí (señala E), entonces, digamos trazo esta circunferencia (construye circunferencia con centro A y radio AE). Entonces donde se corte la circunferencia con centro en D con esta circunferencia, va a ser el punto de tangencia.

De acuerdo con la propuesta de René el otro lado del triángulo está en la recta que contiene a A y es tangente a la circunferencia con centro en D y radio DE (diferente de AB), y la forma en que propone encontrarla es ubicando el punto de intersección de dicha circunferencia con la circunferencia de radio AE y centro en A (ver circunferencias punteadas en Figura 8). La construcción de la circunferencia con centro en A surge porque René al inicio de su intervención afirma que el punto buscado se va a encontrar a la misma distancia de A que E, y cuando la entrevistadora le pregunta cómo sabe que esa característica se debe cumplir dice:

R: Pues realmente es congruencia de triángulos [*Dibuja* en el papel un ángulo ABC cualquiera y un punto D, el cual afirma que es centro de una circunferencia tangente al ángulo por A y C, y por último construye los segmentos DA y DC — ver Figura 9]. Entonces, 90 grados, 90 grados (señala los ángulos BAD y BCD), mismo tamaño al ser radios (señala AD y DC) y mismo ángulo (señala los ángulos BDA y BDC).
E: Y ¿por qué ese mismo ángulo?
R: No, pues ya tendría este mismo lado (señala el lado BD). Y, pues dos lados iguales en triángulo rectángulo me implican que el tercero es igual.
E: Y, ¿por qué en triángulos rectángulos implica que el tercero es igual?
R: Por teorema de Pitágoras
E: Ah, por el teorema de Pitágoras, ¿cómo lo usarías?
R: Pues despejando el tercer lado […] tienen que ser igual. Entonces ésta distancia (semana BA) es igual a esta distancia (señala B).

En respuesta al cuestionamiento de la entrevistadora, René decide probar que *si* una circunferencia es tangente a los lados de un ángulo *entonces* los puntos de tangencia equidistan del vértice. Con dicho objetivo decide realizar un *dibujo* (ver Figura 9) y usar como *datos* las respectivas congruencias entre las hipotenusas y uno de los catetos de dos triángulos rectángulos para *concluir* que el tercer lado debe ser congruente gracias al *teorema* de Pitágoras. Para tener los datos mencionados, René menciona que AD y CD son congruentes “al ser radios” de la misma circunferencia (uso de *definición* de circunferencia y equidistancia), y que la hipotenusa BD es común a ambos triángulos.

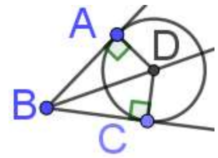


Figura 9. Representación para probar que $AB = BC$

En general René no construye con regla y compás la otra recta tangente a la circunferencia (que era su objetivo desde su propuesta en el cuestionario), sino que presenta sus ideas de construcción con dibujos cuya validez se apoya en los argumentos deductivos que presenta. Sin embargo, nunca prueba por qué al encontrar dicha tangente se cumple que la bisectriz del ángulo que se forma coincide con la dada por el enunciado. Dicha prueba que parece tener poca relevancia para él, tal vez porque al ser rectas tangentes a la circunferencia es evidente que el centro equidista de los puntos de tangencia, lo que conlleva a un uso inmediato del hecho de que los puntos de la bisectriz equidistan de los lados del ángulo.

Camilo

Al igual que la construcción de René, la propuesta de Camilo se basa en encontrar una recta que sea tangente a una circunferencia que tiene centro en la bisectriz y que es tangente al lado dado por el enunciado. En el cuestionario Camilo no reporta el por qué se puede afirmar que la semirrecta BP es la bisectriz del ángulo MBK (ver Tabla 16). Lo único que él escribe en su cuestionario es que: "M al ser un punto de tangencia satisface que PM es perpendicular a la recta tangente. M es un punto sobre el otro lado del triángulo.", lo que parece más una apreciación que un argumento que justifique su construcción.

En el cuestionario Camilo solo presenta las ideas esenciales de su construcción, que se centran en obtener la recta perpendicular a BC y la recta BM que es tangente a la circunferencia con centro en P. Así que cuando se le pregunta por la primera de estas él dice:

C: Creo que ya se me ocurre como hacerlo. Tomamos este segmento PC, el P es el punto que elegí, y lo que hago es ubicar este punto medio entre PC (al que llama O), y lo que hago es trazar una circunferencia con centro en ese punto O y radio este segmentito que está acá (señala PO) [...] Entonces eso me construye una circunferencia, y entonces lo que hago es que este es el triángulo rectángulo que yo quiero (señala el triángulo PKC) —ver Figura 10—. Entonces trazo esa circunferencia y busco dónde esa circunferencia interseca al segmento a, y donde interseca, es el punto por donde tiene que pasar la perpendicular. Porque, este triángulo que está acá es un triángulo rectángulo. Y todo triángulo rectángulo, digamos, vive dentro de una circunferencia.

E: Vive dentro de una
C: Sí, o sea, el vértice será inscrito y esto es un diámetro (señala PC).

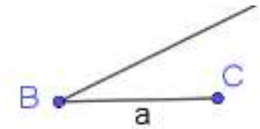
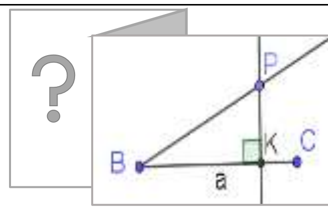
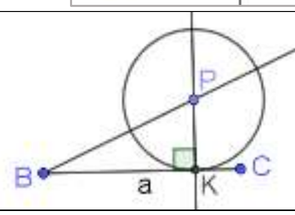
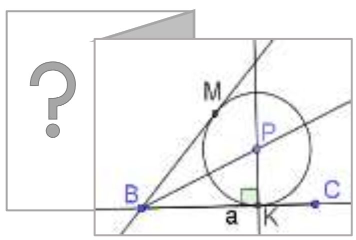
Objetos de la construcción	Construcción lápiz y papel	
	Representación de lo descrito o de lo que muestra la imagen que acompaña la solución	**Descripción realizada en el cuestionario**
Segmento a con extremos en B y C ; y una semirrecta que pasa por B [la bisectriz dada]		"supongamos que se conoce a y la bisectriz que parte de B"
un punto P que pertenece a la bisectriz y recta perpendicular a $\overline{BC}$ por P		"Una vez se elige P, se traza una perpendicular al lado a que pase por P y llamemos K al punto de intersección de la recta perpendicular con a"
Circunferencia que resulta ser tangente al segmento dado.		"trace la circunferencia con centro en P y radio PK"
Recta tangente a la circunferencia por B y M punto de intersección de la circunferencia con la tangente.		"Ahora considere la recta tangente a la circunferencia trazada que pase por B . La recta tangente y la circunferencia coinciden en un punto M […] BM determinará el otro lado del triángulo"

Tabla 16. Propuesta en el cuestionario de Camilo para la segunda construcción.

La propuesta de Camilo está *mediada* por su conocimiento teórico, el cual parece hacer alusión al *hecho* de que si en un triángulo uno de sus lados es diámetro de una circunferencia y su vértice opuesto está sobre la circunferencia entonces el triángulo es rectángulo. Dicho conocimiento se ve presente cuando él dice que todo triángulo rectángulo "vive" dentro de una circunferencia y que PC es su diámetro. En este caso, la prueba está relacionada con la construcción, ya que se centra en *concluir* que el triángulo PCK es rectángulo con ángulo recto en K por el *hecho* mencionado anteriormente. Por lo que parece ser que cuando la construcción está *mediada* por los teoremas conocidos por el sujeto se presenta una relación estrecha entre la construcción (como conjetura) y los argumentos que la apoyan.

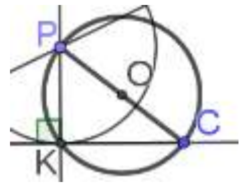


Figura 10. Construcción de una perpendicular por Camilo

La entrevista continúa con la pregunta sobre cómo determina el punto M ya que es el que le permite realizar la recta tangente a la circunferencia, y su respuesta es:

C: Lo que yo le pido al M que satisfaga es que ese M se convierta en punto de tangencia para lo que va a ser mi nuevo lado. O sea que al tomar la circunferencia (…) o sea, ¿por qué tomo la circunferencia?, porque yo sé que al ser bisectriz lo que a mí me dieron los puntos tienen que estar a misma distancia del lado a que me dieron y del nuevo lado que yo ando buscando (…) Solo que, ahora no sé cuál es ese punto [se refiere al M] eso es lo que no sé.

En esta parte se ve como Camilo usa su conocimiento teórico para afirmar que el lado buscado debe ser tangente a la circunferencia con centro en P, porque la bisectriz es el lugar geométrico de los puntos que están a la misma distancia del lado a y del lado buscado. Ahora bien, como Camilo afirma no saber cómo determinar el punto M en el papel decide hacerlo utilizando GeoGebra[16], de modo que con una de las herramientas del menú construye las rectas tangentes a la circunferencia que pasan por B. En este caso GeoGebra actúa como un auxiliar que construye estructuras que el participante no logra hacer en el papel pero que son cruciales para dar solución a la actividad.

Resulta interesante que cuando la entrevistadora le pregunta a Camilo sobre cómo puede probar que BP es la bisectriz del ángulo MBC no menciona la circunferencia que es tangente a los dos lados para probar que P es un punto de la bisectriz (porque es el lugar geométrico de los puntos que…), sino que decide enfocarse en primero probar que $MB = KB$ (igual a la propuesta de René usando el teorema de Pitágoras (ver argumentación vinculada a la Figura 9) para afirmar que en los triángulos MPB y KPB todos sus lados son congruentes (el lado PB es compartido y PK junto con PM son radios de la misma circunferencia).

C: Y entonces al ser congruentes, sus tres ángulos también son iguales, entonces el ángulo que está acá (señala MBP), y el que está aquí (señala KBP)es el mismo ángulo.

[16] En la construcción de GeoGebra los nombres de los puntos son diferentes a los utilizados en el papel. Sin embargo, por facilidad del lector se usarán los nombres que se encontraban en el cuestionario.

A pesar de que Camilo no presenta todos los hechos que respaldan a cada una de las conclusiones que le permiten llegar a la congruencia de los triángulos MPB y KPB se puede decir que su prueba en general es deductiva, ya que en sus conclusiones se ve la particularización de hechos conocidos dentro de la geometría Euclidiana, permitiéndole concluir que los ángulos MBP y KBP son congruentes a partir de la congruencia de dos triángulos (gracias a la *definición* de congruencia de triángulos).

4.2.2. Equidistancia

Esta es una construcción que fue realizada por uno de los participantes. La idea general se centra en construir una recta perpendicular a la bisectriz dada y buscar que el punto de perpendicularidad equidiste de dos puntos que estarán en la perpendicular y los lados del ángulo.

Juan

Juan en su construcción hace uso de una circunferencia y una perpendicular, pero a diferencia de los dos participantes anteriores, él no busca que la circunferencia sea tangente a los lados del ángulo (ver Tabla 17).

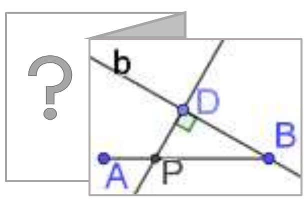
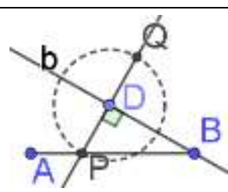
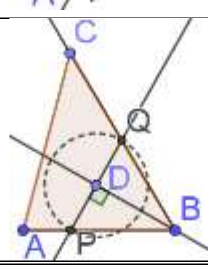
Objetos de la construcción	**Construcción lápiz y papel**	
	Representación de lo descrito o de lo que muestra la imagen que acompaña la solución	**Descripción realizada en el cuestionario**
$\overline{AB}$ y b la bisectriz dada Un punto D en la bisectriz, y recta perpendicular a b por D.		“Sea AB el lado conocido del triángulo y sea b la bisectriz conocida. Tomamos un punto D sobre b y trazamos una perpendicular. Sea P el punto en donde dicha perpendicular interseca a la recta AB”
Punto Q de manera que $DQ = DP$.		“Luego, sea Q el punto sobre esa perpendicular tal que $DP = DQ$ (Trazamos circulo con dentro en D y radio DP, e intersecamos con la recta DP”
C punto en $\overrightarrow{BQ}$		“$\overrightarrow{BQ}$ será un rayo sobre el cual estará el vértice C que cumpla las condiciones. Tomamos C cualquier punto en $\overrightarrow{BQ}$. Entonces ΔABC es el triángulo buscado

Tabla 17. Propuesta en el cuestionario de Juan para la segunda construcción

Como en su reporte Juan no muestra ningún argumento que apoye su anticipación de que los trazos realizados le permiten concluir que BQ es el otro lado del ángulo para el cual BD es bisectriz entonces lo primero que se le pregunta es cómo está tan seguro de que efectivamente dicha recta es la bisectriz, y su respuesta es:

J: Pues por las propiedades de la bisectriz. Ahí para justificar podría decir que Q es un punto que (…) no, no es cierto, no equidista. Este (…) porque los dos triángulos son congruentes, el BQD y BPD.
E: ¿Por qué son congruentes?
J: Porque comparten un lado que es este (señala DB) la base es la misma (señala DQ y DP) y el ángulo entre ellos es igual (señala los ángulos en D).
E: Ah, entonces ¿qué criterio estas usando?
J: Lado, ángulo, lado.
E: Entonces así concluyes que son
J: Congruentes, entonces, por lo tanto, esos dos ángulos son iguales (señala los ángulos QBD y DBP) […] Entonces hago esto, demuestro que los triángulos son congruentes y por lo tanto esta es bisectriz (señala DB).

Dicha respuesta deja entrever una prueba de tipo deductiva, ya que concluye que los triángulos BQD y BPD son congruentes usando el *criterio de congruencia* lado-ángulo-lado, gracias a que el lado BD es común a ambos triángulos, $DQ \cong DP$ — porque son radios de la circunferencia con centro en P — y que $\angle QDB \cong \angle PDB$ —porque son ángulos rectos. Ahora bien, gracias a la *definición* de congruencia de triángulos y de bisectriz (reglas que no hace explícitas) logra concluir que QBD y DBP y en consecuencia que DB es la bisectriz del ángulo CBA.

4.2.3. Transformaciones en el plano

Este tipo de construcción fue realizada por dos de las participantes, una de ellas propone ubicar un punto sobre el lado dado y hallar su simétrico respecto a la bisectriz, mientras que la otra participante propone rotar el lado dado a partir de uno de sus extremos con un ángulo muy específico. En ambos casos, se puede notar que las participantes buscaron usar herramientas que se encontraban en el menú de GeoGebra, pero que no se corresponden con el medio en el que fue propuesto el problema.

Sofía

Para poder realizar el triángulo solicitado, Sofía menciona explícitamente tener que hacer uso de GeoGebra (ver Tabla 18). Ella *anticipa* que al construir un punto sobre el lado conocido y hallar su simétrico respecto a la bisectriz el punto resultante va a ser un punto que está en el lado buscado. No se puede afirmar que la construcción de Sofía se encuentre mediada por su conocimiento teórico ya que no menciona algún hecho conocido por ella que le permita afirmar que la bisectriz es eje de simetría de los puntos que forman a los lados del ángulo.

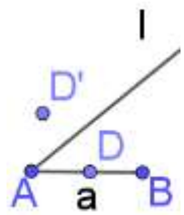
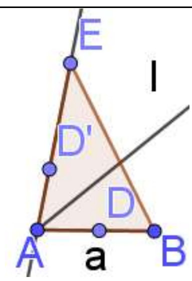
Objetos de la construcción[17]	**Construcción lápiz y papel**	
	Representación de lo descrito o de lo que muestra la imagen que acompaña la solución	**Descripción realizada en el cuestionario**
Lado a y la bisectriz l Punto en el lado a, y simetría de dicho punto respecto a l		"dado a y la bisectriz l del ángulo adyacente, para construir el triángulo, utilizaría GeoGebra […], situaría un punto sobre el lado a y aplicaría la herramienta de simetrías axial, reflejando el punto respecto a la bisectriz"
Recta que pase por el punto simétrico y el punto de intersección entre a y l		"Entonces trazo una recta que pase por el vértice del ángulo que se proporciona y que pase por el nuevo punto, y como puede ser cualquier triángulo, se une el otro extremo del lado a hacia cualquier punto del lado construido.

Tabla 18. Propuesta en el cuestionario de Sofía para la segunda construcción

La entrevista empieza cuestionando a Sofía sobre las propiedades qué se mantienen cuando se hace uso de la simetría axial y su respuesta es:

S: Creo que la distancia y el ángulo (…) respecto a algo, respecto a este (señala l).

En su intervención Sofía se refiere a que la distancia de los puntos D y D' al eje de simetría es la misma y en ese sentido el ángulo al que parece referirse es el que se determina cuando se halla la distancia de un punto a una recta (el cual es recto), sin embargo, también hay dos ángulos que están determinados por la bisectriz y las rectas que contienen a D y D' a los que ella podría estarse refiriendo. La entrevistadora le pregunta a Sofía sobre los ángulos a los que se refiere y ella parece ignorar la pregunta ya que decide hacer construcción en GeoGebra (ver Tabla 19).

[17] Algunos de los nombres de los puntos fueron incluidos debido a que la construcción original no los tenía.

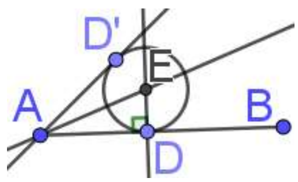
Representación (GeoGebra)	**Descripción de la construcción realizada**
	Construye el ángulo BAC (usando segmentos) y su bisectriz, después oculta el segmento AC (junto con el punto C) y ubica un punto D sobre el lado AB. Traza una recta perpendicular a dicho segmento por D y determina el punto E como el punto de intersección de la bisectriz y la perpendicular. Construye una circunferencia con centro en E y radio ED y por último el punto simétrico de D respecto a la bisectriz.

Tabla 19. Construcción realizada por Sofía en GeoGebra

Mientras Sofía está realizando su construcción, la entrevistadora le pregunta para qué hace la circunferencia y lo que dice es:

S: Para comprobarlo. Entonces yo encontraría este simétrico aquí (construye D' con la herramienta “simetría axial”) y luego ya trazaría de aquí a aquí (traza la recta AD'). Entonces, lo que yo haría aquí sería comprobar con el segmentito ese [se refiere a AC], o sea con el primero que hice, o sea si se sobrepone este segmento (deja de ocultar el segmento AC) con el que acabo de construir.

Por último, Sofía afirma que el tercer lado del triángulo puede estar en cualquier parte de la recta AD' ya que cumpliría con lo solicitado —que es tener $\overline{AB}$ como lado y $\overrightarrow{AE}$ como bisectriz de uno de sus ángulos—, y cuando la entrevistadora le pregunta cuál sería la prueba de que el triángulo cumple lo solicitado ella dice que “la que acabo de hacer”.

En esta parte se pueden ver dos momentos cruciales en la construcción de Sofía. El primero se da cuando el medio digital *re-acciona* (responde) al trazado del punto simétrico y de la recta AD', de modo que los trazos estructurales y la exactitud visual de los mismos hacen que el punto D' sea uno de los puntos de la circunferencia construida y que la recta AD' sea una recta tangente, lo que le permitiría afirmar que E es un punto de la bisectriz ya que se conserva su equidistancia a los lados del ángulo en A. Sin embargo, esto último no se puede afirmar con certeza ya que Sofía solamente dice que la construcción de la circunferencia es “para comprobarlo”.

El segundo de los momentos es cuando ofrece la prueba de que el lado construido es aquel que junto con el lado AB determinan la bisectriz dada, ya que hace visible el lado AC (a partir del cual se construyó la bisectriz) y la exactitud visual de los trazos en la pantalla permite que se dé una superposición, casi imperceptible, entre lado AD' y AC. De modo que en este caso GeoGebra actúa como un socio cognitivo cuya exactitud en los trazos (gracias a la geometría incrustada en el medio) le permite situar su argumento completamente en el medio digital, ya que no hace alusión a ninguna definición que le permita afirmar que la recta AE es la bisectriz del $\angle BAD'$ sino que basta con las construcciones estructurales que le brinda el medio digital.

María

María propone llamar α al ángulo que forman la bisectriz con el lado dado y construir un ángulo de medida 2α a partir AB (ver Tabla 18). Sin embargo, no menciona cómo construir dicho ángulo.

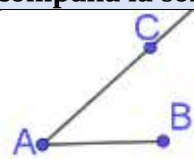
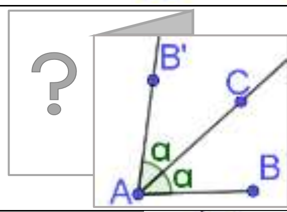
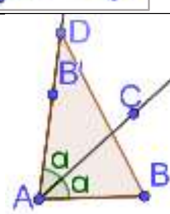
Objetos de la construcción	**Construcción lápiz y papel**	
	Representación de lo descrito o de lo que muestra la imagen que acompaña la solución	**Descripción realizada en el cuestionario**
$\overline{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$		"AB lado dado y $\overline{AC}$ bisectriz del ángulo"
$\angle BAB' = 2\alpha$		"Rotar el lado AB alrededor del punto A, con un ángulo de 2α, esta rotación genera la recta AB'"
ΔABD		"Sea D un punto sobre la recta AB', el triángulo ADB cumple con las condiciones dadas […] Cualquier punto sobre esta recta representa el otro vértice del triángulo"

Tabla 20. Propuesta en el cuestionario de María para la segunda construcción

Al empezar la entrevista María comenta que la construcción que propuso en el cuestionario fue pensando en el medio GeoGebra y no con regla y compás. Ella menciona que su idea se centra en rotar AB alrededor de A y con un ángulo de medida 2α para así poder encontrar el triángulo que cumple con las características. De modo que ha interiorizado a GeoGebra a tal punto que piensa la construcción como si esta se encontrara en el medio digital e inclusive nombra el segmento rotado como lo haría GeoGebra —a saber, el uso del apóstrofo ($'$) para diferenciar un punto de su rotación —.

La entrevistadora le pregunta a María si hay otra manera de realizar la construcción en el medio en el que le fue solicitada, en papel y lápiz, y ella dice:

M: Lo que se me viene ahorita a la mente es como volver a usar la (…) como que el teorema o la propiedad de la bisectriz de que cualquier punto equidista, entonces podría coger cualquier punto sobre la bisectriz en este caso que era AC (señala la representación gráfica de su cuestionario) y pues determino la perpendicular al lado adyacente [en este caso AB] y eso me va a cortar la bisectriz en un punto, entonces a partir de ese punto hago una circunferencia con centro en esa intersección que hice y radio ésta (señala lo que podría ser el segmento formado por el punto de intersección entre la perpendicular y la bisectriz y el “pie” de la perpendicular) entonces no sé si cualquier punto de esta circunferencia (…) o sea al unir cualquier punto de esa circunferencia con el punto A y B va ser un triángulo que cumple con esas condiciones.

En su discurso María deja ver que su construcción está mediada por su conocimiento teórico, ya que está buscando garantizar la equidistancia de un punto de la bisectriz a los lados del ángulo (el dado y el buscado). Ella afirma que el punto que desea encontrar está sobre la circunferencia que es tangente a AB, y aunque no menciona que también debe ser punto de tangencia de la recta que contiene a A ésta es una característica que se presenta al momento de hacer la construcción con regla y compás (ver Tabla 21).

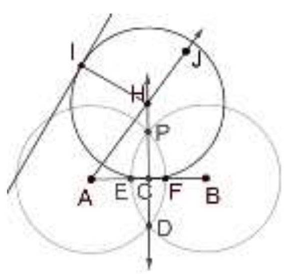
Representación (Papel y lápiz)	**Descripción de la construcción**
	Construye el ángulo BAJ (el lado AJ representa la bisectriz dada) luego construye la perpendicular PD (la genera con los puntos de intersección entre la circunferencia de centro en A y radio AF y la circunferencia de centro en B y radio BE, de tal manera que $AF = BE$). Se genera el punto de intersección H entre la perpendicular y la bisectriz para construir la circunferencia con centro en H y radio HC. Por último, construye el radio HI y la recta perpendicular a este que pasa por el punto I.

Tabla 21. Primer intento de construcción usando la equidistancia de la bisectriz

Mientras María realiza su construcción sostiene una conversación con la entrevistadora, quien en un primer momento le pregunta cómo sabe que la recta PC es perpendicular a AB con la construcción realizada, y ella dice:

M: Pues es que creo que la construcción lo que hace es que, es la mediatriz, estoy construyendo la mediatriz

E: […] Y ¿por qué la mediatriz?

M: Porque yo sé que la mediatriz es perpendicular al lado AB por el punto medio. Entonces así es que construyo la perpendicular

E: […]Pero ¿Por qué es mediatriz?

M: […] Pues lo que yo conozco de la mediatriz es que equidista (señala la distancia de P a A y la distancia de P a B), o sea cualquier punto de la mediatriz va a equidistar de los extremos A y B. Pero, no sé cómo justificarlo con la construcción que hice […] yo hice una circunferencia de radio AF, entonces AP va ser igual a AF, y luego hice una circunferencia de radio BE, entonces BE va ser igual a BP (…) y pues AF es igual a BE (…) pues sí, porque así lo construí ¿no? con la misma abertura del compás de acá a acá (señala del punto

A al punto F) y de acá a acá (señala del punto B al punto E), entonces por lo tanto son iguales (señala los segmentos PA y PB)

En esta parte, se ve como la construcción de la mediatriz se ha convertido en una herramienta que le permite a María construir rectas perpendiculares a un lado determinado. Inicialmente su construcción es presentada como un saber práctico que posteriormente logra consolidar como un conocimiento teórico cuando establece por qué la construcción realizada da como resultado la mediatriz de AB. Dicha prueba se centra en establecer que $PA \cong PB$ dado que son radios de circunferencias que fueron construidas con el mismo radio y aunque no menciona el uso explícito de la *definición* de circunferencia logra conectar sus argumentos de manera deductiva.

Continuando con su construcción María afirma estar buscando una recta que pase por A y que sea tangente a la circunferencia de centro en H cuando dice: "entonces tengo que buscar un punto sobre esa circunferencia (señala la circunferencia de centro en H y radio HC) de tal manera que H con ese punto y A formen también un ángulo recto.". Sin embargo, construye una recta tangente por un punto cualquiera de la circunferencia (usando la construcción de la recta perpendicular a un segmento), y al hacerlo nota que dicha recta no contiene a A y por lo tanto decide no continuar por ese camino. Si María hubiera realizado su construcción en el medio digital, es posible que el arrastre del punto I sobre la circunferencia junto con la exactitud de los trazos en GeoGebra le hubieran permitido establecer que A debía estar a la misma distancia de C y de I (del mismo modo que Sofía hizo en la primera actividad para construir la bisectriz —ver análisis asociado a Figura 7—).

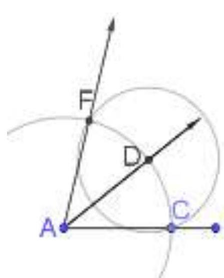
Representación (Papel y lápiz) [18]	**Descripción de la construcción**
	Construye el ángulo DAB (el lado AD representa la bisectriz dada); luego construye una circunferencia con centro en A y radio AC, generando el punto D como la intersección entre esta circunferencia y la bisectriz; después construye una circunferencia con centro en D y radio DC, generando el punto F como la intersección entre las dos circunferencias. Por último, construye el rayo AF.

Tabla 22.segundo intento de realizar la segunda construcción solicitada

[18] Algunos de los nombres de los puntos fueron incluidos debido a que la construcción original no los tenía.

María decide hacer una nueva construcción usando regla y compás (ver Tabla 22.). Al iniciar ella dice: "Quiero copiar este ángulo (señala el ángulo DAB) a partir de este (señala el lado AD)", por lo que al terminarla la entrevistadora le pregunta por qué puede afirmar la congruencia de los ángulos mencionados, y su respuesta es:

M: Pues lo construí así, copié esta medida (señala el ángulo DAB) acá (señala el ángulo FAD)
E: ¿Copiaste esa medida?
M: Con regla y compás ¿no? […] bueno la longitud del ángulo (señala el ángulo DAB) la copie acá (señala el ángulo FAD), teniendo en cuenta esta bisectriz (señala en lado AD)

Aquí María deja ver una idea intuitiva de que puede copiar la "longitud del ángulo" usando el compás, y aunque es una idea errónea la lleva a construir dos triángulos isósceles congruentes.

Continuando con el dialogo, la entrevistadora cuestiona a María sobre si el compás es un instrumento que se usa para copiar ángulos o longitudes. De modo que ella logra establecer que lo que copió fue una longitud cuando dice:

M: […]copie la longitud del lado DC acá (señala el rayo AF) […] entonces la distancia DC es igual a la distancia DF
E: ¡Ah!, eso sí, así sí te creo, pero todavía no me has dicho por qué esa es bisectriz [hace referencia a AD]
M: Pues, ¿no era la misma que justificamos anterior? […] que teníamos que este lado (señala el lado CD) es igual a este lado (señala el lado DF) comparten un lado (señala el lado AD) y pues estos (señala los lados AF y AC) son radios de esta misma circunferencia (señala la circunferencia con centro en A y radio AC).
E: ¿Entonces?
M: Entonces el triángulo FAD es congruente con el triángulo CAD, entonces, por lado - lado - lado, entonces el ángulo FAD es congruente con el ángulo DAB.

María recurre a probar la congruencia de dos triángulos FAD y CAD. Ella empieza concluyendo que DC es congruente con DF gracias a que los construyó como radios de la misma circunferencia (cuando quería copiar el ángulo), después menciona que los triángulos comparten el lado AD y por último *concluye* la congruencia de los lados AF y AC porque son radios de la misma circunferencia. Aunque en ningún momento menciona las garantías de sus conclusiones se ve presente el *hecho* de que los radios de una misma circunferencia son congruentes entre sí. Después de tener la congruencia entre los tres lados de los triángulos ella afirma que usando el *criterio de congruencia* lado-lado-lado puede *concluir* la congruencia de los dos triángulos, y en consecuencia se puede decir que "FAD es congruente con el ángulo DAB" – por la definición de congruencia de triángulos–.

A pesar de que María omite el uso de algunos hechos geométricos que apoyan su construcción, al igual que lo han hecho sus compañeros, se ve su uso en las conclusiones que obtiene, por lo que se puede afirmar que su prueba es de tipo deductiva aun cuando su construcción haya sido guiada por ideas intuitivas.

4.3. Construcción 3

En la tercera construcción se les solicita a los participantes construir un triángulo rectángulo dado uno de sus lados y la suma del otro lado con la hipotenusa. En este caso, se presentaron tres tipos de construcciones, dos de ellas abordadas en el medio en el que fue propuesto el problema (papel) y una tercera pensada en GeoGebra.

4.3.1. Mediatriz

Una de las construcciones propuestas, y la que se esperaba fuera la más recurrente, se centra en el uso de la mediatriz de un segmento para garantizar la conservación de ciertas medidas, gracias a que esta recta usada como herramienta permite garantizar la equidistancia de cada uno de sus puntos a los extremos de un segmento.

María

María en el cuestionario propone hacer uso de la mediatriz del lado CB para encontrar el tercer vértice del triángulo (ver Tabla 23). Sin embargo, su dibujo no muestra indicios de que haya usado un compás, por lo que no se puede afirmar con certeza que la recta construida sea la mediatriz mencionada.

En su cuestionario, María escribe que: “El triángulo APB cumple con las condiciones del problema ya que $PB = PC$ y $AP + PC$ representa la suma dada”, lo que podría considerarse un argumento deductivo de que su construcción es correcta. Aunque ella no presenta de forma explícita el conocimiento teórico sobre el cual basa sus conclusiones, parece estar usando el *hecho* de que los puntos de la mediatriz equidistan de los extremos del segmento, ya que al ser P un punto de la mediatriz se puede *concluir* que $PB = PC$ (conclusión mencionada por María). Ahora bien, parece que María también realiza una sustitución para llegar a que $AP + PB$ representa la suma dada, *dado que* $AP + PC$ representa dicha suma, lo que la lleva a *concluir* que el triángulo APB cumple con las condiciones.

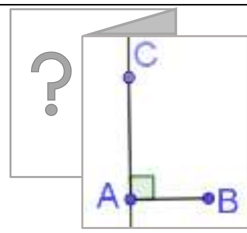
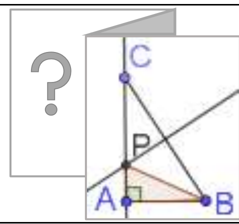
Objetos de la construcción[19]	**Construcción lápiz y papel**	
	Representación de lo descrito o de lo que muestra la imagen que acompaña la solución	**Descripción realizada en el cuestionario**
$\overline{AB}$		"AB es el cateto dado"
$\overleftrightarrow{AC} \perp \overline{AB}$ y $\overline{AC}$ cuya medida es la suma dada.		"Se construye una perpendicular al AB por el punto A. Sea AC el segmento que representa la suma del otro cateto y la hipotenusa."
Mediatriz de $\overline{CB}$		"Construyo la mediatriz del segmento CB… El punto de intersección entre la mediatriz del segmento CB y la recta AC, será el punto P buscado"

Tabla 23. Propuesta en el cuestionario de María para la tercera construcción

En la entrevista una de las primeras cosas que se le pregunta a María es cómo logró obtener la mediatriz del lado CB, a lo que afirma no haberla construido, pero que la construcción sería la misma que en la segunda construcción (ver Tabla 21). La entrevistadora continúa preguntándole cómo se puede saber que el triángulo construido cumple las condiciones dadas por el enunciado y ella dice:

M: […] el triángulo APB cumple con las condiciones, ya que PB es igual a PC
E: ¿Por qué?
M: Pues porque como construí la mediatriz del segmento CB […] entonces yo sé que cualquier punto sobre esa mediatriz va a equidistar de sus extremos (señala los puntos C y B). Entonces como P es un punto particular de esa mediatriz. Entonces PC va a ser igual a PB. Y pues como yo había construido que AC fuera la suma pues como ya sé que CP es igual a PB, pues entonces PB más PA va a representar a AC que era la suma de los dos lados que me daban, la suma de los lados que faltaban.

En esta parte se ve el mismo argumento deductivo que María presentó en el cuestionario, pero un poco más completo ya que menciona las garantías de las que se vale para su construcción, a saber, el *hecho* de que "cualquier punto sobre esa mediatriz va a equidistar de sus extremos".

[19] Algunos de los nombres de los puntos fueron incluidos debido a que la construcción original no los tenía.

Ana

Ana se enfoca en la construcción de la mediatriz de CB y particularmente en la intersección de ésta con el segmento de medida $a + c$ (ver Tabla 24), es decir, que se centra en dividir del segmento CB en dos partes iguales para posteriormente afirmar que D es el tercer vértice del triángulo. Esto implicaría que el triángulo buscado es aquel cuyo cateto y cuya hipotenusa miden la mitad de la suma dada, lo cual no puede ser posible en un triángulo rectángulo.

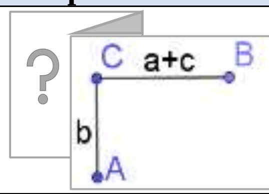
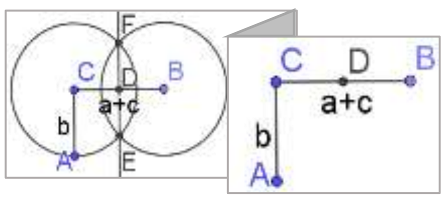
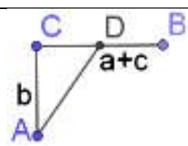
Objetos de la construcción[20]	Construcción lápiz y papel: Representación de lo descrito o de lo que muestra la imagen que acompaña la solución	Construcción lápiz y papel: Descripción realizada en el cuestionario
$\overline{AC} \perp \overline{CB}$		“Se tiene el cateto [de medida] b conocido, y $a + c$ también conocido entonces se trazan [segmentos con dichas medidas] ambos perpendiculares entre sí”
Punto $[D]$ como punto medio de $\overline{CB}$		“se toma la medida del cateto $[b]$ y se marca desde cada uno de los extremos del segmento [con medida] $a + c$. Los puntos donde se intersecan los arcos es el punto [donde está el extremo del segmento] de medida a”
$\overline{AD}$		“Finalmente, se traza la hipotenusa [de medida] c uniendo [los extremos de] ambos catetos”

Tabla 24. Propuesta en el cuestionario de Ana para la tercera construcción

Ana no presenta ningún argumento que apoye su construcción, ya que en el cuestionario únicamente escribe la descripción de una construcción. En ese sentido, lo primero que hace la entrevistadora es cuestionarla sobre por qué puede afirmar que el triángulo realizado es el solicitado.

A: Pues porque en teoría este segmento es igual a éste (señala AD y DB).
E: […]Ah, ok. Y si tienen la misma medida, ¿qué pasa?
A: Pues entonces ya está resuelto el problema porque esta es la hipotenusa (señala AD). Porque me estas pidiendo la construcción de un triángulo rectángulo, dado un cateto y la suma del otro cateto más la hipotenusa.
E: […] ¿de cuánto queda DA?

[20] Algunos de los nombres de los puntos fueron incluidos debido a que la construcción original no los tenía.

A: Pues es CB menos CD

Ana realiza una afirmación en donde resalta la congruencia entre AD y DB gracias a la representación realizada, en la que el problema "ya está resuelto". Sin embargo, su afirmación parece no tener alguna relación con lo garantizado en su construcción, ya que en ningún momento menciona que DA fuese igual a DB, por lo que la entrevistadora le solicita realizar de nuevo su construcción y ella decide realizarla en GeoGebra mencionando "Pues es que es más fácil".

Ana realiza su construcción en GeoGebra de acuerdo con lo que describe en el cuestionario. Uno de los primeros hechos que nota es que las circunferencias con centro en C y B de radios CA no se intersecan, ya que hace el segmento CB mucho más grande que el segmento CA. En este caso el medio digital *re-acciona* a sus trazos de las circunferencias y de cierta manera le sugiere que estructure de otra manera su proceso de construcción, sin embargo ella decide ignorar las sugerencias del medio y simplemente hace más pequeño el segmento CB (hasta que las circunferencias se intersecan) afirmando que se preocupará de ello más adelante.

Ana continua con su construcción y nota que los segmentos AD y DB tienen medidas totalmente distintas y al arrastrar constantemente el punto A dice:

A: Pues se me hace que no es. Porque si este es el punto medio del segmento (señala D) entonces quiere decir que esta (señala DB) es la hipotenusa, pero ésta debe ser más larga que los catetos.

En su intervención Ana justifica que su construcción no es correcta ya que la hipotenusa resulta tener la misma medida que uno de los catetos. En el cuestionario la ubicación de los puntos hacía parecer que los segmentos AD y DB tenían la misma medida, pero al hacerlo en el medio digital el arrastre de los puntos le permitió analizar diferentes configuraciones y poner a prueba las hipótesis planteadas.

Al notar que su construcción no posee las características que ella estaba "garantizando" al hacerlo a papel y lápiz, Ana ubica un punto D aleatoriamente y lo mueve sobre el segmento CB en busca de la posición de D que le garantiza la equidistancia a A y B

A: Este punto DA (…). Digo, esta distancia DA debe ser la misma que DB.

E: Y, ¿cómo encontramos un punto que esté a la misma distancia de otros dos?

Ana continúa moviendo el punto D sobre el segmento sin tener alguna idea de cómo lograr la equidistancia deseada, por lo que la entrevistadora le pregunta si podría construir un triángulo isósceles dada su base, entonces ella abre un nuevo archivo en GeoGebra y dice:

A: Determino el punto medio, y una perpendicular que pase por el punto medio (ver Figura 11).
E: Y, ¿por qué sabes que ese triángulo va a ser isósceles?
A: [… …] Cualquier punto sobre esta recta me va a dar por resultado un triángulo isósceles. Porque este lado y este lado (señala AC y CB) son iguales, estos ángulos son iguales (Señala los ángulos ACD y DCB) y comparten el lado (señala DC). Entonces por lado, ángulo, lado son congruentes.

Ana no solo hace la construcción solicitada, sino que proporciona los argumentos deductivos que le permiten afirmar que el triángulo es isósceles. Ella usa la construcción de DC como la recta perpendicular a AB que pasa por su punto medio para *concluir* que los triángulos ACD y DCB son congruentes ya que se cumple que $AC = CB$, comparten el lado CD, y que $\angle DCB \cong \angle DCA$; y aunque no lo hace explícito está usando la *definición* de perpendicularidad, ángulo recto y punto medio de un segmento. Ahora bien, usando las congruencias mencionadas, ella logra *concluir* que los triángulos ACD y BCD son congruentes por el *criterio de congruencia* lado ángulo lado, y por consiguiente logra determinar la congruencia entre BD y AD que son lados de un triángulo isósceles—por la definición de triángulos congruentes y de triángulo isósceles—.

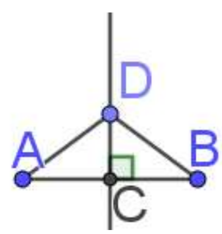


Figura 11. Construcción de un triángulo isósceles dada la base

Como Ana no lograba asociar la construcción del triángulo isósceles con la búsqueda del punto sobre el segmento CB que equidista de A y de B (ver Tabla 24), la entrevistadora le pregunta sobre lo que estaba buscando en el problema inicial, y su respuesta es:

A: DC debe ser igual a DA
E: Ajá, o sea que el triángulo CDA debería ser ¿cómo?
A: Isósceles. Ok entonces (construye el segmento AC) y aquí el punto medio entre este y este (construye E como punto medio del segmento AC), y la perpendicular (construye la recta perpendicular a AC por E). Entonces es el punto de intersección de ésta (determina F como el punto de intersección de la recta perpendicular y el segmento BC).

Después de realizar su construcción los argumentos deductivos resultan muy similares a los presentados en el problema del triángulo isósceles (asociado a la Figura 11) pero con más especificidad en las garantías, por lo que no se ve necesario repetir el mismo análisis.

Un suceso que resulta interesante es que en el problema del triángulo isósceles Ana utiliza la mediatriz (sin llamarla de esta manera) como *herramienta* para garantizar equidistancia de un punto a otros dos. Sin embargo, en el problema inicial aun cuando manifiesta buscar dicha equidistancia no resulta tan evidente el uso de la mediatriz. Dicho fenómeno se puede deber a que la mediatriz garantiza la equidistancia de cada uno de sus puntos a los extremos de un segmento y como ella no construye el segmento AB, le es más difícil relacionar el problema con el uso de la mediatriz.

4.3.2. Semejanza

La construcción por semejanza fue realizada por uno de los participantes, quien buscó construir dos triángulos semejantes a partir de un triángulo y una recta paralela a uno de sus lados, aprovechando las relaciones de proporcionalidad que se establecen entre los lados de los triángulos.

Juan

La primera construcción presentada por Juan (quién realizó dos construcciones) destaca debido a su originalidad, ya que ninguno de sus compañeros realizó una propuesta similar. Dicha construcción se enfoca en construir dos triángulos semejantes y a partir de las relaciones que se infieren de estos obtener el triángulo buscado (ver Tabla 25).

En el cuestionario Juan además de presentar una construcción, también presenta los argumentos deductivos que la acompañan, de modo que, para este caso, su conocimiento teórico parece ser el *mediador* que le permite obtener la construcción. Una de las primeras *conclusiones* a las que llega el participante es la semejanza de dos triángulos, cuando escribe: "Tenemos los triángulos semejantes DCB y DPE", lo cual parece centrarse en que por construcción PE y CB son perpendiculares a CD y como es un *hecho* que dos rectas perpendiculares a una misma recta son paralelas entre sí, se puede determinar la semejanza de los triángulos mencionados. Aunque no son explícitos dichos hechos se infiere que se están teniendo en cuenta por las construcciones realizadas, de por sí, en una parte de la entrevista se le pregunta a Juan por qué no específico sus argumentos y dice “O sea, ese argumento es como (…) como una justificación que se necesita, pero me parece muy obvia porque así lo construí”.

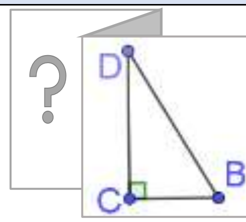
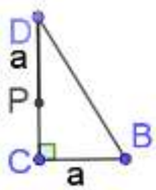
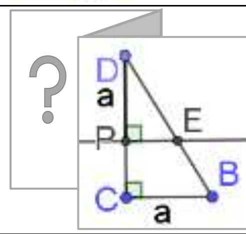
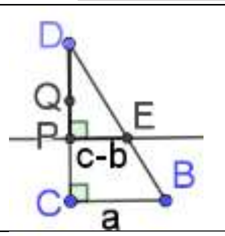
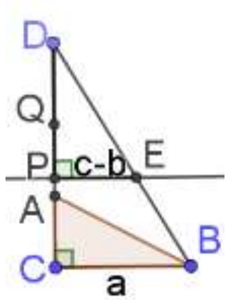
Objetos de la construcción	Construcción lápiz y papel	
	Representación de lo descrito o de lo que muestra la imagen que acompaña la solución	**Descripción realizada en el cuestionario**
ΔDCB rectángulo.		“Sea a el cateto dado, b el cateto desconocido y c la hipotenusa. Trazamos un triángulo rectángulo con catetos a y $b+c$ y vértices C, B y D”
P en $\overline{CD}$ de modo que $DP = CB$		“Sobre el segmento DC damos un punto P tal que DP tiene la longitud de a”
E punto de intersección de $\overline{DB}$ y la recta perpendicular a $\overline{DC}$ por P.		“Tomamos al punto E como la intersección de la perpendicular a DC que pasa por P y la hipotenusa DB”
Q en $\overline{CD}$ de modo que $DQ = PE$		“Tomamos Q el punto sobre CD tal que DQ tiene longitud $c - b$, entonces CQ tiene la longitud $2b$”
A punto medio de $\overline{QC}$		“Sea A el punto medio de CQ, ABC es el triángulo buscado”

Tabla 25. Primera propuesta en el cuestionario de Juan para la tercera construcción

Continuando con lo realizado por Juan en el cuestionario, él escribe: "Tenemos los triángulos semejantes DCB y DPE, por lo que $\left[\frac{c+b}{a} = \frac{a}{PE}\right]$", lo cual pone en evidencia el uso de la *definición* de semejanza. Posteriormente escribe "Por el teorema de Pitágoras, $a^2 = c^2 - b^2 = (c-b)(c+b)$" las cuales son igualdades que se mantienen gracias al teorema de Pitágoras y los binomios conjugados. De modo que Juan deja de lado la representación gráfica para empezar a trabajar algebraicamente con algunas de las magnitudes de su construcción. La asociación de los binomios conjugados con el teorema de Pitágoras le permite *concluir* que la medida de PE es $c-b$ (en su cuestionario escribe: " $a^2 = c^2 - b^2 = (c-b)(c+b)$ por lo que $\frac{c+b}{a} = \frac{a}{c-b}$. Luego, el segmento PE mide $c-b$") gracias a que relaciona las dos igualdades encontradas, la primera con la semejanza y la segunda con el teorema de Pitágoras.

En la última parte de su construcción, Juan ubica un punto Q de tal manera que $DQ = c - b = PE$ y afirma que $CQ = 2b$. Detrás de dicha afirmación está la resta geométrica de $DC - DQ$, que de acuerdo con las conclusiones anteriores es equivalente a la resta de las medidas: $c + b - (c - b)$ que es igual a $2b$. Ahora bien, el tener un segmento con medida $2b$ fácilmente le permite tener un segmento de medida b, que es lo que logra tener al final.

En términos generales, se puede decir que toda la argumentación de Juan está mediada por su proceso de construcción y por su conocimiento teórico, el cual se halla entre lo algebraico y lo geométrico. Además, el porqué de su proceso de construcción se encuentra tan ligado con los argumentos deductivos que la sostienen, que parece difícil desligar una de la otra.

En cuanto a la entrevista, Juan afirmó tener total certeza de que su proceso de construcción era correcto, e hizo explícitos algunos de los hechos matemáticos que utilizó, ya que dijo:

J: Ocupé proporción, teorema de Pitágoras, y como, depende mucho del algebra también. Porque la parte del despeje de los binomios conjugados es muy importante […], Y en la semejanza.
E: Ok, y ¿en algún momento justificaste esos dos triángulos fueran semejantes?
J: Sí, según yo.
E: ¿En qué parte?
J: ¿Cuáles dos? ¿el DPE y DCB? Ah, porque comparten un ángulo y PE es paralelo a CB. Eso lo di por aquí, E como intersección de la perpendicular a DC, y DC es parpendicular a CB entonce, pues PE es paralelo a CB.
E: Ah, pero fue un argumento que no especificaste

J: Es que no lo hice pensando como que me ibas (…) iba a ser revisado como tan (…) minucioso, pero no tan (…) o sea, no pensando en buscar todos los argumentos.

En esta parte Juan ofrece el argumento *deductivo* de por qué los triángulos son semejantes, en donde resalta que PE y CB son paralelas ya que ambas son perpendiculares a CD, tal y como se había intuido a partir del cuestionario.

4.3.3. Elipse

Dado que la construcción fue propuesta para que los participantes la realizaran en el papel era una propuesta que no se esperaba, ya que en dicho medio no se puede obtener la continuidad de los trazos de una elipse. Sin embargo, fue una de las más usadas por los participantes, tal vez porque el problema mencionaba la suma de dos lados igual a una constante y esto se asemeja a la definición de elipse. En ese sentido, la construcción se reduce a determinar el punto de intersección de una recta perpendicular al lado dado y la elipse cuya constante es la suma del otro lado y la hipotenusa.

Camilo

Para construir el triángulo solicitado, Camilo menciona que se debe realizar la elipse con focos en A y B y constante k (ver Tabla 26) y construir los triángulos “cuyo tercer vértice son los puntos de intersección de las rectas perpendiculares que pasan por los focos e intersecan a la elipse”. Sin embargo, para determinar el punto de intersección mencionado se necesita que las representaciones de los objetos tengan un trazo continuo, lo cual no se puede obtener en el papel.

Cuando Camilo menciona que la condición del problema de que la suma de dos lados del triángulo es una constante “determina una elipse”, se ve como su propuesta está *mediada* por su conocimiento teórico. Además, él accede a otro de sus conocimientos, y aunque no lo usa, afirma que cualquier triángulo rectángulo vive en una circunferencia (hecho usado para construir una recta perpendicular en la segunda construcción-ver Figura 10).

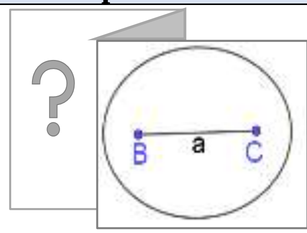
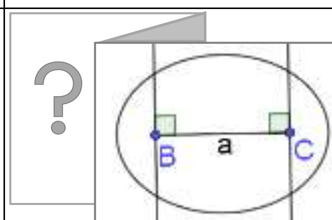
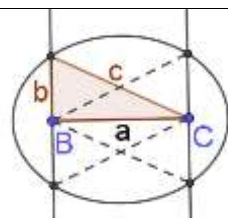
Objetos de la construcción	Construcción lápiz y papel	
	Representación de lo descrito o de lo que muestra la imagen que acompaña la solución	**Descripción realizada en el cuestionario**
Elipse con k como constante y focos en C y B		“debe buscarse la manera de conectar que cualquier triángulo rectángulo vive en una circunferencia y […] que la condición $b + c = k$ determina una elipse, de hecho a es la distancia focal; entonces C y B son los extremos de a; C y B serán los focos de la elipse que satisface $b + c = k$”
Rectas perpendiculares por los extremos de $\overline{BC}$.		“los triángulos que pueden formarse son aquellos cuyo tercer vértice son los puntos de intersección de las rectas perpendiculares que pasan por los focos e intersecan a la elipse”

Tabla 26. Reporte escrito por Camilo para el tercer problema

En la entrevista, cuando se le cuestiona a Camilo el por qué está tan seguro de que su construcción es correcta, parte de su respuesta es:

C: De acuerdo con lo que escribí aquí (…) pues tienes que, como (…) de hecho le llame b a un cateto y c a la hipotenusa y dije, como $b + c$ es constante, la suma de esos elementos es igual a k, dije, bueno, eso te determina una elipse. Porque, por definición de elipse son los puntos tales que [… da la definición] Entonces cuando vi el problema dije, tengo que construir triángulos rectángulos sobre una elipse. […] ahí tengo un montón de triángulos, pero los triángulos rectángulos que yo quiero son aquellos en que (…) digamos, al trazar perpendiculares en los focos, esas perpendiculares cortan a mi elipse, entonces, ese punto de intersección es importante y ahí es donde tienen que construirse los triángulos.

En esta parte se puede ver cómo la argumentación de Camilo se encuentra vinculada a su proceso de construcción, ya que está afirmando que su triángulo cumple las condiciones porque uno de sus vértices es punto de la elipse y por *definición* una elipse es el lugar geométrico tal que …. Otra de las propiedades que él busca que se cumpla es que el triángulo sea rectángulo cuando menciona que se deben “trazar perpendiculares en los focos”, lo cual le permitiría garantizar que cumple con la definición de triángulo rectángulo. De modo que el proceso de construcción de Camilo y su argumentación se encuentran tan enfocadas en el uso de su conocimiento teórico que se entrelazan completamente una con la otra.

La entrevista continuó preguntándole a Camilo cómo construyó la elipse, y su respuesta es: “Jajaja, pues a mano alzada”. Sin embargo, decide construirlo en GeoGebra y antes de empezar se queda viendo su cuestionario y dice:

C: Estoy viendo que el $b + c$, o sea, lo que a mí me están dando es la suma del cateto y la hipotenusa, es en realidad, conectándolo con la elipse es la distancia que existe entre sus vértices, o sea, eso es lo que a mí me están dando.

Nuevamente se ve que el conocimiento que Camilo posee sobre los elementos de la elipse actúa como mediador de su construcción. Al reconocer que la constante que define a una elipse es la misma distancia entre sus vértices, puede obtener un punto sobre esta —que es uno de los requerimientos solicitados por GeoGebra para construir la elipse—. En ese sentido resulta interesante que aun cuando Camilo no ha empezado a usar GeoGebra ya está pensando en las *acciones* que debe realizar para que el medio digital *responda* con la construcción de la elipse.

Camilo continúa con su construcción a partir de la idea de que la distancia entre los vértices de una elipse es la constante que la define, la cual le permite hacer una construcción en GeoGebra (ver Tabla 27).

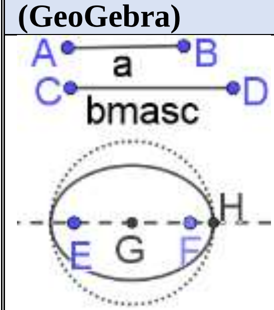
Representación (GeoGebra)	**Descripción de la construcción realizada**
	Construye dos segmentos llamados "a" y "$bmasc$" y una recta EF, de modo que su medida es igual a la de a (mueve los extremos de a para mostrar que entre más grande o pequeño sea, también se ve un cambio en EF). Construye G como punto medio de EF y una circunferencia con centro en G y radio $\frac{bmasc}{2}$. Llama H a uno de los puntos de intersección de la circunferencia y la recta; y por último, construye una elipse con E y F como focos y el punto H como punto de la elipse.

Tabla 27. Construcción de la elipse por parte de Camilo.

La entrevistadora le pregunta a Camilo cómo se podría probar que la elipse construida es la que se estaba buscando, esperando que su respuesta se basara en el conocimiento utilizado para la construcción (que la medida del eje mayor de la elipse es la constante). Sin embargo, lo que Camilo hace es ubicar un punto I en la elipse y sumar la medida de los segmentos cuyos extremos son el punto I y cada uno de los focos; y contrastar el resultado de dicha suma con la medida de "$bmasc$" mientras mueve el punto I sobre la elipse. De modo que el medio digital *responde* a la *acción* de mover el punto sobre la elipse, permitiendo que Camilo observe que los dos valores ("$bmasc$ y la suma de distancias hasta I) coinciden. Ahora bien, se puede decir que Camilo ha incorporado, por lo menos parcialmente, el medio digital como uno de sus socios cognitivos, el cual elige sobre su conocimiento teórico para probar la validez de su construcción.

Continuando con la entrevista, Camilo cambia el tamaño del segmento "$bmasc$" y cuando se le pregunta por qué lo hace, dice "Para ver si no pasa algo raro o extraño [...] por ejemplo que el algún momento deje de ser elipse". De modo que el medio al ser ejecutable ha permitido que Camilo se formule preguntas sobre el comportamiento de los objetos y que pueden ser contestadas gracias a las representaciones estructurales sobre las que está trabajando. En este caso, la pregunta que se plantea Camilo vincula la medida de los segmentos iniciales y la existencia de la elipse, de modo que cuando deja de existir (cuando CD es menor que AB) busca dar una razón fuera de lo experimental, afirmando que la propiedad que se deja de cumplir es "La desigualdad del triángulo".

Por último, Camilo construye las rectas perpendiculares al segmento EF, los puntos de intersección entre estas y la elipse resultan ser el tercer vértice del triángulo con las características solicitadas, ya que la construcción de las rectas perpendiculares permite afirmar que el triángulo posee un ángulo recto.

Juan

La solución que se centra en la construcción de una elipse es la segunda presentada por Juan (ver Tabla 28). Su construcción es muy parecida a la de Camilo en el sentido en que ambos parecen estar pensando en solucionar el problema en GeoGebra, y por lo tanto ven la necesidad de conocer los focos y un punto de la elipse (requerimientos para usar la "Elipse" que se encuentra en el menú). Sin embargo, la forma en la que cada uno de los participantes determina un punto de la elipse es diferente.

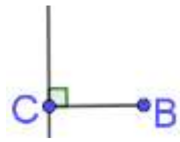
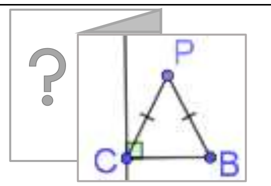
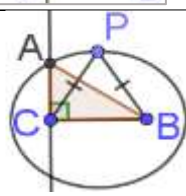
Objetos de la construcción	**Construcción lápiz y papel**	
	Representación de lo descrito o de lo que muestra la imagen que acompaña la solución	**Descripción realizada en el cuestionario**
Recta perpendicular a $\overline{CB}$ por C		"Sea a la longitud del cateto dado, b la del cateto desconocido y c la de la hipotenusa. Trazamos un segmento CB con longitud a y una perpendicular que pasa por B."
Triángulo isósceles CPB.		"Triángulo isósceles con base BC tal que $BP + PC = b + c$ y $BP = PC$"
Elipse con focos en C y B y que pasa por P.		"Elipse con focos B y C que pasa por P. La intersección de la elipse con la perpendicular nos da el punto A tal que el ΔABC es el triángulo buscado"

Tabla 28. Reporte escrito de Juan para el tercer problema

En el cuestionario Juan construye un triángulo isósceles CPB de tal manera que $BP + PC$ es igual a la suma de la hipotenusa con el cateto faltante (ver Tabla 28), pero nunca explica la necesidad de construir dicho triángulo, por lo que la entrevistadora inicia preguntándole sobre este asunto, y su repuesta es:

J: Para tener un punto de referencia. Lo que me interesa no es que sea un triángulo isósceles, sino que ese punto P es un punto que cumple (…) que la suma de los otros dos lados que me están dando es alguna constante […]yo no puedo (…) podría hacerla en lápiz y papel porque depende de la elipse.

En esta parte se puede ver como el uso de GeoGebra se encontraba presente desde que Juan describe la propuesta en su cuestionario ya que cuando escribe "Elipse con focos B y C que pasa por P" se está refiriendo a la *acción* (seleccionar los puntos mencionados) que va a realizar en el medio digital para que este *responda* con el trazado de una elipse. De tal manera que el medio digital ha cambiado la forma de pensar la construcción a tal punto que el interés del participante se centra en tener todos los elementos que "solicita" GeoGebra para realizarla —a saber, los focos y un punto que se encuentre en la elipse—.

Ahora bien, aprovechando que en la entrevista no se limitó el uso de GeoGebra, Juan hace su construcción de acuerdo con lo mencionado en el cuestionario (ver Tabla 29).

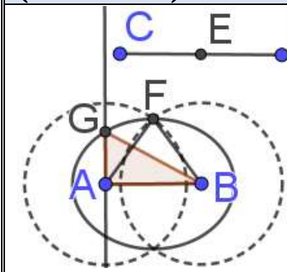
Representación (GeoGebra)	**Descripción de la construcción realizada**
	Construye dos segmentos, $\overline{AB}$ (que representa el lado dado) y $\overline{CD}$ (que representa la suma del otro lado y la hipotenusa). Determina E como punto medio de $\overline{CD}$ y construye el punto F como la intersección de la circunferencia con centro en A y radio CE, y con centro en B y radio DE. Construye el triángulo EAB y una recta perpendicular a AB por A. Por último, construye la elipse que tiene A y B como focos y pasa por el punto F; de modo que G termina siendo el tercer vértice del triángulo solicitado.

Tabla 29. Construcción de la elipse en GeoGebra por parte de Juan

Por último, la entrevistadora le pregunta a Juan sobre cuál es la prueba de que el triángulo solicitado es efectivamente el construido, y su respuesta es:

J: Parecida a la de la bisectriz (se refiere al primer problema), que tracé dos lugares geométricos de dos cosas (…) dos cosas que cumplían ciertas características, y la intersección es donde se cumplen ambas.

E: Ah, y la elipse es donde se cumple la característica, ¿de?

J: La suma de los (…) de la hipotenusa y el cateto es alguna dada, y (…) la línea ésta (señala la perpendicular) es que sea rectángulo.

Juan está argumentando a partir de su conocimiento teórico, ya que logra *concluir* que el triángulo cumple la condición de que la suma de un cateto y la hipotenusa sea una constante gracias a la *definición* de elipse, y además cumple que es un triángulo rectángulo *ya que* el tercer vértice se encuentra sobre la recta perpendicular al lado dado, y aunque no lo dice explícitamente, se está basando en la *definición* de triángulo rectángulo. Este es otro caso en donde la construcción y la argumentación están tan relacionadas, gracias al conocimiento teórico, que resulta difícil distinguir entre ellas.

Sofía

Sofía al igual que sus compañeros utiliza una elipse para poder "realizar" la construcción, pero a diferencia de ellos, la descripción que hace de la misma es como un lugar geométrico y no como una elipse construida por GeoGebra (ver Tabla 30). Sofía manifiesta explícitamente el uso de GeoGebra para su construcción aun cuando esta le fue propuesta en papel, de modo que el uso del medio digital ha permeado tanto en la cognición de la participante que los problemas son razonados como si se estuvieran haciendo en GeoGebra. Este fenómeno pudo estar presente en los problemas anteriores, pero la imposibilidad de realizar una elipse (de forma continua) en el papel hace que sea más notorio en este problema.

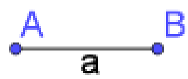
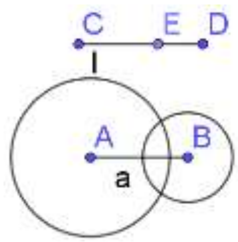
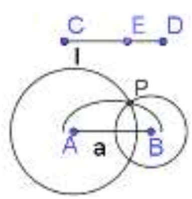
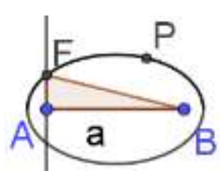
Objetos de la construcción[21]	Construcción lápiz y papel	
	Representación de lo descrito o de lo que muestra la imagen que acompaña la solución	Descripción realizada en el cuestionario
Segmentos a y l de modo que l es la suma del otro cateto con la hipotenusa		“dado un cateto a y la suma l del otro cateto con la hipotenusa”
Un punto B en l. Dos circunferencias con centros en cada uno de los extremos de a y de radios los segmentos en los que queda dividido l		“la idea es situar el lado a y la suma del otro cateto y la hipotenusa l debe ser los radios vectores de una elipse […] esta construcción es sencilla de obtener haciendo uso de GeoGebra. La elipse se construiría situando un punto E cualquiera sobre el segmento l y se trasladan las distancias (los dos segmentos en que se divide l), utilizando circunferencias, entonces se sitúan sobre el segmento a”
Elipse con focos en los extremos de a		“ya que la suma de las distancias de cualquier punto de la elipse a sus focos es constante, entonces así podemos obtener todos los triángulos que la medida de sus lados diferentes al lado a, miden l. La elipse se insertaría con eje focal sobre el lado a y sus focos deben estar situados en los extremos del lado a[…]la intersección de ambas circunferencias (punto P) es el que al mover el punto B, trazará la elipse”
Recta perpendicular a a por uno de sus extremos.		“se traza una perpendicular que pase por uno de los extremos del lado a, (la perpendicular debe ser al lado a). Para lograr formar el ángulo recto que necesitamos, luego en la intersección de la perpendicular con la elipse encontramos uno de los triángulos rectángulos que necesitamos”

Tabla 30. Reporte escrito de Sofía para el tercer problema

La construcción de Sofía se encuentra *mediada* por la relación que encuentra entre los elementos del problema y la definición de elipse, ya que como ella misma explica “la suma de las distancias de cualquier punto de la elipse a sus focos es constante”. Su construcción se centra en ubicar un punto P —que depende de E— de tal manera que al sumar las distancias PA y PB el resultado sea

[21] Algunos de los nombres de los puntos fueron incluidos debido a que la construcción original no los tenía.

la sumada dada, de tal manera que cuando se mueva el punto E sobre AB el medio *reaccione* a dicho movimiento y le *muestre* el lugar geométrico que determina P (una elipse). Como última parte de su construcción, Sofía propone ubicar el punto de intersección entre la elipse y una recta perpendicular al eje focal, obviando el hecho de que GeoGebra no permite la intersección de lugares geométricos con otros objetos, de modo que aunque está razonando el problema en GeoGebra está dejando de lado las limitaciones que le impone el medio, por lo que podría decirse que ella ha incorporado o interiorizado, por lo menos parcialmente, el medio digital como uno de sus instrumentos cognitivos que responden a su razonamiento deductivo.

Sofía realiza en GeoGebra la construcción de acuerdo con lo descrito en el cuestionario y cuando se enfrenta con determinar la intersección de la perpendicular y el lugar geométrico, decide usar la herramienta del menú que permite construir una elipse dados los focos y un punto de la elipse (A y B como focos y P como punto de la elipse[22]).

Cuando se le pregunta a Sofía cómo está tan segura de que la elipse construida es la solicitada, lo que hace es construir dos circunferencias, una con centro en C y radio PA y otra con centro en D y radio PA; y como ambas circunferencias resultan ser tangentes en E, ella afirma que efectivamente es la elipse solicitada. Lo que resulta interesante en esta parte, es ver como su construcción está *mediada* por el conocimiento teórico que posee, en el que gracias a la definición de elipse determina un punto (trasladando medidas) cuya suma es la solicitada. Sin embargo, cuando se le cuestiona su argumento se vuelve completamente empírico, mostrando que en diferentes casos siempre se cumple que la suma de las distancias de P a A y a B sea CD.

René

Al igual que sus compañeros, René usa una elipse para "realizar" la construcción. Sin embargo, su forma de encontrar la elipse es diferente a la de los demás, ya que intenta hacerlo utilizando el circulo director. Sin embargo, el lugar geométrico que describe no presenta ninguna garantía de que el resultado sea un objeto que cumpla con la definición de elipse (ver Tabla 31).

[22] Al hacer la nueva construcción en GeoGebra algunos nombres de los puntos cambiaron. Pero, para facilidad del lector se usarán los mismos nombres del cuestionario.

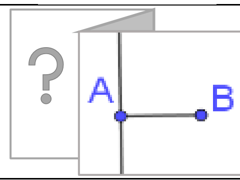
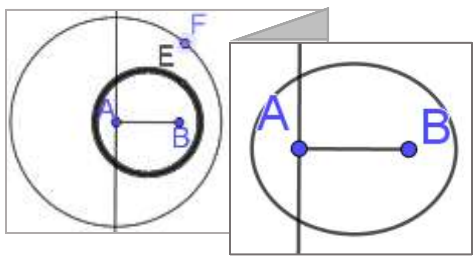
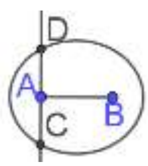
Objetos de la construcción[23]	**Construcción lápiz y papel**	
	Representación de lo descrito o de lo que muestra la imagen que acompaña la solución	**Descripción realizada en el cuestionario**
$\overline{AB}$		"Dado $\overline{AB}$ como el cateto conocido"
Recta perpendicular a $\overline{AB}$ por A		"trazar la perpendicular a $\overline{AB}$sobre esa recta debe estar el vértice del otro cateto"
Elipse con k como constante y focos en A y B		"Se construye una elipse con focos en A y B con k como constante. La elipse se puede construir con la circunferencia de radio k [*que es la suma dada*] con centro en A. Los puntos medios de los puntos de la circunferencia con B forman dicha elipse"
C y D como puntos de intersección de la perpendicular y la elipse.		"Los puntos de la intersección, llamemos C y D, serán los extremos del otro cateto. Los triángulos ABC y ABD cumplen lo solicitado"

Tabla 31. Reporte escrito de René para el tercer problema.

En la entrevista cuando se le cuestiona sobre si su construcción es correcta y los argumentos de ello, René reconoce que la construcción de la elipse es incorrecta y la entrevistadora le solicita hacerla correctamente. Él decide hacer la construcción usando regla y compás, ya que buscaba defender su postura de que la elipse se podía trazar en el papel y no solo en GeoGebra (ver Tabla 32).

Mientras René realiza la construcción la entrevistadora lo cuestiona sobre cómo está tan seguro de que la nueva construcción es la correcta, y su respuesta es: "Pues es que sí la estoy replicando de memoria, y si no me acuerdo bien, no me va a salir". Por lo tanto, apenas termina se le pregunta por qué C es un punto de la elipse y su respuesta es:

[23] Algunos de los nombres de los puntos fueron incluidos debido a que la construcción original no los tenía.

R: A eso voy, lo que está haciéndome la mediatriz es digamos reflejar este lado (construye el segmento CB). Entonces esto más esto (señala AC y CB) va a ser exactamente esto (señala AD) que es k. Entonces justo este (señala a C) es un punto en la elipse.
E: Y, ¿quién es el congruente con quién?, es que ya no te entendí.
R: Éste es congruente con este (señala BC y CD)[…] Justo porque está (…) porque es un punto (señala C) en la mediatriz de BD. [escribe $AC + CB = AC + CD = k$] Entonces ese es un punto de la elipse (señala C). Entonces, haciendo esto un chorro de veces más jajaja, un continuo de veces básicamente, te queda la elipse.

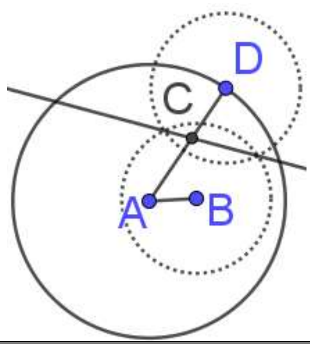
Representación	**Descripción de la construcción realizada**
	Construye en una hoja un segmento AB y un segmento de medida k, que es la suma de la hipotenusa con el cateto. Después construye con el compás una circunferencia con centro en A y radio k. Ubica un punto D en la circunferencia y construye el radio DA, después construye el segmento DB y manifiesta querer construir su mediatriz, por lo tanto, construye dos circunferencias del mismo radio en los extremos de BD, y los afirma que los puntos de intersección de dichas circunferencias le proporcionan la mediatriz deseada. Por último, ubica el punto C como la intersección de la mediatriz y el radio.

Tabla 32. Un punto de la Elipse a lápiz y papel

En esta parte, aunque el proceso de construcción de René es guiado por su memoria logra presentar un argumento deductivo de por qué el punto C es uno de los puntos de la elipse cuya constante es k. René llega a la *conclusión* de que BC es congruente a CD *dado* que C es un punto de la mediatriz de BD, y aunque no lo presente explícitamente está usando el hecho de que los puntos de la mediatriz equidistan de los extremos del segmento. Ahora, tomando como *dato* la igualdad de las medidas de los segmentos, *concluye* que $AC + CB = k$, lo cual se logra gracias a una sustitución. De modo que, aunque su proceso de construcción no es guiado por la deducción, logra dar argumentos de ese tipo gracias al razonamiento que realiza sobre su construcción y los objetos geométricos presentes en ésta, aumentando su grado de coherencia sobre la construcción de la elipse y volviéndolo un conocimiento teórico.

Por último, Rene realiza la misma construcción que hizo en el papel en GeoGebra y usa la herramienta de lugar geométrico, la cual le permite hacer visibles todos los posibles C que cumplen las condiciones (cuando arrastra el punto D sobre la circunferencia). De modo que la expresividad de la herramienta permite evidenciar la elipse y no solo un punto, ya que el medio responde a una definición en términos del lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos…es constante. Aquí el medio toma el papel de explicador a partir de la definición trasladada al medio digital.

4.4. Construcciones 4 y 5

La cuarta construcción que se les propone a los participantes consiste en realizar un triángulo rectángulo dado uno de sus catetos y la diferencia de la hipotenusa con el lado faltante, mientras que en el quinto problema se les da un ángulo que no necesariamente es recto junto con los demás elementos mencionado en el cuarto problema. De modo que por la similitud de los problemas 4 y 5 la mayoría de los participantes hicieron solamente uno de los dos, a excepción de Juan quien propuso dos construcciones diferentes.

4.4.1. Mediatriz

Esta construcción se centra en el uso de la mediatriz para garantizar igualdad de dos distancias que sirven para determinar cada uno de los lados del triángulo buscado.

María

Al igual que en la tercera construcción, María propone hacer uso de la mediatriz para "realizar" la cuarta y quinta actividad. Las construcciones resultan ser básicamente la mismas (lo único que las diferencia es que en la cuarta actividad el ángulo es recto) por lo que se decide hacer el análisis solamente del quinto problema, ya que resulta ser más interesante en la medida en que María evalúa dos casos posibles (el caso en donde el ángulo dado es el mayor de los adyacentes al lado dado y donde es el menor). Para el primero de los casos analizados (en donde el ángulo adyacente al cateto dado es el menor), María ubica el segmento que representa la diferencia sobre la semirrecta que permite determinar el ángulo dado (ver Tabla 33), mientras que en el otro caso lo ubica sobre la semirrecta opuesta.

Después de describir los pasos de su construcción, María escribe "El ΔCAB cumple las condiciones dadas ya que como $AC = AF + FC$ y como $FC = CB$ por ser C un punto de la mediatriz de FB entonces se tiene que $AC = AF + CB \Rightarrow AC - CB = AF$ que representa la diferencia de la longitud dada", lo cual se puede interpretar como una argumentación *deductiva* de por qué su construcción funciona. Ella *concluye* que $FC = CB$ porque C es punto de la mediatriz del segmento FB y aunque no le menciona explícitamente, está usando el *hecho* de que los puntos de la mediatriz equidistan de los extremos del segmento. Más adelante, lo que hace María es valerse de la conclusión anterior y de las *propiedades* de las igualdades para poder afirmar que $AC - CB = AF$, lo que implica que la construcción es correcta.

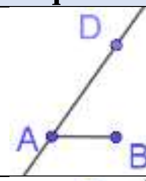
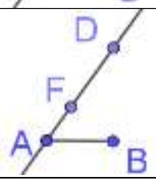
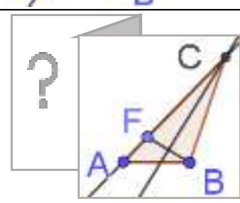
Objetos de la construcción	**Construcción lápiz y papel**	
	Representación de lo descrito o de lo que muestra la imagen que acompaña la solución	**Descripción realizada en el cuestionario**
$\overline{AB}$ y $\angle DAB$ dado		"Sea AB la longitud de la base dada c. Con vértice en A construir el ángulo α dado generando el ángulo DAB".
F en $\overleftrightarrow{AD}$ de manera tal que AF es la diferencia dada.		"En el rayo AD, generar un punto F tal que AF representa la longitud de la diferencia de los dos lados restantes $(b - a)$"
C como punto de intersección de $\overleftrightarrow{AE}$ y la mediatriz de $\overline{FB}$ y ΔABC		"Construir la mediatriz de FB. Generar punto C como la intersección entre el rayo AD y la mediatriz de FB "

Tabla 33. Reporte escrito por María para la quinta construcción en el caso de que el ángulo dado sea el menor.

En la entrevista se le cuestiona a María si está segura de que su construcción es cierta, a lo que ella responde afirmativamente y repite la argumentación mencionada anteriormente resaltando la importancia del punto C como punto de intersección de la mediatriz y la recta AF. Por lo tanto, la entrevistadora la cuestiona sobre la existencia de dicha intersección y ella afirma que no se presenta en todos los casos ya que depende del ángulo, y por esa razón fue que en su cuestionario propuso dos construcciones.

En el cuestionario, María presenta una segunda construcción para los casos en que el ángulo dado es el mayor de los ángulos adyacentes (ver Tabla 34), la cual es similar a la del ángulo menor, pero difieren en que el segmento que representa la diferencia dada no se ubica sobre la semirrecta que determina el ángulo dado, sino sobre la semirrecta opuesta.

La prueba de que la construcción es correcta, en esencia es la misma que la presentada para la primera propuesta ya que escribe: "El ΔABC cumple las condiciones dadas ya que $CB = CD$ por ser un punto de la mediatriz del segmento DB y como $CD = CA + AD \Rightarrow CD - CA = AD$ es decir

$CB - CA = AD$ que era lo que se necesitaba que se cumpliera”. Al igual que en el caso del ángulo menor los argumentos que María presenta son deductivos, y debido a la similitud de las pruebas no se ve la necesidad de escribirla.

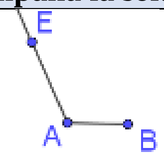
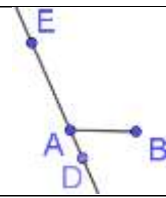
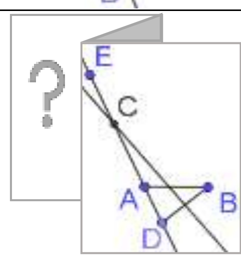
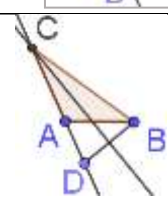
Objetos de la construcción	**Construcción lápiz y papel**	
	Representación de lo descrito o de lo que muestra la imagen que acompaña la solución	**Descripción realizada en el cuestionario**
$\overline{AB}$ y $\angle EAB$ dado		“Sea AB la longitud de la base dada. Con vértice en A generar el ángulo adyacente dado ($\angle EAB$)”.
D en $\overleftrightarrow{AE}$ de manera tal que AD es la diferencia dada.		“Sea D un punto en la prolongación del rayo AE de manera que AD representa la longitud de la diferencia de los otros dos lados”
C como punto de intersección de $\overleftrightarrow{AE}$ y la mediatriz de $\overline{DB}$.		“debo encontrar un punto C en el rayo AE de tal manera que $CB = CD$ para que se cumplan las condiciones dadas […]Se construye la mediatriz del segmento DB generando el punto de intersección entre esta y el rayo AE. Este punto es C”
ΔABC		“ΔABC”

Tabla 34 Reporte escrito por María para la quinta construcción en el caso de que el ángulo dado sea el mayor

Durante la entrevista María comenta que la construcción que realiza en el segundo caso se basa en la misma idea que cuando el ángulo es el menor de los adyacentes, pero que la longitud que representa la resta va “hacia abajo”. De modo que la entrevistadora la cuestiona sobre por qué no hacer lo mismo en el primero de los casos y ella dice:

M: No sé, no lo pensé […] creo que, si lo intenté y no se generaba un punto de intersección, entonces creo que si hay como que ciertas condiciones entonces si es menor (haciendo referencia al ángulo dado) pues es en el rayo (señala el rayo AF— ver Tabla 33—) y si es mayor pues será en el rayo opuesto.

María decide volver a hacer la construcción en la que el ángulo dado es el menor de los adyacentes al lado dado (ver Tabla 33), pero ubicando a F en la semirrecta opuesta a AD. Al hacer su construcción ella encuentra que también es posible generar el punto C y lo prueba deductivamente al igual que lo hizo en su cuestionario.

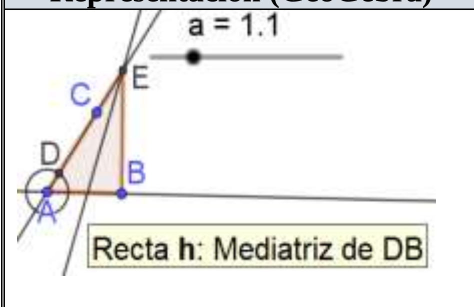
Representación (GeoGebra)	Descripción de la construcción realizada
	Construye el ángulo CAB como el ángulo dado, luego representa la resta dada con el deslizador a que toma valores entre 0 y 5. Enseguida construye el segmento AD de tal manera que AD sea igual al valor de la resta dada (para eso construye una circunferencia con centro en A y radio a, generando el punto de intersección D con la recta AC), luego construye la mediatriz de DB generando el punto de intersección E con la recta AC.

Tabla 35. Construcción hecha por María en GeoGebra de un triángulo dada un lado y la diferencia de los otros dos

Dado que al ubicar a F en la semirrecta opuesta también se genera el triángulo deseado la entrevistadora dice: "O sea, ¿hay más de un triángulo?". Dicha pregunta hace que María decida evaluar el otro de los casos (ubicar D en la semirrecta AE —ver Tabla 34—) y hacer la construcción respectiva. Sin embargo, se cuestiona sobre la exactitud de los trazos que realiza y decide hacer la construcción en GeoGebra (ver Tabla 35).

Mientras María realiza su construcción se da una conversación entre ella y la entrevistadora.

M: Ah, en este caso no es el mayor (mueve el punto A) no (…)
E: ¿Qué pasa? ¿Cómo sabes que no es el mayor?
M: Porque pues este lado (señala el lado AE) (…)es que mira yo quiero mirar el triángulo AEB .Entonces yo sé que este lado EB es igual a ED, pero el lado AE es mayor que el lado EB entonces pues lo subtiende el ángulo mayor, entonces este (señala el ángulo EBA) sería mayor a este (señala el ángulo EAB) entonces no se cumple […] porque al lado mayor lo subtiende el ángulo mayor
E: […] Ah, ok. Entonces ¿el ángulo mayor tiene que estar en B? O sea, me estás mostrando el caso cuando es el menor
M: Aja
E: Ok […] entonces el caso del menor no importa si es arriba o abajo
M: Pues no hemos hecho el caso del de abajo

En la conversación se puede evidenciar como el medio digital *responde* a la acción de mover el punto A, permitiendo que María evoque un conocimiento teórico que no había sido evocado en el cuestionario, de tal manera que logra *concluir* deductivamente que el ángulo en B es el mayor de los ángulos adyacentes ya que hay un *hecho* que afirma que "al lado mayor lo subtiende el ángulo mayor", y se tiene que EB es menor que EA. Se presume que dicho conocimiento teórico no hubiese sido evocado por María en el papel, ya que solo hubiera analizado el caso en el que el ángulo dado es obtuso y en el que es ángulo agudo (como lo hizo en el cuestionario) bajo la creencia de que el ángulo mayor siempre es obtuso. De modo que la variedad de triángulos que se pueden analizar gracias a la representación (estructural) presente en el medio le permite que María necesite analizar el caso en el que el triángulo es acutángulo y en ese sentido, le exige analizar cuál es el ángulo mayor (más allá de afirmar que es el obtuso).

María decide hacer la construcción del triángulo, pero ahora, ubicando la diferencia dada en el rayo opuesto a AC (ver Figura 12), y la conversación que surge con la entrevistadora es la siguiente:

M: Entonces se supone que el triángulo AGB cumple con las condiciones (…), pero, espérate, este (señala el lado GB) es igual a este (señala el lado GF) o sea este lado (señala el lado GB) es mayor que este (señala el lado GA) entonces este lado, entonces sí, cuando se hace hacia acá (señala el lado opuesto a AC) el ángulo viene siendo el mayor.

E: ¿Por qué?

M: Porque mira construí la mediatriz entonces GB va ser igual a GF y GF pues es mayor que GA y como GF es igual a GB entonces GB es mayor que GA, por lo tanto el ángulo GAB va ser mayor que el ángulo GBA […] entonces ese sería el caso en el que el ángulo es mayor

E: [… …] Entonces el ángulo GAB sería el ángulo mayor

M: Cuando se construye el segmento (…), la resta hacia el lado opuesto.

En la primera intervención de María, ella muestra no tener conocimiento sobre lo que va a suceder con el análisis de su construcción. Sin embargo, al final se ve como ella logra obtener una conjetura que relaciona el ángulo adyacente al lado dado con la ubicación del segmento cuya longitud es la diferencia. Dicha conjetura está *mediada* por el conocimiento teórico que exhibe María y por el uso del medio digital, ya que realiza las dos construcciones propuesta en su cuestionario y al analizar los casos posibles que le presenta GeoGebra (triángulos acutángulos, obtusángulos y rectángulos) logra obtener la conjetura de que si la diferencia se realiza en el rayo opuesto a AC entonces el ángulo dado es el mayor de los adyacentes a AB.

En la segunda intervención de María presenta las razones de por qué su "conjetura" es válida. Lo primero que ella *concluye* es que $GB = GF$ gracias a que G es un punto de la mediatriz de BF —usando la definición de mediatriz—, lo cual usa para determinar que $GB > GA$ y posteriormente le sirve para *concluir* que el ángulo GAB es el mayor de los adyacentes a AB porque es un *hecho* que en un triángulo el ángulo mayor se opone al lado mayor. La prueba de María se cataloga como deductiva ya que se basa en hechos matemáticos que no fueron explícitos para el caso del ángulo mayor, pero que si fueron mencionados anteriormente (en el caso del ángulo menor).

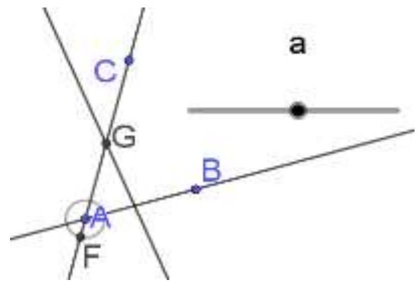


Figura 12. Segunda construcción con el ángulo menor adyacente

4.4.2. Semejanza

La propuesta de triángulos semejantes es presentada solamente por uno de los participantes, la cual solo es aplicable a la cuarta construcción debido a que uno de sus argumentos fundamentales se centra en el uso del teorema de Pitágoras.

Juan

La construcción de Juan se centra en la semejanza de dos triángulos al igual que en la construcción del tercer problema (que se encuentra en la Tabla 25). La única diferencia entre las soluciones es que en el tercer problema construyó un triángulo semejante más pequeño que el inicial, en cambio en el cuarto problema el triángulo construido (el triángulo DCB) es más grande que el inicial (ver Tabla 36). De modo que la configuración final es esencialmente la misma en ambos problemas al igual que los *argumentos* que presenta, por lo tanto, no se ve la necesidad de repetir el análisis. Sin embargo, cabe recordar que dicha argumentación es de tipo deductivo y está muy vinculada con su proceso de construcción, que está permeado por su conocimiento teórico.

Aunque la configuración final y los argumentos que presenta Juan son básicamente los mismos que en el tercer problema, constructivamente hay una variante. En este caso debe encontrar un punto B y trazar una recta perpendicular a ese punto de tal manera que la distancia CB deber ser a, por lo que el punto B no puede ser elegido aleatoriamente. Dicho cuestionamiento se le pregunta a Juan en la entrevista y él afirma que debe construir "una paralela a esta línea (señala DC) que tenga distancia a, y pues ya la intersección (señala la recta DB) va a estar a distancia a, y va a ser perpendicular". Esto permite reafirmar la idea de que la construcción de Juan se encuentra mediada por su conocimiento teórico, que en este caso es la definición de rectas paralelas.

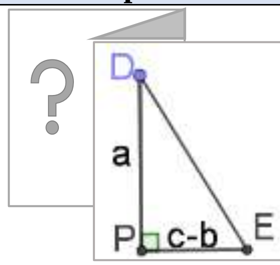
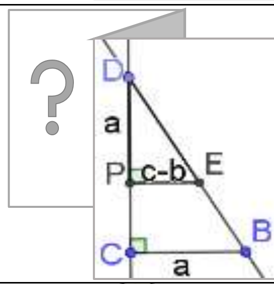
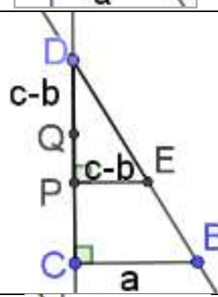
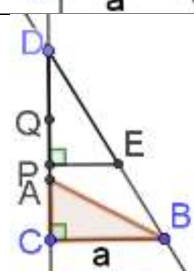
Objetos de la construcción	Construcción lápiz y papel	
	Representación de lo descrito o de lo que muestra la imagen que acompaña la solución	**Descripción realizada en el cuestionario**
ΔDPE rectángulo.		"Sea a el cateto dado, b el cateto desconocido y c la hipotenusa. Construimos un triángulo rectángulo con catetos a y $c-b$ y vértices D, P y E"
$\overline{CB} \perp \overleftrightarrow{CD}$ de modo que $DP = CB$		"Trazamos C un punto sobre la recta DP y B un punto sobre la recta DE tales que CB es perpendicular a DP y $CB = a$ (esto se puede construir trazando una paralela a DP a distancia a, ver la intersección con DE, tomarla como B y tomar C como el "pie" de la perpendicular de B sobre DP)"
Q en $\overline{CD}$ de modo que $DQ = PE$		"Sea Q un punto sobre DC tal que $DQ = c-b$, entonces $CQ = 2b$" [se refiere a $2c$]
A punto medio de $\overline{QC}$		"Tomamos A el punto medio de CQ. Entonces ΔABC es el triángulo buscado"

Tabla 36. Reporte escrito de Juan para el cuarto problema

Cabe resaltar que al igual que en el problema tres, Juan reconoció la ausencia de algunos argumentos que apoyaban su propuesta, los cuales fue proporcionando en la medida que se desarrollaba la entrevista.

4.4.3. Hipérbola

Al igual que con la elipse en la tercera construcción, la hipérbola era una solución que no se esperaba por el medio en el que fue propuesta la actividad. Sin embargo, fue una de las estrategias más usadas por los participantes, ya que tres de ellos la propusieron como solución.

Juan

Para el cuarto ítem Juan propone una segunda construcción (diferente a la de los triángulos semejantes) la cual es también aplicable al quinto problema. Él propone construir una hipérbola (ver Tabla 37) usando los extremos del segmento dado como focos, y los puntos D y E que cumplen que “$|BD - DC| = |BE - EC| = c - b$”. Según su afirmación la medida de DE es igual a $(c - b)$, sin embargo, en realidad es el doble de dicha diferencia porque los puntos se construyeron a partir de una circunferencia de radio “$c - b$”, de tal manera que la construcción descrita por Juan es incorrecta.

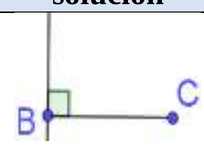
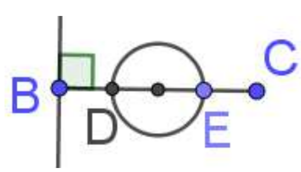
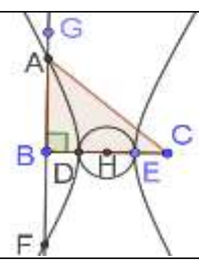
Objetos de la construcción[24]	**Construcción lápiz y papel**	
	Representación de lo descrito o de lo que muestra la imagen que acompaña la solución	**Descripción realizada en el cuestionario**
$\overline{BC}$ y recta perpendicular por B.		“Trazamos BC como el cateto conocido, trazamos la perpendicular que pasa por B.”
Punto medio de $\overline{BC}$ y circunferencia con centro en dicho punto y radio $c - b$		“Tomamos D y E puntos sobre BC tales que $\lvert BD - DC\rvert = \lvert BE - EC\rvert = c - b$. ($D$ y E son las intersecciones de la circunferencia con centro en el punto medio de BC y radio $c - b$ y el segmento BC)”
Hipérbola con focos en B y C y que pasa por D y E		“Trazamos la hipérbola con focos B y C y vértices D y E. Las intersecciones de esa hipérbola con la perpendicular nos darán triángulos que cumplen las condiciones del buscado”

Tabla 37.Reporte escrito por Juan para el quinto problema.

[24] Algunos de los nombres de los puntos fueron incluidos debido a que la construcción original no los tenía.

Ahora bien, más allá de la construcción de los puntos D y E, se evidencia que Juan no está pensando el problema en papel, sino que lo está pensando con las herramientas del menú que le brinda GeoGebra, aun cuando no posee el medio digital. De modo que, cuando escribe "Trazamos la hipérbola con focos B y C y vértices D y E" lo que está mencionando son los elementos que le va a proporcionar a GeoGebra para que *responda* con el trazado de una hipérbola de acuerdo con la geometría incrustada en el medio.

En la entrevista lo primero que se le cuestiona a Juan es cómo sabe que al hacer la circunferencia con centro en H se tiene que los puntos D y E son vértices de la hipérbola, a lo que decide hacer la construcción utilizando GeoGebra[25] y después dice:

J: Esta distancia (señala DC) menos esta (señala BD) debe ser esto (señala DE), (…) y es el doble, entonces esto está mal, debe ser como la mitad de esto (señala DE).

En esta parte se evidencia como el razonamiento de Juan en relación con la producción de argumentos, el cual está *mediado* por la exactitud de los trazos de la representación de GeoGebra, le permite observar que su construcción no es correcta, por lo que él vuelve a construir los puntos D y E a partir de una circunferencia de radio $\frac{c-b}{2}$, de modo que la distancia entre dichos puntos es la diferencia dada, y cuando se le pregunta sobre cómo saber que es la hipérbola deseada dice:

J: Porque, o sea, de aquí a aquí (señala a BD) (…) La diferencia entre este (señala CD) y este (señala a BD), pues es exactamente este (señala el segmento que construyo como diferencia), que es mi diámetro (señala DE)

De modo que Juan da una justificación de por qué el punto D es un punto de la hipérbola y por tanto, logra argumentar que la hipérbola con la que *responde* el medio (a su solicitud cuando usó la herramienta del menú de GeoGebra) es la que tiene como constante la diferencia dada por el problema. Por último, Juan afirma que cualquiera de las intersecciones entre la recta GB y la hipérbola dan como resultado el tercer vértice del triángulo.

René

Al igual que algunos de sus compañeros, René afirma usar una hipérbola para dar solución al problema (ver Tabla 38), pero no proporciona los argumentos pertinentes para poder afirmar que su construcción es correcta. Él "construye" la hipérbola como el lugar geométrico de los puntos medios de un segmento con un extremo sobre una circunferencia (al igual que menciona haberlo

[25] Al hacer la nueva construcción en GeoGebra algunos nombres de los puntos cambiaron. Pero, para facilidad del lector se usarán los mismos nombres del cuestionario.

hecho con la elipse en el cuestionario). Sin embargo, dicho lugar geométrico no genera una hipérbola. En esta parte se resalta que René no está pensando en solucionar el problema en el medio en el que le fue solicitado, sino que lo está pensando con las herramientas del menú de GeoGebra y de alguna manera se imagina que la *respuesta* del medio a su trazado del lugar geométrico va a ser una hipérbola, aun cuando no traslado la definición al medio digital.

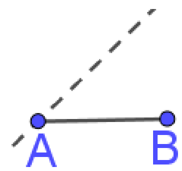
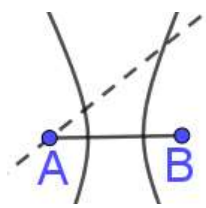
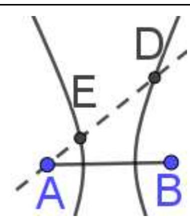
Objetos de la construcción[26]	**Construcción lápiz y papel**	
	Representación de lo descrito o de lo que muestra la imagen que acompaña la solución	**Descripción realizada en el cuestionario**
$\overline{AB}$ y recta que pasa por A de modo que el ángulo que forma con $\overline{AB}$ es α (ángulo adyacente a la base)		“Sea $\overline{AB}$ la base del triángulo […] se traza la recta definida por $\overline{AB}$ y el ángulo”
Hipérbola con k como constante y focos en A y B		“Se construye la hipérbola con focos A y B y la constante definida en el problema, llamémosla k. También se puede construir mediante la circunferencia con radio k y centro en A. Trazando el lugar geométrico de los puntos medios de [los puntos de] dicha circunferencia con B”
E y D como puntos de intersección de la recta (definida por $\overline{AB}$ y por α) con la hipérbola.		“dicho punto de intersección D completa el triángulo solicitado […] Sin embargo, también habrá otro punto de intersección E […] Cuando se da el mayor de los ángulos adyacentes a la base, se realiza la misma construcción”

Tabla 38. Reporte escrito por René para el quinto problema

Al iniciar la entrevista se le pregunta a René sobre si está seguro de que su solución es correcta y su respuesta es que no, ya que “No está bien construida la hipérbola”, pero que al ser construida correctamente lo demás sería correcto, por lo que se le solicitan los argumentos de que el triángulo construido es efectivamente el deseado, y él dice:

R: Digamos que sería la intersección de las dos ideas. Del lugar geométrico formado por la (…), por la diferencia de los lados, y el lugar geométrico formado por el ángulo. Entonces donde se intersecan, según yo, es la intersección de las dos ideas.

[26] Algunos de los nombres de los puntos fueron incluidos debido a que la construcción original no los tenía.

Sin embargo, lo que presenta aún no constituye la prueba de que el triángulo sea el solicitado, ya que primero debe argumentar el por qué el construir la hipérbola permite garantizar que la diferencia de los lados del triángulo sea la solicitada. De modo que lo que se está evidenciando es el razonamiento de René para llevar a cabo su construcción, en donde busca conectar dos ideas que se entrelazan gracias a su conocimiento teórico, dentro del cual busca herramientas que le permitan materializar dichas ideas en la representación.

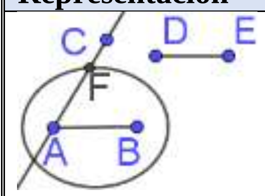
Representación	Descripción de la construcción realizada
	Construye un segmento AB, y una recta AC afirmando que $\angle BAC$ ese es el ángulo dado. Después construye un sementó DE y afirma que esa es la diferencia dada. Usando la herramienta de "hipérbola (foco, foco, semieje mayor)", usando A y B como focos y la medida de DE como semieje, René intenta construir la hipérbola.

Tabla 39. Primer intento de construcción de una hipérbola por parte de René

René decide hacer la construcción en GeoGebra (ver Tabla 39), pero la *respuesta* que le brinda el medio es una elipse, lo cual no es una respuesta esperada porque él usó una herramienta de GeoGebra que es para construir hipérbolas. René vuelve a realizar la construcción y la respuesta del medio digital es la misma, ya que éste responde a la geometría que tiene incrustada (en donde el semieje mayor debe ser menor que la mitad de la distancia focal) para que el resultado sea una hipérbola. René decide interactuar con el medio y buscar una razón para lo sucedido, así que arrastra el punto E cambiando de tamaño al segmento DE (que representa la diferencia) y la inmediatez en las *respuestas* a su acción continua le permiten observar que cuando el segmento DE resulta ser menor que la mitad de AB la elipse se convierte en hipérbola. En este caso el dinamismo del medio digital es el que le permite analizar diferentes casos y obtener una conjetura de forma inductiva.

René busca una razón de por qué el segmento DE debe ser menor a la mitad de AB, así que analiza el caso en el que la respuesta del medio es una elipse, y dice:

R: Estoy viendo por qué de esta resta no sale una hipérbola […]. Entonces aquí lo que tenemos es que la suma de este con este (señala lo que serían los segmentos AF y BF) nos da una constante, pero, digamos en ese caso esa suma no es esta (señala el segmento DE).

Dicho análisis se encuentra mediado por la representación estructural presentada en GeoGebra, de modo que en este caso René no ve la necesidad de tomar la medida de AF y FB para afirmar que la suma de esas medidas no es DE. Ahora bien, buscando entender por qué el resultado es una elipse decide analizar los datos que le proporcionó a GeoGebra en relación con lo que la herramienta le solicitaba —a saber, dos focos y el semieje mayor— y dice:

R: Está mal esto
E: ¿por qué?
R: Porque el semieje mayor, según yo, es una vez a
E: Y, ¿qué pasa?
R: Que acá lo estoy considerando las dos veces.

En este caso, el conocimiento de René sobre los elementos de una elipse ($2a$ como eje mayor de la elipse) es el mediador de su construcción, ya que vincula la respuesta del medio con lo que conoce de la elipse y en particular con la definición de lo que es el semieje mayor.

René vuelve a hacer la construcción usando a $DE/2$ como la medida del semieje mayor, pero como DE es más grade que AB la representación sigue siendo la de una elipse. Posteriormente él determina H en DE de modo que $DH = AF$ y luego construye una circunferencia con centro en H y radio FB la cual aparentemente contiene a E. En este caso René *contrasta* su idea intuitiva de que al trazar la circunferencia con radio FB entonces va a pasar por E (para el caso de la elipse). Si estuviera haciendo "a mano" la figura correspondiente sobre el papel sería su voluntad la que haría pasar la circunferencia por E y no sería una respuesta del medio digital que en este caso re-acciona a su trazado de una circunferencia. Después de que René realiza la circunferencia mueve el punto E y dice:

R: ¡Ah!, sí.
E: Sí, ¿Qué?
R: Que, en este caso, que es caso límite, h (que es la medida de DE) va a ser del mismo tamaño que AB. Entonces en este caso, cuando h es más grande que AB tenemos una elipse, y cuándo h es más pequeño, queda la hipérbola.

En esta parte se ve cómo la *respuesta* del medio junto con el análisis de los diferentes casos le permite al participante llegar a una conclusión correcta sobre el comportamiento de los objetos, para acercarse a una construcción válida. En este caso la continuidad en el arrastre que permite GeoGebra sobre los objetos guía su razonamiento inductivo. Es decir, la respuesta del medio hace que este último actúe como un socio cognitivo sobre el cual las acciones generan respuestas que permiten una reorganización del pensamiento.

Continuando con la entrevista, se le pregunta a René cómo probar que la hipérbola construida es aquella cuya constante es DE, y de acuerdo con su proceso de construcción se esperaba que relacionara el eje mayor (o distancia entre los vértices) con la constante. Sin embargo, lo que René hace es representar con el segmento HJ a la diferencia entre las distancias FB y FA (ver Tabla 40), de modo que al trazar la circunferencia con centro en J y radio DE (que representa la diferencia dada en el enunciado) parece que H pertenece a dicha circunferencia.

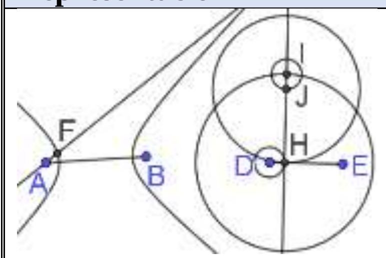
<table>
<tr><th>Representación</th><th>Descripción de la construcción realizada</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Construye una circunferencia con centro en H y radio FB, determinando el punto J como uno de los puntos de intersección de dicha circunferencia con la perpendicular a DE por H. Después construye una circunferencia con centro en I y radio AF determinando el punto J como punto de intersección con la perpendicular. Por último, construye una circunferencia con centro en J y radio DE.</td></tr>
</table>

Tabla 40. Prueba de que la hipérbola construida es la solicitada

René está condicionado por el hecho que *anticipa* que JH va a ser igual a DE, ya que prevé que cuando trace una circunferencia con centro en J y radio DE, ésta última va a contener a H. La exactitud visual de los trazos (sobre la pantalla) le ayudan a dicha anticipación, de modo que, si estuviera haciendo “a mano” la figura correspondiente sobre el papel, el argumento *situado* en el medio no existiría, ya que sería su voluntad la que haría pasar la circunferencia por el otro punto y no sería una *respuesta* del medio digital, que en este caso, (re-acciona) a sus trazos. De modo que el argumento que presenta René de que su construcción es correcta se encuentra totalmente situado en el medio.

Camilo

Camilo, al igual que algunos de sus compañeros, presenta en el cuestionario una propuesta en donde afirma usar una hipérbola (ver Tabla 41). Sin embargo, por el medio en el que le fue propuesto el problema (papel) resulta inesperado que haga uso de la hipérbola como una herramienta que le permite ubicar puntos que cumplen una condición especifica de que la resta de … es constante. Camilo no especifica la forma en la que construyó la hipérbola, ni presenta algún argumento que apoye su construcción. Sin embargo, se puede afirmar que la construcción realizada está mediada por el conocimiento geométrico del participante, ya que él mismo afirma que la condición $a - b = k$ le evoca la necesidad de usar una hipérbola (ver Tabla 41).

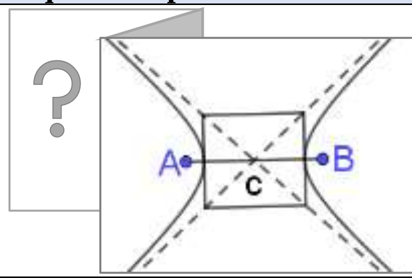
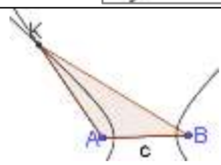
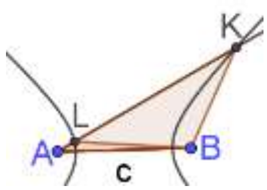
Objetos de la construcción	Construcción	
	Representación de lo descrito o de lo que muestra la imagen que acompaña la solución	**Descripción realizada en el cuestionario**
Hipérbola con k como constante y focos en A y B que son los extremos del segmento dado.		"la condición $a - b = k$ nos hace considerar inmediatamente el lugar geométrico de los puntos que satisfacen esta condición el cual es una hipérbola con distancia focal c, que también es dada. c tiene como extremos los puntos A y B"
Una recta de modo de que el ángulo que se forma en A es el ángulo dado y punto de intersección de la recta y la hipérbola.	 	"Dado que el ángulo $\angle A$ es dado, entonces se busca la intersección de la semirrecta que parte de A con el ángulo específico y la hipérbola. Si el ángulo […] es el mayor de los ángulos adyacentes a la base, su intersección con la hipérbola estará del mismo lado que en donde se ubicó el ángulo proporcionado y si el ángulo que se proporciona es el menor […] entonces la semirrecta que parte del foco con dicho ángulo, interseca a la hipérbola en la "hoja" contraria a donde se ubicó el ángulo"

Tabla 41. Reporte escrito por Camilo para el quinto problema

En la entrevista se le cuestiona a Camilo sobre por qué su construcción es correcta, a lo que el responde:

C: […] como te está dando la diferencia y eso es constante, entonces ahora vamos a hablar de la hipérbola. Entonces lo que tú tienes es un montón de triángulos sobre esa hipérbola. Entonces lo que según yo argumenté fue (…), ya que tienes esos triángulos, te fijas en cuál de esos triángulos se cumple que tenga el ángulo que a ti te están dando.

Esto reafirma que la construcción de Camilo está mediada por su conocimiento sobre la hipérbola. Ya que aun cuando no presenta argumentos, su construcción notoriamente se basa en el vínculo que establece entre las condiciones del triángulo solicitado y la definición de hipérbola.

Continuando con la entrevista, Camilo decide hacer la hipérbola en GeoGebra y su construcción empieza a ser muy similar a la de la tercera construcción (ver Tabla 42) y al ver esto, la entrevistadora lo cuestiona sobre la similitud de ambas construcciones.

C: Porque (…) bueno, casi lo mismo, porque también se cumple que la diferencia es constante, pero esa diferencia también es dos veces la distancia […] del centro a los vértices […].

Nuevamente se ve la intención de Camilo de articular su conocimiento teórico a la construcción que está por realizar. Sin embargo, cuando intenta hacer la construcción en GeoGebra con la herramienta de hipérbola que está en la barra superior, la *respuesta* del medio es el no trazar una hipérbola (porque "bmenosa" es mayor que el lado dado) dando una *sugerencia* de replantear la construcción. En ese sentido, Camilo observa la representación realizada en su cuestionario (en donde los vértices de la hipérbola están contenidos en el segmento cuyos extremos son los focos) y decide mover D hasta que CD resulta ser menor que EF y así generar la hipérbola.

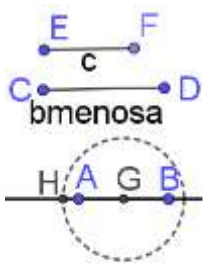
Representación (GeoGebra)	**Descripción de la construcción realizada**
	Construye dos segmentos llamados "c" y "$bmenosa$" y una recta AB, de modo que la medida del segmento es igual a la de c. Construye G como punto medio de AB y una circunferencia con centro en G y radio $\frac{bmenosa}{2}$. Llama H a uno de los puntos de intersección de la circunferencia y la recta; por último, intenta construir una hipérbola con la herramienta de GeoGebra y usando A y B como focos y el punto H como punto de la hipérbola. Sin embargo, como la diferencia es mayor al lado dado entonces la hipérbola no se puede construir.

Tabla 42. Construcción de la hipérbola por parte de Camilo

Inmediatamente después de construir la hipérbola Camilo ubica un punto sobre esta y toma la diferencia de las distancias de dicho punto a cada uno de los focos, y arrastra el punto sobre la hipérbola para comprobar numéricamente que dicha diferencia coincide con "bmenosa". La entrevistadora cuestiona a Camilo sobre la relación que deben mantener la medida de los segmentos EF y CD (EF debe ser mayor), entonces Camilo decide hacer a lápiz y papel un triángulo cualquiera con lados a, b y c, y dice:

C: La desigualdad del triángulo me dice que $a + b > c$, y entonces (…) a mí me gustaría ver cómo es la diferencia. Entonces, me gustaría ver qué onda con $a - b$ (…). ¡Ah!, pero tengo que $b + c > a$, y acá ya está $a - b$ es más pequeño que c (lo que escribe es $c > a - b$).

En este caso, se ve una argumentación deductiva en donde *a partir* de los lados del triángulo se determina que la diferencia de dos de los lados debe ser menor que el tercero, utilizando como *hechos* matemáticos la desigualdad triangular y propiedades de las desigualdades.

Al hacer su construcción y los puntos de intersección de la hipérbola con el rayo que forma el ángulo dado, Camilo se sorprende al notar que son dos intersecciones y dice:

C: Es que yo me fijé en la intersección de acá (señala la intersección más lejana al vértice) y no me fijé en la otra. ¡No!, entonces mi conclusión ya está mal.

En esta parte se ve como la *respuesta* del medio digital a la construcción de los puntos de intersección permite contrastar las ideas iniciales de Camilo sobre el comportamiento de los objetos, lo cual le ayuda a replantear su solución y reestructurar su conocimiento. Camilo nota que en algunos casos la intersección entre la hipérbola y la semirrecta es única, mientras que en otros casos hay dos intersecciones, así que cambia constantemente la medida del ángulo intentando determinar en qué casos se pueden determinar dos triángulos y en qué casos solo uno, pero al final no llega a ninguna conclusión y dice:

C: Y parece que ahí solo me marca uno (en su pantalla el ángulo dado es obtuso) el que te había dicho yo que era el ángulo obtuso y no sé qué más. Pero en realidad, si hay casos en donde tiene los dos triángulos (mueve el punto que le permite cambiar el rayo con el que forma el ángulo y muestra el caso donde éste es agudo), y hay casos en donde únicamente hay un triángulo.

Se puede decir que la representación de la hipérbola en el medio digital le permitió a Camilo identificar las restricciones del problema —a saber, que el lado debe ser mayor que la diferencia— y argumentar deductivamente el porqué de dichas restricciones. Sin embargo, él no evoca el teorema del ángulo mayor opuesto al lado mayor, por lo que pareciera que su idea del ángulo mayor de un triángulo se limita a los ángulos obtusos, sin tener en cuenta que en un triángulo los tres ángulos pueden ser ángulos agudos y por tanto el mayor tendrá que ser agudo.

Por último, Camilo aclara que la construcción del problema con el ángulo recto es un caso particular, cuando dice:

C: Desde mi perspectiva es un caso particular del anterior, en donde te daban un ángulo adyacente, entonces digamos que acá el ángulo adyacente es recto.

4.5. Construcción 6

La sexta construcción consistía en dividir un segmento en cinco partes iguales. Dado que el problema que se propone es en papel y lápiz, lo que se espera es que usen argumentos teóricos que permitan afirmar que el segmento dado queda dividido en cinco partes iguales. Cabe mencionar que todos los participantes construyeron rectas paralelas para solucionar el problema.

4.5.1. Paralelas

Esta construcción se centra en construir triángulos semejantes a partir de rectas paralelas a uno de los lados de un triángulo que se forma con el lado dado y un lado dividido en cinco partes iguales.

Juan

La construcción de Juan, al igual que la de sus demás compañeros, se centra en el uso de un segmento auxiliar que comparte un extremo con el segmento dado y que además se encuentra dividido en cinco partes iguales; ya que se construye replicando una misma longitud sobre una semirrecta (ver segmento AG en la Tabla 43). Después se construye el segmento GB y se trazan las rectas paralelas a éste por cada uno de los puntos que dividen a AG.

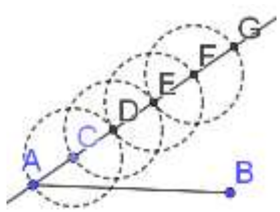
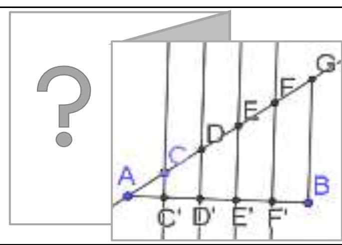
Objetos de la construcción	**Construcción lápiz y papel**	
	Representación de lo descrito o de lo que muestra la imagen que acompaña la solución	**Descripción realizada en el cuestionario**
$\overline{AB}$ y l		"Sea AB el segmento a dividir y sea l y una recta que pasa por A"
C, D, E, F, G en l		"Sobre l trazamos un punto C y luego D tal que $AC = CD$ (usando un círculo de radio CA e intersección con l). Tomamos E, F y G análogamente ($DE = DC, EF = ED$ y $FG = FE$)"
$\overline{GB}$ y rectas paralelas a dicho segmento, por C, D, E y F		"Trazamos el segmento GB y luego los segmentos FF', EE', DD'y CC'tales que son paralelos a GB y C', D', E' y F' están sobre AB."

Tabla 43.Reporte escrito por Juan para el sexto problema

En su cuestionario Juan solamente menciona usar del teorema de Thales, ya que escribe: "Por el teorema de Thales estos puntos dividen a AB en cinco partes iguales". Sin embargo, lo que parece que va a ser la garantía dentro de un argumento deductivo, se queda simplemente en hacer alusión a un teorema, ya que en ningún momento menciona cómo usa dicho teorema para lograr concluir que efectivamente AB queda dividido en cinco partes iguales.

Durante la entrevista cuando se le pregunta a Juan si está seguro de que su construcción es correcta, él responde afirmativamente y explicando los pasos de su construcción. Después la entrevistadora le pregunta por qué queda el segmento dividido en cinco partes iguales, y dice:

J: Por el teorema de Thales [… …]Si son proporcionales hay paralelas, porque lo que quiero llegar es que son parale(…) No, al revés (…). Sí, que si tengo paralelas tengo lados proporcionales. Sí, porque trazo las paralelas y por lo tanto concluyo que (…), entonces, son proporcionales. Y esas paralelas las trazo, no es por teorema ni nada, es por trazo.

En esta parte, se observa nuevamente el teorema que quiere usar Juan para argumentar que el segmento queda dividido en cinco partes iguales. Pero, aunque especifica el teorema al enunciarlo, no se ve un argumento claro ya que no hay una especificidad en su uso. La construcción, que parece estar memorizada por el participante, constituye un saber práctico que Juan conoce que está estrechamente vinculado a un teorema, pero para el cual no ofrece un argumento claro. Esto se puede deber a que no lo ve necesario porque asume que su interlocutor posee el mismo conocimiento que él, y que por lo tanto va a razonar la información de la misma manera o porque tal vez cuando adquirió su saber alguien le mencionó que se vinculaba al teorema de Thales.

Continuando con la entrevista y aprovechando el comentario de Juan sobre el trazo de las rectas paralelas, la entrevistadora le pregunta cómo se construyen rectas paralelas por un punto exterior, y lo que él hace es construir dos triángulos (ver Tabla 44) que son congruentes tal y como lo afirma en su justificación posterior.

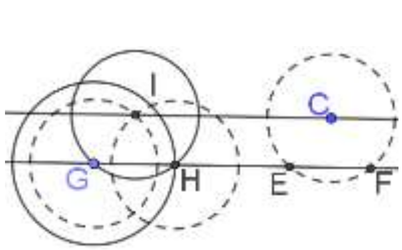
Representación	**Descripción de la construcción realizada**
	Construye una recta y un punto C fuera de ella, después construye una circunferencia con centro en C de modo que interseca dos veces a la recta en los puntos E y F. Después ubica un punto G y realiza una circunferencia con centro en dicho punto y radio EF. Realiza dos circunferencias con centros en G y H y radio CE; el punto de intersección de dichas circunferencias es el punto I. Por último, construye la recta IC la cual afirma paralela a la recta dada.

Tabla 44. Construcción de Juan de dos retas paralelas

Mientras Juan realiza su construcción se le cuestiona por qué hace sus trazos, y su respuesta es:

J: […] Entonces lo que yo quiero es trazar, como que, lo que se me ocurrió, o lo que pensé, es trazar esta circunferencia que esté igual, así, pero de este lado. Que estas dos son iguales (señala las circunferencias de centro en C e I).

En esta parte, Juan ofrece una estrategia de solución que parece provenir de su intuición y que pone en marcha gracias a que puede copiar y trasladar medidas usando el compás como herramienta. Sin embargo, cuando se le solicita la prueba del por qué las rectas resultan ser paralelas él establece otras relaciones diferentes a las mencionadas cuando empezó a hacer su construcción (la de “copiar” la circunferencia), ya que dice:

J: En lo que se basa esto es que GHI y EFC son triángulos isósceles congruentes. Entonces, el círculo con radio en C [se refiere al que tiene centro en C], el circulo con radio en I, el circulo con radio en H y el circulo con radio en G son congruentes, las circunferencias, perdón [explica de nuevo como construyó GH] Entonces este (señala EF) es congruente con este (señala GH), que es la base de ese triángulo, entonces al tener los otros dos lados que sean iguales (señala IG, IH, CE y CF). Solamente trazo triángulos congruentes con el primero, y ya me va a dar.

E: Bueno, y ¿cómo conectas el hecho de que esos triángulos son congruentes y que esas dos rectas son paralelas?

J: Porque van a tener la misma altura […] Sí, o sea, si tengo dos segmentos (construye las alturas de los triángulos mencionados) o sea, este cachito de acá (señala una de las alturas) y este cachito de acá (señala la altura del otro triángulo) que son las alturas, son iguales y cortan a la misma recta, son perpendiculares a la misma recta […]Dos segmentos perpendiculares (…) dos segmentos congruentes perpendiculares a la misma recta deben de (…) los otros vértices que no están en la recta forman una paralela (…) es un rectangulito, digamos.

En la prueba, Juan ya no menciona las circunferencias que indicó inicialmente, sino que se centra en la congruencia de los triángulos GHI y EFC. Aunque su argumentación no está completa porque no menciona todos los hechos matemáticos de forma explícita, Juan logra *concluir* que los lados del triángulo GHI son congruentes con los lados del triángulo EFC *dadas* las circunferencias que construyó desde el inicio, y aunque no lo específica, el hecho matemático que usa es el criterio de congruencia lado, lado, lado. Después de ello, usa el hecho de que en dos triángulos isósceles congruentes las alturas respecto a la base también serán congruentes; conclusión que le sirve ya que de cierta manera está buscando garantizar que la distancia entre las dos rectas sea la misma. De modo que, a pesar de que Juan no menciona explícitamente los hechos en los que basa su argumentación se puede afirmar que sus argumentos son de carácter deductivo y están mediados en gran medida por su conocimiento geométrico.

René

Al igual que sus demás compañeros, René usa la estrategia de construir rectas paralelas para garantizar que el segmento dado queda dividido en cinco partes iguales (ver Tabla 45). Sin embargo, René solo menciona usar el teorema de Thales sin especificar exactamente qué uso le está dando. Además del hecho de que a Thales se le atribuye más de un teorema, el que no presente cómo usó el "teorema de Thales" no permite dar cuenta sobre los argumentos que sustentan su construcción, por lo que se ve la necesidad de cuestionar estos en la entrevista.

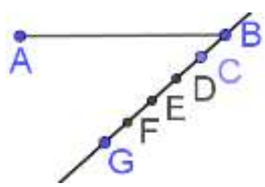
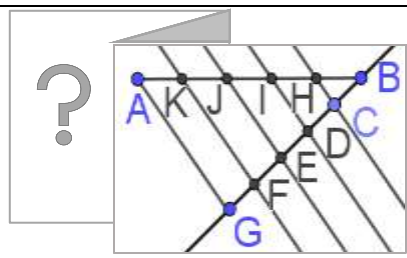
Objetos de la construcción	**Construcción lápiz y papel**	
	Representación de lo descrito o de lo que muestra la imagen que acompaña la solución	**Descripción realizada en el cuestionario**
$\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ de cualquier longitud. D, E, F, G sobre la recta definida por $\overline{BC}$		"A partir de A o B construir otro segmento $\overline{BC}$ de cualquier longitud, repetir dicha longitud cuatro veces más sobre la recta definida por $\overline{BC}$ de tal manera que los segmentos sean colineales y estén unidos. Es decir, en el dibujo $BC = CD = DE = EF = FG$"
$\overline{GA}$ y sus paralelas por D, E, F, C		"Unir el punto G con A y trazar las paralelas al nuevo segmento por F, E, D y C. Las intersecciones de estas paralelas con el segmento $\overline{AB}$ son los puntos que los dividen en cinco partes iguales. Pues es una aplicación del teorema de Thales"

Tabla 45. Reporte escrito por René para el sexto problema

En la entrevista se le pregunta a René por qué está tan seguro de que su construcción es correcta, y él nuevamente hace mención del teorema de Thales, pero no lo hace de una forma más específica, ya que dice:

R: Bueno, el teorema de Thales, realmente lo que me está dando es semejanza. Entonces la semejanza, y pues la (…) pues sí, la constante de proporcionalidad, porque estás cambiando el triángulo, achicándolo o haciéndolo más grande. Y pues en este caso, eso fue lo que utilicé, para poder resolver esto […] entonces, comparo un segmento con un segmento que ya está dividido. Entonces al cerrar eso dos segmentos (señala AG), tenemos un triángulo, y (…) al hacer la paralela a ese triángulo por cada uno de los segmentos (señala los puntos F, E, D y C) ya definidos, entonces lo que estamos haciendo es mantener la misma proporción [… …] Justo aquí lo clave es esto, el triángulo semejante. Pues el triángulo va a mantener las mismas razones y proporciones entre los lados.

E: ¿Cuáles razones y proporciones?, es que no veo ninguna.

R: $\left[escribe\ \frac{BH}{AB} = \frac{BC}{BG}\right]$ Entonces justo eso es lo que estoy aprovechando, estoy aprovechando que aquí (señala los puntos F, E, D y C) todos miden lo mismo. Entonces voy a hacer que la proporción, me va a garantizar que esto pase del otro lado (señala el segmento AB)

E: ¿cómo sé que BH es un quinto de AB?

R: Porque BC es un quinto de BG, eso por construcción.

En todo su discurso René logra enlazar sus ideas proporcionando un argumento *deductivo*, ya que una de las primeras *conclusiones* que resalta es la semejanza obtenida por la construcción de la recta paralela a AG por los puntos F, E, D y C gracias al uso del *teorema de Thales*. Posteriormente René logra *concluir* que $\frac{BH}{AB} = \frac{BC}{BG}$ dada la semejanza entre los triángulos BHC y BAG —y usando la *definición* de semejanza de triángulos—. Por último, usa la proporción hallada y que BC es un quinto de BG "por construcción" para concluir que BH es un quinto de AB.

Continuando, la entrevistadora cuestiona a René sobre cómo construir una recta paralela a una dada por un punto exterior a esta. Él explica que trazaría una recta perpendicular a la dada por el punto exterior y luego copiaría la distancia (entre el punto exterior y la perpendicular) sobre otra perpendicular (ver Figura 13) y afirma que los extremos de los segmentos que no se encuentran sobre la recta dada son puntos de la recta paralela. Cuando se le pregunta a René por qué se puede probar que la recta DC es paralela a la dada, su respuesta es:

R: Dados dos puntos, existe una única recta que pasa por ellos, y, podemos definir a la paralela como dos rectas que mantienen siempre la misma distancia.

En esta parte se evidencia una estrecha relación entre la construcción y la argumentación proporcionada por René, ya que desde un inicio el busca encontrar un punto D que se encuentre a la misma distancia de AB que C, ya que quiere garantizar que se cumpla con la *definición de* rectas paralelas (mantienen la misma distancia). En cuanto a los argumentos dados por René, se puede afirmar que son de tipo deductivo, ya que usa hechos matemáticos establecidos —a saber, la definición de rectas paralelas—.

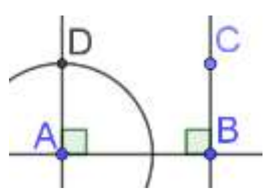


Figura 13. Recta paralela por un punto exterior[27]

[27] Los puntos del dibujo de René no tienen nombres, pero por facilidad para el lector, se le colocan algunos.

***Ana*[28]**

Ana proporciona solamente una imagen (ver Figura 14)y no presenta ningún tipo de argumentos ni hace alusión a algún teorema. Dicha imagen es similar a la presentada por sus compañeros, por lo que se presume que el dividir a un segmento en cierta cantidad de partes iguales constituye un saber que ha memorizado.

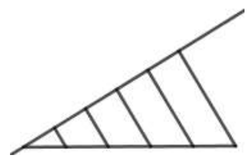


Figura 14. Imagen presentada por Ana como sexta construcción.

En la entrevista se le preguntó a Ana por qué funcionaba la construcción realizada, y ella dijo: "Si son paralelas la distancia es la misma", por lo que se le preguntó qué hecho geométrico le permitía hacer esa afirmación, y su respuesta fue: "No sé, pero así es". De modo que, Ana muestra que su saber es práctico le sirve para dividir un segmento, aún sin saber por qué funciona.

María

Al igual que sus compañeros María manifiesta usar rectas paralelas para "realizar" su construcción (ver Tabla 46). Sin embargo, a diferencia de sus compañeros, ella ofrece parte de un argumento que permite probar que cada parte en la que queda dividido AB es un quinto de AB, ya que escribe:

"La demostración de que los segmentos son iguales sale de la semejanza de los triángulos, por ejemplo, de la semejanza entre los triángulos ACB y AA_1E se puede sacar la proporción $\frac{AB}{AE} = \frac{5}{1}$ de ahí que $AE = \frac{1}{5}AB$"

Como se puede apreciar en su escrito, ella toma como dato la semejanza de dos triángulos y *concluye* una proporción usando como hecho la *definición* de semejanza, aun cuando esta no es mencionada explícitamente. Por último, lo que hace en su argumentación es usar que AA_1 es su unidad y que AC es cinco unidades, de modo que reemplaza en la proporción hallada y logra establecer que AE es un quinto de AB.

[28] Ana es un caso representativo de lo realizado por Camilo, Sofía y ella misma.

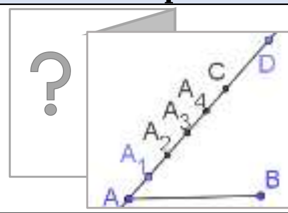
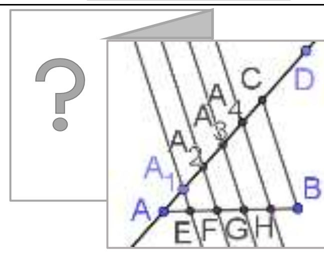
Objetos de la construcción	Construcción lápiz y papel	
	Representación de lo descrito o de lo que muestra la imagen que acompaña la solución	**Descripción realizada en el cuestionario**
$\overline{AB}$ y $\overleftrightarrow{AD}$ A_1, A_2, A_3, A_4, C en $\overleftrightarrow{AD}$		“Sea AB el lado que hay que dividir en 5 partes y sea la recta AD .En la recta AD se construye un segmento que mida 5 unidades (segmento AC)”
$\overline{CB}$ y rectas paralelas por A_1, A_2, A_3, A_4		“Por cada uno de los puntos A_1, A_2, A_3 y A_4 trazar rectas paralelas al segmento CB, que intersecan al segmento AB en 4 puntos E, F, G y H.”

Tabla 46. Propuesta en el cuestionario de María para la sexta construcción.

En general, toda la argumentación que María presentó en el cuestionario depende de que los triángulos ACB y AA_1E sean semejantes, el cual es un hecho que no ha probado. Por lo que al empezar la entrevista se le cuestiona al respecto, y la conversación que se da es la siguiente:

M: Yo digo que por Thales
E: ¿cuál? Porque creo que hay como tres que se le atribuyen a Thales, jajaja
M: es que no recuerdo bien, […] pues aquí tengo como las paralelas a los lados del triángulo ACB entonces pues se forman triángulos semejantes, y lo relaciono con Thales

De acuerdo con el discurso de María, ella parte del paralelismo que es *dado* por su construcción y *concluye* la semejanza de los triángulos tomando como garantía uno de los *teoremas* que se le atribuyen a Thales; el cual, a partir del paralelismo, permite garantizar la semejanza de triángulos. Sin embargo, como parece no estar segura del teorema de Thales, ella presenta otra argumentación deductiva que le permite llegar a *concluir* la semejanza entre triángulos, esta vez *a partir de* la relación de los ángulos correspondientes entre paralelas que le permiten llegar a la semejanza de triángulos usando uno de los *criterios* de semejanza de triángulos. Todo esto, cuando dice:

M: Porque pues si son paralelas, pues no sé, de pronto podría llegar a ángulos congruentes y pues ya con al menos dos ángulos congruentes puedo decir que los triángulos son semejantes. […] entonces por ejemplo la recta CB es paralela a A_1E. Entonces yo puedo decir que el ángulo ACB es congruente con el ángulo AA_1E por ángulos, esos son ángulos correspondientes. Y lo mismo para este caso, yo podría decir que el ángulo ABC es congruente con el ángulo AEA_1 por ángulos correspondientes, Entonces pues ya tengo dos ángulos entonces yo puedo decir que el triángulo AA_1E es semejante con el triángulo ACB

E: ¿Por el criterio?
M: Ángulo, ángulo, y ahí ya puedo sacar las proporciones [repite las proporciones mencionadas en el cuestionario]

De modo que al final María presenta una cadena de argumentos que le permite concluir deductivamente la relación entre uno de los segmentos en los que queda dividido AB y el segmento AB.Sin embargo, es de resaltar que el segmento elegido no es representativo, ya que en este caso el segmento AA_1 y AE comparten un extremo, cosa que no sucede en los segmentos A_1A_2 y EF.

Continuando con la entrevista se le pregunta a María cómo haría para construir las rectas paralelas, a lo que ella responde:

M: Con regla y compás, si no sé (…) bueno podría hacerlo con (…) construyendo (…) es que con regla y compás no me acuerdo cómo se construyen las paralelas. Pero podría ser, por ejemplo, ahora si el de Thales que, por el punto medio, entonces es paralela [… …]

En este caso se ve cómo el proceso de construcción de María está *mediado* por su conocimiento teórico, ya que busca poner en marcha un teorema que afirma que, si se construye una recta que pasa por los puntos medios de dos lados de un triángulo, entonces, la recta construida será paralela al tercer lado. Ahora bien, siguiendo su idea, María decide hacer la construcción en el papel y con compás (ver Tabla 47), afirmando que debe buscar la manera de construir una recta paralela a una recta dada por un punto exterior a ella.

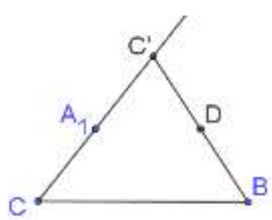
Representación[29] (Papel y lápiz)	**Descripción de la construcción**
	Construye el segmento CB. Como quiere construir una paralela a este por A_1 entonces construye el rayo CA_1y determina un punto C', tal que A_1 sea punto medio del segmento CC'. Por último, determina el punto medio del segmento $C'B$ (comenta que con regla y compás determinaría el punto medio con la construcción de la mediatriz del segmento $C'B$).

Tabla 47. Construcción de María de una recta paralela por un punto exterior

Después de que María termina su construcción se le cuestiona sobre la prueba de que efectivamente la recta A_1D es paralela a CB a lo que ella dice:

M: Pues por el teorema que te digo que dice que si uno los puntos medios de dos lados del triángulo van a ser paralela al otro lado. En este caso si uno este punto medio (señala el punto A_1) con este (señala el punto D) va a ser paralela a este (señala el lado CB)

[29] Algunos de los nombres de los puntos fueron incluidos debido a que la construcción original no los tenía.

En este caso se ve una relación entre los argumentos que justifican su construcción y la forma en la que llegó a esta. De modo que presenta la *conclusión* del paralelismo gracias a que por construcción A_1 y D son puntos medios de dos lados del triángulo; y el hecho geométrico en el que centra su construcción es en el que ella mencionó desde antes de realizarla.

5. Resultados y conclusiones

En este capítulo se compilan y se organizan los resultados que se obtuvieron en el análisis de los datos, todo con el fin de resolver las preguntas de investigación. Además, se presentan algunas cuestiones interesantes respecto a la argumentación de los participantes y a la a mediación de la geometría dinámica en este aspecto.

5.1. Sobre las preguntas de investigación

El empleo de una tecnología digital como la geometría dinámica ha despertado un mayor interés en la comprensión de nuevas maneras de imaginar tanto las matemáticas como la cognición matemática propiamente dicha, que puede ser comprendida en términos de la emergencia de sistemas de representación (y mediación). Los sistemas de representación pueden entenderse como mediadores de la actividad cognitiva, a partir del hecho central de que los seres humanos siempre han diseñado los instrumentos mediante los cuales adquieren conocimiento.

Los sistemas de representación matemático juegan el papel de mediador, de modo que la acción cognitiva que emerge de dicha mediación naturalmente está vinculada a las posibilidades de exploración que ofrece el mediador, en este caso, un sistema particular de representación. En ese sentido el conocimiento que puede ser adquirido está profundamente ligado al sistema de representación que se esté empleando. Los argumentos, o líneas argumentales que se estén empleando son *situadas* en el espacio de acción que determina el instrumento, en este caso, el sistema de representación.

En el caso de sistemas de representación *ejecutables* como el GeoGebra el medio *responde* dejando ver al sujeto las consecuencias de su acción original, la cual, para el caso de las actividades de construcción, puede provenir de la intuición, la memoria o el conocimiento teórico del sujeto. Pero, a diferencia del trabajo sobre el papel, el sujeto recibe una "sugerencia" sobre la naturaleza de su acción. Y a partir de allí puede cambiarla o insistir en ella. Ahora bien, como ocurre cuando se hacen matemáticas sobre el papel, el espacio digital dotado de un sistema ejecutable de representación da pie a diversos niveles de argumentación, los cuales se pueden caracterizar en relación con las respuestas que da el medio ejecutable al sujeto, y no solo a partir de una acción (el arrastre).

De acuerdo con lo anterior se caracterizan cuatro niveles de argumentación que se presentan cuando un sujeto desea probar que su construcción es correcta, en estas se destaca el conocimiento teórico como una parte fundamental que está vinculada a la co-acción entre el sujeto y la herramienta.

En un primer nivel denominado **pruebas por coincidencia** el *conocimiento teórico está incrustado en el medio* de GeoGebra, de modo que el estudiante basa su prueba en que la construcción realizada coincide *perceptualmente* con las construcciones predeterminadas del menú, que son portadores de ese conocimiento teórico. De modo que no se hace alusión a que una determinada construcción cumpla con una definición, sino que coincida con uno de los objetos que ofrece GeoGebra. Esta es una argumentación totalmente perceptiva, en donde el sujeto se guía solo por lo que se ve sin hacer alusión a la teoría.

En este caso el estudiante procede de acuerdo con su memoria o razonamiento intuitivo y corrobora que el resultado obtenido es el deseado usando el menú que ofrece GeoGebra, es de resaltar que en este caso (al igual que en la prueba del arrastre mencionada por Arzarello et al, 2012) la intencionalidad juega un papel relevante, ya que el estudiante puede usar la coincidencia de los objetos como una forma de llegar a una conjetura y buscar otras formas de probar, o puede quedarse en que dicha coincidencia constituye una prueba en el medio, la cual puede ser suficiente para el estudiante, o puede evolucionar hacia el campo de lo teórico.

Un ejemplo de este tipo de pruebas es presentado por Ana en la entrevista, cuando anticipa que al construir un triángulo isósceles y hallar el punto medio de la base, dicho punto junto con el vértice opuesto a la base le va a permitir determinar la bisectriz del ángulo deseado. Para probar que su construcción es correcta ella construye la bisectriz (macro) que le ofrece GeoGebra, y la *respuesta* del medio es construir una recta que se sobrepone a la construida por Ana, de modo que, ella basa su argumento en que al arrastrar los puntos de la construcción la bisectriz que le brinda el medio coincide con la que ella construyó, por tanto la recta construida tiene que ser una bisectriz, todo esto sin hacer alusión de manera explícita a la definición de bisectriz.

Un segundo nivel que está un paso más cerca de ser una prueba deductiva clásica es aquel en donde las *respuestas del medio son interpretadas a la luz de la teoría*. Estas fueron denominadas **pruebas con alusión a la definición.**

En este tipo de pruebas el estudiante usa la exactitud de los trazos en GeoGebra para *ilustrar* el cumplimiento de una determinada definición o hecho geométrico. De modo que, el actuar del estudiante está condicionado por el hecho que *anticipa que la exactitud brindada por el medio digital* le va a ofrecer unos *datos* que le permiten llegar a la *conclusión* deseada a partir de una definición o hecho geométrico (garantía), acercándolo a los argumentos puramente deductivos. En este caso la *respuesta* del medio que *re-acciona* (o co-acciona) a la acción del sujeto es la que permite hablar de un argumento en el medio; ya que si estuviera en el papel sería su voluntad la que haría que en la representación se mantuviera la relación buscada.

En este segundo nivel el estudiante procede de acuerdo con su conocimiento teórico, de modo que GeoGebra auxilia su razonamiento y le permite presentar un argumento con base en el medio y en la teoría. Sin embargo, al igual que en el primer nivel el estudiante podría estar procediendo de acuerdo con su memoria o razonamiento intuitivo y corroborar (gracias a GeoGebra) que el resultado obtenido cumple con una definición o propiedad. De modo que la prueba podría estar basada en el arrastre le permite llegar a corroborar su razonamiento, o podría evolucionar hacia un campo más teórico.

Un ejemplo de este tipo de pruebas se presenta por Sofía y Ana en la entrevista después de interactuar con el medio digital y logra presentar una construcción de la bisectriz de un ángulo sin hacer uso de las herramientas del menú de GeoGebra, es decir, hacer una construcción como se haría con regla y compás. Ellas un determinado momento de su intervención afirman que la recta construida es la bisectriz porque cuando construyen una circunferencia con centro en un punto de esta y tangente a uno de los lados del ángulo el medio *responde* a sus trazos, haciendo que la circunferencia resulte ser tangente también al otro lado del ángulo, de tal manera que la información perceptual es procesada en términos de la teoría que en este caso sería que como los puntos de la recta construida equidistan de los lados del ángulo se puede decir que la recta construida es bisectriz.

Otro ejemplo de este tipo de pruebas es presentado por René en la entrevista vinculada a la construcción de la hipérbola en la quinta actividad, cuando ubica un punto en la hipérbola construida y usando circunferencias determina un segmento HJ que se corresponde a la diferencia de las distancias del punto a cada uno de los focos, haciendo uso de la definición de hipérbola. Posteriormente, René construye una circunferencia con el segmento dado por el problema como radio y con centro en J, y la respuesta del medio es que H es un punto de la de la circunferencia. De tal manera que la respuesta del medio, interpretada a la luz de la definición le permite probar que la hipérbola construida es aquella cuya diferencia es la dada por el problema.

En los datos se pudo identificar un tercer nivel denominado **pruebas por traslado de definición**, en donde el estudiante proyecta (totalmente) su conocimiento teórico sobre el medio digital, de modo que los objetos que construye cumplen con una definición porque así fueron construidos. Y en ese sentido, la prueba que presenta se encuentra estrechamente vinculada a su construcción.

Un ejemplo de este tipo de pruebas se presenta cuando René construye través del circulo director, las elipses visuales que responden a una definición en términos del lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos es constante. De tal manera que, aun cuando los objetos "existen" en el medio digital los argumentos que los acompañan son deductivos.

Un cuarto nivel es el de las **pruebas deductivas**, las cuales se basan en el conocimiento teórico del estudiante, de modo que los argumentos se acompañan de una representación que pueden estar en el medio digital o en el papel, a partir del cual se extrae información que se procesa gracias al conocimiento teórico.

Un ejemplo de este tipo de prueba es la presentada por Juan y Ana en la entrevista, cuando en la primera construcción prueban que la recta construida es la bisectriz a partir de probar la congruencia de dos triángulos que se forman en su construcción. Es de resaltar que los argumentos presentados por los participantes obedecen a reglas de deducción aceptadas, aunque no siempre se hacen explícitos los hechos matemáticos que permiten hacer las deducciones, y por tanto resultan ser incompletos.

Ahora bien, la interacción con el medio digital no solo ha permeado en las formas que un estudiante argumenta, sino que también las ha hecho que usen un tipo de argumentos sobre otros. Para el caso del papel y lápiz los estudiantes no tienen más remedio que usar su conocimiento teórico como herramienta que les permite justificar que una determinada construcción es correcta; de modo que interpretan la información presente en la construcción e intentan relacionarla con su conocimiento.

Por ejemplo, cuando Camilo en el primer problema realiza la construcción de la bisectriz en el papel, y a partir del análisis de los elementos de la construcción logra determinar la congruencia de dos triángulos, los cuales le permiten concluir que la recta construida es efectivamente una bisectriz; de modo que en este caso los argumentos son deductivos. Sin embargo, en el caso de la geometría dinámica, las representaciones permiten otro tipo de interacciones, en donde el arrastre y lo visual juegan un papel importante. Uno de los fenómenos que llamó la atención fue el uso del conocimiento teórico para realizar la construcción y uso de argumentos más alejados de lo teórico para probar que efectivamente la construcción es correcta. Un ejemplo de ello es Sofía quien en su construcción vinculada al tercer problema proyectó su conocimiento sobre el medio, de modo que su prueba parecía ser por traslado de la definición; sin embargo, decidió usar circunferencias para probar que el lugar geométrico construido efectivamente cumplía con la definición de elipse, de modo que la prueba presentada terminó siendo por alusión a la definición.

5.2. Sobre los resultados adicionales

Uno de los hechos más notorios en la investigación fue que al momento de solucionar el cuestionario muchos de los participantes realizaron sus construcciones como si las estuvieran haciendo en GeoGebra. Un ejemplo de ello es el de la primera construcción en donde la gran mayoría manifestaron construir la bisectriz sin hacerla propiamente en el papel, tal vez haciendo alusión a la construcción que permite GeoGebra (con una macro). Otro ejemplo en el que se hace aún más notorio que los participantes estaban pensando en la construcción en el medio digital es cuando en las actividades de construcción 3, 4 y 5 “usaron” hipérbolas o elipses para dar solución al problema. De modo que los sujetos han internalizado a GeoGebra como una herramienta cognitiva a tal grado que piensan las construcciones a través del medio aún sin estar trabajando en este. De acuerdo con Moreno-Armella (2003) dicho fenómeno ocurre cuando una herramienta ha pasado a ser un instrumento y ahora *integra* la cognición del sujeto.

Otro de los hechos que se presentan en la implementación de la activad es que, a pesar de la estrecha relación que tienen las construcciones geométricas con la geometría euclidiana (Arzarello, et al, 2012) algunas de las construcciones constituyen un saber para el estudiante, de modo que sabe el algoritmo para construir paralelas, por ejemplo, sin tener la certeza de por qué funciona, lo cual deja ver que las construcciones geométricas podrían no estar siendo potenciadas (en la escuela) desde un punto de vista teórico. Esto se afirma debido a que algunos participantes manifestaron saber cómo se divide un segmento en partes iguales, porque es algo que les enseñaron desde el colegio, pero no recuerdan haber obtenido una prueba de ello, ni tener el conocimiento suficiente para poder argumentar deductivamente el por qué el algoritmo de la construcción funciona. Este último hecho, junto con la dificultad que tuvieron algunos participantes en la producción de pruebas teóricas es algo que resulta preocupante desde el punto de vista educativo, ya que todos son profesores y algunos de ellos han dado o van a dar clases de geometría Euclidiana; de modo que, surgen algunas interrogantes sobre cómo se están capacitando a los profesores en el ámbito de las pruebas geométricas, ya que de acuerdo a la revisión realizada la mayoría de estudios se enfoca en conocer las concepciones del maestro.

6. Investigación Futura

En este estudio se presenta un acercamiento a la prueba geométrica desde una perspectiva educativa. Allí se consideran como válidas las pruebas mediadas por una tecnología digital, a saber, GeoGebra. La mediación de este instrumento permitió identificar diferentes niveles de razonamiento cuando se intenta validar una construcción geométrica. Cabe resaltar que, como parte del estudio, también se buscó caracterizar la prueba cuando la construcción se realiza sobre el papel. Sin embargo, los resultados muestran que después de haberse sumergido en un medio de geometría dinámica, como es el presente caso, e intentar razonar de vuelta sobre un problema en el papel, los estudiantes razonan como si estuviesen trabajando en el medio digital. Esto es una muestra de cómo la *acción instrumentada,* es decir, el razonamiento de los estudiantes una vez que han incorporado las estrategias provenientes del trabajo con el mediador digital (GeoGebra), reconfiguran la manera de abordar problemas geométricos: la experiencia digital deja su huella. Abundaremos sobre este tema posteriormente.

Este trabajo es una contribución a un problema aún mayor que ha sido y continúa siendo objeto del interés de muchos investigadores (véase, por ejemplo, Hanna, G., Reid, D. A., & de Villiers, M. (Eds.), 2019). Más precisamente, se trata de comprender cómo un trabajo inmerso en un ambiente de geometría dinámica va tejiendo, gradualmente, nuevas estrategias que se integran a las que el estudiante ya posee para abordar un problema. Las experiencias previas del estudiante provienen del medio estático— lápiz y papel. En principio, y esto se observó en el presente trabajo, el estudiante busca un camino intermedio entre la naturaleza inductiva y deductiva de la prueba. Sin embargo, los resultados están limitados por diferentes factores que no se pueden abarcar en una sola investigación. A continuación, se presentan diferentes vías de trabajo, junto con algunas preguntas que pueden ser fuentes de inspiración para el trabajo posterior.

- De acuerdo con el análisis de los datos obtenidos, fueron propuestos cuatro estrategias de prueba (que denominamos *niveles* de prueba). Es claro que los resultados dependen del grado de conocimientos geométricos del grupo experimental. De allí que sea válido preguntarse: ¿En qué nivel educativo se puede aspirar a que sea suficiente proponer una secuencia didáctica que comprenda justamente los niveles de prueba que se ha caracterizado en este trabajo? La pregunta que puede tornarse una pregunta de investigación pretende identificar un nivel de conocimientos que ayude a trazar una ruta hacia una prueba más formal, es decir, más cercana al *conocimiento teórico* sobre el que se basa una organización de la geometría como se enseña en las instituciones escolares. Esta pregunta lleva a otra que estaría más cercana al trabajo realizado hasta el momento: ¿cómo se puede caracterizar la evolución de un nivel de prueba a otro? y ¿en qué medida las herramientas predefinidas por la geometría dinámica en uso promueven o inhiben el desarrollo de pruebas más formales?

- Los niveles de prueba que se proponen están vinculados con actividades en las que los estudiantes debían probar que su propuesta de construcción era válida. Por eso, las siguientes preguntas están vinculadas al tipo de actividad que desarrollaron: ¿los niveles de prueba que se presentaron al usar el medio digital sólo se presentan en actividades de construcción? ¿Cuáles son los tipos de prueba que se presentan al usar el medio digital en otro tipo de situaciones geométricas?
- Trabajamos con un grupo de estudiantes/profesores que ya estaban familiarizados con la geometría dinámica y poseían ciertos conocimientos geométricos. Algunas de las preguntas que surgen: ¿Cuál es la relación existente entre el tipo de pruebas que proponen los estudiantes y la experiencia que han tenido con el medio digital? Es decir, es una pregunta sobre el impacto de la experiencia digital sobre su razonamiento. Otra: ¿Pueden los estudiantes apropiarse de herramientas matemáticas a través de las construcciones preestablecidas en el medio digital, por ejemplo, la mediatriz?
- Aunque en un principio las representaciones no fueron uno de los objetos primordiales dentro del estudio, desempeñaron papeles diversos en las pruebas propuestas por los participantes. Es natural preguntarse entonces: ¿cuál es el papel de la representación gráfica en una prueba?, ¿de qué manera las figuras *incrustadas* en el medio pueden llegar a servir de mediadoras en la argumentación del estudiante?

De acuerdo con lo anterior, existen diversos caminos para la investigación futura y uno de los que llama la atención es el que se refiere a las representaciones. Reiteremos que éstas son la vía de entrada al conocimiento de los entes conceptuales, más comúnmente denominados objetos matemáticos.

Para el caso de medios dinámicos, como GeoGebra, las representaciones son ejecutables. Es decir, las representaciones responden a las acciones del estudiante y a la matemática que se encuentra incrustada en el medio digital. El estudiante desplaza el "ratón" (o el equivalente) y su mano virtual arrastra un punto de la figura transformándola sobre la superficie digital. De este modo se hace posible que podamos apreciar rasgos del objeto matemático que permanecían "escondidos" en una representación estática. La *lectura* del objeto geométrico en un *texto digital* arroja una decodificación distinta del objeto. Pues por una parte permite ver características que hubiéramos podido ver con un poco más de dificultad en el papel, Un ejemplo de esto se presentó cuando Ana en la primera actividad mide dos ángulos determinados por una supuesta bisectriz y el medio responde presentando dos valores muy cercanos, permitiendo que ella notara que la recta construida no es la bisectriz del ángulo. Aunque es una observación que tal vez se hubiera podido realizar al medir los ángulos con un transportador, la cercanía de los valores numéricos habría hecho que fuera un poco más difícil decidir sobre la supuesta bisectriz en ese ejemplo particular. Por otra parte, el medio digital permite interactuar con las representaciones de maneras que no hubieran sido posibles en el papel. Un ejemplo de esto tuvo lugar cuando algunos participantes trabajaron con la representación de la hipérbola y la elipse para probar que la construcción era correcta, lo cual no hubiesen podido hacerlo sobre el papel.

Las representaciones en el medio digital son de una naturaleza distinta a la que se presenta en el papel ya que al actuar sobre la representación mediante el arrastre (dragging) o mediante una transformación geométrica, el medio *re-acciona* a nuestra acción ofreciendo el resultado de ésta. Para el caso de la prueba "tradicional" en geometría, la representación tiene, implícitamente, un papel "secundario" ya que la generalidad del teorema es dada por los argumentos que acompañan la representación. Se suele enfatizar el encadenamiento lógico de las afirmaciones como si la representación fuese invisible o de muy poca relevancia para determinar la veracidad de un hecho general. El hecho de que la representación en papel (o en una superficie material distinta) haya tenido un papel esencial en el desarrollo histórico de las matemáticas, le ha dado una distinción frente a otros sistemas de representación. Ocurre con ellas un fenómeno frecuente: cuando un instrumento, en este caso la representación sobre el papel ha sido interiorizada hasta en punto que ya no la distinguimos de otros recursos cognitivos que nos parecen intrínsecos, entonces *desaparece*. Es tan *natural* graficar sobre el papel para orientar la reflexión que no somos conscientes del papel esencial que desempeñan.

Las representaciones en el medio digital hacen visible que la representación, por ejemplo, de un triángulo isósceles tiene un nivel de generalidad en la medida en que cuando una persona arrastra un vértice del triángulo lo que se sigue viendo es una transformación continua del triángulo: se hace visible la estructura de triángulo isósceles. De modo que, la interacción con una representación que sigue una estructura debe tener un rol diferente al que desempeñan las representaciones en el papel. Por lo tanto, como parte de la continuación de este trabajo resulta relevante caracterizar el papel de las representaciones en el medio digital cuando se realizan pruebas

6.1. Articulación conceptual y Problemas de investigación

La presencia de las tecnologías digitales en la escuela ha permeado de distintas maneras en las aulas de clase, por lo que ha sido un tema de interés dentro de la educación matemática en las últimas décadas. A pesar del gran número de investigaciones que se han realizado con relación a este tema en el área de la geometría, su constante evolución y desarrollo ha hecho que sea un tema de investigación que, hasta recientemente, no se ha entendido ni explorado con suficiente detalle (Sinclair et. al, 2016).

La prueba, por su parte, es uno de los temas que ha sido ampliamente estudiado en la educación matemática. Pero, también es uno de los aspectos de la actividad matemática que más se ha resistido al cambio tecnológico (Hanna et. al, 2019), lo cual puede deberse a la tensión que existe entre la naturaleza empírica de la prueba en un medio digital, y la naturaleza teórica de la misma (Sinclair et. al, 2016) —en el fondo, esa resistencia es un problema centrado en la concepción dominante de las matemáticas. Sin embargo, desde el campo de la educación matemática, ha habido esfuerzos como los de Olivero y Robutti, (2001) para ir cerrando esa brecha, pues resaltan el papel mediador del arrastre en el paso de lo perceptivo a lo teórico. Lo cual es un primer paso hacia una reconsideración del carácter de validación geométrica que puede poseer un argumento anclado al medio digital.

En el caso de la geometría, no es de extrañar la tensión existente entre lo intuitivo y lo teórico intensificada por las versiones axiomáticas que se ha desarrollado en diferentes momentos de la historia. Se ha pasado de un objetivo que era educativamente sensato como es el de *refinar* la lectura de las representaciones visuales, a verlas como un “peligro” para el razonamiento formal.

De acuerdo con algunos autores como Duval (2005) la geometría es un área del conocimiento en donde la prueba suele implicar la interacción entre dos registros de representación: el visual y el lingüístico, lo que ha llevado a que se sume a la discusión la primacía de un registro de representación sobre otros. Un ejemplo de esto son las llamadas *pruebas sin palabras*, en donde una representación visual es la prueba misma de que una afirmación es cierta. Básicamente, la intención de este tipo de recurso didáctico es que quien observa la figura sobre el papel la vea como si fuese una representación congelada a la que puede dar vida (movimiento) en su imaginación para hacer tangible la razón de la validez del hecho que se pretende revelar. En su libro *Proofs without Words*, Nelsen (1993) afirma que las pruebas visuales “no son realmente pruebas” sin embargo, sostiene que ayudan a comprender por qué un cierto resultado es válido y eventualmente señalan el camino para alcanzar lo que suele considerarse tradicionalmente como una prueba genuina. De Villers (2018) por su parte, propone una versión dinámica de una prueba sin palabras en donde a partir de pistas permite identificar invariantes en las figuras y proponer una situación general que posteriormente debe ser probada. En su propuesta, en la media que el estudiante propone una prueba de que ciertas áreas cumplen con una relación va estableciendo una generalidad respecto a la equivalencia de áreas para otros polígonos, y a su vez establece una generalidad sobre la prueba misma, lo que de acuerdo con De Villers (2020) ilustra el carácter de descubrimiento que tiene la prueba.

Es conveniente hacer aquí una pequeña precisión sobre las representaciones que se trabajan en la geometría dinámica. Hace ya tiempo se señaló la diferencia entre dibujo y figura. La figura es una representación estructural del objeto geométrico. Sobre el papel, lo análogo sería construir, digamos, un triángulo equilátero con regla y compás. La regla y el compás son mediadores entre el mundo visual y el mundo estructural de la geometría. Esos instrumentos se trasladan a la geometría dinámica y hablamos de *figura* cuando ha sido construida siguiendo la regla y el compás dinámicos contenidos inicialmente en las construcciones pre-determinadas del medio. Cuando se procede siguiendo estas reglas, la verificación perceptiva está mediada a su vez por *el arrastre*. Una construcción es estructural (es una figura) si soporta *la prueba del arrastre*. Las representaciones digitales genuinas de figuras geométricas tienen esta *característica de estabilidad estructural*.

Las construcciones pre–determinadas del medio están conformadas por la regla y el compás dinámico y aparte se presentan otro tipo de construcciones pre -determinadas: las que se pueden construir con un poco de esfuerzo a partir de la regla y el compás (como la mediatriz, la bisectriz, un punto simétrico respecto a una recta, etc.). Al igual que en el caso de las figuras, estas representaciones tienen una estabilidad estructural, pues responden a la geometría incrustada en el medio digital. Por ello que resulta relevante cuestionarse sobre ¿cuál es el rol que deben desempeñar estas representaciones en el proceso de prueba? Nuestra respuesta inmediata es que su aplicación equivale a un uso de regla y compás extendidos al medio digital pero que preservan los rasgos centrales de la geometría teórica, entendida ésta, como la que ha quedado plasmada en los textos de papel.

El carácter de ejecutables que subrayamos de las representaciones en geometría dinámica significa que, por ejemplo, al arrastrar una figura, seguimos viendo variantes visuales que nos permite ver la estructura. El medio digital *reacciona* a nuestras acciones y nos ofrece una especie de espejo cognitivo: vemos allí, sobre la pantalla el efecto de nuestra acción. Esta es, en síntesis, la naturaleza de la geometría dinámica (en este caso, Geogebra) como espacio de exploración, de modo que el estudiante es libre de actuar, pero su acción está invisiblemente (para él) controlada por el conocimiento teórico que vive en la versión dinámica de la geometría.

De todas las consideraciones anteriores surge una pregunta: ¿Cual figura nos orienta hacia lo inductivo y cuál hacia lo deductivo? O será, más bien, ¿que lo híbrido del medio digital nos ubica en un espacio conceptual donde la noción de prueba pueda ser revalorada en función de los propósitos didácticos?

Nos parece que aquí se ve una confluencia de las matemáticas y la didáctica: la prueba es un generador de coherencia y no solamente un medio de validación. La cognición humana no es un invariante de la persona al nacer, pues allí interactúan la plasticidad cerebral y la profunda influencia del medio sociocultural en el desarrollo de las personas (Donald, M., 2001). De allí que no sea razonable esperar que, ante la influencia de la geometría dinámica, el razonamiento matemático del estudiante y sus estrategias de validación no se vean alterados. Por otra parte, sabemos, y lo hemos enfatizado, que nuestro trabajo con los objetos matemáticos está sujeto a los sistemas de representación (Duval, 2005). De allí que a medida que los registros de representación aumentan para un concepto previo, este objeto deja de ser el que era previamente antes del nuevo sistema de representación. En consecuencia, no podemos espera que pueda mantenerse una idea de prueba desarrollada básicamente en la cultura matemática del papel y lápiz. La presencia de la tecnología digital afecta sustancialmente la institución educativa.

En resonancia con estas consideraciones, se proponen las siguientes preguntas de investigación, las cuales serán una guía importante para el desarrollo del estudio futuro.

¿Cuáles son los roles que desempeña una representación, que se encuentra incrustada en el medio digital, durante el proceso de prueba? Para empezar a responder a esta pregunta será necesario estudiar las acciones de los estudiantes sobre la representación y las respuestas del medio digital sobre dichas acciones. Además, partiremos de la idea de que la formalización y el rigor son relativos al medio en el que tienen lugar. Por ello, desde esta tesis, las líneas argumentales en el marco de una geometría dinámica tienen que iluminar nuevas formas de validación que, desde luego, no pueden ser contradictorias con las que ya se tienen, pero tampoco pueden quedar subordinadas. La presencia de un mediador semiótico, es decir un instrumento para generar significado, como lo es la geometría dinámica, no impacta meramente como un amplificador de lo conocido, sino que re-organiza lo conocido y eventualmente lo transforma.

¿En qué medida el uso de una determinada representación dinámica en el medio digital sirve como mediadoras en el paso de lo perceptivo a lo teórico? Esta pregunta está orientada a la exploración de la naturaleza del objeto geométrico desde una perspectiva mucho más amplia, en donde la interacción con la representación dinámica permite ampliar el conocimiento que posee en estudiante sobre el objeto.

6.2. Metodología, recolección de datos y su análisis

Debido a la naturaleza de las preguntas de investigación, se considera conveniente realizar un estudio de tipo cualitativo, pues se pretende comprender, profundizar y describir un fenómeno desde la perspectiva de los participantes, lo cual caracteriza a los estudios de este tipo (véase Hernández, Fernández y Baptista, 2010). En general, como la intención es caracterizar los diferentes roles de la representación en el desarrollo de pruebas debemos proponer diferentes situaciones en las cuales se vea inmersa la representación. En ese sentido se distinguen las siguientes actividades.

1. Actividades de construcción en las que el estudiante debe proponer la construcción y probar que cumple con las características que se mencionan en el enunciado.

Este tipo de problemas son muy similares a los trabajados durante el desarrollo del presente trabajo, los cuales fueron la fuente de inspiración para la investigación futura. Aquí se les solicita a los participantes realizar una construcción y probar que ésta cumple con las características determinadas por la actividad. Tenemos datos en donde se ve que la representación en el medio digital podría tener un papel heurístico, por ejemplo, en el caso de Sofía cuando no sabía cómo construir una bisectriz sin usan la construcción pre- determinada del medio y decide construir el ángulo y una recta perpendicular a O (ver Figura 15), y a partir de arrastre del punto P logra determinar que en su construcción P debe encontrarse a la misma distancia la de M que O .

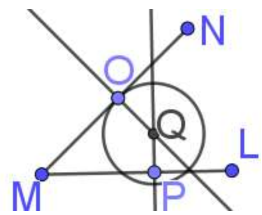


Figura 15. Representación en la que el arrastre permite determinar su posición ideal.

Ahora bien, después de que Ana construye el punto P como un punto que cumple con las características deseadas usa la construcción de la circunferencia con centro en Q como prueba suficiente para poder afirmar que el punto Q pertenece a la bisectriz del ángulo. De modo que al momento de la construcción y al momento de la probarla la representación desempeñó dos roles diferentes.

Otro de los resultados que llaman la atención es el uso de la elipse y la hipérbola para solucionar las actividades, ya que en un principio los estudiantes/profesores las usan como una forma de representar una propiedad que conocen (suma o diferencia de distancias constantes) pero en la media que interactúan con la representación consideran su estructuralidad para probar que cumple con una determinada condición. En este caso no solo hubo que probar el cumplimiento de las condiciones, sino tuvo que probarse que los elementos que se le "daban" al medio digital (por ejemplo, para el caso de la elipse los focos y un punto sobre ésta) arrojaban la respuesta deseada. Ahora bien, éste no es el único uso que se les puede dar a las elipses e hipérbolas, pues pueden ser también una fuente de conocimiento que le permita a los estudiantes articular conocimientos previos para la producción de pruebas.

Los ejemplos permiten ilustrar nuestro punto de vista respecto a que las representaciones no desempeñan un único rol dentro de las pruebas. Sin embargo, aún falta más investigación para poder determinar con certeza los roles que están desempeñando en cada uno de los ejemplos mencionados.

2. Actividades en las que la figura se le brinda al estudiante junto con la propiedad que debe probar y actividades en las que el estudiante debe identificar un invariante y posteriormente probarlo.

En el desarrollo del trabajo hemos tratado actividades de construcciones geométricas, pero desde luego, las actividades que se puede plantear en un ambiente dinámico van más allá de estas actividades, aunque seguiremos insistiendo en esta línea. Enriquecer la experiencia que ya está documentada en este texto es un primer paso. Un segundo paso consiste en explotar los invariantes de una construcción, es decir, los rasgos estructurales. Por ejemplo, consideremos un rectángulo $BACD$ junto con sus diagonales y un punto P sobre uno de sus lados, de modo que se trazan segmentos a cada una de las diagonales por el punto P (ver Figura 16)

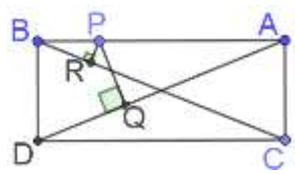


Figura 16. Suma constante de dos segmentos en un rectángulo

La interacción con la representación se centra en responder ¿cómo varía la suma de longitudes $PQ + PR$ cuando P se deslaza sobre el lado BA? (La manera de formular la pregunta define el problema y en esa medida puede afectar la interacción con la representación, por lo que también se le puede solicitar a los estudiantes demostrar que la suma de estas longitudes es constante). Después de que el estudiante ha logrado conjeturar que la suma es constante y ha encontrado cuál debe ser esa constante (la longitud de PQ cuando P coincide con B, por ejemplo) se puede analizar su interacción con la representación para probar el hecho mencionado.

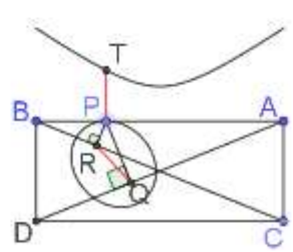


Figura 17. Extensión de la situación inicial asociada a las diagonales del rectángulo

De manera natural se puede asociar a estos puntos una familia de elipses que tiene como focos R y Q y que pasan todas por P. Estudiar esta familia de elipses nos resulta fascinante. Nótese que plantear esta segunda parte del problema en un medio estático tiene dificultades casi insuperables para los estudiantes. Pero la riqueza de la actividad no se agota en este momento, ya que la distancia entre R y Q cambia cuando P se desplaza sobre BA. Nos podemos preguntar cómo cambia esa distancia en *función* de P, y ahora la capacidad expresiva del medio puede venir en auxilio, ya que podemos colocar un segmento PT perpendicular a BA cuya longitud sea la longitud de RQ. Los recursos de medio dinámico confieren al estudiante una capacidad expresiva ausente en un medio estático. Mediante el arrastre del punto P puede verse que el punto T traza una trayectoria que parece una cónica. En realidad, es una hipérbola. El medio suministra las herramientas para (com)-probarlo. De modo que este problema se considera de gran riqueza, por lo que será parte del estudio piloto ya que empieza explorando una longitud y puede enfocarse hacia las representaciones de una familia de elipses y una hipérbola. En ese sentido, no es el tipo de actividad que se pueda presentar (en general) en un contexto euclidiano estático.

En este tipo de problemas también cabría el trabajo con actividades en las que se haga uso de cajas negras, que son construcciones ya elaboradas que se le presentan a los estudiantes, y en ese sentido la idea es de-construirla es decir, se hallar la estructura debajo del comportamiento que presenta la construcción y en ese sentido poder conjeturar y probar dicha conjetura.

3. Actividades en las que se le da el enunciado de lo que se desea probar (en este caso se espera que el estudiante genere una representación y posteriormente realice la prueba).

Consideramos a los lugares geométricos (loci) como una fuente fértil para proponer problemas y en ese sentido nos preguntamos cuál es el lugar geométrico del baricentro G de un triángulo cuando uno de sus vértices (por ejemplo A) se desplaza sobre la circunferencia (arbitraria) de centro O (ver Figura 18). La capacidad expresiva del medio permite al estudiante (activando el lugar geométrico pre-determinado como construcción) conjeturar que ese lugar geométrico es una circunferencia. Se plantea, si en efecto es una circunferencia, cuál será su relación con la circunferencia de centro O. Habrá además que determinar el centro de la aparente circunferencia y finalmente com-probar que en efecto es una circunferencia, mostrando que todos los puntos del nuevo lugar geométrico trazado por G equidistan de ese centro.

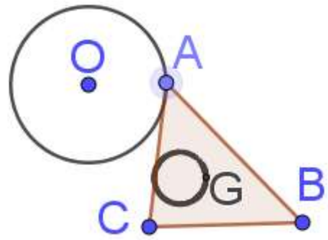


Figura 18. Lugar geométrico del baricentro cuando A se mueve sobre una circunferencia

Este tipo de actividades, al igual que en el tipo anterior se plantean como modelos de una actividad exploratoria que se propone establecer conexiones entre diversos fragmentos de conocimiento geométrico del estudiante. Si en lugar del baricentro tomamos, por ejemplo, el punto medio de uno de los lados del triángulo (el que no es opuesto a A), ¿cuál la trayectoria que sigue ese punto cuando A recorre su circunferencia? Siempre la trayectoria es una circunferencia. Para ubicar estos problemas en el contexto de la prueba didáctica se pide generar argumentos verosímiles que apoyen la respuesta. Esos argumentos los denominamos pruebas dinámicas mediadas por el lugar geométrico. Como en el caso de los invariantes hechos visibles por la mediación del arrastre, aquí se trata de hacer surgir invariantes mediados por el comportamiento del lugar geométrico.

4. Actividades en las que se le presentan a los estudiantes pruebas sin palabras.

En este tipo de actividades el arrastre de los puntos permite evocar en los estudiantes el uso de un determinado hecho matemático. Además de dar una idea de las relaciones que debe establecer para probar un determinado hecho, por lo que serán considerados como una fuente primordial de actividades para el desarrollo de la prueba piloto. Un ejemplo de este tipo de problemas es presentado por De Villers (2018) en el que ciertos trazos sobre la figura inicial, y el arrastre de los puntos asociados a dichos trazos permite que la representación sea una fuente de abstracción para poder producir una prueba “formal” (ver Figura 19). Lo interesantes de este problema, es que la actividad del estudiante no acaba cuando realiza la prueba solicitada, sino que debe conjeturar una generalidad del hecho y de su prueba para para otros casos similares (para polígonos con un mayor número de lados). En la propuesta del autor mencionado se presentan los diferentes casos hasta el octágono, por lo que resultaría interesante analizar la interacción que tiene el estudiante con cada uno de los polígonos, y ver si para él resulta importante interactuar con todas las representaciones de los diferentes polígonos para poder llegar a la generalización.

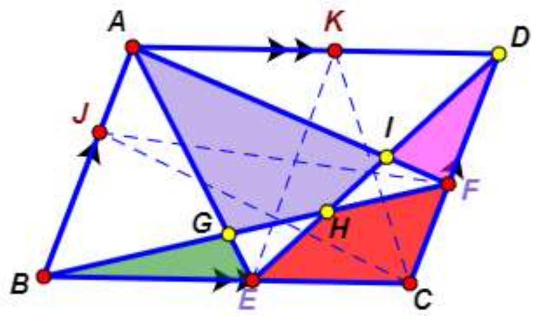


Figura 19. Imagen de una prueba sin palabras propuesta por De Villers (2018)

En general, las actividades mencionadas anteriormente constituyen una base para el diseño de una prueba piloto en la medida en que la representación en el medio digital le permite al estudiante tener diferentes interacciones, y en ese sentido su rol no siempre es el mismo. Sin embargo, con relación a la prueba, aún falta delimitar las conjeturas que deberán ser probadas y en ese sentido, definir en qué medida serán guiadas las interacciones del estudiante con la representación.

Los datos del estudio se van a obtener a partir de la video grabación del trabajo de los estudiantes sobre la pantalla, pues, aunque los archivos de GeoGebra pueden ser de gran utilidad, no permiten apreciar plenamente la riqueza de la interacción del estudiante con la representación ejecutable. Por ejemplo, el arrastrar un punto y posteriormente realizar una determinada acción de acuerdo con la respuesta que le haya brindado el medio digital. Durante el desarrollo de una actividad de los estudiantes es importante identificar el porqué de una determinada acción, pues éstas podrían dar cuenta del papel que desempeña la representación en una determinada situación.

Para el análisis de los datos se emplearán los elementos del marco conceptual referentes a la co-acción entre el estudiante y el medio digital, propuesta por Moreno Armella y Hegedus (2009). Por otra parte, se incluirán algunos de los tipos de arrastre (propuestos por Arzarello, Olivero, Paola y Robutti, 2002; y Baccaglini Frank, 2010) que permitirán dar cuenta sobre el tipo de interacción que el estudiante tiene con la representación, y en ese sentido caracterizar su rol en la producción de pruebas.

6.3. Cronograma de actividades

A continuación, se presentan las diferentes actividades que serán realizadas durante el doctorado junto con el tiempo estimado para cada una de éstas.

- Revisión de la literatura y diseño de actividades: durante los primeros nueve meses del doctorado se continuará con la revisión sistemática de la literatura, en la que se pretende rastrear documentos que se refieran al uso que se les da a las representaciones gráficas (dibujos, figuras, diagramas, construcciones —el término varía según el autor) dentro de la prueba geométrica y sobre todo aquellas en la que se usa la tecnología digital. Esto permitirá situar el trabajo dentro de las investigaciones actuales, y sobre todo dará los lineamientos para el diseño de las actividades. En ese orden de ideas, al finalizar los nueve meses se tendrá una primera versión de las actividades que permitirán recolectar los datos para la continuación del trabajo.
- Aplicación de prueba piloto y un primer análisis: finalizando el primer año del doctorado se realizará una prueba piloto de las actividades diseñadas. En el primer semestre del segundo año se realizará un análisis de los resultados obtenidos en la prueba piloto en el que se pretende identificar los diferentes roles de la representación al momento de realizar una prueba usando el medio digital. Este análisis será incluido en un documento que se estará escribiendo desde el inicio del doctorado, el cual será sometido a revisión mediante un examen predoctoral a mediados del segundo año.
- Refinamiento de actividades: en la última parte del segundo año y en la primera parte del tercer año se tendrán en cuenta las sugerencias de los sinodales y el primer análisis de los resultados para escribir un artículo (que es un requisito para el grado) en el que se reporten los resultados obtenidos hasta el momento en la investigación. Además, de acuerdo con los resultados y observaciones recibidas se modificarán las actividades propuestas en la prueba piloto.
- Aplicación de la prueba definitiva: en la última parte del tercer año se implementarán nuevamente las actividades con la finalidad de encontrar nuevos roles de las representaciones en el medio digital para el desarrollo de pruebas o caracterizar de mejor manera los roles determinados en el primer análisis.
- Análisis final y documento doctoral: en el último año se pretende refinar el análisis realizado en el punto anterior para reestructurar el documento predoctoral y así tener una primera versión del documento final, el cual será revisado desde el inicio para hacer más claras las ideas que se pretenden trasmitir.

Referencias

Abdelfatah, H. (2011). A story-based dynamic geometry approach to improve attitudes toward geometry and geometric proof. *ZDM*, 43 (3), 441–450.

Arzarello, F., Bartolini Bussi, M. G., Leung, A., Mariotti, M. A. & Stevenson, I. (2012). Experimental Approach to Theoretical Thinking: Artefacts and proofs. In G. Hanna. & M. de Villers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education*: *The 19th ICMI Study (New ICMI Study Series)* (pp. 97–137). Berlin: Springer.

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *ZDM*, 34 (3), 66–72.

Baccaglini-Frank, A. (2010). The maintaining dragging scheme and the notion of instrumented abduction. In P. Brosnan, D. Erchick, & L. Flevares (Eds.), *Proceedings of the 10th Conference of the PME-NA,* (Vol. 6, pp. 607–615). PMENA.

Ball, D. L., Hill, H., & Bass, H. (2005). Knowing Mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, 29(1), 14 – 43.

Bleiler, S. K., Thompson, D. R., & Krajčevski, M. (2014). Providing written feedback on students' mathematical arguments: Proof validations of prospective secondary mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *17*(2), 105-127.

Buchbinder, O., & Zaslavsky, O. (2011). Is this a coincidence? The role of examples in fostering a need for proof. *ZDM*, 43(2), 269-281.

Camargo, L., y Acosta, M. (2012). La geometría, su enseñanza y su aprendizaje. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (32), 4-8.

Cervantes-Barraza, J., Cabañas-Sánchez, G., & Reid, D. (2019). Complex argumentation in elementary school. *PNA*, 13(4), 221-246.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research methods in education*. New York: Routledge.

Creswell, J. W. (2003). *Research Design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches*. London: Sage publications.

De Villers, M. (25 July 2018). *Area Parallelogram Partition Theorem: Another Example of the Discovery Function of Proof.* In http://dynamicmathematicslearning.com/area-parallelogram-partition-richard-theorem.html

De Villiers, M (2020) Proof as a means of discovery. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. 51(3), pp. 451-455.

Dickerson, D. S., & Doerr, H. M. (2014). High school mathematics teachers' perspectives on the purposes of mathematical proof in school mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, 26(4), 711-733.

Donald, M. (2001). *A Mind so Rare*. New York: Norton.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. In *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 10, pp. 5-53.

Duval, R. (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking — The Registers of Semiotic Representation*. Springer International Publishing.

Furinghetti, F., & Morselli, F. (2011). Beliefs and beyond: Hows and whys in the teaching of proof. *ZDM*, 43(4), 587-599.

Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the Learning of Mathematics, 15*(3), 42–49.

Hanna, G. (2020). Mathematical Proof, Argumentation, and Reasoning. In S. Lerman, (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 561–566). Springer.

Hanna, G., Reid, D. A., & de Villiers, M. (Eds.). (2019). Proof Technology in Mathematics Research and Teaching. Springer International Publishing. In Hanna, G., Reid, D. A., & de Villiers, M. (Eds.). *Proof Technology in Mathematics Research and Teaching* (pp 3-13). Springer International Publishing.

Hegedus, S. J., y Moreno-Armella, L. (2010). Accommodating the instrumental genesis framework within dynamic technological environments. *For the Learning of Mathematics*, *31*(1), 26-31.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2010). *Metodología de la investigación*. México: McGraw-Hill

Hershkowitz, R. (2020). Shape and space: Geometry teaching and learning. In S. Lerman, (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 774-779). Springer

Jahnke, H. N. (2010). The conjoint origin of proof and theoretical physics. In G. Hanna., H. N. Jahnke., & H. Pulte (Eds.) *Explanation and proof in mathematics* (pp. 17-32). Springer, Boston, MA.

Jahnke, H. N., & Wamback, R. (2013). Understanding what a proof is: a classroom-approach. *ZDM*, *45*(3), 469-482.

Kilpatrick, J. (2018). Where are we? The third take: review of Compendium for Research in Mathematics Education. *ZDM*, 50, 757-763

Lara, L. F., y Samper, C. (2015). Logros y desaciertos cuando se aprende a demostrar. *Enseñanza de las ciencias*, 33(2), 113-132.

Lesseig, K., Hine, G., Na, G. S., & Boardman, K. (2019). Perceptions on proof and the teaching of proof: a comparison across preservice secondary teachers in Australia, USA and Korea. *Mathematics Education Research Journal*, 31, 393-418

Leung, A. (2008). Dragging in a Dynamic Geometry Environment Through the Lens of Variation. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 13(2), 135–157

Melhuish, K., Thanheiser, E., & Guyot, L. (2018). Elementary school teachers' noticing of essential mathematical reasoning forms: justification and generalization. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 23, 35-67.

Monroy, A. A., y Astudillo, M. T. G. (2009). La implicación lógica en el proceso de demostración matemática: estudio de un caso. *Enseñanza de las ciencias*, 28(1), 73-84.

Montoya-Delgadillo, E. (2014). El proceso de prueba en el espacio de trabajo geométrico: profesores en formación inicial. *Enseñanza de las ciencias*, 32(3), 227-247.

Moreno-Armella, L. (2003). Cognición y mediación instrumental. En E. Weiss (Ed.). *VI Congreso Nacional de Investigación Educativa Conferencias Magistrales*. (pp. 257-274). Manzanillo, Colima: Consejo Mexicano de Investigación Educativa.

Moreno-Armella, L. (2018). De fractales y cónicas dinámicas: prácticas de enseñanza y mediación instrumental. *Educación matemática*, Rutas de la Educación Matemática. Primera Edición, 126-147

Moreno-Armella, L., & Brady, C. (2018). Technological Supports for Mathematical Thinking and Learning: Co-action and Designing to Democratize Access to Powerful Ideas. In L. Ball., P. Drijvers., S. Ladel., H. S. Siller., M. Tabach., & C. Vale. (Eds.). *Uses of Technology in Primary and Secondary Mathematics Education* (pp. 339-350). Springer.

Moreno-Armella, L., & Hegedus, S. J. (2009). Co-action with digital technologies. *ZDM*, *41*(4), 505-519.

Moreno-Armella, L., & Hegedus, S. (2013). From Static to Dynamic Mathematics: Historical and Representational Perspectives. In S. J. Hegedus. & J. Roschelle. (Eds). *The SimCalc Vision and Contributions* (pp. 27-45). Dordrecht: Springer.

Moreno-Armella, L., y Hegedus, S. (2014). Learning Practice in Digital Environments. In S. Lerman, (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 353-356). Springer

Moreno-Armella, L., Hegedus, S. J., & Kaput, J. J. (2008). From static to dynamic mathematics: historical and representational perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, 68(2), 99-111.

Moreno-Armella, L., y Sriraman, B. (2010). Symbols and mediation in mathematics education. In B. Sriraman. & L. English. (Eds.) *Theories of Mathematics Education* (pp. 213-232). Heidelberg: Springer.

NCTM (2000). *Principios y Estándares para la educación matemática* (Trad. Manuel Fernández Reyes). España: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. (Obra original publicada en inglés en 2000).

Northrop, E., (1968). *Paradojas Matemáticas* (Trad. Ricardo Ortiz Vasquez), México: Unión tipográfica editorial hispanoamericana.

Olivero, F. & Robutti, O. (2001), "Measures in Cabri as a bridge between perception and theory", *PME*, 25 (4), pp. 9-16.

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed?. *Educational Studies of Mathematics*, 66, 23–41.

Ramírez-Uclés, R., Flores Martínez, P., y Ramírez-Uclés, I. (2018). Análisis de los errores en tareas geométricas de argumentación visual por estudiantes con talento matemático. *Relime*, 21(1), 29-56.

Reid, D. A., & Knipping, C. (2010). *Proof in mathematics education*. *Research, learning and teaching.*Netherlands: Sense Publishers.

Richard, P. R., Venant, F., & Gagnon, M. (2019). Issues and Challenges in Instrumental Proof. In Hanna G., Reid D., de Villiers M. (Eds.) *Proof Technology in Mathematics Research and Teaching. Mathematics Education in the Digital Era* (pp. 139-172). Springer.

Rubilar, Á. S. B., & Badillo, G. Z. (2015). Descubrimiento de conocimiento matemático mediante la reformulación de conjeturas falsas en un ambiente de pruebas y refutaciones. *Enseñanza de las ciencias*, 33(3), 117-136.

Sinclair, N., Bartolini Bussi, M. G., de Villers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A. & Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. *ZDM,* 48(5), 691-719.

Soldano, C., & Arzarello, F. (2016). Learning with touchscreen devices: game strategies to improve geometric thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 28(1), 9-30.

Sriraman, B., y Umland, K. (2020). Argumentation in Mathematics Education. In S. Lerman, (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 63–66). Springer.

Steele, M. y Rogers, K. C. (2012). Relationships between mathematical knowledge for teaching and teaching practice: the case of proof. *Journal of mathematics teacher education*, 15(2), 159-180.

Steele, M. D. (2013). Exploring the mathematical knowledge for teaching geometry and measurement through the design and use of rich assessment tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*(4), 245–268.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 289–321.

Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J. (2017). Research - based interventions in the area of proof: the past, the present, and the future. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(2), 119-127.

Umland, K., y Sriraman, B. (2020). Argumentation in Mathematics. In S. Lerman, (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 61–63). Springer.

Anexos

ANEXO A

En este anexo se presentan las preguntas genérales y específicas que se planearon para el desarrollo de la entrevista semi estructurada.

Preguntas generales: Tienen como objetivo incitar a los participantes a que presenten argumentos de sus construcciones. Estas preguntas son en general para todos los participantes, y para cada uno de los puntos del cuestionario.

Lea la solución dada al problema:

- ¿Está seguro de que la construcción proporcionada es correcta?
  Sí: ¿Cómo es posible saberlo si la solución es una descripción de la construcción? ¿Cómo puede estar tan seguro de que su construcción es adecuada?
  No: ¿Por qué? ¿Cómo la modificaría? ¿cómo está tan seguro de que no es correcta?
- ¿Cómo podría probarle a alguien más que su construcción es correcta (un estudiante-un compañero de clase-un profesor)?
- ¿Qué herramientas son necesarias para que alguien siga el proceso de construcción indicado? ¿En dónde está situada la solución del problema? (solicitarle que realice su construcción)

Preguntas específicas: Tienen como objetivo indagar sobre las herramientas utilizadas en cada una de las propuestas de construcción, además de seguir buscando argumentos que permitan validarlas. Las preguntas están vinculadas a cada una de las propuestas y surgen de un primer análisis de las respuestas dadas por los participantes, en las que se notaron algunas oportunidades para obtener argumentos. Por lo tanto, las preguntas que se presentan están vinculadas a cada una de las propuestas, así:

Construcción 1-Bisectriz:

- ¿Cómo obtiene la bisectriz?
- ¿Por qué la intersección de la bisectriz y la transversal es el punto buscado? (Después de que hable del teorema asociado a la bisectriz se cuestionará sobre la certeza que posee de ese hecho).
- ¿Con qué finalidad usa el hecho de que en un triángulo isósceles la altura y la bisectriz coinciden? (exclusiva para René)

Construcción 2-Tangente a circunferencia

- ¿Por qué es necesario el uso de dos perpendiculares y dos circunferencias? ¿Para qué se refiere al punto de homotecia? (exclusiva para René)
- ¿Cómo construye la recta tangente? ¿Por qué el punto buscado está sobre la recta tangente a las circunferencias?

Construcción 2-Equidistancia

- ¿Cómo está tan seguro de que al garantizar la equidistancia mencionada y construir el otro “lado” del ángulo, se tiene que su bisectriz es la que fue dada desde el enunciado del problema?

Construcción 2-Transformaciones en el plano

- ¿Qué significa que un punto sea simétrico a otro respecto a una recta? (exclusivo para Sofía)

Construcción 3-Elipse

- ¿Cómo construye la recta perpendicular?
- ¿Está seguro de que el lugar geométrico descrito es una elipse? ¿Por qué? ¿Cómo hallar la intersección de un lugar geométrico y una recta? (exclusivo para René)
- ¿Por qué la intersección de la elipse y la perpendicular es el punto buscado?
- ¿Cómo construir la elipse? Y ¿cómo garantizar que la elipse construida es realmente la que tiene como constante la suma dada?

Construcción 3-Mediatriz

- ¿Por qué hacer uso de la mediatriz para realizar la construcción?
- ¿Cómo saber que en triángulo construido al sumar el cateto y la hipotenusa es la suma dada?

Construcción 3 y 4 -Semejanza

- ¿Cómo se puede garantizar que los triángulos construidos son semejantes?

Construcción 4 y 5-Hipérbola

- ¿La descripción dada es la de una hipérbola? ¿porqué?
- ¿Cómo saber que la hipérbola construida es aquella cuya diferencia es la dada?
- ¿Por qué el tercer vértice del triángulo debe estar en la hipérbola?

Construcción 4 y 5-Mediatriz

- ¿En qué casos la diferencia se ubica sobre la semirrecta dada por el ángulo, y en cuáles en la opuesta?

Construcción 6-Paralelas

- ¿Cómo construye las paralelas? ¿Cuál es el objetivo de construir rectas paralelas?
- ¿Cómo se sabe que el segmento efectivamente queda dividido en cinco partes iguales? (Cuando hagan mención del teorema de Thales se les cuestionará cuál teorema y su uso exacto)

ANEXO B

En este anexo se presentan los códigos utilizados para realizar las transcripciones de las entrevistas.

<table>
<tr><th>Código</th><th>Significado</th></tr>
<tr><td>(…)</td><td rowspan="3">Se usan cuando la persona que está hablando hace una pausa y posteriormente continúa con su intervención. La cantidad de puntos depende de si la pausa fue corta (menos de 10 segundos), moderada (entre 10 y 30 segundos) o larga (mayor a 30 segundos).</td></tr>
<tr><td>(… …)</td></tr>
<tr><td>(… … …)</td></tr>
<tr><td>(   )</td><td>Se usan para describir alguna acción realizada por el participante y que resulta relevante dentro de la conversación. Por ejemplo, cuando alguien señala un cierto ángulo en una construcción.</td></tr>
<tr><td>[…]</td><td rowspan="3">Se usa para omitir algunas intervenciones que no son relevantes y que desvían la atención de la idea que ser desea resaltar. La cantidad de puntos depende de si las intervenciones omitidas fueron pocas (menos de 3), moderadas (entre 3 y 5) o muchas (más de 5).</td></tr>
<tr><td>[… …]</td></tr>
<tr><td>[… … …]</td></tr>
<tr><td>[   ]</td><td>Se escribe entre corchete una aclaración de algo que no es observable, pero que se infiere por el contexto de la conversación.</td></tr>
<tr><td>M – A – S
J – L – R</td><td>Primera letra de los nombres de cada uno de los participantes. Se usan para denotar sus intervenciones en una conversación.</td></tr>
<tr><td>E</td><td>Letra utilizada para mencionar las intervenciones de la entrevistadora.</td></tr>
</table>