CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD DISTRITO FEDERAL

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

COMPRENSIÓN DE IDEAS FUNDAMENTALES DE ESTOCÁSTICOS DE DOCENTES EN FORMACIÓN PARA LA EDUCACIÓN PRIMARIA

Tesis que presenta

Ana María Martínez Blancarte

para obtener el grado de

Doctora en Ciencias

en la especialidad de Matemática Educativa

Directora de la Tesis:

Dra. Ana María Ojeda Salazar

Ciudad de México, agosto de 2021

CONACYT

Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

Agradezco al **Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología** que por medio del programa de becas me permitió realizar mis estudios de doctorado.

Becario No.: 219926

Agradezco al **Cinvestav**, Institución dedicada a la formación de investigadores.

Agradezco al **Departamento de Matemática Educativa** que fue mi segunda casa de estudios en donde me formé como investigadora.

Agradezco especialmente a la **Dra. Ana María Ojeda Salazar** por asumir el reto de guiarme en mi investigación contribuyendo así en mi formación.

Agradezco a todas las **escuelas primarias públicas** y a la **escuela normal pública** por las facilidades otorgadas para llevar a cabo la investigación.

Agradezco a todas las **directoras**, **maestras de grupo**, **alumnos** y **padres de familia** de las escuelas primarias, así como a los **normalistas** que participaron y permitieron la realización de la investigación.

Agradezco a las **Doctoras Hatice Asuman Oktaç** y **Aurora Gallardo Cabello**; a los **Doctores Francisco Javier Lezama Andalón, Mario Armando Giordano Moreno, Ricardo Cantoral Uriza** y **José Marcos López Mujica**† por las sugerencias y comentarios pertinentes a la escritura de la tesis.

DEDICATORIA

A mi familia porque ha sido un pilar importante y fundamental para mi formación académica, sin sus consejos, sus enseñanzas, sus valores, sus principios y su apoyo espiritual e incondicional no podría andar por la vida cosechando éxitos.

A todas y cada una de las personas que coincidieron en mi camino quienes con sus muestras de amistad y cariño me alentaron para culminar una etapa más de mi formación profesional; no escribo sus nombres porque no deseo omitir a ninguna y a ninguno de ellos, pero saben que compartimos momentos inolvidables.

A todas y cada una de las personas que laboran en Cinvestav que, sin importar su oficio, puesto o nivel educativo siempre me regalaron una sonrisa y me dieron las facilidades para hacer mi estancia placentera en esta bella institución.

Ana María Martínez Blancarte

RESUMEN

Esta investigación, cualitativa (Vasilachis, 2006), caracterizó la comprensión de estocásticos de los estudiantes de Licenciatura en Educación Primaria (SEP, 2012c; SEP, 2018e). El objetivo fue identificar el conocimiento de estocásticos requerido por ellos en su formación y diseñar una propuesta consecuente. La investigación se rigió por tres ejes (Ojeda, 1994): el *epistemológico* consideró diez ideas fundamentales de estocásticos (Heitele, 1975), la evolución de la idea de azar en el niño (Piaget e Inhelder, 1951); y el triángulo epistemológico (Steinbring, 1991). El eje *cognitivo* atendió investigaciones de educación en estocásticos (por ejemplo, Fischbein, 1975; Bakker, 2003; English, 2005). El eje *social* consideró la estructura en las dimensiones epistemológica, cognitiva y didáctica del conocimiento de matemáticas para la enseñanza (Scheiner, 2015) y la interacción en el aula (Steinbring, 2005) durante ella.

Del examen de las propuestas institucionales de formación docente (SEP, 2012c) para y de primaria (SEP, 2011e; 2017a) para estocásticos concluimos que la propuesta institucional normalista (SEP, 2012c; 2018e), aunque muy extensa, carece de contenidos epistemológicos, cognitivos y didácticos para la enseñanza y se le restringe a los señalados en la propuesta de educación primaria (SEP, 2011e). Esta última incluye las medidas de tendencia central como la triada criticada por Bakker (2003), pero la propuesta 2017 de SEP omite la enseñanza de la mediana. Los programas vigentes en primaria restringen la combinatoria a un tratamiento aritmético.

En general, los normalistas no identificaron distintos tipos de arreglos y sus recursos semióticos para tratarlos fueron limitados, en particular del diagrama de árbol. No distinguieron entre tipos de datos en una muestra, tamaño de ésta, variación y dispersión de datos, distintas medidas centrales por sus propiedades, ni el uso apropiado de términos referidos a estocásticos. Mejor los alumnos de 2° y 4º grados evidenciaron un dominio intuitivo de combinatoria que el manifestado por los normalistas.

Conviene que programas y formadores de docentes incluyan las dimensiones propuestas por Scheiner (2015) en la enseñanza de estocásticos e incorporen resultados de investigaciones de la educación en estos contenidos y no centrar su enseñanza sólo en el conocimiento de cálculo prescrito en la propuesta institucional. También necesitan asistir y conocer las prácticas de enseñanza de los normalistas en las aulas de primaria.

ABSTRACT

This qualitative research (Vasilachis, 2006) characterizes the understanding of stochastics of undergraduate students in Primary Education (SEP, 2012c; SEP, 2018e). The aim was to identify the knowledge of stochastics they require for their future teaching and to design a consequential training proposal. The research was ruled by three axes (Ojeda, 1994): the *epistemological* one considered ten fundamental ideas of stochastics (Heitele, 1975); the evolution of the idea of chance in children (Piaget & Inhelder, 1951); and the epistemological triangle (Steinbring, 1991). The *cognitive* axis addressed research in stochastics education (for example, Fischbein, 1975; Bakker, 2003; English, 2005). The *social* axis considered the knowledge for the teaching of mathematics as structured into the epistemological, cognitive and didactic dimensions (Scheiner, 2015), as well as the interaction in the mathematics classroom (Steinbring, 2005).

From the examination of the institutional proposals for the Bachelor´s Degree in Primary Education (2012c) and for Primary Education (SEP, 2011e; 2017a) for stochastics, we conclude that the institutional proposal for teacher training (SEP, 2012c; 2018e) for stochastics, although very extensive, does not include the epistemological, cognitive and didactic elements necessary for the teaching and is restricted to those outlined in the primary education proposal (SEP, 2011e). The latter includes the measures of central tendency as the triad criticized by Bakker (2003), but SEP's 2017 proposal omits the median. Current primary programs restrict combinatorics to arithmetic treatment.

In general, the prospective teachers did not identify different types of arrangements and the semiotic resources they applied were too limited, particularly the tree diagram. They did not distinguish between types of data in a sample, sample size, data variation and dispersion, different central measures properties, nor the appropriate use of stochastics terms. Unlike them, second and fourth grades pupils showed an intuitive combinatorial domain than that of the future teachers.

Teacher trainers should include the dimensions proposed by Scheiner (2015) in their teaching of stochastics and incorporate results of the educational research into the training they provide, and not to stress their teaching only on the knowledge of calculation prescribed in the institutional proposal. In addition, they need to attend and be aware of their students' teaching practices in primary classroom.

Índice

Capítulo 3 Método de la investigación

Capítulo 4 Investigación Documental

Propuestas Institucionales

Capítulo 5 Formación docente en estocásticos para la educación primaria

Capítulo 7 Conclusiones

Apendices

Anexos

Índice de tablas

Índice de Figuras

Introducción

"La probabilidad y la estadística deberían ocupar un lugar bien determinado en el currículo escolar" (Råde (1986) citado en Steinbring, 1990, p. 209), y mejor aún, si se les reconoce como "estocástica" ya que el término considera también la aleatoriedad. De acuerdo con Chernoff y Sriraman (2014), la probabilidad es subjetiva mientras que la aleatoriedad e inferencia son informales. Instruir en estocásticos deriva en la transición de un pensamiento mágico y mítico a un pensamiento racional y causal (Heitele, 1975).

Steinbring (1991) señala que para la enseñanza de los estocásticos es importante considerar lecciones que introduzcan conceptos básicos (probabilidad, azar o independencia) que sean informativas y que señalen el uso de representaciones como el diagrama de árbol o diagramas gráficos. Atribuye esa importancia a que "en el proceso diario de aprendizaje y comprensión, la probabilidad y el azar están sujetos a las condiciones del marco epistemológico del conocimiento estocástico, es decir a la *circularidad* del concepto y a la ambigüedad de los medios de representación y a las *convenciones* y los *patrones sociales* variables" (p. 5, itálicas en original).

Sin embargo, algunas investigaciones sobre la comprensión de estocásticos (por ejemplo, Limón, 1995; Alquicira, 1998; Carvallo, 2004; Elizarraras, 2004; Vázquez, 2004, López, 2006; Flores, M., 2009: Rivera, 2011; Salcedo, 2013) en diversos niveles y modalidades del sistema educativo han concluido que: 1) es poca la importancia que se otorga a ese contenido en la formación matemática pre-universitaria, 2) los alumnos manifiestan dificultades de comprensión de ideas de estocásticos, 3) los contenidos de estocásticos parecen no tener relevancia en los planes y programas correspondientes y en las evaluaciones mismas. Otras investigaciones han señalado la falta de conocimiento de estocásticos de docentes de educación básica en activo, ya que, en coincidencia con lo señalado por Steinbring (1991) "la mayoría de los profesores no están dispuestos a enseñar la probabilidad ni la estadística, pues implican un tipo de matemática completamente diferente a la que ellos conocen" (p. 209).

En contraste, en años recientes se incluyó a los estocásticos en todo un semestre en la curricula de la Educación Normal (SEP, 2012c y SEP, 2017c). Por ello, con un enfoque cualitativo (Vasilachis, 2006), investigamos la comprensión de estocásticos del futuro docente de educación primaria, dadas las reformas cercanas en primaria (SEP, 2009, 2011e y 2017a) y en la Educación Normal (SEP, 2012c y 2017c).

Los objetivos que nos propusimos fueron: identificar el Conocimiento Matemático para Enseñar (CME) y las dificultades de comprensión de estocásticos del docente en formación con el fin de proponer lineamientos para el diseño de estrategias de enseñanza de ese tema.

Para el primero de estos objetivos, concordamos con Scheiner (2015) en que, antes que recurrir a un esquema generalizado y —añadiríamos— "sobrecompartimentalizado" del CME (por ejemplo, el propuesto por Hill, Ball & Schilling, 2008), se considere el acto de enseñanza en el aula de un contenido matemático *particular* como una *confluencia* de tres dominios de su conocimiento: *epistemológico*, *cognitivo* y *didáctico*. Ya que la naturaleza de estos dominios corresponde a la de los ejes rectores (*epistemológico*, *cognitivo* y *social*) de la perspectiva teórica que fundamenta esta investigación (en el Capítulo 2), presentamos de acuerdo a estos ejes la organización de los análisis de los datos recopilados en los distintos escenarios considerados.

Para el segundo de los objetivos, los escenarios empíricos de la investigación fueron aulas de la normal básica (para la educación primaria) y aulas de primaria.

El Capítulo 1 presenta los antecedentes y la problemática de la investigación. En particular, se describe lo relacionado a las medidas de tendencia central, que ha sido un tema que se trata en las propuestas institucionales de la primaria (SEP, 2011e y 2017a) y de la normal (SEP, 2012c y SEP. 2017c). Un contenido que no se trata como tal en primaria, pero sí en el Plan y Programas de la Licenciatura en la normal, es el de técnicas de conteo (combinatoria), el cual consideramos que debe promoverse más en la escuela primaria. Presentamos las preguntas y los objetivos de la investigación e incluimos las limitaciones y delimitaciones de su desarrollo.

El Capítulo 2 expone la perspectiva teórica de la investigación, como ya señalamos, en tres ejes: el *epistemológico* considera la propuesta de Heitele (1975) de diez ideas fundamentales de estocásticos como guía de un currículum en espiral; la caracterización de la evolución de la idea de azar en el niño de acuerdo a Piaget e Inhelder (1951); y el triángulo epistemológico propuesto por Steinbring (1991), que subraya las interrelaciones entre objeto, signo y concepto para la constitución de un concepto matemático. El eje *cognitivo* se centra en los cuatro dominios intuitivos del desarrollo del pensamiento probabilístico, investigados por Fischbein (1975). Consideramos también los resultados de las investigaciones que se han enfocado en la educación en Probabilidad y en Estadística y conectadas con la problemática de nuestro interés. Tomamos en cuenta los aspectos relacionados con los recursos semióticos que se ponen en juego en la enseñanza de estocásticos, en los medios que ella utiliza y en los procedimientos para contestar preguntas relativas a sus contenidos.

En el eje *social* se considera la enseñanza de estocásticos, su prescripción en las propuestas institucionales y la interacción entre quienes imparten la enseñanza y sus destinatarios (Steinbring, 2005; Jacobs y Ambrosse, 2003). También se toman en cuenta los tres dominios del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (CME) propuestos por Scheiner (2005).

El Capítulo 3 describe la organización de la investigación, sus escenarios, los participantes, los métodos, y los instrumentos de la investigación, así como las técnicas de registro de datos utilizadas. Dado nuestro interés en la formación en estocásticos del docente de primaria para que ejerza su enseñanza en el aula, se realizó una investigación documental (Cortés y García, 2003) de las propuestas institucionales para estocásticos en primaria y en la normal, así como de los libros de texto que se recomiendan en esas propuestas. Luego, *experienciamos* (Maturana y Varela, 1994) la enseñanza de estocásticos: a) directamente con estrategias de diseño propio puestas en juego en el aula de la normal; y b) indirectamente con estrategias propuestas y ejercidas por el normalista en el aula de primaria. A partir de datos que nos parecieron de interés, profundizamos en la comprensión de ideas de estocásticos de casos de normalistas mediante *entrevistas semiestructuradas* (Zazkis, y Hazzan, 1999) individuales. A todos los datos se les aplicó la célula de análisis (Ojeda, 2006).

El Capítulo 4 se refiere a la investigación documental para caracterizar las propuestas institucionales para estocásticos: Normal (SEP, 2012c y 2017c) y Educación Primaria (SEP, 2011e y SEP, 2017a); de los libros de texto de primaria y el de Nortes (1991) propuesto para la enseñanza de estocásticos en el aula de la normal.

El Capítulo 5 atañe a los escenarios en la escuela normal, como su aula de estocásticos en la que tuvo lugar la experienciación (Maturana y Varela, 1994) de la enseñanza de estocásticos por la investigadora antecedida por una reflexión (Ferrater, 1994) sobre su papel de formadora de docentes con 52 normalistas. También incluimos las entrevistas individuales semiestructuradas a casos de normalistas con respuestas de interés en cuestionarios que se les aplicaron.

El Capítulo 6 presenta los resultados obtenidos de la observación de las prácticas de la enseñanza de temas de estocásticos llevadas a cabo por los normalistas con alumnos de segundo, tercero, cuarto, quinto y sexto grado de diferentes escuelas primarias públicas. También presentamos los resultados de las entrevistas semiestructuradas individuales a los practicantes y a algunos de los alumnos de primaria a quienes se les impartió la enseñanza de temas de estocásticos en las prácticas observadas.

En el Capítulo 7 presentamos las conclusiones de la investigación de acuerdo a cada uno de los escenarios empíricos y a las preguntas y objetivos planteados. Por ello incluimos una propuesta para la enseñanza de temas de estocásticos y un guion para la observación de las prácticas de los normalistas en las aulas de primaria. Finalmente señalamos investigaciones futuras para ampliar el conocimiento de la comprensión de ideas fundamentales de estocásticos, dadas las reformas recientes en primaria (SEP, 2017a) y en la licenciatura para educación primaria (SEP, 2018e) que se están empezando a poner en juego para la educación pública.

Capítulo 1

Antecedentes y planteamiento de la investigación

La experiencia en la formación para la docencia en la educación primaria, así como la del ejercicio en el aula de esta última, han conducido a quien suscribe esta investigación, en el orden cualitativo (Vasilachis, 2006), a plantearla y desarrollarla.

1.1. Antecedentes

Diversas investigaciones cualitativas sobre estocásticos se han realizado en diferentes niveles educativos y han evidenciado la necesidad de fortalecer el conocimiento de Probabilidad y de Estadística de alumnos, estudiantes y docentes en formación inicial y en ejercicio.

1.1.1. Conocimiento didáctico de las matemáticas para futuros docentes de secundaria

En su investigación de maestría, Martínez (2010) se enfocó en el Conocimiento Pedagógico como uno de los dominios del Conocimiento Matemático para Enseñar (en adelante, **CME**), que proponen Ball y Bass (2000), quienes afirman que todo docente de la asignatura de matemáticas debe poseerlo y que consiste en el conocimiento del contenido matemático y del pedagógico que requieren los docentes en el desarrollo de su diaria labor. Los dominios del CME son:

- el *Conocimiento de Contenido Especializado;*
- el *Conocimiento de Contenido y de Estudiantes;* y
- el *Conocimiento de Contenido y de Enseñanza*.

La investigación citada se desarrolló en el marco de un taller dirigido a normalistas de secundaria sobre la importancia del aspecto pedagógico de la asignatura de matemáticas en contenidos como el trazo de las medianas de un triángulo, construcción de polígonos regulares, el Teorema de Tales de Mileto y la probabilidad clásica. Los resultados fueron: los docentes en formación para educación secundaria no consideraban relevante al Conocimiento de Contenido Pedagógico para la enseñanza de las matemáticas, sino que se preocupaban por tener un conocimiento de los contenidos matemáticos a impartir. En su primera jornada de prácticas, los futuros docentes se centraron en una interacción directiva (Jacobs y Ambrose, 2003) con sus alumnos; las hojas de trabajo que diseñaron eran una lista de ejercicios o problemas que planteaban a los alumnos para mecanizar, por ejemplo, las fórmulas matemáticas para determinar el área de figuras geométricas. Una coincidencia entre el papel del docente y cómo lo consideraban los alumnos de secundaria fue que estos últimos esperaban que fuera él quien explicara el contenido y hasta el procedimiento de solución de los ejercicios.

A partir de la lectura y reflexión de los artículos de investigación (por ejemplo, Colaboración con maestros para mejorar el aprendizaje de las matemáticas: Pedagogía a tres niveles, Describiendo la práctica de maestros efectivos de matemáticas en los años tempranos, El papel del maestro en cambiar afirmaciones por argumentos, entre otros) propuestos en el taller, los normalistas reconocieron los cuatro parámetros propuestos por Askew, Brown, Denvir & Rhodes (2000) para el Conocimiento de Contenido Pedagógico que un docente debe dominar y tomar en cuenta al diseñar y llevar a cabo una clase. Esos parámetros son: actividades, herramientas, comunicaciones, además de las relaciones y normas. Las hojas de trabajo que los normalistas diseñaron para desarrollar la clase en su práctica en el aula de secundaria ya incluyeron un objetivo y una variedad en los ejercicios de acuerdo al tópico matemático que impartirían; consideraron esas hojas como una herramienta para desarrollar toda una clase. Al final, en ocasiones el papel en el aula de secundaria de los docentes en formación pasó de una interacción directiva a una observacional y exploratoria (Jacobs y Ambrose, 2003).

1.1.2. Conocimiento Matemático para Enseñar (CME)

Deborah Ball (2000) afirmó que la pedagogía y el conocimiento de una materia se ven por separado. Esto ha dado origen a diversas propuestas que tratan específicamente la asignatura de matemáticas para identificar el dominio de la asignatura y su enseñanza. Shulman (1986) recomendó que se considerara el conocimiento didáctico de las matemáticas, para el cual estableció tres categorías: el conocimiento de contenido, el conocimiento curricular y el conocimiento de contenido pedagógico (CCP). Para esta última categoría (CCP) desarrolló diversas investigaciones sobre el conocimiento del profesor. Ball, Thames y Phelps (2007) precisan la propuesta de Shulman (1986) y proponen el CME, cuya estructura es diseñada por Hill, Ball y Schilling en 2008 en dos conocimientos principales: el Conocimiento de Contenido de la materia y el Conocimiento de Contenido Pedagógico, estos a su vez se dividen en otros dominios. Como ya indicamos en el apdo. 1.1.1, el CME está conformado por el contenido matemático y su pedagogía; este conocimiento lo requiere cualquier profesor en su diaria labor. En nuestra investigación consideramos tres de los dominios del CME:

- *Conocimiento de Contenido Especializado*: Hill, *et al*. (2008) lo definen como el contenido adicional, que va más allá del conocimiento matemático "común" para la enseñanza de un tópico matemático.
- *Conocimiento de Contenido y Estudiantes*: es el que se relaciona con los conocimientos de contenido y el razonamiento de los alumnos; es decir, el conocimiento de los conceptos, las estrategias, dudas, confusiones o ideas erróneas de los educandos sobre un tópico matemático.
- *Conocimiento de Contenido y Enseñanza*: es la fusión de matemáticas y pedagogía para el diseño y planeación de la enseñanza en el aula.

1.1.3. Tipos de interacción en el aula de matemáticas

De manera general, Jacobs y Ambrose (2003) clasifican la interacción entre el maestro y sus estudiantes en el salón de clase. Los tipos de interacción son:

1. *Interacción responsiva*: Los docentes con respecto a los problemas que plantean: a) verifican que los alumnos lo hayan comprendido, b) lo hacen más accesible, c) hacen preguntas específicas y d) sugieren o solicitan a los demás alumnos, otras estrategias de solución. Lo anterior con el fin de que los estudiantes tomen decisiones sobre la vía más apropiada de acción. El alumno argumenta el porqué de su decisión y cómo resolvió el problema. El docente reflexiona acerca de las estrategias, los materiales y las representaciones que usó para resolver el problema y si se estableció una conexión entre el razonamiento y una notación simbólica o si fue necesario plantear un problema análogo al original.

2. *Interacción exploratoria:* El intercambio de comunicación entre el docente y el alumno es confuso, pues el primero desconoce el nivel de pensamiento de sus estudiantes.
3. *Interacción observacional:* El papel del docente se caracteriza por ser pasivo, observa y pregunta al alumno sobre los procedimientos que realiza para resolver el problema que se le planteó y acepta cualquier respuesta que dan los alumnos.
4. *Interacción directiva:* El pensamiento del profesor se observa en casi toda la clase, pues los docentes controlan las participaciones de sus alumnos y les dan la solución al problema o actividad planteada.

1.2. Sistemas del pensamiento probabilístico

En el estudio de la estadística es difícil tratar fenómenos aleatorios cuyo foco es la incertidumbre, esto da origen al surgimiento de la probabilidad que mide lo incierto o posible que pueden ser estos fenómenos.

El pensamiento probabilístico considera la variabilidad en los fenómenos aleatorios para realizar inferencias y predicciones.

En su obra "Pensar rápido, pensar despacio", Kahneman (2011) centró su atención en la "toma de decisiones en condiciones de incertidumbre" (p. 34) y propuso "una panorámica de cómo trabaja la mente, identificando los defectos del pensamiento probabilístico" (p. 38). Este autor describe dos sistemas:

a) *Sistema 1. Tácito*. El individuo realiza poco o ningún esfuerzo al pensar. Opera rápida y automáticamente sin control voluntario.
b) *Sistema 2. Deliberado*. El individuo efectúa cálculos complejos y actividades "a menudo asociadas a la experiencia subjetiva de actuar, elegir y concentrarse" (p. 66). Este sistema anula los impulsos irresponsables y las asociaciones del Sistema 1.

1.2.1. Pensamiento intuitivo

Respecto al sistema tácito propuesto por Kahneman (2011), uno de los muchos ejemplos de la investigación en la educación probabilística es la de Abrahamson (2014), quien afirma que “el razonamiento intuitivo permite a instructores y estudiantes compartir referentes ―hablar *acerca* de propiedades de fenómenos, como eventos fortuitos antes de que esos eventos se hayan formalizado. Como tal, el razonamiento informal puede ser un recurso epistémico útil para aprender modelos formales en contextos discursivos” (itálica en original, p. 241).

Fischbein (1977) señaló que los individuos tienen una predisposición para construir imágenes y así dar sentido a algún conocimiento presentado inicialmente de manera lingüística o alfanumérica. Por ello, según Rivera (2011a), debemos considerar que “la raíz de la representación visual de la actividad cognitiva matemática implica entender los contextos o situaciones que engendran la actividad de visualización” (p. 60).

1.2.2 Tipos de representaciones en la actividad matemática y para la enseñanza de un conocimiento matemático

Duval (2006) señaló que una actividad matemática se debe llevar a cabo en un “contexto de representación” (p. 144); es decir, el profesor debe usar diferentes materiales concretos o recursos semióticos para representar un concepto matemático, con el fin de que los estudiantes y los alumnos sean capaces de reconocerlo en todos los recursos semióticos usados. Al aprehender un concepto matemático, un alumno desarrolla la capacidad de “cambiar la representación de objetos o relaciones matemáticas de un sistema semiótico a otro [lo cual] es siempre un salto cognitivo” (p. 150). Por lo que, y de acuerdo con Parker y Leinhardt (1995), un reto tanto para los investigadores como para los maestros es diseñar o seleccionar las representaciones para la enseñanza.

De igual manera, la enseñanza y el aprendizaje de conceptos estadísticos y probabilísticos requieren considerar sus diferentes representaciones. Dreher y Kuntze (2015) investigaron el caso de las múltiples representaciones en la clase de matemáticas con profesores en formación y profesores en activo de secundaria. Concluyeron que en los entornos de aprendizaje se debe dar a los estudiantes la oportunidad de conocer diferentes representaciones de un objeto matemático, con el fin de que desarrollen la comprensión conceptual de las matemáticas. Se debe considerar el cambio de representaciones para que los estudiantes realicen conexiones entre ellas y reflexionen al respecto.

En su investigación sobre la comunicación escrita de las matemáticas a través de la escritura expositiva respaldada por estrategias de evaluación, Santos y Semana (2014) determinaron que en el aprendizaje de las matemáticas la comunicación escrita y la oral juegan un papel importante para explicar o compartir ideas en la clase. La lengua escrita u oral sería una primera representación de un concepto matemático.

Las autoras señalan que la comunicación escrita puede ser más efectiva que solamente pensar, pues "contribuye al aprendizaje de conceptos matemáticos y conocimiento de procedimientos" (Porter y Masingila, 2000; Stonewater, 2002 citados en Santos y Semana, 2014, p. 65) y al desarrollo de habilidades al resolver problemas. Más aún, Duval (2006) incluye a la lengua natural escrita como uno de los registros semióticos que se privilegian en la actividad matemática.

1.3. Conocimiento de estocásticos y su enseñanza

La palabra estocástica proviene del griego στοχαστικός y significa hábil en conjeturar. Estocásticos tiene la raíz griega στόχος (stokhos) —adivinación o conjetura— y de τικος —relacionado a. En español, el término estocásticos es usado para lo relativo a la probabilidad, la estadística y la aleatoriedad de los fenómenos a los cuales se les aplican (Real Academia Española, https://dle.**rae**.es).

1.3.1. Investigación y docencia, mentoría de docentes y formación de docentes en estocásticos

De manera general, Cowie, Otrel-Cass, Moreland, Jones, Cooper y Taylor (2010) señalan la importancia de la investigación colaborativa entre investigadores y maestros en activo para que los segundos comprendan y mejoren su práctica docente en el aula mediante procesos de reflexión conjunta. Este señalamiento exhibe la conveniencia de que los formadores de los normalistas, o bien sean investigadores o por lo menos que estén al tanto de resultados de las investigaciones en educación matemática, para que *formen* a los futuros maestros conjuntamente en la orientación, planteamiento, análisis y reflexión de la práctica de la enseñanza.

De manera más específica, en su investigación sobre la creación de enlaces entre la estadística y la matemática, Gattuso (2006) concluyó que tanto los docentes en formación como los docentes en activo "no son conscientes de la riqueza del contenido estadístico que tienen que enseñar" y "…no se sienten cómodos con el tema" (p. 1).

Batanero, Godino y Navas (1997) concluyeron en su investigación que sus estudiantes de una Facultad de Ciencias en la Educación cometen errores conceptuales, tienen dificultades al aplicar la media, por lo que es necesario potenciar los contenidos estadísticos en la formación de profesores. Batanero, *et al*. (1997) afirman que "la interpretación de los resultados y la reflexión sobre las condiciones de aplicación de los procedimientos estadísticos requieren una atención preferente" (p. 9).

Kuzle y Biehler (2015) investigaron las prácticas del mentor de docentes —o "asesor técnico" — de matemáticas en la enseñanza de análisis de datos con el uso del programa informático Fathom. Los autores coincidieron con Burril y Biehler (2013) en que "los profesores carecen de una educación estadística y no tienen una preparación especial" (p.40) sobre ese tema, por lo que se requiere que los mentores de los formadores "se preparen profesionalmente como expertos en educación de adultos y en el diseño de cursos para la enseñanza de análisis de datos" (p. 41).

Para estos autores, "la reflexión al final… permite que los maestros discutan sobre nuevas prácticas posibles con respecto a experiencias anteriores" (p. 48). Los mentores de los formadores deben llevar a cabo una realimentación con respecto a la educación de estocásticos y su enseñanza ya que, como lo señala (Hogarth, 2001), "la realimentación y el aprendizaje son de naturaleza social" (p. 309) y promueven el intercambio de opiniones que pueden resultar muy instructivas para el aprendizaje. De aquí se deriva la necesidad de que los formadores *formen* también en el análisis de datos a los normalistas —quienes, aunque jóvenes, ya son adultos cuando ingresan a la licenciatura—, para que esto últimos adviertan que la riqueza de la materia no sólo concierne a la enseñanza y al aprendizaje de temas de estocásticos que tendrán a su cargo más tarde, sino que repercute de manera más amplia en el desarrollo de su pensamiento matemático.

1.3.2. Promedios y dispersión

De acuerdo con Fischbein (1975), el dominio intuitivo del enfoque frecuencial de la probabilidad pone de relieve la variabilidad de los resultados del fenómeno aleatorio de que se trate y, a la larga, su regularidad estadística, por lo que constituye una fuente de pensamiento probabilístico.

La investigación de Pollatsek, Lima y Well (1981) acerca de la comprensión de la media por estudiantes de edades de 18 a 22 años mostró que muchos de ellos eran incapaces de resolver problemas de medias ponderadas, pues consideraban a la media como un concepto puramente formal. Pollatsek, *et al*. (1981) afirman que la enseñanza de los promedios se centra en la presentación y aplicación de expresiones simbólicas matemáticas, lo cual impide la comprensión integral del concepto. Los autores señalaron que en los libros de texto de la Licenciatura de Psicología de la Universidad de Massachusetts se ignora el conocimiento funcional de esa medida porque los ejercicios que presentan son básicamente de cálculo, y proponen pocos problemas para una práctica intensiva en la traducción de una variedad de contextos a estructuras de cálculo. Estos investigadores señalan que la media no es sólo uno de los conceptos más básicos de la estadística y de la ciencia experimental, sino que también se utiliza con frecuencia en la vida cotidiana; sin embargo, los estudiantes universitarios tienen dificultades para solucionar problemas de la vida cotidiana que implican a la media ponderada, incluso después de años de educación formal.

Más aún; hace más de veinte años que Mokros y Russell (1995) sugirieron que se sabía muy poco sobre el desarrollo del pensamiento estadístico sin escolarización estadística, situación que continúa en la actualidad. Estos autores declaran que aprender el concepto de promedio es uno de los primeros encuentros de un estudiante con una construcción matemática que expresa una relación entre números particulares. Esta relación es una construcción matemática abstracta que no tiene referente específico en el mundo real. Aunque la mayoría de la gente conoce el procedimiento para calcular el promedio de un conjunto de datos, la relación matemática les sigue siendo opaca.

Garfield, J. y Ben-Zvi, D. (2008), señalaron las dificultades de los estudiantes de secundaria para entender “lo que realmente significa un promedio o lo que el promedio nos dice acerca de los datos" (p. 187).; es decir, los estudiantes poco entienden sobre las diferencias de la media y la mediana respecto a su comportamiento en un conjunto de datos por lo que resulta necesario identificar el contexto de éstos. Por contexto se entiende lo referente "a las bases del conocimiento que necesitan ser activadas para responder a una pregunta centrada en el problema" (Pfannkuch, 2011, p. 28). Los autores señalaron la importancia de la idea de desviación para establecer conexiones entre las ideas de centro y variabilidad para comprender la idea de media y lo que representa:

> La comprensión de la idea de centro de una distribución de datos como una señal en medio del ruido (variación) es un componente clave en la comprensión del concepto de distribución y es esencial para la interpretación de gráficos y análisis de datos (Garfield y Ben- Zvi, 2008, p. 188).

Otra dificultad para los estudiantes derivada de la designación general misma de "promedio" para cualquier tipo de medida central. Tal dificultad fue señalada por Triola (2009) como la ambigüedad a que ese término da lugar en la enseñanza, por lo cual recomendó usar el nombre específico de la medida de que se trate y que ante "un valor reportado como promedio debemos saber que el valor puede ser resultado de cualquiera de las distintas definiciones" (p. 81).

1.3.3. Investigaciones sobre comprensión de ideas de estocásticos

En el marco de los elementos teóricos en el que se inscribe nuestra investigación (véase el Capítulo 2), también se han desarrollado otras más relativas al planteamiento de estocásticos en distintos niveles y modalidades educativos, así como a sus resultados en la comprensión de esos contenidos por educandos o por docentes. En todas ellas, básicamente se entiende por *comprensión de una idea* "a los atributos que ella incluye en sí y que no pueden quitársele sin destruirla (Abbagnano, 1963, p. 186). Las ideas de estocásticos a las que nos referimos se presentan en el Capítulo 2.

Algunas de tales investigaciones han concluido que, en general, es poca la importancia que se otorga a las ideas de probabilidad y estadística en la formación matemática antes de ingresar a la universidad (por ejemplo, Limón, 1995; Carballo, 2004; Vázquez, 2004; López, 2006; Rivera, 2011b; Salcedo, 2013; Martínez y Ojeda, 2018). También han mostrado las dificultades que los alumnos tienen para tratar ideas de estocásticos, además de que en los planes y programas de estudio (por ejemplo, SEP, 1993 y SEP, 2011e; SEP, 2017a) y en las evaluaciones mismas (por ejemplo, ENLACE, 2007, 2009, Lonngi, 2015) el tema no parece tener la relevancia derivada del cúmulo de sus aplicaciones en la diversidad de ámbitos de la actividad humana. Otras investigaciones han señalado el desconocimiento de estocásticos de los docentes de educación básica en activo (por ejemplo, Limón, 1995; Alquicira, 1998; Elizarraras, 2004; Flores, M., 2009). Pero hasta el momento, no se tienen antecedentes sobre investigaciones de estocásticos con docentes en formación pública (normalistas) para la educación primaria en México, al menos con el enfoque teórico de nuestro interés (véase el Capítulo 2), por lo que nos centramos en cómo es esa formación de los futuros docentes en el aprendizaje y enseñanza de contenidos estocásticos desde las dimensiones epistemológica, cognitiva y didáctica.

1.3.3.1. Dispersión y correlación. De entre las investigaciones realizadas en el nivel superior, la De León (2002) sobre la comprensión de la ley de los grandes números por estudiantes de Ciencias Sociales destacó un acercamiento epistémico al tipo de situaciones referentes y actividades con lápiz y papel propuestas para su estudio, así como a la importancia de atender a los recursos semióticos empleados, al tratamiento en cada uno de ellos, a la conversión de uno en otro y en particular al formato numérico.

Angoa (2002), en su investigación sobre la comprensión de correlación lineal con estudiantes de Licenciatura en Ciencias Naturales usó dos programas de cómputo estadístico (Fathom y Excel). La investigadora concluyó que el Fathom no contribuyó a que los estudiantes de bajo nivel fortalecieran alguno de los tipos de conocimiento que proponen Pollatsek, *et al*. (1981); es decir, los sujetos con un conocimiento funcional y analógico incipiente arraigaron su conocimiento de cálculo, mientras que los de niveles (alto y medio) acentuaron sus tres tipos de conocimiento y comprendieron la correlación. Por otro lado, el uso de Excel ponderó el valor numérico mediante el uso de gráficas y de diferentes estrategias y representaciones al dar solución a los problemas propuestos. Además, contribuyó al cálculo e identificación de respuestas de una forma más rápida al tratar las variables de las tablas y el concepto de coeficientes de correlación.

Por su parte, Espinosa (2007) se refirió a la comprensión de medidas de dispersión por estudiantes del primer semestre de la licenciatura en Psicología. Concluyó que la propuesta institucional y las situaciones de enseñanza determinan que para la comprensión de las medidas de dispersión sea necesario, primeramente, el estudio de las medidas de tendencia central con datos agrupados y no agrupados. Durante la enseñanza, el conocimiento analógico mediante gráficas sólo se utilizó para explicar los desvíos respecto a la media y no fue considerado para la moda ni para la mediana, que fueron expresadas con un valor numérico. El conocimiento de cálculo, por su forma de presentarlo, causó confusiones con la expresión simbólica sintetizada y sólo se aplicó de acuerdo a las instrucciones que dio el profesor; el conocimiento funcional contribuyó a explicar la utilidad de la media al referirla a situaciones cotidianas y fue antecedente para el estudio de las medidas de dispersión. La autora concluyó que es necesario plantear "cuestionamientos que fomenten la interpretación y aplicación de la Estadística en contextos propios de la Psicología" (p. 198). La comprensión de los estudiantes sobre las medidas de dispersión después de la enseñanza se caracterizó por el uso de gráficas; el conocimiento de cálculo fue el más utilizado para resolver los problemas que se les propusieron. Los estudiantes resolvieron con más facilidad las preguntas planteadas en lengua natural que por medio de una gráfica o una tabla.

1.3.3.2. Técnicas de conteo. Heredia (1998) investigó la comprensión de técnicas de conteo de 100 alumnos de secundaria aplicando dos versiones de cuestionarios (uno para situaciones de conteo y otro para situaciones probabilísticas) aplicadas antes y después de la enseñanza del tema. Además, diseñó dos entrevistas y cuatro sesiones de actividades sobre combinatoria y probabilidad. La investigadora concluyó que los problemas sobre la regla del producto tuvieron mayor número de respuestas transferidas a la versión de probabilidad. La permutación circular fue la operación más difícil para los alumnos; la de combinación fue mejor empleada en comparación con la de permutación con o sin repetición, como lo señalaron Piaget e Inhelder (1975).

Los estudiantes de bajo desempeño mostraron carencias en el uso del diagrama de árbol, de tablas y de expresiones numéricas; los de buen desempeño mostraron carencia en el uso de las tablas y de las expresiones numéricas.

En el cuestionario de probabilidad, los alumnos tuvieron dificultades al calcular el número de casos favorables del evento de interés. La investigadora identificó dos enfoques en las respuestas: el subjetivo y el teórico. Un alumno aplicó el enfoque subjetivo por imitación; luego pasó de la aplicación del enfoque subjetivo al teórico; y, por último, estableció la relación existente entre los casos favorables y posibles.

1.3.3.3. Comentarios. Todas estas investigaciones son sólo una muestra, aunque ilustrativa, del estado de la educación en algunos conceptos de estocásticos que son de nuestro interés, pero coinciden en la necesidad de ampliar nuestro conocimiento del tema de docentes en activo y de alumnos en los niveles educativos previos al universitario, así como en la necesidad de incorporar el estudio de la probabilidad, cuando muy tarde, desde la educación primaria.

Pero, como ya indicamos en la introducción de este apartado, también notamos la ausencia de investigaciones relativas a estocásticos en la formación de docentes de primaria con el enfoque teórico de nuestro interés.

1.4. Vinculación de los antecedentes con la presente investigación

Las investigaciones sobre conocimiento pedagógico de Ball y Bass (2000) y de Martínez (2010) podrían contribuir a identificar los dominios (de Contenido Especializado, de Contenido y de Estudiantes, así como de Contenido y de Enseñanza) de conocimiento de estocásticos para su enseñanza que requerirán los futuros docentes para llevar a cabo sus prácticas docentes y para su ejercicio profesional en el aula de primaria. No obstante, pretendemos un acercamiento menos general, pero consistente con el enfoque teórico que acoge esta investigación específico de estocásticos (véase el Capítulo 2). De igual manera, también durante la enseñanza del contenido de estocásticos realizada por los docentes en formación se podría identificar el tipo general de interacción, ya sea directiva, observacional, exploratoria o responsiva (Jacobs y Ambrose, 2003), que establezcan con los alumnos de los diferentes grados de primaria; sin embargo, restaría su especificación estructurada por el contenido particular de estocásticos para su enseñanza; es decir, faltaría la especificación conceptual derivada del tipo de interacción; o sea, esa interacción de los individuos intervinientes tiene lugar contextualmente respecto a un referente, mediante algún recurso, con un fin particular.

Como ya señalamos en el apdo. 1.3.3, las investigaciones sobre comprensión de ideas de estocásticos realizadas en el marco teórico que es de nuestro interés (por ejemplo, Limón, 1995; Alquicira, 1998; Carballo, 2004; Elizarraras, 2004; Vázquez, 2004; López, 2006; Flores, M., 2009; Rivera, 2011b; Salcedo, 2013; López, M., 2013; Lonngi, 2015; Martínez y Ojeda, 2018) presentan un panorama acerca de la importancia que se ha dado al tratamiento de estocásticos en los planes y programas de estudio de diferentes niveles y modalidades educativos en México. Además, también dan a conocer dificultades que pueden o no identificarse en los futuros docentes de primaria como en los alumnos de primaria al tratar temas estocásticos. La formación en estocásticos para esos futuros docentes se dispone en los planes y programas de la Licenciatura en Educación Primaria (SEP, 2012c), que también analizamos en la presente investigación (véase el Capítulo 4).

Los normalistas requieren practicar la enseñanza de estocásticos (medidas de tendencia central y del principio multiplicativo), ya que así lo prescriben las propuestas institucionales de primaria (SEP, 2011e y SEP, 2017a). Respecto a esos temas, las investigaciones de Pollatsek, *et al*. (1981), de Mokros y Russell (1995), de Batanero, *et al*. (1997), de Angoa (2002), de Bakker (2003) y de Espinosa (2007) señalan algunas de las dificultades que presentan los alumnos y los estudiantes, así como las propuestas para la enseñanza de los distintos promedios y de las medidas de dispersión que requieren los docentes al llevar a cabo la enseñanza de estos contenidos.

La investigación de Heredia (1998) es un antecedente directo para la identificación de las dificultades al tratar problemas combinatorios que pueden o no poseer los futuros docentes en nuestra investigación.

1.5. Planteamiento del problema

Diversas investigaciones sobre estocásticos (Limón, 1995; Flores, L., 2002; Carballo, 2004 y Flores, M., 2009) mostraron que la enseñanza de la Probabilidad y de la Estadística tanto en preescolar como en primaria debe regirse por el objetivo de presentar al azar como susceptible de estudio, además de analizarlo y de proporcionar una caracterización matemática para ponderar posibilidades.

El docente de educación básica tiene dificultades para tratar la estadística, lo que le genera “un sentimiento de inseguridad, debido no tanto a la falta de preparación en Estadística, sino también en su enseñanza” (Gattuso y Pannonne (2002), citado en

Gattuso, 2006, p. 1). Por lo general, “la Estadística se relega al final del año escolar, si es que no llega a ser completamente olvidada, porque el tiempo disponible es insuficiente” (Aksu (1990), citado en Gattuso, 2006, p. 1).

Según la experiencia docente de quien esto escribe en la formación de profesores, lo mismo ocurre con los Planes y Programas de la Educación Normal de Primarias (SEP, 1997); sólo la cuarta unidad de la asignatura *Matemáticas y su enseñanza II* destinaba veinticuatro horas a *Tratamiento de la información, predicción y azar*, pero por ser la última unidad del programa con frecuencia se omitía su enseñanza (SEP, 1997). En contraste, la reforma 2012 de la curricula de la normal de primaria (SEP, 2012c) incluye el tema de estocásticos para todo un semestre; sin embargo, el tiempo es insuficiente para tratar todos sus contenidos por diversos factores, entre ellos para la preparación de las clases para las jornadas de práctica. Además, por la experiencia de esta investigadora como docente de escuela primaria, por lo general los docentes únicamente contestan las preguntas y ejercicios planteados en las lecciones de los libros de texto debido a falta de tiempo o a cuestiones administrativas que deben cubrir.

La problemática de la formación en estocásticos en toda la educación previa a la universitaria (preescolar, primaria, secundaria y bachillerato) atañe directamente a los formadores de docentes y a los futuros docentes. En general, los primeros presentan arraigos de sesgos del razonamiento que se han acentuado con la edad (Fischbein, 1975) debido a que no tuvieron formación en Probabilidad ni en Estadística, ni en cómo enseñarlas. Por ejemplo, si en repeticiones de lanzamientos al aire de una moneda cae caen cuatro veces seguidas sol, un sujeto deduce que en el siguiente volado caerá sol y no águila, no se percata de que los eventos son independientes, por lo que su deducción es inadecuada al atribuir un próximo resultado aleatorio a la regularidad y no suponer la variabilidad de resultados esperada del fenómeno en cuestión.

En el mejor de los casos, los futuros docentes de primaria realizan sus prácticas de enseñanza de contenidos estocásticos con los conocimientos respectivos adquiridos en bachillerato, ya que para el tiempo del período de prácticas aún no han tratado todo el contenido de las unidades 1 y 2 de la asignatura Procesamiento de Información Estadística antes de asistir a las aulas de primaria.

Por tanto, investigamos la *comprensión de ideas fundamentales de estocásticos* (véase el Capítulo 2, en particular lo concerniente a la propuesta de Heitele, 1975) de los futuros docentes para la educación primaria, dadas las reformas para la Educación Primaria (SEP, 2009, 2011e y 2017a) y para la Educación Normal (SEP, 2012c y 2017b), desde su formación en estocásticos en el aula normalista e incluyendo sus prácticas de enseñanza en el aula de primaria.

La formación del futuro docente de primaria supone que éste adquiera previamente el conocimiento de los temas de matemáticas que tendrá que enseñar en sus prácticas de enseñanza efectiva en el aula de primaria. Se supone también que las prácticas del normalista deben ser supervisadas por el docente titular del aula de primaria y por el docente de matemáticas de la escuela normal, para asegurar su correcto desempeño (conceptual) después de su egreso durante el ejercicio de su profesión.

1.5.1. Preguntas y objetivos de investigación

Las preguntas que orientaron esta investigación son:

1. ¿Qué elementos para la enseñanza de ideas fundamentales de estocásticos a alumnos de primaria proporciona el plan y programas de formación de profesores de primaria (SEP, 2012c y SEP 2017c)?
2. ¿Qué caracteriza la comprensión de ideas fundamentales de estocásticos de los docentes en formación para primaria?
3. ¿Qué caracteriza las prácticas de enseñanza de estocásticos en el aula de primaria diseñadas y ejecutadas por los maestros en formación?

Los objetivos que se persiguieron con esta investigación son:

- Identificar el Conocimiento de estocásticos para la enseñanza que requieren los docentes en formación para la educación primaria.
- Identificar las dificultades de comprensión de ideas fundamentales de estocásticos de docentes en formación, así como de los dominios intuitivos del pensamiento probabilístico de alumnos de primaria en situaciones de práctica de enseñanza.
- Diseñar una propuesta para la formación docente de primaria en estocásticos para su enseñanza (el CME correspondiente a estocásticos).

1.6. Limitaciones y delimitaciones de la investigación

Enfocamos nuestra investigación en las propuestas institucionales para estocásticos en la Licenciatura para Educación Primaria (SEP, 2012 c y SEP, 2017b) y en la Educación Primaria (SEP, 2011e, 2017a), en sesiones de enseñanza de estocásticos en el aula de la educación normal y en aulas de primaria que acogieron la práctica de enseñanza de estocásticos del normalista.

La limitante principal para la realización de este proyecto de investigación fue la dificultad de gestión para el acceso a la enseñanza del normalista, ensayos de instrumentos de recopilación de datos (por ejemplo, estrategias de enseñanza y cuestionarios) y de técnicas de registro de datos, tales como la de audiovideo de la enseñanza en el aula de la normal y de las prácticas de enseñanza de los normalistas en las aulas de primaria.

Una segunda limitante fue la formación en estocásticos de los futuros docentes (véase la Tabla 6.1) previa a su ingreso a la normal, pues de los 12 participantes en esta investigación, seis de ellos estudiaron en una preparatoria; dos en un CECyTEM, uno en un CBTis; otro en un Colegio de Bachilleres; uno más en un CCH y en un Conalep; otro estudió la Licenciatura en Relaciones Comerciales y uno más se formó en un CETis en modalidad abierta. Por lo tanto, sólo siete de los futuros docentes participantes cursaron un semestre de Probabilidad o de Estadística o de ambas; dos las cursaron en dos semestres. Tres participantes no recordaron haber estudiado las asignaturas.

Dado que las prácticas docentes inician a partir del segundo semestre, en muchas ocasiones los normalistas llevan a cabo las de estocásticos sólo con su formación en bachillerato.

Capítulo 2

Elementos teóricos: la enseñanza de estocásticos

Esta investigación se orienta por *tres ejes rectores* interrelacionados (Ojeda, 1994; 2006): el epistemológico, el cognitivo y el social. El primero considera las diez ideas fundamentales de Heitele (1975) para la formación en estocásticos como guía de un curriculum en espiral, desde un plano intuitivo a uno formal; los aportes de Piaget e Inhelder (1951) para caracterizar cada estadio de la evolución del pensamiento del niño de la idea de azar y su papel en ella de la cuantificación de las probabilidades y de las operaciones combinatorias; y el triángulo epistemológico que Steinbring (1991) propone para la constitución del concepto matemático.

En el eje *cognitivo* se consideran los aportes de Fischbein (1975) de las cuatro principales fuentes intuitivas para advertir el azar y el surgimiento de la idea de probabilidad: la combinatoria, el enfoque frecuencial, la decisión y la simulación. Respecto a la primera fuente, English (2005) señaló que un problema combinatorio es significativo al usar diferentes formas y representaciones al resolverlo; mientras que Lockwood y Gibson (2015) se centraron en la importancia de los listados sistemáticos completos o incompletos, para resolver problemas combinatorios. Respecto a la segunda fuente, tomamos en cuenta la aportación de Mokros y Russell (1995) de enmarcar el promedio como moda, algo razonable, punto medio y punto de equilibrio.

En el eje *social*, de manera general, Shulman (1986) ha señalado que “el maestro tiene que saber que algo es así, además de comprender por qué es así” (p. 9); mientras que Cohen (2011) sugiere que un maestro debe “*desempaquetar* su conocimiento” (citado en Ball y Bass, 2000, p. 98) para hacerlo accesible a sus estudiantes. Sin embargo, como señalamos en la Introducción (véase p. XXIX), en una vía similar a la orientación de nuestra investigación y con énfasis en atender para el tema de matemáticas en particular de que se trate, Scheiner (2015) propone tres dimensiones estructurantes del conocimiento para enseñar matemáticas (CME): una epistemológica, una cognitiva y una didáctica, dado que “las dimensiones son *complementarias* y proporcionan, en conjunto, una imagen más *refinada* de la base de conocimientos” (itálicas en original, p. 130).

También con un punto de vista epistemológico, Steinbring (1991) señala que se debe "entender cómo diariamente en la enseñanza se organizan los procesos de desarrollo de conceptos y cómo el significado de los conceptos matemáticos se constituye mediante la interacción social" (p. 503); por tanto, la enseñanza debería desencadenar el proceso de aprendizaje de conceptos de estocásticos.

2. 1. Eje Epistemológico

En su propuesta para la formación de conceptos de estocásticos, Heitele (1975) partió de la concepción de Bruner de que un curriculum en espiral se guiara por las ideas fundamentales del tópico a que se refiriera, e identificó las de estocásticos con base en: los resultados de las investigaciones del origen de la idea de azar en el niño (Piaget e Inhelder, 1951); en la historia de la probabilidad y en su teoría; y en los juicios de los adultos en situaciones de incertidumbre (Kahneman y Tversky, 1972), si bien estos últimos proceden de estudios con carácter cognitivo.

2. 1. 1. Ideas fundamentales de estocásticos

Heitele (1975) considera una idea como "fundamental" si proporciona al individuo, en cada etapa de su desarrollo, un modelo explicativo de la situación respecto a la cual se evoca tal idea. Para la inclusión de temas de estadística y de probabilidad en el currículum, desde la educación básica hasta la superior, este autor propone diez ideas de estocásticos, de las cuales la propuesta institucional para la Licenciatura en Educación Primaria (SEP, 2012c) sólo incluye tres en términos gruesos, aunque con un análisis más riguroso, es posible identificar seis, ya sea en el planteamiento de los referentes diseñados o seleccionados para los cuestionarios, las entrevistas o para la enseñanza de estocásticos:

a) *Medida de probabilidad*. En una primera introducción se puede partir de asignar valores a las creencias de los individuos con una escala. Expresiones cotidianas intuitivas como "así lo creo" y "más bien seguro" se deben normar con la asignación de 0 a la probabilidad de eventos imposibles y 1 a la probabilidad de eventos seguros. La expresión cotidiana " "más probable que" se traduce en la relación "≥" " (p. 194).

b) *Espacio muestra*. Al introducirlo como todos los "resultados observables de un experimento aleatorio" (p. 195) se favorece que el experimento sea tratable. La identificación del conjunto de los eventos observables en el espacio muestra evita la prevalencia del determinismo.

c) *Combinación de probabilidades: Regla de la adición*. Esta idea, que pone en juego la complejidad y las particiones de eventos, favorece la identificación de otras probabilidades.

d) *Combinación de probabilidades: Regla del producto e Independencia*. Heitele subraya que aunque la regla del producto es fundamental porque "la probabilidad condicional $p(A \mid H)$ en las aplicaciones se interpreta como la probabilidad de A luego de que H ha ocurrido o, en otras palabras, en cómo la nueva información cambia el grado de nuestra creencia", por otro lado, a menudo se inadvierte "la repetibilidad independiente de los experimentos aleatorios" (Heitele, 1975, p. 196). La independencia de eventos matemáticamente se puede reducir a su probabilidad condicional, pero aún las personas "con antecedentes científicos que están familiarizadas con modelos matemáticos más complejos" (p. 196) pueden tener dificultad para aceptar que un mismo resultado de un fenómeno aleatorio puede ocurrir varias veces si el fenómeno se repite bajo las mismas condiciones un número necesario de veces, es decir, les puede ser difícil advertir la repetibilidad de un experimento aleatorio.

La idea de repetición independiente es más fácil de comprender en el modelo matemático (teórico) expresada por la regla del producto que aplicarla en casos de la vida diaria. Por ejemplo, Heitele (1975) señaló que un soldado que participa en una batalla se refugiará en el hoyo recién formado por la explosión de una bomba dada la improbabilidad de que caiga otra en el mismo lugar.

e) *Equidistribución y simetría.* Heitele (1975) señala la simetría como una idea heurística que se utiliza para calcular probabilidades, al asumir que no hay razón para referir un resultado sobre otro y que conduce a la equidistribución, que pone de relieve la regularidad de los eventos independientes que tienen la misma probabilidad de ocurrencia en un experimento aleatorio.
f) *Combinatoria*. Heitele (1975) señala que "una de las tesis principales en el trabajo de Piaget es que la comprensión de las ideas de azar y de probabilidad discurren por la de las operaciones combinatorias básicas" (p. 198). Agrega que ya "un niño de entre cinco y seis años de edad puede comprender el principio fundamental del conteo básico en ejemplos concretos" (p. 199). El autor subraya el poder de la combinatoria al proporcionar modelos estándar para el procesamiento numérico. Las operaciones combinatorias (combinaciones, permutaciones y arreglos) se vuelven aparentes si se les trata con el recurso icónico del diagrama de árbol, ya que éste favorece "una entrada directa a la estructura interior" (p. 198) de los fenómenos en cuestión de pasos múltiples, es decir, se identifican más fácilmente todos los resultados posibles.
g) *Modelo de urna y simulación*. La idea de urna favorece la descripción de lo que es la "selección aleatoria" y la identificación de si una muestra es o no aleatoria. Mediante la simulación se plantea una situación análoga a la situación compleja original para simplificar ésta y para que sea accesible a la comprensión de los alumnos.
h) *Variable estocástica*. Esta idea es importante tanto en la probabilidad teórica como en la vida diaria y en los juegos de azar. "Es un modelo explicativo que desarrolla un papel fundamental que considera tres puntos: la distribución de una variable, su esperanza y la composición de variables estocásticas para obtener otras nuevas" (Heitele, 1975, p. 200). El autor da énfasis al papel que la esperanza tiene por su "gran valor explicativo; intuitivamente se le interpreta más a menudo como la media aritmética de los valores de una variable estocástica, obtenida si el

experimento aleatorio básico a menudo se le repite lo suficiente en ‘condiciones idénticas’” (p. 200).

i) *Leyes de los grandes números*. En su descripción más común, estas leyes consideran la frecuencia relativa de la ocurrencia de eventos de fenómenos aleatorios para determinar su probabilidad en un gran número de ensayos. De esta forma se pueden ejercer experiencias empíricas muy tempranas de “la libertad individual bajo restricción colectiva” (p. 201). De esta forma se pone en juego lo que el autor denomina “racionalización a distancia”, que caracteriza al modelo de estocásticos y la distinción entre un “principio de grandes números” (p. 201) y los resultados matemáticos de leyes de los grandes números.

j) *Muestra*. Esta idea considera a la variable estocástica al determinar el resultado de un evento en un experimento aleatorio y al identificar la equidistribución del conjunto de datos. Una muestra es un subconjunto de una población que se somete a estudio para tomar decisiones relativas al tema a investigar para toda la población, por ejemplo: el promedio del número de hijos de una familia, los salarios promedio de los trabajadores de una fábrica, entre otros. Los juicios e inferencias hacia poblaciones a partir de muestras requieren argumentaciones cuidadosas y críticas e iniciar la formación en ello tempranamente.

2.1.2. Historia de valores promedio

En coincidencia con el señalamiento de Heitele (1975) de que “las ideas que subyacen en el progreso histórico de estocásticos pueden también ser relevantes para las aproximaciones didácticas” (p. 191), Bakker (2003) señaló que conocer la historia de los valores promedios es un punto de partida para la enseñanza de esas medidas y que la media aritmética no tiene una interpretación estadística única, por lo que los estudiantes de entre 12 a 13 años de edad no la comprenden; no distinguen entre nociones de centro, valores mínimo y máximo, valor medio y centro de gravedad. Este autor identificó tres tipos de aproximaciones al valor de la media:

1) Estimar la suma de todos los datos o su total a menudo tiene que ver con encontrar el número total al multiplicar la media por el número de datos.
2) Comparar equitativamente para responder la pregunta de cuánto corresponde a cada uno después de una redistribución justa.
3) Estimar o calcular el número total de datos es una variante del primer caso.

El autor subraya que "la mediana entraña dificultades por su estrecha relación con la distribución de los datos y los datos atípicos" Bakker (2003, párr. 65).

De acuerdo con Moroney (1979), el propósito de un promedio es "*representar un grupo de valores individuales* de una manera simple y concisa […] que actúa como un *representante*" (p. 170, itálica en el original). Afirma que "todos los promedios son conocidos por los estadísticos como "medidas de tendencia central"; indican el punto alrededor del cual se acumulan los diversos valores" (p. 171). Al igual que Bakker (2003) lo hizo después, este autor señaló que el promedio apropiado para un problema dado depende de los términos de éste, es decir, de su referente. La media aritmética se aplica, por ejemplo, a referentes de velocidad, con tiempos constantes y distancias variables, mientras que la media armónica es apropiada para referentes de velocidades con distancias constantes y tiempos variables, o de tarifas. La media geométrica es aplicable a referentes de crecimiento de poblaciones o a proporciones; mientras que la mediana y la moda se recomiendan por ejemplo para ingresos y tamaños de familias.

2.1.3. La mezcla y evolución de la idea de azar en el niño

Piaget e Inhelder (1951) caracterizaron la idea de azar del niño para cada estadio de la evolución de su pensamiento. Consideraron la interpretación de Cournot del azar físico como "la interferencia de series causales independientes" (p. 1). Este físico distinguió entre dos tipos de series causales: las que expresan orden (las solidarias) y las que expresan azar (independientes entre sí).

En el *estadio de las operaciones preconcretas* (edades de 4 a 7 años), el niño no comprende los diferentes desplazamientos que pueden tener las bolas (mezcla aleatoria) al mover la bandeja y consideran que sólo es posible seguir una trayectoria única (las bolas negras se cambian de lugar con las bolas blancas) dejando de lado la reversibilidad de los objetos después del movimiento de la bandeja, es decir que algunas bolas regresen al lugar donde se encontraban en un inicio. Por ejemplo: “Se supone que cada bola siga una trayectoria —en particular, las bolas rojas son para reemplazar a las blancas y viceversa” (Piaget e Inhelder, 1951, p. 5; véase la Figura 2.1).

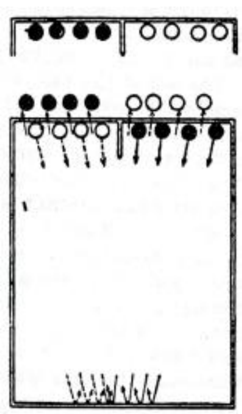


Figura 2.1. Trayectorias únicas de las canicas (Piaget e Inhelder, 1951, p. 5).

En el *estadio de las operaciones concretas* (de los 7 a los 11 años), el niño descubre el azar al establecer “las operaciones concretas, interrelacionadas y reversibles” (p. 12). Posee un razonamiento inductivo pues hay una disminución de predicciones empíricas; es decir, tiene “conciencia del significado del milagro” (Gurrola, 1998; p. 24). Por ejemplo, Piaget e Inhelder (1951) afirman que el niño descubre las “permutaciones, y dibuja las posiciones finales como una función de las permutaciones, pero él todavía dibuja las trayectorias como si cada bola se moviera de acuerdo a un plan regular de todo el grupo” (pp. 21-22) (véase la Figura 2.2).

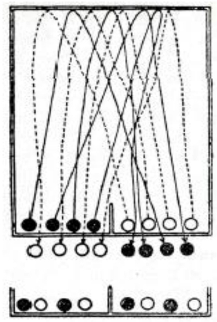


Figura 2.2. Trayectorias de acuerdo a un plan regular (Piaget e Inhelder, 1951, p. 22).

En el *estadio de las operaciones formales* (de los 11 a los 12 años), surge la composición probabilística cuando el niño concibe la mezcla aleatoria al construir sistemas para solucionar problemas combinatorios. Descubren las proporciones como recurso para el pensamiento formal. Comprenden la ley de los grandes números debido a la evolución de las ideas de azar y de probabilidad basadas en grandes números, lo que indica la síntesis de las operaciones formales (capacidad de abstracción, un pensamiento científico y una mejor capacidad para resolver problemas hipotéticos) y lo fortuito (la presencia del azar). Por ejemplo, Piaget e Inhelder (1951) afirman que el niño "entenderá a partir de ahora las colisiones [interacción] de las bolas que asimila en un sistema de permutaciones variadas, y sus dibujos ahora muestran una correspondencia exacta entre los caminos y la mezcla aleatoria de las posiciones finales" (pp. 24-25) (véase la Figura 2.3).

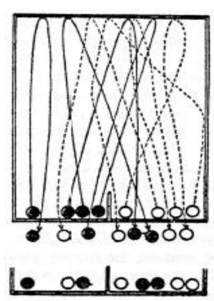


Figura 2.3. Mezcla aleatoria de las bolas (Piaget e Inhelder, 1951, p. 24).

2.1.4. Cuantificación de las probabilidades

En su investigación sobre la cuantificación de la probabilidad con sujetos de diferentes edades, Piaget e Inhelder (1951) investigaron la comprensión de esa cuantificación al extraer objetos (sin ver) de dos colecciones de dos o tres elementos para realizar diversas composiciones:

> Doble imposibilidad; doble certeza; certeza de imposibilidad; posibilidad de certeza; imposibilidad; composición idéntica de las dos colecciones; proporcionalidad; desigualdad de casos favorables e igualdad de casos posibles; igualdad de casos favorables y desigualdad de casos posibles y desigualdades de casos favorables y posibles, sin proporcionalidad.
>
> (Piaget e Inhelder, 1951, pp. 132-133).

Los resultados que se obtuvieron corresponden a tres estadios:

a) Primer estadio (4 a 7 años). Los sujetos presentaron una falta de lógica y comparaciones aritméticas. A su vez, se determinaron dos subniveles en este estadio cuyas características en los niños son:
   - **I. A.** Ausencia de comparaciones cuantitativas entre los dos conjuntos. Bases cuantitativas no sistemáticas.
   - **I. B.** Comprenden las relaciones favorables de todos los casos posibles mediante su "intuición basada en la percepción o configuración imaginaria del conjunto" (Piaget e Inhelder, 1951, p. 147) dando origen así a la idea de noción de probabilidad. Las generalizaciones están ausentes en las disyunciones.

b) Segundo estadio (7 a 11 años). El niño compara los casos favorables con los desfavorables. No construye una relación entre los casos favorables y los posibles. "Romper el todo en partes correlativas de acuerdo con un esquema reversible (de uniones) lo que lo conduce inmediatamente al doble descubrimiento de la disyunción (un elemento de B puede estar en A o en A') y múltiples posibilidades: uno "*puede ganar*" y "*puede perder*"" (p. 152, itálicas en el original). Hay dos subniveles:
   - **II. A**. El sujeto se percata de la igualdad de conjuntos al poner el todo en subgrupos del mismo tamaño.

II. B. Los sujetos descubren las proporciones con facilidad al comparar, pero sin generalizar. Determina las relaciones dobles mediante un sistema de correspondencia.

c) Tercer estadio (11 y más años). El niño establece relaciones entre los casos favorables y los posibles. Muestra comprensión probabilística aun cuando difiere la situación de casos favorables y los posibles. La noción probabilística implica la capacidad de utilizar operaciones combinatorias: combinaciones, permutaciones y arreglos (operaciones de segundo orden).

2.1.5. Operaciones combinatorias

Para que un niño adquiera la noción de mezcla aleatoria debe desarrollar a la par las operaciones combinatorias. Piaget e Inhelder (1951) señalan las tres operaciones básicas:

Operaciones de combinación: En un experimento con objetos de tres colores, los autores identificaron que, a los siete años, los niños realizan combinaciones por descubrimientos empíricos y sin un sistema al emparejar bloques de diferentes colores (forman pares independientes), pero en ocasiones se les dificulta seguir un orden. Los sujetos realizan seriaciones por agrupamiento como antecedente de las combinaciones.

El sujeto de la segunda etapa (7 a 11 años) cuantifica los objetos distinguibles (canicas, letras y contadores) de manera sistemática al establecer una correspondencia simple de los objetos. Al final de la etapa, los sujetos realizan un sistema de asociaciones al identificar pares simétricos (AB, AC, AD, AE, AF, …, FA, etc.) con las seis letras dadas.

En estos dos períodos, se identifican las combinaciones parcialmente; y es hasta los 11 años (operaciones formales) cuando el niño identifica de manera metódica todas las combinaciones posibles de los contadores de colores o de las letras.

Operaciones de permutación: Los niños de 7 a 8 años no presentan un sistema para identificar las permutaciones entre objetos distinguibles (muñecos y fichas de colores);

por tanteo o descubrimiento empírico de regularidades identifican algunas permutaciones. Las dificultades se deben a que los niños aún no desarrollan la reversibilidad del pensamiento.

En la segunda etapa, los sujetos identifican las seis permutaciones de tres letras distinguibles (A, B y C) al establecer sus regularidades. Reconocen “la simetría o igualdad de las distribuciones” (Piaget e Inhelder, 1951, p. 200) de los objetos, lo que favorece que generalicen para las permutaciones de cuatro objetos distinguibles (A, B, C y D).

En la tercera etapa, los niños de entre 11 y 12 años identifican métodos parciales para identificar las permutaciones de los objetos; y es hasta los 14 ó 15 años que descubren un método más sistemático al identificar que las permutaciones responden a la multiplicación del número de objetos por cada lugar (orden) en que son colocados.

Los autores concluyeron que las permutaciones se descubren posteriormente a las combinaciones, es decir, las permutaciones presentan mayor dificultad a los niños debido a que ellos consideran sólo un simple “cambio de orden” (Piaget e Inhelder, 1951, p. 201) en los objetos y no una multiplicación de cambios de orden, lo que atañe a las operaciones de segundo orden.

Operaciones de arreglos: En estas operaciones intervienen al tiempo las combinaciones y las permutaciones. Plantearon a los niños preguntas del número de maneras en que se podían arreglar dos o tres elementos, de tres tipos distinguibles, con posible repetición de los tipos. Utilizaron 26 cartas de cada uno de tres tipos, o sea un mazo de 78 cartas (en dos modalidades, cifras o figuras, según la edad de los niños). Se les pidió el número de maneras en que podían arreglar dos o tres cartas de esos tipos al ver las pilas, al extraerlas de las pilas y, finalmente, del mazo mezclado (barajado).

Los arreglos que hacen los niños en la primera etapa son empíricos. Identifican la frecuencia de aparición de los números, pero “carecen de un sistema combinatorio” (Piaget e Inhelder, 1951, p. 213).

En la segunda etapa, al no establecer deducciones y desconocer las proporciones de los objetos, los niños hacen arreglos empíricos. Al final de la etapa, los sujetos intuyen la ley de los grandes números sólo con pocos números.

En la tercera etapa, los niños aún no se percatan del todo del orden de los objetos, realizan los arreglos con los objetos considerando la frecuencia con que aparece cada uno. Descubren la ley del cuadrado, que antes sólo la advertían de manera empírica sin anticiparla, es decir, en los arreglos en pares, "n2 incluye la repetición de un objeto consigo mismo, por ejemplo: 11" (Piaget e Inhelder, 1951, p. 217).

Piaget e Inhelder (1951) concluyeron que, en los tres tipos de operaciones, los niños de la primera etapa "no distinguen lo posible de lo necesario […] dado que su pensamiento oscila entre lo previsible o lo imprevisto" (p. 214). El niño de la segunda etapa distingue lo necesario de lo posible al establecer deducciones y operaciones aditivas o multiplicativas entre los objetos dados. En la tercera etapa, los niños construyen sistemas combinatorios con pocos elementos identificando así la ley de los grandes números, pues identifican lo necesario, lo posible y se percatan de lo imprevisto.

2.1.6. Triángulo epistemológico

La constitución del concepto matemático requiere un balance e interacción entre el objeto, el signo y el concepto (Steinbring, 1991). El *objeto* adquiere sentido según el contexto de referencia y es representado por el *signo*, de manera que el *concepto* matemático se construye como una estructura simbólica relacional y se le codifica mediante signos y símbolos que se pueden combinar lógicamente en operaciones matemáticas (Steinbring, 1991). El autor propone un triángulo epistemológico para la apropiación de un concepto matemático (véase la Figura 2.4) y describe cada uno de los vértices de ese triángulo de la siguiente manera: el *objeto* "se construye como nuevo conocimiento en una relación matemática" (Steinbring, 2006, p. 155). El *signo* matemático tiene dos funciones: en la semiótica se le considera como "algo que representa algo más" y en la epistemológica "el papel del signo en el marco de la constitución epistemológica del conocimiento matemático" (Steinbring, 2006, p. 134). El *concepto* es perfectible, dado que va de las nociones a ideas o conceptos en estrecha interrelación entre el objeto y el signo.

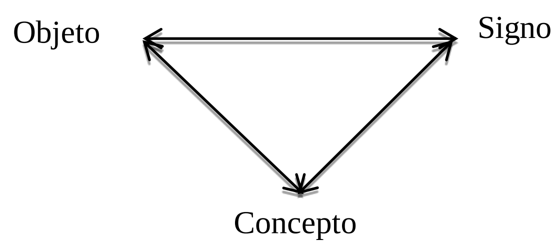


Figura 2.4. Triángulo epistemológico (Steinbring, 1991, p. 506)

El triángulo epistemológico así propuesto por el autor constituye un instrumento de análisis (epistemológico) en su investigación del planteamiento y resultado de la enseñanza de contenidos de matemáticas (véase el apartado 2.3.2).

2.2. Eje Cognitivo

Fischbein (1975) ha destacado aspectos relevantes de las fuentes de la intuición de la probabilidad. Ojeda (2007) subraya la consideración para la enseñanza de lo que él señala como cuatro dominios intuitivos del pensamiento probabilístico.

2.2.1. Intuición y probabilidad

Fischbein (1975) ha afirmado que la intuición es unitaria y componente de la cognición humana. Los rasgos principales de la intuición son: es componente de la inteligencia en acción; es una adquisición estructural; ejecuta la función de engranar el conocimiento a la acción; constituye procesos cognitivos autónomos con funciones únicas e importantes; y es un programa de acción parcialmente autónomo dentro de la cognición.

Fischbein señala dos tipos de intuiciones: las primarias y las secundarias. En las primeras, el individuo sintetiza de forma natural su experiencia para tratar las nociones de azar y probabilidad. Las segundas resultan de un entrenamiento (educadas) mediante enseñanzas sistemáticas. Por esto último, el autor recomienda iniciar la enseñanza de la probabilidad en el periodo de operaciones concretas (8-10 años), o por muy tarde, al iniciar el periodo de las operaciones formales (11-12 años). Como estrategia para la enseñanza, el autor sugiere el tratamiento de la frecuencia relativa para introducir el estudio de la probabilidad.

Fischbein (1975) identificó las cuatro principales fuentes para la advertencia del azar y el surgimiento de la idea de probabilidad:

1) La *combinatoria*. Las técnicas de conteo establecen el número de posibilidades en una situación discreta dada. La subestimación del número total de casos posibles es una tendencia generalizada ((Kahneman, Slovic, y Tversky, 1982), en Ojeda, sf.), por lo cual se requiere una enseñanza sobre la cuestión.
2) El *enfoque frecuencial* de la probabilidad posibilita estimar la probabilidad de un evento de un fenómeno aleatorio mediante su frecuencia relativa en un número suficientemente grande de repeticiones del fenómeno.
3) La *decisión* entre dos o más posibilidades exige poner en juego el razonamiento probabilístico (Piaget e Inhelder, 1951) al establecer, para cada una, la relación entre la parte favorable y el total de posibilidades, para comparar entre esas relaciones y optar por lo conducente.
4) La *simulación* demanda identificar los elementos relevantes del carácter aleatorio de un fenómeno dado y sus relaciones para incorporarlos a otra situación análoga a ese fenómeno, accesible a sus repeticiones efectivas y, por tanto, a la puesta en juego del enfoque frecuencial de la probabilidad.

2.2.2. Niveles de una representación semiótica

Andrà (2011) ha señalado que "la semiótica es una herramienta poderosa para la interpretación de los fenómenos didácticos que son representaciones que intervienen en las prácticas matemáticas" (p. 716). A partir de su investigación de los enfoques intuitivos en circunstancias de incertidumbre de maestros de escuela primaria, Andrà propuso tres niveles para las representaciones que producen las personas para estimar la probabilidad:

1) *Nivel de la experiencia*: las personas realizan representaciones con el propósito de contar el número posible y los casos favorables de eventos; representan los eventos mediante flechas, diagramas de Venn, tablas, entre otros recursos.
2) *Nivel del pensamiento aritmético*: las personas pasan de una percepción a una aproximación a las cantidades, que pueden ser números enteros y convertirse en porcentajes.
3) *Nivel de la teoría*: el individuo comprende las expresiones matemáticas (fórmulas), los axiomas y los teoremas de la probabilidad. Sus representaciones son formales y abstractas.

Al menos al nivel de experiencia, como ya señalamos en el inciso f) del apdo. 2.1.1, Heitele (1975) ha subrayado la indicación de Fischbein (1975) de que el diagrama de árbol es una estrategia importante porque prefigura todos los posibles resultados de un experimento aleatorio, así como los pasos del experimento y que los espacios muestra discretos pueden ser identificados mediante un "diagrama de árbol".

2.2.3. Tipos de conocimiento

De su discusión de los resultados que obtuvieron en su investigación acerca de la comprensión de la media, Pollatsek, *et al*. (1981) propusieron tres tipos de conocimiento:

1) *Conocimiento de cálculo*: Se refiere al conocimiento y aplicación de las expresiones matemáticas (fórmulas). Los autores concluyeron que los estudiantes de secundaria no resolvieron problemas de medias ponderadas porque únicamente

identificaban la definición formal de la media, que se basa en un cálculo de números abstractos.

2) *Conocimiento funcional*: Es la "comprensión de la media como un concepto del mundo real significativo" (Pollatsek, *et al*., 1981, p. 199). Es decir, se le considera adquirido si los estudiantes identifican la funcionalidad de los conceptos de estocásticos y de otros conceptos matemáticos del mundo real al responder (correctamente) según la situación que se les plantee. Los estudiantes en esa investigación evidenciaron un conocimiento funcional de la media muy restringido, al identificarla sólo en uno de los problemas de media ponderada que se les planteó.
3) *Conocimiento analógico*: Implica el uso de diversas representaciones de un concepto "para evitar que los estudiantes cometan errores al solucionar un problema" (Pollatsek, *et al*., 1981, p. 201), o bien al identificar problemas análogos. Los autores concluyeron que ninguno de los sujetos de su investigación con un conocimiento de cálculo de las medias ponderadas poseía un conocimiento analógico de ellas.

Por su parte, Steinbring (2005) identificó en su investigación tres tipos de construcción del conocimiento al aplicar el triángulo epistemológico de la constitución del concepto matemático —objeto, signo y concepto interrelacionados—:

- conocimiento factual o regla;
- conocimiento relacional relativo a un problema;
- conocimiento relacional separado de problemas.

El autor señala como más exitoso al segundo.

Estos tipos de conocimientos coinciden en orden de abstracción con los señalados por Pollatsek, *et al*. (1981).

2.2.4. Comprensión de contenidos de estocásticos para la educación primaria

Diversas investigaciones sobre medidas de tendencia central y sobre el principio fundamental de conteo han informado que el conocimiento de esos contenidos es deficiente incluso en el nivel universitario, aun y cuando se les introduce desde la educación básica (por ejemplo, Jones, 2005, para el caso de maestros en activo o en formación; o el de Zawojewski y Shaughnessy, 2000, para el caso de estudiantes).

2.2.4.1. Medidas de tendencia central. En su investigación sobre la comprensión de la media por alumnos de primaria y secundaria, Mokros y Russell (1995) identificaron cinco enfoques del promedio. Los dos primeros —como moda y por su algoritmo— no consideran la representatividad del conjunto de datos; los otros tres —como algo razonable, como punto medio y como punto de equilibrio— sí lo hacen. Es decir, construir y tratar varios ejemplos y contraejemplos de la media con diferentes referentes promueve que los estudiantes establezcan analogías.

Pollatsek, *et al*. (1981) concluyeron de su investigación acerca de la comprensión de la media que: a) los estudiantes (18 a 22 años) de la licenciatura en Psicología no resolvieron correctamente problemas de medias ponderadas porque consideraron a la media un concepto formal en términos de un cálculo basado en números abstractos; b) los libros de texto de esa licenciatura proponían ejercicios que fomentaban el cálculo de la media y omitían su conocimiento funcional (véase apdo. 2.2.3). Ninguno de los sujetos de su investigación con un conocimiento de cálculo de las medias ponderadas poseía un conocimiento analógico de ellas. Los autores coligieron que no basta con dominar el algoritmo de la media, sino que los estudiantes requieren una comprensión relacional de ella al resolver problemas del mundo real y desarrollar así sus conocimientos funcional y analógico respectivos.

Por su parte, Zawojewski y Shaughnessy (2000) reportaron que incluso estudiantes universitarios parecen desconocer la moda y la mediana, aun y cuando estas medidas se introducen desde la educación básica. En particular, señalan que los estudiantes de secundaria y de preparatoria están más familiarizados con el término “promedio” que con el de “media”, por el número de respuestas correctas más alto si se utiliza el primero que si se utiliza el segundo; que tienen dificultades para interpretar los datos proporcionados gráficamente y determinar la mediana, e incluso para identificar lo que indican los ejes de una gráfica; desconocen las propiedades de ellas. Como Bakker (2003) resume los resultados de estos autores, “la mayoría de los estudiantes aún no han desarrollado un sentido de una distribución sesgada ni de valores atípicos, pero lo requieren para decidir entre la media y la mediana” (párr. 65).

2.2.4.2. Principio multiplicativo. Fischbein (1975) ha señalado que la combinatoria es una de las fuentes intuitivas del pensamiento probabilístico:

> […] el inventario de casos posibles no puede reducirse a una enumeración de elementos, excepto en algunos experimentos muy simples. Este inventario presupone generalmente un proceso racional y constructivo que, sobre la base de la información existente, establece el espacio muestral de todos los resultados posibles.
>
> (p. 99).

De acuerdo a English (2005), los problemas combinatorios son de dos tipos:

a) de *Principio fundamental de conteo*, los que en casos sencillos se pueden responder con diagramas de árbol, listas sistemáticas y tablas; y

b) *Configuraciones combinatorias*, para las que English considera la subdivisión que propone Dubois (1984): “I) colocaciones, II) selecciones, III) separaciones en montón y IV) particiones de enteros” (pp. 39-40).

English (2005) señala que los problemas de principio fundamental de conteo corresponden a que “si una tarea se puede realizar de n maneras y otra tarea de m maneras, entonces el número de maneras de realizar las dos tareas es nm” (p. 122). Las propiedades estructurales (o relacionales) de los problemas combinatorios son: bidimensionales [A × B] y tridimensionales [A × B × C]; es decir, los primeros usan dos objetos distinguibles y los segundos, tres objetos distinguibles. Algunos métodos de solución de los problemas combinatorios que usaron niños de 10 años (English, 2005) fueron la multiplicación, la adición repetida y el recurso a representaciones gráficas. Las dificultades de los estudiantes con problemas o actividades que implican a la combinatoria surgen de si las disposiciones de los elementos a considerar incluyen o no: orden, repetición, exclusión y distinguibilidad. Otros factores son “la naturaleza de los elementos a combinar (dígitos, letras, personas y objetos) y los valores dados a los parámetros *n* y *m*” (English, 2005, p. 127).

English (2005) señaló que la combinatoria permanece desatendida en la educación primaria, a pesar de “proporcionar la base para que se resuelvan problemas significativos de diversas formas y con una variedad de herramientas de representación (incluyendo materiales de manipulación)” (p. 122).

Lockwood y Gibson (2015) realizaron una investigación con alumnos de primaria, de secundaria y de bachillerato (K-12), sobre lo productivo que pueden ser los listados sistemáticos en tareas de combinatoria. Definieron como *resultado* a lo que satisface las restricciones de un problema combinatorio; y como *conjunto de resultados* a la “colección de objetos que son contados —esos conjuntos de elementos que son generados o enumerados por un proceso de conteo” (Lockwood, 2003, citado en Lockwood y Gibson, 2015, p. 249). Los autores sostienen que la creación de una lista organizada (sistemática), o incluso una lista parcial del conjunto de resultados, tiene un efecto positivo en el desempeño de los estudiantes en problemas de conteo, dado que

> […] el acto de reflexionar cómo crear una lista organizada de resultados responde correctamente a un problema de conteo [*y*] radica en la relación entre los procesos de conteo y los conjuntos de resultados (p. 249). [Estos autores informaron que] el conocimiento del conjunto de resultados es un componente clave para el razonamiento combinatorio de los estudiantes.
>
> (p. 248).

2.3. Eje Social

Aspectos relevantes a tomar en cuenta en la enseñanza en un aula son: la interacción en el salón de clase referida al conocimiento; y las propuestas institucionales que confluyen en esa actividad. Respecto a este último aspecto, un ejemplo de su consideración es el señalado por Bakker (2003) de que una dificultad en la enseñanza de los promedios deriva de que la mayoría de los libros de texto introducen la media, la mediana y la moda como una trinidad, sin tomar en cuenta la historia de estos promedios ni enseñar otros como el rango medio. Cabe señalar que, en la educación a nivel primaria, los planes y programas y los libros de texto son prescritos por las autoridades educativas. Los libros de texto incluyen lecciones de acuerdo a los contenidos señalados en el programa.

2.3.1. Propuestas Institucionales

La propuesta de Heitele (1975) de "construir una currícula conectada de estocásticos" (p. 203), desde "preescolar hasta universidad" (p. 187) —guiada centralmente por sus diez ideas fundamentales que identificó con un enfoque *epistemológico*, además de por las dificultades *cognitivas* para su comprensión—, incluyó señalamientos del dominio de los estocásticos que debe poseer el (la) enseñante como "gente educada" (p. 188) en esos temas, que advierta la preservación de la estructura de sus ideas fundamentales a lo largo de la curricula y que distinga que "la relación de modelo y realidad es una de las ideas básicas para matemáticas en general y para estocásticos en particular" (p. 191). Añadió ejemplos precisos de cómo la enseñanza se puede regir por estos aspectos básicos con la selección de actividades y recursos (en particular, los semióticos) apropiados y evitar la "elementarización" (p. 191) *didáctica* de lo seleccionado como fundamental. De esta manera, se lograría el objetivo de la educación en estocásticos de que "el alumno pueda tratar sin temor a equivocarse con pretensiones científicas de aseveraciones estadísticas en la vida cotidiana" (p. 191).

Por su parte, en su investigación de entrelazar contenido y pedagogía en la enseñanza y el aprendizaje para enseñar, conocer y usar las matemáticas, Ball y Bass (2000) señalaron que una revisión de los planes y programas de matemáticas sería "incompleta, ya que no anticipa las demandas matemáticas" (p. 89) que se presentan en su enseñanza, por ejemplo: las dificultades de comprensión que pueden tener los alumnos sobre un contenido específico.

Bakker (2003) concluyó que para el curriculum debe considerarse un estudio histórico de los promedios, pues "ayudaría a distinguir más aspectos, problemas, nociones relacionadas y etapas intermedias del desarrollo de ciertas nociones" (párr. 84); esto evitaría que “los editores de libros de texto asumen que el promedio es simplemente otra aplicación de la división” (Mokros y Russel, 1995, p. 20).

Resulta necesario que para los ejemplos, ejercicios o actividades que se propongan a los alumnos en las propuestas institucionales, se pondere la comprensión de lo que es un promedio, es decir, que “los niños realmente trabajen con promedios en el contexto de conjuntos de datos realistas y tomen decisiones estadísticas que les permitan resumir y dar sentido a los datos” (Mokros y Russel, 1995, p. 21).

En cuanto a combinatoria, English (2005) precisó que es beneficioso “incorporar las experiencias del planteamiento de problemas dentro del currículo de matemáticas” (p.136) ya que el alumno se muestra más interesado al plantear y resolver problemas propuestos por él mismo; lo anterior “no ocurre con los problemas de los libros de texto estándar” (Silver, 1994, citado en English, 2005, p. 136).

English (2005) señaló que en la propuesta institucional de educación primaria debe incluirse a la combinatoria y “debe ir de la mano con las experiencias de los niños en la probabilidad” (p. 138) para evitar que cuando estén en otros niveles educativos incurran en ideas erróneas, por ejemplo, realizar el doble conteo de los objetos en el espacio muestra de un evento.

2.3.2. La interacción en el aula

Steinbring (1991) se refiere a una epistemología social del conocimiento matemático, que respecto al de probabilidad consiste en que:

- Los conceptos básicos de la probabilidad se introducen de una manera reducida, se definen desde la secuencia de enseñanza y se ejercitan de manera metódicamente formal, sin referencias potencialmente múltiples.
- El concepto de probabilidad se considera como un cociente formal o fracción, ya sea como una *proporción relativa* derivada (de la así llamada probabilidad clásica) o como una relación empíricamente dada, es decir, como frecuencia relativa dentro del marco de representaciones metódicamente desarrolladas que conciernen a la ley de los grandes números. El curriculum no presenta conceptos de probabilidad y de azar, desde una perspectiva dinámica, sino más bien desde una estática, como elementos ya hechos.

- Los medios de representación y de actividad se usan en la enseñanza de estocásticos como ayudas elaboradas metódicamente, con el objeto de que se lean inmediatamente significados precisos de conocimientos. Una dificultad en la enseñanza de estocásticos es elaborar modelos de ellos apropiados a problemas dados. En el proceso diario de aprendizaje y de comprensión, la probabilidad y el azar están sujetos a las condiciones del marco epistemológico del conocimiento epistemológico, es decir a la *circularidad* del concepto y a la ambigüedad de los medios de representación, así como a las *convenciones* y a los *patrones sociales* variables.

(pp. 507-508; itálicas en el original)

Steinbring (1991) señala que "la interacción entre los docentes y los alumnos durante la enseñanza diaria produce una comprensión específica del escolar del estatus de los conceptos matemáticos" (p. 503). Al referirse al concepto de azar, resume la comprensión del alumno resultante de la interacción en el aula como:

> … *una generalización concreta* que lo toma como un patrón universalizado de explicación, en lugar de desplegar las relaciones variables y potenciales del "azar" o "aleatoriedad" y desarrollar la naturaleza *teórica* de este concepto en una forma apropiada para la comprensión de los estudiantes.
>
> (p. 503; itálicas en el original).

Para Steinbring (2005), "la materia de matemáticas no puede introducirse en el proceso de enseñanza/aprendizaje como un producto curricular ya listo, sino que su conocimiento sólo puede generarse mutuamente durante el proceso interactivo" (p. 35). La interacción en el salón de clase con el juego y la evaluación de los resultados experimentales constituyen un medio sociocultural para futuros desarrollos conceptuales: a nivel de *objeto*, las extracciones experimentales, la determinación de frecuencias relativas, etc.; y a nivel de *símbolo*, el recurso a un modelo de estocásticos elemental para calcular probabilidades.

Steinbring (2005) precisa que "Las formas del conocimiento producido interactivamente [en el aula] van desde las empíricas y concretas a las maneras relacionales y generales de usar los signos y símbolos" (p. 186). Para el autor, el problema de la enseñanza de estocásticos radica en "la utilización, la aplicación y la interpretación apropiada de conceptos, métodos y diagramas" (Steinbring, 1989, p. 212). En esta misma vía, se requieren “procesos de reflexión de observaciones directas” (Steinbring, 2005, p. 9).

Steinbring (2005) señaló que un episodio de enseñanza puede ser analizado por:

I) la descripción de las *formas de organización del grupo*: individual, en pareja o en equipo; y la descripción del problema matemático; y por los *contenidos* de la interacción: introducción, exploración, ejercitación y consolidación de conocimientos matemáticos nuevos;

II) la *estructura del tiempo* en donde se considera la temporalidad, es decir, primero, el docente plantea un problema a los alumnos; en un segundo momento, se establece una interacción entre el docente y los alumnos, quienes dan soluciones que, a su vez, en un tercer momento son aceptadas, modificadas o rechazadas por el docente; y

III) la *estructura del problema*: es decir, la relación entre el conocimiento matemático nuevo y el antiguo; los procedimientos matemáticos: reglas, leyes, entre otros; y los recursos semióticos utilizados: gráficos, diagramas, entre otros.

En la interacción, el intercambio en la comunicación puede ser de manera escrita, a través de signos que se conforman por un “significado (idea, concepto) y un significador (imagen acústica)” (Nöth, 2000, p. 74, citado en Steinbring, 2005, p. 53). El significado es identificado del recurso semiótico seleccionado por el docente o elaborado por el alumno y el significador se revela en el discurso del alumno al expresar de manera escrita o verbal la aprehensión o comprensión del significado.

Steinbring (2005), al igual que lo hizo el sociólogo Luhmann (1927-1998), se refiere a la propuesta del lingüista de Saussure para considerar al signo compuesto por un significador y un significado. Luego, Steinbring basa su análisis —de la interacción en el aula y la interpretación del conocimiento matemático en el curso de su construcción (interactiva) correspondiente— en el enfoque de la comunicación propuesto por Luhmann. Como Steinbring lo señala, el sociólogo diferenció y separó al sistema social (colectivo) del sistema psíquico (individual), cada uno de ellos autopoiético y autorreferencial, y señaló a la comunicación como la característica fundamental del primero y a la conciencia como la del segundo. Ambos sistemas se conectan de manera importante mediante el lenguaje. También señala que la comunicación sintetiza el mensaje (que consiste en acciones), la información (que consiste en el significado) y el entendimiento; más aún, sin este último, no es posible la comunicación y viceversa. Para el receptor, el mensaje debe designar la información, por tanto, ambos, mensaje e información, constituyen un signo, como forma de distinguir entre significador y significado. Steinbring (2005) describe el funcionamiento autopoiético de la comunicación o interacción centrándose en la construcción de la constitución interactiva de las relaciones entre signos/símbolos y objetos/contextos de referencia.

2.4. De la estructura del conocimiento profesional del docente de matemáticas

En su investigación acerca del conocimiento de los profesores de matemáticas, Scheiner (2015) señala que se debe profundizar en "la *descripción estructural* del conocimiento profesional de los docentes" (p. 132). Tal descripción debe considerar los aspectos de:

la *naturaleza* de ese conocimiento como:

a)	*fuente*	¿Cuáles son las bases constituyentes del conocimiento?,
b)	*desarrollo*	¿La transformación del conocimiento de la materia per se en conocimiento de la materia para la enseñanza se lleva a cabo por el maestro individual situado en el acto de enseñanza o se apoya en educadores y en el curriculum?,
c)	*especificidad*	¿Es el conocimiento general, o específico del tema, dominio o tópico?;

así como los relacionados con la *forma* del conocimiento, como:

i.	*grado de integración*	¿La cantidad de conocimiento en cada dominio del conocimiento importa más o el grado de su integración?,
ii.	*tamaño*	¿El conocimiento viene en piezas, en unidades o en esquemas? ¿El conocimiento es estable y coherente o sensible al contexto y fluido?

(p.133; itálicas en el original).

En su reflexión de esa naturaleza y esa forma del conocimiento profesional para enseñar las matemáticas, Scheiner (2015) lo enfoca:

> como el repertorio de '*átomos de conocimiento*' que se han transformado a lo largo del:
>
> 1. Conocimiento y comprensión del pensamiento matemático de los estudiantes (CCE),
> 2. Conocimiento del aprendizaje de las matemáticas (CAM),
> 3. Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (CEM), cuyos pilares son el
> 4. Conocimiento de contenido matemático per se (CCM per se); y el
> 5. Conocimiento de contenido matemático para la enseñanza (CCM para la enseñanza) (p. 134).

La reflexión sobre esos átomos del conocimiento conducirá a transformaciones del conocimiento de los profesores de matemáticas. Según el autor, los cambios sólo serán posibles si se incluyen las siguientes tres dimensiones:

Dimensión epistemológica: "conocimiento del aprendizaje de las matemáticas" (2015, p. 132); es decir, concierne a las limitantes epistemológicas para aprehender y comprender un contenido de estocásticos. Tiene relación con lo que Ball, Thames, and Phelps (2007) denominan el *Conocimiento de Contenido Especializado*, que "es el conocimiento y las habilidades matemáticas requeridas por los maestros en la realización de su práctica docente" (p. 34).

Dimensión cognitiva: es el "conocimiento del pensamiento y comprensión matemático de los estudiantes" (2015, p. 132). Considera los errores y las dificultades que pueden presentar los individuos frente a un tema de matemática, sus sesgos y el papel que juegan en su comprensión los recursos que emplean.

Dimensión didáctica: es el "conocimiento de la enseñanza de las matemáticas" (2015, p. 132). Concierne a la selección y forma de presentación del contenido matemático a enseñar, así como a la estrategia de enseñanza según el nivel de conocimiento de los receptores de ella. Esta dimensión correspondería al *Conocimiento de Contenido y de Enseñanza* (Ball, *et al*., 2007).

Scheiner (2015) señaló que las propuestas de Ball y Bass (2000) y de Hill, *et al*. (2008) centradas en el Conocimiento de Contenido Especializado, se refieren a un conocimiento *per se,* es decir, a "la capacidad de '*transformar'* el tema de la disciplina en el tema de la asignatura escolar" (Shulman, 1987, citado en Scheiner, 2015, p. 131; itálica en este último).

2.4.1. El conocimiento para la enseñanza de estocásticos

En el apdo. 2.3.3 hemos afirmado que la propuesta de Heitele (1975), específica para la educación en estocásticos y anticipada a las generales de Shulman (1986), de Ball y Bass (2000) y de Hill, *et al*. (2008) (entre otros), no sólo coincide con los rasgos principales de la de Scheiner (2015), sino que ilustra lo que este último autor resalta de tomar en cuenta en la especificación de cada componente **el contenido del tema específico** de que se trate e ir más allá de generalidades.

Las tres dimensiones subrayan que la enseñanza es un acto social, para el cual el futuro docente debe poseer un dominio del contenido de estocásticos a enseñar, lo cual es claro en la propuesta de Heitele (1975) de diez ideas fundamentales para la enseñanza de estocásticos (véase el apdo. 2.1.1).

Por tal motivo, de la propuesta de Hill, *et al*. (2008) sólo consideramos los tres dominios que son claros en el caso de estocásticos y coinciden en las propuestas de Heitele (1975) y de Scheiner (2015). Estas últimas orientaron el desarrollo de la presente investigación (véase la Tabla 2.1).

Tabla 2.1. Relación entre las propuestas Hill, et al. (2008), Heitele (1975) y Scheiner (2015).

Hill, *et al.* (2008)	**Heitele (1975)**	**Scheiner (2015)**
Conocimiento de Contenido Especializado	El docente debe poseer un conocimiento de estocásticos en tanto individuo educado en ese contenido, lo cual implica que lo domine por sus ideas fundamentales.	Dimensión Epistemológica
Conocimiento de Contenido y de Estudiantes	El docente debe reconocer los resultados de las estrategias que diseñó en el desempeño de sus estudiantes.	Dimensión Cognitiva
Conocimiento de Contenido y de Enseñanza	El autor dio pautas para que el docente diseñe estrategias de enseñanza en el aula apropiadas a la edad y al nivel educativo de sus alumnos.	Dimensión Didáctica

Tanto en las propuestas curriculares, en los medios o en la práctica misma de la enseñanza en el aula, las tres dimensiones se interrelacionan, por lo que así se manifiestan en un análisis minucioso de cualquiera de esas instancias. Un instrumento para tal efecto se ha derivado de la propuesta de Heitele (1975) y ha sido perfilado e implementado con la célula de análisis de la enseñanza (véase en el capítulo 3) en las investigaciones de Ojeda (1994, 2006), el cual hemos complementado con la propuesta de Steinbring (2005) para analizar en más detalle la interacción en el aula o en entrevista.

Capítulo 3

Método de la investigación

En este capítulo se describen la organización de la investigación de carácter cualitativo (Vasilachis, 2006) y *en curso* desarrollada en cinco escenarios, los métodos e instrumentos y las técnicas de registro de datos, así como los participantes en ella.

Se presenta la organización de los contenidos de la unidad 1 de la asignatura de *Procesamiento de Información Estadística* considerada para la primera experienciación (Maturana y Varela, 1994) que realizó la investigadora; se caracterizan los referentes planteados en la segunda experienciación en la escuela normal y los Cuestionarios 1 y 2 aplicados a los normalistas. Esta caracterización se realiza de acuerdo a los criterios propuestos en la célula de análisis que propone Ojeda (2006).

Consideramos como *docente* a los formadores de formadores y a los tutores de los grupos de primaria; como *estudiantes*, *normalistas* y *practicantes* nos referimos a los futuros docentes que estudian el cuarto semestre de la Licenciatura en Educación Primaria; y como *alumnos* a los niños de 6 a 12 años que cursan la escuela primaria.

3.1 Organización de la investigación

La investigación se llevó a cabo en cinco espacios interrelacionados:

1. *Seminario de investigación*: Se enmarcó y actualizó la perspectiva teórica y metodológica de acuerdo a un eje epistemológico, otro cognitivo y un eje social (Ojeda, 2006).
2. *Propuesta institucional*: se desarrolló una investigación documental (Cortés y García, 2003) de los planes y programas de la Licenciatura en Educación Básica (SEP, 2012c; 2017b) y de la Educación Primaria (SEP, 2011e; SEP, 2017a), además de los libros de texto diseñados también por la SEP bajo la reforma 2009 que aún siguen en uso. A los documentos correspondientes se les aplicaron los criterios de la célula de análisis (Ojeda, 2006).

3. *Formación en estocásticos del futuro docente de primaria*: se realizó una reflexión entendida como "un acto de conciencia… del que se adquieren ideas generales" (Ferrater, 1994, pp. 3033- 3034) y una experienciación (Maturana y Varela, 1994) de la enseñanza en el aula de la Normal, es decir, se sometió a la reflexión y al análisis la propia experiencia de la enseñanza de la investigadora. Se recopilaron datos de la comprensión de estocásticos de los futuros docentes, antes y después de la enseñanza respectiva, mediante la aplicación de cuestionarios (INEGI, 2013).
4. *Práctica de enseñanza de estocásticos del normalista*. Observamos en la práctica del futuro docente su enseñanza de contenidos de estocásticos en el aula primaria.
5. *Profundización*: clarificamos nuestra identificación de la comprensión de ideas fundamentales de estocásticos del futuro docente vía entrevistas semiestructuradas (Zazkis y Hazzan, 1999).

La Figura 3.1 en la página siguiente presenta la organización propuesta para el desarrollo de la investigación.

3.1.1. Participantes

Participaron 78 estudiantes del cuarto semestre de la Licenciatura de Educación Básica; un grupo de 52 estudiantes y otro de 26, con edades entre los 19 y 31 años. Los normalistas estuvieron dispuestos a que sus desempeños durante la enseñanza, en sus prácticas y en entrevistas (véase el Anexo 1) se registraran en videograbaciones. Identificamos a los estudiantes participantes como $E^{\#}_{\#}$: el superíndice indica la generación a la que pertenecen (^{1} la generación de 52 estudiantes; ^{2} la generación de 26 estudiantes) y el subíndice corresponde al número de lista del estudiante.

Se observaron 17 prácticas (P_1, P_2, …, P_{17}) de 12 docentes en formación (entre ellos, siete fueron entrevistados), a los que sus tutoras de primaria asignaron los contenidos de estocásticos para su enseñanza en su práctica. *Las prácticas docentes* se llevaron a cabo en siete primarias diurnas públicas en las que participaron 42 alumnos de segundo grado (cuatro grupos: uno de diez, uno de seis, uno de cinco y otro de 21); 13 alumnos de tercero (un grupo); 23 de cuarto grado (dos grupos: uno de 13 (con este asignado a E^{2}_{9} se realizaron dos observaciones) y otro de 10); 107 alumnos de quinto grado (cuatro grupos de 20 (con el grupo a cargo de E^2_{13} se realizaron dos observaciones de clase), uno de 14, uno de nueve y otro de 4); y seis alumnos de un grupo de sexto grado.

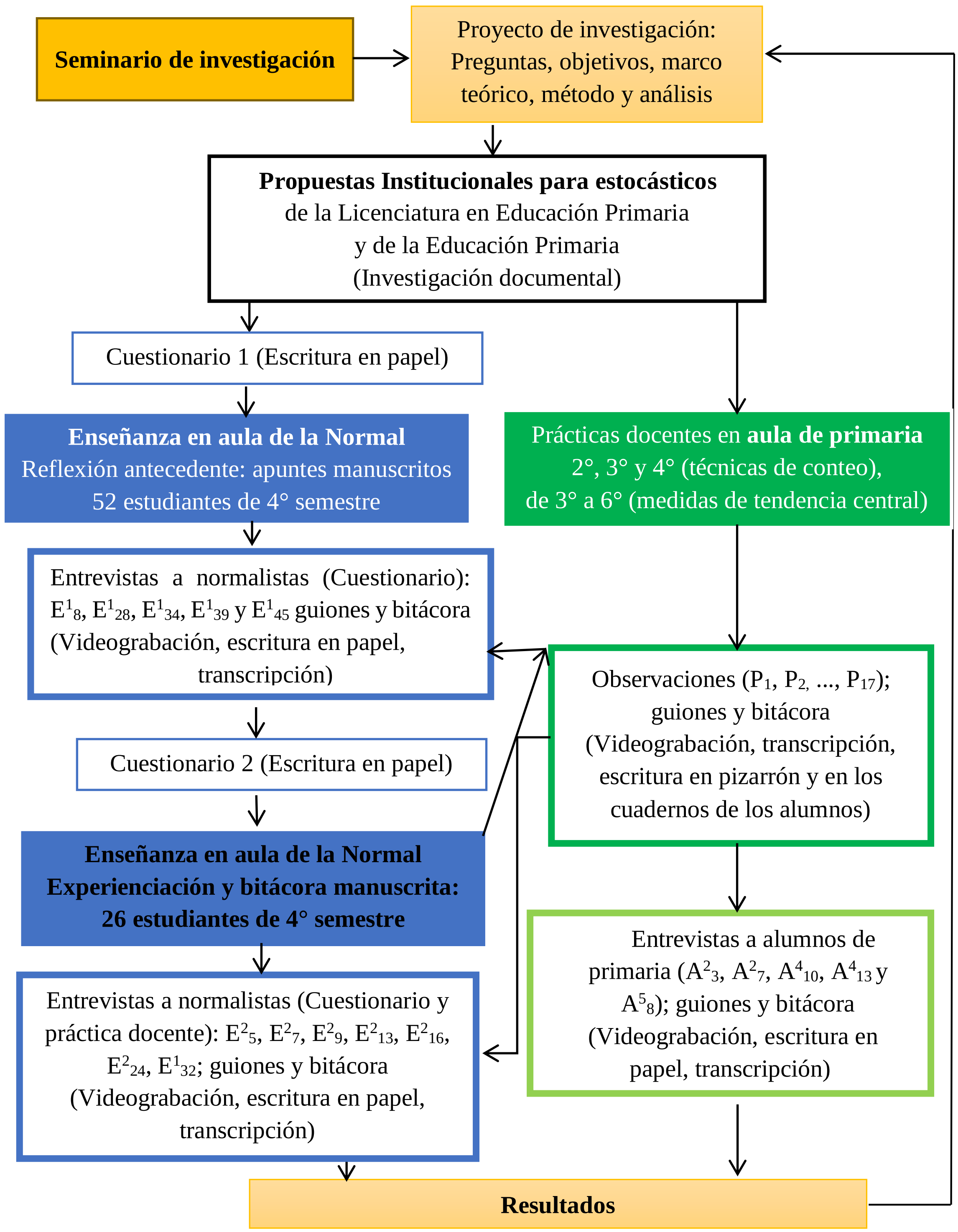


Figura 3.1. Organización e instrumentos de la investigación.

En las prácticas, se contó con la participación sólo de los alumnos cuyos padres sí autorizaron que se llevara a cabo la videograbación de la clase con sus hijos mediante el llenado del permiso correspondiente (véase el Anexo 3).

Además, con el objetivo de obtener datos de lo que algunas prácticas hubieran podido repercutir en algunos desempeños de los alumnos asistentes a ellas, se entrevistó a cinco de ellos, que identificamos como “$A^{\#}_{\#}$”, con el superíndice correspondiente a su grado y el subíndice a su orden de participación en la clase.

3.2. Criterios de análisis

A los datos obtenidos de la investigación documental, los cuestionarios, las entrevistas, la reflexión, la experienciación y las prácticas docentes, se les aplicó la célula de análisis (Ojeda, 2006), la cual conjuga los elementos de los ejes epistemológico, cognitivo y social que fundamentan la investigación:

Referentes. Son las situaciones a las que se hace referencia en los documentos y distintos instrumentos al plantear problemas y preguntas, con el fin de obtener datos de la comprensión de los participantes en la investigación (Ojeda, 2006).

Ideas fundamentales de estocásticos implicadas. Nos referimos a seis de las diez ideas propuestas por Heitele (1975), que son: medida de probabilidad, espacio muestra, equidistribución y simetría, combinatoria, variable estocástica y muestra.

Otros conceptos matemáticos requeridos. Corresponden a los contenidos matemáticos distintos a los de estocásticos que se ponen en juego para dar cuenta de los contenidos de estocásticos en foco. Por ejemplo, operaciones aritméticas básicas, orden de números naturales y números decimales, números fraccionarios; producto cartesiano, unidades de tiempo, longitud, de velocidad y de peso (kg), figuras geométricas, factorial, escala de calificación, raíz cuadrada, porcentaje, extracción y caminos (trayectoria).

Recursos semióticos empleados. Los hemos denominado “recursos” en lugar de “representaciones”, dado que las segundas necesitan una interiorización de sus usos que, en general, no es inmediata a su presentación (Ojeda, 2006, p. 209). Consisten en lengua natural escrita, simbología matemática, figuras, diagramas de árbol, enlistados de posibilidades, gráficas, tablas, signos numéricos y aritméticos.

Términos empleados. Corresponden a las palabras o frases "que se emplean en la enseñanza para hacer referencia al azar o a conceptos estocásticos" (Ojeda, 2006, p. 210). Por ejemplo: al azar, sin ver, posibilidades, probabilidad, los cuantificadores y conectivos lógicos (cualquier, y, mismo, al menos, a lo más, …), nombres de conceptos (datos, media aritmética, moda, mediana, distribución de frecuencias simples, …), entre otros.

La constitución del concepto de estocásticos en juego se analizó mediante la aplicación del triángulo epistemológico (Steinbring, 1991; véase apdo. 2.1.5). Esta aplicación consideró, de manera correspondiente, la interrelación entre referente, recursos semióticos, términos empleados e ideas fundamentales de estocásticos. En particular, para identificar la comprensión de estocásticos, se les distinguió de otros conceptos matemáticos requeridos por los primeros. Por otro lado, la interacción entre individuos (docente y estudiante, practicante y alumno, investigadora y estudiante, alumno y alumno, investigadora y alumno) al referirse al contenido de estocásticos de que se tratara se analizó mediante la identificación de significador y significado (Steinbring, 2005; véase apdo. 2.3.2).

Mediante estos criterios se identificó en todo el proceso de investigación lo correspondiente a las tres dimensiones propuestas por Scheiner (2015; véase su descripción en la sec. 2.4) del conocimiento de los normalistas para la enseñanza de estocásticos:

Dimensión epistemológica: consideramos su conocimiento de la evolución de la idea de azar en el niño (que incluye la de sus ideas de combinatoria) y las limitantes epistemológicas para aprehender y comprender un contenido de estocásticos.

Dimensión cognitiva: Identificamos los indicadores cognitivos (véase la sec. 2.4) en las participaciones y respuestas que dieron los normalistas a los cuestionarios, así como en la experienciación llevada a cabo en el aula de la escuela normal, como antecedentes a la puesta en escena de sus estrategias de enseñanza en la escuela primaria. Consideramos el desarrollo de las prácticas y también la interacción que establecieron en las aulas de primaria en torno al contenido de estocásticos enseñado.

Dimensión didáctica: consideramos el conocimiento de los normalistas en conjunción con sus estrategias para enseñarlo en las prácticas, su selección de medios y de las actividades y materiales a emplear, a su selección de referentes y de recursos semióticos para enseñar el contenido. También atendimos a sus interacciones con los alumnos.

3.3. Métodos, instrumentos y técnicas de registro de datos

Cuatro métodos se pusieron en juego en esta investigación: la investigación documental (Cortés y García, 2003); la experienciación (Maturana y Varela, 1994) y la observación de la enseñanza (Wittrock, 1986); y el interrogatorio (escrito y oral).

3.3.1. Investigación documental

En la investigación documental (Cortés y García, 2003) se realizó un análisis de las propuestas institucionales para estocásticos, tanto de la Educación Normal (SEP, 2012c y SEP, 2017b), como de la Educación Primaria (SEP, 2011e; SEP, 2017a). Los documentos corresponden a los Planes y programas en cada caso, a algunos de los libros de texto recomendados en la licenciatura (SEP, 2012c) y a los prescritos para primaria (SEP, 2009; SEP, 2011e y SEP, 2017a). Los datos recopilados se registraron y organizaron en matrices de acuerdo a los criterios de análisis aplicados (véase aquí el capítulo 4).

3.3.2. Reflexión, experienciación y observación de la enseñanza

Antecedió a la puesta en juego de la experienciación de la enseñanza una reflexión (véase Cap. 5) de la enseñanza en el aula de la Normal impartida a 52 estudiantes por la investigadora. Para ello, se consideró su estrategia de enseñanza y los apuntes que algunos normalistas tomaron durante las clases.

La experienciación (Maturana y Varela, 1994), que consiste en “la aceptación del otro es el fundamento para que el observador o auto-consciente pueda aceptarse plenamente a sí mismo” (p. 27), se refiere a la enseñanza, tanto a la impartida por esta investigadora a 26 normalistas, como a la observada (Wittrock, 1986) por ella durante las prácticas de los futuros docentes en las aulas de primaria, de "lo que están haciendo, cómo lo están haciendo y qué definiciones tienen de esas acciones (p. 341).

La aplicación del Cuestionario 1 con el primer grupo de estudiantes permitió ir afinando la selección de reactivos del Cuestionario 2. La experienciación con el primer grupo permitió considerar los métodos, instrumentos y técnicas de registro necesarios para analizar los datos obtenidos en la asegunda experienciación.

3.3.2.1. Formación del docente en estocásticos. La investigadora reflexionó sobre su enseñanza de los contenidos de la asignatura Procesamiento de Información Estadística (véase la Tabla 4.3), que tiene lugar en el aula del 4° semestre de la licenciatura en Educación Primaria. Los instrumentos utilizados fueron:

a) guión de reflexión constituido por los criterios de la célula de análisis;
b) apuntes de normalistas;
c) estrategia de enseñanza, para la cual se consideró el conocimiento del normalista previo a la enseñanza identificado mediante sus respuestas a cuestionarios (véanse §3.3.3.1 y §3.3.3.2);
d) guión de experienciación, constituido por los criterios de la célula de análisis;
e) notas de bitácora.

Las técnicas de registro de datos para efectuar el análisis fueron: los apuntes de tres normalistas en la reflexión. La videograbación y su transcripción respectiva en la experienciación, la observación de clase y las entrevistas.

Los resultados se tomaron en cuenta en el diseño del segundo cuestionario y en la experienciación de la enseñanza de repaso de medidas de tendencia central llevadas a cabo en el semestre par del año 2016.

La Tabla 3.1. resume la descripción de la estrategia de enseñanza que se llevó a cabo con 52 estudiantes. El objetivo fue la enseñanza de los contenidos de la Unidad 1.

Tabla 3.1. Organización de los contenidos de la unidad 1, Estadística, de la asignatura *Procesamiento de Información Estadística*.

Contenido	No. de sesiones	Actividades
1. Estudio de la estadística (9 de febrero de 2015)	Una	**1**. A los dos equipos formados se les entregaron los textos *¿Qué es la Estadística?* (Johnson, 1976, Cap. 1) e *Introducción a la Estadística* (Ross, 2008, Cap. 1), de cuyas lecturas cada equipo elaboró un mapa conceptual, que se presentó en plenaria al resto del grupo.
2. Tablas de distribución de frecuencias y representaciones gráficas (11, 13, 18 y 20 de febrero de 2015)	Cuatro	**2**. A cada uno de cinco equipos se le asignó un subtema de *Descripción de los conjuntos de datos* (Ross, 2008, Cap. 2), que presentaron en power point a sus demás compañeros.
3. Revisión de libros de texto (4 y 6 de marzo de 2015)	Dos	**3**. Para tratar los desafíos de matemáticas, se pidió identificar: los cuatro momentos en los que deben resolverse e identificar los contenidos de estocásticos para cada grado.
4. Medidas de tendencia central (13, 15 y 17 de abril de 2015)	Tres	**4**. Cada uno de cuatro equipos realizó una presentación power point de las medidas de tendencia central (media, moda y mediana). **Resolución de problemas**
5. Medidas de posición (20, 22 y 24 de abril de 2015)	Tres	**5**. Cada uno de los dos equipos realizó una presentación power point sobre el subtema: cuartiles y percentiles. **Resolución de problemas**
6. Medidas de dispersión (1, 5 y 8 de junio de 2015)	Dos	**6**. Cada uno de tres equipos presentó en power point el subtema que le correspondió: 1. Rango y desviación media, 2. Varianza y 3. Desviación estándar. Tres presentaciones power point. **Resolución de problemas**
7. Datos bivariados.	0	No alcanzó el tiempo para ver este tema

La estrategia de enseñanza para la experienciación consistió en la selección de dos problemas, uno de datos agrupados y uno de datos sin agrupar para clarificar el cálculo de las medidas de tendencia central en cada uno de los dos casos. La Tabla 3.2 caracteriza los dos problemas que se seleccionaron para la enseñanza.

Tabla 3.2. Caracterización de los referentes de la sesión de aula de acuerdo a la célula de análisis (Ojeda, 2006).

<table>
<tr><td colspan="4">Ideas fundamentales de estocásticos: variable estocástica, muestra.</td></tr>
<tr><th>Referente</th><th>Otros conceptos matemáticos</th><th>Recursos semióticos</th><th>Términos empleados</th></tr>
<tr><td>1. Promedio del número de hermanos de los estudiantes del 2°15</td><td>Operaciones aritméticas, números naturales y decimales.</td><td>Lengua natural escrita, simbología matemática, tabla</td><td>Promedio, muestra, media, mediana, moda</td></tr>
<tr><td>2. Tabla de datos agrupados. Pesos de niños
<table>
<tr><td>Intervalo</td><td>f_i</td></tr>
<tr><td>0 – 10</td><td>2</td></tr>
<tr><td>10 – 20</td><td>3</td></tr>
<tr><td>20 – 30</td><td>4</td></tr>
<tr><td>30 – 40</td><td>1</td></tr>
</table>
Determinar, la media, la mediana y la moda.</td><td>Operaciones aritméticas, números naturales.</td><td>Lengua natural escrita, tabla, simbología matemática.</td><td>Datos agrupados, intervalo, media, mediana, moda, marca de clase.</td></tr>
</table>

3.3.2.2. La práctica de enseñanza de estocásticos del futuro docente. La investigadora observó (Wittrock, 1986) la enseñanza que practicaron los normalistas en aulas de primarias mediante un guión de observación constituido por los criterios de la célula de análisis y que incluyó la atención a la interacción en el aula relativa a los conceptos implicados en el tema que se enseñó.

Los participantes realizan prácticas en aulas de primaria durante las asignaturas:

- *Observación y práctica docente* (1^{er} semestre),
- *Observación y análisis de la práctica escolar* (2^{o} semestre),
- *Iniciación al trabajo docente* (3^{er} semestre),
- *Estrategias de trabajo docente* (4^{o} semestre),
- *Trabajo docente e innovación* (5° semestre),
- *Proyectos de intervención socioeducativa* (6° semestre) y
- *Práctica profesional* (8° semestre).

Las mentoras de la normal asignan un calendario y las escuelas primarias a visitar; las directoras de las escuelas primarias y las mentoras de la Normal asignaron los grados y los grupos para la realización de sus prácticas, mientras que los docentes titulares de esos grupos les asignaron el tema a impartir, comúnmente mediante la especificación de la lección (o lecciones) del libro de texto del grado respectivo.

Por otra parte, el normalista propuso una estrategia de enseñanza del tema asignado, la cual suponía la revisión y aprobación por el profesor tutor del futuro docente y, en caso necesario, la realización conjunta de su modificación. Finalmente, el docente titular del grupo de primaria asignado al practicante evaluó la práctica, colocando en la planeación las observaciones y calificaciones a cada uno de los aspectos del apartado de evaluación en el formato de informe respectivo (véase en Anexo 4). Este apartado en ocasiones es revisado por los tutores de la normal. Para esta investigación se consideró la observación de 17 prácticas de temas de estocásticos (once de medidas de tendencia central y seis de principio multiplicativo), a saber, siete por año. Sin embargo, se tomó en cuenta que no todas las escuelas primarias permitieron la videograbación, además de que no todas las tutoras de la escuela primaria asignaron temas de estocásticos a los normalistas. Las sesiones de práctica videograbadas se transcribieron para su análisis. Los aspectos o ángulos de interés de los que se percató la investigadora y que pudieron haber quedado fuera de cuadro se registraron en bitácora manuscrita.

3.3.2.3. Ingreso a las aulas de práctica de enseñanza de estocásticos del futuro docente. El acceso a las escuelas primarias en el primer año fue posible dado que la investigadora era titular del grupo. Después, al no estar frente a grupo se requirió la gestión con las autoridades correspondientes, primeramente, con la Administración Federal de Servicios Educativos y después con la Coordinación Sectorial de Escuelas Primarias en el Distrito Federal y la Dirección General de Servicios Educativos en Iztapalapa (DGSEI). Esta última no permitió llevar a cabo el registro de datos como se había previsto (véase Anexo 2).

3.3.3. Interrogatorios

El interrogatorio a los futuros docentes se llevó a cabo mediante dos instrumentos: cuestionarios (INEGI, 2013) y guión de entrevistas semiestructuradas (Zazkis y Hazzan, 1999).

Los cuestionarios se entregaron a los estudiantes impresos para que los contestaran individualmente en máximo dos horas, de acuerdo al horario de la asignatura *Procesamiento de Información Estadística* (véase la sección 4.2).

Las entrevistas se basaron en un guión individual en el que se consideraron los resultados obtenidos en el cuestionario y en la práctica docente. Se les realizó en el recinto de la Normal, tuvieron una duración de entre 30 min a una hora, se videograbaron y transcribieron para su análisis. Las anotaciones que requirieron hacer los entrevistados las registraron en hojas de control para someterlas también al análisis.

3.3.3.1. Cuestionario 1. Se aplicó este instrumento a 52 estudiantes (dos grupos) (véase el Apéndice 1) al inicio de la asignatura de *Procesamiento de Información Estadística*. El objetivo fue identificar su dominio de conceptos de estocásticos antes de su enseñanza. El cuestionario 1 fue diseñado por tres docentes del Colegio de Matemáticas de la Normal, quienes impartirían en esa ocasión, la asignatura en cuestión y contó con 27 reactivos. Se plantearon preguntas para relacionar (conceptos con sus definiciones), de opción múltiple y abiertas para tener acceso a los procedimientos para responderlas. El orden de los reactivos invierte el de lo propuesto en el Plan y programas (SEP, 2012c).

Las Tablas 3.3, 3.4, 3.5 y 3.6 presentan los reactivos del Cuestionario 1 y la fuente de donde fueron consultados o modificados para su aplicación a los normalistas.

Tabla 3.3. Reactivos y referentes del Cuestionario 1 para tipos de variables y gráfica.

<table>
<tr><th>Número de reactivo y referente</th><th>Fuente</th></tr>
<tr><td>17. Intensidad con que se mide un dolor de cabeza.
a) Nominal
b) Ordinal
c) Numérica</td><td rowspan="5">Adaptados de los propuestos en https://www.vitutor.com/estadística/descriptiva/a_2.html consultado en diciembre de 2014.</td></tr>
<tr><td>18. Opinión que se tiene acerca de la calidad en el servicio (1 = deficiente; 2, 3, 4, 5 = excelente).
a) Nominal
b) Ordinal
c) Numérica</td></tr>
<tr><td>19. Posible causa de alta temperatura en una persona.
a) Nominal
b) Ordinal
c) Numérica</td></tr>
<tr><td>20. Fecha de nacimiento de una persona.
a) Nominal
b) Ordinal
c) Numérica</td></tr>
<tr><td>21. Grado de aceptación que tiene una persona respecto a utilizar cierto producto.
a) Nominal
b) Ordinal
c) Numérica</td></tr>
<tr><td>27. Traza la gráfica circular o de pastel correspondiente a la siguiente información: Casos de operaciones realizadas en un hospital, el año pasado.
<table>
<tr><th>Tipo de operación</th><th>No. de casos</th></tr>
<tr><td>Torácica</td><td>20</td></tr>
<tr><td>Ortopedia</td><td>45</td></tr>
<tr><td>Otorrinolaringología</td><td>58</td></tr>
<tr><td>General</td><td>98</td></tr>
<tr><td>Abdominal</td><td>115</td></tr>
<tr><td>Urología</td><td>74</td></tr>
<tr><td>Neurocirugía</td><td>23</td></tr>
<tr><td>Cáncer</td><td>65</td></tr>
</table></td><td>Adaptado del propuesto en www.uteq.edu.mx/files/docs/Cursos…/Estadistica%20Basica%20Sesion20.ppt consultado en diciembre de 2014.</td></tr>
</table>

Tabla 3.4. Reactivos y referentes para medidas de tendencia central del Cuestionario 1.

Número de reactivo y referente	Fuente
7. Definición de media	Adaptados de las definiciones de Ross, S. (2008).
8. Definición de mediana	
9. Definición de moda	
16. Elige la oración correcta, de acuerdo con lo expuesto en el siguiente problema. El jefe de recursos humanos registró el número promedio de palabras escritas por minuto que cinco aspirantes al puesto de mecanógrafa hicieron en una prueba de transcripción de un texto, durante un período de 10 minutos. Los resultados fueron como siguen: 75, 79, 97, 102 y 115. a) Tres de las cinco aspirantes tuvieron un promedio de menos de 100 palabras por cada 10 minutos. b) Las aspirantes con promedio de más de 100 palabras por cada 10 minutos son personas con mucha experiencia. c) Este estudio permite estimar que una mecanógrafa tiene una velocidad de escritura de 120 palabras por cada 10 minutos. d) El número de aspirantes con un promedio menor a 90 palabras por cada 10 minutos, es dos.	
23. Calcula la media aritmética, la moda y la mediana de una distribución de frecuencias simples de los siguientes datos: 6 5 7 6 5 4	a) media 7 4 6 8 7 6	b) moda 8 5 7 6 8 7	c) mediana 9 6 4 5 9 8 | 7 9 8 10 9 6		http://www.portaleducativo.net/octavobásico/790/Media-moda-mediana-rango
24. Encuentra la moda de los siguientes conjuntos de datos a) 2, 3, 4, 4, 3, 5, 4, 5, 5, 6, 7, 6, 8, 5, 5; b) 3, 18, 13, 5, 9, 7, 10, 11, 12; c) 2, 9, 3, 8, 4, 4, 8, 3, 3, 6, 5, 7, 7, 8	http://www.portaleducativo.net/octavobásico/790/Media-moda-mediana-rango
25. El promedio de las edades de Manuel, Amalia y de sus nueve nietos es de 25 años. Se sabe que Manuel es 3 años mayor que Amalia y que ella tiene 65 años. ¿Cuál es el promedio de edad únicamente de sus nueve nietos? a) 15.7 años, b) 52.6 años, c) 14.36 años, d) 9 años	Examen de Carrera Magisterial, Ciclo Escolar 2013-2014
26. Encuentra la mediana de la siguiente muestra y grafica la información que se te presenta: 9, 6, 7, 9, 10 y 8. a) a) Mediana, b) gráfica	http://www.portaleducativo.net/octavobásico/790/Media-moda-mediana-rango

Tabla 3.5. Reactivos y referentes para combinatoria del Cuestionario 1.

Número de reactivo y referente	Fuente
3. Definición de permutación	Adaptados de las definiciones de Ross, S. (2008).
4. Definición de combinatoria	
5. Definición de diagrama de árbol	
15. Posibilidades de extraer cuatro bolas de un saco que contiene seis bolas blancas y cinco negras, si las bolas: a) son de cualquier color, b) dos sean blancas y dos negras, c) todas sean del mismo color	Adaptado del propuesto por Pinzón (1975, p. 318)
22. Con tres letras, a, b y c, ¿cuántas palabras distintas de tres letras se pueden formar si: a) las tres letras sean distintas? b) dos letras, por lo menos, sean idénticas	Díaz, J., Batanero, M. y Cañizares, Ma. (1996, pp. 126-127)

Tabla 3.6. Reactivos y referentes para probabilidad del Cuestionario 1.

Número de reactivo y referente	**Fuente**
1. Definición de evento o suceso	Adaptados de las definiciones de Ross, S. (2008).
2. Definición de espacio muestra	
6. Definición de variable aleatoria	
10. ¿Cuál es la probabilidad de que suceda un evento seguro? a) 0.5 b) 0.25 c) 0.75 d) 1	Adaptado del consultado en www.icarito.cl/2009/12/101-8587-9-probabilidades.shtml/ en diciembre de 2014.
11. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra un evento imposible? a) 0 b) 0.25 c) 0.75 d) 1	
12. Es el evento cuya probabilidad de ocurrencia se encuentra entre 0 y 1. Cuanto menos probable sea el suceso, más cerca estará del 0 y cuánto más probable sea, más cerca estará de 1. a) Evento imposible b) Evento posible o probable c) Evento improbable d) Evento seguro	
13. ¿Cuál es la probabilidad de que, al lanzar 2 monedas al piso, las caras superiores sean águila? a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{3}{4}$	
14. ¿Cuál es la probabilidad al lanzar un dado y obtener un número primo? a) $\frac{2}{6}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{4}{6}$ d) $\frac{3}{6}$	

Las Tablas 3.7, 3.8, 3.9 y 3.10 caracterizan los 27 reactivos del Cuestionario 1 de acuerdo a la célula de análisis de Ojeda (2006).

Tabla 3.7. Caracterización de los reactivos para tipos de variables y gráfica del Cuestionario 1.

<table>
<tr><th>Reactivos e Ideas fundamentales de estocásticos</th><th>Otros conceptos matemáticos</th><th>Recursos semióticos</th><th>Términos empleados</th></tr>
<tr><td>17.Muestra.
Intensidad de un dolor de cabeza.
a) Nominal
b) Ordinal
c) Numérica</td><td>Medición.</td><td>Lengua natural escrita.</td><td>Nominal, ordinal y numérica.</td></tr>
<tr><td>18. Muestra.
Calidad en un servicio.
a) Nominal
b) Ordinal
c) Numérica</td><td>Calidad.</td><td>Lengua natural escrita y signos numéricos.</td><td>Nominal, ordinal y numérica, 1 = deficiente.</td></tr>
<tr><td>19. Muestra.
Causa de alta temperatura en una persona.
a) Nominal
b) Ordinal
c) Numérica</td><td>Unidad de medida de la temperatura.</td><td>Lengua natural escrita.</td><td>Alta temperatura, nominal, ordinal, numérica.</td></tr>
<tr><td>20. Muestra.
Fecha de nacimiento de una persona.
a) Nominal
b) Ordinal
c) Numérica</td><td>Unidad de medida: año, mes, día.</td><td>Lengua natural escrita.</td><td>Nominal, ordinal, numérica.</td></tr>
<tr><td>21. Muestra.
Aceptación del uso de un producto por una persona.
a) Nominal
b) Ordinal
c) Numérica</td><td>Unidad de medida.</td><td>Lengua natural escrita.</td><td>Grado de aceptación, nominal, ordinal y numérica.</td></tr>
<tr><td>27. Muestra.
Traza la gráfica circular o de pastel de las operaciones realizadas en un hospital.
<table><tr><th>Tipo de operación</th><th>No. de casos</th></tr><tr><td>Torácica</td><td>20</td></tr><tr><td>Ortopedia</td><td>45</td></tr><tr><td>Otorrinolaringología</td><td>58</td></tr><tr><td>General</td><td>98</td></tr><tr><td>Abdominal</td><td>115</td></tr><tr><td>Urología</td><td>74</td></tr><tr><td>Neurocirugía</td><td>23</td></tr><tr><td>Cáncer</td><td>65</td></tr></table></td><td>Número natural, porcentajes.</td><td>Lengua natural escrita, signos numéricos, tabla, gráfica circular o de pastel.</td><td></td></tr>
</table>

Tabla 3.8. Caracterización de los reactivos de medidas de tendencia central del Cuestionario 1.

Reactivos e Ideas fundamentales de estocásticos	Otros conceptos matemáticos	Recursos semióticos	Términos empleados
7. Variable estocástica Definición de media	Operaciones aritméticas, número.	Lengua natural escrita.	Media, datos, número total de datos.
8. Variable estocástica Definición de mediana	Mitad.	Lengua natural escrita.	Mediana, promedio de los datos.
9. Variable estocástica Definición de moda	Conjunto.	Lengua natural escrita.	Moda, dato más frecuente.
16. Promedio de palabras por minuto. Variable estocástica. a) Tres aspirantes escriben menos de 100 palabras. b) Las aspirantes que escriben 100 palabras por cada 10 min tienen mucha experiencia. c) Una mecanógrafa tiene una velocidad de escritura de 120 palabras por 10 min. d) Dos aspirantes en promedio escribieron 90 palabras en 10 min.	Unidad de tiempo: minutos, número natural de dos y tres cifras, velocidad.	Lengua natural escrita, signos numéricos.	Número promedio de palabras por minuto, período de 10 minutos, menos de 100 palabras por cada 10 minutos, velocidad de escritura de 120 palabras por cada 10 minutos, menor a 90 palabras por cada 10 minutos.
23. Variable estocástica, muestra	Números naturales y sus operaciones.	Lengua natural escrita, símbolos numéricos, tabla.	Media aritmética, datos, moda, mediana, moda, frecuencia simple.
24. Variable estocástica, muestra	Operaciones aritméticas, números naturales.	Lengua natural escrita, signos numéricos.	Moda, conjunto de datos.
25. Variable estocástica, muestra	Orden, operaciones aritméticas.	Lengua natural escrita, signos aritméticos	Promedio, edades, mayor que.
26. Variable estocástica, muestra	Operaciones aritméticas, producto cartesiano.	Lengua natural escrita, notación matemática, signo numérico, gráfica.	Mediana, muestra.

Tabla 3.9. Caracterización de los reactivos de combinatoria del Cuestionario 1.

Reactivos e Ideas fundamentales de estocásticos	Otros conceptos matemáticos	Recursos semióticos	Términos empleados
3. Combinatoria Definición de Permutación	Orden.	Lengua natural escrita.	Permutación, muestra ordenada, población.
4. Combinatoria Definición de Combinación	Orden (no hay).	Lengua natural escrita.	Combinación, muestra no ordenada, población.
5. Combinatoria Definición de diagrama de árbol	Diagrama, descripción gráfica.	Lengua natural escrita.	Experimento.
15. Combinatoria (Selección), principio multiplicativo	Función factorial.	Lengua natural escrita, listado de posibilidades, diagrama de árbol.	Posibilidades, cualquier color, dos blancas y dos negras, mismo color.
22. Combinatoria (permutaciones) a) sin repetición b) con repetición	Números naturales y sus operaciones.	Lengua natural escrita.	Cuántas, distintas.

Tabla 3.10. Caracterización de los reactivos de probabilidad del Cuestionario 1.

Reactivos e Ideas fundamentales de estocásticos	Otros conceptos matemáticos	Recursos semióticos	Términos empleados
1. Medida de probabilidad. Definición de evento o suceso	Subconjunto.	Lengua natural escrita.	Evento o suceso, espacio muestra.
2. Espacio muestra Definición	Conjunto.	Lengua natural escrita.	Todos los resultados posibles, experimento.
6. Variable aleatoria Definición	Función, números reales.	Lengua natural escrita, simbología matemática (x, Ω).	Variable aleatoria.
10. Medida de probabilidad. Probabilidad de un evento seguro. a) 0.5 b) 0.25 c) 0.75 d) 1	Números enteros y decimales.	Lengua natural escrita, signos numéricos.	Probabilidad, evento seguro.
11. Medida de probabilidad. Probabilidad de un evento imposible. a) 0 b) 0.25 c) 0.75 d) 1	Números enteros y decimales.	Lengua natural escrita, signos numéricos.	Probabilidad, evento imposible.
12. Medida de probabilidad. Evento cuya probabilidad de ocurrencia es entre 0 y 1. a) Evento imposible b) Evento posible o probable c) Evento improbable d) Evento seguro	Números naturales.	Lengua natural escrita, signos numéricos.	Probabilidad, ocurrencia entre 0 y 1, evento (imposible, posibles o probable, improbable, seguro), más o menos probable.
13. Medida de probabilidad. Lanzar dos monedas y que caigan con caras superiores en águila. a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{3}{4}$	Números fraccionarios.	Lengua natural escrita, signos numéricos.	Probabilidad, lanzar dos monedas, caras superiores águilas,
14. Medida de probabilidad. Lanzar un dado y obtener un número primo. a) $\frac{2}{6}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{4}{6}$ d) $\frac{3}{6}$	Números fraccionarios, números primos.	Lengua natural escrita y signos numéricos.	Probabilidad, lanzar un dado, obtener un número primo.

3.3.3.2. Cuestionario 2. Este instrumento, diseñado por la investigadora (I), se aplicó a un grupo de 26 estudiantes de 4° semestre de Licenciatura, después de iniciado el semestre (véase el Apéndice 2). El objetivo general fue identificar el conocimiento de los docentes en formación sobre contenidos estocásticos (medidas de tendencia central y técnicas de conteo). Estuvo constituido por 11 reactivos cuyo orden reproduce el de la trinidad en los libros de texto (SEP, 2012), aunque el reactivo 2 considera datos agrupados;

el 5 incluye el recíproco de la media aritmética de los recíprocos de los datos; los reactivos 6 y 7 se refieren a datos ponderados; el reactivo 8 requiere la media geométrica y su cálculo reviste mayor dificultad para los estudiantes.

La Tabla 3.11 presenta los reactivos del cuestionario 2, así como la fuente de donde fueron extraídos y, en algunos, casos modificados para su aplicación a los normalistas.

Tabla 3.11. Reactivos y referentes del Cuestionario 2.

Número de reactivo y referente	**Fuente**
1. Tiempo que dedican las personas a escuchar música: a) cálculo de media, moda, mediana; b) ¿la media es dato?; c) tipo de variable; d) gráfica.	Adaptado del propuesto por Patiño, R. (2002, p. 1)
2. Resultados obtenidos en un test de aptitud de 100 personas: Intervalo a) modal, b) mediana, c) media aritmética.	Adaptado del propuesto por Casullo, A. (2000, p. 41*)*
3. Trece calificaciones en estadística: a) cálculo: media, mediana, moda. Representatividad: b) más, c) menos, d) igual	Adaptado del propuesto por Ferran, X. (2012, p. 10)
4. Número de lagartijas y sentadillas realizadas por diez estudiantes. a) Cálculo tendencia central; b) dispersión; c) simetría.	Adaptado del propuesto por Johnson, R. (1976, p. 85)
5. Velocidad media de un aeroplano con velocidad variable en distancias iguales.	Moroney, M. J. (1979, p. 171)
6. Promedio de calificaciones de un estudiante.	Adaptado del propuesto por Pollatsek, *et al.* (1981, p. 192)
7. Peso promedio de diez personas en un ascensor.	Adaptado del propuesto por Pollatsek, *et al.* (1981, p. 195)
8. Proporción media de mujeres en una empresa.	Requena, B. (2015) (véase http://www.universoformulas.com)
9. Con las letras a, b, y c, ¿cuántas palabras se pueden formar, con: a) las letras distintas, b) dos letras idénticas?	Pinzón, A. (1975, p. 310)
10. Dos extracciones sin reintegro de una urna con dos bolas blancas y una negra.	Adaptado del propuesto por Díaz, J., Batanero, M. y Cañizares, Ma. (1996, pp. 126-127)
11. Cuatro volados. a) Empate, b) camino empate, c) gane, d) camino del ganador	Flores, M. (2009, pp. 172-173)

La Tabla 3.12 caracteriza los once reactivos del Cuestionario 2 aplicado al grupo de 26 estudiantes.

Tabla 3.12. Caracterización de los once reactivos del Cuestionario 2.

Número de reactivo e Ideas fundamentales de estocásticos	Otros conceptos matemáticos	Recursos semióticos	Términos empleados
1. Variable estocástica, muestra	Unidades de tiempo, operaciones aritméticas, números decimales, producto cartesiano.	Lengua natural escrita, tabla, gráfica.	Promedio, muestra, media, mediana, moda, medida, tendencia central, variable.
2. Variable estocástica, muestra	Operaciones aritméticas, números naturales y decimales.	Lengua natural escrita, tabla, notación simbólica, símbolos numéricos.	Intervalo modal, media, mediana, marca de clase, frecuencia simple y acumulada.
3. Variable estocástica, muestra	Operaciones aritméticas, números naturales.	Lengua natural escrita, notación simbólica, símbolos numéricos.	Muestra, mediana, moda, media, medida de centralidad, nivel del grupo.
4. Equidistribución y simetría, variable estocástica, muestra	Operaciones aritméticas, números naturales, producto cartesiano.	Lengua natural escrita, símbolos numéricos, tabla, gráfica.	Muestra, azar, medidas de tendencia central, moda, media, mediana, rango, simetría.
5. Variable estocástica, muestra	Operaciones aritméticas, números naturales, medidas de longitud, de tiempo y velocidad.	Lengua natural escrita, notación simbólica, signos numéricos.	Velocidad media.
6. Variable estocástica, muestra	Números decimales, operaciones aritméticas, escala.	Lengua natural escrita, signos numéricos.	Promedio.
7. Variable estocástica, muestra	Unidades de medida de peso (kilo), operaciones aritméticas.	Lengua natural escrita, signos numéricos.	Promedio.
8. Variable estocástica, muestra	Operaciones aritméticas, número decimal, raíz a la quinta, porcentaje.	Lengua natural escrita, tabla, signos numéricos.	Proporción media, media geométrica.
9. Combinatoria (permutaciones) a) sin repetición b) con repetición	Función factorial: producto de números naturales.	Lengua natural escrita.	Palabras distintas (sin repetición) y dos letras idénticas (con repetición).
10. Combinatoria (combinaciones)	Orden.	Lengua natural escrita.	Sin reintegro.
11. Espacio muestra	Trayectorias.	Lengua natural escrita, diagrama de árbol.	Cuatro volados, cae águila, caen tres soles, caen dos águilas y cae un sol, posibilidades.

3.3.3.3. Entrevistas. Las entrevistas, individuales y semiestructuradas (Zazkis y Hazzan, 1999), tuvieron como objetivo clarificar y profundizar las respuestas de los normalistas a los cuestionarios que se les aplicaron y/o a desempeños que se consideraron de interés, ya sea en el aula de estocásticos de la Normal o en sus prácticas docentes en el aula de primaria.

Por otro lado, el objetivo de las entrevistas a los alumnos de primaria fue identificar su conocimiento de medidas de tendencia central y de principio multiplicativo tratado en las sesiones de enseñanza e identificar si repetían las estrategias enseñadas por los normalistas. Las sesiones de entrevista se videograbaron y transcribieron. Los datos que se identificaron se complementaron con los de los registros en las hojas de control y se les sometió al análisis.

Docentes en formación. Se realizaron once entrevistas, cuatro (E^1_8, E^1_{28}, E^1_{34} y E^1_{39}) en el primer periodo (grupo de 52 estudiantes) por sus respuestas al cuestionario 1 (véase apdo. 5.1.1); un año después a siete estudiantes (E^2_5, E^2_7, E^2_9, E^2_{13}, E^2_{16} y E^2_{24}) de las cuales una (E^1_{32}) es del grupo de 52 estudiantes, por sus respuestas al cuestionario 2 (véase apdo. 5.1.2), pero sólo a estos segundos (siete estudiantes) se les entrevistó también acerca de su desempeño en sus prácticas de enseñanza de estocásticos, específicamente de medidas de tendencia central y del principio multiplicativo, que son los que requiere la educación primaria (véase el Capítulo 4).

Para cada entrevistado, el guión del interrogatorio se basó en los reactivos que revistieron alguna dificultad para ellos, o en respuestas que mostraron aspectos de interés sobre el tema de estocásticos, o en su desempeño en su práctica en el aula de primaria. Se prepararon preguntas específicas para cada estudiante (por ejemplo, véanse la sección 5.3, la sección 6.2 y la sección 6.5), hojas de control en las que anotaron lo que requerían para sus contestaciones o bien lo que se requería que efectuaran, además de material físico con el que pudieran interactuar (por ejemplo, urnas; véase el reactivo 10 del cuestionario 2, Apéndice 2) para argumentar sus respuestas.

Con una duración de entre 30 min a una hora, las entrevistas se efectuaron individualmente en un recinto cerrado de la normal en donde, además de la investigadora y el entrevistado, en ocasiones estuvo presente un auxiliar que videograbó la sesión.

Alumnos de primaria. Se les seleccionó de acuerdo a su participación en las sesiones de aula que llevó a cabo el futuro docente, específicamente de medidas de tendencia central y del principio multiplicativo (véase el Capítulo 4). Se seleccionó un alumno por grupo y se le aplicó una entrevista semiestructurada. El guión del interrogatorio se basó en la selección de situaciones de estocásticos análogas a las que trataron en las clases. El objetivo de las entrevistas fue clarificar o profundizar en las respuestas de los alumnos dadas a las actividades de los contenidos referidos anteriormente que trataron los normalistas durante la sesión de aula.

Las entrevistas fueron videograbadas y transcritas para su análisis; así también, se consideraron las hojas de control en las que los alumnos realizaron sus anotaciones para dar respuesta a cada una de la situación planteada, además de material físico con el que pudieron interactuar (por ejemplo, en segundo grado se usaron: sobres rayados y blancos, textos con tinta azul y negra para la situación A; tarjetas con dígitos en la situación B. En cuarto grado, en la situación A se usaron hojas de colores y sobres blancos y rayados, letras azules y negras; en la situación B tarjetas con dígitos, regla (instrumento de medición) en la situación C. En quinto grado, se usó regla (instrumento de medición), Apéndices 4, 5 y 6) para argumentar sus respuestas.

Cada entrevista duró entre 30 a 60 minutos, las entrevistas se efectuaron individualmente en un recinto cerrado de la escuela primaria correspondiente estando presentes el entrevistado, la investigadora y en ocasiones, un auxiliar que videograbó la sesión o con la presencia de un padre de familia o titular del grupo.

Capítulo 4

Investigación Documental Propuestas Institucionales

En este apartado se presentan los resultados obtenidos de la revisión y análisis de los planes y programas de la Licenciatura en Educación Básica (SEP, 2012c, y SEP, 2017b) y de la Educación Primaria (SEP, 2011e; y SEP, 2017a), así como de los libros de texto diseñados bajo las reformas 2009, 2011 y 2017 (sólo de primero y segundo) de primaria.

4.1. Antecedentes en formación en estocásticos de los practicantes participantes

La formación de los estudiantes en el bachillerato general considera la enseñanza de cuatro semestres de matemáticas (I, II, III y IV) que tienen su correspondencia con las siguientes asignaturas descritas en la Figura 4.1.

La formación estocástica de los docentes en formación (E^2_5, E^2_7, E^1_8, E^2_9, E^2_{13}, E^2_{16}, E^2_{24}, E^1_{28}, E^1_{32}, E^1_{34}, E^1_{39}, E^1_{45}, sujetos de esta investigación) es diferente de acuerdo al tipo de bachillerato (general o tecnológico), la modalidad (escolarizado o no escolarizado) los grupos disciplinarios (Ciencias Sociales, Químico-biológico, Físico-Matemático, Económico-Administrativo y Humanidades), el año y estado donde cursaron sus estudios (véase la Tabla 6.1). Tuvieron un semestre de probabilidad y estadística.

Campo disciplinar de las Matemáticas BG	Campo disciplinar de las Matemáticas BT
Componente de formación propedéutica básica	
Matemáticas I 5 horas	Álgebra 4 horas
Matemáticas II 5 horas	Geometría y trigonometría 4 horas
Matemáticas III 5 horas	Geometría analítica 4 horas
Matemáticas IV 5 horas	Cálculo diferencial 4 horas
Componente de formación propedéutica extendida	
Cálculo integral 3 horas	Cálculo integral 5 horas
Probabilidad y estadística I Probabilidad y estadística II 6 horas	Probabilidad y estadística 5 horas

Figura 4.1. Asignaturas de bachillerato general y tecnológico. Tomado del Nuevo Currículo de la Educación Media Superior (SEP, 2017b, p. 159).

Por ejemplo, citamos los contenidos de los programas de la asignatura de probabilidad y estadística de acuerdo a la enseñanza realizada por la SEP, la UNAM y el IPN en el que se evidencia que los estudiantes trataron los contenidos de medidas de tendencia central y de técnicas de conteo en sus estudios de bachillerato (véase la Tabla 4.1 y la Tabla 4.2).

Tabla 4.1. Contenidos tratados en el programa de Probabilidad y Estadística (2008) del IPN.

Institución	Contenido	Bloque / unidad	Probabilidad y estadística
IPN (2008a)	Medidas de tendencia central	I. Estadística descriptiva.	**Aprendizaje**: Medidas de tendencia central: media (aritmética, geométrica y armónica), la mediana y la moda para datos agrupados y no agrupados. * Medidas de posición: cuartiles, deciles y percentiles de un conjunto de datos e infiere su utilidad.
	Técnicas de conteo	II. Probabilidad.	**Aprendizaje: *** Diferentes técnicas de conteo para obtener el número total de resultados de un experimento. * Diferencias entre las técnicas de conteo (regla de la multiplicación, permutaciones, combinaciones, diagrama de árbol, …) para determinar el número de resultados posibles.

Tabla 4.2. Contenidos tratados en los programas de Probabilidad y Estadística (2008) de la SEP y la UNAM.

Institución	Contenido	Bloque / unidad	Probabilidad y estadística I	Probabilidad y estadística II
SEP	Medidas de tendencia central	III. Aplicas la estadística descriptiva.	Medidas de centralización. * Medidas de variabilidad. * Comportamiento de una población a partir de las medidas de centralización y variabilidad de una muestra.	
		III. Aplicas la estadística descriptiva.		* Medidas de centralización. * Medidas de variabilidad. * Comportamiento de una población a partir de las medidas de centralización y variabilidad de una muestra.
	Técnicas de conteo	I. Aplicas las técnicas de conteo.		* Analizan resultados posibles de un evento de probabilidad. * Principios fundamentales del conteo (aditivo y multiplicativo). * Semejanzas y diferencias de las permutaciones y combinaciones.
UNAM	Medidas de tendencia central	I. Estadística descriptiva.	4. Medidas de tendencia central: Media aritmética, mediana y moda. 5. Medidas de dispersión y posición: desviación estándar, varianza, coeficiente de variación y cuartiles.	
		I. Distribuciones de probabilidad.		2. Distribuciones de probabilidad de variable aleatoria discreta. Distribución acumulada Parámetros: valor esperado y desviación estándar.
	Técnicas de conteo	III. Probabilidad.	Fenómenos aleatorios y deterministas. Enfoques de la probabilidad (subjetivo, frecuencial y clásico). Probabilidad de eventos simples.	
		II. Distribuciones muestrales.		Población y muestra (muestro con y sin reemplazo; y muestra aleatoria simple).

No todos los futuros docentes trataron los distintos promedios en su enseñanza de bachillerato que por lo general se centran en la enseñanza de la tríada: media aritmética, mediana y moda (Bakker, 2003).

4.2. Programa de la Licenciatura en Educación Primaria

Diversas reformas han sufrido los planes y programas de la Educación Normal para primarias; lo que ha llevado a que la formación docente presente algunas debilidades y fortalezas en distintas áreas; en nuestro caso, hablaremos de las de matemáticas. Sólo mencionaremos lo encontrado en cuatro reformas que ha sufrido la Licenciatura en Educación Primaria desde que se estableció la Licenciatura, es decir, las reformas ocurridas en los años de 1984, 1997, 2012c y la de 2017.

En 1984, las escuelas normales fueron constituidas como instituciones de educación superior. En ese año se estableció el nivel de licenciatura. El plan de 1984 fue el pionero en implementar materias completamente distintas a las que se llevaban anteriormente; se integró en dos áreas: una de tronco común (para todas las licenciaturas); y una correspondiente a cada nivel educativo. La primera estaba dividida en tres líneas de formación: social, pedagógica y psicológica; contaba con 36 espacios curriculares. La segunda, estuvo conformada por 27 espacios curriculares. En total, el Plan de Estudios contaba con 63 espacios curriculares divididos en dos áreas que se cursaban a lo largo de ocho semestres. En el primer semestre estaba la materia de Matemáticas, y en el segundo semestre, la de Estadística.

En el plan de 1997, para el tercer semestre, *Matemáticas y su enseñanza II* consideraba 4 bloques a los que se les destinaban 108 horas aproximadamente: a) Medición (28 h); b) Números racionales (34 h); c) Procesos de cambio (22 h); y d) *Tratamiento de la información, predicción y azar,* al cual se le destinaban 24 horas, pero por ser el último bloque con frecuencia su enseñanza se omitía, al igual que ocurría en general (Aksu, 1990, citado en Gattuso, 2006); dado que se le destina más tiempo al aspecto aritmético.

Los propósitos del cuarto bloque, *Tratamiento de la información, predicción y azar*, eran

> 1. Identifiquen en diversos medios (periódicos, revistas especializadas) la utilización de razones para el tratamiento de la información como son los porcentajes, las tasas, los índices de uso frecuente. 2. Conozcan las aplicaciones y limitaciones de las medidas de tendencia central. 3. Analicen las oportunidades de ganar en situaciones de probabilidad (volados, lanzamiento de dados, ruletas, rifas, extracciones de una urna, etcétera). 4. Describan los posibles desarrollos de juegos y experimentos aleatorios mediante el uso de diagramas de árbol y otras representaciones intuitivas (SEP, 2002, p. 23).

Sus temas eran

> Formas usuales de tratamiento de la información. Uso de porcentajes y otros tipos de razones en el tratamiento de la información. El promedio (*media aritmética*), la moda y la mediana. Los contenidos del eje *Tratamiento de la información* a lo largo de la escuela primaria. Observación, registro y tratamiento estadístico de los resultados de juegos o experimentos de azar; primeros ejemplos sencillos de simulación. La noción frecuencial de la probabilidad y sus aplicaciones a la solución de problemas diversos. La noción de muestra. La proyección a toda una población de los resultados observados en una muestra. La fórmula clásica de la probabilidad y sus aplicaciones. Diagramas y representaciones intuitivas para la enumeración de casos posibles en el análisis de juegos y experimentos de azar. Aplicaciones de la regla del producto de probabilidades. Tratamiento estadístico de los resultados obtenidos en problemas de probabilidad por simulación. Los datos bivariados y su presentación por medio de una tabla de contingencia; uso de los datos y de la tabla para estimar diversas probabilidades. Los contenidos del eje *Predicción y azar* en la escuela primaria. Sesión de práctica. (SEP, 2002, p. 24).

El plan y programas de la *Licenciatura de Educación Primaria* (SEP, 2012c) prescribe la asignatura *Procesamiento de Información Estadística* para ser impartida en el cuarto semestre. Su propósito es

> promover que el futuro docente comprenda y aplique los conceptos y procedimientos básicos de probabilidad y estadística descriptiva e inferencial que le permitan recolectar, organizar, presentar y analizar datos para abordar la resolución de problemas en el contexto educativo; así mismo, se pretende que los futuros docentes apliquen estos conceptos y procedimientos en la realización de proyectos de investigación y en la elaboración de su documento recepcional, y desarrollen competencias didácticas que les permitan diseñar y aplicar estrategias eficientes para que los alumnos de educación primaria se apropien de las nociones, conceptos, y procedimientos relacionados con el eje temático de manejo de la información (SEP, 2012d, p. 6).

Como puede observarse, se tiene como último objetivo que el normalista diseñe y aplique estrategias eficientes en sus prácticas de enseñanza con los alumnos de la escuela primaria; sin embargo, no se le da la importancia debida al Conocimiento de Contenido y Enseñanza que requieren los futuros docentes en formación. El Conocimiento de Contenido y Estudiantes es nulo en las cuatro unidades.

Las cuatro unidades de aprendizaje (véase la Tabla 3.1) de la asignatura *Procesamiento de Información Estadística* son: 1, *Estadística*; 2, *Probabilidad y muestreo*; 3, *Inferencia Estadística*; y 4, *Vinculación con el eje de manejo de la información*. Las tres unidades que atañen a la educación en estocásticos en la escuela primaria son: la primera, con las tablas de distribución de frecuencias y representaciones gráficas, y las medidas de tendencia central; la segunda, con técnicas de conteo y muestra; y la cuarta, la vinculación de los temas tratados en las unidades 1 y 2 con el estudio del eje de manejo de la información. La unidad 1 no especifica el estudio de la historia de los valores promedios el cual Bakker (2003) recomienda para el diseño de la enseñanza de la estadística, como una forma visual de estimar la media usando sus diversas representaciones como una herramienta informática sencilla para reinventar el rango medio, la media, la moda y la mediana.

El tema 2 (de la Unidad 2) de este programa incluye el principio fundamental del conteo para el cual se sugiere la elaboración de “diagramas de árbol derivados de problemas de conteo” (SEP, 2012d, p. 26). Heitele (1975) señala que el diagrama de árbol es una estrategia importante porque prefigura todos los posibles resultados, así como los pasos del experimento y que los espacios muestra discretos pueden ser identificados mediante un “diagrama de árbol”, recurso semiótico que contribuye a evitar que los niños se limiten a un determinismo.

En la Unidad 4, *Vinculación con la enseñanza de Estadística en la escuela primaria*, se espera que el normalista diseñe y aplique secuencias didácticas; desafortunadamente, no es tratada a profundidad; sin embargo, como ya señalamos, desde el inicio de este semestre, los docentes en formación realizan prácticas docentes en la escuela primaria con cualquier contenido que les asigne el maestro tutor del aula de primaria.

El *Modelo Educativo 2018* (SEP, 2017c) establece la modificación del *Plan y Programas 2012 de la Licenciatura en Educación Primaria* (SEP, 2012c). De acuerdo a las nuevas mallas curriculares dadas a conocer en Saltillo, Coahuila (noviembre de 2017), la asignatura de matemáticas de la Licenciatura en Educación Primaria se imparte en cinco semestres y no en cuatro, como está señalado en el Plan y Programas 2012. Los nombres de las materias (véase la Figura 4.2) son: Aritmética. Números naturales, Aritmética. Números decimales y fracciones, Álgebra, Geometría, y Probabilidad y estadística siendo esta última, delegada al quinto semestre, lo que impide que los normalistas tengan la formación necesaria sobre los contenidos de estocásticos necesarios para cuando asisten a las escuelas primarias a llevar a cabo sus prácticas docentes.

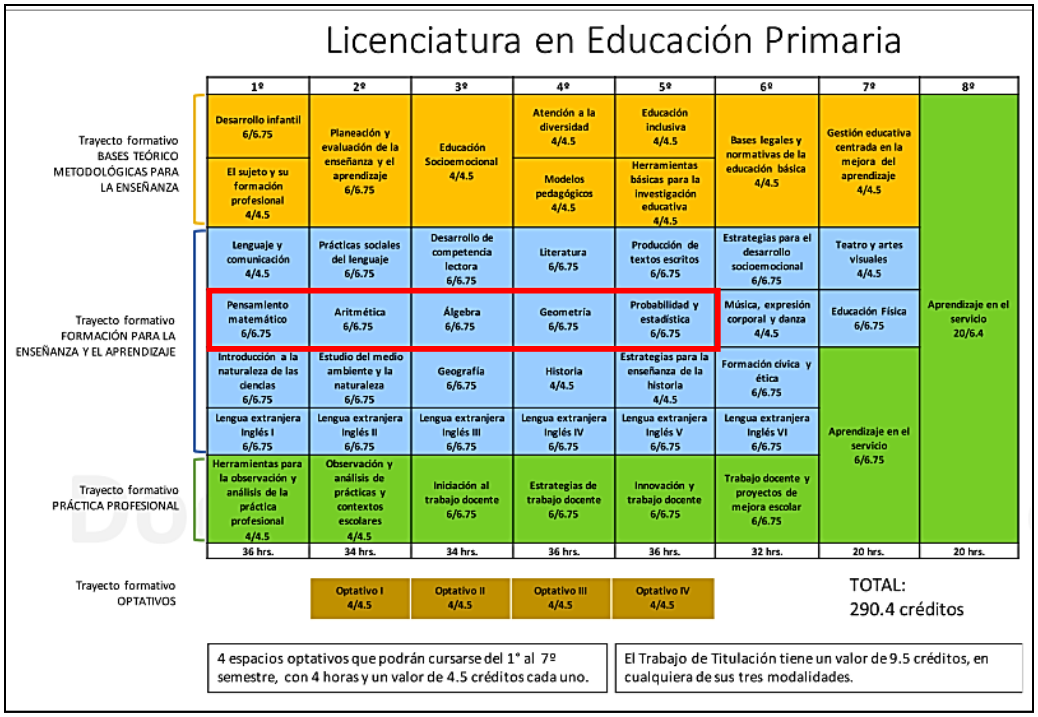


Figura 4.2. Malla curricular para la Licenciatura en Educación Primaria tomada de los Planes y programas de estudio de la educación normal (SEP, 2018e, p. 23).

Cabe señalar que en los meses de agosto-septiembre de 2019, las escuelas normales a nivel nacional eligieron el plan y programas con la que cada una seguiría la formación de los normalistas de la generación 2018 - 2024. La Benemérita Escuela Nacional de Maestros a la que perteneció la población de estudio de la presente investigación se decidió por regresar al Plan 2012; motivo por el cual ya no se tuvo la oportunidad de aplicar el programa de *Probabilidad y Estadística* (SEP, 2018) que se publicó en el año 2020 (agosto-septiembre). El programa enfatiza el trabajo en academia

con el fin de que los docentes responsables de diversos cursos organicen actividades de aprendizaje y planeaciones, para que los estudiantes normalistas los apliquen en las jornadas de prácticas. Por ello, se recomienda que los y las maestras responsables de este curso se reúnan con el responsable de *Innovación y* *trabajo docente*, para definir la vinculación con las escuelas primarias y los grados donde los jóvenes harán su intervención pedagógica, didáctica y disciplinar (SEP, 2018, p. 14)

El programa tiene similitud con el de 2012, pero las unidades se redujeron a tres: la Unidad I, *Imágenes que dicen mucho* se centrada en la estadística descriptiva y considera la enseñanza de cuatro temas: 1, La organización de datos por medio de métodos tabulares y gráficos. 2, Las medidas de tendencial central, enfatizando la triada: media, mediana y moda señalada por Bakker (2003). 3, Las medidas de dispersión o variabilidad (rango, varianza y desviación estándar). Y 4, El coeficiente de correlación entre dos variables. En esta unidad pasa inadvertida la clarificación de la palabra *promedio* señalada por Triola (2009) y la enseñanza de las medias: armónica, geométrica y ponderada.

La unidad II, *Quién participa más: La muestra sí importa* está integrada por tres temas: 1, Poblaciones y muestras; 2, Muestreo no probabilístico; y 3, Muestreo probabilístico.

La unidad III, *Prediciendo el futuro: la probabilidad y su aplicación en la educación* se revisan seis temas: 1, Eventos y sus probabilidades; 2, Diagramas de árbol; 3, Combinaciones y permutaciones; 4, Distribuciones de probabilidad discreta (binomial y de Poisson); 5, Distribuciones de probabilidad continua (normal) y 6, Prueba de hipótesis (Li). Esta última unidad precisa que el estudio de la probabilidad debe "comprender y predecir diversos eventos y fenómenos de la vida social, económica, científica y, desde luego, en la educación" (SEP, 2018, p. 33).

4.2.1. Caracterización de la asignatura Procesamiento de Información Estadística

En comparación con el Plan y Programas de 1997 para las escuelas normales, la reforma de 2012 dio importancia al tema de estocásticos. La curricula de la *Licenciatura en Educación Básica* (primaria; SEP, 2012c) actualmente destina el cuarto semestre completo al estudio de la asignatura *Procesamiento de Información Estadística*. Las Tablas 4.3, 4.4, 4.5 y 4.6 caracterizan las cuatro unidades de la asignatura al aplicarles la célula de análisis (Ojeda, 2006). El programa de la asignatura:

… contempla la construcción y lectura de tablas y gráficas, así como el cálculo de medidas e índices para caracterizar y realizar estudios de poblaciones (…) se pretende que los futuros docentes desarrollen competencias didácticas que les permitan diseñar y aplicar estrategias eficientes para que los alumnos de educación primaria se apropien de las nociones, conceptos y procedimientos relacionados con el eje temático de manejo de la información (SEP, 2012c; p. 6).

Tabla 4.3. Caracterización de la Unidad 1, Estadística, de la asignatura *Procesamiento de Información Estadística.*

Ideas fundamentales de estocásticos: Equidistribución y simetría; Variable estocástica, Muestra.			
Contenido	**Otros conceptos matemáticos**	**Recursos semióticos**	**Términos empleados**
1, Estudio de la estadística	Cantidad, función, relación.	Lengua natural escrita.	Estadística descriptiva, inferencial, población, experimento, parámetro, atributo, medir, variabilidad.
2, Tablas de distribución de frecuencias y representaciones gráficas	Operaciones aritméticas, porcentajes, producto cartesiano.	Lengua natural escrita, tablas, gráficas (histograma, tallo y hojas), signos numéricos.	Frecuencia, distribución, datos apareados, categorías.
3, Medidas de tendencia central	Operaciones aritméticas, orden ascendente y descendente de números naturales, producto cartesiano.	Lengua natural escrita, tablas, gráficas, signos numéricos, notación simbólica.	Moda, media, mediana, rango medio.
4, Medidas de posición	Operaciones aritméticas, números naturales, producto cartesiano.	Lengua natural escrita, tablas, gráficas, signos numéricos, notación simbólica.	Cuartiles, deciles, percentiles.
5, Medidas de dispersión	Operaciones aritméticas, raíz cuadrada, producto cartesiano.	Lengua natural escrita, tablas, gráficas, signos numéricos.	Distribución normal, media, rango, desviación media y estándar, varianza, covarianza, coeficiente de variación.
6, Datos bivariados	Operaciones aritméticas, producto cartesiano.	Lengua natural escrita, tablas, gráfico de puntos, diagrama de dispersión, signos numéricos.	Variables, promedio, variables de datos, dispersión.

La unidad 1 no incluye los dos dominios del Conocimiento Matemático para Enseñar (Dimensión didáctica (Scheiner, 2015)), a saber, el Conocimiento de Contenido y Estudiantes y el Conocimiento de Contenido y Enseñanza, pues lo relativo a ellos se propone hasta la cuarta unidad de la asignatura que, por limitaciones de tiempo al final del semestre, frecuentemente se le omite.

Tabla 4.4. Caracterización de la Unidad 2, Probabilidad y muestreo, de la asignatura *Procesamiento de Información Estadística*.

Ideas fundamentales de estocásticos: Medida de probabilidad, Espacio muestra, Regla de la adición, Regla del producto e independencia, Equidistribución y simetría, Combinatoria, Modelo de urna y simulación, Variable aleatoria, Ley de los grandes números, Muestra.

Contenido	Otros conceptos matemáticos	Recursos semióticos	Términos empleados
1, Principio fundamental de conteo (permutaciones, combinaciones y ordenaciones)	Operaciones aritméticas, producto de números naturales.	Lengua natural escrita, diagramas de árbol, hoja electrónica (Excel).	Principio fundamental del conteo, permutaciones, combinaciones, ordenaciones, problemas de conteo.
2, Concepto de Probabilidad clásica	Operaciones aritméticas, producto de número naturales.	Lengua natural escrita, cuadro comparativo, hoja electrónica (Excel).	Probabilidad clásica y frecuencial, eventos, situaciones inciertas, problemas de probabilidad.
3, Bases teóricas del muestreo	Operaciones aritméticas, producto de números naturales.	Lengua natural escrita, mapa conceptual.	Muestreo, universo, población, muestra, unidad muestral, error muestral, técnicas de muestreo, inferencia estadística, intervalo de confianza.
4, Técnicas de muestreo	Operaciones aritméticas, producto de números naturales.	Lengua natural escrita, cuadro comparativo, fichas bibliográficas, hemerográficas o electrónicas, notación simbólica.	Técnicas de muestreo aleatorias y no aleatorias, muestra.

Si bien, la unidad 2 favorece el tratamiento de las diez ideas fundamentales (Heitele, 1975), su tratamiento se centra en la dimensión Cognitiva (Scheiner, 2015); es decir, en el dominio del Conocimiento de Contenido Especializado descuidando así las otras dimensiones propuestas por Scheiner (2015) y los otros dos dominios propuestos por Hill, *et al.* (2008).

Tabla 4.5. Caracterización de la Unidad 3, Inferencia Estadística, de la asignatura *Procesamiento de Información Estadística*.

Ideas fundamentales de estocásticos:	Medida de probabilidad, Espacio muestra, Regla de la adición, Regla del producto e independencia, Equidistribución y simetría, Combinatoria, Modelo de urna y simulación, Variable aleatoria, Ley de los grandes números, Muestra.		
Contenido	**Otros conceptos matemáticos**	**Recursos semióticos**	**Términos empleados**
1, Teoría de la medición	Escalas de medición.	Lengua natural escrita, cuadro sinóptico.	Teoría de la medición.
2, Tipos de variables	Operaciones aritméticas, números naturales y decimales.	Lengua natural escrita, cuadro comparativo.	Variable.
3, Distribución normal (puntuaciones Z)	Operaciones aritméticas, números naturales, porcentajes.	Lengua natural escrita, mapa conceptual, tablas de probabilidad.	Distribución normal, puntajes Z, distribución normal estándar, población, probabilidad.
4, Bases teóricas de las pruebas de hipótesis	Operaciones aritméticas, inferencia.	Lengua natural escrita, mapa conceptual, cuadro comparativo.	Tipos de hipótesis, tipos de errores (alfa y beta)
5, Distribución t de Student	Operaciones aritméticas, inferencias.	Lengua natural escrita, hoja electrónica (Excel).	Prueba t de student.
6, Distribución Ji Cuadrada	Operaciones aritméticas, inferencias.	Lengua natural escrita, hoja electrónica (Excel).	Distribución Ji Cuadrada, regla de decisión.

La unidad 3 hace énfasis en el uso de Excel, recurso que debería aprovecharse para llevar a cabo el tratamiento de la idea fundamental de *Modelo de urna y simulación* en los fenómenos aleatorios.

Tabla 4.6. Caracterización de la Unidad 4, Vinculación con el eje Manejo de la Información, de la asignatura *Procesamiento de Información Estadística*.

Ideas fundamentales de estocásticos: Espacio muestra, Equidistribución y simetría; Variable estocástica, Muestra.			
Contenido	**Otros conceptos matemáticos**	**Recursos semióticos**	**Términos empleados**
1, Análisis de conceptos del eje *Manejo de la Información* y la estadística en la Educación Primaria	Proporcionalidad, funciones.	Lengua natural escrita, cuadro sinóptico, organizador gráfico, libros de texto de primaria de 3° a 6°.	Representación de datos, estadística, probabilidad.
2, Estrategias didácticas para la enseñanza del eje *Manejo de la Información.*	Operaciones aritméticas, números naturales.	Lengua natural escrita, mapa conceptual, libros de texto de primaria de 3° a 6°.	

La Tabla 4.6 muestra la carencia que se tiene en la formación del futuro docente en la dimensión didáctica (Scheiner, 2015), es decir, el Conocimiento de Contenido y Enseñanza (Hill, *et al.* (2008)), dado que el estudio se centra a identificar los conceptos de estocásticos que se tratan en la educación primaria, en revisar y resolver las lecciones de los libros de texto. Queda ausente el domino del Conocimiento de Contenido y Estudiantes.

La revisión de los libros de texto se limita a identificar las competencias y los contenidos de 3° a 6° grado y vincular dichos contenidos con los vistos en las unidades de la asignatura *Procesamiento de Información Estadística*. Lo anterior, descuida lo sugerido por Scheiner (2015) en la dimensión didáctica en la que identifica los aportes de Shulman acerca de que el futuro docente debe conocer "las maneras más útiles de representar y formular el tema que lo hagan comprensible a los demás" (Shulman (1986), citado en Scheiner (2015, p. 132).

4.2.2. Referencias bibliográficas sugeridas en la propuesta de la Licenciatura 2012

En las referencias bibliográficas propuestas para la enseñanza de la asignatura *Procesamiento de Información Estadística* identificamos qué promedios sugiere cada autor para la enseñanza de esa asignatura (véase la Tabla 4.7).

De las ocho referencias sugeridas para el estudio de medidas de tendencia central en la unidad 1 *Estadística* sólo dos hacen énfasis en el estudio de otros tipos de promedio como: la media ponderada, la media armónica, la media geométrica y el rango medio; y no sólo centran la enseñanza en las medidas de tendencia central. En la bibliografía general para las cuatro unidades de la asignatura se proponen otras dos referencias que también incluyen el estudio de otros promedios además de las medidas de tendencia central más comunes:

a) Spiegel, M. (1990). Teoría y problemas de estadística. México: McGraw-Hill. 1. Media aritmética (p. 51); 2. Mediana (p. 56); 3. Moda (p. 58) y 4. **Otras medidas de centralización**: Media geométrica (p. 59), Media armónica (p. 61) y Media cuadrática o raíz cuadrada del cuadrado de la media (p. 62).

b) Triola, M. (2009). Estadística. México: Pearson Educación. 1. Media (promedio) (p. 60); 2. Mediana (p. 61); 3. Moda (p. 63); 4. Mitad del rango (p. 63); 5. Media ponderada (p. 66); **Más allá de lo básico** (sólo se presentan definiciones): 6. Media recortada (p. 71), 7. Media de medias (p. 72), 8. Media ponderada (p. 72), 9. Media armónica (p. 72), 10. Media geométrica (72) y 11. Media cuadrática (p. 72).

Lo anterior nos lleva a confirmar lo señalado por Bakker (2003) que “la mayoría de los libros de texto introducen la media, la mediana y la moda como una trinidad” (párr. 65); es decir, sólo se enfocan en el *Conocimiento de Contenido Especializado*. Únicamente el libro de Nortes (1991) presenta actividades para la enseñanza a alumnos de primaria, por lo cual se le seleccionó para su estudio con los futuros profesores.

Tabla 4.7. Promedios sugeridos por cada autor para la enseñanza de la asignatura *Procesamiento de Información Estadística.*

Referencia bibliográfica	**Promedios**	**Enseñanza para primaria**
1. Elorza, H. (2008). *Estadística para ciencias sociales y del Comportamiento*. México: CENGAGE Learning. Pp. 39-82	1. Mediana; 2. Moda (p. 39); 3. Media aritmética (pp. 40-42) **Otros promedios**: 4. Media ponderada; 5. Media armónica; 6. Media geométrica (pp. 70-71)	
2. Johnson, R. (1976) Estadística Elemental. Ed. Trillas. México. Pp. 32-81	1. Media y 2. Mediana (pp. 36-37); 3. Moda (pp. 37-38); 4. **Rango medio** (p. 38)	
3. Kerlinger, F. y Lee, B.H. (2002). *Investigación del comportamiento. Métodos de la investigación en ciencias sociales*. México: McGraw Hill. Pp. 181-189	1. Media (promedio más usado), 2. Mediana (medida más medial); 3. Moda (medida más frecuente) (p. 181)	
4. Levin, J. y Levin, W. (2011). *Fundamentos de estadística en la Investigación social*. México: Alfaomega Grupo Editor. Pp. 39 -72	1. Media aritmética 2. Mediana 3. Modo	
5. Mendenhall, W., Beaver R., Beaver, B. (2002). *Introducción a la probabilidad y estadística*. México: Thomson. (Pp. 47-92).	En edición 2010: 1. Media aritmética o promedio (p. 54), 2. Mediana (p. 55), 3. Moda (p. 57)	
6. Nortes, A. (1991). *Encuestas y precios*. España: Síntesis. Pp.73-101	1. Media (p. 74), 2. Mediana (p. 79), 3. Moda (p. 85)	Aplicación en primaria.
7. Ross, S. (2008). *Introducción a la Estadística*. España: Reverté. Pp. 69-113	1. Media muestral (p. 71), 2. Mediana muestral (p. 80) y 3. Moda muestral (p. 96)	
8. Visauta, B. (2007). *Análisis estadístico con SPSS 14. Estadística básica*. México: McGraw-Hill. Pp. 44-46	Media, mediana y moda, por medio del programa SPSS (pp. 32- 41)	

Para la unidad 2, *Probabilidad y Muestreo* también se proponen cuatro bibliografías más a las ya descritas: 1. Batanero, Díaz y Navarro (1994) se encontró la versión 1996; 2. Díaz, Batanero y Cañizares (1996) se localizó la versión 1991; Ritchey (2008) y Vilenkin (1972). Las dos primeras; además, de tratar la dimensión cognitiva (el Conocimiento de Contenido Especializado) tratan la dimensión didáctica (el Conocimiento de Contenido y Enseñanza, y el Conocimiento de Contenido y Estudiantes). La referencia de Batanero, *et al*. (1996, pp. 105-195) y la referencia de Díaz, *et al*. (1991, pp. 23-52 y 65-142) que se proponen revisar con los normalistas precisan las dificultades que los futuros docentes pueden detectar en sus alumnos al tratar problemas de técnicas de conteo y se presentan unidades didácticas para llevar a cabo, pero con alumnos de secundaria (de 12 a 16 años) en cuanto a la primera referencia. En la segunda referencia se realiza la misma revisión y propuesta de investigadores, pero con alumnos de educación primaria y secundaria. La referencia de Díaz, *et al*. (1991) señala el estudio del desarrollo psicológico de la intuición probabilística en el niño en donde se hace referencia a las investigaciones realizadas por Fischbein (1975) y de Piaget e Inhelder (1951) con niños de 7 a 12 años de edad.

Las referencias de Ritchey (2008) y de Vilenkin (1972) sólo tratan la dimensión cognitiva (el Conocimiento de Contenido Especializado).

Para la unidad 3, *Inferencia estadística* además de las ocho referencias analizadas en la unidad 1, se propone también la de Levin y Levin (2011) pero sólo se centra en la dimensión cognitiva, es decir, en la enseñanza del Conocimiento de Contenido Especializado.

La unida 4, *Vinculación con el eje Manejo de la Información* considera la revisión de la propuesta institucional para educación primaria que se describe en los apartados 4.2. Programa de Educación Primaria y 4.3. Libros de texto de primaria, pero únicamente lo específico a la reforma educativa de 2011.

4.2.2.1. Análisis del libro de Nortes (1991): Capítulo 4. Los cálculos

La Tabla 4.8 caracteriza el capítulo cuatro de esa obra, de acuerdo a la célula de análisis (Ojeda, 2006). El capítulo está dividido en siete secciones y en la última propone actividades que se pueden plantear a los alumnos de primaria al enseñarles las medidas de tendencia central.

Cabe destacar que en este capítulo no se tratan más tipos de promedio que la trinidad, como lo señaló Bakker (2003). Propone comenzar por la definición de la media y luego presenta distintos referentes para calcularla; la media y la mediana se obtienen para datos agrupados y no agrupados. Por último, se trata la moda.

La última sección “Aplicación en el Aula” (pp. 73-97) propone la enseñanza de los contenidos de Estadística tratados con temas de la vida cotidiana, con énfasis en "obtener los cálculos necesarios para lograr medidas representativas de un colectivo" (ibíd., pp. 93-97). Plantea un problema de calificaciones de un grupo de alumnos y propone diez informaciones que se pueden conocer a partir de él:

1. Nota más alta
2. Nota media por debajo o por encima de la media
3. Determinar la moda
4. Determinar la mediana
5. Conocer el recorrido
6. Desviación típica
7. Realizar gráficos
8. Agrupar los datos en intervalos
9. Expresar los resultados en porcentajes
10. Dar una respuesta fácil de leer y representativa de las calificaciones de los alumnos a través de los gráficos y los estadísticos

La solución propone el uso de recursos semióticos: lengua natural escrita, signos numéricos, expresiones matemáticas, gráficas y tablas. Sugiere otro problema para la enseñanza con evaluación, así como los recursos semióticos para que los alumnos lo solucionen. Recomienda que los niños sean organizados en equipos para ir a la biblioteca a obtener datos (número de páginas de distintos libros) para calcular medidas representativas de estos últimos.

Tabla 4.8. Caracterización del Capítulo *Los cálculos* de Nortes (1991) de acuerdo a la célula de análisis de Ojeda (2006).

Ideas fundamentales: Variable estocástica, Equidistribución y simetría; y Muestra.				
Sección del capítulo 4	**Referente**	**Otros conceptos matemáticos**	**Recursos semióticos**	**Términos empleados**
4.1, *La cuantificación estadística*	Diferentes cantidades de pesetas que le dan para gastar a dos personas. ¿Qué pasa si las juntan y las dividen equitativamente?	Producto cartesiano, operaciones aritméticas, números naturales.	Lengua natural escrita, tablas, signos numéricos.	Datos, valores representativos, medidas, población, muestra, estadísticos, media, dispersión, desviación, asimetría.
4.2, *Media aritmética*	1. Cuatro amigos trabajan en una casa ¿cuánto dinero les dan mensualmente? 2. Evaluaciones de una asignatura. 3. Tablas de frecuencias absolutas.	Operaciones aritméticas, números naturales y decimales.	Lengua natural escrita, tablas, notación simbólica.	Datos, media aritmética, calificación media, frecuencias absolutas, intervalo, marca de clase.
4.3, *Mediana*	1. Pagos mensuales. 2. Edades de 25 alumnos. 3. Pesos de los compañeros d clase.	Unidad de peso, orden en los números, medida de tiempo, producto cartesiano.	Lengua natural escrita, notación simbólica, tablas, gráficas.	Mediana, amplitud de intervalo, distribución de datos, frecuencia absoluta acumulada.
4.4, *Moda*	1. Cuatro candidaturas para elegir alcalde. 2. Edades de 25 alumnos	Operaciones aritméticas, porcentaje.	Lengua natural escrita, signos numéricos.	Moda, distribución cualitativa, más veces se repite, intervalo modal, mediana.
4.5, *Varianza y desviación típica*	1. Evaluaciones de dos alumnos. 2. Edades de 25 alumnos. 3. Pesos de los compañeros de clase.	Operaciones aritméticas, números naturales y decimales, raíz cuadrada.	Lengua natural escrita, notación simbólica.	Recorrido, variable, media aritmética, desviaciones, varianza, distribución, desviación típica, coeficiente de variación, intervalo.
4.6, *Asimetría*	1. Edades de 25 alumnos.	Producto cartesiano, porcentaje, operaciones aritméticas.	Lengua natural escrita, gráfica, notación simbólica.	Simétrica, distribución normal, media aritmética, moda, mediana, asimétrica.
4.7, *Aplicación en el aula*	1. Primera evaluación de matemáticas de 50 alumnos.	Número natural y decimal, operaciones aritméticas.	Lengua natural escrita, tablas, notación simbólica.	Media, moda, mediana, recorrido, desviación típica, intervalos, frecuencia.

Concluimos que el libro de texto de Nortes, si bien confirma lo señalado por Bakker (2003) de que los estudiantes aprenden primero a calcular las medidas de tendencia central y luego deben descubrir en qué situaciones pueden aplicarlas, también favorece el conocimiento analógico dado que propone diversos referentes para los que los estudiantes deben aplicar los conocimientos de cálculo descritos. Esta obra les provee elementos para que desarrollen la dimensión didáctica propuesta por Scheiner (2015), es decir, su *Conocimiento de Contenido y Enseñanza* y el *Conocimiento de Contenido y Estudiantes* necesarios para su práctica como normalista; es decir, el futuro docente debe establecer una "interconexión entre el conocimiento de la materia, el conocimiento de la comprensión del alumno y el conocimiento de las estrategias de enseñanza" (Scheiner, 2015, p. 132).

4.3 Programa de Educación Primaria

El programa de primaria propone contenidos de Probabilidad y de Estadística en el eje *Manejo de la información* (SEP, 2011e). En primero y segundo grado, no se incluye dicho eje. En los otros grados no se proponen lecciones específicas sobre el diagrama de árbol, por lo cual se desaprovecha como una estrategia de solución a los problemas planteados (Heitele, 1975) y que pueden ser útiles para la enseñanza de las tres lecciones de principio multiplicativo.

En el Programa de la Licenciatura en Educación Primaria (2012c) y el Programa de Primaria (2011e), los contenidos coincidentes son: la enseñanza de las medidas de tendencia central; sin embargo, solo se profundiza en los enfoques de la media como moda que identificaron Mokros y Rusell (1995). En ambas propuestas no se puntualiza la enseñanza o acercamiento a las diferentes representaciones de la media (como punto medio, como algo razonable y como punto de equilibrio matemático) para el diseño educativo (Bakker, 2003); así mismo, Mokros y Rusell (1995) hallaron que la representatividad de la media es difícil desarrollarla a los estudiantes, dado que deben comprender la media y cómo funciona.

Los subtemas a lo largo de los grados de tercero a sexto se resumen en las Tablas 4.9 y 4.10.

Tabla 4.9. Proporcionalidad y funciones en Educación Primaria (SEP, 2011e).

Bloque	**Grado**	
	5°	**6°**
I	Análisis de procedimientos para resolver problemas de proporcionalidad del tipo valor faltante (dobles, triples, valor unitario).	Cálculo del tanto por ciento de cantidades mediante diversos procedimientos (aplicación de la correspondencia "por cada 100, n", aplicación de una fracción común o decimal, uso de 10% como base).
II	Identificación y aplicación del factor constante de proporcionalidad (con números naturales) en casos sencillos.	Resolución, mediante diferentes procedimientos, de problemas que impliquen la noción de porcentaje, aplicación de porcentajes, determinación, en casos sencillos, del porcentaje que representa una cantidad (10%, 20%, 50%, 75%); aplicación de porcentajes mayores que 100.
III	Análisis de procedimientos para resolver problemas de proporcionalidad de tipo valor faltante (suma término a término, cálculo de un valor intermedio, aplicación del factor constante).	Comparación de razones en casos simples.
IV		Comparación de razones "por cada n, m", mediante diversos procedimientos y expresión del valor de la razón mediante un número de veces, una fracción o un porcentaje.
V	Relación del tanto por ciento con la expresión "n de cada 100". Relación de 50%, 25%, 20%, 10% con las fracciones $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$	Resolución de problemas de comparación de razones, con base en la equivalencia.

Tabla 4.10. Análisis y representación de datos en Educación Primaria (SEP, 2011e).

Bloque	**Grado**			
	3°	**4°**	**5°**	**6°**
I	Representación e interpretación en tablas de doble entrada, pictogramas de datos cuantitativos o cualitativos recolectados en el entorno.	Lectura de información explícita o implícita en distintos portadores dirigidos a un público en particular.		Lectura de datos contenidos en tablas y gráficas circulares, para responder diversos cuestionamientos.
II	Lectura de información contenida en gráfica de barras.			Lectura de datos explícitos e implícitos en diversos portadores para responder preguntas.
III	Resolución de problemas con extracción de información explícita de diversos portadores.	Resolución de problemas con extracción de información de tablas o gráficas.		Uso de la media (promedio), la mediana y la moda en la resolución de problemas.
IV			Análisis de las convenciones para la construcción de gráficas de barras.	
V		Identificación y análisis de la utilidad del dato más frecuente de un conjunto de datos (moda).	Cálculo de la media (promedio). Análisis de su pertinencia respecto a la moda como dato representativo en diversas situaciones.	

4.4. Libros de texto de Primaria 2009, 2011e y 2018

En los libros de texto 2009, no se encontró total coincidencia de los contenidos acerca del análisis y representación de datos y de proporcionalidad y funciones, que vayan completamente acordes con el Programa 2011 de Educación Primaria. Esto se debe a que los libros de texto están diseñados de acuerdo al programa 2009. Los contenidos referentes a valor faltante, que se veían en cuarto grado, se pasaron para quinto grado en el programa 2011. Las actividades sobre combinatoria y los juegos aleatorios no se consideran en ningún grado en el programa 2011, mientras que los libros de texto (2009) sí los siguen incluyendo para el ciclo escolar 2013-2014; por ejemplo:

En primer grado, la lección 42, *Encuentra todas las combinaciones* (SEP, 2012a, pp. 140-142), aunque sólo se limita a una manera de organizar los resultados.

En segundo grado, las lecciones 32, *Multiplicando las compras*, y 34, *Multiplico mentalmente* (SEP, 2012b, pp. 125-129 y 136-137, respectivamente) proponen tablas para identificar, dibujar y colorear todas las distintas maneras de vestirse (dadas algunas prendas particulares), pero se desaprovecha la oportunidad de poner en juego la estrategia del diagrama de árbol que Heitele (1975) recomienda, como ya señalamos anteriormente.

En tercer grado, las lecciones 51, *Registrar al ganador* y 52, *Lanza un dado* (SEP, 2011a, pp. 172-174 y 175-177, respectivamente) son consideradas por el plan y programas como las únicas con las que se pueden tratar nociones probabilísticas por referirse a juegos de azar, a pesar de que son cuatro las lecciones que pertenecen al eje *Manejo de la información*, de las cuales la 25, *Tablas de datos* y la 42, La Tabla Pitagórica (SEP, 2011a, pp. 77-79 y 141-142, respectivamente) se enfocan más a aspectos estadísticos; en especial, al análisis y representación de la información.

En cuarto grado, las lecciones consideradas para desarrollar nociones probabilísticas son: la 32, *Anticipa quién ganará*, y la 41, *Lo más probable es que* (SEP, 2011b, pp. 114-116 y 144-147, respectivamente). Pasa desapercibida la importancia de la combinatoria que señala Heitele (1975) como idea fundamental de estocásticos. En cuarto grado está la lección 51, *Las combinaciones* (SEP, 2011b, p. 180) que es lo más cercano a la idea de combinatoria (enseñanza del principio multiplicativo).

En quinto grado, la mayoría de las lecciones proponen la complementación de tablas rectangulares en las actividades, pero es la única estrategia que potencian para resolver situaciones de combinatoria; dejan de lado la estrategia del diagrama de árbol como otra posibilidad para resolver las situaciones planteadas. Tres lecciones pertenecen al eje de *Manejo de la información* y dos al de *Sentido numérico y pensamiento algebraico*. Las lecciones de este último eje se dedican a operar los números y no se rescatan las posibilidades de desarrollar las ideas fundamentales que enuncia Heitele (1975).

En sexto grado no todas las lecciones explotan las posibilidades para tratar las ideas fundamentales de Heitele (1975); desafortunadamente, en varias ocasiones a los niños sólo se les pide completar tablas y se coarta la posibilidad de que ellos propongan sus formas de identificar el objeto de interés.

En el programa de primaria (2011e) y en los libros de texto para el ciclo escolar 2014-2015 (SEP, 2013 y 20014), en los dos primeros grados, no se proponen temas de Probabilidad y Estadística. Sin embargo, los libros presentan algunas lecciones que pueden considerarse como antecedentes de los temas que se marcan en la asignatura de *Procesamiento de Información Estadística* de la licenciatura en Educación Primaria. Por ejemplo, se incluyen tres lecciones (la 46, *Trajes*, del bloque V de segundo grado; la 16, *Figuras y colores*, de tercer grado; y la 13, *Combinaciones*, de cuarto grado) que desarrollan el principio multiplicativo y se les podría aprovechar para introducir las técnicas de conteo específicas (permutaciones y combinaciones).

Las lecciones del libro de texto de primaria (2013-2014) privilegian un objetivo aritmético al ponderar únicamente el principio multiplicativo, frecuentemente mediante el llenado de tablas, y se desaprovecha la oportunidad para usar el diagrama de árbol y prefigurar la regla de la adición y del producto de probabilidades (Fischbein, 1975), además de contribuir a evitar que los niños se limiten a un enfoque determinista (Heitele, 1975). Las Tablas 4.11, 4.12, 4.13 y 4.14 caracterizan para estocásticos los libros de texto (2013-2014) según la célula de análisis (Ojeda, 2006).

Tabla 4.11. Caracterización de las lecciones de los libros de texto destinas a la representación e interpretación de información en tablas y gráficas (3[er] grado).

Ideas fundamentales de estocásticos: Muestra

Grado	**Bloque**	**Lección del libro de texto**	**Contenido**	**Otros conceptos matemáticos**	**Recursos semióticos**	**Términos empleados**
3°	I	15, *La ballena azul*	Representación e interpretación de datos cualitativos y cuantitativos recolectados del entorno en pictogramas y tablas de doble entrada.	Números naturales, unidades de medida de longitud (m), de peso (Kg) y de tiempo (años).	Lengua natural escrita, signos numéricos, tabla.	Más grandes, peso en promedio, animal más y menos pesado, animal que vive más o menos años.
		16, *Figuras y colores*		Características de figuras geométricas (círculo, rectángulo, triángulo y romboide).	Lengua natural escrita, tabla y figuras geométricas.	Figuras con distintos colores y formas.
		17, *La papelería*		Números naturales, operaciones aritméticas.	Lengua natural escrita, figuras de objetos escolares, tabla.	Costo menor, papelería que conviene comprar.
	II	26, *Cuatro estaciones*	Lectura de información contenida en gráfica de barras.	Números naturales, operaciones aritméticas.	Lengua natural escrita, tabla.	Estación del año que gusta más o menos, datos, encuesta.
		27, *La temperatura*		Unidad de medida de temperatura (°C), de tiempo (semana).	Lengua natural, gráfica de barras, tabla.	Temperatura más baja y más alta.
		28, *Las mascotas de la escuela*		Números ordinales, operaciones aritméticas, cantidad.	Lengua natural escrita, gráfica de barras.	Encuesta, más o menos mascotas.
		29, *Y tú, ¿a qué juegas?*		Números naturales, operaciones aritméticas, plano cartesiano.	Lengua natural escrita, signos numéricos, tabla, gráfica de barras.	Encuesta, juego que más les gusta, dato.

Tabla 4.12. Caracterización de las lecciones de los libros de texto destinas a la representación e interpretación de información en tablas y gráficas (4º y 5º grado).

Ideas fundamentales de estocásticos: Muestra

Grado	Bloque	Lección del libro de texto	Contenido	Otros conceptos matemáticos	Recursos semióticos	Términos empleados
4°	III	63, *Habitantes de México*	Extraer información de una tabla o gráfica para resolver problemas.	Números naturales de siete cifras, plano y producto cartesiano, operaciones aritméticas, décadas.	Lengua natural escrita, tablas, gráfica de barras.	Censo, mayor o menor número de habitantes, entidad más y menos poblada, esperanza de vida, en promedio.
		64, *Cuida tu alimentación*		Números naturales y ordinales, unidad de peso (kg), plano y producto cartesiano.	Lengua natural escrita, tabla, gráfica de barras.	Más sobrepeso.
5°	IV	75, *La venta de camisas*	Análisis de las convenciones para la construcción de gráficas de barras.	Plano y producto cartesiano, números naturales de tres cifras.	Lengua natural escrita, signos numéricos, gráficas de barras.	Diferentes tipos de camisas, camisa más y menos vendida.
		76, *¿Qué tanto leemos?*			Lengua natural escrita, tabla, gráfica de barras.	Encuesta, datos.
		77, *Información gráfica*		Números naturales de dos cifras, plano y producto cartesiano, escala.	Lengua natural escrita, tablas, signos numéricos, gráfica de barras.	Encuesta.

En tercer grado, a pesar de que se describe que se analizan datos cualitativos y cuantitativos recolectados del entorno, el alumno no es quien recolecta esos datos, por lo que se hace necesario que los alumnos pongan en práctica lo propuesto por Garfield y Ben-Zvi (2008) acerca de que sean los alumnos quienes planteen las preguntas para que comprendan de dónde surgen y cómo se tratan. En tercer y cuarto grado, las lecciones 46. *Cajas de té* y 47, *Las matemáticas en los envases*; y 23, *Piso laminado de madera* y 24, *Sólo para conocedores*; respectivamente, están consideradas en el eje *Tratamiento y análisis de la información*, sin embargo, se especifica que dicho tratamiento en distintos (anuncios, envases, carteles, etc.) portadores, y no en gráficas ni tablas, motivo por el cual se excluyó su caracterización dado que no presentan términos referidos a estocásticos.

En quinto grado, en la lección 76, *¿Qué tanto leemos?* si bien, el alumno debe identificar la gráfica que corresponde a la información y colocar títulos a los ejes de la gráfica; los títulos ya se le proporcionan. Únicamente en las lecciones 26, *Cuatro estaciones* y 29, *Y tú, ¿a qué juegas?* de tercer grado y la lección 77, *Información gráfica* de quinto grado se propone que sean los alumnos quienes construyan la gráfica, sin embargo, en quinto grado ya se le proporciona la información en las tablas; sólo en tercer grado, el alumno recaba la información de sus demás compañeros en la lección 26; mientras que en la 29 ya se les da el plano cartesiano para que coloquen la información.

En los libros de texto hay sólo dos lecciones para tratar los contenidos de medidas de tendencia central; sin embargo, los alumnos no recolectan la información sólo realizan los cálculos para obtener esas medidas.

Únicamente la media aritmética es considerada como promedio; sin embargo, la moda y la mediana también son promedios cuyo

> "propósito es representar un grupo de valores individuales de una manera simple… el promedio común está relacionado con la misma idea de medio o centro (todos los promedios son conocidos por los estadísticos como "medidas de tendencia central" porque nos dicen el punto alrededor del cual se acumulan los diversos valores diferentes" (Moroney, 1979, pp. 170 – 171)).

Tabla 4.13. Caracterización de las lecciones de medidas centrales de los libros de texto de primaria.

Ideas fundamentales de estocásticos: Espacio muestra y Variable estocástica.

Grado	Bloque	Lección del libro de texto	Contenido	Otros conceptos matemáticos	Recursos semióticos	Términos empleados
4°	V	105, *¡Pasteles, pasteles!*	Moda.	Números naturales, operaciones aritméticas.	Lengua natural escrita, tablas.	Se vendieron más o menos rebanadas, qué sabores conviene hornear.
		106, *Cuando la moda se acomoda*	Moda.	Números naturales, operaciones aritméticas.	Lengua natural escrita, tabla (boleta de calificaciones), tabla de venta de tallas de suéteres.	Moda, mejor rendimiento.
5°	V	97, *Vamos por una beca*	Media (promedio).	Unidad peso (gramo), peso real, operaciones aritméticas.	Tablas.	Promedio, mejor estimación, promedio mínimo, posibilidades.
		98, *¿A todos les va igual?*	Media (promedio).	Operaciones aritméticas.	Tabla.	Muestra, moda, media representativa.
6°	III	52, *La edad más representativa*	Aplicaciones de media (promedio), mediana y moda en resolución de problemas.	Números de dos cifras menores de 90, unidad de medida (año), operaciones aritméticas, orden numérico.	Lengua escrita, figuras, signos numéricos.	Media aritmética, promedio, datos, mediana.
		53, *Número de hijos por familia*	Aplicaciones de media (promedio), mediana y moda en resolución de problemas.	Números de dos cifras menores a 30, operaciones aritméticas.	Tablas de datos, lengua escrita, signos numéricos, figuras.	Conjunto de datos, valores, muestra, encuesta, estudio socioeconómico, medidas representativas.
		54, *México en números*	Medida de tendencia central más representativa.	Porcentaje, números naturales de dos cifras, operaciones aritméticas, producto y plano cartesiano.	Tablas, histograma.	Información representativa, conjunto de datos, censos, estadísticas, conjunto de datos, mediana, representativa, moda, media aritmética.

Otro término importante por definir, que no lo incluyen los libros de texto de primaria, pero sí se trata en tres lecciones 98, *¿A todos les va igual?* (5º grado); 53, *Número de hijos por familia* y 54, *México en números* (6º grado); es el de *representatividad*; Mokros y Russell (1995) definen su idea de "representatividad cuando se materializa la visión de la media como un balance general y matemático preciso y se define al medio como el que representa el conjunto de datos" (p. 32).

La Tabla 4.14 presenta la caracterización de acuerdo con la célula de análisis (Ojeda, 2006) de las lecciones 46, 16 y 13 de segundo, tercero y cuarto grado respectivamente, las cuales podrían apoyar la implementación de la combinatoria en la escuela primaria.

Tabla 4.14. Caracterización de las lecciones de principio multiplicativo de los libros de texto de primaria.

Ideas fundamentales de estocásticos: Combinatoria.						
Grado	**Bloque**	**Lección del libro de texto**	**Contenido**	**Otros conceptos matemáticos**	**Recursos Semióticos**	**Términos empleados**
2°	V	46, *Trajes*	Principio multiplicativo	Antecesor y sucesor, números naturales menores de 100.	Lengua natural escrita, figuras de: prendas de vestir, lámparas y focos; símbolos numéricos.	Maneras diferentes, combinaciones, números diferentes de dos cifras.
3°	I	16, *Figuras y colores*	Principio multiplicativo y figuras geométricas	Características de figuras geométricas (círculo, rectángulo, triángulo y romboide).	Tabla y figuras geométricas.	Figuras con distintos colores y formas.
4°	I	13, *Combinaciones*	Multiplicación, modelo, figuras geométricas	Operaciones aritméticas.	Lengua natural escrita, figuras de casas, fachadas y techos de diferentes colores.	Casas, postres y parejas de baile diferentes.

En los libros de texto, las técnicas de conteo (idea fundamental de combinatoria) se reducen al aspecto aritmético del principio multiplicativo, lo que indica un enfoque determinista (Heitele, 1975).

El término combinaciones queda relegado a las combinaciones de ropa u otros objetos (segundo grado) y no se le da la importancia debida para desarrollar en los alumnos el pensamiento probabilístico; además, el título de la lección 13, *Combinaciones* no es adecuado dado que los tres problemas propuestos en la lección son colocaciones y no combinaciones.

4.5. Libros para el maestro propuesta 2011

Los libros para el maestro propuestos en la reforma de 2011 están organizados en secciones:

1) Intención didáctica. Son los recursos, las ideas, los procedimientos y los saberes que los alumnos poseen y pondrán en juego para resolver el desafío que se les plantea.

2) Consigna. Es el problema o actividad que se propone a los alumnos y la manera de organizarlos. También aparece en el libro de texto del alumno.

3) Consideraciones previas. Se dan definiciones de los conceptos que se tratan en cada lección y posibles procedimientos. Se señalan algunas dificultades y errores que pueden observar los docentes en los alumnos al tratar el tema de cada lección.

4) Observaciones posteriores. Son reflexiones sobre la enseñanza que llevó a cabo el docente.

La sección de consideraciones previas podría fortalecer las dimensiones epistemológica, cognitiva y didáctica que propone Scheiner (2015) para que el docente domine un Conocimiento matemático (de estocásticos) para la enseñanza. Así también, las consideraciones previas aportan elementos al Conocimiento de Contenido y de Enseñanza y al Conocimiento de Contenido y de Estudiantes (Hill, *et al*., 2008) que deben poseer los futuros docentes sobre los alumnos del grupo con el que realicen sus prácticas docentes.

En las tablas 4.15, 4.16, 4.17 y 4.18 se presentan los errores, dificultades o conceptos que se presentan en las consideraciones previas en cada una de las lecciones de los libros de texto.

Tabla 4.15. Consideraciones previas de las lecciones de los libros de texto destinas a la representación e interpretación de información en tablas y gráficas (3er grado).

Grado	Bloque	Lección del libro de texto	Consideraciones previas
3°	I	15, *La ballena azul*	Incomprensión de términos: longitud o en promedio. Interpretar la manera de cómo leer la información contenida en una tabla de doble entrada.
		17, *La papelería*	Diferentes formas de representar la información: textos, gráficas, tablas, expresiones numéricas, etc. Identificar la correspondencia entre renglón y columna.
	II	26, *Cuatro estaciones*	Aclara términos: gráficamente. Usan cualquier gráfico. Identificar que una gráfica debe tener un título, usar una escala en los ejes y colocar títulos a cada eje (frecuencia o categoría).
		27, *La temperatura*	Interpretar datos cuantitativos y cómo representarlos. Identificación de la escala (punto medio entre dos marcas). Analizar el trazo de gráficas de barras (títulos de la gráfica, de los ejes, características de las barras).
		28, *Las mascotas de la escuela*	Inferir el punto medio entre dos marcas (escala). Dificultad al hacer cálculos y responder las preguntas. Estrategia: intercambiar preguntas.
		29, *Y tú, ¿a qué juegas?*	Errores: identificar que las barras no son correctas para representar determinado dato con su frecuencia. Trazar una gráfica que represente correctamente la información dada (establecer escala).

Tabla 4.16. Consideraciones previas de las lecciones de los libros de texto destinadas a la representación e interpretación de información en tablas y gráficas (4° y 5° grado).

Grado	Bloque	Lección del libro de texto	Consideraciones previas
4°	III	63, *Los habitantes de México*	Considerar otros conocimientos: ordenar y comparar números. Realizar operaciones aritméticas. Correlacionar el tema tratado con otras asignaturas.
		64, *Cuida tu alimentación*	Relacionar información de tablas y gráficas de barras. Interpretar información de tablas y gráficas.
5°	IV	75, *La venta de camisas*	Identificar convenciones en las gráficas: título (qué distribución se grafica), variable (en cada eje), frecuencia absoluta (altura de las barras). Usar trazos auxiliares para identificar la altura de las barras que no se percibe a simple vista.
		76, *¿Qué tanto leemos?*	Realizar trazos con precisión. Dificultad. Identificar la escala para relacionar el número de personas con la altura de la barra. Validar sus respuestas mediante la argumentación.
		77, *Información gráfica*	Error. No colocan los títulos correspondientes a cada uno de los ejes y a la gráfica.

Tabla 4.17. Consideraciones previas de las lecciones de medidas centrales de los libros de texto de primaria.

Grado	**Bloque**	**Lección del libro de texto**	**Consideraciones previas**
4°	V	105, *¡Pasteles, pasteles!*	Dificultades al realizar el conteo de los datos. Se sugiere organizar los datos (hacer una tabla).
		106, *Cuando la moda se acomoda*	Identificar en qué casos la moda es o no la medida más representativa de un conjunto de datos.
5°	V	97, *Vamos por una beca**	Dificultad. Definición del término promedio. Identificar en qué casos el promedio (media) es representativo de un conjunto de datos.
		98, *¿A todos les va igual?*	Identificar en qué casos la media aritmética o la moda son la medida representativa de un conjunto de datos.
6°	III	52, *La edad más representativa*	Identifica si la media o la mediana es la medida representativa de un conjunto de datos. La media es sensible a valores extremos.
		53, *Número de hijos por familia*	Diferentes procedimientos para determinar la mediana: elegir el dato mayor o menor de entre los dos que están en medio de los datos ordenados; dados dos números enteros identificar el valor que está en medio; y sumar dos números naturales enteros y dividirlos entre dos. Identificar si el valor de la media o la mediana es o no uno de los datos del conjunto. En qué condiciones la moda es representante de un conjunto de datos.
		54, *México en números*	Que los alumnos argumenten qué medida de tendencia central es la representativa en cada conjunto de datos que se le presentan: distribución de población en México, población que habla una lengua indígena y población infantil que trabaja. Identificar la importancia de los datos estadísticos para la toma de decisiones.

*En la lección 97 del libro para el maestro de quinto grado se señala que "es importante aclarar que la media aritmética también se conoce como promedio o simplemente media" (SEP, 2014k, p. 309) lo que podría presentar dificultades para los alumnos, pues la media aritmética no es el único promedio que pueden tratar los alumnos en un referente, más bien, es necesario reconocer "los términos del problema" (Moroney, 1979, p. 173) planteado para identificar el tipo de promedio que se debe determinar.

Tabla 4.18. Consideraciones previas de las lecciones de principio multiplicativo de los libros de texto de primaria.

Grado	Bloque	Lección del libro de texto	Consideraciones previas
2°	V	46, *Trajes*	Unir con líneas, dibujar, recortar los elementos de los conjuntos para identificar las combinaciones. Hacer una tabla de doble entrada. Relacionar el problema con la multiplicación.
3°	I	16, *Figuras y colores*	Completar tablas de doble entrada. Identificar las características (color y forma) de la primera fila y la primera columna.
4°	I	13, *Combinaciones*	Establecer una doble relación de proporcionalidad. Combinar los elementos de un conjunto con los elementos de otro conjunto. Error: pueden sobrar o faltar combinaciones; pueden repetirse algunas combinaciones. Diferentes procedimientos de solución: dibujar todas las combinaciones, suma reiterada, multiplicación, representaciones (diagramas).

En las lecciones de combinatoria se desaprovecha el uso del diagrama de árbol como recurso semiótico que favorecería identificar todos los resultados posibles de un fenómeno (Heitele, 1975). No se hace mención de las dificultades que podrían enfrentar los alumnos al tratar los problemas de colocación y la estructura bidimensional o tridimensional de los referentes planteados; lo anterior, debido a que los contenidos están centrados únicamente en el aspecto aritmético.

4.6. Estocásticos en el Modelo Educativo 2018

La propuesta para estocásticos para la Licenciatura en Educación Primaria y para la Educación Básica de 2018 considera la enseñanza por aprendizajes claves; concibe a éste como el "conjunto de contenidos, prácticas, habilidades y valores fundamentales que contribuyen sustancialmente al crecimiento de la dimensión intelectual del estudiante" (SEP, 2016, p.65).

En la propuesta de primaria se tuvo un recorte de contenidos que obedeció a cuatro criterios: "a) Naturaleza de los contenidos; b) Información vs aprendizaje; c) Balance entre cantidad de temas y calidad de los aprendizajes; y d) Familiaridad del maestro con los temas de enseñanza" (SEP, 2016, pp. 54-58).

Un aspecto que se busca con el nuevo modelo es la transformación de la práctica pedagógica centrada en "generar aprendices activos, creativos, interesados por aprender y por lograr los aprendizajes de calidad que demanda la sociedad actual" (SEP, 2016, p. 228). Se espera que, en las aulas, los docentes propicien "un aprendizaje activo, situado, autorregulado, dirigido a metas, colaborativo y que facilite los procesos sociales de conocimiento y de construcción de significados" (*ibíd.*; p. 228). Se busca alinear la formación continua de los maestros en servicio y la formación inicial (de los docentes en formación).

De acuerdo a la edición de los *Aprendizajes Clave para la Educación Integral. Plan y Programas de Estudio para la Educación Básica 2018,* se cambió el eje *Manejo de la Información* por el eje *Análisis de datos* que a su vez se subdivide en *Estadística* y *Probabilidad*, y organiza los contenidos como los presenta la Tabla 4.19.

Tabla 4.19. Contenidos del eje Análisis de datos según el Modelo Educativo 2018.

Eje Análisis de datos		
Grados	Aprendizajes esperados	
	Estadística	Probabilidad
1°	Recolecta datos y hace registros personales.	---------------------------------
2°	Recolecta, registra y lee datos en tablas.	---------------------------------
3°	Recolecta, registra y lee datos en tablas.	---------------------------------
	Lee pictogramas sencillos.	
4°	Recolecta, registra y lee datos en tablas.	---------------------------------
	Lee gráficas de barras.	
	Usa e interpreta la moda de un conjunto de datos.	
5°	Recolecta, registra y lee datos en tablas y gráficas de barras e interpreta la moda.	Identifica juegos en los que interviene o no el azar.
		Registra resultados de experimentos aleatorios en tablas de frecuencia (frecuencia relativa, frecuencia absoluta).
6°	Lee gráficas circulares.	Determina los resultados posibles de un experimento aleatorio.
	Usa e interpreta la moda, la media aritmética y el rango de un conjunto de datos.	

Por la información disponible en la actualidad, entre las modificaciones manifiestas respecto al *Plan y Programas* 2011e están las siguientes. La media ya no es llamada promedio, ahora es media aritmética. No aparece el tratamiento de la mediana. La combinatoria parece inadvertida. Si bien, se incluye el tratamiento del rango;

aparentemente se sigue relegando al alumno a la lectura y llenado de tablas y a la lectura de gráficas, y no a la producción de esos recursos. Por ejemplo, en el plan y programa de educación primaria de 1993 se especificaba la recolección de datos, en su mayoría, las lecciones se dedican a completar tablas y a leer información (véase la Figura 4.3).

En la propuesta institucional de 2011 para primaria sólo se destinan dos lecciones una de tercer grado, 29, *Y tú, ¿a qué juegas?* (SEP, 2014c, pp. 66-68) y dos de quinto grado, 76, *¿Qué tanto leemos?* (SEP 2014e, pp. 146-147; y lección 77, *Información gráfica* (SEP 2014e, pp. 148-150) para las tablas de frecuencias y gráficas de barras; sin embargo, se da los nombres que los alumnos deben colocar a los ejes de la gráfica (véase la Figura 4.4).

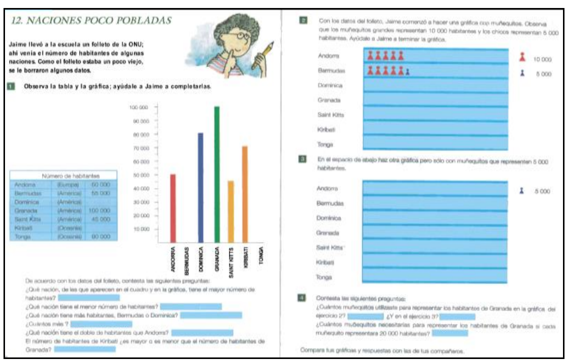


Figura 4.3. Libro de 4° grado. Propuesta institucional 1993.

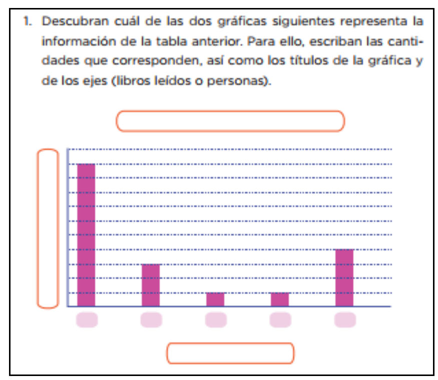


Figura 4.4. Libro de 5° grado. Propuesta institucional 2011.

Otra inconsistencia detectada entre los libros de texto y los planes y programas en las reformas 1993, 2009, 2011 y 2018 son las distintas formas de denotar a la media aritmética: media o promedio, y como media aritmética o promedio, como ejemplo citamos el plan y programa de la propuesta 2011 (véase la Figura 4.5).

Figura 4.5. Inconsistencias en la denominación de la media aritmética en planes y programas y libros de texto.

4.7. Libros de texto para los alumnos (Modelo Educativo 2018)

Los libros de texto que se dieron a conocer y se entregaron a las escuelas primarias en abril de 2018 sólo fueron los de primero y segundo grado con los que se lleva a cabo la implementación del nuevo modelo.

Las lecciones de los libros de texto están organizadas en tres bloques cuando en 2011 estaban organizadas en cinco. Cada bloque cuenta con seis partes:

a) Entrada. Considera el número de bloque, una imagen y una serie de preguntas sobre dicha imagen.

b) Lecciones. Organizadas por trayectos. Cada lección considera tres apartados: 1) actividades (problemas o juegos), 2) cierre y 3) un paso más (reto con mayor dificultad a la actividad).
c) Cálculo mental. Actividades sin lápiz ni papel.
d) Evaluación. Actividades para reconocer lo aprendido por el alumno.
e) Recortables. Materiales para llevar a cabo algunas de las actividades del bloque.
f) Historia. En el extremo inferior de las páginas hay un semicírculo con puntos u otras figuras (véase la Figura 4.6).

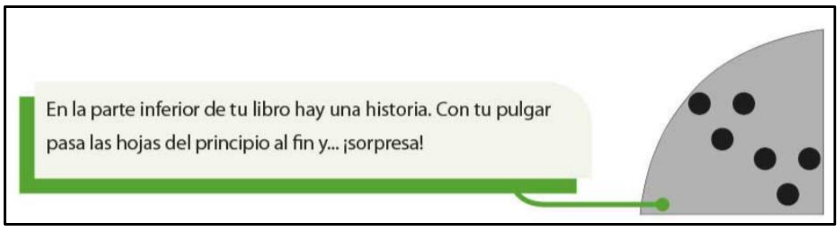


Figura 4.6. Parte inferior de los libros de texto con imágenes para crear una historia (Libro de primer grado, SEP, 2018c, p. 8).

El libro de primer año considera dos trayectos completos para la enseñanza de la estadística: el Trayecto 4, *Recolección y registro de datos* del bloque uno (SEP 2018a, pp. 40-45) comprende cuatro lecciones. En el bloque dos, el Trayecto 8, *Organización de datos* (SEP 2018a, pp. 122-127) considera cinco lecciones. Sin embargo, en el tercer bloque, en el Trayecto 9, *Cooperativa de Manteles* sólo se considera una lección. En las Tablas 4.20, 4.21 y 4.22 está la caracterización de las lecciones.

En la lección dos del bloque uno, no colocaron las figuras de los changos y de los rinocerontes en la tabla lo cual repercutirá en el conteo total de la muestra de los animales. En la lección 4, *Suma de puntos* sería favorable propiciar la idea fundamental de la ley de los grandes números y no quedarse en un tratamiento únicamente estadístico, ya que el juego permite tener “una mejor oportunidad de construir series con juegos [ya que] a la gente no le gusta aprender, pero le gusta jugar” (Heitele, 1975, p. 202).

Tabla 4.20. Caracterización de las lecciones del trayecto *Recolección y registro de datos* en 1er grado de primaria.

Ideas fundamentales de estocásticos: Muestra.

Grado	Bloque	Lección del libro de texto	Contenido	Otros conceptos matemáticos	Recursos Semióticos	Términos empleados
1°	I	1, *¿Cuál fruta prefieren?*	Encuesta.	Números naturales, marca.	Lengua natural escrita, figuras de frutas: naranja, plátano, guayaba y papaya y tabla.	Encuesta, diez compañeros, fruta preferida, mayoría, gusta menos.
		2, *¿Cuántos animales hay?*	Uso de tablas para registrar y comunicar datos que contaron.	Número natural, marca.	Lengua natural escrita, tabla y figuras de animales: elefantes, leones, cebras, rinocerontes, jirafas, osos, avestruces, cocodrilos, tortugas, changos.	Hay más, hay menos.
		3, *¿Y qué color les gusta?*	Organizar, registrar y analizar los datos registrados en una tabla.	Operaciones aritméticas, números naturales y orden.	Lengua natural escrita, figuras de manos de colores: amarillo, azul, rojo y verde y tabla.	Color que más y menos gusta, más a menos votos.
		4, *Suma de puntos*	Utilizar una tabla para registrar los resultados de un juego (SEP 2018a, p. 45).	Operaciones aritméticas y números naturales.	Lengua natural escrita, tabla, material concreto: dos dados.	Lanzar 10 veces, suma que salió más y menos veces, no aparece el número uno.

Tabla 4.21. Caracterización de las lecciones del trayecto *Organización de datos* en 1er grado de primaria.

Ideas fundamentales de estocásticos: Muestra.						
Grado	**Bloque**	**Lección del libro de texto**	**Contenido**	**Otros conceptos matemáticos**	**Recursos Semióticos**	**Términos empleados**
1°	II	1, *¿En qué mes cumples años?**	Relación entre los meses y el año (SEP 2018a, p. 122).	Unidades de tiempo: año y mes, operación aritmética y números naturales.	Lengua natural escrita, figura de círculo con las estaciones del año.	
		2, *Los cumpleaños*	Organizar datos en tablas (SEP 2018a, p. 123).	Unidad de tiempo: año y meses, número natural, tarja y operaciones aritméticas.	Lengua natural escrita y tabla.	Mismo mes, mayoría.
		3, *La colación*	Registrar información en una tabla para obtener conclusiones (SEP 2018a, pp. 124-125).	Operaciones aritméticas, números naturales, afirmación verdadera y falsa, y unidad de tiempo: semana.	Lengua natural escrita, figuras de fruta, sándwich, torta, tacos, pan, malteadas, refrescos y leche y tabla.	Alimento y bebida que consumen más/menos.
		4, *¿Quién saltó más lejos?*		Orden, comparación, medida y número natural.	Lengua natural escrita, tiras de colores, tabla.	¿Quién ganó?
		5, *Juguetes mexicanos*	Obtener conclusiones a partir de la información de una tabla (SEP 2018a, p.127).	Número natural y operaciones aritméticas.	Lengua natural escrita, tablas, figuras de juguetes mexicanos: balero, matatena, yoyo, pirinola, avioncito y canicas.	Encuesta, juguete mexicano favorito, mayoría, juguete menos elegido, datos, segundo juguete más elegido.

* La lección uno no debería ser considerada para el tratamiento de la estadística dado que las actividades propuestas se centran únicamente en aspectos aritméticos por lo que no se identifican términos empleados.

Tabla 4.22. Caracterización de las lecciones del trayecto *Cooperativa de manteles* en 1^er^ grado de primaria.

Ideas fundamentales de estocásticos: Muestra.						
Grado	**Bloque**	**Lección del libro de texto**	**Contenido**	**Otros conceptos matemáticos**	**Recursos Semióticos**	**Términos empleados**
1°	III	6, *El diseño favorito*	Recolecta y analiza datos. Responde preguntas. (SEP 2018a, p. 193).	Número natural y ordinal, cantidad.	Lengua natural escrita, tabla (propuesta por los alumnos).	Encuesta, votos, diseño preferido, mayoría, cinco diseños favoritos.

En este bloque sólo se destina una lección para el tratamiento de los datos y se considera que sea el niño el que proponga cómo trazar una tabla para registrar la cantidad de votos que obtuvo cada mantel.

En el libro de segundo grado se consideran los trayectos: 4, *Registro en tablas sencillas* (SEP 2018b, pp. 36-40) en el bloque uno y el trayecto 10, *Búsqueda de información* (SEP 2018b, pp. 143-147) en el bloque dos para la enseñanza de la estadística. En el trayecto 9, *Puesto de galletas* del bloque tres, al igual que en primer grado, sólo se destina una lección para el eje análisis de datos.

Las Tablas 4.23, 4.24 y 4.25 contienen la caracterización de las lecciones de cada uno de los trayectos.

Tabla 4.23. Caracterización de las lecciones del trayecto *Registro en tablas sencillas* en 2º grado de primaria.

Ideas fundamentales de estocásticos: Muestra.						
Grado	**Bloque**	**Lección del libro de texto**	**Contenido**	**Otros conceptos matemáticos**	**Recursos Semióticos**	**Términos empleados**
2°	I	1, *Pregunta a tus compañeros*	Encuesta	Números naturales y operaciones aritméticas.	Lengua natural escrita, figuras de: animales, niños y juguetes, tabla.	Tema preferido, mayoría, tema menos elegido, quedó en primer lugar.
		2, *Elabora preguntas*		Número natural.	Lengua natural escrita.	Posibilidad, respuestas diferentes y tres opciones posibles*.
		3, *La encuesta*		Número natural.	Lengua natural escrita, figuras de formato de encuesta y de un niño.	Encuesta.
		4, *Organiza los datos*		Operaciones aritméticas y números naturales.	Lengua natural escrita y tabla.	Encuesta, datos, la mayoría.
		5, *¿Cuál es la pregunta?*		Operaciones aritméticas, número natural.	Lengua natural escrita, tabla, tarjas y signos numéricos.	Datos, ¿cuál es el agua de sabor que prefiere la mayoría?

* Los términos empleados en la lección dos: Elabora preguntas si bien, permite que los alumnos propongan el planteamiento de preguntas con sus respuestas, se confunden los términos *posibilidad y opciones*, la instrucción correcta sería dar tres respuestas distintas. El término *dato* es dado por entendido ya que no se especifica cómo deben considerarlo los alumnos (véase la Figura 4.7).

2 Elabora preguntas

1. En equipos, decidan qué información quieren saber sobre el tema elegido y anótenla en su cuaderno.

2. Sobre ese tema, elaboren tres preguntas para que las respondan sus compañeros.

Condiciones:

- Deben pedir información sobre lo que quiere investigar el grupo.
- Deben dar la posibilidad de respuestas diferentes a: *sí, no* o *no sé.*

3. Escriban las preguntas en una cartulina.

4. En grupo, seleccionen tres preguntas que cumplan con las condiciones establecidas y escriban tres opciones posibles de respuesta.

En grupo, revisen que las preguntas planteadas por cada equipo respondan a las condiciones establecidas.

Un paso más Elabora otra pregunta teniendo en cuenta las condiciones establecidas.

Elaborar preguntas sobre un tema que cumplan con ciertas condiciones.

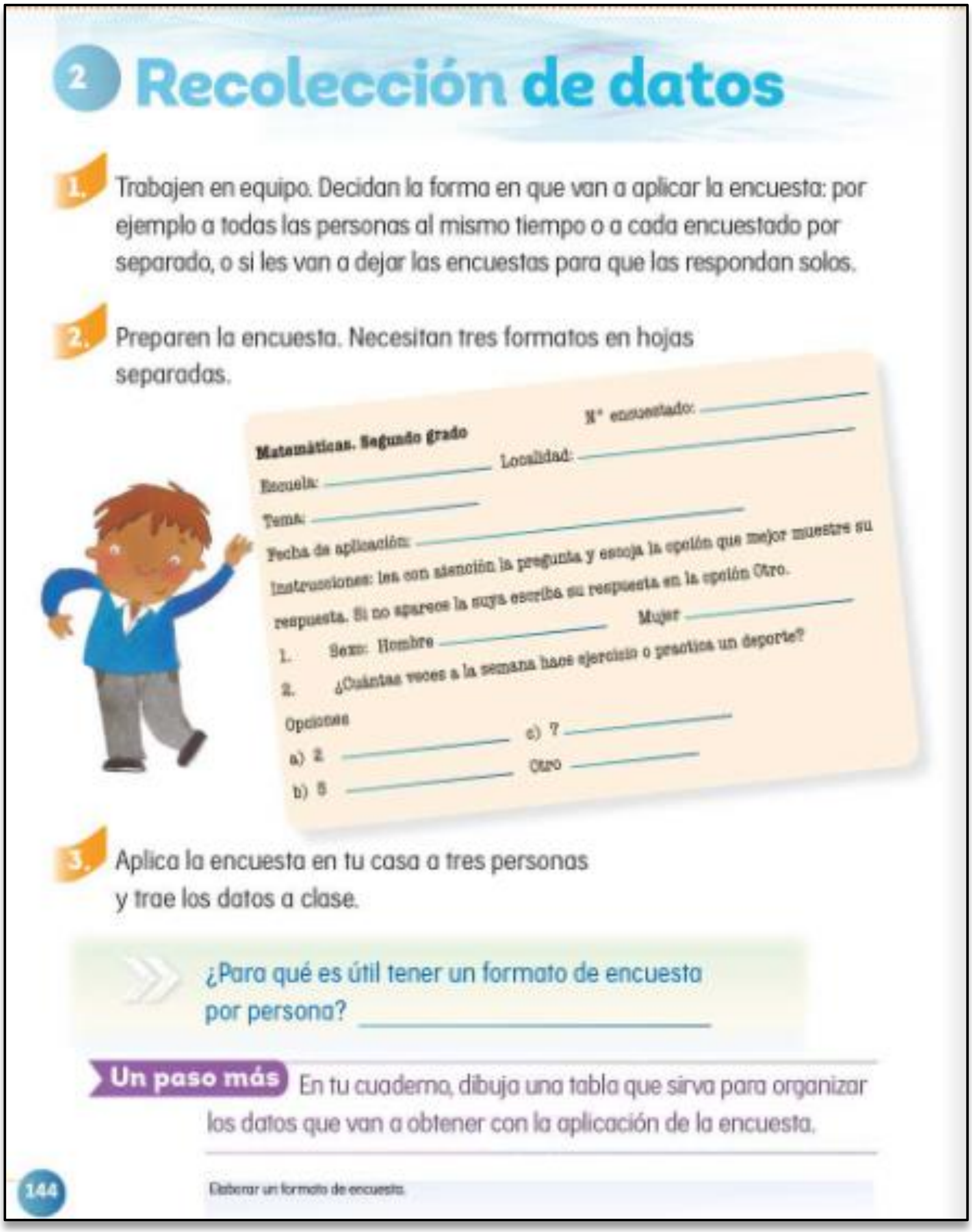
37

Figura 4.7. Lección 2. Elabora preguntas del libro de texto de segundo grado (SEP, 2018d).

Tabla 4.24. Caracterización de las lecciones del trayecto *Búsqueda de información* en 2º grado de primaria.

Ideas fundamentales de estocásticos: Muestra.						
Grado	**Bloque**	**Lección del libro de texto**	**Contenido**	**Otros conceptos matemáticos**	**Recursos Semióticos**	**Términos empleados**
2°	II	1, *¿A quién preguntarle?*	Plantear un proyecto estadístico, y decidir a quién y qué preguntas realizar (SEP 2018b, p. 143).	Unidades de tiempo: semana.	Lengua natural escrita.	Veces a la semana.
		2, *Recolección de datos*	Encuesta	Número natural.	Lengua natural escrita, formato de encuesta y tabla*.	Encuesta y datos.
		3, *¿Qué hacemos con los datos?*	Usar una tabla para organizar la información recolectada y para presentar resultados (SEP 2018b, p. 145).	Operaciones aritméticas y números naturales.	Lengua natural escrita y tablas.	Datos, encuesta, veces a la semana.
		4, *¿Qué nos dicen los datos?*	Interpretar y analizar la información estadística resultante de un estudio (SEP 2018b, p. 145).	Número natural y operaciones aritméticas.	Lengua natural escrita, cartel sobre los ejercicios que hacen los mexicanos y tablas.	Datos, encuesta a 100 personas, información estadística, estudio, mayoría de los encuestados, gusta, mayor parte de encuestados.

* En la lección dos *Recolección de datos* es la única oportunidad que se le da al alumno para que él trace su tabla y así organizar la información obtenida en la aplicación de las encuestas. Si bien, en el libro de texto la palabra usada fue “dibuja una tabla” se debe tener cuidado con la comunicación escrita que puede impedir o favorecer la comprensión de los conceptos matemáticos (Santos y Semana, 2014, véase la Figura 4.8).



2 Recolección de datos

1. Trabajen en equipo. Decidan la forma en que van a aplicar la encuesta: por ejemplo a todas las personas al mismo tiempo o a cada encuestado por separado, o si les van a dejar las encuestas para que las respondan solos.

2. Preparen la encuesta. Necesitan tres formatos en hojas separadas.

N° encuestado: _____

Matemáticas. Segundo grado

Escuela: _____ Localidad: _____

Tema: _____

Fecha de aplicación: _____

Instrucciones: lea con atención la pregunta y escoja la opción que mejor muestre su respuesta. Si no aparece la suya escriba su respuesta en la opción Otro.

1. Sexo: Hombre _____ Mujer _____
2. ¿Cuántas veces a la semana hace ejercicio o practica un deporte?

Opciones

a) 2 _____ c) 7 _____

b) 5 _____ Otro _____

3. Aplica la encuesta en tu casa a tres personas y trae los datos a clase.

¿Para qué es útil tener un formato de encuesta por persona? _____

Un paso más En tu cuaderno, dibuja una tabla que sirva para organizar los datos que van a obtener con la aplicación de la encuesta.

144 Elaborar un formato de encuesta.

Figura 4.8. Lección 2. Recolección de datos del libro de texto de segundo grado (SEP, 2018d).

Tabla 4.25. Caracterización de las lecciones del trayecto *Puesto de galletas* en 2º grado de primaria.

Ideas fundamentales de estocásticos: Muestra.						
Grado	**Bloque**	**Lección del libro de texto**	**Contenido**	**Otros conceptos matemáticos**	**Recursos Semióticos**	**Términos empleados**
2°	III	4, *Abren los puestos de galletas.*	Recolecta y analiza datos. Responde preguntas (SEP 2018b, p. 204).	Números naturales, cantidad, afirmación verdadera.	Lengua natural escrita, tablas (propuestas y elaboradas por los alumnos).	Encuestas, mejor galleta en diseño/en sabor, preferida, dato.

En el bloque III sólo en la lección 4, se favorece que sean los alumnos los que recaben los datos y propongan cómo organizarlos; sin embargo, el tema está establecido con anterioridad.

4.8. Libros de texto para el maestro (Modelo Educativo 2018)

Los libros para el maestro están conformados por apartados: primero, se presenta una tabla con los organizadores curriculares (eje temático, el tema, el aprendizaje esperado, el propósito y descripción del trayecto y el tiempo de realización); después, el título de la lección y su desarrollo con las siguientes preguntas: 1. ¿Qué busco? 2. ¿Cómo guío el proceso? (se dan pautas de como evaluar la lección) 3. ¿Qué errores comunes puedo encontrar? 4. ¿Cómo apoyar? y 5. ¿Cómo extender?

Si bien, la pregunta tres podría favorecer las dimensiones epistemológica y social propuestas por Scheiner (2015) para tener un conocimiento sobre los errores que pueden presentar los alumnos de primero y segundo grado al tratar temas estadísticos, se desaprovecha esta oportunidad dado que sólo en el libro para el docente de primer año, en el trayecto *Recolección y registro de datos* del bloque uno, únicamente en la lección 1, *¿Cuál fruta prefieren?* se identifican errores comunes que puede encontrar el maestro (Elegir más de una fruta y decidir una fruta que no esté en las establecidas (SEP, 2018c, p. 74)); sin embargo, estos errores comunes sólo tienen que ver con la decisión personal (gusto), y se omiten errores estadísticos que pueden tener los alumnos como por ejemplo, el conteo de las frecuencias; y si a los alumnos se les diera la oportunidad de trazar desde las tablas para organizar la información que recaban de las encuestas podrían observarse qué dificultades tienen para trazar una tabla.

4.9. Observaciones del capítulo

De forma disciplinar, la propuesta 2012 para la Licenciatura en Educación Primaria es completa para formar al normalista. Sin embargo, deja de lado las dimensiones epistemológica, cognitiva y didáctica (Scheiner, 2015) para la enseñanza en sus prácticas e incluso para su integración posterior al sistema de educación primaria.

En la puesta en práctica de la propuesta 2012 se restringe la enseñanza a lo que señalan las propuestas 2011 y 2018 de educación primaria; es decir, al normalista se le forma casi en los mismos contenidos en los que se forma al niño de primaria.

La propuesta 2011 de educación primaria plantea el estudio de las medidas de tendencia central como el de la triada señalada por Bakker (2003). Reduce la combinatoria al principio multiplicativo con un carácter determinista (lecciones: 46, *Trajes* (segundo grado); 16, *Figuras y colores* (tercer grado); y 13, *Combinaciones* (cuarto grado)).

La propuesta del *Nuevo Modelo Educativo* (SEP, 2017a) incorpora el estudio de la moda, la media y el rango, ignora el de la mediana, e introduce la probabilidad en los dos últimos grados (quinto y sexto) con el enfoque frecuencial. Aunque esto último es congruente con lo que señala Heitele (1975) para proporcionar "al individuo modelos explicativos en cada etapa de su desarrollo" (p. 188) de acuerdo a su nivel cognitivo, y "vincular la [su] instrucción en estocásticos a las [sus] experiencias intuitivas" (p. 187), se desaprovecha la oportunidad de incluir la probabilidad desde el primer grado, ya que la lección 4, Suma de puntos, pues el niño al jugar con dos dados puede considerar que es más posible obtener una suma de siete puntos que una de dos puntos y no restringirla a un tratamiento aritmético.

Capítulo 5

Formación docente en estocásticos para la educación primaria

A pesar de la importancia de la probabilidad y de la estadística, se les da poca atención en la formación de docentes. "Los maestros no son conscientes de la riqueza del contenido estadístico que tienen que enseñar"; "… por otro lado, muchos profesores no se sienten cómodos con el tema"; "La necesidad de enseñar un tema [de estocásticos] no muy dominado genera aprensión" (Gattuso, 2006, p. 1).

Según la organización de la investigación (véase la Figura 3.1), presentamos los resultados de la aplicación del cuestionario 1 y del cuestionario 2 (véanse en §3.3.3.1 y en §3.3.3.2), de 16 entrevistas semiestructuradas (véase en §3.3.3.3) a futuros docentes de primaria sobre su desempeño en los cuestionarios y de dos experienciaciones de la investigadora de la enseñanza de las medidas de tendencia central (véase apdo. 3.3.2). A los datos recopilados se les aplicó la célula de análisis (Ojeda, 2006; véase en 3.2).

5.1. Análisis de los datos obtenidos en los Cuestionarios 1 y 2

A 52 estudiantes de cuarto semestre de la Licenciatura en Educación Primaria aplicamos el Cuestionario 1 y un año después aplicamos el Cuestionario 2 a 28 estudiantes: 26 normalistas también del cuarto semestre de la misma licenciatura y a dos normalistas de la anterior generación (E^{1}_{32} y E^{1}_{45}). En los dos casos, las respuestas se analizaron de dos formas: primero se les clasificó en correctas, incorrectas y omitidas, y se identificaron las dos dificultades principales en cada uno de los reactivos; luego les aplicamos la célula de análisis (Ojeda, 2006). Identificamos a los estudiantes a quienes nos referiremos como $E^{\#}_{\#}$, en donde el superíndice indica la generación a la que pertenecen: ^{1} la generación de 52 estudiantes y ^{2} la generación de 26 estudiantes. El subíndice indica el número de lista del estudiante.

5.1.1. Cuestionario 1

Las Tablas 5.1, 5.2, 5.3 y 5.4 resumen los resultados generales del Cuestionario 1 (véase su caracterización en las Tablas 3.7, 3.8, 3.9 y 3.10) referidos a tipos de variables, gráficas, medidas de tendencia central, combinatoria (técnicas de conteo) y probabilidad. Las dificultades más frecuentes de los normalistas (véase la quinta columna de la Tabla 5.1, de la Tabla 5.2, de la Tabla 5.3 y de la Tabla 5.4) al responder los reactivos de tipos de variables fue la diferenciación de la variable nominal de la ordinal, les fue más sencillo identificar la variable numérica. En la gráfica circular presentaron dificultades para trazar los sectores de la gráfica para cada uno de los tipos de operación. Al trazar gráficas de barras no identificaron correctamente los datos correspondientes a cada eje.

En la dimensión cognitiva (Scheiner, 2015), las principales dificultades de los reactivos de medidas de tendencia central fueron: la confusión entre los procedimientos para obtener el valor de la media y el de la mediana, la identificación de la frecuencia para determinar la moda y para trazar una gráfica de barras.

En los reactivos de técnicas de conteo predominó como dificultad la inadvertencia del orden al realizar extracciones y la no distinguibilidad de los objetos, así como la falta de identificación de la permutación con repetición.

Las dificultades en los reactivos de probabilidad fueron: confusión para determinar la medida de probabilidad de un evento en un fenómeno aleatorio (lanzamiento de monedas) al determinar su espacio muestra; el tener un conocimiento claro y preciso de los términos de estocásticos como lo son: espacio muestra, medida de probabilidad, combinatoria, permutación para poder diferenciar en qué consiste cada uno de ellos; y la confusión del término probabilidad con el de posibilidad.

Los reactivos 14 y 16 tuvieron dos respuestas correctas; en el primero esto pudo haber influido para que los normalistas las eliminaran y sus respuestas fueran incorrectas por lo que se requiere tener cuidado al escribir los incisos de las respuestas. En el reactivo 16, 37 futuros docentes eligieron uno de los dos incisos (a o d) como correctos (véase la Tabla 5.2), sin embargo, es pertinente cambiar la instrucción por “Elige las oraciones correctas de acuerdo con lo expuesto en el siguiente problema”.

Tabla 5.1. Resultados generales sobre tipos de variables y gráfica del Cuestionario 1 (aplicado a 52 estudiantes).

<table>
<tr><th>Reactivo e Ideas Fundamentales de Estocásticos</th><th>RC</th><th>RI</th><th>RO</th><th colspan="2">Principales dificultades</th></tr>
<tr><td>17.Muestra.
Intensidad de un dolor de cabeza.
a). Nominal
b) Ordinal
c) Numérica</td><td>22</td><td>30</td><td>0</td><td>25 confusiones entre la variable ordinal con la variable nominal.</td><td>Cinco intercambios de la variable nominal por la variable numérica.</td></tr>
<tr><td>18. Muestra.
Calidad en un servicio.
a) Nominal
b) Ordinal
c) Numérica</td><td>13</td><td>38</td><td>1</td><td>29 equivocaciones de la variable ordinal con la variable numérica.</td><td>Nueve imprecisiones de la variable ordinal con la variable nominal.</td></tr>
<tr><td>19. Muestra.
Causa de alta temperatura en una persona.
a) Nominal
b) Ordinal
c) Numérica</td><td>15</td><td>37</td><td>0</td><td>21 errores al confundir la variable nominal con la variable ordinal.</td><td>16 confusiones de la variable nominal con la variable numérica.</td></tr>
<tr><td>20. Muestra.
Fecha de nacimiento de una persona.
a) Nominal
b) Ordinal
c) Numérica</td><td>33</td><td>19</td><td>0</td><td>Diez imprecisiones de la variable numérica con la variable nominal.</td><td>Nueve errores al confundir la variable numérica con la variable ordinal.</td></tr>
<tr><td>21. Muestra.
Aceptación del uso de un producto por una persona.
a) Nominal
b) Ordinal
c) Numérica</td><td>24</td><td>28</td><td>0</td><td>24 confusiones de la variable ordinal con la variable nominal.</td><td>Cuatro equivocaciones al escribir variable ordinal en lugar de variable numérica.</td></tr>
<tr><td>27. Muestra.
Traza la gráfica circular o de pastel de las operaciones realizadas en un hospital.
<table><tr><th>Tipo de operación</th><th>No. de casos</th></tr><tr><td>Torácica</td><td>20</td></tr><tr><td>Ortopedia</td><td>45</td></tr><tr><td>Otorrinolaringología</td><td>58</td></tr><tr><td>General</td><td>98</td></tr><tr><td>Abdominal</td><td>115</td></tr><tr><td>Urología</td><td>74</td></tr><tr><td>Neurocirugía</td><td>23</td></tr><tr><td>Cáncer</td><td>65</td></tr></table></td><td>23</td><td>23</td><td>6</td><td>12 impresiones para determinar los sectores de la gráfica circular al identificar el porcentaje correspondiente a cada tipo de operación.</td><td>10 cálculos incorrectos del porcentaje de cada tipo de operación.</td></tr>
<tr><td colspan="6">RC: Número de respuestas correctas; RI: Número de respuestas incorrectas; RO: Número de respuestas omitidas</td></tr>
</table>

Tabla 5.2. Resultados generales sobre medidas de tendencia central del Cuestionario 1 (aplicado a 52 estudiantes).

Reactivo e Ideas Fundamentales de Estocásticos	RC	RI	RO	Principales dificultades	
7. Variable estocástica Definición de media	33	19	0	17 confusiones de media con mediana.	Un intercambio de la palabra media por la palabra moda.
8. Variable estocástica Definición de mediana	35	17	0	17 errores de mediana con media.	
9. Variable estocástica Definición de moda	46	6	0	Cinco confusiones de moda con espacio muestra.	Un intercambio del término moda por el de media.
16. Promedio de palabras escritas por minuto. Variable estocástica. a) Tres aspirantes escriben menos de 100 palabras. b) Las aspirantes que escriben 100 palabras por cada 10 min tienen mucha experiencia. c) Una mecanógrafa tiene una velocidad de escritura de 120 palabras por 10 min. d) Dos aspirantes en promedio escribieron menos de 90 palabras en 10min.	46	5	1	Tres impresiones al considerar que una mecanógrafa escribe 120 palabras en 10 min.	Dos errores al no considerar a las mecanógrafas que escriben en promedio más de 100 palabras como personas con mucha experiencia.
23.Variable estocástica, muestra a) Media b) Moda c) Mediana	a) 18 b) 42 c) 28	a) 28 b) 6 c) 19	a) 6 b) 4 c) 5	Nueve confusiones entre media y mediana.	26 operaciones básicas incorrectas.
24.Variable estocástica, muestra a) unimodal b) sin moda c) bimodal	a) 47 b) 14 c) 31	a) 3 b) 22 c) 19	a) 2 b) 15 c) 2	22 identificaciones incorrectas de la moda cuando no la hay porque todos los datos tienen la misma frecuencia.	15 inadvertencias de la moda cuando los datos tienen la misma frecuencia.
25.Variable estocástica, muestra	20	20	12	Seis operaciones básicas incorrectas.	Cuatro inadvertencias de la muestra (tamaño).
26.Variable estocástica, muestra a) mediana b) gráfica	a) 22 b) 12	a) 26 b) 18	a) 4 b) 22	15 inadvertencias de frecuencia de los datos.	Doce cálculos de la media en lugar de la mediana.

RC: Número de respuestas correctas; **RI**: Número de respuestas incorrectas; **RO**: Número de respuestas omitidas

Tabla 5.3. Resultados generales sobre combinatoria del Cuestionario 1 (aplicado a 52 estudiantes).

Reactivo e Ideas Fundamentales de Estocásticos	**RC**	**RI**	**RO**	**Principales dificultades**	
3. Combinatoria Definición de Permutación	24	26	2	Diez confusiones de permutación con espacio muestra.	Cinco errores de permutación con combinación.
4. Combinatoria Definición de Combinatoria	25	26	1	Siete intercambios de combinatoria con variable aleatoria.	Siete cambios de combinatoria por permutación.
5. Combinatoria Definición de diagrama de árbol	39	11	2	Cuatro confusiones de diagrama de árbol con espacio muestra.	Cuatro intercambios de diagrama de árbol por evento o suceso.
15. Combinatoria (Selección). a) Cualquier color b) Dos blancas y dos negras c) Todas del mismo color	a) 0 b) 0 c) 0	a) 40 b) 36 c) 35	a) 12 b) 16 c) 17	34 confusiones entre "probabilidad" y "posibilidad".	Ninguna advertencia del orden de en las extracciones.
22. Combinatoria (permutaciones) a) sin repetición b) con repetición	a) 23 b) 0	a) 20 b) 35	a) 9 b) 17	Cinco incomprensiones del término "palabra" con tres letras.	25 inadvertencias de las permutaciones de las letras.

RC: Número de respuestas correctas; **RI**: Número de respuestas incorrectas; **RO**: Número de respuestas omitidas

Tabla 5.4. Resultados generales sobre probabilidad del Cuestionario 1 (aplicado a 52 estudiantes).

Reactivo e Ideas Fundamentales de Estocásticos	**RC**	**RI**	**RO**	**Principales dificultades**	
1. Medida de probabilidad. Definición de evento o suceso	20	29	3	13 intercambios del término evento por el de permutación.	Seis confusiones de evento con espacio muestra.
2. Espacio muestra Definición	13	38	1	12 confusiones de espacio muestra con evento o suceso.	11 cambios del término espacio muestra por el de combinación.
6. Variable aleatoria Definición	25	24	3	Ocho cambios de variable aleatoria por espacio muestra.	Seis con fusiones de variable aleatoria con combinación.
10. Medida de probabilidad. Probabilidad de un evento seguro. a) 0.5 b) 0.25 c) 0.75 d) 1	42	9	1	Cuatro incorrecciones que consideran que la probabilidad del evento seguro es de 0.75.	Tres confusiones de que la probabilidad de un evento seguro es de 0.25.
11. Medida de probabilidad. Probabilidad de un evento imposible. a) 0 b) 0.25 c) 0.75 d) 1	33	18	1	Ocho inadvertencias de la probabilidad de un evento imposible.	Ocho confusiones entre evento imposible y evento seguro.
12. Medida de probabilidad. Evento cuya probabilidad de ocurrencia es entre 0 y 1. a) Evento imposible b) Evento posible o probable c) Evento improbable d) Evento seguro	46	5	1	Cuatro intercambios de un evento posible por un evento seguro.	Una indeterminación entre evento posible con la probabilidad de un evento posible.
13. Medida de probabilidad. Lanzar dos monedas y que caigan con caras superiores en águila. a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{3}{4}$	9	42	1	40 confusiones de la probabilidad de que las dos caras superiores sean águilas con la probabilidad de que una cara superior sea águila.	Dos errores al confundir la probabilidad de que por lo menos una cara sea águila.
14. Medida de probabilidad. Lanzar un dado y obtener un número primo. a) $\frac{2}{6}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{4}{6}$ d) $\frac{3}{6}$	37	14	1	14 confusiones para identificar un número par y uno impar.	

RC: Número de respuestas correctas; **RI**: Número de respuestas incorrectas; **RO**: Número de respuestas omitidas

Las respuestas esperadas a cada uno de los reactivos del Cuestionario 1 que deberían haber dado los normalistas son:

1. Evento o suceso: Subconjunto del espacio muestra.
2. Espacio muestra: Conjunto formado por todos los resultados posibles derivados de un experimento.
3. Permutación: Muestra ordenada de elementos de una población.
4. Combinación: Muestra no ordenada de los elementos de la población.
5. Diagrama de árbol: Descripción gráfica de las distintas alternativas que se van presentando en cada una de las fases durante el desarrollo del experimento.
6. Variable aleatoria: X es una función de Ω en R.
7. Media: Es la suma de los datos dividida entre el número total de datos.
8. Mediana: Promedio de los datos que están a la mitad de la lista.
9. Moda: Es el dato más frecuente en un conjunto de datos.
10. d) 1
11. a) 0
12. b) Evento posible o probable
13. a) $\frac{1}{4}$
14. b) $\frac{1}{2}$ y d) $\frac{3}{6}$
15. a) Las bolas son de cualquier color: <u>330 maneras</u>________________

$$\binom{11}{4} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{7\,920}{24} = 330$$

b) Dos bolas sean blancas y dos negras: <u>150 maneras</u>_____________

$$\binom{6}{2}\binom{4}{2} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = \frac{600}{4} = 150$$

c) Todas sean del mismo color: <u>20 maneras</u>_____________________

$$\binom{6}{4} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{360}{24} = 15$$

$$\binom{5}{4} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{120}{24} = 5$$

16. a) Tres de las cinco aspirantes tuvieron un promedio de menos de 100 palabras por cada 10 minutos.

    d) El número de aspirantes con un promedio menor a 90 palabras por cada 10 minutos, es dos.

17. b) Ordinal

18. b) Ordinal

19. a) Nominal

20. c) Numérica

21. b) Ordinal

22. a) Las tres letras sean distintas __seis palabras distintas______________________

    $O_3^3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

    b) Dos letras, por lo menos sean idénticas_19 palabras distintas_______________

    $5^2 = 25 - 6 = 19$

Se debe considerar que se tienen que eliminar las seis opciones en donde las letras son distintas.

23. a) media = 6.7

4 + 4 + 4 + 5 + 5 + 5 + 5 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 8 + 8 + 8 + 8 + 9 + 9 + 9 + 9 + 10 = 202

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{N} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 \dots X_n}{N}$$

$$\bar{X} = \frac{202}{30} = 6.7$$

    b) Moda = 6

Dato	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	3	4	7	6	5	4	1

c) Mediana = 7

4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 10

24. a) 2, 3, 4, 4, 3, 5, 4, 5, 5, 6, 7, 6, 8, 5, 5

La moda es el dato 5, por lo tanto, el conjunto de datos es unimodal.

Dato	2	3	4	5	6	7	8
Frecuencia	1	2	3	5	2	1	1

b) 3, 18, 13, 5, 9, 7, 10, 11, 12

No hay moda ya que todos los datos tienen la misma frecuencia.

Dato	3	5	7	9	10	11	12	13	18
Frecuencia	1	1	1	1	1	1	1	1	1

c) 2, 9, 3, 8, 4, 4, 8, 3, 3, 6, 5, 7, 7, 8

La moda son los datos 3 y 5 por lo tanto, el conjunto de datos es bimodal.

Dato	2	3	4	5	6	7	8
Frecuencia	1	3	2	1	2	1	3

25. a) 15. 7 años

El tamaño de la muestra es de 11 personas

Amalia tiene 65 años. Se puede expresar como A = 65

Manuel tiene tres años más que Amalia y se expresa como M = A + 3, dado que se conoce el valor de A lo sustituimos y encontramos que Manuel tiene 68 años.

M = 65 + 3 = 68

La expresión matemática que me ayudará a encontrar la edad de los nueve nietos es

M + A + 9n = 25 (11)

Sustituimos las literales por sus valores

68 + 65 + 9n = 275

9n = 275 – 133

9n = 142

n = $\frac{142}{9}$

n = 15.7

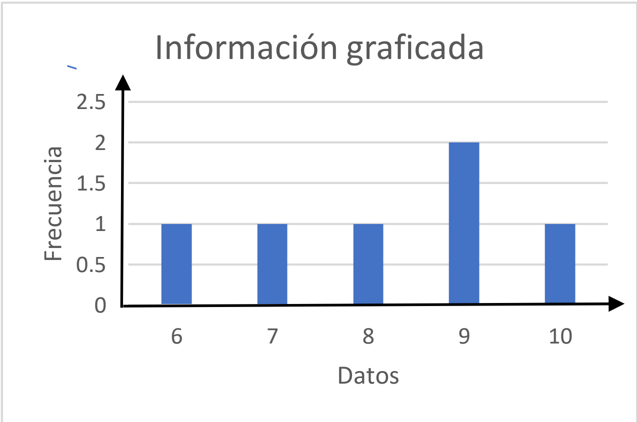
26. a) ¿Cuál es la mediana? La mediana es 8.5

6, 7, 8, 9, 9, 10

8 + 9 = $\frac{17}{2} = 8.5$

b) Realiza la gráfica de la información anterior

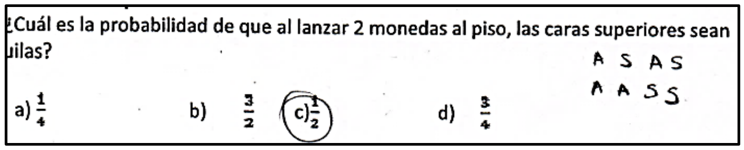
Dato	Frecuencia
6	1
7	1
8	1
9	2
10	1



27.- Gráfica circular

5.1.1.1. Ideas fundamentales de estocásticos. Para las ideas implicadas en el cuestionario 1 (véanse las Tablas 3.7, 3.8, 3.9 y 3.10) se obtuvo lo siguiente:

Medida de probabilidad. En el reactivo 1 (véase la Tabla 3.10), 29 estudiantes presentaron un conocimiento deficiente de la definición de medida de probabilidad. En los reactivos del 10 al 14 (véase la Tabla 3.10), los estudiantes presentaron confusiones al distinguir entre un evento seguro, un evento posible o imposible; pero sobre todo, en el reactivo 13, 42. En el reactivo 14 (véase la Tabla 3.10), 14 estudiantes no identificaron la respuesta correcta que contenía la probabilidad del evento solicitado en el fenómeno aleatorio (al lanzar dos monedas, las caras superiores fueran águilas y obtener un número primo al lanzar un dado) correspondiente, más bien determinaron únicamente el espacio muestra de cada uno de los fenómenos aleatorios (véase la Figura 5.1 y la Figura 5.2); por ejemplo: E^{1}_{18} únicamente registró el espacio muestra con un listado incorrecto de acuerdo a Lockwood y Gibson (2016) pues escribió la misma posibilidad (as, as; en lugar de as y sa) del fenómeno aleatorio e identificó los casos favorables de que una cara fuera águila en los casos posibles (véase la Figura 5.1).

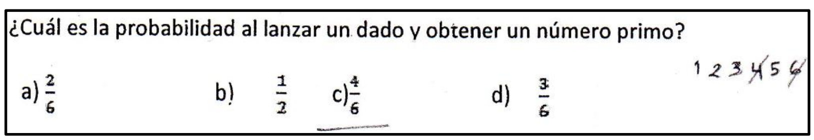

¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar 2 monedas al piso, las caras superiores sean águilas?

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{3}{4}$

A S A S
A A S S

Figura 5.1. Espacio muestra del reactivo 13 propuesto por E^1_{18}.

E^1_{28}, identificó correctamente las opciones, sin embargo, por dificultades en otros conceptos matemáticos (véase la Figura 5.2) no llegó a la respuesta correcta lo que impidió la conceptualización del término medida de probabilidad en contenidos de estocásticos y de número impar en contenidos matemáticos de acuerdo a Fischbein (1977). Cabe aclarar que a pesar de que el reactivo 14 (véase la Tabla 3.10) tenía dos respuestas correctas ($\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{6}$) sólo 37 estudiantes identificaron cualquiera de las dos como correcta.


¿Cuál es la probabilidad al lanzar un dado y obtener un número primo?

a) $\frac{2}{6}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{4}{6}$ d) $\frac{3}{6}$

1 2 3 4 5 6

Figura 5.2. Respuesta incorrecta propuesta por E^1_{28} al reactivo 14.

Espacio muestra. La definición de esta idea es confundida con las siguientes definiciones: 12 estudiantes la confunden con evento o suceso, 11 con combinación, ocho con variable estocástica y cinco con diagrama de árbol. En los reactivos 13 y14 (véase la Tabla 3.10), las estudiantes E^1_{18} y E^1_{28} identificaron correctamente el espacio muestra (el conjunto de todos los posibles resultados) de los fenómenos aleatorios (véase la Figuras 5.1 y la Figura 5.2). En el reactivo 15 (véase la Tabla 3.9) ningún estudiante identificó el espacio muestra del fenómeno aleatorio (sacar cuatro bolas del saco que contiene 6 bolas blancas y 5 negras, si: las bolas son de cualquier color; dos bolas sean blancas y dos sean negras; todas sean del mismo color) para contestar los incisos del problema.

Combinatoria. Los reactivos 3 y 4 (véase la Tabla 3.9) se centraron en identificar la definición de permutación y combinación, 12 normalistas intercambiaron las definiciones. Al reactivo 15 de selecciones (véase la Tabla 3.9), donde “en problemas de esta naturaleza, una muestra de los objetos debe tomarse de un conjunto de *x* objetos (comúnmente distintos)” (Dubois, 1984, citado en English, 2005, pp. 125-126), ningún docente en formación dio respuesta correcta; 34 calcularon la “probabilidad” de la extracción de las bolas, es decir, interpretaron el requerimiento como medida de probabilidad en lugar del número total de posibilidades de la extracción de cuatro de entre once objetos de dos tipos contenidos en una urna. Una estudiante (E^{1}_{23}) multiplicó las proporciones de bolas por color ($\frac{4}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{30}$) e identificó su porcentaje (consideró $\frac{30}{30}$ como el 100 % y determinó 53 % como el porcentaje correspondiente a la fracción que obtuvo).

En el reactivo 22 (véase la Tabla 3.9), dos estudiantes (E^{1}_{22} y E^{1}_{51}) fijaron la primera letra e invirtieron el orden de las otras letras en el inciso a) del reactivo 22 (véase la Figura 5.3).

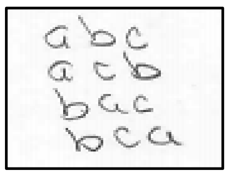


Figura 5.3. Listado incompleto al reactivo 22 propuesto por E^{1}_{22}.

Variable estocástica. En el reactivo 23 de medidas centrales (véase la Tabla 3.8), 42 estudiantes identificaron la moda. Nueve estudiantes invirtieron los procedimientos respectivos de cálculo de la media y de la mediana. Zawojewski y Shaughnessy (2000) citados en Bakker (2003), señalaron que los alumnos de secundaria aún no han desarrollado el sentido de la distribución y los valores atípicos, por lo que no pueden decidir entre la media y la mediana (párr. 65).

En el reactivo 26 (véase la Tabla 3.8), la mediana fue calculada incorrectamente por ocho estudiantes que no obtuvieron el cociente de la división promedio de los dos valores centrales del número par de datos del referente; y 18 estudiantes calcularon la media en lugar de la mediana. Según Bakker (2003), “la mediana es más difícil de comprender que la media” (párr. 65).

Variable aleatoria. 26 estudiantes no identifican la definición de variable aleatoria en el reactivo 6 (véase la Tabla 3.10), la confunden con los siguientes términos: ocho con espacio muestra, seis con combinación, otros seis con permutación, tres con evento o suceso y sólo E^1_{51} omitió su respuesta.

Muestra. En el reactivo 25 (véase la Tabla 3.8), veinte estudiantes no identificaron el tamaño de la muestra, dado que no reconocieron el total de personas incluidas en la situación planteada. De acuerdo con Pollatsek, *et al*. (1981), al desarrollar el algoritmo de la media aritmética, ellos mostraron sólo un conocimiento de cálculo, es decir, obtuvieron la media por su algoritmo (Mokros y Russell, 1995). En el reactivo 23 (véase la Tabla 3.8), 4 intercambiaron los resultados de la media aritmética (6.73) por el de la mediana (7). 12 estudiantes no obtuvieron la suma total (de 202) correcta al multiplicar los datos de la muestra por su frecuencia (véase la Figura 5.4).

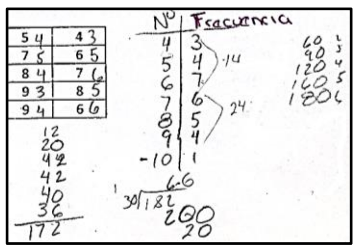


Figura 5.4. E^1_{22} sumó incorrectamente los productos del dato por su frecuencia en el reactivo 23.

5.1.1.2. Otros conceptos matemáticos. De acuerdo a las Tablas 3.7, 3.8, 3.9 y 3.10 señalamos lo siguiente:

Número impar. En el reactivo 14 (véase la Tabla 3.10), E^1_{28} no diferenció correctamente los números pares de los impares (véase la Figura 5.2).

Función factorial (n!). Ningún estudiante aplicó la representación simbólica de la función factorial en los reactivos 15 y 22 (véase la Tabla 3.9).

Operaciones aritméticas básicas. En los reactivos 23 y 26 (véase la Tabla 3.8), tres estudiantes no calcularon los decimales en las divisiones correspondientes, por lo que dieron respuestas incorrectas. En el reactivo 25 (véase la Tabla 3.8), tres estudiantes presentaron dificultades al resolver operaciones aritméticas básicas o no las concluyeron (véase la Figura 5.5). Estos señalamientos indicarían que el sistema 1 (los normalistas operaron automáticamente, sin pensar) de estos estudiantes se activó, sin llegar a ser cuestionado por el sistema 2 (los futuros docentes no reflexionaron su respuesta) (Kahneman, 2011).

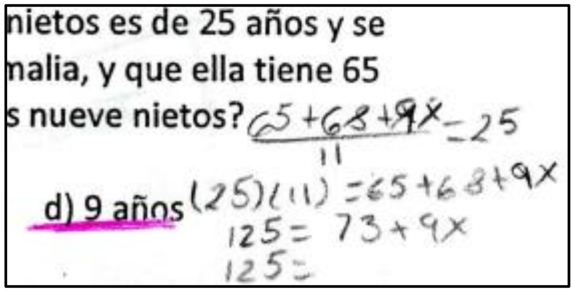


Figura 5.5. Solución incorrecta al reactivo 25 con operaciones aritméticas erróneas e incompletas propuesta por E^1_{22}.

Orden numérico. En el reactivo 26 (véase la Tabla 3.8), tres normalistas no ordenaron los datos para obtener la mediana; nuevamente se activó únicamente el Sistema 1 (Kahneman, 2011).

Producto cartesiano. El concepto no está consolidado a pesar de los años de escolaridad de los futuros docentes; sólo tres de ellos trazaron los ejes de coordenadas.

5.1.1.3. Recursos semióticos. Al igual que los estudiantes de secundaria de la investigación de Heredia (1998), los docentes en formación emplearon diagramas de árbol, figuras y listados de posibilidades para responder a los reactivos.

Figuras. Nueve futuros docentes trazaron figuras de bolas negras y blancas en el reactivo 15 (véase la Tabla 3.9), es decir, dieron una solución pictórica (Fischbein, 1977) para resolver el problema.

Gráficas. En el reactivo 26 (véase la Tabla 3.8), 22 estudiantes trazaron correctamente la gráfica solicitada (véase la Figura 5.6), pero omitieron los títulos de cada uno de los ejes. Dieciocho estudiantes dieron respuesta incorrecta, no identificaron la frecuencia ni el eje correspondiente a los datos. Sólo 28 de los docentes en formación no trazaron las gráficas solicitadas, lo que podría deberse a un conocimiento deficiente del concepto de producto cartesiano.

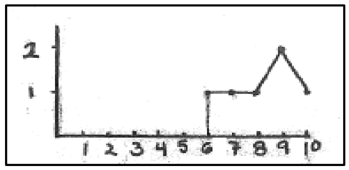


Figura 5.6. Trazo de gráfica en el reactivo 26 propuesto por E^{1}_{43}.

Tablas: Cinco estudiantes en el reactivo 23 (véase la Tabla 3.8) organizaron los datos a manera de tablas para dar respuesta a la pregunta 23, para determinar la media, la moda y la mediana de la distribución de frecuencia simple que se les planteó. E^{1}_{9} ubicó el número y su frecuencia; pero, E^{1}_{43} no anotó correctamente la tarja de cada número que consiste en realizar cuatro marcas verticales cruzadas por una quinta línea, lo anterior denotó la dificultad de la escritura formal de la tarja a pesar de los años de escolaridad (véanse la Figura 5.7 y la Figura 5.8).

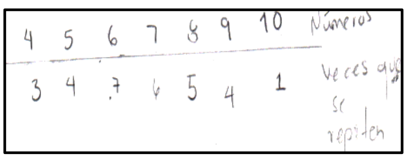


Figura 5.7. Tabla de frecuencia propuesta por E^{1}_{9} al reactivo 23.

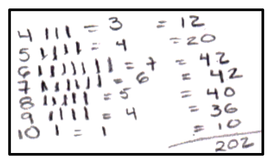


Figura 5.8. Tabla: Tarja incorrecta, productos de datos, frecuencias y su suma propuestas por E^{1}_{43} al reactivo 23.

Listados. En el reactivo 15 (véase la Tabla 3.9), nueve estudiantes enlistaron incorrectamente o de forma incompleta las posibilidades, lo que, según Lockwood y Gibson (2016), impidió que dieran respuesta correcta a los incisos, además de que el normalista se restringió a hacer las posibilidades de cuatro bolas sin considerar la totalidad de bolas (11) de las cuales seis eran bolas blancas indistinguibles y cinco eran bolas negras indistinguibles (véase la Figura 5.9).

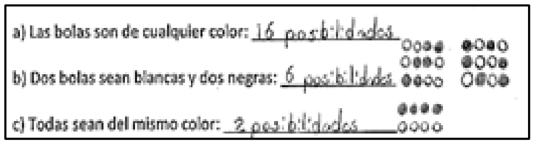


Figura 5.9. Respuesta de E^1_{51} al reactivo 15 con listado de posibilidades.

En la pregunta 22 (véase la Tabla 3.9), sólo E^1_{21} enlistó 18 de las posibilidades, pero dio resultado incorrecto al inciso b) (anotó 18 palabras distintas y eran 19 palabras distintas) dado que su listado fue incompleto. Esto, a pesar de que contó correctamente y sin repetir ninguna de las posibilidades que enlistó.

Diagrama de árbol. Este recurso fue trazado para el inciso a) del reactivo 22 (véase la Tabla 3.9) por siete futuros docentes; y por dos estudiantes en el inciso b). De acuerdo con Andrà (2011) los estudiantes realizaron una representación semiótica a nivel de experiencia.

Notación simbólica. En el reactivo 25 (véase la Tabla 3.8), tres estudiantes plantearon su solución con simbología matemática; sólo E^1_{43} contestó correctamente (véase la Figura 5.10), aunque su notación para la media aritmética no fue la convencional ($\bar{x}$). De acuerdo a Duval (2006), "la mayoría de los estudiantes tienen dificultades cada vez que se requiere una conversión de un tipo de registro a otro (lenguaje → notación simbólica, figura → lenguaje...) explícita o implícita" (p. 156); en el caso del reactivo 22 (véase la Tabla 3.9), la conversión estaba implícita.

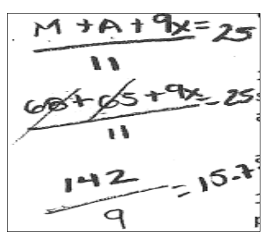


Figura 5.10. Solución correcta al reactivo 25 propuesta por E^1_{43} al recurrir a una expresión algebraica.

5.1.1.4. Términos empleados. Los términos o frases incluidos en los enunciados (véanse las Tablas 3.7, 3.8, 3.9 y 3.10) confundidos por los estudiantes, así como otros que utilizaron, fueron:

Evento o suceso, espacio muestra, permutación, combinación, diagrama de árbol, variable aleatoria, media, mediana y moda. En estos nueve reactivos los estudiantes, no colocaron el término con su definición correcta, las principales confusiones se describen en las tablas 5.2, 5.3 y 5.4. Por ejemplo: de las 38 respuestas incorrectas al reactivo 2 (véase la Tabla 3.10), 12 estudiantes confundieron la definición de *espacio muestra* con la de *evento o suceso.*

Evento seguro, imposible, probable. Estos términos fueron claros para la mayoría de los normalistas dado que en los reactivos 10 y 12 (véase la Tabla 3.10), 42 y 46 estudiantes respectivamente identificaron la probabilidad de cada uno de los eventos a pesar de que en el reactivo 12 se tuvo el error de colocar dos veces como respuesta evento imposible. El término *evento imposible* del reactivo 11 (véase la Tabla 3.10) no fue claro para 18 estudiantes ya que eligieron incorrectamente la probabilidad que detona a este evento.

Promedio. El término fue comprendido por 46 estudiantes quienes señalaron como correctas las respuestas el inciso a) y el d); sin embargo 4 normalistas señalaron que el inciso c) era correcto evidenciando así que la palabra *promedio* no fue identificada como la media aritmética del conjunto de datos. Es decir, los datos del reactivo 16 (véase la Tabla 3.8) no fueron considerados para identificar el tipo de promedio que se debe determinar (Moroney, 1979).

Número de posibilidades. En el reactivo 15 (véase la Tabla 3.9), 31 de los estudiantes interpretaron el reactivo como una solicitud de la *probabilidad* del caso en cada inciso, en lugar del número de posibilidades respectivo y respondieron $\frac{4}{11}$ al inciso a); así mostraron su indistinción entre posibilidad y probabilidad, o bien su desatención a “número de posibilidades” en el enunciado.

En el reactivo 22 (véase la Tabla 3.9) las principales dificultades surgieron del significado del término “palabra” a la formada por tres letras dadas. En el inciso b) del reactivo 15, siete estudiantes anotaron $\frac{2}{5}$, es decir, confundieron el término posibilidad con el de probabilidad al expresar la respuesta con una fracción.

Variable ordinal y *variable nominal*. En los reactivos 17 al 21 (véase la Tabla 3.7) sobre tipos de variables, los términos presentaron dificultad a los estudiantes para determinar si el ejemplo que se planteó era una *variable ordinal* o *una nominal*; dado que ambas variables tratan datos que pueden ser nombres, etiquetas o categorías; y su diferencia radica en que la variable nominal los datos no se pueden ordenar, mientras que, en la variable ordinal, los datos son ordenables.

Distribución de frecuencias simples. En el reactivo 23 de medidas centrales (véase la Tabla 3.8), de cinco normalistas, cuatro organizaron en una tabla los datos y sus frecuencias: encabezaron la primera columna con: "número", "#", "N°" y "Dato", respectivamente; en la segunda columna registraron la frecuencia; E^{1}_{21} la denotó por "F" y E^{1}_{9} anotó "veces que se repiten" (véase la Figura 5.7); sólo E^{1}_{43} no denotó el atributo al que se refería, pero elaboró una tarja, aunque incorrectamente (véase la Figura 5.8).

Permutación con repetición. En el reactivo 22 (véase la Tabla 3.9), 25 normalistas no identificaron la permutación con repetición en el inciso b), lo que coincide con el resultado de English (2005):

> … factores que influyen en la dificultad del problema en estudiantes con 14-15 años de edad. Estos factores incluyen el tipo de operación combinatoria, es decir, permutaciones (donde importa el orden de colocación del elemento), que impacta en la incapacidad de los estudiantes para listar sistemáticamente los artículos (p. 127).

5.1.1.5. Observaciones. En la dimensión cognitiva (Scheiner, 2015), los referentes de los reactivos planteados tuvieron diferente grado de complejidad. En los primeros nueve, sólo se trataba de unir un término de estocásticos con su definición, sin embargo, ninguno de los reactivos tuvo el 100 % de respuestas correctas.

En cinco reactivos (15, 22, 23, 24 y 26) se esperaba que los estudiantes aplicaran expresiones matemáticas para llegar a la respuesta correcta, no lo hicieron. El reactivo 25 era el más difícil dado que implicó el conocimiento funcional del cálculo de la media para calcular la media ponderada.

De los tres tipos de conocimiento propuestos por Pollatsek, *et al*. (1981), para los reactivos de medidas de tendencia central (23, 24, 25 y 26) identificamos lo siguiente:

Conocimiento de cálculo. El planteamiento de los reactivos 23, 24 y 26 se basó en el cálculo de las medidas de tendencia central sin favorecer el conocimiento funcional de los estudiantes.

En el reactivo 25, 10 estudiantes seleccionaron el inciso a) como respuesta correcta; nueve de estos estudiantes, no usaron una expresión matemática general (fórmula) y tuvieron dificultades para resolver correctamente sus operaciones aritméticas. El estudiante (E^1_{10}) restante mostró conocimiento deficiente de la expresión matemática de la media ($\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$), por ello tuvo deficiencias en el cálculo del promedio por su algoritmo, según Mokros y Russell (1995) pues el normalista sólo escribió el promedio de la edad y lo multiplicó por las 11 personas (25 x 11 = 275, omitiendo que en la expresión de la media se deben sumar todos los datos y dividir el resultado entre el número total de datos como lo hizo E^1_{43} ($\frac{68 + 65 + 9n}{11}$ = 25), véase la Figura 10), al resultado le restó la suma de las edades de Manuel y Amalia (275 – 133) que escribió aparte y dejó expresada sólo la operación, no dio evidencia de haber resuelto la resta ni de haber divido el resultado entre los nueve nietos

Conocimiento funcional: En el reactivo 25 (véase la Tabla 3.8), tres estudiantes mostraron un conocimiento funcional incipiente al plantear su solución con una notación simbólica como su conocimiento de la media (la Figura 5.10); ello evidencia que identificaron el promedio como algo razonable, según Mokros y Russell (1995).

Conocimiento analógico: El conocimiento analógico del cálculo de las medidas de tendencia central (media, moda y mediana) se promovió en los reactivos 23, 24 y 26 (véase la Tabla 3.8) al ser diferentes los referentes; sin embargo, los estudiantes tuvieron las mismas dificultades para dar una respuesta correcta: operaciones aritméticas básicas incorrectas y confusión en el procedimiento de cálculo de la media con la mediana. Aclaramos que el reactivo 25 del Cuestionario 1 (véase en la Tabla 3.8) no planteó una pregunta para dar cuenta del conocimiento analógico, por lo que ningún estudiante agregó a su respuesta algún comentario que aludiera a una analogía, ni se les pidió hacerlo.

En la dimensión didáctica (Scheiner, 2015), la estrategia más frecuente de solución de los reactivos 15 y 22 de principio fundamental de conteo (véase la Tabla 3.9) fue enlistar las posibilidades (aunque de forma incompleta o incorrecta) y muy poco el trazo del diagrama de árbol. En los listados propuestos por los estudiantes para el reactivo 22, 51 de los normalistas no extrapolaron los patrones en ellos para responder correctamente. En coincidencia con Lockwood and Gibson (2016), los estudiantes evidenciaron "la falta de un plan bien diseñado de resolución de los problemas" (p. 250).

5.1.2. Cuestionario 2

En general, el desempeño de 26 de los estudiantes en el Cuestionario 2 (véanse la Tabla 3.12 y el Apéndice 2) fue deficiente. La Tabla 5.5 resume los resultados generales. Las dos columnas de la derecha indican por reactivo las dos dificultades más frecuentes identificadas en el desempeño de los estudiantes. Esas dificultades impidieron que los normalistas llegaran a las respuestas correctas en cada uno de los reactivos.

El reactivo más fácil fue el 2, concerniente a las ideas fundamentales de variable estocástica y muestra. El reactivo más difícil fue el 5; la principal dificultad en este reactivo se debió a que los estudiantes no identificaron la proporcionalidad inversa que activaría un conocimiento funcional para llegar a la respuesta correcta. La media geométrica y la media armónica son desconocidas por los estudiantes dado que no consideran el referente (términos) del problema para seleccionar el tipo de promedio apropiado, de acuerdo con Moroney (1979) y de acuerdo a sus antecedentes de bachillerato sólo en la enseñanza que se da en las escuelas pertenecientes al IPN es donde se enmarca el estudio de estos contenidos (véase el apartado 4.1). En el reactivo 4c pretendimos que los estudiantes identificaran qué tipo de asimetría tendría cada uno de los gráficos, pero el planteamiento de la pregunta fue incorrecto dado que la redacción no fue precisa, lo anterior impidió que se estableciera una comunicación matemática (Santos y Semana, 2014) en el aprendizaje de las matemáticas, pues la comunicación escrita no favoreció al aprendizaje del concepto matemático de asimetría.

Tabla 5.5. Resultados generales del Cuestionario 2.

Reactivo e Ideas Fundamentales de Estocásticos	RC	RI	RO	Principales dificultades	
1a. Muestra, Variable estocástica. a. Media, b. Moda, c. Mediana	a. 0 b. 19 c. 1	a. 24 b. 6 c.17	a. 4 b. 3 c. 10	15 operaciones aritméticas incorrectas.	Tres confusiones entre media y mediana.
1b. Muestra. Media como dato	0	12	16	Nueve confusiones de la media como dato de la muestra.	Una confusión entre media y mediana.
1c. Muestra. Tipo de variable	15	6	7	Tres confusiones de tipo de variable.	Una confusión de tipo de variable con dispersión.
1d. Equidistribución y simetría. Gráfica	0	9	19	Cinco gráficas sin toda la muestra.	Dos ubicaciones incorrectas de media.
2. Muestra, Variable estocástica. a. Moda, b. Mediana, c. Media	a. 14 b. 6 c. 0	a. 9 b. 14 c. 14	a. 5 b. 8 c. 14	Siete respuestas incorrectas para datos agrupados en intervalos.	10 desconocimientos de expresión matemática para calcular la media.
3a. Muestra, Variable estocástica. a. Media, b. Moda, c. Mediana	a. 8 b. 19 c. 8	a. 18 b. 6 c. 16	a. 2 b. 3 c. 4	Cuatro confusiones entre media y mediana.	Tres confusiones de la frecuencia y el dato.
De 3b a 3d. Medida más representativa. b Mayor, c. Menor, d. Igual	b. 5 c. 5 d. 0	b. 16 c. 16 d. 19	b. 7 c. 7 d. 9	18 inadvertencias de la medida central más representativa.	Un desconocimiento: "no lo sé".
4a. Muestra, Variable estocástica. a. Media, b. Moda, c. Mediana	a. 4 b. 14 c. 4	a. 15 b. 5 c. 13	a. 9 b. 9 c. 11	Diez operaciones aritméticas incorrectas.	Una respuesta incorrecta de la media.
4b. Muestra. Dispersión.	5	10	13	Nueve confusiones de dispersión con rango.	Ningún cálculo de rango.
4c. Equidistribución y simetría. Simetría.	0	9	19	Una confusión de simetría con estabilidad.	Ninguna gráfica trazada para identificar la simetría.
5. Muestra, Variable estocástica. Media armónica.	0	21	7	14 cálculos de la media simple.	25 descuidos de proporción.
6. Muestra, Variable estocástica. Media ponderada.	4	21	3	15 cálculos de la media simple.	Tres operaciones aritméticas incorrectas.
7. Muestra, Variable estocástica. Media ponderada.	5	20	3	Nueve cálculos de la media simple.	Un cambio de datos del reactivo.
8. Muestra, Variable estocástica. Media geométrica.	0	13	15	Once cálculos de la media simple.	Dos cálculos de la mediana.
9. Combinatoria (permutación) a. Sin repetición, b. Con repetición	a. 9 b. 1	a. 15 b. 17	a. 4 b. 10	Diez listados incorrectos.	26 confusiones de permutación con repetición.
10. Combinatoria (Selección).	3	16	9	16 inadvertencias de orden.	Nueve traducciones de texto a figuras.
11. Espacio muestra a. Empate. b. Camino empate. c. Ganador. d. Camino ganador.	a. 3 b. 3 c. 3 d. 3	a. 18 b. 13 c. 19 d. 13	a. 7 b. 12 c. 6 d. 12	23 inadvertencias de las posibilidades invertidas de Ingrid y Brayan.	23 desconocimientos de trayectorias.

RC: Número de respuestas correctas; **RI**: Número de respuestas incorrectas; **RO**: Número de respuestas omitidas

Las respuestas esperadas a cada uno de los reactivos del Cuestionario 2 fueron:

Reactivo 1a) Media

Dato (x_i)	Frecuencia (f_i)
0.0	4
4.3	1
4.4	1
4.6	1
7.0	1
7.6	1
9.2	1
17.5	1
28.8	1
29.1	1
34.9	1
45.0	1
52.9	1
53.3	1
56.6	1
63.6	1
64.5	1
65.1	1
67.9	1
78.9	1
81.7	1
85.4	1
88.3	1
90.4	1
94.2	1
99.2	1
145.60	1
$\sum x_i =$ 1285.8	$\sum$ n = 30

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 \cdots x_n}{n}$$

$$\bar{X} = \frac{\substack{0.0+0.0+0.0+0.0+4.3+4.4+4.6+7.0+7.6+9.2+ \\ 17.5+28.8+29.1+34.9+45.0+52.9+53.3+56.6+63.6 \\ 64.5+65.1+67.9+78.9+81.7+85.4+88.3+90.4+99.2+145.60}}{30}$$

$$\bar{X} = \frac{37.1 + 381.7 + 867}{30} = \frac{1285.8}{30} = 42.86 \text{ minutos}$$

1a) Moda

Dato con mayor frecuencia Moda: 0.0 minutos.

1a) Mediana

Identificar si se trata de una serie par o impar de datos.

0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 4.3, 4.4, 4.6, 7.0, 7.6, 9.2, 17.5, 28.8, 29.1, 34.9, 45.0, 52.9, 53.3, 56.6, 63.6, 64.5, 65.1, 67.9, 78.9, 81.7, 85.4, 88.3, 90.4, 94.2, 99.2, 145.60

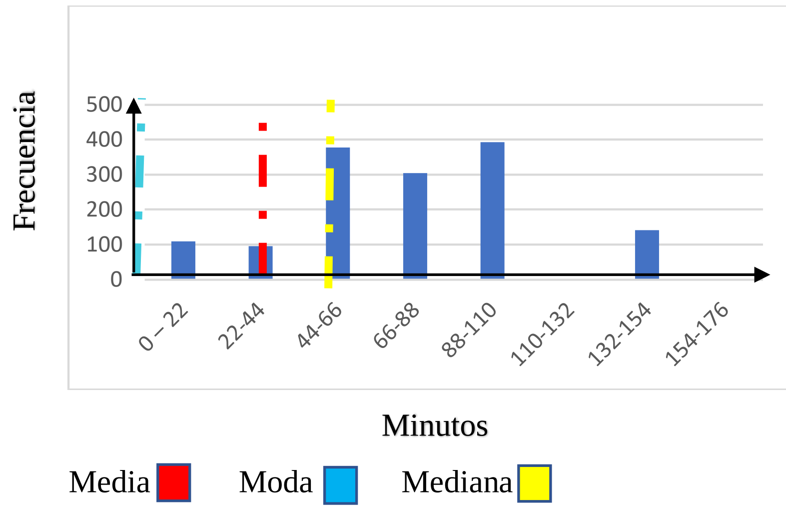
$$\text{Me} = \frac{45+52.9}{2} = \frac{97.9}{2} = 48.95 \text{ minutos}$$

1b) No. Porque la media puede o no coincidir con algún dato de la muestra.

1c) Variable cuantitativa continua

1d)

Tiempo que pasaba una persona escuchando música grabada en 1997



Reactivo 2

2a) El intervalo modal es el 15.5 -20.5. Es el intervalo con mayor frecuencia.

2b) En el intervalo 15.5 – 20.5

Fundamentación: Es una muestra de 100 personas, por lo tanto, para calcular la mediana, se deberían ordenar los datos de mayor a menor y localizar el o los valores centrales. En este caso es $\frac{100}{2}$ = 50. Lo que ayuda a identificar que la mediana se localiza en el dato 50. Al realizar la tabla de frecuencias acumuladas, en el intervalo 15.5 – 20.5 se encuentra la frecuencia mayor que en este caso era 50.

Intervalo	**Frecuencia**	f_a	g_a
20.5 – 25.5	28	100	28
15.5 – 20.5	32	72	60
10.5 – 15.5	21	40	81
5.5 – 10.5	12	19	93
0.5 – 5.5	7	7	100

2c) La $\bar{x} = 16.1$

Para calcular la media, se debe realizar una tabla de frecuencias donde se determine la marca de clase de los intervalos para poder calcular la media de un conjunto de datos agrupados.

Intervalo	**Marca de clase x_i**	f_i	$x_i \cdot f_i$
20.5 – 25.5	23	28	644
15.5 – 20.5	18	32	576
10.5 – 15.5	13	21	273
5.5 – 10.5	8	12	96
0.5 – 5.5	3	7	21
		Σf_i= 100	$\Sigma x_i \cdot f_i$ = 1610

Por último, se aplica el algoritmo para calcular la media de un conjunto de datos agrupados.

$$\bar{x} = \frac{x_i \cdot f_i}{n} = \frac{1610}{100} = 16.10$$

Reactivo 3

3a) Media

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 \cdots x_n}{n} = \frac{6+4+4+3+6+10+1+0+2+6+6+8+5}{13}$$
$$= \frac{61}{13} = 4.69$$

Moda es el 6.

Mediana es 5. Hay que ordenar los datos del menor al mayor (o viceversa) e identificar el valor central dado que es una serie impar de datos 0, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 6, 6, 8, 10

3b) La moda, ya que obtenemos la nota más alta con un 6.

3c) La media, ya que el resultado es deficiente o reprobatorio, con un 4.69.

3d) La nota con mayor frecuencia es 6. Los que aprobaron, no lo hicieron con buena nota. El promedio está por debajo del aprobatorio.

Reactivo 4

4a) Determina las medidas de tendencia central.

Para el número de lagartijas:

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 \cdots x_n}{n}$$
$$\bar{x} = \frac{15+25+27+34+37+39+40+40+40+52}{10} = \frac{349}{10} = 34.9$$

Moda: 40

Mediana. Hay que ordenar los datos $15,\ 25,\ 27,\ 34,\ 37,\ 39,\ 40,\ 40,\ 40,\ 52$ e identificar si es un conjunto de datos par o impar.

$$Me = \frac{37+39}{2} = \frac{76}{2} = 32$$

Medidas para el número de sentadillas:

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 \cdots x_n}{n}$$

$$\bar{X} = \frac{25+26+30+31+32+36+36+42+45+46}{10} = \frac{349}{10} = 34.9$$

Moda: 36

Mediana. Hay que ordenar los datos $25,\ 26,\ 30,\ 31,\ 32,\ 36,\ 36,\ 42,\ 45,\ 46$

$$Me = \frac{32+36}{2} = \frac{68}{2} = 34$$

4b) La muestra más dispersa es la de las lagartijas debido a que el rango es mayor, lo anterior indica que la dispersión con respecto a su media es mayor.

Para el número de lagartijas:

Rango = $H - L$ = 52 – 15 = 37

Para el número de sentadillas:

Rango = $H - L$ = 46 – 25 = 21

4c) Ambas muestras son asimétricas positivas dado que su moda es mayor a su media.

Para el número de lagartijas:

$\bar{x} = 34.9$ y Mo = 40

Para el número de sentadillas:

$\bar{x} = 34.9$ y Mo = 36

Reactivo 5. El promedio adecuado de acuerdo a los datos y la pregunta del referente es la media armónica

Media armónica (H) = $\frac{n}{\Sigma\left(\frac{1}{x}\right)}$

$$\mathrm{H} = \frac{4}{\frac{1}{100}+\frac{1}{200}+\frac{1}{300}+\frac{1}{400}} = \frac{4}{\frac{25}{1\,200}} = \frac{4 \times 1\,200}{25} = \frac{4800}{25} = 192\ km/h$$

Reactivo 6. El promedio adecuado considerando los datos y la pregunta del referente, es la determinación de la media pondera. El promedio del estudiante por sus estudios cursados es de 8.58.

$$Media\ ponderada = \frac{(2\ semestres\ en\ A\ x\ su\ promedio) + (3\ semestres\ en\ B\ x\ su\ promedio)}{el\ núero\ total\ de\ semestres\ cursados}$$

$$Media\ ponderada = \frac{(2\ x\ 8.1) + (3\ x\ 8.9)}{5}$$

$$Media\ ponderada = \frac{16.2 + 26.7}{5}$$

$$Media\ ponderada = \frac{42.9}{5}$$

$$Media\ ponderada = 8.58$$

Reactivo 7. El promedio adecuado es la media ponderada. El peso medio de las 10 personas es de 66 kilos.

$$Media\ ponderada\ = \frac{(4\ mujeres\ x\ su\ peso\ promedio) + (6\ hombres\ x\ su\ peso\ promedio)}{el\ total\ de\ personas\ en\ el\ ascensor}$$

$$Media\ ponderada = \frac{(4\ x\ 60) + (6\ x\ 70)}{10}$$

$$Media\ ponderada = \frac{240 + 420}{10}$$

$$Media\ ponderada = \frac{660}{10}$$

$$Media\ ponderada = 66\ kilos$$

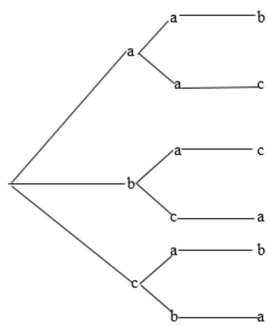
Reactivo 8. Los normalistas debieron determinar la media geométrica para responder la pregunta del referente.

$$Media\ Geométrica\ (G) = \sqrt[n]{x_1 \cdot\ x_2\ \cdot\ x_3\ \cdot x_4\ \cdot x_5}$$

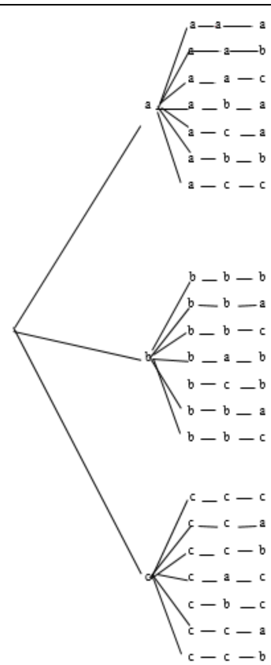
$$G = \sqrt[5]{32.6\ \times 53.5\ \times 28.9\ \times 48.2\ \times 67.4} = \sqrt[5]{163\ 748\ 058\ .6} = 63.98\ \%$$

Reactivo 9

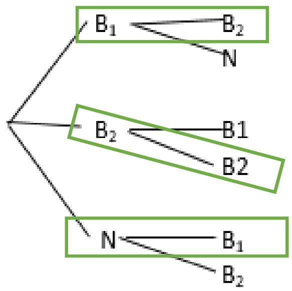
9a) La respuesta con listado sistemático de acuerdo a Lockwood y Gibson (2016), con diagrama de árbol y con expresión matemática.

Listado sistemático	Diagrama de árbol	Expresión matemática
abc acb bac bca cba cab		$P_r^n = n\,(n-1)(n-2)\ldots n\,(n-(r-1)$ $P_2^3 = 3\,(3-2+1) = 3\,(2) = 6$

9b) La respuesta con listado sistemático y expresión matemática dado que el diagrama de árbol llevaría más tiempo de elaborar, fueron

Listado sistemático	Diagrama de árbol	Expresión matemática
aab aac aba aca abb acc aaa baa bba bab bbb bcb bbc bcc caa cbb cca ccb cac cbc ccc		$n^3 - n! = 3^3 - 3! = 27 - 6 = 21$ Se tienen 3 letras que se pueden colocar en cualquier espacio sin importar el orden, por lo tanto, se tienen 27 posibilidades dado que se incluye que dos o tres letras sean idénticas, a las que hay que restarle las 6 permutaciones en las que sí importa el orden y no deben tener repetición por lo que las tres son diferentes (ninguna se repite). $OR_r^n = n^r = 3^3 = 27$ $OR_r^n - P_r^n$ $27 - 6 = 21$

Reactivo 10. Las respuestas esperadas fueron con uso de diagrama de árbol, listado sistemático o uso de expresión matemática.

Listado sistemático	Diagrama de árbol	Expresión matemática
B_1B_2 B_1N B_2B_1 B_2N NB_1 NB_2	 Con el recuadro verde se eliminan las opciones que causan un doble conteo.	$C_r^n = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$ $C_2^3 = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} = \frac{3!}{2!}$ $C_2^3 = \frac{3 \cdot 2}{2} = \frac{6}{2} = 3$

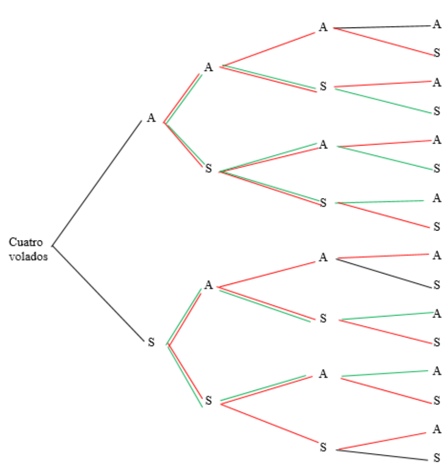
Reactivo 11

11a) Sí puede haber empate porque Brayan e Ingrid tienen las mismas posibilidades de ganar (cuatro cada uno) y las posibilidades de Jorge son inversas a la de los dos primeros.

11b) Véase el diagrama de árbol (trayectorias rojas).

11c) Adriana porque hay más posibilidades con dos águilas.

11d) Véanse las ramas verdes (camino del ganador) en el diagrama de árbol.



5.1.2.1. Ideas fundamentales de estocásticos. La comprensión identificada de las ideas de estocásticos de los estudiantes en los reactivos (véase la Tabla 3.12) fue:

Espacio muestra. En la redacción del reactivo 11 (véase la Tabla 3.12) omitimos el artículo "un" en la condición para Brayan: "En un juego de cuatro volados Brayan gana si cae águila, …", en lugar de: "En un juego de cuatro volados Brayan gana si cae **un** águila, …". La omisión repercutió en las respuestas a los incisos a) y b) del reactivo, ya que seis estudiantes entendieron que Brayan ganaba si caía águila, por lo que consideraron que tenía 15 posibilidades de ganar. Otros ocho estudiantes entendieron que Brayan ganaba si caía *un* águila, pero de ellos sólo tres (E^2_{13}, E^2_{32} y E^2_{45}) dieron respuesta correcta. Diez estudiantes no contestaron dado que no marcaron las 15 posibilidades de Brayan si consideraban que caía águila o no identificaron correctamente las cuatro posibilidades si consideraban que Brayan ganaba si caía un águila. En los incisos c) 14 estudiantes y d) 13 estudiantes no identificaron las seis posibilidades que tenía Adriana para ganar.

Combinatoria. En el inciso a) del reactivo 9 (véase la Tabla 3.12), nueve estudiantes identificaron todas las posibilidades para dar la respuesta correcta de seis posibilidades. En el inciso b) sólo E^2_{21} identificó las 21 posibilidades (véase la Figura 5.11).

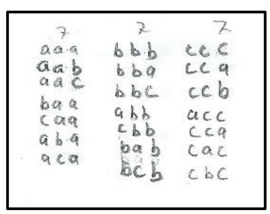


Figura 5.11. Solución correcta de E^2_{21} al inciso b) del reactivo 9.

El reactivo 10 (véase la Tabla 3.12) tuvo tres respuestas correctas; dos estudiantes distinguieron las posibilidades por el orden de extracción de las bolas; E^2_{19} numeró las bolas y E^2_{21} encerró en un círculo a la que se extrajo primero para distinguirla de la que se extrajo después (véase la Figura 5.12), lo que confirma lo señalado por Lockwood y Gibson (2016) de que "otros investigadores han destacado las características matemáticas específicas de los problemas de recuento que son especialmente difíciles, como las cuestiones de orden y el recuento excesivo" (p. 249);

es decir, $E^2{}_{21}$ trazó un diagrama de árbol completo pero incorrecto, pues colocó en las ramas la cantidad de bolas existentes para cada extracción (no consideró la distinguibilidad de los objetos) y como respuesta dio 9 maneras distintas, pues contó todas las letras que encerró en un círculo considerando así sólo una extracción y no dos como se señala en el reactivo.

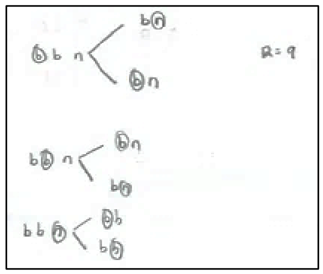


Figura 5.12. Solución incorrecta propuesta por $E^2{}_{21}$ al reactivo 10.

Equidistribución y simetría. En el reactivo 4 (véase la Tabla 3.12), incisos b) y c), cuatro estudiantes escribieron el valor mínimo y el máximo de los datos, pero no calcularon el rango para determinar la dispersión respectiva y ninguno trazó ni identificó si las gráficas eran simétricas o asimétricas (positivas o negativas) y tampoco determinaron si la media o la moda eran mayores con lo cual podrían haber identificado si las gráficas eran o no simétricas. $E^2{}_{15}$ registró en el inciso b) “sentadillas por la cuestión de la mediana” y en el inciso c) suponemos que diferenció entre las medidas de tendencia central, pues anotó “…la moda tendría una mayor elevación o espacio (suponemos se refirió al tamaño de la barra en la gráfica) a lo contrario de las dos otras dos unidades (suponemos hizo diferencia entre las barras que trazaría en la gráfica para la media y la mediana)”. Lo anterior evidenció el conocimiento deficiente de los estudiantes acerca de la simetría de las muestras de la situación referente. De acuerdo a Pfannkuch (2011), el contexto de datos “se refiere a las bases de conocimiento que necesitan ser activadas para responder a una pregunta: está centrada en el problema [la simetría de los datos]” (p. 28).

Variable estocástica. Sólo un estudiante en el reactivo 1 a) (véase la Tabla 3.12), cinco estudiantes en el 2 a) y tres en el 4 a), identificaron la mediana solicitada. Ocho estudiantes contestaron correctamente el reactivo 3 a), de media aritmética. Una estudiante en el reactivo 1 a) y cuatro estudiantes en el reactivo 3 a) confundieron la media y la mediana: sus procedimientos y cálculos fueron correctos, pero invirtieron los resultados. Se reafirmó lo señalado por Zawojewski y Shaughnessy (2000) citados en Bakker (2003) de que "los estudiantes no han desarrollado el sentido de la distribución y los valores atípicos, por lo que no pueden decidir entre la media y la mediana" (párr. 65).

Seis estudiantes contestaron incorrectamente el reactivo 5 de media armónica (véase la Tabla 3.12); trazaron un cuadrado e indicaron sus lados (distancias) iguales y las velocidades distintas correspondientes a cada lado; dos de ellos calcularon la media, y los otros cinco (E^{1}_{8}, E^{2}_{12}, E^{2}_{13}, E^{2}_{21} y E^{1}_{45}) respondieron "200 km/h" que sería la mitad de la velocidad máxima que alcanzó el aeroplano al recorrer el cuadrado; E^{2}_{21} no dio evidencia de su procedimiento; E^{2}_{13} primero calculó al parecer la media de las velocidades pero sólo dividió la suma entre dos (500 km/h) y, sin quedar satisfecha, determinó el tiempo de recorrido para cada velocidad, pero equivocó el de 100 km a 400 km/h (10 min en lugar de 15 min), así que determinó el tiempo total de recorrido como de 2 horas en vez de 2:05 horas, por lo que su respuesta fue incorrecta (véase la Figura 5.13). Ningún estudiante contestó correctamente el reactivo 8 (véase la Tabla 3.12) de media geométrica, sino que calcularon la media o la mediana (véase la Figura 5.14).

Ninguno de los estudiantes en los reactivos 5, 7 y 8 (véase la Tabla 3.12) identificaron el tipo de promedio; pues no reconocieron los elementos a promediar en cada uno de los problemas, en acuerdo con Moroney (1979).

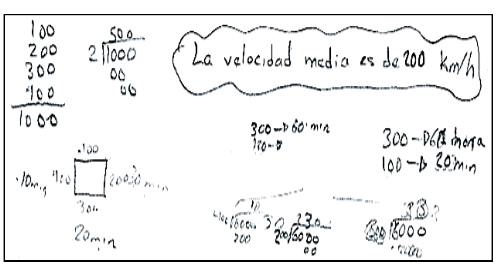
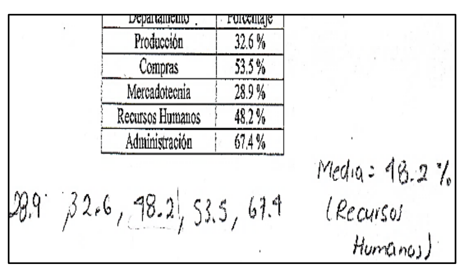


Figura 5.13. Solución incorrecta al reactivo 10 con media aritmética en lugar de la media armónica.



Departamento	Porcentaje
Producción	32.6 %
Compras	53.5 %
Mercadotecnia	28.9 %
Recursos Humanos	48.2 %
Administración	67.4 %

Figura 5.14. Solución incorrecta al reactivo 8 con mediana en lugar de la media geométrica.

Al reactivo 6 de media ponderada (véase la Tabla 3.12), sólo cuatro estudiantes dieron respuesta correcta (8.58 de promedio de estudios universitarios), E^1_{32} determinó tanto la media aritmética como la ponderada y decidió como respuesta correcta el resultado de la segunda (media ponderada), cuatro más respondieron con la media aritmética sin considerar los pesos (8.5 de promedio en la universidad, véase la Figura 5.15). Cinco estudiantes en el reactivo 7 (véase la Tabla 3.12) identificaron el doble promedio y respondieron correctamente. En estos reactivos, seis y siete estudiantes, respectivamente, primero realizaron una representación icónica, es decir, realizaron un modelo generativo (pictórico), de acuerdo con Fischbein (1977), que les permitió identificar a su vez, las operaciones aritméticas para dar respuesta a las situaciones planteadas (como ejemplo, véanse la Figura 5.15 y la Figura 5.16).

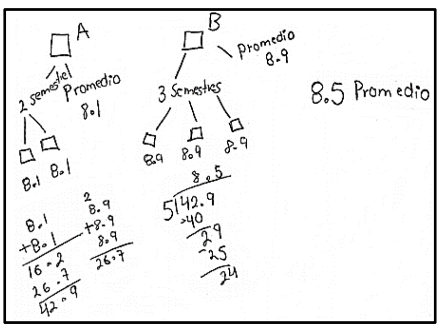


Figura 5.15. Solución incorrecta al reactivo 6 de media ponderada.

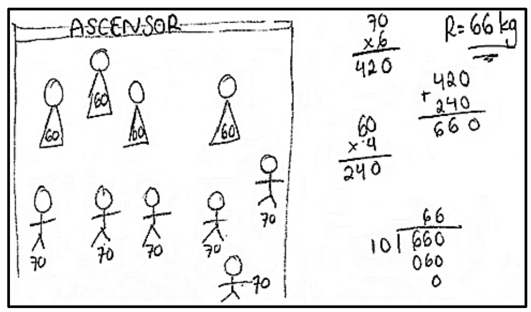


Figura 5.16. Solución correcta al reactivo 7 de media ponderada.

Muestra. En el reactivo 1 d) (véase la Tabla 3.12), nueve estudiantes no consideraron la totalidad de los datos al trazar la gráfica de la muestra y ubicar en ella los valores de las tres medidas de tendencia central que calcularon; sólo dos estudiantes sí consideraron todos los datos, pero ubicaron incorrectamente las medidas centrales.

5.1.2.2. Otros conceptos matemáticos. En general, el concepto matemático deficiente en los estudiantes es el producto cartesiano y, en segundo lugar, las operaciones básicas con números decimales.

Unidades de medida. E^2_{23} en el reactivo 7 (véase la Tabla 3.12) escribió "Kl" para kilos. Cuatro estudiantes omitieron las unidades de medida en el reactivo 5 (véase la Tabla

3.12); otros dos estudiantes prescindieron de km/h, $E^2{}_4$ y $E^2{}_{16}$ registraron sólo "km", y $E^2{}_{24}$ anotó "k/h" evidenciando su descuido al tratar las unidades de medida.

Operaciones aritméticas básicas. En los ocho primeros reactivos (véase la Tabla 3.12) se realizaron operaciones aritméticas; 15 estudiantes tuvieron deficiencias en la suma y división de números decimales.

Producto cartesiano. Éste es un concepto incipiente en los estudiantes, a pesar de los años de escolaridad cursados; ningún estudiante estableció el par de coordenadas (dato, frecuencia) al trazar su gráfica en el reactivo 1d).

5.1.2.3. Recursos semióticos. Los estudiantes utilizan mayormente el listado como estrategia de solución a problemas de técnica de conteo y no leen ni trazan correctamente los diagramas de árbol.

Gráficas. En el reactivo 1d) (véase la Tabla 3.12), nueve estudiantes únicamente trazaron la gráfica con las barras para las tres medidas de tendencia central obtenidas; lo anterior suponemos se debe a que no quedó clara la instrucción "traza la gráfica correspondiente y ubica en ella las tres medidas de tendencia central que determinaste" o, a que sólo le dieron importancia a la segunda parte de dicha instrucción.

Figuras. Para los reactivos 6 y 7 (véase la Tabla 3.12), planteados en lengua natural escrita, ocho estudiantes tradujeron sus enunciados a figuras para responderlos; no operaron los datos directamente (véanse la Figura 5.15 y la Figura 5.16). En el reactivo 10 (véase la Tabla 3.10), nueve estudiantes trazaron figuras de las bolas negras y blancas para contar las posibilidades una por una y dar respuesta a las preguntas planteadas.

Notación aritmética. Para los primeros ocho reactivos (véase la Tabla 3.12), esta notación fue utilizada por todos los normalistas (véanse la Figura 5.15 y la Figura 5.16).

Diagrama de árbol. 25 estudiantes no interpretaron correctamente el diagrama de árbol del reactivo 11 (véase el Anexo 1). Los estudiantes no reconocieron el mismo objeto matemático de conocimiento en dos recursos semióticos diferentes (lengua natural escrita y diagrama de árbol) por lo que no llegaron a las respuestas correctas en cada inciso. En el reactivo 10 (véase la Tabla 3.12), tres estudiantes basaron su estrategia de solución en un diagrama de árbol (véase la Figura 5.15). En el reactivo 9 (véase la Tabla 3.12), cinco estudiantes trazaron un diagrama de árbol, tres fueron incorrectos y dos (E^2_{13} y E^1_{32}) fueron correctos para dar su respuesta al inciso a) y tres estudiantes dieron respuesta correcta al inciso b). Cabe aclarar que el diagrama de árbol que trazó E^2_9 fue correcto dado que identificó las 27 posibilidades; sin embargo, no consideró las seis posibilidades en que las letras son distintas, por lo que no llegó a la respuesta correcta de 21 palabras; al reafirmar su respuesta con el listado de todas las posibilidades identificó como respuesta 18 palabras distintas, no consideró las tres opciones (aaa, bbb, y ccc) para dar la respuesta correcta, dado que la instrucción fue "por lo menos dos" (véase en el Apéndice 2), es decir, dos o tres letras iguales.

Listado de posibilidades. En el reactivo 9 inciso a) (véase la Tabla 3.12) 15 estudiantes y nueve estudiantes en el inciso b) realizaron el listado de posibilidades de palabras con y sin repetición. En el reactivo 10 (véase la Tabla 3.12), siete estudiantes enlistaron incompleta e incorrectamente las posibles extracciones.

Los cinco recursos semióticos utilizados por los estudiantes para responder a los reactivos fueron a nivel de experiencia, de acuerdo a Andrà (2011) y uno a nivel de pensamiento aritmético, pero no hubo algún procedimiento a nivel de la teoría y se esperaría que este último nivel debería haber predominado en los procesos de solución que dieran los estudiantes a los reactivos.

5.1.2.4. Términos empleados. Los términos confundidos por los estudiantes e incluidos en los referentes (véase la cuarta columna de la Tabla 3.12) y los que ellos utilizaron para responder a cada reactivo fueron:

Media y mediana. En el reactivo 8 (véase la Tabla 3.12), un estudiante confundió el proceso de obtener la mediana con el de la media (véase la Figura 5.14).

Proporción media. Esta expresión no fue comprendida por los estudiantes, dado que aplicaron la media aritmética en lugar de la media geométrica para dar respuesta al reactivo 8 y por sus antecedentes de formación de estocásticos en el bachillerato (véase el apartado 4.1 y la octava columna de la Tabla 6.1).

Peso medio. Es un concepto no claro para los estudiantes, ya que sólo tres estudiantes en el reactivo 6 y cinco estudiantes en el reactivo 7 (véase la Tabla 3.12) obtuvieron la respuesta correcta de los referentes.

Promedio. Es utilizado como sinónimo de media por los 26 normalistas. De acuerdo a Moroney (1979), los estudiantes tienen una "idea de promedio de uso general" (p. 170).

Dispersión y simetría. Al inciso b) del reactivo 4 (véase la Tabla 3.12), que incluyó al término “disperso”, los estudiantes respondieron: $E^2{}_2$: “En el de sentadillas, muestra cantidades altas y bajas”; $E^2{}_4$: “52 porque es una cantidad que eleva y hace que las cantidades muestren una variación al realizar los datos”; $E^2{}_6$: “El del alumno número 6 ya que va de 52 a 36. Hay mucha diferencia”; $E^2{}_7$: “Las lagartijas porque los datos de los extremos están más alejados”; $E^2{}_{13}$: “Las lagartijas porque hay más diferencia entre el número más bajo que es 15 y el más alto que es 52”; $E^2{}_{17}$: “Lagartijas. Varía mucho la muestra”; $E^2{}_{23}$: “54 es el mayor”; $E^2{}_{26}$: “Las lagartijas, pues hay más separación entre el límite inferior y superior”.

Si bien el inciso c) de este mismo reactivo fue mal planteado al referirse al tipo *simetría*, en lugar de identificar si eran o no *simétricos* o *asimétricos*, por lo que se podría corregir por la pregunta ¿Cómo son las gráficas que trazaste? o ¿Las gráficas que trazaste son simétricas o asimétricas? ¿Por qué?

Las respuestas que dieron los normalistas fueron: $E^2{}_7$: “Todos están encontrando un punto medio de los datos”; $E^2{}_8$: “No es estable [el conjunto de datos de las lagartijas]”; $E^2{}_{15}$: “La moda tendría una mayor elevación o espacio a lo contrario de las otras dos unidades”; $E^2{}_{19}$: “No sería proporcional y subirían, así como disminuirían en diferentes cantidades”; y $E^2{}_{21}$: “Irregular porque hay muchas variantes”.

5.1.2.5. Observaciones. De acuerdo con la dimensión cognitiva propuesta por Scheiner (2015) y con la clasificación de los tipos de conocimiento propuestos por Pollatsek, *et al*. (1981), el desempeño de los estudiantes se clasificó de la siguiente manera.

Conocimiento de cálculo. En general, 25 de los estudiantes manifestaron un conocimiento de las medidas de tendencia central (media, moda y mediana) por su algoritmo (Mokros y Russell, 1995); es decir, a lo más aplicaron un conocimiento de cálculo (Pollatsek, *et al*., 1981) en los ocho primeros reactivos.

Conocimiento funcional. En el reactivo 5 (véase la Tabla 3.12), sólo $E^2{}_{13}$ dio evidencia de un conocimiento funcional de la proporción inversa para determinar la media armónica al advertir la relación inversamente proporcional de la velocidad a la cantidad variable tiempo, y directamente proporcional a la distancia constante, aunque no llegó a la respuesta correcta (véase la Figura 5.13). $E^2{}_{17}$ evidenció su conocimiento funcional de la media simple al dar respuesta correcta a los dos reactivos de media ponderada (6 y 7). Otros tres estudiantes (E^2_3, E^2_{21} y E^1_{32}) dieron respuesta correcta al reactivo 6 y cuatro al reactivo 7, utilizaron sus conocimientos de la media aritmética.

Conocimiento analógico: A pesar de que los cuatro primeros reactivos (véase la Tabla 3.12) incluían el cálculo de las medidas centrales, es decir, promovían el conocimiento analógico al proponer diversas representaciones (datos agrupados y no agrupados, tablas, lengua natural escrita y se solicitaba que trazaran gráficas) de los conceptos de media, mediana y moda "para evitar que los estudiantes cometan errores al solucionar un problema" (Pollatsek, *et al*.,1981 p. 201); sin embargo, los normalistas no establecieron las analogías entre ellos y no determinaron respuestas correctas en todos los referentes. Sólo un estudiante (E^2_{17}) obtuvo la respuesta correcta a los dos referentes de la media ponderada, lo que nos hace suponer que estableció una analogía. En los reactivos 9, 10 y 11 de principio fundamental de conteo (permutaciones, selección y análisis de diagrama de árbol), la estrategia de algunos estudiantes fue trazar diagramas de árbol (tres), figuras (E^2_{22}) y listados (nueve) que, de acuerdo con Andrà (2011), corresponden al nivel de experiencia para dar solución al problema planteado.

En acuerdo con Lockwood y Gibson (2016), para el inciso b) del reactivo 9 (véase la Tabla 3.12) un estudiante (E^2_{21}) enlistó correctamente las 21 posibilidades (véase la Figura 5.11) y encabezó cada columna del listado con el número de posibilidades en cada una (siete), lo que indica que identificó el patrón de que para cada letra había siete posibilidades de repetir por lo menos dos letras en cada palabra; también el estudiante consideró ir fijando cada una de las letras hasta encontrar todas las posibilidades (Piaget e Inhelder, 1951). Tres estudiantes (E^2_{13}, E^1_{32} y E^1_{45}) dieron respuesta correcta al reactivo 11 (véase la Tabla 3.12). De acuerdo a Lockwood y Gibson (2016), al menos identificaron los elementos de interés del fenómeno planteado en el enunciado en lengua natural escrita y en el registro diagramático de todos sus posibles resultados (diagrama de árbol), lo cual supone una aproximación a la operación de conversión.

Si bien, nuestro objetivo no fue comparar el rendimiento escolar de los estudiantes de las diferentes generaciones, sin embargo, fue notorio que E^1_{32} obtuvo el mayor número de respuestas correctas al Cuestionario 2 y E^1_{45} quedó en un tercer lugar, a pesar de haber pasado ya un año de que éstos estudiantes habían cursado la asignatura *Procesamiento de Información Estadística*.

Steinbring (1991) propuso un triángulo epistemológico para la apropiación de un concepto matemático el cual considera en un vértice al *objeto* para constituir un nuevo conocimiento; en nuestro caso fue el reactivo 11 (véase la Tabla 3.12) sobre un juego de cuatro volados para la idea fundamental de espacio muestra. El *signo*; en el referente 11 estuvo representado por un diagrama de árbol cuya función semiótica fue representar todos los resultados posibles en un juego de cuatro volados; en cuanto a la función epistemológica fue la identificación de las posibilidades de ganar de cada uno los jugadores; lo anterior fue comprendido por E^2_{13}, E^1_{32} y E^1_{45} quienes identificaron correctamente el espacio muestra (*concepto*) para dar respuesta correcta a cada uno de los cuatro incisos del reactivo (véase la Figura 5.17).

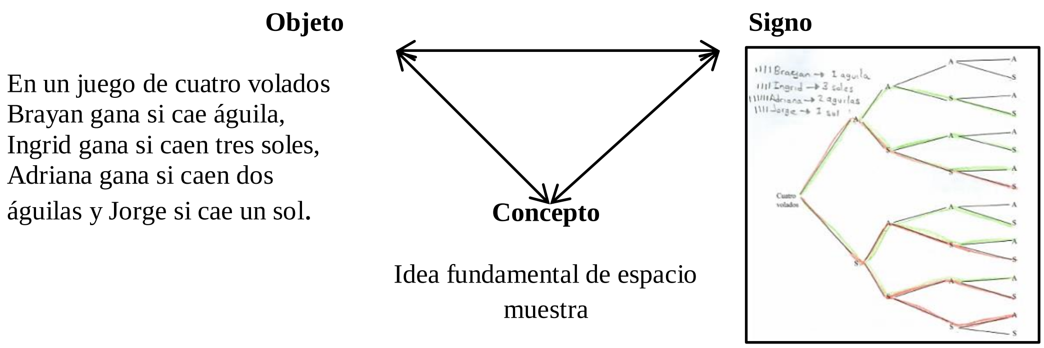


Figura 5.17. Comprensión de E^2_{13} del objeto y el signo para la idea de espacio muestra en el reactivo 11.

5.2. Reflexión y Experienciación en la escuela Normal

La experienciación (Maturana y Varela, 1994) de la enseñanza (véase la Figura 3.1) fue precedida por una reflexión (Ferrater, 1994) acerca de la que la investigadora impartió a 52 normalistas, a quienes aplicó el Cuestionario 1. Tal reflexión se basó en las anotaciones en cuaderno que tres de estos estudiantes (E^1_8, E^1_{14} y E^1_{28}) efectuaron durante 16 sesiones de la asignatura *Procesamiento de Información Estadística*, relativas a la Unidad 1.

Un año después, la titular de esa asignatura solicitó a esta investigadora la enseñanza del cálculo de las medidas centrales (en dos sesiones) a 26 normalistas, enseñanza que fue objeto de experienciación (Maturana y Varela, 1994). Las sesiones tuvieron una duración aproximada de 50 min cada una y se desarrollaron en los salones asignados a los grupos.

5.2.1. Reflexión antecedente: enseñanza de la unidad I

La unidad 1 "Estadística" del programa de estudios de la licenciatura (SEP, 2012d, pp.16-23) se caracteriza en la Tabla 4.3. Para 52 docentes en formación, la investigadora les propuso el estudio de cuatro contenidos de textos de los recomendados en el programa de la asignatura *Procesamiento de Información Estadística* para llevar a cabo las sesiones de la unidad 1: a) "¿Qué es la Estadística?" (Johnson, 1996, Capítulo 1, pp. 18-30); b) "Introducción a la Estadística" y c) "Descripción de los conjuntos de datos" (Ross, 2008, Capítulos 1 y 2, respectivamente, pp. 1-68); d) "Los cálculos" (Nortes, 1991, Capítulo 4, pp. 73-97), para cuyo subtema "Aplicación en el aula" (pp. 93-97) Nortes sugiere que para la enseñanza de los contenidos de estadística se recurra a temas de la vida cotidiana.

5.2.1.1. Organización de las sesiones para la enseñanza de la Unidad 1. La Tabla 5.6 resume la organización de los contenidos de la primera unidad, que se trataron en 16 sesiones. Un primer resultado de la reflexión fue que la organización de las horas para cada unidad es un reto para impartir el programa de la asignatura, ya que la enseñanza sólo cubrió el 25 % de las cuatro unidades que se deben impartir en la asignatura, y el tiempo destinado a cada uno de los contenidos de la unidad fue insuficiente, por lo que no se trató el tema de datos bivariados. De la Actividad 5 no obtuvimos evidencia en cuadernos.

Tabla 5.6. Organización de los contenidos de la unidad 1, Estadística, de la asignatura *Procesamiento de Información Estadística* y de las actividades realizadas para su enseñanza.

Contenido	Evidencias en cuadernos
1. Estudio de la estadística (9 de febrero de 2015)	Mapa conceptual
2. Tablas de distribución de frecuencias y representaciones gráficas (11, 13, 18 y 20 de febrero de 2015)	Cuadros comparativos
3. Revisión de libros de texto (4 y 6 de marzo de 2015)	Apuntes: cuadros de contenido por grado
4. Medidas de tendencia central (13, 15 y 17 de abril de 2015)	Procedimientos de resolución de problemas
5. Medidas de posición (20, 22 y 24 de abril de 2015)	----------------
6. Medidas de dispersión (1, 5 y 8 de junio de 2015)	Resolución de problemas y apuntes de los estudiantes
7. Datos bivariados.	--------------------

Las Actividades 4 y 6 incluyeron el problema 1 (medidas de tendencia central) y el problema 2 (medidas de dispersión). La Tabla 5.7 los caracteriza.

Tabla 5.7. Caracterización de dos problemas según la célula de análisis (Ojeda, 2006).

Ideas fundamentales de estocásticos: Variable estocástica, Muestra.			
Referente del problema	**Otros conceptos matemáticos**	**Recursos semióticos**	**Términos empleados**
1. Las puntuaciones obtenidas por los ganadores del torneo de golf de E.U. entre 1981 y 1990 fueron las siguientes: 280, 284, 280, 277, 282, 279, 285, 281, 283, 278. a) Organiza una tabla de frecuencias con el conjunto de datos. b) Traza un polígono de frecuencias del conjunto de datos. c) Calcula la media de los datos. **Fuente**: Modificado del propuesto por Ross, S. (2008). *Introducción a la Estadística*. España: Reverté. p. 72	Operaciones aritméticas, números naturales y decimales, plano y producto cartesiano.	Lengua natural escrita, signos numéricos, tabla de frecuencias, polígono de frecuencias.	Frecuencia, media, dato.
2. Un alumno A obtiene en sus cinco evaluaciones en la asignatura de Lengua las siguientes calificaciones: 4, 7, 9, 2, 8. Otro alumno B obtiene en sus cinco evaluaciones: 5, 6, 6, 6, 7. ¿Qué podríamos decir de ambos alumnos? **Fuente**: Nortes, A. (1991). *Encuestas y precios*. España: Síntesis. Pp. 86-88	Operaciones aritméticas, números naturales.	Lengua natural escrita, signos numéricos.	Cinco evaluaciones, dos alumnos.

5.2.1.2. Referentes. En el problema 1 (véase la Tabla 5.7), los estudiantes debían identificar el tamaño de la muestra considerando la frecuencia de cada dato para determinar la media. Se requería la organización de las puntuaciones en una tabla de frecuencia simple y el trazo de la gráfica correspondiente a la muestra dada.

En el problema 2 (véase la Tabla 5.7), la normalista tenía que identificar la muestra de las calificaciones de cada uno de los alumnos para determinar las medidas de tendencia central y de dispersión respectivas y con esa base comparar sus rendimientos escolares. Este problema tenía mayor grado de complejidad dado que incluía determinar la varianza y la desviación estándar de la muestra dada. Se requerían otros conocimientos matemáticos como lo son la raíz cuadrada, el cuadrado de un número. Mientras que en el problema 1 sólo requería la aplicación de operaciones aritméticas para dar una solución a las preguntas planteadas.

5.2.1.3. Ideas fundamentales de estocásticos. La idea de equidistribución y simetría fue poco favorecida en los procesos de solución que hicieron las normalistas al dar respuesta a los referentes planteados.

Variable estocástica. Las tres estudiantes obtuvieron el valor de la media de los datos (véase la Figura 5.18) en el problema 1. En el problema 2, sólo E^1_8 anotó el valor de la media a la derecha de cada conjunto de datos, las otras dos estudiantes lo determinaron colocándolo en otro espacio de su hoja. Para medida de dispersión, el rango (o recorrido) fue calculado correctamente por E^1_8 (véase la Figura 5.19).

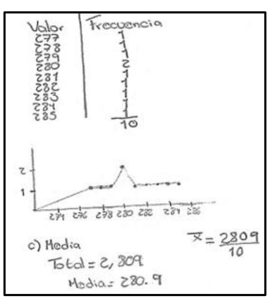


Figura 5.18. Solución propuesta al problema 1 por E^1_{14}.

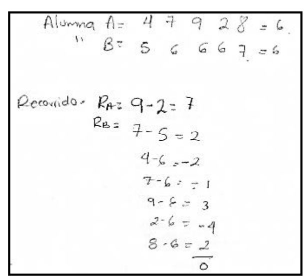


Figura 5.19. Problema 2: identificación de la media por E^1_8.

Muestra. Las tres normalistas identificaron correctamente los datos y el tamaño de la muestra en el problema 1 para obtener la media, lo cual interpretamos como la puesta en juego de un razonamiento hacia arriba que de acuerdo a Bakker y Gravemeijer (2004) es "típico de principiantes en estadística" (p. 148) el cual consiste en ver primero los valores individuales de los datos para determinar la media, mediana o moda; véase la Figura 5.18), no obstante, tal fue el tipo de respuesta requerida por el problema (véase la Tabla 5.7). De igual manera ocurrió con el problema 2, aunque éste sí demandaba un razonamiento hacia abajo (Bakker y Gravemeijer, 2004), el cual consiste en ver primero la distribución del conjunto de datos considerando sus características de dispersión y de asimetría en los dos conjuntos de datos (véase también en la Tabla 5.7), lo cual no fue explícito en los apuntes de las estudiantes, quienes se concretaron a anotar los resultados de sus cálculos sin señalar la razón de referirse al recorrido; es más, E^1_8 interpretó tal requerimiento (el recorrido) del problema como la comprobación de la propiedad de la media de que el promedio de las desviaciones de los datos respecto a ella es cero (véase la Figura 5.19).

Equidistribución y simetría. En sus apuntes, las estudiantes no se refirieron a una muestra en particular cuyas frecuencias de datos se distribuyeran aproximadamente de forma simétrica, ni al papel que la media podía jugar en una distribución tal, así como tampoco cómo serían entre sí las medidas de tendencia central más comunes (véase la Figura 5.19).

5.2.1.4. Otros conceptos matemáticos. Las tres normalistas realizaron *operaciones aritméticas básicas* correctas; utilizaron los *números naturales y decimales* al calcular la media y el *producto cartesiano* del dato y su frecuencia (*número natural*) en el problema 1 (véase la Figura 5.18). También pusieron en juego el *orden de números naturales* al colocar los datos en la recta numérica (ejes de la gráfica). En el problema 2, E^1_8 realizó *operaciones básicas correctas* (véase la Figura 5.19) y escribió la *raíz cuadrada* en la expresión de la desviación típica pero no se tiene evidencia de que la haya calculado.

5.2.1.5. Recursos semióticos. De acuerdo con Andrà (2011), los estudiantes utilizaron representaciones a nivel de experiencia y a nivel de teoría, es decir, los normalistas registraron diversos recursos semióticos al dar solución a las preguntas que plantearon los referentes.

Simbología matemática. Ninguna de las tres normalistas registró la expresión matemática de la media en el problema 1, sólo anotaron los valores correspondientes (véase la Figura 5.18). $E^1{}_{14}$ registró el símbolo matemático de la media ($\bar{x}$) al calcularla. $E^1{}_8$ sí registró la expresión para la varianza y para la desviación típica (véase la Figura 5.20). En sus apuntes es clara la laxitud del uso de $E^1{}_8$ de la notación matemática, por ejemplo, en el problema 2 al igualar ("=") cada sujeto con su conjunto de datos y éstos con el valor de la media respectiva (véase la Figura 5.19).

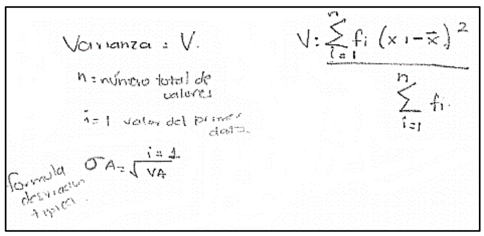


Figura 5.20. Expresiones para la varianza y la desviación típica registradas por $E^1{}_8$ en el problema 1.

Gráficas y polígono de frecuencias. El polígono requerido en el problema 1 b) fue trazado correctamente por las tres estudiantes (véase la Figura 5.18). Además, en el cuadro comparativo que $E^1{}_{28}$ propuso en la Actividad 2, ella identificó las similitudes, las diferencias y la funcionalidad de diferentes tipos de gráficas (véase la Figura 5.21); en la columna de las similitudes, $E^1{}_{28}$ anotó de manera general que "la información puede ser: simétrica o asimétrica" (véase la Figura 5.21), de forma semejante a como Johnson (1976) en el Capítulo 2 introduce el atributo de simetría en la descripción de los conjuntos de datos: "un histograma puede a menudo indicar: 1. La simetría de los datos, 2. La dispersión de éstos…" (p. 31). La estudiante aplicó esto al solucionar los problemas que se le plantearon (véase la Figura 5.18), pero sólo registró su asignación de "frecuencia" al eje "y" de la gráfica, y no rotuló ninguno de los dos ejes con el título correspondiente (eje "y", frecuencia de las puntuaciones; eje "x" puntaciones obtenidas por los ganadores de un torneo de golf).

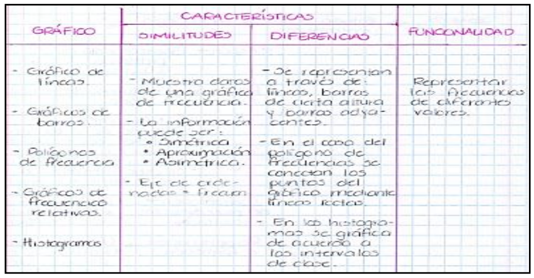


GRÁFICO	CARACTERÍSTICAS		FUNCIONALIDAD
	SIMILITUDES	DIFERENCIAS	
- Gráfico de líneas. - Gráficos de barras. - Polígonos de frecuencia - Gráficos de frecuencias relativas. - Histogramas	- Muestra datos de una gráfica de frecuencia. - La información puede ser: • Simétrica • Aproximación • Asimétrica. - Eje de ordenadas = frecuen	- Se representan a través de: líneas, barras de cierta altura y barras adyacentes. - En el caso del polígono de frecuencias se conectan los puntos del gráfico mediante líneas rectas. - En los histogramas se gráfica de acuerdo a los intervalos de clase.	Representar las frecuencias de diferentes valores.

Figura 5.21. Cuadro comparativo de gráficas realizado por E^1_{28}.

5.2.1.6. Términos empleados. Los términos “frecuencia” y “media” fueron identificados correctamente por las tres estudiantes en las actividades 4 y 6.

Frecuencia. Las tres estudiantes anotaron el término frecuencia en la tabla de frecuencias.

Media. Las tres estudiantes anotaron el término media al escribir el resultado.

Dato. Ninguna de las estudiantes anotó el término, en su lugar registraron la palabra *valor* en la tabla de frecuencias; tampoco utilizaron el término “variable”. Al parecer, E^1_{28} englobó con el término “información” a los valores de la variable y a sus frecuencias (véase la Figura 5.18).

Recorrido (rango). E^1_8 apuntó el término y lo distinguió para cada conjunto (*A* y *B*) de datos al denotarlo por R_A y R_B, respectivamente (véase la Figura 5.19).

Desviación. E^1_8 no anotó la palabra, pero realizó los cálculos para obtener la desviación de cada uno de los datos con respecto a su media en la primera muestra del problema 2 e incluso sumó las diferencias obtenidas entre cada dato y la media del conjunto de datos, para confirmar que “la suma de las desviaciones con relación a la media aritmética es cero” (Nortes, 1991, p. 87).

Varianza y desviación típica. Fueron términos escritos por E^1_8 al anotar las expresiones matemáticas respectivas, pero no las aplicó a algún caso para efectuar el cálculo correspondiente.

Distribución simétrica. E^1_{14} anotó en su cuaderno “cuando la distribución no es simétrica se llama asimetría”, lo que evidencia su confusión entre una propiedad de forma de una distribución particular y la forma.

Además, en la Actividad 1, E^1_{28} incluyó en su mapa conceptual los términos: estadística, probabilidad, probabilidad empírica, procesos aleatorios, datos, aleatorio, posibilidad, azar, probabilidad clásica, entre otros, referidos a estocásticos en el texto de Ross (2008) "Introducción a la Estadística" (véase la Figura 5.22).

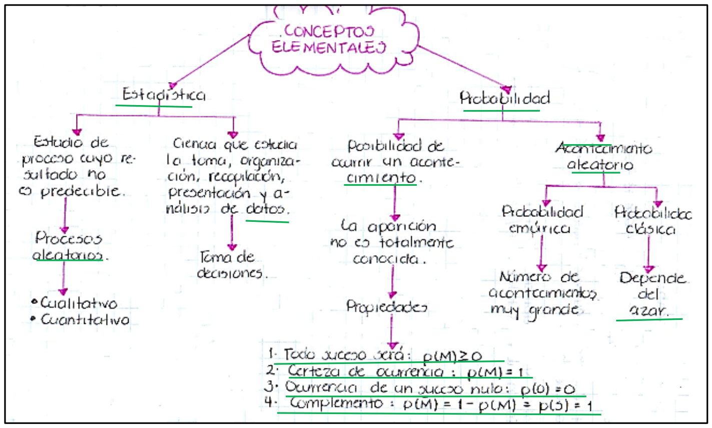


Figura 5.22. Mapa conceptual propuesto por E^1_{28}.

5.2.1.7. Observaciones. En la dimensión cognitiva (Scheiner, 2015) identificamos en el análisis de los resultados los tipos de conocimiento propuestos por Pollatsek y sus colaboradores (1981):

Conocimiento de cálculo. En las sesiones de medidas de tendencia central, de posición y de dispersión, los estudiantes identificaron los procedimientos para determinar cada una de las medidas en los casos de conjuntos de datos no agrupados y de datos agrupados.

Conocimiento funcional. E^1_8 aplicó un conocimiento funcional de la media al identificar que la suma de las desviaciones de los datos respecto a su media da cero. De manera general, las tres estudiantes identificaron la funcionalidad de diferentes tipos de gráficas y de las medidas de tendencia central, como se muestra en el cuadro comparativo de la Figura 5.21.

Conocimiento analógico. En el curso de las diferentes sesiones, algunas de las presentaciones realizadas por los normalistas incluyeron problemas, respecto a algunos de los cuales el problema 1, por ejemplo, fue análogo y para el que E^1_8 aplicó lo tratado sobre la identificación del recorrido y el cálculo de la media (véase la Figura 5.19). E^1_{14} y E^1_{28} también lo solucionaron correctamente. No obstante, ni los estudiantes ni la investigadora plantearon explícitamente la analogía entre las situaciones referentes en cuestión ni los problemas requirieron alguna respuesta que implicara al conocimiento analógico.

De acuerdo con Scheiner (2015), el normalista debe ser capaz de incluir "formas alternativas de representar conceptos" (p. 132) para tener como "objetivo en la enseñanza de temas estocásticos que el alumno aborde afirmaciones estadísticas con aspiraciones científicas en la cotidianeidad" (Heitele, 1975, p. 6). Sin embargo; la Actividad 3 (véase la Tabla 5.6), se limitó a identificar los cuatro momentos que deben llevarse a cabo (SEP, 2011e) al tratar los desafíos matemáticos (libros de texto destinados para la enseñanza de las matemáticas) con los alumnos de primaria, los cuales fueron registrados por E^1_{28} en su cuaderno (véase la Figura 5.23). La Figura 5.24 muestra uno de los cuadros de contenidos de estocásticos en los libros de texto (SEP, 2011e) e, incluso, los integrantes del equipo de E^1_{28} anotaron con lápiz el número de la lección del libro de texto.

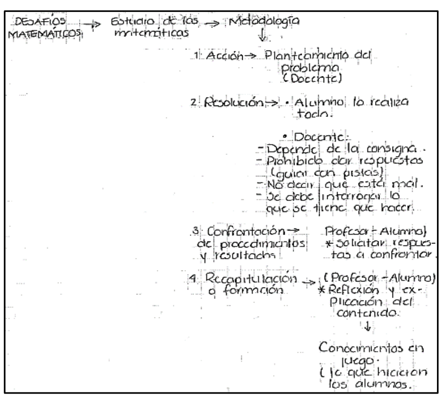
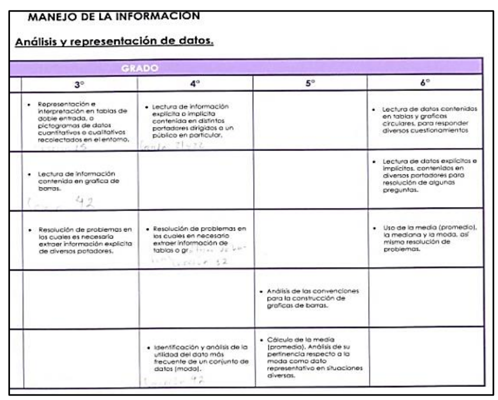


Figura 5.23. Apunte de E^1_{28} de cuatro momentos para tratar las lecciones del libro de matemáticas.



MANEJO DE LA INFORMACIÓN

Análisis y representación de datos.

GRADO			
3°	4°	5°	6°
• Representación e interpretación en tablas de doble entrada, o pictogramas de datos cuantitativos o cualitativos recolectados en el entorno.	• Lectura de información explícita o implícita contenida en distintos portadores dirigidos a un público en particular.		• Lectura de datos contenidos en tablas y gráficas circulares, para responder diversos cuestionamientos
• Lectura de información contenida en gráfica de barras.			• Lectura de datos explícitos e implícitos, contenidos en diversos portadores para resolución de algunas preguntas.
• Resolución de problemas en los cuales es necesario extraer información explícita de diversos potadores.	• Resolución de problemas en los cuales en necesario extraer información de tablas o gr		• Uso de la media (promedio), la mediana y la moda, así mismo resolución de problemas.
		• Análisis de las convenciones para la construcción de graficas de barras.	
	• Identificación y análisis de la utilidad del dato más frecuente de un conjunto de datos (moda).	• Cálculo de la media (promedio). Análisis de su pertinencia respecto a la moda como dato representativo en situaciones diversas.	

Figura 5.24. Cuadro de contenidos estocásticos elaborado por un equipo de estudiantes.

Según las dimensiones propuestas por Scheiner (2015) y lo planteado por Hill, *et al*. (2008) en la Estructura del Conocimiento Matemático para la Enseñanza de las medidas de tendencia central señalamos que:

Dimensión cognitiva (Conocimiento de Contenido Especializado). En las sesiones únicamente se plantearon problemas sobre medidas de tendencia central y distintos tipos de gráficas.

Dimensión didáctica (Conocimiento de Contenido y Enseñanza). Aquí nos referimos al conocimiento que deben adquirir los futuros docentes acerca de los materiales (libros de texto) para la enseñanza de contenidos matemáticos con los alumnos de primaria que proporciona la SEP.

El normalista debe identificar y analizar si los referentes, los recursos semióticos, los conocimientos matemáticos y los términos empleados propuestos en cada una de las lecciones del libro son adecuados o no para la enseñanza y proponer modificaciones para el tratamiento de los contenidos.

5.2.2. Experienciación de la enseñanza

El objetivo de la segunda enseñanza fue clarificar el cálculo de la mediana por un grupo de 26 estudiantes del cuarto semestre de la Licenciatura en Educación Primaria, además de determinar las medidas centrales e identificar las ideas fundamentales de *muestra* y de *variable estocástica*.

La enseñanza se impartió en dos sesiones con una duración de 1:30 horas cada una. La investigadora propuso dos referentes en la enseñanza: una encuesta oral sobre el número de hermanos de cada uno de los estudiantes del grupo; y los pesos de niños, agrupados en una tabla de datos de acuerdo con intervalos (Nortes, 1991, p. 83). Con esos referentes se distinguió el tratamiento descriptivo de un conjunto de datos sin agrupar del de un conjunto de datos agrupados (véase la Tabla 3.2).

***5.2.2.1. Ideas fundamentales de estocásticos*.** La idea de muestra a partir de un conjunto de datos sin agrupar fue difícil para los estudiantes. La idea de variable estocástica no siempre fue determinada de manera correcta por los estudiantes; dado que tuvieron errores al realizar los cálculos de los parámetros o de los estimadores respectivos, tales como las medidas de tendencia central.

Variable estocástica. Los estudiantes no obtuvieron el valor de la media de datos no agrupados ni el de la mediana de datos agrupados.

Muestra. Los normalistas no diferenciaron entre el número de personas encuestadas y el número de hermanos que tienen (valores de la variable estocástica) en el reactivo 1 (véase la Tabla 3.2); es decir, se les dificultó identificar el tamaño de la muestra (véase la Figura 5.25) al organizar una tabla de frecuencias pues para determinar la media, no sabían si debían dividir entre 47, 23 ó 19 que fueron las sumas totales que obtuvieron en las columnas de número de hermanos y en la de la frecuencia. Nuevamente, estos estudiantes exhibieron sólo una perspectiva hacia arriba (Bakker y Gravemeijer, 2004).

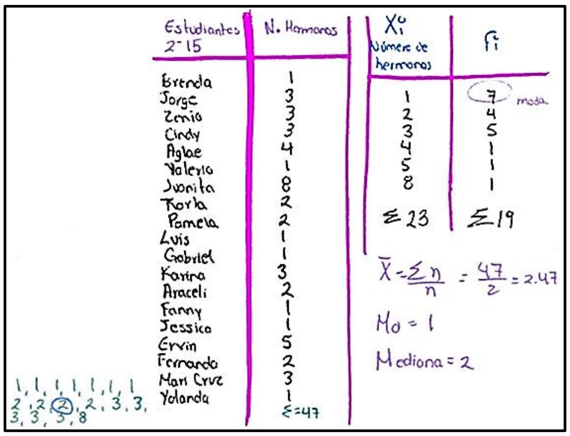


Figura 5.25. Equivocación de $E^2{}_9$ al identificar el tamaño de muestra en el referente 1.

5.2.2.2. Otros conceptos matemáticos. Los normalistas realizaron *operaciones aritméticas básicas correctas* para el cálculo de la media de datos agrupados y de la mediana de datos no agrupados; identificaron los *números naturales*, los *decimales* en esas operaciones y el orden numérico.

5.2.2.3. Recursos semióticos. De acuerdo con Andrà (2011), los recursos que los estudiantes pusieron en práctica fueron del nivel de experiencia y del de teoría. Sin embargo, este último fue más difícil al no emplear la notación matemática correcta.

Simbología matemática. Los estudiantes no identificaron correctamente las expresiones de la media para datos agrupados y no agrupados.

$E^2{}_{16}$ Escribe $\bar{x} = \Sigma x_i + n_i$

I Desde la fórmula [se rasca la ceja izquierda], ahorita, el detalle está en eso. Ustedes en la anterior [se refiere a la expresión matemática para determinar la media], usamos media [escribe en el pizarrón $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$] es igual a la sumatoria de x entre n, ¿sí?, para los datos agrupados es lo mismo, nada más que necesito sacar cómo ese n, va estar representado por la multiplicación que yo tenga de la marca de clase, más, por la frecuencia [señala la primera expresión matemática $\bar{x} = \frac{\Sigma(x_i + f_i)}{\Sigma f_i}$], no es más [corrige el símbolo de la operación $\bar{x} = \frac{\Sigma(x_i \cdot f_i)}{\Sigma f_i}$], por la frecuencia, sale, por eso yo le puse sumatoria.

Para determinar la mediana en el referente 2 (véase la Tabla 3.2), E^2_{16} registró la expresión matemática sin considerar el lenguaje matemático, es decir, registró la expresión matemática con su propio lenguaje (véase la Figura 5.26), cabe señalar que es pertinente que la expresión $\bar{x} = \frac{\Sigma(x_i \cdot f_i)}{\Sigma f_i}$ se escriba correctamente para evitar confusiones de solo sumar los datos y omitir la multiplicación de cada dato por su frecuencia.

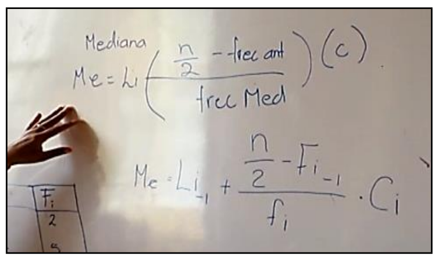


Figura 5.26. Expresión matemática para la mediana de datos agrupados escritas por E^2_{16} y E^2_{13} para dar respuesta al referente 2.

Tabla de datos agrupados. No fue organizada correctamente por la investigadora en la primera sesión, dado que no colocó la columna de la frecuencia absoluta acumulada, lo que propició confusiones de los futuros docentes para obtener la mediana de datos agrupados. La investigadora no identificó correctamente el valor de la frecuencia absoluta acumulada.

I 10 entre dos [va escribiendo en el pizarrón], menos la frecuencia absoluta acumulada del intervalo anterior, por eso es menos uno, anterior [se inclina hacia abajo siguiendo el movimiento de su mano izquierda, cuando dice anterior], anterior, ¿a dónde se encuentra la mediana?

Es Dos.

I Dos [lo escribe en el pizarrón], sale. Ese fue donde yo, ubiqué mal, porque yo, la clase pasada, consideré la marca de clase, ahí fue mi error, como yo no tenía la columna [señala la columna de frecuencias acumuladas de la tabla] yo no concentré la localización del intervalo, donde se considera la mediana, ese fue el error, muchachos, sale. Por eso también, su compañera decía [encierra el cinco de la marca de clase en la tabla]; pero, si no hay anterior [con la mano izquierda señala la tabla] con ¿cuál? [inaudible], efectivamente, tenía razón [borra el círculo que le puso al cinco de la columna de marca de clase] debe haber un límite, un intervalo anterior con el cual yo puedo trabajar [señala lo largo del intervalo que encerró] entonces, esa fue la única confusión [señala el cinco de la marca de clase y el cinco de la frecuencia absoluta acumulada] que hubo, no se considera a la marca de clase [señala la columna de la marca de clase] se considera la frecuencia [señala la columna de la frecuencia] acumulada, sale. ¿Dudas hasta ahí? ¿Ya quedó claro? Continuamos [se regresa al pizarrón y subraya *n* entre 2 – 5] esto entre la frecuencia absoluta de donde se encuentra [mueve la mano izquierda] la mediana en este caso, tres.

5.2.2.4. Términos empleados. Los términos que fueron o no identificados por los estudiantes durante las dos sesiones fueron los siguientes:

Marca de clase. Este valor no fue claro al inicio de la sesión para los estudiantes; $E^2{}_7$ la identificó como “punto medio”; pero no clarificó que era el punto medio de la *amplitud del intervalo*.

Rango. $E^2{}_9$ identificó el procedimiento para obtener el rango, pero no dio el concepto del término.

I ¿Qué es el rango, muchachos? ¿Cómo obtienen el rango?
$E^2{}_9$ El rango… lo obtenemos de un valor máximo y un valor mínimo (…).

Límite, intervalo, extremo superior e inferior del intervalo, amplitud del intervalo, frecuencia absoluta, frecuencia absoluta acumulada. Fueron términos ya establecidos pero que se fue preguntando a los estudiantes por su significado y en dado caso su cálculo, al hacer la tabla de frecuencia.

Media, mediana y *moda*. Fueron identificados por los estudiantes tanto en datos no agrupados como en datos agrupados.

5.2.2.5. Observaciones. En el análisis de los resultados identificamos en la dimensión cognitiva (Scheiner, 2015) los tipos de Conocimiento propuestos por Pollatsek, *et al*. (1981).

Conocimiento de cálculo. A pesar de que las sesiones se centraron en el desarrollo de los cálculos, los estudiantes clarificaron los procesos para determinar las medidas centrales (media, mediana y moda) pero en datos agrupados.

Conocimiento funcional. No hubo evidencia de que los estudiantes aplicaran un conocimiento funcional en los referentes.

Conocimiento analógico. Se pretendió que los estudiantes establecieran un conocimiento analógico al resolver los dos referentes planteados; sin embargo, no fue posible, dado que los estudiantes presentaron dificultades de conocimiento de cálculo de las medidas de tendencia central y por tal motivo, no dieron respuestas correctas a ambos problemas.

En la *dimensión didáctica* (Scheiner, 2015), *la interacción* llevada a cabo por la investigadora con los normalistas fue *exploratoria* de acuerdo con Jacobs y Ambrose (2003).

5.3. Primer periodo de entrevistas semiestructuradas

El objetivo general de las entrevistas fue clarificar las respuestas de las normalistas obtenidas en el Cuestionario 1 e identificar las ideas fundamentales y los conocimientos previos acerca de la enseñanza de temas estocásticos (medidas de tendencia central, promedios y principio multiplicativo) de los futuros profesores. Las entrevistas realizadas con cuatro normalistas de los 52 docentes en formación fueron únicamente sobre los resultados obtenidos en el Cuestionario 1 (véase la Tabla 3.4). Se seleccionó a los normalistas para aplicar la entrevista bajo el criterio de que las tutoras de la escuela primaria les otorgaron contenidos de estocásticos: medidas de tendencia central para enseñarlos a los alumnos de primaria. Los datos recopilados se analizaron de acuerdo a la célula de análisis de Ojeda (2006). Nos referimos a los normalistas como E^1_8, E^1_{28}, E^1_{32}, E^1_{34}, E^1_{39} y E^1_{45}. En este primer momento, sólo se entrevistó a cuatro de ellos (E^1_8, E^1_{28}, E^1_{34} y E^1_{39}) dado que fueron los únicos que impartieron enseñanza sobre medidas de tendencia central.

El objetivo de la entrevista a E^1_{28} fue clarificar su respuesta a la pregunta 15 de principio multiplicativo y a la 25 de media ponderada. El objetivo de la entrevista a E^1_{34} fue identificar sus procedimientos de solución para determinar medidas de tendencia central, trazar gráficas y determinar la media ponderada ya que contestó correctamente en el cuestionario el reactivo 25; también se identificaron sus procedimientos de solución a problemas de conteo. El objetivo de la entrevista a E^1_8 y E^1_{39} fue identificar sus procedimientos de solución a referentes relacionados con el cálculo de medidas de tendencia central, media ponderada, trazo de gráficas y procesos de solución a problemas de conteo.

5.3.1. Ideas fundamentales de estocásticos

Las ideas fundamentales presentes en los referentes planteados en las entrevistas fueron tres, de las cuales la de combinatoria y la de muestra presentaron mayor dificultad a los estudiantes.

5.3.1.1. Combinatoria. Las cuatro docentes en formación dieron respuesta correcta únicamente al inciso a) (abc, acb, bac, bca, cab, cba) del reactivo 22. Ninguna estudiante aplicó el principio multiplicativo. En el reactivo b) ningún estudiante obtuvo la respuesta correcta dado que no identificaron el total de posibilidades en las que se pueden repetir dos letras o más (véase la Figura 5.27).

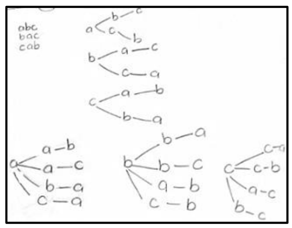


Figura 5.27. Propuesta de diagramas de árbol de E^1_{28} al reactivo 22.

En cuanto al reactivo 15, ninguna estudiante dio respuesta correcta a ninguno de los tres incisos dado que no identificaron el total de posibilidades para cada caso; E^1_{34} trató de aplicar el principio multiplicativo, sin embargo, fue incorrecto (véase la Figura 5.28).

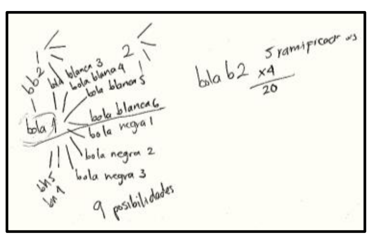


Figura 5.28. Propuesta de diagrama de árbol y principio multiplicativo de E^1_{34} al reactivo 15.

5.3.1.2. Variable estocástica. $E^1{}_8$ y $E^1{}_{39}$ obtuvieron correctamente cada una de las medidas centrales. Sólo $E^1{}_{34}$ identificó el valor de la media ponderada en el reactivo 25 (véase la Figura 5.29), las otras tres estudiantes no identificaron la muestra.

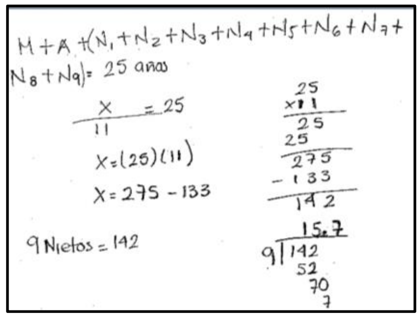


Figura 5.29. Respuesta correcta al reactivo 25 propuesta por $E^1{}_{34}$.

5.3.1.3. Muestra. Los tres normalistas no dieron la respuesta correcta a los reactivos de media ponderada (véanse en la Tabla 3.4), es decir no identificaron el tamaño de la muestra. Sólo $E^1{}_{34}$ identificó a las 11 personas en el reactivo 25 de media ponderada (véase la Figura 5.29). El reactivo es de media ponderada debido a que los estudiantes deben identificar la ponderación de la media aritmética de 25 años por el número de personas de la muestra (11) para poder obtener únicamente la edad promedio de los nueve nietos.

$E^1{}_{34}$	Mmm, Manuel es tres años…es 25, ya nos está dando el promedio, sería lo inverso… [se ríe cuando hace el cambio de los números que había colocado al inicio en la fracción, y dice] 11 es el número de datos, pero…
I	Tú comentaste algo importante, sería lo inverso, para poder obtener un promedio, tú ¿qué haces?, ¿cuál sería lo inverso de eso que tú haces?, que podrías hacerlo aquí […].
$E^1{}_{34}$	Porque para sacar el promedio, es la suma de todo dividido entre el número total de datos, ok, sería multiplicar, pero…
I	¿Qué multiplicarías?
$E^1{}_{34}$	25 por…. Entonces… tendríamos que restar la edad de Manuel y Amalia nada más para conocer cuál es el promedio de sus 9 nietos; entonces sería 275 – 133 = 142, 9 nietos = 142. Entonces sería dividir 142 entre 9 que es 15.7…, mmm…es así como llegué al 15.7.

De acuerdo a Pollatsek, *et al*. (1981), para calcular medias ponderadas, así como se puede pasar de la suma de un conjunto de resultados a la media dividiendo entre el número de datos, también se puede obtener la suma de la media multiplicando la media por el número de datos, que es lo que hizo E^1_{34} una vez que identificó el tamaño de la muestra (11 personas) en la situación planteada.

5.3.2. Otros conceptos matemáticos

Para las *operaciones aritméticas básicas* resueltas correctamente por las estudiantes, identificaron los *números naturales*, reconocieron y calcularon hasta *números decimales* (véase la Figura 5.29).

5.3.3. Recursos semióticos

En los problemas de combinatoria, las cuatro futuras docentes hicieron uso de los siguientes recursos:

Listado de las posibilidades. E^1_8 y E^1_{39} realizaron listados incompletos de acuerdo con Lockwood y Gibson (2016), para dar solución al referente 15 de extracción de las bolas blancas y negras pues no identificaron todas las posibilidades (véase la Figura 5.30).

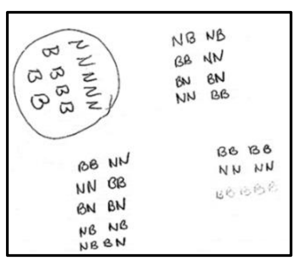


Figura 5.30. Listados incompletos al reactivo 15 propuestos por E^1_{39}.

Diagramas de árbol. Fueron realizados por E^1_{28} y E^1_{34} en el reactivo 15; únicamente E^1_{28} se percató que trazar el diagrama de árbol le llevaría mucho tiempo, que sería mejor si recordara la *expresión simbólica* (fórmula) para responder; es decir, consideró representaciones a nivel de experiencia y de teoría (Andrà, 2011).

E^1_{28}	Todo sería mucho más fácil con fórmulas, pero no me las sé.
I	Sería más fácil con fórmulas, pero no te las sabes, ¿o no recuerdas esa parte que viste en el bachillerato?

E^1_{28} Ajá, sé que por ejemplo para las combinaciones se usa la "c" y hay otra que empieza con "p", no sé, pero era así…

I ¿Permutación?

E^1_{28} Sí, la r y la n, y la otra tiene que ver…se usan ciertos criterios y llevaban orden o con repetición o sin repetición, sé que lo oí en algún tiempo, pero ya tiene rato.

5.3.4. Términos empleados. Los términos identificados y los que presentaron dificultad a los normalistas fueron:

Media (es identificada como sinónimo de promedio), *mediana y moda*. E^1_8 y E^1_{39} identificaron correctamente las medidas de tendencia central y sus algoritmos matemáticos en la entrevista, pero no en el cuestionario. E^1_{39} definió a las medidas de tendencia central de la siguiente manera:

E^1_{39} La moda es el número que más se repite en el conjunto de datos. La mediana es el número que se encuentra en medio de la sucesión y si son dos números se va a sumar y a dividir entre 2 y el resultado es la mediana. Y el promedio (no dice media) es la suma del conjunto de datos y la división de ese número de datos y el resultado es la media.

Media ponderada. Esta medida sólo fue obtenida correctamente por E^1_{34} al identificar la conversión implícita de la lengua natural escrita a una expresión matemática de acuerdo a Duval (2006).

Permutación. E^1_{28} recordó los términos de *permutación* y *orden*, pero no los aplicó correctamente en sus procedimientos para resolver los incisos b) y c) del reactivo 15 y el inciso b) del reactivo 22; (véase la Figura 5.27 y la Figura 5.28).

5.3.5. Observaciones. Debido a que el guión de entrevista se basó en los reactivos del Cuestionario 1 (Dimensión cognitiva (Scheiner, 2015)), también ella se centró en el conocimiento de cálculo (Pollatsek, *et al*., 1981). Los reactivos de combinatoria requerían poner en práctica el conocimiento analógico; sin embargo, las estudiantes no lo favorecieron pues no trazaron diagramas de árbol correctos, ni listados sistemáticos, ni usaron las expresiones matemáticas para dar una solución en menor tiempo.

5.4. Segundo y tercer periodo de entrevistas semiestructuradas

Las segundas entrevistas se realizaron con el objetivo de clarificar las respuestas dadas en el cuestionario 2 y se refirieron a las cinco situaciones que se presentan en las Tablas 5.8

y 5.9. Los normalistas entrevistados en formato semiestructurado en el segundo periodo fueron: $E^2{}_5$, $E^2{}_7$, $E^2{}_9$, $E^2{}_{16}$ y $E^2{}_{24}$ y se les entrevistó sólo sobre las situaciones A, B, D y E.

En el tercer periodo se entrevistó a: $E^2{}_9$, $E^2{}_{13}$, $E^2{}_{16}$ y $E^1{}_{32}$. A $E^1{}_{32}$ (pertenecientes a la generación anterior) se les aplicó el Cuestionario 2 y se les preguntó de acuerdo a los resultados obtenidos en él. $E^2{}_9$, $E^2{}_{13}$ y $E^1{}_{32}$ se les examinó sobre las situaciones A, B, C y D; a $E^2{}_9$ también se le entrevistó sobre la situación E y a $E^2{}_{16}$ sólo sobre la situación C dado que las otras cuatro situaciones ya las había respondido en el segundo periodo de entrevistas.

A $E^2{}_9$, $E^2{}_{16}$ y $E^1{}_{32}$ se les preguntó sobre la media armónica con el objetivo de presentarles dos procedimientos de solución para que identificaran y argumentaran cuál era el correcto y por qué. Dado que $E^2{}_{13}$ fue la única estudiante que dio una respuesta cercana (200 km/h) a la correcta (192 km/h) en el Cuestionario 2 a través de un procedimiento que evidenció su conocimiento funcional de la media armónica; sólo se le entrevistó sobre su procedimiento y no se le presentaron los dos procedimientos (uno de la media armónica y uno de la aritmética).

Para el inciso D, se preparó además una urna, dos bolas blancas y dos bolas negras con el objetivo de que los estudiantes usaran el material concreto para clarificar el orden de las extracciones de las bolas. Los objetivos generales y particulares para cada entrevista fueron: Identificar las dificultades que mostraron los siete normalistas al calcular e interpretar las medidas de tendencia central (dimensiones epistemológica y cognitiva (Scheiner, 2015)), así como en el trazo de la gráfica de la muestra (dimensión didáctica), y la ubicación de las medidas de tendencia central; lo anterior impacta en la comprensión de las ideas fundamentales de muestra, variable estocástica y equidistribución y simetría. En lo referente a la idea fundamental de combinatoria, fue identificar el por qué cuatro ($E^2{}_5$, $E^2{}_7$, $E^2{}_{13}$ y $E^2{}_{24}$) estudiantes no consideraron el orden para establecer la respuesta a la pregunta de extracción y dos no contestaron el reactivo ($E^2{}_9$ y $E^2{}_{16}$); en la idea de espacio muestra, el objetivo fue identificar la dificultad al leer, analizar e interpretar un diagrama de árbol de cinco de los estudiantes ($E^2{}_5$, $E^2{}_7$, $E^2{}_9$, $E^2{}_{16}$ y $E^2{}_{24}$). A los datos recopilados con los interrogatorios se les aplicó la célula de análisis (Ojeda, 2006).

Tabla 5.8. Caracterización de los referentes de medidas de tendencia central planteados en las entrevistas semiestructuradas.

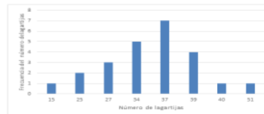
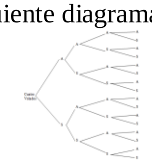
Referentes	**A**. En un examen de estadística, seis estudiantes obtuvieron las siguientes calificaciones respectivamente: 7, 8, 7, 6, 9 y 10. a) ¿Cuál es el valor de cada una de las medidas centrales? b) Traza la gráfica respectiva y ubica en ella las medidas de tendencia central. c) ¿Cómo interpretas los resultados numéricos obtenidos? d) ¿Es simétrica la gráfica?	**B**. Número de lagartijas realizadas por una persona en el mes de febrero  a) ¿Qué tipo de variable se trata en la muestra? ¿Por qué? b) Ubica las medidas de tendencia central en la gráfica. c) ¿Qué medida te ayuda a identificar la dispersión de los datos con respecto a su media? d) ¿Cómo se calcula el rango y que indica el valor que se obtiene? e) ¿Qué tipo de simetría tiene el gráfico?	**C.** Un aeroplano vuela alrededor de un cuadrado cuyo lado tiene 100 km de largo. Si recorre el primer lado a 100 km/h, el segundo lado a 200 km/h, el tercer lado a 300 km/h y el cuarto lado a 400 km/h, ¡cuál es la velocidad media del aeroplano en su vuelo alrededor del cuadrado? I) $= \frac{4}{\frac{1}{100}+\frac{1}{200}+\frac{1}{300}+\frac{1}{400}} = \frac{4}{\frac{12+6+4+3}{1\,200}} = \frac{4}{\frac{25}{1\,200}} = \frac{4\ x\ 1\,200}{25} = \frac{4\,800}{25} = 192\ km/h$ II) $= \frac{100+200+300+400}{4} = \frac{1\,000}{4} = 250\ km/h$
Ideas fundamentales	**Variable estocástica, muestra**		
Otros conceptos matemáticos	Operaciones aritméticas, número natural y decimal, producto cartesiano.	Operaciones aritméticas, número natural y fraccionario, simetría, producto cartesiano.	Operaciones aritméticas, números naturales, medidas de longitud, de tiempo y de velocidad.
Recursos semióticos	Lengua natural escrita, gráfica, signos numéricos	Lengua natural escrita, gráfica, signos numéricos.	Lengua natural escrita, notación simbólica, signos numéricos.
Términos empleados	Estadística, valor, medidas de tendencia central, simetría.	Variable, muestra, medidas de tendencia central, dispersión, dato, media, rango.	Velocidad media

Tabla 5.9. Caracterización de los referentes de combinatoria planteados en las entrevistas semiestructuradas.

Referentes	**D**. En una urna hay dos bolas blancas y una negra. Si se extrae una bola de la urna, se registra el color (sin devolverla a la urna) y luego se extrae una segunda bola y se registra el color, ¿de cuántas maneras distintas se pueden extraer las bolas? Y si en la urna hay dos bolas blancas y dos bolas negras, ¿de cuántas maneras distintas puedo extraer las bolas?	**E**. En un juego de cuatro volados Brayan gana si cae un águila, Ingrid gana si caen tres soles, Adriana gana si caen dos águilas y Jorge gana si cae un sol. Para revisar sus posibilidades trazaron el siguiente diagrama de árbol.  a) Puede haber empate ¿por qué? b) Sí dices que sí, marca con rojo las ramas del árbol para este caso (empate). c) ¿Quién tiene más posibilidades de ganar? ¿por qué? d) Marca con verde el camino del ganador.
Ideas fundamentales	Combinatoria (principio fundamental del conteo).	Espacio muestra.
Otros conceptos matemáticos	Operaciones aritméticas.	Trayectoria.
Recursos semióticos	Lengua natural escrita, notación simbólica.	Lengua natural escrita, diagrama de árbol.
Términos empleados	Extraer sin devolución, de cuántas maneras distintas.	Cuatro volados, cae águila, caen tres soles, caen dos águilas, cae un sol, posibilidades.

5.4.1. Ideas fundamentales de estocásticos

Las ideas presentes en los referentes de las situaciones que se plantearon en las entrevistas fueron cuatro, de las cuales, la de espacio muestra y combinatoria no fueron identificadas por tres (E^2_5, E^2_{16}, E^2_{24}) de los estudiantes en los dos reactivos que se les plantearon.

5.4.1.1. Espacio muestra. El referente E (véase la Tabla 5.9) fue difícil para cinco (E^2_5, E^2_7, E^2_9, E^2_{16} y E^2_{24}) estudiantes. El reactivo les pareció confuso para identificar los eventos dados al asignarlos a reglas del juego:

E^2_{24} Sí, dice aquí, de cuatro volados Brayan gana si cae águila, Brayan [se queda pensativa, frunce la boca hacia la derecha y respira hondo emitiendo el sonido mmm y dice] esto está medio confuso.

I ¿En dónde está la confusión?

E^2_{24} [Se hace hacia enfrente señalando en su hoja] ¡Ah!, porque… este… la a representa el águila, s es sol, pero… no sé quién es Bryan, no sé quién sea Adriana.

I ¿Cómo podrías identificarlos?

E^2_{24} Jorge, porque dice: Brayan gana si cae un águila, podría representar que ésta [señala la rama del árbol en la que sólo hay cuatro a] es el águila de Brayan, porque está iniciando el problema. Y éste…. a ver, si le pongo que es Brayan, ahora dice: que Ingrid gana si caen tres soles, pero éste podría ser: uno, dos, tres. Pero entonces; este… ya no sé, uno [va señalando cada una de las ramas del diagrama de árbol].

A E^2_{24} se le dificultó seguir las ramas del diagrama de árbol que se le planteó (seguir trayectorias) e identificar todos los resultados posibles de cada uno de los participantes en el juego, por lo cual se le presentaron cuatro monedas para que identificara las posibilidades para cada participante; sin embargo, no llegó a las respuestas correctas.

I	¿No? Vamos a ver si, ahorita, podemos observarlo un poquito más [se escuchan como si cayeran unas monedas en la mesa], puse cuatro monedas en la mesa.
E^2_{24}	¡Ajá!
I	Esas cuatro monedas representan los cuatro volados en los que están participando los niños que te menciona la situación, ¿qué posibilidad tienen de ganar?
E^2_{24}	[Se queda mirando la mesa y rodando el lápiz entre sus manos] Pues, una cuarta parte.
I	Una cuarta parte, ¿por qué?
E^2_{24}	Porque son cuatro.
I	Ok. ¿Cómo necesitan caer las monedas, para que gane Brayan? [E^2_{24} mira a la investigadora] Ahorita, deja un lado este [I se refiere a la hoja del diagrama de árbol. E^2_{24} mira las monedas].
E^2_{24}	¡Ajá!
I	Con esas cuatro monedas, ¿cómo necesitarían caer, para que gane Brayan?
E^2_{24}	[Manipula las monedas] Un águila dice, entonces tres soles y un águila.
I	De esa manera ganará Brayan, [E^2_{24} dice mmju]. ¿Hay alguna rama en el diagrama de árbol [E^2_{24} mira la hoja en la que está el diagrama de árbol] que se parezca a lo que acabas de hacer?
E^2_{24}	Este… [Revisa las ramas del diagrama de árbol], un águila y tres soles, am… si, aquí está, aquí está [señala la octava rama del diagrama de árbol], águila, y uno, dos, tres, soles.
I	En esa posibilidad, ¿quién gana?
E^2_{24}	Brayan.

5.4.1.2. Combinatoria. Para el referente D (véase la Tabla 5.9), E^2_5, E^2_7 y E^2_{24} respondieron con la permutación de los colores de las bolas sin distinguir el orden de las extracciones. E^2_7 primero permutó los colores (dos bolas blancas y una negra) en el inciso a); cuando extrajo efectivamente las bolas de la urna para dar respuesta al inciso b) se percató que debía considerar el orden de las extracciones (véase la Figura 5.31), por lo que modificó su respuesta al inciso a) y numeró las bolas blancas para distinguir entre las dos; para el inciso b) hizo lo mismo e identificó cuál de las dos bolas blancas o negras extraía primero. E^2_9, E^2_{13} y E^1_{32} si se percataron del orden y dieron las respuestas correctas, a) 6 posibilidades y b) 12 posibilidades). E^2_{16} respondió $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{3}$, es decir, describió la composición del contenido de la urna expresando su proporción.

De acuerdo con English (2005), "las dificultades para resolver las preguntas planteadas en los referentes de combinatoria son: las permutaciones, en las que importa el orden de los objetos o de la gente" (p. 127); por ejemplo, cinco estudiantes (E^2_5, E^2_7, E^2_{16},

E^2_{24} y E^1_{32}) inadvirtieron el orden de los objetos y que no eran distinguibles por lo que no se dieron cuenta que al ser un problema bidimensional de acuerdo a English (es decir, en la urna había objetos (bolas) de distinto color (blanco y negro)), bastaba con que realizaran una multiplicación de la cantidad de bolas de cada color que tenían en el inciso a) $3 \times 2 = 6$, como también, las negras en el inciso b) $4 \times 3 = 12$.

Figura 5.31. Propuesta de E^2_7 para D.

5.4.1.3. Variable estocástica. E^2_5, E^2_7, E^2_{13}, E^2_{16} y E^2_{24} obtuvieron correctamente para el referente A (véase la Tabla 5.8) el valor de la media aritmética, E^2_7, E^2_{13}, E^2_{16} y E^1_{32} además el de la moda y de la mediana. E^2_9 únicamente obtuvo el valor de la moda. Para E^2_{24} y para E^1_{32} prevaleció la *media como dato de la muestra* y revelaron su conocimiento deficiente de que la media puede no ser uno de los datos de la muestra, pues consideraron imposible ubicar la media en la gráfica:

I (...) ¿Puedes trazar la gráfica respectiva y ubicar en ella las medidas de tendencia central que calculaste…?

E^2_{24} [Traza su gráfica, registra los valores de la media y la mediana, (…), ubica la mediana en la gráfica]. Aquí sería, éste, a la mediana que está entre estos dos, [señala a los estudiantes 3° y 4° que colocó en el eje horizontal, (calificaciones 7 y 6, respectivamente)], pero la media es el promedio de todos; entonces [mira su gráfica, mira a la investigadora] no la podría ubicar.

I ¿No la podrías ubicar?

E^2_{24} Ajá [vuelve la mirada a su hoja], porque es la suma y acá sería el resultado de todas, 7.8.

E^2_{24} calculó el valor de la mediana como la semisuma de los datos centrales en el orden dado en el enunciado y omitió el valor de la moda.

5.4.1.4. Muestra. Al graficar las medidas centrales en el referente A (véase la Tabla 5.8), E^2_5 desconoció la dispersión de los datos para identificar el rango (véase la

Figura 5.32). E^2_5 y E^2_{24} no reconocieron explícitamente las frecuencias de los datos. Seis normalistas (E^2_5, E^2_7, E^2_9, E^2_{16}, E^2_{24} y E^1_{32}) evidenciaron su conocimiento deficiente de qué son los "datos" estadísticos (Garfield y Ben-Zvi, 2008) y de su distribución (Canada, 2007), particularmente con las gráficas que propusieron. E^2_9 confundió el total de datos de la muestra (seis calificaciones) con el primer dato (7) de las calificaciones. E^2_{13} identificó la simetría estadística de la distribución de los datos, mientras que E^2_5, E^2_7, E^2_{16} y E^2_{24} sólo describieron la simetría geométrica.

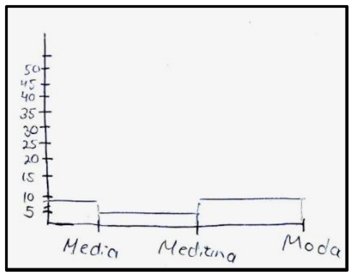


Figura 5.32. Gráfica propuesta por E^2_5 para el referente A.

5.4.2. Otros conceptos matemáticos

El concepto con mayor dificultad para los normalistas fue el de *producto cartesiano* tratado en los referentes al trazar o leer la gráfica correspondiente a la situación A y B.

5.4.2.1. Orden de números naturales. En el reactivo A (véase la Tabla 5.8) cuatro estudiantes (E^2_7, E^2_{13}, E^2_{16} y E^1_{32}) ordenaron de menor a mayor los datos y los registraron correctamente en la gráfica. E^2_{24} no ordenó los datos al trazar su gráfica. E^2_9 en su primera gráfica que trazó ordenó los datos, pero no los escribió y en su segunda gráfica trazada ya no los ordenó ni los escribió.

5.4.2.2. Producto cartesiano. E^2_5 en el reactivo A (véase la Tabla 5.8) no graficó los datos dados, sólo los valores de las tres medidas centrales, lo que fue un aviso de su deficiencia de ese conocimiento.

5.4.2.3. Operaciones aritméticas. E^1_{32} presentó dificultades en la división de los datos para obtener la media aritmética (véase la Figura 5.33) del referente A (véase la

Tabla 5.8). E^2_9 y E^2_{16} sumaron incorrectamente los datos del referente B (véase la Tabla 5.8) por lo cual, no llegaron a la respuesta correcta de la media aritmética.

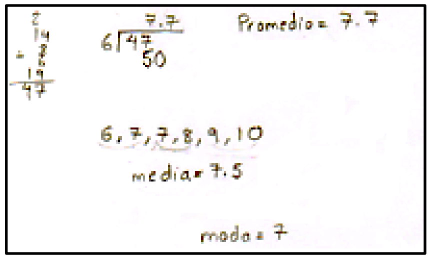


Figura 5.33. Operaciones básicas incorrectas propuestas por E^1_{32} para el referente A.

5.4.2.4. Trayectoria. De los cinco estudiantes (E^2_5, E^2_7, E^2_9, E^2_{16} y E^2_{24}) a los que se les aplicó la situación E (véase la Tabla 5.9), únicamente E^2_{16} se acercó a la lectura de las trayectorias, sin embargo, no identificó todas las ramas correctas.

5.4.2.5. Medidas de longitud, de tiempo y de velocidad. Los cuatro normalistas (E^2_9, E^2_{13}, E^2_{16}, y E^1_{32}), a los que se les entrevistó sobre el referente C (véase la Tabla 5.8) identificaron de manera correcta las medidas de longitud, de velocidad y de tiempo; e incluso hicieron referencia a que mayor velocidad menos tiempo, se recorre más rápido la distancia.

I Ok, ¿qué pasará con el tiempo cuando va recorriendo cada uno de los segmentos del cuadrado?
E^2_9 Mmmm… [observa el referente y lo observa] que **a menos tiempo es más espacio recorrido**.
I ¿En menos tiempo recorre más?
E^2_9 ¡Ajá! más… kilómetros.

5.4.2.6. Números fraccionarios. Causaron dificultad para ser comprendidos en el primer procedimiento que se les presentó a tres de las normalistas (E^2_9, E^2_{16}, y E^1_{32}) en el reactivo C (véase la Tabla 5.8) de media armónica.

E^1_{32} Bueno, es que aquí…, es que no. Bueno, no entiendo bien esto [señala el primer procedimiento con su lápiz] porque… de ¿dónde sacó estos números? [señala con el lápiz $\frac{4}{\frac{12+6+4+3}{1200}}$] si se supone que son cuatro lados [se agarra el cabello con la mano izquierda, baja la mano hacia la hoja], si cada lado lo fue pasando a diferentes velocidades, pero…, este…; hasta aquí [señala la primera partes del procedimiento $\frac{4}{\frac{1}{100}+\frac{1}{200}+\frac{1}{300}+\frac{1}{400}}$] si está, bueno si le entiendo, pero ya después aquí [señala la segunda parte del procedimiento y va encerrando los números $\frac{4}{\frac{12+6+4+3}{1200}}$] de ¿dónde saca estos 1 200? y estos [señala los numeradores de la fracción [12, 6, 4, 3].

5.4.2.7. Proporcionalidad inversa. E^2_9, E^2_{13}, E^2_{16} y E^1_{32} identificaron el término de *proporcionalidad* (véase la Figura 5.34) para dar respuesta a la situación C (véase la Tabla 5.8), por ejemplo:

E^2_{13} Pues porque lo decía el problema, porque decía si recorre el primer lado a 100 km por hora. Entonces, puse primer lado, primero sé que es un cuadrado, porque me lo dijo desde el principio. Luego me dice el segundo lado lo recorre a 200 km por hora, el tercer lado a 300. Entonces es como… hablamos de **proporcionalidad inversa** a **más velocidad menos tiempo**, por eso dije: los 100 km que mide los recorre en una hora si va a 100 km por hora, pero el segundo lado si lo recorre a más velocidad obviamente que el tiempo tiene que disminuir. Entonces, lo recorre en media hora, luego aumenta aún más la velocidad para recorrer el tercer lado y obviamente que tienen que disminuir más el tiempo en lo que lo recorre, que serían 20 min y vuelve a aumentar la velocidad y lo recorre a 400 km por hora, por lo que tarda solamente 10 min en recorrerlo, por eso lo puse.

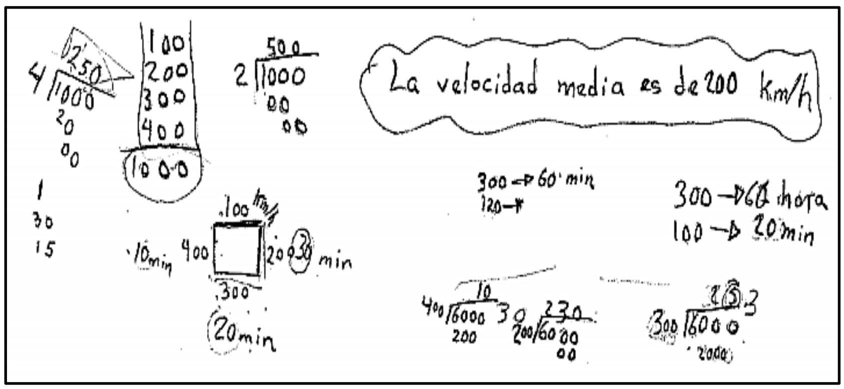


Figura 5.34. Solución propuesta por E^2_{13} al referente C.

5.4.3. Recursos semióticos

Los recursos semióticos usados por los normalistas para el tratamiento de problemas de conteo son los *listados*; y presentaron dificultad al leer, analizar e interpretar el *diagrama de árbol* que se les planteó en la situación E (véase la Tabla 5.9).

5.4.3.1. Gráfica de barras. Para el referente A (véase la Tabla 5.8), cinco normalistas (E^2_5, E^2_7, E^2_9, E^2_{16} y E^2_{24}) trazaron incorrectamente las gráficas de barras. E^2_5 omitió los datos, sólo ubicó los valores de las tres medidas centrales, indicio de su anclaje a la representatividad de las medidas centrales y desatención a la dispersión, es decir, de qué es una distribución de frecuencias (véase la Figura 5.32), además de usar una escala mucho mayor a la pertinente. E^2_9 y E^2_{24} reservaron el eje horizontal para los sujetos en el orden dado, E^2_{24} asignó una barra de altura correspondiente a la calificación atribuida.

Entre las barras centrales de su gráfica ubicó con una marca la mediana a la altura correspondiente al valor que obtuvo (véase la Figura 5.35), como señalamos antes, de la semisuma de las dos calificaciones centrales (7 y 6) en el orden dado en el enunciado del referente. Además, E^2_9 y E^2_{24} consideraron imposible ubicar la media en la gráfica porque en su cálculo intervienen todos los datos.

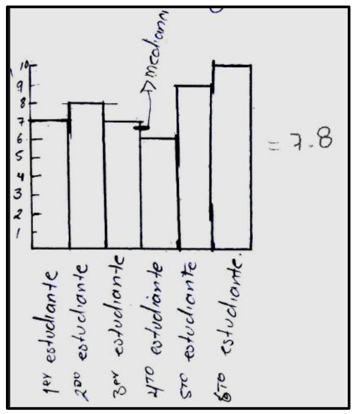


Figura 5.35. Solución propuesta por E^2_{24} al referente A.

A cuatros futuros docentes (E^2_5, E^2_7, E^2_{16} y E^2_{24}) se les dificultó leer e interpretar la información que se les presentó en la gráfica de barras de la situación B (véase la Tabla 5.8) dado que no consideraron la frecuencia de cada número de lagartijas.

5.4.3.2. Listados. Para el referente D (véase la Tabla 5.9), tres (E^2_5, E^2_7 y E^2_{24}) estudiantes enlistaron las permutaciones de los atributos que identificaron de manera incompleta dado que no consideraron el orden de las bolas al extraerlas; de acuerdo con Lockwood y Gibson (2016), esto repercute en el conteo de todos los resultados posibles y en no identificar un patrón o estructura que les permita llegar a la respuesta correcta al problema planteado. E^2_7 realizó listados correctos y completos para dar respuesta correcta a los dos incisos de la situación D (véase la Figura 5.31). E^2_9 y E^2_{13} identificaron la bidimensionalidad (English, 2005) del referente dado que plantearon la operación aritmética ($3 \times 2 = 6$) correcta para dar respuesta correcta (6 posibilidades) al inciso a), pero no para el inciso b) (véase la Figura 5.36). De acuerdo a Andrà (2011), los estudiantes realizaron representaciones a nivel de experiencia para dar respuesta a los referentes planteados.

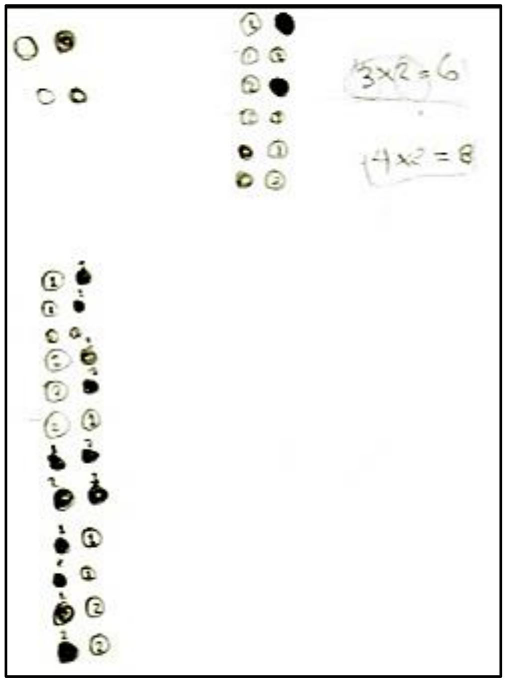


Figura 5.36. Soluciones propuestas por E^2_{13} para el referente D.

5.4.3.3. Diagrama de árbol. E^2_9 y E^1_{32} trazaron diagramas de árbol para dar respuesta correcta a la situación D (véase la Tabla 5.9). Cinco normalistas (E^2_5, E^2_7, E^2_9, E^2_{16} y E^2_{24}) presentaron dificultad para leer e interpretar el diagrama de árbol de la situación E (véase la Tabla 5.9) y no lograron identificar el total de las ramas que correspondía a cada jugador. Los estudiantes no advirtieron la conversión (Duval, 2006) de la representación proposicional de un evento y la correspondiente en un diagrama.

5.4.4. Términos empleados

Los términos que tienen que ver con los problemas de conteo (véase la Tabla 5.9) como lo son *maneras distintas* y *extracción* no fueron comprendidos por E^2_5, E^2_{16} y E^2_{24}.

5.4.4.1. Media fue denominada “promedio” por E^2_7 y E^2_{24} en los reactivos A y B (véase la Tabla 5.8). Esto evidencia la falta de precisión del término promedio, según señaló Moroney (1979), por lo que todas las medidas de tendencia central son identificadas como promedios. E^{1}_{32} confundió el término de *media* con el procedimiento para obtener la *mediana* (véase la Figura 5.33).

5.4.4.2. Maneras distintas. E^{2}_{5}, E^{2}_{16} y E^{2}_{24} no dieron sentido a la expresión "de maneras distintas" en el reactivo D (véase la Tabla 5.9) lo que evidencia la dificultad señalada por Lockwood y Gibson (2016) de que "otros investigadores han destacado las características matemáticas específicas de los problemas de recuento que son especialmente difíciles, como las cuestiones de orden y el recuento excesivo" (p. 249). English (2005) también se refirió a lo siguiente:

> "otros factores de la tarea que influyen en la dificultad del problema son el tipo de operación combinatoria, a saber, las permutaciones (es importante el orden), las combinaciones y los arreglos (con y sin repetición). Los otros factores fueron la naturaleza de los elementos a combinar (dígitos, letras, personas y objetos) y los valores dados a los parámetros *n* y *m*" (p. 127).

5.4.4.3. Extracción sin devolución. E^{2}_{5}, E^{2}_{16} y E^{2}_{24} dieron sentido a la expresión "extracción sin devolución" del referente D (véase la Tabla 5.9) pues identificaron el número de extracciones que debían hacer (dos extracciones). E^{2}_{24} no identificó en primer momento, el número de extracciones y registró en su respuesta la bola que quedaba en la urna (véase la Figura 5.37). E^{2}_{9}, E^{2}_{13} y E^{1}_{32} si comprendieron el término extracción sin devolución.

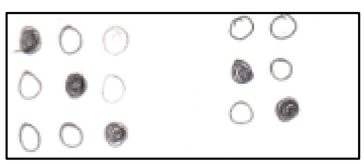


Figura 5.37. Listado de extracciones propuesto por E^{2}_{24} al referente D.

I ¿Cuántas bolas me estás colocando aquí? [señala las posibilidades de las tres bolas que dibujó E^{2}_{24}].

E^{2}_{24} Aquí, tres [señala con su lápiz lo mismo que señaló I], me falta una.

I ¿Te pide que registres la que queda en la urna? [E^{2}_{24} dirige su mirada a la hoja].

E^{2}_{24} Mmm [se queda pensativa moviendo la bola blanca entre sus dedos de la mano izquierda y voltea a ver a la investigadora]. Sí.

5.4.4.4. Posibilidad. En el referente D (véase la Tabla 5.9) E^2_{16} confundió "posibilidad", "probabilidad" y "de cuantas maneras" ya que en su respuesta escribió la proporción de bolas blancas y negras de la urna. Asumir la intervención del azar sin que se le requiera para responder a la pregunta o sin hacer explícita en la respuesta esa asunción puede derivar en confusiones en el acto de enseñanza:

E^2_{16}	A ver, [vuelve a leer el referente]... ¿sin devolverla a la urna? [pregunta a la investigadora, se queda pensativa] … Sería de blancas, podrías extraer dos tercios mientras que de la negra extraerías un tercio… O sea, **hay más posibilidades** de que te salga una blanca que una negra.
I	Mmm…pero yo [lo que] quiero saber [es] ¿de cuántas maneras distintas las puedes extraer?
E^2_{16}	[Mete la mano derecha a la urna y extrae una bola (blanca) registra en su hoja el color, y saca una segunda bola (negra), registra el color enfrente del primero que escribió, sacó una tercera bola (blanca); la registra enfrente de lo que ya había escrito]. Blanca, negra, blanca, pues sería de dos maneras, negra, blanca, blanca [escribe una tercera manera], blanca, blanca negra.
I	¿Por qué sacaste la tercera bolita?
E^2_{16}	¡Ay! No sé [se ríe], impulso. Este, pues no sé por qué, lógicamente tenía que salir la blanca, ¿no?

La estudiante evidenció la dificultad relativa a la "naturaleza de los elementos a combinar (dígitos, letras, personas y objetos)" de acuerdo con English (2005, p. 127); pues con la fracción $\frac{2}{3}$ sólo señala el número de bolas blancas (2) del total de bolas (3, dos bolas blancas y una negra) que se tienen en la urna.

5.4.4.5. Rango. En el reactivo B (véase la Tabla 5.8), el término *rango* fue identificado por E^2_7, E^2_9, E^2_{13}, E^2_{16}, E^2_{24} y E^1_{32}:

I	Ok. ¿Qué medida te ayuda a identificar la dispersión de los datos de la gráfica?
E^2_{16}	[…] ¿la dispersión de los datos? La menor… **el dato menor y el dato mayor**.
I	Y, ¿cómo se le llama a esa medida?
E^2_{16}	**Rango**.

5.4.5. Observaciones

En la dimensión cognitiva (Scheiner, 2015), de acuerdo a los tres tipos de conocimiento propuestos por Pollatsek, *et al*. (1981) se obtuvo lo siguiente:

Conocimiento de cálculo. El cálculo de la mediana del conjunto de datos de la situación A (véase la Tabla 5.8) realizado por E^2_5 y E^2_{24} fue incorrecto. Sin embargo, si bien en la situación B los procedimientos identificados para obtener las medidas de tendencia central son correctos, los resultados no lo son.

Conocimiento funcional. En el reactivo C (véase la Tabla 5.8), E^2_9, E^2_{16} y E^1_{32} evidenciaron el conocimiento funcional de la proporción inversa para identificar si el procedimiento I (media armónica) era correcto o no, ya que la media armónica es el inverso de la media aritmética. A pesar de que las tres normalistas pusieron en juego su pensamiento intuitivo al identificar al procedimiento I (media armónica) como correcto, E^2_9 y E^1_{32} optaron por modificar su respuesta y quedarse con el procedimiento II (media aritmética) como correcto argumentando que, si no se les hubiera presentado el procedimiento I, las normalistas hubieran realizado el procedimiento II para dar respuesta a la situación C.

En la situación E (véase la Tabla 5.9) ninguno de los cinco estudiantes (E^2_5, E^2_7, E^2_9, E^2_{16} y E^2_{24}) evidenció un conocimiento funcional a pesar de que el referente era un ejemplo de la vida común en donde casi la totalidad de las personas ha jugado volados en alguna etapa de su vida.

Conocimiento analógico. Aunque la situación A y la situación B (véase la Tabla 5.8) fueron análogas, cinco (E^2_5, E^2_7, E^2_9, E^2_{16} y E^2_{24}) normalistas no determinaron de manera correcta la media, la mediana y la moda ni las ubicaron correctamente en las gráficas, se les dificultó la conversión (Duval, 2006) del referente a una gráfica de barras. Para los referentes del principio multiplicativo, E^2_5, E^2_{16} y E^2_{24} no dieron respuesta correcta a las preguntas planteadas. Para las situaciones D y E (véase la Tabla 5.9), las estrategias elegidas por los normalistas fueron las figuras, los diagramas de árbol y el enlistado de las posibilidades. $E^2_{7,}$ $E^2_{9,}$ E^2_{13} y E^1_{32} dieron respuesta correcta a la situación D. E^2_7 sólo al momento de advertir el orden de las dos bolas blancas y de las dos bolas negras en la segunda situación y fue capaz de escribir el listado correcto primero para el inciso b) y modificó después el del inciso a).

Capítulo 6

Prácticas de enseñanza de los normalistas

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos de la observación de 17 prácticas de enseñanza de contenidos de estocásticos, impartida por doce futuros docentes. El objetivo general fue caracterizar cada una de esas enseñanzas y seleccionar uno o dos alumnos de esos grupos de primaria por su desempeño en la clase impartida por el practicante.

Las observaciones se llevaron a cabo en los salones de clase de las escuelas primarias públicas, las cuales denotamos "$P^{\#}_{\#}$", en que el superíndice indica el período de recopilación de datos y el subíndice indica la escuela respectiva. Las prácticas se apegaron a los contenidos de estocásticos prescritos en la propuesta institucional para primaria (SEP, 2011e) y se realizaron con grupos de segundo a sexto grados, durante el tiempo ordinario de la clase de matemáticas en su aula habitual. Como señalamos en §3.3.2.2, los docentes titulares de esos grupos fueron quienes asignaron a los normalistas las lecciones de estocásticos a tratar en sus prácticas de enseñanza. Denotamos a los primeros por "$MT^{\#}_{\#}$", con el subíndice correspondiente al de su plantel $P_{\#}$ y el superíndice al número de la lista del practicante respectivo. A los futuros docentes los denotamos como $E^{\#}_{\#}$, con el superíndice correspondiente a la generación "^{1}" (2013-2017) con 52 normalistas, o bien a la generación "^{2}" (2014-2018) con 26 normalistas. En las transcripciones de las intervenciones en el aula conservamos la notación ya indicada; además, denotamos por "AS" a una pluralidad de alumnos y alumnas, por "$Q_{\#}$" el "#-ésimo equipo" en el que estaba el alumno/a en foco, por "$A_{\#}$" al alumno/a en la "#-ésima" intervención de interés en la observación de práctica; y por "I" a la investigadora. En las entrevistas de alumnos, denotamos por "$A^{\#}_{\#}$" al alumno/a con el superíndice correspondiente a su grado y el subíndice a su orden de participación en la clase.

A las transcripciones de las videograbaciones de las prácticas de enseñanza de medidas de tendencia central y de principio multiplicativo que desarrollaron los normalitas se les aplicó la célula de análisis (Ojeda, 2006).

Por su desempeño durante el desarrollo de la enseñanza de temas de estocásticos, entrevistamos individualmente a siete practicantes y a cinco alumnos de primaria presentes en alguna o algunas prácticas. Cada entrevista se videograbó y transcribió para su análisis. La Tabla 6.1 resume factores contextuales de estas prácticas. La saturación progresiva de color indica los tres períodos de las observaciones de las prácticas.

Tabla 6.1. Datos contextuales del desarrollo de las prácticas.

Contenido	**Plantel, grado y número de alumnos**	**Maestra titular ($MT^{\#}_{\#}$)**	**Estudiante normalista ($E^{\#}_{\#}$)**	**Número de sesiones**	**Entrevista** $E^{\#}_{\#}$	**Entrevista** $A^{\#}_{\#}$	**Antecedentes de estocásticos en bachillerato**
Medidas de tendencia central	P^1_1, 5°, 20	MT^{28}_1	E^1_{28}	1	----	----	CECyT, *Probabilidad y Estadística*, 1 sem.; Lic. Relaciones Comerciales, *Método Estadístico*, 1sem., *Estadística Aplicada*, 1 sem.
	P^1_1, 6°, 6	MT^8_1	E^1_8	1	----	----	Preparatoria, *Estadística*, 1 sem.
	P^1_2, 5°, 20	MT^{34}_2	E^1_{34}	1	----	----	CECyT, *Probabilidad y Estadística*, 1 sem.
	P^1_2, 5°, 20	MT^{39}_2	E^1_{39}	1	----	----	Colegio de Bachilleres, *Probabilidad y Estadística*, 2 sems.
	P^2_3, 4°, 10	MT^{32}_3	E^1_{32}	1	----	----	Preparatoria oficial, *Probabilidad y Estadística*, 1 sem.
	P^2_4, 5°, 14	MT^7_4	E^2_7	1	✓	----	Preparatoria, sin estocásticos.
	P^2_4, 5°, 9	MT^{24}_4	E^2_{24}	1	✓	----	Bachillerato abierto, sin estocásticos.
	P^2_6, 5°, 4	MT^{16}_6	E^2_{16}	1	----	----	Preparatoria Oficial, *Probabilidad y Estadística*, 1 sem.
	P^3_7, 4°, 11*	MT^9_7	E^2_9	1	✓	A^4_{10} y A^4_{13}	Preparatoria Oficial, *Probabilidad y Estadística*, 1 sem.
	P^3_7, 5°, 20	MT^{13}_7	E^2_{13}	2	✓	A^5_8	CECyTEM, sin estocásticos.
Principio multiplicativo	P^2_3, 2°, 10	MT^{45}_3	E^1_{45}	1	✓	----	CCH y Conalep, sin estocásticos.
	P^2_5, 2°, 6 y P^2_6, 3°, 13	MT^5_5 MT^5_6	E^2_5	2	----	----	Preparatoria Oficial, *Estadística*, 1 sem.
	P^2_7, 4°, 13*	MT^9_7	E^2_9	1	----	----	Preparatoria Oficial, *Probabilidad y estadística*, 1 sem.
	P^3_6, 2°, 5	MT^{32}_6	E^1_{32}	1	✓	A^2_3	Preparatoria Oficial, *Probabilidad y Estadística*, 1 sem.
	P^3_7, 2°, 21	MT^{16}_7	E^2_{16}	1	✓	A^2_7	Preparatoria Oficial, *Probabilidad y estadística*, 1 sem.
Total	7 planteles 191 alumnos	12	12	17	7	5	

Primer período; Segundo período; Tercer período.

* El grupo de cuarto grado, a cargo de E29, participó en sus dos prácticas observadas, sólo cambió el número de participantes en cada observación.

6.1. Observaciones de enseñanza de medidas de tendencia central

En el primer período, las observaciones se realizaron en el horario de 9:00 a 10:30 y de 11:00 a 12:30 horas, aproximadamente, en la escuela P_1; y de 8:30 a 9:30 y de 9:30 a 10:30

horas en la escuela P_2. Participaron los normalistas E^1_8, E^1_{28}, E^1_{34} y E^1_{39} (véanse las líneas 2ª a 5ª en la Tabla 6.1), a quienes la investigadora impartió la enseñanza de la asignatura *Procesamiento de Información Estadística* en la Normal (véase en 5.2). En una jornada anterior, E^1_8 ya había realizado una primera práctica de enseñanza de las medidas de tendencia central, la cual no fue observada por la investigadora, por lo que fue observada una clase de reforzamiento del contenido. Cabe señalar que la observación de la Investigadora en las aulas de primaria en ocasiones fue participante (Wittrock, 1986) para clarificar las dudas que presentaban los niños de primaria y que omitían los normalistas, en los momentos en que el normalista dudaba sobre lo que estaba enseñando o cuando el normalista no identificaba todas las respuestas propuestas por los niños.

La Tabla 6.2 caracteriza de acuerdo a la célula de análisis (Ojeda, 2006) los referentes propuestos por los cuatro normalistas. E^1_{34} y E^1_{39} realizaron la misma planeación para los grupos de quinto grado, dado que sus maestras titulares de primaria les otorgaron los mismos contenidos a tratar en sus prácticas.

Tabla 6.2. Caracterización de tres referentes planteados en las observaciones de clase de cuatro futuras docentes de la generación 2013-2017.

<table>
<tr><th>Practicante</th><th>E^1_{28}</th><th>E^1_{34} y E^1_{39}</th><th>E^1_8</th></tr>
<tr><td>Tema</td><td>Media aritmética
(20 alumnos de 5º grado)</td><td>Media aritmética y moda
(20 alumnos de 5º grado)</td><td>Media aritmética, moda y mediana (repaso)
(Seis alumnos de 6º grado)</td></tr>
<tr><td>Referentes</td><td>α. Tengo cinco sobrinos. Un día llegaron y me mostraron las calificaciones de tres asignaturas: matemáticas, español e inglés. Observa la tabla y determina: ¿quién tuvo el mejor promedio?
<table>
<tr><td>Alumno</td><td colspan="3">Asignatura</td></tr>
<tr><td></td><td>E</td><td>M</td><td>I</td></tr>
<tr><td>Úrsula</td><td>8</td><td>10</td><td>10</td></tr>
<tr><td>Adolfo</td><td>6</td><td>8</td><td>8</td></tr>
<tr><td>Luis</td><td>9</td><td>8</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Rosario</td><td>7</td><td>9</td><td>10</td></tr>
<tr><td>Karla</td><td>8</td><td>10</td><td>7</td></tr>
</table></td><td>β. A Norma, por sus excelentes calificaciones, la escuela donde estudia le ofreció un intercambio estudiantil a España, pero necesita tener un promedio de 9.
Si sus calificaciones son: primer bimestre 8, segundo bimestre 8, tercer bimestre 9 y en el cuarto bimestre 10, ¿qué calificación debe tener Norma en el quinto bimestre para irse de intercambio?</td><td>γ. Con los datos 6, 9, 10, 9, 8, 9 y 8, determina:
a) la media aritmética
b) la mediana
c) la moda</td></tr>
<tr><td>Ideas fundamentales</td><td colspan="3">Variable estocástica, Muestra</td></tr>
<tr><td>(Tipo de variable)</td><td>(Cuantitativa discreta)</td><td>(Cuantitativa discreta)</td><td>(Cuantitativa discreta)</td></tr>
<tr><td>Otros conceptos matemáticos</td><td>Operaciones aritméticas, orden de números naturales, números decimales.</td><td>Operaciones aritméticas, números naturales, ordinales.</td><td>Operaciones aritméticas, números naturales, orden.</td></tr>
<tr><td>Recursos semióticos</td><td>Lengua natural escrita, tabla, signos numéricos, notación numérica.</td><td>Lengua natural escrita y signos numéricos, notación numérica.</td><td>Lengua natural escrita, notación numérica, signos numéricos.</td></tr>
<tr><td>Términos empleados</td><td>Mejor promedio</td><td>Promedio</td><td>Dato, media aritmética, mediana, moda</td></tr>
</table>

En el segundo período participaron E^1_{32}, E^2_7, E^2_{16} y E^2_{24}. Los referentes para la enseñanza de medidas de tendencia central propuestos por cada uno de los practicantes están caracterizados en la Tabla 6.3. E^2_7 propuso recopilar el número de hermanos de cada alumno del grupo, referente similar al que I trató con el grupo de normalistas (véase en el apdo. 5.2.2).

Tabla 6.3. Caracterización de cuatro referentes propuestos por las futuras docentes para tratar las medidas de tendencia central.

Practicante	E^1_{32}	E^2_7	E^2_{16}	E^2_{24}
Tema	**Moda** 10 alumnos de 4º grado	**Media aritmética, moda y mediana** 14 alumnos de 5º grado	**Media aritmética, moda y mediana (repaso)** 4 alumnos de 5º grado	**Media aritmética, y moda** 9 alumnos de 5º grado Dos equipos: 4 y 5 alumnos
Referentes	**δ**. Encuesta realizada a 25 alumnos de la escuela primaria sobre el planeta que más les gusta. La elección fue libre. ¿Qué planeta fue el más popular? ***)** Traza la gráfica correspondiente al conjunto de datos y ubica en ella la moda.	**ε.** Número de hermanos de cada alumno del grupo.	**ζ.** Determina la media, mediana y moda del peso (kg) de 28 alumnos del 5°A. Los pesos son: 45, 49, 51, 45, 50, 38, 37, 45, 44, 48, 45, 37, 39, 46, 44, 43, 42, 45, 44, 40, 41, 42, 45, 40, 45, 45, 49, 50	**η.** Número de hermanos. 0 1 1 2 4 1 1 5 2 3 0 4 3 2 1 El número medio de hermanos es: ◯ 2 ◯ 1 ◯ 3
Ideas fundamentales	Variable estocástica, Muestra			
(Tipo de variable)	(Cualitativa)	(Cuantitativa discreta)	(Cuantitativa discreta)	(Cuantitativa discreta)
Otros conceptos matemáticos	Operaciones aritméticas, orden de números naturales, números decimales.	Operaciones aritméticas, números naturales y decimales, orden en los números.	Operaciones aritméticas, números naturales y decimales, orden en los números, unidades de peso (kg).	Operaciones aritméticas, números naturales.
Recursos semióticos	Lengua natural escrita, tabla, gráfica, notación numérica.	Lengua natural escrita, notación numérica.	Lengua natural escrita, notación numérica.	Lengua natural escrita, notación numérica.
Términos empleados	Encuesta, *más* gusta, *más popular*.	Encuesta, media promedio, muestra, mediana, moda, frecuencia.	Media, mediana, moda, frecuencia.	Número *medio* de hermanos.

Nota: (*) A solicitud de I.

En el tercer período de observaciones, los normalistas consideraron tratar las lecciones 98, "¿A todos les va igual?" de quinto grado (SEP, 2014e, pp. 191 - 192), y 105, "¡Pasteles, pasteles!" de 4º grado (SEP, 2014d, pp. 195 - 196). En su planeación de la enseñanza de la media, la moda y la dispersión, E^2_{13} copió la "intención didáctica" de la lección 98 del libro para el maestro: "Resuelve problemas que implican obtener la media aritmética (promedio) como un valor representativo. Determina la pertinencia de la moda o de la media aritmética para representar un conjunto de valores" (SEP, 2014k, p. 310), dado que en el programa de estudio 2011 de quinto grado (SEP, 2012i) no especifica un “aprendizaje esperado” para el contenido que trató E^2_{13}. El libro de texto de 5º grado (SEP, 2014e) no considera el tratamiento de la mediana para identificar la medida más representativa de un conjunto de datos, ni la enseñanza de la distribución de los datos ni el trazo de gráficas que E^2_{13} propuso en la enseñanza que impartió. La caracterización de la lección 98 presentada en el apartado 4.4 se modificó debido a las consideraciones de E^2_{13} (véase en la Tabla 6.4).

E^2_9 enseñó la moda (véanse la Tabla 6.4 y la Tabla 6.5) e incluyó en su planeación el aprendizaje esperado “Resuelve problemas utilizando la información representada en tablas e identifica la medida de tendencia central (moda) de un conjunto de datos”, que se basa en el contenido del programa de estudio 2011 “Resolución de problemas en los cuales es necesario extraer información de tablas o gráficas de barras” (SEP, 2012h, p.76), y el del libro de texto para el maestro, “Identificación y análisis de la utilidad del dato más frecuente de un conjunto de datos” (SEP, 2014j, p. 329; véase la Figura 6.1). Aunque no se le considera en el formato original, a solicitud de I, E^2_9 incluyó en su planeación un apartado con el propósito de su sesión: “Que los estudiantes identifiquen en diferentes problemas la moda de los datos” (véase la Figura 6.2). Para que los alumnos identificaran la moda en dos registros distintos (tabla y gráfica), en la práctica I también solicitó a E^2_9 el trazo de la gráfica correspondiente a cada conjunto de datos (de una variable cuantitativa discreta y una cualitativa nominal) de los dos problemas.

Tabla 6.4. Caracterización de los referentes de las lecciones del libro de texto.

Estudiante Normalista	E^2_9	E^2_{13}
Tema	**Moda**	**Moda, media aritmética y dispersión**
Lección del libro de texto	**105. ¡Pasteles, Pasteles!** (4° grado)	**98. ¿A todos les va igual?** (5°grado)

Referentes

E^2_9:

θ. En la pastelería Delicias, don Roque registró la venta de rebanadas de pastel de los primeros días de la semana.

Lunes		Martes		Miércoles	
Chocolate	Tres leches	Chocolate	Chocolate	Queso	Tres leches
Queso	Zanahoria	Queso	Chocolate	Chocolate	Fresa
Chocolate	Chocolate	Chocolate	Queso	Fresa	Zarzamora
Chocolate	Chocolate	Fresa	Queso	Queso	Queso
Tres leches	Chocolate	Fresa	Chocolate	Chocolate	Fresa
Queso	Fresa	Fresa	Tres leches	Zarzamora	Fresa
Zarzamora	Chocolate	Chocolate	Fresa	Zanahoria	Chocolate
Fresa	Chocolate	Chocolate	Fresa	Queso	Queso
Zarzamora	Queso	Tres leches	Queso	Queso	Chocolate
Queso	Chocolate	Chocolate	Chocolate	Queso	Zarzamora
Queso	Chocolate	Zanahoria	Zarzamora	Chocolate	Zanahoria
Chocolate	Tres leches	Fresa	Zanahoria	Chocolate	Fresa
Tres leches	Queso	Chocolate	Chocolate	Zanahoria	Chocolate
Chocolate	Chocolate	Queso	Queso	Chocolate	Queso
Queso	Chocolate	Queso	Queso	Chocolate	Queso
Zanahoria	Tres leches	Chocolate	Chocolate	Chocolate	Zanahoria
Tres leches	Fresa	Chocolate	Chocolate	Queso	Fresa
Zarzamora	Zarzamora	Queso	Zarzamora	Chocolate	Queso
Queso	Queso	Zanahoria		Queso	Queso
Zanahoria	Chocolate	Zarzamora			Queso

a) ¿Qué día se vendieron más rebanadas de pastel de zanahoria?
b) ¿Cuántas rebanadas de pastel de queso se vendieron el día lunes?
¿Y el martes? ¿Y el miércoles?
c) ¿De qué pastel se vendieron menos rebanadas durante los tres días, de fresa o de leche?
d) ¿De qué pastel se vendieron más rebanadas el día lunes?
¿Y el martes? ¿Y el miércoles?
e) Don Roque tiene que hacer más pasteles para la venta del día jueves, ¿de qué sabores le conviene hornear más?

E^2_{13}:

ι. En la ciudad de Atlixco, Puebla, existen tres empresas textiles, de las cuales se tomó una muestra de 15 empleados de cada una para investigar sus salarios en pesos. La siguiente tabla muestra los resultados.

Empleado	Textiles del Pacífico ($)	Textiles del Golfo ($)	Textiles del Caribe ($)
1	500	600	500
2	700	600	800
3	700	600	1400
4	800	600	1400
5	800	600	1400
6	1000	600	1400
7	1000	900	1400
8	1000	900	1400
9	1000	1000	1400
10	2000	1000	1600
11	2000	1500	1600
12	2000	2000	1600
13	4000	2000	1600
14	5000	2600	2000
15	5000	7000	2000

Con los datos anteriores determinen la moda y la media de los salarios de cada empresa textil. Pueden utilizar su calculadora. Luego contesten las preguntas.

Empresa textil	Moda	Media
Textiles del Pacífico		
Textiles del Golfo		
Textiles del Caribe		

a) ¿En qué empresa la media es representativa de los sueldos de los empleados?
b) ¿Y en cuál la moda?
***)** Traza la gráfica correspondiente al conjunto de datos y ubica en ella la moda y la media.

	E^2_9	E^2_{13}
Ideas fundamentales	Equidistribución y simetría, Variable estocástica y Muestra	
(Tipo de variable)	(Cualitativa nominal)	(Cuantitativa discreta)
Otros conceptos matemáticos	Números naturales, operaciones aritméticas, producto cartesiano.	Números naturales, operaciones aritméticas, escala, producto cartesiano.
Recursos semióticos	Lengua natural escrita, tablas, gráfica.	Tablas, gráficas, notación numérica, lengua natural escrita.
Términos empleados	Se vendieron *más o menos* rebanadas, *qué* sabores le *conviene* hornear.	Muestra, moda, media, representativa, dispersión.

Nota: (*) A solicitud de I.

Bloque V

Competencias que se favorecen: Resolver problemas de manera autónoma • Comunicar información matemática • Validar procedimientos y resultados • Manejar técnicas eficientemente			
Aprendizajes esperados	Ejes		
	Sentido numérico y pensamiento algebraico	Forma, espacio y medida	Manejo de la información
• Identifica y genera fracciones equivalentes. • Utiliza el cálculo mental para obtener la diferencia de dos números naturales de dos cifras.	Números y sistemas de numeración • Obtención de fracciones equivalentes con base en la idea de multiplicar o dividir al numerador y al denominador por un mismo número natural.	Medida • Estimación de la capacidad que tiene un recipiente y comprobación mediante el uso de otro recipiente que sirva como unidad de medida.	Análisis y representación de datos • Identificación y análisis de la utilidad del dato más frecuente de un conjunto de datos (moda).

Figura 6.1. Programa de estudio 2011. Cuarto grado. (SEP, 2012h, p.78).

Los normalistas mostraron dificultades para identificar el aprendizaje esperado prescrito para las lecciones en los programas de estudio (SEP, 2011d) e incluirlo en sus planeaciones. Esto sugiere que los futuros docentes pueden llegar a confundir los aprendizajes esperados con los contenidos señalados en la propuesta institucional (SEP, 2011e), pues en el quinto bloque de 4º grado ninguno de tales aprendizajes corresponde al tema (véase la Figura 6.2).

Matemáticas 4to grado

CONTENIDO: La moda	**PROPOSITO:** Que los estudiantes identifiquen en diferentes problemas la moda de los datos.	**ASIGNATURA:** Matemáticas	**BLOQUE:** V
COMPETENCIAS QUE SE FAVORECEN:	**APRENDIZAJES ESPERADOS:**	**EJE:**	**DESAFÍO:**
• Resolver problemas de manera autónoma • Comunicar información matemática	Resuelve problemas utilizando la información representada en tablas, e identifica la medida de tendencia central (moda) de un conjunto de datos	Manejo de la información	105. ¡Pasteles, pasteles!

Figura 6.2. Planeación realizada por E^2_9.

La caracterización de dos referentes propuestos por E^2_{13} para enseñar la moda y la media aritmética, así como la de dos referentes de E^2_9 para enseñar la moda, se muestra en la Tabla 6.5.

Tabla 6.5. Caracterización de cuatro referentes propuestos por $E^2{}_{13}$ y $E^2{}_9$ en sus prácticas con grupos de cuarto y quinto grado.

Practicante	**$E^2{}_{13}$**		**$E^2{}_9$**	
Tema	Moda y media (20 alumnos de 5º grado)		Moda (11 alumnos de 4º grado)	
Referentes	**κ**. Se le preguntó a un grupo de 26 maestros ¿cuántos libros leyeron el año pasado? y se obtuvieron las siguientes respuestas: 10, 13, 4, 7, 8, 11, 10, 16, 18, 12, 3, 6, 9, 9, 4, 13, 20, 7, 5, 10, 17, 10, 16, 14, 8, 18. Calcula la media aritmética y la moda. ***)** Traza la gráfica correspondiente al conjunto de datos y ubica en ella la moda y la media.	**λ**. Se le preguntó a un grupo de 20 personas ¿cuántas horas navegan en internet a la semana? Los datos obtenidos fueron los siguientes: 1, 3, 42, 45, 7, 8, 8, 10, 10, 12, 25, 3, 45, 10, 10, 7, 12, 12, 10, 0. Calcula la moda y la media aritmética. ***)** Traza la gráfica correspondiente al conjunto de datos y ubica en ella la moda y la media.	**μ**. ¿Cuál es su color favorito? Respondieron las preguntas: ¿Cuántos niños contestaron la encuesta? ¿Cuáles son los colores que prefieren menos en el grupo? ¿Qué color fue el que más se repitió? ¿Qué dato representa la moda? ¿Cómo lo saben? ***)** Traza la gráfica correspondiente al conjunto de datos y ubica en ella la moda.	**ν**. ¿Cuántos años tienen los alumnos de cuarto año? Completaron una tabla de frecuencias que se colocó en el pizarrón. Respondieron las preguntas: ¿Qué edad representa la moda? ¿Por qué? ***)** Traza la gráfica correspondiente al conjunto de datos y ubica en ella la moda y la media.
Ideas fundamentales	Variable estocástica, muestra			
(Tipo de variable)	(Cuantitativa discreta)	(Cuantitativa discreta)	(Cualitativa nominal)	(Cuantitativa discreta)
Otros conceptos matemáticos	Operaciones aritméticas, orden de números naturales y números decimales, producto cartesiano, unidad de medida de tiempo (año).	Operaciones aritméticas, números naturales y decimales, orden en los números naturales, unidad de medida de tiempo (semana, hora).	Orden de números naturales, producto cartesiano.	Orden en los números naturales, producto cartesiano, unidad de medida de tiempo (años).
Recursos semióticos	Lengua natural escrita, tabla, plano cartesiano, signos numéricos, gráfica, notación numérica.	Lengua natural escrita, simbología matemática, plano cartesiano, gráfica de barras, tabla.	Lengua natural escrita, tabla, tarjas, signos numéricos, plano cartesiano, gráfica de barras.	Lengua natural escrita, tabla, plano cartesiano, gráfica de barras, tarjas.
Términos empleados	26 maestros, cuántos libros leyeron el año el pasado, conjunto, datos, media aritmética, moda.	20 personas, cuántas horas a la semana, conjunto, datos, media aritmética, moda.	Color favorito, frecuencias, encuesta, menos preferido, más se repitió, qué dato representa la moda, conjunto, datos.	Cuántos años tienen, frecuencias, conjunto, datos, qué edad representa la moda.

Nota: (*) A solicitud de I.

6.1.1. Referentes

Los trece referentes se presentaron en lengua natural escrita y con signos numéricos, en **α**, **η** y **θ**, además, se usaron tablas. Los referentes **δ**, **ε**, **μ** y **ν** fueron encuestas a los alumnos del mismo grupo o de la escuela. Para los referentes **δ**, **ι**, **κ**, **λ**, **μ** y **ν** (véanse en las Tablas 6.3, 6.4 y 6.5), I solicitó a las normalistas en cuarto grado, la gráfica de la distribución de los datos y ubicar en ella la moda, así como la media y la moda en quinto grado, con la intención de que los normalistas y los niños identificaran el concepto de estocásticos en diferentes recursos semióticos como lo señala Duval (2006). El planteamiento de **β** (véase en la Tabla 6.2) fue distinto, ya que se pidió determinar uno de los datos en lugar de determinar el promedio a partir del conjunto de datos, como lo propuesto para los otros doce referentes.

6.1.2. Ideas fundamentales de estocásticos

Todos los alumnos participantes identificaron el tamaño de la muestra y los datos (valores de la *variable estocástica*) que tenían que considerar; sin embargo, mostraron dificultades de operatividad aritmética al calcular la media aritmética.

6.1.2.1. Equidistribución y simetría. Los alumnos de quinto grado de E^2_{13} tuvieron dificultad para identificar la simetría de la distribución de los datos en la lección 98 (véase en la Tabla 6.4) resumida en la gráfica respectiva, dado que E^2_{13} señaló que una gráfica simétrica debía tener la misma cantidad de datos de un lado y del otro de la media; sin embargo, la normalista no precisó que para que una gráfica fuera simétrica debían coincidir las tres medidas de tendencia central. Dado que E^2_{13} y el libro de texto de quinto grado no trataron la mediana, los alumnos pudieron haberse confundido, pues el valor de la mediana queda a la mitad de los datos ordenados, con la mitad de datos por arriba y la otra mitad de datos por debajo del valor de la mediana.

E^2_{13} […] Entonces, si yo reviso esta gráfica [señala la gráfica trazada en el pizarrón]; me voy a dar cuenta que de aquí [señala el lado izquierdo de la gráfica considerando la ubicación de la media] **de este lado hay más datos** porque aquí [señala el lado izquierdo de la primera gráfica] marca más o menos … estos datos [se refiere a los datos: 500, 700, 800, 1 000] van en rango… O sea, no están tan dispersos. Y **los que están del otro lado** [señala el lado derecho de la primera gráfica] son los que vienen a romper la sucesión que llevaba [se refiere a los datos: 2 000, 4 000 y 5 000],

¿no? Entonces, por eso estos **son los que tienen menos**, por decirlo. **Así, nos damos cuenta de que tengo una gráfica que no es simétrica**. ¿Qué es la simetría? ¿Saben?

A_2 [Levanta la mano] Es [inaudible, pega y separa las manos] exactamente iguales.

E^2_{13} ¡Ah!, cuando algo lo doblo a la mitad. Por ejemplo; esta hoja, si la doblo [dobla una hoja] a la mitad, esta línea sería el eje de simetría ¿no? Un lado es igual al otro. Entonces, ¿qué pasa con esta gráfica si yo la partiera por la media? [señalando la gráfica] Entonces, ¿es simétrica o no?

AS No es simétrica.

E^2_{13} **No es simétrica porque no tiene la misma cantidad de datos de un lado que de otro**. ¿Se acuerdan de que una de las que vimos ayer sí era simétrica?

AS Sí.

E^2_{13} Porque de cada lado tenían la misma cantidad de datos. Sí se acuerdan de eso, ¿verdad? Ahora, veamos ésta [señala la segunda gráfica del pizarrón]. ¿Esta será simétrica o no?

AS Sí [A_{15} mueve negativamente la cabeza].

E^2_{13} Sí, ¿por qué?

A_3 Porque se está partiendo por la mitad... [inaudible por el ruido]

E^2_{13} A ver, vamos a ver... Pero, ¿qué es lo que…?

A^5_8 **Porque tiene la misma cantidad de datos**.

***6.1.2.2. Variable estocástica*.** En las prácticas observadas, ninguno de los normalistas atrajo la atención de los alumnos hacia la variable de interés del referente de la que se proporcionaban los datos; es decir, los practicantes dieron por sentado que los alumnos identificaron el atributo del referente al que correspondía la variable. No se obtuvo evidencia de que hubieran señalado de qué tipo de variable se trataba. Esta omisión fue notoria en el trazo de gráficas que resumieron los datos (véase en §6.1.4.5).

E^2_7 pasó por alto la variabilidad de los datos de la muestra sugerida por el término "variedad"; y para el referente **ε** (véase en la Tabla 6.3) no subrayó lo suficiente que el número de hermanos podía cambiar de un niño a otro; es decir, desconoció la naturaleza estocástica de esos datos. A_9 (10 años de edad) lo advirtió, si bien, no tanto que fuera probable (como señalaran Garfield y Ben-Zvi, 2008), pero sí que era *posible* que el número de hermanos de un conjunto de personas *variara* o *cambiara*:

E^2_7 […] Ésta es una medida de tendencia central; entonces, podemos decir que la moda [señala el pizarrón en la parte en que escribió la palabra moda] es la cantidad [vuelve a señalar al pizarrón] que más se repite, ok. ¿Qué otra crítica podemos ver en la tabla, en los datos [tose]?

A_9 La **variedad**.

E^2_7 ¿Cómo?

A_9 La **variedad**.

E^2_7 ¿Variedad?

A_9 [Asiente con la cabeza].

E^2_7 ¿Cómo variedad?

A_9 De **diferentes números**.

E^2_7 ¡Hay diferentes números [voltea al pizarrón]! ¿Qué números diferentes hay?

A_9 Nada más hay 1, 2 y 3.

Esa inadvertencia de $E^2{}_7$ del señalamiento de A_9 se debió a que la normalista no precisó la frecuencia de los valores de la variable que obtuvieron en la encuesta.

En el tercer período de observaciones, $E^2{}_9$ y sus alumnos de cuarto año identificaron correctamente la variable cualitativa nominal (preferencia de color) y cuantitativa discreta (edad en años) según los referentes **μ** y **ν**, respectivamente (véase en la Tabla 6.5); pero no consideraron el tipo de variable al trazar las gráficas correspondientes (véase en §6.1.4.5 y la Figura 6.7). La moda la identificaron al considerar y comparar las frecuencias de los datos. Para el referente **κ** (véase en la Tabla 6.5), los alumnos de 5º grado a cargo de $E^2{}_{13}$ confundían la frecuencia (variable aleatoria) de un dato (valor ocurrido de la variable) con el dato mismo, por lo que la normalista aclaró la diferencia al grupo:

$E^2{}_{13}$	¿Cuatro? Entonces, ¿qué vas a colocar aquí [señala la pregunta del problema]?
A_{10}	**Cuatro**.
I	¿**Cuál es la frecuencia de los libros**?
A_{10}	[Observa la hoja].
$E^2{}_{13}$	Acuérdate que la frecuencia tiene que ver con cuántas veces se repite ese número en el conjunto de datos… [señala el conjunto de datos] ¿Cuántas veces se repite el cuatro?
A_{10}	¿**El cuatro**? [Lo cuenta]. **Dos**.

En la práctica de $E^1{}_8$ en sexto grado, para el referente **γ** (véase en la Tabla 6.2) A_1 (12 años de edad) identificó una de las funciones de un promedio de una muestra:

$E^1{}_8$	¿Qué es el promedio? [Ya dijeron] que lo podemos utilizar para tener una calificación. ¿[Para] qué más?
A_2	Para obtener calificaciones.
$E^1{}_8$	Para obtener calificaciones… ¿A_1?
A_1	Pues para sacar algún dato de alguna cosa que se necesite sacar, algo que sea más o menos…, algo que **represente a la mayoría** de datos.

La intervención de A_1 estuvo en consonancia con lo señalado por Moroney (1979): “el propósito de un promedio es *representar un grupo de valores individuales* (…) el promedio ha de actuar como un *representante”* (p. 170). Sin embargo, esta reflexión es rara en la enseñanza de las medidas de tendencia central, ya que el uso común del promedio es como algo típico, pero no “como una construcción representativa en el sentido técnico”, según lo sugiere Bakker (2003, párr. 67).

Respecto al referente **β** (véase en la Tabla 6.2), que incluyó una variable cuantitativa, la *moda* fue identificada por E^1_{39} como el *número* que se *repite varias veces*, pero después de la intervención de A_8 (10 años de edad) hizo la corrección respectiva:

E^1_{39} Ustedes me dijeron que la moda era la **cantidad de números que se repiten varias veces**. Es la **cantidad de números que se repiten varias veces**…el **número que se repite varias veces**.
A_8 Es el número **que se repite más,** ¿no, maestra?
E^1_{39} Exacto, el **número que más se repite**.

Al considerar el valor de la media aritmética para el referente **α** (véase en la Tabla 6.2), A_2 (de 10 años de edad) compensó entre ellas, las calificaciones de Luis para que tuviera las mismas que Adolfo, por tanto, el mismo promedio (véase también apdo. 6.1.6), un enfoque del promedio que Mokros y Russell (1995) identificaron como algo razonable, ya que A_2 dio a entender que los valores altos se contrarrestaban con los valores bajos (véanse la Figura 6.3 y la Figura 6.9); es decir, «desarrolló espontáneamente una estrategia de compensación como ya lo había señalado Bakker (2003) en los resultados de su investigación con alumnos de secundaria quienes dijeron: "Doy un poco de julio a enero, de agosto a febrero y así sucesivamente"» (párr. 43). Pero la intervención de A_2 se quedó en una "expresión vaga" (Bakker, 2003, párr. 34) al compensar sólo las calificaciones.

Al contrario, E^2_7 confundió la moda y la media correspondientes al "número de hermanos de la mayoría" y "promedio de número de hermanos" (referente **ε** en la Tabla 6.3). A_3, de edad 10 años, lo señaló:

E^2_7 O sea, si nos iban a decir… [motiva la pregunta del problema] de dirección vienen a decir: ¡Aaah!, quiero saber cuál... **la mayoría, ¿cuántos hermanos tiene? Vamos a decir: la mayoría**, ¡aaahh!, **es que tienen uno punto ocho hermanos, la mayoría**. ¿Estaría bien?
A_3 **Porque ésa** [refiriéndose a la media 1.8 hermanos que obtuvieron los alumnos] **ya es la suma de todos los niños, pero en total** [de 16] **la mayoría son dos**.

La *mediana* fue tratada por E^1_8, E^2_7 y sus alumnos de quinto y sexto grado; la identificaron como el valor que está en medio de los datos ordenados del conjunto (referentes **γ** y **ε**, respectivamente; véanse en la Tabla 6.2 y en la Tabla 6.3):

E^1_8 Es 10, ésa sería la moda. Ok. ¿Puedes sentarte A_2? Gracias. Ahora sí, para solidificar [reafirmar] los conocimientos, ¿qué es la mediana?
A_3 La **mediana** es **lo que está en medio**.

Las aportaciones de A_3 y $E^2{}_7$ identifican a la mediana como el valor que queda en medio, sin embargo; faltó precisar que es el dato que queda en medio de un conjunto de datos que se ordena de mayor a menor o viceversa, y señalar que la cantidad de datos ordenados puede ser par o impar.

$E^2{}_7$	Ok, **mediana es** la…, **el número que queda en medio. ¿Cuántos números hay?**
AS	[Dan varias respuestas al mismo tiempo] Mmm … tres, dos.
$E^2{}_7$	¿Cuántos números en total son? [señala la parte en la que acaba de ordenar los números en el pizarrón].
AS	[Hablan al mismo tiempo y dan algunas respuestas] 16, 17.
$E^2{}_7$	16. **¿Cuál es la mitad de 16?, ¡para encontrar el de en medio!**

$E^1{}_{28}$, $E^2{}_7$, $E^2{}_{16}$, $E^2{}_{24}$ y sus alumnos de quinto y sexto grado de los tres períodos de observaciones mostraron conocimiento de cálculo (Pollatsek, *et al*., 1981) de las medidas centrales. Por ejemplo, para el referente **α** (véase en la Tabla 6.2):

$E^1{}_{28}$	Y hasta ahí nos quedamos. Bien, y entonces, el promedio de Úrsula fue de 9.3, es decir que **al sumar todas sus calificaciones y dividirlas** [dividir la suma] **por** [entre] **el número de calificaciones que tuvo nos dio… ¿cuánto?**
AS	9.3.
$E^1{}_{28}$	¡9.3! Y así puedo hacerle para Adolfo, para Judith y para Karla.

Para el referente **ι** (véase en la Tabla 6.4), $E^2{}_{13}$ recordó a los alumnos que el día anterior les había enseñado cómo identificar cuál medida era *más representativa* de un conjunto de datos:

$E^2{}_{13}$	¿Por qué hay dispersión? ¿Por eso representa la media? Dice la pregunta: ¿en qué empresas la media es representativa del sueldo de los trabajadores? **¡Representativa!** Acuérdense que quedamos ayer [en] que, si en los números había **una gran dispersión** entre ellos, **la media no podía ser representativa como medida de tendencia central**.
AS	¡Era la moda!
$E^2{}_{13}$	Por lo que sería la moda. **Y si los datos no estaban tan dispersos, entonces, sí podía ser la media la que representara el valor de tendencia central**. Entonces, ¡aquí [señala la segunda gráfica (textiles del golfo) del pizarrón] en esta gráfica!, si yo me doy cuenta ¿la media y la moda se parecen?
$E^2{}_{13}$	¿Entonces? Con base a [en] esto, **si sabemos que la dispersión hace…, o la dispersión de los datos hace que la media se altere de alguna manera y no me sirva como medida de tendencia central o representativa de un conjunto de datos,** entonces, siempre va a ser la moda la que me va a servir como la representativa, ¿sí? Entonces, a ver ¿quién me dice qué es la dispersión? A ver, A_{21}, tú que no viniste ayer, ¿qué propones o qué entiendes como dispersión de datos?
A_{21}	¿Qué no coincide el número de la moda y la media?

El papel de la dispersión no fue claro, ni para la normalista ni para los alumnos, dado que se señaló que la dispersión alteraba a la media, aunque no es en sí la dispersión, sino que el valor de la media es sensible a valores extremos. La dispersión es un término que se refiere a la separación de los datos entre sí; es decir, la dispersión indica la variabilidad de los datos.

6.1.2.3. Muestra. Para cada referente, nueve de las normalistas y sus alumnos de cuarto, quinto y sexto grados de primaria identificaron los datos y el número total de éstos para obtener la media; por ejemplo, para el referente **α** (véase en la Tabla 6.2) identificaron todos los valores de la variable (para cada sobrino sumaron sus calificaciones) y el tamaño de la muestra de asignaturas (tres):

A_1	**Se suman todas las calificaciones de cada sobrino y el resultado lo divides**.
E^1_{28}	¿Entre qué lo voy a dividir?
A_4	**En las** [entre el número de] **tres asignaturas**.
A_1	**En las** [entre el número de] **tres asignaturas** [señalando hacia el pizarrón].

Los alumnos de quinto grado de E^2_{24} tuvieron dificultad para identificar el tamaño de la muestra, es decir, el total de datos en el referente **η** (véase en la Tabla 6.3):

I	Pero para sacar la media tú debes identificar dos aspectos importantes: uno, la suma de los datos, ya la tienes [señala el resultado de la suma (30) que hizo A_4]; dos, el número de datos […]
Q_2A_4	Aquí [señala el referente **η** (véase en la Tabla 6.3)], **el número de datos es dos**.
I	¿Es dos?, **¿cuántos datos tienes en total?**
Q_2A_4	Dos.
I	**¿Dos?** [hace la pregunta y al ver que la alumna no logra llegar a la respuesta correcta, da un ejemplo señalando la tabla del ejercicio anterior que se encuentra en el pizarrón] Por ejemplo, ahí tienes el cuatro, el uno, el tres, el dos y el cuatro; no importa que sea cuatro, no importa que sea el uno. ¿Cuántos datos en total tienes ahí? Tienes cinco datos. La suma de esos datos es la que dividieron entre los cinco integrantes. Mi pregunta es: **¿cuántos datos tienes aquí?** [señala el referente **η**].
Q_2A_4	**Ocho** [contó únicamente los ocho datos de la primera línea del conjunto de datos].
I	¿Tienes ocho datos?
Q_2A_4	¡Ah!, ¿también éstos? [señala la segunda línea de datos] ... **Son quince.**

A_4 tuvo dificultad para identificar el total de datos debido a la presentación de éstos en dos líneas: una con ocho datos y otra con siete datos, por lo que sus respuestas primero fueron dos y ocho datos.

E^2_7 presentó dificultades con el referente **ε** que propuso (cuántos hermanos tenía cada niño del grupo, véase en la Tabla 6.3). Respecto a un problema análogo (cuántos niños tenía la familia promedio) al propuesto por E^2_7, Heitele (1975) puntualizó que los alumnos requieren advertir que la muestra dada, no es representativa, pues no se considera a familias sin hijos o con un número mayor de hijos. E^2_7 y E^2_{24} pasaron por alto este aspecto en los referentes **ε** y **η** (véanse en la Tabla 6.3). De igual manera, E^2_{13} omitió señalar a los alumnos que respecto al referente **ι** (véase en la Tabla 6.5) propuesto se trataba de datos de una muestra para identificar la medida más representativa de ellos.

La tarea del cálculo de promedios de muestras del mismo tamaño podría subrayar en exceso un comportamiento absoluto de los datos en vez de su carácter relativo al tamaño de la muestra. Sin embargo, la comparación propuesta para el referente **α** (véase en la tabla 6.2) motivó la reflexión acerca de los datos en sí y de su distribución; es decir, en la enseñanza, los normalistas deben considerar muestras de diferentes tamaños, así como distintos recursos semióticos (por ejemplo, tablas y gráficas) para presentar los datos del referente y no sólo considerar la lengua escrita y el uso de signos numéricos, como lo señaló Duval (2006) se debe considerar un "contexto de representación" (p. 144), además de propiciar en los niños "la conversión de un tipo de registro a otro (lenguaje → notación simbólica, figura → lenguaje...) explícita o implícita" (p. 156) durante la enseñanza y el aprendizaje de temas matemáticos.

6.1.3. Otros conceptos matemáticos

El concepto matemático de mayor dificultad para los alumnos fue el de números decimales. Además, omitían las unidades de medida en los resultados finales.

6.1.3.1. Concepto de número y operaciones aritméticas. Los alumnos de cuarto, quinto y sexto grado, así como las normalistas, identificaron correctamente los números naturales en cada uno de los referentes; sin embargo, los alumnos de quinto grado de $E^2{}_{13}$ teclearon erróneamente los números al usar la calculadora.

A_{15}	[Dicta números a A_{12}] 12 más 16, más 14, más 18, más 40, más 11, más 12, más 26, más 14, más 36, más 17, más 36 y más 20.
A_{12}	[Al terminar de sumar con la calculadora, pone cara de afligido] ¡Me sigue dando lo mismo!
I	A ver… siéntate bien, [le pide a A_{12}]. Lo que alcancé a escuchar, **¿16 por dos son 36?** [señala la fila y las columnas en la tabla que organizaron los alumnos, A_{12} coge la calculadora y teclea], **¡sin calculadora!** [A_{12} coloca la calculadora debajo de la mesa y se inclina sobre la hoja] **16 por dos, ¿son 36?**
A_{12}	[Mira la hoja] **¡Son 32!** [borra].
I	¡Ya ves como a veces la calculadora engaña!
A_{15}	[A_{12} y A_{15} hablan entre sí, inaudible] **¡Ah!… yo puse 32, apenas lo acabo de poner**.
I	A ver, rectifica la suma. [A_{12} toma la calculadora y A_{15} cuenta con sus dedos] Los dos.
A_{12}	[Suma con la calculadora] **278** [borra y corrige] [platican].
A_{15}	**¡Ya ves que sí tenía razón? ¡Yo te había dicho que eran 278!**
A_{12}	**Había puesto 178** [corrige su suma].

Los alumnos de 6° grado y E^1_8 ordenaron de forma ascendente y descendente los datos para obtener la mediana. Por ejemplo, para el referente **γ** (véase en la Tabla 6.2):

E^1_8	¿Cómo los ordenarías para calcular la mediana? ... ¡Shhh!… [silencio, A_1 está frente al pizarrón].
A_1	[Ordena los datos de la siguiente manera (en forma de lista): 10, 9, 9, 9, 8, 8, 6].
E^1_8	¿A_1?
E^1_8	Ok. Les pregunto a los seis alumnos: ¿están de acuerdo con ello?
A_2	No.
E^1_8	A ver, A_2 argumenta [dice] que hay una anomalía en lo que acaba de escribir A_1 [A_2 se queda callada]. ¿Cómo ordenarías esos números, A_3? Pasa, A_3, por favor. Gracias, A_1.
A_3	[Pasa al pizarrón y ordena los números en forma de lista] 6, 8, 8, 9, 9, 9, 10.

E^1_8 no preciso sí importa o no que los datos se ordenen de manera ascendente o descendente e insistió que la lista se debe colocar de manera horizontal y no vertical como lo hicieron los alumnos; desaprovechando la identificación de la distribución simétrica del conjunto de datos independientemente de si los datos están en orden ascendente o descendente y si el listado es escrito de manera vertical u horizontal.

6.1.3.2. Unidades de medida (kg, horas). Al dar sus resultados, los alumnos y las normalistas ignoraron las unidades de medida de la variable en turno. Por ejemplo, E^2_{16} y sus alumnos omitían las *unidades de peso* en sus resultados para el referente **ζ** (véase en la Tabla 6.3) y hasta que I les preguntó al respecto se percataron de la omisión:

A_3	[Realiza la división murmurando en el proceso, al final borra y se queda con dos decimales].
I	¿Cuánto fue tu mediana [el valor de la media], entonces? Tu media, perdón, ¿cuánto vale tu [la] media?
A_3	44.
I	Cuarenta y cuatro… **¿qué?**
A_3	44.07.
I	Punto cero siete, **¿qué? ¿De qué estamos hablando?**
A_3	**Kilogramos**.

6.1.3.3. Producto cartesiano. Los alumnos de los grados 4º, 5° y 6º organizaron correctamente los datos mediante pares de coordenadas: por ejemplo, en el caso de quinto grado, para los referentes **κ** e **λ** (véanse en la Tabla 6.5), número de libro o número de hora contra su frecuencia respectiva (véase la Figura 6.4 y la Figura 6.5) y, en el caso de cuarto grado, para los referentes **μ** y **ν** identificaron el color o edad contra su frecuencia respectiva.

6.1.4. Recursos semióticos

Los normalistas y los alumnos inscribieron representaciones a nivel de experiencia (Andrà, 2011), ya que usaron los recursos semióticos comunes en la enseñanza: gráficas y tablas; sin embargo, los futuros docentes desaprovecharon la oportunidad de trazar diferentes recursos semióticos para un mismo concepto estocástico (Dreher y Kuntze, 2015), hasta que I se los señaló.

6.1.4.1. Lengua natural escrita. En general, tanto los futuros docentes como los alumnos de cada grado no mostraron dificultades con la escritura o lectura de enunciados en lengua natural. Sin embargo, este recurso no se aprovechó de manera suficiente.

6.1.4.2. Notación simbólica. E^1_8 presentó a los alumnos de sexto grado la fórmula para calcular la media aritmética en el referente $\boldsymbol{\gamma}$ (véase en la Tabla 6.2), que evoca la concepción de "el aprendizaje de fórmulas para resolver determinado tipo de problema" (Pollatsek, *et al*., 1981, p. 201) y que pone en juego preponderantemente el conocimiento de cálculo; al aprender sólo "el algoritmo de la adición de todos los valores y dividiendo entre el número de valores" se desaprovecha la estimación y se descuidan "aspectos cualitativos como la representatividad, en algún punto intermedio, el equilibrio y la compensación" (Bakker, 2003, párr. 25).

Ni la propuesta institucional, ni los libros de texto del alumno señalan el uso de fórmulas; sólo en la lección 52 del libro para el maestro de sexto grado (en el apartado de consideraciones previas) aparece el cociente $\frac{Suma\ de\ los\ datos}{número\ total\ de\ datos}$ (SEP, 2014l, p. 166). Sin embargo, los alumnos de sexto año asintieron reconocer la fórmula para determinar la media aritmética:

E^1_8	Sí, muy bien. **¿Alguno de ustedes conocía la fórmula de la media aritmética? Es ésta** [señala en el pizarrón la fórmula $\bar{x} = \frac{x_1+x_2+x_3+\ x_4\dots+x_5}{N}$]. ¿Sí la ubican?
AS	Sí.

Además, E^1_8 no fue precisa en la escritura de la fórmula, dado que son inútiles los puntos suspensivos en el numerador ya que anotó x_5 en lugar de x_N, o bien N en lugar de 5 en el denominador, lo que pone en evidencia las dificultades de conocimiento y uso de fórmulas por parte de la normalista.

En el apartado 6.1 señalamos que la sesión fue de reforzamiento, lo que haría suponer que E^1_8 consideró los conocimientos de los alumnos referente a los subíndices y las variables (Dimensión cognitiva) pero no hubo evidencia de ello durante la clase, pues sólo se preguntó a los niños ¿qué signos hay? y la misma normalista junto con un coro de niños respondieron signos de más (+).

6.1.4.3. Tablas de datos. Los normalistas E^1_{28}, E^1_{32}, E^2_7 y E^2_{13} propusieron tablas con información para determinar la media (véase la Figura 6.3) o para que los alumnos las completaran con los datos de acuerdo a los referentes considerados (véanse la Figura 6.4) y no dieron a los alumnos la oportunidad de que ensayaran alguna otra organización, tal vez por ajustarse a la duración de la clase.

ALUMNO	ASIGNATURAS		
	ESPAÑOL	MATEMÁTICAS	INGLÉS
Úrsula	8	10	10
Adolfo	6	8	8
Luis	9	8	5
Rosario	7	9	10
Karla	8	10	7

Figura 6.3. Tabla propuesta por E^1_{28} para el referente **α** (véase en la Tabla 6.2).

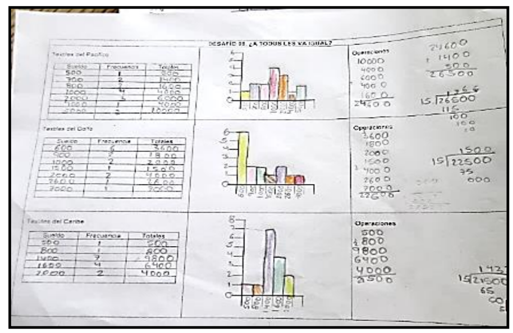


Figura 6.4. Tablas propuestas por E213 para el referente **ι** (véase en la Tabla 6.4).

6.1.4.4. Tarjas. E^1_{32} y sus alumnos de cuarto grado trazaron correctamente las tarjas respecto al referente **δ** (véase la Tabla 6.3). Para el referente **μ**, A_{11} (nueve años de edad) corrigió a E^2_9 la falta de agrupamiento de las marcas por cada cinco unidades, como es común hacer para facilitar el conteo (véase la Figura 6.5):

E^2_9 ¿Uno? [escribe el número uno].
AS Dos.
A_1 [Inaudible]… **pero maestra, nos enseñaron con palitos de cinco en cinco, como nos enseñaron con palitos… así cuatro y palito** [mueve la mano izquierda de arriba hacia abajo en forma horizontal].
E^2_9 Ok. Ponemos palitos. Tenemos uno y dos negros, ¿verdad?
A_{11} Siete. Azules, siete.
E^2_9 ¿Azul?
AS Siete.
E^2_9 Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete. [Vuelve a contar] uno, dos, tres, …, siete, ¿está bien?
A_1 Pero es que, maestra… [inaudible].
E^2_9 Sí, de cinco en cinco, sí. Ahorita lo checamos.

I Tantito. ¿En qué grado te enseñaron a cuantificar con los palitos cada cinco? [pregunta a A_1].

A_1 Mmm, en tercero.

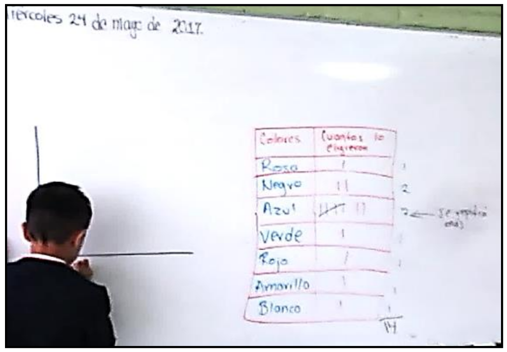


Figura 6.5. Tabla de datos con tarjas elaborada por E^2_9.

6.1.4.5. Gráficas. Para los alumnos de quinto grado conducidos por E^2_{13}, la lectura del *plano cartesiano* fue confusa al considerar si la gráfica de los datos del referente ι (véase en la Tabla 6.4) era o no simétrica, ya que los niños contaban el número de barras y no la frecuencia de los valores de la variable de salarios. A_5 (10 años de edad) e I aclararon al grupo que lo que debían considerar era la cantidad de datos, es decir, la frecuencia de los valores que había a la izquierda y a la derecha de la media aritmética (véase la Figura 6.6):

E^2_{13} ¡Ah! **Cuando algo lo doblo a la mitad**. Por ejemplo; esta hoja, si la doblo [dobla una hoja] a la mitad, esta línea sería el eje de simetría ¿no? **Un lado es igual al otro**. Entonces, ¿**qué pasa con esta gráfica si yo la partiera por la media**? [señalando la gráfica] Entonces, ¿**es simétrica o no**?

AS ¡No es simétrica!

E^2_{13} No es simétrica. ¿Por qué?

A^5_8 Porque viene a romper la [sucesión] que está más grande [se refiere al dato mayor del conjunto de datos] y, aparte, no tiene la misma cantidad. La de su derecha ¡no!, **la de su izquierda tiene dos y la del otro lado tiene tres** [se refiere al número de barras que están a la derecha y a la izquierda de la media].

E^2_{13} Habla más fuerte porque con el escándalo de afuera …

A_5 Es que, **lo que hago es encimar una línea con otra línea** [se refiere a las barras], **y no importa si la otra tiene más** [datos]**, dependiendo del tamaño de la línea** [altura de la barra]**, así que, de todos modos, aunque las dos líneas de acá** [señala las barras de la primera gráfica] **son igual** [es] **a la línea** [barra] **de 1400, el 500 y el 800 vendrían a romperla**.

A_{16} [Inaudible] es que, como la dispersa a partir de las líneas, él la mide a partir de líneas y ahí las dispersa.

I A ver. Lo que está tratando de entender su compañero y de explicar lo que hace…, él dice esto: si yo tengo 500 [pesos], pongo encima uno de 800 [pesos] para ir comparando las barras, ¿sí? [va dibujando una barra sobre otra]. Y me dice, ¡aquí, ya tengo dos!, más los siete que tengo aquí, más o menos la barra quedaría en nueve. Lo que le dice acá, en 1600 [pesos] tengo cuatro y en 2000 [pesos] tengo dos, si yo los sumo [coloca barras una sobre otra]… entonces, tendría seis, por lo tanto, tengo mayor número de datos de **este lado** [señala los datos de la izquierda y luego los de la derecha] ¿sale?

AS: ¡Ohhh!

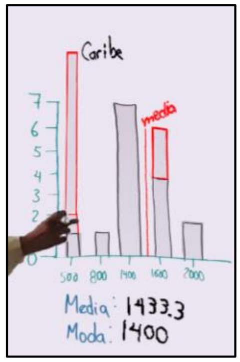


Figura 6.6. Trazo de barras auxiliares por la investigadora para el referente **ι** (SEP 2014l, pp. 191-192).

Cabe señalar, que I cometió el mismo error del alumno al trazar la gráfica, pues al colocar una barra sobre otra, ocultó la frecuencia de cada uno de los valores de los datos.

Si la moda, la media y la mediana coinciden, entonces la gráfica de la distribución de frecuencias correspondiente es simétrica. Sin embargo, para el referente **ι** sólo se consideró a la media como posible eje de simetría y para determinar si los números de datos a ambos lados de ella eran o no iguales; no se precisó si la gráfica de barras trazada era o no correcta de acuerdo a la variable tratada (salarios de empleados) ni que era asimétrica a la izquierda. No obstante, la estrategia citada corresponde a la compensación que Bakker (2003) ha señalado como útil en la estimación de medias de conjuntos de datos presentados en gráficas de barras.

En el plano cartesiano trazado para los referentes **μ** y **ν** (véanse en la Tabla 6.5), los alumnos de cuarto grado de E^2_9 identificaron la *barra más alta* de la gráfica como la moda (por ejemplo, véase la Figura 6.7), pero sin señalar puntualmente el valor de la frecuencia correspondiente en el eje vertical; además, la normalista mostró desconocimiento acerca de la gráfica apropiada según el tipo de variable en cuestión (véase la Figura 6.7):

A_5 **Y la moda es el azul porque varias personas lo eligieron**.

E^2_9 [Inaudible] $A_\#$ [un alumno a quien no le dieron permiso de participar en la videograbación].

$A_\#$ **Se puede notar por la barra que está más alta**.

E^2_9 Ok, porque **es la barra más alta.** ¿Ya terminaron de hacer su tablita y su gráfica?

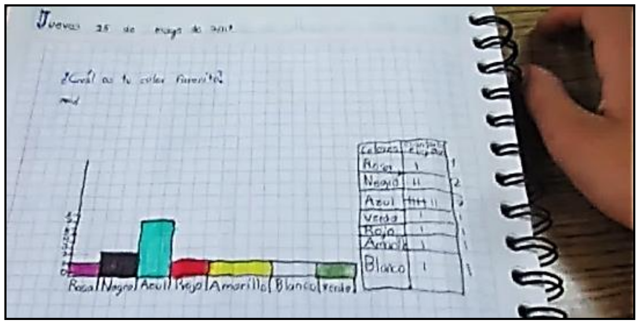


Figura 6.7. Indistinción entre gráfica de barras e histograma para el referente **μ** con alumnos de 4º grado de E^2_9.

E^1_{32} y E^1_{34} tampoco distinguieron la diferencia del tipo de gráfica según el tipo de variable, por ejemplo, para el referente **β** (véase la Figura 6.8) nada señalaron acerca de la gráfica de barras que sus alumnos de quinto grado trazaron. E^2_{13} y sus alumnos trazaron incorrectamente histogramas para el referente **ι** en lugar de gráficas de barras. Sin embargo, tanto las normalistas como los alumnos de todos los grados identificaron de manera correcta las coordenadas según los referentes planteados (véanse en la Tabla 6.2, en la Tabla 6.3, en la Tabla 6.4 y en la Tabla 6.5), si bien en el caso de variables cuantitativas no conservaron una unidad en su escala.

Los alumnos de quinto grado y E^2_{13} trazaron gráficas de barras para la variable cuantitativa discreta implicada en el referente **ι** (véase en la Tabla 6.4) de salarios de trabajadores de empresas textiles (véase la Figura 6.8), aunque en la lección respectiva (SEP, 2014l, pp.191-192) no se pide que se grafiquen los datos. Como ya señalamos en el apdo. 4.4, en su mayoría los libros de texto de educación primaria favorecen el tratamiento de los datos con gráficas de barras e incluso por lo general ya proponen la gráfica a los alumnos para que sólo respondan preguntas referidas a ellas. En cuanto a los futuros docentes, no se les enseña la importancia de considerar a qué atributo corresponde la variable ni el tipo de ésta (cualitativa (nominal u ordinal), cuantitativa (discreta o continua)) ni el tipo de gráfica apropiada.

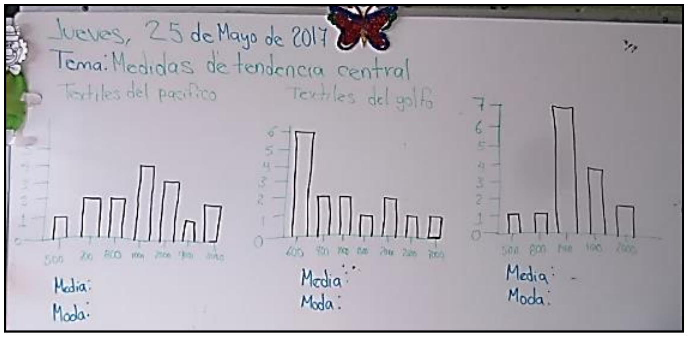


Figura 6.8. Gráficas de barras propuestas por E^2_{13} para el referente **ι**.

6.1.5. Términos empleados

La falta de familiaridad con los términos "variabilidad" y "bimodal" reveló deficiencias de E^2_7 y E^2_{24} concernientes a las ideas de equidistribución y simetría y de variable estocástica (véase en § 6.1.2.1 y § 6.1.2.2).

Tanto los alumnos de cuarto, quinto y sexto grado, como los normalistas, se refirieron de manera correcta a los valores dados de la muestra como "datos". Por ejemplo, para los referentes **μ** y **ν** (véanse en la Tabla 6.5) en cuarto grado, E^2_9 los señaló respectivamente así:

E^2_9 Ok. Ahora, ¿**qué vamos a hacer con estos datos** [señala los colores escritos en el pizarrón]? Los vamos a organizar en una tablita. **¿Cómo pueden organizar estos datos en la tabla?**

E^2_9 En la pastelería…, en la pastelería Delicias Don Roque… [inaudible], la venta de rebanadas de pastel de los primeros días de la semana y ya tenemos el lunes, martes y miércoles. **¿Qué van hacer con esos datos,** A_5**?**

Para E^2_{13}, "… la "frecuencia" tiene que ver con cuántas veces se repite ese número en el conjunto de datos…". Como ya señalamos en §6.1.2.2, fue común la indistinción entre "frecuencia de un dato" con el "dato", en particular cuando el valor de la variable se representa con números naturales, como ocurrió en 5º grado:

I ¿Cuántas veces se repite en el conjunto de datos el 10?
A_{17} Cinco.
I Entonces, ¿quién es la moda?
A_{17} **¿El cinco, el 10?**
I ¡El 10!, y el cinco es su frecuencia, ¿sale? Entonces, aquí ¿cuál sería [señala el dato 10]?

A_{17} [Borra y vuelve a escribe] el 10… lo último. El resultado lo voy a sacar al último.

Para los alumnos de cuarto grado y para E^2_9, el término "frecuencia" no revistió dificultad, pues identificaron correctamente el número de personas que escogía un determinado color o la edad con mayor frecuencia en el grupo (referentes **μ** y **ν** en la Tabla 6.5). E^1_8, E^1_{39} y sus grupos respectivos identificaron a la frecuencia por su definición (número de veces que se repite un dato) o por el signo numérico del dato con mayor frecuencia, más no por el término nominal como tal. Por ejemplo, respecto al referente **γ** (véase en la Tabla 6.2):

E^1_8 Y entonces, ¿qué sería la moda, A_2? Posteriormente [se refiere al orden de participación de los alumnos], A_1… ¡no los escucho a todos, quiero que todos participen!
A_2 **El número** [dato] **que se repite muchas veces**, en este caso sería el nueve.
E^1_8 El nueve, dice A_2.
A_2 ¿Y el ocho?

En los libros de texto de primaria para el alumno (véase la Tabla 4.13), el término "dato" se utiliza hasta sexto grado; sin embargo, en las consideraciones previas del libro de texto para el maestro (véase la Tabla 4.17) se utilizan los términos "dato" y "frecuencia" desde cuarto grado, aunque sin definirlos.

Durante las prácticas, únicamente la "media aritmética" fue denominada "promedio", tanto por los alumnos como por los docentes en formación, y se le refirió a su cálculo y no a sus propiedades:

A_1 Nosotros dijimos que se suma y se divide entre tres.
E^1_{28} Sí. Entonces, ¿cómo se llama eso?, el sumar…
A_3 Sacar el **promedio**.

Como señalamos en la sección anterior, esta limitación puede deberse a que la propuesta educativa de primaria considera a las medidas de tendencia central como una trinidad —en acuerdo con Bakker (2003)— y sólo se denomina a la media aritmética "promedio", por lo que el sentido atribuido a este último término es muy restringido, pues se le aplica sólo a un tipo de "centro", de "en medio", de "representante" propiedades de las que se dejan fuera las otras medidas de tendencia central.

Para A_3, del grupo de quinto grado de E^2_{16}, fue difícil diferenciar entre "promedio" y "media" en el referente **ζ** (véase la Tabla 6.3), pues no se le había enseñado que el propósito de un promedio "es *representar un grupo de valores individuales* de una manera simple y concisa (…) que actúa como un *representante* ... "Todos los promedios son conocidos por los estadísticos como "medidas de tendencia central"; indican el punto alrededor del cual se acumulan los diversos valores" (Moroney 1979, pp. 170 - 171):

A_3 **¡Digo media!,** entendí más con media que con promedio, porque el **promedio es una…** yo siento que **es algo que se acerca**, o sea, **como aproximadamente**, y a mí… **me confundió con promedio, y con media, ya …, es como que le entiendo un poquito mejor. Y con mediana, ¡ah!, pues la que está en el centro.**

La expresión "número medio de hermanos" no fue clara para los alumnos de quinto grado de E^2_{24} en el referente **η** (véase en la Tabla 6.3), dado que la redujeron a "número de hermanos":

E^2_{24} Pero aquí, este dato, ¿qué representa? Aquí en tu hoja, ¿qué dice?, ¿número de qué? ¿Número de qué, chicos? Ahí dice…
Q_2A_1 **Número de hermanos.**
Q_1A_4 Hermanos.
E^2_{24} ¡Hermanos! Aquí dice que el primer dato, ¿cuántos hermanos tiene?
Q_2A_1 Cero.

Para el referente **γ** (véase en la Tabla 6.2), E^1_8 denominó "bimodal" al conjunto de datos con dos modas:

E^1_8 Siete. ¿Y si tengo… si a mí se me presenta de esta manera [escribe en el pizarrón uno, dos, dos, cinco, cinco, siete], cuál sería la moda, A_8?
A_8 El dos y el cinco.
E^1_8 El dos y el cinco… ¿Estamos de acuerdo?
AS Sí.
E^1_8 Sí… y… ¿cómo lo nombrarían [se refiere cuando existen dos modas en un conjunto de datos]?
A_2 ¿**Doble moda**?
E^1_8 ¿Cómo la nombrarían [se refiere a cuando hay dos datos como moda, si dos veces aparecen el dos y el cinco? Dos y cinco [encierra los números dos y cinco]… A esto [señala los números que encerró], ¿cómo le llamo?
AS [Nadie contesta].
E^1_8 No, ¡sin miedo, díganlo!… ¿Cómo le llamo?
A_1 Entonces, si es el dos y el cinco, sería que pusiéramos los dos como moda.
E^1_8 Ok, es **bimodal.** ¿Sí me explico? ... bimodal.
A_2 ¡Ah!, yo le entendí *pimodal*.
E^1_8 Bi…bimodal [lo escribe en el pizarrón], ¿sale? … **Bimodal**, **dos modas**, ¡que puede pasar!, ¿verdad?
$A_\#$ Porque **es de dos**.

El ejemplo que usó la practicante evidenció que los alumnos identificaron el origen de la palabra bimodal ("porque es de dos") para referirse al conjunto que tiene dos modas, a pesar de ser un término no considerado en los libros de texto gratuito de primaria.

Para el referente **θ** (véase en la Tabla 6.4) del libro de texto de cuarto grado (SEP, 2014d, pp. 195-196), los alumnos a cargo de E^2_9 dieron sentido a las frases: "se vendieron más o menos rebanas", "qué sabores le conviene hornear", para identificar la moda del conjunto de datos.

6.1.6. Dimensión didáctica: Tipo de interacción y triángulos epistemológicos

De acuerdo con Jacobs y Ambrose (2003), E^1_{28}, E^1_{32}, E^2_7, E^2_{13}, E^2_{16} y E^2_{24} llevaron a cabo una *interacción exploratoria* a fin de confirmar el procedimiento propuesto por los alumnos para determinar la media de un conjunto de datos. Por ejemplo, en la interacción sobre el concepto de media aritmética, E^1_{28} no consideró que A_1 y A_4 habían dicho cómo obtener la media de las calificaciones ("se suman todas las calificaciones de cada sobrino y el resultado lo dividen) antes que ella, lo que pudo haber impedido que tuviera lugar "la reconstrucción del significado del conocimiento matemático [de estocásticos] constituido en la interacción del salón de clase" (Steinbring, 1991, p. 508), además, no consideró que una vez que obtuvieran el promedio de cada niño, éstos se deberían comparar para determinar quién había obtenido el mejor promedio:

A_1 **Se suman todas las calificaciones** de cada sobrino **y el resultado lo divides**.
E^1_{28} ¿Entre qué lo voy a dividir?
A_4 **En las tres asignaturas** [entre el número de asignaturas].
A_1 En las tres asignaturas [señalando hacia el pizarrón].
E^1_{28} **Entre las tres asignaturas**, ¿seguros?
A_6 No, tal vez no.
E^1_{28} ¿A ver, A_6?
A_6 No, porque no es lo mismo, porque tienen diferentes números [se refiere a las calificaciones de cada niño].
E^1_{28} Mmmm, ¿no, A_6?, a ver, estructura mejor tu respuesta. Me están diciendo que para que yo pueda saber quién sacó mejor calificación, tengo que **sumar todas las calificaciones y dividirlas entre tres**, o ¿cómo es, A_2? Por ejemplo: en la primera pregunta decía: ¿quién tiene mayor rendimiento escolar? ¿Cómo voy a saber quién es el mejor?
A_2 Por las calificaciones.
E^1_{28} Ok, te entiendo, ya sé que por las calificaciones. Pues Úrsula porque tiene más dieces, ¿cierto o no? Pero entonces, ¿cómo puedo hacer para comparar las demás? Sumar… ¿quién dijo sumar, tú A_2 o A_7? [señala hacia los niños que hablaron en voz baja]. A_7, sumar y ¿luego, nada más sumo y hasta ahí quedó?

Durante la interacción entre A_2 y E^1_{28} respecto al referente **α** (véase en la Tabla 6.2), surgió la estrategia de la compensación (Bakker, 2003) para estimar la media aritmética y su enfoque como punto de equilibrio (Mokros y Russel, 1995; véase la Figura 6.9):

Alumno	Asignatura		
	E	M	I
Úrsula	8	10	10
Adolfo	6	8	8
Luis	9	8	5
Rosario	7	9	10
Karla	8	10	7

Significado

Significador

A_2	Sí, porque Luis, ahí [señala la tabla], en lugar de un 6 tiene un 5, en lugar de un 9 tiene un 8 [se refiere a la calificación de Adolfo].
E^1_{28}	¡Ajá! Eso entonces, ¿qué quiere decir?
A_2	Que si el 9 le presta uno al 5, es la misma calificación porque van a ser dos 8 [cada quien] y dos 6 [uno de Luis y otro de Adolfo].

Figura 6.9. Estrategia de compensación usada por A_2.

La estrategia de compensación fue utilizada por A_2 para que tanto Luis como Adolfo tuvieran las mismas calificaciones; compensó las calificaciones de un conjunto de datos (calificaciones de Luis) para igualarlas a las calificaciones de otro conjunto (calificaciones de Adolfo). Sin embargo, no obtuvimos evidencia (explícita) de que considerara que la media aritmética fuera la misma (7.3) para ambos sobrinos.

E^1_{28} evidenció su desconocimiento de la estrategia de compensación y del enfoque de la media aritmética como punto de equilibrio (véase la Figura 6.10) dado que pareció no comprender lo que A_2 estaba diciendo y lo interpretó como "buscar un punto de equilibrio para representar los datos" (Mokros y Russel, 1995; p. 26) de un conjunto; sin embargo, E^1_{28} los dejó de lado sin advertir la aportación de A_2:

Alumno	Asignatura		
	E	M	I
Úrsula	8	10	10
Adolfo	6	8	8
Luis	9	8	5
Rosario	7	9	10
Karla	8	10	7

Significado

Significador

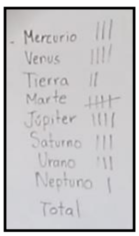
E^1_{28}	Ok. Se equilibran, ¿tú, lo (…)? A ver, vamos a ver. Te entiendo esto: tú, **a la hora de sumar** estás diciendo que [señala el 6 de Adolfo] tanto Luis como Adolfo tienen las mismas calificaciones, ¿sí? Entonces, ¿cómo podríamos saber quién tiene mejor rendimiento escolar? Cuando nos referimos a rendimiento escolar, son las mejores calificaciones. ¿Quién tiene entonces mejor rendimiento escolar? ¿Úrsula?

Figura 6.10. Enfoque de la media aritmética como punto de equilibrio por E^1_{28}.

Ni E^1_{28} ni sus demás alumnos identificaron como estrategia de solución comparar solamente la suma de las tres calificaciones para identificar al sobrino con mejor desempeño, dado que las cinco muestras eran de igual tamaño.

Con el referente **δ** (véase en la Tabla 6.3), E^1_{32} enseñó la frecuencia para determinar la moda mediante cuatro formas de registrar los datos, mostró la conversión de un registro de representación en otro (Duval, 2006) e identificó la moda por el dato con mayor frecuencia en una tarja, con signos numéricos e, incorrectamente, en un histograma (véase la Figura 6.11) en vez de una gráfica de barras.

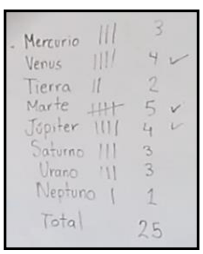
La interacción de E^1_{32} con los alumnos de cuarto grado evidenció el proceso complejo que establecieron los niños al dotar de sentido a cada uno de los recursos semióticos para identificar la variable estocástica (véase la Figura 6.11).



Significado

Significador

E^1_{32}	A ver, saquen su tarea los que no… dos…uno…dos… ¡tres! [señala a los alumnos], tres [anota tres rayas en el pizarrón], tres niños, ¿sí? Vamos a ponerle tres niños, ¿sí, ¿sí lo dijeron? ¡Venus!, uno, dos, tres, cuatro, ¡cuatro niños nada más! [señala a los alumnos y registra las cuatro tarjas]…



Significado

Significador

E^1_{32}	El más popular, ¿verdad? Y de este conjunto de datos que tenemos aquí, ¿cuál es el más popular?
As	¡Marte!
E^1_{32}	Marte, ¿verdad? ¡Muy bien!, vamos a ponerle una palomita al [inaudible] [pone una palomita delante de Marte]; ése sería **el más popular.** Dijimos que íbamos a hablar de los dos [hace seña con sus dedos] más populares, ¿verdad? Ya dijimos que **el más popular** es Marte. El segundo, ¿cuál sería?

Significado

Significador

E^1_{32}	Marte, ¿verdad? Podemos verlo en la gráfica de barras [trazó un histograma y no una gráfica de barras] porque es la barra más…
A_5	**Frecuente**.
E^1_{32}	¿Más frecuente? **Es más**… [señalando la barra más alta], más **alta que las otras,** ¿verdad?
A_4	Sí.

Figura 6.11. Aprehensión del término frecuencia (variable estocástica) por E^1_{32} y alumnos de 4º grado a través de tres recursos semióticos.

E^1_{39}, E^1_{34} y E^2_9 llevaron a cabo una *interacción observacional* dado que preferían ir observando las respuestas que anotaban los alumnos e irles preguntando sobre cómo habían arribado a ellas, por ejemplo, a la pregunta del referente **β** (véase en la Tabla 6.2). La interacción que establecieron los futuros docentes y sus alumnos entre el objeto y el signo, únicamente, favoreció el conocimiento de cálculo para determinar la media aritmética (véase la Figura 6.12).

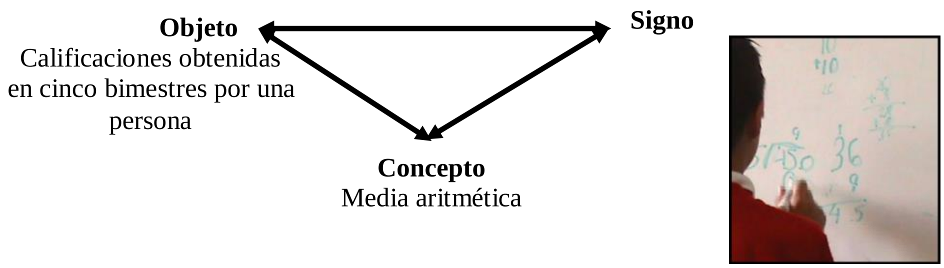
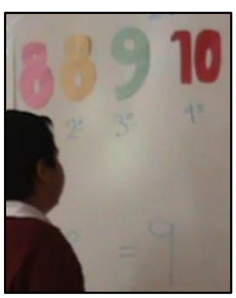


Figura 6.12. Triángulo epistemológico para la comprensión de la media aritmética por los grupos de 5º grado, E^1_{34} y E^1_{39}.

La interacción de A_1 y A_3 con E^1_{39} propició que los alumnos relacionaran el objeto y el signo (véase la Figura 6.13) para identificar el valor faltante en el referente **β** (véase en la Tabla 6.2) dada la media aritmética (9) de los datos. A_1 y A_3 pusieron en juego la estrategia de compensación para determinar la media, pero E^1_{39} no se percató de tal estrategia, sino que sólo reforzó el cálculo de la media por su algoritmo.



Significador

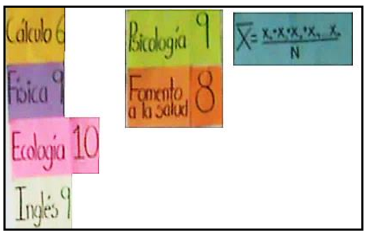
A_1	10.
A_1	Porque es el número mayor.
A_2	9.
A_3	¿Podría ser 9?
A_3	Porque se supone [que] tiene que sacar **en todo lo mismo**.
E^1_{39}	¿Quién opina que es nueve? [escribe un signo de interrogación frente a la calificación de 9] ¿Quién opina que es 10? [anota un signo de interrogación frente a la calificación de 10].

Significado

Figura 6.13. Estrategia de compensación para determinar la media aritmética por alumnos de quinto grado.

En sexto grado, E^1_8 desplegó una *interacción directiva*, ya que presentó la expresión simbólica (véase la Figura 6.14) para obtener la media aritmética para el referente **γ** (véase en la Tabla 6.2). Sin embargo, no obtuvimos evidencia de que los alumnos dotaran de significado a cada uno de los términos de esa expresión.

Significador



Significado

E^1_8	Sí. Muy bien. **¿Alguno de ustedes conocía la fórmula de la media aritmética? Es ésta** [señala en el pizarrón la notación $x = \frac{X1+X2+X3+X4\dots+X5}{N}$]. ¿Sí la ubican?
E^1_8	Pero, ¿qué te está indicando aquí, A_2? [Señala uno a uno los signos "+" en la expresión $x = \frac{X1+X2+X3+X4\dots+X5}{N}$].
E^1_8	¿Qué signo hay? Más, ¿verdad? Muy bien, la media aritmética la obtengo… sí es un valor que obtengo al dividir la sumatoria de un conjunto de datos, o sea, que sería ésta la sumatoria [señala la expresión matemática $x = \frac{X1+X2+X3+X4\dots+X5}{N}$)]; voy sumando todos los datos sobre el número total de datos. Por ejemplo: Si quiero obtener un promedio de esto [señala las calificaciones escritas en el pizarrón].

Figura 6.14. Determinación de la media aritmética por su algoritmo por E^1_8.

Este procedimiento de E^1_8 pudo haber impedido que surgiera un conflicto cognitivo (Bakker, 2003) a partir del cual los alumnos dotaran de sentido a la medida aritmética más allá de su cálculo. E^1_8 procedió según lo proponen la mayoría de los libros de texto que, según Bakker (2003), promueven el concepto de las medidas de tendencia central por su algoritmo, más que por sus propiedades en diversas aplicaciones.

6.2. Entrevistas sobre práctica docente de medidas de tendencia central

Como se planteó en el apdo. 3.3.3 (véase §3.3.3.3), realizamos entrevistas en formato semiestructurado (véase el Apéndice 4) a siete normalistas (E^2_5, E^2_7, E^2_9, E^2_{13}, E^2_{16}, E^2_{24} y E^1_{32}) acerca de su práctica docente de contenidos de estocásticos designados por las titulares de primaria. El análisis de los datos obtenidos se llevó a cabo considerando los ejes rectores de la investigación definitorios de la célula de análisis.

El objetivo de las entrevistas fue clarificar los aciertos y las dificultades de enseñanza de los normalistas para identificar su dominio de las tres dimensiones (epistemológica, cognitiva y didáctica) propuestas por Scheiner (2015) para que un docente de matemáticas lleve a cabo su enseñanza de medidas de tendencia central (véase la sección 6.1) y del principio multiplicativo (véase la sección 6.4). Pero, sobre todo, por los ejes rectores de la investigación, definitorios de la célula de análisis que aplicamos a todos los datos recopilados. Así como el dominio de los tres conocimientos propuestos por Hill, *et al*. (2008): *Conocimiento de Contenido Matemático* (véase el capítulo 5), del *Conocimiento de Contenido y Enseñanza*, y del *Conocimiento de Contenido y Estudiantes*, de los contenidos tratados en las prácticas con alumnos de segundo a quinto grado de Educación Primaria.

En las entrevistas de $E^2{}_7$ y $E^2{}_{24}$ usamos parte de la videograbación de sus prácticas con el tema de medidas de tendencia central, pues partimos de las aportaciones de sus alumnos de quinto grado de primaria para clarificar la pregunta del referente $\boldsymbol{\varepsilon}$ (véase en la Tabla 6.3) que planteó $E^2{}_7$. Para $E^2{}_{16}$ utilizamos fotografías de los recursos semióticos usados por ella, por los alumnos de segundo grado y por $MT^{16}{}_7$, dado que las preguntas que planteó la normalista respecto a los referentes $\boldsymbol{\chi}$ y $\boldsymbol{\psi}$ (véanse en la Tabla 6.11) admitían distintas respuestas. Las demás entrevistas se centraron en reconstruir la enseñanza de las normalistas, las aportaciones de los alumnos y los conceptos tratados (moda, media, mediana, entre otros) en las clases, por ejemplo: con $E^2{}_9$ se reflexionaron los conceptos de moda, de dato, el tipo de datos de los referentes y las gráficas de los conjuntos de datos dados. Los conceptos reflexionados con $E^2{}_{13}$ fueron: medida más representativa de un conjunto de datos, variación, dispersión, simetría, entre otros; así como las dificultades que la normalista detectó en sus alumnos al tratar los conceptos anteriores. Además, de analizar los aciertos y las dificultades de los recursos semióticos usados por $E^2{}_{13}$ y por sus alumnos.

Cada entrevista semiestructura tuvo una duración aproximada de 15:00 a 30:00 min, se efectuó en el salón del colegio de Matemáticas de la Benemérita Escuela Nacional de Maestros, con la presencia de cada normalista, la investigadora y dos secretarias en sus actividades. Las videograbaciones y las transcripciones las realizó la investigadora.

6.2.1. Referentes

Las seis futuras docentes identificaron las dificultades que los referentes seleccionados por ellos revistieron para los alumnos de primaria; dado que los referentes fueron presentados en el pizarrón (E^1_{32}, E^2_{16}) y sólo cuatro normalistas (E^2_9, $E^2_{13,}$ E^2_{24}), además, los entregaron impresos a cada uno de los alumnos, dos contestaron su libro de texto (E^2_9 y E^2_{13}). Los referentes de mayor dificultad fueron los planteados por E^2_{13}: **κ** y **λ** (véanse en la Tabla 6.5) dado que, además, de determinar medidas de tendencia central (moda y media, únicamente) se identificó la medida más representativa del conjunto de datos de acuerdo a su dispersión. Los otros seis referentes se centraron más en el domino del algoritmo para determinar las medidas de tendencia central.

6.2.2. Ideas fundamentales de estocásticos

En la enseñanza de medidas centrales, los normalistas no identificaron todos los conceptos de estocásticos implicados en el tratamiento de cada medida.

6.2.2.1. Variable estocástica. E27 no identificó claramente la función de la moda (“la mayoría”) ni del rango de los datos:

I	¿Puedes ponerle por favor el stop ahí [paran el video]? ¿Qué te aclara la estudiante que te habla y te dice: “la mayoría es [señala el número dos que se repite con mayor frecuencia], pero lo que está en el pizarrón [señala el resultado obtenido de la división realizada: 1.7 hermanos] es el promedio de todo”? ¿Qué te aclara ahí la alumna?
E^2_7	Mmmm, que no es que sea 1.7 de una persona… una persona y 1.7 de otra persona… sino que, ése [se refiere al valor de la media: 1.7] ya es el valor promedio entre todos, así como los valores fueron un poco distantes, **del menor al mayor**. Entonces… por eso sale un resultado con puntos decimales.

E^2_7 no precisó: 1) el rango de los datos; y 2) que la media aritmética es sensible a los valores máximos y mínimos en la muestra del referente ε (véase en la Tabla 6.3), lo que hace evidente que los normalistas necesitan considerar la enseñanza de la media aritmética y sus funciones.

E^2_{13} identificó el propósito de los promedios (Moroney, 1979): moda y media, dado que eran las únicas medidas que se determinaron en el referente **ι** (véase en la Tabla 6.4) del libro de texto de quinto grado (SEP 2014l, pp. 191-192):

I	¿Para qué determinar la media y la moda de un conjunto de datos, E^2_{13}?
E^2_{13}	Pues… **para obtener un dato** que…, que sea pues…, como lo dijimos ya, **representativo de un conjunto o un gran conjunto de datos**, para no…, que… o sea, podemos tener muchísimos datos, pero tenemos que…, **a partir de esos datos obtener uno que represente todo ese conjunto**.

E^2_{13} identificó la función de representatividad de la moda y de la media; sin embargo, en su enseñanza a los alumnos de quinto grado, tal función fue confusa al identificar qué medida era la representante de cada conjunto de datos (véase § 6.1.2.2) según la dispersión respectiva.

6.2.2.2. Simetría. E^2_{13} reconoció haber tenido la misma dificultad que los alumnos de quinto grado para identificar la dispersión de los datos respecto a la media para el referente **ι** (véanse la Tabla 6.4, §6.1.2.1 y §6.1.4.5):

I	Ok. ¿Qué dificultad presentaron tus alumnos, al tratar la dispersión de los datos en la gráfica?
E^2_{13}	¿Qué dificultades? Pues… no sé, si sería cuando hablamos de **lo de simetría**. […] O sea, **yo me iba por las barras y no por los datos**. Entonces…, hasta que vino este niño y nos explicó cómo era su razonamiento. Y es que lo voy poniendo… Entonces, **son tantos datos de un lado, tantos del otro**, y entonces por eso es simétrica o no. Pero no sé si a eso se refiera la pregunta.

Lo anterior es evidencia de que las dificultades de comprensión de los normalistas, pueden tenerlas sus alumnos, ya que ni unos ni otros consideraron la frecuencia de los valores de la variable discreta (salarios de empleados de tres textilerías) para identificar la dispersión de los datos de acuerdo a la media. Lo que afirmó E^2_{13}, "son tantos datos de un lado, tantos del otro" pudo ocasionar la confusión con la determinación de la mediana que no fue considerada en el referente planteado en el libro de texto de quinto grado ((SEP, 2014e, pp. 191-192) para identificar la medida más representativa de un conjunto de datos.

6.2.3. Otros conceptos matemáticos

En la enseñanza de medidas de tendencia central los normalistas realizaron operaciones básicas e identificaron los números naturales y decimales al determinar las medidas.

6.2.3.1. Números decimales. $E^2{}_7$ identificó el número decimal resultado de la división de la suma de los datos de la muestra divida entre el número total de datos en el referente **ε** (véase en la Tabla 6.3):

I	¿Cuál fue [el valor de] la media que obtuviste?
$E^2{}_7$	No me acuerdo.
I	No te acuerdas. ¿Es la que tenía números decimales o la que no lo [s] tenía?
$E^2{}_{24}$	La media **tenía punto decimal, fue 1.7.**

6.2.3.2. Unidad de medida. A pesar de que $E^2{}_7$ identificó los números decimales que dan respuesta a la pregunta del referente **ε** omitió de qué era representante (número de hermanos; véase § 6.2.3.1).

6.2.4. Recursos semióticos

De acuerdo a Andrà (2011), las seis normalistas pusieron en juego recursos semióticos a nivel de experiencia (tablas y gráficas) y a nivel del pensamiento aritmético (operaciones básicas, simbología numérica). $E^2{}_7$, $E^2{}_{16}$, y $E^2{}_{24}$ no advirtieron la importancia de usar diversas representaciones para enseñar un concepto matemático (de estocásticos) a los alumnos de primaria.

6.2.4.1. Gráfica y tablas de datos. $E^2{}_{24}$ no advirtió la importancia de usar diversos recursos semióticos al tratar un concepto matemático (Dreher y Kuntze, 2015), por lo que los normalistas requieren que se fortalezca la dimensión didáctica (Scheiner, 2015) necesaria al impartir enseñanza:

I	¿Por qué consideraste pertinente que los alumnos identificaran en la gráfica que realizaron [trazaron] la moda y la media?
$E^2{}_{24}$	[Tiene la mirada baja y sonríe]. Mmm…bueno [mira sonriente a la investigadora], de hecho, este…, **nada más les dije que graficaran los datos. Lo de la media y la moda, ¡creo que usted lo comentó! Pero, ¡no, yo no di esa indicación!**
I	¿Consideras que fue pertinente o no fue pertinente hacerlo [se refiere a ubicar la moda y la media en la gráfica]?
$E^2{}_{24}$	[Tiene la mirada baja, se queda pensativa]. Pues sí, para que ellos…, eh… reflexionen si se puede o no se puede realizar [se refiere a identificar y ubicar las medidas de tendencia central en una gráfica].

Identificar a la moda y a la media en la gráfica y no sólo aplicar su conocimiento de cálculo para determinarlas propició que los alumnos consideraran dos representaciones de un objeto matemático, lo que podría haber favorecido "un salto cognitivo" (Duval, 2006) al cambiar de la representación aritmética (cálculo) a una representación gráfica (gráfica) si la practicante fuera consciente de los beneficios del uso de diferentes recursos semióticos para tratar un conocimiento matemático.

También a sugerencia de I, para los referentes **μ** y **ν** (véanse en la Tabla 6.5, en la Figura 6.5 y en la Figura 6.8), E^2_9 propuso tratar la moda mediante una gráfica, además de la tabla de datos propuesta en el libro de texto para 4º grado, lo que pudo haber propiciado su aprehensión conceptual (de la moda) por los alumnos (Dreher y Kuntze, 2015):

I	Ok, una última pregunta, porque no está en el libro de texto: **¿Por qué trazaste la gráfica para identificar la moda?**
E^2_9	Porque la moda, una…, en este caso [se refiere a la gráfica], creo que **la moda es muy notoria**, porque sabemos que **es el dato que más se repite, o sea, la barrita que está más grande** [se refiere a la gráfica de barras que debió de trazarse dado que la variable era cualitativa nominal]. Y otra, **para que puedan identificar la moda de otra…, tanto en la tabla que estaban haciendo como en la gráfica**.

6.2.5. Términos empleados

Los futuros docentes requieren precisar las definiciones y usos de los términos de medidas de tendencia central.

6.2.5.1. Variación. Este fue un término no escrito en los referentes que propuso E^2_{13}, sin embargo, surgió en los comentarios de A^5_8 durante su entrevista (véase §6.3.2.2) y durante la enseñanza de la dispersión (véase §6.1.2.2). E^2_{13} conceptualizó el término variación, no obstante, lo desaprovechó en la enseñanza:

I	**¿Qué es la variación en los datos?**
E^2_{13}	¿La variación?, pues la variación es…, **los diferentes datos que hay**.
I	¿Por qué no consideraste este término con los alumnos?
E^2_{13}	¡Ay!, no lo sé.

E^2_{13} dio una respuesta «"básica" [los diferentes datos que hay] y fundamental para describir esas diferencias» (Canada, 2007, p. 77); es decir, E^2_{13} identificó una característica del conjunto de datos "los diferentes datos", pero no la medida que había entre ellos.

6.2.5.2. Promedio y moda. $E^2{}_{16}$ mostró confusiones al tratar de definir *promedio* y los tipos de promedios que existen, por lo que los alumnos de 5º grado también tuvieron las mismas dificultades (véase el apdo. 6.1.5):

$E^2{}_{16}$ ¡Eh! [Con la mano en la boca, se la retira] Sí, porque demostré cuáles eran las medidas; pero **ellos no comprendían aún la diferencia** o no sabían la diferencia **entre la media**…, **se confundían mucho entre la media aritmética y la mediana**.

I ¿Por qué?

$E^2{}_{16}$ **Porque les parecía muy igual…, el nombre**, sólo por el nombre, decían media y mediana ¿no es lo mismo? Lo primero que hice es explicarles o si ellos entendían lo que era mediana y moda para después pasar al promedio [mira a la investigadora], pero había confusiones.

I ¿Mediana, media y luego el promedio?

$E^2{}_{16}$ No, mediana y moda.

I Mediana y moda, y luego el promedio. El promedio ¿cómo lo entiendes?

$E^2{}_{16}$ El promedio es mmm …, **es la suma**. Sólo es la suma, no, **es la medida**, **exacta de los valores que tú tienes, de la frecuencia absoluta**, si de la frecuencia.

Por su parte, $E^2{}_7$ reconoció a la moda como «“la mayoría” [que probablemente] significa “el valor más frecuente” y no necesariamente “más de la mitad”» (Bakker, 2003, párr. 15).

I Puedes ponerle por favor el stop ahí [detienen el video]. ¿Qué te aclara la alumna que habla y te dice: “la mayoría es…, pero lo que está en el pizarrón es el promedio de todo”? ¿Qué te aclara ahí la alumna?

$E^2{}_7$ Mmmm, que no es que sea 1.7 [valor de la media aritmética obtenido por el grupo de quinto grado] de una persona y 1.7 de otra persona, sino que ese ya **es el valor promedio entre todos**, así como **los valores fueron un poco distantes del menor al mayor**, entonces por eso sale un resultado con puntos decimales.

I Tú le preguntaste: “¿Cuántos hermanos tienen la mayoría?” ¿Sería esa la pregunta que tenías que establecer en la encuesta que realizaste? O ¿cuál sería la pregunta que debiste establecer? O que a lo mejor no está mal considerarla [se refiere a la pregunta que hizo $E^2{}_7$: ¿Cuántos hermanos tienen la mayoría?] y si es la mayoría.

$E^2{}_7$ […] Mmmm, ¿Cuántos? Mmmm […] **Es que la mayoría sería la moda ¿no?** […] entonces la pregunta sería…, es que no puedo si no utilizo la palabra, en promedio de hermanos tiene…, tenemos en el grupo.

I ¿Por qué?

$E^2{}_7$ Bueno es que siento que es como… ¿qué es promedio? **Promedio es el promedio**, jajaja.

I Entonces dejarías la pegunta igual: ¿Cuál es la mayoría? ¿O la cambiarías?

$E^2{}_7$ **Sí, la cambiaría, porque la mayoría estamos hablando de la moda, no del promedio; y creo que estamos hablando del promedio**, si no mal recuerdo, o ¿de qué estábamos hablando?

I Es lo que quiero que me expliques tú, ¿de qué estabas hablando?

$E^2{}_7$ Es que ya no me acuerdo, pero, pues, si no estábamos hablando de la moda, la pregunta pues no iba. Sería más como, en promedio: **¿cuántos hermanos tienen en promedio el grupo?**

Para $E^2{}_7$ fue difícil diferenciar entre la media y la moda al plantear la pregunta “la cantidad de hermanos que tiene” a los niños de quinto grado. Además, de identificar el promedio adecuado, pues confundió al dato más frecuente (moda) con el término en promedio.

6.2.6. Observaciones

En las dimensiones epistemológica y cognitiva (Scheiner, 2015), E^1_{32}, E^2_7, E^2_9, E^2_{13}, E^2_{16} y E^2_{24} mostraron carencias para identificar las dificultades que podrían tener los alumnos de los diferentes grados al tratar las medidas de tendencia central, dado que los mismos normalistas presentaron dificultades para comprender los conceptos estocásticos como: promedio, frecuencia, media, mediana, medida más representativa, entre otros.

El *conocimiento de contenido*, en específico de la variable estocástica, requiere atención en la formación inicial del docente. En efecto, hasta la entrevista, E^2_7 se percató de su idea errónea de moda que expresó durante la enseñanza. E^2_{16} no clarificó su definición de promedio, sólo lo identificó como media aritmética. E^2_{13} tuvo problema para identificar el tipo de asimetría de un gráfico o si es o no simétrico.

Resulta necesario que en las escuelas normales se realice una revisión crítica y reflexiva de los libros de texto de primaria antes de que los normalistas asistan a las aulas a sus prácticas docentes, pues los libros de texto son el medio que usa la mayoría de los docentes en la enseñanza y les suelen asignar lecciones a los futuros docentes para sus jornadas de práctica.

Es necesario que los formadores de formadores consideren que en la planeación de la práctica que presentan los normalistas no plantean un objetivo de la enseñanza que impartirán para cada tema. En ocasiones, sólo incluyen los aprendizajes esperados prescritos en la propuesta educativa (SEP, 2011) y no lo hacen correctamente:

I	**¿Has revisado los planes y programas de estudio y los libros de texto?** De acuerdo a esa revisión que has realizado, ¿en qué orden se sugiere la enseñanza de las medidas de tendencia central?
E^2_{16}	[Ve en ocasiones a la investigadora] Bueno, sí, sí he revisado, y pienso que el libro de texto no retoma mucho las medidas de tendencia central, como por lo regular… creo que, en los libros pasados, creo…, que al parecer las medidas de tendencia central se vieron en sexto año. Entonces, pienso que está muy dividido el libro; o sea, primero proponen un análisis de gráficas y creo que hasta el quinto consideran las medidas de tendencia central. Y pienso que deberían de ir como de la mano. Es decir, si vamos a ver análisis de gráficas tenemos que ver medidas de tendencia central para que los niños relacionen esas dos, porque si no, ven como que muy por partes la estadística, y la estadística no es por partes, porque hay que verla globalizadamente.
I	Pero ¿qué medida de tendencia central se debe de enseñar primero, según el libro de texto?

E^2_{16} Creo que se tiene que enseñar la mediana [ve a la investigadora con cara de extrañeza], no me acuerdo, no traigo el libro. No recuerdo si es la mediana o la media.

I En tus clases, de aquí de la normal ¿has revisado el plan y programa?

E^2_{16} **Sí, pero no hay relación con el libro, ese es el problema. A veces, los aprendizajes esperados los trata como tienen que ir… pero el libro de texto los presenta de otra forma** [mira a la investigadora], **¡no van igual!**

Los docentes en formación requieren de un acompañamiento, una reflexión, una autorreflexión y una realimentación de su práctica docente por parte de sus formadores.

6.3. Entrevistas a alumnos de primaria sobre medidas de tendencia central

Como anticipamos en la Tabla 6.1, en esta sección presentamos los resultados obtenidos de cinco entrevistas semiestructuradas (Zazkis y Hazzan, 1999) realizadas a cinco alumnos de primaria, en cuya identificación el superíndice denota el grado escolar: A^5_8, 10 años, de la práctica de E^2_{13}. Del mismo grupo, A^4_{10} y A^4_{13}, 9 años, de la práctica de E^2_9. De diferentes escuelas primarias, A^2_7, 8 años, de la práctica de E^2_{16} y A^2_3, 7 años, de la práctica de E^1_{32}.

Seleccionamos a los niños por su desempeño durante la práctica de enseñanza de medidas de tendencia central. Nuestro objetivo fue clarificar las respuestas de los alumnos a las preguntas planteadas durante las enseñanzas de los normalistas.

Una vez que se contó con el permiso correspondiente de los padres de familia, las entrevistas se realizaron en las bibliotecas escolares de las escuelas primarias públicas. En cada una estuvieron presentes el alumno, la investigadora, la titular del grupo, en tres (A^5_8, A^2_3 y A^2_7) ocasiones también la madre del niño y la responsable de la biblioteca.

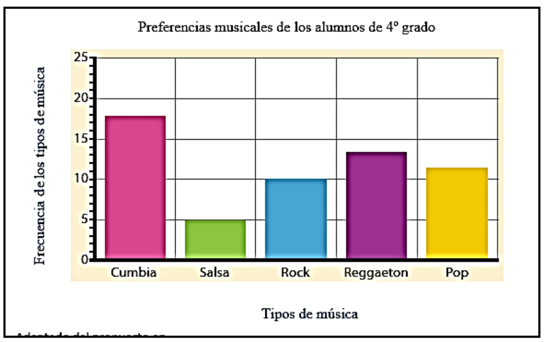
Las entrevistas duraron de 20 min a una hora; A^5_8 fue entrevistado cinco días después de las prácticas, A^4_{10} siete días después; y a A^4_{13}, A^2_7y A^2_3 se les entrevistó ocho días después de las prácticas respectivas.

Como se especificó en § 3.3.3.3, las técnicas de registro de datos fueron la videograbación realizada por la investigadora, la transcripción y hojas impresas en las que podían anotar sus respuestas a los referentes que se les plantearon a los alumnos.

La Tabla 6.6 caracteriza al guión de entrevista semiestructurada propuesto a A^4_{10} y A^4_{13}; el guión se enfocó en la determinación de la moda y el tamaño de la muestra.

Tabla 6.6. Caracterización del guión propuesto a los alumnos de 4°grado.

Ideas fundamentales de estocásticos: Variable estocástica, Muestra.

Referente	Otros conceptos matemáticos	Recursos Semióticos	Términos empleados
K. Los alumnos de 4° grado hicieron una encuesta para saber qué música es la más popular y registraron los resultados en el siguiente gráfico. 	Operaciones aritméticas, producto cartesiano, números naturales.	Lengua natural escrita, gráfica de barras, plano cartesiano, signos numéricos.	Encuesta, música más popular, datos, qué música prefieren, qué música es la que menos escuchan, moda, conjunto de datos.

Preguntas	Respuestas esperadas
I) ¿A cuántos alumnos se les encuestó?	I) Se encuestó a 58 alumnos.
II) ¿Cómo son los datos?	II) Los datos son variados o distintos.
III) ¿Qué música prefieren los alumnos?	III) Los alumnos prefieren la cumbia.
IV) ¿Qué música es la que menos escuchan?	IV) La música que escuchan menos los alumnos es la salsa.
V) ¿Cuál es la moda del conjunto de datos?	V) La moda del conjunto de datos es la cumbia. Es la que les gusta más o es la que se repitió más veces.
VI) Señala la moda en la gráfica del conjunto de datos.	VI) Identifica la barra más alta de la gráfica (la de la música de cumbia).

Adaptado del propuesto en http://w4app.mineduc.cl/catálogo_2012/pdf/1/11/_4_39_1.pdf. Consultado el 27/05/2017. p.10.

A A^5_8 se le presentaron las temperaturas promedio de noche y de día en 23 ciudades de la República Mexicana en el referente L (véase la Tabla 6.7).

Tabla 6.7. Caracterización del guión de entrevista propuesto al alumno de 5° grado.

Ideas fundamentales de estocásticos: Equidistribución y simetría, Variable estocástica y Muestra.

Referente	**Otros conceptos matemáticos**	**Recursos semióticos**	**Términos empleados**
L. **Observa el siguiente estado del tiempo.**	Unidad de medida de temperatura (°C), operaciones aritméticas, plano y producto cartesiano, números naturales y decimales.	Lengua natural escrita, tabla, gráfica.	Temperatura más alta y más baja, moda, temperatura media, variación, dispersión, distribución, simetría, media, conjunto de datos, medida central más representativa.

México City	14°C | 26°C	Guadalajara	17°C | 34°C	Monterrey	24°C | 32°C
Puebla	15°C | 22°C	Toluca	10°C | 21°C	Torreon	24°C | 33°C
Acapulco	26°C | 32°C	Veracruz	26°C | 30°C	Palenque	23°C | 30°C
Puerto Vallarta	26°C | 32°C	Puerto Escondi..	28°C | 31°C	San Cristobal d..	14°C | 16°C
Culiacán	19°C | 35°C	Chihuahua	17°C | 31°C	Zacatecas	16°C | 30°C
Hermosillo	24°C | 39°C	Guanajuato	17°C | 32°C	San Miguel de A..	14°C | 31°C
Morelia	15°C | 31°C	Taxco	16°C | 25°C	Mazatlán	23°C | 30°C
Oaxaca	18°C | 24°C	Piedras Negras	25°C | 30°C		

Preguntas	**Respuestas esperadas**
a) ¿Cuál fue la temperatura más alta durante el día?	a) 39ºC.
b) ¿En dónde se registró la temperatura más alta durante el día?	b) En Hermosillo.
c) ¿Cuál fue la temperatura más baja registrada durante la noche?	c) 10ºC.
d) ¿En dónde se registró la temperatura más baja durante la noche?	d) En Toluca.
e) ¿Cuál es la moda de las temperaturas para el día y para la noche?	e) Para el día la moda es de 30ºC y para la noche es polimodal: 14ºC, 17ºC, 24ºC y 26ºC.
f) ¿Cuál fue la temperatura media durante el día?	f) Durante el día fue de 29.43ºC.
g) ¿Cuál fue la temperatura media durante la noche?	g) Durante la noche fue de 18.52ºC.
h) Traza las gráficas correspondientes de las temperaturas y descríbelas.	h) ---------------------------------------
i) ¿Qué es la variación?	i) --
j) ¿Qué es la dispersión?	j) --
k) ¿Qué es la distribución?	k) ---------------------------------------
l) ¿Qué es la simetría?	l) ---------------------------------------
m) ¿Para qué determinas la media y la moda de un conjunto de datos?	m) Para tener un representante del conjunto de datos.
n) ¿Cuál es la medida central más representativa de las temperaturas durante el día?	n) La medida más representativa para las temperaturas durante el día es la media y la moda para las temperaturas en la noche.
ñ) ¿Por qué?	ñ) ¿Por qué?
o) ¿Qué significa que la medida central (moda o media) sea la más representativa del conjunto de datos?	o) -------------------------------------

Datos tomados de http://www.easyviajar.com/pronostico-tiempo/mexico/mayo. Consultado el 27/05/20217.

6.3.1. Referentes

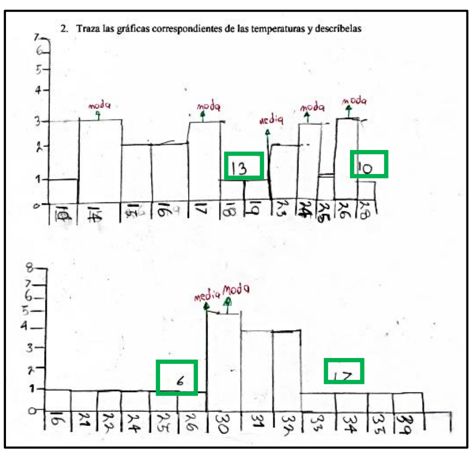
El referente K (véase en la Tabla 6.6) para cuarto grado no revistió dificultades para A^4_{10} y A^4_{13} dado que sólo leyeron e interpretaron la información presentada en el problema para responder las preguntas.

El referente L (véase en la Tabla 6.7) para quinto año fue más difícil; A^5_8 tuvo dificultad al organizar, analizar e interpretar los datos dados y con las gráficas que trazó.

6.3.2. Ideas fundamentales de estocásticos

La idea de equidistribución y simetría fue difícil para A^5_8, pues no tenía claros los conceptos de simetría, dispersión y medida más representativa. La idea de muestra sólo presentó dificultades a A^4_{10}.

6.3.2.1. Equidistribución y simetría. En los histogramas que trazó, A^5_8 ubicó la media aritmética y contó el número de datos a la derecha e izquierda de ella, para identificar si eran simétricas o no las gráficas (véase la Figura 6.15): es decir, aplicó el procedimiento enseñado en la sesión de aula por E^2_{13}:



I ¡Acá! [señala la gráfica superior], **¿hay simetría?** [de la distribución de los datos].

A^5_8 Y aquí, abajo [señala la gráfica inferior], **¡no!**

Figura 6.15. Histogramas trazados por A^5_8 para dar respuesta al reactivo I.

Para identificar la medida más representativa (véase la Figura 6.15) de cada uno de los dos conjuntos de datos, A^5_8 usó el procedimiento tratado en la sesión impartida por E^2_{13} (véanse en § 6.1.2.1, § 6.1.2.2 y en § 6.1.4.5).

La simetría de la distribución de frecuencias de los datos fue identificada por A^5_8 al considerar la dispersión de ellos en las gráficas respectivas (véase la Figura 6.15). Sin embargo, no usó los términos para expresar sus ideas:

I La media se usa cuando hay más dispersión entre los datos y la moda cuando hay menos, ok. ¿Qué me puedes decir de la asimetría de esta gráfica con respecto a esta? [señala primero la gráfica de arriba y luego la de abajo (véase la Figura 6.15)] ¿**Qué entiendes por simetría**?
A^5_8 **Es como la mitad, o sea, lo mismo**, ¿no?
I Lo mismo, ¿a partir de qué?
A^5_8 **De la media**.
I De la media, **¿Cuál de las dos gráficas es simétrica?** [el alumno analiza las gráficas, **comienza a contar los datos que quedan a la derecha e izquierda de cada una de las medias en las gráficas** y registra el número: en la gráfica de arriba anota 13 a la izquierda de la media y 10 a la derecha; en la gráfica de abajo escribe 6 a la izquierda de la media y 17 a la derecha (véase la Figura 6.15)].
A^5_8 ¡Esta! [Señala la gráfica de arriba].
I ¿La de arriba? [Se refiere a la gráfica de arriba]. ¿Por qué es simétrica?
A^5_8 Porque no hay tanta [inaudible]… como nos decían la otra vez, acá [señala los números que anotó en la gráfica de arriba] es 13 y acá es 10, nada más son tres números [se refiere a la diferencia entre los datos: $13 - 10 = 3$], acá [señalando los datos que quedaron a la izquierda de la media] hay más.

Para identificar si las gráficas eran simétricas o no, A^5_8 realizó el procedimiento aprendido en clase, es decir, consideró a la media para identificar la simetría de la distribución del conjunto de datos. Este procedimiento fue propuesto por su compañero A^5_5 y clarificado por la investigadora (véase § 6.1.4.5 y la Figura 6.6), dado que los alumnos contaban el número de barras y no el de los datos para identificar la dispersión.

6.3.2.2. Variable estocástica. A^5_8 determinó correctamente el valor de la media aritmética y de la moda de los dos conjuntos de datos e identificó las temperaturas máxima y mínima, por ejemplo:

I (…) Te hago la primer [a] pregunta: ¿cuál es la temperatura más alta a mediodía?
A^5_8 **La de 39**.
I 39 *grados* [enfatiza la unidad de medida].
A^5_8 Grados.
I Ok. ¿En dónde se registró esa temperatura?
A^5_8 **En Hermosillo**.

A^5_8 identificó los datos de los conjuntos, sus frecuencias respectivas y se le pidió que los organizara (véase la Figura 6.15 y la Figura 6.16) para determinar la moda y la media de las temperaturas altas y de las temperaturas bajas:

I La de Puerto Escondido, ok. **¿Cuál es la moda de las temperaturas durante la mañana?**

A^5_8 **La moda … 14**.

I ¿Por qué 14 grados?

A^5_8 **Se repite más veces** [cuenta las veces que se repite la temperatura de 14°C].

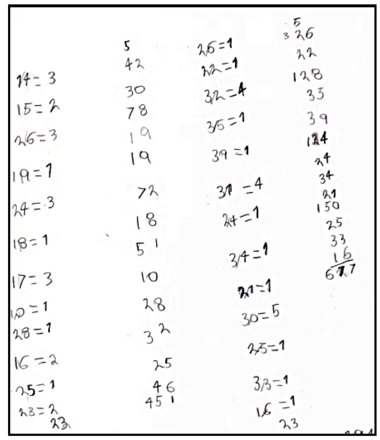


Figura 6.16. Listado de datos con su frecuencia respectiva realizado por A^5_8 en el reactivo I.

6.3.2.3. Muestra. A^5_8 identificó el tamaño de la muestra, 23 (ciudades), y lo registró en la tabla del referente L que se le presentó (véase la Figura 6.17):

México City	14°C | 26°C	Guadalajara	17°C | 34°C	Monterrey	24°C | 32°C
Puebla	15°C | 22°C	Toluca	10°C | 21°C	Torreon	24°C | 33°C
Acapulco	26°C | 32°C	Veracruz	26°C | 30°C	Palenque	23°C | 30°C
Puerto Vallarta	26°C | 32°C	Puerto Escondi...	28°C | 31°C	San Cristobal d...	14°C | 16°C
Culiacán	19°C | 35°C	Chihuahua	17°C | 31°C	Zacatecas	16°C | 30°C
Hermosillo	24°C | 39°C	Guanajuato	17°C | 32°C	San Miguel de A...	14°C | 31°C
Morelia	15°C | 31°C	Taxco	16°C | 25°C	Mazatlán	23°C | 30°C
Oaxaca	18°C | 24°C	Piedras Negras	25°C | 30°C	23	

I **¿Cuántos datos en total son**?

A^5_8 Veinte […] dos. Serían 22.

I Y ¿ya revisaste tu tabla? que sí estén bien las 22 temperaturas. ¿Cuántas son?

A^5_8 Son **23**.

Figura 6.17. Identificación del tamaño de la muestra del reactivo I por A^5_8.

A^4_{13} identificó el total de alumnos encuestados en el referente L (véase en la Tabla 6.7), es decir, el tamaño de la muestra seleccionada a quienes aplicaron la encuesta sobre el tipo de música que más les gustaba:

I (…) Te hago la primera pregunta... ¿**A cuántos alumnos se les encuestó**?

A^4_{13} Se le encuestó a ... 15, aquí son 15, 16, 17, 18, 18, 5, 10... [va identificando la frecuencia de cada uno de los tipos de música].

I ¿Quieres regla? ¡Sí quieres! [se refiere a la regla].

A^4_{13} Sí. Ok, gracias...ocho, tres, 13 más cuatro...17, 18, ocho llevo uno...dos, tres, cuatro, cinco... **A 58** [alumnos].

A^4_{10} dio respuesta incorrecta a la pregunta de a cuántos alumnos se les había encuestado, debido a errores aritméticos:

I Antes de que continúes, ¿qué tipo de música te gusta a ti?
A^4_{10} La de inglés.
I Música en inglés. ¿Cualquier música en inglés? [A^4_{10} asiente afirmativamente con la cabeza]. ¡Muy bien! Entonces… ahí [señala el referente K (véase en la Tabla 6.6) que leyó A^4_{10}] encuestaron a … ¿**cuántos niños de cuarto grado**?
A^4_{10} ¿Puedo, aquí? [se refiere a si puede escribir la frecuencia sobre cada barra].
I ¡Sí, si puedes, claro que sí!
A^4_{10} [Escribe 18, cinco, 10, 13, 12 y los suma] **¡68 niños!**

6.3.3. Otros conceptos matemáticos

Para A^5_8 y A^4_{10} fueron difíciles las *operaciones aritméticas*. Sólo A^4_{10} no identificó correctamente el producto cartesiano de los datos que se le presentaron.

6.3.3.1. Unidad de medida de temperatura (°C). Este concepto no revistió dificultad para A^5_8, quien identificó correctamente las temperaturas altas y bajas en cada conjunto de datos; sin embargo, en ocasiones las identificó con grados solamente, la abreviatura "C" relativa a Celsius o Centígrados no se consideró:

I En Hermosillo, ¿eh? ¿Cuál fue la temperatura más baja que se registró durante la mañana?
A^5_8 [Revisa la hoja]… La de Toluca, la de 10.
I ¿La de 10?, ok.
A^5_8 **Grados**.
I La de 10 grados. Y de la mañana, la más alta y… ¿cuál fue?

6.3.3.2. Concepto de número y sus operaciones. A^4_{10} no realizó *operaciones aritméticas* correctas para identificar la muestra de alumnos encuestados en el referente K (véase en la Tabla 6.6). A^5_8 tuvo dificultades al dividir la suma total de las temperaturas entre el número de datos (tamaño de la muestra) para obtener la media aritmética respectiva (véase la Figura 6.18), por lo que mostró dificultad al identificar los *números decimales* en el cociente de la división.

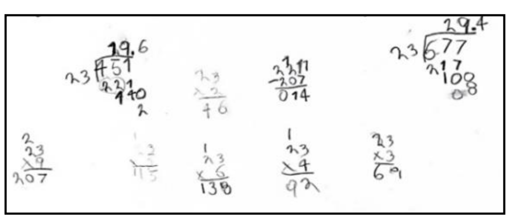
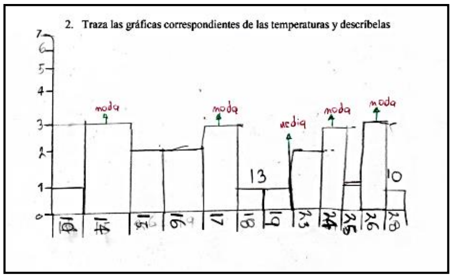


Figura 6.18. Dificultades de A^5_8 al resolver operaciones aritméticas en el reactivo I.

Al anotar las temperaturas en el eje horizontal, A^5_8 no ordenó los datos correctamente hasta que se le hizo la observación pertinente (véase la Figura 6.19):



I ¡A ver! A_1, ¿cómo se colocan los números en la línea horizontal? [A^5_8 escribió: 14, 15, 26, 19].
A^5_8 ¡Ah, ya! [borra los números 14 y 15, y los orienta verticalmente hacia abajo].
I ¿Cómo?
A^5_8 **De costado**.
I **¿De costado?, después de** […] **¿qué número es éste?** [señala el número 14 en la hoja].
A^5_8 **El 14**.
I **Después del 14 va el 15, ¿después del 15 va el 26?, ¿después del 26 va el 19?**
A^5_8 [Inaudible].
I ¡Los tenemos que poner en orden!, ¿verdad? [A^5_8 corrige su error].
A^5_8 ¿Los pongo de menor a mayor?
I De menor a mayor, por favor.

Figura 6.19. Comprensión de orden en los naturales por A^5_8 en el reactivo I.

6.3.3.3. Producto cartesiano. Para el referente L (véase en la Tabla 6.7), A^5_8 estableció de manera correcta el producto cartesiano de cada dato con su frecuencia (véase la Figura 6.16). A^4_{10} no identificó el producto cartesiano de la gráfica de barras que se le presentó en el referente K (véase en la Tabla 6.6) pues al leerla no cotejó correctamente la frecuencia de los dos últimos tipos de música, reguetón y pop (véase la Figura 6.20); es decir, asignó 13 alumnos a la primera y a la de pop 12 alumnos; además, consideró dos veces a los sujetos que eligieron rock.

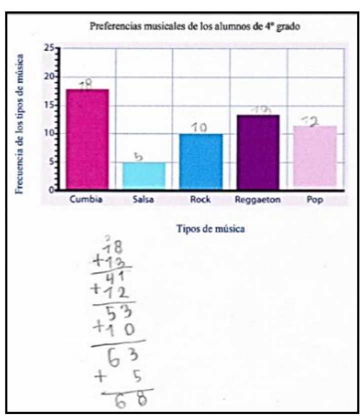


Figura 6.20. Identificación incorrecta del producto cartesiano por A^4_{10} en el reactivo K.

Es necesario que, en las sesiones de enseñanza, los normalistas enseñen el trazo y funcionalidad de las gráficas, ya que, al trazar gráficas, los alumnos deben centrar su atención en lo que éstas aportan a la pregunta de la situación de referencia (Burrill y Biehler, 2013), iniciando con la identificación del tipo de variable para seleccionar la gráfica correspondiente, dado que en la enseñanza se trazaron histogramas cuando correspondía trazar gráficas de barras.

6.3.4. Recursos semióticos

Para A^5_8 fue difícil *enlistar* y *graficar* los datos con su frecuencia; a A^4_{10} y A^4_{13} se les dificultó la lectura de la gráfica de barras.

6.3.4.1. Código de colores. A^5_8 identificó el *código de colores* (azul temperaturas bajas y rojo temperaturas altas) sin ningún problema (véase la Figura 6.17).

I	¿Ya estás listo? Bien, ¡eh! **¿Qué significa que unas temperaturas estén en azul y otras en rojo?**
A^5_8	**Las azules están frías, o sea, que están bajas**.
I	Que son bajas.
A^5_8	¡Ajá!
A^5_8	Y éstas [señala las temperaturas rojas], **las rojas, que son las temperaturas altas**.

6.3.4.2. Listado. En el *listado* de temperaturas, A^5_8 colocó el signo “=” entre el dato y su frecuencia (véase la Figura 6.16), lo que puede originar errores al leer la información en este segundo recurso semiótico.

6.3.4.3. Gráfica. A^5_8 trazó correctamente las gráficas de los dos conjuntos de datos de la muestra y localizó en ellas las dos medidas centrales solicitadas, pero omitió rotular cada eje (véanse las Figuras 6.15 y 6.19). Burrill y Biehler (2013) señalan la importancia de que en el currículo se incorporen herramientas gráficas como los diagramas y el histograma. En su enseñanza, E^2_{13} no trazó un histograma para reflexionar acerca de los términos de dispersión, variación, ni rango. Quizá por ello surge la confusión de A^5_8 con esos términos. Esto señala la importancia de enseñar la distinción entre gráficas de barras e histogramas, es decir, entre variables discretas y variables continuas, así como su funcionalidad de esos recursos.

6.3.5. Términos empleados

Para A^4_{10} revistió dificultad el término *dato* en las preguntas relativas al referente K (véase en la Tabla 6.6). A^5_8 identificó correctamente la *media* y la *moda* de cada conjunto de datos, pero tuvo dificultad para diferenciar los términos *variación*, *distribución* y *rango* en el referente L (véase en la Tabla 6.7).

6.3.5.1. Dato. A este término A^4_{10} lo definió de la siguiente manera: "Un dato es… una cosa importante de alguna otra cosa", mientras que A^4_{13} lo refirió a la situación de la encuesta:

I	[…] ¿Cómo son los datos que tiene esa gráfica?
A^4_{13}	¿Cómo son?... [habla en voz baja]
I	¿No quedó clara la pregunta?
A^4_{13}	No.
I	No, bien. Te [la] cambió por otra pregunta: **¿qué es un dato?**
A^4_{13}	¿Qué es un dato? Un dato, un dato es lo que…, que..., ¿qué es un dato? **Un dato es la información sobre…, sobre, sobre el tipo; por ejemplo, ¡aquí es la información de a cuántos les gusta el tipo de música!**

Ambos alumnos señalaron una idea vaga de dato, lo cual puede ser consecuencia de que en la enseñanza y en los libros de texto de cuarto año de primaria (SEP, 2014e) no se define el término.

6.3.5.2. Media y moda. A^4_{13} definió a la *moda* como "la que más se prefiere o la que más se elige" y A^4_{10} como "la más elegida". A^5_8 identificó correctamente la *media* y la *moda* (*s*) de cada uno de los conjuntos de datos (temperaturas altas y temperaturas bajas).

I	Hasta ahí. Entonces, **¿cuál fue la moda de este conjunto de datos de las temperaturas de la mañana** [durante el día]**?**
A^5_8	**14, 24, 26 y 27**.
I	¡Ajá!, y **¿cuál fue su media?**
A^5_8	Este [señala el cociente de la división], **19.6**.
I	Ese conjunto tiene varias modas. **¿Cuántas modas en total encontraste?**
A^5_8	**Cuatro**.

6.3.5.3. Variación. Aunque este término no se utilizó en el enunciado del referente L (véase en la Tabla 6.7), surgió cuando A^5_8 confundió el término de *variación* con el de *dispersión*, lo que indica que se les debe precisarse en la enseñanza.

I ¡Ahí [señala la gráfica de abajo] se rompe!, de acuerdo a lo que tú dices, el conjunto de datos, ok. **¿Qué es variación?** ¿Qué entiendes por variación?

A^5_8 **Que es como lo mismo, más o menos, o sea, se varía, ¿no?**

I **¿Estos datos** [señala los datos de la gráfica de abajo] **son variados o no son variados?**

A^5_8 **No**. ¡Aquí, sí! [señala los datos de la gráfica de arriba].

I ¿Ahí sí? ¿Por qué?

A^5_8 **Porque aquí** [señala los datos de la gráfica de arriba] **se ve que se llevan más, o sea, no se llevan tanto y acá sí se llevan** [señala la gráfica de abajo]… **son cinco** [identifica la diferencia del número 16 al 21]. **Y acá, cuatro** [identifica la diferencia entre el número 10 y el 14]; y así se van.

I Eso que me estás diciendo, ¿es variación o dispersión?

A^5_8 ¡Aquí **es dispersión**! [señala la gráfica de abajo (véase la Figura 6.15)].

I ¿Es dispersión, lo que tú me estás comentando, ahorita? Yo te pregunto: **¿los datos son variados?**

A^5_8 **Sí**.

I **¿Por qué son variados?**

A^5_8 **¿Son casi iguales?**

Burrill y Biehler (2013) señalan la importancia de reconocer la *variación* respecto a un punto de referencia y no sólo decir si hay o no *variación*.

Además, como se señaló en § 6.1.3.6 en la práctica, E^2_{13} y los alumnos no consideraron en las gráficas que trazaron una escala apropiada que incluyera valores intermedios posibles que no fueron datos; es decir, los espacios de los números faltantes.

6.3.5.4. Medida más representativa. Para identificar la *medida más representativa* de un conjunto de datos, A^5_8 aplicó el procedimiento enseñado por E^2_{13}:

I Y en esta, ¿cuál es la medida más representativa? [Señala la gráfica de arriba (véase la Figura 6.15)].

A^5_8 **La moda**.

I ¿La moda? ¿Por qué la moda?

A^5_8 **Porque no hay tanta dispersión**. **La moda es la medida… es cuando no hay tanta dispersión; y la media es, por ejemplo, en este caso** [señala la gráfica de abajo (véase la Figura 6.15)] **es cuando hay más dispersión**.

A^5_8 se confundió al identificar la medida más representativa de cada conjunto de datos, a pesar de reconocer la dispersión de ellos y los valores atípicos y de haber determinado la moda y la media, es decir, no pudo explicar por qué era representativa (Mokros y Russell, 1995). La respuesta esperada era que la moda es representativa de un conjunto de datos cuando éstos tienen mayor dispersión; y la media es representativa del conjunto de datos con menor dispersión ya que no es afectada por los valores extremos.

6.3.6. Observaciones

Resulta necesario fortalecer la *dimensión cognitiva* que propone Scheiner (2015), para que el docente en formación formalice los conceptos de estocásticos, dado que se observó que para el término *dispersión* se considera el de variación. De acuerdo con Garfield y Ben-Zvi (2008) quienes determinaron que "la idea de variabilidad debe impregnar todo plan de estudios" (p. 203). Además, "la idea de variación tiene una naturaleza diferente en matemáticas y en estadística" (Burrill y Biehler, 2013, p. 11); las primeras se enseñan como exactas y precisas; mientras que la segunda "atiende a la manera de medir y controlar la variabilidad" (p.11).

Dado que las ideas de variación y dispersión no quedaron claras en la enseñanza, la idea fundamental de *Equidistribución y simetría* revistió dificultades tanto para A^5_8 como para E^2_{13}.

A^5_8 empleó las estrategias usadas por E^2_{13} o por algunos de sus compañeros para identificar la asimetría de la gráfica y la dispersión de los datos al remitirse al referente L (véase en la Tabla 6.7). Para dar respuesta a las preguntas, A^5_8 trazó recursos semióticos que correspondieron al nivel de la experiencia y al del pensamiento matemático de acuerdo a Andrà (2011); además, A^5_8 convirtió (Duval, 2006) el listado de datos con su frecuencia (véase la Figura 6.16) en un histograma (véase la Figura 6.15) para identificar la medida representativa de ellos.

En la *dimensión didáctica* propuesta por Scheiner (2015), los normalistas mostraron debilidades al seleccionar, usar e interpretar los recursos semióticos que propusieron y los que trazaron sus alumnos; lo que reveló las deficiencias del dominio de contenido matemático (medidas de tendencia central) que a su vez impacta en la dimensión epistemológica (Scheiner, 2015) que trata el origen y dificultades de los términos estocásticos.

6.4. Observaciones de enseñanza de combinatoria (principio multiplicativo)

En el segundo período de observaciones, los docentes en formación $E^2{}_{5}$, $E^2{}_{9}$ y $E^1{}_{45}$ practicaron la enseñanza del principio multiplicativo con grupos de segundo, tercero y cuarto grado; y en el tercer período, $E^2{}_{16}$, $E^1{}_{32}$ con alumnos de segundo grado. $E^2{}_{5}$ impartió dos sesiones de enseñanza: en la de segundo grado no consideró el libro de texto y en su práctica docente con alumnos de tercer año trató la lección 16, “Figuras y colores” (SEP, 2014c, p. 38), además de los referentes que propuso para iniciar la sesión. $E^2{}_{9}$ consideró la lección 13, “Combinaciones” (SEP, 2014d, p. 31), en su enseñanza a un grupo de cuarto grado. Esta lección pertenece al eje *Sentido Numérico y Pensamiento Algebraico* en la propuesta institucional para primaria (SEP, 2011e).

La formación en estocásticos en el bachillerato (véase la Tabla 6.1) de $E^2{}_{5}$, $E^2{}_{9}$ y $E^2{}_{16}$ fue la base de su enseñanza del principio multiplicativo, pues cursaban el cuarto semestre en la Normal y aún no trataban la unidad 2 *Probabilidad y muestreo* que incluye ese principio. $E^1{}_{32}$ y $E^1{}_{45}$, de la primera generación, cursaban el quinto semestre, pero su estudio de la unidad 2 se restringió a aclarar los procedimientos correctos para resolver los problemas combinatorios que se les plantearon en el Cuestionario 1 (véase apdo. 5.1.1).

$E^2{}_{16}$ no entregó oportunamente su planeación de enseñanza, por lo que las sugerencias se le hicieron *in situ* y las registró a lápiz en el formato que entregó a la titular del grupo. Una observación que I le hizo se refirió a la redacción de los problemas. Por su parte, $E^1{}_{32}$ no incluyó el aprendizaje esperado para la enseñanza de *Combinaciones* (como ella la denominó), a pesar de que I se lo recomendó. El término combinaciones se trató en su acepción común.

Consideramos doce referentes propuestos por cinco practicantes de la enseñanza del principio multiplicativo (véanse en la Tabla 6.9, la Tabla 6.10 y la Tabla 6.11). Los tipos de arreglo implicados en esos referentes se presentan en la Tabla 6.8.

Tabla 6.8. Tipos de arreglos propuestos en las prácticas de enseñanza del principio multiplicativo.

Tipo de arreglo	Identificación y organización de objetos por dos variables (forma y color)	Colocación de tamaño dos de elementos distinguibles de un tipo y de otro tipo, en distintas cantidades.	Permutación de tres elementos distinguibles	Selección de dos de tres elementos distinguibles: con orden; sin orden (a la vez).	Combinación de tamaño dos a partir de cuatro elementos distinguibles del mismo tipo.
Denotación de referentes	ξ	ο, π, ρ, σ, υ, φ, ω	Ω	Χ	τ, ψ

6.4.1. Referentes

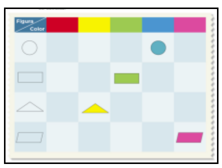
La Tabla 6.9 caracteriza los referentes en las lecciones de los libros de texto de tercero y cuarto grado utilizadas en las prácticas.

El referente **ρ** propuesto en el libro de texto, no especifica cómo se podían formar las parejas de baile (hombre – mujer, mujer – mujer u hombre – hombre), ni la normalista lo señaló. La totalidad del grupo dedujo que las parejas de baile debían formarse por un hombre y una mujer pues realizaron una multiplicación de la cantidad de cada uno, es decir, el problema se le restringió a un aspecto aritmético.

Ni el referente **τ** propuesto por E^1_{45} ni el referente **σ** propuesto por E^2_5 (véanse en la Tabla 6.10) fueron suficientemente analizados por los normalistas ni fueron claros para los alumnos de segundo grado, pues durante su enseñanza, el primero cambió la cantidad de sabores de helados (de cuatro a ocho), mientras que el segundo cambió la cantidad de blusas (de tres a seis; véase la Figura 6.25).

También fue incorrecta la redacción de los dos referentes **χ** y **ψ** propuestos por E^2_{16} (véase la Figura 6.21) y del referente **ω** propuesto por E^1_{32} (véanse en la Tabla 6.11), lo cual pudo haber ocasionado dificultades de comprensión de los alumnos de segundo grado de las preguntas que debían contestar.

Tabla 6.9. Caracterización de los libros de texto de tercero y cuarto grado.

Practicante	**$E^2{}_5$**		**$E^2{}_9$**	
Tema	**Principio multiplicativo**		**Principio multiplicativo**	
Lección del libro de texto	**16. Figuras y colores** (3^er^ grado)		**13. Combinaciones** (4°grado)	
Idea fundamental:	Combinatoria			
Tipo de arreglo	Identificación y organización de objetos por dos variables (forma y color)	Colocación de tamaño dos a partir de tres elementos distinguibles de un tipo y cuatro distinguibles de otro tipo.	Colocación de tamaño dos a partir de cuatro elementos distinguibles de un tipo y dos distinguibles de otro tipo.	Colocación de tamaño dos a partir de 18 elementos distinguibles de un tipo y 15 distinguibles de otro tipo.
Referentes	**ξ.** Completa la tabla con base en los ejemplos. Después haz lo que se solicita  a) Marca con una × la figura verde que tiene tres lados. b) Marca con una √ la figura rosa que tiene un lado curvo. c) Marca con ∞ los rectángulos que no son azules. d) Marca con * los cuadriláteros amarillos.	**ο.** ¿Cuántas casas diferentes entre sí, pero similares a las del modelo, se pueden formar con estos triángulos y rectángulos? 	**π.** El postre de hoy es alguna de estas frutas: sandía, melón, piña o mango, acompañada con nieve de limón o chile piquín. ¿Cuántos postres diferentes se pueden servir?	**ρ.** Para la fiesta de cumpleaños de Antonio asistirán 18 mujeres y 15 hombres. ¿Cuántas parejas de baile diferentes se podrán formar con los invitados?
Otros conceptos matemáticos	Figuras geométricas y sus características, producto cartesiano.	Figuras geométricas, operaciones aritméticas.	Operaciones aritméticas.	Operaciones aritméticas.
Recursos semióticos	Lengua natural escrita, figuras geométricas; tabla.	Lengua natural escrita, figuras geométricas.	Lengua natural escrita.	Lengua natural escrita.
Términos empleados	Figura verde, figura rosa, rectángulos no azules, cuadriláteros amarillos.	Cuántas casas diferentes, similares al modelo.	Cuántos postres diferentes.	Cuántas parejas diferentes.

La Tabla 6.10 y la Tabla 6.11 caracterizan los referentes planteados por los normalistas para la enseñanza del principio multiplicativo. $E^2{}_{16}$ y $E^1{}_{32}$ no usaron el libro de texto en su enseñanza.

Tabla 6.10. Caracterización de cuatro referentes propuestos por $E^2{}_5$, $E^2{}_9$ y $E^1{}_{45}$ para la enseñanza del principio multiplicativo.

Practicante	**$E^2{}_5$** (Seis alumnos, 2º grado)	**$E^1{}_{45}$** (10 alumnos, 2º grado)	**$E^2{}_5$** (13 alumnos, 3er grado)	**$E^2{}_9$** (13 alumnos, 4º grado)
Idea fundamental: Combinatoria (principio multiplicativo)				
Tipo de arreglo	Colocación de tamaño dos con uno de dos elementos distinguibles de un tipo y otro de tres distinguibles de otro tipo.	Combinación de tamaño dos a partir de cuatro elementos distinguibles del mismo tipo.	Colocación de tamaño dos con uno de tres elementos distinguibles de un tipo y otro de dos de otro.	Colocación de tamaño dos a partir de tres elementos distinguibles de un tipo y otro de tres distinguibles de otro tipo.
Referentes (planteados oralmente)	**σ**. "Juanita tiene dos faldas (amarilla y rosa) y tres blusas (anaranjada, violeta y verde). ¿De cuántas formas puede vestirse?"	**τ.** "¿Cuántas combinaciones de helados de dos bolitas puedo hacer? Si puedo escoger entre los siguientes sabores: chocolate, limón, fresa y chicle".	**υ.** "Danaé tiene tres guisados: tacos, hamburguesa y huevo; y dos postres: flan y helado. ¿Cuántos platillos diferentes puede formar?"	**φ. "**Con cuatro cuadrados azules, cuatro morados, cuatro anaranjados; y cuatro triángulos rojos, cuatro amarillos y cuatro verdes, ¿cuántas casitas diferentes se pueden formar?"
Otros conceptos matemáticos	Números naturales, operaciones aritméticas.	Números naturales, operaciones aritméticas.	Números naturales, operaciones aritméticas.	Figuras geométricas, números na--turales, operaciones aritméticas.
Recursos semióticos	Figuras de faldas y blusas de colores, diagrama.	Figuras de helados, diagrama.	Figuras: guisados, postres; diagrama de árbol.	Figuras recortadas de: cuadrados y triángulos de diferentes colores. Tabla de doble entrada.
Términos empleados	De cuántas formas puede vestirse.	Cuántas combina-ciones, de dos.	Cuántos, diferentes.	Cuántas, diferentes.

Sólo la tutora de primaria corrigió la redacción del problema **ψ** (véase en la Tabla 6.11) cuando $E^2{}_{16}$ lo anotó en el pizarrón (véase la Figura 6.21):

$E^2{}_{16}$ [Escribe en el pizarrón] "María a la hora del recreo quiere comprar fruta para desayunar, la condición de la señora es que **sólo María** puede colocar dos frutas, las frutas que venden son: jícama, zanahoria, naranja y germen. ¿De cuántas maneras distintas puede comprar su fruta María?"

$MT^{16}{}_7$ $E^2{}_{16}$, primero **iría el nombre de María y luego la palabra sólo**.

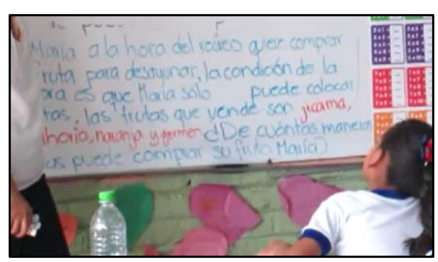


Figura 6.21. Escritura en el pizarrón del referente **ψ** propuesto por $E^2{}_{16}$.

Tabla 6.11. Caracterización de dos referentes propuestos por E^2_{16} y E^1_{32} para la enseñanza el principio multiplicativo.

Practicante	**E^2_{16}**		**E^1_{32}**	
	(21 alumnos de 2º año)		(Cinco alumnos de 2º año)	
Ideas fundamentales: Combinatoria (principio multiplicativo)				
Tipo de arreglo	Seleccionar dos de tres elementos distinguibles: con orden; sin orden.	Combinación con dos de cuatro elementos distinguibles.	Colocación de tamaño dos de elementos distinguibles de dos tipos.	Permutación de tres elementos distinguibles
Referentes	**χ.** José tiene las siguientes canicas: roja, azul y verde. Si desea regalar dos de ellas ¿de cuántas maneras distintas lo puede hacer?	**ψ.** María a la hora del recreo quiere comprar fruta. Si la señora vende bolsitas con dos frutas o verduras y tiene jícama, zanahoria, naranja y germen. ¿de cuántas maneras distintas puede comprar su fruta o verdura María?	**ω**. Rosita compró dos playeras: una rosa y una azul; y dos shorts: uno rosa y uno rojo. ¿De cuántas maneras distintas se puede vestir?	**Ω**. ¿Cuántos números diferentes de dos cifras pueden formar con las siguientes tarjetas? $\boxed{5}$ $\boxed{7}$ $\boxed{4}$ Escríbelos.
Otros conceptos matemáticos	Número natural, operaciones aritméticas.	Número natural, operaciones aritméticas.	Número natural, operaciones aritméticas.	Número natural, orden, operaciones aritméticas.
Recursos semióticos	Lengua natural escrita, material físico: fichas de colores (en lugar de canicas).	Lengua natural escrita. (Material físico: bolsas de plástico, platos de jícama, zanahoria, naranja y germen).	Lengua natural escrita, figuras de prendas de vestir, símbolos numéricos.	Lengua natural escrita, símbolos numéricos. (Material concreto: tarjetas).
Términos empleados	Regalar dos, de cuántas maneras diferentes.	Dos frutas o verduras, de cuántas maneras distintas.	Dos playeras, dos shorts, de cuántas maneras distintas.	Cuántos números diferentes, dos cifras.

Aunque E^1_{32}, E^2_9 y E^2_{16} presentaron los referentes escritos en el pizarrón o impresos en hojas de control —por lo que podrían haber iniciado así una comunicación matemática con los niños "al compartir y explicar ideas por escrito" (NCTM, 2000, citado en Santos y Semana, 2014, p. 65)—, la redacción de los dos referentes **χ** y **ψ** propuestos por E^2_{16} (véanse en la Tabla 6.11) pudo haber dificultado la comprensión de los alumnos de los conceptos de combinatoria implicados y los procedimientos correctos para contestar las preguntas (Santos y Semana, 2014).

Por otro lado, respecto a los referentes **σ, υ** (véanse en la Tabla 6.10), **χ**, **ψ** y **ω** (véanse en la Tabla 6.11) llama la atención la imprecisión de las preguntas planteadas en las que el número a determinar concierne al verbo (regalar, vestir, comprar) en lugar de al arreglo de los elementos en cuestión.

6.4.2. Combinatoria: el principio multiplicativo

En general, alumnos y practicantes advirtieron tácitamente la bidimensionalidad (English, 2005) de los problemas planteados concernientes al principio multiplicativo y establecieron las operaciones aritméticas (multiplicación o suma reiterada) apropiadas para resolverlos. No obstante, la enseñanza de este principio fue difícil para los cinco futuros docentes. Resultó importante que los normalistas no hubieran presentado con claridad los referentes pues no señalaron explícitamente, por ejemplo: las variables y la cantidad de elementos; si estos últimos eran o no distinguibles; el orden, la exclusión o la repetición, admitidos o no en los arreglos propuestos. Con estos señalamientos los alumnos hubieran comparado y juzgado sus procedimientos y respuestas. Por ejemplo, respecto a **χ** (véase en la Tabla 6.11) los alumnos dieron dos contestaciones sin que cada una se haya remitido a la situación planteada:

E^2_{16}	¿No se acuerdan? ¿Cuántas? A ver [A_1 y A_3 dicen algo, inaudible], ustedes en equipo pónganse de acuerdo para ver de cuántas maneras diferentes pueden hacer [enlistaron las posibilidades] para las canicas … para escribir las canicas [E^2_{16} se retira del equipo].
$Q_1A^2_7$	[A_1 mira a su compañero A_3 y dice] **Seis**.
I	¿Por qué seis?
$Q_1A^2_7$	**Porque aquí** [señala cada una de las tres filas que hicieron] **hay dos, aquí hay dos y aquí hay dos. Entonces son seis**.
$Q_1A^2_7$	¡Ah!, **yo digo que son nueve**.
Q_1A_3	Porque si los cuentas así son nueve [el alumno señala de manera vertical las canicas con su dedo].
AS	[A_2 y A_3 hablan a la vez]. **Porque tres, más tres, más tres son nueve**… [inaudible] ¡Ajá! [Un integrante (A_4) de este equipo no dice nada, sólo se quita y se pone sus lentes].
I	Entonces, ¿son seis o son nueve? [se refiere a las canicas] ¿Cuántas son?
AS	**Nueve**.

Lo mismo sucedió con el referente **Ω** (véase en la Tabla 6.11) que E^1_{32} propuso a los alumnos de segundo grado, hasta que I le señaló a A_1 (siete años de edad) si el enunciado admitía la repetición, dado que la alumna lo preguntó y que A^2_3 repitió números en su respuesta:

A_1 **¿Puedo repetir un número?** [pregunta a la investigadora].

I ¿Puedes repetir un número? ¿Te dice [señala el referente **Ω**] si puedes repetir uno [se refiere a los dígitos de las tarjetas]?

A_1 [Lee el problema nuevamente].

I [Señala el referente **Ω**] ¿Te dice si repites [dígitos] o no? Entonces, ¿tú qué crees?, ¿lo puedes hacer?

A_1 No.

I ¿Por qué no?

A_1 [Se queda pensativa mirando su hoja].

E^1_{32} Ahora ya sigue coloreando [le da la indicación a A_4].

A_2 Seis.

E^1_{32} Seis combinaciones. ¡Sentado, A_4!

A^2_3 Maestra [entrega su hoja a E^1_{32} para que se la revise].

E^1_{32} ¡Ey, [sic]!, sentado, A_4. ¡Ya! Puedes seguir coloreando [toma la hoja de A^2_3 y le pregunta] **¿Por qué pones 55 aquí?** [señala el número 55 en el listado que hizo A^2_3 y le regresa la hoja].

A^2_3 [Recibe la hoja que le dio a revisar a E^1_{32}, observa y borra el número 55 que había escrito].

I **¿Por qué lo borraste** [se refiere al número 55]**?** [A^2_3 voltea a ver a la investigadora].

A^2_3 **Porque la maestra me dijo que no**.

I Y ¿por qué tú crees que no es [correcto]?

A^2_3 **Porque es el mismo número**.

I ¿Es el mismo número? ¿Y… **en el problema te dice que no puedes repetir números**?

A^2_3 [Observa su hoja, lee el problema **Ω**] **No**.

I Entonces… podría ser posible esa posibi…esa… ese número que escribiste, ¿sí entraría? [sería una posibilidad en la respuesta].

A^2_3 Sí [vuelve a escribir el número y mira a E^1_{32} que está a su izquierda].

E^1_{32} ¿Cuántas salieron? [se refiere a cuántos números diferentes encontró].

A^2_3 [No contesta, se queda pensativa].

A^2_3 se confundió al preguntarle E^1_{32} por el total de números que escribió, dado que la normalista le había señalado que no era correcto el número 55. E^1_{32} no reflexionó acerca de la posibilidad de repetición en el enunciado del problema, como lo hizo I con A_1 y A^2_3.

6.4.2.1. Identificación de variables. En el referente ξ (véase en la Tabla 6.9) los alumnos de 3ro identificaron las variables de forma y color de las figuras geométricas que debían colocar en cada celda (véase la Figura 6.22), dado que únicamente tenían que completar la tabla ya propuesta siguiendo los ejemplos.

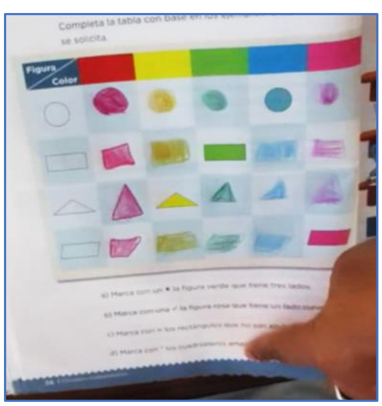


Figura 6.22. Compleción de las tablas de doble entrada del referente ξ.

Para los referentes **σ** y **ω** (2º año), **o** y **υ** (3er año), **π**, **ρ** y **φ** (4º año), los alumnos de todos los grados identificaron los elementos distinguibles de cada tipo: blusas, faldas, playera, short, techos, fachadas, frutas, parejas de baile (hombre-mujer). Sin embargo, respecto al referente **σ** (véase en la Tabla 6.10) E^2_5 confundió el nombre de un tipo y en lugar de decir falda dijo "vestido":

E^2_5	Pero … Juanita ¿**cuántos vestidos tiene** [**señala las faldas**], habíamos quedado?
As	**Uno, dos** …
E^2_5	Dos, ¿no? ¿Y blusas?
AS	Tres.

Lo anterior dio evidencia de que E^2_5 no tenía claro el tipo de arreglo (colocaciones) que quería que los niños identificaran.

A_8 (4º año, 9 años de edad) mostró confusiones al identificar la variable en el referente **o** (véase en la Tabla 6.9), pues escribió la respuesta que habían dado al referente **φ** (véase en la Tabla 6.10) sin considerar que la cantidad de elementos y la variable de color eran distintas en ambos referentes:

I	Pero… **¿es lo mismo?** [se refiere a la respuesta de 9 casas]. Aquí [señala el referente **o**] **son cuatro triángulos de colores diferentes y son tres fachadas de colores diferentes**. ¿Cuántas casas diferentes puedes formar?
Q_2A_8	¡Ah! [borra el nueve, cuenta los triángulos y escribe] **Siete**.
I	¿Siete?
Q_2A_8	[Borra nuevamente lo que escribió y se queda pensando].
I	**¿Cuántos colores para los triángulos tienes?**
Q_2A_8	**Cuatro.**
I	Cuatro. Y **¿cuántos colores para las fachadas tienes?** [señala las fachadas].
Q_2A_8	**Tres.**
I	¿Qué vas a hacer?
Q_2A_8	Multiplicar.
I	¿Mande?
Q_2A_8	Multiplicarlo.
I	¿Cuánto por cuánto?
Q_2A_8	**Cuatro por tres**.
I	¿Cuánto es?
Q_2A_8	**Doce**.
I	**¿Cuántas casas distintas puedes formar?** [señala los techos y las fachadas].
Q_2A_8	**Doce** [escribe la respuesta en el libro de texto].

A_8, aplicó lo aprendido de la enseñanza de E^2_9 (multiplicar), aunque no había reflexionado que debía multiplicar el número de colores distintos de los techos y el de las fachadas e, incluso para su segunda respuesta "Siete casas", sólo sumó la cantidad total de elementos que tenía.

Los alumnos de 2° grado tuvieron dificultad para identificar que en el referente **Ω** (véase en la Tabla 6.11) sólo se tenían tres tarjetas con elementos distinguibles (primera variable: valor absoluto) para escribir números diferentes de dos cifras (segunda variable: valor relativo, véase el ejemplo en el apdo. 6.4.2).

Al darles más material concreto del necesario (fichas de tres colores en lugar de canicas) relativo al referente **χ** (véase en la Tabla 6.11), los alumnos de segundo grado se confundieron ante la consigna de seleccionar dos de tres elementos distinguibles. Además, E^{2}_{16} no señaló si la variable de color podía o no repetirse o si se consideraría o no el orden (véase la Figura 6.23).

Figura 6.23. Mayor número de fichas de colores para dar respuesta a la pregunta relativa al referente **χ**.

En cuanto a la combinación de tamaño dos a partir de cuatro elementos distinguibles del mismo tipo en los referentes **τ** (2º grado) y **φ** (4º grado), E^{1}_{45}, por ejemplo, no señaló a los alumnos de segundo año si los sabores (primera variante) de los helados podían o no repetirse ni si importaba o no el sabor que eligieran primero, e incluso omitió la segunda variable (sabor de los conos) al responder la pregunta relativa al referente **τ**:

E^{1}_{45} […] Fíjense bien, chicos, vamos a poner la **combinación de helados**. Me van a ayudar. Ayer fui a una nevería y le pedí al señor que me diera un helado, ¿y saben qué me contestó?

A_7 ¿Qué?

E^{1}_{45} Me dijo que de qué quería mi **helado**, y me dijo —tengo estos **sabores**: **chocolate, limón, fresa, mamey, piña, vainilla, chicle y de cereza** [señala en el pizarrón].

A_3 Chicle.

E^{1}_{45} Pero, sólo tiene cuatro… **cuatro conos y esos cuatro conos son de diferente sabor**: de **oreo**, …, me dijo que tenía uno de **oreo**, uno de **chocolate,** uno de **vainilla** [enseña los conos de los helados]… uno de **oreo**, uno de **chocolate**, uno de **vainilla** y un cono **natural**. Entonces, quiero que ustedes me ayuden a ver **cuántas combinaciones posibles puedo tener de helado** [corta cinta adhesiva].

E^1_{45} confundió a los alumnos de segundo grado al variar la cantidad de sabores de helado y omitió la variable de sabor del cono al responder la pregunta (véase el apdo. 6.4.6 y la Figura 6.35).

Los alumnos de cuarto grado identificaron las variables de forma (techos-triángulos y fachadas-rectángulos) y de color en los elementos del referente **φ** (véase en la Tabla 6.10). Sin embargo, con la cantidad de material de la que dispusieron se confundieron al percatarse que tres casas se repetían y formaron con ellas una casa de diferente forma a las demás (véase la Figura 6.24):

I […] con el material que les dieron, ¿cuántas casas de distinto color pueden armar?
Q_1A_{12} **Doce**.
Q_1A_{13} **Diez**.
I ¿Doce?
Q_1A_{13} Diez.
I ¿Por qué diez?
Q_1A_{13} ¡Ah! Porque… no, no…
I ¿Por qué diez?
Q_1A_{13} ¡Ah!, no. **Nueve**.
I ¿Por qué nueve?
Q_1A_{13} Bueno, este… son … lo que hicimos fue; **primero, hacer tres** [mueve la mano derecha en forma horizontal sobre la mesa] **tres techos iguales**… pero, **el resto de la casa diferente**… y así. Pero, como… y así lo hicimos… y lo hicimos así [toma unas tijeras y las juega en su mano] **y al último nos sobraron tres**, **uno de cada color** [señala las casas repetidas] y este… fui… y este… **y las juntamos como si fuera una casa, las últimas que quedaron** [mira a la entrevistadora].

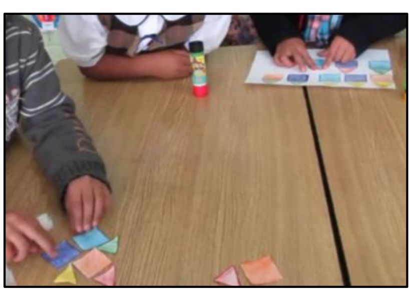


Figura 6.24. Construcción de una casa diferente con las tres casas repetidas que encontraron los alumnos de 4º grado en el referente **φ**.

6.4.2.2. Colocaciones. E^2_5 ilustró el referente **σ** que planteó al grupo de segundo grado (véase en la Tabla 6.10) con “más elementos de los necesarios para formar todas las combinaciones posibles" (English, 2005, p.129), aunque en este caso se trataba de colocaciones. El practicante utilizó dos faldas distintas y seis blusas, de estas últimas el doble de las dadas, lo que también confundió a los alumnos para identificar la aplicación del principio multiplicativo ($2 \times 3 = 6$), pues en su lugar E^2_5 anotó $2 \times 6 = 12$ (véase la Figura 6.25 y § 6.4.4.3).

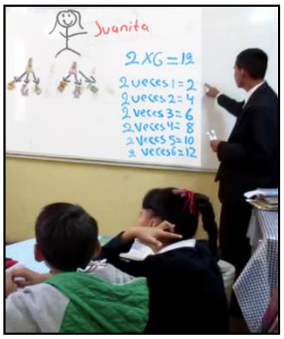


Figura 6.25. Diagrama de árbol y operación aritmética propuestos por E^2_5 a **σ**.

Con el referente **ω** (véase en la Tabla 6.11), los alumnos de segundo grado de E^1_{32} advirtieron que la tarea propuesta consistía en operar con los números disponibles:

E^1_{32} Hay una niña que se llama Rosita y si ella decide…, pasó a una tienda y compró estas dos playeras y compró estos dos shorts [muestra las figuras de las prendas de vestir a los alumnos]. ¿Cuántas combinaciones puede hacer?

A_1 **Una multiplicación**.

Para el referente **φ** (véase en la Tabla 6.10), E^2_9 no se percató de que a partir de todas las casas que construyeron los alumnos con las cantidades de material que ella les entregó podía atraer su atención a las condiciones (casas **diferentes**) que impuso la actividad: nueve casas distintas y tres casas repetidas. Durante la sesión de aula no se cotejó el número total de casas construidas con las condiciones del problema, sino que sólo se dejaron de lado las casas repetidas (véase la Figura 6.26).

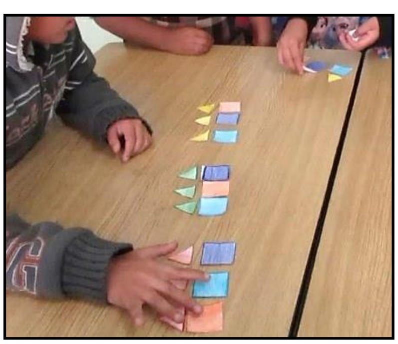


Figura 6.26. Casas construidas por los alumnos de 4º grado para el referente **φ**.

6.4.2.3. Selecciones. Con el referente **χ** (véase en la Tabla 6.11), los alumnos de 2º año de E^2_{16} no se plantearon si debían o no considerar el orden en la selección de las canicas: por ejemplo, si las canicas se regalaban una por una (seis posibilidades) o las dos a la vez (tres posibilidades), por lo que dieron las dos respuestas anteriores. La respuesta "de seis maneras distintas" era correcta porque no se podían repetir los colores de las canicas; la respuesta "de tres maneras" también era correcta al no considerar el orden; y la respuesta "de nueve maneras distintas" era correcta si se consideraba la repetición de color.

6.4.2.4. Combinaciones. Para identificar el número de combinaciones de dos de cuatro tipos de elementos en **ψ** (véase en la Tabla 6.11), ni los alumnos de segundo ni E^2_{16} señalaron que el orden era irrelevante ni si las crudités disponibles podían o no repetirse, es decir, si las bolsitas podían contener uno o dos ingredientes (cuatro posibilidades en el primer caso y seis en el segundo, con un total de 10 posibilidades), o necesariamente dos ingredientes.

I	¿Ésta [agarra una bolsa con jícama y naranja] cuenta? ¿Por qué?, ¿qué tiene?
AS	Jícama con naranja.
I	¿Cuántas bolsitas diferentes tuvieron?
AS	**Seis**.
I	Seis. ¿Y éstas? [señala unas bolsitas] ¿Por qué ya no [se refiere a las bolsitas que se repetían]?
AS	**Porque están repetidas**.
A_{17}	**Ya estaban repetidas** y no habíamos pensado…
I	Ahora sí. Ponemos atención a la maestra [se refiere a E^1_{16} que estaba dando indicaciones].

6.4.2.5. Permutaciones. Tanto los alumnos como E^1_{32} advirtieron tácitamente las dos variables implicadas en el referente **Ω** (véase en la Tabla 6.11), valor absoluto y valor posicional, aunque no todos los niños sabían leer o identificaban el número que encontraban (véase §6.4.3.1); en otras ocasiones sumaban o multiplicaban los dígitos entre sí, por ejemplo:

A_1	[Toma la tarjeta del cinco y del cuatro].
I	¿Qué número formaste?
A_1	**20**.
I	¿Se forma el 20? ¿Qué número formaste?
A_1	[Mira las tarjetas y comienza a contar con los dedos los dos números] **Nueve**.
I	No pido que lo sumes. Yo digo, ¿qué número es este? [señala las tarjetas que tiene A_1 en sus manos].
A_1	**4 × 5.**

A_1 dio evidencia de no comprender la instrucción, pues no dijo el nombre del número que formó con las dos tarjetas (la tarjeta del 4 y la tarjeta del 5), pues operó los dos dígitos y dio como respuesta el producto al multiplicar $\mathbf{4 \times 5}$. En un segundo momento, sumó los dos dígitos ($\mathbf{4 + 5 = 9}$). Lo anterior, se podría deber a que en la escuela primaria, desde primer año, se les enseñan primero las operaciones aritméticas (del bloque I al III) y posteriormente, tratan el valor posicional de las cifras (bloque IV, SEP, 2012e, pp. 84-85). En segundo grado, los alumnos realizan operaciones aritméticas en los bloques I y II, hasta el tercer bloque se les enseña "el valor posicional de las cifras en función de su posición en la escritura de un número" (SEP, 2012f, pp. 84-85).

6.4.3. Otros conceptos matemáticos

Todos los normalistas como los alumnos de segundo y tercer grados usaron una multiplicación o suma como operaciones aritméticas para resolver los problemas de principio multiplicativo planteados.

6.4.3.1. Número natural y sus operaciones. No todos los alumnos de segundo, tercero y cuarto grado reconocieron correctamente los números naturales de hasta dos y tres cifras usados en los problemas planteados. Por ejemplo, para el referente $\mathbf{\Omega}$ (véase en la Tabla 6.11) planteado a alumnos de segundo grado:

E^1_{32}	¿No? [toma la hoja de A^2_3], ¿qué otro número puedes encontrar? [está hablando con A_4].
A_4	**Siete y cinco**.
E^1_{32}	Siete y cinco. ¡Ponlo, aquí!
I	¿No te acuerdas ahorita cómo se llama [se refiere a como se lee y escribe el número 75]?
A_4	No.

Los alumnos de cuarto grado de E^2_9 tuvieron dificultades al multiplicar cantidades de dos cifras en los referentes $\boldsymbol{\pi}$ y $\boldsymbol{\rho}$ (véanse en la Tabla 6.9):

Q_1A_{12}	De acuerdo, **porque al multiplicar 18 por 15, mi compañero había dicho 170**, ¡ahí sí había duda! Entonces, **ya después de que hizo la operación se dio cuenta** [de] **que el resultado era 270**.
$Q_1A^4_{10}$	¡Ah! **Me equivoqué, porque aquí** [señala la multiplicación que hizo en su libro], **en la multiplicación**, aquí [señala el 90 que resultó de multiplicar 18 por 5], **como era nueve, aquí es más** [escribe un signo de más].
I	Mmmjú.
$Q_1A^4_{10}$	**Y es nueve más ocho; como es nueve más ocho, entonces, son 17 y una que llevamos**, no lo pasamos, pero… **y una que llevábamos son dos, ¡270!, no lo anoté**.
$Q_1A^4_{13}$	No incluyó el que llevaba.

E^2_5, E^1_{45}, y E^1_{32} efectuaron operaciones aritméticas correctas, aunque en el caso de E^2_5 no hubieran correspondido a los referentes que planteó él, como ya se señaló en § 6.4.2.2. Los alumnos de los grados segundo y tercero realizaron multiplicaciones o sumas reiteradas de manera correcta, por ejemplo, para el reactivo **τ** (véase en la Tabla 6.10):

E^1_{45}	Ese es el barquillo, ¿eh, chicos? ese es el sabor del barquillo. Entonces, **con cuatro** [anota en el pizarrón]… A ver, A_4, **¿cuántas combinaciones hicimos en total con los barquillos?** [se dirige al alumno y señala lo que está preguntando en el pizarrón].
As	**Dieciséis**.
E^1_{45}	**Dieciséis**. A ver, vamos a ver si es cierto. Vamos a poner aquí dieciséis [anota en el pizarrón] **¿Por qué dieciséis?** [se dirige a los alumnos].
A_4	**Porque cuatro por cuatro son dieciséis** [alza la mano e indica el número cuatro con los dedos de la mano].

6.4.4. Recursos semióticos

A pesar de que los normalistas usaron diferentes recursos semióticos, no interpretaron ni reconocieron todos los que usaron los alumnos para dar respuesta a problemas combinatorios.

6.4.4.1. Lengua natural escrita. En lugar de representar en el pizarrón o en alguna hoja de control para cada niño el enunciado correctamente redactado del referente propuesto, para que tanto los normalistas como los alumnos lo revisaran puntualmente cuantas veces fuera necesario, los futuros docentes descuidaron la redacción o sólo pegaron en el pizarrón ilustraciones alusivas a él (E^1_{45} y E^2_5) o las trazaron (por ejemplo, véase la Figura 6.25), para que los alumnos respondieran a las preguntas planteadas (véanse en la Tabla 6.10 y en la Tabla 6.11). Tal ausencia del referente en memoria pudo haber dificultado que los alumnos (y el o la normalista) advirtieran lo que habría que tomar en cuenta, como ya señalamos en el apdo. 6.4.1: tipo de arreglo, tipos de atributos a considerar, número de elementos de cada tipo, repetición o no, con o sin orden, distinguibilidad o no, con o sin exclusión. Esa ausencia también pudo haber dificultado notar la correspondencia entre el referente, el procedimiento seguido y la respuesta a la pregunta planteada. Además, el cotejo del resultado y el enunciado escrito del referente respectivo hubiera promovido la escritura de respuestas completas, no solamente del resultado de las operaciones efectuadas.

6.4.4.2. Diagrama de árbol. Para el referente **σ** (véase en la Tabla 6.10), E^2_5 mostró dificultades para interpretar correctamente un diagrama de árbol en términos del principio multiplicativo, dado que en su enseñanza misma comenzó por ilustrar con las blusas (tres) las ramas terminales (seis), para luego agregar las faldas (dos) para las ramas de primer orden y multiplicar el número de ramas terminales por el número de ramas de primer orden, por lo que obtuvo $6 \times 2 = 12$, en lugar de simplemente contar las ramas terminales y justificar el resultado con el producto del número de elementos de un tipo por el número de elementos del otro tipo, $3 \times 2 = 6$. Esto ocasionó que el principio multiplicativo tampoco fuera claro para los alumnos de segundo grado (véase la Figura 6.25). De acuerdo con Dreher y Kuntze (2015), de haber interpretado correctamente el diagrama de árbol, E^2_5 habría mostrado a los alumnos dos representaciones de un mismo objeto matemático; primero, le faltó analizar el referente que propuso y, luego, desconoció la derivación de la expresión aritmética del principio multiplicativo a partir del diagrama de árbol. Su estrategia falló por desconocer el contenido matemático.

6.4.4.3. Figuras. E^2_5 presentó figuras recortadas de *blusas y faldas* de distinto color para adherirlas al pizarrón, pero el reducido tamaño del material no era el apropiado para esa área de adhesión, sino para los cuadernos de los alumnos (véanse la Figura 6.25 y la Figura 6.27).

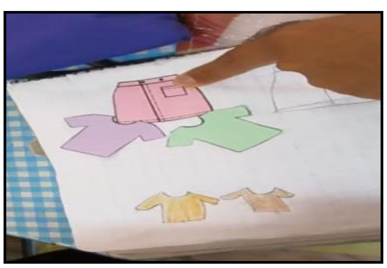


Figura 6.27. Diagrama de prendas de vestir propuesto por alumnos de 2º grado al referente **σ**.

Los alumnos de segundo grado imitaron el proceso de solución que E^1_{45} y E^2_{16} mostraron en el pizarrón (véase la Figura 6.28 y la Figura 6.29), lo que podría ser el inicio de que “los aprendices aprenden al trabajar junto con sus maestros al observar lo que éstos hacen” (Hogarth, 2001, p. 284).

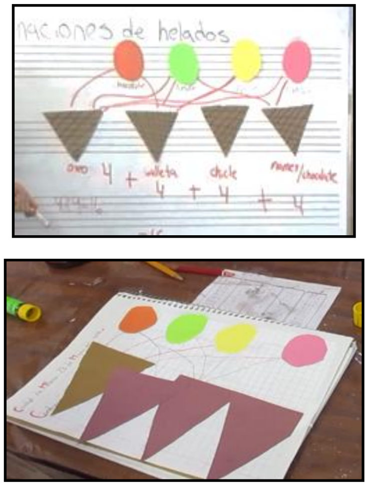


Figura 6.28. Diagrama propuesto al referente **τ** por E^{1}_{45} y copiado por sus alumnos.

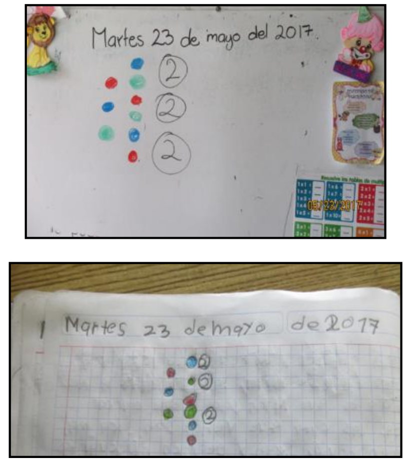


Figura 6.29. Diagrama propuesto al referente **χ** por E^{2}_{16} y copiado por sus alumnos.

Para el referente **υ** (véase en la Tabla 6.10), A_1, de tercer grado, por iniciativa propia trazó un diagrama de árbol (véase la Figura 6.30) para mostrar las seis posibilidades de platillos con las opciones de guisados y postres dadas. Su recurso parece haber sido a nivel de experiencia, según Andrà (2011) ha planteado este tipo de recurso. Además, A_1 orientó a su compañera de mesa, A_{12}, en el trazo de un diagrama (véase la Figura 6.31) para responder la pregunta planteada.

Figura 6.30. Diagrama de árbol trazado por A_1 (alumno de 3^er^ grado) al referente **υ**.

Figura 6.31. Diagrama trazado por A_{12} (alumna de 3^er^ grado) al referente **υ**.

6.4.4.4. Tabla de doble entrada. Para el referente **φ** (véase en la Tabla 6.10), E^{2}_{9} preparó casas diferentes para que las contaran. Luego, organizó por tipos en una *tabla de* *doble entrada* (véase la Figura 6.32) los elementos dados para que los alumnos de 4º grado realizaran la multiplicación correspondiente (véase la Figura 6.33) y se percataron del mismo resultado con el conteo. Después contestaron las preguntas de los referentes $\boldsymbol{\pi}$ y $\boldsymbol{\rho}$ del libro de texto (véase la Figura 6.33). Los alumnos de 3° a cargo de E^2_5 también completaron la tabla para el referente ξ (véase en la Tabla 6.9), por lo que la actividad derivó en completar tablas. Sin el análisis del referente, la compleción de tablas se limita a promover un enfoque determinista (Heitele, 1975).

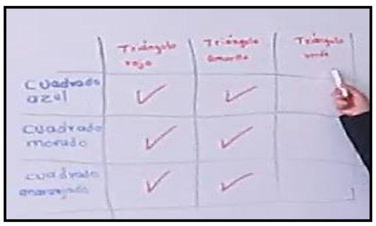


Figura 6.32. Tabla de doble entrada propuesta por E^2_9 en el referente $\boldsymbol{\varphi}$.

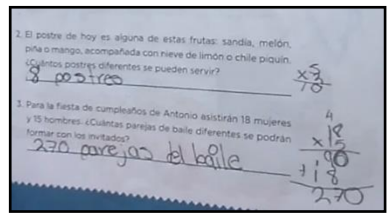


Figura 6.33. Multiplicaciones por alumnos de 4º grado para resolver los referentes $\boldsymbol{\pi}$ y $\boldsymbol{\rho}$.

6.4.4.5. Listados. E^1_{32}, E^2_{16} y sus grupos de alumnos realizaron en ocasiones *listados* incompletos o incorrectos (Lockwood y Gibson, 2016), dado que al igual que E^2_5 (con el diagrama de árbol) repetían opciones (véase la Figura 6.34).

6.4.4.6. Símbolos numéricos (suma reiterada o multiplicación). Los alumnos de segundo grado a cargo de E^1_{32} usaron correctamente símbolos numéricos para resolver los referentes $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\Omega}$ (véanse en la Tabla 6.11 y la Figura 6.34).

6.4.5. Términos empleados

Los alumnos utilizaron algunos términos, como *posibilidad*, que los normalistas no sólo no consideraron, sino que los que usaron revelaron confusiones, como *combinaciones* al responder a problemas que plantearon que no correspondía a ese tipo de arreglo.

6.4.5.1. De cuántas formas, cuántas maneras diferentes o distintas, cuántos números diferentes y qué combinaciones. Los alumnos de segundo grado a cargo de E^1_{45} identificaron los términos de *cuántas formas* y *qué combinaciones* de sabores de helado sin dificultad. Al contrario, para E^2_9 fue difícil identificar el número de *casas diferentes* que se podían construir con los elementos dados en el referente **φ** (véase en la Tabla 6.10), pues el término no estaba en el enunciado; sin embargo, surgió al construir las casas con el material.

E^2_{16} y E^1_{32}, al igual que los alumnos de segundo grado, dotaron correctamente de sentido a las expresiones *Cuántas maneras diferentes o distintas, cuántos números diferentes* para los referentes **χ**, **ψ**, **ω** y **Ω** (véanse en la Tabla 6.11). Sin embargo, hizo falta aclarar el término *repetición* para que los alumnos identificaran en qué caso era correcta cada una de las respuestas que dieron, como se señaló en § 6.4.2.3, § 6.4.2.4 y en § 6.4.2.5.

6.4.5.2. Posibilidad. Los alumnos de cuarto y segundo grado utilizaron el término *posibilidad*. Por ejemplo, para el referente **φ** (véase en la Tabla 6.10) propuesto por E^2_9:

I	Entonces ¿**éstas** [señala las tres casas repetidas] **ya no son** [es] **posibles** [posible] **pegarlas**?
Q_3A_2	**No, ya no**.
I	¿Ya no?
Q_3A_2	**Se me acabaron las […]**.
I	Se acabaron las ¿qué?
Q_3A_2	**Las posibili… ¡ay, no!**
I	**Las posibilidades** [A_1 dice posibilidades a coro con la Investigadora y A_2 se ríe].
Q_3A_2	Es que me trabo [sigue reclinado sobre la mesa].

Los alumnos de cuarto grado pudieron distinguir entre los casos favorables y los desfavorables de la construcción de casas que se tenían en el referente **φ** (véase en la Tabla 6.10). La *decisión* entre dos o más posibilidades es la puerta al razonamiento probabilístico (Piaget e Inhelder, 1951) al diferenciar la parte favorable y el total de posibilidades; si bien, no hubo azar en el referente, pero sí permitió a los alumnos tomar decisiones.

6.4.5.3. Combinación. E^1_{32} en el referente **Ω** (véase la Tabla 6.11), usó el término *combinación* en el sentido de coordinar elementos de distinta naturaleza para favorecer el aspecto estético y no con el fin de identificar las distintas maneras de colocar dos elementos, uno de un tipo (blusa) y otros de otro tipo (short).

El título de la Lección 13, "Combinaciones", de cuarto grado (SEP, 2014d, p. 31) es incorrecto dado que los problemas **ο**, **π** y **ρ** (véanse en la Tabla 6.9) se refieren a colocaciones y no a combinaciones.

6.4.5.4. Cifra, dígito y número. El término *dos cifras* fue cambiado por *número*, y el de *dígito* por *número*, causando confusiones en $A_{\#}$ (6 años de edad), alumna de segundo grado de E^1_{32}; sin embargo, $A_{\#}$ nombró correctamente el número de tres cifras que iba identificando en el orden de las tres tarjetas.

E^1_{32}	El cuatro. **Tenemos tres números** [dígitos] y tenemos que formar **números** de … ¿**cuántas cifras**?
$A_{\#}$	Son **quinientos setenta y cuatro.**
E^1_{32}	**Números de ¿cuántas cifras?**
A^2_3	De **dos**.
E^1_{32}	De **dos cifras** ¿es así? [enseña la tarjeta del cinco y del siete], **nada más de dos**. Puede ser el **cuatro con el siete** [enseña las tarjetas que va diciendo], el **siete con el cinco**. ¿Cuántas…?
A^2_3	**57**.
E^1_{32}	¿Cuántos **números diferentes** se pueden hacer con estas [enseña las tarjetas]? A ver…
$A_{\#}$	**Quinientos cincuenta y siete**.

6.4.5.5. Regalar dos, colocar dos. E^2_{16} y sus alumnos identificaron correctamente los términos *regalar dos* (canicas), o colocar *dos frutas o verduras* en cada bolsita para cada uno de los referentes que se les planteó.

6.4.5.6. Diferentes. El término se usó en los referentes **Ω** (2º año), **o** (3er año), **π**, **ρ** y **φ** (4º año) y se interpretó como la no repetición de los elementos o de sus variables como ya se señaló en §6.4.2.2, §6.4.2.3, §6.4.2.4 y §6.4.2.5.

Para el referente **υ** (3er año, véase en la Tabla 6.10), el término "diferentes" estaba de más, dado que los postres y los guisados no podían repetirse.

6.4.5.7. Distintas. Para los referentes **χ**, **ψ** y **ω** (véanse en la Tabla 6.11) de segundo grado el término "distintas" califica a los verbos "vestir" y "comprar" y no al arreglo de los elementos.

6.4.6. Dimensión Didáctica: Tipo de interacción y Triángulo Epistemológico

En términos generales y de acuerdo con Jacobs y Ambrose (2003), E^1_{32} al inicio de la enseñanza llevó a cabo una *interacción observacional* pues sólo revisaba que los niños dieran una respuesta (6 números diferentes) al referente **Ω** planteado.

En esa misma sesión, I interactúo con A^2_3:

I	**¿De cuántas maneras puedo contestar este problema?** [señala el referente **Ω**].
A^2_3	**De … doooos**.

I ¡De dos! ¿Por qué de dos?

A^2_3 [Ve su hoja] **Porque está** [señala su listado] **la de no repetir números y la de repetir números**.

I Exactamente, porque tenemos una [señala el primer listado de A^2_3] donde podemos repetir números y tenemos otra, en donde no podemos repetir números [señala el segundo listado de A^2_3]. Ok.

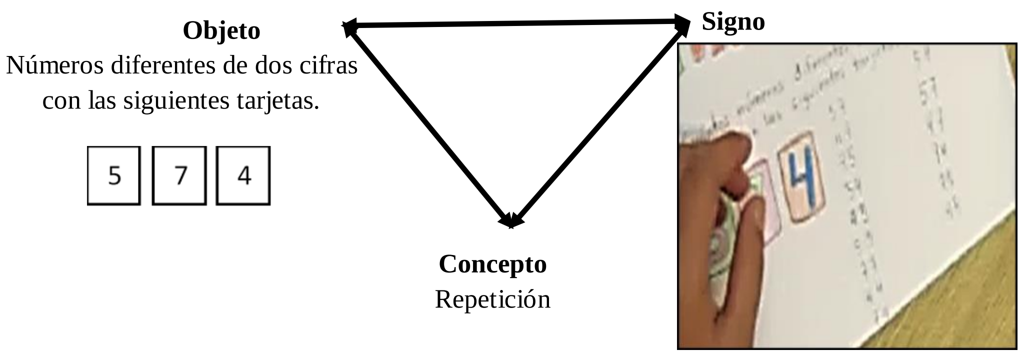


Figura 6.34. Dos soluciones propuestas por A^2_3 al referente **Ω**.

La comunicación que estableció I con A^2_3 posibilitó identificar la repetición, o no, en el referente **Ω**, dado que no se especificó si los dígitos de las tarjetas podían o no repetirse, es decir, el referente no condicionó la repetición.

A^2_3 estableció una doble interacción entre el objeto (5, 7, 4) con el signo (listado de opciones) para comprender el valor relativo de un número con tres cifras sin considerar la repetición de dígitos (seis opciones) de la que si repitió dígitos (nueve opciones). E^1_{32}, al percatarse de ello, hizo lo mismo que I con el resto de los alumnos. Esto manifiesta la necesidad de que los futuros docentes sean realimentados por un investigador, por su mentor o su tutor de primaria, al practicar su enseñanza y posteriormente a ella.

De la intervención de I con A^2_3, E^1_{32} aprendió que era posible que los alumnos dieran dos respuestas correctas a la pregunta del referente **Ω** que les planteó (véase la Figura 6.34). Por lo anterior y en términos generales de acuerdo con Jacobs y Ambrose (2003), E^1_{32} llevó a cabo una *interacción exploratoria* del principio multiplicativo con sus alumnos (véase el apdo. 6.4.2) pues consideró las repeticiones de dígitos al anotar números de dos cifras:

E^1_{32} ¿**Ya no te pueden salir otros números**? [pregunta a A_5].

A_5 [Toma su hoja y la observa].

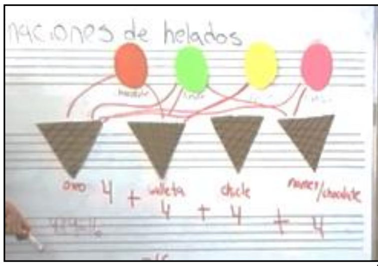
E^1_{32} ¿**Ya no te pueden salir otros números**? [vuelve a preguntar a A_5, se percató que falta el 74].

La interacción de E^2_9 con los alumnos reveló una transición de *observacional* a *exploratoria* de la enseñanza del principio multiplicativo, ya que con el material que proporcionó a los niños para el referente **φ** (véase en la Tabla 6.9) se podían obtener dos respuestas (12 casas si se repetía el color y nueve casas si no). El material propició la reflexión de las dos posibilidades (número total de casa o número total de casas distintas), lo que pudo haber favorecido la construcción del concepto de permutación con o sin repetición de los elementos de dos tipos distintos para una colocación (véase § 6.4.2.2.), ya que los alumnos pudieron identificar más fácilmente las diferencias (casas de color distinto) que las identidades (casas de color repetido, véase la Figura 6.26).

E^1_{45}, E^2_5 y E^2_{16} llevaron a cabo una *interacción observacional* del principio multiplicativo pues se limitaron a ir observando los procedimientos de los alumnos al resolver los problemas planteados e ir preguntándoles acerca de ellos. Por ejemplo, en su segunda sesión (con tercer grado), E^2_5 se puso nervioso ante la presencia del director, de la secretaria de la escuela y de la tutora del grupo, por lo que I tuvo que conducir parte la sesión. E^2_5 no favoreció el trazo del diagrama de árbol que propuso A_1 y sólo compartió la estrategia con A_{12} (véase § 6.4.4.2, la Figura 6.30 y la Figura 6.31). E^1_{45} mostró confusión respecto al referente **τ** (véase en la Tabla 6.10) que planteó a los alumnos de segundo grado, por lo que el diagrama que trazó no correspondió a la respuesta correcta de combinación, es decir, no consideró la *mezcla* de las bolas de helado de diferente sabor en los conos dobles de diferente sabor (véase la Figura 6.35).

La respuesta de A_4, ocho combinaciones (*mezclas*), sólo consideró los cuatro sabores de helado y que en cada cono se podían colocar dos sabores. Omitió que cada cono también era de diferente sabor, por lo que su respuesta fue incorrecta. Además de que E^1_{45} no precisó si los sabores (variable del referente **τ**) podían repetirse o si importaba o no el sabor que se colocaba primero.

Significador



Significado

E^1_{45}	Me dijo que de qué quería mi helado, y me dijo "tengo estos sabores: **chocolate, limón, fresa, mamey, piña, vainilla, chicle y de cereza**" [señala en el pizarrón].
E^1_{45}	Pero sólo tiene cuatro, **cuatro conos; y esos cuatro conos son de diferente sabor: de oreo —me dijo que tenía uno de oreo— uno de chocolate, uno de vainilla**. [Toma el material] Uno de oreo, uno de chocolate, uno de vainilla y un cono natural. Entonces, quiero que ustedes me ayuden a ver cuántas combinaciones posibles puedo tener de helado [corta cinta adhesiva].
A_4	Maestro, de 8.
E^1_{45}	Permítanme tantito, **vamos a escoger cuatro sabores, vamos a dejar cuatro sabores**, chicos [alumnos] [continúa pegando el material].
E^1_{45}	A ver, chicos [alumnos] vamos a ponerle los sabores, sólo vamos a dejar **cuatro sabores: chocolate, limón, fresa…** ¿qué quieren? ¿Chicle? [señala en el pizarrón].

Figura 6.35. Inconsistencia en la cantidad de sabores de helado propuestos por E^1_{45} en el referente $\boldsymbol{\tau}$.

E^2_{16} no estaba segura de cada una de las respuestas correctas a los referentes $\boldsymbol{\chi}$ y $\boldsymbol{\psi}$ (véanse en la Tabla 6.10), pues incluso MT^{16}_7 acudió con sus compañeras de sexto grado para que le aclararan la respuesta correcta al referente $\boldsymbol{\chi}$ planteado por E^2_{16} (véase la Figura 6.36), pues consideró incorrecta la respuesta de seis maneras distintas de regalar dos canicas de un conjunto de tres. Lo mismo sucedió con el referente $\boldsymbol{\psi}$ de la colocación de las frutas y verduras al identificar seis, doce y dieciséis maneras distintas de llenar las bolsitas. Ante esto, I intervino y concluyeron que las respuestas eran correctas (seis o doce maneras distintas) dependiendo de si consideraban que las frutas, las verduras y los tubérculos podían o no repetirse, e incluso otra respuesta correcta eran 16 maneras distintas si se consideraba la repetición y el orden de las crudités.

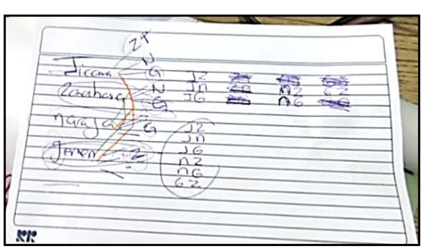


Figura 6.36. Diagrama de árbol y listado propuestos por MT^{16}_7 al referente $\boldsymbol{\psi}$.

6.4.7 Resultados del análisis

De acuerdo con Scheiner (2015), se requiere que los normalistas conozcan y prevean el tipo de dificultades (dimensión epistemológica) que pueden tener los alumnos de primaria al tratar los referentes de técnicas de conteo (principio multiplicativo), además, deben considerar todas las representaciones que pueden proponer los alumnos de primaria según el tipo de operación combinatoria de que se trate (dimensión didáctica); ya que los alumnos de 2° y 3°, así como E^2_{5}, E^2_{16} y E^1_{45}, trazaron diagramas de árbol para dar respuesta a las preguntas planteadas. Heitele (1975) señala que el diagrama de árbol es una estrategia importante porque prefigura todos los posibles resultados de un experimento. Aunque E^2_9 y E^1_{32} usaron por lo menos tres tipos de recursos semióticos (de los siguientes: simbología matemática, tablas, gráficas y listados) para tratar el principio multiplicativo, privilegiaron la operación aritmética (multiplicación) como la estrategia más fácil.

Resulta necesario enseñar a los futuros docentes la unidad dos “Probabilidad y muestreo” antes de realizar las prácticas docentes, para robustecer su conocimiento sobre las técnicas de conteo (Dimensión cognitiva), en específico, el principio multiplicativo que se trata en segundo año de primaria.

Conviene señalar a los docentes en formación la importancia de la comunicación escrita en la clase de matemáticas, en particular en la enseñanza de conceptos de estocásticos, dado que, como lo señala Atieri (2010, citado en Santos y Semana, 2014), “en general los docentes de matemáticas no integran la escritura a su práctica común” (p. 84), además de que “no siempre reconocen la importancia de crear oportunidades de aprendizaje para que los estudiantes [y alumnos, en el caso de primaria] desarrollen la comunicación escrita” (Ntenza, 2006 citado en Santos y Semana, 2014, p. 84).

6.5 Entrevista sobre práctica docente de principio multiplicativo

Por las dificultades observadas en la enseñanza de principio multiplicativo, se entrevistó a E^2_5, E^2_9, E^2_{16} y E^2_{32} bajo las mismas condiciones descritas en el apartado 6.2.

6.5.1. Referentes

Los siete futuros docentes identificaron las dificultades que los referentes seleccionados por ellos revistieron para los alumnos de primaria. Por ejemplo, para el referente **φ** E^2_9 identificó las dos preguntas que podía plantear a los alumnos para que respondieran correctamente (véase en la Tabla 6.10):

I	¿Qué variación hubieras dado al problema para tomar como respuesta correcta las doce casas que construyeron los alumnos?
E^2_9	El simplemente decirles **¿cuántas casas se pueden construir** [con el material que se les entregó]**?**, sin necesidad de que sean diferentes o no.

E^2_{16} reconoció que no redactó ni anotó correctamente en el pizarrón el referente **χ** (véase en la Tabla 6.11) que planteó al grupo de segundo grado para tratar el principio multiplicativo:

I	[…] Quiero que me expliques, por favor, ¿qué respuesta es correcta y por qué?
E^2_{16}	Pienso que no hay respuesta correcta, porque después me di cuenta de que el planteamiento del problema no fue el correcto.
I	¿Por qué?
E^2_{16}	Porque no especifiqué si se podían **repetir** las canicas o, más bien, que [si] el **acomodamiento** de las canicas no valía o sí valía. Ese era el sentido, porque si hubiera especificado bien en la pregunta, **sin repetir** en las **combinaciones**, no hubieran sido seis **combinaciones**, hubieran sido tres **combinaciones**.

6.5.2. Ideas fundamentales de estocásticos

Como ya señalamos en la sección 6.2, al enseñar el principio multiplicativo, a E^2_5, E^2_9, E^2_{16} y E^1_{32} les fue difícil identificar la estructura (bidimensional o tridimensional (English, 2005), entendiendo por dimensión la cantidad de objetos de diferente tipo señalados en el referente) del problema combinatorio, así como si los objetos eran distinguibles o no, o si podían o no repetirse.

6.5.2.1. Combinatoria. Para el referente **χ** (véase en la Tabla 6.11) de ***selecciones*** de dos objetos de tres objetos distinguibles con o sin orden, E^2_{16} se mostró insegura al preguntarle acerca de las respuestas que dieron ella y MT^{16}_7. E^2_{16} poco a poco aclaró la repetición y no repetición de color de las canicas, además de su orden para identificar y justificar las respuestas correctas que dieron los alumnos.

I Entonces, ¿cuál habría sido la respuesta al reactivo que tú planteaste?

E^2_{16} Mmm…, no recuerdo cuál era la pregunta.

I Tenías tres canicas [e] ibas a regalar dos. ¿De cuántas maneras distintas las podrías regalar? En palabras gruesas, porque sí había una redacción no muy clara en el reactivo. A lo que te puedo recordar rápido es eso: tres canicas, una azul, una verde y una roja. ¿De cuántas maneras las podrías regalar si ibas a regalar dos?

E^2_{16} Mmm…, ¡ajá! Yo ya especifiqué: **si va a ser regalo, pues obviamente al niño no le vas a regalar la misma combinación, pues sólo eran tres combinaciones**.

I ¿Las puedes escribir [se refiere a las tres combinaciones que dijo E^2_{16}]?

E^2_{16} Sí, este…, sería roja y verde [los escribe en la hoja] roja y negra, verde y negra.

I ¿Esa hubiera sido la respuesta correcta al planteamiento que hiciste?

E^2_{16} Sí.

En su especificación, E^2_{16} se percató de que las combinaciones posibles de tres objetos tomados de dos en dos eran tres si se precisa que no se puede repetir el color y no importa el orden de las canicas.

6.5.2.2. Permutaciones. E^1_{32} no se percató de la tridimensionalidad (English, 2005) del referente **Ω** (véase en la Tabla 6.11) que propuso, ni consideró la posibilidad de repetición de los dígitos para identificar todas las posibilidades para escribir un número de tres cifras:

I ¿Recuerdas qué estaban haciendo? [se refiere a los listados que estaban haciendo los alumnos] este… ¿cuántos números distintos de tres dígitos podían escribir? ¿Cuántas respuestas puedes encontrar a ese referente? ¿Cuántas respuestas encontró la niña, te acuerdas?

E^1_{32} Sí. **Encontró más porque las indicaciones** que puse…, en las instrucciones [se lleva la mano izquierda a la mejilla del mismo lado] **no especifiqué que no podían repetir el número**. Entonces, **ella** [se refiere a la alumna] **sacó la conclusión de que sí podía hacerlo**, ¿no? Creo que entonces, sí estaba bien, pues porque yo no había puesto la indicación. Pero…, este, mmm, **no sacó todas las posibles repitiendo números**, solamente algunas…, **algunos números los repitió, pero podía haber repetido más veces y no lo hizo**.

I ¿Cuántas hubieran sido las respuestas correctas?

E^1_{32} ¿Cuántas? Mmm…, ¿**si hubiera repetido todos** [los dígitos]?

I ¡Ajá!

E^1_{32} ¡Mmmm, no! A ver [toma una hoja y un lápiz y comienza a escribir, escribe los números 3, 2 y 6] **eran tres números nada más** y este…

I ¿Cuál hubiera sido la respuesta si no puede repetir dígito [E^1_{32} voltea a ver a I]? y ¿Cuál hubiera sido la respuesta si puede repetir dígito?

E^1_{32} **Repetir dígito** [mira la hoja y escribe: tres]. Bueno, **si no puede repetir, la respuesta sería tres…, ¡nueve! Nueve números diferentes.**

I ¿Por qué?

E^1_{32} **Porque multiplicamos este…** [señala con el lápiz cada uno de los dígitos], estos **tres números por la cantidad** de… **de dígitos que se pueden**... Entonces, **tres por tres serían nueve**. ¡Ajá, nueve [escribe el 9 en su hoja]! **Nueve números diferentes si no se pueden repetir** [mira a I]. Pero, **si se pueden repetir**… Entonces, **serían nueve más**..., este… a ver [escribe en la hoja a la vez que habla] **nueve, más tres, tres.** Bueno, por ejemplo, si repet…, ¿**También se puede repetir tres veces el mismo**? [mira a la I] o sería, **tres, tres, tres**; **seis, seis, seis**; **dos, dos, dos.**

I ¿Sería posible? Tú dime.

E^1_{32} Sí. Bueno, es que si se puede rep…, o sea, es que la indicación no era eso, porque... Bueno, **si ya no se podría resolver con el principio multiplicativo que vimos en un principio.** Pero, mmm…, si en la instrucción no venía eso. Pues… Entonces, los niños podían haber hecho eso. Bueno, esas hubieran sacado también esa conclusión y hubieran hecho otros procedimientos.

I ¿**Por qué no se podría resolver por una multiplicación** [se refiere al referente **Ω** que planteó E^1_{32}]? [E^1_{32} mira a la investigadora]. **Lo que me estás diciendo es que "si multiplicaras tres por tres y …" ya no sé, ¿cómo le harías en el tercero** [se refiere al tercer dígito]**?**

E^1_{32} Bueno, esa sería la primera [anotó 336, 332, 333], pero luego también ocupando el tres se puede hacer que primero sea…, el seis, luego el dos, ¡ah, no!; el tres otra vez. Es que creo que **serían demasiadas posibilidades** [mira a la investigadora] **las que se podrían hacer**.

I ¿Serían demasiadas [se refiere a todas las posibilidades de cantidades que se pueden escribir con los tres dígitos]?

E^1_{32} Bueno, no infinito, pero **serían demasiadas y no sé cómo sacarlo así**, en [mira a la investigadora] **forma de multiplicación** [mira a la investigadora, regresa la mirada a su hoja].

E^1_{32} sobreestimó (Tversky y Kahneman, 1973) la cantidad de los posibles números que podía formar con tres dígitos y no consideró sólo las dos cifras que solicitó a los alumnos de 2º grado durante la enseñanza (véase § 6.4.5.4).

De acuerdo con Tversky y Kahneman (1973) "por la facilidad con la que vinieron a la mente de [E^1_{32}] los casos relevantes" (p. 221) de los números con o sin repetición de dígitos, es decir, por la heurística de disponibilidad, la normalista contestó que eran nueve números distintos si no se repetían dígitos, cuando esa fue la respuesta que dio A^2_3 al identificar que se podían repetir los tres dígitos para formar números de dos cifras; lo que pudo evidenciar que E^1_{32} "conservó cierta información sobre las apariciones específicas de elementos repetidos" (Tversky y Kahneman, 1973, p. 221) que identificaron sus alumnos. Sin embargo, E^1_{32} no mostró dominio de alguna estrategia para dar respuesta a la pregunta del referente **Ω** (véase en la Tabla 6.11), pues su enseñanza del principio multiplicativo se centró en el aspecto aritmético.

E^1_{32} sólo identificó las tres posibilidades de repetición de los tres dígitos al escribir: 333, 666 y 222, pero no consideró las 18 posibilidades cuando un dígito se repite y otro no (por ejemplo: 223, 226, 232, 262, 322, 622) ni los seis números de tres cifras distintas para identificar los 27 números de tres cifras que se pueden formar considerando que los tres dígitos (2, 3 y 6) se pueden repetir.

Para E^2_5, E^2_9, E^2_{16} y E^1_{32} fue difícil distinguir el papel del *orden* al seleccionar, colocar o permutar los elementos de los conjuntos que se plantearon en los referentes. Por ejemplo, respecto al referente χ (véase en la Tabla 6.11):

Significador

I ¿Qué condiciones debería tener el referente para que esta respuesta fuera correcta [señala la primera fotografía donde obtuvo seis maneras distintas de regalar dos canicas]?

E^2_{16} **Si hubiera puesto “lo regaló” …, tal vez; si hubiera puesto “¿cuántas combinaciones diferentes si tu tuvieras una…?” … ¿Cómo se les dice a las esas, cuando sacan…?**

I ¿Urna?

E^2_{16} Sí, urna. Una urna llena de canicas y este… ¿cuántas combinaciones diferentes se podrían formar?… pero no, no…, no, porque creo que sería lo mismo, porque serían **las mismas combinaciones, pero diferente lugar**.

I ¿Qué estás considerando aquí [se refiere a la explicación que está dando E^2_{16}] como respuesta?

E^2_{16} **¿Yo? El lugar**.

I **¿Qué es el lugar?**

E^2_{16} **Bueno, el lugar en el sentido de qué color es primero y qué color es después**.

I ¿Cómo se le llama a eso [se refiere a lo que dijo E^2_{16} “qué color es primero y qué color es después”], matemáticamente?

E^2_{16} Mmm…, no me acuerdo; este, mmm…, algo del producto, ¿no? Sólo se modifica… algo así…, del producto no me acuerdo, sólo se modifica…, o sea que el resultado es el mismo y sólo está modificado el lugar en el que se encuentra.

Significado

Figura 6.37. Inadvertencia del papel del “orden” por E^2_{16} en el referente χ.

E^2_{16} no consideró el *orden*, sino que en una distribución figural se refirió a “diferente lugar”, a la que luego atribuyó, aparentemente, una temporalidad: “qué color es primero y qué color es después”, sin que hubiera proporcionado algún indicio de haberse percatado de ello. Sus respuestas en la entrevista, en consonancia con su desempeño en la práctica en el aula (véase en el apdo. 6.4.1 y en el apdo. 6.4.5) señalan la necesidad de fortalecer, por lo menos, su conocimiento del principio multiplicativo y de tipos de arreglos antes que intente su enseñanza, pues se desaprovechó la oportunidad de introducir el primero y se le limitó en el aula a un tratamiento puramente operativo.

6.5.3. Otros conceptos matemáticos

En su enseñanza, los normalistas identificaron a la multiplicación como operación para resolver problemas combinatorios.

6.5.3.1. Operación aritmética. E^2_5, E^2_9, E^1_{32} identificaron a la multiplicación como la estrategia más fácil para resolver problemas combinatorios e incluso fue el objetivo que persiguieron en la enseñanza del principio multiplicativo. Por ejemplo, para los referentes **ω** y **Ω** (véanse en la Tabla 6.11):

I	OK. ¿Cuál fue el objetivo de la enseñanza del principio multiplicativo, en segundo [grado]?
E^1_{32}	Mmmm, ahí era que ellos **pudieran resolver un problema**… así… [levanta más su cuerpo de la mesa y mueve las manos conforme va hablando], **de combinaciones con ayuda de las multiplicaciones**. Que ellos ya… como que… ¡eh!, tenían ese concepto… ¡eh!, anteriormente ya lo habíamos trabajado.

La normalista reconoce haber dado mayor énfasis al conocimiento de cálculo (Pollatsek, *et al*., 1981) que al funcional o analógico; es decir resolver los problemas planteados únicamente con la multiplicación.

I	En esta ocasión, ¿qué fue lo que falló para que encontraras las doce maneras de vestir y no las seis que querías?
E^2_5	¡Ah! Fue… de hecho…, ya tenía en mente…, y fueron los nervios de que se me ocurrió poner otros al lado [colocó más blusas de las necesarias] y fue cuando me di cuenta y dije chi…, ¡ya la regué! Fue en ese momento que me ganaron los nervios y aparte ya no podía decirle nada a los niños, cambié la dinámica [inaudible].
I	¿Cuál hubiera sido la multiplicación correcta para este ejercicio?
E^2_5	Los niños conocen lo que es la **suma iterada**, pero para no realizar todo ese procedimiento, lo más fácil fue decirles a los niños que realizaran **la multiplicación normal** que es $3 \times 1 = 3$, $3 \times 2 = 6$, etc. Nada más que me fui con ellos con la **multiplicación** porque ellos la identifican más…, porque ellos dicen cuál es la del signo mágico donde puede realizarse más sencilla la multiplicación y ya luego la ubican.

Los normalistas sólo identificaron las cantidades implicadas en cada referente para su tratamiento aritmético, sin identificar el tipo de arreglo combinatorio planteado en el problema debido a su conocimiento deficiente del tema.

6.5.4. Recursos semióticos

De acuerdo a Andrà (2011), los siete normalistas pusieron en juego recursos semióticos a nivel de experiencia (tablas de doble entrada, diagramas de árbol, listados), es decir, a nivel del pensamiento aritmético (operaciones básicas, simbología numérica). E^2_5, E^2_7, E^2_{16}, y E^2_{24} no advirtieron la importancia de usar diversas representaciones para enseñar un concepto matemático (de estocásticos) a los alumnos de primaria.

6.5.4.1. Dibujos y figuras geométricas. En su enseñanza del principio multiplicativo, E^2_9 no reconoció para el referente **φ** (véase en la Tabla 6.10) que planteó las doce casas que construyeron los alumnos de cuarto grado, sólo consideró las nueve casas distintas:

I Ok. ¿Por qué no consideraste o aclaraste a los alumnos en tu sesión de principio multiplicativo que **había casas que se repetían?** ¿Recuerdas que te salían 12 casas? **Tres de ellas se repetían y nueve eran distintas**. Como que no le diste mucho auge [importancia] a que las casas se repetían, simplemente como que las hicieron a un lado. ¿Por qué?

E^2_9 Mmm… pues yo creo que me centré simplemente en eso; **en que sólo son diferentes sin importar** [que se podían construir 12 casas]. O sea, como ellos [se refiere a los alumnos] tampoco nunca me preguntaron…, porque **nunca se me ocurrió decírselos**.

Con el comentario de E^2_9 confirmó que su enseñanza sólo se centró en identificar las diferencias y no las similitudes de las casas; quizás se deba a que es más fácil identificar lo diferente que lo igual; otra dificultad pudo ser su desconocimiento del uso del material concreto propuesto para realizar el tipo de arreglo que implica el referente. Lo anterior resalta la necesidad de fortalecer la dimensión didáctica (Scheiner, 2015) de los futuros docentes, la cual no sólo se limita a la selección del tipo y cantidad de material concreto a usar en la enseñanza del principio multiplicativo.

6.5.4.2. Diagrama de árbol. E^2_5 reconoció que la dificultad en su enseñanza del referente σ (véase en la Tabla 6.10) de colocaciones se debió a que no trazó correctamente su diagrama de árbol debido a que colocó material (blusas y faldas) de más y por su nerviosismo:

I ¿Cómo se le llama a esa estrategia que tú utilizaste para identificar las distintas maneras de vestir de Juanita?

E^2_5 Yo **utilicé un diagrama** para que ellos [se refiere a los alumnos pudieran] identificaran…, en este caso…, yo hice seis combinaciones, ¡no!, al parecer eran 12 combinaciones. El propósito era que solo identificaran seis combinaciones. Al parecer aquí me equivoqué y fue cuando les dije creo de 12…, que fue que usted me dijo.

I En esta ocasión, ¿qué fue lo que falló para que encontraras las doce combinaciones y no las seis que querías?

E^2_5 ¡Ah! fue, de hecho…, ya tenía en mente…, **y fueron los nervios… que se me ocurrió poner otros** [se refiere a las blusas y faldas que colocó demás] **al lado**. Y fue cuando me di cuenta y dije chi…, ya la regué. Fue en ese momento que **me ganaron los nervios y aparte ya no podía decirle nada a los niños**, cambié la dinámica [inaudible].

6.5.5. Términos empleados

Los **futuros** docentes requieren precisar las definiciones del principio multiplicativo al enseñar este contenido.

6.5.5.1. Combinación. Este término fue usado en lugar de colocación por E^1_{32} en el referente **ω** y como mezcla por E^2_{16} en el referente **χ** (véanse en la Tabla 6.11):

E^1_{32} Mmmm, ahí era que ellos pudieran resolver un problema así [levanta más su cuerpo de la mesa y mueve las manos conforme va hablando], de **combinaciones** con ayuda de las multiplicaciones, que ellos ya, como que ¡eh! tenían ese concepto… ¡eh!, anteriormente ya lo habíamos trabajado.

E^1_{32} requiere fortalecer su dominio de contenido del principio multiplicativo para identificar el tipo de arreglo que va a enseñar y no repita los errores de definiciones que en ocasiones presentan los libros de texto (véase la Tabla 4.14).

I ¿Qué es una combinación?
E^2_{16} Una **combinación**… pienso que es…, pues…, lo manejé como **mezcla**, si mal no recuerdo; con los niños. Tal vez, haya sido errónea la palabra, ¡ehh!... pero, lo manejé como una **mezcla de dos cosas.** No sé… pongo como ejemplo: de colores de ropa ¡ehh!... ya.

De acuerdo a Piaget e Inhelder (1951), el referente que planteó E^2_{16} sólo exigía emparejar canicas de distinto o mismo color para formar las distintas posibilidades de permutación de los tres colores (rojo, amarillo y azul); por lo que la idea de mezcla que expresó la normalista no fue correcta dado que el referente no consideraba al azar.

6.5.6. Observaciones

En las dimensiones epistemológica y cognitiva (Scheiner, 2015), los cuatro normalistas no anticiparon las dificultades que tuvieron los alumnos de los diferentes grados al tratar el principio multiplicativo dado que el *conocimiento de contenido* de E^2_5, E^2_9, E^2_{16} y E^1_{32} fue deficiente, no identificaron correctamente la idea fundamental de combinatoria; es decir, no diferenciaron la colocación, la selección, la permutación con y sin repetición y la combinación de elementos del mismo o diferente tipo.

En la dimensión didáctica (Scheiner, 2015), durante su enseñanza del principio multiplicativo E^2_5, E^2_9, E^2_{16}, y E^1_{32}, tuvieron dificultades con los recursos semióticos que eligieron o con los que plantearon los alumnos y que no esperaban los normalistas, por ejemplo el trazo de diagrama de árbol de A_1 (alumno de tercer grado) para el referente **υ** que propuso E^2_5 (véase en la Tabla 6.10 y la Figura 6.30) y las 12 casas (tres repetidas y nueve distintas) que construyeron con el material físico los alumnos de cuarto grado para el referente **φ** que planteó E^2_9 (véanse en la Tabla 6.10, la Figura 6.24 y la Figura 6.26).

6.6. Entrevistas sobre principio multiplicativo a alumnos de 2º y 4º grado

La Tabla 6.12 denota los referentes propuestos en las entrevistas de acuerdo al tipo de arreglo que implican.

Tabla 6.12. Tipos de arreglos propuestos en los guiones de entrevista del principio multiplicativo.

Tipo de arreglo	Colocación de dos o tres elementos distinguibles en dos contenedores distinguibles.	Selección de dos elementos distinguibles sin orden considerando dos variables (adición y multiplicación).	Permutación de tres o cuatro elementos distinguibles	Selección de dos de tres elementos distinguibles: con orden; sin orden (a la vez).
Denotación de referentes	F	H	G	J

La Tabla 6.13 caracteriza a esos referentes de acuerdo a la célula de análisis (Ojeda, 2006). El guión de entrevista semiestructurada para los alumnos de segundo grado (A^2_7 y A^2_3) y de cuarto grado (A^4_{10} y A^4_{13}) se basó en tres referentes (F, G y J) para ambos grados; sólo se cambió el número de elementos a seleccionar, a colocar, a distribuir o a permutar.

El referente H sólo se planteó a los alumnos 2º grado. El objetivo de las entrevistas fue identificar si los alumnos respondían a las preguntas de los referentes propuestos considerando los conceptos y las estrategias tratadas y enseñadas por los normalistas en las sesiones de clases, o si los niños proponían otras formas de solución.

En el referente G se aprovechó la oportunidad de solicitar en un segundo momento "¿cuántos números diferentes podrían formar los alumnos si los dígitos se podían o no repetir?"

El referente J fue planteado de manera verbal a los alumnos de 2º y 4º grado durante la entrevista y modificado del que planteó E^2_{16} (véase en la Tabla 6.11, en específico, el referente **χ**) a los alumnos de segundo grado. El objetivo fue verificar si los alumnos de ambos grados lograban distinguir entre una combinación y una permutación con o sin repetición.

Tabla 6.13. Caracterización de los referentes de técnicas de conteo de 2° y 4° grado.

Ideas fundamentales de estocásticos: Combinatoria				
Grado	**Referente y preguntas**	**Otros conceptos matemáticos**	**Recursos semióticos**	**Términos empleados**
2º **4º**	**F**. Alberto va a escribir cartas. Si puede escribir el mensaje con letras negras o azules, y puede colocar las cartas en sobres blancos o rayados. ¿Cuántos tipos diferentes de cartas puede escribir? **F.** Alberto va a escribir cartas. Si tiene los siguientes colores de hojas: amarilla, rosa y lila; dos colores de letras: negras y azules, y dos tipos de sobres: blancos y rayados. ¿Cuántos tipos diferentes de cartas puede escribir?	Operaciones aritméticas.	Lengua natural escrita.	Dos y tres colores de letras, tres colores de hojas, dos tipos de sobres, cuántos tipos diferentes de cartas puede escribir.
2º **4º** **2º y 4º**	**G**. ¿Cuántos números diferentes de tres dígitos puedes formar usando las siguientes tarjetas? $\boxed{3}$ $\boxed{6}$ $\boxed{8}$ **G**. ¿Cuántos números diferentes de cuatro dígitos pueden formarse usando las siguientes tarjetas? $\boxed{3}$ $\boxed{6}$ $\boxed{8}$ $\boxed{4}$ Y si se pueden repetir los dígitos, ¿Cuántos números diferentes de tres/cuatro dígitos puedes formar?	Operaciones aritméticas, números naturales, dígitos.	Lengua natural escrita, signos numéricos en tarjetas.	Cuántos números diferentes de tres dígitos se pueden formar, repetir dígitos, Cuántos números diferentes de cuatro dígitos se pueden formar
2º	**H.** La suma de dos números es 14. Su producto es 45. ¿Cuáles son los dos números?	Operaciones aritméticas, producto, números naturales,	Lengua natural escrita, signos numéricos.	Suma de dos números, producto, cuáles son los dos números.
2º y 4º	**J**. Si tengo tres canicas: una roja, una azul y una amarilla. I) ¿De cuántas maneras diferentes te puedo regalar dos? II) ¿De cuántas maneras diferentes te puedo regalar dos canicas si me interesa saber, qué color de canica escoges primero? II) Si tengo los colores: rojo, azul y amarillo y te puedo regalar dos canicas. ¿De qué colores las puedes pedir? Considerado del planteado por E^2_{16} en su enseñanza a alumnos de segundo grado.	Operaciones aritméticas.	Lengua natural escrita.	Tres canicas, una azul, una roja, una amarilla, de cuántas maneras diferentes, se puede repetir color, qué color de canica escoges primero.

Nota. Los referentes F, G y H fueron adaptados de los propuestos por English (2005) pp. 125-126.

La Tabla 6.14 contiene las respuestas esperadas a cada una de las preguntas respecto a los referentes planteados a los alumnos de segundo y cuarto grado sobre principio multiplicativo.

Tabla 6.14. Respuestas esperadas a los referentes planteados a alumnos de 2° y 4° grado.

Grado	Preguntas de los referentes	Respuestas esperadas
2º	**F**. ¿Cuántos tipos diferentes de cartas puede escribir?	Cuatro maneras distintas de hacer una carta.
4º	**F.** ¿Cuántos tipos diferentes de cartas puede escribir?	Doce maneras distintas de hacer una carta.
2º	**G**. ¿Cuántos números diferentes de tres dígitos puedes formar (sin repetir dígitos)?	I) Seis números diferentes.
2º	Y si se pueden repetir los dígitos, ¿Cuántos números diferentes de tres dígitos puedes formar?	II) 27 números diferentes.
4º	**G**. ¿Cuántos números diferentes de cuatro dígitos pueden formarse (sin repetir dígitos)?	I) 24 números diferentes.
4º	Y si se pueden repetir los dígitos, ¿Cuántos números diferentes de cuatro dígitos puedes formar?	II) 256 números diferentes.
2º	**H.** ¿Cuáles son los dos números?	El 9 y el 5.
2º y 4º	**J.** I) ¿De cuántas maneras diferentes te puedo regalar dos canicas?	I) De tres maneras (rojo-azul, azul-amarillo, rojo-amarillo) distintas pueden elegir las dos canicas.
	II) ¿De cuántas maneras diferentes te puedo regalar dos canicas si me interesa saber, qué color de canica escoges primero?	II) De seis maneras distintas: rojo-azul, rojo-amarillo, azul-rojo, azul-amarillo, amarillo-azul, amarillo–rojo.
	II) Si tengo los colores: rojo, azul y amarillo y te puedo regalar dos canicas. ¿De qué colores las puedes pedir?	III) De nueve maneras si puede repetir el color (rojo-azul, rojo-amarillo, rojo-rojo, azul-rojo, azul-amarillo, azul-azul, amarillo-azul, amarillo-rojo, amarillo-amarillo) de las dos canicas.

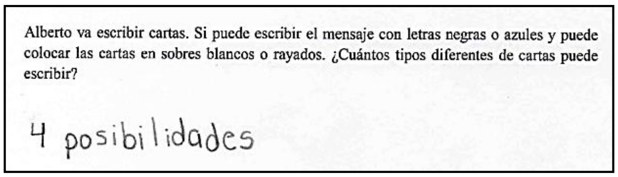
6.6.1. Referentes

Para los alumnos de cuarto y segundo grado, los referentes G y J (en la Tabla 6.13) fueron difíciles, pues sólo A^{4}_{13} dio respuestas correctas a los dos al distinguir en el primero las dos condiciones: “sin repetición” de dígitos (24) y “con repetición” (256). Para el segundo referente consideró las tres condiciones: I) sin orden: “tres” opciones; II) con orden: “seis” posibilidades; y III) con repetición de color “nueve posibilidades”.

6.6.2. Idea fundamental de combinatoria.

Los alumnos de segundo grado tuvieron un acercamiento intuitivo al principio multiplicativo.

6.6.2.1. Colocación. Para el referente F (véase en la Tabla 6.13), sólo A^2_3 dio una respuesta rápidamente (como si no la hubiera pensado) a las preguntas planteadas (véase la Figura 6.38), es decir, puso en juego su pensamiento deliberado o sistema 1 de acuerdo con Kahneman (2011).

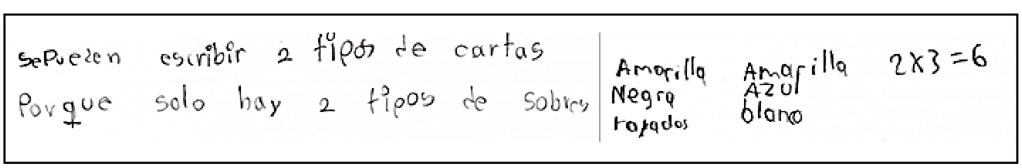

Alberto va escribir cartas. Si puede escribir el mensaje con letras negras o azules y puede colocar las cartas en sobres blancos o rayados. ¿Cuántos tipos diferentes de cartas puede escribir?

4 posibilidades

I	**¿Cuántos tipos de cartas podrá escribir?**
A^2_3	[Contesta en forma de pregunta] **¿Cuatro?**
I	¿Cuatro? ¿Cuáles serían?
A^2_3	**Serían… azules con sobres rayados, y negras con sobres blancos, y al revés**.

Figura 6.38. Respuesta intuitiva de A^2_3 al referente F.

Para el referente F (véase en la Tabla 6.13) A^4_{10} y A^4_{13} no respondieron correctamente en el primer intento. Ambos niños no se percataron de que se trataba de un problema tridimensional (de acuerdo con English (1999), como la cita English (2005)) o un problema de colocaciones de tres objetos distintos. A^4_{10} y A^4_{13} trataron el problema como bidimensional, por lo que su respuesta errónea se basó en multiplicar sólo dos de las cardinalidades de los tres conjuntos (véase la Figura 6.39), es decir, sólo multiplicaron el número de colores de hojas por el número de tipos de sobre.


SePueden escribir 2 tipos de cartas Porque solo hay 2 tipos de sobres

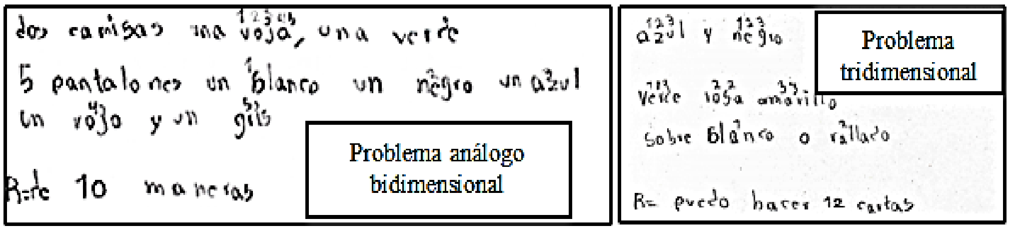
Amarilla Negra rayados

Amarilla Azul blano

2X3=6

Figura 6.39. Respuestas incorrectas a la situación F propuestas por A^4_{10} y A^4_{13}.

En desacuerdo con lo señalado por Piaget e Inhelder (1951), de que los niños de 9 a 11 años resuelven problemas de colocaciones sin un procedimiento sistemático, al plantearle a A^4_{10} un problema análogo bidimensional, el alumno dio la respuesta correcta al problema tridimensional usando un procedimiento sistemático al resolver los dos problemas; enumeró las opciones para cada uno de los conjuntos (véase la Figura 6.40).



dos camisas una roja, una verde
5 pantalones un blanco un negro un azul un rojo y un gris
R=de 10 maneras

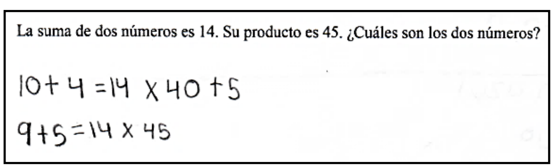
Problema análogo bidimensional

azul y negro
verde rosa amarillo
sobre blanco o rallado
R= puedo hacer 12 cartas

Problema tridimensional

Figura 6.40. Proceso sistemático propuesto por A^4_{10} a dos problemas de colocación.

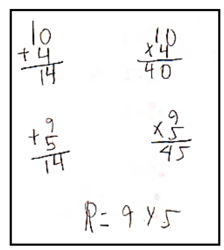
6.6.2.2. Selección. Ambos alumnos de 2º grado dieron respuesta correcta al referente H (véase en la Tabla 6.13) en un segundo intento (véase la Figura 6.41 y la Figura 6.42) al identificar los dos números que en ambas operaciones aritméticas (adición y multiplicación) cumplieran las condiciones establecidas.



La suma de dos números es 14. Su producto es 45. ¿Cuáles son los dos números?

10+4=14 x40+5
9+5=14 x 45

Figura 6.41. Respuestas de A^2_3 a H.



10 +4 = 14
10 x4 = 40
9 +5 = 14
9 x5 = 45
R= 9 y 5

Figura 6.42. Respuestas de A^2_7 a H.

Los dos alumnos dieron evidencia de la heurística de disponibilidad (Tversky y Kahneman, 1973) al identificar primero el número 14 y descomponerlo en decenas (una) y unidades (cuatro). Los niños realizaron un ensayo y se percataron que al sumar la decena con las cuatro unidades satisfacían la primera condición del referente; sin embargo, al multiplicar esos dos números ya no se satisfizo la segunda condición, por lo que volvieron a realizar un segundo ensayo con los números nueve y cinco.

Para el referente J (véase en la Tabla 6.13), A^2_3, A^4_{10} y A^4_{13} identificaron las combinaciones de las tres canicas como respuesta al inciso I) dado que no consideraron el orden de la variable (color de las canicas).

A^2_3 no dio sentido al orden de los elementos distinguibles ni a la repetición de la variable color de las canicas (véase la Figura 6.43). A^4_{10} y A^4_{13} consideraron el orden en los incisos I) y II), respectivamente. Sólo A^4_{13} reconoció la repetición del color (variable) en el inciso III) por lo que escribió como respuesta correcta, nueve maneras distintas en que se pueden regalar dos canicas al escoger entre tres colores de canicas (véase la Figura 6.44).

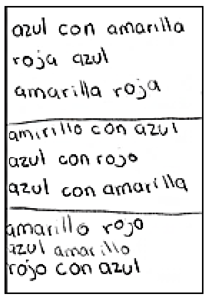


Figura 6.43. Respuesta de A^2_3 a los tres incisos de la situación H.

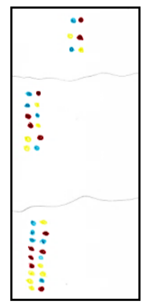


Figura 6.44. Respuestas correctas a la situación H propuestas por A^4_{13}.

A^2_7 no determinó las combinaciones para dar respuesta al inciso I), por lo que ya no se le preguntó el inciso II). En el inciso III) su respuesta fue inmediata e intuitiva y respondió "9" posibilidades (véase la Figura 6.45).

6.6.2.3. Permutaciones. Para A^2_7 y A^4_{10} no fue claro el referente G (véase en la Tabla 6.13) si los elementos (dígitos) del mismo tipo se repetían o no. Sin embargo, no tuvieron dificultad para identificar la variable de valor posicional de cada dígito, por ejemplo:

A^4_{10} Seis mil ochocientos treinta y cuatro (6 834).

I En esa cantidad, **¿se repite algún dígito?**

I [El alumno niega con la cabeza] ¡No! **¿Cuántos números podrías escribir ahora, si puedes repetir dígitos?**

A^4_{10} Mmm… **muchos**.

I ¿Cómo cuantos?

A^4_{10} Mmm… ¿Los hago?

I Como tú quieras. Si quieres escribirlos o si tienes alguna forma de decirme son tantos [se refiere a todos los números de cuatro dígitos que se pueden escribir]. ¡Acuérdate!, tienes el cuatro, tienes el tres, tienes el seis y tienes el ocho [señala las tarjetas con los dígitos que va diciendo]. **¿Cuántos números de cuatro dígitos puedes escribir si puedes repetir dígitos?**

A^4_{10} Pero… ¿También se pueden ocupar estos? [Se refiere a las tarjetas con los dígitos y escribe] **68 843**.

I ¡Ajam! A ver, una pregunta A^4_{10}. **¿Cuantos dígitos tiene este número?** [señala el número 68 843 que escribió A^4_{10}].
A^4_{10} Tiene… ¡Ah! Sí, cierto.
I **¿Cuántos** [dígitos] **tiene?**
A^4_{10} Este… **cinco**.
I **¿Y cuántos** [dígitos] **deben de ser?**
A^4_{10} **¡Cuatro!** ¿A fuerzas se tienen que ocupar todos estos o…? [Se refiere a los cuatro dígitos].

A A^4_{10} no le quedó clara la condición de que los cuatro dígitos de las tarjetas podían repetirse.

6.6.3. Otros conceptos matemáticos

Únicamente para A^2_7 fue confuso distinguir entre *número*, *dígito* y *cantidad*.

6.6.3.1. Operaciones aritméticas. Los cuatro alumnos resolvieron correctamente las sumas o multiplicaciones que sugirieron para dar respuesta a las preguntas planteadas para cada uno de los referentes (véanse en la Tabla 6.13, la Figura 6.39 y la Figura 6.42).

6.6.3.2. Número, dígito y cantidad. Estos conceptos empleados en el referente G (véase en la Tabla 6.13) pudieron haber causado confusión sólo en A^2_7 por lo que su segunda respuesta no fue correcta, la instrucción no fue comprendida claramente por el alumno:

I No. **Y si te pido que con estos tres números escribas cantidades de tres cifras donde** [en las que] **puedas repetir los dígitos, ¿cuál sería tu respuesta?**
A^2_7 ¿Qué? ¿Que si…?
I **Que puedes repetir** [se refiere a los dígitos], **aquí no repetiste** [señala los números escritos en la hoja].
A^2_7 ¡No!
I Lo que trato de decir es que repitas números ¿Cuál sería tu respuesta?
A^2_7 [Se queda pensativo] Si repito, éstos otra vez… ¿Los sumo igual con éstos [señala los primeros números que escribió: 368, 683, 836 y 386]?

6.6.3.3. Producto. Entendiendo por producto, el resultado de multiplicar dos números. Esta palabra fue confusa para los dos alumnos de 2º grado por lo que se cambió por la palabra "*multiplicados*" (dos números que multiplicados den 45) en la entrevista, por ejemplo:

I [..] ¿Dos números que sumados den catorce?
A^2_7 [Escribe] $10 + 4 = 14$.

I ¿Cuánto es?
A^2_7 Catorce.
I Ahora; estos dos números que tú elegiste **multiplicados** deben dar cuarenta y cinco ¿Si dan cuarenta y cinco si multiplicas diez por cuatro?
A^2_7 [Piensa] diez por cuatro [Escribe] $10 \times 4 =$
I ¿Cuánto sería, ahí [refiriéndose a la multiplicación]?
A^2_7 Cuarenta.
I Escríbelo.
A^2_7 [Escribe] $10 \times 4 = 40$
I Entonces, **el enunciado pide dos números que sumados den 14 pero multiplicados den cuarenta y cinco**, ¿Esta puede ser tu respuesta correcta?
A^2_7 No.
I Busca entonces…, no la borres. **Busca entonces dos números que sumados te den catorce y multiplicados cuarenta y cinco** ¿Cómo le harías?
A^2_7 [Se queda pensativo] nueve más cuatro [escribe: $9 + 4 = 14$]
I Umjú, ¿Ahora estos dos números multiplicados dan cuarenta y cinco?
A^2_7 [Se queda pensativo y luego dice la tabla de multiplicar del nueve en voz baja] ¡Sí!
I Sí, hazlas por favor
A^2_7 [Escribe $9 \times 5 = 45$. En la suma borra el cuatro y escribe un cinco: $9 + 5 = 14$].
I ¿Cuál es la respuesta a la pregunta? ¿Cuáles son los números?
A^2_7 [Escribe] R = **9 y 5**.

6.6.4. Recursos semióticos

Los recursos empleados por los alumnos fueron a nivel de la experiencia (listados) y a nivel del pensamiento aritmético (principio multiplicativo) de acuerdo a Andrà (2011).

6.6.4.1. Diagramas de árbol. A^2_7 usó el recurso semiótico (véase la Figura 6.45) que E^2_{16} trazó en la clase (véase § 6.4.4.3 y la Figura 6.29) para responder la pregunta del referente J (véase en la Tabla 6.13). El alumno mezcló la notación simbólica con la figural en cada rama del diagrama de árbol, lo que podría confundirlo.

I Ok. Te hago otra pregunta. **Si pudieras repetir el color de las canicas, ¿cuántas posibilidades tendrías?**
A^2_7 **Nueve**.

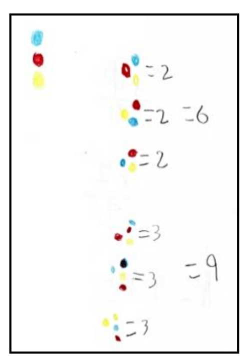


Figura 6.45. Respuestas de A27 a los tres incisos del referente J.

6.6.4.2. Listados. En acuerdo con Lockwood y Gibson (2016) para responder a las preguntas planteadas, de manera natural $A^2{}_3$, $A^2{}_7$ y $A^4{}_{13}$ realizaron listados ya fueran completos (véase la Figura 6.45) o incompletos (véase la Figura 6.43).

6.6.4.3. Notación aritmética. $A^2{}_3$ se refirió oralmente a **la operación** implicada en el *principio multiplicativo* (multiplicación) para el referente F (véase en la Tabla 6.13), sin contestar la pregunta que se planteó y sin explicar por qué se trataba de un producto:

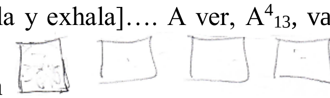
I Las posibilidades que me estabas diciendo, ¿cuáles son?

$A^2{}_3$ [Escribe en la hoja] **4 posibilidades**.

I **¿Cómo supiste que eran las cuatro** [se refiere a la respuesta que dio $A^2{}_3$ de cuatro posibilidades]**?**

$A^2{}_3$ **Porque es como una multiplicación.**

$A^4{}_{10}$ usó dos recursos semióticos (*listado* y *simbología matemática*) para el referente F (véase en la Tabla 6.13 y el problema análogo bidimensional que se le planteó (véase la Figura 6.40). $A^4{}_{13}$ realizó un listado en el que fue fijando los primeros dígitos de los números (véase la Figura 6.46 y la Figura 6.47) que formó:

I Tranquilo, respira, saca [$A^4{}_{13}$ inhala y exhala]…. A ver, $A^4{}_{13}$, vas a escribir [I traza cuatro cuadrados en un espacio de la hoja ] **un número con cuatro dígitos**. ¿Estamos de acuerdo?

$A^4{}_{13}$ Sí.

I ¡Ajá! ¿**Cuántos dígitos tienes para esta primera opción** [señala el primer cuadrado]?

$A^4{}_{13}$ **Tengo un dígito.**

I ¿Nada más? ¿**Cuántos de estos dígitos** [señala las tarjetas con dígitos] **puedes poner ahí**? [refiriéndose al primer cuadrado que trazó].

$A^4{}_{13}$ **Cuatro.**

I Cuatro. ¿**Y en el segundo**?

$A^4{}_{13}$ **Tres**, porque aquí [señala el primer cuadrado] ya utilicé uno, **¡No! también puedo utilizar cuatro porque los puedo repetir**. ¡Aquí [señala el segundo recuadro] también cuatro y aquí también [señala cada uno de los cuadrados]!

I ¿**Qué harías con esas cuatro opciones de cada espacio**? [señala cada uno de los cuadrados].

$A^4{}_{13}$ Las.... ¿Qué haría con esas cuatro opciones de cada espacio? ... Las… **una de éstas la colocaría en una casilla.**

I **Pero, para que fuera más rápido y no te fueras a hacer todo el listado, ¿qué podrías hacer más rápido?**

$A^4{}_{13}$ **¡Multiplicar!**

$A^4{}_{13}$ **Cuatro por cuatro** [escribe $4 \times 4 \times 4 \times 4$], **16 por cuatro**...**16 por cuatro, igual, cuatro** [escribe$16 \times 4 = 64$] **por seis, 24... cuatro y llevo dos, cuatro por uno, cuatro más dos que llevo 64**, [escribe $16 \times 4 = 64 \times 4 = 256$] **por cuatro... cuatro por cuatro, 16, seis y llevo uno, cuatro por seis, 24, 25... 256.**

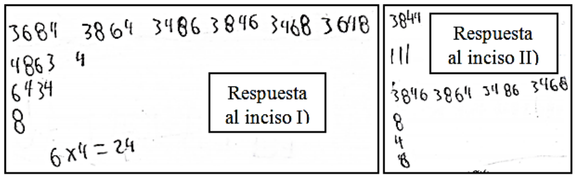


Figura 6.46. Respuestas de $A^4{}_{13}$ a las variantes del referente G.

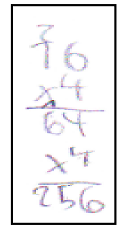


Figura 6.47. Notación aritmética (multiplicación) propuesta por $A^4{}_{13}$ para la repetición de dígitos en el referente G.

Los cuatro alumnos evidenciaron que un problema combinatorio podía resolverse usando diferentes recursos semióticos, es decir, “la combinatoria proporciona la base para que los problemas significativos se resuelvan en una variedad de formas y con una variedad de herramientas de representación” (English, 2005, p. 122); cuando un alumno aprende o trata conceptos matemáticos (de estocásticos) y “cambia la representación de [los] objetos o [de las] relaciones matemáticas de un sistema semiótico a otro [da] un salto cognitivo” (Duval, 2006, p.150).

Para el referente H (véase en la Tabla 6.13), las respuestas de $A^2{}_3$ podrían llevar a confusión dado que no separó las operaciones aritméticas que realizó (véase la Figura 6.41); es decir, su comunicación escrita podría impedir su comprensión de los conceptos de suma y multiplicación, de acuerdo con Santos y Semana (2014).

6.6.5. Términos empleados

La mayor dificultad de los alumnos fue advertir la repetición o no de los elementos del mismo tipo.

6.6.5.1. Repetición (de color o de dígitos). $A^2{}_7$ dio evidencia de considerar la *repetición de color* de las canicas (véase la Figura 6.45) en el referente J (véase en la Tabla 6.13):

I	Ok. Te hago otra pregunta. Si yo pudiera **repetir el color de las canicas** ¿cuántas posibilidades tendrías?
$A^2{}_7$	[Toma sus colores y observa su hoja].

I Que las dos [canicas] que regale sean del mismo color.
A^2_7 **Nueve**.
I A ver; escríbelas, por favor
A^2_7 [Dibuja las dos canicas del mismo color en el diagrama que trazó (véase la Figura 6.45)] **Nueve**.

A^4_{10} no se percató de la *repetición de color* si tenía la oportunidad de escoger el color de las dos canicas de un total de tres (azul, rojo o amarillo).

La *repetición de dígitos* no fue clara para A^4_{10}, A^2_7 en el referente G (véase en la Tabla 6.13). A^2_3 sólo identificó la *repetición del mismo dígito* (escribió "888, 666 y 333") pero no reconoció las demás posibilidades de repetición (dos números iguales y uno diferente) a pesar de que escribió el número "633".

6.6.5.2. Orden. A^4_{10} identificó el orden de las canicas en el referente J (véase en la Tabla 6.13) al decir el color de la que pediría primero:

I ¡Claro que puedo volver a repetírtelo!
De estas tres [señala los círculos de foami] puedes elegir dos. Pero a mí, **me interesa saber cuál vas a elegir primero**, ¿de cuántas maneras te las puedo regalar?
A^4_{10} ¡Tres!
I Igual, ¿de tres [maneras] nada más? Escríbelas, por favor. ¿Ya? Te pregunto ¿si hay otra posibilidad? porque a mí me interesa la canica que tomes primero, si tú tomas primero la amarilla o la azul... ¿Hay otra posibilidad o no hay otra posibilidad?
A^4_{10} ¡No!
I ¿Ya no hay más posibilidades? **Si tú tomas primero la azul y después la roja. ¿No hay otra posibilidad en la que tú puedas elegir?**
A^4_{10} **Pues la amarilla y la roja.**
I ¡Escríbelo!
A^4_{10} ¿Aquí, enfrente [señala las opciones que ya había escrito]?
I Si quieres en tu listado, continúalo. Sería una cuarta posibilidad, ¿no? ¿Hay alguna otra o ya son todas las posibilidades? Te vuelvo a repetir, a mí **me interesa conocer qué canica vas a pedir primero**.
A^4_{10} También **la azul y la amarilla** [escribe]:
1° amarilla y azul
2° azul y roja
3° roja y amarilla
4° amarilla y roja
5° azul y amarilla
6° roja y azul… ¡Ya!
I ¿Ya? ¿Cuántas encontraste?
A^4_{10} **Seis**.

6.6.6. Observaciones

En la dimensión cognitiva (Scheiner, 2015), A^2_3 y A^2_7 dieron evidencia de un dominio intuitivo al dar respuestas inmediatas a los problemas de principio multiplicativo. De acuerdo a Fischbein (1975), una intuición es una síntesis inmediata de una experiencia del individuo y, por ello, no es susceptible de análisis, sino que tal dominio debe formalizarse. Las combinaciones aparecen antes de las permutaciones (Piaget e Inhelder, 1951), lo cual se observó sólo en el caso de A^4_{13} (véase la Figura 6.44) y en el de A^2_3 (véase la Figura 6.48).

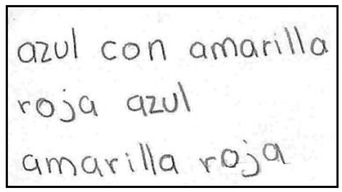


Figura 6.48. Combinaciones identificadas por A^2_3 en el referente J.

A^4_{10} puso en juego su conocimiento de cálculo y analógico (Pollatsek, *et al*., 1981) al plantearle un referente análogo bidimensional al referente G (tridimensional, véase en la Tabla 6.13) y así dar respuesta correcta a ambos (véase la Figura 6.40).

A^4_{13} aplicó los tres tipos de conocimiento: de cálculo, funcional y analógico (Pollatsek, *et al*., 1981) para el referente G (véase en la Tabla 6.13), además de convertirse en juez de la respuesta que dio al inciso II) y la respuesta que se le comentó que había dado otro alumno al responder esa misma pregunta.

A^4_{13} dio evidencia de realizar conjeturas y generalizaciones (véase la Figura 6.46) porque activó un pensamiento sistemático, en acuerdo con English (2005), quien señaló que los "problemas combinatorios facilitan procesos de enumeración, conjeturas, generalizaciones y pensamiento sistemático" (p. 122).

Capítulo 7

Conclusiones

Ante las limitaciones surgidas para el desarrollo de la investigación cualitativa, *Comprensión de ideas fundamentales de estocásticos de docentes en formación para la educación primaria*, así como por su delimitación (véase apdo. 1.6), las acciones se pusieron en juego según la organización especificada en la Figura 3.1:

- en la propuesta institucional de la Licenciatura en Educación Primaria (SEP, 2012c) y en las propuestas de Educación Primaria (SEP, 2011e y SEP, 2017a), que debido a su reciente incorporación, de la segunda propuesta sólo se tiene la caracterización de los libros de texto de primer y segundo grados;
- en la formación de futuros docentes y en la enseñanza de estocásticos de los futuros docentes en aulas de primaria considerando el plan vigente (SEP, 2011e).

Los datos obtenidos se caracterizaron según la célula de análisis de la enseñanza (Ojeda, 2006) y el triángulo epistemológico del concepto matemático (Steinbring, 1991, 2005), con el fin de identificar el conocimiento de estocásticos para la enseñanza con que se dota al docente de primaria durante su formación (en la forma en que se señaló en el apdo. 2.4.1), así como la pertinencia de una propuesta para el logro del objetivo de la educación en estocásticos, que debiera ser la de formar ciudadanos capaces de enfrentar acertadamente situaciones de carácter estocástico en su vida cotidiana —y más adelante, también en la profesional.

7.1. Formación docente en estocásticos para la enseñanza en primaria

Si bien era de esperar que los normalistas participantes en nuestro estudio mostraran deficiencias o dificultades en las tres dimensiones del conocimiento de estocásticos para su enseñanza propuestas por Scheiner (2015), pues se estaban formando para la docencia, esta investigación ha identificado algunos orígenes de esas dificultades, que provienen del planteamiento mismo de estocásticos en todo el sistema educativo nacional y del que una pequeñísima muestra protagoniza esta investigación.

7.1.1. Propuesta institucional para la formación de profesores en estocásticos para la educación primaria (SEP, 2012c y SEP, 2017c)

En la escuela Normal donde se realizó la investigación sigue vigente el Plan y programas 2012 (SEP, 2012c) y no el plan 2017c. En el primero, en su asignatura *Procesamiento de Información Estadística* (SEP; 2012d) prevalece el *conocimiento de cálculo* de los contenidos. No incluye contenidos de cómo el sujeto (desde el niño hasta el adulto) construye conceptos de estocásticos (dimensión epistemológica), ni señala las dificultades que los alumnos pueden enfrentar (dimensión cognitiva) al tratar esos contenidos como señalamos en el apartado 4.2.2.

Dos de las unidades de la asignatura (1. *Estadística* y 4. *Vinculación con el eje Manejo de la Información*) favorecen sólo tres de las ideas fundamentales de estocásticos propuestas por Heitele (1975): equidistribución y simetría; variable estocástica y muestra. Las otras dos unidades (2. *Probabilidad y muestreo* y 3. *Inferencia estadística*) sí incluyen las diez ideas (véanse las Tablas 4.3, 4.4, 4.5 y 4.6); sin embargo, sólo se enseñan las unidades 1 y 4 (esta última por corresponder a la revisión de la propuesta institucional de primaria) pues se destinan varias semanas a la planeación de la enseñanza que impartirán los estudiantes durante dos jornadas de prácticas docentes.

La propuesta institucional de primaria (SEP, 2011e) y las lecciones del libro de texto (SEP, 2014) incluyen únicamente la comprensión de cuatro de las diez ideas fundamentales propuestas por Heitele (1975): espacio muestra, variable estocástica y muestra (véanse las Tablas 4.11, 4.12 y 4.13) y combinatoria con el principio multiplicativo. A este último se le restringe a un tratamiento de mera operatividad aritmética (véase la Tabla 4.14), que favorece un enfoque determinista (Heitele, 1975). Los libros de texto basan la enseñanza de las medidas centrales en la triada moda, mediana y media, señalada por Bakker (2003). El término promedio se usa como sinónimo exclusivo de media aritmética. Sólo se proponen cinco lecciones (dos de 5° y tres de 6° grado) que consideran la representatividad (véase la sección 4.4) de datos.

El *Nuevo Modelo Educativo para la Educación Primaria* (SEP; 2017a) implementa el estudio de la probabilidad; inicia con el tratamiento de la frecuencia relativa y luego el de la frecuencia absoluta (véase la sección 4.6), sin embargo, es necesario que introduzca el desarrollo de los conceptos de *medidas de centro* con la inclusión informal de la media y de la mediana (Garfield y Ben-Zvi, 2008). Este plan omite a esta última (véase la sección 4.6) y la idea de combinatoria parece inadvertida.

Ambas propuestas, de formación docente para primaria (SEP, 2012c) y de educación primaria (2011e y 2017a), en su mayor parte consideran la organización de los datos en tablas y gráficas ya **dadas** para completarlas; sólo en tres lecciones (véase la sección 4.4) se pide que el alumno proponga cómo organizar los datos, para lo que debe identificar al fenómeno en cuestión y las variables en juego para los títulos y rótulos de los ejes de las gráficas, así como las escalas a considerar en el plano cartesiano.

Concluimos que las propuestas institucionales para y de educación primaria (SEP, 2012c, SEP, 2011e y SEP, 2017a) carecen de elementos que propicien una reflexión, tanto de quienes se forman como de sus formadores, sobre aspectos importantes de los datos: de dónde surgen, qué los caracteriza, cómo varían, cómo se dispersan (véase la sección 4.3). La combinatoria queda relegada a arreglos de ropa (que se denominan "combinaciones") u otros objetos (véase la Tabla 4.14), y se deja de lado el desarrollo del pensamiento probabilístico de los niños (Fischbein, 1975).

Se requiere que la propuesta institucional de la Licenciatura en Educación Primaria forme a los docentes considerando también las dimensiones epistemológica, cognitiva y didáctica propuestas por Scheiner (2015), ya que sólo se centra en la operatividad de los conceptos de estocásticos que incluye, pero descuida lo que deben saber los normalistas sobre lo que los alumnos de primaria pueden y deben saber de estocásticos.

7.1.2. Comprensión de ideas fundamentales de estocásticos de docentes en formación para la educación primaria

En los Cuestionarios 1 y 2 (véase el apdo. 5.1.1 y el apdo. 5.1.2), las respuestas de los estudiantes normalistas de ambas generaciones a los reactivos exhibieron un *conocimiento de cálculo* (Pollatsek, *et al*., 1981) deficiente, a lo más aritmético, no simbólico. Por ejemplo, los reactivos 15, 22, 23, 24 y 26 (véanse las Tablas 5.2 y 5.3) y los primeros ocho reactivos (véase la Tabla 5.5) sobre medidas de tendencia central fueron resueltos por su algoritmo (Mokros y Russell, 1995).

Los normalistas E^1_{26}, E^1_{30} y E^1_{43} evidenciaron un conocimiento funcional incipiente al identificar para el reactivo 25 (véase la Tabla 5.2) al promedio como algo razonable (Mokros y Russell, 1995, véanse las Figuras 5.5 y 5.10). Lo mismo hicieron E^2_{13} y E^2_{17} en los reactivos 5 de media armónica (véase la Figura 5.13), 6 y 7 de media ponderada (véanse las Figuras 5.15 y 5.16).

En los reactivos de combinatoria 15, 22 (véase la Tabla 5.3), 9, 10 y 11 (véase la Tabla 5.5), los estudiantes normalistas de ambas generaciones mostraron estrategias de solución al nivel de experiencia (Andrà, 2011), con listados de las posibilidades, ya fuera completos o incompletos, como el recurso más frecuente, aunque sin "un plan bien diseñado de resolución de problemas" (Lockwood y Gibson, 2016, p. 250). En segundo lugar, trazaron diagramas de árbol erróneos e interpretaron incorrectamente el que se les presentó en el reactivo 11 (véase la Figura 5.17), sin dar sentido a las trayectorias de las ramas. Los enunciados de los referentes 6 y 7 planteados en lengua escrita fueron convertidos a figuras para poder responder las preguntas planteadas (véanse las Figuras 5.15 y 5.16).

En la primera experienciación se promovió el *conocimiento de cálculo* (Pollatsek, *et al*., 1981) en la enseñanza de las medidas de tendencia central; se usaron reactivos con datos no agrupados (véase la Tabla 5.7). La segunda experienciación planteó referentes análogos con datos agrupados y no agrupados (véase el apdo. 5.2.2).

La investigadora, como docente, estableció una *interacción exploratoria* (Jacobs y Ambrose, 2003) con los estudiantes de ambas generaciones al solicitarles que argumentaran sus respuestas, y al clarificarles conceptos no comprendidos en clase.

En las entrevistas semiestructuradas para profundizar en la información de la comprensión de estocásticos de los estudiantes recopilada con los cuestionarios y la experienciación de la enseñanza, ellos identificaron el promedio como sinónimo de media; es decir, mostraron una "ambigüedad para nombrar cualquier medida central" (Triola, 2009) que mejor correspondiera al referente de cada reactivo planteado; evidenciaron así su desconocimiento de las medias ponderada, armónica y geométrica (véase la Figura

5.34). Sólo E^1_{34} determinó la media ponderada en el Cuestionario 1 al identificar el tamaño de la muestra (véase la Figura 5.29). Los normalistas E^2_9 y E^1_{32} evidenciaron un sesgo en su razonamiento —que Fischbein (1975) señala que se acentúa con la edad— frente a distintas repuestas al reactivo de media armónica, pues argumentaron que si no se les hubieran presentado distintos procedimientos lo habrían resuelto como lo señalaba el algoritmo de la media aritmética (véase el apdo.5.4.5). Sólo E^2_7 se percató del orden de las extracciones propuestas en lengua escrita al efectuarlas con material concreto físico (una urna, dos pelotas blancas y dos negras; véase la Figura 5.31).

Los estudiantes de ambas generaciones tuvieron dificultades para dar sentido a términos de estocásticos como frecuencia, rango, simetría, extracciones con o sin reemplazo, número de posibilidades, combinaciones, permutaciones, colocaciones. También mostraron dificultades para aplicar otros conceptos matemáticos, como el orden en los números reales, el producto y plano cartesianos (véanse §51.1.2 y §5.1.2.2). Los normalistas contestaron problemas combinatorios con recursos semióticos al nivel de experiencia (Andrà, 2011), privilegiaron los listados (véanse las Figuras 5.30 y 5.36), y los diagramas de árbol (véanse las Figuras 5.12 y 5.27).

Concluimos que los resultados obtenidos subrayan el papel que juegan los formadores de docentes no únicamente en el cumplimiento de lo prescrito en el programa de estudios (en el mejor de los casos), sino en la incorporación de resultados de investigación en educación matemática en sus estrategias de enseñanza y en el diseño de sus instrumentos de diagnóstico y de evaluación.

Es necesario aclarar en la enseñanza al normalista la particularidad de cada una de las medidas de tendencia central, englobadas por el término *promedio*, así como la pertinencia de la aplicación de cada una de acuerdo a la situación referente, a sus datos y a la pregunta de interés, como lo ha señalado Triola (2009).

7.1.3. Las prácticas de enseñanza de estocásticos en el aula de primaria

La enseñanza del principio multiplicativo fue impartida por los normalistas sólo con los conocimientos que tenían del bachillerato (véase la Tabla 6.1) en el mejor de los casos, pues las prácticas docentes suelen iniciar antes de que se reciba la enseñanza de la unidad

2, Probabilidad y muestreo, en la que se trata el principio fundamental del conteo (véase la Tabla 4.4), de la asignatura *Procesamiento de Información Estadística*.

En las prácticas de enseñanza, los normalistas evidenciaron dificultad para redactar los enunciados de los referentes que proponían, para seleccionar recursos semióticos y los términos de estocásticos apropiados, y para anticipar las respuestas que podían dar los alumnos a las preguntas de principio multiplicativo y medidas centrales. Por ejemplo, E^1_{28} y E^1_{39} no identificaron la estrategia de compensación que sugirieron los alumnos de 5° grado para los reactivos de media que les plantearon (véanse las Figuras 6.9 y 6.13); para E^2_5 fue difícil trazar un diagrama de árbol (véase el apdo. 6.5.4) y no dio la importancia debida al trazado por un alumno de 3er grado (véase §6.4.2.2 y §6.4.4.3) para solucionar el problema de conteo.

La idea de *muestra* fue comprendida mejor por los alumnos de 5° grado que por E^2_7 (véase §6.1.2.3). Los alumnos de 4° grado utilizaron mejor las tarjas y los alumnos de los tres grados comprendieron mejor el principio multiplicativo que los normalistas (véase §6.1.4.4, la sección 6.4 y el apdo. 6.4.2). El pensamiento combinatorio de los alumnos de 2do año fue principalmente intuitivo (Fischbein, 1975) al identificar parte o la totalidad de las posibilidades de las situaciones que se les plantearon (véase la sección 6.6 y las Tablas 6.10, 6.11, 6.13).

Un aspecto favorable fue que los problemas combinatorios que plantearon los normalistas (véase la Tabla 6.10) podían resolver de diferentes maneras, con lo que se reafirmó lo señalado por English (2005) de que los problemas combinatorios pueden resolverse con una variedad de formas y de herramientas de representación (véase el apdo. 6.4.4); pero este aspecto pasó inadvertido a los normalistas (véase el apdo. 6.4.2).

De acuerdo con Jacobs y Ambrose (2003), los normalistas favorecieron la interacción exploratoria en la enseñanza de medidas centrales (véase el apdo. 6.1.6) y la observacional en la enseñanza de principio multiplicativo (véase el apdo. 6.4.6).

En las siete entrevistas semiestructuradas a los normalistas sobre sus prácticas, se les dificultó identificar la estructura de los problemas combinatorios (English, 1999, citada en English, 2005, véase el apdo. 6.5.2) e inadvirtieron el papel del orden (véase la Figura 6.37), si los objetos eran distinguibles o no, si podían o no repetirse (véase el apdo. 6.5.2) y sobreestimaron (Tversky y Kahneman, 1973) la cantidad de los posibles números que podían formar con tres dígitos (véase §6.5.2.2).

A los normalistas que enseñaron medidas centrales se les dificultó comprender la función de la moda y del rango de un conjunto de datos, así como la sensibilidad de la media aritmética a los valores máximos y mínimos de la muestra. E^2_{13} reconoció que se le dificultó la enseñanza de la *simetría* de la distribución de datos al ignorar su dispersión con respecto a la media (véase §6.2.2.2). Los normalistas tampoco dieron importancia a la selección y al uso de distintos recursos semióticos (véase el apdo. 6.2.4) para la enseñanza de los conceptos de estocásticos.

En las entrevistas a los alumnos (niños y niñas de primaria), a A^5_8 se le dificultó organizar, analizar e interpretar los datos del referente K (véase el apdo. 6.3.1) y mostró las mismas dificultades que la normalista E^2_{13} tuvo en la enseñanza para considerar la simetría de la distribución de los datos y su representatividad. Los alumnos de 2° grado dieron respuestas inmediatas e intuitivas a los problemas combinatorios (véase §6.6.2.1), sin embargo, se les dificultaron los referentes G y J (véase la Tabla 6.13) al no considerar la repetición o no de dígitos o del color e inadvertir el papel del orden de los objetos (véase el apdo. 6.6.1) en mano, al igual que a los alumnos de 4° grado, lo cual también se les dificultó a los normalistas al impartir su enseñanza.

Los alumnos de 2° y 4° grado no identificaron la estructura del problema H de selecciones (véase §6.6.2.2) y el F de colocaciones (véase la Figura 6.40), de acuerdo a English (1999, citada en English, 2005, véase el apdo. 6.4.2), hasta que se les planteó un problema análogo más sencillo. Los de 4°grado usaron un *procedimiento sistemático* (véase §6.6.2.1), contrario a lo señalado por Piaget e Inhelder (1951) de que los niños de 9 a 11 años resuelven problemas combinatorios sin un procedimiento sistemático. El uso de *listados* propició que los alumnos de 2° y 4° grado activaran un procedimiento sistemático (véase §6.6.2.1 y la Figura 6.40) que les condujo a realizar enumeraciones, por medio de las cuales llegaron a conjeturas o generalizaciones (véase §6.6.4.1 y §6.6.4.3).

Concluimos que a los normalistas se les debe formar en el uso y tratamiento de diversos recursos semióticos de la enseñanza de medidas centrales y del principio multiplicativo, además de dominar el paso de una representación a otra de estos contenidos. Deben identificar e interpretar los recursos semióticos que puedan usar los alumnos de primaria y presentarles distintos procedimientos de solución a los referentes planteados, para que los niños identifiquen y argumenten por qué un procedimiento dado es correcto o incorrecto.

7.2. Conocimiento de estocásticos para la enseñanza propuesto para los futuros docentes de estocásticos

Nos referimos a lo planteado en la sección 2.4 respecto a la propuesta de Scheiner para identificar las dimensiones y la estructura (naturaleza y forma) del conocimiento de estocásticos que se constituye durante la formación de los docentes para la educación primaria. Complementamos de esta forma nuestras respuestas a las preguntas de investigación.

7.2.1. Las dimensiones del conocimiento de estocásticos propuesto para la enseñanza en primaria

En la dimensión epistemológica, la enseñanza de estocásticos en el aula de la Normal no reveló que se tomaran en cuenta los orígenes de sus conceptos ni la forma en que los niños los aprehenden, ni el papel de los términos que se utilizan para referirse a fenómenos aleatorios. Si bien estos aspectos se tratan en algunas referencias bibliográficas propuestas en el programa de estudio (SEP, 2012c) respectivo (Batanero, Díaz y Navarro (1994); y Díaz, Batanero y Cañizares (1996)), en los hechos se adopta un libro de texto enfocado en las aplicaciones básicas de la estadística, como, por ejemplo, Nortes (1991), capítulo 4. Los cálculos, capítulo con el cual no se logra cubrir todo el contenido señalado en la propuesta institucional ―particularmente se omite la inferencia estadística― y, según los temas asignados para las prácticas en el aula de primaria, por el cumplimiento de este compromiso se desplaza la atención al plan y programas para la educación primaria (SEP, 2011e y SEP, 2017a) y al libro de texto que presenta las lecciones alusivas a los temas asignados. Por lo tanto, difícilmente el normalista pudiera aprehender por lo menos el conocimiento de estocásticos *per se*.

También queda fuera de la formación propuesta al normalista la *dimensión cognitiva*, pues temas sensibles para los estocásticos, tales como el papel de la intuición probabilística, los sesgos del pensamiento ante situaciones de incertidumbre, el papel del contexto y el de las representaciones para el estudio de datos de fenómenos aleatorios, o el papel de otros conceptos matemáticos requeridos para solucionar problemas de estocásticos, están ausentes en el programa de la licenciatura. En particular, el estudio propuesto en la Normal de las medidas de tendencia central y de técnicas de conteo se centra en su conocimiento de cálculo, el cual, como lo señalan Pollatsek, *et al*. (1981), resulta insuficiente para una aprehensión conceptual de ellas.

Dado que la asignatura *Procesamiento de Información Estadística* tiene fines de aplicación de datos provenientes del ámbito educativo, como ya se señaló en el apdo. 4.2.2, la *dimensión didáctica* concerniente a cómo presentar en la enseñanza temas de estocásticos se restringe a cómo se les presenta en la propuesta institucional para la educación primaria.

Los tres señalamientos anteriores son consistentes con los tipos de datos que recopilamos de los escenarios empíricos de esta investigación.

7.2.2. La naturaleza del conocimiento profesional de estocásticos del futuro docente

La formación del futuro docente previa a su licenciatura, la asincronía en sus programas de estudio con los periodos de prácticas de enseñanza en el aula de primaria, así como la poca importancia otorgada en general a los estocásticos en la educación, resulta en un conocimiento de estocásticos deficiente del normalista.

7.2.2.1. La fuente. Las bases que constituyen el conocimiento profesional del futuro docente son el plan y programas de educación primaria (SEP, 2011e y SEP, 2017a) con los libros de texto correspondientes y, en el mejor de los casos, como referencia uno de los recomendados en el programa de estocásticos (2012c) de la normal.

7.2.2.2. Desarrollo. En ausencia de una crítica y de una supervisión del guión de la práctica y de su realización en el aula, el practicante constituirá su conocimiento de temas de estocásticos en el mismo acto de su enseñanza en el aula de primaria y con los medios prescritos para la educación primaria.

7.2.2.3. Especificidad. Al normalista se le dota de un conocimiento de contenidos que se orientan hacia la formación de un pensamiento determinista, como resultado de la preponderancia del conocimiento de cálculo, particularmente aritmético. La naturaleza de los fenómenos estocásticos, en general, queda prácticamente fuera de su formación.

Lo señalado en los tres parágrafos (§7.2.2.1, §7.2.2.2 y §7.2.2.3) tiene las siguientes razones:

1. La asignación con muy poca anticipación por parte de los docentes titulares de los grupos de primaria de los contenidos al normalista para sus prácticas de enseñanza.
2. Poca regulación de la planeación del normalista para los contenidos asignados.
3. El tiempo para la revisión de la planeación es corto (dos semanas) debido a la cantidad de temas (mínimo cinco) y de normalistas (30) por grupo.
4. La incorporación de las observaciones en ocasiones no se lleva a cabo para cumplir con la revisión de la planeación de la totalidad de los normalistas.
5. Dificultad para acceder a las aulas de primaria para observar y videograbar la práctica de enseñanza de los normalistas.

7.2.3. La forma del conocimiento profesional de estocásticos del futuro docente

Los planes y programas de estudio de educación primaria (SEP, 2011e y SEP, 2017a) no consideran el grado de integración ni el tamaño de los contenidos de estocásticos a enseñar a los alumnos; mientras que en la propuesta institucional para la Licenciatura en Educación Primaria (SEP, 2012c) su grado de integración es mayor al tiempo destinado para su enseñanza, ésta queda compartimentalizada y sus ideas fundamentales no guían la enseñanza como lo prescribe un curriculum en espiral (Heitele, 1975).

7.2.3.1. Grado de integración. Tan sólo por la extensión del programa de estocásticos (SEP, 2012c) de la Licenciatura para desarrollarse en un solo semestre, así como por la deficiente formación preuniversitaria en estocásticos que en general prevalece en nuestro sistema educativo (por ejemplo, Carballo, 2004; Alquicira, 1998; Elizarraras, 2004; Rivera, 2011b; Salcedo, 2013), se privilegia la cantidad de conocimiento en la formación docente sin su integración funcional con otras áreas de matemáticas, sino desviando el foco hacia algunas de éstas (por ejemplo, a la aritmética).

7.2.3.2. Tamaño. El conocimiento se presenta al normalista sin continuidad, compartimentalizado, y en lugar de propiciar una transformación del conocimiento de estocásticos *per se*, se le desplaza hacia su presentación para el alumno de primaria.

Como se señaló en el capítulo 4, la forma de presentar los contenidos (lo que Scheiner (2015) considera como tamaño) en los planes y programas está fragmentada, es decir, se presenta en unidades en el caso de la Licenciatura en Educación Primaria y en bloques en la propuesta de educación primaria.

Al normalista a lo mucho se le forma considerando los contenidos de la propuesta de primaria debido a la temporalidad de las prácticas docentes, pues éstas ocasionan que las sesiones en el aula de la normal sean menos. En ocasiones se acota el programa de la propuesta (SEP, 2012c) y se lleva a cabo la enseñanza de la unidad 1 “Estadística” y de la unidad 4 “Vinculación con el eje Manejo de la Información Estadística” (SEP, 2011e) y el eje “Análisis de Datos” (SEP, 2017a), en otros casos se llega a la enseñanza de la Unidad 2. Probabilidad y muestreo, pero al final del semestre cuando los normalistas ya han llevado a cabo sus prácticas docentes.

7.2.4. Acerca de lo que requiere la formación docente en estocásticos para primaria

De acuerdo a lo propuesto por Scheiner (2005), concluimos que las bases para la enseñanza de ideas fundamentales de estocásticos requieren que el docente situado en el acto de enseñanza integre las tres dimensiones: epistemológica (considerando un conocimiento general y específico del tema a tratar), cognitiva (identificando las dificultades o errores que presenten los alumnos sobre la comprensión del tema al enseñarlo) y didáctica (la selección y modificación o nueva propuesta de recursos didácticos durante la enseñanza del tema). Sólo así se logrará transformar el conocimiento de la materia *per se* en un conocimiento de la materia para la enseñanza.

Los libros de texto de las propuestas institucionales de la normal (SEP, 2012d) y de educación primaria (SEP, 2011e y SEP, 2017a) ofrecieron algunas pautas para formar un repertorio de situaciones que permitieron identificar las dificultades del dominio de contenido particular y específico de los normalistas, así como las dificultades, errores o diversas maneras de responder problemas de estocásticos, por parte de los alumnos, por lo que el uso de los planes y programas, y de los libros de texto debe ser bajo un análisis crítico y reflexivo antes y durante la enseñanza.

Es necesario que la educación de los futuros docentes incluya la identificación de la *variación* y la *dispersión* de los datos, el origen de éstos e incluir las *medias armónica* y *geométrica*. Además, conviene considerar el diseño de actividades que promuevan el conocimiento intuitivo y los cinco enfoques propuestos por Mokros y Rusell (1995) al tratar las medidas de tendencia central. Con respecto al tratamiento del *rango* en la propuesta de Bakker (2003), Garfield y Ben-Zvi (2008) proponen que los estudiantes reciban enseñanza del rango medio como precursor al tratamiento y comprensión significativa de la *media*, la *mediana* y la *distribución*.

También resulta necesario aclarar al normalista la particularidad de cada una de las medidas de tendencia central, englobadas por el término *promedio*, así como la pertinencia de la aplicación de cada una de acuerdo a la situación referente, a sus datos y a la pregunta de interés, como lo ha señalado Triola (2009). En acuerdo con Garfield y Ben-Zvi (2008) se deben desarrollar los conceptos de *medidas de centro* a través del tratamiento de la *media* y la *mediana*, las cuales deben ser introducidas informalmente en una primera instancia.

Juzgamos pertinente proponer a los normalistas procedimientos erróneos en la resolución de problemas de contenidos estocásticos para que los analicen y corrijan (véase la sección 5.4), a fin de que los reconozcan en posibles desempeños de sus alumnos en su práctica docente futura; ya que como señalan Zazkis y Hazzan (1999), las preguntas de desempeño permiten a los alumnos explicar cómo encontrar la respuesta, por qué seleccionar determinado procedimiento y cómo decidir la solución a un problema planteado.

La enseñanza de estocásticos de los normalistas requiere también que se incluya la identificación de otras estrategias de solución a los problemas de técnicas de conteo y considerar al diagrama de árbol como un recurso para organizar todos los resultados posibles; de lo contrario, las mismas dificultades que ellos han enfrentado las tendrán sus futuros educandos.

El futuro docente debe reconocer el papel de las múltiples representaciones de un contenido matemático (Dreher y Kuntze, 2015), la comprensión del uso de las representaciones y herramientas (tecnología y materiales manipulativos) favorecerá que los estudiantes recopilen y analicen "los datos de los experimentos identificando 'las propiedades de las diferentes representaciones que hacen que un concepto sea relevante'" (Stohl, 2005, citado en Jones, 2005, p. 362).

Los normalistas requieren que se les forme en el uso y tratamiento de diversos recursos semióticos que pueden utilizar para enseñar medidas de tendencia central y el principio multiplicativo; requieren dominar el paso de una representación a otra de estos contenidos. También necesitan reconocer los recursos que puedan usar los alumnos de primaria al dar respuesta a las situaciones referentes que se les propongan sobre promedios y principio multiplicativo.

Es conveniente que los normalistas preparen procedimientos de solución incorrectos a los problemas que planteen en el aula para que los alumnos de primaria los analicen e identifiquen y argumenten por qué el proceso es correcto o incorrecto.

Es necesario que, si se cuenta con maestros experimentados (responsables del grupo de primaria que acoge la práctica), éstos no se limiten a ser simples observadores del desempeño del practicante, sino que orienten al normalista en la enseñanza.

7.3. Objetivos de la investigación

De acuerdo a la naturaleza de esta investigación, cualitativa y en curso, los objetivos (véase el apdo. 1.5.1) se precisaron de acuerdo a las posibilidades de acceso a los escenarios empíricos (véase la Figura 3.1).

El Conocimiento Matemático para Enseñar (CME) que requieren los docentes en formación debe estar conformado por el dominio de las tres dimensiones que propone Scheiner (2015), en cuanto a la dimensión epistemológica, los normalistas requieren formación y conocimiento acerca de los obstáculos epistemológicos que pueden presentar los alumnos de los diferentes grados de primaria al tratar las medidas de tendencia central y el principio multiplicativo.

Las dificultades de comprensión de ideas fundamentales de estocásticos de los docentes en formación derivaron de su conocimiento a lo más sólo de cálculo de algunas de ellas y de su desconocimiento de las demás. En particular, su desconocimiento o poco tratamiento de los promedios y del principio multiplicativo en años anteriores y durante su formación en las aulas de la normal se reveló en sus prácticas de enseñanza.

7.3.1. Propuesta de enseñanza

La propuesta de modificación curricular para enseñanza de los futuros docentes en las aulas de la normal estaría conformada de la siguiente manera:

Con respecto a la formación de medidas de tendencia central

1. Estudiar la historia del término promedio y los distintos promedios que existen, de acuerdo con Bakker (2003) y Garfield y Ben- Zvi (2008) “la historia de las estadísticas puede ser fuente de inspiración para el diseño instruccional [de la enseñanza]” (p. 193).
2. Enseñar la naturaleza de los datos, así como identificar de dónde y cómo se producen o recopilan estos, conocer los diferentes tipos de análisis de datos y llegar a conclusiones de acuerdo a los datos recabados (Garfield y Ben- Zvi, 2008).
3. Leer, analizar y trazar gráficos de acuerdo a las variables de cada referente que se les presente.
4. Enseñanza del rango medio (Bakker, 2003) como antecedente de los promedios.
5. Identificar y clarificar términos relevantes como lo es la variación y la distribución de los datos de acuerdo con Burril y Biehler (2013), la representatividad de los datos de acuerdo a Mokros y Russell (1995) y Bakker (2003).
6. Primeramente, introducir el tratamiento de las medidas centrales y de dispersión de manera informal.
7. Determinar y conocer las diferentes funciones de las medidas de tendencia central y de dispersión.

Para la enseñanza de las técnicas de conteo, los normalistas deben formarse en:

1. Reconocer las propiedades estructurales (bidimensional o tridimensional) de los problemas combinatorios (English, 1999 citada en English, 2005).

2. Identificar las diferentes técnicas de conteo: colocaciones, selecciones, permutaciones y combinaciones.
3. Conocer diversas estrategias de solución a problemas combinatorios, por ejemplo, los listados (Lockwood y Gibson, 2016) y el diagrama de árbol (Fischbein, 1975; Heitele, 1975) como recursos para identificar todos los resultados posibles en un experimento.
4. Que los normalistas generen problemas de técnicas de conteo con diferentes procedimientos de solución.

En ambas enseñanzas, los futuros docentes deben considerar la estructura del tipo de situación de referencia (Steinbring, 2005) que plantearán a los alumnos, conocer y aprender todas las posibles respuestas y usar diferentes recursos semióticos para que primeramente los normalistas aprendan los conceptos de estocásticos y posteriormente, los enseñen. En este segundo momento, la interacción que se establezca entre los futuros docentes y los alumnos permitirá la comprensión y aprehensión de los conocimientos nuevos (Steinbring, 2005) por los educandos.

Importante para la formación de los futuros docentes es el que sus formadores de formadores asistan a observar sus prácticas en las aulas de primaria con un guión de observación mejor estructurado que proponemos (véase la Tabla 7.1), que el que actualmente utilizan.

Tabla 7.1. Guión de observación de enseñanza.

Datos de identificación de la escuela normal.		
Datos de identificación de la escuela primaria.		
Datos de identificación del normalista y el grado a observar.		
Rasgos	**Indicadores**	**Observaciones y/o sugerencias**
Planeación	1. Realiza la planeación de las actividades acordes a la edad de los niños.	
	2. El objetivo del tema es acorde a las actividades propuestas y a los alumnos del grupo.	
	3. Realiza una investigación documental sobre el tema a enseñar.	
	4. Domina el contenido del tema a enseñar (de estocásticos).	
Desarrollo de la práctica	5. Los referentes planteados están correctamente escritos y son claros para que los alumnos los comprendan.	
	6. Selecciona y usa diferentes recursos semióticos para enseñar los diferentes conceptos (de estocásticos) implícitos en el tema de enseñanza.	
	7. Identifica y pondera los diferentes procedimientos de los alumnos.	
	8. Promueve que los alumnos argumenten si los procedimientos propuestos por sus compañeros son correctos o incorrectos.	
	9. Identifica las dificultades que presentan los alumnos para comprender el tema (de estocásticos) durante la enseñanza.	
Después de la práctica	10. Los normalistas reconocen sus errores o dificultades durante la práctica de enseñanza.	
	11. Identificaron los errores que presentaron los alumnos en el tratamiento del contenido	
	12. Propone alternativas o variantes para enseñar el contenido con otros grados o grupos.	

Resulta conveniente que los formadores de docentes sean investigadores (Cowie, *et al.*, 2010), o por lo menos sus tutores, para que fortalezcan el proceso de formación que otorgan con el procedimiento siguiente: 1) supervisar el guión de práctica; 2) observar y videograbar la enseñanza de estocásticos que llevan a cabo los normalistas en las aulas de escuelas primarias; 3) revisar, analizar, discutir y reflexionar conjuntamente (formador y normalista o grupo de normalistas) acerca del guión de práctica, el video del desarrollo de la práctica y los resultados en el desempeño de los alumnos; 4) vigilar que se incorporen al guión de práctica las modificaciones que resulten de la reflexión.

7.4. Futuras investigaciones

La investigación puede tener continuación en varias direcciones, por ejemplo:

a) Complementar la organización e instrumentos de la presente investigación con la propuesta del Nuevo Modelo Educativo; en específico se trata de:

I) Complementar el análisis de la propuesta (SEP, 2017a) dado que hasta el momento sólo se cuenta con los libros de texto para primero y segundo grado.

II) Llevar a cabo la observación de clase y las entrevistas con los futuros docentes y los alumnos de primero y segundo grado sobre la enseñanza de temas estadísticos con el Nuevo Modelo Educativo.

b) Otras direcciones de investigación para ahondar en distintos temas serían:

III) Profundizar el acercamiento intuitivo de la determinación de la media aritmética mediante la estrategia de la compensación de los datos que evidenciaron los alumnos de quinto grado.

IV) Realizar un seguimiento de la enseñanza de estocásticos de los futuros docentes (ahora ya docentes en activo) que participaron en la presente investigación.

V) Considerar una investigación profunda sobre la interacción entre docente y alumnos para comprender y/o aprehender un conocimiento sobre temas de estocásticos identificando la relación de éste con el objeto y el signo; además de, considerar e identificar los significados y significadores que cada alumno ponga en juego en la clase.

VI) Llevar a cabo la propuesta de investigación con los Formadores de los futuros profesores.

Referencias Bibliográficas

Abbagnano, N. (1963). *Diccionario de Filosofía*. Editorial Fondo de Cultura Económica, México. p. 186.

Abrahamson, D. (2014). Rethinking probability education: perceptual judgment as epistemic resource. In E. J. Chernoff & Sriraman (Eds), *Probabilistic thinking: presenting plural perspectives* (pp. 239-260). New York: Springer.

Alquicira, Z. M. I. (1998). *Probabilidad: Docencia y Praxis. Hacia una Fundamentación Epistemológica.* Tesis de maestría en ciencias no publicada. DME, Cinvestav IPN. México.

Andrà, Ch. (2011). Preservice primary school teachers' intuitive use of representations in uncertain situations. En Pytlak, M., Rowland, T., Swoboda, E. (Eds.). *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. pp. 715-724.

Angoa, A. (2002). *Comprensión de correlación lineal y uso de un programa de cómputo estadístico. El caso de egresados de Licenciatura en Ciencias Naturales*. Tesis de maestría. DME, Cinvestav del IPN.

Askew, M., Brown, M., Devenir, H. & Rhodes, V. (2000). Describing primary mathematics lesson observed in the Leverhulme Numeracy Research Programme: A qualitative framework. *Proc. Psychology of Mathematics Education* 24, (2), 17-24.

Bakker, A. (2003). The Early History of Average Values and Implications for Education. *Journal of Statics Education*. 11 (1). Recuperado el 16 de febrero de 2016, de http://www.amstat.org/publications/jse/v11n1/bakker.html.

Bakker, A. & Gravemeijer, K. (2004). Cap. 7. Learning to Reason About Distribution. En D. Ben-Zvi & Garfield, (Eds.), *The Challenge of Developing Statical Literacy, Reasoning and Thinking.* (147-168) Kluwer Academic Publishers. NETHERLANDS.

Ball, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education*, 51 (3), 241-247.

Ball, D. L., & Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on the teaching and learning of mathematics*. (pp. 83-104). Westport, CT: Ablex.

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2007) *Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special?* Manuscrito enviado para publicación.

Batanero, M.C., Díaz, J. y Navarro, V. (1996). *Razonamiento Combinatorio*. España: Síntesis.

Batanero, C.; Godino, J. y Navas, F. (1997). Concepciones de maestros de primaria en formación sobre los promedios. Versión ampliada del trabajo publicado en H. Salmerón (Ed.), *VII Jornadas LOGSE: Evaluación Educativa* (pp. 310-304), 1997. Universidad de Granada.

Burrill, G. & Biehler, R. (2013). Les idées statistiques fondamentales dans le curriculum scolaire. *Statistique et Enseignement*, 4(1), 5-24. Recuperado el 20 de octubre de 2016, de http://www.statistique-etenseignement.fr.

Canada, D. (2007). Informal conceptions of distribution held by elementary preservice teachers. In Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds.). Vol. 2, pp. 73-80. Seoul: PME.

Carballo, M. T. (2004). *Estocásticos en el segundo grado de educación primaria. Determinismo y azar.* Tesis de maestría en ciencias no publicada. DME, Cinvestav IPN. México.

Casullo, A. (2000). Riesgos sociales, medioambientales y personales percibidos por los adolescentes. *Anuario de Investigaciones VIII*. Buenos Aires: Secretaría de Investigaciones, Fac. de Psicología, U.B.A. Recuperado el 16 de abril de 2016, de http://www.psi.uba.ar/academica/carrerasdegrado/psicología/sitios_cátedras/obligatorias/060estadistica1/material/practicos/practic 32c.pdf.

Chernoff, E. & Sriraman, B. (Eds.) (2014). *Probabilistic thinking: presenting plural perspectives. Advances in Mathematics Education*, v. 7. New York: Springer.

Cohen, D. K. (2011). *Teaching practice and its predicaments*. Unpublished manuscript, University of Michigan, Ann Arbor.

Cortés, G. y García, S. (2003). *Investigación documental*. México: SEP, Dirección General de Educación Superior, Escuela Nacional de Biblioteconomía y Archivonomía.

Cowie, B., Otrel-Cass, K., Moreland, J., Jones, A., Cooper, B. & Taylor, M. (2010). *Teacher-Researcher Relationships and Collaborations in Research. Waikato Journal of Education, 15 (2), 69-80.*

De León, J. A. (2002). *Estudio de la comprensión de la ley de los grandes números es estudiantes de nivel superior: el caso de ciencias sociales*. Tesis de maestría no publicada. DME. Cinvestav IPN. México.

Díaz, J., Batanero, M. y Cañizares, Ma. (1991). Matemáticas: cultura y aprendizaje. *Azar y Probabilidad*. Ed. Síntesis. España. pp. 126-127.

Dreher, A., & Kuntze, S. (2015). Teachers' professional knowledge and noticing: The case of multiple representations in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 88, 89-114.

Dubois, J. G. (1984). Une systematique des configurations combinatoires simples [A system of simple combinatorial configurations]. *Educational Studies in Mathematics*, 15 (1), 37-57.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME*. Vol. 9.1. pp. 143-168.

Elizarraras, S. (2004). *Enseñanza y comprensión del enfoque frecuencial de la probabilidad en el segundo grado de secundaria.* Tesis de maestría no publicada. DME. Cinvestav IPN. México.

Elorza, H. (2008). *Estadística para ciencias sociales y del Comportamiento*. México: CENGAGE Learning. pp. 161-173

English, L. D. (2005). Combinatorics and the development of children's combinatorial reasoning. In G. A. Jones (Ed.), Exploring probability in school: *Challenges for teaching and learning* (Vol. 40, pp. 121-141) New York: Springer.

Espinosa, M. (2007). *Comprensión de medidas de dispersión. Caso de la licenciatura en Psicología.* Tesis de maestría no publicada. DME. Cinvestav IPN. México.

Ferran X. (2012). 100 ejercicios resueltos de estadística básica para economía y empresa. *Departament d'Economia i d'Història Econòmica*. Universitat Autònoma de Barcelona Servei de Publicacions Bellaterra.

Ferrater, J. (1994). *Diccionario de Filosofía*. Tomo IV (Q-Z). Editorial Ariel, S. A. Barcelona. pp. 3033-3037.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Holland: Reidel.

Fischbein, E (1977). The dialectic of image and concept. *Educational Studies in Mathematics,* 8(2), 153-165.

Flores, L., P. (2002). *La predicción y el azar: praxis, creencias, saberes y conocimientos del docente de educación primaria*. Tesis de maestría. DME. Cinvestav IPN. México.

Flores, M. (2009). *Medios y enseñanza de estocásticos en el tercer ciclo de educación primaria. Tesis de maestría en ciencias.* DME, Cinvestav IPN. México.

Garfield, J. & Ben-Zvi, D. (2008). *Developing Students' Statistical Reasoning. Connecting Research and Teaching Practice*, pp. 187-200. USA: Springer.

Garnica, I.; Ojeda, A. M.; (eds.): 2003, *Enseñanza y estocásticos en el aula. Tareas de indagación. Seminario "Probabilidades y Estadística en Matemática Educativa. Vinculación con la Educación Secundaria*. Año 2002". DME, Cinvestav del IPN.

Gattuso, L. (2006). Statistics and mathematics: Is it possible to create fruitful links? In Rossman, A. & Chance, B. (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics* (ICOTS7). International Association for Statistical Education (IASE): International Statistical Institute (ISI). Recuperado el 28 de mayo de 2015, de http://iase-web.org/documents/papers/ icots7/1C2_GATT.pdf.

Gurrola, M. (1998). *Pensamiento Probabilístico en niños en estadio básico.* Tesis de maestría. DME. Cinvestav IPN. México.

Hacking, I. (1975). *The emergence of probability*. NY: Cambridge University Press.

Heitele, D. (1975). An epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematic*s. 6 *(2)*, 187-205.

Heredia, F. (1998). *Ideas de combinatoria y su transferencia a un contexto probabilístico: un estudio con alumnos de secundaria*. Tesis de maestría en ciencias. DME, Cinvestav IPN. México.

Hill, H. C., Ball, D. L. & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39 *(4)*, 372-400.

Hogarth, R. M. (2001). Marco para el desarrollo de la intuición. En *Educar la intuición. El desarrollo del sexto sentido* (pp. 281-320). Barcelona: Paidós.

INEGI. (2013). *Diseño de cuestionarios. Estadística - Metodología*. México: INEGI, c2013. 61p. ISBN 978-607-494-488-4

Jacobs, V. R. & Ambrose, R. C. (2003). Individual interviews as a window into teachers' practice: A framework for understanding teacher-student interactions during mathematical problem solving. *American Educational Research Association Annual Meeting*. Chicago. IL.

Johnson, R. (1976). *Estadística Elemental*. Ed Trillas. México. p. 85

Jones, Graham (2005). *Exploring Probability in School. Challenges for Teaching and Learning*. USA: Springer.

Kahneman, D. & Tversky, A. (1972). Subjective probability: A Judgment of representativeness. *Cognitive Psychology*, 1972 (3) 430-454.

Kahneman, D. (2011). Pensar rápido, pensar despacio. *Cap. 1. Dos sistemas*. Los Angeles Times Book Award for Current Interest. pp. 60-102.

Kemeny, J., Snell, I., y Thompson, G. (1972). Introducción a las matemáticas finitas. *Capítulo 3. Particiones y conteo*. México: Compañía Editorial Continental. pp. 103-133.

Kerlinger, F. y Lee, B.H. (2002). *Investigación del comportamiento. Métodos de la investigación en ciencias sociales*. México: McGraw Hill. pp. 181-189.

Kuzle, A. & Biehler, R. (2015). Examining mathematics mentor teachers' practices in professional development courses on teaching data analysis: implications for mentor teachers' programs. *ZDM Mathematics Education* 47, pp. 39–51. DOI 10.1007/s11858-014-0663-2.

Levin, J. y Levin, W. (2011). *Fundamentos de estadística en la Investigación social*. México: Alfaomega Grupo Editor. pp. 39 -72

Limón, A. (1995). *Elementos para el análisis crítico de la posible inserción curricular de nociones estocásticas, ausentes en los programas de preescolar y primaria.* Tesis de maestría. DME. Cinvestav IPN. México.

Lockwood, E. & Gibson, B. (2016). Combinatorial task and outcome listing: Examining productive listing among undergraduate students. *Educational Studies in Mathematics,* 91, 247-270. DOI 10.1007/s10649-015-9664-5

Lonngi, P. (2015). *Comprensión de ideas fundamentales de Probabilidad y de Estadística de Estudiantes Sordos: Edades 17-26años.* Tesis de maestría. DME. Cinvestav IPN. México.

López, J. M. (2006). *Comprensión de la Ley de los grandes números en el tercer grado de secundaria.* Tesis de maestría en ciencias. DME, Cinvestav IPN. México.

López, J. M. (2009). *Estocásticos en el segundo grado de Educación Especial.* Tesis de maestría en ciencias. DME, Cinvestav IPN. México.

López, J. M. (2013). *Pensamiento Probabilístico y Esquemas Compensatorios en la Educación Especial*. Tesis de doctorado en ciencias. DME, Cinvestav IPN. México

Martínez, A. M. (2010). *Un estudio con profesores en formación sobre su conocimiento pedagógico en matemática*s. Tesis de Maestría. Cinvestav I. P. N. México.

Martínez, A. M. y Ojeda, A. M. (2016). Estrategias que utilizan los docentes en formación para resolver problemas de conteo. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 29*, 973-981. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Martínez, A. M. y Ojeda, A. M. (2018). *La formación en estocásticos del futuro docente de primaria*. En F. M. Rodríguez y B. R. Ruiz (Eds.). Formación de Profesores de

Matemáticas en Diversos Contextos (608-625). México: XX EIME. ED. Buenos Aires. ISBN 978-607-95761-3-4

Maturana, H. y Varela, F. (1994). *El árbol del Conocimiento*. Ed. Universitaria.

Mendenhall, W., Beaver R., Beaver, B. (2002). *Introducción a la probabilidad y estadística*. México: Thomson. pp. 47-92.

Mokros, J. & Russell, S. J. (1995). Children's concepts of average and representativeness. *Journal for Research in Mathematics Education*. 26 (1), 20-39

Moroney, M. J. (1979). Promedio y dispersión. En Newman. *El mundo de las matemáticas*. Serie Σ, tomo 3, cuarta ed. pp. 169-193. España: Grijalbo.

Nortes, A. (1991). Encuestas y precios. *Capítulo 4. Los cálculos*. España. Síntesis.

Ojeda, A. M., Colin, J., y Garnica, I. (1993). *Intuición y probabilidad desde el punto de vista de Fischbein.* En Cuadernos de Investigación. Año VII. No. 26. Noviembre, 1993. Cinvestav IPN. México, D. F.

Ojeda, A. M. (s.f.). *Predicción y Azar: Formación, Docencia e Investigación en la Educación Matemática Básica*. Documento interno. Manuscrito no publicado, Cinvestav-IPN, México.

Ojeda, A. M. (1994). *Understanding Fundamental Ideas of Probability at Pre-University Levels. Unpublished doctoral thesis*. King's College London, UK.

Ojeda, A. M. (2006). Estrategia para un perfil nuevo de docencia: un ensayo en la enseñanza de estocásticos. En Filloy (Ed.) *Matemática Educativa, treinta años* (pp. 257-281). México: Santillana-Cinvestav.

Ojeda, A. M. (2007). *Probabilidad y Estadística en Matemática Educativa.* Seminario de Investigación. Documento Interno. Manuscrito no publicado, Cinvestav-IPN, México, D.F. México.

Patiño R. (2002). *Medidas de tendencia central y variabilidad para datos agrupados*. Instituto Tecnológico de Celaya. Departamento de Ingeniería Química. Recuperado el 20 de marzo de 2016, de http://iqcelaya.itc.mx/~roosph/pye/u2/eu2ej4.pdf.

Parker, M. & Leinhardt, G. (1995). Percent: A Privileged Proportion. *Review of Educational Research*. Vol. 65, No.4, pp. 421-481

Perrusquía, E. (1998). *Probabilidad y Aritmética: estudio Epistemológico en el Estadio Medio. Dificultades de Interpretación.* Tesis de maestría en ciencias. DME, Cinvestav IPN. México.

Pfannkuch, M. (2011). The Role of Context in Developing Informal Statistical Inferential Reasoning: A Classroom Study. *Mathematical Thinking and Learning*, 13:1-2, 27-46. Recuperado el 26 de noviembre de 2015, de http://dx.doi.org/10.1080/10986065.2011.538302.

Piaget, J. and Inhelder, B. (1951). *The Origin of the Idea of Chance in Children.* W. W. Norton & Company INC. New York, 1975.

Pinzón, A. (1975). *Conjuntos y estructuras*. Teoría/350 problemas resueltos. 433 Ejercicios propuestos. HARLA S. A. de C. V., México, pp. 310 y 318.

Pollatsek, A., Lima, S., & Well, A. D. (1981). Concept or Computation: Student's Understanding of the Mean. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 12, No. 2, pp. 191-204. Springer.

Ramos, A. (2015). *La Probabilidad y la Estadística en la Construcción del Pensamiento Matemático del niño preescolar.* Tesis de maestría en ciencias. DME, Cinvestav IPN.

Real Academia Española: *Diccionario de la lengua española*, 23.ª ed., [versión 23.4 en línea]. <https://dle.rae.es> [12/03/2021] México.

Requena, B. (2016). *Universo formulas*. Recuperado el 18 de abril de 2016, de http://www.universoformulas.com.

Ritchey, F. (2008). Estadística para las ciencias sociales. México: McGraw-Hill.

Rivera, F. (2011a). *Towards a Visually-Oriented School Mathematics Curriculum: Research, Theory, Practice, and Issues*. New York: Springer.

Rivera, M. (2011b). *Comprensión de ideas fundamentales de estocásticos en el bachillerato universitario.* Tesis de maestría en ciencias. DME, Cinvestav IPN. México.

Ross, S. (2008). *Introducción a la Estadística*. España: Reverté. pp. 69-113

Salcedo, J. (2013). *Razonamiento Probabilístico en el Bachillerato Tecnológico.* Tesis de maestría en ciencias. DME, Cinvestav IPN. México.

Santos, L., y Semana, S. (2014). Developing mathematics written communication trough expository writing supported by assessment. *Educational Studies in Mathematics*, 88:65-87. Springer Science.

Scheiner, T. (2015). Shifting the emphasis toward a structural Description of (mathematics) teachers´ knowledge. In Bewick, K., Muir, T., & Wells, J. (Eds.). *Proceeding of 39th Psychology of Mathematics Education conference*, Vol. 4, pp. 129-136. Hobart, Australia: PME.

SEP. (1993). *Planes y programas de estudio 1993*. Educación Básica. México.

SEP. (1997). *Plan de Estudios 1997*. Licenciatura en Educación Primaria. México.

SEP. (2002). *Matemáticas y su enseñanza II.* Programa y materiales de apoyo para el estudio. Licenciatura en Educación Primaria. Tercer Semestre. México.

SEP. (2009). *Planes y programas de estudio 2009*. Educación Básica. México.

SEP. (2011a). *Matemáticas, tercer grado* (Libro para el alumno). México.

SEP (2011b). *Matemáticas, cuarto grado* (Libro para el alumno). México.

SEP (2011c). *Matemáticas, quinto grado* (Libro para el alumno). México.

SEP (2011d). *Matemáticas, sexto grado* (Libro para el alumno). México.

SEP (2011e). *Planes y programas de estudio 2011*. Educación Básica. México.

SEP (2012a). *Matemáticas, primer grado* (Libro para el alumno). México.

SEP (2012b). *Matemáticas, segundo grado* (Libro para el alumno). México.

SEP (2012c). *Planes y programas de la Licenciatura en Educación Primaria 2012.* México.

SEP (2012d). *Procesamiento de Información Estadística*. Programa del curso. México.

SEP (2012e). *Programas de estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica Primaria. Primer Grado*. México: SEP

SEP (2012f). *Programas de estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica Primaria. Segundo Grado*. México: SEP

SEP (2012g). *Programas de estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica Primaria. Tercer Grado*. México: SEP

SEP (2012h). *Programas de estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica Primaria. Cuarto Grado*. México: SEP

SEP (2012i). *Programas de estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica Primaria. Quinto Grado*. México: SEP

SEP (2012j). *Programas de estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica Primaria. Sexto Grado*. México: SEP

SEP (2014a). *Desafíos matemáticos, Primer grado* (Libro para el alumno). México.

SEP (2014b). *Desafíos matemáticos, Segundo grado* (Libro para el alumno). México.

SEP (2014c). *Desafíos matemáticos, Tercer grado* (Libro para el alumno). México.

SEP (2014d). *Desafíos matemáticos, Cuarto grado* (Libro para el alumno). México.

SEP (2014e). *Desafíos matemáticos, Quinto grado* (Libro para el alumno). México.

SEP (2014f). *Desafíos matemáticos, Sexto grado* (Libro para el alumno). México.

SEP (2014g). *Desafíos matemáticos, Primer grado* (Libro para el maestro). México.

SEP (2014h). *Desafíos matemáticos, Segundo grado* (Libro para el maestro). México.

SEP (2014i). *Desafíos matemáticos, Tercer grado* (Libro para el maestro). México.

SEP (2014j). *Desafíos matemáticos, Cuarto grado* (Libro para el maestro). México.

SEP (2014k). *Desafíos matemáticos, Quinto grado* (Libro para el maestro). México.

SEP (2014l). *Desafíos matemáticos, Sexto grado* (Libro para el maestro). México.

SEP (2016). Nuevo Modelo Educativo. México. *Propuesta curricular*. Recuperado el 29 de noviembre de 2016, de http://www.gob.mx/modeloeducativo2016.

SEP (2017a). Aprendizajes Clave para la Educación Integral. *Plan y programas de estudio para la Educación Básica.* México. pp.7-29. Recuperado el 7 de enero de 2018, de http://www.aprendizajesclave.sep.gob.mx/descargables/MATEMATICAS.pdf.

SEP (2017b). *Nuevo Currículo de la Educación Media Superior*. Campo disciplinar de matemáticas. Bachillerato General. Recuperado el 20 de julio de 2018, de http://www.sems.gob.mx/curriculoems/programas-de-estudio.

SEP (2017c). Escuelas Normales. Licenciaturas en Educación Preescolar, Primaria, Preescolar Intercultural Bilingüe y Primaria Intercultural Bilingüe. (Presentación Power Point). En *3ra Reunión Nacional de Trabajo para la Actualización y Rediseño Curricular* efectuada en Saltillo, Coahuila. Noviembre, 2017.

SEP (2018a). *Matemáticas*, *Primer grado* (Libro para el alumno). México.

SEP (2018b). *Matemáticas*, *Segundo grado* (Libro para el alumno). México.

SEP (2018c). *Matemáticas*, *Primer grado*. *Docente.* México.

SEP (2018d). *Matemáticas*. *Segundo grado*. *Docente*. México.

SEP (2018e). *Orientaciones curriculares para la Formación Inicial*. México. Recuperado el 1 de agosto de 2018, de https://www.dgespe.sep.gob.mx/public/estrategia_fortalecimiento/Orientaciones_curriculares.pdf.

SEP (2020). *Probabilidad y estadística*. Programa del curso. México.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Research*, 15 (2), 4-14.

Spiegel, M. (1990). *Teoría y problemas de estadística*. México: McGraw-Hill.

Steinbring, H. (1989). The interaction between teaching practice and theoretical conceptions. A cooperative model of in-service training in stochastics for mathematics teachers (Grades 5-10). En R. Morris, (Ed.), *Studies in Mathematics.* Paris.

Steinbring, H. (1991). The Concept of Chance in Everyday Teaching: Aspects of a Social Epistemology of Mathematical Knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 22, 503-522.

Steinbring, H. (2005). *The Construction of new Mathematical Knowledge in Classroom Interaction*. USA: Springer.

Steinbring, H. (2006). What makes a sing a mathematical sing? An epistemological perspective on mathematical interaction. *Educational Studies in Mathematics*, 61: 133-162.

Tversky, A. & Kahneman, D. (1973). Availability: A Heuristic for Judging Frequency and Probability. *Cognitive Psychology* 5, 207-232

Triola, M. (2009). *Estadística. México*: Pearson Educación.

Vasilachis, I. (2006). *Estrategias de investigación cualitativa*. España: Gedisa.

Vázquez, O. (2004). *Enseñanza y comprensión del enfoque clásico de la probabilidad en primer grado de secundaria.* Tesis de maestría en ciencias. DME, Cinvestav IPN. México.

Vilenkin, N. (1972). *¿De cuántas formas? Combinatoria*. Moscú: Editorial MIR.

Visauta, B. (2007). *Análisis estadístico con SPSS 14. Estadística básica*. México: McGraw-Hill. pp. 44-46

Wittrock, M. (1986). *La investigación de la enseñanza II*. Barcelona: Paidós.

Zazkis, R. & Hazzan, O. (1999). Interviewing in Mathematics Education Research: Choosing the Questions. *Journal of Mathematical Behavior*, 17 (4), 429-439. ISSN 0364-0213.

Zawojewski, J. S. y Shaughnessy, J. M. (2000). Media y mediana: ¿son realmente tan fáciles? *Enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria*, 5 (7), 436-440.

Apéndices

Apéndice 1

Cuestionario 1

BENEMÉRITA ESCUELA NACIONAL DE MAESTROS
COLEGIO DE MATEMÁTICAS
EXÁMEN DIAGNÓSTICO DE PROCESAMIENTO DE LA INFORMACIÓN ESTADÍSTICA

Nombre del alumno (a): ___________________________________ Grupo: ________

I. Relaciona las columnas.

1) Evento o suceso
2) Espacio muestra
3) Permutación
4) Combinación.
5) Diagrama de árbol
6) Variable aleatoria
7) Media
8) Mediana
9) Moda

( ) Conjunto formado por todos los resultados posibles derivados de un experimento.

( ) Subconjunto del espacio muestra.

( ) Es el dato más frecuente en un conjunto de datos.

( ) Muestra ordenada de elementos de una población.

( ) Muestra no ordenada de los elementos de la población.

( ) X es una función de Ω en R.

( ) Descripción gráfica de las distintas alternativas que se van presentando en cada una de las fases durante el desarrollo del experimento.

( ) Es la suma de los datos dividida entre el número total de datos.

( ) Promedio de los datos que están a la mitad de la lista.

II. Selecciona la respuesta de las siguientes preguntas.

10. ¿Cuál es la probabilidad de que suceda un evento seguro?

a) 0.5 b) 0.25 c) 0.75 d) 1

11. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra un evento imposible?

a) 0 b) 0.25 c) 0.75 d) 1

12. Es el evento cuya probabilidad de ocurrencia se encuentra entre 0 y 1. Cuanto menos probable sea el suceso, más cerca estará del 0 y cuánto más probable sea, más cerca estará de 1.

a) Evento imposible b) Evento posible o probable

c) Evento improbable d) Evento seguro

III. Resuelve los problemas:

13. ¿Cuál es la probabilidad de que, al lanzar 2 monedas al piso, las caras superiores sean águilas?

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{3}{2}$ c)$\frac{1}{2}$ d) $\frac{3}{4}$

14. ¿Cuál es la probabilidad al lanzar un dado y obtener un número primo?

a) $\frac{2}{6}$ b) $\frac{1}{2}$ c)$\frac{4}{6}$ d) $\frac{3}{6}$

15. Un saco contiene 6 bolas blancas y 5 negras. Halle el número de posibilidades para sacar 4 bolas del saco, si:

a) Las bolas son de cualquier color: ___________________

b) Dos bolas sean blancas y dos negras: _______________

c) Todas sean del mismo color: ______________________

16. Elige la oración correcta, de acuerdo con lo expuesto en el siguiente problema.

El jefe de recursos humanos registró el número promedio de palabras por minuto que cinco aspirantes al puesto de mecanógrafa hicieron en una prueba de transcripción de un texto, durante un período de 10 minutos. Los resultados fueron como siguen: 75, 79, 97, 102 y 115.

a) Tres de las cinco aspirantes tuvieron un promedio de menos de 100 palabras por cada 10 minutos.

b) Las aspirantes con promedio de más de 100 palabras por cada 10 minutos son personas con mucha experiencia.

c) Este estudio permite estimar que una mecanógrafa tiene una velocidad de escritura de 120 palabras por cada 10 minutos.

d) El número de aspirantes con un promedio menor a 90 palabras por cada 10 minutos, es dos.

IV. Selecciona el nivel de medición de las siguientes variables

17. Intensidad con que siente una persona un dolor de cabeza.

a) Nominal b) Ordinal c) Numérica

18. Opinión que se tiene acerca de la calidad en el servicio (1 = deficiente; 2, 3, 4, 5 = excelente).

a) Nominal b) Ordinal c) Numérica

19. Posible causa de alta temperatura en una persona

a) Nominal b) Ordinal c) Numérica

20. Fecha de nacimiento de una persona

a) Nominal b) Ordinal c) Numérica

21. Grado de aceptación que tiene una persona respecto a utilizar cierto producto.

a) Nominal b) Ordinal c) Numérica

V. Resuelve los siguientes problemas

22. Con las letras, a, b, y c; ¿Cuántas palabras distintas de tres letras se pueden formar?

a) Las tres letras sean distintas________________________

b) Dos letras, por lo menos sean idénticas________________

23. Calcula la media aritmética, la moda y la mediana de una distribución de frecuencia simple de los siguientes datos:

6	5	7	6	5	4
7	4	6	8	7	6
8	5	7	6	8	7
9	6	4	5	9	8
7	9	8	10	9	6

a) media

b) moda

c) mediana

24. ¿Encuentra la moda o modo de los siguientes conjuntos de datos?

a) 2, 3, 4, 4, 3, 5, 4, 5, 5, 6, 7, 6, 8, 5, 5

b) 3, 18, 13, 5, 9, 7, 10, 11, 12

c) 2, 9, 3, 8, 4, 4, 8, 3, 3, 6, 5, 7, 7, 8

25. Si el promedio de edad de Manuel y Amalia más sus nueve nietos es de 25 años y se sabe que la edad de Manuel es 3 años mayor que la edad de Amalia, y que ella tiene 65 años, entones, ¿cuál es el promedio de edad únicamente de sus nueve nietos?

a) 15. 7 años b) 52.6 años c) 14.36 d) 9 años

26. Encuentra la mediana de la siguiente muestra y grafica la información que se te presenta.

9, 6, 7, 9, 10 y 8

a) ¿Cuál es la mediana?

b) Realiza la gráfica de la información anterior.

27.- Traza la gráfica circular o de pastel correspondiente a la siguiente información:
Casos de operaciones realizadas en un hospital, el año pasado.

Tipo de operación	**No. de casos**
Torácica	20
Ortopedia	45
Otorrinolaringología	58
General	98
Abdominal	115
Urología	74
Neurocirugía	23
Cáncer	65

Apéndice 2

Cuestionario 2

Nombre: ____ Grupo y grado: ____

Instrucciones: Contesta los siguientes reactivos y anota en estas hojas todos tus procedimientos.

1. En 1997, una persona pasaba en promedio 45 minutos escuchando música grabada*. De una muestra de 30 individuos se obtuvieron los siguientes datos de la cantidad de minutos en que escuchaban música grabada:

88.3	4.3	4.6	7.0	9.2	0.0	99.2	34.9	81.7	0.0
85.4	0.0	17.5	45.0	53.3	29.1	28.8	0.0	78.9	64.5
4.4	63.6	67.9	94.2	7.6	56.6	52.9	145.60	90.4	65.1

* Diario *The Des Moiner Register*, 5 de diciembre de 1997.

a) Calcula la media, la moda y la mediana de los datos en la tabla. Anota todo tú procedimiento.

b) ¿Coincide la media que obtuviste con algún dato de la muestra? _______ ¿Por qué?

____

____

c) ¿De qué tipo de variable son los datos de la muestra? _______________

d) Traza la gráfica respectiva y ubica en ella las tres medidas de tendencia central que determinaste.

2. Se aplicó un test de aptitud a un grupo de 100 personas. Los resultados se concentraron en la siguiente tabla.

Intervalo de puntuaciones	**Frecuencia**
20.5 – 25.5	28
15.5 – 20.5	32
10.5 – 15.5	21
5.5 – 10.5	12
0.5 – 5.5	7

a) ¿Cuál es el intervalo modal del conjunto de datos? ________________________
b) ¿En qué intervalo se encuentra la mediana del conjunto de datos? ___________
c) Calcula la media aritmética de los datos.

3. Las calificaciones de los alumnos en un examen de Estadística fueron: 6, 4, 4, 3, 6, 10, 1, 0, 2, 6, 6, 8, 5.

a. Calcula la media aritmética, la moda, la mediana.

b. Si fueras un líder estudiantil, ¿qué medida de centralidad escogerías para argumentar el buen desempeño del grupo? ____

____

____

____

c. Si fueras el profesor de la materia, ¿qué medida de centralidad escogerías para argumentar el mal desempeño del grupo? ________________________________

____

____

____

d. Si fueras un observador imparcial, ¿qué podrías decir sobre el nivel del grupo?

____

____

____

____

4. En el curso de Educación física, para tener una idea de la condición física general de los estudiantes, el profesor Antúnez registró el número de lagartijas y el número de sentadillas ejecutadas por cada uno de diez de sus alumnos seleccionados al azar. Organizó las puntuaciones recopiladas en la siguiente tabla:

Alumno	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Lagartijas	27	22	15	35	33	52	35	40	40	40
Sentadillas	30	26	25	36	33	36	32	54	50	43

a) Determina las medidas de tendencia central de cada tipo de puntuaciones.

b) ¿Cuál tipo de puntuaciones de la muestra es más disperso y por qué?

c) ¿Qué tipo de simetría tendría cada uno de los gráficos respectivos y por qué?

5. Un aeroplano vuela alrededor de un cuadrado cuyo lado tiene100 km de largo. Si recorre el primer lado a 100 km/h, el segundo lado a 200 km/h, el tercer lado a 300 km/h y el cuarto lado a 400 km/h, ¿cuál es la velocidad media del aeroplano en su vuelo alrededor del cuadrado?

6. Un estudiante cursó en la universidad *A* dos semestres y obtuvo un promedio de calificaciones de 8.1 El mismo estudiante cursó en la universidad *B* tres semestres y obtuvo un promedio de 8.9. ¿Cuál es el promedio del estudiante por sus estudios universitarios?

7. Hay diez personas en un ascensor, cuatro mujeres y seis hombres. El peso en promedio de las mujeres es de 60 kilos, y el de los hombres es de 70 kilos. ¿Cuál es el peso medio de las diez personas en el ascensor?

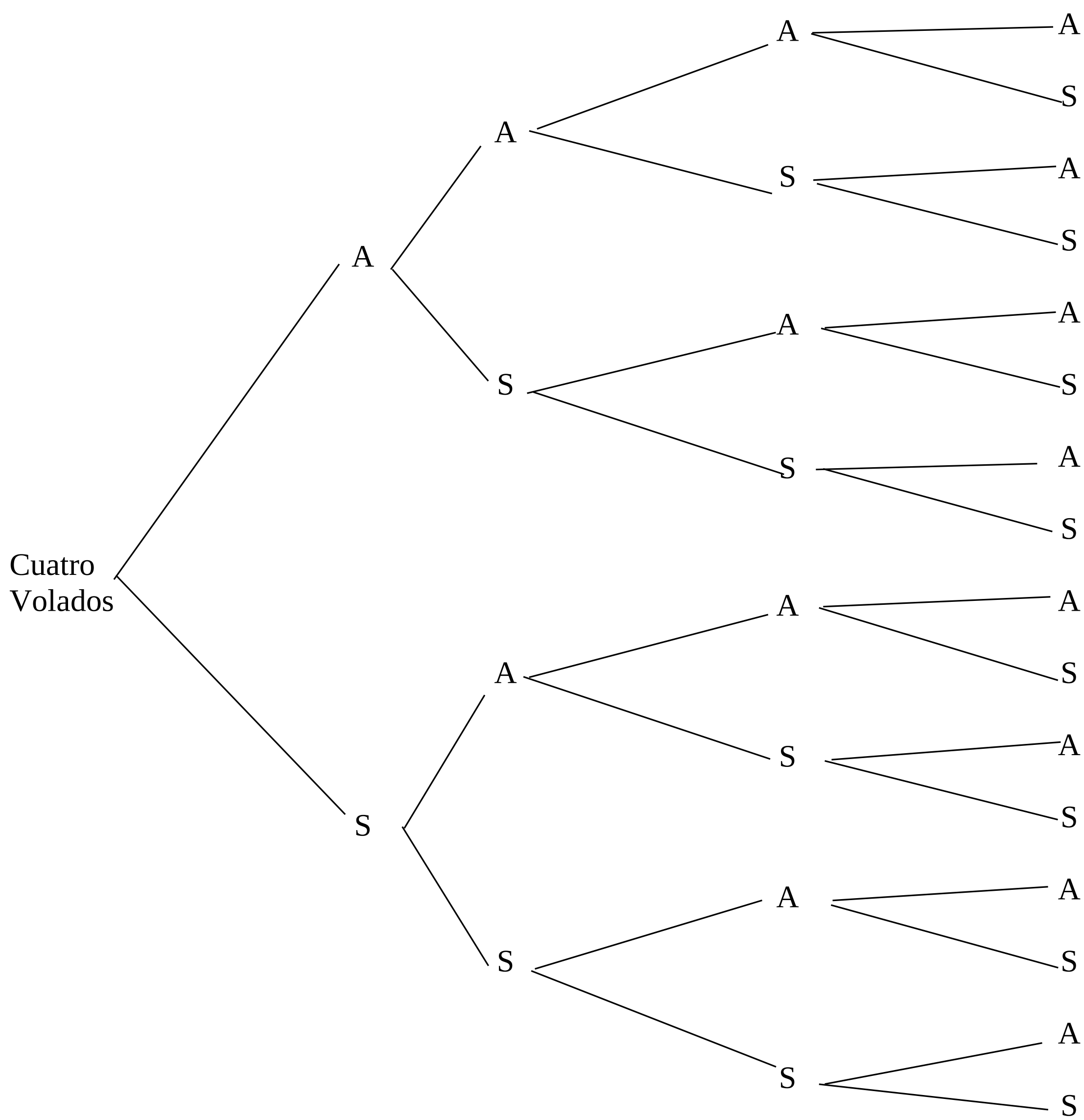
8. En una empresa desean saber la proporción media de mujeres en sus diferentes departamentos. Para ello, determinaron el porcentaje de mujeres en cada uno de sus cinco principales departamentos. ¿Cuál es la proporción media de mujeres de la empresa?

Porcentaje de mujeres por departamento	
Departamento	Porcentaje
Producción	32.6 %
Compras	53.5 %
Mercadotecnia	28.9 %
Recursos Humanos	48.2 %
Administración	67.4 %

9. Con las letras, a, b, y c, ¿cuántas palabras distintas de tres letras se pueden formar si:
    a) las letras son distintas;
    b) por lo menos dos letras son idénticas?

10. En una urna hay dos bolas blancas y una negra. Si se extrae una bola de la urna, se registra el color (sin devolverla a la urna) y luego se extrae una segunda bola y se registra el color, ¿de cuántas maneras distintas se pueden extraer las bolas?

11. En un juego de cuatro volados Brayan gana si cae un águila, Ingrid gana si caen tres soles, Adriana gana si caen dos águilas y Jorge gana si cae un sol. Para revisar sus posibilidades trazaron el siguiente diagrama de árbol.



a) ¿Puede haber empate? _____ ¿Por qué? ________________________________
b) Sí dices que sí, marca con rojo las ramas del árbol para este caso (empate).
c) ¿Quién tiene más posibilidades de ganar? ________________________________
¿Por qué? ____
d) Marca con verde el camino del ganador.

Cinvestav

Departamento de
Matemática Educativa

Apéndice 3

Segundo guión de entrevista semiestructurada

Nombre: ____

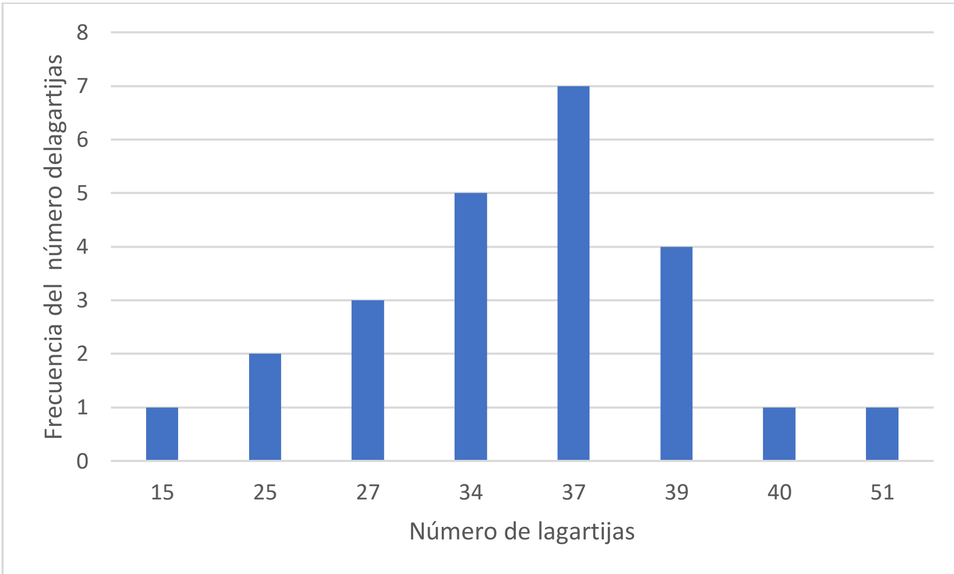
Situación A

En un examen de estadística, seis estudiantes obtuvieron las siguientes calificaciones respectivamente: 7, 8, 7, 6, 9 y 10.

1. ¿Cuál es el valor de cada una de las medidas de tendencia central?
2. Traza la gráfica respectiva y ubica en ella las medidas de tendencia central.
3. ¿Cómo interpretas los resultados numéricos obtenidos?
4. ¿Qué tipo de simetría tiene el gráfico?

Situación B

Número de lagartijas realizadas por una persona en el mes de febrero



5. ¿Qué tipo de variable se trata en la muestra?
   ¿Por qué?
6. Ubica las medidas de tendencia central en la gráfica.

7. ¿Qué medida te ayuda a identificar la dispersión de los datos con respecto a su media?
8. ¿Cómo se calcula el rango y que indica el valor que se obtiene?

9. ¿Qué tipo de simetría tiene el gráfico?

Situación C

Un aeroplano vuela alrededor de un cuadrado cuyo lado tiene100 km de largo. Si recorre el primer lado a 100 km/h, el segundo lado a 200 km/h, el tercer lado a 300 km/h y el cuarto lado a 400 km/h, ¿cuál es la velocidad media del aeroplano en su vuelo alrededor del cuadrado?

$$= \frac{4}{\frac{1}{100}+\frac{1}{200}+\frac{1}{300}+\frac{1}{400}} = \frac{4}{\frac{25}{100}} = \frac{4\,x\,1200}{25} = \frac{4\,800}{4} = 192 \text{ km/h}$$

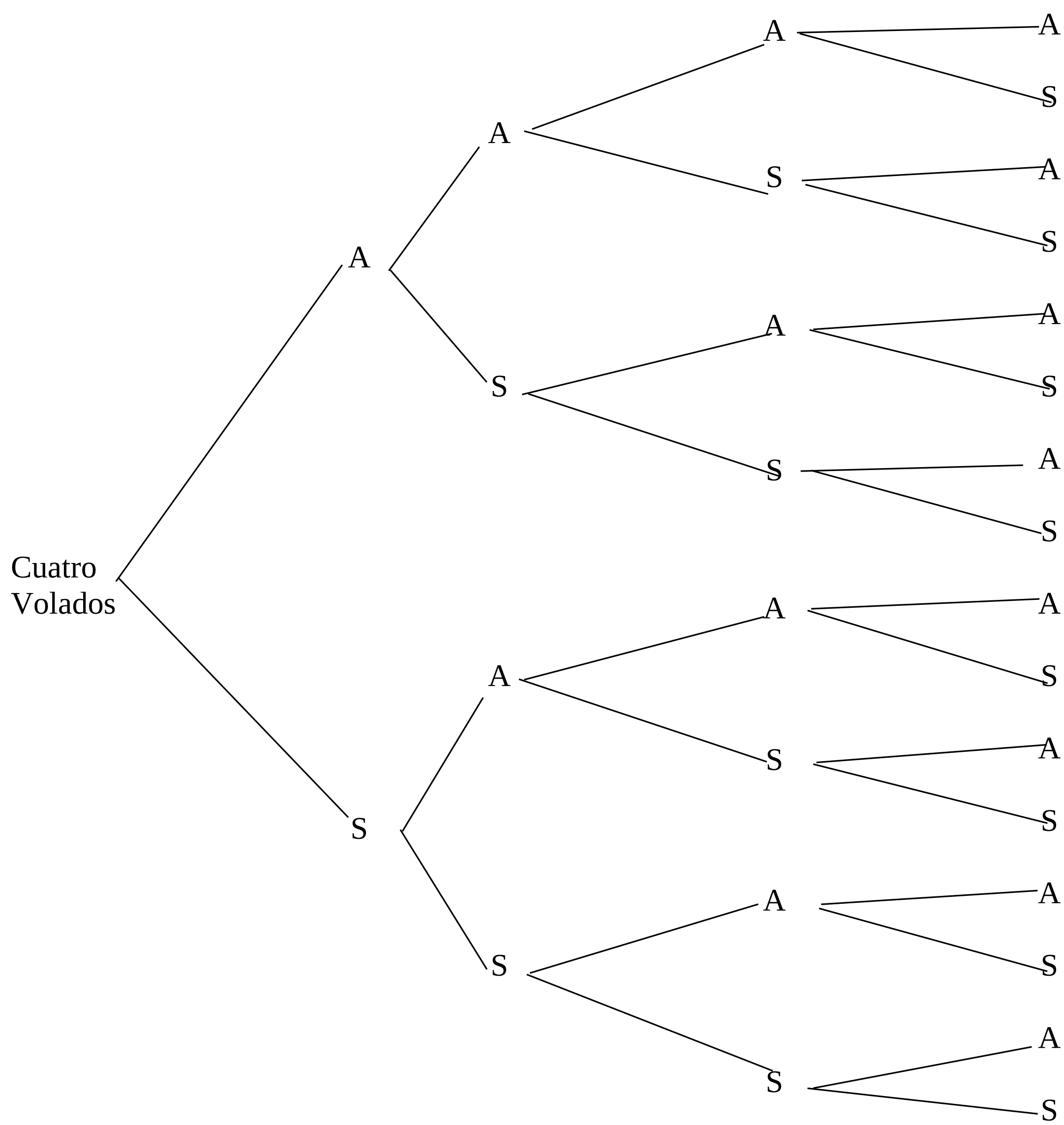
$$= \frac{100+200+300+400}{4} = \frac{100}{4} = 250\ km/h$$

Situación D

En una urna hay dos bolas blancas y una negra. Si se extrae una bola de la urna, se registra el color (sin devolverla a la urna) y luego se extrae una segunda bola y se registra el color, ¿de cuántas maneras distintas se pueden extraer las bolas? Y si en la urna hay dos bolas blancas y dos bolas negras. ¿De cuántas maneras distintas puedo extraer las bolas?

Situación E

En un juego de cuatro volados Brayan gana si cae un águila, Ingrid gana si caen tres soles, Adriana gana si caen dos águilas y Jorge gana si cae un sol. Para revisar sus posibilidades trazaron el siguiente diagrama de árbol.



12. ¿Puede haber empate? _____ ¿Por qué? ________________________________
13. Sí dices que sí, marca con rojo las ramas del árbol para este caso (empate).
14. ¿Quién tiene más posibilidades de ganar? ______________________________
    ¿Por qué? ____
15. Marca con verde el camino del ganador.

Cinvestav

Departamento de Matemática Educativa

Apéndice 4

Guiones de entrevista semiestructurada

Práctica docente

A) $E^2{}_5$

1. ¿Qué contenido y cuál fue el objetivo de tu sesión de práctica docente?
2. ¿Qué estrategia utilizaste para determinar las distintas posibilidades que tenía Juanita para vestirse?
3. ¿Qué hiciste?, ¿Cómo se le llama a esa estrategia que utilizaste para identificar las distintas maneras de vestir de Juanita?
4. En esta ocasión, ¿qué fue lo que falló para que encontraras las doce opciones y no las seis que querías?
5. ¿Cuál hubiera sido la multiplicación correcta para este ejercicio?
6. ¿Has revisado los planes y programas de estudio de primaria, ¡aquí! en la normal?
7. ¿No hay una hora específica en la que ustedes aquí, en el salón revisen planes y programas junto con su maestro?
8. Mi pregunta se dirige hacia lo siguiente, ¿se ve en primaria combinatoria?
9. ¿Qué privilegiaba la lección de los trajes?

B) $E^2{}_7$

1. ¿Cuál fue el contenido que impartiste y el objetivo?
2. ¿Les diste a conocer a los estudiantes el tema y el objetivo de tu sesión?
3. ¿Qué es moda?
4. ¿Qué es promedio?
5. (Observar la videograbación). ¿Qué te aclara la alumna que habla y te dice: "la mayoría es, pero lo que está en el pizarrón es el promedio de todo"? ¿Qué te aclara ahí la alumna?
6. ¿Por qué no es conveniente utilizar la media, la mediana y la moda en ese caso de los alumnos? ¿Por qué no sería conveniente utilizar la media y la moda para la respuesta?
7. Recuerdas que pusiste a tus alumnos a escribir las definiciones de media, mediana y moda. ¿Qué podrías hacer para que las definiciones de medidas de tendencia central se unificaran?
8. ¿Por qué no trazaste una gráfica con los datos que fuiste obteniendo y en ella localizar las medidas de tendencia central?

C) $E^2{}_9$

1. ¿Cuáles fueron los contenidos que enseñaste con 4° en las dos jornadas de práctica?
2. ¿Con qué contenido te sentiste más cómoda?

3. ¿Cuál fue tu objetivo de la enseñanza del principio multiplicativo?
6. ¿Por qué no consideraste o aclaraste a los alumnos lo de las casas que se repetían en tu ejercicio?
7. ¿Para qué diste variantes del ejercicio propuesto?
8. ¿Cuál fue tu objetivo de la enseñanza de la moda?
9. ¿Qué es la moda?
10. ¿Qué es un dato?
11. ¿Cómo eran los datos de los referentes que trataste con los alumnos?
12. ¿Qué es variación?
13. ¿Por qué es necesario trazar la gráfica en los ejercicios?
14. ¿Por qué no analizaste lo anterior con los alumnos?

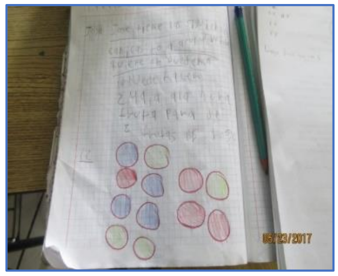
D) $E^2{}_{13}$

1. ¿Qué contenido trataste en tú práctica docente?
2. ¿Cuál fue el objetivo de la enseñanza del contenido?
3. ¿Para qué calculas la media y la moda de un conjunto de datos?
4. ¿Qué es la variación en los datos?
5. ¿Por qué no consideraste este término con los alumnos?
6. ¿Qué dificultad presentaron los alumnos de quinto grado al tratar la dispersión de los datos?
7. ¿Por qué trazaste gráficas para identificar la dispersión de los datos, si el libro de texto no lo sugiere?
8. A parte de la dispersión de los datos, ¿qué más puedes analizar en las gráficas que trazaste?

E) $E^2{}_{16}$

1. ¿Cuál fue el contenido y el objetivo que brindaste en tu práctica docente de medidas de tendencia central?
2. El promedio ¿cómo lo entiendes?
3. ¿Por qué no trazaste el gráfico del conjunto de datos, en tu clase?
4. ¿En qué se centra el libro de texto, en cuanto a la enseñanza de las medidas de tendencia central?
5. ¿Has revisado los planes y programas de estudio y los libros de texto?
6. ¿En qué orden se sugiere la enseñanza de las medidas de tendencia central?
7. En tus clases, de aquí de la normal ¿has revisado el plan y programa?
8. ¿Cuál fue el contenido que enseñaste en tu segunda sesión de prácticas docentes?
9. ¿Qué es una combinación?
10. Presentar las respuestas (6 posibilidades considerando orden, 6 posibilidades con repetición. ¿Qué respuesta es correcta?
11. ¿Por qué?
12. ¿Cuál hubiera sido la respuesta al problema que tú planteaste?

13. ¿Qué condiciones debería tener el problema para que la respuesta de 6 combinaciones fuera correcta?
14. ¿Qué condiciones debería tener el referente si la niña repitió colores?



Listado de canicas con repetición de color realizado por un alumno de 2º grado de E^2_{16}.

15. ¿Cuál fue tú conflicto cuando la titular se acercó a ti y te preguntó la respuesta al problema?
16. ¿Un problema puede tener diversas soluciones?
17. ¿Por qué cambiaste de respuesta, si habías obtenido 12 posibilidades y con los niños obtuviste 6 posibilidades?

Diagrama trazado por E^2_{16}.

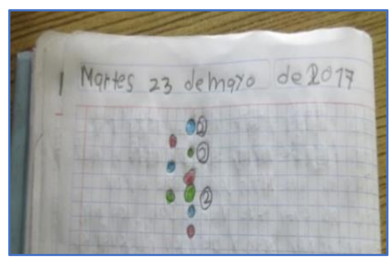


Diagrama copiado por los alumnos de 2º grado de E^2_{16}.

18. ¿Por qué ambas respuestas son correctas?
19. ¿Qué material impidió que los alumnos llegaran a la respuesta de doce posibilidades?
20. ¿Los problemas que planteaste eran similares a los del libro de texto?
21. ¿Con qué contenido te sentiste más cómoda?

F) E^2_{24}

1. ¿Qué contenido trataste y cuál era el objetivo de tu sesión?
2. ¿Le diste a conocer el contenido y el objetivo a los alumnos?
3. ¿Qué es moda?
4. ¿Cómo se le llama a la moda cuando es única en un conjunto de datos?

5. Y ¿Cuándo tengo dos modas?
6. ¿Qué pasó en el gráfico que trazó la última niña, recuerdas?
7. ¿Por qué consideraste pertinente que los alumnos identificaran en la gráfica que trazaron, la moda y la media?
8. ¿Algo más que me quieras compartir de tu sesión?

G) E^1_{32}

1. ¿Recuerdas el contenido con el cual realizamos la videograbación?
2. ¿Con qué contenido te sentiste más cómoda, con el de cuarto grado que fue la enseñanza de la moda o con el de segundo grado que fue el principio multiplicativo?
3. ¿Cuál fue el objetivo de la enseñanza del principio multiplicativo, en segundo grado?
4. ¿Cuáles eran los dígitos que tenían las tarjetas?
5. ¿Cuántas respuestas encontró A^2_3, te acuerdas?
6. ¿Cuál hubiera sido la respuesta si no puede repetir dígito?
7. ¿Cuál hubiera sido la respuesta si puede repetir dígito?
8. ¿Algo más que desees comentarme sobre tu práctica docente?

Cinvestav

Departamento de Matemática Educativa

Apéndice 5

Guión de entrevista semiestructurada a alumnos de segundo grado

Nombre: ____

Situación F

Alberto va escribir cartas. Si puede escribir el mensaje con letras negras o azules y puede colocar las cartas en sobres blancos o rayados. ¿Cuántos tipos diferentes de cartas puede escribir?

Situación G

¿Cuántos números diferentes de tres dígitos puedes formar usando las siguientes tarjetas?

$\boxed{3}$ $\boxed{6}$ $\boxed{8}$

Situación H

La suma de dos números es 14. Su producto es 45. ¿Cuáles son los dos números?

Cinvestav

Departamento de Matemática Educativa

Apéndice 6

Guión de entrevista semiestructurada a alumnos de cuarto grado

Nombre: ____

Referente F

Alberto va a escribir cartas. Si tiene los siguientes colores de hojas: amarilla, rosa y lila; dos colores de letras: negras y azules y dos tipos de sobres: blancos y rayados. ¿Cuántos tipos diferentes de cartas puede escribir?

Referente G

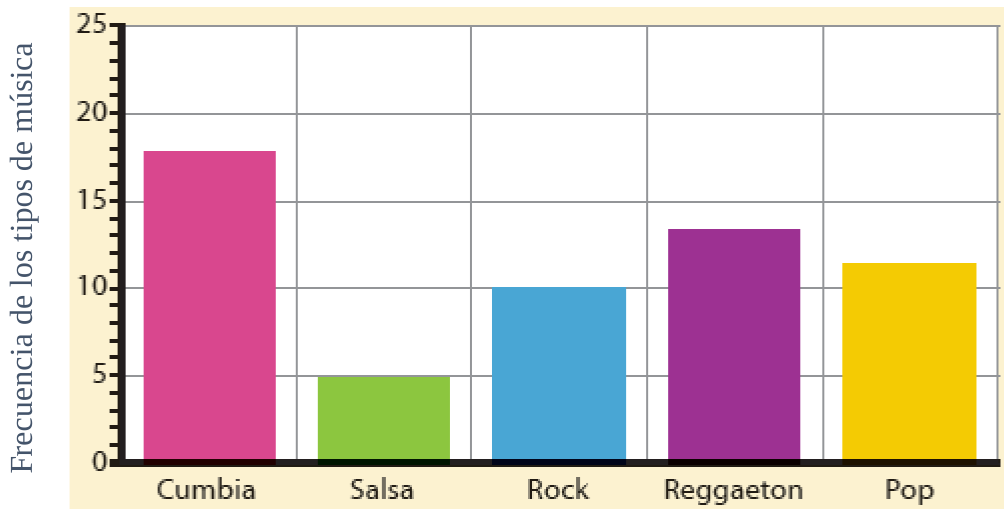
¿Cuántos números diferentes de cuatro dígitos pueden formarse usando las siguientes tarjetas?

$\boxed{3}$ $\boxed{6}$ $\boxed{8}$ $\boxed{4}$

Referente K

Los alumnos de 4˚grado hicieron una encuesta para saber qué música es la más popular y registraron los resultados en el siguiente gráfico.

Preferencias musicales de los alumnos de 4º grado



Tipos de música

Cinvestav

Departamento de Matemática Educativa

Apéndice 7

Guión de entrevista semiestructurada a alumnos de quinto grado

Nombre: ____

Referente L. Observa el siguiente estado del tiempo.

México City	14°C | 26°C	Guadalajara	17°C | 34°C	Monterrey	24°C | 32°C
Puebla	15°C | 22°C	Toluca	10°C | 21°C	Torreon	24°C | 33°C
Acapulco	26°C | 32°C	Veracruz	26°C | 30°C	Palenque	23°C | 30°C
Puerto Vallarta	26°C | 32°C	Puerto Escondi...	28°C | 31°C	San Cristobal d...	14°C | 16°C
Culiacán	19°C | 35°C	Chihuahua	17°C | 31°C	Zacatecas	16°C | 30°C
Hermosillo	24°C | 39°C	Guanajuato	17°C | 32°C	San Miguel de A...	14°C | 31°C
Morelia	15°C | 31°C	Taxco	16°C | 25°C	Mazatlán	23°C | 30°C
Oaxaca	18°C | 24°C	Piedras Negras	25°C | 30°C		

Información de http://www.easyviajar.com/pronostico-tiempo/mexico/mayo

a) Traza las gráficas correspondientes de las temperaturas y descríbelas

Apéndice 8

Artículos derivados de la tesis

CONOCIMIENTO MATEMÁTICO DE DOCENTES EN FORMACIÓN PARA LA ENSEÑANZA DE ESTOCÁSTICOS: PROBLEMÁTICA Y PLANTEAMIENTO DE INVESTIGACIÓN

Ana María Martínez Blancarte; Ana María Ojeda Salazar

Cinvestav

amatinezb@cinvestav.mx; amojeda@cinvestav.mx

El presente avance de investigación, de orden cualitativo, pretende identificar y caracterizar la comprensión de estocásticos de los estudiantes de Licenciatura en Educación Primaria. Las diez ideas fundamentales propuestas por Heitele (1975) son el principal referente para caracterizar cada uno de los tres tipos de Conocimiento Matemático para la Enseñanza de estocásticos: el especializado; el de estudiantes normalistas resultante de la enseñanza del tema; y el conocimiento para la enseñanza, manifiesto en la propuesta institucional para estocásticos en la primaria así como en el diseño y práctica de la enseñanza de estocásticos en el aula por los normalistas. Este último se caracterizaría mediante las ideas fundamentales agrupadas en los cuatro dominios intuitivos del pensamiento probabilístico (Fischbein, 1975).

Palabras clave: Ideas fundamentales de estocásticos, Conocimiento Matemático Especializado y formación de profesores de primaria.

1. Introducción

Algunas investigaciones sobre la comprensión de estocásticos en diversos niveles educativos han llegado a la conclusión de que es poca la importancia que se otorga a ese contenido en la formación matemática pre-universitaria (por ejemplo, Limón, 1995; Carballo, 2004; Vázquez, 2004; López, 2006; Rivera, 2011; Salcedo, 2013). Esas investigaciones han mostrado que los alumnos tienen dificultades de comprensión de ideas de estocásticos, además de que en los planes y programas (por ejemplo, SEP, 1999 y SEP, 2011) y en las evaluaciones mismas (por ejemplo, Enlace, 2009, 2013) el tema no parece tener la relevancia que suponen sus aplicaciones en la diversidad de ámbitos de la actividad humana. Otras investigaciones han señalado el desconocimiento de estocásticos de docentes de educación básica en activo (por ejemplo, Limón, 1995; Alquicira, 1998; Elizarraras, 2004; Flores, M., 2009). En contraste, llama la atención la reciente inclusión del tema de estocásticos para todo un semestre en el curriculum de la Educación Normal (SEP, 2012), dado que en los planes y programas de 1997 sólo la cuarta unidad de la asignatura *Matemáticas y su enseñanza II* destinaba veinticuatro horas a *Tratamiento de la información, predicción y azar*, pero por ser la última del programa con frecuencia su enseñanza se omitía.

Por tanto, se pretende investigar las características de la formación docente en estocásticos para la educación primaria, dadas las reformas en primaria (SEP, 2009 y 2011) y en la Educación Normal (SEP, 2012). La formación del docente de primaria incluye que adquiera el conocimiento de los temas de matemáticas que tendrá que enseñar en prácticas de enseñanza efectiva en el aula de primaria bajo la supervisión del docente titular de esa aula y, después de su egreso, durante el ejercicio de su profesión. Las preguntas que orientan esta investigación son:

1. ¿Qué caracteriza a la comprensión de ideas fundamentales de estocásticos de los maestros en formación para primaria?
2. ¿Qué elementos para la enseñanza de ideas fundamentales de estocásticos a alumnos de primaria proporciona el plan y programas 2012 de formación de profesores de primaria?
3. ¿Qué caracteriza a las prácticas de enseñanza de estocásticos en el aula de primaria diseñadas y ejecutadas por los maestros en formación?

Los objetivos que se persiguen con esta investigación son:

- Identificar el Conocimiento Matemático para la Enseñanza (CME) de los docentes en formación sobre el tema de estocásticos.
- Identificar dificultades de comprensión de ideas fundamentales de estocásticos de docentes en formación, así como de los dominios intuitivos del pensamiento probabilístico de alumnos de primaria durante las prácticas de enseñanza.
- Proponer lineamientos para el diseño de estrategias de enseñanza de estocásticos en la Licenciatura para la Educación Primaria.

2. Antecedentes

La problemática de la formación del docente de matemáticas para la educación básica ha sido foco de investigaciones recientes y, en particular desde la perspectiva teórica de nuestro interés, las concernientes a la formación en estocásticos se han referido a la actualización docente y a la práctica docente en el aula.

La investigación realizada por Martínez (2010) se centró en una de las facetas del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (CME) que proponen Ball y Bass (2000), el cual es una composición de contenido matemático y pedagogía, cuyo conocimiento requiere cualquier profesor en su diaria labor.

Los resultados de la investigación fueron que los docentes en formación no consideraban relevante al Conocimiento Pedagógico para la enseñanza de las matemáticas, sino al conocimiento de los contenidos matemáticos a impartir. En su primera jornada de prácticas, los docentes se centraron en una interacción directiva; las hojas de trabajo que diseñaron consistían en una lista de ejercicios o problemas que planteaban a los alumnos para mecanizar algoritmos. Una coincidencia entre el papel del docente y cómo lo consideran los alumnos de secundaria fue que esperan que él sea quien explique el contenido y hasta el procedimiento de solución de los ejercicios.

A partir de la lectura y reflexión de artículos de investigación en un taller de siete sesiones, propuesto a 21 estudiantes del sexto semestre de la Licenciatura en Educación Secundaria con Especialidad en Matemáticas (ENSM, 1999) referido a la importancia del aspecto pedagógico, ellos reconocieron cuatro parámetros importantes —actividades, herramientas, comunicaciones, las relaciones y normas— del Conocimiento Pedagógico que un docente debe poseer para diseñar y desarrollar una clase. En su segunda práctica, las hojas de trabajo que los normalistas diseñaron para desarrollar la clase en el aula de secundaria ya incluyeron un objetivo y variedad en los ejercicios; esas hojas fueron consideradas una herramienta para desarrollar toda una clase. Al final, en ocasiones el papel de los futuros docentes en el aula de secundaria pasó de una interacción directiva a una observacional y exploratoria, de acuerdo con la clasificación de la interacción maestro-alumno que proponen Jacobs y Ambrose (2003).

De acuerdo con Ojeda (1987), la enseñanza de la probabilidad inició en el nivel superior con introducciones a la teoría matemática de la Probabilidad. Cuando se le incluyó en el nivel medio superior, para la formación técnica o pre-universitaria de sujetos de 15 a 18 años de edad, se esperaba que los estudiantes tuvieran intereses más o menos definidos de la carrera u ocupación a la que se dedicarían. La Probabilidad y la Estadística son disciplinas que ponen en juego diversos conceptos matemáticos que exigen dar sentido a lo aleatorio. Por ello, la formación en la Probabilidad y la Estadística desde etapas básicas es recomendable (Limón, 1995), mediante la consideración de las fuentes intuitivas del razonamiento probabilístico (Fischbein, 1975; Heitele, 1975).

Desde un enfoque principalmente epistemológico, se han realizado diversas investigaciones acerca de la comprensión de las ideas fundamentales de estocásticos en el sistema educativo nacional mexicano, entre ellas las citadas en la introducción. Con un planteamiento que ha aspirado a ser integral y con la articulación de docencia e investigación, se ha puesto en juego en la educación básica el *órgano operativo de la investigación* de la enseñanza de estocásticos (Ojeda, 2006, p. 204). En consecuencia, cada uno de esos estudios ha incluido resultados desde: la *propuesta institucional* respectiva (planes y programas de estudio, libros de texto y otros medios), seminarios de *estudio dirigido* al docente en servicio, la enseñanza en el *aula* de contenidos de probabilidad y de estadística, así como los resultados de esa *enseñanza* en el desempeño de los alumnos (por ejemplo, en preescolar, Limón (1995); en primaria, Carballo (2004) y Flores M. (2009); en secundaria, Alquicira (1998), Elizarraras (2004), Vázquez P. (2004) y López Molina (2006); en telesecundaria, Vázquez T. (1998)). En particular, la investigación de López Mojica (2013) en educación especial básica incorporó, además, el desempeño del *docente en formación* para educación especial durante sus *prácticas* en el aula; aún más, la investigación de Ramos (2015) en preescolar regular incluyó resultados de la *formación* (inicial) de educadoras con la propuesta institucional (SEP, 1999) anterior a la recientemente implementada (SEP, 2012). Algunos de los resultados generales de estas investigaciones se han citado en la introducción; pero además, al cabo de la articulación entre docencia e investigación en los espacios del órgano operativo, el docente empieza a reconocer la intervención del azar en una variedad de fenómenos del entorno y en los reproducidos para su estudio en el aula, surge su apertura a lo posible y a ponderarlo, así como la advertencia del valor intrínseco de los contenidos de estocásticos para promover la aplicación de otros conceptos de matemáticas (singularmente, en López Mojica, (2013)), esto último en consonancia con lo propuesto por Gattuso (2006) y señalado antes por Freudenthal (1973). No obstante, como ya lo ha señalado Fischbein (1975), se ha enfrentado el problema de la mayor dificultad para erradicar sesgos del pensamiento probabilístico entre los docentes que entre los niños.

3. Marco de referencia

Tres ejes orientarán nuestra investigación: uno epistemológico, otro cognitivo y un eje social (Ojeda, 2006). Según la distinción que han expresado Burril y Biehler (2013), a diferencia del enfoque en auge en la educación que pone el acento en la formación del sujeto como usuario de la estadística, en esta investigación adoptamos el punto de vista de una formación conceptual en estocásticos que da su lugar a la probabilidad (Biehler, 1994; Biehler y Pratt, 2012), dado que se esperaría del docente un conocimiento no simplemente como usuario de estadística, sino del *tópico* de estocásticos en tanto un individuo educado (Heitele, 1975) en ese contenido, lo que aseguraría que lo dominara, que lo capacitara para diseñar sus estrategias de enseñanza en el aula y para reconocer los resultados de ellas en el desempeño de sus alumnos.

3. 1. Eje Epistemológico

Para su propuesta de un curriculum en estocásticos, Heitele (1975) ha tomado como uno de sus referentes: la concepción de Bruner de un curriculum en espiral guiado por las ideas fundamentales del tópico a que se refiera, los resultados de las investigaciones del origen de la idea de azar en el niño, los juicios de los adultos en situaciones de incertidumbre, y la historia de la probabilidad.

3. 1. 1. Ideas fundamentales de estocásticos. Para la formación en estocásticos, Heitele (1975) propuso diez ideas fundamentales, interrelacionadas entre sí, como guía continua de un curriculum en espiral: medida de probabilidad, espacio muestra, adición de probabilidades, regla del producto e independencia, combinatoria, equiprobabilidad y simetría, modelo de urnas y simulación, variable aleatoria, ley de los grandes números y muestra.

3.1.2. Evolución de la idea de azar. Piaget e Inhelder (1951) caracterizaron para cada estadio de la evolución del pensamiento del niño la de la idea de azar. En el estadio de las operaciones preconcretas (edades de 4 a 7 años) hay fallas para entender la naturaleza aleatoria de la mezcla. En el estadio de las operaciones concretas (de los 7 a los 11 años), el niño descubre el azar como una realidad no componible como una antítesis de operaciones. En el estadio de las operaciones formales (de los 11 a los 12 años), se da la composición probabilística que es la síntesis del azar y las operaciones concretas.

3.1.3. El triángulo epistemológico. Para la constitución del concepto matemático se requiere un balance entre el objeto, el signo y el concepto (Steinbring, 1991). Sólo puede haber definiciones implícitas de conceptos de probabilidad y de azar, si se presenta una relación abierta y sujeta al desarrollo entre los niveles de signo y de objeto. Al *objeto*, al que se le dota de sentido según el contexto de referencia, se le representa por el *signo*, de manera que el concepto matemático se construye como una estructura simbólica relacional y se le codifica mediante signos y símbolos que se pueden combinar lógicamente en operaciones matemáticas (Steinbring, 1999).

3. 2. Eje Cognitivo

Fischbein (1975) destaca aspectos relevantes de las fuentes de la intuición de la probabilidad. Ojeda (2007) subraya la consideración para la enseñanza de lo que él señala como cuatro dominios intuitivos del pensamiento probabilístico.

3.2.1. Intuición y probabilidad. Fischbein (1975) afirma que la cognición humana es unitaria; debido a su carácter adaptativo, para cualquier nivel considera sólo una realidad. Un componente de la cognición es la intuición, cuyos principales rasgos son: es componente de la inteligencia en acción, es una adquisición estructural, ejecuta la función de engranar el conocimiento a la acción, constituye procesos cognitivos autónomos con funciones únicas e importantes, y es un programa de acción parcialmente autónomo dentro de la cognición.

3.2.2. Dominios intuitivos del pensamiento probabilístico. Fischbein (1975) también ha identificado las cuatro principales fuentes para la advertencia del azar y el surgimiento de la idea de probabilidad: 1) la *combinatoria*, específicamente las técnicas de conteo, que permiten establecer el número de posibilidades en una situación discreta dada. 2) El *enfoque frecuencial* de la probabilidad posibilita estimar la probabilidad de un evento de un fenómeno aleatorio mediante su frecuencia relativa en un número suficientemente grande de repeticiones del fenómeno. 3) La *decisión* entre dos o más posibilidades exige poner en juego el razonamiento probabilístico (Piaget e Inhelder, 1951) al establecer, para cada una, la relación entre la parte favorable y el total de posibilidades, para comparar entre esas relaciones y optar por lo conducente. Y 4) la *simulación*, que demanda identificar los elementos relevantes del carácter aleatorio de un fenómeno dado y sus relaciones, para incorporarlos a otra situación análoga a ese fenómeno, accesible a sus repeticiones efectivas y, por tanto, a la puesta en juego del enfoque frecuencial de la probabilidad.

3.3. Eje Social

De entre los aspectos a considerar relevantes al llevar a cabo la enseñanza en un aula están: la interacción en el salón de clase; el entorno social y el conocimiento; y las propuestas institucionales que confluyen en esa actividad.

3.3.1. La interacción en el aula. Steinbring (1991) señala que "la interacción entre los docentes y los alumnos durante la enseñanza diaria produce una comprensión específica del escolar del status de conceptos matemáticos. En específico, el concepto de azar se concibe como una generalización concreta…" (Steinbring, 1991, pág. 1; traducido por Garnica y Ojeda).

La interacción en el salón de clase con el juego y la evaluación de los resultados experimentales constituyen un medio sociocultural para futuros desarrollos conceptuales: a nivel de *objeto*, las extracciones experimentales, la determinación de frecuencias relativas, etc.; y a nivel de *símbolo*, el recurso a un modelo estocástico elemental para calcular probabilidades.

3.3.2. El entorno social y el conocimiento. La enseñanza debería desencadenar en el proceso de aprendizaje los procesos de desarrollo que se encuentran en ese momento en la zona de desarrollo próximo (Vygotski, 1995). Esta zona traduce la perspectiva histórico-cultural, vuelve a la idea de que entre el mundo cultural y el individuo (niño-alumno), los conocimientos se transmiten por intermedio de otra persona, lo que da idea de la mediación semiótica y social.

3.3.3. Propuesta Institucional para la formación docente. En los planes de Educación Primaria se establece que "el aprendizaje de cada alumno y del grupo se enriquece en y con la interacción social y cultural; con retos intelectuales, sociales, afectivos y físicos, y en un ambiente de trabajo respetuoso y colaborativo" (SEP, 2011, pág. 30).

Para estocásticos, el único vínculo entre los programas de la Normal con lo propuesto para primaria es la cuarta unidad titulada *Vinculación con el eje manejo de la información*, lo que reviste un desfase entre la formación en el contenido y la práctica de su enseñanza, pues desde principios del semestre los normalistas acuden al aula de primaria a practicar la docencia sobre temas que incluyen a los del eje de tratamiento de la información.

El plan y programas de la Licenciatura de Educación Primaria (SEP, 2012) establece la asignatura *Procesamiento de Información Estadística*, para ser impartida en el cuarto semestre. Sus cuatro unidades de aprendizaje están asociadas a las competencias profesionales y a las específicas del curso, las cuales son: Unidad 1, Estadística; Unidad 2, Probabilidad y muestreo; Unidad 3, Inferencia Estadística; y Unidad 4, Vinculación con el eje de manejo de la información. Las dos unidades que más se acercan a la tarea docente en la escuela primaria son: la segunda, que concierne a la probabilidad y al muestreo; y la cuarta, que es la vinculación con el estudio del eje de manejo de la información. En la asignatura *Procesamiento de Información Estadística* se tratan las medidas de tendencia central en la Unidad 1.

El tema 2 de la Unidad 2 de este programa es el principio fundamental del conteo, para el cual se sugiere la elaboración de "diagramas de árbol derivados de problemas de conteo" (SEP, 2012, pág. 26). Heitele (1975) señala que el diagrama de árbol es una estrategia importante porque prefigura todos los posibles resultados así como los pasos del experimento y que los espacios muestra discretos pueden ser identificados mediante un "diagrama de árbol", recurso semiótico que contribuye a evitar que los niños se limiten a un determinismo.

Un punto desfavorable es que se deja hasta la Unidad 4 la vinculación con la enseñanza de Estadística en la escuela primaria, en la que se espera que el normalista diseñe y aplique secuencias didácticas; sin embargo, como ya señalamos, desde el inicio de este semestre los docentes en formación realizan prácticas en la primaria con cualquier contenido que les asigne el maestro que funge como tutor en el aula.

3.3.4. Propuesta institucional para la educación primaria. El programa actual de primaria 2011 no incluye contenidos de estadística en el eje de "Manejo de la Información" para primero y segundo grados, sino a partir de tercer grado. La mayoría de las lecciones del libro de texto de primaria (SEP, 2011) proponen actividades relacionadas con el análisis y el tratamiento de la información, además de la proporcionalidad y funciones. Se introducen las medidas de tendencia central como contenidos finales en los grados quinto y sexto.

Libros de texto de Primaria (Desafíos Matemáticos). Fischbein (1975) y Heitele (1975) recomiendan que la enseñanza de estocásticos se inicie desde los primeros grados escolares. Sin embargo, en los libros de texto (SEP, 2011) sólo se incluyen tres lecciones (la 46, *Trajes*, del bloque V de segundo grado; la 16, *Figuras y colores*, de tercer grado; y la 13, *Combinaciones*, de cuarto grado) que desarrollan el principio multiplicativo y se les podría aprovechar para introducir técnicas de conteo específicas (permutaciones y combinaciones). En efecto, Fischbein (1975) desarrolló actividades favorables para la enseñanza de ideas de probabilidad y de combinatoria a niños de 9 a 10 años. Las lecciones del libro de texto de primaria privilegian un objetivo aritmético al ponderar únicamente el principio multiplicativo, frecuentemente mediante el llenado de tablas, y se desaprovecha la oportunidad para usar el diagrama de árbol y prefigurar la regla de la suma y del producto de probabilidades (Fischbein, 1975), además de contribuir a evitar que los niños se limiten a un enfoque determinista (Heitele, 1975).

3.3.5. Conocimiento Matemático para la Enseñanza (CME). En la propuesta de Ball y Bass (2010) se distinguen tres facetas del CME: 1) *Conocimiento Matemático Especializado*, al que Hill, Ball y Schilling (2008) definen como el contenido adicional que va más allá del conocimiento matemático "común" para la enseñanza de un tópico matemático. 2) El *Conocimiento de estudiantes* es el que se relaciona con los conocimientos de contenido y el razonamiento de los alumnos, es decir, el conocimiento de los conceptos, las estrategias, dudas, confusiones o ideas erróneas de los educandos sobre un tópico matemático. 3) El *Conocimiento para la enseñanza* es la fusión de matemáticas y pedagogía para el diseño y planeación de la enseñanza en el aula.

4. Métodos e instrumentos

La investigación, de carácter cualitativo (Vasilachis, 2006), se realizará en cinco espacios interrelacionados: un *seminario de investigación*, la revisión de la *propuesta institucional* de la Licenciatura en Educación Primaria (SEP, 2012) y de primaria (SEP, 2011), el aula para la formación en estocásticos del futuro docente de primaria, un *seminario de introducción a la investigación* del futuro docente y las *prácticas de la enseñanza* de estocásticos del futuro docente en el aula de primaria.

Participarán en la investigación 54 estudiantes de la Licenciatura de Educación Básica de la Benemérita Escuela Nacional de Maestros y los alumnos de edades entre 6 y 12 años de edad, de la escuela primaria en la que los normalistas lleven a cabo sus prácticas docentes.

Se diseñarán los siguientes instrumentos para recopilar datos: guiones de experienciación (Maturana y Varela, 1994) de la enseñanza en el aula normalista, cuestionarios, guiones de observación (Wittrock, 1986) de las prácticas acerca de estocásticos de los normalistas en el aula de primaria; guiones de entrevista semiestructurada (Zaskis, y Hazzan, 1999) aplicada a los normalistas y a alumnos de primaria.

Las técnicas de registro de datos serán: la escritura en papel, escritura en pizarrón, las videograbaciones y sus transcripciones de las sesiones de enseñanza impartidas a los normalistas por la investigadora, de las prácticas de los primeros en el aula de primaria y de las entrevistas que se realicen.

4.1.4 Criterios de análisis. A los datos, tanto documentales como recopilados por medio de los diversos instrumentos en los espacios del órgano operativo, se les aplicará la célula de análisis (Ojeda, 2006), la cual recoge los aspectos teóricos que sustentan la investigación en lo epistemológico, lo cognitivo y lo social: Ideas fundamentales de estocásticos, Otros conceptos matemáticos, Recursos semióticos, Términos empleados y Fenómenos referentes. En particular, mediante estos criterios se espera identificar en todo el proceso lo que correspondería a las tres componentes del Conocimiento Matemático para la enseñanza (CME):

- El *Conocimiento especializado*: Nos referimos a La propuesta de los contenidos de estocásticos que se presentan en los programas de la normal y de la primaria.
- El *Conocimiento de estudiantes*: Lo identificamos de los datos de los normalistas que se recopilen en el aula de la Normal y de la puesta en escena de sus estrategias de enseñanza en la escuela primaria.
- El *Conocimiento para la enseñanza*: Nos referiremos a la estrategia de enseñanza que diseñen los normalistas, a la forma en que la pongan en práctica en el aula de primaria y a su tratamiento en las intervenciones de los alumnos. En particular, es de nuestro interés identificar los dominios intuitivos de pensamiento probabilístico en las secuencias de enseñanza en el aula.

5. Resultados esperados

Se espera caracterizar la comprensión de ideas fundamentales de estocásticos de los maestros en formación para primaria y sus dificultades, identificar las ideas fundamentales que proporciona el plan y programas 2012 de formación de docentes de primaria para la enseñanza de estocásticos a alumnos de primaria. Se espera también identificar las dificultades de comprensión de docentes en formación de ideas fundamentales de estocásticos y, mediante las prácticas de enseñanza en el aula de los docentes en formación, sus dificultades para reconocer los dominios intuitivos del pensamiento probabilístico de alumnos de primaria en situaciones de enseñanza. Lo anterior posibilitará caracterizar, para estocásticos, las tres facetas del Conocimiento Matemático para la Enseñanza, que son: Conocimiento Especializado, Conocimiento de Estudiantes y Conocimiento para la Enseñanza, lo que, a su vez, se utilizará para proponer lineamientos para el diseño de estrategias de enseñanza de estocásticos en la Licenciatura para la Educación Primaria.

Se espera, además, identificar las debilidades y las fortalezas de los planes y programas de estudio de la escuela Normal y de la Primaria y, de ser necesario, proponer modificaciones a ellos. Por ejemplo, en la Normal, la Unidad 4 podría ser la Unidad 1 para proporcionar a los docentes en formación el contenido que les permita llevar a cabo una práctica en primaria más efectiva de los contenidos de Estadística y de Probabilidad.

Referencias bibliográficas

Alquicira, Z. M. I. (1998). *Probabilidad: Docencia y Praxis. Hacia una Fundamentación Epistemológica.* Tesis de maestría en ciencias no publicada. México: Cinvestav.

Ball, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education*, 51 (3), 241-247.

Ball, D. L., & Bass, H. (2003). *Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching.* En B. Davis y E. Simmt (Eds.), *Prooceding of the 2002 annual meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (pp. 3-14) Edmonton. AB: CMESG.

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. *Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special?* Manuscrito enviado para publicación, 2007.

Biehler, R. (1994). Probabilistic thinking, statistical reasoning, and the search for causes – Do we need a probabilistic revolution after we have taught data analysis? Extended version of a paper presented at the *Fourth International Conference on Teaching Statistics* (ICOTS 4), Marrakech, Morocco, 25-30 July 1994.

Biehler, R., Pratt, D. (2012). Research on the reasoning, teaching and learning of probability and uncertainty. *ZDM Mathematics Education*. Springer. Published online: 01 October 2012.

Burril, G., Biehler, R. (2013). Les idées statistiques fondamentales dans le curriculum scolaire. *Statistique et Eseignement*, 4(1), 5-24

Carballo, M. T. (2004). *Estocásticos en el segundo grado de educación primaria. Determinismo y azar.* Tesis de maestría en ciencias no publicada. México: Cinvestav.

Elizarraras, S. (2004). *Enseñanza y comprensión del enfoque frecuencial de la probabilidad en el segundo grado de secundaria.* Tesis de maestría en ciencias no publicada. México: Cinvestav.

Flores L., P. (2002). *La predicción y el azar: praxis, creencias, saberes y conocimientos del docente de educación primaria.* Tesis de maestría en ciencias no publicada. México: Cinvestav.

Flores M., P. (2009). *Medios y enseñanza de estocásticos en el tercer ciclo de educación primaria.* Tesis de maestría en ciencias no publicada. México: Cinvestav.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Holland: Reidel.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Dordrech-Holland: Reidel. Chap.XVIII, pp. 580-613.

Gattuso, L. (2006). Statistics and mathematics: is it possible to create fruitful links? In Rossman, A. & Chance, B. (Eds.), *Proceeding of the Seventh International Conference on the Teaching of*

Statistics. IASE. Salvador, Bahía, Brasil, 2-7 July. Recuperado de http://www.ime.usp.br/~abe/ICOST7/Proceedings/index.html

Heitele, D. (1975). An epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics*. 6(2), 187-205.

Hill, H. C., Ball, D. L. & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39 (4), 372-400

Jacobs, V. R. & Ambrose, R. C. (2003). Individual interviews as a window into teachers' practice: A framework for understanding teacher-student interactions during mathematical problem solving. *American Educational Research Association Annual Meeting*. Chicago. IL.

Limón, A. (1995). *Elementos para el análisis crítico de la posible inserción curricular de nociones estocásticas, ausentes en los programas de preescolar y primaria*. Tesis de maestría en ciencias no publicada. México: Cinvestav.

López Molina, J. M. (2006). *Comprensión de la ley de los grandes números en el tercer grado de secundaria*. Tesis de maestría en ciencias no publicada. México: Cinvestav.

López Mojica, J. M. (2013). *Pensamiento Probabilístico y esquemas compensatorios en la educación especial*. Tesis de doctorado no publicada. México: Cinvestav.

Martínez, A. (2010). *Un estudio con profesores en formación sobre su conocimiento pedagógico en matemáticas*. Tesis de maestría en ciencias no publicada. México: Cinvestav.

Maturana, H. y Varela, F. (1994). *El árbol del Conocimiento*. Ed. Universitaria.

Ojeda, A. M. (1987). Ideas Fundamentales y Actividades Modelo en la Enseñanza de la Probabilidad. Nivel Medio Superior. En *Cuadernos de Investigación*. Año II. Nos. 3 y 4. Julio/Octubre, 1987. México: Cinvestav.

Ojeda, A. M. (2006). Estrategia para un perfil nuevo de docencia: un ensayo en la enseñanza de estocásticos. En Filloy (Ed.) *Matemática Educativa, treinta años* (pp. 257-281). México: Santillana-Cinvestav.

Ojeda, A. M. (2007). *Probabilidad y Estadística en Matemática Educativa. Seminario de Investigación*. Documento Interno. Manuscrito no publicado. México: Cinvestav.

Perrusquía, E. (1998). *Probabilidad y Aritmética: estudio Epistemológico en el Estadio Medio. Dificultades de Interpretación*. Tesis de maestría en ciencias no publicada. México: Cinvestav.

Piaget, J., Inhelder, B. (1951). *La genèse de l´idée de hazard chez l´enfant*. Paris: PUF.

Ramos, A. (2015). *La probabilidad y la estadística en la construcción del pensamiento matemático del niño preescolar*. Tesis de maestría en ciencias no publicada. México: Cinvestav.

Rivera Casales, M. (2011). *Comprensión de ideas fundamentales de estocásticos en el bachillerato universitario.* Tesis de maestría en ciencias no publicada. México: Cinvestav.

Salcedo, J. (2013). *Razonamiento Probabilístico en el Bachillerato Tecnológico.* Tesis de maestría en ciencias no publicada. México: Cinvestav.

SEP (2009). Evaluación Nacional de Logros Académicos en Centros Escolares (ENLACE). *Educación Primaria*. México.

SEP (2013). Evaluación Nacional de Logros Académicos en Centros Escolares (ENLACE). *Educación Primaria*. México.

SEP (1999). Plan de estudios. *Licenciatura en Educación Preescolar*. México.
SEP (2012). Plan de estudios. *Licenciatura en Educación Preescolar*. México.
SEP (1997). Plan de estudios. *Licenciatura en Educación Primaria*. México.
SEP (2011). Plan de estudios. *Licenciatura en Educación Primaria*. México.
SEP (1999). Plan de estudios. *Licenciatura en Educación Secundaria*. México.
SEP (2012). *Matemáticas, primer grado* (Libro para el alumno). México.
SEP (2012). *Matemáticas, segundo grado* (Libro para el alumno). México.
SEP (2011). *Matemáticas, tercer grado* (Libro para el alumno). México.
SEP (2011). *Matemáticas, cuarto grado* (Libro para el alumno). México.
SEP (2011). *Matemáticas, quinto grado* (Libro para el alumno). México.
SEP (2011). *Matemáticas, sexto grado* (Libro para el alumno). México.
SEP (2011). *Planes y programas de estudio 2011*. Educación Básica. México.
SEP (2012). *Planes y programas de la Licenciatura en Educación Primaria* 2012. México.
Steinbring, H. (1991). The Concept of Chance in Everyday Teaching: Aspects of a Social Epistemology of Mathematical Knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 22, 503-522. (Traducción interna de Garnica y Ojeda, 1996).
Steinbring, H. (1999). How do mathematical symbols acquire their Meaning? –The methodology of the epistemology-based interaction research. Recuperado el 23/03/2015 de http://webdoc.sub.gwdg.de/ebook/e/gdm/1999/steinbring_99.pdf
Vasilachis, I. (2006). *Estrategias de investigación cualitativa*. España: Gedisa.
Vázquez Pérez, O. (2004). *Enseñanza y comprensión del enfoque clásico de la probabilidad en primer grado de secundaria*. Tesis de maestría en ciencias no publicada. México: Cinvestav.
Vázquez Tirado, G. (1998). *Enseñanza de la probabilidad en los sistemas abiertos: identificación teórica de fundamentos: el caso de la Telesecundaria en el Sistema Educativo Nacional*. Tesis de maestría en ciencias no publicada. México: Cinvestav.
Vygotski, L. (1995). *Pensamiento y lenguaje*, págs. 153-196. España: Paidós
Wittrock, M. (1986). *La investigación de la enseñanza II*. Barcelona, España: Paidós.
Zazkis, R. y Hazzan, O. (1999). Interviewing in Mathematics Education Research: Choosing the Questions. *Journal of Mathematical Behavior*, 17 (4), 429-439. ISSN 0364-0213.

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

CAPÍTULO 4 | EL PENSAMIENTO DEL PROFESOR, SUS PRÁCTICAS Y ELEMENTOS PARA SU FORMACIÓN PROFESIONAL

ESTRATEGIAS QUE UTILIZAN LOS DOCENTES EN FORMACIÓN PARA RESOLVER PROBLEMAS DE CONTEO

Ana María Martínez Blancarte, Ana María Ojeda Salazar

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (México)

amatinezb@cinvestav.mx; amojeda@cinvestav.mx

Palabras clave: combinatoria, docentes en formación, estocásticos, técnicas de conteo.

Key words: combinatorics, teachers training, stochastics, counting techniques.

RESUMEN: Esta investigación, de orden cualitativo (Vasilachis, 2006), es parte de una más amplia y concierne a la propuesta de la Licenciatura en Educación Primaria (SEP, 2012b) para la idea de combinatoria, incluida en su asignatura "Procesamiento de la Información Estadística" del cuarto semestre. Debido al contenido del curso y a la propia experiencia en formación docente, su enseñanza y las prácticas de docencia en primaria (SEP, 2011c) requieren más tiempo y sincronización. Se reporta el conocimiento deficiente de técnicas de conteo de 52 docentes en formación, su uso preponderante de arreglos rectangulares para identificar el inventario de acomodos de un tipo dado, en detrimento del recurso al diagrama de árbol y a las expresiones matemáticas.

ABSTRACT: This qualitative research (Vasilachis, 2006), part of a wider one, concerns the Bachelor of Elementary Education proposal (SEP, 2012b) for the idea of combinatorics, which is included in the fourth semester course "Processing of Statistical Information". Because of this course content and the personal experience in teacher training, more time and synchronization are required for its teaching and for the students' practices of teaching in the elementary school (SEP, 2011c). Here we report the deficient knowledge of counting techniques of 52 students in training, their priming use of the rectangular arrays to identify the inventory of arrangement of a given type, to the detriment of using other resources such as the tree diagram and mathematical expressions.

INTRODUCCIÓN

Diversas investigaciones han señalado el tratamiento insuficiente de los temas de estocásticos en los distintos niveles de la educación matemática en México (por ejemplo, Perrusquía, 1998; Flores, L., 2002; Carballo, 2004; Vázquez, 2004; López, 2006; Rivera, 2011; Salcedo, 2013; Torres, 2013), así como la falta de conocimiento de estocásticos de docentes de educación básica en activo (por ejemplo, Limón,

1995; Alquicira, 1998; Elizarraras, 2004; Flores, M., 2009), lo cual requiere investigar la formación docente en estocásticos en la Licenciatura de Educación Primaria. En la reciente reforma a los planes y programas para la Educación Normal (SEP, 2012b) se dedica el cuarto semestre a estocásticos en la Licenciatura en Educación Primaria, con la asignatura "Procesamiento de la Información Estadística". Por la recencia de esta inclusión, se pretende investigar las características de la formación docente en estocásticos para la educación primaria, dadas también las reformas cercanas (SEP, 2009 y 2011c) a esta última. De particular interés aquí es la comprensión de los docentes en formación de las técnicas de conteo, luego de que arriban al cuarto semestre de la licenciatura con el conocimiento de esas técnicas adquirido en su formación antecedente básica y en el nivel medio superior.

Heredia (1998) investigó la comprensión de técnicas de conteo de 100 alumnos de secundaria. Para ello, diseñó dos versiones de cuestionarios: una plantea situaciones de conteo y la otra versión plantea situaciones probabilísticas. Diseñó dos entrevistas, cuatro sesiones de actividades sobre combinatoria y probabilidad. Concluyó que los problemas sobre la regla del producto tuvieron mayor número de respuestas transferidas a la versión de probabilidad. En el cuestionario de conteo sólo el 23% de los alumnos contestó correctamente; en el de probabilidad tuvieron dificultades al calcular el número de los casos favorables. La permutación circular fue la operación más difícil para los estudiantes; la de combinación fue mejor empleada en comparación con la de permutación con o sin repetición. La investigadora identificó dos enfoques en las respuestas de los alumnos a los problemas de probabilidad: el subjetivo y el teórico. Un alumno aplicó el enfoque subjetivo por imitación, en un segundo momento pasó de la aplicación del enfoque subjetivo al teórico y, por último, estableció la relación existente entre los casos favorables y posibles. Los estudiantes de bajo desempeño mostraron carencias en el uso del diagrama de árbol, de tablas y de expresiones numéricas; los de buen desempeño mostraron carencia en el uso de las tablas y de las expresiones numéricas.

Las preguntas que planteamos en esta parte de la investigación son:

- ¿Qué caracteriza a la comprensión de ideas de combinatoria de los maestros en formación para primaria?
- ¿Qué elementos para la enseñanza de ideas de combinatoria a alumnos de primaria proporciona el Plan y Programas 2012b (SEP) en la formación de profesores de primaria?

Los objetivos que perseguimos son:

- Identificar el Conocimiento Matemático (técnicas de conteo) para la Enseñanza (CME) de los docentes en formación para la educación primaria.
- Identificar sus dificultades de comprensión de ideas de combinatoria que repercutirían en la enseñanza en primaria que impartirían.

MARCO DE REFERENCIA

Heitele (1975) propuso diez ideas como fundamentales para un currículum de estocásticos: medida de probabilidad, espacio muestra, regla de adición, regla del producto e independencia, combinatoria, equidistribución y simetría, modelo de urna y simulación, variable aleatoria, ley de los grandes números y muestra. Señaló que el diagrama de árbol es una representación icónica que favorece la visualización de la estructura de la multiplicidad de pasos de un experimento aleatorio, así como de todos los resultados posibles. De acuerdo al modelo evolutivo del pensamiento que proponen Piaget e Inhelder (1975), es en la etapa de las operaciones formales cuando los niños acceden a las operaciones de combinatoria (a partir de los 13 a 14 años de edad). Fischbein (1975) afirma que entre los 11 y 12 años, los niños con una enseñanza apropiada pueden asimilar los procedimientos enumerativos al construir diagramas de árbol; entre los 13 a 15 años, los niños pueden asimilar procesos combinatorios. El diagrama de árbol prefigura la regla de la suma y del producto de probabilidades y su uso contribuye a evitar que los niños se limiten al razonamiento determinista y consideren lo posible.

Según Ball y Bass (2000), el Conocimiento Matemático para la Enseñanza (CME) es una composición de contenido matemático y pedagogía. Cualquier docente, de cualquier asignatura, lo requiere en su práctica diaria. Las facetas del CME son: a) *Conocimiento Matemático Especializado*, al que Hill, Ball y Schilling (2008) definen como el contenido adicional que va más allá del conocimiento matemático "común" para la enseñanza de un tópico matemático, si bien no especifican si "común" sería el conocimiento enseñado tal cual; b) El *Conocimiento de estudiantes* es el que se relaciona con los conocimientos de contenido y el razonamiento de los alumnos, es decir, el conocimiento de los conceptos, las estrategias, dudas, confusiones o ideas erróneas de los educandos sobre un tópico matemático; y c) El *Conocimiento para la enseñanza* es la fusión del conocimiento de matemáticas y de pedagogía para el diseño y planeación de la enseñanza en el aula.

Dreher y Kuntze (2015) investigaron la atención de los profesores en la clase de matemáticas a las representaciones múltiples como parte de su conocimiento profesional. Identificaron una falta de conciencia de los profesores en servicio y en formación de que "el éxito del pensamiento matemático, por lo general, depende de la interacción de las diferentes representaciones" (p. 109). Los docentes en servicio relacionaron significativamente la capacidad de cambiar las representaciones como algo esencial para el desarrollo de la comprensión matemática de los estudiantes. En cambio, los docentes en formación presentaron debilidades en la advertencia por el contenido específico de las representaciones múltiples, a pesar de que recientemente habían asistido a cursos de matemáticas. El conocimiento profesional de los docentes debe incluir el del papel de las representaciones múltiples en el aprendizaje de las matemáticas como un requisito previo importante para la atención de un tema en específico en las interacciones alumno-docente).

MÉTODO

Se realizó una investigación documental (Cortés y García, 2003) de las propuestas institucionales para estocásticos de la Licenciatura para Educación Primaria (SEP, 2012b) y de Matemáticas para Primaria (SEP, 2011c) y se identificó la consecuencia entre ambas.

Para identificar el dominio de conceptos de estocásticos al inicio de la asignatura "Procesamiento de la Información Estadística", de 52 estudiantes (19 a 31 años de edad) de cuarto semestre de la Licenciatura de Educación Primaria, se les aplicó un cuestionario, diseñado por tres docentes de la Licenciatura, con 27 reactivos: nueve fueron de relacionar columnas, 12 de opción múltiple y seis abiertos; de todos ellos, sólo los reactivos 3 y 10 (véase la Tabla 1) plantearon problemas de conteo (combinaciones y permutaciones). El cuestionario se presentó impreso a los normalistas para su contestación individual en dos horas.

A las lecciones del libro de texto de primaria y a las respuestas de los normalistas al cuestionario se les aplicó la célula de análisis (Ojeda, 2006): Situación referente; Ideas fundamentales de estocásticos implicadas; Otros conceptos matemáticos requeridos; Recursos semióticos; y Términos empleados para referirse a ideas de estocásticos.

Tabla 1. Caracterización de los reactivos de combinatoria del cuestionario.

Reactivo	Ideas fundamentales	Otros conceptos matemáticos	Recursos semióticos	Términos empleados
3. Un saco contiene 6 bolas blancas y 5 negras. Halle el número de posibilidades para sacar 4 bolas del saco, si:	Combinatoria (combinaciones) Modelo de urna	Números naturales y sus operaciones.	Lengua natural escrita, signos numéricos.	Posibilidades Contener, sacar
a) Las bolas son de cualquier color				Cualquier
b) Dos bolas sean blancas y dos negras				Dos de cada color
c) Todas del mismo color.				Todas, mismo color
10. Con tres letras, a, b y c, ¿cuántas palabras distintas de tres letras se pueden formar si:	Combinatoria (permutaciones)	Números naturales y sus operaciones.	Lengua natural escrita, signos numéricos.	Cuántas, distintas
a) las tres letras sean distintas?	(sin repetición)			Distintas
b) dos letras, por lo menos, sean idénticas?	(con repetición)			Por lo menos idénticas

RESULTADOS DEL ANÁLISIS

Propuesta Institucional de la Licenciatura para Educación Primaria (SEP, 2012b). La asignatura "Procesamiento de la Información Estadística", del 4º semestre de la licenciatura, incluye en su unidad 2 al principio fundamental del conteo (permutaciones y combinaciones), el concepto de probabilidad clásica y diagramas de árbol. Para el principio fundamental del conteo, no se consideran aspectos de interés para su enseñanza aparte del orden, tales como la distinguibilidad o no de los elementos que se cuentan, o su exclusión o no. Tampoco se proporciona la información pertinente del orden en la enseñanza primaria de las técnicas de conteo. Piaget e Inhelder (1951) señalaron que las combinaciones aparecen antes de las permutaciones durante el desarrollo evolutivo del niño.

Propuesta institucional de primaria (SEP, 2011c). Los libros de texto vigentes en el ciclo escolar 2014-2015 proponen un escaso tratamiento de estocásticos en todos los grados; este contenido se introduce hasta el tercer grado. 52.17% de los contenidos matemáticos corresponde al eje "Sentido numérico y pensamiento algebraico", 33.33% al eje "Forma, espacio y medida"; y sólo 14.49% al eje "Manejo de la información", el cual se destina al análisis y tratamiento de la información, a la proporcionalidad y a funciones. Los libros de texto sólo incluyen tres lecciones en los diferentes grados para introducir combinatoria en primaria (la 46, "Trajes" del bloque V de 2° grado (SEP, 2012a, pp. 87-88); la 16, "Figuras y colores" del bloque I de 3er grado (SEP, 2011a, pp. 38), y la 13, "Combinaciones" del bloque I de 4° grado (SEP, 2011b, pp. 31). El objetivo de estas lecciones (véase la Tabla 2) es más de operatividad aritmética que de identificación de posibilidades.

Tabla 2. Caracterización de las lecciones del libro de texto sobre combinatoria.

Criterio de Análisis	Nombre de la lección y ubicación		
	Trajes Lección 46, 2° grado Quinto bloque LA: 87-88 LM: 140-142	*Figuras y colores* Lección 16, 3er grado Primer bloque LA: 38 LM: 54-55	*Combinaciones* Lección 13, 4° grado Primer bloque LA: 31 LM: 49-51
Situación	Combinaciones de ropa, de lámparas por forma y tipos de focos. Formación de números con tres cifras.	Completar tabla con figuras (círculos, rectángulos, triángulos, romboides) y colores (rojo, amarillo, verde, azul, rosa). Marcar figuras según características dadas.	Armar casas con techos y fachadas de colores diferentes. Combinar frutas para postres. Formar parejas de baile.
Ideas fundamentales	Combinatoria (Principio multiplicativo).	Combinatoria (Principio multiplicativo).	Combinatoria (Principio multiplicativo)
Otros conceptos matemáticos	Cifra, números de dos cifras, multiplicación.	Características de figuras geométricas. Multiplicación de enteros.	Multiplicación. Triángulos, rectángulos.
Recursos semióticos	Figuras de blusas, lámparas, focos y números. Lengua natural escrita. Símbolos numéricos.	Tabla y figuras geométricas (círculo, rectángulo, triángulo y romboide). Lengua natural escrita.	Figuras de fachadas de diferentes colores. Lengua natural escrita Números naturales menores de 20.
Términos empleados	Diferentes maneras	Dibujar y colorear figuras	Diferentes, similares, modelo.

En los libros de texto del alumno se privilegia el enfoque aritmético operativo para tratar el principio multiplicativo, pero se podría favorecer la continuación de contenidos de combinatoria en primaria orientándolos hacia lo posible. El libro del maestro incluye ejemplos de soluciones que puede esperar el docente a los problemas planteados a los alumnos. Es decir, se podrían reconsiderar esas lecciones para la enseñanza de estocásticos en la escuela primaria a niños de 9 a 10 años de edad, en particular hacia las ideas de espacio muestra y combinatoria, como lo afirma Fischbein (1975), mediante actividades diseñadas para tal efecto.

Cuestionario: ideas de combinatoria. Se reveló el conocimiento deficiente de los docentes en formación de las técnicas de conteo (véase la Tabla 3).

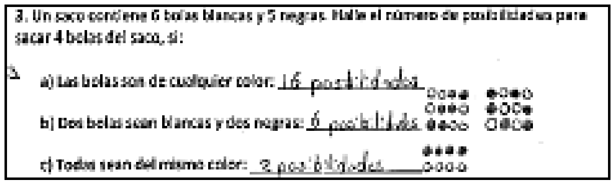
Tabla 3. Tabla 3. Tipos de respuesta a los reactivos 3 y 10 del cuestionario.

Reactivo	Respuestas Correctas	Incorrectas	Omitidas
3. Un saco contiene 6 bolas blancas y 5 negras. Halle el número de posibilidades para sacar 4 bolas del saco, si:			
a) Las bolas son de cualquier color	0	40	12
b) Dos bolas sean blancas y dos negras	0	36	16
c) Todas sean del mismo color.	0	35	17
10. Con tres letras, a, b y c, ¿cuántas palabras distintas de tres letras se pueden formar si:			
a) las tres letras sean distintas?	23	20	9
b) dos letras, por lo menos, sean idénticas?	0	35	17

Sin embargo, incluso si las condiciones de aplicación del instrumento no hubieran permitido que los estudiantes preguntaran si algunos de los incisos podrían implicar o no el reemplazo, ellos deberían haber considerado cada caso y proporcionar la respuesta respectiva.

El reactivo 3, relativo a la regla del cociente, no resultó discriminatorio; alrededor del 71% de los normalistas respondieron sus tres incisos, pero incorrectamente (véase la Tabla 3). En lugar de las respuestas esperadas, a) 330 posibilidades, b) 150 posibilidades, c) 20 posibilidades (respectivamente), obtenidas al aplicar el coeficiente binomial, nueve estudiantes (17%) dibujaron las bolas negras y blancas para enlistar todas las posibilidades y contestar incorrectamente los tres reactivos (véase la Figura 1). De la confusión entre "posibilidad" y "probabilidad", o bien de la desatención a "número de posibilidades" en el enunciado, resultó que 60% (31) de los estudiantes interpretaron el reactivo como una solicitud de la probabilidad del caso en cada inciso, en lugar del número de posibilidades respectivo, y respondieron $\frac{4}{11}$ al inciso a). De manera semejante, para el inciso b), siete estudiantes (14%) contestaron $\frac{2}{6}$ y $\frac{2}{5}$; es decir, para la combinación más numerosa respondieron con las proporciones de bolas correspondientes a cada color en la combinación. Una estudiante multiplicó las proporciones de bolas en dos subconjuntos de cada color ($\frac{4}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{30}$) e identificó su porcentaje (consideró $\frac{30}{30}$ como el 100% y determinó 53% como el porcentaje correspondiente a la fracción que obtuvo). Sólo un estudiante (2%) comenzó a diseñar un diagrama de árbol pero lo borró y no contestó ninguno de los incisos.

Figura 1. Respuestas al reactivo 3.


3. Un saco contiene 6 bolas blancas y 5 negras. Halle el número de posibilidades para sacar 4 bolas del saco, si:

a) Las bolas son de cualquier color: 16 posibilidades

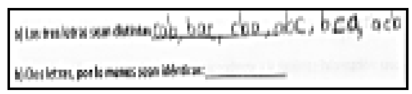
b) Dos bolas sean blancas y dos negras: 6 posibilidades

c) Todas sean del mismo color: 2 posibilidades

El reactivo 10 fue más fácil para los estudiantes, dado que su inciso a) obtuvo 23 (44%) respuestas correctas (6 palabras), aunque para el inciso b) ninguna respuesta fue correcta (21 palabras). Para contestar al inciso a), siete estudiantes (14%) utilizaron el diagrama de árbol, dos (4%) arreglos rectangulares (véase la Figura 2) y seis (12%) enlistaron las ordenaciones de tres signos (véase la Figura 3). Ningún estudiante utilizó el principio multiplicativo, que se trata en primaria.

Figura 2. Arreglo rectangular incompleto

Figura 3. Listado de palabras.


b) Dos letras, por lo menos son idénticas:

Al igual que los estudiantes de secundaria de la investigación de Heredia (1998), los estudiantes normalistas emplearon representaciones gráficas (diagramas de árbol) y figurales, y procedimientos numéricos para resolver la situación planteada.

COMENTARIOS FINALES

Las propuestas institucionales de la Licenciatura y de la Educación Primaria están desfasadas en cuanto a la enseñanza de la combinatoria, contenido que se trata en licenciatura, pero para primaria el principio multiplicativo tiene fines de operatividad aritmética. A los normalistas se les facilitó más la contestación del reactivo de permutaciones que del de combinaciones, contrario a lo que Piaget e Inhelder (1951) señalan que ocurre con los niños. Los estudiantes utilizaron las fracciones para representar las proporciones de los colores de las bolas en las urnas al confundir "posibilidad" con "probabilidad". Sus recursos semióticos para contestar a los reactivos de combinatoria del cuestionario de diagnóstico fueron los signos numéricos (naturales y fraccionarios), la lengua natural escrita, el figural, el diagrama de árbol, el listado y el arreglo rectangular. Estos recursos estuvieron directamente vinculados con las situaciones planteadas y los estudiantes contaron una a una las posibilidades, sin exhibir el nivel de abstracción esperado con la aplicación del principio multiplicativo. Esto pone de relieve la conclusión a la que llegaron Dreher y Kuntze (2015) en su investigación; el docente debe tener un conocimiento profesional sobre el papel de las múltiples representaciones de un contenido matemático.

El *conocimiento de contenido especializado* de combinatoria y de recursos para operar la idea, como diagrama de árbol, arreglos rectangulares y el simbolismo matemático, es inexistente antes de recibir la formación en el tema en la licenciatura; pero ni siquiera se le podría caracterizar como el conocimiento "común" del tema, al que se refieren Hill, Ball y Schilling (2008). No sólo no se reconocen las combinaciones, sino el principio multiplicativo del conteo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alquicira, Z. M. I. (1998). *Probabilidad: Docencia y Praxis. Hacia una Fundamentación Epistemológica*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Ball, D. L., & Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on the teaching and learning of mathematics*. (pp. 83-104). Westport, CT: Ablex.

Cortés, G.; García, S. (2003). *Investigación documental*. México: SEP, Dirección General de Educación Superior, Escuela Nacional de Biblioteconomía y Archivonomía.

Carballo, M. T. (2004). *Estocásticos en el segundo grado de educación primaria. Determinismo y azar*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Dreher, A., y Kuntze, S. (2015). Teachers' professional knowledge and noticing: The case of multiple representations in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*. 88:89-114.

Elizarraras, S. (2004). *Enseñanza y comprensión del enfoque frecuencial de la probabilidad en el segundo grado de secundaria*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Flores L., P. (2002). *La predicción y el azar: praxis, creencias, saberes y conocimientos del docente de educación primaria*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Flores M., P. (2009). *Medios y enseñanza de estocásticos en el tercer ciclo de educación primaria*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Holland: Reidel.

Heitele, D. (1975). *An epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas*. Educational Studies in Mathematics. 6(2), 187-205.

Heredia, F. (1998). *Ideas de combinatoria y su transferencia a un contexto probabilístico. Un estudio con alumnos de secundaria*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México

Hill, H. C., Ball, D. L. & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39 *(4)*, 372-400.

Limón, A. (1995). *Elementos para el análisis crítico de la posible inserción curricular de nociones estocásticas, ausentes en los programas de preescolar y primaria*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

López, J. (2006). *Comprensión de la Ley de los Grades Números en el Tercer Grado de Secundaria*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Ojeda, A. M. (2006). Estrategia para un perfil nuevo de docencia: un ensayo en la enseñanza de estocásticos. En Filloy (Ed.) *Matemática Educativa, treinta años* (pp. 257-281). México: Santillana-Cinvestav.

Piaget, J., Inhelder, B. (1951). *The Origin of the Idea of Chance in Children*. W. W. Norton & Compañy INC. New York, 1975.

Perrusquía, E. (1998). *Probabilidad y Aritmética: estudio Epistemológico en el Estadio Medio. Dificultades de interpretación*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Rivera, M, S. (2011). *Comprensión de Ideas Fundamentales de Estocásticos en el Bachillerato Universitario*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Salcedo, J. (2013). *Razonamiento Probabilístico en el Bachillerato Tecnológico*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Torres, O. (2013). *Limitaciones en la adquisición de Ideas Fundamentales de Estocásticos por estudiantes de Ingeniería: El caso de un Instituto Tecnológico*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

SEP (2009). *Planes y programas de estudio 2009*. Educación Básica. México.

SEP (2012a). *Matemáticas, segundo grado* (Libro para el alumno). México.

SEP (2011a). *Matemáticas, tercer grado* (Libro para el alumno). México.

SEP (2011b). *Matemáticas, cuarto grado* (Libro para el alumno). México.

SEP (2011c). *Planes y programas de estudio 2011*. Educación Básica. México.

SEP (2012b). *Planes y programas de la Licenciatura en Educación Primaria* 2012. México.

Vasilachis, I. (2006). *Estrategias de investigación cualitativa*. España: Gedisa.

Vázquez, O. (2004). *Enseñanza y comprensión del enfoque clásico de la probabilidad en primer grado de secundaria*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

CB-107

COMPRENSIÓN DE PROMEDIOS POR DOCENTES EN FORMACIÓN

Ana María Martínez Blancarte – Ana María Ojeda Salazar
amatinezb@cinvestav.mx – amojeda@cinvestav.mx
Cinvestav I. P. N., México – Cinvestav I. P. N., México

Núcleo temático: Formación del profesorado en matemáticas.
Modalidad: CB
Nivel educativo: Formación y actualización docente.
Palabras clave: promedios, docentes en formación

Resumen

Esta investigación, cualitativa, parte de una más amplia enmarcada en la propuesta de Heitele (1975), y se orienta a la formación en estocásticos de los futuros docentes de educación primaria. Los objetivos fueron: identificar el Conocimiento de las medidas de tendencia central para la Enseñanza (CME) que ellos requieren y sus dificultades de comprensión de esas medidas, que repercutirían en la enseñanza en primaria que impartirían. Se aplicó un cuestionario diagnóstico a 26 estudiantes del cuarto semestre de la Licenciatura en Educación Primaria en México; cuatro reactivos se refirieron a la media, moda y mediana; otro a la media armónica, dos a la media ponderada y uno a la media geométrica. Los estudiantes no identificaron como promedio a la moda ni a la mediana, sólo a la media. La única estudiante que identificó la relación entre los datos (velocidad, tiempo y distancia) del reactivo de media armónica, lo respondió incorrectamente. Ninguna respuesta al reactivo de media geométrica fue correcta, sólo se aplicó el algoritmo de la media. Ocho estudiantes respondieron correctamente los reactivos de media ponderada. Los futuros docentes requieren conocer los distintos promedios e identificar las relaciones entre los datos en cuestión para aplicar el promedio apropiado.

Introducción. Como parte de una investigación más amplia, las investigaciones de Martínez y Ojeda (2015; 2017 (en prensa)), que anteceden a la presente, se interesaron en el conocimiento efectivo para la enseñanza de estocásticos que se proporciona al futuro docente de primaria (SEP, 2012). La primera investigación aproximó una forma de identificar el conocimiento matemático y las dificultades de comprensión de los futuros docentes sobre temas de estocásticos. En la segunda investigación, las autoras concluyeron que, si bien las propuestas institucionales de la Licenciatura (SEP, 2012) y de la Primaria (SEP, 2011) incluyen las medidas de tendencia central, ninguna atiende a la media ponderada. El libro de texto de Nortes (1991), recomendado para la licenciatura, así como

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

los libros de texto de primaria, sugieren la enseñanza de tres medidas centrales (media, mediana y moda), aunque difieren en su orden. Sobre los conocimientos para la enseñanza en el aula que requerirá el futuro docente y su conocimiento del de sus futuros alumnos, el programa de la licenciatura sólo considera el acercamiento al eje *Manejo de la información* de primaria (SEP, 2012a, p. 48), para que los normalista identifiquen en él el contenido matemático de estocásticos y diseñen estrategias para su enseñanza. De la aplicación de un cuestionario a 52 estudiantes de la licenciatura resultó que su conocimiento matemático de las medidas centrales media, moda y mediana fue deficiente: en concordancia con Pollatsek, Lima y Well (1981), 30.76% de ellos identificaron la media ponderada al calcular la media (conocimiento de cálculo) y sólo 5.76% mostraron un conocimiento funcional de la media, como "algo razonable" (Mokros y Russell, 1995, p. 26). A partir de esos resultados, planteamos: a) ¿Qué caracteriza a la comprensión de las medidas de tendencia central de los docentes en formación para primaria?; y b) ¿Qué elementos para la enseñanza de las medidas de tendencia central a alumnos de primaria proporciona el Plan y Programas (SEP, 2012) para la formación de profesores de primaria? Nuestros objetivos fueron: 1) Identificar el Conocimiento de las medidas de tendencia central para la Enseñanza (CME) que requieren los docentes en formación para la educación primaria; y 2) Identificar sus dificultades de comprensión de esas medidas, que repercutirían en la enseñanza en primaria que impartirían. La investigación continuará con la realización de entrevistas semiestructuradas y la observación participante de la investigadora de la enseñanza de los futuros docentes del tema de medidas de tendencia central durante sus prácticas.

Marco de referencia. De acuerdo con Moroney (1979), el propósito de un promedio es "*representar un grupo de valores individuales* de una manera simple y concisa (…) que actúa como un *representante*" (p. 170). "Todos los promedios son conocidos por los estadísticos como "medidas de tendencia central"; indican el punto alrededor del cual se acumulan los diversos valores" (op. cit, p. 171). Este autor señaló que el promedio apropiado para un problema dado depende de los términos de éste, es decir, de su referente. La media aritmética se aplica, por ejemplo, a referentes de velocidad, con tiempos constantes y distancias variables, mientras que la media armónica es apropiada para

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

referentes de velocidades con distancias constantes y tiempos variables, o de tarifas. La media geométrica es aplicable a referentes de crecimiento de poblaciones o a proporciones; mientras que la mediana y la moda se recomiendan para ingresos y tamaños de familias. Bakker (2003) señaló que la media aritmética no tiene una interpretación estadística única, por lo que los estudiantes de entre 12 a 13 años de edad no la comprenden; no distinguen entre nociones de centro, valores mínimo y máximo, valor medio y centro de gravedad. Describió tres componentes del cálculo del promedio: 1) Estimar la suma o total a menudo tiene que ver con encontrar el número total al multiplicar la media por el número de datos. 2) Comparar equitativamente para responder la pregunta de cuánto corresponde a cada uno después de una redistribución justa, lo que implica obtener la media. 3) Estimar o calcular el número total de datos es una variante del primer caso. Una dificultad en la enseñanza de los promedios fue que la mayoría de los libros de texto introducen media, mediana y moda como una trinidad. Pollatsek *et al.* (1981) concluyeron en su investigación que: a) los estudiantes (18 a 22 años) de la licenciatura en Psicología no resolvieron correctamente problemas de medias ponderadas, porque consideraron a la media un concepto formal en términos de un cálculo basado en números abstractos; b) los libros de texto de esa Licenciatura proponen ejercicios que fomentan el cálculo de la media y omiten su conocimiento funcional. Los autores coligieron que no basta con dominar el algoritmo de la media, sino que los estudiantes requieren una comprensión relacional de ella al resolver problemas del mundo real y desarrollar así su conocimiento funcional y analógico. En su investigación sobre la comprensión de la media por alumnos de primaria y secundaria, Mokros y Russell (1995) identificaron cinco enfoques del promedio. Los dos primeros —como moda y por su algoritmo— no consideran la noción de representatividad del conjunto de datos; los otros tres —como algo razonable, como punto medio y como punto de equilibrio— sí lo hacen. Construir y tratar varios ejemplos y contraejemplos de la media con diferentes referentes posibilita que los estudiantes establezcan analogías. Para Heitele (1975), una idea "fundamental" (p. 188) proporciona al individuo, en cada etapa de su desarrollo, un modelo explicativo de la situación de la que se evoca tal idea. El autor propuso diez ideas fundamentales interrelacionadas entre sí, como guía continua de un curriculum en espiral para la formación en estocásticos: medida de probabilidad, espacio

ISBN 978-84-945722-3-4

muestra, adición de probabilidades, regla del producto e independencia, combinatoria, equiprobabilidad y simetría, modelo de urnas y simulación, variable estocástica, ley de los grandes números y muestra. De manera general, Ball y Bass (2000) proponen el *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* (CME), cuyas principales facetas (*Conocimiento Matemático Especializado*, *Conocimiento de estudiantes*, *Conocimiento para la enseñanza*, también hemos considerado en los antecedentes a esta investigación (Martínez y Ojeda, 2015); éstos tres conocimientos deben ser dominados por los futuros docentes al enseñar las medidas de tendencia central a los alumnos de primaria.

Método. A 26 estudiantes del cuarto semestre de la Licenciatura en Educación Primaria (de 19 a 28 años) se les aplicó un cuestionario diagnóstico que incluyó ocho reactivos (véase en el Apéndice 1) para identificar su conocimiento de medidas de tendencia central antes de su enseñanza. Los estudiantes contestaron individualmente en máximo dos horas el instrumento impreso. A los reactivos del cuestionario se les caracterizó mediante la célula de análisis (Ojeda, 2006): situación referente; ideas fundamentales de estocásticos implicadas; otros conceptos matemáticos requeridos; recursos semióticos; y términos empleados para referirse a ideas de estocásticos (véase la Tabla 1).

Tabla 1. Caracterización de los ocho reactivos del cuestionario diagnóstico.

Ideas fundamentales de estocásticos: Equidistribución y simetría, variable estocástica, muestra.			
Referente	**Otros conceptos matemáticos**	**Recursos semióticos**	**Términos empleados**
1. Tiempo que dedican las personas a escuchar música: a) cálculo de media, moda, mediana; b) ¿la media es dato?; c) tipo de variable; d) gráfica.	Unidades de tiempo, operaciones básicas, números decimales, producto cartesiano	Lengua natural escrita, tabla, gráfica	Promedio, muestra, media, mediana, moda, medida, tendencia central, variable
2. Resultados obtenidos en un test de aptitud de 100 personas: Intervalo a) modal, b) mediana, c) media aritmética.	Operaciones básicas, números naturales y decimales.	Lengua natural escrita, tabla, expresión matemática, símbolos numéricos	Intervalo modal, media, mediana, marca de clase, frecuencia simple y acumulada
3. Trece calificaciones en estadística: a) cálculo: media, mediana, moda. Representante: b) mejor, c) peor, d) imparcial.	Operaciones básicas, números naturales	Lengua natural escrita, expresión matemática, símbolos numéricos	Muestra, mediana, moda, media, medida de centralidad, nivel del grupo

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

4. Número de lagartijas y sentadillas realizadas por diez estudiantes. a) Cálculo tendencia central; b) dispersión; c) simetría	Operaciones básicas, números naturales, producto cartesiano	Lengua natural escrita, símbolos numéricos, tabla, gráfica	Muestra, azar, medidas de tendencia central, moda, media, mediana, rango, simetría,
5. Velocidad media de un aeroplano con velocidad variable en distancias iguales	Operaciones básicas, números naturales, medidas de longitud, de tiempo y velocidad	Lengua natural escrita, expresión matemática, signos numéricos	Velocidad media
6. Promedio de calificaciones de un estudiante	Números decimales, operaciones básicas, escala de calificación	Lengua natural escrita, signos numéricos	Promedio
7. Peso promedio de diez personas en un ascensor	Unidades de medida de peso (kilo), operaciones básicas	Lengua natural escrita, signos numéricos	Promedio
8. Proporción media de mujeres en una empresa	Operaciones aritméticas, raíz cuadrada, porcentaje, números decimales	Lengua natural escrita, tabla, signos numéricos	Proporción media, media geométrica

Los reactivos 1, 2, 3 y 4 se destinaron al cálculo de la media aritmética, la moda y la mediana; fueron tomados y adaptados de Patiño (2002, p. 1), *Casullo (2000, p. 41)*, Ferran (2012, p. 10) y Johnson (1976, p. 85), respectivamente. El reactivo 5, sobre media armónica, fue propuesto por Moroney (1979, p. 171); los reactivos 6 y 7 se adaptaron de los propuestos por Pollatsek *et al.* (1981, pp. 192 y 195) y, el reactivo 8, del planteado por Requena (2015) (véase http://www.universoformulas.com). El orden de los reactivos en el cuestionario reproduce el de la trinidad en los libros de texto, aunque el reactivo 2 considera datos agrupados; el 5 incluye el recíproco de la media aritmética de los recíprocos de los datos; los reactivos 6 y 7 se refieren a datos ponderados; el reactivo 8 requiere la media geométrica y su cálculo reviste mayor dificultad para los estudiantes.

Análisis de resultados del Cuestionario Diagnóstico. En general, el desempeño de los estudiantes en la contestación del cuestionario fue deficiente. La Tabla 2 muestra los resultados obtenidos en cada uno de los reactivos.

Ideas fundamentales de estocásticos. Las ideas de equidistribución y simetría, y muestra, no están apuntaladas. En el reactivo *1d*, ocho estudiantes (30.76%) no consideraron la variación de los datos de la muestra al trazar

Tabla 2. Número de resultados correctos, incorrectos y omitidos a cada uno de los reactivos del cuestionario diagnóstico.

Reactivos	Correctos	Incorrectos	Omitidos
1a Media	0	23	3

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

su gráfica, únicamente trazaron las barras para las tres medidas de tendencia central obtenidas; dos estudiantes (7.69%) sí consideraron todos los datos pero ubicaron incorrectamente las medidas centrales en su gráfica. En los reactivos *4b* y *4c*, cuatro estudiantes (15.38%) calcularon el rango para determinar la dispersión de los datos, pero ninguno identificó la simetría de su distribución en la gráfica. Tampoco está apuntalada la idea de variable estocástica; en general los estudiantes manifestaron un conocimiento del promedio por su algoritmo (Mokros y Russell, 1995), correspondiente a cada una de las medidas centrales; es decir,

Moda	17	6	3
Mediana	1	16	9
1b Media como dato	0	11	15
1c Tipo de variable	15	5	6
1d Gráfica	0	8	18
2a Moda	13	8	5
2b Mediana	5	13	8
2c Media	0	13	13
3a Media	6	18	2
Moda	17	6	3
Mediana	7	15	4
3b Más representatividad	3	16	7
3c Menos representatividad	3	16	7
3d Igual representatividad	0	17	9
4a Media	4	13	9
Moda	13	3	8
Mediana	3	13	10
4b Dispersión	4	10	12
4c Simetría	0	8	18
5 Media armónica	0	19	7
6 Media ponderada	3	20	3
7 Media ponderada	5	18	3
8 Media geométrica	0	11	15

a lo más, aplicaron un conocimiento de cálculo (Pollatsek *et al.*, 1981). Sólo un estudiante (3.84%) en el reactivo *1a*, cinco estudiantes (19.23%) en el *2a* y tres (11.53%) en el reactivo *4a*, identificaron la mediana solicitada. Seis estudiantes (23.07%) contestaron correctamente el reactivo *3a*, de media aritmética. Una estudiante (3.84%) en el reactivo *1a* y tres estudiantes (11.53%) en el reactivo *3a* confundieron la media y la mediana: sus procedimientos y cálculos fueron correctos, pero invirtieron los resultados. Seis estudiantes (23.07%) contestaron incorrectamente el reactivo *5* (media armónica); trazaron un cuadrado e indicaron las distancias constantes y las velocidades variables correspondientes a cada lado; tres de ellos calcularon la media, uno la mediana y dos respondieron "200 km/h". De estos últimos, uno de ellos no dio evidencia; el otro primero calculó al parecer la media de las velocidades y, sin quedar satisfecho, determinó el tiempo de recorrido para cada velocidad pero equivocó el de 100 km a 400 km/h (10 min en lugar de 15 min), así que el tiempo total de recorrido fue de 2 hrs en vez de 2:05 hrs, por lo que su respuesta fue incorrecta (véase la Figura 1). Ningún estudiante contestó correctamente el reactivo *8* (media geométrica), pues calcularon la media aritmética o la mediana (véase la Figura 2),

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

con lo que mostraron su desconocimiento del tipo de datos del referente (proporciones en cada parte de un total).

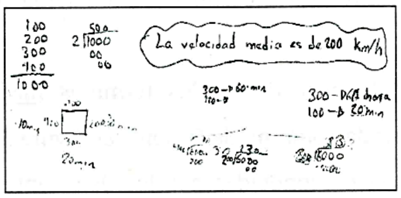


Figura 1. Solución incorrecta con media aritmética en lugar de la media armónica.

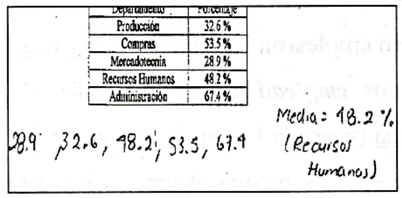


Figura 2. Solución incorrecta con mediana en lugar de la media geométrica.

Al reactivo *6*, de media ponderada, sólo tres (11.53%) estudiantes dieron respuesta correcta (8.58), tres más respondieron con la media aritmética (8.5) al no considerar hasta centésimas el cociente calculado (véase la Figura 3). Siete (19.23%) estudiantes en el reactivo *7* identificaron el doble promedio y respondieron correctamente. En ambos reactivos, seis y siete estudiantes, respectivamente, manifestaron su concepción de promedio como moda, según Mokros y Russell (1995), ya que ponderaron igualmente cada tipo de dato con la media (como ejemplo, véanse la Figura 3 y la Figura 4).

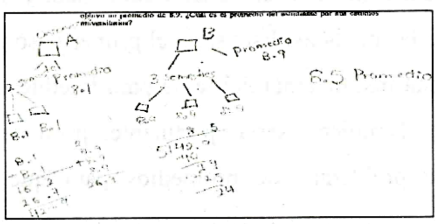


Figura 3. Solución incorrecta a la situación de media ponderada.

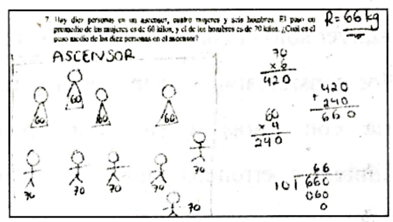


Figura 4. Solución correcta a la situación de media ponderada.

Otros conceptos matemáticos. Cuatro estudiantes (15.38%) omitieron las unidades de medida de peso, uno más (0.38%) escribió "kl". Para la velocidad, dos estudiantes 0.76%) prescindieron de km/h, otros dos (0.76%) registraron sólo "km", y uno más (0.38%) anotó "k/h". En los siete reactivos que requerían realizar operaciones aritméticas básicas, catorce estudiantes mostraron deficiencias en la suma y división de números decimales (véase la Figura 4). El producto cartesiano es un concepto incipiente en los estudiantes, a pesar de los años de escolaridad cursados; no establecieron el par de coordenadas (dato y frecuencia) al trazar su gráfica.

ISBN 978-84-945722-3-4

Recursos semióticos. Ocho estudiantes (30.76%) tradujeron la lengua natural escrita del referente mediante figuras o diagramas (incipientes) para responder la pregunta planteada (véanse la Figura 3 y la Figura 4), no operaron directamente con la información dada; también emplearon la notación aritmética.

Términos empleados. Cinco estudiantes (19.23%) confundieron los términos media y mediana (véase la Figura 3). La media fue identificada como moda (véanse la Figura 3 y la Figura 4). Las medias geométrica y armónica son desconocidas por los estudiantes. El término promedio lo utilizaron como sinónimo de media aritmética.

Comentarios finales. Al arribo de los estudiantes al 4º semestre de la licenciatura para educación primaria, las ideas fundamentales de muestra, variable estocástica y equidistribución y simetría no estaban apuntaladas. Identificaron a las medidas de tendencia central como una trinidad, de acuerdo con Bakker (2003), sin considerar todos los promedios. El Conocimiento matemático especializado de medidas centrales que requieren los futuros docentes precisa identificar la variación y dispersión de los datos (véanse la Figura 3 y la Figura 4), incluir las medias armónica y geométrica, así como enfrentarlos a una variedad de referentes para favorecer los conocimientos funcional y analógico, y dejar de promover sólo el conocimiento de cálculo de las medidas. Éste sería el primer paso para que ellos consideraran y examinaran la propuesta institucional del tema para la educación primaria con miras a su futura práctica. También, sería pertinente proponerles procedimientos erróneos en la resolución de problemas de promedios para que los analizaran y corrigieran, a fin de que los reconocieran en posibles desempeños de sus alumnos en su práctica docente futura. El plan y programas de la Licenciatura (SEP, 2012) no satisface para el tema de medidas de tendencia central lo que los futuros docentes requerirán como Conocimiento para la Enseñanza, pues no precisa el contenido matemático (promedios) y sólo establece el acercamiento al eje de Manejo de la información de primaria. El futuro docente debe dominar los tres tipos de conocimiento propuestos por Ball y Bass (2000) al enseñar las medidas de tendencia central, evitando así; repercusiones negativas en los aprendizajes de sus alumnos.

Referencias

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Ball, D., & Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on the teaching and learning of mathematics.* (pp. 83-104). Westport, CT: Ablex.

Bakker, A. (2003). The Early History of Average Values and Implications for Education. *Journal of Statistics Education* Volume 11, Number 1. www.amstat.org/publicacions/jse/v1 1n1/bakker.html Consultado 16/02/2016

Casullo, A. (2000). Riesgos sociales, medioambientales y personales percibidos por los adolescentes. *Anuario de Investigaciones VIII*. Buenos Aires: Secretaría de Investigaciones, Fac. de Psicología, U.B.A. http://www.psi.uba.ar/academica/carrerasdeGrado/psicología/sitioscátedras/obligatorias/060 estadistical/practicos/practica 3 2c.pdf Consultado 16/04/2016

Cortés, G. y García, S. (2003). *Investigación documental*. México: SEP, Dirección General de Educación Superior, Escuela Nacional de Biblioteconomía y Archivonomía.

Ferran X. (2012). 100 ejercicios resueltos de estadística básica para economía y empresa. *Departament d'Economia i d'Història Econòmica*. Universitat Autònoma de Barcelona Servei de Publicacions Bellaterra.

Heitele, D. (1975). An epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics*. 6(2), 187-205.

Johnson, R. (1976) *Estadística Elemental*. Ed Trillas. México. p. 85

Martínez A M., y Ojeda A M. (2015). Conocimiento matemático de docentes en formación para la enseñanza de estocásticos: problemática y planteamiento de investigación. *3er Coloquio de Doctorado*, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav. México, 2015. Documento publicado en http://www.matedu.cinvestav.mx/~tercercoloquiodoctorado/memorias/art/018.pdf

Martínez A M., y Ojeda A M. (2017, en prensa). Comprensión de docentes en formación de la media ponderada. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 30*. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Mokros, J. & Russell, S. J. (1995). Children's concepts of average and representativeness. *Journal for Research in Mathematics Education*. 26 (1), 20-39.

Moroney M J. (1979). Promedio y dispersión. En Newman, J. (1979). *El mundo de las matemáticas*. Serie Σ, tomo 3, cuarta ed. págs. 169-193. España: Grijalbo.

Nortes, A. (1991). Los cálculos. En *Encuestas y precios* (Capítulo 4). España: Síntesis.

Ojeda, A. M. (2006). Estrategia para un perfil nuevo de docencia: un ensayo en la enseñanza de estocásticos. En Filloy (Ed.) *Matemática Educativa, treinta años* (pp. 257-281). México: Santillana-Cinvestav.

Patiño R. (2002). *Medidas de tendencia central y variabilidad para datos agrupados*. Instituto Tecnológico de Celaya. Departamento de Ingeniería Química. http://iqcelaya.itc.mx/roosph/pye/u2/eu2ej4.pdf/ Consultado 20/03/2016

Pollatsek, A., Lima, S., Well, A. D. (1981). Concept or Computation: Students' Understanding of the Mean. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 12, No. 2, pp. 191-204. Springer.

Requena, B. (2016). *Universo formulas*. http://www.universoformulas.com/ Consultado 18/04/2016

SEP (2011). *Plan y programas de la Escuela Primaria* 2011. México.

SEP (2012). *Planes y programas de la Licenciatura en Educación Primaria* 2012. México.

SEP (2012a). Programa del curso. *Procesamiento de Información Estadística*. 2012. México.

APÉNDICE 1

ISBN 978-84-945722-3-4

Cuestionario diagnóstico

Nombre: ___________________________________ Grupo y grado: ____

Instrucciones: Contesta los siguientes reactivos y anota en estas hojas todos tus procedimientos.

1. En 1997, una persona pasaba en promedio 45 minutos escuchando música grabada*. De una muestra de 30 individuos se obtuvieron los siguientes datos de la cantidad de minutos en que escuchaban música grabada:

88.3	4.3	4.6	7.0	9.2	0.0	99.2	34.9	81.7	0.0
85.4	0.0	17.5	45.0	53.3	29.1	28.8	0.0	78.9	64.5
4.4	63.6	67.9	94.2	7.6	56.6	52.9	145.60	90.4	65.1

* Diario *The Des Moiner Register*, 5 de diciembre de 1997.

a) Calcula la media, la moda y la mediana de los datos en la tabla. Anota todo tu procedimiento.
b) ¿Coincide la media que obtuviste con algún dato de la muestra? _____ ¿Por qué?
c) ¿De qué tipo de variable son los datos de la muestra?
d) Traza la gráfica respectiva y ubica en ella las tres medidas de tendencia central que determinaste.

2. Se aplicó un test de aptitud a un grupo de 100 personas. Los resultados se concentraron en la siguiente tabla.

Intervalo de puntuaciones obtenidas	Frecuencia
20.5 – 25.5	28
15.5 – 20.5	32
10.5 – 15.5	21
5.5 – 10.5	12
0.5 – 5.5	7

a) ¿Cuál es el intervalo modal del conjunto de datos?
b) ¿En qué intervalo se encuentra la mediana del conjunto de datos?
c) Calcula la media aritmética de los datos.

3. Las calificaciones de los alumnos en un examen de Estadística fueron: 6, 4, 4, 3, 6, 10, 1, 0, 2, 6, 6, 8, 5.
   a) Calcula la media aritmética, la moda, la mediana.
   b) Si fueras un líder estudiantil, ¿qué medida de centralidad escogerías para argumentar el buen desempeño del grupo?
   c) Si fueras el profesor de la materia, ¿qué medida de centralidad escogerías para argumentar el mal desempeño del grupo?
   d) Si fueras un observador imparcial, ¿qué podrías decir sobre el nivel del grupo?

4. En el curso de Educación física el profesor Antúnez registró varias puntuaciones de condición física de sus alumnos. La muestra se compone del número de lagartijas y sentadillas ejecutadas por diez alumnos seleccionados al azar y se muestra en la siguiente tabla:

Alumno	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Lagartijas	27	22	15	35	33	52	35	40	40	40

30

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Sentadillas	30	26	25	36	33	36	32	54	50	43

a) Determina las medidas de tendencia central.
b) ¿Cuál de las dos muestras es más dispersa y por qué?
c) ¿Qué tipo de simetría tendría cada uno de los gráficos y por qué?

5. Un aeroplano vuela alrededor de un cuadrado cuyo lado tiene100 Km de largo, tomando el primer lado a 100 Km/h, el segundo lado a 200Km/h, el tercer lado a 300 Km/h y el cuarto lado a 400 Km/h. ¿Cuál es la velocidad media del aeroplano en su vuelo alrededor del cuadrado?

6. Un estudiante cursó en la universidad A dos semestres y obtuvo un promedio de calificaciones de 8.1. El mismo estudiante cursó en la universidad B tres semestres y obtuvo un promedio de 8.9. ¿Cuál es el promedio del estudiante por sus estudios universitarios?

7. Hay diez personas en un ascensor, cuatro mujeres y seis hombres. El peso en promedio de las mujeres es de 60 kilos, y el de los hombres es de 70 kilos. ¿Cuál es el peso medio de las diez personas en el ascensor?

8. En una empresa desean saber la proporción media de mujeres en sus diferentes departamentos. Para ello, recogieron el porcentaje de mujeres en sus cinco principales departamentos. ¿Cuál es la proporción media de mujeres en la empresa?

Porcentaje de mujeres por departamento

Departamento	**Porcentaje**
Producción	32.6 %
Compras	53.5 %
Mercadotecnia	28.9 %
Recursos Humanos	48.2 %
Administración	67.4 %

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

COMPRENSIÓN DE LA MEDIA PONDERADA POR DOCENTES EN FORMACIÓN PARA PRIMARIA

Ana María Martínez Blancarte, Ana María Ojeda Salazar
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. (México)
amatinezb@cinvestav.mx, amojeda@cinvestav.mx

RESUMEN: Esta investigación, cualitativa, enfoca la formación en estocásticos de 52 estudiantes de cuarto semestre de la Licenciatura en educación primaria. Previamente a la enseñanza de ese contenido, sus respuestas a un reactivo referido a la media ponderada revelaron que los estudiantes universitarios, aunque podían calcular la media aritmética de un conjunto de datos, no identificaron la media ponderada. Por tanto, para lograr el conocimiento especializado de medidas de tendencia central es necesario tratar no sólo su cálculo y su función en relación a la variación entre los datos y el tipo de éstos, sino un repertorio apropiado de referentes para identificar analogías entre ellos relativas a esas medidas.

Palabras clave: profesores en formación, media ponderada, estocásticos

ABSTRACT: This is a qualitative research, which focuses on stochastic training of 52 fourth-semester students of the Bachelor in Primary Education. Before teaching this content, the students' answers to a proof related to the pondered average showed that university students were not able to identify the pondered average, although they could calculate the arithmetic average of a set of data. Therefore, to achieve the specialized knowledge about central tendency measurements, the students should study not only its calculus and function with respect to the variation among data and the types of data, but also an appropriated set of referents, in order to identify their analogies related to these measurements.

Key words: training teachers, pondered average, stochastic

Introducción

En investigaciones realizadas en distintos niveles educativos en el sistema mexicano, se ha señalado la poca la importancia que se otorga a los estocásticos en la formación matemática pre-universitaria (por ejemplo, Perrusquía, 1998; Flores L., 2002; López, 2006; Flores M., 2009; Salcedo, 2013). También han mostrado que los alumnos tienen dificultades de comprensión de ideas de estocásticos, además de que en los planes y programas, y en las evaluaciones mismas, el tema no parece tener la relevancia que suponen sus aplicaciones en la diversidad de ámbitos de la actividad humana. En contraste, recién se incluyeron los estocásticos para todo un semestre en el currículum de la Educación Normal (SEP, 2012).

Pollatsek, Lima y Well (1981) señalan que la enseñanza de los promedios se centra en la presentación y aplicación de algoritmos, lo cual impide comprender los conceptos. Nuestra investigación se enfoca en la comprensión de estocásticos de profesores en formación para la educación primaria, para identificar el *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* (Ball y Bass, 2010) que requerirán en su práctica docente en el aula de esos contenidos. Particularizamos la reflexión respecto a la media ponderada y su vinculación con las ideas fundamentales de estocásticos que propone Heitele (1975).

Marco teórico

Ball y Bass (2000) proponen el Conocimiento Matemático para la Enseñanza (CME), el cual definen como una composición de contenido matemático y pedagogía. Sus facetas son:

- *Conocimiento Matemático Especializado*, al que Hill, Ball y Schilling (2008) definen como el contenido adicional que va más allá del conocimiento matemático "común" para la enseñanza de un tópico matemático.
- *Conocimiento de estudiantes*, por el que el docente relaciona sus conocimientos de contenido con el razonamiento de los alumnos, es decir, cuáles son las estrategias, dudas, confusiones o ideas erróneas de los educandos respecto a un tópico matemático.
- *Conocimiento para la enseñanza*, que es la fusión del conocimiento de matemáticas y de pedagogía para el diseño y planeación de la enseñanza en el aula.

Pollatsek *et al.* (1981) proponen tres tipos de conocimiento de los conceptos matemáticos:

1. De cálculo, que implica la aplicación de una expresión matemática, de un algoritmo;

2. Funcional, que se refiere a un concepto como significativo del mundo real; y

3. Analógico, por el que se pueden establecer analogías entre distintos referentes.

En el ámbito de estocásticos, el conocimiento analógico al que se refirieron Pollatsek y sus colaboradores también tiene relación con el dominio intuitivo de *simulación* que establece Fischbein (1975), que demanda identificar los elementos relevantes del carácter aleatorio de un fenómeno dado y sus relaciones, para vincularlos con los de otra situación análoga a él, accesible a sus repeticiones efectivas, luego, al enfoque frecuencial de la probabilidad.

Para incluir temas de estadística y de probabilidad en el currículum, desde la educación básica hasta la superior, Heitele (1975) considera "fundamental" una idea de estocásticos si en los distintos niveles de desarrollo del individuo lo dota de un modelo explicativo de la situación respecto a la cual evoca tal idea. Para la formación en esos temas, el autor propuso diez ideas fundamentales, interrelacionadas entre sí, como guía continua de un currículum en espiral: medida de probabilidad, espacio muestra, adición de probabilidades, regla del producto e independencia, combinatoria, equiprobabilidad y simetría, modelo de urnas y simulación, variable aleatoria, ley de los grandes números y muestra.

Comprensión de la media. Pollatsek, *et al.* (1981) han señalado que la media no es sólo uno de los conceptos más básicos de la estadística y de la ciencia experimental, sino de frecuente aplicación en la vida cotidiana. Descubrieron que, sin embargo, los estudiantes universitarios tienen dificultades para solucionar problemas comunes de promedio que implican a la media ponderada, aun después de años de educación formal. Muchos de los estudiantes participantes en su investigación, de edades de 18 a 22 años, fueron incapaces de resolver problemas de medias ponderadas, pues consideraban a la media como un concepto puramente formal, definida en términos de un cálculo basado en números abstractos. Concluyeron que los libros de texto de la Licenciatura de Psicología que cursaban esos estudiantes ignoraban el conocimiento funcional de la media, que se refiere a la media como un concepto significativo del mundo real, dado que los ejercicios que proponían eran básicamente de cálculo y que pocos problemas proporcionaban una práctica intensiva en la traducción de una variedad de referentes a estructuras computacionales, por lo que era poco probable lograr la comprensión de manera general.

Mokros y Russell (1995) afirman que aprender el concepto de media es uno de los primeros encuentros de un estudiante con una construcción matemática que expresa una relación entre números particulares. En soluciones de alumnos de primaria y secundaria a problemas de media, identificaron al promedio como: moda; por su algoritmo (conocimiento de cálculo); como algo razonable (conocimiento funcional); como punto medio (conocimiento funcional); y como punto matemático de equilibrio (conocimiento analógico).

Método

Esta investigación, cualitativa (Vasilachis, 2006), tiene dos componentes: 1) una investigación documental del contenido de estocásticos en las propuestas institucionales para la Licenciatura en Educación Primaria (SEP, 2012) y para primaria (SEP, 2011), para identificar los acuerdos entre ellas; y 2) la aplicación de un cuestionario diagnóstico a 52 estudiantes (19 a 31 años de edad) del cuarto semestre de la Licenciatura de Educación Primaria, diseñado por tres docentes de esa licenciatura (o sea, formadores de docentes), para identificar el dominio de conceptos de sus estudiantes de los contenidos de la asignatura "Procesamiento de la Información Estadística" (SEP, 2012). El cuestionario, impreso, se contestó individualmente en máximo dos horas. El reactivo 25, de los 27 que se plantearon, se refirió a la media ponderada. Las respuestas a él se clasificaron de acuerdo a los tres tipos de conocimiento que proponen Pollatsek *et al.* (1981). A las propuestas institucionales y al reactivo 25 se les aplicó la célula de análisis (Ojeda, 2006): Situación referente; Ideas fundamentales de estocásticos; Otros conceptos matemáticos requeridos; Recursos semióticos; y Términos empleados para referirse a estocásticos.

Resultados de los análisis

Propuesta Institucional de la Licenciatura para Educación Primaria. En comparación con el plan y programas de 1997 para las escuelas normales, su reciente reforma (SEP, 2012) da importancia al tema de estocásticos. La currícula de la Licenciatura en Educación Básica (primaria) actualmente destina el cuarto semestre completo al estudio de la asignatura "Procesamiento de la Información Estadística", con cuatro unidades: "Estadística", "Probabilidad y muestreo", "Inferencia estadística", y "Vinculación con el eje manejo de la información". La primera incluye las medidas de tendencia central. La Tabla 1 muestra la caracterización de la unidad "Estadística" al aplicar la célula de análisis (Ojeda, 2006).

Tabla 1. Caracterización de la Unidad 1, "Estadística", de la asignatura "Procesamiento de la Información Estadística".

Ideas fundamentales de estocásticos: Equidistribución y simetría, variable estocástica, muestra.			
Contenido	**Otros conceptos matemáticos**	**Recursos semióticos**	**Términos empleados**
1. Estudio de la estadística	Cantidad, función, relación.	Lengua natural escrita.	Estadística descriptiva, inferencial, población, experimento, parámetro, atributo, medir, variabilidad.
2. Tablas de distribución	Operaciones	Lengua natural escrita,	Frecuencia,

de frecuencias y representaciones gráficas	básicas, porcentajes, producto cartesiano.	tablas, gráficas (histograma, tallo y hojas), signos numéricos.	distribución, datos apareados, categorías.
3. Medidas de tendencia central	Operaciones básicas, orden ascendente y descendente de números naturales, producto cartesiano.	Lengua natural escrita, tablas, gráficas, expresiones matemáticas, simbología aritmética.	Moda, media, mediana, rango medio.
4. Medidas de posición	Operaciones básicas, números naturales, conjuntos, producto cartesiano.	Lengua natural escrita, tablas, gráficas, expresiones matemáticas, simbología matemática y aritmética.	Cuartiles, deciles, percentiles.
5. Medidas de dispersión	Operaciones básicas, tabulaciones, raíz cuadrada, producto cartesiano.	Lengua natural escrita, tablas, gráficas, simbología matemática y aritmética.	Distribución normal, media, rango, desviación media y estándar, varianza, covarianza, coeficiente de variación.
6. Datos bivariados	Operaciones básicas, producto cartesiano.	Lengua natural escrita, tablas, gráficas (gráfico de puntos), diagramas (de dispersión), simbología matemática.	Variables, promedio, variables de datos, dispersión.

De la Tabla 1 parecería que la mayoría de los temas de la unidad 1 se dedican a la faceta de *Conocimiento matemático especializado*, dado que el objetivo de la asignatura es "promover que el futuro docente comprenda y aplique los conceptos y procedimientos básicos de probabilidad y estadística descriptiva e inferencial que le permitan recolectar, organizar, presentar y analizar datos para abordar la resolución de problemas en el contexto educativo" (SEP, 2012; p. 6). El programa de la asignatura:

> contempla la construcción y lectura de tablas y gráficas, así como el cálculo de medidas e índices para caracterizar y realizar estudios de poblaciones (...) se pretende que los futuros docentes desarrollen competencias didácticas que les permitan diseñar y aplicar estrategias eficientes para que los alumnos de educación primaria se apropien de las nociones, conceptos y procedimientos relacionados con el eje temático de manejo de la información. (*ibíd.*; p. 6)

La Unidad 1 no incluye las dos facetas del Conocimiento Matemático para la Enseñanza, a saber, el Conocimiento de Estudiantes y el Conocimiento para la Enseñanza, pues lo relativo a ellos se propone hasta la Unidad 4 de la asignatura, a la que, por limitaciones de tiempo al final del semestre, frecuentemente se le omite. La Unidad 4 plantea la revisión y análisis de los programas de primaria con base en los conceptos y técnicas estadísticas revisados en las tres unidades anteriores; y el diseño de estrategias didácticas para la enseñanza de los contenidos del eje manejo de la información de primaria.

Para la enseñanza de las medidas de tendencia central, se utilizó el Capítulo 4 del libro de Nortes (1991, pp. 73-101), sugerido en la bibliografía de "Procesamiento de la Información Estadística". La Tabla 2 caracteriza este capítulo según la célula de análisis (Ojeda, 2006).

Tabla 2. Caracterización de Medidas de tendencia central del libro de Nortes (1991).

Ideas fundamentales de estocásticos: Equidistribución y simetría, variable estocástica, muestra.			
Medidas de tendencia central	**Otros conceptos matemáticos**	**Recursos semióticos**	**Términos empleados**
Media aritmética	Magnitud, operaciones básicas, caracteres cualitativos, diferencia.	Expresiones matemáticas, símbolos numéricos, tablas, lengua natural escrita.	Medible, valores de la variable, frecuencias absolutas, variable continua, intervalos, marca de clase, centralizar.
Mediana	Orden de valores pares e impares, semisuma, porcentajes, orden creciente, paralelas y perpendiculares al eje, producto cartesiano, vértices superiores.	Expresiones matemáticas, símbolos numéricos, tablas, lengua natural escrita, gráficas (histograma, de barras y poligonal).	Valores centrales, distribución de datos, frecuencia absoluta acumulada, variables, intervalos.
Moda	Producto cartesiano, modalidades no ordenables, área, figuras geométricas (rectángulos), porcentajes.	Expresiones matemáticas, símbolos numéricos, tablas, lengua natural escrita, gráficas.	Distribución cuantitativa, más veces, variable cuantitativa, frecuencias, mayor número. Intervalos. valores extremos, intervalo modal, distribuciones continuas, encuestas de opinión.

De esta Tabla 2 resulta que la secuencia de enseñanza de las medidas de tendencia central que favorece ese libro de texto es comenzar por la media, después la mediana y por último la moda. No se incluye un tratamiento específico de la media ponderada, el cual resulta necesario para contextos cotidianos, como el del elevador y las calificaciones obtenidas en diferentes semestres que proponen Pollatsek *et al.* (1981). Para la enseñanza, Nortes (1991) sugiere que, "con temas de la vida ordinaria, el docente realice cálculos mediante medidas representativas de un colectivo, (…) confeccione tablas y trace gráficas". (pp: 93-97)

Propuesta institucional de primaria (SEP, 2011). La Tabla 3 caracteriza el tratamiento de las medidas de tendencia central en los libros de texto de matemáticas vigentes. En toda la primaria sólo se dedican seis lecciones a las medidas de tendencia central, que se destinan al último bloque, el V, en los grados 4° y 5°, y al bloque III en sexto grado. Esto revela la poca importancia otorgada a este contenido en la primaria, en la que tampoco se incluye la media ponderada como tal.

Tabla 3. Caracterización de las lecciones de medidas de tendencia central de los libros de texto de primaria.

Ideas fundamentales de estocásticos: Variable estocástica y muestra.						
Grado	Bloque	Lección del libro de texto	Contenido	Otros conceptos matemáticos	Recursos semióticos	Términos empleados
4°	V	105. ¡Pasteles, pasteles!	Moda	Suma, diferencia, menos de un millón de habitantes, plano cartesiano.	Tablas, mapa de la República Mexicana, gráfica de barras.	Mayor/menor, número de habitantes, promedio, censo, esperanza de vida.
		106. Cuando la moda se acomoda	Moda	Plano cartesiano y operaciones básicas.	Tabla, gráfica de barras, figuras.	Frecuencia, riesgo.
5°	V	97. Vamos por una beca	Media (promedio).	Cuarto bimestre, valores en gramos, peso real y operaciones básicas.	Tablas.	Promedio, promedio mínimo, posibilidades, mejor estimación.

		98. ¿A todos les va igual?	Media (promedio).	Operaciones básicas.	Tabla.	Muestra, moda, media, representativa.
6°	III	52. La edad más representativa	Aplicaciones de media (promedio), mediana y moda en resolución de problemas.	Números de dos cifras menores de 90, unidades de medida (años), orden numérico, operaciones básicas.	Lengua natural escrita, figuras, signos numéricos.	Media aritmética, promedio, mediana, datos de edades.
		53. Número de hijos por familia	Aplicaciones de media (promedio), mediana y moda en resolución de problemas.	Números de dos cifras menores a 30, operaciones básicas.	Tablas de datos, lengua natural escrita, signos numéricos, figuras.	Conjunto de datos, valores, muestra, encuesta, medidas representativas.

Reactivo 25. La Tabla 4 caracteriza al reactivo relativo a la media ponderada que se incluyó en el cuestionario diagnóstico aplicado a 52 estudiantes normalistas.

Tabla 4. Caracterización del reactivo 25 de media ponderada y porcentajes de tipos de respuesta.

Situación referente	Ideas fundamentales de estocásticos	Otros conceptos matemáticos	Recursos semióticos	Términos empleados
El promedio de las edades de Manuel, Amalia y de sus nueve nietos es de 25 años. Se sabe que Manuel es 3 años mayor que Amalia y que ella tiene 65 años. ¿Cuál es el promedio de edad únicamente de sus nueve nietos? a) 15.7 años b) 52.6 años c) 14.6 años d) 9 años	Variable estocástica, Muestra	Orden, operaciones básicas.	Lengua natural escrita, signos aritméticos.	Promedio, edades, mayor que.
Respuestas correctas: 20 (38.46 %)	Diez no dieron evidencia de cómo obtuvieron el resultado correcto. Nueve mostraron un conocimiento de cálculo y uno, un conocimiento funcional.			

Respuestas incorrectas: 20 (38.46 %)	Siete expresaron conocimiento de cálculo; dos, conocimiento funcional aunque contestaron incorrectamente.
Respuestas omitidas: 12 (23.07 %)	

20 estudiantes no identificaron la idea de muestra, dado que no reconocieron el total de personas incluidas en la situación planteada; por lo tanto, la idea de variable estocástica tampoco se puso en juego, pues no dieron el resultado correcto de la media ponderada. De los siete estudiantes (13.46 %) que respondieron que el promedio era nueve años, cuatro (7.69 %) efectuaron operaciones básicas y sólo uno dio evidencia de haber utilizado una expresión matemática (véase la Figura 1). Once estudiantes respondieron 14.36 años; tres (5.76 %) realizaron operaciones básicas y uno una expresión matemática.

Dos estudiantes (3. 84 %) dieron como respuesta 52.6 años, sin mostrar el procedimiento seguido. De acuerdo con Pollatsek *et al.* (1981), al desarrollar el algoritmo de la media simple, ellos mostraron sólo un conocimiento de cálculo, es decir, obtuvieron un promedio por su algoritmo (Mokros y Russell, 1995).

Diez de las 20 contestaciones correctas al reactivo no dieron evidencia del procedimiento seguido, por lo que no se les clasificó en ninguno de los tres tipos de conocimiento. A las otras 10 respuestas correctas que sí lo mostraron, se les clasificó como sigue:

Cálculo. Nueve (17.30 %) estudiantes, no usaron una expresión matemática general (fórmula) y presentaron dificultades para resolver correctamente sus operaciones básicas. El estudiante restante que operó correctamente (véase la Figura 1), mostró conocimiento deficiente de la expresión matemática de la media ($\bar{x} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$), por ello, tuvo deficiencias en el cálculo del promedio por su algoritmo, según Mokros y Russell (1995).

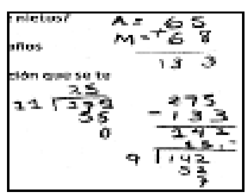


Figura 1. Solución correcta con operaciones básicas.

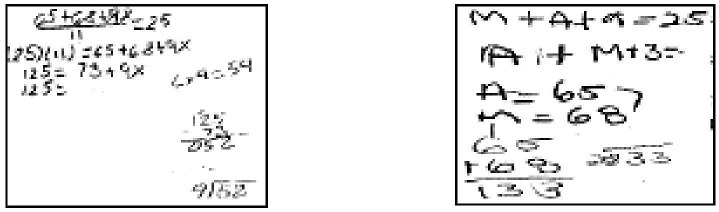


Figura 2. Soluciones incorrectas, pero parecen aplicar una expresión matemática

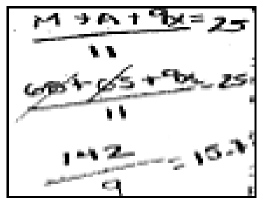


Figura 3. Solución correta al aplicar una expresión matemática

Funcional: Tres estudiantes (5.76 %) mostraron un conocimiento funcional incipiente al plantear su solución con el recurso de una expresión matemática como su conocimiento de la media simple; ello evidencia que identificaron el promedio como algo razonable, según Mokros y Russell (1995). Las operaciones de dos estudiantes fueron incorrectas (véase la Figura 2), lo que exhibió su conocimiento deficiente de los algoritmos aritméticos básicos (otros conceptos matemáticos). El tercer estudiante sí contestó correctamente (véase la Figura 3), aunque su notación de la media aritmética no parece ser la convencional ($\bar{x}$).

Analógico: Ningún estudiante agregó a su respuesta algún comentario que aludiera a una analogía, aunque aclaramos que el reactivo 25 (véase en la Tabla 4), o algún otro del cuestionario, no planteó una pregunta con esta orientación.

Comentarios

Tanto para la Licenciatura en Educación Básica (Primaria; SEP, 2012) como para la Educación Primaria (SEP, 2011) se incluyen las medidas de tendencia central (moda, mediana y media aritmética), pero no la media ponderada. El Conocimiento para la Enseñanza de las medidas de tendencia central en el libro de texto utilizado en la escuela normal comienza con la media aritmética, después la mediana y al último la moda. En primaria se inicia con la moda, luego la media y por último la mediana.

En general, el conocimiento de los estudiantes de la media es deficiente, a pesar de los 12 años de escolarización previa. Se identificaron dificultades en las ideas de variable estocástica y de muestra. Sólo 38.46% de los futuros docentes identificaron la media ponderada; sin embargo, de quienes mostraron su procedimiento, el 17.30 % de las respuestas reveló conocimiento de cálculo de la media y sólo un estudiante reveló conocimiento funcional, según Pollatsek *et al.* (1981); e interpretamos su aplicación de la media simple al menos como "algo razonable" (Mokros y Russell, 1995) que lo condujo a la respuesta correcta, aunque no lo expresó como tal. El término identificado por los estudiantes fue el de *promedio*, pero sólo como media simple. El conocimiento matemático de la media ponderada de 16 (30.76 %) estudiantes, se basó en el cálculo de la media aritmética; otros tres, (5.76 %), si bien mostraron un conocimiento funcional, éste fue muy incipiente.

Particularmente, los resultados obtenidos subrayan el papel preponderante que juegan los formadores de docentes no sólo en el cumplimiento de lo prescrito en el programa de estudios (en el mejor de los casos), sino en la incorporación de resultados de investigación en sus estrategias de enseñanza y en el diseño de sus instrumentos de diagnóstico y de evaluación de los futuros docentes.

Referencias bibliográficas

Ball, D. L., & Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on the teaching and learning of mathematics* (pp. 83-104). Westport, CT: Ablex.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Holland: Reidel.

Flores L., P. (2002) *La predicción y el azar: praxis, creencias, saberes y conocimientos del docente de educación primaria*. Tesis de maestría no publicada. México: Cinvestav.

Flores M, P. (2009). *Medios y enseñanza de estocásticos en el tercer ciclo de educación primaria*. Tesis de maestría no publicada. México: Cinvestav.

Heitele, D. (1975). An epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics*. 6(2), 187-205.

Hill, H. C., Ball, D. L. & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39 (4), 372-400.

López, J. (2006). *Comprensión de la Ley de los Grandes Números en el Tercer Grado de Secundaria*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Mokros, J. & Russell, S. J. (1995). Children's concepts of average and representativeness. *Journal for Research in Mathematics Education*. 26 (1), 20-39.

Nortes, A. (1991). Los cálculos. En *Encuestas y precios* (Capítulo 4). España: Síntesis.

Ojeda, A. M. (2006). Estrategia para un perfil nuevo de docencia: un ensayo en la enseñanza de estocásticos. En Filloy (Ed.) *Matemática Educativa, treinta años* (pp. 257-281). México: Santillana-Cinvestav.

Perrusquía, E. (1998). *Probabilidad y Aritmética: estudio en el Estadio Medio. Dificultades de interpretación*. Tesis de maestría no publicada. México: Cinvestav.

Pollatsek, A., Lima, S., Well, A. D. (1981). Concept or Computation: Student's Understanding of the Mean. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 12, No. 2, pp. 191-204. Springer.

Salcedo, J. (2013). *Razonamiento Probabilístico en el Bachillerato Tecnológico*. Tesis de maestría no publicada. México: Cinvestav.

SEP (2011). *Plan y programas de la Escuela Primaria 2011*. México.

SEP (2012). *Planes y programas de la Licenciatura en Educación Primaria 2012*. México.

Vasilachis, I. (2006). *Estrategias de investigación cualitativa*. España: Gedisa.

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
SECCIÓN 4 / EL PENSAMIENTO DEL PROFESOR, SUS PRÁCTICAS Y ELEMENTOS PARA SU FORMACIÓN PROFESIONAL
VOL 31, NÚMERO 1, AÑO 2018

ENSEÑANZA DEL PRINCIPIO MULTIPLICATIVO POR PROFESORES EN FORMACIÓN PARA PRIMARIA

Ana María Martínez Blancarte, Ana María Ojeda Salazar
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I. P. N. (México)
amatinezb@cinvestav.mx, amojeda@cinvestav.mx

Resumen

Esta investigación, cualitativa, examinó las prácticas de enseñanza del principio multiplicativo de dos futuros profesores del cuarto semestre de la Licenciatura en Educación Primaria, a alumnos de segundo, tercero y cuarto grados. Las estrategias de enseñanza que propusieron fueron aprobadas por sus mentores. Los practicantes no identificaron las permutaciones, con y sin repetición, ni la variedad de soluciones que dieron los alumnos a problemas de conteo; los niños también evidenciaron el sentido del que dotaron a los términos y a sus estrategias de solución. Los profesores en formación requieren dominar el principio multiplicativo, el trazo de diagramas de árbol para solucionar algunos problemas relativos a él y anticipar las posibles respuestas de alumnos de primaria a problemas que lo impliquen.

Palabras clave: enseñanza, principio multiplicativo, profesores en formación

Abstract

This qualitative research examined the teaching practices of the multiplication principle, by two prospective teachers from the fourth semester of the Bachelor's degree in Primary Education, to second, third and fourth primary graders. The teaching strategies they proposed were approved by their mentors. Practitioners did not identify the permutations, with and without repetition, nor the variety of solutions that pupils gave to counting problems; the children also gave evidence of the sense given to the terms and to their solution strategies. The in-training teachers need to master the multiplicative principle, the drawing of tree diagrams to solve some problems related to it and to anticipate the pupils' possible answers to problems involving the multiplication principle.

Key words: teaching, multiplication principle, teachers training

Introducción

Investigamos, cualitativamente (Vasilachis, 2006), las características de la formación docente en estocásticos para la educación primaria, dadas las reformas para la Educación Primaria (SEP, 2011a) y para la Normal (SEP, 2012). Hogarth (2001) señaló que "aprender implica un contenido y unas reglas; entendiendo por contenido lo que se aprende; y, por reglas, cómo se aprende lo que se aprende" (pp. 281-282); advierte que "los aprendices aprenden al trabajar junto con sus maestros y al observar lo que éstos hacen" (p. 284). Por ello, planteamos la pregunta: ¿Qué caracteriza la comprensión del principio multiplicativo de los docentes en formación? El objetivo fue identificar el conocimiento de técnicas de

Clame Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
SECCIÓN 4 / EL PENSAMIENTO DEL PROFESOR, SUS PRÁCTICAS Y ELEMENTOS PARA SU FORMACIÓN PROFESIONAL
VOL 31, NÚMERO 1, AÑO 2018

conteo para la enseñanza que requieren los docentes en formación para la educación primaria. Nos referiremos sólo al principio multiplicativo y a las permutaciones.
English hace explícito que el principio fundamental del conteo establece que si "una tarea se puede realizar de *n* maneras y otra tarea de *m* formas, entonces el número de maneras de realizar las dos tareas es *nm*" (2005, p. 122). La autora recomienda incluir la combinatoria en el currículo de matemáticas para fortalecer el razonamiento combinatorio pues, como también señalan Batanero, Godino & Navarro-Pelayo (1997), los estudiantes enumeran incorrectamente el espacio muestra (no identifican todas las respuestas) de un problema, dando origen a ideas erróneas en probabilidad. En una investigación documental de la propuesta para educación primaria (SEP, 2011a), Martínez y Ojeda (2016) identificaron tres lecciones en los libros de texto de primaria (2°, 3° y 4° grado) relacionadas con el principio multiplicativo. Las tres lecciones fueron asignadas por los tutores de primaria a dos normalistas para que las impartieran en sus jornadas de prácticas.

Elementos teóricos

La combinatoria, una de las diez ideas fundamentales de estocásticos que Heitele (1975) propuso como guía para un currículum en espiral, fue señalada por Fischbein (1975) como una de las cuatro fuentes intuitivas del pensamiento probabilístico. Para Heitele (1975), las operaciones combinatorias (técnicas de conteo) calculan los campos de probabilidad de eventos aleatorios complejos.

Piaget e Inhelder (1951) caracterizaron para cada estadio de la evolución del pensamiento del niño la de la idea de azar, para la que las operaciones combinatorias son centrales:

- *Estadio de las operaciones preconcretas* (edades de 4 a 7 años). El niño "no comprende la naturaleza aleatoria de la mezcla" (p. 4); carece de un "pensamiento operatorio pues es incapaz de concebir las operaciones reversibles" (p. 9). En esta etapa hay "ausencia de nociones combinatorias, falta de comprensión de las posibles permutaciones y falta de comprensión de la idea de azar" (p.12). Los niños "captan más rápido las combinaciones utilizando agrupamientos empíricos, [pero] muestran dificultad para captar el principio de permutaciones" (p. 176); las permutaciones posibles son obtenidas por tanteos o identificando regularidades, dado que "el niño carece de las ideas de movilidad y de la reversibilidad" (p. 180).
- *Estadio de las operaciones concretas* (de los 7 a los 11 años). Los niños tienen una idea de mezcla aleatoria global, sin advertir las posibilidades de acuerdo al modelo de permutaciones y arreglos. El niño "tiene una impresión de la regularidad, pero aún no es capaz de generalizarla" (p. 181). En esta etapa se dan:

  > … dos procesos correlativos: el primero, es una conciencia progresiva de las simetrías o igualdades de las distribuciones; y el segundo, es el descubrimiento de un sistema (identificando la igualdad del número de permutaciones que comienzan igual y después la repetición del segundo elemento). (p. 187)

- *Estadio de las operaciones formales* (de los 11 a los 12 años). El niño concibe "la mezcla aleatoria" (p. 232) mediante la construcción de sistemas como parte de un total de posibilidades. Las proporciones se descubren mediante el pensamiento formal. "El número de posibles permutaciones es descubierto por

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
SECCIÓN 4 / EL PENSAMIENTO DEL PROFESOR, SUS PRÁCTICAS Y ELEMENTOS PARA SU FORMACIÓN PROFESIONAL
VOL 31, NÚMERO 1, AÑO 2018

> el niño por un simple truco de multiplicación sucesiva, es una operación simple que consiste esencialmente en correspondencias" (p. 193). "El descubrimiento de permutaciones es posterior al de las combinaciones. Las combinaciones son una sencilla generalización de la multiplicación; las permutaciones proporcionan el verdadero prototipo de las relaciones, o las operaciones que llevan a otras operaciones" (p. 194).

Para Fischbein (1975), el inventario de casos posibles es más que una enumeración de elementos (excepto en, algunos experimentos simples), dado que presupone un proceso racional y constructivo que establece un espacio muestral de todos los resultados posibles. Este autor recomienda que la enseñanza de la combinatoria se inicie en el nivel de las operaciones concretas o por muy tarde al inicio de las operaciones formales (de 12 a 14 años). Fischbein desarrolló actividades favorables para la enseñanza de ideas de probabilidad y de combinatoria con niños de 9 a 10 años. Concluyó que el diagrama de árbol "proporciona un principio de construcción que sintetiza la inducción y deducción en una sola operación, una fórmula de trabajo que es un esquema cognitivo conceptual" (Fischbein, 1975, p. 115), y prefigura las reglas de suma y producto de probabilidades. Para Steinbring (1991), el diagrama de árbol es un medio de representación en estocásticos elementales para "reconstruir el significado del conocimiento matemático construido en el aula y comprender su relación con las condiciones sociales y las convenciones de enseñanza y de aprendizaje" (p. 508).

En su investigación acerca de enfoques intuitivos en condiciones de incertidumbre de maestros de escuela primaria, Andrà (2011) propuso tres niveles de las representaciones que producen las personas para estimar la probabilidad.

1. *Nivel de la experiencia*: las personas realizan representaciones que pueden ser perceptibles y aproximadas para contar los casos posibles y los casos favorables de eventos. Las personas representan los eventos mediante representaciones poco perceptibles, como las flechas, los diagramas de Venn, las tablas, entre otras. Heitele (1975) señala que el diagrama de árbol contribuye a evitar que los niños se limiten a un determinismo; es una estrategia que prefigura todos los posibles resultados, los pasos del experimento (aleatorio) y con ella se pueden identificar los espacios muestra discretos.
2. *Nivel del pensamiento aritmético*: las personas pasan de una percepción a una aproximación a las cantidades, que pueden ser números enteros y convertirse en porcentajes.
3. *Nivel de la teoría*: se comprenden las expresiones matemáticas (fórmulas), los axiomas y los teoremas de la probabilidad. Las representaciones son formales y abstractas.

Dreher y Kuntze (2015) realizaron una investigación sobre el caso de las múltiples representaciones en la clase de matemáticas con profesores en formación y profesores en activo de secundaria. Concluyeron que en los entornos de aprendizaje a los estudiantes se les debe dar la oportunidad de conocer diferentes representaciones de un objeto matemático para desarrollar la comprensión conceptual de las matemáticas. Se debe considerar el cambio de representaciones para que los estudiantes realicen conexiones y reflexiones sobre esas representaciones. De acuerdo con Parker y Leinhardt (1995) en su propuesta de enseñanza del porciento, un reto tanto para los investigadores como para los maestros es diseñar o seleccionar las representaciones para la enseñanza.

Clame — Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
SECCIÓN 4 / EL PENSAMIENTO DEL PROFESOR, SUS PRÁCTICAS Y ELEMENTOS PARA SU FORMACIÓN PROFESIONAL
VOL 31, NÚMERO 1, AÑO 2018

Un alumno, al resolver un problema, puede activar la zona de desarrollo próximo, definida por Vygotsky (2009) como:

> …la distancia entre el nivel real de desarrollo, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz. (p. 133)

Método

Observamos en aulas (Wittrock, 1986) tres prácticas (P^1, P^2 y P^3) de enseñanza en primaria de dos futuros profesores (E_5 y E_9) de la Licenciatura en Educación Primaria. Los temas fueron asignados por los docentes titulares (tutores) de los grupos de primaria para los que se realizaron las prácticas. Las estrategias de E_5 y E_9 fueron aprobadas por sus mentores en la Normal. Cada práctica duró una hora, y fue videograbada y transcrita para su análisis. La investigadora (I) intervino en las sesiones dado que en algunos momentos los normalistas presentaron dificultades con el contenido o de organización de actividades, o para clarificar las participaciones de los alumnos (A_i o AS).

Los referentes propuestos por E_5 y E_9 a los alumnos de primaria se caracterizan en la Tabla 1, de acuerdo a la célula de análisis (Ojeda, 2006), la cual también aplicamos a los datos obtenidos de la observación en el aula: referente; ideas fundamentales (combinatoria); otros conceptos matemáticos; recursos semióticos; y términos empleados.

Tabla 1. Caracterización de los diseños de las prácticas (P^i) propuestos por E_5 y E_9.

Criterio	*E_5* (6 alumnos, 2°primaria)	*E_5* (14 alumnos, 3° primaria)	*E_9* (13 alumnos, 4° primaria)
Referentes	P^1: *Con los dígitos 1, 3 y 5, ¿cuántas cantidades diferentes de tres cifras puedo formar?* [No aclaró si los dígitos debían o no repetirse; tampoco se aclaró la diferencia entre dígito, cantidad y cifra].	P^2: *Danaé tiene tres tipos de guisados y dos tipos de postres. ¿Cuántos platillos diferentes puede formar?* Lección 16. Figuras y colores (SEP, 2011b).	P^3: *Con cuatro cuadrados de cada uno de los siguientes colores: azul, morado, anaranjado, y con cuatro triángulos de cada uno de los siguientes colores: rojo, amarillo y verde, ¿cuántas caritas diferentes se pueden formar?*
Ideas fundamentales	Combinatoria (principio multiplicativo)	Combinatoria (principio multiplicativo)	Combinatoria (principio multiplicativo)
Otros conceptos matemáticos	Dígitos, operaciones básicas (adición)	Operaciones básicas (adición y multiplicación)	Figuras geométricas, operaciones básicas (adición y multiplicación)

Clame — Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
SECCIÓN 4 / EL PENSAMIENTO DEL PROFESOR, SUS PRÁCTICAS Y ELEMENTOS PARA SU FORMACIÓN PROFESIONAL
VOL 31, NÚMERO 1, AÑO 2018

Recursos semióticos	[Planteado oralmente] los numerales (1, 3 y 5) en tarjetas	[Planteado oralmente] escrito en el pizarrón, figuras de guisados y postres	[Planteado oralmente] escrito en el pizarrón, cuadrados y triángulos de diferentes colores, tabla de doble entrada
Términos empleados	Cantidades diferentes	Platillos diferentes	Casitas diferentes

Resultados

Combinatoria. En P^1, E_5 no reconoció la permutación con repetición en la respuesta de un alumno de 2° grado y mostró así su inadvertencia de este aspecto en el referente planteado; sólo las permutaciones sin repetición escritas por los alumnos fueron aceptadas por E_5 como respuesta correcta.

A_4: Puedo hacer… el tres cambiarlo por el cinco [traza la flecha que inicia en el tres y termina en el 5] y el cinco va por aquí [señala el uno con su lápiz] y el uno se queda, y se forma el 351 [enseña su cuaderno a I].
I: ¿Cuántas más?
A_4: Hay muchas más, si pone…, podría ser uno, aquí [traza una flecha del 1 del 351 al 3], uno aquí [señala las centenas de 135] pero cambio el 5 en medio y el tres aquí, sería 153.
I: Mmmjú, ¿qué más?
A_4: Es diferente a las otras cantidades.
I: ¿Son todas [refiriéndose a las cantidades escritas por el alumno] o puedes hacer otra?
A_4: Hay otra, trescientos quince [se queda observando su trabajo] sí, me faltó trescientos quince, cambio otra vez el tres [traza la flecha que inicia en el tres y termina en el uno de 153] trescientos quince, pero cambió así [traza una flecha del cinco (del 153) al 3].

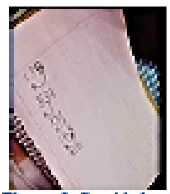


Figura 1. Cantidades de tres cifras escritas por A_4 de 2° grado.

Como señalaron Piaget e Inhelder (1951), el niño escribió cinco permutaciones de tres elementos sin seguir un sistema, pero advirtió el rol del cambio de posición.
En P^2, los alumnos de 3^er grado identificaron la operación aritmética respectiva para responder correctamente seis platillos diferentes. Para P^3, E_6 no aclaró qué sucedería con la repetición de casas, pero los alumnos (*AS*) de 4° grado sí la advirtieron y decidieron no considerarla:

A_{4C}: [Estira la mano tratando de alcanzar las tres casas repetidas]… o que nos sobren, pero también, podemos hacer que éstos [se refiere a las tres casas repetidas] no los contemos.
I: Fuerte [el tono de voz], a ver, ¿qué me dijiste?, ¿qué, qué?
A_{4C}: También podemos hacer que éstos [señala las tres casas repetidas], que éstos, no los contemos.
I: ¿Entonces?
A_{4C}: Que los saquemos.
I: Entonces, ¿esas tres [refiriéndose a las casas repetidas] entran en la respuesta a la pregunta que se les hizo?
A_{4E}: Pues sí, porque […]. No […] ¡no!
I: ¿Por qué no?
A_{4C}: Pues […] como ya le dijo mi compañero A_{4E}, serían repetidas.
I: Entonces, ¿cuál es la respuesta a la pregunta? ¿Cuántas…?
AS: ¡Nueve!

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
SECCIÓN 4 / EL PENSAMIENTO DEL PROFESOR, SUS PRÁCTICAS Y ELEMENTOS PARA SU FORMACIÓN PROFESIONAL
VOL 31, NÚMERO 1, AÑO 2018

Durante P^3, los alumnos de 4° grado colorearon las figuras como se les había indicado, construyeron nueve casas distintas y tres repetidas que descartaron; y comprobaron la respuesta de nueve casas distintas al completar una tabla de doble entrada (véase la Figura 4), propuesta por E_9, quien terminó solicitando a los alumnos la operación aritmética que confirmaba que sólo eran posibles nueve casas diferentes:

E_9: [Inaudible] escuchen ya dijimos que son nueve casitas [señala la tabla de doble entrada] y ¿cómo dijimos que sacamos esas nueve casitas con una operación?
A_6: Con una multiplicación; son nueve.
E_9: ¿Cuánto es?
A_6: Tres por tres; nueve.
E_9: Tres por tres; nueve ¿sí? [mira al grupo]. Y ¿por qué eran tres por tres?
A_6: Porque eran tres colores de cada figura.

Sin embargo, el recurso de la tabla se ignoró al responder los ejercicios del libro de texto (SEP, 2011c, p. 31), pues los alumnos ya sólo efectuaron la multiplicación respectiva.
Otros conceptos matemáticos. En las tres prácticas, E_5 y E_9 realizaron operaciones aritméticas correctas. En P^1, todos los alumnos de 2° grado identificaron correctamente cantidades de tres cifras (véase la Figura 1). En P^2, los alumnos de 3^er grado resolvieron correctamente las multiplicaciones del número de guisados por el número de postres. En P^3, los alumnos de 4° grado multiplicaron erróneamente cantidades de dos cifras al dar respuesta a las preguntas de la lección del libro de texto (SEP, 2011c, p. 31).
Recursos semióticos: En P^1, E_5 presentó cada uno de los tres dígitos en una tarjeta; los alumnos de 2° grado enlistaron en sus cuadernos y en el pizarrón las diferentes cantidades de tres cifras que iban identificando. Un alumno trazó flechas indicando las diferentes posiciones de los dígitos (véase la Figura 1). En P^2, E_5 pegó en el pizarrón y entregó a los alumnos figuras de postres y guisados. Un alumno de 3^er grado mostró, a nivel de experiencia (Andrà, 2011), un diagrama de árbol que trazó para identificar los seis menús (véase la Figura 2) y orientó a una compañera para que trazara un diagrama triangular (véase la Figura 3).

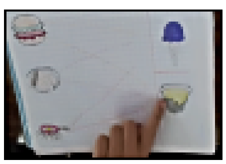


Figura 2. Diagrama de árbol propuesto por un alumno de 3^er grado.

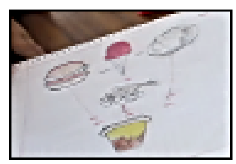


Figura 3. Diagrama triangular por una alumna de 3^er grado con orientación de su compañero.

E_5 no previó todas las estrategias de los alumnos (diagrama de árbol) para responder a la pregunta planteada; evidenció así su conocimiento deficiente de las diferentes estrategias de solución a problemas de técnicas de conteo. De acuerdo con Steinbring (1991), por medio del diagrama de árbol y de un diagrama triangular los alumnos de 3^er grado reconstruyeron el significado del principio multiplicativo, construido en el aula. Además, el intercambio entre ellos relativo a esos recursos activó su zona de desarrollo próximo (Vygotsky, 2009).

Clame — Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
SECCIÓN 4 / EL PENSAMIENTO DEL PROFESOR, SUS PRÁCTICAS Y ELEMENTOS PARA SU FORMACIÓN PROFESIONAL
VOL 31, NÚMERO 1, AÑO 2018

Los alumnos trazaron figuras y enlistaron (en el pizarrón) las seis posibilidades de los menús que pudieron formar. Para P^3, E_9 enseñó el principio multiplicativo por medio de material concreto (figuras en tarjetas), una tabla de doble entrada (véase la Figura 4) y con la multiplicación (signos aritméticos), en acuerdo con English (2005) en que los problemas combinatorios se prestan a una variedad de estrategias de solución.

Figura 4. Tabla de doble entrada propuesta por E_9.

Términos empleados: En P^1, E_3 solicitó "*diferentes* cantidades de tres cifras", sin aclarar que los dígitos no podían repetirse, como ya señalamos antes; un alumno de 2° grado repitió sólo un dígito cuando la investigadora le preguntó si los dígitos dados se podían *repetir*. En P^2, los alumnos de 3er grado identificaron el término *posibilidades*. En P^5, un alumno de 4° grado empleó el término *posibilidad* al construir las casas:

I: Entonces ¿éstas [señala las casas repetidas], ya no son posibles pegarlas?
A_1: No, ya no.
I: ¿Ya, no?
A_8: Se me acabaron las […]
I: Se acabaron las ¿qué?
A_1: Las posibili…¡ay, no!
I: Las posibilidades [A_1 dice posibilidades en coro con la Investigadora; A_2 se ríe].

En el planteamiento de P^2, E_3 confundió el término "menú" con el de "platillo", lo cual no revistió dificultad alguna para el desarrollo de la actividad.

Referente: Para P^2, ni E_3 ni los alumnos de 3er grado presentaron dificultad para comprender como platillo la conjunción de un guisado y un postre. Durante la enseñanza en P^5, E_9 no definió como "casa" la conjunción de un cuadrado y un triángulo. El alumno A_{10} propuso otra forma de casa: "Pero si formas una casa diferente… así de tres cubos juntos como una pirámide… y los juntas así, sería más o menos una mansión".

Comentarios

Los docentes en formación limitaron la enseñanza del principio multiplicativo a identificar la operación aritmética y al llenado de tablas; en acuerdo con Hogarth (2001), esto lo imitaron los alumnos de 4° grado al responder los ejercicios de la lección "Combinaciones" de su libro de texto (SEP, 2011c, p. 31). Los practicantes no previeron todas las posibles respuestas que dieron los alumnos a las preguntas propuestas. Su formación en el principio multiplicativo obliga a considerar una variedad de referentes para tratar los casos con y sin orden, repetición, exclusión, distinguibilidad. También deben incluir la identificación de otras estrategias de solución a los problemas de técnicas de conteo, como el diagrama de árbol.

Fischbein (1975), Heitele (1975) e English (2005) afirman que la enseñanza de técnicas de conteo debe iniciarse en edades tempranas. Con los dos primeros autores señalamos la conveniencia de la enseñanza del trazo del diagrama de árbol y agregamos el uso del término *posibilidades*, dada la evidencia que

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
SECCIÓN 4 / EL PENSAMIENTO DEL PROFESOR, SUS PRÁCTICAS Y ELEMENTOS PARA SU FORMACIÓN PROFESIONAL
VOL 31, NÚMERO 1, AÑO 2018

obtuvimos de alumnos de 3er y 4o grados de que comprendieron sus términos y estrategias para contestar las preguntas de conteo.

Los mentores de los normalistas deben retroalimentar a sus estudiantes acerca del principio multiplicativo y de su enseñanza, identificando los errores que cometieron los practicantes y las dificultades de los alumnos para responder a las tareas que los primeros les plantearon. Los mentores y los practicantes deben identificar las ventajas y desventajas de los recursos semióticos a utilizar según el objetivo perseguido y anticipar las posibles respuestas de los alumnos a las preguntas que se les planteen sobre técnicas de conteo. Es necesario que, juntos, mentores y normalistas analicen en el planteamiento de cada situación a proponer en las prácticas el rol de las palabras para orientar apropiadamente la actividad de los alumnos a los conceptos en foco y disipar posibles ambigüedades. Además, conviene solicitarles a los profesores en formación no sólo el planteamiento de problemas similares a los tratados en la clase, como lo sugiere English (2005), sino relativos a otras técnicas de conteo para que puedan identificar lo característico de cada una.

Referencias bibliográficas

Andra, Ch. (2011). Preservice primary school teachers' intuitive use of representations in uncertain situations. *Proceedings of the 7th CERME* (Pytlak, M., Rowland, T., Swoboda, E., Eds.). University of Rzeszow, Poland, 715-724.

Batanero, C., Godino, J. D., & Navarro-Pelayo, V. (1997). *Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils.* Educational Studies in Mathematics, 32, 181-199.

Dreher, A., & Kuntze, S. (2015). Teachers' professional knowledge and noticing: The case of multiple representations in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics* 88: 89-114.

English, L. (2005). Combinatorics and the development of children's combinatorial reasoning. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school. Challenges for teaching and learning* (pp. 121-141). New York: Springer.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children.* Holland: Reidel.

Heitele, D. (1975). An epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics*. 6(2), 187-205.

Hogarth, R. (2001). *Educar la intuición.* Barcelona: Paidós.

Martinez, A. M. y Ojeda, A. M. (2016). Estrategias que utilizan los docentes en formación para resolver problemas de conteo. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 29*. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C., pp. 973-981.

Ojeda, A. M. (2006). Estrategia para un perfil nuevo de docencia: un ensayo en la enseñanza de estocásticos. En Filloy (Ed.) *Matemática Educativa, treinta años* (pp. 257-281). México: Santillana-Cinvestav.

Parker, M. & Leinhardt, G. (1995). Percent : A Privileged Proportion. *Review of Educational Research*. 65(4), pp. 421-481.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1951). *The Origin of the Idea of Chance in Children*. New York: Norton & Company Inc. 1975.

SEP (2011a). *Planes y programas de estudio 2011*. Educación Básica. México.

SEP (2011b). *Matemáticas, tercer grado* (Libro para el alumno). México.

SEP (2011c). *Matemáticas, cuarto grado* (Libro para el alumno). México.

SEP (2012). *Planes y programas de la Licenciatura en Educación Primaria 2012*. México.

Steinbring, H. (1991). The Concept of Chance in Everyday Teaching: Aspects of a Social Epistemology of Mathematical Knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 503-522.

Vasilachis, I. (2006). *Estrategias de investigación cualitativa*. España: Gedisa.

Vygotsky, L. (2009). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. España: Biblioteca de Bolsillo.

Wittrock, M. (1986). *La investigación de la enseñanza II*. Barcelona: Paidós.

E I M E

LA FORMACIÓN EN ESTOCÁSTICOS DEL FUTURO DOCENTE DE PRIMARIA

Ana María Martínez Blancarte, Ana María Ojeda Salazar

amatinezb@cinvestav.mx , amojeda@cinvestav.mx

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México

En esta investigación, cualitativa, participó un grupo de estudiantes del cuarto semestre de la Licenciatura en Educación Primaria, en el que cursan Procesamiento de la Información Estadística. Les aplicamos un cuestionario diagnóstico, entrevistamos en formato semiestructurado a cuatro de ellos y videograbamos sus prácticas de enseñanza de medidas de tendencia central y del principio multiplicativo a alumnos de educación primaria. Resultó que los docentes en formación poseen un conocimiento a lo más de cálculo de las medidas de tendencia central más comunes, no disponen de una expresión general de las técnicas de conteo, carecen de elementos didácticos para la enseñanza de los temas y para reconocer las dificultades de los alumnos de primaria en la apropiación de las ideas fundamentales de estocásticos implicadas.

Palabras clave: *Formación, estocásticos, futuros docentes, primaria*

INTRODUCCIÓN

La problemática de la formación en estocásticos en la educación pre-universitaria (preescolar, primaria, secundaria y bachillerato) atañe a los formadores de docentes y a los futuros docentes. En general, los primeros no se forman en estocásticos, ni en técnicas para enseñarlos, por lo que son trascendentales sus sesgos del razonamiento probabilístico derivados de esa carencia, que se acentúan con la edad (Fischbein, 1975).

Por las reformas recientes en primaria (SEP, 2009, 2011 y 2016) y en la Educación Normal (SEP, 2012 y 2016), planteamos la pregunta: ¿Qué caracteriza al Conocimiento Matemático para la Enseñanza de las medidas de tendencia central y de técnicas de conteo de los docentes en formación? Nuestro objetivo es identificar el Conocimiento para la Enseñanza (Hill, Ball y Shilling, 2008) de estos dos temas que requerirá el docente en formación para la educación primaria.

ELEMENTOS TEÓRICOS

A partir de la aportación epistemológica de Heitele (1975) de diez ideas fundamentales de estocásticos para un curriculum en espiral, consideramos tres de ~~ellas~~combinatoria, variable estocástica y muestra— de acuerdo a investigaciones relativas a su comprensión por estudiantes en los distintos niveles educativos.

COMBINATORIA

Una de las fuentes intuitivas del razonamiento probabilístico señaladas por Fischbein (1975) es la combinatoria. Para este autor,

> "el inventario de casos posibles no puede reducirse a una enumeración de elementos, excepto en algunos experimentos muy simples. Este inventario presupone generalmente un proceso racional y constructivo que, sobre la base de la información existente, establece un espacio muestral de todos los resultados posibles" (p. 99).

English (2005) señaló que la combinatoria sigue siendo descuidada en el nivel de educación primaria, "a pesar de que proporciona la base para que los problemas significativos se resuelvan de diversas formas y con una variedad de herramientas de representación; incluyendo materiales de manipulación" (p. 122). Los tipos de problemas combinatorios pueden ser de dos tipos: a) Problemas del principio fundamental de conteo, los que en casos sencillos se pueden responder con los recursos: diagramas de árbol, listas sistemáticas y tablas; y b) Configuraciones combinatorias, las cuales se subdividen en: "I) selecciones, II) distribuciones y III) particiones" (Dubois, 1984, pp. 39-40). En los problemas del principio fundamental de conteo se establece que "una tarea se puede realizar de n maneras y otra tarea de m formas, entonces, el número de maneras de realizar las dos tareas es nm" (English, 2005, p. 122). Las dificultades para los estudiantes derivadas de los referentes que implican a la combinatoria son si las disposiciones de los elementos a considerar incluyen o no: el orden, la repetición, la exclusión, la cantidad de ellos a tomar en cuenta. Otros factores de dificultad son: "la naturaleza de los elementos a combinar (dígitos, letras, personas y objetos) y los valores dados a los parámetros n y m" (English, 2005, p. 127), además de si son o no distinguibles.

English (2005) recomendó incluir la combinatoria en el currículo de matemáticas para fortalecer el razonamiento combinatorio de los estudiantes que enumeran incorrectamente el espacio muestra en un problema, lo que da origen a errores en probabilidad. English (1999, citado en English, 2005) realizó una investigación sobre la comprensión estructural de problemas combinatorios de niños de 10 años con el objetivo de identificar: a) Las propiedades estructurales (relaciones) de los problemas combinatorios elementales (bidimensionales [A × B] y tridimensionales [A × B × C]; y b) La representación y resolución de los problemas (English, 2005, p. 131). Los niños presentaron dificultades al explicar la estructura bidimensional de los problemas; y no siempre identificaron las características de la multiplicación en ellos. Algunos métodos de solución que emplearon fueron la multiplicación, la adición repetida y el recurso a representaciones gráficas.

Lockwood y Gibson (2015) realizaron una investigación con alumnos de primaria, secundaria (K-12) y de bachillerato, sobre las listas productivas y sistemáticas que elaboran para realizar tareas de combinatoria. Su objetivo general fue que los estudiantes crearan un lista organizada (sistemática) o incluso una lista parcial de los resultados, dado que al momento de contar las posibilidades, los estudiantes establecían un efecto positivo al resolver problemas de conteo, pues "el acto de reflexionar cómo crear una lista organizada de resultados responde correctamente a un problema de conteo [y] radica en la relación entre los procesos de conteo y los conjuntos de resultados" (p. 249). Estos autores informaron que "el conocimiento del conjunto de resultados es un componente clave para el razonamiento combinatorio de los estudiantes" (p. 248). Definieron como resultado a lo que satisface las restricciones de un problema combinatorio y como conjunto de resultados a la "colección de objetos que son contados —esos conjuntos de elementos que son generados o enumerados por un proceso de conteo" (Lockwood, 2013, citado en Lockwood y Gibson, 2015, p. 249).

Variable estocástica y muestra

De acuerdo a Heitele (1975), uno de los tres puntos que juega un papel importante en la variable estocástica es la distribución de la variable. Garfield y Ben-Zvi (2008) realizaron una investigación documental de informes acerca del tratamiento de datos en diferentes niveles educativos. En lo que concierne a aprender a razonar sobre los datos, los autores proponen que los estudiantes y los alumnos reflexionen acerca de dónde provienen los datos, cómo se recopilan o se producen. Los autores señalan la importancia de distinguir entre datos categóricos y cuantitativos; los primeros, se representan en gráficos circulares y de barras y los segundos, en histogramas y gráficos de puntos. Para centrar la atención de estudiantes y alumnos en el contenido, proponen que sean ellos quienes planteen preguntas, lo que describen como una estrategia cognitiva comprensiva, ya que es relativa a las ideas principales; la generación de preguntas es un componente de la enseñanza de la recopilación de los datos.

Garfield y Ben-Zvi (2008) proponen incluir la idea de variabilidad en el plan de estudios de los diferentes niveles educativos: primaria, secundaria, bachillerato y licenciatura. Para estos autores, la variabilidad "es una forma sustantiva del adjetivo "variable", por lo que significa que algo es probable que varíe o cambie" (p. 204). Al referirse a investigaciones relativas a la comprensión de estudiantes de la distribución de datos y a la comparación de distribuciones, Canada (2007) citó a Mellissinos, quien destacó que "el concepto de distribución se basa en gran medida en la noción de variabilidad, o propagación" (p. 74); también señaló que "el sentido de variación como diferencia es una idea ingenua y básica" (p. 77), además de que las características específicas de la variabilidad de los datos "incluyen propagación relativa, valores extremos y rango" (p. 77).

Moroney (1979) señaló que el propósito de un promedio es "representar un grupo de valores individuales de una manera simple y concisa (…) que actúa como un representante" (p. 170). "Todos los promedios son conocidos por los estadísticos como "medidas de tendencia central"; indican el punto alrededor del cual se acumulan los diversos valores" (p. 171). Este autor indicó que el promedio apropiado para un problema dado depende de los términos de éste, es decir, de su referente. Bakker (2003) señaló que: a) la media aritmética no tiene una interpretación estadística única, por lo que los estudiantes de entre 12 a 13 años de edad no la comprenden; no distinguen entre nociones de centro, valores mínimo y máximo, valor medio y centro de gravedad. b) Una dificultad en la enseñanza de los promedios fue que la mayoría de los libros de texto introducen media, mediana y moda como una trinidad.

Recursos semióticos

Heitele (1975) señaló que el diagrama de árbol es una estrategia importante porque prefigura todos los posibles resultados, así como los pasos del experimento; y que los espacios muestra discretos pueden ser identificados mediante un "diagrama de árbol", recurso semiótico que contribuye a evitar que los niños se limiten a un determinismo. En su investigación sobre la comprensión estructural de problemas combinatorios de niños de 10 años, English (1999, citado en English, 2005) señaló que los niños presentaron dificultad al realizar representaciones simbólicas para los problemas tridimensionales, lo que sugirió una carencia de "comprensión de la estructura de los problemas" (English, 2005, p. 131).

Andrà (2011) realizó una investigación acerca de enfoques intuitivos en circunstancias de incertidumbre de maestros de escuela primaria. Para las representaciones que producen las personas para estimar la probabilidad, propuso una clasificación no jerárquica, sino que "se concentra en su relación con las intuiciones (como actividad dotadora de significado) en cada uno de tres niveles" (p. 717): a) de experiencia, b) del pensamiento aritmético y c) de la teoría. Dreher y Kuntze (2015) realizaron una investigación sobre el caso de las múltiples representaciones en la clase de matemáticas con profesores en formación y profesores en activo de secundaria. Concluyeron que en los ambientes de aprendizaje se debe dar a los estudiantes la oportunidad de conocer diferentes representaciones de un objeto matemático, con el fin de desarrollar su comprensión conceptual de las matemáticas. Se debe considerar el cambio de representaciones para que los estudiantes realicen conexiones y reflexiones sobre esas representaciones.

La enseñanza

Heitele (1975) afirmó que el docente debe poseer un conocimiento del tópico de estocásticos como conocimiento matemático en tanto individuo educado en ese contenido, lo que implica que lo domine; y da pautas para que diseñe estrategias de enseñanza en el aula apropiadas a la edad y al nivel educativo de sus alumnos y que reconozca los resultados de ellas en el desempeño de sus estudiantes —lo que correspondería al conocimiento especializado del maestro de matemáticas. Steinbring (1991) señaló que "la interacción entre los docentes y los alumnos durante la enseñanza diaria produce una comprensión específica del escolar del status de conceptos matemáticos" (p. 503). "El aula se concibe como un sistema social complejo en el que operan influencias tanto directas como indirectas (...)" (Wittrock, 1986, p. 209) "...el docente debe tener la capacidad de reflexionar críticamente sobre la propia práctica y de enunciar esas reflexiones para uno mismo y para otros" (p. 291).

Hill et al. (2008) distinguen tres facetas del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (CME): el Conocimiento Matemático Especializado; el Conocimiento para la Enseñanza y el Conocimiento de Estudiantes. Burril y Biehler (2013) señalaron que los docentes transmiten el conocimiento a los estudiantes mediante un curriculum que prescribe los planes y programas de estudio y a menudo los libros de texto.

MÉTODO

Durante su formación, los futuros docentes deben realizar prácticas de enseñanza en el aula de primaria del tema designado por las maestras titulares de esas aulas que acogen a los practicantes. Las estrategias que diseñen para desarrollar sus prácticas deben ser avaladas por sus mentores respectivos en la licenciatura. En la normal, el cuarto semestre inicia en febrero y las prácticas docentes en mayo, por lo que para sus prácticas los normalistas aún no han revisado la segunda unidad "Probabilidad y muestreo", que les proporcionaría una base teórica que les orientara para preparar sus prácticas de enseñanza de contenidos de estocásticos (Medidas de Tendencia Central y Principio Multiplicativo) según el programa de primaria (SEP, 2011). Participaron en esta investigación cuatro futuros profesores (denotados por E1, E2, E3 y E4) del cuarto semestre de la Licenciatura en Educación Primaria, a cuyas prácticas se asignaron temas de estocásticos (medidas de tendencia central y principio multiplicativo). En bachillerato, sólo E1 cursó Estadística y E3 Probabilidad y Estadística; E2 no cursó ninguna de las dos y E4 no lo recordó dado que cursó el bachillerato en modalidad abierta. La enseñanza de las medidas de tendencia central impartida por la titular de la normal se basó en el cálculo de ellas mediante la resolución de problemas; su enseñanza omitió las técnicas de conteo y sólo expresaron y determinaron la probabilidad clásica mediante el planteamiento de problemas. Con enfoque cualitativo (Vasilachis, 2006) aplicamos una entrevista semiestructurada a los cuatro normalistas después de efectuadas sus prácticas de enseñanza (Zaskis y Hazzan, 1999). Observamos en el aula de primaria (Wittrock, 1986) el desarrollo de esas prácticas. El objetivo perseguido con estas acciones fue caracterizar esas enseñanzas e identificar lo que los futuros docentes requerirían en su formación para enseñar los contenidos considerados. Las entrevistas y las prácticas se videograbaron y transcribieron para caracterizarlas según la célula de análisis (Ojeda, 2006): referentes; ideas fundamentales de estocásticos; otros conceptos matemáticos; recursos semióticos; y términos empleados para referirse a estocásticos. La Tabla 1 caracteriza dos de los referentes de las entrevistas.

Referentes	**A.** En un examen de estadística, seis estudiantes obtuvieron las siguientes calificaciones respectivamente: 7, 8, 7, 6, 9 y 10. a) ¿Cuál es el valor de cada una de las medidas centrales? b) Traza la gráfica respectiva y ubica en ella las medidas de tendencia central. c) ¿Cómo interpretas los resultados numéricos obtenidos? d) ¿Es simétrica la gráfica?	**C.** En una urna hay dos bolas blancas y una negra. Si se extrae una bola de la urna, se registra el color (sin devolverla a la urna) y luego se extrae una segunda bola y se registra el color, ¿de cuántas maneras distintas se pueden extraer las bolas? Y si en la urna hay dos bolas blancas y dos bolas negras, ¿de cuántas maneras distintas puedo extraer las bolas?
Ideas fundamentales de estocásticos	Muestra, variable estocástica	Combinatoria (principio fundamental del conteo)
Otros conceptos matemáticos	Operaciones aritméticas básicas, producto cartesiano, números naturales y decimales	Operaciones aritméticas básicas
Recursos semióticos	Lengua natural escrita, gráfica, signos numéricos	Lengua natural escrita, expresión matemática
Términos empleados	Estadística, valor, medidas de tendencia central, simetría	Extraer sin devolución, de cuántas maneras distintas

Tabla 1. Caracterización de dos de los referentes planteados en las entrevistas semiestructuradas.

Los referentes se presentaron en lengua natural escrita y en hojas de control para su análisis. Las entrevistas se realizaron en el colegio de matemáticas estando presentes el normalista Ei, las dos secretarias del colegio y la investigadora. Para el referente de combinatoria se llevó una urna y las bolas blancas y negras del mismo tamaño para que el estudiante realizara las extracciones como lo indicaba el referente. El referente de combinatoria de la entrevista semiestructurada, de acuerdo a English (2005), se basó en un problema de configuraciones combinatorias, de selecciones, ya que "deben tomarse x objetos de un conjunto (normalmente distintos)" (p. 126).

En este escrito, únicamente nos referimos a las prácticas de enseñanza (véase la Tabla 2) de dos de los normalistas (E_1 y E_2). En la suya, el referente que E_1 planteó para el principio multiplicativo contó con la incorporación efectiva de material físico con "más elementos de los que se necesitaban para formar todas las combinaciones posibles" (English, 2005, p. 129). Por su parte, E_2 planteó una encuesta y registró los datos recopilados en el pizarrón para determinar las medidas de tendencia central de la muestra (los alumnos del grupo).

	Practicante y grado de primaria	
	E_2 14 alumnos de 5° de primaria	**E_1** Seis alumnos de 2° de primaria
Tema	Medidas de tendencia central	Principio multiplicativo
Referentes	Promedio de hermanos del grupo	Juanita tiene dos faldas y tres blusas. ¿De cuántas formas puede vestirse?
Ideas fundamentales	Variable estocástica y muestra	Combinatoria (principio multiplicativo)
Otros conceptos matemáticos	Números naturales y decimales, operaciones básicas	Operaciones básicas
Recursos semióticos	Lengua natural escrita, simbología aritmética, tabla de frecuencia elaborada en clase	Referente planteado oralmente, diagrama de árbol. Simbología aritmética
Términos empleados	Estadística, valor, medidas de tendencia central, simetría	¿De cuántas formas?
Material empleado	Pizarrón	Figuras de blusas y faldas

Tabla 2. Caracterización de referentes planteados por E2 y E1 para su práctica de enseñanza en aula de primaria de temas de estocásticos.

CONOCIMIENTO DE ESTOCÁSTICOS: RESULTADOS DE LAS ENTREVISTAS SEMIESTRUCTURADAS

En los pasajes de las entrevistas que citemos, especificamos al interventor ("E_i", el estudiante entrevistado; "I", la investigadora) seguido de la transcripción de su intervención.

Ideas fundamentales de estocásticos. Para las ideas de *muestra* y de *variable estocástica*, E_1, E_2, E_3 y E_4 obtuvieron correctamente para el referente A el valor de la media aritmética; E_2 y E_3, además, el de la moda y el de la mediana. Sin embargo, al graficar la distribución de los datos correspondientes, E_1 los omitió y consideró sólo los valores obtenidos de las tres medidas centrales de la muestra dada (véase la Figura 1), lo que evidenció su conocimiento deficiente de lo que son "datos" (Garfield y Ben-Zvi, 2008), además del de su distribución (Canada, 2007). E_1 no reconoció la dispersión de los datos para identificar el rango, colocó una escala mayor a la de las calificaciones y trazó barras para identificar las medidas de tendencia central.

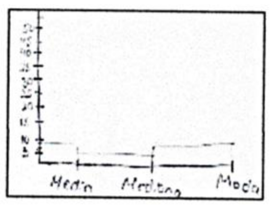


Figura 1. Gráfica propuesta por E_1 para el referente A.

Ningún estudiante identificó la simetría de la distribución de los datos de la muestra, sólo describieron la simetría geométrica pero no la estadística. E_4 consideró imposible ubicar la media en la gráfica, lo cual reveló su conocimiento deficiente de que la media puede no ser uno de los datos de la muestra.

I: (…) ¿Puedes trazar la gráfica respectiva y ubicar en ella las medidas de tendencia central que calculaste…?

E_4: [Traza sus ejes coordenados, registra los valores de la media y la mediana, (…), ubica la mediana en la gráfica]. Aquí sería este ... a la mediana que está entre estos dos, estos dos [señala los datos de los estudiantes 3° y 4° que colocó en el eje horizontal, (calificaciones 7 y 6, respectivamente)], pero la media es el promedio de todos; entonces [mira su gráfica, mira a la investigadora] no la podría ubicar.

I: ¿No la podrías ubicar?

E_4: Ajá [vuelve la mirada a su hoja], porque es la suma y acá sería el resultado de todas, 7.8.

Para la idea de *combinatoria*, implicada en el referente C, E_1, E_2 y E_4 respondieron con la permutación de los colores de las bolas sin distinguir el orden de las extracciones. E_3 primero permutó los colores (dos bolas blancas y una negra) en el inciso a); cuando extrajo efectivamente las bolas de una urna para dar respuesta al inciso b) se percató de que debía considerar el orden de las extracciones (véase la Figura 2), por lo que modificó su respuesta al inciso a) y numeró las blancas para distinguir entre las dos; para el inciso b) hizo lo mismo para identificar cuál de los dos bolas blancas o negras extraía primero.

Figura 2. Solución propuesta por E_3 para el referente C.

Tres de los normalistas (E_1, E_3 y E_4) no contestaron ni representaron correctamente de manera simbólica al referente combinatorio de selección. Ninguno de los estudiantes advirtió que bastaba una multiplicación si se identificaba el orden y se distinguía entre las bolas blancas en el inciso a), dado que eran indistinguibles, y en el inciso b) tanto las bolas blancas como las negras eran indistinguibles. Es decir, no se identificó que el problema era bidimensional.

Otros conceptos matemáticos. Mientras que E_2 y E_3 ordenaron de menor a mayor los datos y así los registraron en el eje horizontal y en el eje vertical anotaron el número de estudiante, E_4 no los ordenó (véase la Figura 3). Por otro lado, E_2, E_3 y E_4 no advirtieron que al eje "y" (ordenada) de la gráfica deberían haber asignado la *frecuencia* de las calificaciones y al eje "x" (abscisa) las calificaciones dadas (véase la Figura 3).

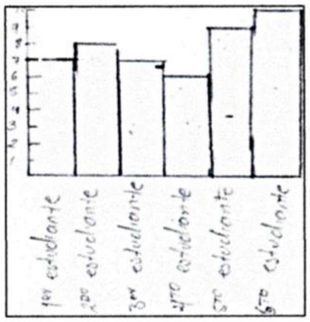


Figura 3. Solución propuesta por E_4 para el referente A.

Recursos semióticos. Para el referente A, los cuatro normalistas no trazaron correctamente la gráfica pedida. E_1 omitió en la gráfica los datos dados, sólo ubicó los valores de las tres medidas centrales, lo que fue un aviso de su deficiencia en el registro de la distribución de frecuencias en la gráfica (véase la Figura 2). En lugar de una gráfica de la distribución de los datos dados (seis calificaciones), E_4 tan sólo "tradujo"—diríamos literalmente— el enunciado verbal del referente (véase la Figura 3). Para el referente C, tres de los estudiantes (E_1, E_3 y E_4) realizaron un listado incompleto e incorrecto con las figuras de las bolas, por lo que no llegaron a la respuesta correcta a la pregunta, en acuerdo con lo señalado por Lockwood y Gibson (2015). E_2 primero enlistó incorrectamente las posibilidades para ambos incisos; pero al percatarse al numerar las bolas (véase la Figura 2) de la importancia del orden al realizar efectivamente las extracciones, registró listados correctos y completos, también en acuerdo con lo informado por Lockwood y Gibson (2015). Los normalistas realizaron representaciones semióticas a nivel de experiencia, como las define Andrá (2011), para responder a la pregunta planteada; ningún estudiante trazó un diagrama de árbol para el referente C, estrategia que, de acuerdo a Heitele (1975), les hubiera conducido a identificar todos los casos posibles del fenómeno.

Términos empleados. La media fue denominada "promedio" por E_2 y E_4, lo que puede derivar en su confusión con las otras medidas de tendencia central que tienen la misma función. Lo anterior evidencia un desconocimiento del significado del término *promedio*, que puede deberse a las diferentes propuestas educativas en las que la enseñanza de las medidas de tendencia central se tratan únicamente como una trinidad, de acuerdo con Bakker (2003). E_3 identificó a las medidas de tendencia central como "punto medio", en acuerdo con lo que señaló Moroney (1979), de que "todos los promedios son conocidos por los estadísticos como "medidas de tendencia central"; indican el punto alrededor del cual se acumulan los diversos valores" (p. 171). E_1, E_3 y E_4 no dieron sentido a las expresiones "de maneras distintas" y "extracción sin devolución"; es decir, tuvieron dificultades para identificar las permutaciones de los objetos (bolas). De acuerdo con English (2005), "las dificultades para resolver las preguntas planteadas en los referentes de combinatoria son: las permutaciones, en las que importa el orden de los objetos o de la gente" (p. 127). E_2, E_3 y E_4 no advirtieron que se trataba de "dos extracciones" en ambos incisos. Los normalistas combinaron o permutaron los colores de las bolas (blanco y negro), no se percataron de que las bolas blancas eran indistinguibles entre sí (al igual que las negras). E_1, E_2 y E_4 identificaron las combinaciones pero no las permutaciones (véase la Figura 4).

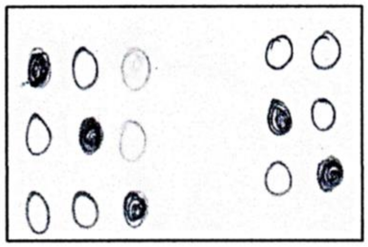


Figura 4. Extracciones y combinaciones identificadas por E_4 en el referente C.

La respuesta de E_3 reveló confusión entre "posibilidad", "probabilidad" y "de cuántas maneras distintas se pueden" hacer dos extracciones de la urna, que contenía dos bolas blancas y una bola negra. En su respuesta, la estudiante registró $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{3}$ como respuesta; es decir, describió la composición del contenido de la urna expresando el número de casos favorables y el número de casos posibles para cada uno de los colores de las bolas. Asumir la intervención del azar sin que se le requiera para responder a la pregunta o sin hacer explícita en la respuesta esa asunción puede derivar en confusiones en el acto de la enseñanza.

E_3: A ver [vuelve a leer el referente]… ¿sin devolverla a la urna? [pregunta a la investigadora y se queda pensativa]… Sería de blancas, podrías extraer dos tercios mientras que de la negra extraerías un tercio…O sea, hay más posibilidades de que te salga una blanca que una negra.

I: Mmm… pero yo quiero saber, ¿de cuántas maneras distintas las puedes extraer?

E_3: [Mete la mano derecha a la urna y extrae una primera bola (blanca) registra en su hoja el color, y saca una segunda bola (negra), registra el color enfrente del primero que escribió, sacó una tercera bola (blanca); la registra enfrente de lo que ya había escrito]. Blanca, negra, blanca, pues sería de dos maneras, negra, blanca, blanca, [escribe una tercera manera], blanca, blanca, negra.

I: ¿Por qué sacaste la tercera bolita?

E_3: ¡Ay! No sé [se ríe], impulso. Este, pues no sé por qué, lógicamente tenía que salir la blanca,

¿no? [Se lleva la mano derecha a la boca].

La dificultad que mostró la normalista fue relativa a "la naturaleza de los elementos a combinar (dígitos, letras, personas y objetos)" (English, 2005, p. 127).

CONOCIMIENTO PARA LA ENSEÑANZA DE ESTOCÁSTICOS: RESULTADOS DE LAS PRÁCTICAS

En esta sección nos referimos a los diseños de las prácticas propuestos por E_2 y E_1, caracterizados en la Tabla 2. En los pasajes que citamos, indicamos a los interventores ("E_i", el practicante normalista; "A_j", el j-ésimo alumno de primaria; "AS": varios alumnos de primaria) seguidos de la transcripción de su intervención respectiva.

Ideas fundamentales de estocásticos. Para la idea de *combinatoria*, el referente que E_1 planteó (véase la Tabla 2) tuvo "más elementos de los que se necesitaban para formar todas las combinaciones posibles" English (2005, p. 129); hubo seis faldas distintas y dos blusas, lo que causó la confusión para identificar la operación matemática correcta ($3 \times 2 = 6$) para el principio multiplicativo de $n \times m$; en su lugar, el normalista registró $2 \times 6 = 12$. Por otro lado, E_1 y los alumnos de segundo grado sí advirtieron que el referente era bidimensional, dado que establecieron la multiplicación para dar una respuesta al referente, aunque fue incorrecta la operación. Para las ideas de *variable estocástica* y *muestra*, E_2 confundió la moda y la media correspondientes a "número de hermanos de la mayoría" y "promedio de número de hermanos". A_3, una alumna (10 años de edad), se lo señaló:

E_2: O sea, si nos iban a decir [se mueve el cabello hacia atrás], de dirección vienen a decir, ¡Aaah! Quiero saber ¿cuál, la mayoría, ¿cuántos hermanos tiene?, vamos a decir la mayoría ¡Aaahh! Es que tienen uno punto ocho hermanos la mayoría, ¿estaría bien?

A_3: Porque ésa [refiriéndose a la media de 1.8 hermanos que obtuvieron los alumnos] ya es la suma de todos los niños, pero en total [de 16] la mayoría son dos.

Heitele (1975) señaló, refiriéndose a un problema análogo al tratado por E_2 de cuántos niños tenía la familia promedio, que se requería que los alumnos identificaran que la muestra no podía ser representativa, dado que faltaba considerar a las familias que no tenían hijos o a las que tenían un número mayor de hijos. Esta reflexión estuvo ausente en la enseñanza de E_2 quien también evidenció un conocimiento insuficiente acerca de la variabilidad de los datos de la muestra, al pasar por alto, o por lo menos no subrayar suficientemente, que el número de hermanos podía cambiar de un niño a otro; es decir, desconoció la naturaleza estocástica de esos datos:

E_2: A la mayoría les gusta o la mayoría los usa. Ésta es una medida de tendencia central; entonces, podemos decir que la moda [señala el pizarrón en la parte que escribió la palabra moda] es la cantidad [vuelve a señalar el pizarrón] que más se repite, ok. ¿Qué otra crítica podemos ver en la tabla, en los datos [tose]?

A_9: La variedad.

E_2: ¿Cómo?

A_9: La variedad.

E_2: ¿Variedad?

A_9: [Asiente con la cabeza]

E_2: ¿Cómo variedad?

A_9: De diferentes números.

E_2: Hay diferentes números [voltea al pizarrón]. ¿Qué números diferentes hay?

A_9: Nada más hay 1, 2 y 3.

Al contrario, el alumno A_9 (10 años) sí advirtió, si bien no tanto que fuera probable (como señalaron Garfield y Ben-Zvi (2008)), pero sí que era *posible* que el número de hermanos de un conjunto de personas *variara* o *cambiara*. E_2 ocasionó así que "no se estableciera una interacción entre ella y A_9 que produjera una comprensión específica del status del concepto matemático" (Steinbring, 1991, p. 503).

Otros conceptos matemáticos. E_1 y E_2 efectuaron correctamente las operaciones aritméticas aunque no correspondieran (en el caso de E_1) a los referentes planteados; lo mismo hicieron los alumnos de segundo grado. Sin embargo, los alumnos de quinto presentaron dificultad al resolver multiplicaciones y divisiones, es decir, al identificar el número de veces que un número cabe en otro, por ejemplo:

E_2: Punto [...] ¿Cuántas veces cabe el 16 en el 130?

A_9: [Responde dudosa] 16×7.

E_2: ¿Siete, por qué? A ver, vamos a ver si es cierto. Siete, ¿seis por siete?

A_9: Treinta, ¡no!, cuarenta y dos.

E_2: 42, para, [...] [inaudible porque un alumno interrumpe]

A_1: Cabe ocho veces.

E_2: Espera, vamos a ver primero con el siete. Seis por siete [A_3 responde al mismo tiempo que E_2].

A_3: 42 para 70, 8

E_2: ¿Y llevamos?

A_3: Cinco, [mueve la cabeza de manera negativa]. No.

E_2: No. ¿Siete por una?

AS: Siete.

E_2: ¿Para trece?

A_3: Seis.

A_1: Seis.

E_2: Entonces no, no cabe, nos falta uno.

Recursos semióticos. E_1 mostró dificultades para trazar un diagrama de árbol correctamente y al escribir la operación matemática correcta (multiplicación) para aplicar el principio multiplicativo, dado que colocó material concreto (faldas) de más. Lo anterior influyó en que el principio multiplicativo no fuera claro para los alumnos de segundo grado (véase la Figura 5).

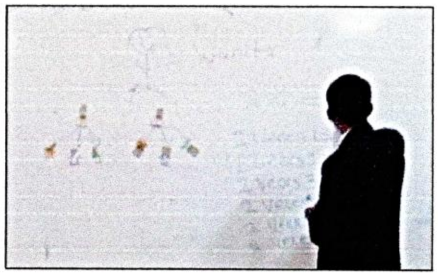


Figura 5. Diagrama de árbol y operación matemática propuestas por E_1.

E_1 no convirtió correctamente el diagrama de árbol a la expresión aritmética del principio multiplicativo y reveló su falta de dominio de recursos semióticos en su práctica. De acuerdo con Dreher y Kuntze (2015), de haberlo trazado correctamente E_1 habría dado la oportunidad a los alumnos de conocer dos representaciones de un objeto matemático (diagrama de árbol y expresión aritmética), habría propiciado el desarrollo de la comprensión conceptual del principio multiplicativo; pero su estrategia no fue exitosa por la falta de dominio del normalista del contenido matemático. E_2 realizó efectivamente la encuesta acerca del número de hermanos de los alumnos del grupo de quinto grado al que se dirigió y registró los datos en el pizarrón, además del procedimiento para determinar cada una de las medidas de tendencia central solicitadas para el referente planteado (véase la Figura 6). En resumen, E_2 empleó lengua natural escrita y la simbología numérica y aritmética.

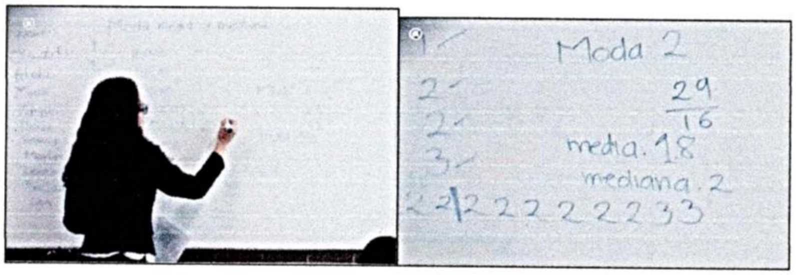


Figura 6. Registro en pizarrón y la simbología aritmética propuestas por E_2.

Términos empleados. Como ya señalamos, A_9, un alumno de quinto grado, mencionó el término "variedad", el cual no fue aprovechado por la docente en formación para mostrar la necesidad de tener representantes de un conjunto de datos (véase el apartado de ideas fundamentales de estocásticos en esta misma sección). E_2 advirtió el dato de la "mayoría" como el más frecuente (moda). Los alumnos de quinto grado identificaron a la "moda" como lo que más se usa (ropa, tenis, celulares) y lo que le gusta a la mayoría.

E_2: Dos, a esta medida se le llama moda, [se dirige a escribir al pizarrón, mientras destapa el plumón, hace una pregunta]. ¿En dónde hemos escuchado la palabra moda? [Escribe en la parte superior del pizarrón la palabra moda].

A_1: Luego dicen esa ropa está de moda.

E_2: Ándale.

AS: [Varios comienzan a hablar y uno dice] los celulares. En los tenis.

E_2: En los tenis, celulares… Y ¿por qué se dice que está de moda?

A_3: Porque a la mayoría les gusta.

E_2: A la mayoría les gusta o la mayoría los usa. Ésta es una medida de tendencia central; entonces, podemos decir que la moda [señala la parte superior del pizarrón donde escribió la palabra moda] es la cantidad [vuelve a señalar el pizarrón] que más se repite, ¿ok?

E_2 y los alumnos de quinto grado identificaron únicamente a la media como promedio. Esta limitación puede deberse a la propuesta educativa de educación primaria, en la que sólo se considera a las medidas de tendencia central como una trinidad, en acuerdo con Bakker (2003):

E_2: ¿Ocho por una?, ocho, [cuenta en vos baja]. Nueve, diez, once, doce y trece […] Nos da uno punto ocho. ¿Éste qué dijimos que era?

A_1: El promedio de todo el grupo.

E_2: ¡Ajá!, el promedio. A este promedio en estadística lo vamos a llamar media […].

En la enseñanza de las medidas de tendencia central, E_2 realizó una reflexión sobre las medidas más representativas para un conjunto de datos que requiere ser potencializada en las clases del contenido estocástico (medidas centrales):

E_2: ¡Ajá!, porque no podemos dividir a nuestro hermano; entonces, sacar el promedio de la cantidad de hermanos ¿sería variable?, ¿sería bueno?, ¿sería lo mejor? O ¿sería mejor sacar la moda?

AS: Sacar la moda.

COMENTARIOS FINALES

Los futuros docentes de educación primaria poseen a lo más un conocimiento de cálculo de técnicas de conteo y de las medidas de tendencia central. Su formación requiere comenzar por clarificar el término "promedio" y otros aspectos de un conjunto de datos como la variabilidad y la dispersión. También es necesario que a los normalistas se les enseñe a identificar la naturaleza de los datos del referente para seleccionar y determinar el promedio apropiado que dé respuesta a la pregunta que se plantea, como lo señaló Moroney (1979).

Para el contenido de principio multiplicativo, se requiere que los normalistas atiendan a su significado, al papel del orden en diversos referentes y cómo operar y convertir un recurso semiótico a otro para usarlos en su enseñanza. Las mismas dificultades que ellos tienen las enfrentarán sus futuros alumnos.

Un aspecto importante a considerar por los mentores de los futuros profesores y por los normalistas al término de las prácticas de enseñanza es poner en juego "la capacidad de reflexionar críticamente sobre la propia práctica y de expresar y registrar esas reflexiones para uno mismo y para otros" (Wittrock, 1986, pp. 290-291). Es necesario e indispensable incorporar la combinatoria en la escuela primaria, sin delegarla únicamente al aspecto aritmético, pues, como lo recomendó English (2005), la combinatoria en el currículo de matemáticas fortalecería el razonamiento combinatorio de los estudiantes y se evitaría que enumeraran incorrectamente el espacio muestra asociado a fenómenos aleatorios y se originaran ideas erróneas en probabilidad. Los estudiantes normalistas tienen la encomienda de formarse también en contenidos combinatorios para realizar esta prevención y, sus mentores, la de sentar las condiciones propicias para esa formación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Andrà, Ch. (2011). Preservice primary school teachers' intuitive use of representations in uncertain situations. P*roceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (Pytlak, M., Rowland, T., Swoboda, E., Eds.). University of Rzeszów, Poland. Pp. 715-724.

Bakker, A. (2003). The Early History of Average Values and Implications for Education. *Journal of Statics Education*. 11 (1). Consultado en http://www.amstat.org/publications/jse/v11n1/bakker.html

Burrill, G. & Biehler, R. (2013). *Les idées statistiques fondamentales dans le curriculum scolaire. Statistique et Enseignement*, 4(1), 5-24. Consultado el 20/10/2016 en http://www.statistique-etenseignement.fr.

Canada, D. (2007). Informal conceptions of distribution held by elementary preservice teacher. *In Proceding of the 31 st Conference of the International Group for the Mathematics Education* (Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds.). Vol. 2, pp. 73-80. Seoul: PME.

Dreher, A., & Kuntze, S. (2015). Teachers' professional knowledge and noticing: The case of multiple representations in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics* 88:89-114.

Dubois, J. G. (1984). Une systématique des configurations combinatoires simples [A system of simple combinatorial configurations]. *Educational Studies in Mathematics*, 15 (1), 37-57.

English, L. D. (2005). Combinatorics and the development of children's combinatorial reasoning. In G. A. Jones (Ed.), Exploring probability in school: *Challenges for teaching and learning* (Vol. 40, pp. 121-141) New York: Springer.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Holland: Reidel.

Garfield, J. & Ben-Zvi, D. (2008). *Capitulo 6. Learning to Reason About Data* in Developing Students' Statistical Reasoning. Connecting Research and Teaching Practice. pp. 123-142. USA: Springer.

Garfield, J. & Ben-Zvi, D. (2008). *Capítulo 10. Learning to Reason About Variability* in Developing Students' Statistical Reasoning. *Conecting Research and Teaching Practice,* pp. 201-214. USA: Springer.

Heitele, D. (1975). An epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics.* 6(2), 187-205.

Hill, H. C., Ball, D. L. & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39 (4), 372-400

Lockwood, E. and Gibson, B. (2015). Combinatorial task and outcome listing: Examining productive listing among undergraduate students. *Educational Studies in Mathematics*, 91, 247-270. doi: 10.1007/s10649-015-9664-5

Moroney M J. (1979). Promedio y dispersión. En Newman, J. (1979). *El mundo de las matemáticas*. Serie Σ, tomo 3, cuarta ed. págs. 169-193. España: Grijalbo.

SEP (2009). *Planes y programas de estudio 2009.* Educación Básica. México.

SEP (2011). *Planes y programas de estudio 2011*. Educación Básica. México.

SEP (2012). *Planes y programas de la Licenciatura en Educación Primaria 2012*. México.

SEP (2016). *Nuevo Modelo Educativo. México. Propuesta curricular.* Consultado el 29/11/2016 en http://www.gob.mx/modeloeducativo2016

Steinbring, H. (1991). The Concept of Chance in Everyday Teaching: Aspects of a Social Epistemology of Mathematical Knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 22, 503-522.

Ojeda, A. M. (2006). Estrategia para un perfil nuevo de docencia: un ensayo en la enseñanza de estocásticos. En Filloy (Ed.) *Matemática Educativa, treinta años* (pp. 257-281). México: Santillana-Cinvestav.

Vasilachis, I. (2006). *Estrategias de investigación cualitativa*. España: Gedisa.

Wittrock, M. (1986). *La investigación de la enseñanza II*. Barcelona: Paidós.

Zaskis, R. y Hazzan, O. (1999). Interviewing in Mathematics Education Research: Choosing the Questions. *Journal of Mathematical Behavior*, 17 (4), 429-439. ISSN 0364-0213.

Anexos

ANEXO 1

Autorización de los docentes en formación para la toma de datos

México, DF, a 27 de Abril de 2016

Investigación acerca de la comprensión de estocásticos de docentes en formación para la educación primaria

Estimados estudiantes del cuarto semestre de la licenciatura en Educación Primaria

Por medio del presente documento formalizo a ustedes la información que les he comentado sobre la investigación que realizo en mis estudios de Doctorado en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa en el Cinvestav-IPN.

Los objetivos de la investigación son:

a) Identificar el Conocimiento Matemático para la Enseñanza de los docentes en formación sobre el tema de estocásticos.
b) Identificar dificultades de comprensión de ideas fundamentales de estocásticos de docentes en formación, así como de los dominios intuitivos del pensamiento probabilístico de alumnos de primaria en situaciones de enseñanza.
c) Proponer lineamientos para el diseño de estrategias de enseñanza de estocásticos en la Licenciatura para la Educación Primaria.

Para llevar a cabo lo anterior, necesito de su colaboración para poder realizar entrevistas a algunos de ustedes, videograbar tanto sesiones de nuestra asignatura (Procesamiento de la Información Estadística), como de sus prácticas docentes que desarrollan en las aulas de primaria. Lo anterior se llevará a cabo con todo profesionalismo y la información que se obtenga será de uso exclusivo para el desarrollo de la investigación y respetando el anonimato de cada uno de ustedes.

Agradezco de ante mano su apoyo, les doy las gracias y les solicito llenen la siguiente autorización para iniciar la toma de datos para mi investigación.

Saludos cordiales, M en C. Ana María Martínez Blancarte

Yo ____alumno (a) del grupo ________________ de la Licenciatura en Educación Primaria de la Benemérita Escuela Nacional de Maestros, acepto participar en las videograbaciones y entrevistas con fines educativos que lleve a cabo la M en C. Ana María Martínez Blancarte.

México, DF, 27 de Abril de 2015

Yo ____alumno (a) del grupo ________________ de la Licenciatura en Educación Primaria de la Benemérita Escuela Nacional de Maestros, acepto participar en las videograbaciones y entrevistas con fines educativos que lleve a cabo la M en C. Ana María Martínez Blancarte.

Ciudad de México a 8 de Abril de 2016

Investigación acerca de la comprensión de estocásticos de docentes en formación para la educación primaria

Estimados estudiantes del cuarto semestre de la licenciatura en Educación Primaria

Por medio del presente documento solicito su participación y apoyo para realizar mi investigación, dado que me encuentro realizando mis estudios de Doctorado en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa en el CINVESTAV-IPN.

Los objetivos de la investigación son:

a) Identificar el Conocimiento Matemático para la Enseñanza de los docentes en formación sobre el tema de estocásticos (medidas de tendencia central y combinatoria).
b) Identificar las dificultades de comprensión de ideas fundamentales de estocásticos de docentes en formación, así como de los dominios intuitivos del pensamiento probabilístico de alumnos de primaria en situaciones de enseñanza.
c) Proponer lineamientos para el diseño de estrategias de enseñanza de estocásticos en la Licenciatura para la Educación Primaria.

Para llevar a cabo lo anterior, necesito de su colaboración para poder realizar un cuestionario diagnóstico, una entrevista semiestructurada a algunos de ustedes, videograbar tanto sesiones de su asignatura de Procesamiento de la Información Estadística, como de sus prácticas docentes que desarrollarán del 16 al 27 de mayo del presente año. Lo anterior se llevará a cabo con todo profesionalismo; la información que se obtenga será de uso exclusivo para el desarrollo de la investigación y respetando el anonimato de cada uno de ustedes.

Agradezco de ante mano su apoyo, les doy las gracias y les solicito llenen la siguiente autorización para iniciar la toma de datos para mi investigación.

Saludos cordiales, M en C. Ana María Martínez Blancarte

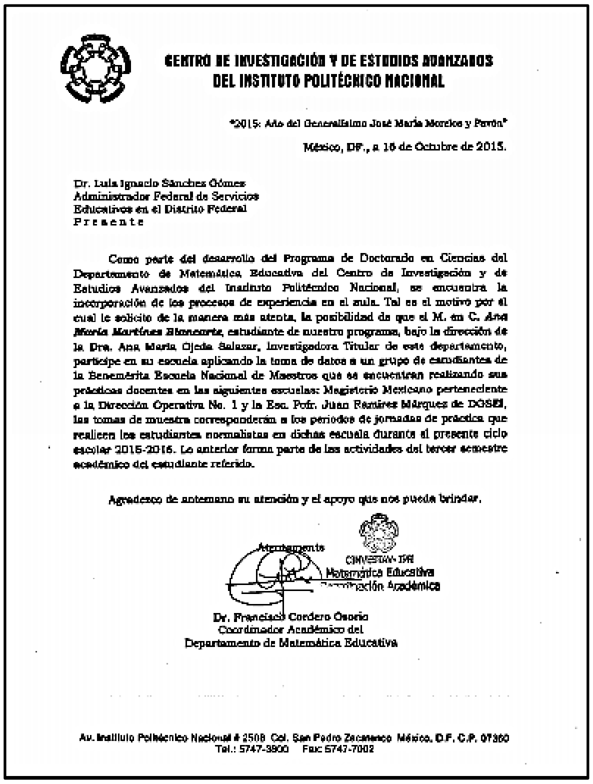
Yo ____alumno (a) del grupo ________________ de la Licenciatura en Educación Primaria de la Benemérita Escuela Nacional de Maestros, acepto participar en las videograbaciones y entrevistas con fines educativos que lleve a cabo la M en C. Ana María Martínez Blancarte.

Ciudad de México a 8 de Abril de 2016

Yo ____alumno (a) del grupo ________________ de la Licenciatura en Educación Primaria de la Benemérita Escuela Nacional de Maestros, acepto participar en las videograbaciones y entrevistas con fines educativos que lleve a cabo la M en C. Ana María Martínez Blancarte.

ANEXO 2

Autorización para la toma de datos en primarias y en la normal



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

"2015: Año del Generalísimo José María Morelos y Pavón"

México, DF., a 16 de Octubre de 2015.

Dr. Luis Ignacio Sánchez Gómez
Administrador Federal de Servicios
Educativos en el Distrito Federal
P r e s e n t e

Como parte del desarrollo del Programa de Doctorado en Ciencias del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, se encuentra la incorporación de los procesos de experiencia en el aula. Tal es el motivo por el cual le solicito de la manera más atenta, la posibilidad de que el M. en C. *Ana María Martínez Blancarte*, estudiante de nuestro programa, bajo la dirección de la Dra. Ana María Ojeda Salazar, Investigadora Titular de este departamento, participe en su escuela aplicando la toma de datos a un grupo de estudiantes de la Benemérita Escuela Nacional de Maestros que se encuentran realizando sus prácticas docentes en las siguientes escuelas: Magisterio Mexicano perteneciente a la Dirección Operativa No. 1 y la Esc. Pofr. Juan Ramírez Márquez de DGSEI, las tomas de muestra corresponderán a los periodos de jornadas de práctica que realicen los estudiantes normalistas en dichas escuela durante el presente ciclo escolar 2015-2016. Lo anterior forma parte de las actividades del tercer semestre académico del estudiante referido.

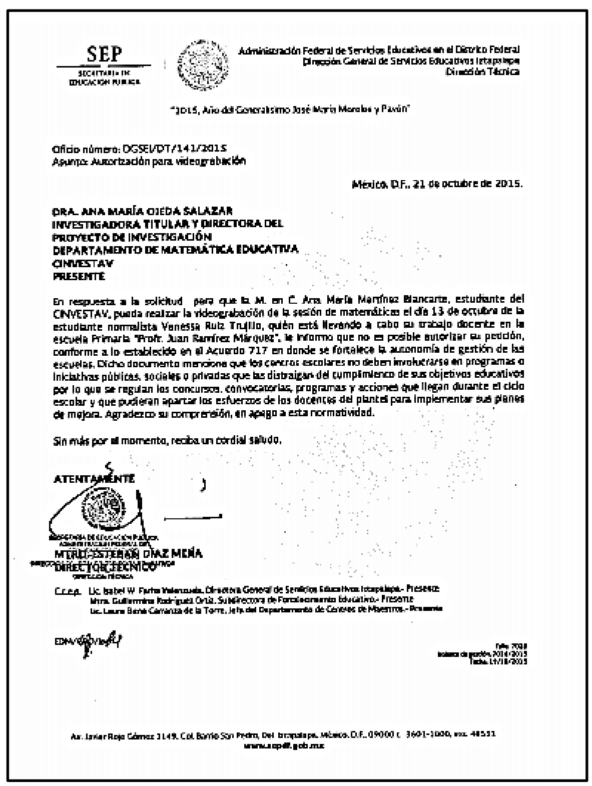
Agradezco de antemano su atención y el apoyo que nos pueda brindar.

Atentamente

CINVESTAV-IPN
Matemática Educativa
Coordinación Académica

Dr. Francisco Cordero Osorio
Coordinador Académico del
Departamento de Matemática Educativa

Av. Instituto Politécnico Nacional # 2508 Col. San Pedro Zacatenco México, D.F. C.P. 07360
Tel.: 5747-3800 Fax: 5747-7002



SEP
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

Administración Federal de Servicios Educativos en el Distrito Federal
Dirección General de Servicios Educativos Iztapalapa
Dirección Técnica

"2015, Año del Generalísimo José María Morelos y Pavón"

Oficio número: DGSEI/DT/141/2015
Asunto: Autorización para videograbación

México, D.F., 21 de octubre de 2015.

DRA. ANA MARÍA OJEDA SALAZAR
INVESTIGADORA TITULAR Y DIRECTORA DEL
PROYECTO DE INVESTIGACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA
CINVESTAV
PRESENTE

En respuesta a la solicitud para que la M. en C. Ana María Martínez Blancarte, estudiante del CINVESTAV, pueda realizar la videograbación de la sesión de matemáticas el día 13 de octubre de la estudiante normalista Vanessa Ruiz Trujillo, quién está llevando a cabo su trabajo docente en la escuela Primaria "Profr. Juan Ramírez Márquez", le informo que no es posible autorizar su petición, conforme a lo establecido en el Acuerdo 717 en donde se fortalece la autonomía de gestión de las escuelas. Dicho documento menciona que los centros escolares no deben involucrarse en programas o iniciativas públicas, sociales o privadas que las distraigan del cumplimiento de sus objetivos educativos por lo que se regulan los concursos, convocatorias, programas y acciones que llegan durante el ciclo escolar y que pudieran apartar los esfuerzos de los docentes del plantel para implementar sus planes de mejora. Agradezco su comprensión, en apego a esta normatividad.

Sin más por el momento, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE

MTRO. ESTEBAN DÍAZ MEÑA
DIRECTOR TÉCNICO

C.c.p. Lic. Isabel W. Farías Valenzuela, Directora General de Servicios Educativos Iztapalapa.- Presente
Mtra. Guillermina Rodríguez Ortiz, Subdirectora de Fortalecimiento Educativo.- Presente
Lic. Laura Bané Carranza de la Torre, Jefa del Departamento de Centros de Maestros.- Presente

EDM/

Av. Javier Rojo Gómez 1149, Col. Barrio San Pedro, Del. Iztapalapa, México, D.F., 09000 t. 3601-1000, ext. 48531
www.sepdf.gob.mx

SEP
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

Administración Federal de Servicios Educativos en el Distrito Federal
Dirección General de Servicios Educativos Iztapalapa
Dirección Técnica

"2015, Año del Generalísimo José María Morelos y Pavón"

Oficio número: DGSEI/DT/147/2015
Asunto: Autorización para toma de datos

México, D.F., 29 de octubre de 2015.

DR. FRANCISCO CORDERO OSORIO
COORDINADOR ACADÉMICO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA
CINVESTAV
PRESENTE

En respuesta a la solicitud para que la M. en C. Ana María Martínez Blancarte, estudiante del CINVESTAV, pueda realizar la toma de datos a los estudiantes normalistas que están llevando a cabo su trabajo docente en la escuela Primaria "Profr. Juan Ramírez Márquez", le informo que no es posible autorizar su petición, conforme a lo establecido en el Acuerdo 717. Dicho documento menciona que los centros escolares no deben involucrarse en programas o iniciativas públicas, sociales o privadas que las distraigan del cumplimiento de sus objetivos educativos por lo que se regulan los concursos, convocatorias, programas y acciones que llegan durante el ciclo escolar y que pudieran apartar los esfuerzos de los docentes del plantel para implementar sus planes de mejora. Agradezco su comprensión, en apego a esta normatividad.

Sin más por el momento, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE

MTRO. ESTEBAN DÍAZ MEJÍA
DIRECTOR TÉCNICO

C.c.p. Lic. Isabel W. Farha Valenzuela, Directora General de Servicios Educativos Iztapalapa.- Presente
Mtra. Guillermina Rodríguez Ortiz, Subdirectora de Fortalecimiento Educativo.- Presente
Lic. Laura Elena Carranza de la Torre, Jefa del Departamento de Centros de Maestros.- Presente

EDM/[illegible]

[illegible]

Av. Javier Rojo Gómez 1149, Col. Barrio San Pedro, Del. Iztapalapa, México, D.F., 09000 t. 3601-1000, ext. 48551
www.sepdf.gob.mx

SEP
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

Administración Federal de Servicios Educativos en el Distrito Federal
Dirección General de Operación de Servicios Educativos
Coordinación Sectorial de Educación Primaria
Subdirección de Operación
Departamento de Gestión Escolar

"2015, Año del Generalísimo José María Morelos y Pavón"

Oficio número 215-3-SO/1173/2015

México, D.F., 09 de noviembre de 2015.

M. EN C. ANA MARÍA MARTÍNEZ BLANCARTE
ESTUDIANTE DEL PROGRAMA DE DOCTORADO EN CIENCIAS DEL DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS EDUCATIVAS DEL CINVESTAV DEL IPN
PRESENTE

El presente es con relación a su escrito, mediante el cual solicita apoyo para la aplicación de toma de datos y grabación de estudiantes de la Benemérita Escuela Nacional de Maestros, así como a los alumnos de la Escuela Primaria 11-0030-108-00-x-013 "Magisterio Mexicano".

Al respecto, esta Coordinación no tiene inconveniente en que se lleve a cabo la filmación de la clase con alumnos de la mencionada escuela, para lo cual se anexa el formato de autorización de los padres de familia, con el fin de que autoricen que sus hijos sean filmados, en el entendido de que se salvaguardará en todo momento la imagen e integridad de los alumnos, en el periodo comprendido del 30 de noviembre al 11 de diciembre del presente año, quedando pendientes las actividades del 2016.

Sin más por el momento, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA
COORDINACIÓN SECTORIAL DE EDUCACIÓN PRIMARIA
SUBDIRECCIÓN DE OPERACIÓN
MÉXICO, D.F.

LIC. MARTHA ALICIA MÉNDEZ SUÁREZ
SUBDIRECTORA DE OPERACIÓN

Recibí copia
Profra. Aaydé Alcantar
1° Dic. 2015

c.c.p. Archivo.- En Atn al 000171

MAMS/[illegible]/mp

Arcos de Belén 25, Piso 13, Col. Centro, Del. Cuauhtémoc, México, D.F., 06070 t. (55) 36 01 10 00, ext. 19255 y 19266
alicia.mendez@sepdf.gob.mx

ANEXO 2

Autorización para la toma de datos en primarias y en la normal.

CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Ciudad de México, 12 de Febrero de 2016.

Mtra. María Esther Núñez Cebrero
Directora de la Benemérita Escuela
Nacional de Maestros
P r e s e n t e

Como parte del desarrollo del Programa de Doctorado en Ciencias del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, se encuentra la incorporación de los procesos de experiencia en el aula. Tal es el motivo por el cual le solicito de la manera más atenta, la posibilidad de que el M. en C. ***Ana María Martínez Blancarte***, estudiante de nuestro programa, bajo la dirección de la Dra. Ana María Ojeda Salazar, Investigadora Titular de este departamento, participe en su escuela aplicando la toma de datos a un grupo de estudiantes del sexto semestre la Benemérita Escuela Nacional de Maestros que se encuentran realizando sus prácticas docentes en la escuela: Magisterio Mexicano perteneciente a la Dirección Operativa No. 1. Las observaciones de clase sobre temas de medidas de tendencia central y combinatoria, corresponderán a los periodos de jornadas de práctica durante el presente ciclo escolar 2015-2016.

También se realizará toma de datos a dos grupos del cuarto semestre (aplicación de cuestionarios, entrevistas y desarrollo de un taller de aproximadamente 6 sesiones con una duración de 1:30 horas por sesión sobre contenidos de la asignatura de Procesamiento de la Información Estadística y observación en el aula primaria); se seleccionará a seis estudiantes del cuarto semestre que hayan mostrado desempeño alto, medio y bajo para realizar las observaciones de sus prácticas educativas en la escuela primaria.

Lo anterior con el objetivo de identificar el Conocimiento Matemático para la Enseñanza (CME) de los docentes en formación y las dificultades de comprensión de ideas fundamentales de estocásticos; además de proponer lineamientos para el diseño de estrategias de enseñanza de estocásticos en la Licenciatura para la Educación Primaria. Lo anterior forma parte de las actividades del cuarto semestre académico de la estudiante referida.

02404

Agradezco de antemano su atención y el apoyo que nos pueda brindar.

BENEMÉRITA ESCUELA NACIONAL DE MAESTROS
RECIBIDO
12:25
12 FEB 2016
DIRECCIÓN

Atentamente

Matemática Educativa
Coordinación Académica

Dr. Ernesto Alonso Sánchez Sánchez
Coordinador Académico
Departamento de Matemática Educativa

BENEMÉRITA
ESCUELA NACIONAL DE MAESTROS
12 FEB 2016
12:36
SUBDIRECCIÓN ACADÉMICA
RECIBIDO

Av. Instituto Politécnico Nacional # 2508 Col. San Pedro Zacatenco México, D.F. C.P. 07360
Tel.: 5747-3800 Fax: 5747-7002

SEP
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

Administración Federal de Servicios Educativos en el Distrito Federal
Dirección General de Operación de Servicios Educativos
Coordinación Sectorial de Educación Primaria
Subdirección de Operación
Departamento de Gestión Escolar

BENEMÉRITA
ESCUELA NACIONAL DE MAESTROS
VERONICA 9:14
04 ABR 2016
RECIBIDO

Oficio número 211-3-SO/1366/2016

Ciudad de México, a 04 de marzo de 2016.

M. EN C. ANA MARÍA MARTÍNEZ BLANCARTE
ESTUDIANTE DEL PROGRAMA DE DOCTORADO EN CIENCIAS DEL DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS EDUCATIVAS DEL CINVESTAV DEL IPN
PRESENTE

El presente, es con relación a su escrito mediante el cual solicita apoyo para la aplicación de toma de datos y grabación a un grupo de estudiantes de la Benemérita Escuela Nacional de Maestros, que se encuentran realizando sus prácticas docentes en el plantel 11-0296-145-00-x-026, "Lic. Miguel Serrano" y 21-0757-221-00-x-016, "Bombero Ramón Arriaga Aceves".

Al respecto, esta Coordinación no tiene inconveniente en que se lleve a cabo la filmación de la clase con alumnos de las mencionadas escuelas, para lo cual se anexa el formato de autorización de los padres de familia, con el fin de que autoricen que sus hijos sean filmados; en el entendido de que se salvaguardará, en todo momento, la imagen e integridad de los alumnos, actividad a desarrollarse en el periodo comprendido del 07 al 18 de marzo y del 16 al 27 de mayo del presente año.

Sin más por el momento, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE

04 ABR 2016
RECIBIDO

LIC. MARTHA ALICIA MÉNDEZ SUÁREZ
SUBDIRECTORA DE OPERACIÓN

08-03-16

09-03-16

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA
ESCUELA PRIMARIA
"BOMBERO RAMÓN ARRIAGA ACEVES"
21-0757-221-00-x-016
09DPR2171V

c.c.p. Archivo

MAMS/MGD/mg

SEP
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

Administración Federal de Servicios Educativos en el Distrito Federal
Dirección General de Operación de Servicios Educativos
Coordinación Sectorial de Educación Primaria
Subdirección de Operación
Departamento de Gestión Escolar

Oficio número 215-3-SO/1429/2016

Ciudad de México, a 16 de marzo de 2016.

M. EN C. ANA MARÍA MARTÍNEZ BLANCARTE
ESTUDIANTE DEL PROGRAMA DE DOCTORADO EN CIENCIAS DEL DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS EDUCATIVAS DEL CINVESTAV DEL IPN
PRESENTE

El presente es con relación a su escrito, mediante el cual solicita apoyo para continuar la aplicación de toma de datos y grabación a un grupo de estudiantes de la Benemérita Escuela Nacional de Maestros que se encuentran realizando sus prácticas docentes en la Escuela Primaria 11-0030-108-00-x-013 "Magisterio Mexicano".

Al respecto, esta Coordinación no tiene inconveniente en que se lleve a cabo la filmación de la clase con alumnos de la mencionada escuela, para lo cual se anexa el formato de autorización de los padres de familia, con el fin de que autoricen que sus hijos sean filmados, en el entendido de que se salvaguardará en todo momento la imagen e integridad de los alumnos, actividad a desarrollarse en el periodo comprendido del 07 al 18 de marzo y del 16 al 27 de mayo del presente año.

Sin más por el momento, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE

LIC. MARTHA ALICIA MÉNDEZ SUÁREZ
SUBDIRECTORA DE OPERACIÓN

BENEMÉRITA ESCUELA NACIONAL DE MAESTROS
06 ABR 2016
Verónica 9:14
SUBDIRECCIÓN ACADÉMICA
RECIBIDO

c.c.p. Archivo.- En At'n al 000171.

MAMS/

Recibí copia
17/03/16

Arcos de Belén 23, Piso 12, Col. Centro, Del. Cuauhtémoc, México, D.F. 06070 t. (55) 36 01 10 00, ext. 19755 y 19266
alicia.mendez@sepdf.gob.mx

SEP
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

Administración Federal de Servicios Educativos en el Distrito Federal
Dirección General de Operación de Servicios Educativos
Coordinación Sectorial de Educación Primaria

Oficio número: AFSEDF/DGOSE/CSEP/215.5/4748/2016.

Ciudad de México, a 11 de octubre del 2016.

DIRECTORES DE EDUCACIÓN PRIMARIA 1 Y 2
SUPERVISORES DE LAS ZONAS ESCOLARES 140, 118 Y 216
DIRECTORES DE LAS ESCUELAS PRIMARIAS
BERNAL DÍAZ DEL CASTILLO CON CCT 09DPR1346N,
ÁNGELA PERALTA CON CCT 09DPR1584O Y
ESTADO DE DURANGO CON CCT 09DPR2324P
PRESENTE

BENEMÉRITA ESCUELA NACIONAL DE MAESTROS
12 OCT 2016
13:07
SUBDIRECCIÓN ACADÉMICA
RECIBIDO

Informo a Ustedes, que en atención a la solicitud para que la M. en C. Ana María Martínez Blancarte, estudiante del Programa de Doctorado en Ciencias del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, realice la toma de datos y video a un grupo de estudiantes de la Benemérita Escuela Nacional de Maestros, que desarrollan sus prácticas profesionales en las escuelas primarias Bernal Díaz del Castillo con CCT 09DPR1346N, Ángela Peralta con CCT 09DPR1584O y Estado de Durango con CCT 09DPR2324P, en el periodo del 10al 21 de octubre y del 28 al 9 de diciembre del presente ciclo escolar, habiendo realizado la vinculación con la Dirección General de Educación Normal y Actualización del Magisterio, se autoriza la realización de la citada actividad, en los periodos que se indican.

Para el desarrollo de la toma de video es necesario contar con autorización escrita de los padres de familia de los menores, mediante el formato que se anexa, una vez concluida la investigación se solicita entregar a esta Coordinación un informe con los resultados de la misma.

Sin más por el momento, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE

Recibí Original
12/10/2016

Recibí original
del Pilar Romero
12·10·16

MTRO. DANIEL VELASCO GONZÁLEZ
COORDINADOR SECTORIAL

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA
ESCUELA PRIMARIA
"BERNAL DÍAZ DEL CASTILLO"
25-0709-218-00-x-018
09DPR1346N

Recibí original
Ricardo

C.c.p. Lic. Norma Patricia Sánchez Regalado.- Directora General de Operación de Servicios Educativos.- Para
C.c.p. Mtra. Sayda Azán Monroy.- Subdirectora de Actualización, Capacitación y Superación.- Para seguimiento

DVG/

Av. José María Izazaga No 99, Piso 12, Col. Centro, C.P.06070, Delegación Cuauhtémoc, Tel. 19277 y 19278
Visite las páginas www.sepdf.gob.mx

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA
ESCUELA PRIMARIA
"ÁNGELA PERALTA"
09DPR1584O

ANEXO 2

Autorización para la toma de datos en primarias y en la normal.

SEP
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

Administración Federal de Servicios Educativos en el Distrito Federal
Dirección General de Operación de Servicios Educativos
Coordinación Sectorial de Educación Primaria

Oficio número: AFSEDF/DGOSE/CSEP/215.5/4747/2016.

Ciudad de México, a 11 de octubre del 2016.

DR. ERNESTO ALONSO SÁNCHEZ SÁNCHEZ
COORDINADOR ACADÉMICO DEL DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA EDUCATIVA DEL CINVESTAV
PRESENTE

En atención a su solicitud para que la M. en C. Ana María Martínez Blancarte, estudiante del Programa de Doctorado en Ciencias del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, realice la toma de datos y video a un grupo de estudiantes de la Benemérita Escuela Nacional de Maestros, que desarrollan sus prácticas profesionales en las escuelas primarias Bernal Díaz del Castillo con CCT 09DPR1346N, Ángela Peralta con CCT 09DPR1584O y Estado de Durango con CCT 09DPR2324P, en el periodo del 10al 21 de octubre y del 28 al 9 de diciembre del presente ciclo escolar, le informo que habiendo realizado la vinculación con la Dirección General de Educación Normal y Actualización del Magisterio, se autoriza la realización de la citada actividad, en los periodos que se indican.

Para el desarrollo de la toma de video es necesario contar con autorización escrita de los padres de familia de los menores, mediante el formato que se anexa, una vez concluida la investigación se solicita entregar a esta Coordinación un informe con los resultados de la misma.

Sin más por el momento, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE

MTRO. DANIEL VELASCO GONZÁLEZ
COORDINADOR SECTORIAL

BENEMÉRITA ESCUELA NACIONAL DE MAESTROS
12 OCT 2016
GABY 13:07
SUBDIRECCIÓN ACADÉMICA
RECIBIDO

CINVESTAV IPN
Matemática Educativa
Coordinación Académica

Recibí
Gaby 13-Oct-16

C.c.p. Lic. Norma Patricia Sánchez Regalado.- Directora General de Operación de Servicios Educativos.- Para conocimiento
Simón G. Trejo Santos. Director de Formación Inicial de la DGENAM.- Para conocimiento
C.c.p. Mtra. Sayda Ávila Monroy.- Subdirectora de Actualización, Capacitación y Superación.- Para seguimiento

DVG/S

Av. José María Izazaga No 99, Piso 13, Col. Centro, C.P.06070, Delegación Cuauhtémoc. Tel 36017100 ext. 19277 y 19278
Visite las páginas www.sepdf.gob.mx

CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Ciudad de México, a 26 de septiembre de 20[illegible]

Maestro Daniel Velasco González
Coordinador Sectorial de Educación Primaria
en la Ciudad de México
Presente

Como parte del desarrollo del Programa de Doctorado en Ciencias del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, está la incorporación de los procesos de experiencia en el aula. Tal es el motivo por el cual le solicito, de la manera más atenta, la posibilidad de que la ***M. en C. Ana María Martínez Blancarte***, estudiante de nuestro programa, participe en su escuela aplicando la toma de datos a un grupo de estudiantes de la Benemérita Escuela Nacional de Maestros que realizan sus prácticas docentes en las siguientes escuelas primarias: *Bernal Díaz del Castillo CCT 09DPR1346N, Ángela Peralta CCT 09DPR1584O y, Estado de Durango CCT 09DPR2324P*. Las tomas de muestra corresponderán a los periodos de jornadas de práctica que realicen los estudiantes normalistas en esas escuelas durante los periodos del 10 al 21 de octubre y del 28 al 9 de diciembre del presente ciclo escolar 2016-2017, quedando pendientes las escuelas del siguiente semestre. Lo anterior forma parte de las actividades del quinto semestre académico de la estudiante referida.

Agradezco de antemano su atención y la colaboración que nos pueda [illegible]

BENEMÉRITA ESCUELA NACIONAL DE MAESTROS
30 SEP 2016
SUBDIRECCIÓN ACADÉMICA
RECIBIDO

Atentamente,

Dr. Ernesto Alonso Sánchez Sánchez
Coordinador Académico
del Departamento de Matemática Educativa

27 SEP

Av. Instituto Politécnico Nacional #2508, Col. San Pedro Zacatenco, C.P 07360
Tel. (55) 5747-3800 Fax: 5747-7002

ANEXO 3

Autorización de los padres de familia para la toma de datos

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav)
Departamento de Matemática Educativa

Proyecto de investigación:

COMPRENSIÓN DE ESTOCÁSTICOS DE DOCENTES EN FORMACIÓN PARA LA EDUCACIÓN PRIMARIA

Responsable: M. en C. Ana Maria Martinez Blancarte

Permiso para que su hijo(a) participe en videograbaciones

Doy mi consentimiento para que mi hijo (a), de nombre: ____________________ ______________________________ del grado: ___, grupo "___", participe en la videograbación de clases de matemáticas y, de ser seleccionado, en la entrevista individual frente a cámara, que se llevará a cabo en el período comprendido del 10 al 21 de Octubre del año en curso, en las aulas de la escuela primaria "Angela Peralta" CCT: 09DPR1584O.

Estoy enterado(a) de que la investigación es de carácter educativo, que tiene por objetivo identificar el conocimiento de matemáticas (estocásticos) de los profesores en formación y la viabilidad de la estrategia de enseñanza de esos contenidos. El material audiovisual quedará en resguardo del Cinvestav y se utilizará bajo fines estrictamente de investigación educativa, salvaguardando la identidad e integridad de los participantes.

Entiendo que no recibiré ninguna compensación por la aparición y participación de mi hijo (a) en las producciones audiovisuales.

Nombre del padre o tutor: ______________________________

Firma: ______________________________

Dirección: ______________________________

____

Teléfono: ______________________________

Ciudad de México, a ______ de ____________________ 2016.

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav)
Departamento de Matemática Educativa

Proyecto de investigación:

COMPRENSIÓN DE ESTOCÁSTICOS DE DOCENTES EN FORMACIÓN PARA LA EDUCACIÓN PRIMARIA

Responsable: M. en C. Ana Maria Martinez Blancarte

Permiso para que su hijo(a) participe en videograbaciones

Doy mi consentimiento para que mi hijo (a), de nombre: ____________________ ______________________________ del grado: ___, grupo "___", participe en la videograbación de clases de matemáticas y, de ser seleccionado, en la entrevista individual frente a cámara, que se llevará a cabo en el período comprendido del 10 al 21 de Octubre del año en curso, en las aulas de la escuela primaria "Bernal Díaz del Castillo" CCT. 09DPR1346N.

Estoy enterado(a) de que la investigación es de carácter educativo, que tiene por objetivo identificar el conocimiento de matemáticas (estocásticos) de los profesores en formación y la viabilidad de la estrategia de enseñanza de esos contenidos. El material audiovisual quedará en resguardo del Cinvestav y se utilizará bajo fines estrictamente de investigación educativa, salvaguardando la identidad e integridad de los participantes.

Entiendo que no recibiré ninguna compensación por la aparición y participación de mi hijo (a) en las producciones audiovisuales.

Nombre del padre o tutor: ______________________________

Firma: ______________________________

Dirección: ______________________________

____

Teléfono: ______________________________

Ciudad de México, a ______ de ____________________ de 2016.

ANEXO 4

Formato de informe de la práctica docente

ESCUELA PRIMARIA: ____

SEMANA: ___________________________________ GRUPO: ________

DOCENTE EN FORMACIÓN: ____

Instrucciones: lea detenidamente los indicadores, señalar de acuerdo con la escala presentada, la presencia del indicador y la calidad con que se observa el rasgo. En la columna correspondiente haga las observaciones por las que ha otorgado la valoración.

Indicadores de observación: **A**. Presencia del indicador **1**. Deficiente **2**. Aceptable **3**. Bien **4**. Muy bien

Rasgos	Indicadores/escala	A	1	2	3	4	Observaciones
Planeación	1. Presenta información suficiente para sustentar y orientar el aprendizaje de los alumnos de los contenidos a trabajar (información básica de los contenidos escolares).						
	2. Las situaciones didácticas son pertinentes a los aprendizajes esperados.						
	3. En su trabajo por sistematización demuestra dominio de las metodologías específicas de las asignaturas y del desarrollo de habilidades cognitivas.						
Desarrollo de la práctica	1. Asiste puntualmente al plantel todos los días.						
	2. Se presenta debidamente uniformado a la escuela (de acuerdo a lo solicitado por el docente de la BENM).						
	3. Realiza con buena disposición y responsabilidad el trabajo en la escuela primaria.						
	4. Argumenta con claridad y congruencia sus ideas al interactuar con los niños.						
	5. Promueve estrategias didácticas para la creación de ambientes favorables para el aprendizaje.						
	6. Adecua su trabajo a las condiciones físicas del aula, al contexto y a las características del grupo.						

Rasgos	Indicadores/escala	A	1	2	3	4	Observaciones
Desarrollo de la práctica	7. Durante la clase, usa de manera motivante, recursos didácticos acordes para promover el aprendizaje de los contenidos.						
	8. Logra de manera permanente un manejo de grupo que posibilita la comunicación dentro del mismo.						
	9. Promueve de manera eficiente, que los alumnos expresen valoraciones sobre sus propios procesos y resultado de sus compañeros respecto de las actividades que desarrolla.						
	10. Rescata y sistematiza los conocimientos previos, así como los que van adquiriendo los alumnos y los retroalimenta de forma significativa.						
	11. Evalúa (diagnóstica, formativa y sumativamente) en relación a los aprendizajes esperados.						
	12. Favorece la autonomía de los alumnos.						
	13. Actúa oportunamente ante situaciones de conflicto para favorecer un clima de respeto y empatía.						
Competencias profesionales	1. Asume los principios y reglas establecidas por la sociedad para la mejor convivencia.						
	2. Promueve actividades que involucran el trabajo colaborativo para impulsar el compromiso, responsabilidad y solidaridad de los alumnos.						
	3. Su discurso es fluido, enfático y mantiene el interés del grupo con un volumen adecuado de voz.						
	4. Propicia y regula espacios de aprendizaje incluyentes para todos los alumnos.						
	5. Usa de manera crítica y segura las tecnologías de la información y la comunicación.						
	6. Cumple con el tiempo establecido para la asignatura de acuerdo a su planeación.						

Rasgos	**Indicadores/escala**	**A**	**1**	**2**	**3**	**4**	**Observaciones**
Competencias profesionales	7. Demuestra amplio conocimiento y comprensión del conjunto de contenidos de la asignatura y/o campo de formación que tiene a su cargo desarrollar.						

Profesor (a)

Vo. Bo.
Director (a) de la escuela

_______________________________ _____________________________