Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Insituto Politécnico Nacional

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemática Educativa

“Comprensión del concepto de recta tangente a una curva en estudiantes de segundo y tercer grados de bachillerato”

Tesis que presenta:

José Luis Cruz Canales

Para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias

en la especialidad de Matemática Educativa

Director de la tesis:

Dr. Antonio Rivera Figueroa

Ciudad de México Agosto, 2021

Agradezco al CONACYT por el apoyo económico brindado para realizar mis estudios de maestría.

Número de becario: 1010335

Agradecimientos

Gracias Dios por la vida, pero sobre todo gracias por la salud. Gracias porque a pesar de estar en medio de una pandemia este proyecto se ha podido concluir.

Agradezco al Dr. Antonio Rivera Figueroa por sus enseñanzas, consejos, dedicación y por la guía brindada en la elaboración de este trabajo.

Agradezco al Dr. Luis Aguirre Castillo y al Dr. Armando Solares Rojas, revisores del presente trabajo. Gracias por tomarse el tiempo para leer esta investigación y también les agradezco sus comentarios.

Reconozco y agradezco a cada uno de los investigadores del departamento de Matemática Educativa que participaron en mi formación: Dr. Luis Enrique Moreno Armella, Dr. Luz Manuel Santos Trigo, Dr. Armando Solares Rojas, Dr. François Charles Bertrand Pluvinage, Dr. Antonio Rivera Figueroa y Dr. Gonzalo Zubieta Badillo.

Agradezco a Adriana Parra Hernández porque desde el inicio de mis estudios de maestría hasta el final siempre estuvo al pendiente, particularmente de los asuntos administrativos. Gracias Adrianita por tu alegría y entusiasmo.

Agradezco a mi familia porque siempre han estado a mi lado. Gracias por sus palabras, motivación y alegría. Gracias a ti Chris Hernández, gracias por ser mi ejemplo a seguir, gracias por apoyarme en todo, gracias por ser parte esencial en este proyecto; gracias por las charlas, los viajes… Teorema.

Gracias al Lic. Amado Guzmán Juan y al Lic. Christian Guzmán Gayosso, director y subdirector del Colegio Kaysen, por facilitarme los medios para trabajar con los estudiantes que participaron en esta investigación y por permitirme desempeñarme como docente en la institución que ellos dirigen. Ahí surgió la motivación de realizar el posgrado.

Gracias a todo el personal de CINVESTAV, por hacer que este instituto siempre mantenga sus altos estándares de calidad.

Dedico este trabajo a mi madre

Y la memoria de mi padre.

Tabla de contenido

Resumen

El concepto de recta tangente se aborda desde diversas perspectivas: geométrica, algebraica y desde el punto de vista del cálculo diferencial. Las primeras imágenes del concepto de recta tangente que los estudiantes tienen son en un contexto geométrico, con el estudio de una circunferencia y una recta. En los cursos de geometría analítica se retoma el estudio de recta tangente a las cónicas en un contexto algebraico. En los cursos de cálculo diferencial se estudia el concepto de recta tangente a una curva vía la derivada.

En el presente trabajo tratamos de averiguar cuáles son los conocimientos de recta tangente que tienen los estudiantes de segundo y tercer grados de bachillerato y cómo estos conocimientos intervienen en la comprensión del concepto de recta tangente a una curva que se presenta vía la derivada.

En nuestra investigación trabajamos con 23 estudiantes de bachillerato de un colegio particular de la ciudad de Tulancingo, Hidalgo, México. 12 de los 23 alumnos que participaron en nuestra

investigación recién habían cursado la materia de cálculo diferencial y el resto de los participantes acaban de cursar la materia de geometría analítica.

La metodología de investigación que empleamos para nuestra investigación consta de un cuestionario, que se aplicó en dos partes, y entrevistas no estructuradas que se desarrollaron de manera simultánea al cuestionario. La aplicación de los cuestionarios, así como el desarrollo de las entrevistas se hicieron de manera remota.

En nuestra investigación consideramos para el marco teórico las ideas de Carpenter y Lehrer (1999) para aprender matemáticas con comprensión.

La investigación que aquí realizamos incluyó la revisión de varios libros de texto, artículos de investigación, tesis, actas de congresos, etc. Esta revisión bibliográfica nos permitió diseñar las actividades del cuestionario, así como establecer el marco de referencia de nuestra investigación.

En el capítulo 7 de este trabajo, damos respuesta a las preguntas de investigación que plantemos en el capítulo 2 y escribimos las conclusiones a las que llegamos con este trabajo de investigación.

Abstract

The concept of a tangent line is approached from different perspectives: geometric, algebraic and from the point of view of differential calculus. The first images of the concept of a tangent line that students have are in a geometric context, with the study of a circle and a line. In analytical geometry courses, the study of the tangent line to the conics is taken up in an algebraic context. In differential calculus courses, the concept of a tangent line to a curve via the derivative is studied.

In this paper we try to find out what knowledge of the tangent line is that second and third year high school students have and how this knowledge intervenes in the understanding of the concept of a tangent line to a curve that is presented via the derivative.

In our research we worked with 23 high school students from a private school in the city of Tulancingo, Hidalgo, Mexico. 12 of the 23 students who participated in our research had just completed the subject of differential calculus and the rest of the participants had just completed the subject of analytical geometry.

The research methodology that we use for our research consists of a questionnaire, which was applied in two parts, and unstructured interviews that were developed simultaneously with the questionnaire. The application of the questionnaires, as well as the development of the interviews were done remotely.

In our research we consider for the theoretical framework the ideas of Carpenter and Lehrer (1999) to learn mathematics with understanding.

The research we conducted here included the review of various textbooks, research articles, theses, conference proceedings, etc. This bibliographic review allowed us to design the activities of the questionnaire, as well as to establish the frame of reference for our research.

In Chapter 7 of this paper, we answer the research questions we posed in Chapter 2 and write the conclusions we reached with this research paper.

Capítulo 1

Introducción

La enseñanza-aprendizaje del concepto de recta tangente a una curva ha cautivado la atención de varios investigadores a través del tiempo. Diferentes estudios han sido desarrollados en el tema y casi todas convergen en las mismas conclusiones, es decir, las dificultades que se han identificado en los estudiantes e incluso en los profesores en cuanto a la comprensión del concepto de recta tangente a una curva depende en gran medida de las imágenes que cada individuo posee del concepto (Tall y Vinner, 1981).

Cuando hablamos de recta tangente a una curva podemos considerar diferentes momentos en la enseñanza en los que aparece la noción de tangencia. El primer acercamiento que tienen los estudiantes respecto al concepto de recta tangente ocurre cuando ellos cursan el tercer grado de la educación secundaria La noción de recta tangente a una curva se presenta en el contexto de la circunferencia. Si una circunferencia se interseca en un solo punto con una recta, entonces esa recta es tangente a la circunferencia; dicho punto en común se llama punto de tangencia. También se habla de la posición relativa entre pares de circunferencias, estas pueden ser: ajenas internas, ajenas externas, secantes, tangentes internas y tangentes externas, en donde se definen a estas últimas como aquellas que solo tienen un punto en común. Uno de los libros de texto que se usan en el tercer grado de secundaria es el Barriendos-Rodriguez y Espininoza-Asuar (2008); en este libro de texto los autores muestran estas situaciones entre los círculos, véanse Figura 1 y Figura 2.

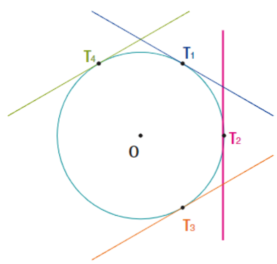


Figura 1 *Rectas tangentes a una circunferencia*

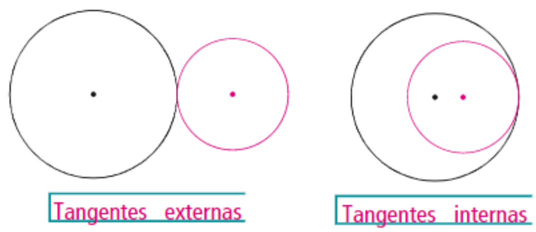


Figura 2 *Circunferencias tangentes entre sí*

Así que la enseñanza de la tangencia no sólo se reduce a una circunferencia y a una recta sino a pares de circunferencias.

El tema de recta tangente a una curva se retoma en el bachillerato, con el estudio de la geometría euclidiana. En este nivel se considera la circunferencia inscrita a un polígono regular. Por ejemplo, la circunferencia inscrita en un triángulo; en estas construcciones es esencial el concepto de tangencia.

En el curso de geometría analítica, también se estudia el concepto de recta tangente, de hecho, se determinan las rectas tangentes a las cónicas, la construcción usual de estas rectas es desde un punto de vista algebraico, las cuales se obtienen mediante el método de Descartes. Aunque en el curso de geometría analítica el estudio de las rectas tangentes a las cónicas es con un enfoque algebraico, existen textos en donde también al acercamiento a las rectas tangentes a las cónicas es desde un punto de vista puramente geométrico; por ejemplo, Cruse y Granberg (1971), Véase Figura 3.

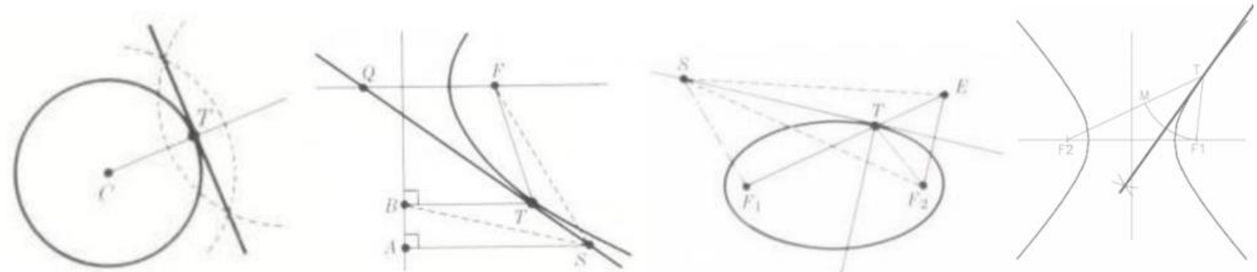


Figura 3 *Recta tangente a las cónicas*

Después de los cursos de geometría y geometría analítica los alumnos se enfrentan a escenarios en el cálculo diferencial en donde su intuición geométrica no coincide con las nuevas situaciones de tangencia. Desde sus estudios de precálculo los estudiantes abordan temas que resultan imprescindibles, como son: funciones, relaciones, dominio de una función, rango de una función, funciones inversas, funciones crecientes, funciones decrecientes, tazas de cambio, etc. En el cálculo diferencial aprenden la definición de recta tangente a una curva, vía la derivada, de tal manera que todas las nociones de tangencia que aprendieron previamente quedan incluidas. El cálculo diferencial precisa la idea de tangencia y generaliza el concepto de recta tangente, establecido para circunferencia y cónicas, a curvas más generales.

Diversas investigaciones se han enfocado a las dificultades que tienen los estudiantes en este paso a la generalización de recta tangente vía la derivada. Varias de estas investigaciones se refieren, por ejemplo, al hecho de que aparecen rectas tangentes a curvas en puntos de inflexión, ver Figura 4, y a rectas tangentes que tienen más de un punto en común a las curvas, ver Figura 5, situaciones que no ocurren para la circunferencia y las cónicas en general.

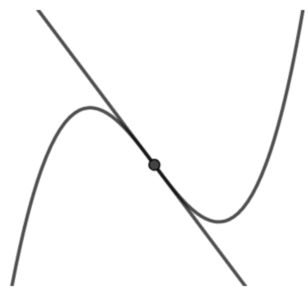


Figura 4 *Recta tangente a una curva en un punto de inflexión*

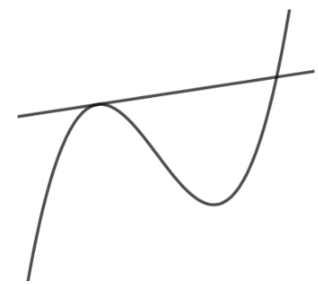


Figura 5 *Recta tangente a una curva que la corta en más de un punto*

En este documento reportamos los resultados de una investigación que llevamos a cabo con estudiante de bachillerato de una escuela mexicana, con el fin averiguar si los conocimientos que tiene los estudiantes sobre recta tangente a una circunferencia y cónicas son o no suficientes para comprender el concepto de tangencia que se establece vía la derivada y si esos conocimientos previos sobre tangencia causan algún conflicto, cuando se enfrentan a escenarios de tangencia a curvas más generales.

1.1 Descripción del contenido

El presente documento está dividido en ocho capítulos. El capítulo 1 es el presente y es una introducción de este documento. El capítulo 2 está dedicado los antecedentes y al planteamiento del problema y preguntas de investigación. Ahí exponemos las ideas y posturas de diversos autores que han realizado investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje del concepto de recta tangente a una curva. El capítulo 3 lo dedicamos al marco conceptual que utilizamos para el desarrollo de nuestra investigación, el cual se refiere a la enseñanza y el aprendizaje con comprensión en matemáticas. En el capítulo 4, que hemos llamado marco de referencia, mostramos todos aquellos conceptos, definiciones, teoremas y resultados que involucran el estudio de recta tangente a una curva. Hemos seleccionado aquellos resultados que consideramos importantes para el desarrollo de nuestra investigación. En el capítulo 5 exponemos la metodología empleada en nuestra investigación. Ahí explicamos cuál es el instrumento de nuestra investigación, el cual consta de un cuestionario y de entrevistas no estructuradas que fueron respondidas de manera simultánea al cuestionario. También se explica cuál fue la población a la que se aplicó, la cual constó de 23 estudiantes de bachillerato, 11 estudiantes de tercer semestre y 12 estudiantes de quinto semestre. En el capítulo 6 presentamos el análisis de las respuestas de los alumnos participantes y en el capítulo 7 presentamos las respuestas a nuestras preguntas de investigación, así como las conclusiones a las que llegamos. Finalmente, en el capítulo 8 presentamos una descripción de propuesta de temas relacionados con nuestro trabajo de investigación que consideramos tiene potencial para desarrollar una investigación más amplia.

Capítulo 2

Antecedentes, planteamiento del problema y preguntas de investigación.

2.1 Antecedentes y planteamiento del problema

El concepto de recta tangente a una curva es crucial para el estudio y entendimiento de la derivada en el curso de cálculo diferencial, esta es la razón por la que muchos investigadores han indagado en cómo las imágenes del concepto de recta tangente (Tall y Vinner, 1981) que tienen los estudiantes de bachillerato influyen para que estos generalicen el concepto de recta tangente a curvas que no son circunferencia o cónicas.

Diversas investigaciones han concluido que las nociones de recta tangente a una circunferencia que poseen los estudiantes limitan su entendimiento para cuando abordan curvas más “sofisticadas” tales como aquellas que contienen puntos de inflexión, picos, o incluso las mismas rectas.

De acuerdo con Harel y Tall (1991) los estudiantes deben reconstruir las imágenes del concepto que poseen para llegar a la generalización de este. Según estos autores, la generalización puede ocurrir de dos formas: expansiva y reconstructiva. En la primera, los estudiantes amplían su estructura cognitiva existente y no es necesario que el alumno cambie las ideas que actualmente predominan en sus imágenes del concepto. Por otro lado, en la generalización reconstructiva se requiere que los estudiantes cambien de raíz todas aquellas imágenes del concepto para lograr así la generalización del concepto y llevarlo a la aplicación de contextos más vastos.

Las imágenes que predominan en los estudiantes de recta tangente son aquellas que adquirieren en sus primeros cursos de geometría elemental y geometría analítica, con el estudio de las cónicas (Biza, Christou y Zachariades, 2008; Biza y Zachariades, 2010) en donde se acepta como recta tangente a una circunferencia aquella línea recta que toca a la circunferencia en un punto, pero que no la cruza, y que además es perpendicular al radio. Sin embargo, según estos autores, estas primeras imágenes de recta tangente conducen a los estudiantes a cometer errores cuando abordan otro tipo de curvas (Biza, Christou y Zachariades, 2008; Biza y Zachariades, 2010). Por su parte, Biza y Zachariades (2008, 2010) concluyen que las dificultades a la que se enfrentan los estudiantes al trazar o identificar rectas tangentes a curvas generales radica en las imágenes que poseen de recta tangente y que es necesario pensar en una generalización reconstructiva del concepto (Harel y Tall, 1991).

De acuerdo con Tall (1987), una recta tangente a una curva es aquella línea recta que toca al gráfico en un solo punto pero que no lo cruza. Por su parte, Fischbein (1987) propone un modelo paradigmático de recta tangente haciendo uso de la noción de tangencia existente entre una recta y una circunferencia. Para muchos autores, tanto lo que propone Tall como Fischbein, resulta inapropiado cuando se consideran casos extremos (por ejemplo, curvas con puntos de inflexión o picos) (Biza, 2008; Castela, 1995; Tsamir y Ovodenko, 2004; Tsamir, Rasslan y Dreyfus, 2006; Vinner, 1982, 1991). Pareciera que si uno quisiese tener una definición geométrica aceptable de recta tangente a una curva general sería una tarea complicada.

Las imágenes del concepto de recta tangente a una curva que los estudiantes tienen se ven determinas por los escenarios en los que se les ha mostrado o ejemplificado la idea de recta tangente (Niss, 1999). Esto nos lleva a pensar en cómo la labor del docente influye directamente en las imágenes que los alumnos poseen de recta tangente a una curva. De acuerdo con Páez-Murillo y Vivier (2013) las imágenes que los profesores tienen respecto al concepto de recta tangente a una curva no difieren significativamente de las imágenes que tienen los estudiantes. Entonces, ¿será necesario que los profesores reorganicen o refinen sus concepciones de recta tangente a una curva antes de presentarlas a los alumnos? Páez-Murillo y Vivier (2013) recomiendan que los docentes planteen escenarios en los que la noción primigenia de recta tangente a una curva quede del todo clara pero que al mismo tiempo guíe al estudiante a considerar situaciones no triviales para que surja la necesidad de considerar otro tipo de casos y no se quede únicamente con la imagen de recta tangente en el caso de la circunferencia.

Las nociones que predominan tanto en los estudiantes (Biza, Christou y Zachariades, 2008) como en los docentes (Páez-Murillo y Vivier, 2013) son desde una perspectiva global, es decir, ambos piensan en recta tangente a una curva como aquella recta que toca una sola vez a una curva y en el caso de la circunferencia que además la tangente es perpendicular al radio en el punto de tangencia. ¿Pero por qué este conocimiento conflictúa a los alumnos y a los profesores cuando piensan en otro tipo de curvas? ¿Qué conocimiento deben tener los profesores para poder instruir a los alumnos en la noción adecuada de recta tangente a una curva? ¿Realmente el estudiante o los docentes necesitan algo más que la relación de tangencia entre una circunferencia con una recta para entender la generalización de recta tangente a cualquier curva?

La mayoría de los autores que han abordado la problemática sobre el aprendizaje de recta tangente a una curva (Biza, 2008; Castela, 1995; Tsamir y Ovodenko, 2004; Tsamir, Rasslan y Dreyfus, 2006; Vinner, 1982, 1999, Vivier, 2006) clasifican las perspectivas de recta tangente a una curva de los estudiantes y de los profesores (Páez-Murillo y Vivier, 2013) como global-visual, global-perpendicular, analítica-local y analítica-algebraica. La perspectiva global-visual se refiere a la relación entre recta tangente y circunferencia en la que solamente hay un único punto en común de la recta y la circunferencia. La perspectiva global-perpendicular se refiere a la construcción de una recta tangente a una circunferencia usando el hecho de que el radio y la recta tangente son perpendiculares en el punto de tangencia; estás dos concepciones se adquieren en el curso de geometría Euclidiana. La perspectiva analítica-algebraica, se estudia por ejemplo cuando los alumnos y docentes en el curso de geometría analítica obtienen las rectas tangentes mediante el método de Descartes. En el curso de cálculo se percibe recta tangente a una curva desde dos perspectivas: la primera, como aquella línea recta que toca a la curva en un punto específico de la curva y cuya pendiente es la misma que la derivada de la curva en ese punto, la segunda, como aquella línea recta que es el límite de las rectas secantes a un punto de la curva. Estas dos perspectivas son llamadas analítica-local. Hacer referencia a todas estas perspectivas permite que se identifique en cuál de estas etapas de interiorización del concepto de recta tangente a una curva los alumnos tienen dificultades y cómo el paso de una perspectiva a otra genera complicaciones. El hecho de que los estudiantes dominen un acercamiento de recta tangente a una curva por alguna de estas perspectivas (Biza y Zachariades, 2010) no significa que se tengan una imagen conceptual clara y correcta del concepto, según Tall y Vinner (1981), de recta tangente a una curva.

De acuerdo con las investigaciones que se han realizado, la perspectiva global-visual del concepto de recta tangente a una curva es la que predomina en la mayoría de los alumnos. Biza y Zachariades (2010) mencionan que es necesaria una reorganización del concepto de recta tangente ya que esta perspectiva global influye en la generalización de recta tangente a cualquier tipo de curvas, es decir, se debe procurar una transición de la perspectiva global del concepto hasta la perspectiva local, apoyándose en los recursos que la asignatura de cálculo provee.

Por su parte, Castela (1995) manifiesta que las percepciones de los estudiantes de recta tangente deben adaptarse a nuevos contextos. La percepción de los estudiantes es gráfica hasta antes de sus cursos de cálculo y lo que el alumno mantiene presente es el modelo paradigmático de recta tangente a una circunferencia. Tomar en cuenta los antecedentes del conocimiento que poseen los alumnos resulta vital para guiarlo en la comprensión, adquisición y generalización del concepto de recta tangente a una curva; este nuevo conocimiento resulta ligeramente diferente al ya instalado en los estudiantes, pero sus ideas primigenias se conservan.

A través de las representaciones gráficas se busca ejemplificar, justificar e incluso motivar el análisis y comprensión del concepto (Hannah y Sidoli, 2007). Sin embargo, las representaciones visuales de recta tangente a una curva en contextos específicos conllevan a los alumnos a generar estructuras cognitivas que contienen elementos erróneos y que dificultan la transición de la perspectiva global a la perspectiva local del concepto de la recta tangente a una curva (Biza, Nardi y Zachariades, 2008).

Según Biza, Christou y Zachariades (2006), la influencia visual sobre los estudiantes en sus cursos de geometría euclidiana y geometría analítica les dificulta la comprensión de recta tangente en contextos generales. Esta conclusión de los autores nos condujo a plantearnos un proyecto para hacer una investigación con estudiantes mexicanos de una institución del nivel medio superior, cuyos planes de estudio son reconocidos por la Secretaría de Educación de uno de los estados la República Mexicana.

2.2 Preguntas de investigación y objetivos

Para esta investigación planteamos las siguientes preguntas

1. ¿Cómo conciben los estudiantes lo que es una recta tangente a un círculo?
2. ¿Qué conocimientos previos a sus cursos de cálculo diferencial tienen los estudiantes del nivel medio superior sobre lo que es una recta tangente?
3. ¿Qué conocimientos sobre recta tangente a una curva requiere el estudiante para comprender el concepto de recta tangente establecido con la derivada?
4. ¿Sus conocimientos básicos sobre recta tangente a una circunferencia, causan conflicto en la comprensión del concepto general de recta tangente, establecido con la derivada?

Con los siguientes objetivos:

a) Averiguar si el conocimiento que tienen los estudiantes sobre una recta tangente es o no suficiente para comprender el concepto de recta tangente a una curva que se da vía la derivada.
b) Averiguar si los conocimientos sobre recta tangente a una circunferencia causan conflicto a los estudiantes con el conocimiento del concepto de tangente a una curva que proporciona la derivada.

Capítulo 3

Marco conceptual

3.1 La comprensión en matemáticas

Uno de los objetivos de la investigación en matemática educativa es promover la predisposición de los estudiantes hacia el estudio de las matemáticas con comprensión, una predisposición que los guíe en la búsqueda y creación de relaciones sustanciales en el proceso de pulir y comprender los acercamientos y formas de abordar distintas situaciones que se consideran en matemáticas. El aprendizaje de las matemáticas se vuelve significativo cuando los estudiantes pueden utilizar lo que han aprendido en cualquier contexto de manera eficiente.

Aprender matemáticas es una actividad en la que los estudiantes tienen que enfocarse en entender las reglas, conceptos, teoremas, resultados y procedimientos que las matemáticas ofrecen. En esta labor de aprendizaje la participación de los alumnos es trascendental en la construcción y desarrollo de conocimientos y resultados matemáticos. Recolectar información, descubrir o crear relaciones significativas, reflexionar y discutir ideas, plantear conjeturas y evaluar los resultados son algunas de las acciones en las que deben trabajar los estudiantes para alcanzar su objetivo final, el aprendizaje.

Aprender matemáticas va más allá de que el estudiante domine un conjunto de reglas, algoritmos, fórmulas o procedimientos para resolver problemas rutinarios (Santos-Trigo, 2014). Si el objetivo es que el alumno aprenda con comprensión, entonces se le debe guiar para que constantemente esté analizando, cuestionado y evaluando las tareas en las que está involucrado para que así pueda comprender y comunicar sus resultados. La reflexión constante le dará luz en el proceso de construcción de su conocimiento.

De acuerdo con Santos-Trigo (2014), el entendimiento o comprensión de las ideas matemáticas no es un proceso final, sino gradual y dinámico que se va robusteciendo en función de la necesidad de responder y resolver series de cuestionamientos que emerjan dentro y fuera de la propia comunidad de aprendizaje. La comprensión de las ideas matemáticas conlleva un proceso de reflexión donde el estudiante constantemente refina o transforma sus ideas y formas de pensar.

Harel (2006) expresa que la meta de la instrucción en matemáticas es ayudar a los estudiantes a desarrollar caminos de comprensión y formas de pensar que sean compatibles con aquellos que practican los matemáticos contemporáneos y al mismo tiempo que los alumnos aprendan a pensar matemáticamente.

De acuerdo con Schoenfeld (1994) aprender a pensar matemáticamente significa

a) Desarrollar un punto de vista que valore el proceso de matematización y abstracción y tener la tendencia a aplicarlos.
b) Desarrollar una competencia con las herramientas de trabajo y usarlas para entender y construir estructuras.

3.2 Aprender matemáticas con comprensión

Una de las preocupaciones en la investigación en matemática educativa es la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas con comprensión Carpenter y Lehrer (1999) y Sierpinska (1994).

La comprensión matemática ha sido de interés desde ya hace mucho tiempo atrás. Poincaré, por ejemplo, en su libro *ciencia y método* declara lo siguiente.

> "¿Cómo puede haber tantas mentes que se rehúsen a comprender Matemáticas? ¿No es esto paradójico? He aquí una ciencia que sólo apela a los principios de la lógica; por ejemplo, al principio de contradicción, éste que, por así decirlo, es el esqueleto de nuestro entendimiento, cuya ausencia implicaría la ausencia del pensar, y aún hay gente que lo encuentra obscuro, y son la mayoría. Podemos entender que ellos sean incapaces de descubrir, pero que sean incapaces de comprender las demostraciones que se les hacen, que permanezcan ciegos cuando se les presenta una luz que parece brillar con fulgor puro, es totalmente incomprensible." (Poincaré, 1914, pp. 117-118)

Poincaré hace referencia tanto a la complicada relación entre las matemáticas y la comprensión, como a la dificultad que implica aprender matemáticas con comprensión. Algunos de los factores que se consideran en la explicación de estos retos, por citar algunos, pueden ser el conocimiento y la pedagogía de los maestros, el plan de estudios, el entorno social y cultural, etc.

De acuerdo con Davis (1996), la enseñanza con compresión consiste en que el estudiante construya su conocimiento utilizando la información que él ya tiene. Esta noción de enseñanza tiene sus principios, en gran medida, en la idea constructivista. En un entorno de aprendizaje constructivista el nuevo conocimiento es una extensión del conocimiento antiguo, y se alcanza a través de la reflexión, Janvier (1996).

La comprensión matemática requiere acciones por parte de los alumnos y también por parte de los docentes. Los primeros deben trabajar activamente en buscar, hacer o establecer conexiones entre lo que ellos ya saben y lo que pretenden aprender. Los maestros por su parte deben reflexionar y analizar la instrucción que imparten, así como reparar en la evaluación de los contenidos expuestos en el aula. Pensar en una reorganización de los contenidos curriculares y de su cátedra es fundamental en este proceso. El análisis y reflexión constante de las acciones que ambas partes realizan es el comienzo de este escabroso camino de la comprensión matemática.

Según Hiebert y Carpenter (1992), una idea, procedimiento o hecho matemático se entiende si forma parte de una red interna, el grado de comprensión está determinado por el número y la fuerza de las conexiones. Una idea, procedimiento o hecho matemático se comprende a fondo si está vinculado a redes existentes con conexiones más fuertes o numerosas.

La comprensión matemática está determinada por la forma en la que se estructura el conocimiento. Hacer y aprender matemáticas con comprensión conlleva hacer conexiones entre ideas bien fundamentadas conceptualmente. Lograr la creación de estos vínculos permite que las ideas sean recordadas y consideradas como parte de un todo, en donde cada parte comparte relaciones recíprocas con el resto de las partes (Resnick y Ford, 1981; Romberg y Kaput, 1999; Schoenfeld, 1988, pág. 1992).

Estructurar el conocimiento a través de ideas, bien ligadas entre sí, proporciona ventajas para quienes quieren acceder a un nuevo conocimiento. La capacidad de transferencia de las ideas, es decir, la capacidad de usar lo que se ha prendido en nuevos problemas, es esencial en el desarrollo del nuevo saber; resulta difícil imaginar que se pueda uno volver matemáticamente competente si cada problema requiriera ideas totalmente aisladas a las ya establecidas.

Carpenter y Lehrer (1999) plantean dos interrogantes: ¿Por qué comprender? Y ¿Qué es comprender? Los autores responden a la primera pregunta argumentando que el aprendizaje con comprensión se caracteriza, principalmente, porque es generativo, es decir, cuando el estudiante adquiere conocimientos con comprensión entonces puede usar sin dificultad esos cimientos para alcanzar a comprender nuevos temas. Si el conocimiento es sin comprensión surgen dificultades para generar conexiones entre lo aprendido y lo que se pretende conocer; esto hace que sea infructuoso el proceso de aprendizaje.

La preocupación debe centrarse en capacitar a los estudiantes para que adquieran nuevas habilidades, herramientas y conocimientos y para que adapten sus conocimientos para resolver nuevos problemas. Si los estudiantes no aprendan con comprensión, cualquier conocimiento que adquieran probablemente les será de poca utilidad.

En cuanto a la segunda pregunta, ¿qué es comprender?, Carpenter y Lehrer mencionan que la comprensión no es un atributo estático del conocimiento del individuo, sino que, resulta más apropiado pensar en la comprensión como algo emergente o en desarrollo que se caracteriza en términos de la actividad mental que entra en juego.

Cerpenter y Lehrer (1999), proponen cinco formas de actividad mental de las cuales surge la comprensión matemática:

a) Construir relaciones.
b) Extensión y aplicación de conocimiento matemático.
c) Reflexionar sobre las experiencias.

d) Articular lo que el individuo conoce.

e) Apropiarse del conocimiento matemático.

Construir relaciones.

Las cosas adquieren significado por la forma en que se relacionan con otras cosas. Las personas construyen significado para una nueva idea o proceso relacionándolo con ideas o procesos que ya comprenden.

Extensión y aplicación de conocimiento matemático.

No es suficiente pensar en el desarrollo de la comprensión simplemente como la incorporación de nuevos conceptos y procesos al conocimiento existente. Desarrollar la comprensión implica más que simplemente conectar nuevos conocimientos con conocimientos previos. La creación de estructuras de conocimiento ricas e integradas resulta crucial en este proceso, esta estructuración del conocimiento hace que aprender con comprensión sea generativo. Cuando el conocimiento está bien estructurado, el nuevo conocimiento puede relacionarse e incorporarse a las redes de conocimiento existentes. El conocimiento estructurado es menos susceptible al olvido. Cuando el conocimiento está muy bien estructurado, existen múltiples caminos para recuperarlo, mientras que la información sin conexión es más difícil de recordar.

Aunque el desarrollo y la creación de estructuras del conocimiento identifican al aprendizaje con comprensión, la naturaleza de esas estructuras también es fundamental ya que no todas las relaciones son matemáticamente fructíferas. Aprender con comprensión implica desarrollar relaciones que reflejen principios matemáticos importantes.

Reflexionar sobre las experiencias.

La reflexión es el análisis consciente que cada individuo realiza sobre sus acciones y pensamientos. La aplicación rutinaria de habilidades requiere poca reflexión: uno simplemente sigue un conjunto de procedimientos ya conocidos. La reflexión, sin embargo, juega un papel importante en la resolución de problemas. La resolución de problemas a menudo implica examinar conscientemente la relación entre el conocimiento existente y las condiciones que se buscan satisfacer. Que los estudiantes sean reflexivos en su aprendizaje significa que examinan conscientemente los conocimientos que están adquiriendo y, en particular, la forma en que se relacionan tanto con lo que ya saben cómo con cualquier otro conocimiento que estén adquiriendo. El aprendizaje no sólo ocurre agregando nuevos conceptos o habilidades: también ocurre a través de la reorganización de lo que ya se conoce. Reflexionar sobre lo que se conoce y cómo es que se adquirió este conocimiento puede conducir a dicha reorganización.

Una característica del desarrollo de la comprensión de los estudiantes es que se vuelven cada vez más capaces de reflexionar sobre su pensamiento.

Articular lo que el individuo conoce.

La articulación refiere a la capacidad de cada individuo para comunicar su conocimiento, ya sea de manera verbal, escrita o utilizando otros recursos: imágenes, diagramas, modelos, etc. Inicialmente, los estudiantes, tienen dificultad para articular sus ideas sobre un tema o tarea, pero al esforzarse por articular sus ideas, estos desarrollan la capacidad de reflexionar y articular su pensamiento.

Comunicar o articular las ideas propias es un objetivo de la educación y también es un punto de referencia para la comprensión. La articulación requiere reflexión, se busca que se identifiquen las ideas más importantes y los elementos críticos de una actividad para así comunicar la esencia de esta; en este proceso, la actividad se convierte en un objeto de pensamiento. La articulación puede pensarse como una forma pública de reflexión.

Apropiarse del conocimiento matemático.

La comprensión conduce a la construcción del conocimiento de los estudiantes a través de sus propios recursos, estrategias, medios o actividades. No se puede alcanzar esta comprensión del conocimiento si los alumnos perciben únicamente el conocimiento como algo ya establecido. Los estudiantes necesitan entender que el conocimiento siempre está evolucionando, pero no verán el conocimiento de esta manera si no se apropian de lo que escuchan, observan y practican.

La comprensión del conocimiento se ve reflejada cuando los estudiantes adaptan lo que aprenden a sus propios fines. Los estudiantes son los autores de su propio aprendizaje, desarrollan sus propias posturas sobre diferentes prácticas de las matemáticas. El aprendizaje está ordenado por historias personales de aptitud e interés, no simplemente por secuencias curriculares.

El propósito es lograr que los alumnos desarrollen una predisposición a comprender y se den cuenta de la importancia de aprender con comprensión. Que cada una de las actividades en las que los estudiantes se involucren vayan orientadas al entendimiento y a la reflexión; que puedan encontrar y dar sentido a nuevas ideas y al mismo tiempo examinar críticamente su conocimiento existente para crear conexiones cuyo fin sea ampliar su conocimiento.

Capítulo 4

Marco de Referencia

4.1 Definición de recta tangente

A continuación, mostramos algunas definiciones de recta tangente que aparecen en la revisión de la bibliografía.

El problema de determinar una recta tangente a una curva ha sido un problema en el cual se ha trabajado desde la antigüedad. Euclides presentó en los *Elementos de Geometría* algunos resultados que hacen referencia a la recta tangente al círculo, entre ellos seleccionamos estos.

> "Definición: Se dice que una recta es tangente al círculo cuando lo toca y prolongada no lo corta." ([13], p. 750)

> "Proposición: La recta perpendicular en el extremo de un diámetro cae fuera del círculo." ([13], p. 760)

La definición de recta tangente al círculo que Euclides proporciona es la que se sigue enseñando en un curso de geometría elemental. Esta definición no es válida para otro tipo de curvas, pues hay curvas en las que una recta tangente en un punto corta a la curva en uno o más puntos diferentes.

Lehmann (1989) da una definición de recta tangente a una curva plana general. Sea la ecuación de una curva plana cualquiera C

$$f(x, y) = 0$$

Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2\ (x_2, y_2)$ dos puntos diferentes cualesquiera de C tales que el arco de curva que los une sea continuo; es decir P_2 puede moverse hacia P_1 permaneciendo siempre sobre la curva. La recta que pasa por P_1 y P_2 se llama secante. Consideremos que P_1 es un punto fijo mientras que P_2 se mueve a lo largo de C hacia P_1. Entonces, a medida que P_2 se aproxima a P_1, la secante gira en el sentido contrario al de las manecillas de un reloj en torno a P_1 y, en general, tiende a una posición límite representada por la recta P_1T que se define como la tangente a la curva C en el punto P_1. El punto P_1 se llama punto de tangencia o punto de contacto de la tangente. La pendiente de la curva C en el punto P_1 se define como la pendiente de la tangente a C en P_1. Véase la Figura 6.

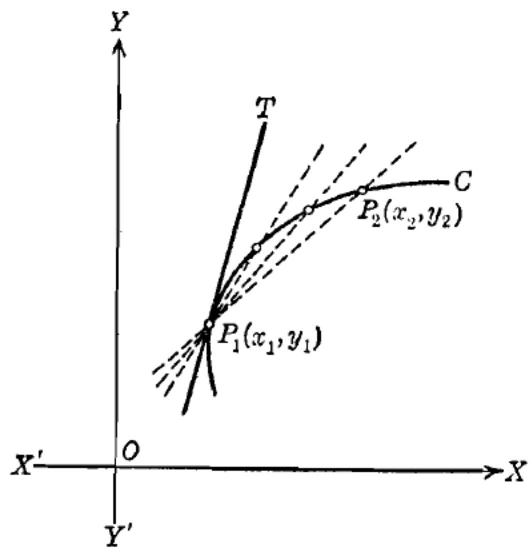


Figura 6 *Recta tangente a C en P_1. Lehmann (1989)*

De acuerdo con Spivak, M. (1967) la recta tangente se define de la siguiente manera:

> "La recta tangente a la gráfica f en $(a, f(a))$ es la recta que pasa por $(a, f(a))$ y cuya pendiente es $f'(a)$. Esto significa que la tangente en $(a, f(a))$ está definida si y sólo si f es diferenciable en a".

Que *f* sea diferenciable en a significa que $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe.

Aarão, J. (2000) sugiere aplicar el algoritmo de la división para encontrar rectas tangentes a polinomios.

> "La recta $y = mx + b$ es tangente a la gráfica del polinomio $p(x)$ en $x = a$ si y sólo si $mx + b$ es el residuo del cociente $\frac{p(x)}{(x-a)^2}$"

Para Grebe, A.V. (2013) la recta tangente a una función es una aproximación lineal a la función en un punto.

"La recta $L(x)$ es tangente a una función $f(x)$ en $x = c$ si y sólo si no hay otra recta $L_{1(x)}$ que proporciona una mejor aproximación, es decir, para p lo suficientemente cerca de c no se cumple que $\left|L_{1(x)} - f(p)\right| < |L(p) - f(p)|$ ".

En Rivera-Figueroa (2012) se define a la recta tangente y exhibe explícitamente su ecuación.

> "La recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ es la recta que pasa por el punto $(a, f(a))$ con pendiente $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} m(x)$. Entonces, la ecuación de la recta tangente es $y = f'(a)(x-a) + f(a)$".

El cálculo suministra una definición general de recta tangente que nos lleva a considerar casos en los que se aprecia la fortaleza de la definición. Las rectas tangentes que se construyen vía la derivada coinciden con las rectas tangentes que se tienen para las cónicas.

4.2 Curvas, funciones y rectas tangentes

En la investigación realizada por Biza, Christou y Zachariades (2008) se muestra el tipo de curvas que ellos utilizaron para indagar las concepciones que tienen los estudiantes (con los que llevaron a cabo su investigación) de recta tangente a una curva. Véase la Figura 7.

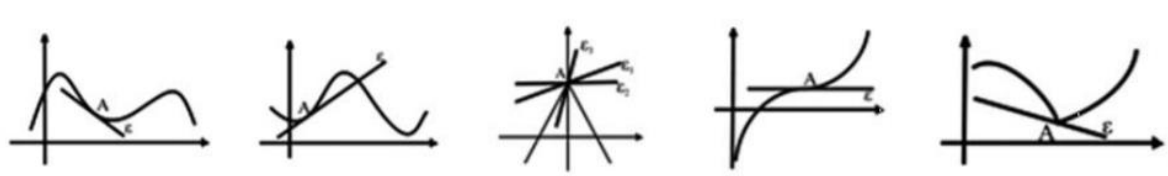


Figura 7 *Curvas tomadas de Biza, Christou y Zachariades (2008)*

En el mismo estudio aparece otra sección en donde los investigadores proporcionan ciertas curvas y les piden a los alumnos que tracen una recta tangente a cada una de las curvas en el punto *A*. Véase la Figura 8.

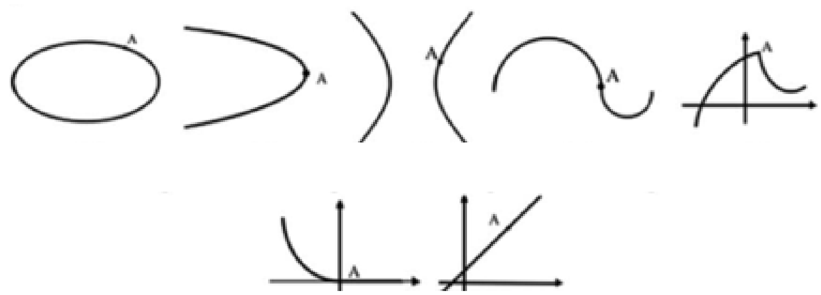
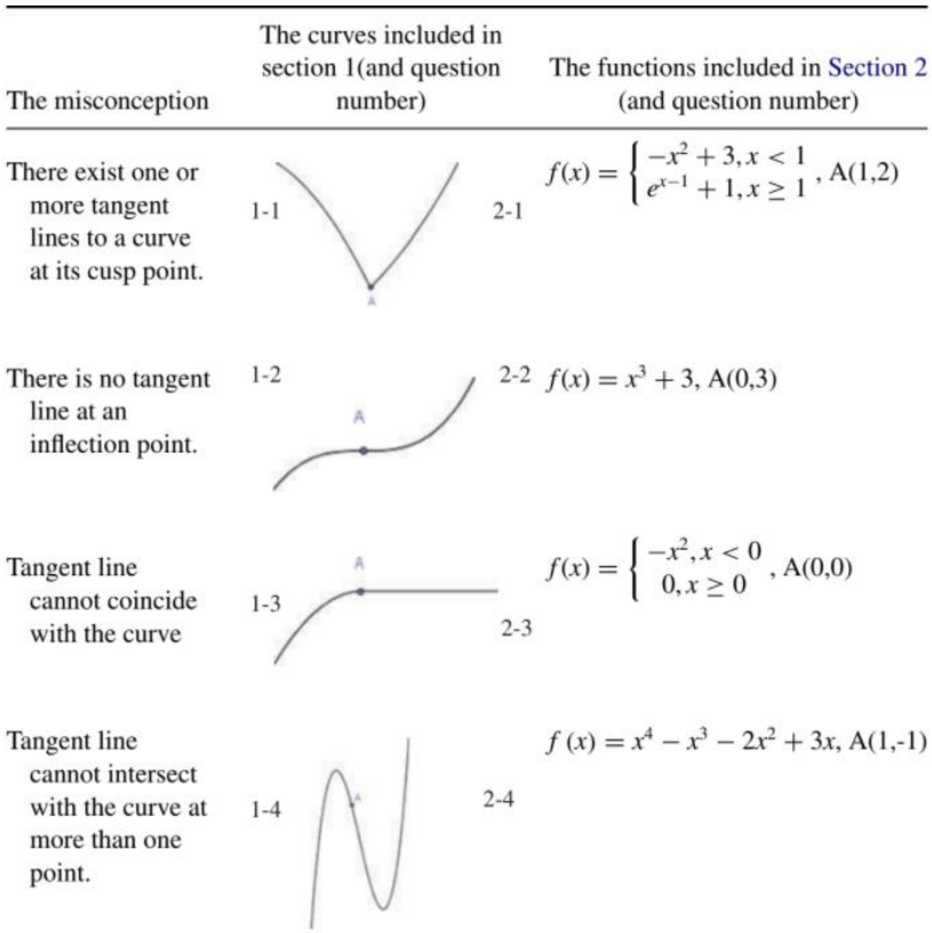


Figura 8 *Propuesta de curvas (Biza, Christou y Zachariades, 2008)*

Çekmez y Baki (2016) proponen como instrumento de recolección de datos un cuestionario muy similar al de Biza, Christou y Zachariades (2008). Véase la Figura 9.



The misconception	The curves included in section 1(and question number)	The functions included in Section 2 (and question number)
There exist one or more tangent lines to a curve at its cusp point.	1-1	2-1 $f(x)=\begin{cases}-x^2+3, x<1\\ e^{x-1}+1, x\geq 1\end{cases}$, A(1,2)
There is no tangent line at an inflection point.	1-2	2-2 $f(x)=x^3+3$, A(0,3)
Tangent line cannot coincide with the curve	1-3	2-3 $f(x)=\begin{cases}-x^2, x<0\\ 0, x\geq 0\end{cases}$, A(0,0)
Tangent line cannot intersect with the curve at more than one point.	1-4	2-4 $f(x)=x^4-x^3-2x^2+3x$, A(1,-1)

Figura 9 *Curvas tomadas de Cekmez y Baki (2016)*

En el análisis de resultados que hacen Çekmez y Baki (2016) concluyen que, en efecto, los estudiantes tienen dificultades para trazar o identificar una recta tangente a una curva. La geometría euclidiana y la geometría analítica han provisto de nociones y propiedades de tangencia a los estudiantes, pero cuando éstos tratan de ocuparlas en contextos más generales cometen algunos errores.

Hirst, K. (1972) muestra otro tipo de curvas, que podemos llamar "sofisticadas", en donde se aprecia la fuerza de la definición. Rivera-Figueroa y Ponce-Campuzano (2012), comentan que los estudiantes y los profesores de los primeros cursos de cálculo no son conscientes de que la definición de recta tangente a una curva se da vía la derivada y es ahí en donde está la fortaleza de la definición.

Rivera-Figueroa y Ponce-Campuzano (2012) muestran una función en donde la intuición de tangencia no corresponde con lo que el cálculo proporciona como definición. Véase la Figura 10.

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}x^2 \sin\frac{1}{x} + x & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

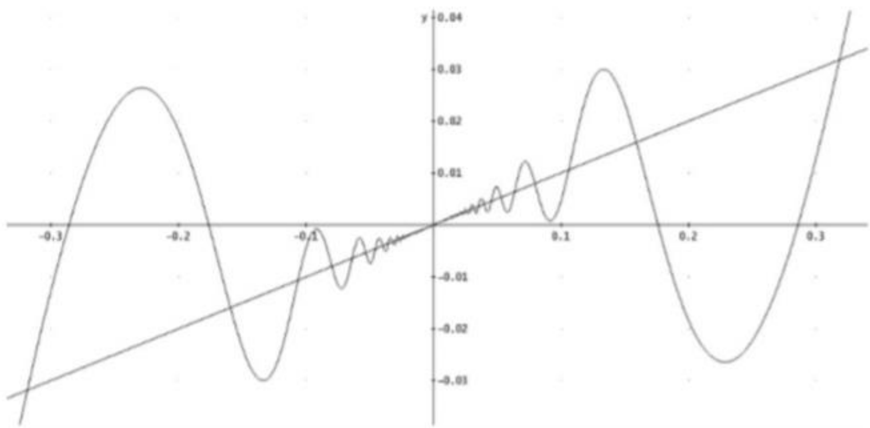


Figura 10 *Gráfica de h(x) con recta tangente en el punto (0,0). Rivera-Figueroa y Ponce-Campuzano (2012)*

Esta función es diferenciable en $x = 0$ y por lo tanto la recta tangente en el punto (0,0) está bien definida y es $y = x$. Esta situación geométrica que se ilustra en la figura anterior no es aceptada con facilidad y resulta difícil imaginar en un primer curso de cálculo se comprendan los alcances y el significado que nos proporciona la definición.

Otros casos similares al anterior son que los muestra Rivera-Figueroa (2012). Por ejemplo

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

La gráfica de *f(x)* aparece a continuación. Véase la Figura 11.

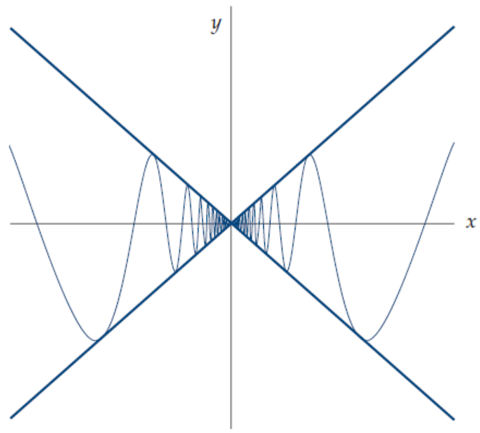


Figura 11 *Gráfica de f(x). Rivera-Figueroa (2012)*

Esta función es continua en $a = 0$ pero no es derivable en ese punto. Esta función, no tiene recta tangente en el punto $(0,0)$. En el resto de los puntos a, la derivada está dada por

$$f'(a) = \sin\left(\frac{1}{a}\right) - \frac{1}{a}\cos\left(\frac{1}{a}\right)$$

Entonces, la recta tangente en los puntos $(a, f(a))$ tiene por ecuación

$$y = f'(a)(x - a) + a \sin\left(\frac{1}{a}\right)$$

Otra función que aparece en Rivera-Figueroa (2012) es la que mostramos a continuación

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

La gráfica de $g(x)$ aparece en la Figura 12.

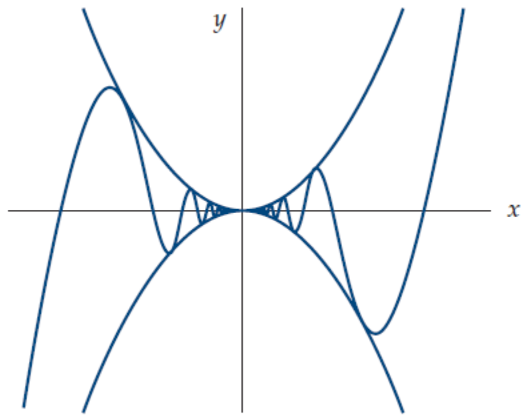


Figura 12 *Gráfica de g(x). Rivera-Figueroa (2012)*

Esta función es continua en a=0 y también es derivable en ese punto. Como $g'(0) = 0$ entonces la recta tangente en el punto $(0,0)$ tiene por ecuación $y = 0$. En los otros puntos la derivada está dada por $g'(a) = 2a \sin\left(\frac{1}{a}\right) - \cos\left(\frac{1}{a}\right)$ y, por lo tanto, la recta tangente en los puntos $(a, g(a))$ tiene por ecuación $y = g'(a)(x - a) + a^2 \sin\left(\frac{1}{a}\right)$.

La función $f(x)$ está "modulada" por $y = |x|$ y $y = -|x|$, mientras que la función $g(x)$ lo está por las parábolas $y = x^2$ y $y = -x^2$. Cerca del cero, la parábola comprime a la función $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, así, en cierto sentido la "suaviza"; mientras que $y = |x|$ y $y = -|x|$, aunque la comprimen, no la suavizan. Esta es la razón por la que la función $g(x)$ tiene tangente en $(0,0)$, pero no así la función $f(x)$.

Un ejemplo más de Rivera-Figueroa (2012). Sea *h(x)* definida de la siguiente manera.

$$h(x) = \begin{cases} x^2 \quad si \quad x \ es \ racional \\ \\ 0 \quad si \quad x \ es \ irracional \end{cases}$$

La función $h(x)$ es discontinua en todos los números reales diferentes de cero, por lo que no es derivable es esos puntos. El único punto de continuidad es $x = 0$, de hecho, para este punto la función es derivable y $h'(0) = 0$. Por lo tanto, esta función tiene recta tangente en el punto $(0,0)$y está dada por la ecuación $y = 0$. La recta tangente coincide con el eje de las abscisas. Una representación de la función $h(x)$ la podemos observar en la Figura 13.

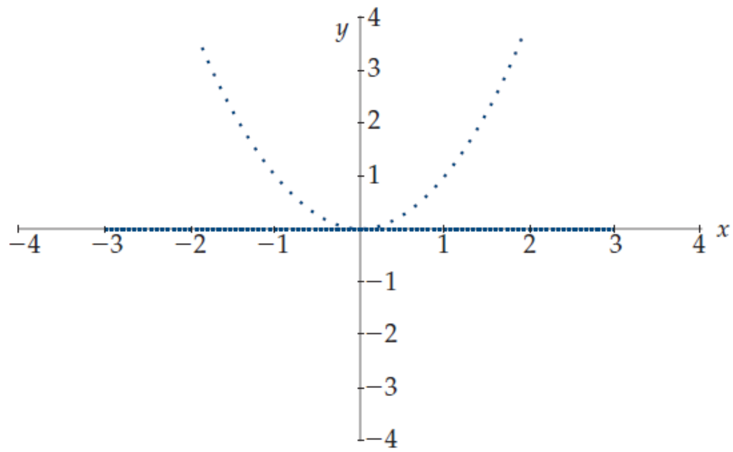


Figura 13 *Representación gráfica de h(x). Rivera-Figueroa (2012)*

Capítulo 5

Metodología

5.1 Participantes y proceso de recolección de datos

La metodología que empleamos para llevar a cabo la investigación constó de un cuestionario y entrevistas no estructuradas, las cuales se aplicaron a un grupo de 23 estudiantes de bachillerato del Colegio Kaysen, de la ciudad de Tulancingo de Bravo, del estado de Hidalgo, de la República Mexicana. Los planes de estudio de este colegio son reconocidos por la Secretaría de Educación del estado de Hidalgo. De los 23 estudiantes, 12 eran del quinto semestre y 11 del tercer semestre. El cuestionario constó de dos partes (I y II). La parte I inicia con una pregunta detonadora, una actividad sobre un applet diseñado con GeoGebra y 6 actividades con lápiz y papel, sobre todas las actividades se desarrollaron las entrevistas. La parte II, constó de 10 applets, también diseñados con GeoGebra, donde, como en la parte I, se llevaron a cabo actividades y las entrevistas mientras desarrollaban las actividades.

En la segunda etapa sólo participaron 15 estudiantes, 11 de tercer semestre y 4 de quinto semestre. Tanto las actividades de la primera etapa, como las de la segunda etapa, serán descritas más adelante.

El cuestionario fue distribuido digitalmente unos minutos antes del inicio de las entrevistas llevadas a cabo por el investigador. Dado que en algunas de las actividades los estudiantes tenían sobre unas figuras, y ante la imposibilidad de entregárselas impresas físicamente, se les pedía que de ser posible las imprimieran, en caso contrario deberían hacer un dibujo sobre una hoja de papel, lo más parecido al mostrado digitalmente. De los 23 participantes 21 de ellos tenían acceso a una impresora, por lo que pudieron imprimir los dibujos, los dos restantes dibujaron las figuras sobre papel y llevaron a cabo con éxito sus actividades. Por medio de las entrevistas no estructuradas se desarrolló la interacción entre el investigador y los alumnos.

Las entrevistas se llevaron a cabo por medio de la plataforma digital Meet de Google; esta plataforma permitió grabarlas en video. En cada entrevista sólo estuvieron presentes el alumno y el investigador. La comunicación que se estableció fue efectiva y la activa participación de cada estudiante permitió que cada actividad cumpliera con el objetivo para la cual fue elaborada.

Los alumnos que participaron en la investigación fueron quienes aceptaron una invitación electrónica que les hizo el investigador a los alumnos que acababan de cursar la materia de geometría analítica o la materia de cálculo diferencial. Estas asignaturas, de acuerdo con el currículo de las Secretaría de Educación, se imparten en tercero y quinto semestre de bachillerato. En la invitación no se especificaba el tema sobre el que se iba a trabajar, con el propósito de evitar que el estudiante se documentara o se preparara en el tema, pues estábamos interesados en averiguar sobre sus conocimientos y concepciones sobre recta tangente a una curva, que adquieren en sus cursos previos al cálculo, y los que adquieren en sus cursos de cálculo diferencial. Las actividades se anunciaron como *taller de matemáticas elementales*. En este sentido, la muestra de estudiantes con la que se trabajó resultó aleatoria y no homogénea, lo único que tenían en común los participantes era su interés por participar en un taller sobre matemáticas. Algunos de los estudiantes llegaron a expresar que habían aceptado la invitación por curiosidad y por lo accesible que sonaba el título de la invitación.

Los alumnos utilizaron herramientas digitales y físicas para poder resolver las actividades propuestas por el investigador. Por herramientas físicas nos referimos a regla, compás, escuadras, lápices y papel. Por herramientas digitales nos referimos al software GeoGebra con el cual los alumnos pudieron hacer acercamientos a zonas específicas de las figuras y comprobar las ideas que iban surgiendo durante el desarrollo de la entrevista.

Una vez que se obtuvo la información video grabada se procedió a analizar cada entrevista. Al final se hizo un análisis de la información obtenida para identificar la percepción predominante de recta tangente de cada uno de los estudiantes.

5.2 Para la recolección de datos de la parte I

A continuación, se muestra el cuestionario con las actividades que los alumnos tuvieron que realizar en la primera etapa. Como se comentó antes, el cuestionario inicia con una pregunta detonadora acerca de cómo conciben una recta tangente a una circunferencia. Sólo para conservar el formato del cuestionario, hemos denominado Actividad 1 a esta pregunta.

Actividad 1. ¿Qué es para ti una recta tangente a un círculo?

Dado que estamos conscientes de que una respuesta a una pregunta que se refiere a la descripción de un concepto, son de alta dificultad, sobre todo porque puede no contarse con el vocabulario o terminología para expresarlo, durante las entrevistas a los estudiantes se estableció un diálogo para tratar de interpretar sus expresiones orales y esclarecer en lo que estaban pensando o a lo que se estaban refiriendo. Esto significa que no nos limitamos a una redacción por escrito por parte del estudiante, sobre lo que ellos entendían por recta tangente a una circunferencia. Por ejemplo, alguien respondió por escrito: “es una recta con un punto único que comparte ~~una~~ la circunferencia" Expresiones como estas son comunes en los estudiantes, por lo que consideramos esenciales las entrevistas a profundidad para averiguar lo que los estudiantes desean expresar.

Actividad 2. Ve al enlace que aparece a continuación, una vez que lo hayas abierto, espera las indicaciones del instructor. *https://www.geogebra.org/classic/w5pvjzvq*

La actividad 2 se desarrolló haciendo uso de GeoGebra. Lo que los alumnos vieron cuando abrieron el enlace fue lo siguiente. Véase la Figura 14.

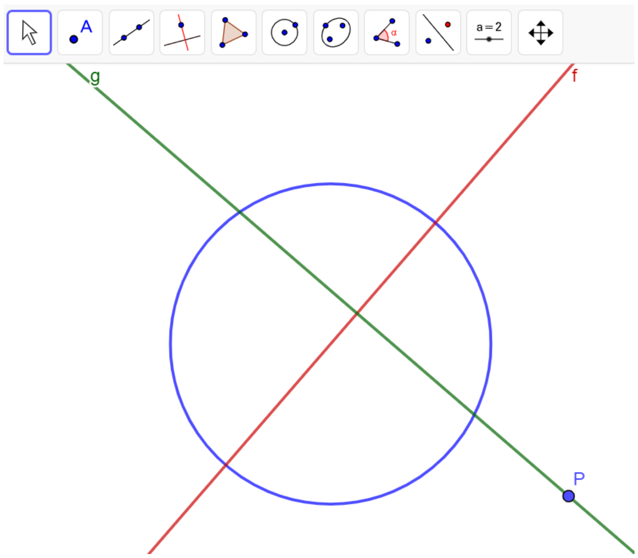


Figura 14 *Actividad 2*

Antes de pedirles a los alumnos que desarrollaran esta activad se les explicó sobre los elementos que aparecían en pantalla; cabe mencionar que la mayoría de los participantes no habían tenido ningún acercamiento con GeoGebra y los alumnos que lo conocían tenía mucho que no interactuaban con el software. Sin embargo, se les explicó verbalmente lo que deberían hacer con los puntos o figuras que parecen en los applets. En este caso son:

- Una circunferencia de radio r.

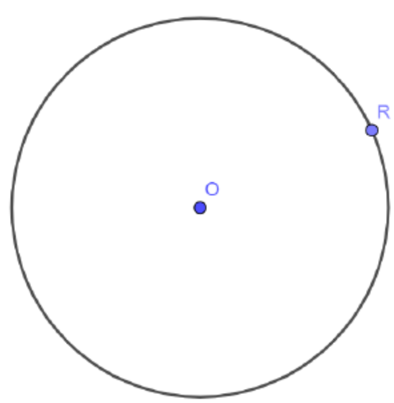
- Dos rectas perpendiculares f y g. La recta f pasa por el centro de la circunferencia.
- Un punto P sobre la recta g. El punto P permite desplazar libremente la recta g.

La actividad 2 consistió en pedir al alumno que moviera el punto P para desplazar la recta g de tal manera que g se "volviera" tangente a la circunferencia. Una vez que el alumno decía "*aquí es*" y dejaba de desplazar a la recta g, el investigador pedía que el alumno diera argumentos que justificaran su respuesta.

En esta parte de la actividad, el investigador mostró y explicó el uso de la lupa de GeoGebra, para hacer acercamientos y alejamientos de las figuras. Los alumnos acudieron a estos acercamientos para convencerse de que habían propuesto correctamente la posición de la recta g.

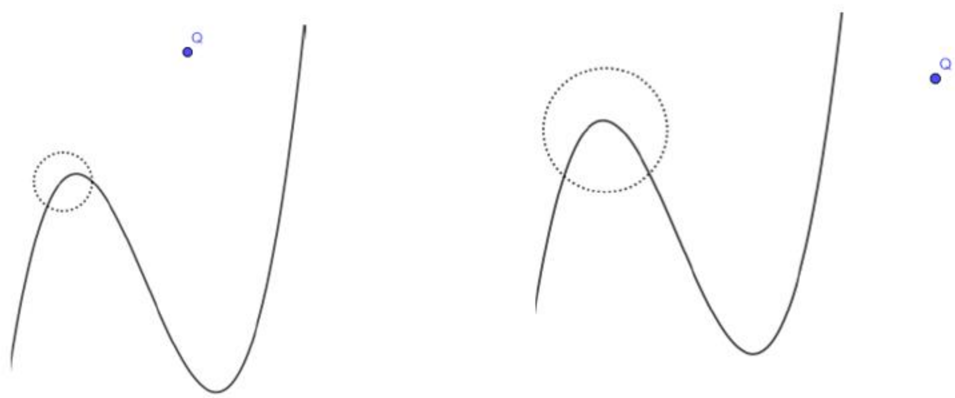
La idea de mostrar las dos rectas perpendiculares fue para averiguar si el alumno, en el caso de que supiese que la tangente es perpendicular al radio en el punto de tangencia acudiría a esta propiedad de la recta tangente a un círculo.

Actividad 3. Traza una circunferencia como se muestra en la siguiente figura. Dibuja la recta tangente a la circunferencia en el punto *R*. El punto *O* es el centro de la circunferencia.



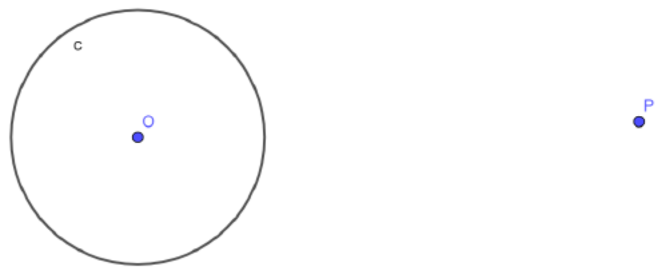
La actividad 3 tuvo como propósito averiguar cómo los participantes trazan una recta tangente a la circunferencia en un punto dado. Se esperaría que los alumnos solamente posicionasen la regla de manera que sólo coincida con la circunferencia en el punto especificado. En otras palabras, que trazase la recta tangente “a ojo” cuidando que hubiese un único punto en común con la circunferencia.

Actividad 4. Dibuja dos figuras como las que aparecen a continuación. Utiliza tu regla para trazar una recta tangente, desde *Q*, a la curva en la zona señalada por el círculo punteado.



En la actividad 4 se trata de averiguar si los alumnos al solicitarle que tracen una recta tangente una curva que no es una circunferencia, la trazan sin recelo. Si fuese así, significaría que los alumnos están dispuestos a aceptar el concepto de recta tangente a curvas en general. Por cierto, no se les indica un punto particular para la tangencia, por el contrario, es un punto que ellos en el caso de trazarla, deben determinar. Solamente se les indica hacia dónde dirigir su atención para ubicar el punto de tangencia. Se les presentó dos curvas y dos puntos desde donde trazar la tangente, en situaciones diferentes. En una de ellas la recta tangente que se pide trazar tendrá que cortar a la curva en un punto diferente al de tangencia. Deseamos averiguar si esto resulta un inconveniente para el estudiante, para trazar la recta tangente.

Actividad 5. Dibuja una circunferencia y un punto *P* exterior a ella, como se muestra en la figura de abajo. Traza todas las rectas tangentes a la circunferencia que pasen por el punto *P*.



Con la actividad 5 tratamos de averiguar si los estudiantes intentan trazar las rectas tangentes a una circunferencia desde un punto exterior, aún sin conocer el punto de tangencia. Una manera correcta del trazado de estas tangentes es auxiliándonos de algunas construcciones para determinar los puntos de tangencia. Véase la Figura 15. Sin embargo, es probable que el alumno no acuda a estas construcciones y lo haga ubicando la regla. Una construcción así revelaría cuál es la imagen intuitiva de los estudiantes de recta tangente a un círculo, como aquella recta que toca y no corta a la circunferencia.

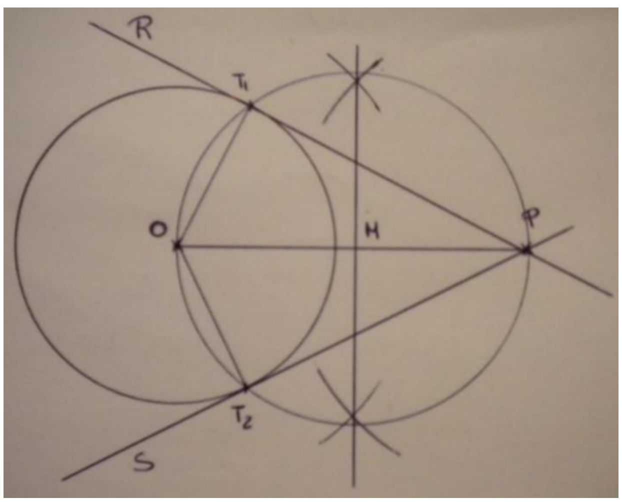
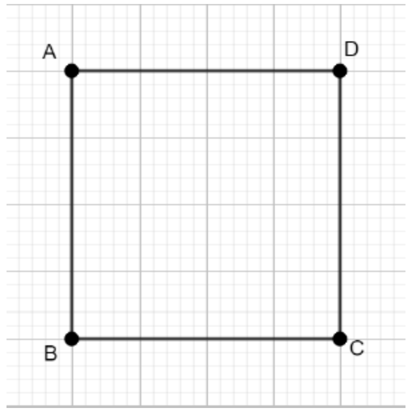


Figura 15 *Rectas tangentes a una circunferencia desde un punto exterior, trazadas geométricamente*

Actividad 6. Traza un cuadrado, como el que aparece a continuación, e inscribe en él una circunferencia.



Para llevar a cabo la actividad 6 es necesario saber que el círculo inscrito en un cuadrado es tangente cada uno de los lados. Por la simetría los puntos de tangencia son los puntos medios. Para trazar el círculo de debe determinar su radio, y aquí entra en juego la propiedad de que la recta tangente es perpendicular al radio en el punto de tangencia. Pretendemos averiguar si el estudiante justifica sus trazos con este argumento de perpendicularidad

Actividad 7. Dibuja una recta y un punto exterior a ella. Geométricamente, ¿cómo encuentras la distancia del punto a la recta?

En el concepto de recta tangente a una circunferencia es relevante el concepto de perpendicularidad (tangente y radio), con la actividad 7 pretendemos averiguar cuánto está familiarizado el alumno con este concepto. En este caso, nos referimos a un segmento perpendicular a una recta desde un punto, como el recurso para medir la distancia de un punto a una recta (Figura 16). Uno de los propósitos de esta actividad es que le ayude llevar a cabo la actividad 8.

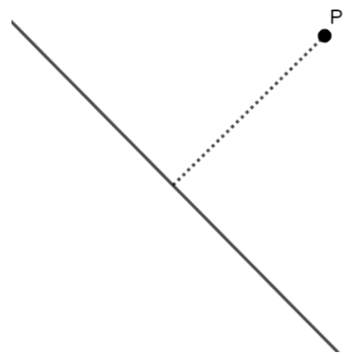
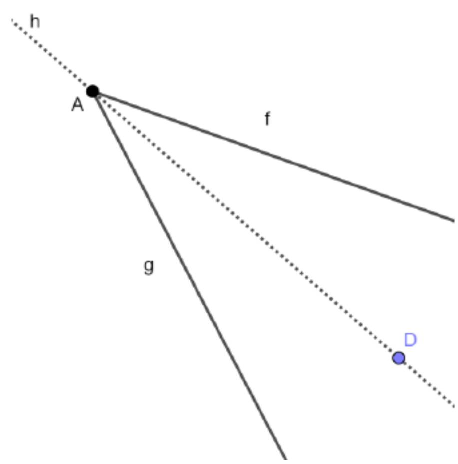


Figura 16 *Distancia geométrica de un punto a la recta*

Actividad 8. Dibuja un ángulo con vértice en un punto cualquiera *A* y con lados *f* y *g*. Traza la bisectriz del ángulo. *D* es un punto sobre la bisectriz, Observa la imagen que aparece aquí abajo para guiarte. Traza una circunferencia con centro en *D* y que sea tangente a los lados del ángulo.



En la actividad 8 se pide trazar una circunferencia con rectas dadas como tangentes; aquí lo notable es que no se proporciona como dato la circunferencia ni punto de tangencia, esto la hace esencialmente diferente a las anteriores. Una manera correcta de trazar la circunferencia es trazando los segmentos perpendiculares a las rectas, desde el punto D indicado, para lo cual le serviría la actividad 7, en el caso de haberla desarrollada con éxito de manera correcta. Sin embargo, quizá el estudiante no acuda esta técnica, pero tratamos de averiguar, en esos casos, qué es lo que el estudiante considera relevante para el trazado, aunque no sepa cómo hacerlo. La propiedad importante en juego es la perpendicularidad entre la recta tangente y el radio (en este caso desconocido). La respuesta ideal es el trazado de los segmentos perpendiculares y la justificación de por qué estos segmentos tienen la misma longitud. Pero esto no es algo que sea de relevancia para nuestra investigación.

5.3 Para la recolección de datos de la parte II

A continuación, describimos las actividades que forman parte del cuestionario de la segunda etapa de la recolección de información. Como lo mencionamos al principio de este capítulo, en esta segunda etapa, los estudiantes interactuaron con 10 applets diseñadas en GeoGebra, estos 10 applets fueron distribuidas en tres actividades.

Actividad II-1. A continuación puedes observar tres enlaces, cada uno de ellos te llevará a una aplicación de GeoGebra, abre el primero y espera las indicaciones del instructor. Cuando el investigador te lo indique, abres el segundo enlace y esperas las instrucciones. Por último, espera la indicación para acceder al tercer enlace.

- https://www.geogebra.org/classic/hvggmz7p
- https://www.geogebra.org/classic/ejsk3d78
- https://www.geogebra.org/classic/n26gawuf

En actividad II-1 presentamos a los estudiantes tres curvas, cada una de ellas está en los enlaces que proporcionamos a los alumnos. La Figura 17 contiene a las tres curvas, a manera de simplificación. La esencia en cada uno de estos tres primeros applets es la misma. Les explicamos a los alumnos los elementos que aparecían en la pantalla: una curva, un punto *P* que se desplaza sobre la curva, un punto de referencia *Q*, este punto es fijo y una recta tangente *g* a la curva en el punto *P*. La actividad consistió en pedir a los estudiantes que desplazaran el punto *P* sobre la curva y que dijeran si la recta siempre permanecía tangente a la curva, en particular cuando el punto *P* coincide con el punto *Q*.

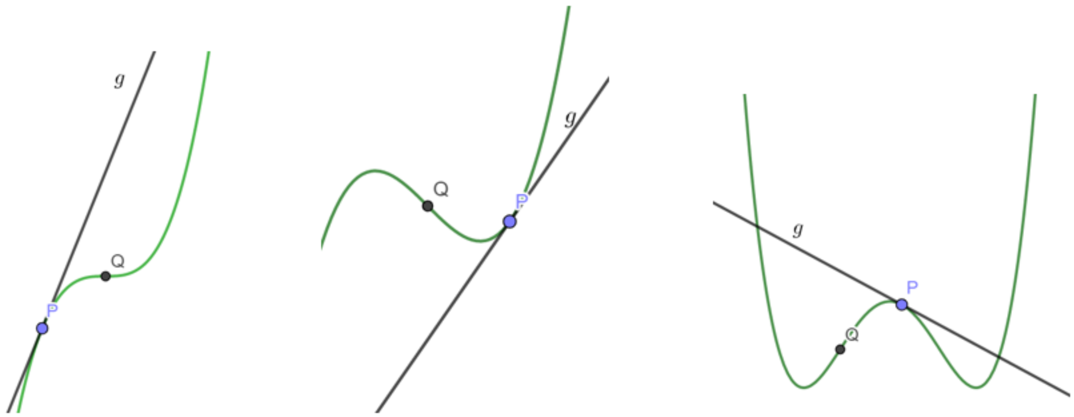


Figura 17 *Recta tangente a cada una de las curvas*

El objetivo de esta actividad es averiguar si el estudiante considera como recta tangente una cuyo punto de tangencia es en un punto de inflexión. La recta tangente en el punto de inflexión la obtendrá como resultado de desplazar una recta que siempre será tangente a la curva.

Actividad II-2. Accede a cada uno de los siguientes enlaces y espera las indicaciones del instructor. Cuando el investigador lo solicite, abres el segundo enlace y esperas las instrucciones; y así hasta llegar al último enlace.

- https://www.geogebra.org/classic/mjaczwye
- https://www.geogebra.org/classic/rykftahz
- https://www.geogebra.org/classic/dfkjbb8s
- https://www.geogebra.org/classic/ck4df6ds

Les explicamos a los participantes los elementos que ellos veían en la pantalla, les informamos que en los cuatro enlaces iban a encontrar elementos similares y que lo único que cambia es la curva en cada applet. Los elementos que hay en cada enlace son: una curva, dos puntos móviles sobre ella (*A* y *B*) y una recta secante a la curva por los puntos *A* y *B*. La Figura 18 muestra estas situaciones.

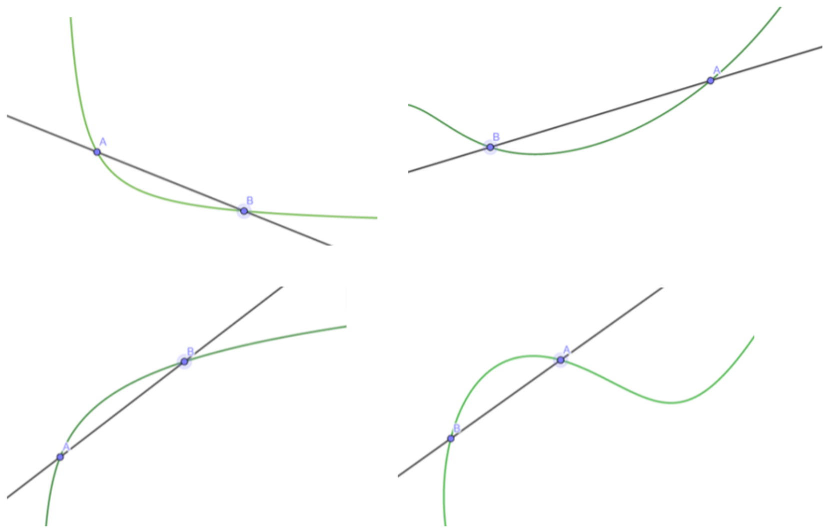
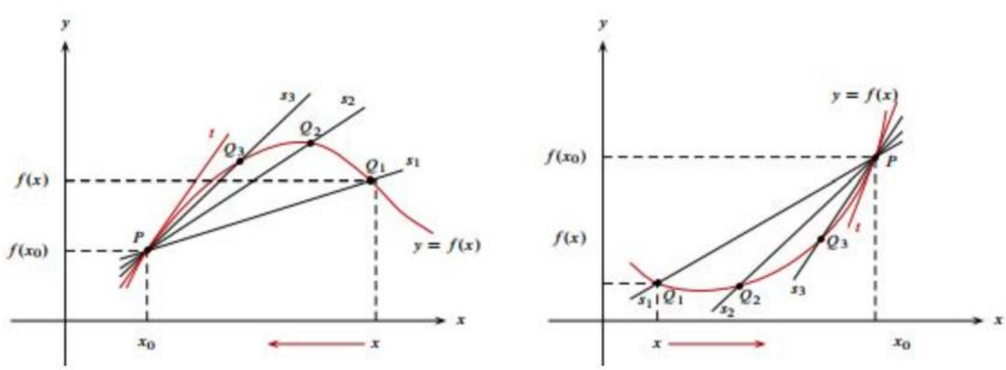


Figura 18 *Recta secante a cada una de las curvas*

Usualmente para definir la derivada de una función en un punto se acude a una gráfica de una hipotética función en donde se acompaña de varias rectas secantes que pasan por un punto fijo (Figura 19) y un segundo punto variable.



.

Figura 19 *Rectas secantes que pasan por un punto fijo*

Con la actividad II-2 tratamos de averiguar si el estudiante acepta sin recelo o le causa dificultad en admitir que cuando desplaza el punto variable de la secante hacia el punto fijo, las rectas secantes determinan en el límite una recta que podemos considerar tangente a la gráfica en el punto fijo, para las tres primeras curvas, A es el punto fijo y B es el punto variable; en la cuarta curva B es el punto fijo y A es el punto variable.

Esta actividad será desarrollada por alumnos que no han cursado la asignatura de cálculo diferencial. Quizá algunos se atrevan a decir que "la recta límite" que se percibe intuitivamente, es tangente, pero será uno de los objetivos averiguarlo.

Actividad II-3. En cada uno de los siguientes enlaces, encontrarás una curva, una recta y un par de puntos sobre la curva. Al igual que en las dos actividades anteriores, debes abrir cada uno de los siguientes enlaces y esperar las indicaciones del instructor.

- https://www.geogebra.org/classic/gmtzpxfd
- https://www.geogebra.org/classic/asbgf5fv
- https://www.geogebra.org/classic/jvbj7949

La actividad II-3 es similar a la actividad II-2, aquí también se les presentan tres curvas con rectas secantes. El punto fijo es un punto de inflexión en cada una de las curvas. El objetivo es el mismo que el de la actividad II-2, con la variante de que el punto fijo es de inflexión. En la Figura 20 mostramos las curvas con las que interactuaron los estudiantes.

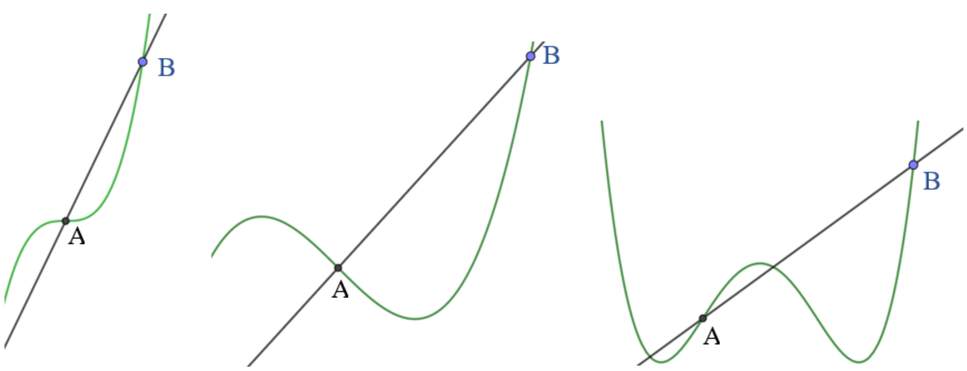


Figura 20 *Recta secante a cada una de las curvas, pasando por un punto de inflexión*

Capítulo 6

Análisis de resultados

En este capítulo hacemos un análisis de las respuestas de los estudiantes a las actividades, también analizamos la información que se obtuvo en cada una de las entrevistas que se desarrollaron de manera simultánea durante el desarrollo de las actividades. Como se mencionó en el capítulo anterior, las respuestas de los alumnos fueron video grabadas y lo que se reporta a continuación es fiel de lo que se habló en cada sesión con los estudiantes.

La intención de que llevemos a cabo este análisis de las respuestas que los participantes dieron a cada actividad, es que averigüemos si con la información que obtuvimos es posible que respondamos a las preguntas de investigación que planteamos en el capítulo 2.

Las preguntas y los objetivos de nuestra investigación son:

Preguntas de investigación

1. ¿Cómo conciben los estudiantes lo que es una recta tangente a un círculo?

2. ¿Qué conocimientos previos a sus cursos de cálculo diferencial tienen los estudiantes del nivel medio superior sobre lo que es una recta tangente?
3. ¿Qué conocimientos sobre recta tangente a una curva requiere el estudiante para comprender el concepto de recta tangente establecido con la derivada?
4. ¿Sus conocimientos básicos sobre recta tangente a una circunferencia, causan conflicto en la comprensión del concepto general de recta tangente, establecido con la derivada?

Con los siguientes objetivos:

a) Averiguar si el conocimiento que tienen los estudiantes sobre una recta tangente es o no suficiente para comprender el concepto de recta tangente a una curva que se da vía la derivada.
b) Averiguar si los conocimientos sobre recta tangente a una circunferencia causan conflicto a los estudiantes con el conocimiento del concepto de tangente a una curva que proporciona la derivada.

A continuación, mostramos lo más destacado de nuestro análisis para cada una de las preguntas. Para fines de escritura, utilizaremos la notación *AT* para referirnos a los alumnos de tercer semestre quienes se les aplicó el cuestionario, entonces *ATi* con *i=1…11* refiere a cada uno de los alumnos de manera particular. De manera análoga hacemos referencia a los alumnos de quinto semestre como *AQ;* luego *AQi* con *i=1…12* lo usamos para referirnos, de manera particular, a cada alumno de quinto semestre.

Las actividades que aquí reportamos fueron seleccionadas de los cuestionarios, tanto de la primera parte como de la segunda parte. El orden en el que presentamos el análisis de resultados es el que creemos que nos ayudará a responder nuestras preguntas de investigación. Las primeras tres actividades de la primera parte del cuestionario nos aportan información relevante para que respondamos las dos primeras preguntas de investigación, mientras que la cuarta actividad del primer cuestionario, así como las tres actividades del segundo cuestionario, nos proporcionan información crucial para que intentemos dar respuesta a las dos últimas preguntas de investigación.

6.1 Sobre la actividad 1

Actividad 1. ¿Qué es para ti una recta tangente al círculo?

Esta primera actividad resulta crucial para identificar las concepciones que tienen los estudiantes de lo que es una recta tangente a un círculo. Las respuestas que se obtuvieron por parte de los participantes son muy parecidas, independientemente del grado que ellos estaban cursando. De los 23 estudiantes que respondieron el cuestionario, 20 de ellos dijeron que una recta tangente al círculo es aquella que *"toca al círculo en un solo punto"*, 3 de ellos (2 de quinto semestre y 1 de tercer semestre) usaron la palabra "*cortar"* en lugar de tocar, expresaron su respuesta diciendo que una recta tangente al círculo es aquella recta que "*corta al círculo en un solo punto"*. De todos los participantes; sólo 15 alumnos (7 alumnos de quinto semestre y 8 alumnos de tercer semestre) mencionan que el punto en donde una recta tangente toca al círculo se llama *"punto de tangencia"*. De los 23 alumnos, únicamente 5 estudiantes, 2 de quinto semestre y 3 de tercer semestre, mencionaron la relación geométrica existente entre una recta tangente al círculo y el radio que se traza al punto de tangencia. De los tres estudiantes de tercer semestre, dos de ellos al igual que los dos estudiantes de quinto semestre, mencionan que una tangente al círculo y el radio que se traza al punto de tangencia son *"perpendiculares"*. El otro alumno de tercer semestre dijo *"recuerdo que una recta tangente al círculo forma una T con el radio del círculo"* (el alumno haciendo uso de sus dedos índices, forma una T). En el momento en que el investigador escucha que el participante no menciona la relación de perpendicularidad entre una recta tangente al círculo y el radio que se traza al punto de tangencia, entonces el investigador pregunta *"¿Algo más que recuerdes? ¿Deseas agregar algo más a lo que has dicho?"* Sin embargo, los 18 estudiantes no cambiaron su postura.

Entonces, la concepción de recta tangente al círculo que tuvieron los participantes es la siguiente: Es una recta que toca a un círculo en un solo punto que se llama punto de tangencia.

6.2 Sobre la actividad 2

Actividad 2. Observa lo que muestra la pantalla y realiza lo que se te pide

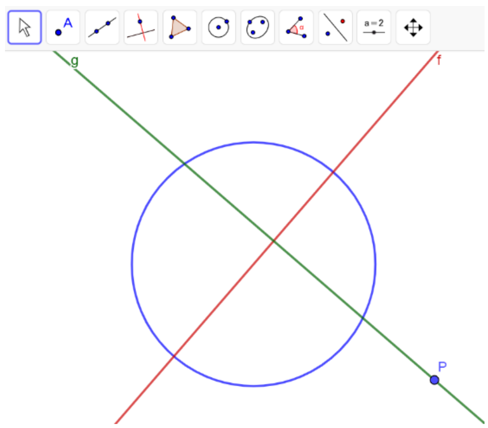


Figura 21 *Actividad 2*

Esta actividad resultó ser sencilla de realizar para los 23 participantes. Dada lo construcción que se les presentó ellos pudieron desplazar a la recta *g*, haciendo uso del punto *P*, hasta que quedara tangente a la circunferencia. Todos los participantes dijeron encontrar dos tangentes a la circunferencia dada una "*superior"* y otra *"inferior"*; la forma en la que decidieron que ahí tenían que posicionar a *P* para que la recta *g* se volviera tangente a la circunferencia fue la misma en 22 de los 23 estudiantes; los alumnos procuraron colocar al punto *P* "al tanteo", de manera que la recta *g* solo toque una vez a la circunferencia.

Un estudiante de quinto semestre dijo que para saber en dónde colocar el punto *P* podía hacer algo que no sabía si servía, pero él creía que sí, entonces el sugirió identificar los puntos de intersección de la recta *g* con la circunferencia. Véase la Figura 22.

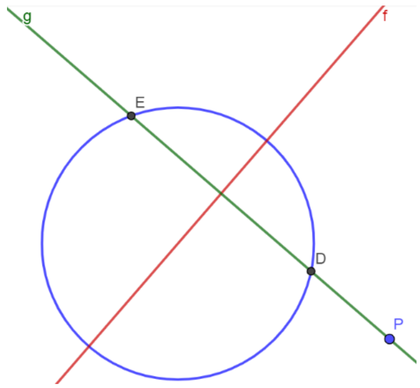


Figura 22 *Intersecciones E y D de la recta g con la circunferencia, hechos por AQ1*

- **Investigador.** *"¿Qué es lo que estás pensando?"*
- **AQ1.** "*Los puntos que acabo de ubicar en la circunferencia, D y E, también se mueven cuando se mueve P, pero los puntos D y E se mueven sobre la circunferencia y mientras más desplazo a P hacia donde yo creo que la recta g se convertirá en recta tangente a la circunferencia; los puntos D y E se van acercando más entre ellos, ¿sí me explico?"*
- **Investigador.** *"Creo entender lo que dices"*
- **AQ1.** *"Sí, mira. Mientras la recta g está más lejos de ser tangente, los puntos D y E están más lejos entre ellos, pero cuando la recta g se va acercando a lo que sería la tangente, entonces los puntos D y E se acercan mucho entre ellos."* Véase la Figura 23.

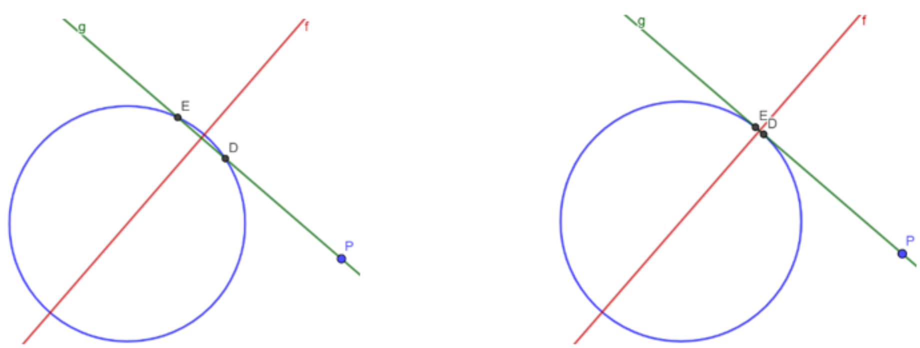


Figura 23 *Movimientos de la recta g hechos por AQ1*

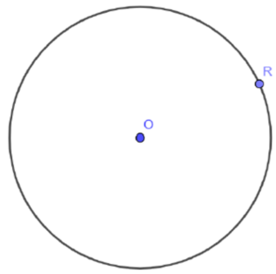
- **Investigador.** *"¡Oh, ya veo!"*
- **AQ1.** *"Entonces yo digo que para hacer que la recta g sea tangente a la circunferencia debo mover a P hasta que los puntos D y E coincidan, y entonces ya no serán dos puntos sino uno solo y creo que ese será el punto de tangencia, ¿no?"*
- **Investigador.** *"Muy interesante lo que muestras, ¿algo más que quieras agregar?"*
- **AQ1.** *"No, nada. Bueno que para encontrar otra tangente sería hacer hacia abajo exactamente lo mismo. Hacer que coincidan D y E, y ahí en donde coincidan dejas de mover a P y ya la recta g será tangente; es lo mismo."*

El caso de este estudiante nos llama la atención por la forma en que abordó la actividad. Vemos que el trata de garantizar que en efecto la posición del punto *P* hace que la recta *g* se convierta en recta tangente a la circunferencia. La noción que AQ1 utiliza para encontrar, aunque no lo dice explícito en ningún momento, es el de recta secante. Él identifica las intersecciones de la recta *g* con la circunferencia y de ahí mueve a la recta *g* de manera que esos dos puntos de intersección se hagan uno solo.

En esta actividad observamos que los alumnos se concentraron en colocar a *P* me manera tal que la recta *g* únicamente toque a la circunferencia en un solo punto; de hecho, algunos de ellos utilizaron la herramienta *aproximar* que proporciona el entorno GeoGebra para ver si lo que ellos proponían como recta tangente a la circunferencia en verdad lo era. Si después de que ellos hicieran varios acercamientos ellos miraban que la recta *g* aún no era tangente a la circunferencia entonces continuaban moviendo el punto *P* hasta que la recta *g* lo fuera. Un comentario de un estudiante de tercer semestre fue: *"¿cuántos acercamientos debo hacer para estar seguros de que ahí sí ya g es tangente a la circunferencia?" "lo que pasa que según yo digo que ahí ya es tangente y le hago* *otros zooms y veo que aún no lo es".* La preocupación de los participantes ya sea utilizando acercamientos a la figura o no, es que la recta *g* toque una vez a la circunferencia; sólo eso.

6.3 Sobre la actividad 3

Actividad 3. Traza una circunferencia como se muestra en la siguiente figura. Dibuja la recta tangente a la circunferencia en el punto R. El punto O es el centro de la circunferencia.



En esta actividad los participantes se mostraron mucho más seguros de sus respuestas e incluso por la forma en la que manipularon sus instrumentos de trabajo (regla o escuadra) fue claro que entendían con exactitud lo que se les solicitó. De los 23 participantes, 22 de ellos colocaron la regla de manera que tocara a la circunferencia en el punto *R* y verificaban que no tocara en otro punto a la circunferencia y una vez que estaban convencidos de esto entonces trazaban la recta tangente a la circunferencia en el punto *R*. Ninguno de estos 22 estudiantes se esforzó en garantizar que la recta que estaban trazando como recta tangente cumplía que fuera perpendicular con el radio *OR.* La Figura 24 muestra la forma en la que dos participantes, *AT1* y *AQ2* respectivamente, responden a esta actividad. Dada la similitud de las soluciones de los participantes únicamente presentamos las respuestas de estos dos alumnos para mostrar lo que en las líneas anteriores se expresa con palabras.

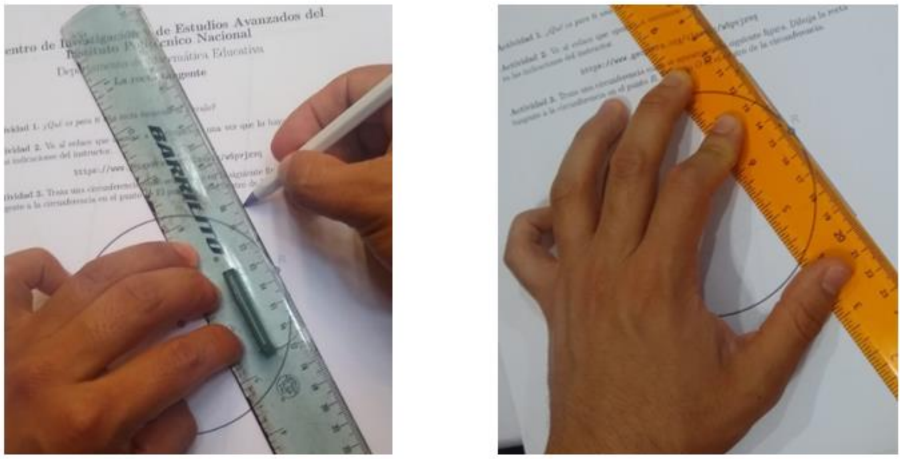


__Figura 24__ Respuestas de los participantes AT1 y AQ2

Nuevamente, al igual que en la actividad anterior, el estudiante al que se ha llamado *AQ1* fue el único estudiante cuya manera de responder a la actividad difiere de sus compañeros. *AQ1* utilizó su regla y escuadra para poder trazar la recta tangente a la circunferencia en el punto *R*. Fue el único participante que antes de trazar la recta tangente a la circunferencia en el punto *R*, marcó el radio *OR*, una vez que tenía el radio procedió a trazar la recta tangente. El estudiante *AQ1* se esforzó por garantizar la perpendicularidad entre el radio *OR* y la recta tangente a la circuenferencia en el punto *R*. Véase la Figura 25.

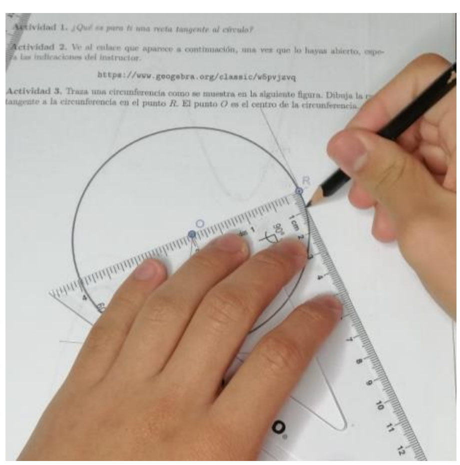


__Figura 25__ Recta tangente trazada por AQ1

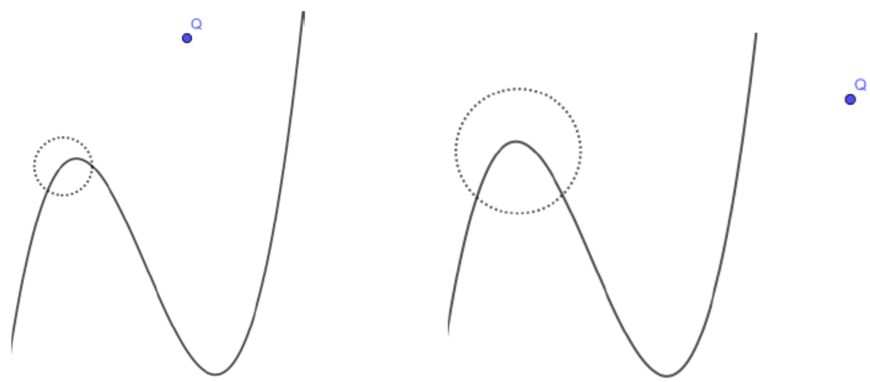
La actividad revela que los partipantes, al trazar una recta tangente a una circunferencia, únicamente se enfocarán en garantizar que la recta que se propone como recta tangente a una circunferencia en un punto dado, sólo toque a la circunferencia en ese punto. La noción de perpendicularidad no limitó a los partipantes para trazar la recta tangente. Más aún, 3 alumnos de tercer semestre y 2 alumnos de quinto semestre conluyeron la actividad diciendo que no importaba en donde se colocara el punto *R*, siempre y cuando estuviera sobre la circunferencia, siempre se podía trazar ahí una recta tangente. A continuación se muestra la conversación con uno de los tres estudiantes de tercer semestre, *AT2*, las otras conversación fluyeron en el mismo sentido por eso solo presentamos una sola.

- **AT2.** *"¿El punto R se puede poner en otro lado de la circunferencia, o por qué lo puso ahí?"*
- **Investigador.** *"Lo puse ahí porque se me ocurrió, ninguna razón en particular; pero ¿por qué te gustaría moverlo?"*
- **AT2.** *"Es que, si lo puedo mover, ahí en donde lo coloque puedo trazar otra recta tangente a la circunferencia".*
- **Investigador.** *"Claro que puedes moverlo".*
- **AT2.** *"Aunque no sé cómo hacerlo, yo digo que se pueden trazar muchas rectas tangentes a la circunferencia".*
- **Investigador.** *"¿Por qué dices eso?"*
- **AT2.** *"Porque hay muchos puntos sobre la circunferencia, entonces hay muchos lugares para colocar a R, o ¿estoy mal?"*
- **Investigador.** *"Me parece muy interesante tu observación".*

La observación hecha por estos 5 estudiantes de que se pueden trazar muchas rectas tangentes a una circunferencia nos hace pensar que fue posible porque ellos solo tenían en mente que una tangente a una circunferencia toque en un solo punto y nadamás; estos cinco estudiantes conservaron su postura respecto a la perdendicularidad, misma que tuvieron cuando trazaron la recta tangente a la circunferencia en el punto R. No se enfocan en ver que la recta tangente y el radio trazado al punto de tangencia sean perpendiculares. Cabe mencionar que dentro de estos 5 estudiantes no estuvo el participante *AQ1*.

6.4 Sobre la actividad 4

Actividad 4. Dibuja dos figuras como las que aparecen a continuación. Utiliza tu regla para trazar la recta tangente a la curva en la zona señalada por el círculo punteado, desde el punto Q.



Para la primera curva ninguno de los 23 estudiantes tuvo conflicto alguno. Los 23 participantes tomaron su regla, colocaron su regla de tal manera que pasara por el punto Q y al mismo tiempo que la regla tocara una sola vez a la curva en la zona que se les indicó; una vez que ellos se convencían de que se cumplían estas dos condiciones entonces realizaban el trazo. De hecho, mientras el participante acomodaba la regla para poder cumplir con la actividad el investigador preguntó *"¿Qué haces?"* y cada participante, de manera individual, respondió *"Intento que la regla solo toque una vez a la curva y que también pase por el punto Q".*

La Figura 26 muestra lo que los 23 estudiantes realizaron para trazar la recta tangente a la primera curva de la actividad 4.

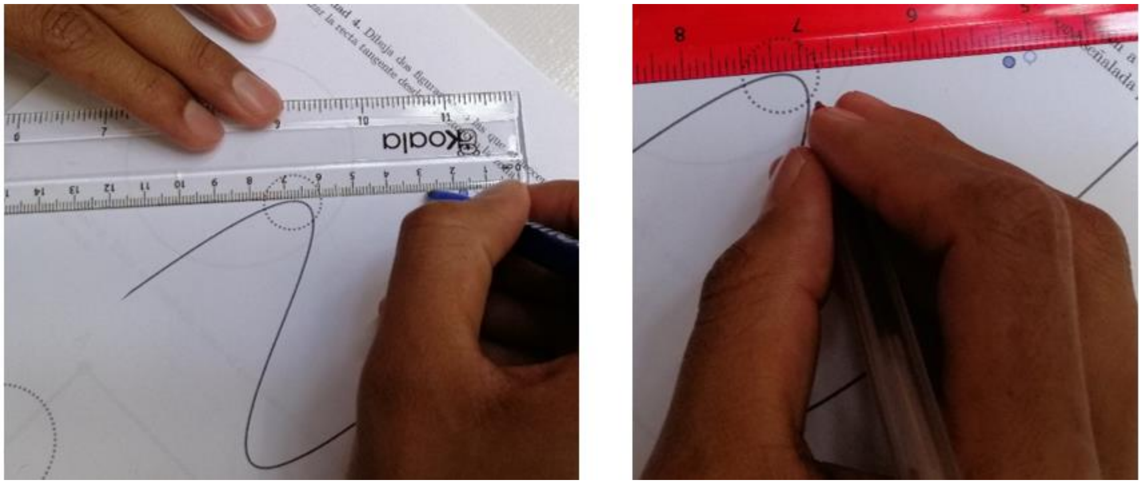


Figura 26 *Recta tangente a la curva trazadas AT4 y AQ4*

Las opiniones se vieron divididas para el caso de la segunda curva. De los 23 participantes, 15 de ellos (9 alumnos de tercer semestre y 6 alumnos de quinto semestre) no tuvieron ningún problema en trazar la recta tangente a la curva en la zona señalada y que además pasara por el punto *Q*. Una vez que ellos habían hecho el trazo les hicimos algunas preguntas:

- **Investigador.** *"La recta que acabas de trazar, ¿si es una recta tangente a la curva?"*
- **AT3.** *"Sí, porque solo está tocando una vez a la curva en la zona señalada".*
- **Investigador.** *"La recta cortó a la curva para poder llegar al punto Q, ¿crees que eso hace que la recta deje de ser tangente a la curva?"*
- **AT3.** *"Yo digo que no. La actividad dice que la recta tiene que ser tangente a la curva en la zona señalada con el círculo punteado y por eso yo me fijo que ahí sea tangente, lo que pasa después yo digo que ya no importa, o ¿sí importa?*

Las Figura 27 muestra de lo que los 15 participantes hicieron para trazar la recta tangente a la segunda curva.

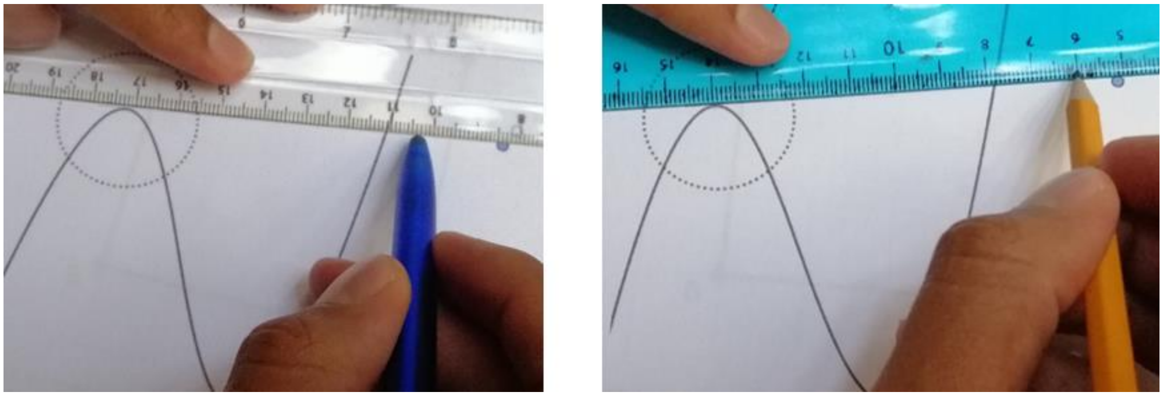


Figura 27 *Recta tangente a la curva trazada por AT4 y AQ5*

Estos 15 participantes trazaron la recta tangente a la curva de la misma manera en la que lo hicieron para la primera curva . Los 15 alumnos se enfocaron en que la regla tocara una sola vez a la curva en la zona señala por el círculo punteado y que también pasara por el punto *Q*.

Los 8 participantes restantes (2 alumnos de tercer semestre y 6 alumnos de quinto semestre) se vieron conflictuados al intentar trazar la recta tangente a la segunda curva, las respuestas que dieron los alumnos son de especial interés al tratar de entender sus nociones de recta tangente a una curva.

De los 8 alumnos, 3 de ellos (1 estudiante de tercer semestre y 2 estudiantes de quinto semestre) dijeron que no era posible trazar la recta tangente para ese caso; el argumento que dieron los tres estudiantes fue muy similar *"si trazo la recta, como quiero que también pase por el punto Q, entonces va a tocar a dos puntos de la curva: en donde quiero que ocurra la tangencia y en donde tiene que cortar a la curva para llegar al punto Q. Eso ya no es una recta tangente".* Vemos que la razón que dan los participates nos lleva que interpretemos que para ellos una recta tangente sólo tiene que tocar una vez a la curva y nadamás, si ellos observan que la recta que proponen como recta tangente toca más de una una vez a la curva entonces no es recta tangente. Estos tres estudiantes dijeron que no era posible trazar la recta tangente que se les estaba solicitando y después de su argumento dieron por finalizada la actividad.

Un estudiante de tercer semestre dijo que ahí en donde estaba el punto Q no podía trazar la recta tangente que se le estaba solicitando pero que si se le permitía mover el punto Q entonces sí podía hacerlo. En la Figura 28 muestramos la propuesta de este estudiante *AT5* para poder trazar la recta tangente a la curva.

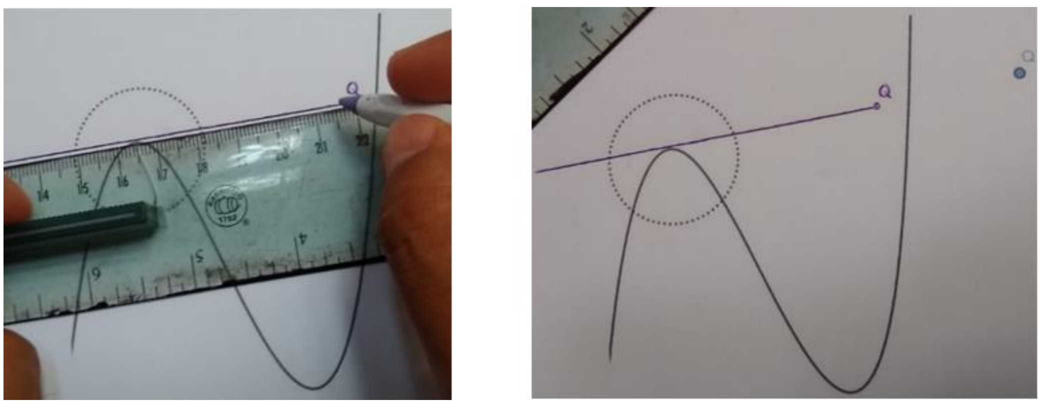


Figura 28 *Propuesta del participante AT5*

Los últimos cuatro estudiantes en esta categoria dijeron que no se podía trazar una recta tangente a la curva en la zona señalada por el círculo punteado y que a la vez pasara por el punto Q , que si la condición era que la recta tangente a la curva pasara por el punto Q, entonces sí se podía trazar una recta tangente a la curva pero tenía que ser a otra parte de la curva. Véase la Figura 29.

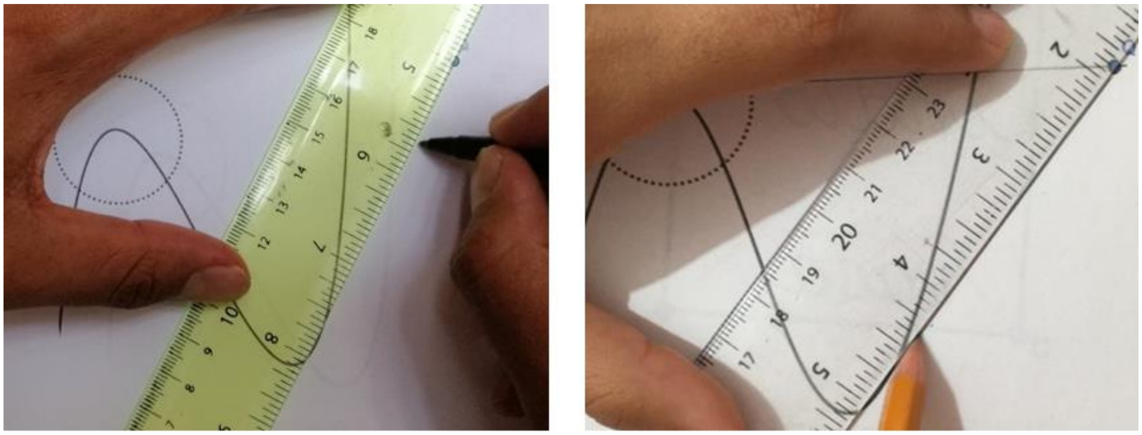


Figura 29 *Tangente a la curva desde el punto Q*

Como mencionamos anteriormente, la información que obtuvimos en esta actividad es muy importante para nuestra investigación. Con esta actividad queda determinada la concepción de recta tangente a una curva que tuvieron los participantes. El 65.2 % de los estudiantes que participaron en la realización de esta actividad acepta una concepción local de recta tangente; esto no lo expresan explícitamente pero al declarar que *"sólo importa que la recta sea tangente en la zona de interés sin importar que sucede después"* podemos interpretar que es la postura que en ellos prevalace.

Las actividades hasta aquí reportadas nos ayudan a que respondamos las dos primeras preguntas de investigación. Las actividades que acontinuación se reportan forman parte de la segunda parte del cuestionario que se aplicó a los participantes, estas actividades nos darán información que creemos ayudará a responder a las dos últimas preguntas de investigación.

Como lo mencionamos en la metodología, para la segunda etapa de recolección de información, solo participaron 15 de los 23 estudiantes que se presentaron en la primera etapa. Los estudiantes que trabajaron en conjunto con el investigador en la segunda etapa fueron 11 estudiantes de tercer semestre y 4 estudiantes de quinto semestre.

6.5 Sobre la actividad II-1

Actividad II-1. Observa lo que aparece en la pantalla y responde lo que se pide.

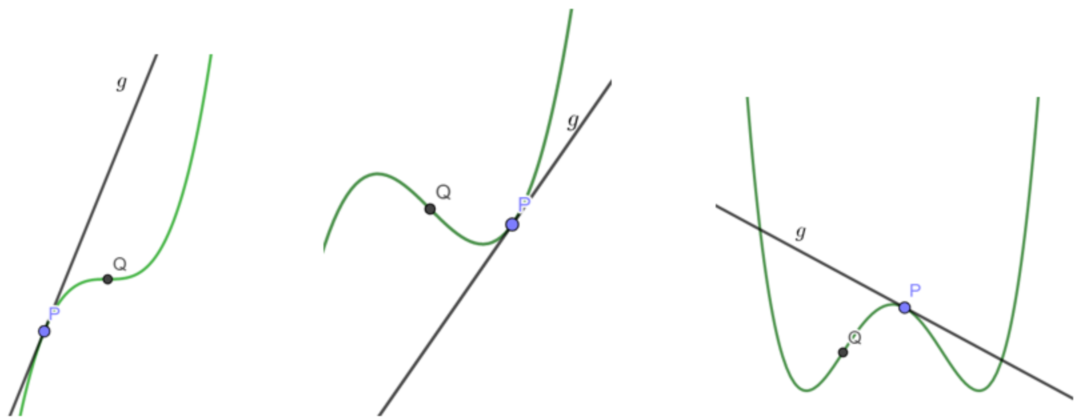


Figura 30 *Actividad II-1*

En esta primera actividad 9 de los 15 estudiantes identificaron que se trataba de una recta que siempre es tangente a cada una de las curvas; a los otros 6 estudiantes se les explicó que la recta que ellos veían era una recta tangente a la curva.

La intención en esta actividad fue averiguar qué decían los participantes respecto de la recta tangente al desplazar el punto de tangencia a través de la curva; específicamente la exploración consistió en preguntar a los participantes su opinión respecto a si ellos seguían considerando que la recta seguía siendo tangente a la curva cuando el punto móvil coincidía con un punto de inflexión de la curva. El punto *P* en cada una de las curvas, es un punto móvil que los participantes pudieron desplazar sobre las curvas; este punto es el que por los mismos participantes fue identificado como punto de tangencia.

De los 15 participantes, 7 de ellos (5 alumnos de tercer semestre y 2 alumnos de quinto semestre) dijeron que la recta siempre era tangente a la curva sin importar el lugar sobre la curva en el que estuviera el punto de tangencia. A cada participante se le invitó a desplazar el punto de tangencia para que vieran el comportamiento de la recta tangente a la curva en cada caso. Una de las preguntas que el investigador hizo, mientras que los participantes desplazaban de un lugar a otro el punto de tangencia sobre la curva, fue *"¿Qué observas?"* La respuesta que se obtuvo en el caso de los 7 participantes fue *"Que la recta siempre es tangente a la curva".* Se le pidió a cada participante que colocaran el punto de tangencia en un punto de inflexión de las curvas y una vez que estaban ahí el investigador preguntó *"¿Ahí qué pasa?" "¿La recta sigue siendo tangente a la curva?"* La respuesta de los 7 alumnos fue *"sí, sí sigue siendo tangente".*

La respuesta que se obtuvo de los 8 participantes restantes (6 alumnos de tercer semestre y 2 alumnos de quinto semestre) podemos separarla en dos categorías. En la primera categoría están ubicados 3 participantes (2 estudiantes de tercer semestre y 1 estudiante de quinto semestre); en este caso los 3 participantes dijeron que no podían decir si la recta seguía siendo tangente o no a la curva cuando el punto de tangencia coincidía con algún punto de inflexión. En la segunda categoría están 5 participantes (4 estudiantes de tercer semestre y 1 estudiante de quinto semestre); en este caso los 5 alumnos dijeron que cuando el punto de tangencia coincidía con algún punto de inflexión entonces la recta que era tangente a la curva ahí ya no lo era.

Las respuestas registradas en esta actividad nos muestran que el 47% de los participantes no tuvieron ningún conflicto para aceptar como recta tangente a la curva en todos los puntos de esta (incluso en los puntos de inflexión) a la recta que ellos identificaron como recta tangente desde el inicio de la actividad. El 53% de los alumnos que participaron en esta actividad sí les conflictúo el momento en el que el punto de tangencia de la recta tangente a la curva coincidía con un punto de inflexión. Los conocimientos básicos que tienen los estudiantes de recta tangente no los limitan para trabajar con la noción de recta tangente a una curva que ya no es el círculo.

6.6 Sobre la actividad II-2

Actividad II-2. Observa lo que aparece en la pantalla y responde lo que se pide.

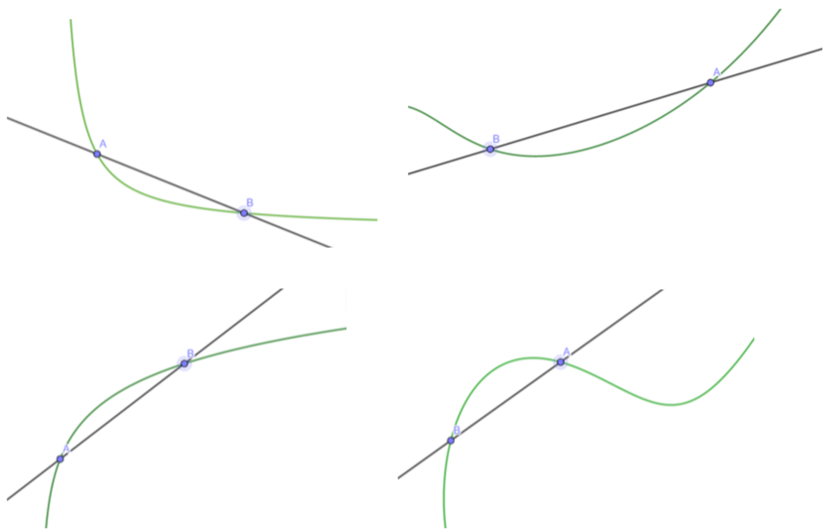


Figura 31 *Actividad II-2*

En esta actividad los participantes identificaron que los puntos *A* y *B* se podian mover sobre cada una de las curvas, respectivamente.

Pese a que los puntos *A* y *B* se podían mover sobre cada una de las curvas se les pidió a los participantes que para las tres primeras curvas dejaran fijo el punto *A* y para la cuarta cuerva dejaran fijo el punto *B*; de hecho la presentación de cada una de las curvas a cada participante fue tal cual como se exhiben en la Figura 31.

La solicitud a cada participante fue la siguiente, *"Mantén fijo el punto A y ahora lo que tienes que hacer es mover el punto B de manera que se acerque mucho al punto A"* esto fue para el caso de las tres primeras curvas, para el caso de la cuarta figura la solicud fue la misma solo que ahí el punto que iba permancer fijo era el punto B y el punto A era el punto que se iba a mover de manera que se acercara mucho al punto B.

En esta actividad todos los participantes dijeron que al acercar un punto a otro, la recta dejaba de ser recta secante y se convertía en recta tangente. De los 15 participantes , 9 de ellos dijeron al ver las figuras que se trataba de una recta secante a la curva; 6 de ellos dijeron *"Es una recta que está cortando en dos puntos a la curva pero no recuerdo como se llama".* A pesar de que estos últimos participantes no recordaron el nombre de recta secante su conclusión fue la misma que los estudiantes que sí pudieron recordar el nombre de la recta.

Esta actividad muestra como los participantes conciben una recta tangente a una curva. Para todos los partipantes fue natural pensar que cuando más se acercaba un punto a otro, el punto A al punto B o el punto B al punto A según fue el caso, entonces como la recta dejaba de cortar en dos puntos a la curva y sólo la iba a cortar en punto a la curva, que era en el caso en el que un punto coincidía con el otro, entonces la recta se convetía en recta tangente.

6.7 Sobre la actividad II-3

Actividad II-3. Observa lo que aparece en la pantalla y responde lo que se pide.

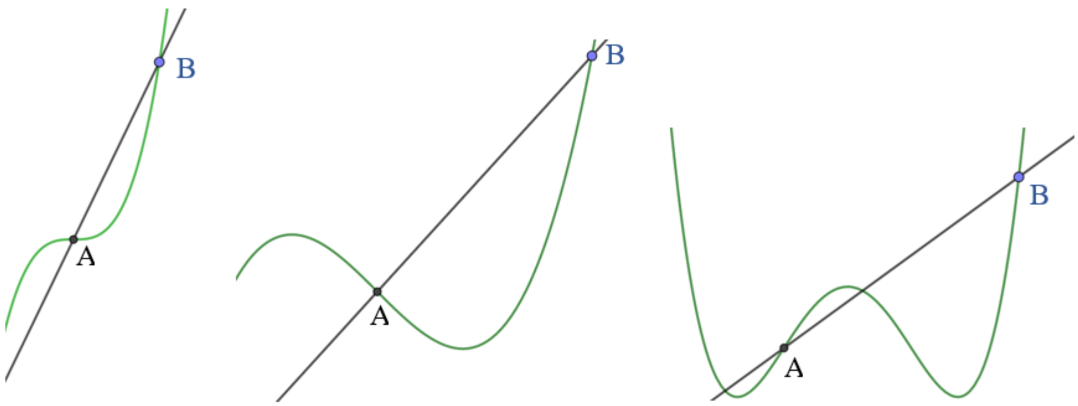


Figura 32 *Actividad II-3*

Al igual que en la actividad anterior, les presentamos a los alumnos las tres curvas que aparecen en la **Figura 32**. Otra vez ellos pudieron identificar que la recta que acompañaba a cada curva era una recta secante. La diferencia entre esta actividad y la anterior radica en que en la actividad 2 los dos puntos se podían mover en la curva y cualquiera de ellos podía convertirse en punto de tangencia. Para esta actividad el punto *A*, que es un punto de inflexión en cada una de las curvas, siempre permanece fijo y será el punto de tangencia en cada curva, el punto *B* es el punto que puede moverse.

Las respuestas que dieron los participantes dijeron que fueron influenciadas por las dos actividades previas. De los 15 alumnos, 9 de ellos (6 estudiantes de tercer semestre y 3 alumnos de quinto semestre) dijeron que la recta secante sí se convertía en recta tangente a la curva cuando el punto *B* estaba muy cerca del punto *A*. Los otros 6 participantes (5 estudiantes de tercer semestre y 1 estudiante de quinto semestre) dijeron que ya no sabían qué decir, se encontraban confundidos. Estos 6 participantes son del grupo de los 8 estudiantes que en la actividad 1 no pudieron decidir si la recta seguía siendo tangente a la curva cuando el punto de tangencia coincidía con un punto de inflexión de la curva. Por un lado, dijeron que tenía que suceder lo mismo que en la actividad 2, es decir la recta que en un principio era recta secante tiene que convertirse en recta tangente cuando el punto *B* coincide con el punto *A*; por otro lado, como el punto donde se quiere que ocurra la tangencia es el punto *A*, el cual está fijo y no se puede mover, ahí les volvía a recordar lo que sucedió en la actividad 1 y ya no sabían si ahí la recta sí es tangente o no a la curva.

Capítulo 7

Conclusiones

7.1 Respuestas a las preguntas de investigación

Una vez que realizamos el análisis de las respuestas de los 23 alumnos que participaron en las actividades del primer cuestionario, así como de los 15 estudiantes que llevaron a cabo las actividades del segundo cuestionario, daremos respuesta a las preguntas de investigación que planteamos al inicio. La información que obtuvimos de las entrevistas resultó crucial para este propósito.

7.1.1 Respuesta a la primera pregunta de investigación

1. ¿Cómo conciben los estudiantes lo que es una recta tangente a un círculo?

Para todos los participantes, una recta tangente al círculo es una recta que toca al círculo en un solo punto. Los alumnos expresaron verbalmente que basta con procurar que una recta toque a la circunferencia en un punto y en ningún otro para que la recta sea tangente. La concepción de recta tangente a un círculo que tienen los participantes es geométrica. Solamente uno de los participantes mencionó que la tangente es una recta perpendicular al radio en el punto de tangencia, así que en general esta propiedad de la tangente no la tienen presente los estudiantes. Los estudiantes pusieron especial atención en el punto de tangencia, indicando que la recta tangente no corta a la circunferencia y que ambos solamente tienen un único punto en común.

7.1.2 Respuesta a la segunda pregunta de investigación

2. ¿Qué conocimientos previos a sus cursos de cálculo diferencial tienen los estudiantes del nivel medio superior sobre lo que es una recta tangente?

El conocimiento que tienen los estudiantes sobre lo que es una recta tangente se reduce, en general, al de recta tangente a una circunferencia. Los participantes conocen la definición de recta tangente a la circunferencia desde la secundaria y comentan que esta definición (aunque no con estas palabras) fue reforzada durante sus estudios de geometría euclidiana en bachillerato.

Ninguno de los estudiantes que participaron en las actividades tenía conocimientos sobre recta tangente a las cónicas, no fue un tema de sus cursos de geometría analítica.

Respecto a los 12 estudiantes de quinto semestre es importante que mencionar que los alumnos ya habían cursado la materia de cálculo diferencial. El conocimiento de recta tangente que mostraron en la realización de sus actividades, así como en las entrevistas, es el de la tangente a una circunferencia en un contexto meramente geométrico. Ninguno de estos 12 estudiantes trajo a colación que la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en ese punto. Por supuesto, en las actividades planteadas no se hizo referencia a la derivada como medio para definir recta tangente a una curva.

7.1.3 Respuesta a la tercera pregunta de investigación

3. ¿Qué conocimientos sobre recta tangente a una curva requiere el estudiante para comprender el concepto de recta tangente establecido con la derivada?

Cuando se les pidió a los estudiantes que trazaran tangentes a una curva, no tuvieron ningún recelo para trazar la recta, ellos mismos comentaban que era suficiente colocar correctamente la regla cuidando que la recta solamente tuviese un punto en común con la curva. La idea intuitiva que tenían sobre la posición de la recta respecto a la curva fue suficiente para aceptar que la recta era tangente. En realidad, el estudiante no requiere ningún conocimiento que no sea el de recta tangente a una circunferencia, que es la que provee la imagen de recta tangente. Cuando al estudiante se le presenta una curva y un punto sobre ella de manera que el aspecto local de la curva alrededor del punto es similar al de una circunferencia, los estudiantes por sí mismos extienden su idea intuitiva de tangente para circunferencias a curvas en general. Por supuesto, la definición de recta tangente para curvas en general que provee la derivada, es aplicable a situaciones mucho más sofisticadas; es suficiente que la función sea diferenciable en el punto en cuestión, pero estas situaciones no son usadas para establecer la definición de derivada y de recta tangente, usualmente se acude a curvas con aspecto simple, podemos decir que localmente tienen un aspecto circular. Los casos sofisticados se presentan una vez que se establece la definición de recta tangente y es entonces cuando se les presentan curvas con puntos de inflexión, curvas con picos, curvas donde la recta tangente tiene más de un punto en común con la curva, incluyendo casos donde la recta tangente corta a la curva en una infinidad de puntos en cualquier vecindad del punto de tangencia, como las que se ilustran en la **Figura 33**.

Aún los estudiantes sin conocimientos de cálculo diferencial, y por lo tanto si conocer la definición de recta tangente que nos provee la derivada cuando se les presentaron rectas secantes variables, tendiendo a la tangente, la mayoría aseveró que las secantes se acercaban y coincidirían con la recta tangente.

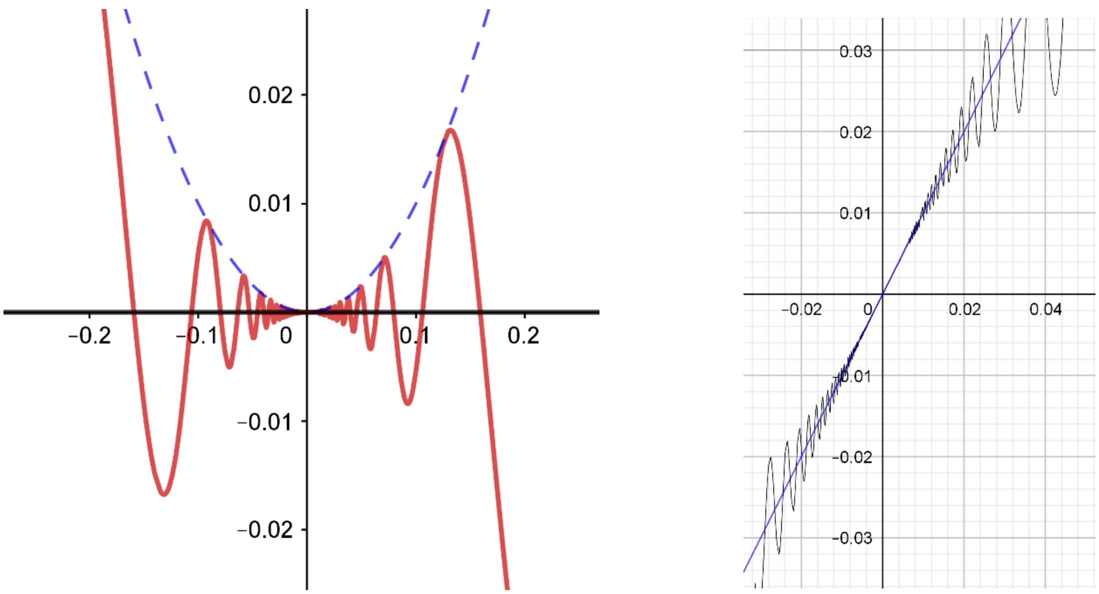


Figura 33 *Tangentes a curvas con una infinidad de puntos en común con la curva*

7.1.4 Respuesta a la cuarta pregunta de investigación

4. ¿Sus conocimientos básicos sobre recta tangente, causan conflicto en la comprensión del concepto general de recta tangente, establecido con la derivada?

De acuerdo con las respuestas de los participantes a las actividades 4, II-1, II-2 y II-3, concluimos que la mayoría de los estudiantes tienen pocas dificultades o conflictos para comprender el concepto de recta tangente que se establece vía la derivada.

En la actividad 4, segunda curva, el 35 % de los participantes tuvieron dificultades para realizar el trazo de la recta tangente, pues al trazarla titubearon en considerarla como recta tangente argumentando que la recta trazada cortaría a la curva en más de un punto; pero tampoco se negaron a trazarla. El 65% restante realizó el trazo; argumentando que lo que importaba es que la recta fuera tangente a la curva en la zona señalada.

Cuando les presentamos de manera dinámica la curva con rectas secantes y ellos desplazaron el punto de corte de la recta secante hacia el punto fijo, ellos dijeron con sus propias palabras que la recta secante parecía que se convertía en recta tangente.

El análisis que realizamos para la actividad II-3 muestra que el 60% de los estudiantes no tiene dificultades para considerar una recta tangente a una curva en un punto de inflexión de la curva. Los términos *puntos de tangencia y punto de inflexión* no se utilizaron ni en la redacción del cuestionario ni durante el desarrollo de las entrevistas, esto para no utilizar términos que pudieran confundir a los participantes.

7.2 Conclusiones

La información que obtuvimos de las respuestas de los estudiantes a las actividades de los cuestionarios, así como de las entrevistas, nos revelan que las concepciones de recta tangente a una curva que tienen los estudiantes son las concepciones intuitivas que tienen sobre la recta a una circunferencia, pero que esto es suficiente para aceptar las consideraciones geométricas que se hacen para definir recta tangente a una curva, mediante la derivada. Los 23 participantes tienen una idea intuitiva geométrica, aceptable, de tangencia entre una circunferencia y una recta.

La noción de tangencia a una curva que han interiorizado los estudiantes es la que conocen desde la secundaria y que se reforzó en el curso de geometría euclidiana en el bachillerato. Este conocimiento de recta tangente a una circunferencia no obstaculiza en los estudiantes la comprensión de la noción de recta tangente generalizado a otro tipo de curvas; El conocimiento de recta tangente, previo al curso de cálculo diferencial, es suficiente para que los alumnos comprenden el concepto de recta tangente a una curva que se presenta vía la derivada.

Queremos resaltar que, en varias de las respuestas de los estudiantes al cuestionario, así como en los comentarios que hicieron durante las entrevistas, no recordaban los términos matemáticos para referirse a los objetos matemáticos que se estaban manejando (recta secante, recta tangente, punto de tangencia, etc.) o a alguna propiedad entre los objetos (perpendicularidad), sin embargo, ellos buscaron la manera de comunicar sus ideas (dibujos, señas, ejemplos, etc.). El estudiante puede tener conocimiento e ideas correctas, aunque a veces ellos no saben cómo comunicarlo o carecen del lenguaje común o matemático para expresarse. Algunas veces esto pudiera interpretarse como el estudiante carece de un determinado conocimiento, aunque en realidad es un problema de comunicación por la carencia de un lenguaje que también debe aprender.

Nuestra investigación nos lleva a reflexionar en un aspecto que consideramos importante, ¿cómo se está enseñando el concepto de recta tangente a los estudiantes de bachillerato? La ausencia de conocimientos de recta tangente a las cónicas y a curvas en general, de los estudiantes que participaron en nuestra investigación, nos hace pensar que falta mayor compromiso de los docentes para explicar y reflexionar sobre el concepto de recta tangente a una curva.

Se debe reconsiderar cómo se está enseñando el concepto de recta tangente a una curva. Los estudiantes tienen los elementos para comprender los conceptos que se les presentan.

Para finalizar diremos que los alumnos quedaron satisfechos con su participación en cada una de las actividades y manifestaron muchas inquietudes por aprender más respecto del tema. Aunque el propósito de las actividades no era enseñar el concepto de recta tangente a una curva, sino averiguar las concepciones del concepto de recta tangente a una curva en los estudiantes, siempre hubo muchas dudas por parte de ellos y ansiaban que se les respondiesen; muchas de esas dudas les fueron aclaradas por el investigador al finalizar las actividades con la finalidad de no intervenir en las respuestas de las actividades posteriores.

Capítulo 8

Proyecto para una investigación futura

8.1 Planteamiento del problema y preguntas de investigación.

De la investigación ya realizada y cuyo reporte expusimos en los capítulos anteriores, mostramos que los conocimientos y concepciones sobre tangente a una circunferencia, que tenían los estudiantes que participaron en la investigación, son suficientes para que ellos inicien sus estudios, desde un punto de vista geométrico, sobre la derivada; además, en general, los participantes no tuvieron ningún conflicto al enfrentarse con situaciones de rectas tangentes a curvas en general, cuando estas rectas tienen puntos comunes con las curvas, otros que no son los puntos de tangencia. Así que sus concepciones sobre rectas tangentes a círculos no conflictúan con el nuevo conocimiento sobre rectas tangentes a curvas, que provee el cálculo diferencial.

El concepto de recta tangente a una curva que se enseña mediante la derivada es fundamental en los estudios futuros de los alumnos en la universidad. La noción de tangencia de una recta y una curva o entre un par de curvas aparece en diferentes contextos, tanto en asignaturas de matemáticas como de física. Por ejemplo, la tangencia es un concepto central en el movimiento de un cuerpo a lo largo de una trayectoria en el plano. En este caso la recta tangente está presente en curvas definidas mediante ecuaciones paramétricas. La velocidad de un cuerpo a lo largo de una trayectoria (curva) en el plano es un vector tangente a la curva (Young, H.D. Y Roger, A.F. ,2009). Los vectores son segmentos dirigidos con extremo inicial y extremo final, pero la concepción sobre la tangencia es la misma que para la recta tangente a una curva. Otro contexto importante en donde la tangencia es un concepto fundamental es el de las ecuaciones diferenciales. Aquí el concepto de tangencia de una recta a una curva aparece en el tema del campo de direcciones asociado a las ecuaciones diferenciales de primer orden normales, las cuales son de la forma

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

Este contexto está vinculado estrechamente con la recta tangente a curvas de funciones implícitas, es decir funciones $y(x)$ que están definidas mediante ecuaciones de la forma $F(x.y) = c$. Este es otro contexto que por sí mismo merece especial atención cuando se estudia la derivada en cálculo diferencial. Es usual que en los libros de texto los autores expongan el tema de la derivada de funciones implícitas con el propósito de que los alumnos calculen de manera mecánica la derivada de este tipo de funciones, pero no hay una reflexión sobre el significado de los resultados obtenidos (Purcell, E.J., Varberg, D. Y Rigdon, S.E, 2007; Stewart, J. ,2008; Granville, W.A. ,2009). Otro contexto es el de círculo de curvatura de una curva en un punto de ella; este círculo es un elemento clave para comprender el significado de curvatura de una curva en un punto. Aquí nuevamente entra en juego la noción de tangencia de manera esencial.

Derivado de la problemática que se presenta en el estudio de los diversos temas en donde la tangencia juega un papel relevante, planteamos las siguientes preguntas de investigación que pretenderíamos contestar, como parte del proyecto que ahora exponemos.

¿Son suficientes los conocimientos que el estudiante adquiere sobre recta tangente, que le provee el cálculo diferencial, para comprender los conceptos planteados en los contextos antes presentados?

¿Qué dificultades sobre la noción de tangencia tiene el estudiante para comprender los conceptos en los que está involucrada la tangencia, en esos contextos?

¿Qué elementos adicionales sobre el concepto de tangencia debe proporcionársele al estudiante para que lleve a cabo con éxito sus estudios de los temas en esos contextos?

Para responder estas preguntas nos planteamos los siguientes objetivos

1. Determinar o identificar las dificultades que tienen los estudiantes que ya han acreditado un curso de cálculo diferencial, para la comprensión de los diferentes elementos conceptuales que están presentes en los diversos contextos antes expuestos.
2. Diseñar y elaborar actividades para realizar mediante applets, con el propósito de proveer a los estudiantes elementos geométricos y conceptuales, que les permita llevar a cabo con éxito estudios de los temas en los diferentes contextos, antes expuestos.

La metodología que utilizaremos en este proyecto de investigación constará de cuestionarios y entrevistas no estructuradas que aplicaremos a estudiantes de ingeniería o de escuelas de ciencias fisicomatemáticas, que recién hayan acreditado un curso universitario de cálculo diferencial. Con base en las dificultades identificadas, diseñaremos actividades las cuales los estudiantes llevarán a cabo en línea, usando applets elaborados básicamente con GeoGebra. Estos los implementaremos en plataformas que nos permitan evaluar los avances de los estudiantes. Con estas actividades pretendemos fortalecer las concepciones de los participantes sobre las nociones de tangencia en diferentes contextos, que les permita estar en mejores condiciones para estudiar los temas antes mencionados.

En las siguientes secciones describimos con algún detalle estos contextos.

8.2 Derivada de funciones paramétricas como vector velocidad tangente a una curva.

En física se estudian trayectorias de objetos en el plano que se mueven sobre curvas, un ejemplo de ello es el caso del tiro parabólico. El movimiento del objeto sobre una curva está descrito por ecuaciones de movimiento. Estas ecuaciones permiten calcular la velocidad del objeto, la cual es una cantidad vectorial (Serway, R.A. Y Jewett, J.W. ,2008; Young, H.D. Y Roger, A.F. ,2009; Stewart, J. ,2008). La velocidad es un vector, el cual es un segmento dirigido, tangente a la curva. En este caso las ecuaciones paramétricas de curva juegan un papel esencial y sus derivadas nos proporcionan su vector velocidad.

De manera similar a la interpretación geométrica de la derivada de una función de una variable que se estudia en cálculo diferencial básico, en el caso de las ecuaciones paramétricas, se tiene el recurso geométrico para interpretar la derivada como vector tangente. Si $P(t)=\left(x(t),y(t)\right)$ la derivada $P'(t)=\left(x'(t),y'(t)\right)$ se obtiene como límite del cociente

$$\begin{aligned}\frac{P(t+h)-P(t)}{h}&=\frac{\left(x(t+h),y(t+h)\right)-\left(x(t),y(t)\right)}{h}\\&=\frac{\left(x(t+h)-x(t),y(t+h)-y(t)\right)}{h}\end{aligned} \tag{1}$$

cuando $h \to 0$. Este límite es la velocidad en el instante t, el cual se interpreta como el vector velocidad. Su tangencia a la curva requiere de las mismas ideas que se ponen en juego cuando se define la recta tangente a una curva mediante la derivada.

Este contexto es nuevo para los estudiantes que solamente tienen estudios sobre la derivada de un curso básico de cálculo diferencial; sin embargo, en los libros de texto de física pareciera que los autores suponen que las concepciones de los estudiantes sobre recta tangente son suficientes para la interpretación geométrica de vector velocidad como vector tangente (Serway, R.A. Y Jewett, J.W. ,2008; Young, H.D. Y Roger, A.F. ,2009; Montiel-Pérez, H. ,2014). Aquí nos planteamos la pregunta ¿Qué fortalecimiento sobre sus concepciones de recta tangente, requiere el estudiante, además del que provee la derivada, para conceptualizar la velocidad como vector tangente a una curva?

La transición del concepto de recta tangente a este concepto de vector velocidad, que es tangente a una curva, requiere que el estudiante transfiera su noción de recta tangente a una curva a estas nuevas nociones de tangencia.

Nuestra investigación se enfocará en averiguar si la comprensión de los estudiantes de la derivada y recta tangente les permite comprender que el vector velocidad es tangente a la curva. Como en el caso de la derivada y recta tangente, para la interpretación geométrica del vector velocidad como un segmento tangente a una curva, resulta primordial la interpretación geométrica de los elementos involucrados en la definición misma. Sobre estos elementos se diseñarán actividades con applets interactivos.

8.2.1 Movimiento Curvilíneo. Velocidad

Si t denota el tiempo, y las funciones $f(t)$ y $\varphi(t)$ son continuas, al variar t de una manera continua en el punto $P(t)=\left(f(t),\varphi(t)\right)$ describirá una curva o trayectoria. Si un movimiento sobre una curva está descrito por ecuaciones de la forma

$$x = f(t), y = \varphi(t)$$

La velocidad v del móvil está determinado por la derivada de la ecuación paramétrica $P'(t)=\left(f'(t),\varphi'(t)\right)$. Esta derivada corresponde a un vector que es tangente a la curva.

La componente horizontal v_x de la velocidad es igual a la velocidad a lo largo del eje x, de la proyección M de P, (véase Figura 34), así que la rapidez de variación de x con respecto al tiempo está dada por

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

De manera análoga tenemos

$v_y = \frac{dy}{dt}$

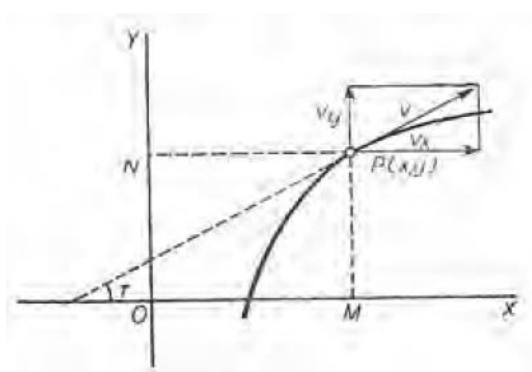


Figura 34 *Vector velocidad en el punto P. Granville, W.A. ,2009*

La magnitud del vector velocidad está dada por

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2$$

Y su dirección queda como

$$\tan\tau = \frac{v_x}{v_y} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Vemos entonces que $\tan\tau$ es igual a la pendiente de la trayectoria en P. Luego la dirección del vector velocidad es el misma que la tangente en P. Otra manera de explicar la tangencia del vector velocidad es mediante la representación vectorial del cociente de diferencias (1). Este es un elemento que entra en juego en la interpretación geométrica de la velocidad como vector tangente a la curva.

8.3 Derivada de funciones implícitas

Una función implícita está definida mediante una relación del tipo $F(x, y) = 0$. Por ejemplo, si $x^2 + y^2 = 1$ entonces una función y implícita definida por esta ecuación podemos determinarla despejando y de esa ecuación. Por ejemplo, las funciones $y = \sqrt{1-x^2}$ y $y = -\sqrt{1-x^2}$ son dos funciones implícitas definidas mediante la ecuación $x^2 + y^2 = 1$. Quizá los estudiantes no logren entender que en realidad hay una infinidad de funciones implícitas definidas por esta ecuación y que podemos calcular la derivada de cualquiera de ellas y por lo tanto determinar la recta tangente en un punto de la gráfica, aún sin conocer de manera explícita la función. Esto es de suma importancia en el estudio de las ecuaciones diferenciales de primer orden normales

Si tomamos la derivada implícita para el caso de la ecuación $x^2 + y^2 - 1$=0, obtenemos

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

De aquí se sigue que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

A los alumnos se les prepara para realizar este tipo de operaciones mediante diversos ejemplos; sin embargo, en los libros de texto no se explica el significado de la derivada que se obtiene de manera implícita (Purcell, E.J., Varberg, D. Y Rigdon, S.E. ,2007; Granville, W.A. 2009). La enseñanza que reciben en este tema los estudiantes es operacional (instrumental), la cual se reduce a la aplicación de reglas, esta enseñanza está desprovista de un análisis del significado del resultado, el cual ha de remitirse al concepto original de derivada y a su interpretación geométrica.

En el cálculo de la derivada de la función implícita del ejemplo $x^2 + y^2 = 1$, del cual obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

es importante explicar el significado de esta expresión.

En la derivación implícita se comienza con una ecuación del tipo

$$F(x, y) = c \tag{2}$$

La derivación implícita nos conduce a una expresión de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{3}$$

Sabemos que la derivada de una función tiene como significado la pendiente de una recta tangente, este significado podemos trasladarlo al caso de la derivación implícita. La ecuación (3) expresa el valor de la pendiente de la recta a la gráfica de la función $y(x)$ en el punto (x, y) de la curva (gráfica de $y(x)$). Ciertamente desconocemos la función $y(x)$, lo único que sabemos de ella es que satisface la relación (2), pero mediante la expresión (3) conocemos la pendiente de la recta tangente a su gráfica en el punto (x, y).

La expresión (3) nos proporciona información sobre las pendientes de las curvas de las funciones definidas implícitamente por la relación (2), si trazamos "pequeños trozos" de rectas en algunos puntos (x, y) con pendiente $f(x, y)$ y esto lo hacemos para un número suficientemente grande, podemos visualizar los aspectos de las gráficas de las funciones definidas implícitamente por (2). En nuestra investigación pretendemos averiguar si los estudiantes comprenden el significado de expresiones de la forma (3). Nos planteamos entonces la siguiente pregunta: ¿Qué dificultades tienen los estudiantes para darle una interpretación geométrica a la fórmula (3) que se obtiene con la derivación implícita?

8.4 Campos de direcciones

Una expresión de la forma (3) que proviene de la derivación implícita de (2), plantea un problema inverso. Si conocemos la expresión (3) pero desconocemos la función $F(x, y)$ de donde provino, entonces nos plantemos el problema de descubrir esta función. Este es asunto del área de ecuaciones diferenciales (Elsgolts, L. ,1977). De alguna manera, descubrir esta ecuación es un proceso inverso al de la derivación implícita. Para entender el problema propuesto desde un punto de vista gráfico, es esencial acudir a la interpretación geométrica de lo que significa $f(x, y)$ en la ecuación (3). En esta relación, la función $f(x, y)$ nos proporciona un capo de direcciones para cada punto. Un campo de direcciones es una función que asocia a cada punto del plano la pendiente de una recta, la cual será tangente a una curva, definida implícitamente por una ecuación de la forma (2).

En estos términos, nuestra investigación tiene como propósito averiguar sobre las dificultades que tienen los estudiantes para interpretar (3) en el contexto de campo de direcciones. Aquí nuevamente es fundamental la noción de tangencia que proporciona la derivada.

Diversos softwares de matemáticas (por ejemplo, GeoGebra) tienen comandos para ilustrar gráficamente, mediante pequeños segmentos, campos de direcciones. Pero estas ilustraciones no son bien comprendidas si no se comprende el significado de una ecuación de la forma (3). Por ejemplo, para el campo de direcciones asociado a la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = x + y$$

obtenemos la gráfica de la Figura 35.

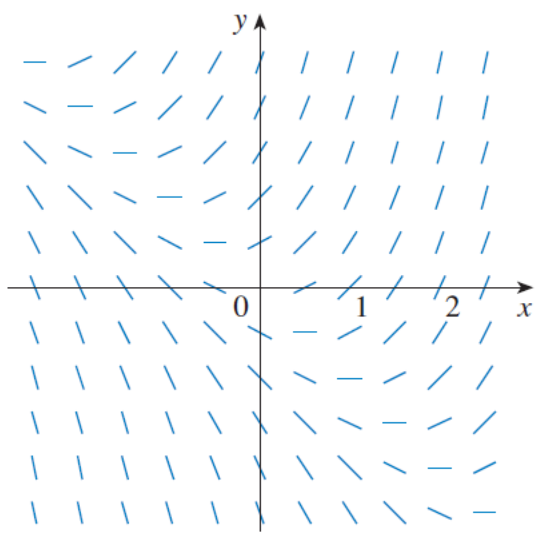


Figura 35 *Campo de direcciones para* $\frac{dy}{dx} = x + y$ *. Stewart, J. ,2008*

8.5 Círculo de curvatura o círculo osculador

El círculo de curvatura en un punto de una curva sirve para comprender mejor el aspecto de esa curva. Si consideramos varios círculos todos ellos tangentes a la curva en un mismo punto dado, pensando que los círculos tienen diferente radio (véase Figura 36), hay uno que se aproxima mejor a la curva alrededor del punto dado, este círculo especial recibe el nombre de círculo de curvatura o círculo osculador de la curva en el punto en cuestión (Gray, A. ,1997).

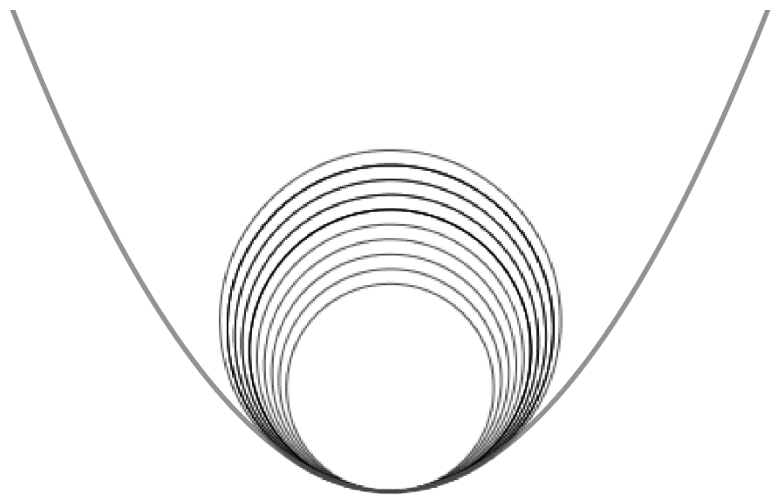


Figura 36 *Círculos tangentes a una curva en un mismo punto*

Usualmente, en los libros de texto, los autores introducen este concepto mediante la razón de la variación de la dirección de la curva (dirección de la pendiente de la recta tangente), para lo cual se requiere la aplicación de la derivada del ángulo de inclinación que varía al variar las rectas tangentes (Granville, W.A. ,2009); sin embargo es posible tener acercamientos al círculo de curvatura en contextos puramente geométricos, en todos ellos sin perder la propiedad del círculo osculador como el mejor de los círculos tangentes a la curva en un punto, que se aproximan a ella en las cercanías del punto.

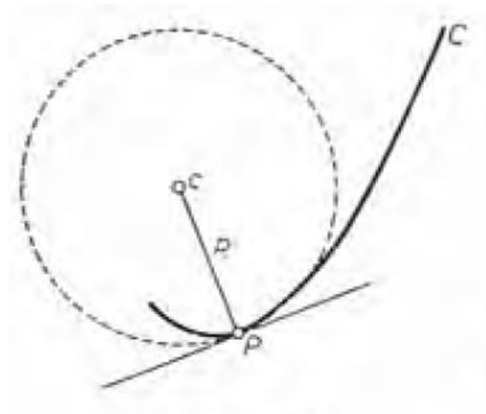


Figura 37 *Círculo de curvatura a C en P. Granville, W.A. ,2009*

Así como la tangente en P nos da la dirección de la curva en P, así el círculo de curvatura en P nos ayuda a entender un concepto geométrico de la curvatura en P, puesto que la variación de la dirección de la curva y del círculo son idénticos en P. Véase la Figura 37

Un acercamiento geométrico al concepto de círculo osculador, se obtiene considerando tres puntos de una curva P_0, P_1 y P_2, y haciendo que P_1 y P_2 se acerquen a lo largo de la curva hacia el punto P_0 como posición límite. De esta manera determinamos un círculo (círculo en la posición límite). Este círculo toma el nombre de círculo osculador. Se pretende que la construcción convenza a los estudiantes de las propiedades de este círculo que será tangente la curva en el punto P_0. Véase la Figura 38.

El círculo osculador es idéntico al círculo de curvatura.

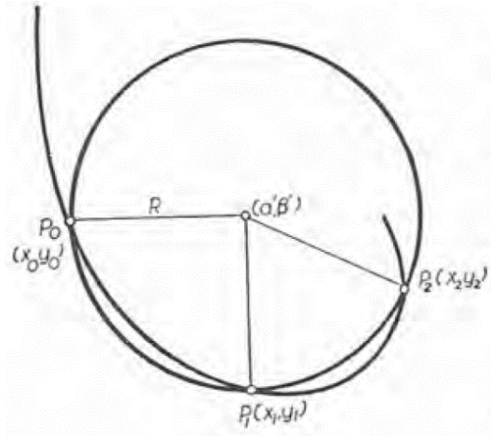


Figura 38 *Círculo pasando por tres puntos. Granville, W.A. ,2009*

Aquí, como en el caso de la recta tangente a una curva en un punto P, el círculo de curvatura en P es la posición límite de los círculos que pasan por P, Q y R, cuando los puntos Q y R tienden al punto P.

El propósito de la investigación es averiguar si los conocimientos que tienen los estudiantes respecto a recta tangente a una curva, que provee la deriva, son o no suficientes para trabajar la tangencia en este nuevo escenario. Para esta investigación planteamos la siguiente pegunta ¿qué conocimientos adicionales a los que adquiere el estudiante sobre recta tangente, requiere el estudiante para la comprensión de lo que significa el círculo osculador o círculo de curvatura?

8.6 Tangencia entre dos curvas

El círculo osculador o círculo de curvatura es una situación particular de dos curvas tangentes una a la otra, o curvas tangentes entre sí. Esta idea se extiende a curvas a pares de curvas en general (véase **Figura 39**) y su definición es una generalización de recta tangente a una curva en un punto.

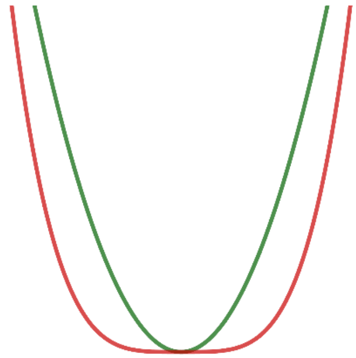


Figura 39 *Curvas tangentes en un punto*

El estudio, desde un punto de vista básico, de tangencia entre dos curvas ayuda a reforzar el concepto y significado de recta tangente. La definición establecida de manera analítica apunta hacia una generalización más, como es el de plano tangente a una superficie que probablemente el alumno estudiará en sus cursos de cálculo de funciones de varias variables.

Referencias

[1] Aarão, J. (2000). Tangents without Calculus.The College MathematicsJournal, 31(5), 406-407.

[2] Barriendos-Rodriguez, A.L. y Espinoza-Asuar, E.M. (2008). Matemáticas III. Libro para el maestro. Volumen I.

[3] Biza, I., Christou, C., y Zachariades, T. (2008) Student perspectives on the relationship between a curve and its tangent in the transition from Euclidean Geometry to Analysis. Research in Mathematics Education, 10(1), 53-70.

[4] Biza, I., Nardi, E. y Zachariades, T. (2007). Using tasks to explore teacher knowledge in situation-specific contexts. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10,* 301-309.

[5] Biza, I., Nardi, E. y Zachariades, T. (2009). Teacher beliefs and the didactic contract on visualisation. *For the Learning of Mathematics.* 29 (3), 31-36.

[6] Biza, I. y Zachariades, T. (2010). First year mathematics undergraduates' settled images of tangent line. The Journal of Mathematical Behavior, 29(4), 218–229.

[7] Carpenter, T., y Lehrer, R. (1999). Teaching and learning mathematics with understanding. En E. Fennema, y T. Romberg (Eds.), Mathematics classrooms that promote understanding (pp. 19-32). Lawrence Erlbaum Associates.

[8] Castela, C. (1995). Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures: Un example concret, celui de la tangente. Recherches en didactique des Mathématiques, 15(1), 7-47.

[9] Çekmez, E. y Baki, A. (2016). Examining Students' Generalizations of the Tangent Concept: A Theoretical Perspective. Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 26(5), 466-484.

[10] Cruse, A.B. (1971). Lectures on freshman calculus. ADDISON WESLEY PUBLISHING

[11] Davis, R. B. (1996). One very complete view (though only one) of how children learn mathematics—Areview of children's mathematical development: Research and practical applications, by David C. Geary. Journal for Research in Mathematics Education, 27(1), 100-106.

[12] Elsgolts, L. (1977). Differential Equations and the calculus of variations. Mir Publishers.

[13] Euclides. Elementos de Geometría(1970), en F. Vera, Científicos griegos, Vol. I, Aguilar.

[14] Fischbein, E. (1987). Intuition in science and mathematics: An educational approach. Reidel Pub.

[15] Goodell, J. (2000). Learning to Teach Mathematics for Understanding: The Role of Reflection. Mathematics Teacher Education and Development, 2, 48-60.

[16] Granville, W.A. (2009). Cálculo diferencial e integral. Limusa.

[17] Gray, A. (1997). Osculating circles to plane curves. Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica (II ed, pp. 111-115). CRC press.

[18] Hanna, G. y Sidoli, N. (2007). Visualisation and proof: A brief survey of philosophical perspectives. *ZDM Mathematics Education*, *39*, 73-78.

[19] Harel, G. (2006). Mathematics education research, its nature, and its purpose: A discussion of Lester's paper. ZDM, 38(1), 60.

[20] Harel, G. y Tall, D. O. (1991). The general, the abstract, and the generic in advanced mathematics. For the Learning of Mathematics, 11(1), 38–42.

[22] Hiebert, J. y Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). Mcmillan.

[23] Janvier, C. (1996). Constructivism and its consequences for training teachers. In L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. Goldin, y B. Greer (Eds.), Theories of mathematical learning (pp. 449-463). Erlbaum.

[24] Niss, M. (1999). Aspects of the nature and state of research in mathematics education. Educational Studies in Mathematics, 40(1), 1–24.

[25] Lehmann, C.H. (1989). Geometría analítica. LIMUSA

[26] Montiel-Pérez, H. (2014). Física general. Grupo editorial patria.

[27] Páez-Murillo, R.E. y Vivier, L. (2013). Teachers' conceptions of tangent line. The Journal of Mathematical Behavior, 32 (2013), 209-229.

[28] Poincaré, H. (1914). Mathematical definitions and education. En, Science and method (pp. 117-142). Thomas Nelson and Sons.

[29] Purcell, E.J., Varberg, D. Y Rigdon, S.E. (2007). Cálculo diferencial e integral. Pearson educación.

[30] Rivera-Figueroa, A. y Ponce-Campuzano, J.C. (2012). Derivative, maxima and minima in a graphical context. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 44(2), 284-299.

[31] Rivera-Figueroa, A. (2012). La derivada aplicada al estudio de las funciones. Cálculo diferencial. Fundamentos, aplicaciones y notas históricas (I ed, pp. 370-376). Editorial Patria.

[32] Resnick, L. B., y Ford, W. W. (1981). The psychology of mathematics for instruction. Hillsdale. Lawrence Erlbaum Associates.

[33] Romberg, T.A., y Kaput, J.J. (1999). Mathematics worth teaching, Mathematics worth understanding. En E. Fennema, y T. Romberg (Eds.), Mathematics classrooms that promote understanding (pp. 3-17). Lawrence Erlbaum Associates.

[34] Santos-Trigo, L.M. (2014). La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos. Trillas.

[35] Serway, R.A. Y Jewett, J.W. (2008). Física para ciencias e ingeniería. CENGAGE Learning.

[36] Sierpinska, A. (1994). Understanding in Mathematics. The Falmer Press.

[37] Schoenfeld, A. H. (1988). When good teaching leads to bad results: The disasters of well taught mathematics classes. Educational Psychologist, *23*(2), 145-166.

[38] Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 334-370). Macmillan.

[39] Spivak, M. (2017). Derivadas. Calculus (3ª ed, pp. 149-167). Reverté.

[40] Stewart, J. (2008). Cálculo de una variable: trascendentes tempranas. CENGAGE Learning.

[41] Tall, D., y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics, 12, 151–169.

[42] Tall, D. (1987). Constructing the concept image of a tangent. In: J. C. Bergeron, N. Herscovics, y C. Kieran (Eds.), Proceedings of the 11th PME international conference (Vol. 3, pp. 69–75). Montréal, Canada.

[43] Tsamir, P., y Ovodenko, R. (2004). Prospective teachers' images and definitions: The case of inflection points. En: M. J. Høines y A. B. Fuglestad (Eds.), Proceedings of the 28th conference of the international group for the psychology of mathematics education (Vol. 4, pp. 337–344). Bergen, Norway.

[44] Tsamir, P., Rasslan, S., y Dreyfus, T. (2006). Prospective teachers' reactions to Right-or-Wrong tasks: The case of derivatives of absolute value functions. The Journal of Mathematical Behavior, 25, 240–251.

[45] Vincent, B., LaRue, R., Sealey, V. y Engelke, N. (2015). Calculus students' early concept images of tangent lines, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 46(5), 641-657.

[46] Vinner, S. (1982). Conflicts between definitions and intuitions: The case of the tangent. In: A. Vermandel (Ed.), Proceedings of the 6th conference of the international group for the psychology of mathematics education (pp. 24–28). Antewerp, Belgium.

[47] Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of Mathematics. In D. Tall (Ed.), Advanced mathematical thinking (pp. 65–81). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

[48] Vivier, L. (2013). Without derivatives or limits: from visual and geometrical points of view to algebraic methods for identifying tangent lines. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 44(5), 711-717.

[49] Young, H.D. Y Roger, A.F. (2009). Física universitaria. Pearson Educación.

Bibliografía complementaria

[1] Artigue, M. (2002). Student Conceptions. En D. Tall (Ed.), Advanced Mathematical Thinking (Vol.11, pp.174-175). Kluwer Academic.

[2] Canul, E., Dolores, C. y Martinez-Sierra, G. (2011). De la concepción global a la concepción local. El caso de la recta tangente en el marco de la convención matemática. Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa, 14(2), 173-202.

[3] Flores, L. y Flores, A. (2006). CALCULUS, PAPER, SCISSORS. Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 16(4), 358-362.

[4] Gilboa, N., Kidron, I. y Dreyfus, T. (2019). Constructing a mathematical definition: the case of the tangent. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 50(3), 421-446.

[5] Infante, N.E., Murphy, K., Glenn, C. y Sealey, V. (2018). How concept images affect students' interpretations of Newton's method. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 49(5), 643-659.

[6] Orts, A., Llinares, S., y Boigues, F. J. (2018). Trayectorias de aprendizaje del concepto de recta tangente en alumnos de Bachillerato. Enseñanza de las ciencias, 36(3), 121-140.

[7] Segal, A. (2000). A Quick Construction of Tangents to an Ellipse. TheCollege Mathematics Journal, 31(2), 131-131.

[8] Stylianides, A.J. y Stylianides, G.J. (2007). Learning Mathematics with Understanding: A Critical Consideration of the Learning Principle in the Principles and Standards for School Mathematics. The Montana Mathematics Enthusiast, 4(1), 103-114.

[9] Wilkins, D. (2003). The Tangent Lines of a Conic Section. The College Mathematics Journal, 34(4), 296-303.