CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

ORQUESTACIÓN DE ARTEFACTOS EN EL SISTEMA DE TELESECUNDARIA PARA PROMOVER UNA MEJOR COMPRENSIÓN DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS. CASO: ECUACIÓN DE PRIMER GRADO

Tesis que presenta

José Manuel Dueñas Guzmán

Para obtener el grado de

Doctor en Ciencias

en la especialidad de Matemática Educativa

Director de la tesis:

Dr. Carlos Armando Cuevas Vallejo

CIUDAD DE MÉXICO JUNIO DE 2021

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por su apoyo para la realización del presente proyecto de investigación.

Número de registro de becario: **48865** y número de apoyo **397360.**

“Ningún hombre ha vivido
jamás más que una vida, y
esa ha sido escogida por él mismo
y la mayor parte la vive solo…”

Ehécatl
(Jennings, G.)

Dedicada a Gloria,
Les, Milly y Mane

Por la alegría de todo aquello
vivido con nostalgia…

Agradecimientos

A mis familiares y compañeros, por sus palabras de apoyo y sugerencias durante mi estancia en el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Al Doc. Cuevas mi asesor, por su acertada insistencia hasta el final y lo subsiguiente.

Al personal académico en especial al Dr. Filloy (†), Dr. Pluvinage (†), Dra. Rojano, Dr. Puig, Dr. Mejía, mis sinodales y maestros por compartir sus experiencias académicas y parte de su vida, además.

A todo el personal administrativo y de apoyo del DME, especialmente a Adrianita y Gaby por su atención y profesionalismo. Sin olvidar la paciencia y comprensión del personal de la biblioteca Jerzy Plebańzki.

Al personal de la Secretaría de Educación en el Estado de Michoacán, estando bajo la dirección del Dr. Armando Sepúlveda y en especial a la mtra. Marlem Hernández del departamento de Becas Comisión por hacer posible la transición.

Al personal del Área Técnico-Pedagógica de Telesecundaria y en especial al Dr. Arturo Fernández por permitirme llevar la fase experimental a los docentes del nivel secundaria.

Finalmente, a todos aquellos que de forma involuntaria no menciono en este apartado, pero que estuvieron ahí brindando su experiencia y sincera amistad.

RESUMEN

En el presente trabajo mostramos una propuesta didáctica para la enseñanza de la matemática en el sistema de Telesecundaria dependiente de la Secretaría de Educación Pública en México durante el periodo de confinamiento sanitario. Esta propuesta estará mediada por el empleo de tecnologías digitales, aplicaciones de video conferencia, sitios web de apoyo, aulas virtuales de trabajo y formularios de encuesta digitales las cuales están contenidas en un marco didáctico y tienen el propósito de promover una mejor comprensión de los conceptos matemáticos. En particular, mostramos el caso de ecuación de primer grado.

Nuestra propuesta consta de once sesiones de trabajo virtuales y a distancia, que van desde los 60 minutos hasta los 120 con una duración de dos semanas haciendo un total de 1100 minutos de trabajo con estudiantes entre los 12 y 14 años. Las actividades de cada sesión de trabajo se diseñaron para su aplicación en la modalidad presencial haciendo uso de algunos dispositivos digitales como celulares, tabletas, computadoras de escritorio o portátiles.

Desde marzo de 2020, se declaró una emergencia sanitaria y la Secretaría de Gobernación ordenó a las escuelas a cerrar sus puertas por tratarse de un riesgo para la población estudiantil y sus familias, (SEGOB, 2020). Lo anterior, nos llevó a rediseñar las actividades llevándolas al formato digital en forma de cuestionarios siempre disponibles en un aula virtual utilizando las herramientas gratuitas de la Suite de Google, sitios web de almacenamiento de videos e información que sirvieron de apoyo en el uso de las herramientas utilizadas durante cada una de las sesiones de trabajo.

El contexto rural de la población escolar en estudio, con una por lo general mala conexión a internet satelital por medio de códigos de prepago, las condiciones de confinamiento sanitario, la marginación de las familias donde el estudiante es fuerza de trabajo y sostén en su hogar, nos enfrentaron a grandes retos en el rediseño y la implementación de las actividades de nuestra propuesta didáctica, en la obtención de evidencias y su interpretación dónde el único contacto entre el docente investigador y alumno se llevó a cabo de forma virtual y a distancia.

ABSTRACT

In this paper we show a didactic proposal for the teaching of mathematics in the Telesecundaria system during the period of sanitary confinement. This proposal will be mediated using of digital technologies, video conference applications, support websites, virtual classrooms and digital survey forms which are contained in a didactic framework and have the purpose of promoting a better understanding of mathematical concepts. We show the case of linear equation.

Our proposal consists of eleven virtual and distance work sessions, ranging from 60 minutes to 120 minutes with a duration of two weeks for a total of 1100 minutes of work with students between 12 and 14 years old. The activities of each work session were designed to be applied in the face-to-face modality making use of some digital devices such as cell phones, tablets, desktops or laptops.

Since March 2020 a health emergency was declared, and the Ministry of the Interior ordered schools to close their doors as it was a risk for the student population and their families (SEGOB, 2020). The above, led us to redesign the activities taking them to the digital format in the form of questionnaires always available in a virtual classroom using the free tools of the Google Suite, video and information storage websites that served as support in the use of the tools used during each of the work sessions.

The rural context of the school population under study, with a generally poor connection to satellite internet through prepaid codes, the conditions of sanitary confinement, the marginalization of families where the student is a work force and breadwinner at home, faced us with great challenges in the redesign and implementation of the activities of our didactic proposal, in obtaining evidence and its interpretation where the only contact between the research teacher and student was carried out virtually and at a distance.

Lista de figuras

Lista de tablas

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de investigación explora la posibilidad de promover una mejor comprensión del concepto de ecuación de primer grado y su resolución, en el sistema de Telesecundaria. Para ello se genera una propuesta didáctica de orquestación instrumental que incluye el aprovechamiento de las bondades del desarrollo de los dispositivos digitales de tutoría virtual, aplicaciones de comunicación y recolección de datos en la modalidad virtual y a distancia debido al confinamiento sanitario por SARS – CoV-2 (COVID19) en las escuelas de todos los niveles en México y el mundo.

Con base en la experiencia de un primer acercamiento experimental (predoctoral) y haber sido profesor del sistema de Telesecundaria desde hace más de quince años en el medio rural y haber constatado que, si bien la enseñanza y aprendizaje de la matemática ofrece grandes problemas en el nivel de secundaria, los problemas se agravan de manera importante en Telesecundaria por las siguientes razones:

- Los estudiantes son de tiempo parcial y en general, son fuerza de trabajo importante para el medio de donde provienen, de tal forma que su asistencia a clases presenciales y ahora virtuales no es regular y disponen de poco tiempo para dedicarse al estudio.
- El sistema de Telesecundaria ofrece un horario fijo e inamovible en lugares establecidos, para la impartición de las respectivas clases del programa. Los estudiantes, que en su mayoría son de escasos recursos, tienen que recorrer grandes distancias para acudir a clases y no siempre lo logran puesto que los caminos pueden estar obstruidos por inundaciones, derrumbes u otros problemas.

Adicionalmente, en tiempos de pandemia, los estudiantes tienen que hacer esfuerzos extraordinarios para hacerse de recursos económicos y adquirir códigos de prepago para conectarse a internet y poder participar en la puesta en marcha de alguna propuesta didáctica.

El sistema de Telesecundaria cuenta con:

- Aula con televisión (ahora LCD no Smart) de 40 pulgadas.
- Proyector tipo cañón.
- Reproductor de video en formato DVD.
- Laboratorio de cómputo (que no siempre puede utilizarse debido a la falta de mantenimiento).
- Pintarrón.
- Material impreso: libro del alumno, que articula recursos múltiples, impresos, audiovisuales e informáticos y que oficialmente autoriza la Secretaría de Educación Pública (SEP); libro del maestro que contiene sugerencias didácticas, posibles respuestas de las actividades y el libro del alumno en formato reducido.
- Antena orientada y decodificador configurado que sintoniza dos canales que transmiten las sesiones de Telesecundaria: el canal 11 y 27 de la red Educación Satelital (EDUSAT). Usualmente, no funcionan por problemas técnicos y falta de mantenimiento.
- Mediateca con videos: cuando no hay señal satelital, el docente cuenta con una videoteca en formato de DVD con algunas de las sesiones que se proyectan por la red EDUSAT. En mi experiencia, solo he visto una mediateca y no pertenecía al sistema de telesecundarias, sino al Consejo Nacional de Fomento Educativo (CONAFE).

Asistentes

- Un profesor por grado o, en su defecto, un profesor que atiende a más de un grado; es decir, multigrado. Cabe mencionar que el mismo docente funge de director.
- Alumnos: la asistencia promedio de alumnos a una clase es de 15, que van de los 12 a los 18 años de edad, aunque la experiencia indica que la asistencia en las escuelas ha disminuido a menos de 10 alumnos y, en algunos casos a menos de cinco por grado escolar.

Existen grandes problemas de infraestructura y de servicios: con frecuencia no se da mantenimiento a los equipos de cómputo o se encuentran descompuestos; los televisores tienen el mismo problema. En su mayoría los centros escolares no tienen señal de internet y, aún más, por diversos problemas naturales o económico-sociales no se cuenta con energía eléctrica y agua potable.

Cada sesión de matemáticas dura estrictamente 48 minutos y se imparten de lunes a viernes para los tres grados en horario de 10:24 a 11:12 en el turno matutino. El turno vespertino acaba de desaparecer, cuyo horario era de 16:24 a 17:12, el horario no es flexible, si el alumno pierde la sesión no es posible recuperarla. A pesar de que en algunos de los casos se cuenta con una videoteca, solo el docente tiene acceso a ella debido a que se encuentra en la escuela y solo estaría disponible en horario escolar; es decir, cuando se encuentre abierto el centro educativo.

Debido a lo anterior, el reto que se nos presenta a los docentes es enorme. ¿Cómo enseñar matemáticas con todas las condiciones y adversidades enunciadas?

Ese es el reto que enfrentamos. Sin pretender resolver el problema, ya que tiene demasiadas aristas económicas y sociales, nos proponemos contribuir con una propuesta que apoye el aprendizaje matemático del estudiante que le permita enfrentar de mejor manera los problemas que se le presenten.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La Secretaría de Educación Pública (SEP) considera en sus programas de estudio de nivel básico, que la formación matemática debería permitir a los individuos enfrentar con éxito los problemas de la vida cotidiana, en gran parte ayudándose con los conocimientos adquiridos y de las habilidades y actitudes desarrolladas durante la educación básica (SEP, 2011). En esta fase de la educación, como resultado del estudio de las matemáticas entre otros apartados, se espera que los alumnos:

1. Utilicen el cálculo mental, la estimación de resultados o las operaciones escritas con números enteros, fraccionarios o decimales, para resolver problemas aditivos y multiplicativos.

2. Modelen y resuelvan problemas que impliquen el uso de *ecuaciones hasta de segundo grado*, de funciones lineales o de expresiones generales que definen patrones (SEP, 2011, p. 14).

Los planes y programas de estudio más recientes, los de la nueva Escuela Mexicana publicados en 2019 (SEP, 2019), en los contenidos de la educación en el campo formativo del pensamiento matemático, plantean para la educación secundaria en el primer curso, ecuaciones de dos y tres pasos de la forma $ax + b = c$ y de la forma $ax + b = cx + d$. Donde $a,\ b,\ c$ y d son coeficientes enteros y racionales en la forma de fracción y decimal.

En esta propuesta didáctica se utilizan diversos recursos tecnológicos orquestados en once actividades didácticas distintas, con el objetivo de promover una mejor compresión del significado y resolución de las ecuaciones de primer grado en la Telesecundaria.

Se espera que de este trabajo resulte un prototipo que permita a los docentes diseñar estrategias heurísticas y producir materiales didácticos para la mayor parte de los contenidos matemáticos del plan de estudios de matemáticas en

Telesecundaria, y se puedan mejorar los resultados en el proceso enseñanza – aprendizaje.

PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

En las condiciones extraordinarias en las que se realizó nuestro trabajo de investigación virtual y a distancia utilizamos las herramientas: Google Classroom, Google Gmail, Google Meet, YouTube, WhatsApp, sitio web EcuSol, EDVI balanza, conexión a internet, cámara fotográfica y conversor de archivos *.jpeg a *.pdf en un marco didáctico especifico, lo que nos llevó a cuestionarnos lo siguiente:

¿Cómo se podría diseñar una orquestación instrumental Trouche (2005), Trouche y Drijvers (2014) con las tecnologías digitales, aplicaciones y aulas virtuales, aplicaciones de video comunicación, sitios web de apoyo, EDVI-balanza, unidades virtuales de almacenamiento y cuestionarios virtuales para la toma de datos que, bajo un marco didáctico promuevan una mejor comprensión y resolución del concepto de ecuación de primer grado en el sistema de Telesecundaria?

¿Cómo transformar las tecnologías digitales, aplicaciones de mensajería instantánea, aplicaciones de video llamadas, aulas virtuales, sitios web diseñados ad doc, escenarios digitales, virtuales e interactivos, videos tutoriales, actividades guiadas y dosificadas en su dificultad; dentro de un marco didáctico explícito y flexible para que con el diseño de actividades didácticas, promuevan una mejor comprensión de los conceptos matemáticos dentro del sistema de Telesecundaria? Caso: ecuación de primer grado.

¿Cómo los dispositivos digitales, las aplicaciones virtuales, el sitio web EcuSol y sus escenarios virtuales sirven de apoyo, introducción y de puente, para resolver por medio de métodos algebraicos las ecuaciones de primer grado?

JUSTIFICACIÓN

La transición de la primaria a la secundaria en matemáticas, corresponde al paso de la aritmética al algebra, que se ha detectado como un proceso complejo para la mayoría de los estudiantes ya que, por primera vez, los estudiantes se enfrentan a trabajar de forma más abstracta y comienzan a utilizar símbolos asociados a cantidades desconocidas. Esto representa un gran reto a los docentes, puesto que, como afirman Filloy y Rojano (1989, p. 19), en su gran mayoría los alumnos no logran establecer una generalización de los hechos aritméticos que los lleve en forma natural al álgebra.

El concepto de ecuación es un concepto clave en la matemática. Para muchos investigadores da origen al álgebra y, además, resuelve una enorme cantidad de problemas; ejemplifica en forma clara el paso de la aritmética al algebra. Por ejemplo, en aritmética un problema común sería: ¿cuánto es $3\ x\ 4 =?$; en álgebra da lugar a la ecuación $3x = 12$, que formula la pregunta ¿qué número multiplicado por 3, resulta como producto 12? Es decir, la ecuación, representa el proceso inverso de la operación $3\ x\ 4 = 12$. Aquí se genera una de las primeras dificultades puesto que, en general, la educación en matemáticas se centra en procesos directos y poco atiende las operaciones o procesos inversos (Cuevas y Mejía, 2003).

Para Puig y Cerdán (1990), el lenguaje algebraico está construido sobre la base del lenguaje aritmético, donde introduce algunos significados nuevos (propios del álgebra) que le permiten operar no solo sobre la incógnita y los datos, el significado del signo igual y la expresión general simbólica resultante.

Por otra parte, la expresión algebraica denominada ecuación, es una expresión muy sofisticada que encierra siglos de desarrollo y que involucra otros conceptos como: coeficiente, número real, incógnita, igualdad, exponente y solución. Cada concepto contiene diversos grados de complejidad; por ejemplo, variable, incógnita (Trigueros & Ursini, Thorndike, Malara y Navarra entre otros), números negativos (Gallardo, 1994), entre otros. Además, requiere también de una sintaxis compleja que implica símbolos como: $+, -, x, /, \div, \hat{}, (\quad)$ y $=$. Con una ortografía muy particular que involucra la jerarquía de operaciones, la regla de los signos, entre otras cosas.

Se han realizado diversos trabajos en Telesecundaria (TS), algunos de los resultados obtenidos en el área de matemáticas han tenido otros fines como por ejemplo la comparación del modelo pedagógico de TS teórico y el operante en el caso de la matemática, otro estudio consiste en el tipo de interacción que se da en el aula en varias sesiones de matemáticas (en el campo de la estadística) entre docentes, alumnos y materiales tanto impresos como audiovisuales propios de la TS (Carvajal, C. E, 2003, 2006) y de la misma forma, otro caso de estudio centrado en la técnica didáctica de aprendizaje basado en problemas (ABP) en el que se pretende conocer en qué medida el ABP permite a los estudiantes formular procedimientos de manera autónoma en torno a las cuestiones matemáticas como es el caso de sucesiones y ecuaciones lineales (Flores et al., 2014).

Este escrito está conformado por cinco apartados: el primero corresponde a *los Antecedentes*, en donde iniciamos con la parte histórica sobre cómo se ha desarrollado el término ecuación y todos aquellos conceptos matemáticos que están implícitos al momento de enseñar y resolver, en el aula. También se incluyen algunos de los resultados más relevantes publicados en los últimos años en torno al proceso de enseñanza-aprendizaje del álgebra y, de forma específica, en el área de las ecuaciones de primer grado, en relación con las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas básicas; así como algunas propuestas virtuales y no virtuales que han contribuido de forma importante en el aprendizaje de las ecuaciones de primer grado.

En el segundo apartado, que corresponde al *Marco teórico,* se desarrolla el estudio de los elementos teórico-cognitivos, el desarrollo conceptual, los obstáculos epistemológicos, el contenido matemático dentro del marco curricular vigente, y finaliza con un breve estudio de lo que es la orquestación instrumental; en fin, todos los elementos teóricos que conforman el presente proyecto de investigación.

En el tercer apartado, titulado *Elementos de la propuesta didáctica,* se describen y justifican los diversos instrumentos o cuestionarios, herramientas virtuales y dispositivos digitales empleados de forma virtual y a distancia para obtener datos.

En el cuarto apartado, denominado *Resultados,* se hace un análisis de los resultados obtenidos de forma virtual y a distancia de la presente propuesta didáctica, esperando a que cuando termine el confinamiento sanitario por SARS-CoV2 (COVID-19) se verifiquen de forma presencial los resultados obtenidos.

Finalmente, en el apartado cinco denominado *Conclusiones*, se presentan las observaciones derivadas de la presente propuesta didáctica bajo las condiciones extraordinarias de trabajo ya descritas

CAPITULO I

Antecedentes

En este apartado describiremos de manera breve, la problemática de los diversos conceptos que están estrechamente relacionados con el concepto de ecuación; y también analizaremos algunas dificultades detectadas con estudiantes de nivel básico, reportados en diferentes artículos de investigación relacionados con el mismo concepto.

Para proponer una forma de enseñanza que posibilite una mejor comprensión de las ecuaciones de primer grado, es necesario identificar ante todo, los componentes involucrados con el concepto de ecuación y hacer un estudio de las dificultades y errores que muestran los estudiantes durante su aprendizaje.

La transición de la aritmética al álgebra, un tema vigente de investigación; por un lado, es un paso difícil en el que los estudiantes del nivel básico (secundaria) comienzan a trabajar con lo desconocido (incógnitas), lo cual implica un mayor esfuerzo intelectual; la mayoría de las veces, esto genera confusión y malos entendidos debido a una mala comprensión y aplicación de las propiedades de la aritmética estudiadas en cursos previos (Filloy y Rojano, 1989). Si le agregamos a ello que en general, el álgebra se enseña fuera de todo contexto real, con lo que se deteriora el aprendizaje significativo puesto que el alumno la considera algo ajeno a sus intereses.

> Se plantea que los niños no pueden matematizar la matemática, ya que, en un principio, no hay objeto matemático que sea de su experiencia real. Por lo tanto, se trata de posibilitar el acceso a conocimientos, destrezas y disposiciones mediante situaciones problemáticas que generen en los estudiantes la necesidad de utilizar herramientas matemáticas para su organización y solución (Freudenthal, 1973: 134).

Gran parte del desarrollo del álgebra se debe a conjuntar y sistematizar una serie de herramientas que permiten resolver, hasta cierto punto, las ecuaciones, de ahí el origen del álgebra. El concepto de ecuación es un concepto clave en la matemática y para muchos investigadores, da origen al algebra. (Puig y Rojano 2004. pp. 190-191; Katz y Barton, 2007).

1.1. Antecedentes históricos del álgebra

El estudio del desarrollo y resolución de las ecuaciones de primer, segundo y tercer grado permite recrear algunas de las distintas definiciones que se han dado al término álgebra a lo largo de la historia; así como la clasificación que se ha hecho para su estudio y compresión, desde las antiguas civilizaciones hasta el siglo *XVI* y *XVII*.

El término álgebra (regla de la "cosa" (Puig, 2010, p. 90, 2011, p. 29)) que se utiliza en la gran mayoría de las culturas europeas, tiene su origen en la cultura árabe, y se puede asegurar que tiene relación con el título del libro *Al-jabr* escrito en Bagdad por Muhammad Ibn Mûsâ al-Khwârizmî alrededor del año 825.

En Puig (2008) y Radford (1995), se menciona algo que pudiera considerarse para establecer el origen de la palabra álgebra. En la traducción de 1170 del libro de *al-jabr* y *al-muqãbala* al latín realizada por Gerardo de Cremona (1114-1187) célebre traductor italiano, se puede encontrar el uso del término álgebra (Libro de Mahoma, hijo de Moisés, Alchorismi, de Álgebra y almuchabala). A manera de hipótesis, se piensa que dicho autor consideró no traducir estos términos debido a que tenían un significado técnico en el texto de al-Khwãrizmî y optó por su transliteración de la palabra *al-jabr*. Su decisión dio origen al uso del término álgebra, operación matemática expuesta en el libro de al-Khwârizmî y que, en tiempo posterior, se generalizó a la disciplina matemática que en cierta manera se funda con el nombre de Álgebra.

En Katz y Barton (2007), la definición que hoy se pueden leer en los libros del término álgebra, no corresponde a la definición construida siglos atrás. Por ejemplo: Colin Maclaurin en 1748 escribió en su libro de álgebra:

> *El álgebra es un método general de computación con ciertos signos y símbolos ideados para tal propósito de manera conveniente, llamada Aritmética Universal con el producto de operaciones y reglas similares a las de la aritmética común.*

Leonhard Euler en su texto de álgebra de 1770 lo asocia a la resolución de ecuaciones y escribió:

El álgebra ha sido definida como la ciencia que enseña a determinar cantidades desconocidas por medio de otras conocidas.

En el siglo XVIII, el álgebra se definió como el tratado para determinar lo desconocido, usando signos, símbolos y ciertos métodos bien definidos para su manipulación (Katz, 2009).

El uso del álgebra tiene sus orígenes en las civilizaciones antiguas, principalmente en Egipto, Babilonia y China. En el año de 1950 a.n.e., en los tiempos del rey Hammurabi algunos textos cuneiformes muestran el manejo y dominio de la técnica que involucra el uso de ecuaciones lineales y cuadráticas con dos variables y también ecuaciones cúbicas y bicuadráticas, lo que nos lleva a la hipótesis de que tenían conocimiento de la regla general, aunque no existe prueba de ello. Por estos mismos años los egipcios solo trabajaban con las ecuaciones lineales (Struik, 1980).

También Struik (1980), considera que uno de los factores para el desarrollo del álgebra en el año 2000 a.n.e., fue el uso de la antigua escritura sumeria, usada por los nuevos gobernantes Semíticos, que consistía en el uso de jeroglíficos donde la colección de ideogramas denotaba, en cada uno de sus símbolos una idea particular y específica. Incluso, se usaban algunos símbolos de este tipo de ideogramas en el alfabeto fonético de su idioma, pero ahora describiendo conceptos; tales ideogramas eran propicios para el desarrollo del álgebra, también indica que no distan demasiado de los que en nuestro tiempo usamos.

En las “escuelas” para administradores en Babilonia, el uso del lenguaje del álgebra formó parte del plan de estudios durante muchas generaciones, sin importar que estuvieran bajo el dominio de diversos gobernantes como los cassitas, los asirios, los medas y los persas; la tradición se mantuvo. Aun cuando Babilonia dejó de ser un centro político de importancia en la época de los persas y los seleúcidas, se mantuvo como ícono de cultura de un gran imperio en donde se mezclaron los babilonios con los griegos, los persas, los hindúes, los judíos y muchos otros pueblos (Struik, 1980).

En los textos cuneiformes, se percibe una continuidad en las tradiciones que fomentan el desarrollo local, pero no se puede asegurar en que forma la influencia de otros pueblos fomentaron ese avance y permanencia de dichas tradiciones. Struik (1980), en su primer volumen, comenta que la astronomía babilónica influenció a la astronomía griega, la matemática de los babilonios influenció a la aritmética de cómputo; incluso, que la ciencia medieval árabe e hindú no estaba basada únicamente en la tradición de Alejandría sino también en la de Babilonia.

Finalmente, cabe mencionar que, en la solución para ecuaciones de primer y segundo grado, no se conoce como se establecen los teoremas o las fórmulas generales, solo los pasos y procedimientos prescritos a seguir en los problemas encontrados en las tablillas de arcilla.

El álgebra primitiva no se representaba como ahora la conocemos, los símbolos que aparecen en diversos manuales de historia y publicaciones en revistas de prestigio han sido el resultado de múltiples cambios y acuerdos entre los matemáticos a lo largo de la historia, con el fin de poder comunicar sin problema y darle un carácter universal a esta rama de la matemática.

De esta forma, encontramos tres etapas o periodos en las que dividen el estudio del álgebra:

- El "álgebra retórica" (verbal) en la que se utilizaban los elementos del lenguaje, como palabras de uso común, por ejemplo en el papiro de Rhind que data del 1650 a.n.e., el papiro de Moscú 1850 a.n.e., del cual se dice que pudiera ser dos siglos más antiguo y el libro de al-Khwârizmî llamado al-jabr y al-muqâbala en donde llamaban a la incógnita x^2 mâl que significaba posesión o tesoro (Puig, 1998), Shay que significó la cosa, es decir, lo desconocido[1]. Aunque se ha usado en más ocasiones el término mâl como cuadrado y Shay como raíz (Rahman et al., 2008).
- El "álgebra sincopada" (abreviaturas y símbolos) donde se le atribuye a

[1] al-jabr y al-muqâbala significan "*La restauración y la comparación" (Djebbar, 2005, tomado de Puig 2009).*

Diofanto de Alejandría por el año 250 que fue el primero en dar el paso en dirección de una aproximación estructural para los procedimientos computacionales, por medio de letras y palabras entremezcladas generó una nueva etapa en el álgebra (Sfard y Linchevski, 1994, p. 9; Bagni, 2009). Es probable que Diofanto usara el símbolo ζ para designar la incógnita, a la que denominó el “número del problema”. Para x^2 usó Δ^{γ}; la Δ es la primera letra de la palabra $\Delta\upsilon\nu\alpha\mu\iota\sigma$ (dinámica, potencia). Para x^3 utilizó κ^{γ}; la κ es la primera letra de la palabra $\kappa\upsilon\beta o\sigma$ (cubos). Piaget y Garcia (1982), consideran que Diofanto es la figura generalmente aceptada como fundador de los problemas de la aritmética en términos de símbolos, quien introdujo los valores indeterminados representados no por números, sino por letras para expresar de manera general las cantidades que aparecen en las incógnitas de las ecuaciones que conducen a la solución de los problemas planteados. Posiblemente debido a esta gran contribución, Diofanto de Alejandría se le conoce como el padre del álgebra. Sfard y Linchevski (1994) explican que la historia del álgebra comienza a moverse hacia la etapa de resolución de problemas. En el siglo tercero, Diofanto tenía conocimiento del algoritmo para resolver ecuaciones cuadráticas, basado solamente en números. Y en el siglo octavo en la India, aparece la fórmula para resolver la ecuación cuadrática, desarrollada por Sridhara, aunque la solución solo reconoce raíces positivas. Mucho antes de que Cardano en “Ars Magna” en 1545 diera solución a las ecuaciones cúbicas, Umar al-Khayyâm (Omar Khayyan) en el siglo doce ya había encontrado un camino para dar solución a este tipo de expresiones determinando la intersección de ciertas secciones cónicas particulares, un método geométrico más sofisticado que los métodos empleados por Euclides en su obra “Elementos”.

- Por último, en el <u>álgebra simbólica</u> se sustituyen los números dados por símbolos. El matemático francés François Viéte (Vieta) en 1579, en su Canon Mathematicus presenta la sustitución de los números por letras, no sólo para designar las incógnitas, sino también a otros datos y elementos conocidos (Prieto, 1991). Vieta retoma una metodología característica del pensamiento griego, que le permite reorganizar la obra de Diofanto a un nivel muy diferente, por lo que Vieta debería ser considerado el padre del álgebra (Piaget y García, 1982).

En las Historias de al-Khwârizmî en su cuarta entrega, Puig (2010) evoca el proyecto algebraico de Vieta; en su libro *Introducción al arte analítica (In artem analyticem Isagoge),* publicado en 1591, y lo enunció como sigue:

> Denique fastuosum problema problematum ars Analytice, triplicem Zetetices, Poristices & Exegetices formam tandem induta, iure sibi adrogat, Quod est, NULLUM NON PROBLEMA SOLVERE.
>
> [Finalmente, el Arte Analítica, una vez ha sido presentada en su triple forma de Zetética, Porística y Exegética, se apropia a justo título del fastuoso problema de los problemas, que es: NO DEJAR NINGÚN PROBLEMA SIN RESOLVER][2]

Lo que pretende Vieta es desarrollar una forma de trabajo, un arte que le garantice que todos los problemas se puedan resolver, ¿cómo se puede asegura que todos los problemas se puedan resolver? ¿Con qué elementos se cuenta para resolver el *problema problemantum*? ¿Cómo lo hace en concreto el álgebra?

El proyecto algebraico utiliza para resolver el problema de problemas (problema problemantum), un cálculo con especies de números que permiten tratar de igual forma las cantidades conocidas y las desconocidas en el análisis de problemas. Esas operaciones o cálculos con especies se establecen como un lenguaje, un sistema de signos específico.

Previo al proyecto algebraico de Vieta, encontramos en al-Khwârizmî el Kitāb al-mukhtasar fī hisāb al-jabr wa'l-muqābala (libro conciso de cálculo de restauración y

[2] La zetética, la porística y la exegética son los tres términos que Vieta introduce para caracterizar las tres partes del nuevo análisis. Vieta toma la palabra *zētētikón* (que significa "investigación") de la descripción del análisis teorético y la palabra *poristikón* (que significa "obtención") de la descripción del análisis problemático, para las partes de su nuevo análisis en el que se plantea una ecuación (por la zetética), y se examina la verdad del teorema que expresa la ecuación (por la porística), y añade una tercera parte cuyo nombre, exegética, viene de una palabra griega que significa "mostrar", y que consiste en resolver la ecuación para obtener los valores concretos.

oposición), un proyecto similar donde propone que todos los problemas puedan ser resueltos y, posterior a Vieta, con Descartes tenemos sus “Reglas” para la dirección del espíritu *(Regulæ ad directionem ingenii)*, libro inconcluso y publicado después de su muerte en el que pretende resolver cualquier problema de forma metódica transformándolo en un sistema de ecuaciones (Puig, 2010). Descartes utiliza un sistema de signos totalmente simbólico, Vieta está en el umbral de lo simbólico y al-Khwârizmî hace cálculos con especies (igual lo hizo Diofanto) y utilizó un sistema de signos sincopado.

Kline (1990, Vol. 1), indica que el álgebra para Descartes precede a las demás ramas de las matemáticas, es una extensión de la lógica, útil para el manejo de cantidades y en este sentido, más fundamental aún que la geometría, pues es lógicamente, anterior a ella. Existe un bosquejo de un tratado del álgebra, conocido como *“Le Calcul”* (1638) escrito por Descartes, o bajo su dirección, que trata el álgebra como una ciencia distinta. En dicho bosquejo el álgebra es una técnica de cálculo, o un método para conducir bien la razón y buscar la verdad en las ciencias.

En síntesis, podemos mencionar que, si bien la contribución de Vieta para la constitución del Álgebra fue fundamental, al recoger y sistematizar los diversos avances que le antecedieron; quien le da forma, fue Descartes.

En los tiempos actuales, se encuentran algunas definiciones de álgebra como:

Álgebra es un lenguaje, con todas las formas metafóricas y metonímicas que la definen (Bednarz et al., 1996).

El Álgebra, proporciona los medios para expresar de manera concisa la manipulación y las relaciones entre números en si desconocidos (Rees y Sparks, 1986).

El Algebra, es una generalización aritmética de los números y las cantidades en el cual el concepto de función juega el mejor rol (Carraher et al., 2006).

Algebra es una cultura, entonces su introducción es la primera etapa de un largo proceso de aculturación, una iniciación en esta nueva cultura.

Wheeler (1996), hace referencia al trabajo de Rojano definiendo al álgebra como sigue: "*el álgebra es en cierto sentido una extensión de la aritmética, recoge algunas de las cuestiones que la aritmética no podría alcanzar por sí misma. De forma más estricta, el Álgebra es un complemento de la aritmética; la aritmética necesita de los números para poder funcionar sin problemas, pero éstos no se hubieran desarrollado totalmente sin la ayuda del Álgebra*" (Bednarz et al., 1996, p. 318).

En este sentido, el álgebra es el subsiguiente desarrollo de la aritmética: el álgebra aparece por la necesidad del libre funcionamiento de los números reales y, es un amplio repertorio de patrones, métodos y algoritmos que forman la herramienta creada para la resolución de ecuaciones.

En esta breve síntesis del desarrollo histórico, hemos visto que al álgebra se le puede considerar como un sistema de procedimientos matemáticos para la resolución de ecuaciones y, ciertamente, la resolución de ecuaciones constituyó el impulso más importante para el desarrollo del álgebra.

Pasemos a la siguiente sección donde se desarrolla el concepto de ecuación y su relación con otros conceptos matemáticos.

1.2. Ecuación

La palabra ecuación viene del latín "aequatío", derivado del verbo "aequare" que significa "igualar", "nivelar". Aunque en el latín clásico la palabra no se refería a igualdades algebraicas, hay indicios de un uso matemático por parte de Cicerón (filósofo romano, 106 - 46 a.n.e.), que utilizó la palabra para hablar de nivelación o igualdad numérica en asuntos de crédito y reparto de bienes. En la astronomía, la "ecuación" se utilizaba como sinónimo de equatio, "corrección", e indicaba una suma algebraica o el cálculo de un valor para verificarlo y corregirlo (Cuevas et al., 2012).

Específicamente, el concepto de ecuación está relacionado de forma estrecha con otros conceptos que durante años han sido objeto de estudio y constituye la entrada al álgebra en la secundaria; sin embargo, a pesar de su enorme importancia se han reportado continuamente problemas en su enseñanza y aprendizaje.

Por ejemplo, el concepto de ecuación es complejo y contiene a su vez conceptos no menos complejos como: variable o incógnita, coeficiente, número real, signo de igualdad, y parámetro. El registro de representación de una ecuación utiliza los símbolos: =, +, −, / o ÷, superíndice o exponente ^, ( ), letras del alfabeto para denotar variables o incógnitas y números reales para coeficientes, exponentes y términos independientes. La forma de concatenar todos estos elementos constituye las reglas del álgebra y para el proceso de resolución, se requieren de métodos y reglas como: regla de los signos, jerarquía de operaciones y reglas básicas de la aritmética.

En la *figura 1,* sintetizamos la información anterior, aunque cabe aclarar que nos referiremos a ecuaciones de primer grado donde, los métodos de solución tradicionales son: la tabla de valores, uso de fórmulas, uso del inverso aditivo y multiplicativo y despeje de la incógnita o transposición de términos.

En la parte de la figura que corresponde a la semiótica, es indispensable mencionar que nos referimos a la representación algebraica que corresponde a las literales, números reales, signos, operadores, exponentes, coeficientes y caracteres especiales de la era digital como: (,), =, *, ^ y /. La ecuación de primer grado no posee representación geométrica, aunque se suele asociar a la misma la representación geométrica de la función lineal, también puede verse como el cero, o el valor constante, o la intersección de dos funciones lineales. Por último, se tiene la representación real o figural que está asociado a los problemas en contexto, con los que se inician las actividades.

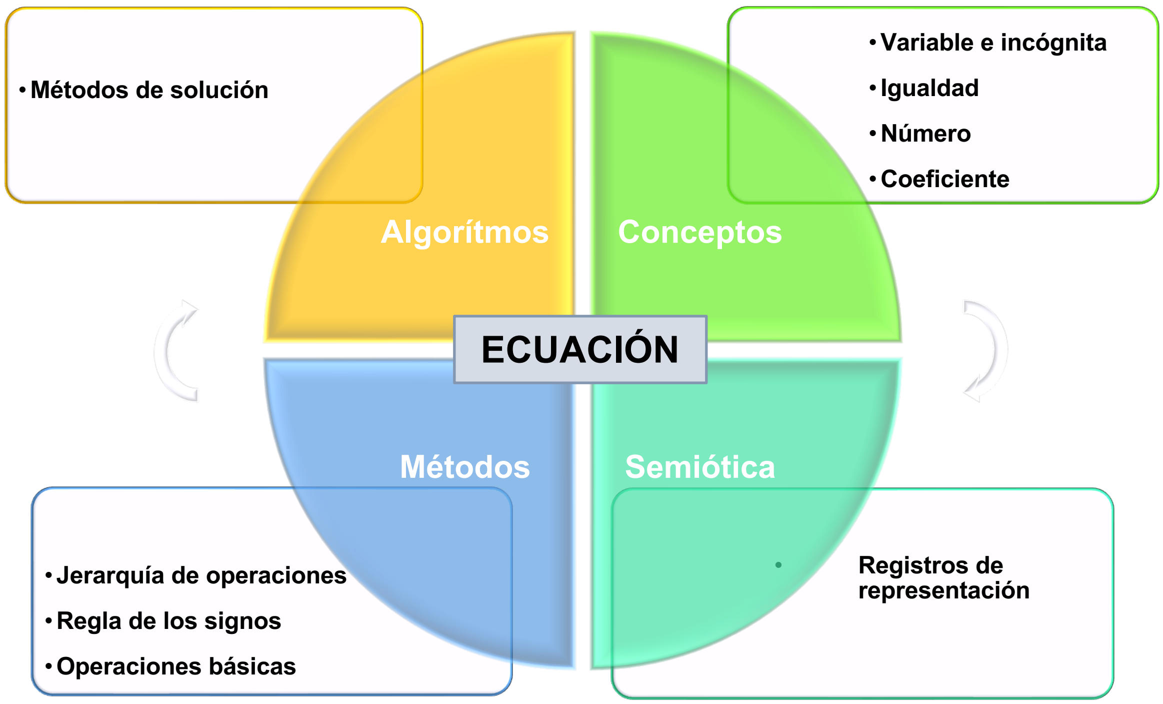


Figura 1: El concepto ecuación y su relación con otros conceptos

Para Aebli (1995, p. 212), “los conceptos son las unidades con las que pensamos, al combinarlos, ordenarlos y transformarlos”. Esto es, los conceptos son los “instrumentos” con los que trabajamos, al aplicarlos a nuevos fenómenos o problemas en nuestra mente. Por ejemplo, el concepto de ecuación se aplica a problemas cotidianos como determinar: el precio de un objeto cuando se tiene el número total y el importe pagado; el tiempo empleado en recorrer una cierta distancia a una velocidad determinada, y muchos más. Los conceptos se ordenan, se transforman y tienen: *un contenido*. El contenido de un nuevo concepto, se forma cuando en el individuo al evocar y conectar entre sí a partir de lo que ya sabe, elementos del pensamiento, ante un nuevo fenómeno o para resolver un problema de acción o de pensamiento, es decir se trata de una red de interrelaciones de características, dichas redes están construidas bajo una representación rectora denominada coherencia; y *una amplitud*, que se refiere a la cantidad de casos o de ejemplares a los que se ajusta el contenido del mismo.

Los conceptos y las representaciones que almacenamos en nuestra memoria como el saber mantienen múltiples relaciones con conceptos vecinos, (Aebli, 1995).

1.2.1. Variable e incógnita

Para las ecuaciones la representación de la incógnita es fundamental, se hace mediante símbolos, en general literales. Esto es la culminación de un largo proceso histórico, sus diversos usos fueron desarrollados como conceptos diferentes, pero después se integraron y generalizaron de modo que se pudieron usar en diversas áreas de las matemáticas. Por ejemplo, la idea de cambio y la correspondencia uno a uno aparece en diferentes culturas antiguas. Por siglos los matemáticos han investigado métodos útiles que resuelvan diferentes problemas que involucren estos conceptos. Sin embargo, la mayoría de los métodos propuestos, en la historia antigua, nunca fueron expresados en forma general. Vieta en el siglo XVI fue el primero en expresar simbólicamente métodos generales donde el significado de las literales correspondía a la de un número en general (Trigueros y Ursini, 2003).

En el siglo XVII, Fermat y Descartes, en forma independiente, emplearon este nuevo simbolismo al algebrizar la geometría y presentaron su método analítico para reducir un problema geométrico a un problema algebraico. Descartes consideró la nueva álgebra como una herramienta útil para modelar y pensar en problemas que involucren cantidades determinadas y desconocidas, y también para expresar una dependencia entre varias cantidades. Este desarrollo es considerado una de las bases más importantes en la historia de las matemáticas (Trigueros y Ursini, 2003). En cuanto al uso de las literales (incógnitas), se encuentran diversos estudios en los que la variable es un concepto fundamental en el álgebra. Sin embargo, a pesar de ello es uno de los conceptos más oscuros de la matemática, con reportes de gran dificultad en su comprensión, Schoenfeld y Arcavi, (1988), nos señalan que este importante concepto matemático se utiliza de manera inconsciente sin que se tenga una clara definición de este objeto matemático.

> He observado, no sólo con otras personas sino también ...conmigo mismo... que las fuentes de conocimiento pueden ser... obstruidas por los automatismos. Uno finalmente domina una actividad tan perfectamente que la pregunta de cómo y por qué no se pregunta más, y no puede ser preguntada más, incluso ni siquiera

> se entiende más como una pregunta significativa y relevante. (Freudenthal, 1983, 469, citado por Schoenfeld y Arcavi, 1988).

Argumentan los autores del artículo citado que existen diversas acepciones, dependiendo de la experiencia de la persona, matemáticos, profesores, ingenieros, computólogos, cada uno tiene una definición, entre las cuales mencionan: “símbolo, marcador, pronombre, parámetro, argumento, puntero, nombre, identificador, espacio vacío, vacío, referencia, instancia, y sorpresivamente no se encuentra el de incógnita” (Schoenfeld y Arcavi, 1988, p. 421)

Para Bardini et al., (2005), los estudiantes conciben a una variable como un número indeterminado de un tipo específico: no es un número indeterminado en sí mismo, es simplemente un número temporalmente indeterminado cuyo destino es llegar a ser determinado en un cierto punto.

Aún más, en una revisión de libros de texto, se destaca la ausencia de una definición de variable y en los pocos que se encuentran se notan contradicciones.

Ursini et al., (2005), señala que, la variable es multifacética y su estudio se puede descomponer en tres usos: la variable como incógnita, la variable como número en general y la variable como relación funcional.

El manejo de cada uno de estos usos y el poder transitar entre ellos se verán reflejados en la forma en que los alumnos den solución a los problemas, no sólo en nivel básico, sino también con problemas planteados en niveles educativos posteriores. La falta de dominio del álgebra, por parte de los docentes y estudiantes, denota una solución casi aritmética a problemas sencillos enmarcados en los niveles medio y superior (Ursini y Trigueros, 2006).

En Trigueros y Ursini (2003), Ursini y Trigueros (2001, 2004, 2006), Ursini et al., (2005), Álvarez et al., (2015) se describe el modelo 3uv (3 usos de la variable), que surge del análisis de los requerimientos para resolver ejercicios y problemas típicos del álgebra, se hace una lista de los aspectos que el usuario del álgebra tiene que enfrentar para poder resolverlos, estos aspectos corresponden a distintos niveles de abstracción y son los siguientes:

Para trabajar exitosamente con problemas y ejercicios que involucran la incógnita es necesario:

1. Reconocer e identificar en una situación problemática la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema.
2. Interpretar los símbolos que aparecen en una ecuación como la representación de valores específicos.
3. Sustituir la variable por el valor o los valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero.
4. Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas, realizando las operaciones algebraicas o aritméticas.
5. Simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica y utilizarlas para plantear ecuaciones.

En la didáctica de Cuevas y Pluvinage (2003), se recomiendan en cualquier situación de enseñanza de las matemáticas los puntos 1, 3 y 5.

Para trabajar exitosamente con problemas y ejercicios que involucran el número general es necesario:

1. Reconocer patrones, percibir reglas y métodos en secuencias y en familias de problemas.
2. Interpretar un símbolo como la representación de una entidad general indeterminada que puede asumir cualquier valor.
3. Deducir reglas y métodos generales en secuencias y familias de problemas.
4. Manipular (simplificar, desarrollar) la variable simbólica.
5. Simbolizar enunciados, reglas o métodos generales.

Para trabajar exitosamente con problemas y ejercicios que involucran variables en una relación funcional es necesario:

1. Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas,

problemas verbales, expresiones analíticas).

2. Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la independiente.
3. Determinar los valores de la variable independiente, dados los valores de la dependiente.
4. Reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación funcional, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).
5. Determinar los intervalos de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra.
6. Simbolizar una relación funcional, basados en el análisis de los datos de un problema.

Ursini y Trigueros también consideran "que la solución competente de los problemas algebraicos requiere de un manejo flexible de los tres usos de la variable y de los aspectos que caracterizan a cada uno de ellos" (Ursini y Trigueros, 2006, p. 7).

Además, también hacen una categorización del concepto de variable basados, en su experiencia del trabajo con maestros y del análisis de algunos de los contenidos de los cursos de álgebra elemental, con la intención de indicar cuales son las habilidades básicas necesarias para entender el concepto de variable.

Como resultado de dicho análisis, desarrollaron un marco teórico *(Tabla 1)* que puede servir de apoyo a los estudiantes para la comprensión del concepto de variable.

Tabla 1, Marco teórico del concepto variable (tomado de Trigueros y Ursini 2003)

Variable	Conceptualización y representación	Interpretación de símbolos	Manipulación
Como desconocido específico	De un desconocido en una situación particular y/o en una ecuación.	Como desconocido específico en la ecuación.	Factorización, simplificación, expansión o balancear una ecuación.
Como número general	De un número general involucrado en métodos generales o reglas deducidas numéricamente y/o patrones geométricos y/o familias de problemas similares.	Como una generalización de expresiones algebraicas o en la expresión de métodos generales.	Factorización, simplificación y expansión para reconstruir expresiones.
En una relación funcional	De relaciones funcionales (correspondencia y variación) a través de tablas, gráficas o representaciones analíticas.	En representación de la correspondencia y la variación conjunta en representaciones analíticas, tablas y gráficas.	Factorización, simplificación y expansión para reconstruir una expresión, sustituir valores para determinar intervalos de variación, valores máximos/mínimos y comportamiento global de la relación.

En Kieran y Filloy (1989), se expresa que en los niveles elementales el uso de literales en ciertas operaciones se reduce al uso de fórmulas geométricas como $A = \frac{bxh}{2}$, o en relaciones de unidades de medida como $1\ m = 100\ cm$, por ejemplo. En la primera fórmula se sustituyen los valores de b y h calculándose el valor de A, en la segunda relación de unidades, se expresa la equivalencia entre metros y centímetros. En el segundo caso, el uso de las letras como etiquetas es el que interfiere a menudo en los estudiantes al momento de llegar a interpretar el significado de las variables en las ecuaciones algebraicas. En la segunda expresión no solo interfiere la forma en que se utilizan las letras sino también la forma en que se interpreta el signo igual.

En el siguiente apartado, describimos las diversas propiedades de este signo y cómo influye de manera sustancial conocerlo y manejarlo de forma correcta, no sólo en la resolución de problemas que involucran ecuaciones de primer grado, sino también para distinguir cuándo es un operador y cuándo es una relación de equivalencia.

1.2.2. Concepto de Igualdad

Otro de los conceptos más complejos es el de igualdad en una ecuación y la razón es que una ecuación no es una igualdad sino una relación de equivalencia; en particular, una ecuación expresa una igualdad de expresiones equivalentes. Por ejemplo, la expresión $3x + 3 = 4x + 2$, expresa que para cierto valor numérico de la incógnita x, las dos expresiones son equivalentes. De resolver la ecuación encontramos que $x = 1$ hace que la expresión anterior quede $3(1) + 3 = 4(1) + 2$ lo que confirma que esas dos expresiones son equivalentes para $x = 1$. Sin embargo, se mencionó en el párrafo anterior, no siempre el signo igual se asocia a la equivalencia y a menudo se interpreta como la instrucción de hacer algo, lo que es propio en los estudiantes nos solo de nivel básico, sino también, del nivel medio y superior (Kieran, 1981). En los grados más elementales (primeros grados de primaria), los niños ven el signo igual como el símbolo que separa un problema de su solución. En la secundaria, los estudiantes a pesar de las restricciones que arrastran desde antes en relación con el signo igual, dan paso a las igualdades aritméticas donde ambos lados de la expresión generan el mismo resultado; aun así, no resulta claro cómo se van haciendo consientes de la noción de expresiones equivalentes, en la preparatoria y en el cálculo de la universidad. Concluimos, indicando que los estudiantes de preparatoria y universidad tienden a interpretar el signo igual más en términos de un símbolo operador que un símbolo en una relación de equivalencia.

La mayoría de los estudiantes que comienzan a tener contacto con expresiones algebraicas, le atribuyen al signo igual el significado implícito de “hacer siempre algo” (Kieran, 1981), no lo visualizan como un signo de equivalencia entre los lados derecho e izquierdo de una expresión algebraica; se puede mostrar lo anterior debido a la renuencia de parte de los estudiantes de nivel básico, de aceptar expresiones como $8+3=5+6$. El aceptar proposiciones en las que el lado derecho exprese el resultado; es decir, $8+3=11$ les facilita proporcionar significado en expresiones de la forma $4x+3=11$, pero les condiciona el manejo de ecuaciones del tipo $4x+2=3x+3$. El que los estudiantes conciban el signo igual solamente como un separador entre la secuencia de operaciones y el resultado, les lleva a incumplir las propiedades simétrica y transitiva del signo igual (Kieran y Filloy, 1989).

En la siguiente sección, continuamos con el número negativo, al que su historia precede a la cultura hindú y griega.

1.2.3. Número negativo

Aunque en la matemática los negativos aparecen formalmente en el contexto de la resolución de las ecuaciones algebraicas. Sin embargo, su nacimiento ha sido tardío y con mucha resistencia, ya que los números aparecen asociados a medidas y pesos, y en este contexto los negativos no tenían cabida. Finalmente, la controversia sobre los números negativos se resuelve de forma definitiva, en el siglo XIX. Además, una vez que surgen, se tiene la triple naturaleza del signo menos: binario (signo de operación), unario (signo del número) y el signo del simétrico de un número (Lamb et al., 2012). Esto es, a pesar de que habían aparecido las ecuaciones de diversos grados y métodos de resolución y de más de una variable, dichos métodos sólo reconocían como solución a los números positivos.

La historia de los números negativos tiene su origen en las civilizaciones antiguas, Struik (1980) sostiene que las civilizaciones chinas tenían conocimiento de los números negativos en el 221 a.n.e.

Los conceptos antagónicos de propiedad y deuda, ganancia o pérdida, compra y venta fueron empleados desde las primeras civilizaciones; el empleo en procedimientos mercantiles de los términos de deuda, pérdida, venta entre otros son un paso necesario para el reconocimiento y aceptación de los números negativos y su empleo en la solución negativa de ecuaciones (Gallardo, 1994, p. 45).

En Gallardo (1994), también se hace un análisis de varios textos históricos en donde se menciona problemas con solución negativa o donde los números negativos cobran sentido en el marco de la aplicación, desde la cultura china 480 a.n.e. con su libro de los nueve capítulos del arte de las matemáticas (Fiu Zhang-suanshu) en su capítulo VIII, llamado *fang cheng*. Cabe destacar que la numeración china es posicional y los números negativos se representaban con una varilla en diagonal de izquierda a derecha sobre la cantidad.

Tabla 2, representación de los números chinos

Posición	1	2	3	4	5	6	7	8	9
UNIDADES CIENTOS DIEZ MILES	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
DIECES MILES	𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱

Para representar la cantidad -5307 quedaría de la siguiente forma: 
donde se puede observar que el cero lo representaban dejando un espacio vacío entre grafos.

En la cultura india, en el año 628 d.n.e. con el título Cuttacad'hyaya (sobre el álgebra) capítulo XVIII sección II del libro de Brahme-sphuta de Bramagupta en sus cálculos astronómicos se exponen las reglas de operación de cantidades positivas, negativas y el cero. Distinguían los números negativos de los positivos colocando un punto sobre el número, utilizaban los términos de deuda o pérdida para designar los números negativos (Gallardo, 1994).

Los árabes tuvieron también conocimiento del uso de los números negativos, el discípulo Al´karaji llamado Al-Samaw'al en El Ilustre Libro de Cálculo (*Al-Báhir fil-hisāb*) en el siglo X retomó la obra de su maestro en donde conocía la regla

$a-(-b)=a+b$ con a y b positivos; sin embargo, no consideró: $-a-(-b)=-(a-b)$. Al-Samaw'al basado en lo anterior estableció las leyes de las magnitudes que dice: "si sustraemos un número *deficiente* (negativo) de un número deficiente mayor que él, entonces la diferencia se conserva *deficiente*, en otro caso, la diferencia resulta un *exceso* (positivo). Además, si sustraemos un número *excedente* positivo de un orden vacío, un orden que es cero, se conserva el mismo número, pero *deficiente*, si sustraemos un número *deficiente* de un orden vacío, se conserva ese número, en *exceso*" (Gallardo, 1994).

En el título "*Le Triparty en la Science des Nombres*" del matemático francés Nicolás Chuquet de 1484, se presentan algunos problemas contextualizados en el terreno comercial que se resuelven por medio de ecuaciones lineales de dos incógnitas con soluciones negativas, consideradas como deudas. Gracias a sus métodos algebraicos y a su amplio concepto de número, Chuquet pudo resolver problemas que para sus contemporáneos resultaron incomprensibles.

Chuquet también introduce una notación propia para expresar los exponentes negativos.

Otro destacado matemático y economista italiano, precursor del cálculo de probabilidades fue el fraile Franciscano Luca Bartolomeo de Pacioli (1445-1514), que en su obra "Summa Arithmetica, Geometría, Proportioni e Proportionalita" representa por medio de una ecuación lineal uno de sus problemas de contexto en el terreno mercantil, al darle solución encuentra un valor negativo para el precio de un artículo.

En el Ars Magna Sive de Regulis Algebraicis del italiano Girolamo Cardano, médico notable y célebre matemático, en el capítulo XXXVII muestra el manejo de los números negativos de forma fluida en las *soluciones falsas* (negativas) a pesar de sus demostraciones geométricas (Cardano, 1545, p. 217).

En 1629 el matemático francés Albert Girard (1595-1632), quien tuvo razonamientos tempranos sobre los teoremas fundamentales del Álgebra, utilizó por primera vez las abreviaturas de "sen, cos y tan" para las funciones trigonométricas y definió de manera intuitiva los números de Fibonacci (Leonardo de Pisa, 1170-1240); en su obra "Invention nouvelle en L'Algebre" expresa las cuatro conjugaciones de los signos $+ y -$, después de afirmar que la diferencia de $A y B$ la denotará por $A = B$ o bien $A - B$ si $A > B$ (Gallardo, 1994).

Finalmente, Gallardo (1994) expresa que para que tuvieran aceptación las primeras soluciones negativas fue necesario:

- Un lenguaje sincopado.
- Manejo de números positivos, el cero y negativos.
- Interpretación del número negativo (como número con signo, número relativo y número aislado).
- Diferenciación entre la solución de la ecuación y la solución del problema.
- Contexto de la situación problemática.
- No utilizar referentes geométricos en el proceso de resolución y validación.

1.2.3.1. Algunas dificultades al trabajar con los números negativos

En Gallardo (1996), se enlistan algunas dificultades presentadas con la operatividad con los números negativos durante el proceso de resolución de ecuaciones, considera dos grupos principales como son: el que se relaciona con la operatividad numérica, donde podemos encontrar siete dificultades las que, a su vez, pertenecen a dos categorías; la primera se refiere a los mecanismos inhibitorios y generalizaciones erróneas; y la segunda a la operatividad de expresiones con paréntesis. El siguiente y último grupo que se refiere a la operatividad algebraica, en el cual encontramos ocho dificultades distribuidas en dos categorías denominadas: expresiones abiertas y ecuaciones lineales.

1.2.3.2. Operatividad numérica

Mecanismos inhibitorios y generalizaciones erróneas

- Decodificación de las expresiones $-(+a)$ y $-(-a)$.

1.2.3.3. Operatividad de expresiones con paréntesis

- Lectura de izquierda a derecha de la expresión $a - (b - c - d)$.

- Se prescinde del signo y aparece una operatividad de naturales: $10 - (2 - 8 - 7) = 10 - 17$.
- Lectura de doble signo como único: $a - (b - c - d)$.
- El primer signo menos afecta al número que lo sucede y no afecta a los restantes: $10 - (2 - 8 - 7) = 10 - (-17) = 27$.
- La expresión $a - (b - c - d) = a - b - c - d$ haciendo caso omiso del paréntesis.

1.2.3.4. Operatividad algebraica

Expresiones abiertas

Se presentan oraciones de la forma $x + a - b =$, de las que se generan:

- Cierran la expresión $x + a - b = c$.
- Asignación de un valor arbitrario a la x.
- Tratamiento de ecuación a la expresión $x = a - b$.
- Mecanismo inhibitorio de: imposibilidad para igualar $x + a - b =$, “a ningún valor pues sería invadir el lugar del resultado”.
- Inhibición de la operatividad conocida: “No se puede sumar ni restar porque no se tiene el resultado ni tampoco se tiene el valor de x”.
- Conjunción de términos no semejantes $x + a - b = (a - b)x$.

1.2.3.5. Ecuaciones lineales

En lo que se refiere a la resolución de ecuaciones, las dificultades versan en relación con la naturaleza de la solución considerando el tipo de coeficientes.

- Naturaleza de la solución por ejemplo para la ecuación $x + a = b;\ a > b$,
    a) mecanismo inhibitorio “No se puede porque no existe un número que al sumarle a de cómo resultado b”. Para una posible solución negativa no se desarrollan los métodos conocidos como son tanteo, inversión de operaciones, transposición de términos, entre otros.

b) Esquema de cuasi-igualdad; es decir, realizar las operaciones ignorando el signo igual.

c) Alteración de la estructura de la ecuación, se cambia el signo más por el signo de multiplicación o el signo más por el sino menos.

- Naturaleza de los coeficientes, para la ecuación $a - x = b$ se tiene:

a) Se utilizan modelos de enseñanza previos (recta numérica, termómetro, bienes, deudas, entre otros) para justificar respuestas, que por lo general conduce a interpretaciones erróneas del simétrico de un número y del orden de los enteros.

b) Se presenta la triple naturaleza de la sustracción (quitar, completar y diferencia entre dos cantidades) es decir, en la segunda forma, son problemas en los que se utiliza el complemento aditivo en situaciones que implican adición.

c) Se evidencia la triple naturaleza del signo menos: binario (signo de operación), unario (signo del número) y el signo del simétrico de un número (Lamb et al., 2012).

d) Surge la invención de reglas sintácticas correctas como incorrectas. Aparición del dominio multiplicativo en situaciones aditivas.

e) Mecanismos inhibitorios ante la presencia de dobles signos y de expresiones que involucran tanto números negativos como literales (oraciones abiertas y ecuaciones).

f) Ante una posible solución negativa o nula, no se desencadenan los métodos escolarizados de resolución de ecuaciones.

g) Se manifiestan las siguientes interpretaciones erróneas del número negativo: $a - (-b) = a - b$ (número como sustraendo), 0 vale menos que $-a$ (número como magnitud); $-(+a)$ no es un número con signo, no existe como número. No se concibe el simétrico de un número. No se aceptan las soluciones negativas o nulas.

1.2.4. Reglas de los signos

Se sabe por medio de los comentarios de Liu Hui, que los chinos tenían conocimiento de tres de las cuatro reglas para la multiplicación de los números enteros; Gallardo (1994) menciona que la proposición se puede encontrar en su totalidad en el texto Suan-hsueh ch'il-meng. La regla de los signos aparece enunciada de la siguiente forma "El producto de números del mismo signo es positivo, de diferente signo es negativo"

Las reglas de los números positivos y negativos en la antigua China son para la adición y sustracción de números naturales como sigue:

Para la sustracción

Regla 1

Si los números son del mismo signo realizar la sustracción, y si los signos de los números son diferentes, realizar la adición.

$(+a) - (+b) = +(a - b)$ $(+a) - (-b) = +(a + b)$

$(-a) - (-b) = -(a - b)$ $(-a) - (+b) = -(a + b)$

Regla 2

Un número positivo sustraído de cero se convierte en negativo y un número negativo sustraído de cero se convierte en positivo.

$0 - (+b) = -b$ $0 - (-b) = +b$

Para la adición

Regla 1

Si los números tienen signo diferente, realizar la sustracción; si los números tienen los mismos signos realizar la adición.

$(+a) + (-b) = +(a - b)$ $(+a) + (+b) = +(a + b)$

$(-a) + (+b) = -(a - b)$ $(-a) + (-b) = -(a + b)$

Regla 2

Un número positivo sumando con cero es positivo y un número negativo sumado con cero es negativo.

$0 + (+b) = +b$ $\qquad\qquad$ $0 + (-b) = -b$

Diofanto de Alejandría a finales del siglo III d.n.e. en su cuarto libro de aritmética menciona la regla de los signos para números directos. Pero esta regla aparece sólo para Diofanto como un procedimiento de transición con el fin de obtener un número “aceptable” es decir, un número positivo (Fischbein, 1987).

Más específicamente Gallardo (1994) recupera la ley de los signos de Diofanto, haciendo alusión al desarrollo del producto de dos diferencias: “*lo que falta multiplicado por lo que falta es igual a lo que es positivo, mientras que lo que falta multiplicado por lo positivo, es igual a lo que falta”*.

Las reglas de equivalencia para las magnitudes negativas eran conocidas por medio de los teoremas geométricos para la resta como: $(a-b)(c-d) = ac + bd - ad - bc$, pero los hindúes convirtieron estos teoremas geométricos en reglas numéricas para números negativos y positivos, a pesar de que los griegos tenían desarrollado en concepto de la “nada”, ellos nunca interpretaron este concepto como un número como lo hicieron los indios. Brahmagupta quien cometió algunos errores al afirmar que: $\frac{0}{0} = 0$ y sobre la delicada cuestión de $\frac{a}{0}$ para $a \neq 0$ no se comprometió asegurando que: positivo dividido por positivo, o negativo por negativo es afirmativo. Cifra dividida por cifra es nada, positivo dividido por negativo es negativo. Negativo dividido por afirmativo es negativo. Negativo o positivo dividido por cifra es un fracción con eso para el denominador (cifra) (Merzbach y Boyer, 2011).

El problema de justificar la regla de los signos para el producto lo resolvió definitivamente el matemático alemán Hermann Hankel (1839-1873) en 1867, donde ya no se preocupó por encontrar los modelos concretos que justificaran los números negativos, Hankel mostró un cambio de perspectiva donde para él los números negativos no son símbolos de realidades dadas sino, construcciones formales donde considera las propiedades aditivas y multiplicativas de los números reales como positivas. Afirma el siguiente teorema:

> *La única multiplicación en R que puede considerarse como una extensión de la multiplicación usual en R^+ respetando la ley de distributividad a la izquierda y a la derecha es la que se ajusta a la ley de los signos* (Fischbein, 1987).

1.2.5. Resolución de una ecuación

Resolver una ecuación es encontrar uno o varios valores para la incógnita, de tal forma que al sustituir dicho valor se satisfaga la ecuación, es decir, que se cumpla la igualdad. No siempre es posible que todas las ecuaciones tengan solución única, algunas tienen más de una solución y otras ninguna solución. Una consideración muy importante en la resolución de una ecuación consiste en reconocer los sistemas equivalentes ya que al reducir o transformar una ecuación se debe observar equivalencia entre la nueva expresión algebraica y la original, esto se logra necesariamente aplicando de forma estricta las reglas del álgebra elemental.

Un ejemplo del olvido de esta regla, se tiene al resolver la ecuación $\sqrt{7-x} = x-5$ se ha observado que la mayoría de los estudiantes resuelven de forma algebraica transformando la ecuación original por la siguiente $7-x=(x-5)^2$ y los valores que localizan para la incógnita no los sustituyen en el sistema original y por lo tanto no se dan cuenta que los valores encontrados no satisfacen la expresión, por lo tanto, la ecuación en la que se transforma la ecuación original no es equivalente. Resolver una ecuación significa obtener otras ecuaciones equivalentes más simples a partir de la ecuación original, las ecuaciones obtenidas son equivalentes con su antecesora y por transitividad con todas.

Se considera de valor pedagógico y psicológico primero manejar las ecuaciones que tienen solución y después las que no tienen. El uso de identidades aritméticas se puede considerar como un paso intermedio en la adquisición del concepto de ecuación con solución (Kieran y Herscovics,1980).

La noción de solución puede definirse como “encontrar el número escondido por la letra”.

En nuestro caso hemos visto que el álgebra se ha desarrollado a partir de la resolución de ecuaciones.

Kieran y Herscovics (1980), Indican que trasladar un problema verbal en términos de una ecuación, es equivalente a trasladarlo a un lenguaje desconocido para los estudiantes. La mayoría de estos problemas son esencialmente creados y relevantes para el álgebra, pero fallan para desarrollar el significado de ecuación. Esto por cierto, tiene que ver con la modelación matemática, y aunque un problema verbal de álgebra es relativamente simple, trasladarlo significa modelar este problema matemáticamente y esta no es tarea sencilla.

Para el caso de los estudiantes del nivel de Telesecundaria, no es la excepción, los estudiantes encuentran dificultades al momento de hallar la solución para una ecuación de primer grado por lo que, en el apartado siguiente, se mencionan algunos métodos, todos equivalentes, que emplean los estudiantes al momento de avocarse al estudio de dichos temas en el nivel básico.

Describiremos en detalle cada uno de ellos a continuación.

Ejemplo

Resolver

$2x - 8 = 0$

Método 1

Por tabulación

Tabla 3, distintos valores de x, para la ecuación $2x - 8 = 0$

$\boldsymbol{x}$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$\boldsymbol{2x - 8 = 0}$	-16	-14	-12	-10	-8	-6	-4	-2	0

Método 2

Por fórmula

Para $ax + b = 0 \Longrightarrow x = -\frac{b}{a}$

Como $a = 2$ y $b = -8$

$$x = -\frac{-8}{2} = 4$$

Método 3

Por inverso aditivo y multiplicativo

$$2x - 8 = 0$$

$$2x - 8 + 8 = 0 + 8$$

$$2x = 8$$

$$(2x)\left(\frac{1}{2}\right) = (8)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$x = 4$$

Método 4

Por transposición de términos (despeje)

$$2x - 8 = 0$$

el 8 que está restándose del lado izquierdo del signo igual, pasa sumándose al lado derecho.

$$2x = 0 + 8 \Longleftrightarrow 2x = 8$$

el 2 que está multiplicando a la x del lado izquierdo del signo igual, pasará dividiendo a la cantidad que tengo del lado derecho.

$$x = \frac{8}{2}$$

Haciendo operaciones, resulta:

$$x = 4$$

Desde luego todos los métodos tienen sus virtudes y defectos; por ejemplo, el método 1, de tabulación, facilita el paso de la aritmética al álgebra; pero si la solución no es entera difícilmente la encontraran. El método 2, oculta por completo el proceso, y así sucesivamente.

1.2.5.1. Métodos de resolución

Muchas investigaciones se han centrado en la forma en como los estudiantes resuelven las ecuaciones en los diversos niveles educativos, estos enfoques se pueden clasificar en tres tipos:

a) intuitivo,

b) sustitución por tanteo y

c) métodos formales.

Por otro lado, Filloy y Rojano (1989), proponen una forma de resolución de ecuaciones basada en el modelado de objeto y operaciones paso a paso, este procedimiento se conoce como método de los modelos concretos.

a) Intuitivo

Los enfoques de resolución intuitivo incluyen el uso de hechos numéricos, técnicas de recuento y métodos de recubrimiento (Kieran y Filloy, 1989). Por ejemplo,

$m+5=11$ si se resuelve por *el método numérico aditivo* tenemos que $6+5=11$, Otro *método denominado recuento* consiste en percatarse que si se cuenta desde 5 hasta 11 se tienen los números 6, 7, 8, 9, 10 y 11. Es decir, se requieren 6 números en dicho recuento, lo que sería un ejemplo de solución por medio de la técnica de recuento. El uso del *método del recubrimiento* se puede observar en la solución de la siguiente ecuación $8x+6=20x$, el número 6 debe ser lo mismo que $12x$ por que $8x+12x=20x$, por lo tanto, $x=\frac{1}{2}$.

b) Sustitución por tanteo

Este método de resolución de ecuaciones consiste en probar ciertos valores en la ecuación hasta satisfacer la igualdad. Este método, aunque consume demasiado tiempo a los alumnos, lo consideramos un paso intermedio necesario para los métodos formales. También se asegura que los alumnos que utilizan este método tienen una noción de equilibrio entre el lado derecho e izquierdo de la ecuación y de la función del signo igual en su papel de equivalencia (Kieran y Filloy, 1989). Por ejemplo: la ecuación $3x + 1 = 25$ se prueba con los números (2, 3, 4…) hasta satisfacer la equivalencia. Desde luego y como se mencionó anteriormente este método tiene la restricción de soluciones enteras.

c) Métodos formales

Lo que se denomina métodos formales para la resolución de ecuaciones incluyen la transposición de términos, lo que viene siendo cambiar de lado los términos y su signo en la ecuación y otro método considerado formal consiste en realizar la misma operación en ambos lados de la ecuación; este método pone énfasis en la simetría de la ecuación (Kieran y Filloy, 1989). Por ejemplo, $2x + 3 = 5$ el paso siguiente es restar el número 3 a ambos lados de la ecuación $2x + 3 - 3 = 5 - 3$ dando como resultado $2x = 2$, el siguiente paso es dividir entre dos ambos lados de la ecuación o multiplicar por el inverso multiplicativo del coeficiente de la incógnita $\frac{1}{2}(2x) = \frac{1}{2}(2)$; dando como resultado $x = 1$.

d) Modelos concretos

Filloy y Rojano (1989) usan modelos concretos en su modelo de enseñanza de resolución de ecuaciones, el cual consiste en utilizar situaciones concretas donde nuevos objetos y nuevas operaciones son modelados siguiendo varios pasos utilizando el modelo geométrico y el modelo de la balanza. Por ejemplo, paso 1: trasladar la ecuación a un modelo geométrico donde los términos del lado izquierdo de la ecuación se puedan modelar por medio de las longitudes de una figura geométrica conocida y los del lado derecho modelarlo con las longitudes de otra figura geométrica conocida, paso 2: comparar las áreas entre ambas figuras geométricas, paso 3: construir una nueva ecuación, paso 4: resolver esa nueva ecuación y paso 5: verificar la solución. De la misma forma y siguiendo los mismos pasos, se puede emplear el modelo de la balanza, donde se debe considerar balancear la balanza con objetos del mismo peso para lo desconocido (incógnita) con objetos diferentes y del mismo peso también para lo conocido.

El uso de modelos de equilibrio fue usado por Radford y Grenier (1996), donde muestran que la idea de equilibrio facilita el uso de la regla de eliminación de términos semejantes. Por otro lado, Vlassis (2002), en su estudio con alumnos de dos clases del 8º grado, descubrió que el modelo de equilibrio puede ayudar a los estudiantes a aprender el método formal de aplicar la regla de operación a ambos lados de la ecuación, pero pierde sentido el modelo al realizar operaciones con números negativos.

En Rojano y Martínez (2009) y Rojano (2010), se muestran los resultados de un estudio realizado con ocho estudiantes de secundaria en el que se utiliza una versión virtual de un modelo de equilibrio simple y otra versión que emplea poleas y permite trabajar con coeficientes negativos. Ambos modelos se utilizaron para enseñar a los estudiantes a resolver ecuaciones lineales aritméticas y algebraicas. Reportan un desprendimiento del uso de la balanza por parte de los estudiantes al resolver ecuaciones propuestas en un post-cuestionario utilizando solo papel y lápiz y además, el trabajo con la balanza de poleas favorece el descubrimiento de las reglas de la transposición de términos.

Unos años después en estudios realizados por Bonilla y Rojano (2013), en su estudio sobre los procesos de transferencia del aprendizaje de la sintaxis algebraica empleando una balanza virtual para la resolución de ecuaciones lineales con ocho estudiante de nivel secundaria, determinaron que los alumnos pudieron transferir las acciones empleadas con la balanza y desprenderse de ella, al resolver ecuaciones lineales haciendo uso de métodos formales como la transposición de términos y quitar el mismo término o número a ambos lados de la ecuación.

1.2.6. Jerarquía de operaciones

Las expresiones matemáticas son el resultado de acuerdos y convenciones en las que se establecen la simbología, el lenguaje en que se deberán representar y comunicar tanto en textos escolares como en documentos de difusión científica las reglas sobre cómo se deben de relacionar, operar y representar dichas expresiones; tanto para su enseñanza en las escuelas de todos los niveles, como para la publicación de resultados científicos en las áreas relacionadas con las matemáticas.

Una de esas convenciones es el orden en que las operaciones deben ejecutarse, por ejemplo en la expresión $3 + 4 \times 2$, la multiplicación precede a la suma y por tanto, el resultado es 11, por otro lado, todas las expresiones que están al mismo nivel (respecto al orden de prioridad) se ejecutaran de izquierda a derecha, es decir, en el producto y el cociente por ejemplo en $\frac{3}{5}$ x 5 el resultado será 3 debido a que son expresiones que se encuentran al mismo nivel y por tanto ninguna se precede (otra convención).

En Gunnarsson et al., (2016), se indica la convención para el orden en que deben ejecutarse las operaciones, dando preferencia a los paréntesis, seguidos de la potencia, después la multiplicación y división y por último las adiciones y las sustracciones de las expresiones matemáticas.

Una de las partes del artículo anterior (Gunnarsson et al., 2016), relevantes, para el presente trabajo de investigación, es la que se refiere a los errores cometidos en la jerarquía de operaciones en aritmética por estudiantes de secundaria (Blando et al., 1989), bachillerato y en los primeros años de universidad (Pappanastos et al., 2002), así como de futuros profesores (Glidden, 2008). En particular en expresiones de la forma $a \pm b \text{ x } c$ se hace evidente el error del orden de operación; consideran que dicho error, puede ser generado por que los estudiantes no interpretan la expresión de acuerdo con la convención establecida, en su lugar ellos leen la expresión de la misma forma como las cantidades numéricas deben ser leídas, de forma secuencial de izquierda a derecha. Sin lugar a duda, se presenta un conflicto entre la forma natural del lenguaje (secuencia) de izquierda a derecha y la secuencia del álgebra enmarcada por la convención del orden en que las operaciones deben ejecutarse (jerarquía de operaciones).

Tall y Thomas (1991), utilizan el término obstáculo de análisis sintáctico para hacer referencia al conflicto entre la forma en que las expresiones algebraicas deben de ser tratadas y el lenguaje natural tanto hablado, como escrito y leído secuencialmente de izquierda a derecha. Es evidente que se tienen excepciones, en algunos lenguajes los números se pueden exhibir de forma inversa. Este obstáculo se puede presentar de diversas formas, por ejemplo, los estudiantes pueden considerar que ab significa $a + b$, debido a que ellos leen la expresión ab

como a y b y la interpretan como $a + b$. O los estudiantes, pueden leer la expresión $3 + 2a$ de izquierda a derecha e interpretarla como $3 + 2$ obteniendo 5 y considerar que la expresión final es igual a $5a$.

1.2.7. Ecuación de primer grado

Kieran y Herscovics (1980), indican que para introducir el termino ecuación se han utilizado frases abiertas seguidas de operaciones algebraicas utilizadas para dar solución a la ecuación e incluso, la conversión de problemas de palabras a ecuaciones esto involucra otros aspectos que le restan claridad al concepto como es: solución, no solución, variable y por otro lado, que el álgebra, es para los estudiantes el equivalente a trabajar con un lenguaje desconocido. Los maestros están convencidos de estos obstáculos y asumen que con la resolución de ecuaciones mediante la manipulación, el estudiante podría construir significados para la forma algebraica. Recuperando por Herscovics y Kieran lo que dijo Skemp (1971) que lo anterior puede ser alcanzado por algunos estudiantes, pero otros, “inteligentes y aunque trabajen duro encontraran muy difícil sino es que imposible, obtener algún provecho de las manipulaciones de símbolos que ellos no comprenden”

Muchos maestros son conscientes de que los alumnos no manejan el lenguaje de símbolos algebraicos, pero incluso consideran que incluyendo la manipulación de la solución de la ecuación los estudiantes son capaces de dar un significado a la forma algebraica.

En los niveles más elementales, los estudiantes resuelven ecuaciones muy sencillas de la forma $6 + [\quad] = 13$ o $6 + p = 13$ algunas veces denominadas proposiciones del “sumando faltante” y como antesala del uso de las fórmulas básicas de la geometría plana para calcular áreas y perímetros de algunos cuadriláteros y triángulos. Las expresiones de sumando faltante así expresadas, como resultado de problemas verbales y fuera de situaciones contextualizadas no permiten que el estudiante pueda interpretarlas, por otro lado, aseguran Kieran y Filloy (1989) que los alumnos casi nunca utilizan ecuaciones para resolver problemas aritméticos verbales. Si se les pide que escriban una ecuación primero resuelven el problema y enseguida buscaran dar la ecuación, por otro lado, los alumnos que son capaces de resolver un problema son incapaces de dar una ecuación. Por lo generan para los que logran escribir la ecuación, ésta representa por lo general las operaciones hechas al resolver el problema, no presenta una incógnita y el lado derecho del signo igual usualmente se considera como el resultado.

Las ecuaciones lineales $ax + b = 0$ y las ecuaciones cuadráticas $ax^2 + bx + c = 0$ se conocen de forma general como una expresión que define una igualdad. Y cuya resolución implica obtener el o los valores de la incógnita x, que satisfacen la igualdad. Con frecuencia, estas ecuaciones, se suelen confundir con las funciones $f(x) = ax + b$ y $f(x) = ax^2 + bx + c$; puesto que como se observa en ambos casos las ecuaciones y las funciones poseen casi los mismos símbolos y operadores. Sin embargo, son dos conceptos diferentes como hemos afirmado, una ecuación es una igualdad con incógnitas a determinar y una función define una asignación de valores, por ejemplo, en los polinomios:

$M(x) = 3x^3 - 810x^2 + 2\,196\,000 \; y \; P(x) = x^3 - 270x^2 + 972\,000$ el valor de la función en cada caso se adquiere en base al valor que le demos a la variable x y por lo tanto son funciones diferentes. Sin embargo, las ecuaciones que definen:

$x^3 - 270x^2 + 972\,000 = 0 \; y \; 3x^3 - 810x^2 + 2\,916\,000 = 0$

Son equivalentes, a pesar de que poseen números o coeficientes distintos (Cuevas y Mejía, 2003).

En la siguiente sección se presenta la forma en cómo están contenidos los conceptos matemáticos de ecuación de primer grado para el primer y segundo grado de secundaria.

1.2.8. Dosificación de ecuación de primer grado de acuerdo a los Programas de Estudio de la SEP, 2011.

El término ecuación, como lo marcan los planes y programas de estudio de la Secretaria de Educación Pública 2011 se incluye en el currículo escolar desde el primer grado de secundaria en los primeros bloques (II), hasta los últimos bloques del tercer grado; es decir, el concepto de ecuación se marca en los tres grados del nivel de Telesecundaria, favoreciendo las competencias correspondientes a la resolución de problemas de manera autónoma, comunicar información matemática, validar procedimientos y resultados y manejar técnicas eficientemente (SEP, 2011).

En los mismos Programas de Estudio de la SEP, en sus estándares curriculares de matemáticas, establecen los aprendizajes que se esperan que los alumnos adquieran en cuatro periodos escolares o ejes temáticos, así como cuatro competencias que son de importancia primordial en su desarrollo durante la educación básica, tales competencias son: resolver problemas de manera autónoma, comunicar información matemática, validar procedimientos y resultados y manejar técnicas eficientemente, que los conduzcan a un alto nivel de alfabetización matemática.

Los cuatro ejes temáticos escolares son: 1) Sentido numérico y pensamiento algebraico, 2) Forma, espacio y medida, 3) Manejo de la información y 4) Actitud hacia el estudio de las matemáticas.

Para la primaria y secundaria, se consideran sólo los tres primeros de los ejes temáticos anteriores, el primer eje alude a los fines más importantes del estudio de la aritmética y del álgebra en relación con la modelización y generalización de situaciones y también pone en juego diferentes formas de representar y efectuar cálculos.

Para nuestro caso, que corresponde al manejo de contenidos y conceptos como el de ecuación de primer grado, nos corresponde ubicarnos en el primer eje temático escolar, en el tema que corresponde al de número 1.4. de título, *patrones y ecuaciones*, específicamente para el estándar curricular con número 1.4.2. con título, *resuelve problemas que involucran el uso de ecuaciones lineales y cuadráticas* que, en el libro del alumno (que también lo hay para el maestro) para primer y segundo grado, el tema correspondiente a ecuaciones lineales lo ubicamos en el tercer y cuarto bloque respectivamente.

En el segundo aprendizaje esperado del bloque *III* del libro del alumno de primer grado, se plantea resolver problemas que impliquen el uso de ecuaciones de las formas: $x + a = b$, $ax = b$ y $ax + b = c$ donde a, b y c son números naturales, decimales y fraccionarios, mediante las propiedades de la igualdad.

En el segundo aprendizaje esperado del libro del alumno de segundo grado, en el bloque *IV* se plantea resolver problemas que impliquen su planteamiento y resolución de ecuaciones de primer grado de la forma $ax + b = cx + d$ con paréntesis en uno o ambos miembros de la ecuación y donde los coeficientes a, b, c y d son números enteros, decimales, fraccionarios, positivos o negativos.

Como ya se mencionó previamente, la dosificación del concepto de ecuación de primer grado para el diseño de las actividades didácticas del presente trabajo de investigación seguirá la dosificación que se establece en los Programas de Estudio 2011.

CAPITULO II

Marco teórico

Desde la década de los cincuenta y de los setenta del siglo pasado, la educación en matemáticas fue influenciada seriamente por las teorías del aprendizaje conductistas que sostenían que todo el conocimiento estaba construido sobre una simple conexión entre estímulo y respuesta. Se consideraba que los alumnos eran los responsables de su aprovechamiento en el área, independientemente de las formas empleadas por el maestro en el aula. Es decir, si los alumnos no alcanzaban los niveles proyectados por el maestro, se argumentaba que: 1) el alumno no puso atención, 2) el alumno no fue capaz y 3) el alumno lo olvidó (ilustrado en un certificado de álgebra de la escuela de Durrell en 1953), Sutherland (1999).

A finales de la década de los sesenta comenzó a surgir un nuevo enfoque en la escuela matemática, influenciado por un movimiento llamado "nuevas matemáticas" o "matemáticas modernas" en EE. UU. y Europa. Este movimiento consistía principalmente en el desarrollo e innovación de libros de texto por parte de matemáticos universitarios y maestros de matemáticas de escuelas públicas, que priorizaron en sus contenidos el concepto de función, mapeo y transformación y conceptos formales de la matemática. Sutherland en su artículo, recupera una opinión de Brousseau quien expresó lo que sigue: "*con estas reformas, el conocimiento matemático fue reorganizado, restructurado y el alumno en consecuencia se transformó en un curioso e independiente solucionador de problemas*", Sutherland (1999).

La didáctica de las matemáticas ha tenido un desarrollado considerable desde la década de los setenta. Diversas teorías sobre la psicología del aprendizaje de las matemáticas han surgido para explicitar distintos procesos cognitivos, así como propuestas de enseñanza de las matemáticas justificadas en tales teorías.

Este apartado, precisamente tiene el propósito de exponer las propuestas teóricas y didácticas que desde nuestro punto de vista son las más convenientes para cumplir los objetivos de este trabajo de investigación. Por este motivo, dado que nuestro proyecto está relacionado con la enseñanza y aprendizaje de un contenido matemático que se estudia en el nivel básico, requerimos de una propuesta didáctica, una ingeniería y orquestación didácticas, cuyo sustento teórico contemple la construcción de los conceptos matemáticos partiendo de situaciones reales, y transitando por diferentes representaciones como la algebraica, la gráfica y la geométrica. Tal propuesta didáctica, tiene sus fundamentos en estudios hechos por Piaget, Dewey, Clapared, Kerchesteiner, Aebli (1995) y más recientemente Duval y Brousseau. De todos ellos y más, se abrevia la propuesta que elaboran Cuevas y Pluvinage (2003), y que denominan Proyecto de Acción Practica. Esta propuesta es la toma de diversos elementos de corte cognitivo de diferentes marcos teóricos como la didáctica que proponen Cuevas y Pluvinage (2003) y la orquestación instrumental, Trouche (2005) y Trouche y Drijvers (2014).

2.1. Los símbolos en la matemática

Como ya hemos mencionado, la matemática es un lenguaje y como tal la comunicación esta mediada por un conjunto de símbolos propios. Como hemos mencionado, el lenguaje de la matemática tardó siglos en evolucionar, en particular el álgebra como se conoce el día de hoy. Por ejemplo, fue Vieta (1540-1603) matemático francés quien comenzó la introducción de la notación de parámetros en ecuaciones, con letras del alfabeto. Descartes (1596-1650) utilizó la notación completamente simbólica y además, introdujo los exponentes como números superíndices que en día se utilizan en las ecuaciones de orden 2 o más, por mencionar algunos.

En 1801, Carl Friedrich Gauss a través de su libro intitulado "*Disquisitiones Arithmeticae*" introduce símbolos para representar una idea matemática, establece ciertas reglas y propiedades, para continuar con un proceso de construcción de nuevas ideas y conceptos, a través tanto de ideas previas, como de la manipulación de sus respectivas representaciones, y claro está, de la lógica matemática inherente.

En general, esta es la forma que tiene el trabajo en matemáticas, donde el uso de un sistema de signos y símbolos con reglas establecidas es esencial, es decir, en matemáticas es fundamental el uso de sistemas de símbolos para representar sus conceptos e ideas.

Se puede confirmar que el progreso de los conocimientos se acompañó siempre de la creación y del desarrollo de sistemas simbólicos nuevos y específicos que coexistieron más o menos con el primero de entre ellos, la lengua natural. Este fenómeno es transparente en la matemática, se puede encontrar en su historia, en su desarrollo y evidentemente en su estado actual, en cada una de las áreas que la conforman: aritmética, geometría, álgebra, cálculo, en fin, las matemáticas escolares.

2.2. Proyecto de acción práctico

Artigue (1995), define la ingeniería didáctica como una forma de trabajo didáctico, comparable al trabajo que realiza un ingeniero para llevar a cabo un proyecto específico, a través del uso del conocimiento científico, de su dominio y de las herramientas necesarias.

En este sentido, una propuesta didáctica para la enseñanza y/o aprendizaje de las matemáticas puede ser denominada una ingeniería didáctica, sin embargo, debe cumplir otros elementos, como su reproducibilidad (Betancourt, 2014).

Cuevas y Pluvinage (2003) han diseñado una didáctica específica para la enseñanza de las matemáticas, que se dirige a la construcción de conceptos matemáticos desde la secundaria preparatoria y universitarios, es reproducible y se basa en diversos elementos teóricos de la teoría piagetiana como reversibilidad y asociatividad de las operaciones; también retoma algunos elementos de la teoría de los registros de representación de Duval, en el sentido más simple; es decir, como la necesidad de percatarse de las diversas formas de representar un concepto matemático y fomentar una cierta conversión entre los distintos registros de representación. También retoma elementos del contrato didáctico de Brousseau y de su propuesta adidáctica, que los contemplan como parte de la teoría del equilibrio de Piaget. A continuación, se describen los puntos de dicha didáctica:

1. Inducir constantemente a los alumnos a resolver o intentar resolver

problemas. Es esencial que el alumno este siempre efectuando una acción. Es en efecto él mismo, quien, por medio de la resolución de problemas específicos gradualmente dosificados, construye y llega a los conceptos deseados.

2. Para cada introducción de un concepto o de una noción matemática, partir de un problema general que se sitúé en un contexto susceptible de presentar interés por el alumno. Proponer ejercicios que generen problemas o sub-problemas cuya solución, bajo una forma estructurada y coordinada, llegue a expresar o designar el concepto matemático deseado.

3. Inducir al estudiante, una vez resuelto el problema planteado, a validar sus resultados, verificando que ellos tengan un sentido lógico y estén de acuerdo con el problema.

4. Cuando se trate de enseñar cierto tema o concepto matemático complejo, por medio de la resolución de un problema establecido, descomponer o dividir el problema en sub-problemas que representen las operaciones parciales constitutivas; anotando todas las operaciones y/o conceptos que resulten de este análisis y que son necesarias para que el estudiante resuelva el problema inicial. Generar así, un plan de acción, el cual, por medio de ejercicios gradualmente dosificados, lleve de manera coordinada y coherente a conseguir el objetivo.

5. Cada vez que se realicen operaciones que nos lleven a conceptos matemáticos, emplear en la medida de lo posible la operación inversa.

6. Cuando una forma o un método de resolución del problema es mostrado, intentar dar una forma de solución alternativa. En ningún caso imponer una forma de solución.

7. Construir problemas donde el concepto recientemente adquirido sea un elemento de análisis para un tema más avanzado o complejo, o construir problemas que requieren el concepto fuera del contexto didáctico en el que fue enseñado. Eso significa pensar en problemas donde el concepto

enseñado forme parte de la estructura con la que el alumno debe analizar y resolver la cuestión planteada.

8. Cada vez que un concepto matemático se presente en cierto registro de representación semiótica, trabajar (si el concepto lo permite) en otros registros de representación apropiados.
9. Si un concepto matemático está presente en más de un registro de representación semiótica, instrumentar operaciones directas e inversas que favorezcan la articulación (la transferencia) entre los diferentes registros. Cuevas y Pluvinage, 2003.

Para nuestro proyecto, los aspectos que resume la propuesta didáctica anterior para enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos y la ingeniería didáctica, pueden ser combinados con la propuesta teórica de Trouche (2005) denominada orquestación instrumental, dado el advenimiento exponencial de la tecnología digital, todo ello para conformar un proyecto de acción práctico integral que satisfaga las exigencias que demanda el presente proyecto de investigación.

2.3. La tecnología en el aprendizaje de las matemáticas

El vivir cotidiano de las personas transcurre entre ambientes dotados por diferentes recursos fuertemente ligados a su contexto social, estos pueden ser los dados por la propia naturaleza, o como en la mayoría de los casos, son creados conforme a las necesidades de la actividad social. Así, por ejemplo, en un ambiente escolar tradicional tenemos que un simple lápiz es un recurso tecnológico utilizado para apoyar al alumno y profesor en procesos de enseñanza - aprendizaje. Prácticamente para cada contexto, existen distintas actividades con sus respectivos recursos, por lo que, el desarrollo satisfactorio de una actividad en cierto medio social dependerá del uso y dominio de los recursos tecnológicos.

Según Trouche (2003), la relación entre los recursos y los humanos se da en tres distintos niveles asociados con el estatus del dominio de uso del recurso por el usuario - humano.

Bajo estos términos, todo recurso es un artefacto, transformándose en herramienta a partir del momento en que se concibe su simple uso. En este orden, la herramienta será transformada en un instrumento bajo cierto proceso de construcción de varios y diferentes modos de utilización con cierta destreza.

Es precisamente este proceso de transformación del artefacto en instrumento el que nos interesa, por lo que en esta sección presentamos un par de perspectivas teóricas que estudian y describen este fenómeno en un ambiente educativo bajo dos actividades particulares, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

2.4. Génesis instrumental

Los humanos necesitamos de herramientas para el desarrollo satisfactorio de nuestras actividades cotidianas. Un sacapuntas, una licuadora, un martillo o un sacacorchos son herramientas, así como nuestras extremidades también lo son; el lenguaje, ya sea oral o escrito son considerados herramientas. El ser humano aprende a usar estás herramientas y practicando hasta el punto, en que algunos de ellos se convierten en una parte más de nuestro complejo cuerpo.

Desde pequeños, en el ambiente escolar y familiar se nos enseña a utilizar herramientas, en ocasiones lo hacemos por descubrimiento, pero es bajo el uso continuo, que el artefacto llega a integrarse al individuo, convirtiéndose así en un instrumento (constructo psicológico); el lenguaje por ejemplo es un artefacto sumamente complejo útil para la comunicación, pero primero es necesario aprenderlo, asimilarlo y utilizarlo, hasta que llega a convertirse en un instrumento utilizado en múltiples actividades (Trouche 2004).

Con la transformación del artefacto (herramienta) en instrumento (proceso general llamado génesis instrumental), dos procesos particulares tienen lugar: la instrumentación y la instrumentalización. Valga la siguiente analogía para tratar de explicitarlo, aunque hay que resaltar que entre tales procesos existe una dialéctica:

Una vez adquirido el lenguaje, el individuo procederá a su instrumentación en varios grados o niveles, por ejemplo, en un estrato social marginado, los individuos tienen en su mayoría un escaso vocabulario, en general, por lo cual su grado de instrumentación es pobre y consecuentemente se tienen problemas de comunicación. En cambio, en un ambiente escolar universitario se tiene en su mayoría un vocabulario más amplio y en consecuencia su grado de instrumentación es mayor, así como de comunicación.

Ahora bien, en ciertas circunstancias, una vez instrumentado el lenguaje, el individuo procederá a utilizar el lenguaje, no solo para comunicar simples ideas, sino para explicar pensamientos más complejos, al grado de enriquecer su lenguaje agregando nuevos términos con sus respectivas definiciones y usos a su léxico y hará con el instrumento actividades que ni siquiera imaginamos. Este proceso, en el que el individuo utiliza el instrumento para actividades para las que no fue en esencia creado, se denomina instrumentalización. De este modo, la génesis instrumental es el proceso mediante el cual un artefacto (herramienta) se transforma en instrumento, conformándose en el individuo esquemas cognitivos de la herramienta que vienen y se desarrollan por el uso dado a la misma. Los esquemas construidos son tanto individuales como sociales.

En contexto de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas con el auxilio del uso de alguna herramienta computacional y digital, acontecen estos mismos procesos, sin embargo, dado que se requiere la construcción de conceptos matemáticos, la instrumentación e instrumentalización requieren de cierta dirección, de enfoques y trayectorias didácticas que lleven ambos procesos a la comprensión de los conceptos matemáticos; a esta interacción se le llama Orquestación Instrumental (Trouche y Drijvers, 2014).

Los ambientes de aprendizaje con utilización de la tecnología digital y en particular los sistemas de Telesecundaria, requieren de una orquestación instrumental, es decir, de roles bien definidos para los alumnos, profesor y artefactos (Televisión, videograbadoras, proyectores, teléfonos inteligentes, tabletas, laptops, computadoras, calculadoras, internet, entre otros). Claramente la instrumentación depende de las virtudes y defectos del artefacto, del contenido matemático, del profesor, de la didáctica y del alcance económico de la localidad y del individuo para estar en contacto con la tecnología. La instrumentalización depende del alumno y de la visión del profesor para generar este proceso en el aula.

Trouche (2004), define la orquestación instrumental como “configuraciones didácticas (es decir, la disposición de los artefactos disponibles en el entorno, con un diseño para cada etapa del tratamiento matemático) y los modos de explotación de esas configuraciones” consisten en diseñar la organización en la que los diversos artefactos o herramientas disponibles en las aulas de telesecundaria se utilizarán en la construcción de los conceptos de ecuación de primer grado, es decir, constituir el orden de la intervención de las tecnologías con que se disponen en el aula (Tv, DVD, proyector, teléfono inteligente, tableta, computadora, Raspberry, red de intranet y red de Internet), la participación del docente, la componente didáctica incluyendo la actividad interactiva, las hojas de apoyo para el docente y las hojas de actividades para el estudiante.

La orquestación instrumental tiene como finalidad, apoyar al investigador/docente en la génesis instrumental del alumno, es decir, apoyar al alumno o sujeto a que construya un vínculo entre su conocimiento, su actividad y las características de los artefactos (las potencialidades y las desventajas) que le permitan desarrollar métodos de trabajo para nuestro caso, en temas diversos de matemáticas.

Todos los artefactos anteriores y en una misma tesitura, servirán al alumno/sujeto en la creación de un vínculo con el cual pueda construir un método que le sea útil y provechoso en la comprensión de conceptos matemáticos como ecuación de primer grado en el curso de matemáticas que se imparte en la Telesecundaria durante los dos de tres primeros años que dura el programa educativo; diseñar las distintas etapas en que los artefactos se utilizarán, es decir, aprovechar de manera eficiente todos los recursos humanos y tecnológicos con que cuenta cotidianamente dicho sistema educativo.

CAPITULO III

Elementos de la propuesta didáctica

En este capítulo, se presentan y describen las actividades que se diseñaron para introducir el concepto de ecuación de primer grado con estudiantes de Telesecundaria; también, se presenta cómo se implementaron estas actividades y los tiempos requeridos para la puesta en práctica de la presente propuesta didáctica así como las herramientas virtuales utilizadas para llevar a cabo la toma de datos en tiempos de pandemia. Como respuesta a las medidas de confinamiento sanitario en las escuelas de nivel básico desde el 17 marzo de 2020, las actividades se aplicaron en dos modalidades, de forma virtual y a distancia, empleando diversas herramientas como las que ofrece Google Suite para instituciones educativas y un sitio web portátil o de bolsillo llamado EcuSol, diseñado y programado en HTML5 y Javascript, con diversas actividades que tienen por objetivo que el alumno vaya paso a paso y en un grado de dificultad dosificado, realizando las actividades propuestas en cualquier dispositivo digital con conexión a Internet o sin ella. Todas las actividades se adaptaron al formato digital de encuestas de Google Forms. En las actividades extra-clase, se solicitó evidencia de los procedimientos y cálculos desarrollados en la solución de las ecuaciones (fotografía de las hojas utilizadas).

3.1. Instrumentos de medición

La propuesta didáctica se diseñó para el nivel de educación secundaria y de igual forma para Telesecundaria, las actividades diseñadas para cada forma de la ecuación de primer grado que conforme a los programas de estudios 2011 y 2017, son $x + a = b$, $ax = b$, $ax + b = c$ y $ax + b = cx + d$ donde a, b, c y d pueden ser coeficientes enteros, fraccionarios, decimales y positivos o negativos.
Para los planes y programas de estudio más recientes, los de la nueva Escuela Mexicana publicados en 2019, (SEP, 2019), en los contenidos de la educación en el campo formativo del pensamiento matemático, plantea para la educación secundaria en el primer curso, ecuaciones de dos y tres pasos de la forma $ax + b =$

c y de la forma $ax + b = cx + d$. Donde a, b, c y d son coeficientes enteros y racionales en la forma de fracción y decimal.

En esta propuesta didáctica se utilizan diversos recursos tecnológicos orquestados en once actividades didácticas distintas, con el objetivo de promover una mejor compresión del significado y resolución de las ecuaciones de primer grado en la Telesecundaria las cuales se describen a continuación.

3.1.1. Pretest

La actividad 1 corresponde a un cuestionario pretest (anexo 1) en el que se pretende indagar si el estudiante cuenta con los prerrequisitos necesarios para abordar el tema de ecuaciones de primer grado. Esta actividad está dividida en cinco secciones y debido a la instrumentación en línea, fue adaptado al formato de Google Forms (figura 2). Cuenta con ejercicios de opción múltiple y algunos del tipo abierto donde, se le pide al estudiante que escriba los que está haciendo. Contiene ítems de prerrequisitos y del tema a enseñar. La sección A, contiene ejercicios que corresponden al área de la aritmética, en la sección B, C, D y E se proponen ejercicios que corresponde a la forma de la ecuación de un paso $x + a = b$, $ax = b$; dos pasos $ax + b = c$ y de tres pasos $ax + b = cx + d$ respectivamente.

Sección 3 de 6

Sección para la ecuación del tipo: x + a = b

Descripción (opcional)

11 + 6 = [ ] *

- 23
- 17
- 14
- 5
- No se

[ ] + 3 = 11 *

- 9
- 17
- 14
- 8
- No se

¿Cómo se puede comprobar que es correcta la solución? *

Texto de respuesta largo

Escribe la comprobación *

Texto de respuesta largo

Sección 4 de 6

Sección para la ecuación del tipo: ax = b

Elige la respuesta correcta

12 x [ ] = 48 *

- 12
- 36
- 60
- 4
- No se

63 = ([ ])(7) *

- 70
- 9
- 17
- 56
- No se

¿Cómo se puede comprobar que es correcta la solución? *

Texto de respuesta largo

Escribe la comprobación *

Texto de respuesta largo

Sección 5 de 6

Sección para la ecuación del tipo: ax + b = c

Elige la respuesta correcta

(7)(5) + 8 = [ ] *

- 20
- 8
- 43
- 35
- No se

3 x ([ ]) + 12 = 27 *

- 39
- 15
- 5
- 12
- No se

(5)([ ]) + 7 = 32

- 5
- 25
- 39
- 12
- No se

Sección 6 de 6

Sección para la ecuación: ax + b = cx + d

Descripción (opcional)

(9)([ ]) + 21 = (15)([ ]) + 9 *

- 2
- 6
- -1
- 0
- No se

(8)([ ]) + 5 = (3)([ ]) - 10 *

- -3
- 8
- 5
- 2
- No se

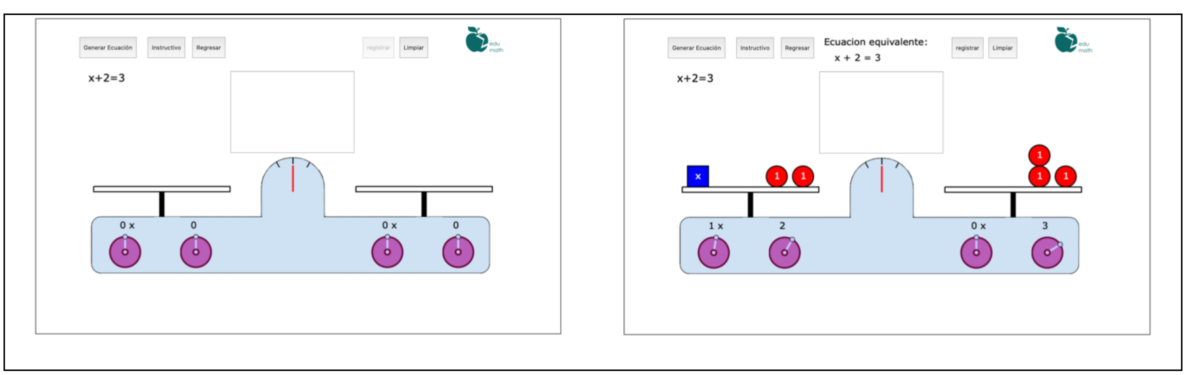
(6)([ ]) - 2 = (4)([ ]) - 12 *

- 6
- -8
- 2
- -5
- No se

Figura 2, Vista parcial del pretest adaptado a Google Forms

3.1.2. Actividades para las ecuaciones de la forma $x + a = b$ y $ax = b$

Las actividades 2 y 3, contienen ejercicios para aprender a resolver las ecuaciones lineales más sencillas, de la forma $x + a = b$ de un paso. Esta forma de la ecuación es el primer paso de la aritmética al álgebra. La actividad 2, tiene como objetivo introducir al estudiante en la resolución de dichas ecuaciones por medio de una balanza virtual en la que nos valimos de la metáfora de equilibrio para realizar un primer acercamiento entre el estudiante, las ecuaciones de un paso y el sitio web EcuSol que incluye todas las actividades de la presenten secuencia didáctica. La balanza virtual se programó en JavaScript para introducir la interactividad y retroalimentación, por condiciones de la simulación, la balanza solo trabaja con coeficientes enteros del 1 al 9. Esto es, la balanza virtual genera aleatoriamente una ecuación del tipo $x + a = b$, cuya solución es un número entero positivo, en el mismo intervalo. Acorde a la propuesta didáctica, esta actividad se divide en tres secciones, en la primera sección se parte de un problema de contexto; enseguida se presenta la balanza virtual y se va guiando paso a paso al estudiante en su uso hasta llegar a encontrar el valor de la incógnita y comprobar la solución obtenida para x (ver figura 3). En la segunda parte, se le pide al alumno que practique encontrando la solución de cinco ecuaciones generadas en forma aleatoria por la balanza, es decir, ecuaciones con coeficientes entre 1 y 9. Finalmente en la tercera sección, se proponen cinco ecuaciones libres con coeficientes mayores a 9 donde se le pide al estudiante que las resuelva y compruebe sin utilizar la balanza u otro tipo de ayuda (anexo 2).



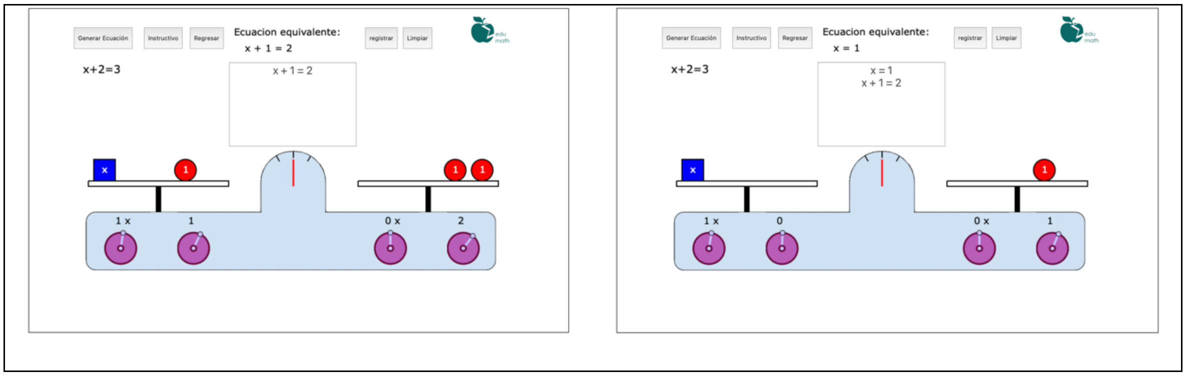


Figura 3. Resolución de una ecuación mediante la balanza virtual

En la actividad 3, se guía al estudiante por el sitio web portátil EcuSol para que continúe aprendiendo a resolver ecuaciones de primer grado de un paso, por medio de las siguientes secuencias:

a) Elegir ecuaciones lineales del tipo $x + a = b$ con coeficientes enteros positivos

- Enseguida, ejercicios propuestos (por EcuSol) y
- Elegir resolución por medio de pasos algebraicos.

b) Elegir ecuaciones con coeficientes enteros positivos

- Después el estudiante propone la ecuación (los coeficientes) y
- Elige para resolverla, por medio de pasos algebraicos

c) Seleccionar dado el valor de la incógnita, el estudiante establece la ecuación correspondiente (proceso inverso) (anexo 3).

En la figura 4, se puede observar la secuencia de la actividad descrita para coeficientes enteros.

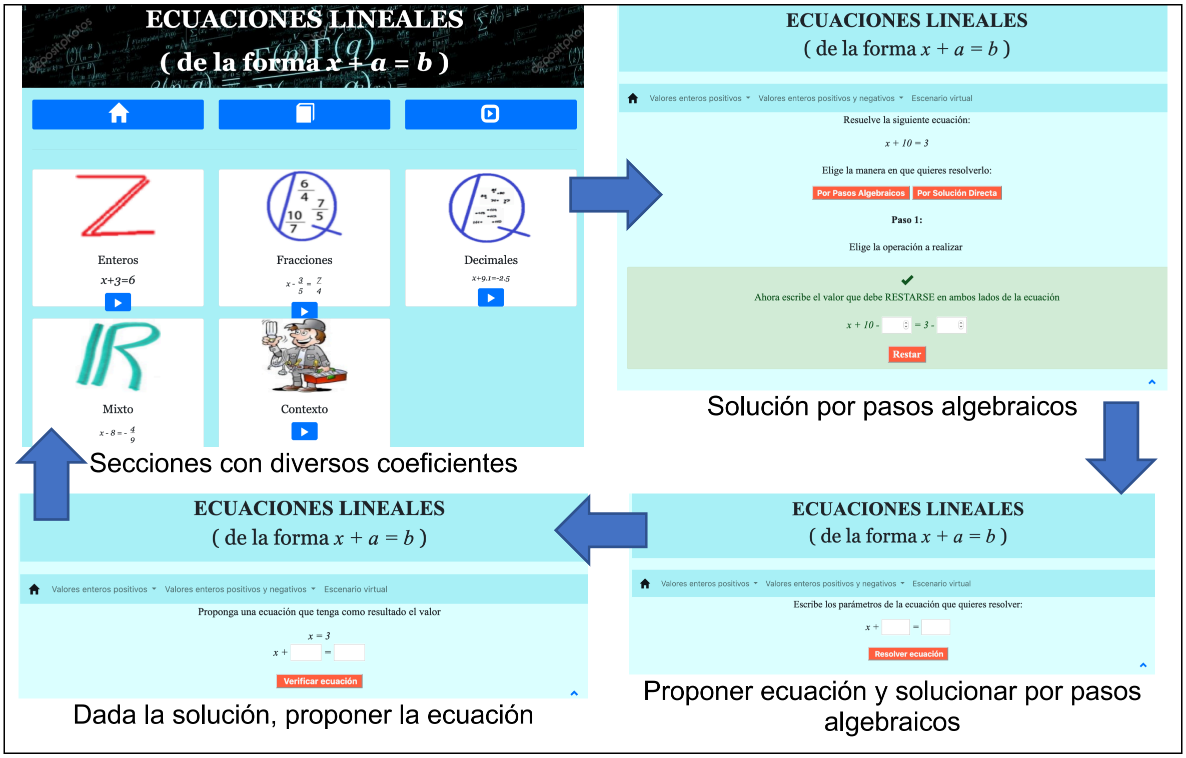


Figura 4. Secuencia de trabajo para coeficientes enteros

Enseguida y de acuerdo con la graduación didáctica, las actividades 4 y 5, contienen ejercicios para aprender a resolver ecuaciones lineales que siguen grado en dificultad, que son de la forma $ax = b$ (ver anexo 4 y 5) también conocidas como directas al igual que la forma anterior. Al igual que la actividad 2 y 3, se propone la misma secuencia en cuanto a la interacción entre el estudiante y el sito web EcuSol, es decir, inicia con la actividad de contexto que tiene por intención mostrar una aplicación cotidiana de las ecuaciones de primer grado de este tipo. Se sigue con la resolución utilizando la balanza virtual, se continúa navegando y resolviendo los ejercicios aleatorios que propone el sitio web; se propone en todo momento, al iniciar la resolución, elegir por métodos algebraicos para encontrar el valor de la incógnita, y después se trabaja con coeficientes enteros, positivos y negativos, decimales y fracciones. Conviene señalar que cuando se resuelve en EcuSol por medio de pasos algebraicos, después de conducir al estudiante en la resolución y revisar en cada momento cada operación efectuada por el estudiante, termina solicitando que el estudiante compruebe, mediante sustitución del valor en la ecuación, la solución encontrada. Esta parte ayuda a significar a una ecuación.

En las secciones correspondientes al trabajo con distintos coeficientes, se repiten las configuraciones mencionadas a, b y c de la primera forma de la ecuación; como actividad extra-clase, se le pide al estudiante que continúe con su aprendizaje y que resuelva con la ayuda del sitio web EcuSol, cinco ejercicios más. Por último, sin la ayuda de la balanza virtual o del sitio web, se le propone al estudiante resolver cinco ejercicios más, similares a los que resolvió en la actividad previa en su celular, tableta o computadora personal.

3.1.3. Actividades para la ecuación de la forma $ax + b = c$ y $ax + b = cx + d$

Las actividades 6, 7, 8 y 9 corresponden a las ecuaciones de la forma $\boldsymbol{ax + b = c}$ y $\boldsymbol{ax + b = cx + d}$ que son el objetivo de todas las actividades, son ecuaciones cuya resolución es de dos y tres pasos y al igual que las actividades ya descritas, siguen una secuencia similar en el sitio web EcuSol. Recordemos, se inicia con un problema en contexto, de acuerdo a la forma de ecuación a tratar, se siguen con la balanza virtual que genera una ecuación aleatoria del tipo $ax + b = c$ y $ax + b = cx + d$ según sea el caso, se sigue con la resolución de ejercicios aleatorios que propone el sitio web; en todo momento, al iniciar la resolución, se propone elegir por métodos algebraicos para encontrar el valor de la incógnita; posteriormente se trabaja con coeficientes: enteros, positivos y negativos, decimales y fracciones; finalmente, se proponen actividades a desarrollar en casa en una primera etapa con ayuda del sitio web iniciando con la balanza y en la segunda etapa, sin ayuda alguna. En los anexos 6, 7, 8 y 9 se puede verificar cada una de las secciones y las actividades que desarrollaron los estudiantes del nivel de Telesecundaria.

3.1.4. Postest

La actividad 10 (ver anexo 10) corresponde al post test, con el que se busca analizar el nivel alcanzado por el alumno en la resolución de ecuaciones de dos y tres pasos sin utilizar ninguna ayuda, solo con lápiz y papel en base a lo que aprendieron de las actividades realizadas con coeficientes enteros, racionales, positivos y negativos. La actividad contiene ejercicios en los que se le pide al estudiante encontrar el valor de la incógnita y comprobarlo. Además, en otros ejercicios, se le propone el problema inverso, es decir, se le da el valor de la incógnita y se le pide que proponga una ecuación que se satisfaga con dicho valor. Se espera observar no solo si el alumno es capaz de encontrar la solución de una ecuación de primer grado, si no también, recorrer el camino inverso. Todo lo anterior es requisito del marco didáctico. En la parte final de la actividad, en los que por medio de preguntas abiertas se le pide al estudiante que explique lo que es una ecuación, su solución y los pasos que a su consideración se deben de seguir para llegar a dicha solución.

3.1.5. Entrevista

Finalmente, la actividad once corresponde a la obtención de información de los estudiantes participantes, en relación con su forma de resolver ecuaciones de primer grado por pasos algebraicos, su comprobación, aplicación y sobre el manejo del sitio web EcuSol. En el anexo once se pueden rescatar las preguntas que conforman la entrevista realizada por medio de Google Meet de algunos estudiantes de Telesecundaria.

En la siguiente tabla se resume el número de actividades contenidas en la propuesta didáctica y los tiempos aproximados de trabajo.

Tabla 4. Actividades de la propuesta didáctica

	Primer grado				Tiempo
Ecuación / Actividad	$a + x = b$	$ax = b$	$ax + b = c$	$ax + b = cx + d$	min
1.- Pretest					60
2.- Balanza					120
3.- Sitio web					120
4.- Balanza					120
5.- Sitio web					120
6.- Balanza					120
7.- Sitio web					120
8.- Balanza					120
9.- Sitio web					120
10.- Post-test					60
11.- Entrevista					20
Total					1100

3.2. Proyecto de acción práctico (PAP)

La propuesta didáctica está conformada por once actividades y para su implementación a más de 130 km de la capital en el medio rural, se utilizaron diversas herramientas virtuales que hicieron posible tener contacto permanente con el estudiante durante el proyecto de acción de práctico. Las herramientas utilizadas fueron:

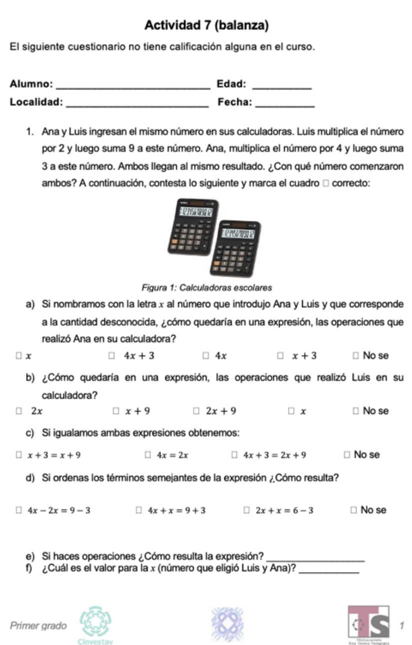
1. Google Classroom.
2. Google Gmail.
3. Google Forms.
4. Nube de almacenamiento Google Drive.
5. YouTube.
6. WhatsApp.
7. Sitio Web EcuSol.
8. Conexión a internet.
9. Cámara fotográfica.
10. Conversor de archivos *.jpeg a *.pdf.

3.2.1. Rediseño y adaptación de los instrumentos de medición

La implementación del proyecto de acción práctico fue un desafío total, debido a que las actividades planeadas se diseñaron para aplicarse de forma presencial. Sin embargo, debido a la pandemia nos vimos en la necesidad de rediseñar el formato, estrategia y formas de aplicación para obligadamente aplicarlas en línea y a distancia debido a las medidas de confinamiento sanitario establecidas por las autoridades de salud.

Para poder hacer la adaptación fue necesario recurrir a los artefactos señalados anteriormente. De esta forma, los instrumentos de medición mencionados en el apartado anterior se adaptaron por medio de la herramienta de Google Forms a cuestionarios con respuesta de opción múltiple y respuesta abierta que quedaron organizados en varias secciones. Desde el pretest hasta la entrevista, los instrumentos de medición y sus respuestas se almacenaron en la nube de alojamiento Google Drive para su tratamiento e interpretación en el capítulo siguiente. En la figura 5 se puede observar un fragmento de la adaptación de los instrumentos de medición al formato digital, empleando la herramienta Google Forms compatible para cualquier sistema operativo (SO) y dispositivo digital.

Instrumento de medición 7



Actividad 7 (balanza)

El siguiente cuestionario no tiene calificación alguna en el curso.

Alumno: ______________________ **Edad:** _________

Localidad: ______________________ **Fecha:** _________

1. Ana y Luis ingresan el mismo número en sus calculadoras. Luis multiplica el número por 2 y luego suma 9 a este número. Ana, multiplica el número por 4 y luego suma 3 a este número. Ambos llegan al mismo resultado. ¿Con qué número comenzaron ambos? A continuación, contesta lo siguiente y marca el cuadro □ correcto:

Figura 1: Calculadoras escolares

a) Si nombramos con la letra x al número que introdujo Ana y Luis y que corresponde a la cantidad desconocida, ¿cómo quedaría en una expresión, las operaciones que realizó Ana en su calculadora?

□ x □ $4x+3$ □ $4x$ □ $x+3$ □ No se

b) ¿Cómo quedaría en una expresión, las operaciones que realizó Luis en su calculadora?

□ $2x$ □ $x+9$ □ $2x+9$ □ x □ No se

c) Si igualamos ambas expresiones obtenemos:

□ $x+3=x+9$ □ $4x=2x$ □ $4x+3=2x+9$ □ No se

d) Si ordenas los términos semejantes de la expresión ¿Cómo resulta?

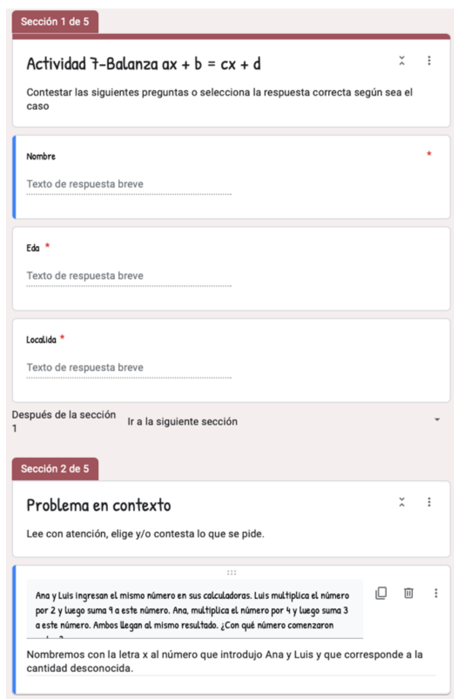
□ $4x-2x=9-3$ □ $4x+x=9+3$ □ $2x+x=6-3$ □ No se

e) Si haces operaciones ¿Cómo resulta la expresión? ________________

f) ¿Cuál es el valor para la x (número que eligió Luis y Ana)? ___________

Primer grado Cinvestav 1

Instrumento de medición 7 adaptado



Sección 1 de 5

Actividad 7-Balanza ax + b = cx + d

Contestar las siguientes preguntas o selecciona la respuesta correcta según sea el caso

Nombre *

Texto de respuesta breve

Eda *

Texto de respuesta breve

Localida *

Texto de respuesta breve

Después de la sección 1 Ir a la siguiente sección

Sección 2 de 5

Problema en contexto

Lee con atención, elige y/o contesta lo que se pide.

Ana y Luis ingresan el mismo número en sus calculadoras. Luis multiplica el número por 2 y luego suma 9 a este número. Ana, multiplica el número por 4 y luego suma 3 a este número. Ambos llegan al mismo resultado. ¿Con qué número comenzaron

Nombremos con la letra x al número que introdujo Ana y Luis y que corresponde a la cantidad desconocida.

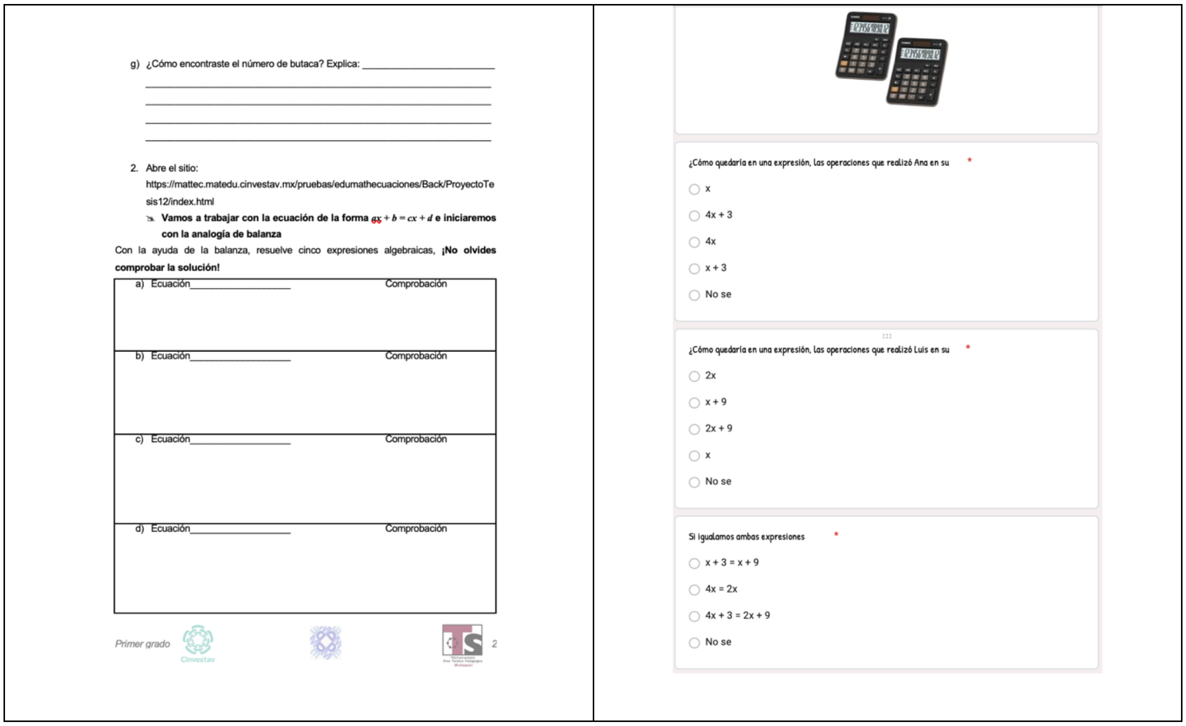


Figura 5. Adaptación de los instrumentos de medición

3.2.2. Sesiones de trabajo del PAP

El primer contacto con los estudiantes, del medio rural, se dio por medio de una llamada al teléfono móvil de casa, un móvil conectado a una antena aérea, debido a que los celulares comunes no reciben señal para estar conectados a una red de telefonía como en las municipalidades o ciudades. Seguido de eso, se integró una base de datos con los teléfonos de los alumnos o sus familiares, para conformar un grupo de trabajo empleando la aplicación de WhatsApp (aplicación de mensajería instantánea para teléfonos inteligentes mediante internet), es importante mencionar que en su mayoría las localidades rurales no cuentan con red de telefonía para teléfonos móviles, pero tienen servicio de internet satelital al que tienen acceso mediante la compra de datos (MB) por medio de códigos de prepago con una tasa fija de consumo o por un tiempo establecido por el proveedor del servicio. Una vez establecido el contacto con los estudiantes del sistema de Telesecundaria, se les solicita que generen una cuenta de correo electrónico en Gmail de la empresa Google y lo compartan en el grupo de trabajo de WhatsApp para enseguida conformar un aula virtual en el sitio web educativo gratuito desarrollado también por la empresa Google denominado Classroom (Google Classroom). En la figura 6, se muestra el ambiente del aula virtual.

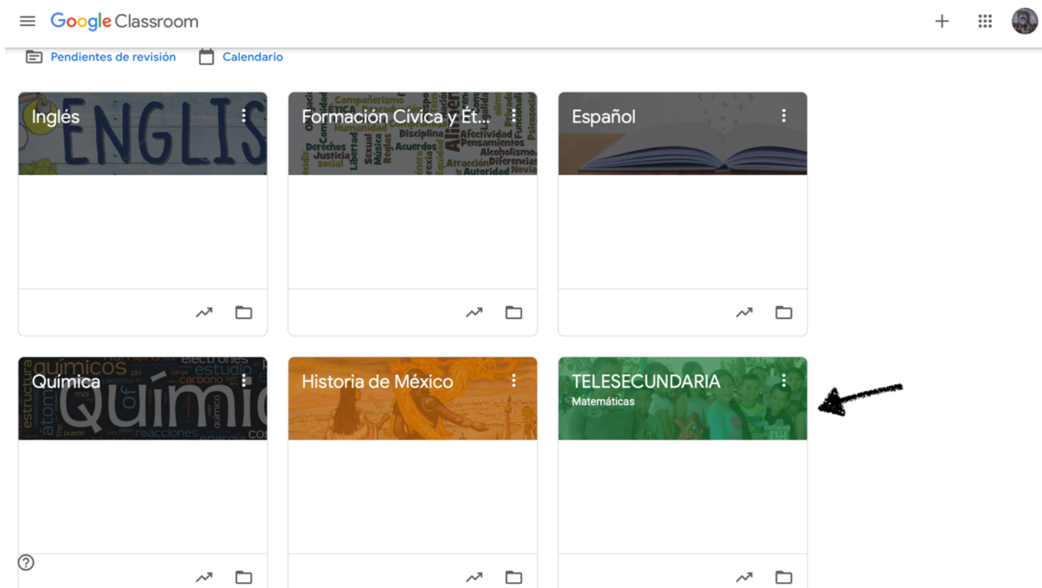


Figura 6. Aula virtual en Google Classroom

Para el inicio del ciclo escolar 2020-2021, los alumnos y docentes del nivel básico en el Estado de Michoacán, contaron en su mayoría con una cuenta de correo electrónico institucional de Google cuyo domino quedó como usuario@mich.nuevaescuela.mx que les brindaba acceso a casi todas las aplicaciones de *G Suite for Education*, en el caso particular y para este grupo de trabajo llegó dicha cuenta después de la puesta en marcha de la propuesta didáctica por lo que se trabajó con cuentas personales.

Con los alumnos incluidos (inscritos) en el aula virtual, se generó la clase virtual de matemáticas y se comenzaron a realizar las primeras pruebas de trabajo con los alumnos. Como resultaba poco factible estar conectado por periodos prolongados de tiempo, se compartieron tutoriales sobre como:

- Crear una cuenta de correo electrónico
- Ingresar a Google Classroom

- Revisar asignaciones
- Enviar tareas y cómo
- Convertir imágenes *.jpeg a archivos *.pdf empleando la aplicación china CamScanner.

Mediante el grupo de trabajo (WhatsApp) y posteriormente en la clase virtual de matemáticas (Google Classroom) como una asignación inicial.

En la figura 7, se puede observar el entorno de la clase virtual de matemáticas.

Figura 7. Clase virtual de matemáticas

En la figura 8, se muestra parte de las asignaciones (actividades) de la propuesta didáctica del P.A.P. en el aula virtual de matemáticas, es importante recordar que las actividades se quedaron guardadas en la nube de Google Drive para su tratamiento posterior.

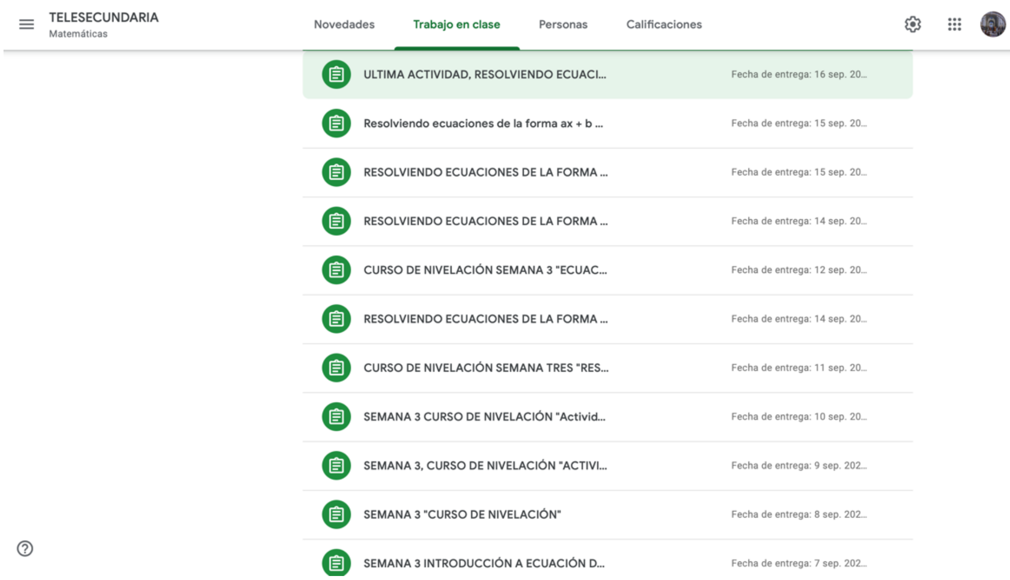


Figura 8. Programación de la clase virtual de matemáticas

Para mostrar a los estudiantes el uso de la balanza virtual y el sito web EcuSol se realizaron algunos videos tutoriales (figura 9) que se encuentran en el mismo sitio web y en https://www.youtube.com/channel/UC9oXAZMEA6jUsd-YgEP42tA canal del sitio web de YouTube.

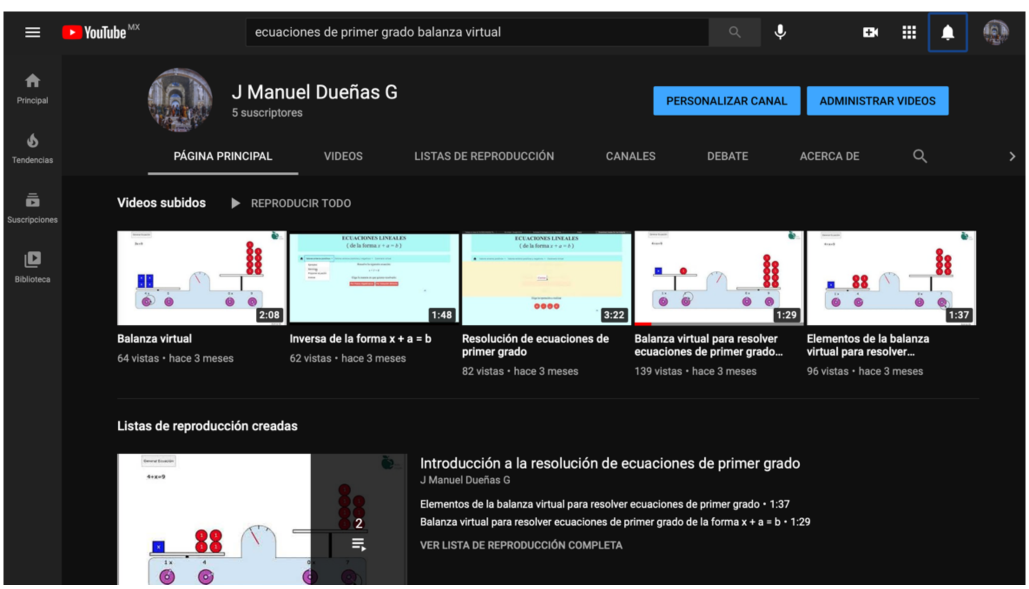


Figura 9. Video tutoriales que muestran el uso del sitio web EcuSol y la balanza

Le llamamos al sitio web EcuSol portátil, porque se puede descargar al celular o tableta del estudiante y trabajar las actividades sin una conexión a la Internet (ver, figura 10). También tiene la capacidad de retroalimentar y evaluar por medio de globos de texto las respuestas dadas por el estudiante y detenerlo en su avance en los ejercicios hasta que la respuesta dada sea la correcta.

Figura 10. Pantalla de inicio del sitio web portátil

La figura 11, muestra el resumen de la ruta de trabajo y artefactos del Proyecto de Acción Práctico, utilizado para cada sesión con estudiantes de Telesecundaria.

Figura 11. Ruta de trabajo del P.A.P.

En cada una de las sesiones y hasta el final de la propuesta didáctica los estudiantes iniciaban sus actividades a las 8:00 hrs, es decir, entraban al aula virtual y después a la clase de matemáticas para revisar su asignación del día. El trabajo entre docente investigador y alumno se realizó de la forma siguiente, desde la preparación de los instrumentos de medición hasta la implementación del proyecto de acción práctico.

Docente

1. Construir la actividad correspondiente en el formato de Google Forms.
2. Verificar que la liga al sitio web EcuSol este activa.
3. Verificar que la liga al canal de YouTube funcione y muestre el video que corresponde a la sesión de trabajo.
4. Elaborar la hoja de ejercicios y convertirla al formato pdf.
5. En la clase virtual de matemáticas, subir todas las actividades en una sola asignación y para cada una de las sesiones de trabajo.
6. En el apartado para las instrucciones en cada asignación, establecer los tiempos de entrega y el formato de las evidencias (pdf de preferencia) en que deberán entregarse las actividades.
7. Calendarizar la actividad para que sea vista por el estudiante en la semana y/o día programado.
8. Contactar a los estudiantes por medio del grupo de trabajo de WhatsApp para motivarlos e invitarlos a realizar las actividades y recordarles que revisen y estén pendientes de sus asignaciones.
9. Monitorear y seguir el trabajo de los estudiantes de forma permanente empleando el tablón de mensajes de Google Classroom, el chat de WhatsApp (grupo de trabajo y dudas) y si el alumno se encontraba en tránsito llamadas telefónicas.

Alumno

1. Estar al pendiente del chat del grupo de trabajo y dudas de WhatsApp en el horario de trabajo de 8:00 a 10:00 hrs.
2. Ingresar a Google Classroom para revisar su asignación del día.
3. Contestar si lo hay, el cuestionario digital que corresponda.
4. Revisar los videos tutoriales sugeridos en YouTube o el sitio web portátil.
5. Descargar la hoja de actividades en su teléfono celular, tableta o

computadora.

6. Contestar las actividades en su libreta sin omitir paso alguno interactuando con la balanza virtual, el sitio web portátil o sin la ayuda de ambos.
7. Al terminar sus actividades o ejercicios sugeridos en la asignación, tomar fotografías a su cuaderno, convertir sus archivos al formato pdf mediante la aplicación gratuita CamScanner o cualquier otra y subirlo a la clase virtual de matemáticas para entregar y completar su asignación.
8. Estar en contacto permanente con el docente investigador para resolver dudas sobre la secuencia de las actividades de cada asignación.

CAPITULO IV

Resultados

Debido a la pandemia por COVID-19, las actividades de instrucción tuvieron que realizarse de forma virtual y a distancia en una escuela Telesecundaria ubicada en el medio rural en la tierra Caliente del Estado de Michoacán, durante tres semanas al inicio del ciclo escolar 2020-2021 a un total de 10 estudiantes de nuevo ingreso de edades de entre los 12 y 14 años.

Los resultados que se presentan corresponden a una segunda experiencia didáctica, después de haber experimentado la secuencia didáctica con solo un escenario digital, virtual e interactivo (EDVI), la balanza. Reportamos en el predoctoral, que en esa ocasión los resultados previos mostraron que los alumnos no pudieron desprenderse del modelo balanza, es decir, en la actividad final, en la que exploramos las habilidades adquiridas por los estudiantes pudimos observar que no utilizaban los métodos formales para resolver las ecuaciones de primer grado, sino por el contrario, seguían dibujando platos de la balanza con sus pesos y contrapesos de valor conocido y desconocido.

Los resultados obtenidos por los estudiantes en esta segunda experiencia didáctica desde el pretest hasta el postest en la presente propuesta didáctica son cualitativamente diferentes y se describen en este penúltimo capítulo de un trabajo de investigación que pretende abonar un pequeño granito de arena en el complejo edificio construido por grandes investigadores y especialistas en el área que han dedicado su vida a la didáctica y enseñanza del álgebra en el nivel básico en México, España, Canadá, EEUU y en fin, en cualquier aula del orbe en dónde se registren problemas en el aprendizaje de conceptos matemáticos que se ven directamente reflejados en el aprovechamiento escolar.

4.1. Pretest

El pretest se divide en 5 secciones y los resultados presentados son los promedios de los ejercicios de cada sección. La sección A que corresponde a la aritmética y las secciones B, C, D y E contiene ítems para trabajar con las formas de la ecuación $x + a = b$, $ax = b$, $ax + b = c$ y $ax + b = cx + d$ respectivamente. Lo que obtuvimos fue lo siguiente:

Sección A, que corresponde a la aritmética se observa en la tabla 5 la dificultad que presentan los estudiantes en el trabajo con fracciones (racionales) lo que sin duda nos representará una dificultad en la solución de ecuaciones con este tipo de coeficientes.

Sección A	I. 7 + 4 = [ ]	II. [ ] + 3 = 15	III. [ ] - 11 = 13	IV. 17 - [ ] = 2	V. [ ] + 3.7 = 9.9	VI. 8.3 - 4.3 = [ ]
Aciertos	100%	100%	90%	100%	100%	50%
Sección A	VII. 3/5 + 2/3 = [ ]	VIII. 1/2 - 1/3 = [ ]	IX. 4/3 x 5/2 = [ ]	X. 7/3 ÷ 5/2 = [ ]	XI. (6)(5) = [ ]	XII. 6 x 5/2 = [ ]
Aciertos	40%	50%	60%	60%	80%	70%
Sección A	XIII. 5/2 x 8 = [ ]					
Aciertos	70%					

Tabla 5, resultados del pretest, sección A

De la tabla se observa que, en las operaciones aritméticas, cuando se pasa de los enteros a los racionales las deficiencias aumentan.

En la sección B y cómo se muestra en la tabla 6, se trata de buscar antecedentes en los estudiantes en diversas configuraciones en la resolución de expresiones de valor faltante de la forma $x + a = b$. Lo que se obtuvo fue:

Sección B	I. 11 + 6 = [ ]	II. [ ] + 3 = 11	III. 7 + 5 = 4 + [ ]	IV. [ ] + 4.5 = 5 + 11	V. 2.5 + 17.5 = [ ] + 15
Aciertos	100%	70%	60%	60%	50%

Tabla 6, resultados del pretest, sección B

Conforme el grado de dificultad aumentó de forma gradual observamos que en operaciones directas en donde el signo igual juega el papel de mostrar el resultado correspondiente de las operaciones del lado opuesto, los estudiantes pudieron contestar correctamente en su totalidad estos ejercicios, salvo el de un número desconocido sumado a otro conocido me da como resultado un número conocido. Por otro lado, las complicaciones se hacen tangibles al momento de jugar con otro sentido del signo igual, el de equivalencia, en esta parte los alumnos solo encuentran el resultado de los sumandos despreciando el número que ya se tiene, es decir, en el ejercicio 2.5 + 17.5 = [] + 15 los estudiantes reportaron como respuesta 20 sin importar que ya contaban con 15 y que solo necesitaban 5 para obtener el valor de los sumandos del lado izquierdo. De lo que se puede comprobar el aserto de Kieran (1981), cuando menciona que los estudiantes perciben al signo igual como una operación a realizar.

En la tabla 7, se muestran los resultados de la sección C que obtuvieron los estudiantes en la resolución de expresiones de valor faltante de la forma $ax = b$ donde observamos que las dificultades estan del lado operativo del producto y sus propiedades. No ven la igualdad como una clase de equivalencia.

Sección C	I. 12 x [ ] = 48	II. 63 = ([ ])(7)
Aciertos	80%	50%

Tabla 7, resultados del pretest, sección C

En la tabla 8, se muestran los resultados que obtuvieron los estudiantes en la sección D en la resolución de expresiones de valor faltante de la forma $ax + b = c$. El número de aciertos mas bajo se presenta en expresiones donde el signo igual se utiliza además como una relación de equivalencia y con coeficientes decimales.

Sección D	I. (7)(5) + 8 = [ ]	II. 3 x ([ ]) + 12 = 27	IV. [(4)([ ]) + 2 = 5 + 5	V. 1.5 x [ ] + 10 = 3 + 11.5
Aciertos	80%	80%	80%	40%

Tabla 8, resultados del pretest, sección D

Es notable observar que cuando los números pasan de enteros a racionales los errores aumentan.

En la siguiente tabla (9) se muestran los resultados de la última sección (E). En esta sección se trabajó con expresiones de valor faltante de la forma $ax + b = cx + d$. En esta forma de ecuación la más completa conocida también como de tres pasos, pudimos observar que los alumnos presentaron porcentajes muy bajos en sus aciertos en todos los ejercicios de exploración de los conocimientos previos. Se evidencia el problema en el manejo de números negativos reportado por Gallardo (1993).

Sección E	I. (9)([ ]) + 21 = (15)([ ]) + 9	II. (6)([ ]) - 2 = (4)([ ]) - 12	III. (4)([ ]) - 3 = (2)([ ]) + 7
Aciertos	60%	40%	50%

Tabla 9, resultados del pretest, sección E

En resumen, en el siguiente gráfico (figura 12) se muestran los aciertos obtenidos y a su vez, nos indican el punto de partida de los estudiantes y sus posibles dificultades para el desarrollo del trabajo de la propuesta didáctica del presente trabajo de investigación. Al concluir con esta actividad, se mostró la resolución de cada una de las secciones con la finalidad de aclarar algunas dudas y retroalimentar al estudiante en cuanto al sentido distinto del signo igual.

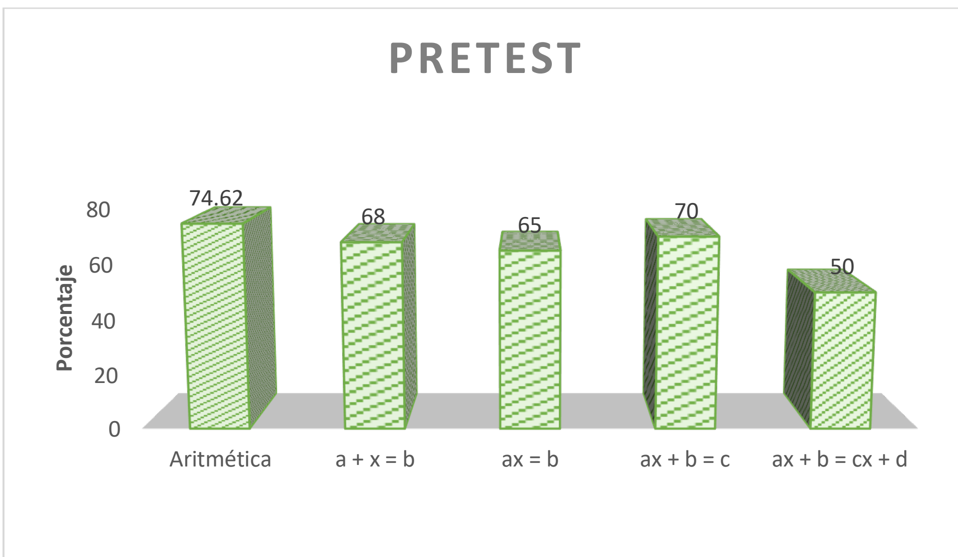


Figura 12. Resultados del pretest

4.2. Actividad 2 y 3

Las actividades dos y tres corresponden al trabajo con la ecuación de un paso, caso: $a + x = b$ utilizando el EDVI-balanza (balanza virtual) y el sitio web EcuSol respectivamente. Los resultados que se presentan son de los de cinco estudiantes que realizaron en su totalidad la propuesta didáctica, trabajaron en sus dispositivos digitales y los registraron en los formularios de Google Forms:

Para la actividad 2, se propusieron diez ejercicios a resolver empleando el EDVI-balanza, los alumnos se apropiaron del escenario virtual con la ayuda de unos videos tutoriales ubicados en YouTube® y se corroboró mediante un pequeño cuestionario sobre el manejo del Escenario Digital Virtual Interactivo. En la tabla 10, se presentan en una columna el ejercicio a resolver, en otra, el valor encontrado por el estudiante y en una última columna el valor correcto; también se observa un gráfico en donde se resume si el estudiante encontró el valor correcto para la ecuación propuesta (aleatoria) por el EDVI-balanza.

Estud.	Ejercicios	Correcto	Incorrecto	Elección	Correcta	Estud.	Ejercicios	Correcto	Incorrecto	Elección	Correcta
1	x + 5 = 9	1	0	4	4	1	4 + x = 6	1	0	2	2
2	2 + x = 6	1	0	4	4	2	7 + x = 14	1	0	7	7
3	x + 3 = 7	1	0	4	4	3	x + 5 = 6	1	0	2	2
4	6 + x = 8	1	0	2	2	4	x + 4 = 9	1	0	5	5
5	5 + x = 9	0	1	9	4	5	x + 4 = 6	0	1	5	2

Estud.	Ejercicios	Correcto	Incorrecto	Elección	Correcta	Estud.	Ejercicios	Correcto	Incorrecto	Elección	Correcta
1	5 + x = 7	1	0	2	2	1	5 + x = 8	1	0	3	3
2	5 + x = 14	1	0	9	9	2	1 + x = 10	1	0	9	9
3	x + 2 = 8	1	0	6	6	3	x + 3 = 6	1	0	3	3
4	3 + x = 5	1	0	2	2	4	4 + x = 7	1	0	3	3
5	x + 3 = 6	0	1	2	3	5	x + 5 = 9	0	1	3	4

Tabla 10. Resultados de la actividad 2

En la tabla 11, se muestra lo que contestaron los estudiantes sobre la comprobación de una ecuación en donde el alumno 2, 3 y 4 presentan su respuesta con apego al modelo concreto, es decir, no hay un desprendimiento lo que es completamente normal y coincide con lo reportado por Vlassis en 2002.

Estud.	**¿Cómo sabes que el valor de x que obtuviste es el correcto?**
1	5 + x = 6 tenemos que un número que sumado con 5 nos de 6.
2	Porque ponemos x en el lado izquierdo y en el derecho cierto número de cuadros con valor a 1.
3	Porque los resultados me los esta dando la balanza.
4	Porque la balanza se equilibra.
5	x + 5 = 8

Tabla 11, comprobación de una ecuación, actividad 2

Para la actividad 3, que corresponde al trabajo con el sitio web EcuSol se presentan una parte de los resultados de cuatros secciones que son: resolución de ecuaciones con coeficientes enteros, decimales, fraccionario y la inversa (se proporciona el valor de x y el estudiante propone la ecuación) en las siguientes tablas (12, 13, 14 y 15):

Estud.	Ejercicios	Correcto	Operación	Respuesta	**Explica cómo se comprueba la solución de una ecuación**
1	x + 6 = 8	1	Resta	2	El izquierdo es igual al derecho
2	x + 5 = 8	1	Resta	3	Con una balanza o una expresión algebraicas
3	x + 1 = 10	1	Resta	9	Sustituyendo
4	x + 7= 7	1	Resta	0	Como el valor del lado izquierdo de la ecuación es igual al valor del lado derecho, quiere decir que está correcta 0 = 0
5	x + 5 = 10	0	Suma	5	Sumando

Tabla 12, Coeficientes enteros y comprobación de una ecuación, actividad 3

Estud.	Ejercicio	Correcto	Operación	Respuesta	**Explica cómo se comprueba la solución de una ecuación**
1	x+6.1=9.1	1	Resta	3	El lado izquierdo es igual al lado derecho.
2	x+2.5=4.5	1	Resta	2	Con una balanza o con el método algebraico que acabamos de ver que es, restar el resultado de la cuenta con el número de la izquierda del signo igual.
3	x + 7 = 8	1	Resta	1	Siguiendo el procedimiento del sitio.
4	x + 1.2 = 3.9	1	Resta	2.7	Como el del lado izquierdo de la ecuación es igual al valor del lado derecho, quiere decir que está bien.
5	x + 8 = 16	0	Suma	8	Sumando.

Tabla 13, Coeficientes decimales y comprobación de una ecuación, actividad 3

Estud.	Ejercicio	Correcto	Operación	Respuesta	**Explica cómo se comprueba la solución de una ecuación**
1	10/9+x=9/4	1	Resta	41/36	El lado izquierdo es igual al derecho.
2	x+6/2=10/3	1	Resta	2/6	Con una operación, restando el número de la derecha del signo igual con el de la izquierda del signo igual…
3	x + 4 = 10	1	Resta	6	6+4=10
4	x+3/10 = 5/2	1	Resta	11/5	Como el valor del lado izquierdo de la ecuación es igual al valor del lado derecho, quiere decir que está bien.
5	x - 9 = 4	0	Resta	9	Restando.

Tabla 14, Coeficientes fraccionarios y comprobación de una ecuación, actividad 3

Estud.	Valor de x	Ecuación	Correcto	**Explica cómo encontraste la ecuación**
1	-6	x+12=6	1	El izquierdo es igual al derecho.
2	5	x+5=10=5+5	1	Haciendo lo que me pedía, restando el número de la derecha del signo igual con el de la izquierda quedando como resultado el valor de x.
3	10	x-0=10	1	Fui haciendo lo que me pedía el sitio web.
4	6	x + 5 = 11	1	Con la ayuda del valor de x tenia que encontrar un número que sumándolo con x me diera el resultado correcto.
5	8	x+4=8	0	Sumando y multiplicando.

Tabla 15, Inversa y cómo se genera la ecuación, actividad 3

4.3. Actividad 4 y 5

Las siguientes respuestas corresponden a la resolución de la ecuación de un paso del tipo $ax = b$.

En la actividad 4, se les propuso a los estudiantes que utilizaran el EDVI-balanza con la finalidad de introducirlos mediante la metáfora de equilibrio en la resolución de ecuaciones de un paso y en las tablas siguientes (16 y 17) se muestra una parte de la información obtenida de esta actividad y las respuestas emitidas por los estudiantes al probar que el valor obtenido para x es el correcto, respectivamente.

Estud.	Ejercicios	Correcto	Incorrecto	Elección	Correcta	Estud.	Ejercicios	Correcto	Incorrecto	Elección	Correcta
1	4x = 8	1	0	2	2	1	7x = 7	1	0	1	1
2	2x = 6	1	0	3	3	2	5x = 10	1	0	2	2
3	9x = 9	1	0	1	1	3	3x = x	1	0	1	1
4	7x = 7	1	0	1	1	4	4x = 8	1	0	2	2
5	2x = 4	1	0	2	2	5	4x = 8	0	1	4	2

Estud.	Ejercicios	Correcto	Incorrecto	Elección	Correcta	Estud.	Ejercicios	Correcto	Incorrecto	Elección	Correcta
1	2x = 6	1	0	3	3	1	9x = 9	1	0	1	1
2	1x = 6	1	0	6	6	2	2x = 4	1	0	2	2
3	4x = 8	1	0	2	2	3	6x = 6	1	0	1	1
4	9x = 9	1	0	1	1	4	3x = 9	1	0	3	3
5	7x = 14	0	1	4	2	5	2x = 4	0	1	4	2

Tabla 16. Resultados de la actividad 4

Estud.	**¿Cómo sabes que el valor de x que obtuviste es el correcto?**
1	Por que observe en el video donde nos explicaba
2	Por que lo comprobamos con la balanza y también con una cuenta pudimos darnos cuenta, dividimos el resultado de la multiplicación con el número de x que había
3	Por que la balanza estaba bien equilibrada y me daba el valor de x
4	Porque la balanza se equilibra con uno del lado izquierdo y uno o varios del lado derecho
5	Sumando y multiplicando

Tabla 17, comprobación de una ecuación, actividad 4

En la actividad 5, se muestran algunos de los resultados obtenidos por los estudiantes al trabajar con el sitio web EcuSol para la ecuación de un paso y por métodos formales para coeficiente enteros (tabla 18), fraccionarios (tabla 19) y la inversa (tabla 20).

Estud.	Ejercicios	Correcto	Operación	Respuesta	**Explica cómo se comprueba la solución de una ecuación**
1	3x = 9	1	División	3	Divido 3 en los dos lados.
2	2x = 6	1	División	3	Agregando el número que encontramos que es el valor de x a la cuenta para que salga el resultado que tiene que ser.
3	4x = 12	1	División	3	Siguiendo el procedimiento.
4	6x = 18	1	División	3	Cambio la x por el valor encontrado.
5	4x = 8	0	Suma	4	Sumando.

Tabla 18, Coeficientes enteros y comprobación de una ecuación, actividad 5

Estud.	Ejercicio	Correcto	Operación	Respuesta	**Explica cómo se comprueba la solución de una ecuación**
1	5/12x = 3/2	0	División	39/10	Divido 5/13 en los dos lados.
2	1/9x = 5/8	1	División	45/8	Agregando el número que encontramos que es el valor de x a la cuenta para que salga el resultado que tiene que ser.
3	3x = 6	1	División	2	Sustituyendo el valor de x.
4	3/2x = 3/5	1	División	6/15	Sustituyendo el valor encontrado por la x.
5	4x = 8	0	Suma	4	Sumando.

Tabla 19, Coeficientes fraccionarios y comprobación de una ecuación, actividad 5

Estud.	Valor de x	Ecuación	Correcto	**Explica cómo encontraste la ecuación**
1	-5	-1x = 5	1	El izquierdo es igual al derecho.
2	3	3x = 9	1	Buscando un número que dividido entre el primer número me diera como resultado el valor x.
3	2	5x = 10	1	Dividí 10 entre 5.
4	5	3x = 15	1	Busco un número que al multiplicarlo por 5 me de el resultado.
5	12	2x = 4	0	Sumando.

Tabla 20, Inversa y cómo se genera la ecuación, actividad 5

4.4. Actividad 6 y 7

Los siguientes resultados corresponde a la resolución de ecuaciones de dos pasos de la forma $ax + b = c$ utilizando el EDVI-balanza. La muestra de estudiantes de Telesecundaria obtuvo lo que sigue:

En la actividad 6. Los estudiantes 1 y 5 presentaron errores al momento de resolver los ejercicios correspondientes a esta forma de ecuación, debido a que la pantalla del dispositivo era muy pequeña y se complicaba su manejo, ver tabla 21 y 22.

Estud.	Ejercicios	Correcto	Incorrecto	Elección	Correcta	Estud.	Ejercicios	Correcto	Incorrecto	Elección	Correcta
1	4x + = 9	0	1	5	?	1	3x + = 8	0	1	5	?
2	2x + 5 = 9	1	0	2	2	2	3x + 4 = 7	1	0	1	1
3	4x + 3 = 7	1	0	1	1	3	2x + 1 = 9	1	0	4	4
4	4 + 2x = 8	1	0	2	2	4	2 + 3x = 5	1	0	1	1
5	3x + 4 = 7	0	1	6	1	5	3x + 2 = 5	0	1	5	1

Estud.	Ejercicios	Correcto	Incorrecto	Elección	Correcta	Estud.	Ejercicios	Correcto	Incorrecto	Elección	Correcta
1	2x + = 6	0	1	4	?	1	5x + = 9	0	1	4	?
2	6x + 2 = 8	1	0	1	1	2	4x + 1 = 9	1	0	2	2
3	3x + 2 = 8	1	0	2	2	3	5x + 1 = 6	1	0	1	1
4	4x + 1 = 5	1	0	1	1	4	5 + 2x = 7	1	0	1	1
5	2x + 4 = 6	0	1	6	1	5	6x + 2 = 8	0	1	8	1

Tabla 21, Resultados de la actividad 6

Estud.	**¿Cómo sabes que el valor de x que obtuviste es el correcto?**
1	Por que si a 5 le tengo que buscar un número que sumado con 5 de 9
2	Contando las bolitas rojas que quedaron y su valor ponerlo en lugar de x
3	Por que la balanza estaba bien equilibrada y me daba el valor de x
4	Pongo el valor de la balanza por la x, me debe dar igual al hacer las cuentas
5	8

Tabla 22, comprobación de una ecuación, actividad 6

En la actividad 7. Se trabajó con coeficientes enteros, fraccionarios, la inversa (se da el valor de x, después el estudiante encuentra la ecuación) y por último, el estudiante propone una ecuación de su agrado y la resuelve. Para esta forma de la ecuación que es más complicada, sólo dos estudiantes resolvieron por pasos algebraicos, el estudiante 1 siguió el procedimiento, pero al llegar al valor final, no respondió correctamente. Ver tablas 23, 24, 25 y 26.

Estud.	Ejercicios	Correcto	Operación	Respuesta	Estud.	¿Qué valor sustituiste para comprobar si la solución es correcta?
1	10x+2=7	0	Rest y div	1.2	1	x
2	5x=20	0	Div y mult	4	2	División 20 entre 5
3	6x+7=10	1	Rest y div	0.5	3	10
4	7x+6=41	1	Rest y div	5	4	5
5	2x+8=15	0	Sum y res	5	5	El de la x

Tabla 23, Coeficientes enteros y comprobación de una ecuación, actividad 7

Estud.	Ejercicio	Correcto	Respuesta	Estud.	Escribe la comprobación
1	7e7r7r	0	7	1	No entiendo
2	5x=25	0	5	2	5x5=25
3	1/12x+1/7=7/6	1	12.285	3	7/6=7/6
4	2/5x+1/7=5/4	1	2.76	4	5/4=5/4
5	2/2x+5/4=6/8	0	1	5	2/2 + x + 5/4 = 6/8

Tabla 24, Coeficientes fraccionarios y comprobación de una ecuación, actividad 7

Estud.	Ejercicio	Correcto	Respuesta	Estud.	Comprueba tu resultado
1	5x+3=8	1	1	1	1.1
2	4x=12	0	3	2	3x4=12
3	8x+10=14	1	0.5	3	14=14
4	5x+20=70	1	10	4	70=70
5	6x+4=11	0	1	5	6+x+4=11

Tabla 25, Propón una ecuación y su comprobación, actividad 7

Estud.	Valor de x	Ecuación	Correcto	Estud.	Explica cómo encontraste la ecuación
1	4664	677	0	1	No entendí este ejercicio
2	3	4x+7=19	1	2	Dividiendo y restando
3	9	2x+2=20	1	3	Multipliqué (2)(9)=18+2=20…x=9
4	5	12x+3=63	1	4	como x=3 la multipliqué por 12 y le sumé 3
5	5	3x+2=10	0	5	Sumando los números

Tabla 26, Inversa y cómo se genera la ecuación, actividad 7

4.5. Actividad 8 y 9

En la actividad 8. Los tres estudiantes del centro de la muestra resolvieron de forma correcta empleando el EDVI-balanza los cuatro ejercicios mostrados de diez propuestos. Destaca la respuesta de que "cuando la balanza está bien equilibrada" se obtiene el valor de equis (tabla 27 y 28).

Estud.	Ejercicios	Correcto	Incorrecto	Elección	Correcta	Estud.	Ejercicios	Correcto	Incorrecto	Elección	Correcta
1	4x6=9+9	0	1	5	?	1	3x5=8+8	0	1	5	?
2	8x+2=8+6x	1	0	3	3	2	5x+5=3x+7	1	0	1	1
3	2x+8=5x+5	1	0	1	1	3	3+5x=3x+9	1	0	3	3
4	3x+2=6+x	1	0	2	2	4	3+5x=6+4x	1	0	3	3
5	2x=4	0	1	9	2	5	5x=10	0	1	5	2

Estud.	Ejercicios	Correcto	Incorrecto	Elección	Correcta	Estud.	Ejercicios	Correcto	Incorrecto	Elección	Correcta
1	1x3=6+6	0	1	5	?	1	3x6=6+6	0	1	3	?
2	3x+9=5x+1	1	0	4	4	2	7x+10=8x+3	1	0	7	7
3	4x+8=6+5x	1	0	2	2	3	9x+3=7+8x	1	0	4	4
4	3+8x=6x+7	1	0	2	2	4	2+5x=3x+6	1	0	2	2
5	6	0	1	9	?	5	6x=12	0	1	6	2

Tabla 27, Resultados de la actividad 8

Estud.	**¿Cómo sabes que el valor de x que obtuviste es el correcto?**
1	La balanza me da el valor de x
2	Poniendo el número encontrado en el lugar de la x para comprobar que salga el mismo resultado
3	Porque la balanza estaba bien equilibrada y me aparecía el valor de X
4	equilibrando la balanza hasta tener una sola x y del otro lado las bolitas que valen 1
5	Sumando

Tabla 28, comprobación de una ecuación, actividad 8

En la actividad 9. se trabajó con coeficientes enteros (tabla 29), fraccionarios (tabla 30) y por último, el estudiante propone una ecuación de su agrado y la resuelve (tabla 31). Para la forma más completa de la ecuación de primer grado con coeficientes enteros, tres de los estudiantes resolvieron por pasos algebraicos y con coeficientes fraccionarios sólo dos. Sobre la comprobación resultó un problema poder sistematizar los pasos seguidos y poder escribirlos en el apartado requerido.

Estud.	Ejercicios	Correcto	Respuesta	Estud.	Escribe la comprobación
1	7x+1=4x+4	1	1	1	1
2	1x+9=5x+3	0	-0.15	2	haciendo las instrucciones
3	9x+5=1x+1	1	-0.5	3	0.5=0.5
4	6x+6=10x+9	1	-0.75	4	-0.75=-0.75
5	3x=9	0	6	5	7

Tabla 29, Coeficientes enteros y comprobación de una ecuación, actividad 9

Estud.	Ejercicio	Correcto	Respuesta	Estud.	Escribe la comprobación
1	4/5x+4/8=8/4x+2/34	0	2.34	1	Seguí las instrucciones
2	1/10x+4/3=5/11x+7/9	0	234	2	No pude hacerlo
3	1/9x+9/11=4/3x+7/2	1	2.19	3	2.19=2.19
4	2/3x+1/3=1/6x+9/16	1	0.45	4	0.638=0.638
5	3x=7	0	4	5	4

Tabla 30, Coeficientes fraccionarios y comprobación de una ecuación, actividad 9

Estud.	Ejercicio	Correcto	Respuesta	Estud.	**Comprueba tu resultado**
1	4x+7=5x+9	1	-2	1	Seguí el procedimiento en el celular
2	5x+2=3x+1	1	-0.5	2	Sustituí lo que encontré por x
3	8x+12=14x+18	1	-1	3	4=4
4	12x+21=5x+30	1	-3	4	-15=-15
5	4x=6	0	2	5	6

Tabla 31, Propón una ecuación y su comprobación, actividad 9

4.6. Postest

En la penúltima actividad (**Actividad 10**) se recuperan algunas evidencias del trabajo realizado por los estudiantes en su libreta de tareas. Al final del trabajo con cada una de las formas de la ecuación de primer grado ver figuras 13, 14, 15, 16 y 17, se realizó un postest y lo que obtuvimos fue:

4.6.1. Forma de la ecuación: $\boldsymbol{a + x = b}$

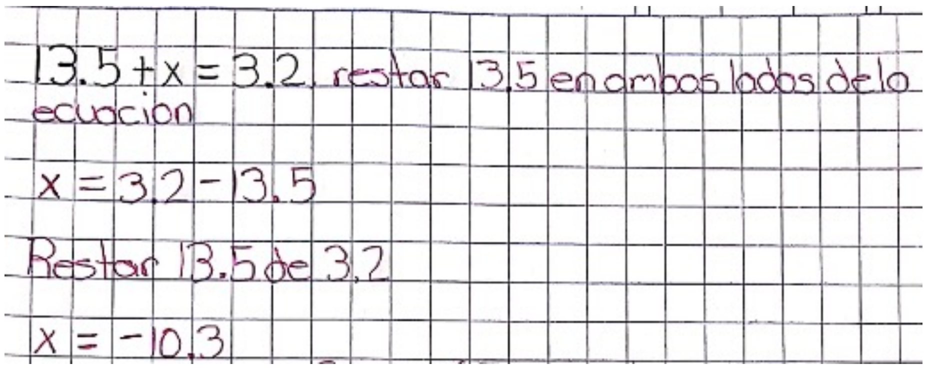


Figura 13. Estudiante 1, parte de los resultados del postest

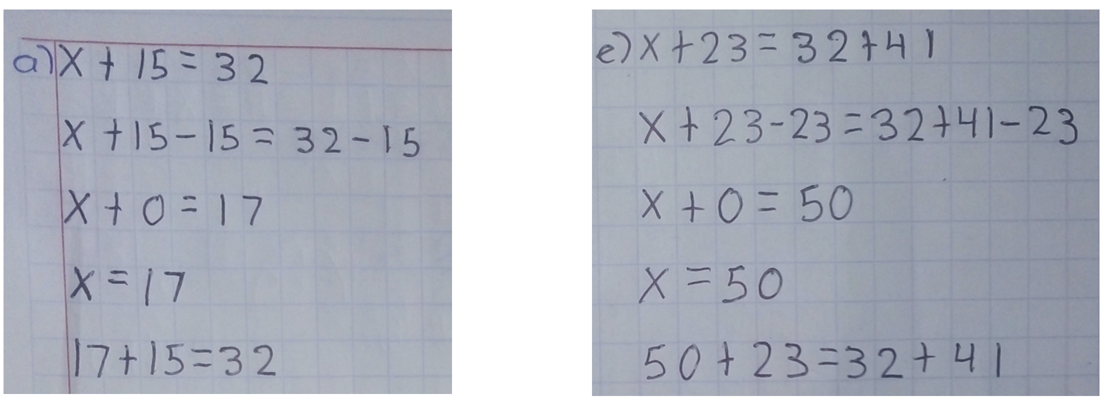


Figura 14. Estudiante 2, parte de los resultados del postest

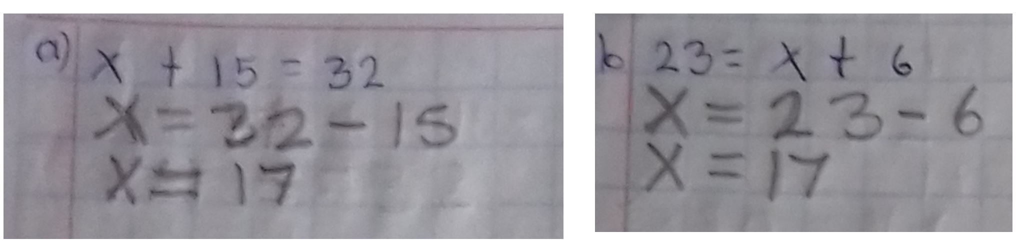


Figura 15. Estudiante 3, parte de los resultados del postest

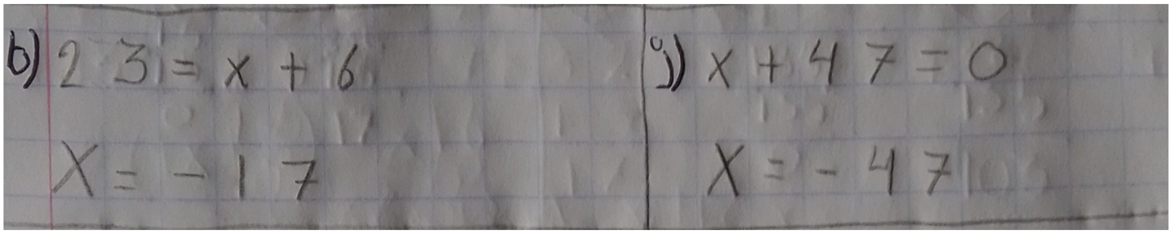

b) 23 = x + 6
X = -17
c) x + 47 = 0
X = -47

Figura 16. Estudiante 4, parte de los resultados del postest

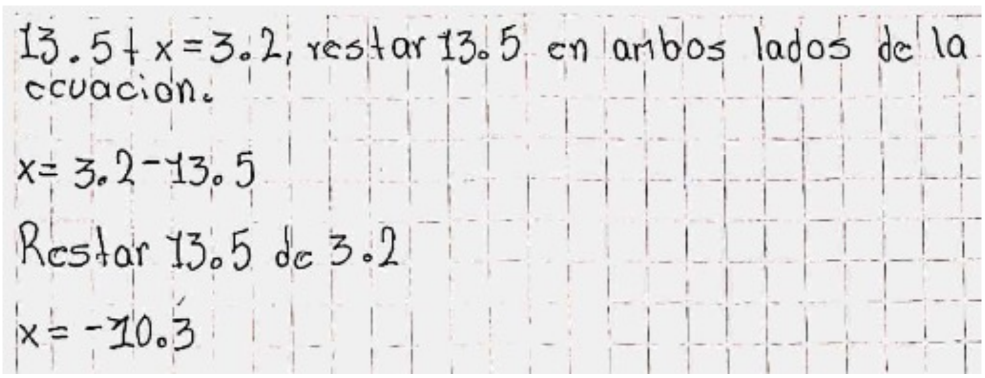

13.5 + x = 3.2, restar 13.5 en ambos lados de la ecuación.
x = 3.2 - 13.5
Restar 13.5 de 3.2
x = -10.3

Figura 17. Estudiante 5, parte de los resultados del postest

Los estudiantes reportaron los siguientes resultados del cuestionario postest de la actividad 10, y los que se recuperaron de la plataforma de Google Classroom, observamos que a diferencia de la primera fase experimental (predoctoral) presentan un desprendimiento casi natural del EDVI-balanza del cual, su propósito fue introductorio, ilustrativo y concreto en la resolución de ecuaciones de primer grado.

En el primer postest observamos que los estudiantes resolvieron las ecuaciones sugeridas empleando pasos algebraicos. Encontramos resultados poco satisfactorios en la resolución de ecuaciones con coeficientes fraccionarios y en los ejercicios dónde se da el valor de x y el estudiante propone la ecuación (inversa).

4.6.2. Forma de la ecuación: $ax = b$

Para esta forma de la ecuación, observamos en las figuras 18, 19, 20 y 21 los pasos algebraicos seguidos por estudiantes para resolver las ecuaciones de este tipo. El estudiante 3, sustituye el valor encontrado por la x en la comprobación de la solución y realiza las operaciones en la figura 8.

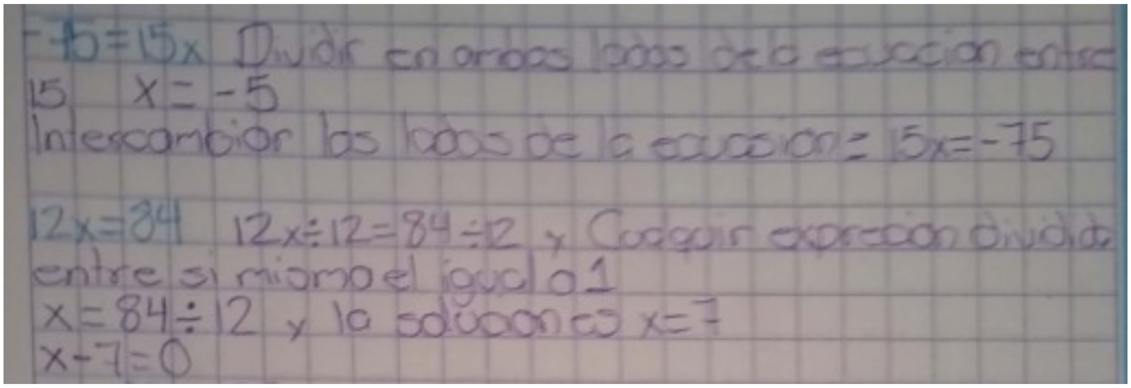


Figura 18. Estudiante 1, parte de los resultados del postest

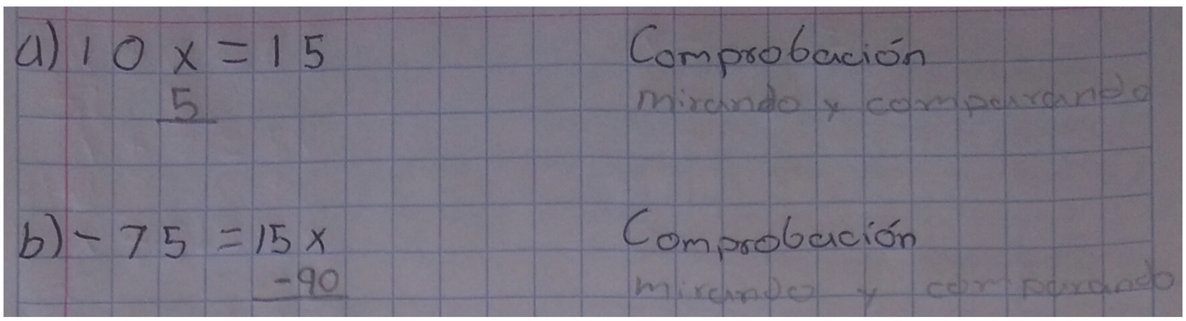


Figura 19. Estudiante 2, parte de los resultados del postest

Figura 20. Estudiante 3, parte de los resultados del postest

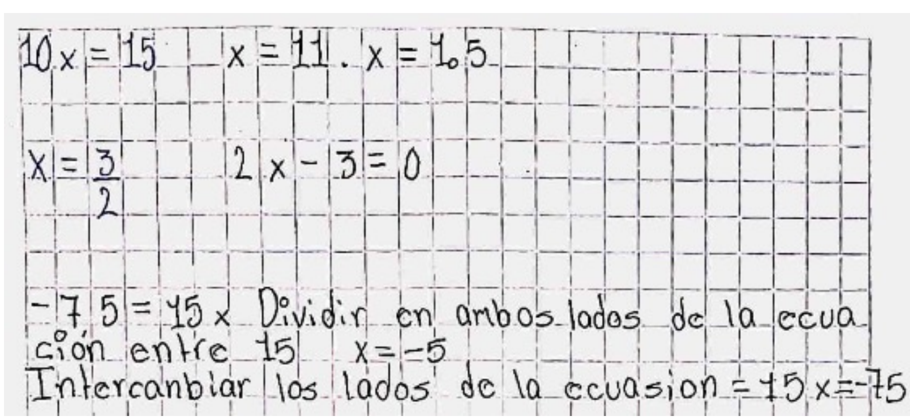


Figura 21. Estudiante 5, parte de los resultados del postest

4.6.3. Forma de la ecuación: $ax + b = c$

En la figura 11, se observa como el estudiante 1 describe el procedimiento para llegar a encontrar el valor de x, indica con flechas el movimiento que realizó de b y c para ubicarlos de un lado del signo igual y resuelve por pasos algebraico.

El estudiante 3, resuelve por pasos algebraico y sustituye el valor encontrado en la x de la ecuación para comprobarlo (ver figura 22 y 23).

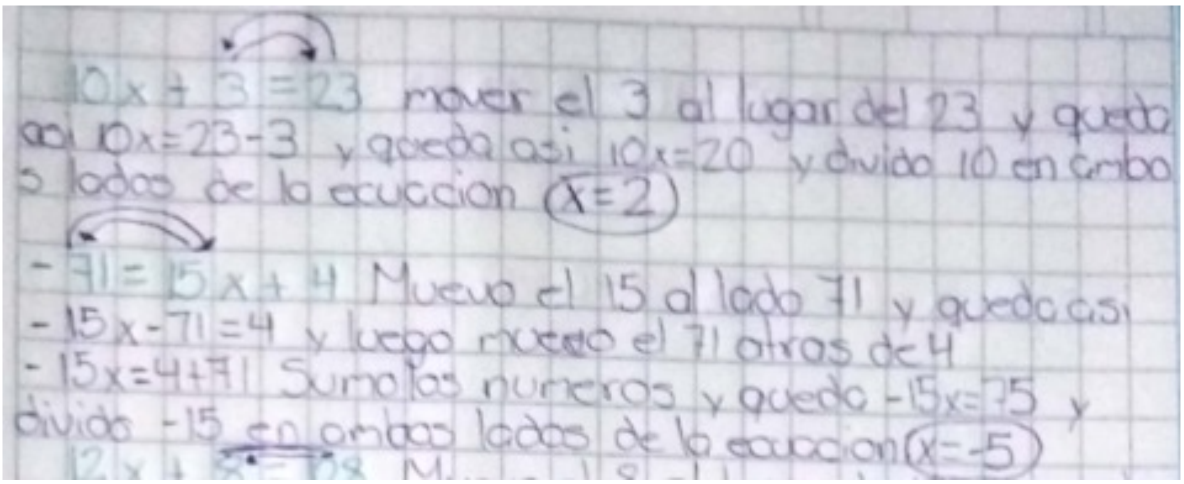


Figura 22. Estudiante 1, parte de los resultados del postest

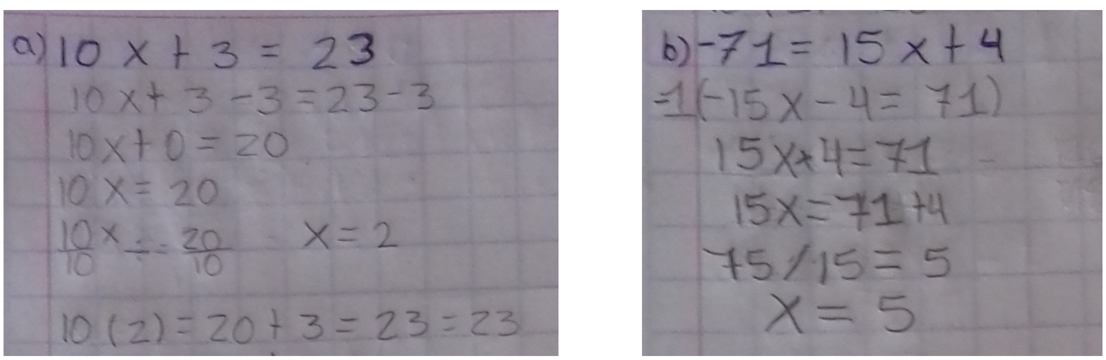


Figura 23. Estudiante 3, parte de los resultados del postest

4.6.4. Forma de la ecuación: $ax + b = cx + d$

Para esta forma de dos pasos, el estudiante 1 continúa indicando con flechas el procedimiento y describiendo los pasos (figura 13). El estudiante 2 y 3 resuelven por pasos algebraicos y comprueban su resultado, ver figuras 24, 25 y 26.

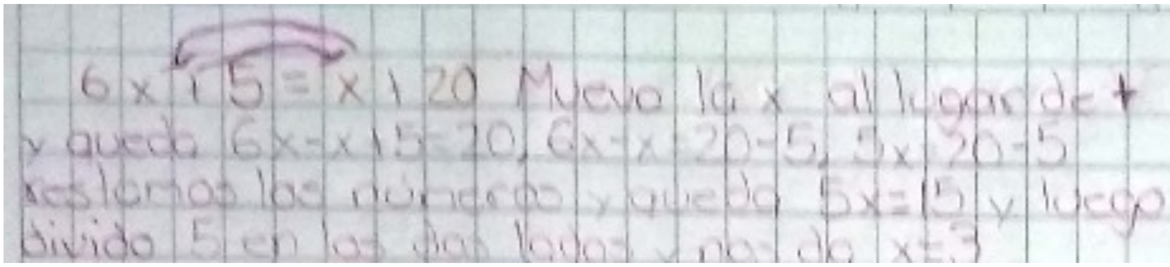


Figura 24. Estudiante 1, parte de los resultados del postest

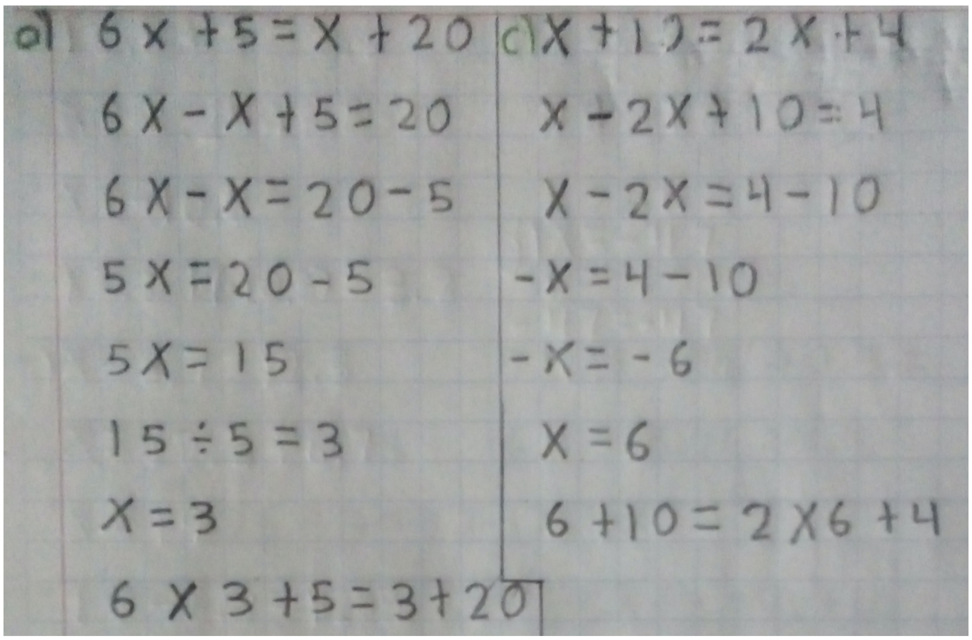


Figura 25. Estudiante 2, parte de los resultados del postest

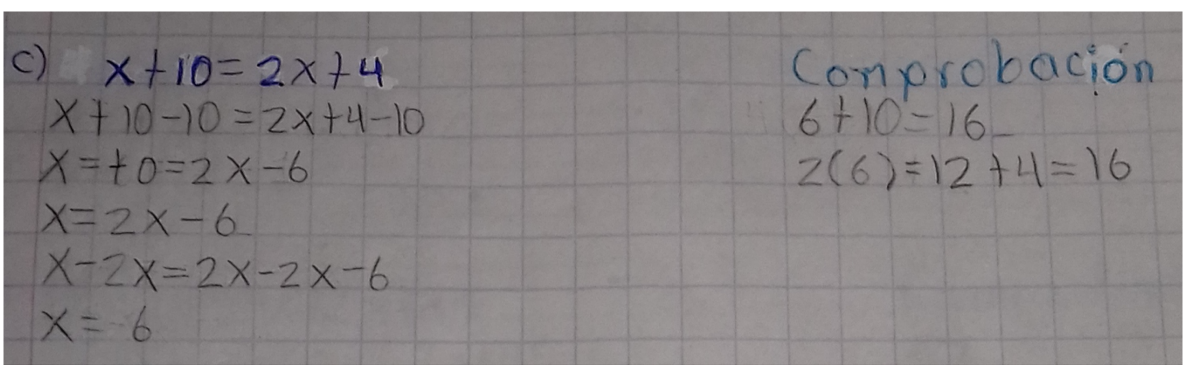


Figura 26. Estudiante 3, parte de los resultados del postest

Los estudiantes 1 y 5 presentan como evidencia la misma fotografía, por lo que suponemos que de alguna forma tuvieron contacto al momento de resolver los ejercicios de los distintos apartados de la presente propuesta didáctica.

4.7. Entrevista

En este último apartado (actividad 11) se contactó a los estudiantes 4 semanas después de haber concluido las actividades de la propuesta didáctica y se les pidió que contestaran el siguiente cuestionario digital (Google Forms) después de cada pregunta hecha por el docente investigador utilizando Google Meet. Enseguida, se muestran las respuestas de los ejercicios para las cuatro formas de la ecuación y su comprobación, la muestra corresponde con los mismos cinco estudiantes.

1.- De la expresión [ ] + 3 = 11: ¿Cómo se puede comprobar que es correcta la solución?

Alumno 1. Restando el número final con el último de la suma ejemplo: 8 + 3 = 11 - 3 = 8. Es así como yo compruebo que está bien.

Alumno 2. Sumando.

Alumno 3. Si al 3 le sumas 8 es = 11.

Alumno 4. Sumando ambos números.

Alumno 5. Sumando: 8+3=11

2.- Escribe la comprobación

Alumno 1. 11 + 6 = 17 – 6 = 11, 8 + 3 = 11 – 3 = 8

Alumno 2. Sumando los números.

Alumno 3. 3 + 8 = 11.

Alumno 4. 11 – 3 = 8.

Alumno 5. 11 = 11.

Algunos estudiantes como el 1, 2 y 4 muestran lo que aprendieron por comprobación de una ecuación, el estudiante 1 y 5 sólo indican la operación realizada y el resultado obtenido del lado izquierdo comparado con el derecho respectivamente.

3.- De la expresión 2.5 + 17.5 = [ ] + 15: ¿Cómo se puede comprobar que es correcta la solución?

Alumno 1. Sumando el número que está completo.

Alumno 2. Sumando.

Alumno 3. La pregunta no tiene el resultado correcto.

Alumno 4. Sumando.

Alumno 5. Sumando: 2.5+17.5= 5 +15.

4.- Escribe la comprobación

Alumno 1. 2.5+17.5=20-15=5.

Alumno 2. Sumando las ecuaciones.

Alumno 3. No tiene el resultado.

Alumno 4. 2.5 + 17.5=20 +15+5=20 ambos resultados son iguales.

Alumno 5. 20 = 20

Para esta forma de la ecuación, los alumnos 1, 4 y 5 sustituyeron el valor calculado por la x y realizaron las operaciones correspondientes hasta probar que lo obtenido es igual a lo que se tenía del otro lado del signo igual. No presentan problema con el sentido de equivalencia de éste. El estudiante 1 le nombra como "numero completo" al que está igualando a la ecuación.

5.- De la expresión 63 = ([ ])(7): ¿Cómo se puede comprobar que es correcta la solución?

Alumno 1. Haciendo las operaciones.

Alumno 2. Dividiendo el número que está completo entre el que teníamos que multiplicar para sacar el resultado que es el número que está completo ejemplo: 28 entre 4 = 7 esa es la respuesta del número que no está entonces queda así 4 por 7 =28 o 28 =4 por 7

Alumno 3. No sé si es correcta.

Alumno 4. Haciendo las sumas y multiplicaciones en libreta para comprobar que el resultado sea correcto.

Alumno 5. Multiplicando: 9x7

6.- Escribe la comprobación.

Alumno 1. 63 entre 7 = 9

Alumno 2. Multiplicando las ecuaciones

Alumno 3. Puede que no sea el resultado.

Alumno 4. El resultado es, 63 tenemos que buscar un numero que multiplicado por 7 sea 63.

Alumno 5. 63 = 63.

Para este caso, el estudiante 1 explica detalladamente como se puede comprobar que es correcto su resultado, el resto, indican la operación a realizar o la muestran. En la comprobación el estudiante 4 indica que busca un número que multiplicado le dé el resultado que busca.

7.- De la expresión 1.5 x [ ] + 10 = 3 + 11.5: ¿Cómo se puede comprobar que es correcta la solución?

Alumno 1. No le entiendo

Alumno 2. Multiplicando los números de las ecuaciones.

Alumno 3. No sé si es correcta.

Alumno 4. Haciendo sumas y multiplicaciones.

Alumno 5. Multiplicando 1.5 x 3 +10 = 3 + 11.5, 4.5 + 10 = 3 + 11.5 = 14.5. = 14.5.

8.- Escribe la comprobación.

Alumno 1. No le entiendo

Alumno 2. Multiplicando.

Alumno 3. No sé si es correcta.

Alumno 4. 3 + 11.5 = 14.5 = 1.5 × 3 + 10 = 14.5.....Los resultados son iguales y este procedimiento es igual a los anteriores.

Alumno 5. 14.5 = 14.5.

Para este caso con coeficientes decimales los estudiantes 4 y 5 indican las operaciones y sustituyen el valor de x buscado en la ecuación y llegan a la conclusión de que lo que hay del lado derecho es igual a lo que hay del lado izquierdo.

9.- De la expresión (6)([ ]) - 2 = (4)([ ]) - 12: ¿Cómo se puede comprobar que es correcta la solución?

Alumno 1. Haciendo la cuenta ya con el número que le faltaba para ver que tengan el mismo resultado si es así es que está bien, pero si salen números diferentes es que ese no era el número.

Alumno 2. Restando.

Alumno 3. Porque me da 12.

Alumno 4. Resolviendo las operaciones.

Alumno 5. Multiplicando y sumando: (6)(-5) -2 = (4)(-5) -12 = -30 - 2 = -20-12 = -32 = -32.

10.- Escribe la comprobación.

Alumno 1. Sin información

Alumno 2. Restando los números.

Alumno 3. (6)(2) = 12.

Alumno 4. 12 – 4 = -8

Alumno 5. -32 = -32

En esta forma de la ecuación de primer grado que es la más completa, el estudiante 1 describe lo que sería una solución correcta; el estudiante 5, indicó la comprobación sustituyendo el valor buscado, el resto de los estudiantes no pudieron resolverla.

En el siguiente capítulo se presentan las conclusiones sobre el presente trabajo de investigación, ajustado para trabajarse de forma virtual y a distancia, nos quedamos con el compromiso de realizar en el futuro próximo una tercera etapa en las aulas de la Telesecundaria con el fin de verificar los datos obtenidos.

CAPITULO V

Conclusiones

El trabajo realizado de forma virtual y a distancia resultó un gran reto, ya que las actividades desde un inicio fueron diseñadas para realizarse en el aula de forma presencial con los estudiantes, apoyarles y brindarles información oportuna antes y durante las distintas actividades de la presente propuesta didáctica, además de capacitar al docente responsable del grupo, en la orquestación de cada uno de los artefactos a utilizar (dispositivos digitales, hojas de exploración, aprendizaje guiado y más) y enseguida, realizar una segunda toma de datos con el docente a cargo, pero nos resultó muy complicado contactarle para brindarle la capacitación correspondiente, debido a la carga excesiva de trabajo por la nueva modalidad en la que se continuarían impartiendo las clases. Aun así, y con el buen ánimo de los estudiantes realizamos el trabajo reformado y podemos concluir con lo siguiente:

1. Encontramos que algunos estudiantes buscaron interactuar entre ellos para resolver las dudas durante cada post-test, a pesar de dejar en la indicación que se realizaran las actividades sin ayuda, al revisar sus evidencias encontramos trabajos iguales y en otros casos la misma fotografía, es decir, se compartieron los resultados.
2. En base al seguimiento dado empleando WhatsApp o llamada directa en su caso durante el tiempo asignado, encontramos que a los estudiantes les resultó difícil trabajar de forma individual pese a los video tutoriales, el trabajo con la balanza, el sitio web EcuSol y el acompañamiento del docente investigador.
3. La participación se fue haciendo menor en relación con el avance de las actividades, en las evidencias revisadas se pudo observar algo de hartazgo o falta de interés pese al acompañamiento y las invitaciones constantes al trabajo.
4. No consideramos que el trabajo online sustituya de manera completa la labor o trabajo presencial con los estudiantes y docente; lo que si podemos

asegurar, con los resultados obtenidos, que el trabajo online puede optimizar de manera destacada, el trabajo presencial de un docente; sobre todo si recordamos que los estudiantes del medio rural no siempre pueden acudir a clase presencial en tiempos específicos y de las carencias que hemos notado en las aulas de Telesecundaria por lo que a este trabajo de investigación le sigue el trabajo presencial en una secuencia futura, para corroborar el potencial de cada una de las actividades y las herramientas usadas durante la propuesta didáctica, los datos obtenidos, el trabajo individual y a distancia con alumnos y docentes del medio rural.

5. Las actividades propuestas (ítems) se deben optimizar para que el estudiante no pierda la motivación, con las diversas participaciones de los docentes.
6. Responder la pregunta sobre convertir las herramientas empleadas en Telesecundaria en herramientas para aprender a resolver ecuaciones de primer grado se verificará una vez que tengamos acceso al aula, pero advertimos que es indispensable en el trabajo online la interacción docente – alumno, alumno – alumno, docente – docente investigador y este último con los alumnos.
7. No podemos asegurar que la orquestación de todos los artefactos utilizados haya logrado su propósito como una herramienta de apoyo para promover una mejor comprensión del significado y resolución de ecuaciones de primer grado; faltarían más experiencias y en diferentes latitudes para poder hacerlo. Lo que observamos en los estudiantes de edades que van de los 12-14 años, es que aceptaron las actividades, jugaron con el EDVI-balanza, vieron los video tutoriales (duración menor a 3 minutos) y lograron trabajar en el sitio web EcuSol. A pesar del hartazgo y la falta de motivación que pudieron ser alimentadas por el trabajo en la interfaz (pantalla del celular (de tamaño chico a mediano), las fallas constantes en la conexión a internet, pasar de YouTube a Google Forms y de ahí a documentos en formato PDF, a la libreta de trabajos y de vuelta la cámara fotográfica para ir al formato digital con CammScanner, la carencia de medios económicos para acceder

a internet. O simplemente, algún enfermo en la familia que los obligó a trabajar y descuidar sus actividades durante la propuesta didáctica.

8. Los estudiantes evidenciaron serias dificultades en aritmética específicamente en el trabajo con fracciones, decimales, números con signo y productos, así como, no identifican el signo igual como una relación de equivalencia.
9. Podemos también mencionar, que en cada forma de la ecuación de primer grado se trabajó con el EDVI-balanza y en las evidencias mostradas en el capítulo IV sobre los resultados, encontramos que los alumnos intentaron resolver empleando métodos formales y no valiéndose de la metáfora de equilibrio.
10. No se tiene la certeza de que los resultados presentados por los estudiantes fueron realizados en su totalidad por ellos mismos, por lo que se espera en una tercera etapa y en la modalidad presencial, verificar sus procedimientos.

BIBLIOGRAFÍA

1. Aebli, H. (1995). *Doce formas básicas de enseñar: una didáctica basada en la psicología*. Madrid: Narcea.

2. Alvarez, I., Gómez-Chacón, I., & Ursini, S. (2015). Understanding the Algebraic Variable: Comparative Study of Mexican and Spanish Students. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 11*, 1507-1529. DOI. https://doi.org/10.12973/eurasia.2015.1409a

3. Artigue, M., Douday, R., Moreno, L., & Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* México, D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica.

4. Bagni, G. T. (2009). Bombelli's Algebra (1572) and a New Mathematical Object. *For the Learning of Mathematics*, *29*(2), 29-31.

5. Bardini, C., Radford, L., & Sabena, C. (2005). Struggling with variables, parameters, and indeterminate objects or how to go insane in mathematics. In: L. Helen, L. Jill (Eds). *Proceedings of the 29th Psychology of Mathematics Education, 2,* 129-136. http://www.igpme.org/publications/currentproceeding s/

6. Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (Eds.). (1996). *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching. Dordrecht ; Boston: Kluwer Academic Publishers.*

7. Betancourt, Y. (2014). *Usos de recursos didácticos digitales en un primer curso de álgebra lineal.* Tesis doctoral. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México, D.F. https://repositorio.cinvestav.mx/bitstream/handle/cinvestav/950/SSIT0012552.pdf?sequence=1

8. Blando, J., Kelly, A., Schneider, B., & Sleeman, D. (1989). Analyzing and Modeling Arithmetic Errors. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(3), 301-308. doi:10.2307/749518

9. Bonilla, M. y Rojano, T. (2013). Transferencia del aprendizaje situado de la sintaxis algebraica: ecuaciones lineales y balanza virtual, *I CEMACYC*, 1-10. https://core.ac.uk/reader/20482526

10. Carvajal, C. E. (2003). Una mirada a las aulas de la Telesecundaria. Reconstrucción del modelo pedagógico El caso de las matemáticas. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos*, *33*(3), 151-157. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=27033307

11. Carvajal, C. E. (2006). Interacción en las aulas de la Telesecundaria: un acercamiento desde la enseñanza de las matemáticas. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos, 34*, 129-157. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=27036407

12. Cardano, G. (1993). *Ars magna, or, The rules of algebra* (T. R. Witmer, Trad.). New York: Dover. (Obra original publicada en 1545).

13. Carraher, D., Schliemann, A., Brizuela, B., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *37*(2), 87-115.

14. Cuevas, A. y Mejía, H. (2003), *Cálculo Visual*. México: Oxford University Press.

15. Cuevas, A., Pluvinage, F. (2003). Les projets d'action pratique, éléments d'une ingéniere d'enseignement des mathématiques. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives, 8*, 273-292.

16. Cuevas, A., Betancourt, Y., Cervantes, S., Real, R., Rodríguez, A. (2012). *Matemáticas 1. Secundaria.* México: Ríos de tinta.

17. Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving Equations: The Transition from Arithmetic to Algebra. *For the Learning of Mathematics, 9*(2), 19-25. http://www.jstor.org/stable/40247950

18. Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: an educational approach*. Dordrecht ; Boston : Norwell, MA, U.S.A: D. Reidel ; Sold and distributed in the U.S.A. and Canada by Kluwer Academic.

19. Flores, T., Rincón, F., Zuñiga, L. (2014). El abp en la enseñanza de las matemáticas como estrategia didáctica para el desarrollo del pensamiento crítico en el nivel medio básico y modalidad Telesecundaria. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 27*, 2125-2132. https://www.clame.org.mx/documentos/alme27.pdf

20. Freudenthal H. (1973). Organization of a Field by Mathematizing. *Mathematics as an Educational Task.* Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-010-2903-2_7

21. Gallardo, A. (1994). *El Estatus de los Números Negativos en la Resolución de Ecuaciones Algebraicas*. Tesis doctoral. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México, D. F.

22. Gallardo, A. (1996). El paradigma cualitativo en matemática educativa. Elemento teórico-metodologíco de un estudio sobre números negativos. *Investigaciones en Matemática Educativa*, 197–222.

23. Glidden, P. L. (2008). Prospective elementary teachers' understanding of the order of operations. *School Science and Mathematics, 108*(4), 130-136.

24. Gunnarsson, R., Sönnerhed, W., & Hernell, B. (2016). Does it help to use mathematically superfluous brackets when teaching the rules for the order of operations? *Educational Studies in Mathematics*, *92*(1), 91–105.

25. Katz, V. J. (2009). *A history of mathematics: an introduction*. Boston: Addison-Wesley.

26. Katz, V. J., Barton, B. (2007). Stages in the History of Algebra with Implications for Teaching. *Educational Studies in Mathematics*, *66*(2), 185–201.

27. Kieran, C. (1981). Concepts Associated with The Equality Symbol. *Educational Studies In Mathematics, 12*, 317-326.

28. Kieran, C., & Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias, 7*(3), 229–240.

29. Kieran, C., & Herscovics, N. (1980). Constructing meaning for the concept of equation. *National Council of Teachers of Mathematics*, *78*(8), 9.

30. Kline, M. (1990). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.* Volume 1. Oxford University Press. New York.

31. Lamb, L., Bishop, J., Philipp, R., Schappelle, B., Whitacre, i., & Lewis, M. (2012). Developing Symbol Sense for the Minus Sign. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *18*(1), 5–9.

32. Merzbach, U. C., & Boyer, C. B. (2011). *A history of mathematics*. Hoboken, N.J: John Wiley.

33. Pappanastos, E., Hall, M. A., & Honan, A.S. (2002). Order of operations: Do business students understand the correct order? *Journal of Education for Business, 78*(2), 81-84.

34. Piaget, J., Garcia, R. (1982). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. México: Siglo Veintiuno.

35. Prieto, S. (1991). *Historia de las matemáticas*. Toluca, Estado de México: Instituto Mexiquense de Cultura.

36. Puig, L. (1998). Componentes de una historia del álgebra. El texto de al-Khwarizmi restaurado. En F. Hitt (Ed). *Investigaciones en Matemática Educativa II*, 109–131. México, DF: Grupo Editorial Iberoamérica.

37. Puig, L. (2008). Historias de al-Khwārizmī (2ª entrega): los libros. *Suma, 59*, 105–112.

38. Puig, L. (2009). Historias de al-Khwārizmī (3ª entrega): Orígenes del álgebra. *Suma*, *60*, 103–108.

39. Puig, L. (2010). Historias de al-Khwārizmī (4ª entrega): El proyecto algebraico. *Suma, 65*, 87–94.

40. Puig, L. (2011). Historias de al-Khwārizmī (6ª entrega): El cálculo con la cosa. *Suma, 67*, 101–110.

41. Puig, L., & Cerdán, F. (1990). Acerca del Carácter Aritmético o Algebraico de los Problemas Verbales. En E. Filloy y T. Rojano (Eds). *Memorias del Segundo Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática*, 35-48. Cuernavaca, Morelos: PNFAPM.

42. Puig L., Rojano T. (2004) The History of Algebra in Mathematics Education. In: K. Stacey, H. Chick, M. Kendal (Eds). *The Future of the Teaching and Learning of Algebra The 12thICMI Study*. New ICMI Study Series, *8*, 187-223. Springer, Dordrecht. DOI. https://doi.org/10.1007/1-4020-8131-6_8

43. Radford, L. (1995). Before the Other Unknowns Were Invented: Didactic Inquiries on the Methods and Problems of Mediaeval Italian Algebra. *For the Learning of Mathematics*, *15*(3), 28–38.

44. Radford, L. & Grenier, M. (1996). Entre les choses, les symboles et les idées... une séquence d'enseignement d'introduction à l'algèbre. *Revue des sciences de l'éducation, 22*(2), 253–256. doi:10.7202/031880ar

45. Rahman, S., Street, T., & Tahiri, H. (Eds.). (2008). *The unity of science in the Arabic tradition: science, logic, epistemology and their interactions*. Berlin: Springer.

46. Rees, P. K., Sparks, F. W. (1986). *Álgebra*. México: Reverté Mexicana.

47. Rojano, T. & Martínez, M. (2009). From Concrete Modeling to Algebraic Syntax: Learning to solve linear equations with a virtual balance. In: S. Swars, D. Stinson, & S. Lemons-Smith (Eds). *Proceedings of the 31st Psychology of Mathematics Education, 5*, 235-243. https://www.pmena. org/proceedings/

48. Rojano, T. (2010). Modelación concreta en álgebra: balanza virtual, ecuaciones y sistemas matemáticos de signos. *Números, 75*, 5-20. http://www.sinewton.org/numeros/numeros/75/Apertura.pdf

49. SEP (2011). *Plan de Estudios 2011, Educación Básica.* Consultado el 01 de junio de 2021, de https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/ 20177/Plan_de_Estudios_2011_f.pdf.

50. SEP (2019). *Planes y programas de estudio, Nueva Escuela Mexicana*. Consultado el 01 de junio de 2021, de https://www.planyprogramasdestudio. sep.gob.mx/sec-ae-pensamiento-mate1.html

51. SEGOB (2020), *Acuerdo 02/03/20.* https://dof.gob.mx/ nota_detalle. php? codigo=5589479&fecha=16/03/2020

52. Schonfeld, A., & Arcavi, A. (1988). On the Meaning of the Variable. *The Mathematics Teacher, 81(6)*, 420-427. http://www.jstor.org/stable/27965869

53. Sfard A., Linchevski L. (1994) The Gains and the Pitfalls of Reification — The Case of Algebra. In: P. Cobb (Eds). *Learning Mathematics*. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-017-2057-1_4

54. Struik, D. J. (1980). *Historia concisa de las matemáticas*. México: Instituto Politécnico Nacional.

55. Sutherland, R., Balacheff, N. (1999). *International Journal of Computers for Mathematical Learning. 4*, 1-26. Netherlands: Kluwer Academics Publishers.

56. Tall, D., & Thomas, M. (1991). Encouraging versatile thinking in algebra using the computer. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(2), 125–147.

57. Trigueros, M., & Ursini, S. (2003). First-year undergraduates’ difficulties in working with different uses of variable. In: A. Selden, E. Dubinsky, G. Harel, & F. Hitt (Eds). *CBMS Issues in Mathematics Education, 12*, 1–29. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society.

58. Trouche, L. (2003). From Artifact to Instrument: Mathematics Teaching Mediated by Symbolic Calculators. In: P. Rabardel, Y. Waern (Eds). *Special issue of Interacting with Computers,15*(6), 783-800.

59. Trouche, L. (2004). Managing the Complexity of Human/Machine Interactions in Computerized Learning Environments: Guiding Students’ Command Process through Instrumental Orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *9*(3), 281–307.

60. Trouche, L. (2005). Des artefacts aux instruments, une approche pour guider et intégrer les usages des outils de calcul dans l’enseignement des mathématiques. *Actes de l’Université d’été de Saint-Flour “Le calcul sous toutes ses formes*, 265–290.

61. Trouche, L., & Drijvers, P. (2014). Webbing and orchestration. Two interrelated views on digital tools in mathematics education. *Teaching Mathematics and Its Applications*, *33*(3), 193–209.

62. Ursini, S., Escareño, F., Montes, D., y Trigueros, M. (2005). *Enseñanza del álgebra elemental: una propuesta alternativa*. México: Trillas.

63. Ursini, S. Trigueros, M. (2001) A model for the uses of variable in elementary algebra. In: M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed). *Proceedings of the 25th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, PME 25th , 4*, 327- 334. Utrech, Países Bajos.

64. Ursini, S., Trigueros, M. (2004) How do High School Students Interpret Parameters in Algebra?. In: M. Høines, A. Fuglestad (Eds). *Proceedings of the 28th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, PME 28th,4*, 361-368. Bergen, Noruega.

65. Ursini, S., y Trigueros, M (2006). ¿Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas?. *Educación Matemática, 18(3)*, 5-38. http://www.redalyc.org/articulo.oa? id=40518302

66. Vlassis, J. (2002). The balance model: Hindrance or support for the solving of linear equations with one unknown. *Educational Studies in Mathematics, 49*, 341–359. doi: 10.1023/A:1020229023965

Anexo I

PRIMER GRADO
Actividad 1

Pretest

El siguiente cuestionario no tiene calificación alguna en el curso.

Se requiere que se conteste de forma individual.

Alumno:____________________________________ **Edad:**________________

Localidad:__________________________________ **Fecha:**________________

A. Sección de prerrequisitos o antecedentes.

Marca el cuadro ☐ correspondiente con el valor que falta en las siguientes expresiones:

I. $7 + 4 = [\ ]$

☐ 4 ☐ 3 ☐ 11 ☐ 15 ☐ No se

II. $[\ ] + 3 = 15$

☐ 12 ☐ 18 ☐ 9 ☐ 13 ☐ No se

III. $[\ ] - 11 = 13$

☐ 2 ☐ 14 ☐ 22 ☐ 24 ☐ No se

IV. $17 - [\ ] = 2$

☐ 15 ☐ -19 ☐ 17 ☐ -9 ☐ No se

V. $[\ ] + 3.7 = 9.4$

☐ 15.1 ☐ 13.1 ☐ 6.2 ☐ 5.7 ☐ No se

VI. $8.3 - 4.3 = [\ ]$

☐ 4.0 ☐ 6.0 ☐ 6.3 ☐ 12.6 ☐ No se

VII. $\frac{3}{5} + \frac{2}{3} =$

☐ $\frac{5}{8}$ ☐ $\frac{9}{10}$ ☐ $\frac{6}{15}$ ☐ $\frac{19}{15}$ ☐ No se

VIII. $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=$

☐ $\frac{0}{1}$ ☐ $\frac{3}{2}$ ☐ $\frac{1}{6}$ ☐ $\frac{2}{6}$ ☐ No se

IX. $\frac{4}{3}\times\frac{5}{2}=$

☐ $\frac{5}{3}$ ☐ $\frac{9}{5}$ ☐ $\frac{8}{15}$ ☐ $\frac{20}{6}$ ☐ No se

X. $\frac{7}{3}\div\frac{5}{2}=$

☐ $\frac{35}{6}$ ☐ $\frac{12}{5}$ ☐ $\frac{14}{15}$ ☐ $\frac{2}{5}$ ☐ No se

XI. $(6)(5)=[\,]$

☐ 11 ☐ 30 ☐ 1 ☐ 35 ☐ No se

XII. $6\times\frac{5}{2}=$

☐ $\frac{11}{2}$ ☐ $\frac{30}{2}$ ☐ $\frac{8}{5}$ ☐ $\frac{12}{5}$ ☐ No se

XIII. $\frac{5}{2}\times 8=$

☐ $\frac{13}{2}$ ☐ $\frac{10}{5}$ ☐ $\frac{16}{5}$ ☐ $\frac{40}{2}$ ☐ No se

B. Sección ecuación lineal tipo: $x+a=b$

Marca el cuadro ☐ correspondiente con el valor faltante para que se cumpla la igualdad en las siguientes expresiones.

I. $11+6=[\,]$ ☐ 23 ☐ 17 ☐ 14 ☐ 5 ☐ No se
II. $[\,]+3=11$ ☐ 9 ☐ 17 ☐ 14 ☐ 8 ☐ No se ¿Cómo se puede comprobar que es correcta la solución? Escríbe la comprobación____
III. $3+[\,]=9$

☐ 6	☐ 12	☐ 15	☐ 9	☐ No se

¿Cómo se puede comprobar que es correcta la solución?___________________

Escríbe la comprobación____________________________________

IV. $7 + 5 = 4 + [\,]$

☐ 12	☐ 8	☐ 5	☐ 7	☐ No se

Escríbe la comprobación____________________________________

V. $[\,] + 4.5 = 5 + 11$

☐ 5	☐ 15.5	☐ 6	☐ 11.5	☐ No se

¿Cómo se puede comprobar que es correcta la solución?___________________

Escríbe la comprobación____________________________________

VI. $2.5 + 17.5 = [\,] + 15$

☐ 2.5	☐ 5	☐ 7.5	☐ 32.5	☐ No se

Escríbe la comprobación____________________________________

C. Sección de ecuación lineal tipo: $ax = b$

Marca el cuadro ☐ correspondiente con el valor faltante para que se cumpla la igualdad en las siguientes expresiones.

VII. $12 \times [\,] = 48$

☐ 12	☐ 36	☐ 60	☐ 4	☐ No se

¿Cómo se puede comprobar que es correcta la solución?___________________

Escríbe la comprobación____________________________________

I. $63 = (\quad)(7)$

☐ 70	☐ 9	☐ 17	☐ 56	☐ No se

Escríbe la comprobación____________________________________

D. Sección de ecuación lineal tipo: $ax + b = c$

Marca el cuadro ☐ correspondiente con el valor faltante para que se cumpla la igualdad en las siguientes expresiones.

I. $(7)(5) + 8 = [\,]$

☐ 20	☐ 8	☐ 43	☐ 35	☐ No se

II. $3 \times [\,] + 12 = 27$

☐ 39	☐ 15	☐ 5	☐ 12	☐ No se

¿Cómo se puede comprobar que es correcta la solución?___________________

Escríbe la comprobación____

III. $5 \times [\,] + 7 = 32$

☐ 5 ☐ 25 ☐ 39 ☐ 12 ☐ No se

Escríbe la comprobación____

IV. $(4)(\quad) + 2 = 5 + 5$

☐ 2 ☐ 8 ☐ 16 ☐ 14 ☐ No se

¿Cómo se puede comprobar que es correcta la solución?__________________
____

Escríbe la comprobación____

V. $1.5 \times [\,] + 10 = 3 + 11.5$

☐ 1.5 ☐ 4.5 ☐ 10.5 ☐ 3 ☐ No se

Escríbe la comprobación____

E. Sección de ecuación lineal tipo: $ax + b = cx + d$

Marca el cuadro ☐ correspondiente con el valor faltante para que se cumpla la igualdad en las siguientes expresiones.

I. $(9)(\quad) + 21 = (15)(\quad) + 9$

☐ 2 ☐ 6 ☐ -1 ☐ 0 ☐ No se

¿Cómo se puede comprobar que es correcta la solución?__________________
____

Escríbe la comprobación ____

II. $(8)(\quad) + 5 = (3)(\quad) - 10$

☐ -3 ☐ 8 ☐ 5 ☐ 2 ☐ No se

Escríbe la comprobación ____________________________

III. $(6)(\quad) - 2 = (4)(\quad) - 12$

☐ 6 ☐ -8 ☐ 2 ☐ -5 ☐ No se

Escríbe la comprobación ____

IV. $(4)(\quad) - 3 = (2)(\quad) + 7$

☐ -1 ☐ 8 ☐ 5 ☐ 2 ☐ No se

¿Cómo se puede comprobar que es correcta la solución?__________________
____

Escríbe la comprobación ____

Anexo II

Actividad 2 con balanza ($x + a = b$)

El siguiente cuestionario no tiene calificación alguna en el curso.

Alumno: ___________________________ **Edad:** __________

Localidad: _________________________ **Fecha:** __________

1. Emmanuel jugó a las canicas, al inicio tenía 9, si apostó 4 canicas en el primer juego ¿cuántas canicas le quedaron si perdió el juego? A continuación, contesta lo siguiente y marca el cuadro □ correcto:


Figura 1: Juego tradicional de las canicas

a) Si nombramos con la letra c a las canicas y que corresponde a la cantidad desconocida de ellas, ¿cómo quedaría en una expresión, las canicas que le quedaron y las canicas que apostó?

□ $c + 4$ □ $c - 4$ □ $c + 9$ □ $c - 9$ □ No se

b) ¿Cuántas canicas tenía antes de jugar?

□ 5 □ 4 □ 13 □ 9 □ No se

c) ¿Ahora, cómo quedaría en una expresión, las canicas que le sobraron después de jugar, las canicas que apostó y perdió, y las canicas que tenía antes de jugar?

□ $c + 4 = 9$ □ $c + 4 = 5$ □ $c - 5 = 9$ □ No se

d) Si conoces el valor de c *(canicas)* ¡Escríbelo! ______________________________

e) Explica: ¿cómo lo encontraste? _________________________________

____

____

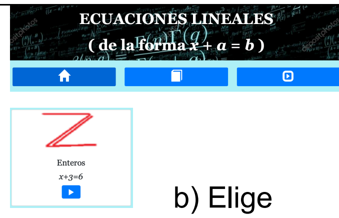
____

____

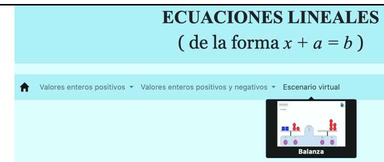
2. Abre el sitio: https://mattec.matedu.cinvestav.mx/pruebas/edumathecuaciones/Back/ProyectoTesis12/index.html

   ✍ **Vamos a trabajar con la ecuación de la forma $x + a = b$ e iniciaremos con la analogía de balanza, sigue las instrucciones como se indica abajo:**

a) Selecciona



b) Elige



c) Practica

De inmediato aparece una balanza, semejante a la de la figura 2.

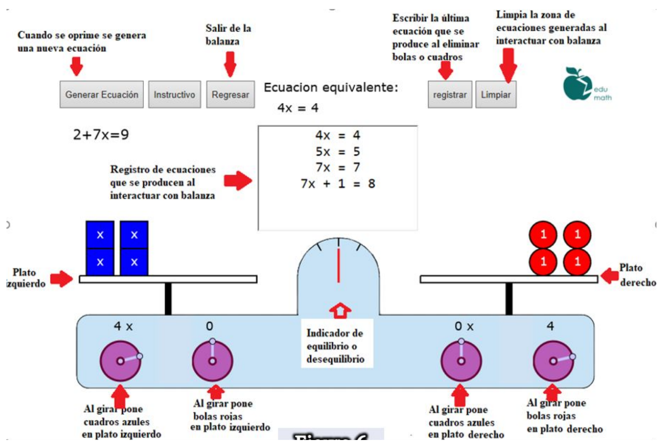


Figura 2: escenario virtual “Balanza”

Ahora vamos a representar la ecuación en la balanza, en el plato izquierdo pondremos los elementos del lado izquierdo del signo igual y en el plato derecho los elementos del lado derecho de la ecuación.

a) En lado superior izquierdo, aparece un botón con la leyenda generar una ecuación y debajo de él la ecuación generada. Elige la ecuación que aparece o sino es de tu agrado, oprime el botón generar ecuación hasta que aparezca una de tu agrado.

Escribe la ecuación elegida____

b) Mueve los controles tipo perilla de la izquierda para depositar tantos pesos de valor x (cuadritos azules) como se requieran y deposita tantos pesos de valor 1 (bolitas rojas).

c) ¿Cómo se ve la balanza?

☐ Equilibrada ☐ Desequilibrada ☐ No se

d) Mueve los controles tipo perilla de la derecha para depositar tantos pesos de valor x (cuadritos) como se requieran y deposita tantos pesos de valor 1 (bolitas).

e) ¿Cómo se ve la balanza?

☐ Equilibrada ☐ Desequilibrada ☐ No se

f) ¿Cuántas cajitas azules colocaste en el platillo izquierdo de la balanza?
____

g) ¿Cuántas bolitas rojas de peso 1 pusiste en el platillo izquierdo en la balanza?
____

h) ¿Cuántas cajitas azules colocaste en el platillo derecho de la balanza?
____

i) ¿Cuántas bolitas rojas de peso 1 pusiste en el platillo derecho de la balanza?
____

j) Según tus observaciones elige, ¿qué platillo pesa más en la balanza?

☐ El izquierdo ☐ Ninguno (están en equilibrio) ☐ El derecho

k) Escribe la ecuación que representa los pesos que hay en los platillos de la balanza.
____

l) ¡Retira una pesa con valor de 1 del platillo izquierdo de la balanza! ¿qué platillo pesa más en la balanza?

☐ El izquierdo ☐ Ninguno (están en equilibrio) ☐ El derecho

- **Retira ahora, una pesa de valor 1 del platillo derecho** ¿qué platillo pesa más en la balanza?

☐ El izquierdo ☐ Ninguno (están en equilibrio) ☐ El derecho

- Escribe la expresión algebraica o ecuación que resulta.
____

- La ecuación que obtuviste, ¿cómo es respecto a la ecuación original?

☐ Igual ☐ Equivalente ☐ Distinta ☐ No se

m) **Si hay pesas con valor de 1 en el platillo izquierdo de la balanza, ¡retira una pesa con valor de 1 del platillo izquierdo de la balanza!**

- Según tus observaciones elige, ¿qué platillo pesa más en la balanza?

☐ El izquierdo ☐ Ninguno (están en equilibrio) ☐ El derecho

- **Si hay pesas con valor de 1, ¡retira una pesa del platillo derecho!**
- Según tus observaciones elige, ¿qué platillo pesa más en la balanza?

☐ El izquierdo ☐ Ninguno (están en equilibrio) ☐ El derecho

- Escribe la expresión algebraica o ecuación que resulta__________________
- La ecuación que obtuviste, ¿cómo es respecto a la ecuación original?

☐ Igual ☐ Equivalente ☐ Distinta ☐ No se

n) **Repite este proceso hasta retirar todas las pesas de valor 1 del platillo izquierdo y las respectivas del platillo derecho conservando el equilibrio de la balanza.**

- Escribe la expresión algebraica o ecuación que resulta__________________
- La ecuación que obtuviste, ¿cómo es respecto a la ecuación original?

☐ Igual ☐ Equivalente ☐ Distinta ☐ No se

o) ¿Cuál fue la solución a la ecuación propuesta?

____

- ¿Cómo compruebas que el valor obtenido es solución de la ecuación propuesta?

☐ Reemplazo la x por el valor obtenido en la balanza ☐ Sumo el valor obtenido en la balanza al lado derecho de la ecuación ☐ Resto el valor obtenido en la balanza al lado izquierdo de la ecuación ☐ No se

Tarea para realizar después de la sesión.

Con la ayuda de la balanza, resuelve cinco expresiones algebraicas, **¡No olvides comprobar la solución!**

a) Ecuación____________________	Comprobación
b) Ecuación____________________	Comprobación
c) Ecuación____________________	Comprobación
d) Ecuación____________________	Comprobación

3. Sin la ayuda de la balanza resuelve las siguientes ecuaciones y compruébalas:

a) $x + 15 = 32$	Comprobación

b) $8 + 15 = x + 6$	Comprobación
c) $15 = x - 32$	Comprobación
d) $135 + x = 32$	Comprobación
e) $15 + x = 32 + 10$	Comprobación

Anexo III

Actividad 3 sitio web ($x + a = b$)

El siguiente cuestionario no tiene calificación alguna en el curso.

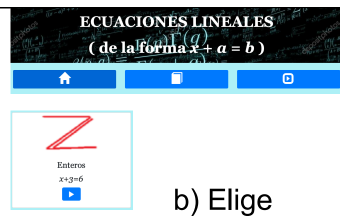
Alumno:____________________________________ **Edad:**________________

Localidad:__________________________________ **Fecha:**________________

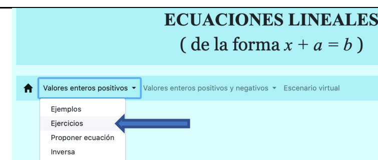
- **Vamos a trabajar con la ecuación de la forma $x + a = b$ donde (a y b son enteros) resolviendo paso a paso hasta llegar a su solución, sigue las instrucciones como se indica abajo:**

4. Abre el sitio: https://mattec.matedu.cinvestav.mx/pruebas/edumathecuaciones/Back/ProyectoTesis12/index.html y opta por los menús marcados debajo, uno a uno.

a) Selecciona



b) Elige



c) Practica

d) Elige "Por pasos Algebraicos"

5. Escribe la ecuación que vas a resolver: ____

6. Elige la operación a realizar marcando una x en el cuadro ☐ que consideres:

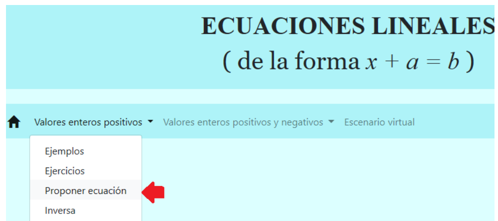
☐ Suma ☐ Resta ☐ Multiplicación ☐ División ☐ No se

7. Escribe el valor que restaste: ____________.
8. Si ya encontraste el valor de x escríbelo: _______________.
9. Qué valor sustituiste para comprobar si es la solución correcta. _______
10. ¿Te convence que ese es el valor de la incógnita x?

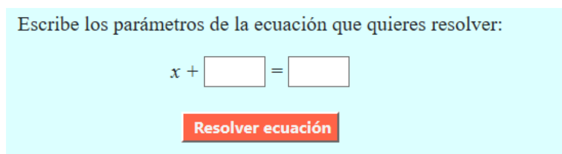
□ Si □ No □ No se

Vamos a resolver un ejercicio más: Oprime  para regresar al inicio del menú

Elige ahora la opción: Proponer ecuación



Escribe la ecuación: $x - 7 = 23$, llenando los cuadritos correspondientes:



1. Elige la operación a realizar marcando una x en el cuadro ☐ que consideres:

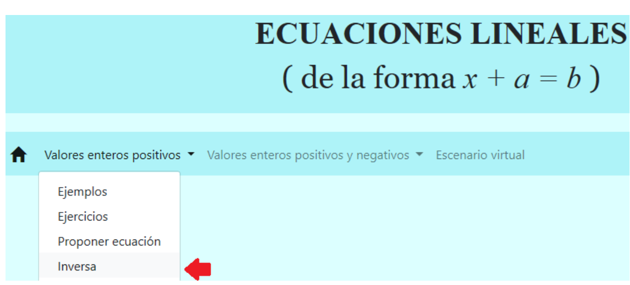
☐ Suma ☐ Resta ☐ Multiplicación ☐ División ☐ No se

2. Escribe el valor que restaste: ____________.
3. Si ya encontraste el valor de x escríbelo: _______________.
4. Qué valor sustituiste para comprobar si es la solución correcta. _______
5. ¿Te convence que ese es el valor de la incógnita x?

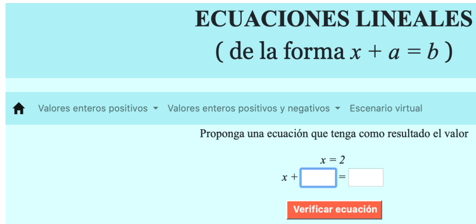
[ ] Si [ ] No [ ] No se

- **En esta sección, te daré un valor para x para que "TÚ propongas una ecuación" cuya solución sea ESE valor que se te proporcionó.**

Regresa al inicio Oprimiendo para regresar al inicio del menú y sigue las instrucciones:



d) Elige “Inversa”. Parece un valor para la incógnita x, y una ecuación que debes de rellenar de tal forma que el valor dado sea solución de la ecuación que escribas.



1. Escribe el valor para x: ____
2. Escribe el valor de elegido en el cuadro del lado izquierdo: ____________
3. Escribe el valor de elegido en el cuadro del lado derecho: _____________
4. Escribe, cómo quedaría la ecuación para el valor de x propuesto: _______________.
5. Explica como encontraste la ecuación: ____

____

____

____

6. ¿Puedes generar otra ecuación diferente para el valor de x dado?

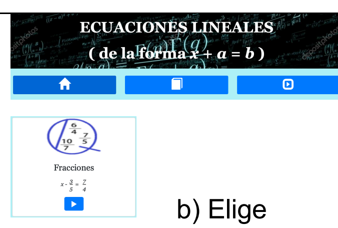
□ Si □ No □ No se

7. Escríbela: ____

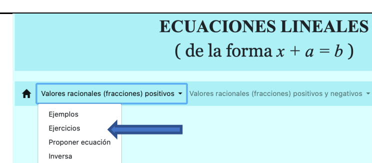
✍ **Finalmente vamos a trabajar con la ecuación de la forma $x + a = b$ (donde a y b son números racionales) resolviendo paso a paso hasta llegar a su solución, sigue las instrucciones como se indica abajo:**

1. Abre el sitio: https://mattec.matedu.cinvestav.mx/pruebas/edumathecuaciones/Back/ProyectoTesis12/index.html

a) Selecciona

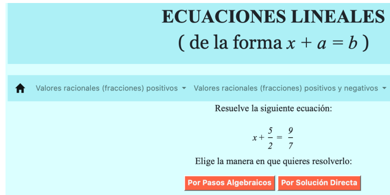


b) Elige



c) Practica

d) Elige “Por pasos Algebraicos”



2. Escribe la ecuación que vas a resolver: ______________________________________

3. Elige la operación a realizar marcando el cuadro ☐ correcto:

☐ Suma ☐ Resta ☐ Multiplicación ☐ División ☐ No se

4. Escribe el valor que restaste: ____________.
5. Si ya encontraste el valor de x escríbelo: _______________.
6. Explica como se comprueba la solución: _______________________________________

____

____

____

7. Con ayuda de la plataforma, resuelve “en casa” las siguientes ecuaciones:

a) Ecuación: $x - 8 = 15$	Comprobación
b) Ecuación: $7 = x + 2$	Comprobación
c) Ecuación: $x + 7 = 4$	Comprobación
d) $x = 7$	Ecuación x + [ ] = [ ]

e) $x = 16$ Ecuación $x + [\ \ ] = [\ \ ]$

1. Finalmente, sin ayuda de la balanza o la plataforma resuelve las siguientes ecuaciones:

a) Ecuación: $x + \frac{9}{5} = \frac{3}{5}$	Comprobación
b) Ecuación: $0 = x + 2$	Comprobación
c) Ecuación: $x + 7 = 4$	Comprobación
d) $x = 5$	Ecuación $x + [\ \ ] = [\ \ ]$
e) $x = 11$	Ecuación $x + [\ \ ] = [\ \ ]$

Anexo IV

Actividad 4 con balanza (*ax* = *b*)

El siguiente cuestionario no tiene calificación alguna en el curso.

Alumno: ___________________________ **Edad:** __________

Localidad: _________________________ **Fecha:** __________

11. Leslie pagó por tres dulces tradicionales \$9 ¿cuánto cuesta cada uno de ellos? A continuación, contesta lo siguiente y marca el cuadro □ correcto:

Figura 1: Dulces tradicionales

f) Si nombramos con la letra d a los dulces y que corresponde a la cantidad desconocida, ¿cómo quedaría en una expresión, el número de dulces que compró y su costo que desconoce?

□ $3d$ □ $d-3$ □ $d+3$ □ d □ No se

g) ¿Cuánto pagó por ellos?

□ \$4 □ \$6 □ \$3 □ \$9 □ No se

h) ¿Ahora, cómo quedaría en una expresión, el número de dulces que compró y su costo que desconoce y lo que pagó por ellos?

□ $d-3=\$9$ □ $d+3=\$9$ □ $3d=\$9$ □ No se

i) Si conoces el valor de d *(dulces)* ¡Escríbelo! ______________________________

j) Explica: ¿cómo lo encontraste? ________________________________

____

____

____

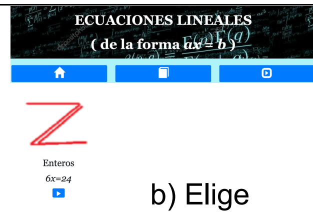
____

12. Abre el sitio:

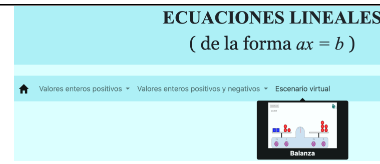
https://mattec.matedu.cinvestav.mx/pruebas/edumathecuaciones/Back/ProyectoTesis12/index.html

✍ **Vamos a trabajar con la ecuación de la forma x + a = b e iniciaremos con la analogía de balanza, sigue las instrucciones como se indica abajo:**

a) Selecciona



b) Elige



c) Practica

De inmediato aparece una balanza, semejante a la de la figura 2.

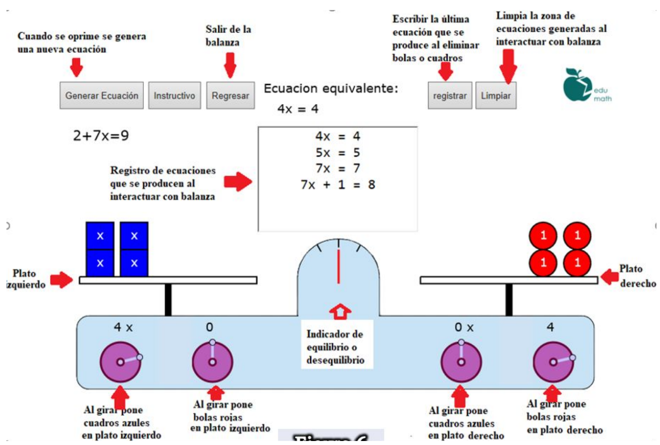


Figura 2: escenario virtual “Balanza”

Ahora vamos a representar la ecuación en la balanza, en el plato izquierdo pondremos los elementos del lado izquierdo del signo igual y en el plato derecho los elementos del lado derecho de la ecuación.

p) En lado superior izquierdo, aparece un botón con la leyenda generar una ecuación y debajo de él la ecuación generada. Elige la ecuación que aparece, o sino es de tu agrado, oprime el botón generar ecuación hasta que aparezca una de tu agrado.

Escribe la ecuación elegida____

q) Mueve los controles tipo perilla de la izquierda para depositar tantos pesos de valor x (cuadritos azules) como se requieran.

r) ¿Cómo se ve la balanza?

☐ Equilibrada ☐ Desequilibrada ☐ No se

s) Mueve los controles tipo perilla de la derecha para depositar tantos pesos de valor 1 (bolitas).

t) ¿Cómo se ve la balanza?

☐ Equilibrada ☐ Desequilibrada ☐ No se

u) ¿Cuántas cajitas azules colocaste en el platillo izquierdo de la balanza? ____

v) ¿Cuántas bolitas rojas de peso 1 pusiste en el platillo derecho de la balanza?

____

w) Según tus observaciones elige, ¿qué platillo pesa más en la balanza?

☐ El izquierdo ☐ Ninguno (están en equilibrio) ☐ El derecho

x) Escribe la ecuación que representa los pesos que hay en los platillos de la balanza.

____

y) ¡Retira una pesa de valor x del platillo izquierdo de la balanza! ¿qué platillo pesa más en la balanza?

☐ El izquierdo ☐ Ninguno (están en equilibrio) ☐ El derecho

- **Retira ahora, una o más pesas de valor 1 del platillo derecho hasta que se equilibre la balanza**.
- Escribe la expresión algebraica o ecuación que resulta.

____

- La ecuación que obtuviste, ¿cómo es respecto a la ecuación original?

☐ Igual ☐ Equivalente ☐ Distinta ☐ No se

z) **Si hay más pesas con valor x en el platillo izquierdo de la balanza, ¡retira una pesa con valor x del platillo izquierdo de la balanza!**

- Según tus observaciones elige, ¿qué platillo pesa más en la balanza?

☐ El izquierdo ☐ Ninguno (están en equilibrio) ☐ El derecho

- **Si hay pesas con valor de 1, ¡retira una o más pesas del platillo derecho hasta equilibrar la balanza!**
- Escribe la expresión algebraica o ecuación que resulta__________________
- La ecuación que obtuviste, ¿cómo es respecto a la ecuación original?

☐ Igual ☐ Equivalente ☐ Distinta ☐ No se

aa) Repite este proceso hasta dejar una pesa de valor x del platillo izquierdo y las respectivas del platillo derecho conservando el equilibrio de la balanza.

- Escribe la expresión algebraica o ecuación que resulta__________________
- La ecuación que obtuviste, ¿cómo es respecto a la ecuación original?

☐ Igual ☐ Equivalente ☐ Distinta ☐ No se

bb) ¿Cuál fue la solución a la ecuación propuesta?

____

- ¿Cómo compruebas que el valor obtenido es solución de la ecuación propuesta?

☐ Reemplazo la x por el valor obtenido en la balanza	☐ Sumo el valor obtenido en la balanza al lado derecho de la ecuación	☐ Resto el valor obtenido en la balanza al lado izquierdo de la ecuación	☐ No se

Tarea para realizar después de la sesión.

Con la ayuda de la balanza, resuelve cinco expresiones algebraicas, **¡No olvides comprobar la solución!**

VIII. Ecuación___________________	Comprobación
IX. Ecuación___________________	Comprobación

X. Ecuación____________________ Comprobación
XI. Ecuación____________________ Comprobación

13. Sin la ayuda de la balanza resuelve las siguientes ecuaciones y compruébalas:

a) $8x = 32$ Comprobación
b) $6 + 15 = 7x$ Comprobación

c) $50 - 20 = 6x$ Comprobación
d) $12x = 360$ Comprobación

Anexo V

Actividad 5 sitio web ($ax = b$)

El siguiente cuestionario no tiene calificación alguna en el curso.

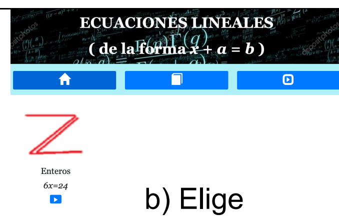
Alumno:___________________________________ Edad:_______________

Localidad:__________________________________ Fecha:_______________

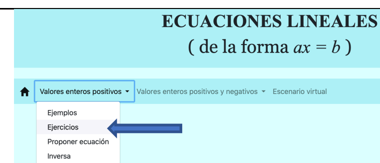
- **Vamos a trabajar con la ecuación de la forma $ax = b$ donde (a y b son enteros) resolviendo paso a paso hasta llegar a su solución, sigue las instrucciones como se indica abajo:**

14. Abre el sitio: https://mattec.matedu.cinvestav.mx/pruebas/edumathecuaciones/Back/ProyectoTesis12/index.html y opta por los menús marcados debajo, uno a uno.

a) Selecciona

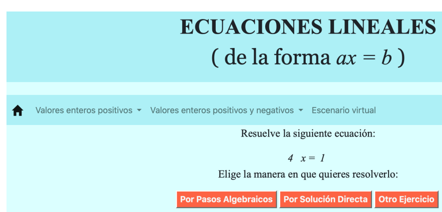


b) Elige



c) Practica

d) Elige "Por pasos Algebraicos"



15. Escribe la ecuación que vas a resolver: ____

16. Elige la operación a realizar marcando una x en el cuadro ☐ que consideres:

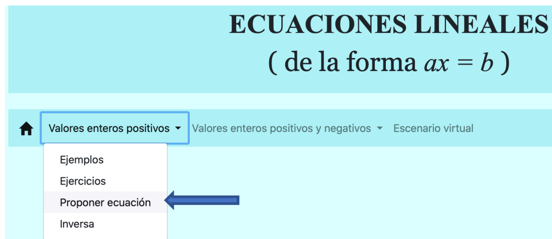
☐ Suma ☐ Resta ☐ Multiplicación ☐ División ☐ No se

17. Escribe el valor con que dividiste: ____________.
18. Si ya encontraste el valor de x escríbelo: _______________.
19. Qué valor sustituiste para comprobar si es la solución correcta. _______
20. ¿Te convence que ese es el valor de la incógnita x?

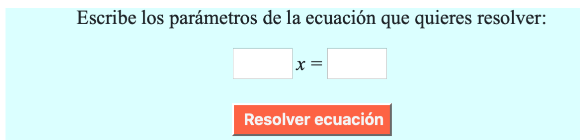
◻ Si ◻ No ◻ No se

Vamos a resolver un ejercicio más: Oprime para regresar al inicio del menú

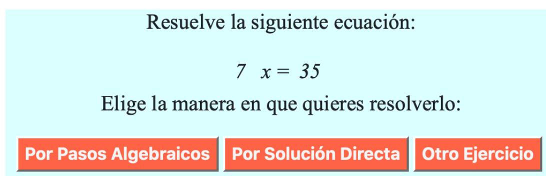
Elige ahora la opción: Proponer ecuación



Escribe la ecuación: $7x = 35$, llenando los cuadritos correspondientes:



6. Selecciona resolver por pasos algebraicos.



7. Elige la operación a realizar marcando una x en el cuadro ☐ que consideres:

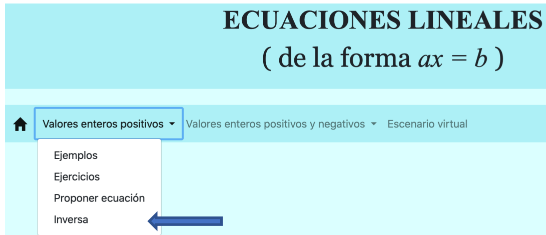
☐ Suma ☐ Resta ☐ Multiplicación ☐ División ☐ No se

8. Escribe el valor con que dividiste: _____________.
9. Si ya encontraste el valor de x escríbelo: ________________.
10. Qué valor sustituiste para comprobar si es la solución correcta. ________
11. ¿Te convence que ese es el valor de la incógnita x?

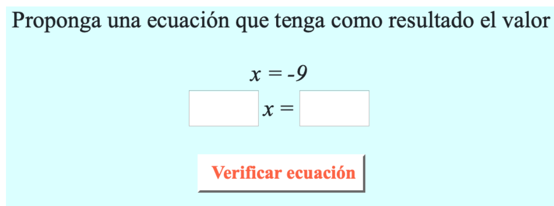
[ ] Si [ ] No [ ] No se

✍ **En esta sección, te daré un valor para x para que "TÚ propongas una ecuación" cuya solución sea ESE valor que se te proporcionó.**

Regresa al inicio Oprimiendo ˆ para regresar al inicio del menú y sigue las instrucciones:



d) Elige "Inversa". Parece un valor para la incógnita x, y una ecuación que debes de rellenar de tal forma que el valor dado sea solución de la ecuación que escribas.



8. Escribe el valor para x: ____

9. Escribe el valor de elegido en el cuadro del lado izquierdo: ____________

10. Escribe el valor de elegido en el cuadro del lado derecho: ____________

11. Escribe, cómo quedaría la ecuación para el valor de x propuesto: _______________.

12. Explica como encontraste la ecuación: ____
____
____
____

13. ¿Puedes generar otra ecuación diferente para el valor de x dado?

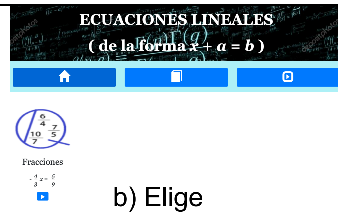
□ Si □ No □ No se

14. Escríbela: ____

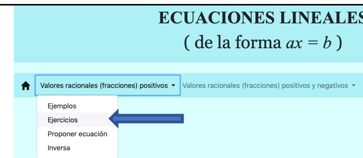
- **Finalmente vamos a trabajar con la ecuación de la forma $ax = b$ (donde a y b son números racionales) resolviendo paso a paso hasta llegar a su solución, sigue las instrucciones como se indica abajo:**

8. Abre el sitio: https://mattec.matedu.cinvestav.mx/pruebas/edumathecuaciones/Back/ProyectoTesis12/index.html

a) Selecciona

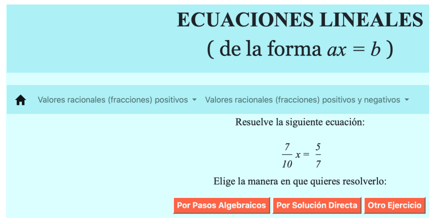


b) Elige



c) Practica

d) Elige “Por pasos Algebraicos”



9. Escribe la ecuación que vas a resolver: ____

10. Elige la operación a realizar marcando el cuadro ☐ correcto:

☐ Suma ☐ Resta ☐ Multiplicación ☐ División ☐ No se

11. Escribe el valor con que dividiste: ______________.

12. Si ya encontraste el valor de x escríbelo: _________________.

13. Explica como se comprueba la solución: ____

____

____

____

14. Con ayuda de la plataforma, resuelve “en casa” las siguientes ecuaciones:

f) Ecuación: $10x = 15$	Comprobación
g) Ecuación: $-75 = 15x$	Comprobación
h) Ecuación: $\frac{1}{16}x = \frac{3}{2}$	Comprobación
i) x = -25	Ecuación

j) x = 40 Ecuación

2. Finalmente, sin ayuda de la balanza o la plataforma resuelve las siguientes ecuaciones:

f) Ecuación: $x\frac{9}{5} = \frac{2}{3}$ Comprobación
g) Ecuación: 115 = 23x Comprobación
h) Ecuación: 12x = 84 Comprobación
i) $x = \frac{1}{2}$ Ecuación
j) x = 32 Ecuación

Anexo VI

Actividad 6 (balanza ecuación lineal tipo: *ax + b = c)*

El siguiente cuestionario no tiene calificación alguna en el curso.

Alumno: ___________________________ **Edad:** __________

Localidad: _________________________ **Fecha:** __________

21. Emilly, Leslie y Gloria fueron al cine, sus asientos están numerados consecutivos y además la suma de los números de sus 3 boletos es igual a 9 ¿cuáles son los números de sus butacas? A continuación, contesta lo siguiente y marca el cuadro □ correcto:

Figura 1: Butacas del cine

k) Si nombramos con la letra b al número de la primera butaca (cantidad desconocida), ¿cómo quedaría en una expresión algebraica, el número de butaca para Emilly?

□ b □ $b+1$ □ $b+3$ □ $b+2$ □ No se

l) ¿Cómo representaríamos el número de butaca que le sigue para Leslie?

□ $b+3$ □ $b+2$ □ $b+1$ □ b □ No se

m) Y ¿cómo representaríamos el número de la siguiente butaca para Gloria?

□ $b+2$ □ $b+3$ □ b □ $b-1$ □ No se

n) Si sumamos los tres números, de las tres butacas obtenemos:

□ $b+b+1+b+2$ □ $b+b-1+b+5$ □ $b-1+b+3+b$ □ No se

o) ¿Como quedaría la ecuación que iguala a la suma con 9?

p) ¿Cuál es el número de la butaca para Emilly? __________________

☐ $3b + 3 = 9$ ☐ $3b + 4 = 9$ ☐ $3b + 2 = 9$ ☐ No se

q) ¿Cuál es el número de la butaca para Leslie? ___________________

r) ¿Cuál es el número de la butaca para Gloria? ___________________

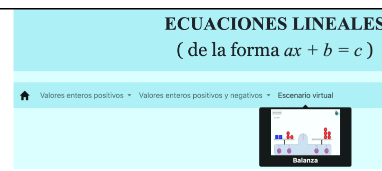
s) ¿Cómo encontraste el número de butaca? Explica: ______________________
____
____
____
____

22. Abre el sitio: https://mattec.matedu.cinvestav.mx/pruebas/edumathecuaciones/Back/ProyectoTesis12/index.html

✍ **Vamos a trabajar con la ecuación de la forma $ax + b = c$ e iniciaremos con la analogía de balanza, sigue las instrucciones como se indica abajo:**

a) Selecciona

b) Elige



c) Practica

De inmediato aparece una balanza, semejante a la de la figura 2.

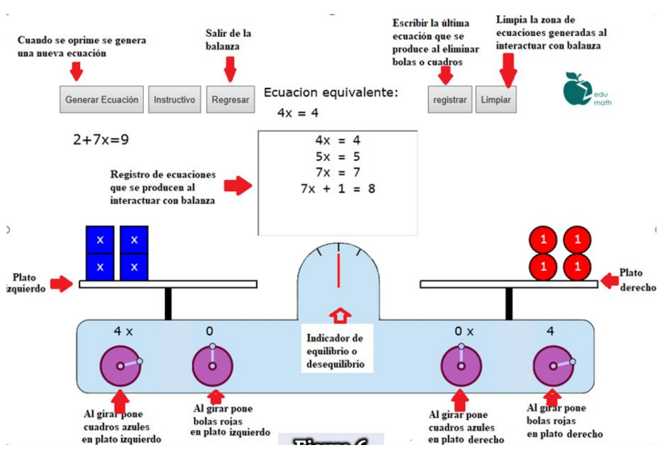


Figura 2: escenario virtual “Balanza”

Tarea para realizar después de la sesión.

Con la ayuda de la balanza, resuelve cinco expresiones algebraicas, **¡No olvides comprobar la solución!**

a) Ecuación____________________ Comprobación
b) Ecuación___________________ Comprobación
c) Ecuación____________________ Comprobación
d) Ecuación____________________ Comprobación
e) Ecuación____________________ Comprobación

23. Sin la ayuda de la balanza resuelve las siguientes ecuaciones y compruébalas:

a) $6x + 2 = 10$ Comprobación
b) $x = 7$ Ecuación

	$[\quad]x + [\quad] = [\quad]$
c) $4x + 8 = 8$	Comprobación
d) $x = 10$	Ecuación $[\quad]x + [\quad] = [\quad]$
e) $\frac{7}{10}x + \frac{5}{2} = \frac{7}{8}$	Comprobación

Anexo VII

Actividad 7 (ecuación lineal tipo: $ax + b = c$)

El siguiente cuestionario no tiene calificación alguna en el curso.

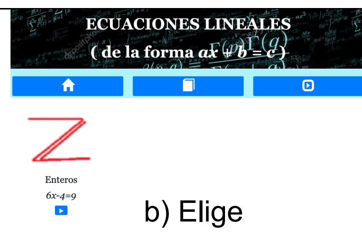
Alumno:__________________________________ **Edad:**_______________

Localidad:________________________________ **Fecha:**_______________

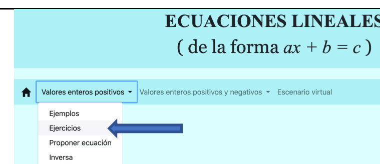
- **Vamos a trabajar con la ecuación de la forma $ax + b = c$ donde (a y b son enteros) resolviendo paso a paso hasta llegar a su solución, sigue las instrucciones como se indica abajo:**

24. Abre el sitio: https://mattec.matedu.cinvestav.mx/pruebas/edumathecuaciones/Back/ProyectoTesis12/index.html y opta por los menús marcados debajo, uno a uno.

a) Selecciona

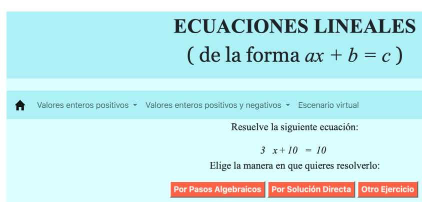


b) Elige



c) Practica

d) Elige “Por pasos Algebraicos”



25. Escribe la ecuación que vas a resolver: ____

26. Elige la operación a realizar marcando una x en el cuadro ☐ que consideres:

☐ Suma ☐ Resta ☐ Multiplicación ☐ División ☐ No se

27. Escribe el valor que restaste: _____________.

28. ¿Qué otra operación realizaste?

☐ Suma ☐ Resta ☐ Multiplicación ☐ División ☐ No se

29. Escribe el valor con que dividiste: _______________

30. Si ya encontraste el valor de x escríbelo: _______________.

31. Qué valor sustituiste para comprobar si es la solución correcta. _______

32. ¿Te convence que ese es el valor de la incógnita x?

□ Si □ No □ No se

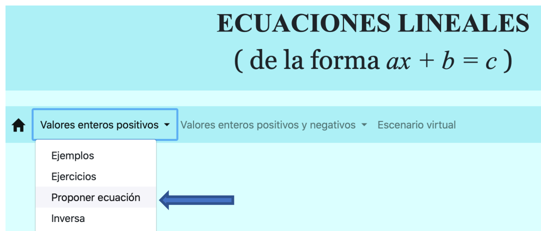
1. Resuelve en casa cinco ejercicios más.

a) Escribe la ecuación que vas a resolver ______________________________ Valor de x:_________	Comprobación:
b) Escribe la ecuación que vas a resolver ______________________________ Valor de x:_________	Comprobación:
c) Escribe la ecuación que vas a resolver ______________________________ Valor de x:_________	Comprobación:
d) Escribe la ecuación que vas a resolver ______________________________ Valor de x:_________	Comprobación:
e) Escribe la ecuación que vas a resolver ______________________________	Comprobación:

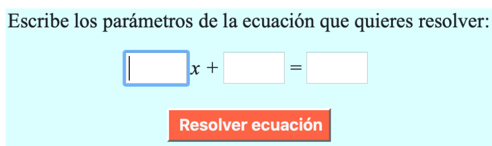
Valor de x:__________	

Oprime ^ para regresar al inicio del menú

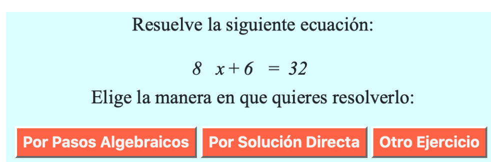
1. Elige ahora la opción: Proponer ecuación



Escribe la ecuación: $8x + 6 = 32 =$ llenando los cuadritos correspondientes:



Selecciona resolver por pasos algebraicos.



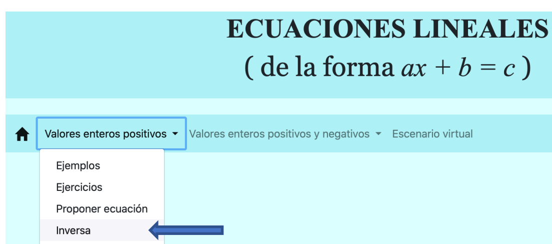
Escribe la ecuación que vas a resolver ______________________________ Valor de x:__________	Comprobación:

2. Resuelve en casa tres ejercicios más.

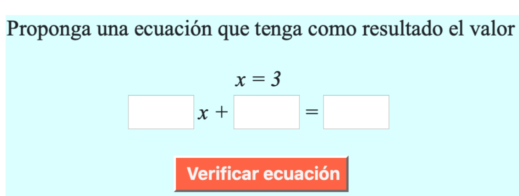
a) Escribe la ecuación que vas a resolver ______________________________ Valor de x:__________	Comprobación:
b) Escribe la ecuación que vas a resolver ______________________________ Valor de x:__________	Comprobación:
c) Escribe la ecuación que vas a resolver ______________________________ Valor de x:__________	Comprobación:

- **En esta sección, te daré un valor para x para que "TÚ propongas una ecuación" cuya solución sea ESE valor que se te proporcionó.**

1. Regresa al inicio Oprimiendo ˆ para regresar al inicio del menú y sigue las instrucciones:



Elige "Inversa". Parece un valor para la incógnita x, y una ecuación que debes de rellenar de tal forma que el valor dado sea solución de la ecuación que escribas.



Escribe el valor de x:__________	Ecuación:

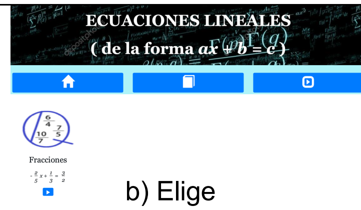
2. Resuelve en casa tres ejercicios más.

a) Escribe el valor de x:__________	Ecuación:
b) Escribe el valor de x:__________	Ecuación:
c) Escribe el valor de x:__________	Ecuación:

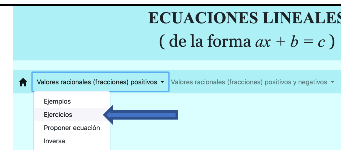
- **Finalmente vamos a trabajar con la ecuación de la forma $ax + b = c$ (donde a y b son números racionales) resolviendo paso a paso hasta llegar a su solución, sigue las instrucciones como se indica abajo:**

15. Abre el sitio:
https://mattec.matedu.cinvestav.mx/pruebas/edumathecuaciones/Back/ProyectoTesis12/index.html

a) Selecciona

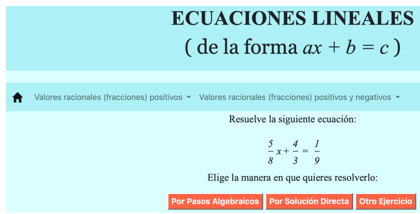


b) Elige



c) Practica

d) Elige “Por pasos Algebraicos”



16. Resuelve el ejercicio propuesto y dos más:

a) Escribe la ecuación que vas a resolver ______________________ Valor de x:_________	Comprobación:
b) Escribe la ecuación que vas a resolver ______________________ Valor de x:_________	Comprobación:
c) Escribe la ecuación que vas a resolver ______________________ Valor de x:_________	Comprobación:

Sin ayuda de la balanza o la plataforma con lápiz y papel resuelve la siguiente ecuación

$2x + 3 = 9$

Valor de x:__________ Comprobación:

3. Sin ayuda de la balanza o la plataforma resuelve las siguientes ecuaciones en casa:

k) Ecuación: $\frac{1}{6}x + \frac{2}{3} = \frac{7}{8}$	Comprobación
l) Ecuación: 6 = 4x + 7	Comprobación
m) Ecuación: 3x +8 = 1	Comprobación
Proporciona una ecuación del tipo $ax + b = c$ para los siguientes valores de x que te proporciono.	
n) $x = -3$	Ecuación [ ]x + [ ] = [ ]
o) x = 6	Ecuación [ ]x + [ ] = [ ]

Anexo VIII

Actividad 8 (balanza)

El siguiente cuestionario no tiene calificación alguna en el curso.

Alumno: ___________________________ Edad: __________

Localidad: _________________________ Fecha: __________

33. Ana y Luis ingresan el mismo número en sus calculadoras. Luis multiplica el número por 2 y luego suma 9 a este número. Ana, multiplica el número por 4 y luego suma 3 a este número. Ambos llegan al mismo resultado. ¿Con qué número comenzaron ambos? A continuación, contesta lo siguiente y marca el cuadro ☐ correcto:

Figura 1: Calculadoras escolares

t) Si nombramos con la letra x al número que introdujo Ana y Luis y que corresponde a la cantidad desconocida, ¿cómo quedaría en una expresión, las operaciones que realizó Ana en su calculadora?

☐ x ☐ $4x + 3$ ☐ $4x$ ☐ $x + 3$ ☐ No se

u) ¿Cómo quedaría en una expresión, las operaciones que realizó Luis en su calculadora?

☐ $2x$ ☐ $x + 9$ ☐ $2x + 9$ ☐ x ☐ No se

v) Si igualamos ambas expresiones obtenemos:

☐ $x + 3 = x + 9$ ☐ $4x = 2x$ ☐ $4x + 3 = 2x + 9$ ☐ No se

w) Si ordenas los términos semejantes de la expresión ¿Cómo resulta?

x) Si haces operaciones ¿Cómo resulta la expresión? ___________________

□ $4x - 2x = 9 - 3$ □ $4x + x = 9 + 3$ □ $2x + x = 6 - 3$ □ No se

y) ¿Cuál es el valor para la x (número que eligió Luis y Ana)? ___________

z) ¿Cómo encontraste el número elegido por Ana y Luis? Explica: ____________
____
____
____
____

34. Abre el sitio:
https://mattec.matedu.cinvestav.mx/pruebas/edumathecuaciones/Back/ProyectoTesis12/index.html
    - **Vamos a trabajar con la ecuación de la forma $ax + b = cx + d$ e iniciaremos con la analogía de balanza**

Con la ayuda de la balanza, resuelve cinco expresiones algebraicas, **¡No olvides comprobar la solución!**

f) Ecuación____________________	Comprobación
g) Ecuación____________________	Comprobación
h) Ecuación____________________	Comprobación
i) Ecuación____________________	Comprobación

j) Ecuación____________________ Comprobación

35. Sin la ayuda de la balanza resuelve las siguientes ecuaciones y compruébalas:

f) $6x + 5 = x + 20$ Comprobación

g) $x = 3$ Ecuación

$[\quad]x + [\quad] = [\quad]x + [\quad]$

h) $4x + 2 = 9x + 1$ Comprobación

i) $x = 10$ Ecuación

$[\quad]x + [\quad] = [\quad]x + [\quad]$

j) $x + 10 = 2x + 4$ Comprobación
k) $10x + 3 = 2x + 2$ Comprobación
l) $5x + 3 = 9x + 10$ Comprobación

Anexo IX

Actividad 9 ($ax + b = cx + d$)

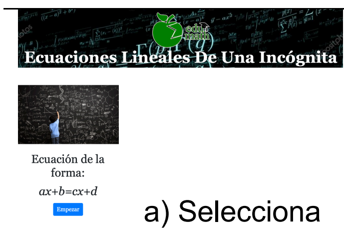
El siguiente cuestionario no tiene calificación alguna en el curso.

Alumno:__________________________________ **Edad:**_______________

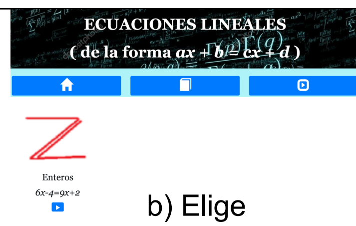
Localidad:________________________________ **Fecha:**_______________

- **Vamos a trabajar con la ecuación de la forma $ax + b = cx + d$ donde (a y b son enteros) resolviendo paso a paso hasta llegar a su solución, sigue las instrucciones como se indica abajo:**

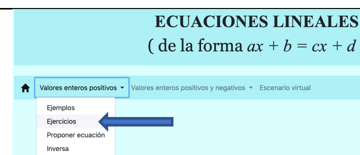
36. Abre el sitio: https://mattec.matedu.cinvestav.mx/pruebas/edumathecuaciones/Back/ProyectoTesis12/index.html y opta por los menús marcados debajo, uno a uno.



a) Selecciona

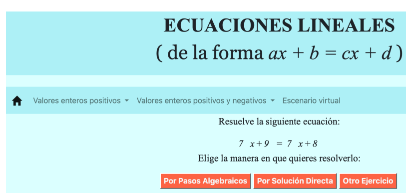


b) Elige



c) Practica

d) Elige “Por pasos Algebraicos”



2. Resuelve cinco ejercicios.

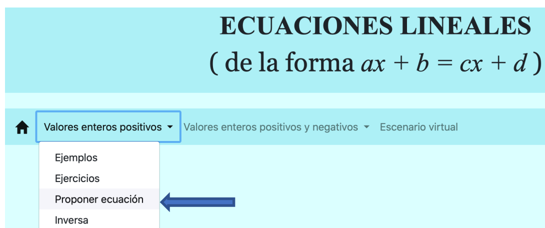
f) Escribe la ecuación que vas a resolver ______________________________ Valor de x:__________	Comprobación:

g) Escribe la ecuación que vas a resolver ________________________________ Valor de x:__________	Comprobación:
h) Escribe la ecuación que vas a resolver ________________________________ Valor de x:__________	Comprobación:
i) Escribe la ecuación que vas a resolver ________________________________ Valor de x:__________	Comprobación:
j) Escribe la ecuación que vas a resolver ________________________________	Comprobación:

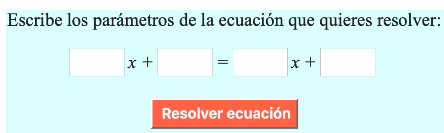
Valor de x:__________	

Oprime para regresar al inicio del menú

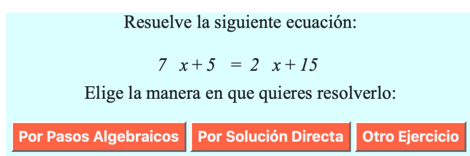
3. Elige ahora la opción: Proponer ecuación



Llena los cuadritos correspondientes:



Selecciona resolver por pasos algebraicos.



3. Resuelve cinco ejercicios.

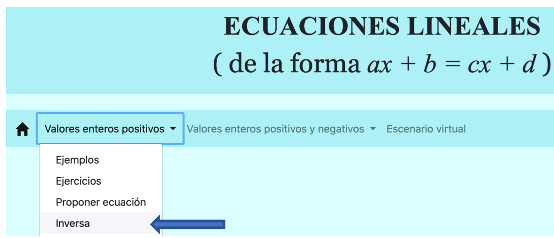
a) Escribe la ecuación que vas a resolver ______________________________ Valor de x:__________	Comprobación:

b) Escribe la ecuación que vas a resolver ______________________________ Valor de x:__________	Comprobación:
c) Escribe la ecuación que vas a resolver ______________________________ Valor de x:__________	Comprobación:
d) Escribe la ecuación que vas a resolver ______________________________ Valor de x:__________	Comprobación:
e) Escribe la ecuación que vas a resolver ______________________________	Comprobación:

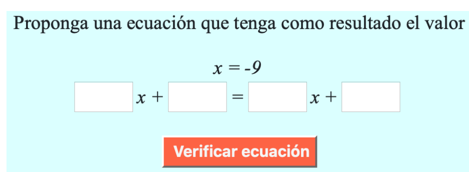
Valor de x:__________	

- **En esta sección, te daré un valor para x para que "TÚ propongas una ecuación" cuya solución sea ESE valor que se te proporcionó.**

3. Regresa al inicio Oprimiendo para regresar al inicio del menú y sigue las instrucciones:



Elige "Inversa". Parece un valor para la incógnita x, y una ecuación que debes de rellenar de tal forma que el valor dado sea solución de la ecuación que escribas.



4. Resuelve tres ejercicios.

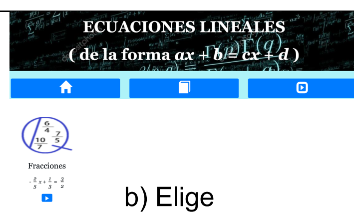
d) Escribe el valor de x:__________	Ecuación:
e) Escribe el valor de x:__________	Ecuación:

f) Escribe el valor de x:__________	Ecuación:

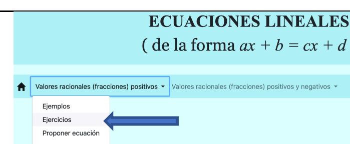
- **Finalmente vamos a trabajar con la ecuación de la forma $ax + b = cx + d$ (donde a y b son números racionales) resolviendo paso a paso hasta llegar a su solución, sigue las instrucciones como se indica abajo:**

17. Abre el sitio: https://mattec.matedu.cinvestav.mx/pruebas/edumathecuaciones/Back/ProyectoTesis12/index.html

a) Selecciona

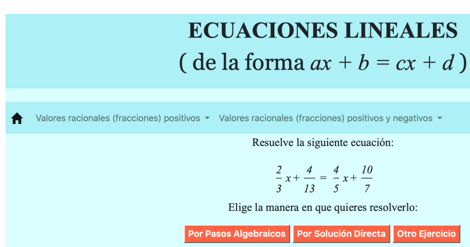


b) Elige



c) Practica

d) Elige "Por pasos Algebraicos"



18. Resuelve tres ejercicios:

d) Escribe la ecuación que vas a resolver ______________________________ Valor de x:__________	Comprobación:
e) Escribe la ecuación que vas a resolver ______________________________ Valor de x:__________	Comprobación:
f) Escribe la ecuación que vas a resolver ______________________________ Valor de x:__________	Comprobación:

4. Sin ayuda de la balanza o la plataforma resuelve las siguientes ecuaciones:

p) Ecuación: $x + 5 = 3x + 6$	Comprobación
q) Ecuación: $2x + 4 = 10x + 8$	Comprobación

r) Ecuación: $5x + 6 = 7x + 10$	Comprobación
s) Ecuación: $\frac{1}{6}x + \frac{1}{4} = \frac{3}{11}x + \frac{8}{13}$	Comprobación
t) $x = 2$	Ecuación [ ]x + [ ] = [ ]x + [ ]
u) x = 0	Ecuación [ ]x + [ ] = [ ]x + [ ]

Anexo X

Postest

El siguiente cuestionario no tiene calificación alguna en el curso.

Alumno:__________________________________ Edad:_______________

Localidad:________________________________ Fecha:_______________

- **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

---

v) Ecuación: $x + 5 = 3x + 6$ Comprobación

---

w) Ecuación: $2x + 4 = 64$ Comprobación

---

x) Ecuación: $5x + 6 = 7x + 10$ Comprobación

---

y) Ecuación: $\frac{4}{6}x + \frac{1}{4} = \frac{1}{6}x + \frac{1}{2}$ Comprobación

---

z) $x = 2$ Ecuación

[ ]x + [ ] = [ ]x + [ ]

---

aa) x = 0 Ecuación

[ ]x + [ ] = [ ]

---

bb) Ecuación: $\frac{1}{3}x + \frac{5}{6} = \frac{7}{6}$ Comprobación

cc) x = 1 Ecuación

[ ]x + [ ] = [ ]x + [ ]

dd) $9x + 10 = 109$ Comprobación

ee) x = 5 Ecuación

[ ]x + [ ] = [ ]

ff) Escribe que entiendes por ecuación: ____

____

____

____

gg) Escribe que entiendes por solución de una ecuación: ______________________________

____

____

____

hh) Indica los pasos para resolver una ecuación______________________________________

____

____

____

Gracias por contestar…

Anexo XI

Entrevista

Alumno:_________________________________ Edad:_______________

Localidad:_______________________________ Fecha:_______________

1. De la expresión [ ] + 3 = 11: ¿Cómo se puede comprobar que es correcta la solución?
2. Escribe la comprobación.
3. De la expresión 2.5 + 17.5 = [ ] + 15: ¿Cómo se puede comprobar que es correcta la solución?
4. Escribe la comprobación.
5. De la expresión 63 = ([ ])(7): ¿Cómo se puede comprobar que es correcta la solución?
6. Escribe la comprobación.
7. De la expresión 1.5 x [ ] + 10 = 3 + 11.5: ¿Cómo se puede comprobar que es correcta la solución?
8. Escribe la comprobación.
9. De la expresión (6)([ ]) - 2 = (4)([ ]) - 12: ¿Cómo se puede comprobar que es correcta la solución?
10. Escribe la comprobación.