



CT-913-551

Don.-2016



Centro de Investigación y de Estudios Avanzados  
del Instituto Politécnico Nacional  
Unidad Guadalajara

## **Modelado incremental de sistemas híbridos**

**CINVESTAV  
IPN  
ADQUISICION  
LIBROS**

Tesis que presenta:

**Jaime Alberto Fraustro Valdez**

para obtener el grado de:

**Maestro en Ciencias**

en la especialidad de:

**Ingeniería Eléctrica**

Directores de Tesis

**Dr. José Javier Ruíz León**

**Dr. Antonio Ramírez Treviño**

CLASIF..	CT00814
ADQUIS..	CT-913-SS1
FECHA:	22-04-2016
PROCED..	DON-2016
	§

# **Modelado incremental de sistemas híbridos**

**Tesis de Maestría en Ciencias  
Ingeniería Eléctrica**

Por:

**Jaime Alberto Fraustro Valdez**  
Ingeniero Mecatrónico

Instituto Tecnológico de la Laguna 2008-2012

Becario de Conacyt, expediente no. 300945

Directores de Tesis

**Dr. José Javier Ruíz León**

**Dr. Antonio Ramírez Treviño**

CINVESTAV del IPN Unidad Guadalajara, Agosto de 2015.

# Resumen

En este trabajo se utilizaron las Redes de Petri Continuas Temporizadas como formalismo de modelado para sistemas híbridos, específicamente el modelado del comportamiento de la temperatura y humedad relativa de un invernadero. Usando la metodología reportada en la literatura, se confirmó la simplicidad de usar un modelado incremental para sistemas positivos, puesto que al realizar la unión de módulos que representan ecuaciones básicas, se obtiene un modelo en ecuaciones diferenciales complejo, no obstante, su representación gráfica es de fácil comprensión. Asimismo, se propuso una ley de control para la temperatura del invernadero aprovechando el error de marcado y el grado de contribución de las transiciones controlables de la red, en donde se estableció una temperatura de referencia dentro del espacio de alcanzabilidad.

El trabajo se complementó al realizar un diagnosticador basado en un observador en modos deslizantes para el modelo de temperatura y humedad relativa del invernadero, dado que la detección y localización de faltas son requerimientos importantes para el rendimiento de los sistemas modernos. Adicionalmente, se estudió el problema de diagnosticabilidad de manera general para Redes de Petri, donde se obtuvieron condiciones estructurales suficientes para detectar la ocurrencia de una falta.

# Abstract

In this work the Timed Continuous Petri Nets were used as modeling formalism for hybrid systems, specifically for the greenhouse temperature and relative humidity modeling. Using the methodology reported in the literature, the simplicity of using an incremental modeling for positive systems was confirmed. To make the association of modules that represent basic equations, a model with complex differential equations is obtained, nevertheless its graphical representation is easily understood. Furthermore, a control law for the greenhouse temperature was proposed taking advantage of the marking error and the contribution degree of controllable transitions, where a reference temperature in the reachability space was set.

The work was complemented by developing a diagnoser based on a sliding mode observer for the greenhouse temperature and relative humidity model, since the detection and location of faults are important requirements for modern systems performance. Additionally, the problem of diagnosability for Petri Nets was studied, where sufficient structural conditions for detecting the occurrence of a failure were obtained.

# Agradecimientos

A mis padres Jaime y Anita, con quienes estaré toda mi vida agradecido por su inmenso cariño, comprensión y apoyo. Gracias por ser las personas que más admiro enormemente, y de quienes me he inspirado para ser una mejor persona cada día.

A mis hermanos Tony y Lupita, por los momentos divertidos y agradables que me han otorgado, por compartir conmigo las diferentes etapas de mi vida y por siempre estar ahí cuando más los he necesito.

A Marce, por darme la oportunidad de vivir muchos días felices, por todo su apoyo incondicional, sus consejos y por siempre creer en mí.

A mis amigos por el apoyo incondicional en todo momento y por nunca dejar de animarme a continuar en este camino.

A mis asesores los Dres. Antonio Ramírez Treviño y Javier Ruíz León por la orientación, paciencia y apoyo para poder llevar a cabo este trabajo.

A mis compañeros y amigos de mi generación, por la amistad que me han brindado durante este tiempo.

Finalmente, agradezco a CONACYT por el apoyo económico brindado durante el desarrollo de mi maestría.



# Índice general

<b>Glosario</b>	<b>1</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
1.1. Motivación .	6
1.2. Revisión de la Literatura de Redes de Petri	6
1.3. Revisión de Literatura de Invernaderos	8
1.4. Objetivos	9
1.5. Contribuciones	9
1.6. Organización de la Tesis	10
<b>2. Conceptos Básicos</b>	<b>11</b>
2.1. Redes de Petri	11
2.1.1. Definiciones básicas de Redes de Petri	11
2.1.2. Propiedades estructurales de Redes de Petri	17
2.2. Redes de Petri Temporizadas	21
2.3. Redes de Petri Continuas	21
2.4. Redes de Petri Continuas Temporizadas	23
2.5. Acción de Control en <i>TCPN</i>	29
2.6. Observador Lipschitz para <i>PS – TCPN</i>	29
<b>3. Modelado de un Invernadero</b>	<b>33</b>
3.1. Invernadero	33

3.2. Balance Térmico	35
3.2.1. Temperatura del invernadero .	36
3.2.2. Temperatura del suelo	39
3.2.3. Sistema de calefacción por tubería .	39
3.3. Balance de Masa	40
3.3.1. Vapor de agua	41
3.3.2. Dióxido de carbono	43
3.4. Modelo Matemático	43
3.5. Modelado en Redes de Petri Continuas Temporizadas	44
3.5.1. <i>TCPN</i> del invernadero	47
<b>4. Propuesta de Control</b>	<b>51</b>
4.1. Ley de Control	51
4.2. Control del Invernadero	54
<b>5. Detección de Faltas</b>	<b>59</b>
5.1. Introducción de Faltas al Modelo	59
5.2. Diagnóstico en <i>TCPN</i>	61
5.3. Aplicación: Invernadero	65
5.3.1. Diseño del diagnosticador	65
<b>6. Conclusiones y Trabajo Futuro</b>	<b>71</b>
6.1. Conclusiones	71
6.2. Trabajo Futuro	72
<b>Bibliografía</b>	<b>73</b>

# Índice de tablas

3.1. Asignación de los lugares de la red a variables y perturbaciones físicas.	47
3.2. Módulos creados para el modelo del invernadero.	50
4.1. Parámetros de simulación para los lugares del modelo del invernadero.	56
4.2. Parámetros de simulación de las tasas de disparo de las transiciones y condiciones iniciales para el modelo del invernadero.	57

# Índice de figuras

2.1. Red de Petri del Ejemplo 2.1.	13
2.2. Evolución del marcado de tres diferentes Redes de Petri del Ejemplo 2.2.	14
2.3. Configuraciones en una Red de Petri.	19
2.4. Red de Petri del Ejemplo 2.4, sólo $t_2$ está habilitada.	22
2.5. Red de Petri del Ejemplo 2.5.	25
2.6. Evolución del marcado de la red del Ejemplo 2.5. a) $p_1$ , b) $p_2$ y c) $p_3$ usando semántica de servidores infinitos y de producto.	25
2.7. Ejemplo de una transición fuente bien definida.	26
2.8. Red de Petri Continua Temporizada del Ejemplo 2.6.	26
3.1. Invernadero del que se obtiene el modelo.	35
3.2. Módulos elementales en <i>TCPN</i> .	45
3.3. Otros módulos elementales en <i>TCPN</i> .	46
3.4. Modelo del invernadero en <i>TCPN</i>	49
4.1. Simulación de la temperatura dentro del invernadero sin control.	55
4.2. Simulación de la temperatura interna controlada (marcado deseado $m_1 = 320K$ ).	56
4.3. Ley de control para actuadores del modelo.	57
5.1. Introducción de faltas a la <i>TCPN</i> .	60
5.2. Conjunto de caminos a) hacia $p_i$ . b) desde $p_i$ .	61
5.3. <i>TCPN</i> con trayecto de entrada y salida con una transición extra en $p_i$ .	63
5.4. <i>TCPN</i> del Ejemplo 5.1	64

5.5. Modelo del invernadero en <i>TCPN</i> con transiciones de falta $f_1$ y $f_2$ .	66
5.6. Diagnosticador usando un observador en modos deslizantes.	68
5.7. Temperatura y estimador de falta.	69
5.8. Concentración de vapor de agua y estimador de falta.	69

# Glosario

## Variables

$T_g$	Temperatura interna del invernadero
$T_s$	Temperatura del suelo
$T_{ss}$	Temperatura del subsuelo
$T_p$	Temperatura del sistema de tuberías
$T_{boiler}$	Temperatura del boiler
$T_{p,in}$	Temperatura de entrada al sistema de tuberías
$T_o$	Temperatura al exterior del invernadero
$T_r$	Temperatura de la cubierta de plástico
$T_c$	Temperatura de dosel
$I_o$	Radiación externa
$C_{H_2O}$	Concentración interna de vapor de agua
$C_{H_2O,o}$	Concentración externa de vapor de agua
$RH$	Humedad relativa dentro del invernadero
$RH_o$	Humedad relativa fuera del invernadero
$C_{CO_2}$	Concentración interna de $CO_2$
$C_{CO_2,o}$	Concentración externa de $CO_2$
$v$	Velocidad del viento.

## Funciones

$q_{o,g}^{rad}$	Radiación solar absorbida por el invernadero
$q_{g,o}^{vent}$	Transferencia de calor con el exterior por la ventilación
$q_{g,o}^{cond}$	Transferencia de calor con la conducción.
$q_{g,s}$	Transferencia de calor con el suelo
$q_{p,g}$	Suministro de calor por el sistema de tuberías
$q_{g,h}$	Calor absorbido por el humidificador
$q_{g,r}^{cons}$	Calor absorbido por la condensación de la humedad interna
$q_{g,c}^{trans}$	Calor absorbido por la evapotranspiración
$q_{s,ss}$	Transferencia de calor entre suelo y subsuelo
$q_{o,p}^{rad}$	Radiación solar absorbida por las tuberías
$q_{boil,p}$	Calor suministrado a las tuberías por el boiler
$C$	Variable binaria. 1 si el agua puede evaporarse
$E_c$	Tasa de evaporación del dosel
$\varphi_{H_2O,h,g}$	Vapor de agua incrementado por el humidificador
$\varphi_{H_2O,g,o}^{vent}$	Transferencia de vapor de agua entre el interior y exterior
$\varphi_{H_2O,g,r}^{cons}$	Condensación de agua en la cubierta
$p_{H_2O}^{sat}(T)$	Presión de saturación del vapor de agua a la temperatura $T$
$T^C$	Temperatura en grado Celsius
$k_{g,r}$	Tasa de transferencia de masa por condensación
$\eta_{CO_2/d_w}^P$	$CO_2$ perdido por la fotosíntesis del cultivo
$\eta_{CO_2/d_w}^R$	$CO_2$ ganado por la respiración del cultivo
$\varphi_{CO_2,g,o}^{vent}$	Transferencia de $CO_2$ entre el interior y exterior por ventilación
$u_v$	Flujo de aire dentro del invernadero
$u_v^{Aplsd}$	Apertura de las ventanas de barlovento
$u_v^{Aplsd}$	Apertura de las ventanas de sotavento
$u_v^{ap}$	Abertura de la ventana
$u_{hum}$	Flujo de agua proporcionado por el humidificador
$u_{vent}$	Potencia del ventilador
$u_{CO_2}$	Suministro de $CO_2$
$u_{CO_2}^{vp}$	Apertura de la válvula de suministros de $CO_2$

**Parámetros**

$K_g$	Capacidad calorífica virtual del invernadero
$K_s$	Capacidad calorífica virtual del suelo
$K_p$	Capacidad calorífica virtual de las tuberías
$\rho_a$	Densidad del aire
$c_{p,a}$	Capacidad calorífica del aire
$V_g$	Volumen del invernadero
$V_p$	Volumen del sistema de tuberías
$A_g$	Área cubierta por el invernadero (interior)
$A_{g,o}$	Área total del invernadero
$A_{g,s}$	Área efectiva de contacto con el suelo
$A_{g,p}$	Área de contacto de las tuberías
$A_r$	Total del área de la cubierta
$\eta_g$	Parámetro de contribución de la radiación solar a la temperatura del invernadero
$\eta_p$	Radiación absorbida por el sistema de tuberías
$\eta$	Relación de calor absorbido debido a la energía de radiación recibida
$\tau_r$	Factor de transferencia del techo
$U_{g,o}$	Coefficiente de transferencia de calor de la cubierta
$U_{g,s}$	Coefficiente de transferencia hacia el suelo
$U_{p,g}$	Coefficiente de transferencia de las tuberías a la temperatura del invernadero
$U_{s,ss}$	Coefficiente de transferencia entre el suelo y subsuelo
$k$	Calor de evaporación latente del agua
$\rho_{H_2O}$	Densidad del agua
$c_{H_2O}$	Capacidad calorífica del agua
$M_{H_2O}$	Masa molar del agua
$R_g$	Constante de los gas
$p_{H_2O}$	Presión del vapor de agua
$c_{si}$	Presión de saturación ( $i = 1, 2, 3$ )
$c_{mi}$	Parámetros de condensación ( $i = 1, 2, 3$ )
$F_{hum}$	Flujo máximo del humidificador
$F_p$	Máximo flujo de agua dentro de las tuberías
$p_{pi}$	Parámetros de las tuberías ( $i = 1, 2$ )
$F_{vent}$	Máximo flujo de aire
$p_{vi}$	Parámetros de ventilación ( $i = 1, \dots, 5$ )
$u_{max}$	Máximo flujo de aire con las ventanas abiertas
$\gamma_1$	Fracción del agua no evaporada
$\gamma_2$	Fracción del agua perdida en el ambiente durante la condensación
$\alpha_c$	Parámetro de evapotranspiración
$\beta_c$	Parámetro de evapotranspiración



# Capítulo 1

## Introducción

Debido al avance tecnológico, se han construido sistemas más complejos donde se ha incrementado su tamaño, su funcionalidad, así como las demandas sobre su rendimiento. Ejemplos de ellos son las redes de computadoras y de comunicaciones, sistemas de manufactura automática, sistemas de control de tráfico, entre otros. Todas las actividades en estos sistemas se deben a la ocurrencia asíncrona de eventos discretos, algunos controlados (como el pulsado de una tecla) y otros no (como la falla aleatoria de un equipo). Tales tipos de sistemas se pueden representar como Sistemas de Eventos Discretos (*DES*, por sus siglas en inglés). Existe una gran variedad de formalismos para describir el comportamiento de estos sistemas. Se pueden destacar: ecuaciones booleanas, expresiones regulares, diagramas de tiempo, tablas de estados, grafos y máquinas de estados, procesos Markovianos, Redes de Petri y álgebras de procesos.

No obstante, cuando se trata de sistemas altamente traficados, la cantidad de estados en los *DES* aumenta de tal forma que el grafo que contiene todos los estados posibles que puede alcanzar el sistema crece exponencialmente, este problema se conoce como explosión de estados. Debido a este fenómeno puede resultar computacionalmente pesado, inclusive prohibido, el análisis de las propiedades del sistema.

Con el fin de lidiar con el problema de explosión de estados, grupos de investigación han utilizado las Redes de Petri Continuas Temporizadas (*TCPN*, por sus siglas en inglés) como formalismo de modelado. Se trata de una técnica de relajación donde se convierte el sistema discreto en uno continuo con comportamiento y propiedades similares. Así, el estado en las *TCPN* se describe mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales y continuas.

Aunque las Redes de Petri fueron diseñadas para modelar sistemas creados por el hombre, donde interactúan componentes discretos, se ha evidenciado que las *TCPN* también modelan adecuadamente sistemas lineales y no lineales, como lo pueden ser: sistemas biológicos [1]; sistemas de tráfico [2]; sistemas manufactura [3]; el modelado térmico de microprocesadores [4] y el modelo de temperatura y humedad de un invernadero [5].

Por estos motivos, en este trabajo se utilizó la metodología modular incremental usando *TCPN* presentada en [5] para el modelado de la temperatura y humedad relativa de un invernadero, debido a que éstas constituyen una herramienta eficiente y formal que aportan una fácil comprensión visual del sistema modelado y un sólido soporte matemático. El invernadero separa y protege al cultivo de las condiciones ambientales. Esto permite expandir las oportunidades de cultivo que de otra manera no podrían realizarse en ciertas ubicaciones geográficas, y además, permite la manipulación de algunas variables del entorno del cultivo. En consecuencia, se tiene una mayor producción y calidad. Por lo que, se establece una ley de control que permite un mejor aprovechamiento de los recursos (como la energía utilizada por los actuadores). Dicha ley de control se basa en el grado de contribución de las transiciones controlables. Adicionalmente, se diseñó un diagnosticador para asegurar el buen desempeño del invernadero con el fin de detectar la ocurrencia de un efecto no deseado (falla) en la temperatura o humedad relativa y disminuir la invasión al cultivo por agentes externos.

## 1.1. Motivación

Uno de los mayores problemas implicados al control de variables climatológicas de un invernadero es la obtención de un modelo matemático capaz de describir el comportamiento dinámico de un sistema de este tipo. Un invernadero tiene diferente forma y dispositivos dependiendo de su ubicación geográfica y el cultivo que contiene, por lo que resulta importante encontrar una manera de modelar cualquier tipo de invernadero de manera simple y rápida. Una opción es crear módulos que representen los distintos tipos de actuadores, de manera que los elementos puedan añadirse o eliminarse según sea necesario.

Otro aspecto importante es el control de las variables aprovechando la estructura gráfica que proporcionan las Redes de Petri, por lo que se implementa una propuesta de control reportada en la literatura.

## 1.2. Revisión de la Literatura de Redes de Petri

Las Redes de Petri (*PN*, por sus siglas en inglés) [6] son un formalismo de eventos discretos en el que el estado distribuido es un vector de enteros no negativos. Esto es una ventaja con respecto a otros formalismos, como los autómatas, donde el espacio de estado es un conjunto no estructurado de estados globales. Esta propiedad ha sido explotada para desarrollar muchas técnicas de análisis que no requieren la enumeración del espacio de estados (análisis estructural) [7]. Desde la perspectiva de modelado, la principal característica es la capacidad de las *PN* de representar gráficamente y capturar primitivas como paralelismo, concurrencia, sincronización, etc.

Como en otros modelos de sistemas concurrentes, las  $PN$  discretas experimentan el problema de explosión de estados, por lo que el análisis y optimización de estos sistemas requieren grandes esfuerzos computacionales, a tal punto que puede ser analítica y computacionalmente intratable. Una manera de afrontar tal problema es la relajación del sistema, dando el sentido de *flujo* (es decir, continuo), siendo una aproximación de la dinámica de los eventos discretos [8], [9], [10]. Los modelos continuos presentan la ventaja de que la mayoría de las técnicas de análisis se basan en programación lineal y son resueltos en tiempo polinomial y no en programación entera, como es el caso de los sistemas de eventos discretos. Esta tesis se centra en el uso de las Redes de Petri Continuas Temporizadas ( $TCPN$ , por sus siglas en inglés) como formalismo de modelado.

El control en  $TCPN$  ha sido ampliamente abordado en la literatura. El trabajo propuesto por Guia et al en [11] resuelve el problema para alcanzar un estado estacionario por medio de un control predictivo de modelo explícito ( $MPC$ , por sus siglas en inglés), el cual minimiza el tiempo de convergencia. Sin embargo, el tiempo computacional que requiere este control se vuelve prohibitivo para redes grandes. En el trabajo realizado por Kara et al en [12], se propone un control proporcional para alcanzar un estado estacionario mediante un conjunto de leyes de control afines, las cuales se resuelven por medio de desigualdades lineales matriciales ( $LMI$ , por sus siglas en inglés). Sin embargo, el número de  $LMIs$  aumenta exponencialmente cuando la  $TCPN$  incluye un alto número de sincronizaciones. En Xu et al [13] se aborda el mismo problema, donde una trayectoria del marcado es representada por una trayectoria de referencia directa por partes que llevan al sistema al estado requerido. Para solucionar este problema de alcanzabilidad, utilizan un programa de programación lineal ( $LPP$ , por sus siglas en inglés). Pero el número de restricciones del  $LPP$  se incrementa exponencialmente cuando la  $TCPN$  tiene muchas sincronizaciones. El trabajo hecho por Wang et al en [14] resuelven el problema de alcanzabilidad usando un control encendido/apagado (*on/off*) para redes persistentes. Se trata de un control en tiempo mínimo solamente aplicable a una clase particular de redes. Este control fue extendido por los mismos autores para abarcar más clases de redes en [15], donde se proponen tres enfoques de control. Por otra parte, para algunas clases particulares requiere de considerable tiempo computacional. Otro trabajo importante es propuesto por Ross-León et al en [16], donde el problema de alcanzabilidad de estados estacionarios es resuelto utilizando el error de marcado, es decir, la diferencia entre el marcado actual y el requerido, para definir el *grado de contribución de la transición*, el cual es el producto punto entre el error y las columnas de la matriz de incidencia. Así, el valor resultante es un escalar que de ser positivo significa que el disparo de la transición en cuestión contribuye a reducir el error. En base a esto se propone una ley de control local de encendido/apagado (*on/off*) adecuada para sistemas muy grandes con alto marcado para redes vivas y acotadas, con la desventaja de que se consideran todas las transiciones controlables. En el presente trabajo se retoma la estrategia de control propuesta en [16] y se emplea para  $TCPN$  con semántica de producto y transiciones controlables y no controlables.

Además de control de sistemas, las *PN* han sido ampliamente usadas para el diagnóstico de faltas. Debido a los requerimientos modernos, se han construido sistemas complejos con grandes demandas sobre su rendimiento. En términos generales, diagnosticabilidad es la propiedad de determinar si utilizando el modelo del sistema es posible detectar y localizar los estados de falta después de la ocurrencia de una falla. En Santoyo-Sanchez et al [17] y Ramírez-Teviño [18] la existencia de palabras completas o propiedades estructurales, tales como evento detectable, garantiza que la falta pueda detectarse y localizarse. Su aplicación se limita a pequeños sistemas, debido a que los modelos toman en cuenta todos los estados posibles del sistema. Debido a esto, en sistemas de gran tamaño o alto marcado se presenta el problema de explosión de estados.

El diagnóstico de faltas en Redes de Petri no temporizadas se trató en Mahulea et al [3]. Dicho trabajo divide el conjunto de transiciones en normales y de falta. La ocurrencia de dichas transiciones de falta es detectada y localizada a través del cálculo de la secuencia del marcado alcanzado. Si tal secuencia contiene transiciones de falta, entonces la falta es detectada y localizada.

En trabajos recientes el problema es atacado usando *TCPN* y observadores en modos deslizantes. El trabajo echo por Lefebvre y Aguayo-Lara en [19] considera las fallas bruscas como variaciones en los parámetros de las tasas de disparo de las transiciones, y se diseña un observador a fin de generar residuos útiles para el diagnóstico de faltas. En Fraustro-Valdez et al [20] se utiliza de igual manera un banco de observadores con el algoritmo de Super-Twisting para redes observables, utilizando el concepto de distinguibilidad entre sistemas lineales conmutados. En este trabajo se añade un diagnosticador basado en un observador en modos deslizantes al invernadero para evitar efectos no deseados de las fallas y contribuir a mantener los índices de desempeño del cultivo, reduciendo costos de mantenimiento y riesgos para el personal de operación. Adicionalmente, se presenta una caracterización de la diagnosticabilidad en *TCPN* donde se establecen condiciones estructurales suficientes.

### 1.3. Revisión de Literatura de Invernaderos

Muchos modelos del comportamiento del invernadero han sido propuestos en la literatura, la mayoría se basan en balances de masa y energía. En Boulard et al [21] se desarrolló un modelo del invernadero con ventilación natural y sistema de enfriamiento por evaporación, usando ecuaciones de balance. Como el enfoque incluye una etapa de linealización del sistema, su validez se restringe a una región de operación. En Boaventura et al [22] se presenta una identificación por medio de redes neuronales, sin embargo, el algoritmo utilizado requiere una gran capacidad de computo. Otro enfoque propone un modelo difuso para un invernadero, tomando mediciones de calor y agua, sin embargo, el número de reglas difusas necesarias para el computo del modelo es grande. En este trabajo se utilizó la metodología

propuesta por Tovany et al en [5], donde *TCPN* son usadas para capturar la dinámica del invernadero. El modelo incluye condiciones externas (radiación solar, temperatura exterior) como perturbaciones. La metodología de modelado inicia por la representación de cada variable en un lugar de la red, para después crear los módulos básicos que representen los intercambios de flujo entre variables. Finalmente se realizó la unión de dichos módulos para obtener el modelo completo. Por añadidura, se diseñó un diagnosticador sobre el modelo con el fin de detectar la ocurrencia de un efecto no deseado (falla) en la temperatura o humedad relativa.

## 1.4. Objetivos

Los objetivos planteados en este trabajo son los siguientes:

- Añadir un actuador generador de calor al modelo presentado en [5] usando la metodología modular y obtener una representación gráfica que permita una interpretación simple de la dinámica del sistema.
- Aplicar una estrategia de control discreta reportada en [16] al modelo de temperatura del invernadero para alcanzar una temperatura de referencia usando el grado de contribución de las transiciones controlables.
- Explorar la propiedad de diagnóstico en *TCPN* y diseñar un diagnosticador para asegurar un buen rendimiento del invernadero ante efectos no deseados en la temperatura.

## 1.5. Contribuciones

- Se complementó el modelo de temperatura y humedad relativa de un invernadero presentado en [5], adicionando un sistema de calefacción.
- Se aplicó una ley de control para *TCPN* [16] usando solamente una parte de las transiciones controlables, con su aplicación al modelo de temperatura del invernadero, donde se alcanza una temperatura de referencia.
- Se implementó la metodología de modelado y diagnóstico en una Interfaz Gráfica *GUI* en <sup>1</sup> MATLAB®/Simulink® software.
- Se presentan condiciones estructurales para diagnóstico en *TCPN* y el diseño de un diagnosticador basado en un observador en modos deslizantes que permite detectar fallas con efectos no deseados en la temperatura y humedad relativa.

---

<sup>1</sup> MATLAB®/Simulink® son marca registrada de MathWorks, Inc.

## 1.6. Organización de la Tesis

El presente documento está organizado como sigue:

En el Capítulo 2 se introducen los preliminares básicos de las redes de Petri como una herramienta eficiente para el modelado y control y se presenta una breve descripción del diseño de un observador Lipschitz.

El Capítulo 3 se reporta la metodología de modelado utilizada para obtener el modelo de temperatura y humedad relativa del invernadero usando *TCPN*.

En el Capítulo 4 se reporta la estrategia de control discreta. Utilizando el grado de contribución de las transiciones controlables se busca alcanzar un estado requerido. Se presenta el control de temperatura para el modelo de invernadero visto en el Capítulo anterior.

En el Capítulo 5 se proponen condiciones estructurales para diagnóstico en *TCPN* en su caso general. Adicionalmente, se muestra el diseño de un diagnosticador con su aplicación al modelo de invernadero.

Finalmente, se establecerán algunas conclusiones y se enunciarán algunos aspectos del trabajo que ameritan un futuro estudio.

## Capítulo 2

# Conceptos Básicos

*En las primeras secciones de este capítulo se presentan los conceptos relacionados con las Redes de Petri, incluyendo algunas de sus propiedades. También se presentan los conceptos básicos para de las Redes de Petri Continuas Temporizadas y por último, se aborda el diseño de un observador en modos deslizantes. Para una revisión más minuciosa de estos conceptos, el lector interesado puede remitirse a [23], [24], [25] y [8].*

### 2.1. Redes de Petri

Las redes de Petri ( $PN$ , por sus siglas en inglés) [6] son consideradas como una herramienta muy efectiva para el estudio de sistemas con características como concurrencia, distribución y paralelismo de eventos. Las  $PN$  fueron diseñadas principalmente para modelar procesos de manufactura; sistemas de tráfico, logística, etc.; debido a la capacidad que tienen de representar el fenómeno de concurrencia y sincronización en estos sistemas.

Una red de Petri se representa gráficamente con un grafo bipartito orientado, formado por lugares, transiciones y arcos. Los lugares y transiciones están representados como circunferencias y por segmentos rectilíneos respectivamente. Los arcos (representados por flechas) conectan los lugares y las transiciones. A continuación se presentan las definiciones básicas para redes de Petri.

#### 2.1.1. Definiciones básicas de Redes de Petri

##### Definición 2.1. Redes, Conjuntos $\bullet x$ y $x\bullet$ y Sub-redes

Una Red de Petri  $N$  es una 3-tupla  $(P, T, F)$  donde  $P$  y  $T$  son conjuntos finitos y disjuntos y  $F$  es una función definida en  $P \cup T$ ,  $F \subseteq P \times T \cup T \times P$ , tal que  $F \cap (P \times P) = F \cap (T \times T) = \emptyset$ .

Los elementos en  $P$  son llamados **lugares** y gráficamente se representan por circunferencias. Los elementos  $T$  son llamados **transiciones**, representados por segmentos rectilíneos. El conjunto  $F$  es la **relación de flujo** de la red, representado por arcos (flechas) que van de los lugares a las transiciones o de las transiciones a los lugares. De manera general se suele llamar a los elementos en  $P \cup T$  **nodos** de  $N$  o **elementos** de  $N$ .

Dado un nodo de la red  $N$ , el conjunto  $\bullet x = \{y | (y, x) \in F\}$  es el pre-conjunto de  $x$  y el conjunto  $x\bullet = \{y | (x, y) \in F\}$  es el post-conjunto de  $x$ . Los elementos en el conjunto  $\bullet x(x\bullet)$  de un lugar  $x$  son las transiciones de entrada (salida). De manera similar, los elementos en  $\bullet x(x\bullet)$  son los lugares de entrada (salida) de la transición  $x$ . Dado un conjunto  $X$  de nodos se define  $\bullet X = \{\cup_{x \in X} (\bullet x)\}$  y  $X\bullet = \{\cup_{x \in X} (x\bullet)\}$ .

Una tripleta  $(P', T', F')$  es llamada sub-red de  $N$  si  $P' \subseteq P$ ,  $T' \subseteq T$  y  $F' = F \cap ((P' \times T') \cup (T' \times P'))$ . Si  $X$  es un conjunto de elementos de  $N$ , entonces la tripleta  $(P \cap X, T \cap X, F \cap (X \times X))$  es una sub-red generada por  $X$ .

### Definición 2.2. Caminos, Circuitos

Un **camino** en una red  $(P, T, F)$  es una secuencia no vacía  $x_1, x_2, \dots, x_k$  de nodos que satisfacen  $(x_1, x_2), \dots, (x_{k-1}, x_k) \in F$ . Un camino  $x_1, x_2, \dots, x_k$  se dice que va de  $x_1$  a  $x_k$ .

Un camino que va de un nodo  $x$  a un nodo  $y$  es un **circuito** si ninguno de sus elementos se repite y además  $(y, x) \in F$ . Note que una secuencia conteniendo sólo un elemento es un camino, pero no un circuito, porque para cada nodo  $x$ ,  $(x, x) \notin F$ .

Una red  $(P, T, F)$  es llamada **conexa** si para cualesquiera dos nodos  $x, y$  satisfacen  $(x, y) \in (F \cup F^{-1})^*$ , donde  $F^{-1}$  es la inversa de  $F$  y  $(F \cup F^{-1})^*$  es la cerradura simétrica, reflexiva y transitiva de  $F$  tal que es la relación equivalente más pequeña que contiene a  $F$ .

Una red  $(P, T, F)$  es **fuertemente conexa** si  $\forall x, y \in P \cup T$ ,  $(x, y) \in F^*$  ( $F^*$  es la cerradura transitiva y reflexiva de  $F$ ), es decir, para cualesquiera dos nodos existe un camino que lleva de  $x$  a  $y$ .

**Ejemplo 2.1.** Sea  $N$  la red de Petri representada gráficamente por la Fig. 2.1, donde los conjuntos de lugares y transiciones son:

$$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}, \quad (2.1)$$

$$T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}. \quad (2.2)$$

La relación de flujo para esta red es:

$$F = \left\{ \begin{array}{l} (p_1, t_1), (p_3, t_2), (p_2, t_3), (p_4, t_5), (p_5, t_5), (p_5, t_4), \\ (t_1, p_3), (t_1, p_2), (t_2, p_4), (t_3, p_5), (t_5, p_1), (t_4, p_2) \end{array} \right\} \quad (2.3)$$



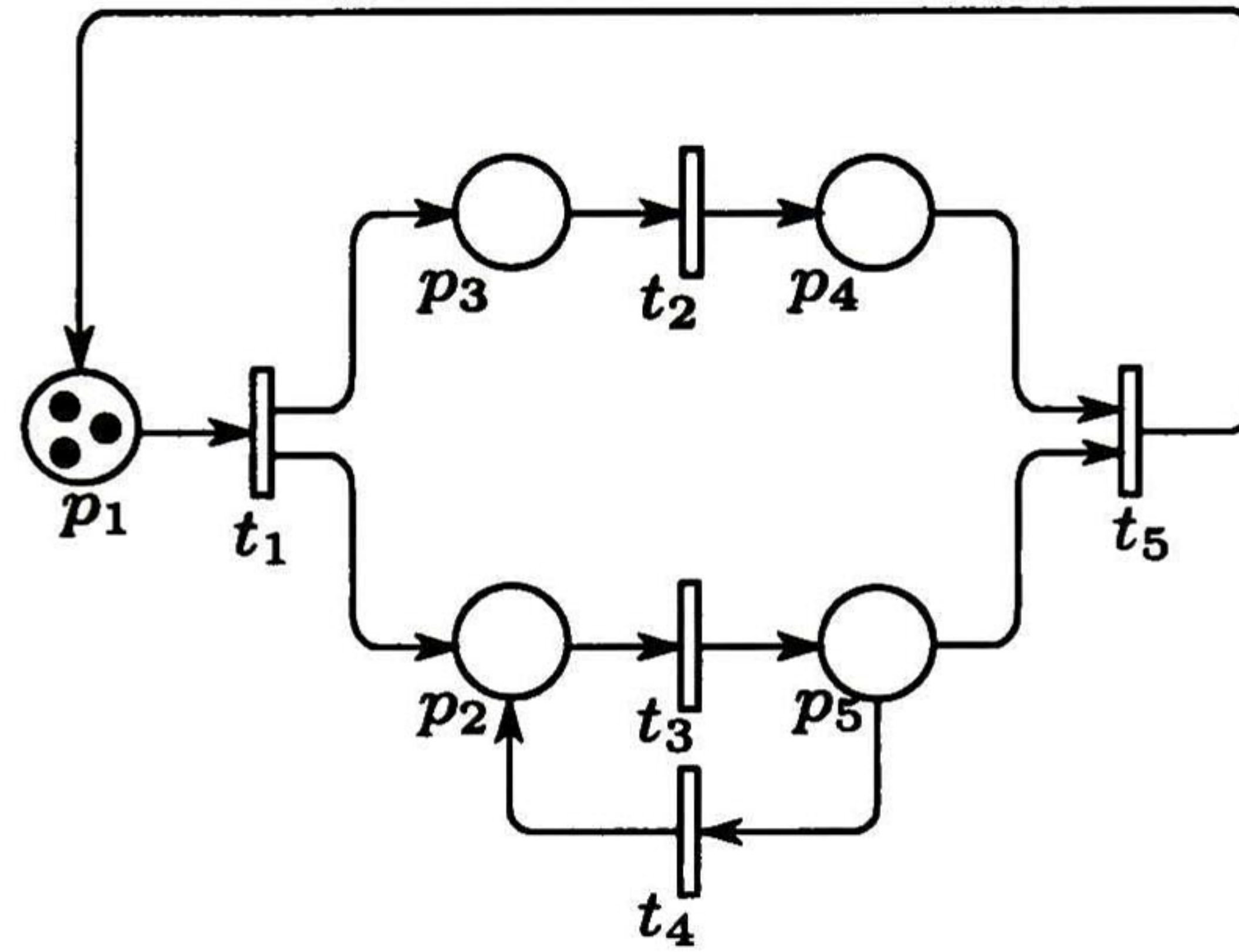


Figura 2.1: Red de Petri del Ejemplo 2.1.

Algunos conjuntos  $Pre$  y  $Post$  son:

$$\begin{aligned} \bullet t_5 &= \{p_4, p_5\} & t_5 \bullet &= \{p_1\} \\ \bullet p_2 &= \{t_1, t_4\} & p_2 \bullet &= \{t_3\}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Para esta red, se observa que  $p_1 t_1 p_2 t_3 p_5$  es un camino y  $p_1 t_1 p_3 t_2 p_4 t_5$  es un circuito.

**Definición 2.3. Marcados**

El **marcado** de una red  $(P, T, F)$  es un mapeo  $m : P \rightarrow \{\mathbb{N} \cup 0\}$ . El marcado está representado por un vector  $[m(p_1), m(p_2), \dots, m(p_n)]^T$ , donde  $p_1, p_2, \dots, p_n$  es una numeración fija y arbitraria de  $P$ . El marcado de una red de Petri está representado por  $m(p)$  marcas o el número  $m(p)$  en el lugar  $p$ . Un lugar  $p$  está marcado con  $m$  marcas si  $m(p) > 0$ . Un conjunto de lugares  $P_R$  se dice que está marcado si alguno de los lugares de  $P_R$  está marcado.

Gráficamente, las marcas se representan por puntos negros. De la Fig. 2.1 el marcado se puede representar como un vector  $m_0 = [3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ , el cual indica el número de marcas en cada lugar.

**Definición 2.4. Peso de los arcos**

El **peso de los arcos** es una función  $w : F \rightarrow \mathbb{N}$ , el cual asocia un número natural a cada arco.

El peso del arco equivale a la cantidad de arcos que existe entre un nodo a otro. Gráficamente, los pesos se escriben cerca de los arcos. Cuando todos los arcos tienen peso igual a 1, la red se dice que es ordinaria y el peso no se escribe.

**Definición 2.5. Regla de disparo**

Un marcado  $m$  **habilita** una transición  $t$  si cada lugar  $p \in \bullet t$  está marcado. Si  $t$  está habilitada, puede dispararse, y su disparo lleva al siguiente marcado  $m'$  (escrito como  $m \xrightarrow{t} m'$ ) que está definido para cada lugar  $p$  por:

$$m'(p) = \begin{cases} m(p) & \text{si } p \notin \bullet t \text{ y } p \notin t \bullet, \text{ ó } p \in \bullet t \text{ y } p \in t \bullet \\ m(p) - 1 & \text{si } p \in \bullet t \text{ y } p \notin t \bullet \\ m(p) + 1 & \text{si } p \notin \bullet t \text{ y } p \in t \bullet \end{cases} \quad (2.5)$$

(una marca se remueve de cada lugar en el pre-conjunto de  $t$  y una marca se añade a cada lugar en el post-conjunto de  $t$ ).

Un marcado se dice **muerto** si no habilita alguna transición.

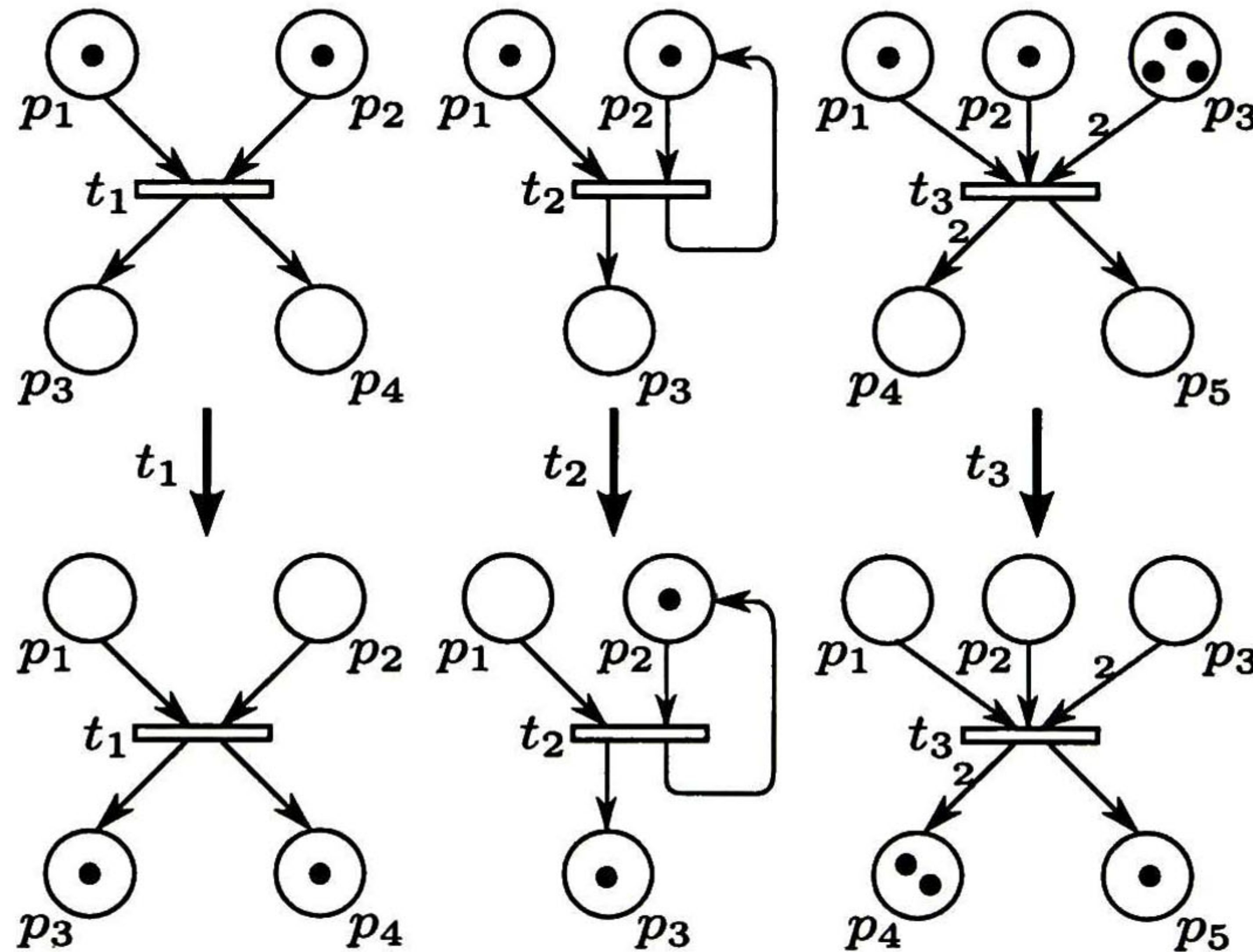


Figura 2.2: Evolución del marcado de tres diferentes Redes de Petri del Ejemplo 2.2.

**Ejemplo 2.2.** En la Fig. 2.2 se muestra gráficamente la evolución del marcado de tres diferentes Redes de Petri. El marcado que existe en las tres redes de Petri habilita las transiciones  $t_1$ ,  $t_2$  y  $t_3$  para su disparo.

**Definición 2.6. Secuencias de disparo, marcados alcanzables**

Sea  $m$  un marcado de la red  $N$ . Si  $m \xrightarrow{t_1} m_1 \xrightarrow{t_2} \dots \xrightarrow{t_n} m_n$  son disparos de las transiciones habilitadas, entonces  $\sigma = t_1 t_2 \dots t_n$  es una **secuencia de disparos** que va de  $m$  a  $m_n$  y

se escribe  $m \xrightarrow{\sigma} m_n$ . En la misma forma se puede representar la secuencia vacía  $\epsilon$ , es decir,  $m \xrightarrow{\epsilon} m$  para cualquier marcado  $m$ .

Se escribe  $m \xrightarrow{*} m'$ , cuando  $m'$  es **alcanzable** desde  $m$ , es decir, que existe una secuencia de disparos  $\sigma$  tal que  $m \xrightarrow{\sigma} m'$ . El conjunto de todos los marcados alcanzables desde  $m$  está denotado por  $RS(m)$ .

Si  $m \xrightarrow{t_1} m_1 \xrightarrow{t_2} m_2 \xrightarrow{t_3} \dots$  para una secuencia infinita de transiciones  $\sigma = t_1 t_2 t_3 \dots$  entonces  $\sigma$  es una secuencia infinita de disparos y se escribe como  $m \xrightarrow{\sigma}$ .

### Definición 2.7. Matrices Pre, Post y de Incidencia

Sea  $N$  la red  $(P, T, F)$ . La matriz *Post*, denotada por  $C^+$  de orden  $|P| \times |T|$  está definida por:

$$Post(p, t) = C^+ \begin{cases} 0 & \text{si } (p, t) \notin F \\ w(p, t) & \text{si } (p, t) \in F. \end{cases} \quad (2.6)$$

La matriz *Pre*, denotada por  $C^-$ , de orden  $|P| \times |T|$  está definida por:

$$Pre(p, t) = C^- \begin{cases} 0 & \text{si } (t, p) \notin F \\ w(p, t) & \text{si } (t, p) \in F. \end{cases} \quad (2.7)$$

La **matriz de incidencia** que se denota por  $C$  está definida como la diferencia entre las matrices *Pre* y *Post*, como sigue:

$$C = Pre - Post = C^- - C^+ \quad (2.8)$$

De manera similar a representaciones vectoriales de cualquier mapeo, la representación matricial de la matriz de incidencia depende de la enumeración de lugares y transiciones.

**Definición 2.8.** El vector columna de la matriz de incidencia  $C$  asociado a la transición  $t$  se denota como  $\mathbf{t}$ . De la misma manera, el vector fila de la matriz de incidencia  $C$  asociado al lugar  $p$  se denota por  $\mathbf{p}$ .

La entrada  $C(p, t)$  en la matriz de incidencia representa el cambio de marcado del lugar  $p$  ocasionado por el disparo de la transición  $t$ . Entonces, si la transición  $t$  está habilitada en el marcado  $m$  y  $m \xrightarrow{t} m'$  entonces  $m' = m + \mathbf{t}$ . Para una generalización de esta ecuación a secuencias de transiciones, se necesita la siguiente definición.

**Definición 2.9. Vectores de Parikh de secuencias de transiciones.**

Sea  $(P, T, F)$  una red y sea  $\sigma$  una secuencia finita de transiciones. El vector de Parikh  $\vec{\sigma} : T \rightarrow \{\mathbb{N} \cup 0\}$  de  $\sigma$  mapea cada transición  $t \in T$  al número de ocurrencias de  $t$  en  $\sigma$ . Si  $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ , el vector de Parikh de una secuencia  $\sigma_1 = t_1 t_3 t_1 t_1 t_2$  es

$$\vec{\sigma}_1 = [3 \ 1 \ 1 \ 0]^T \quad (2.9)$$

y el de  $\sigma_2 = t_4$  es

$$\vec{\sigma}_2 = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T \quad (2.10)$$

Para cualquier transición  $t$ , se tiene  $t = C \vec{t}$ . Así ocurre que si  $m \xrightarrow{t} m'$ , entonces  $m' = m + C \vec{t} = m + t$  (donde  $m$  y  $m'$  son vectores columna). Para una secuencia de disparos finita cualquiera  $\sigma$  tal que  $m \xrightarrow{\sigma} m'$  se puede encontrar el marcado  $m'$  mediante una ecuación de marcados descrita en el siguiente lema.

**Lema 2.1. Lema de ecuación de marcado**

Para cualquier secuencia finita de disparos  $m \xrightarrow{\sigma} m'$  de una red  $N$ , la siguiente ecuación de marcado se cumple:

$$m' = m + C \vec{\sigma} \quad (2.11)$$

*Demostración.* Por inducción sobre la longitud de  $\sigma$ .

Sea  $\sigma = \epsilon$ . Por lo tanto  $\vec{\sigma} = \vec{0}$  y se cumple que  $m = m'$ .

Ahora, supongamos que  $\sigma$  es una secuencia no vacía. Entonces  $\sigma = \alpha t$  para una secuencia  $\alpha$  y una transición  $t$ .

Sea  $m \xrightarrow{\alpha} m_\alpha \xrightarrow{t} m'$ . Se tiene que

$$\begin{aligned} m' &= m_\alpha + C \vec{t} \\ &= m + C \cdot \vec{\alpha} + C \cdot \vec{t} \\ &= m + C \cdot \vec{\alpha t} \\ &= m + C \cdot \vec{\sigma} \end{aligned} \quad (2.12)$$

■

### 2.1.2. Propiedades estructurales de Redes de Petri

#### Definición 2.10. Sistemas de Red. Marcado inicial y marcados alcanzables

Un sistema de red (o sólo un sistema) es un par  $(N, m_0)$  donde  $N$  es una red conexa que tiene al menos un lugar y una transición y  $m_0$  es un marcado de  $N$ , llamado **marcado inicial**. Un marcado  $m'$  se dice **alcanzable** en un sistema con  $m_0$  si existe una secuencia de transiciones  $\sigma$  tal que  $m \xrightarrow{\sigma} m'$ .

**Ejemplo 2.3.** De la Fig. 2.1, las matrices que representan al sistema son:

$$\begin{aligned}
 Post = C^+ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} & Pre = C^- &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 C &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Observe que la única transición habilitada es  $t_1$ , por lo que sólo esta transición se puede disparar. Para determinar el marcado después del disparo de la transición  $t_1$  se utiliza el Lema 2.1 donde  $\vec{\sigma} = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  representa la transición  $t_1$  y  $m_0 = [3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  es el marcado inicial

$$\begin{aligned}
 m' &= m_0 + C\vec{\sigma} \\
 m' &= \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

#### Definición 2.11. Vivacidad y propiedades relacionadas

Un sistema es **vivo** si para cada marcado alcanzable y cada transición  $t \in T$ , existe un marcado  $m' \in RS(N, m)$  que habilita la transición  $t$ . Si  $(N, m_0)$  es un sistema vivo, entonces se dice que  $m_0$  es un marcado vivo de  $N$ .

Un sistema es vivo en lugares si para cada marcado alcanzable  $m$  y cada lugar  $p$  existe un marcado  $m' \in RS(N, m)$  que marca al lugar  $p$ .

Un sistema es **libre de bloqueo** si cada marcado alcanzable habilita al menos una transición, es decir, si no se puede alcanzar ningún marcado muerto (que no habilita transiciones) desde el marcado inicial.

Hablando en términos generales, un sistema es vivo si toda transición siempre puede volver a ocurrir en algún momento.

En la literatura técnica de las  $PN$  se encuentra con frecuencia cierto vocabulario relacionado a las estructuras elementales de las  $PN$ , los cuales se introducen en la siguiente definición [26].

### Definición 2.12. Configuraciones en una $PN$

Un lugar que tiene varios arcos de entrada y/o salida se denomina **nudo O**. Dos casos particulares de nudos O son:

- **selección**, cuando tiene un arco de entrada y varios de salida,
- **atribución**, cuando tiene varios arcos de entrada y uno de salida.

Una transición que tiene varios arcos de entrada y/o salida se denomina **nudo Y**. son los que permiten la creación y extinción de las evoluciones simultáneas. Dos casos particulares de nudos Y son:

- **distribución**, cuando tiene un arco de entrada y varios de salida,
- **conjunción** o **sincronización**, cuando tiene varios arcos de entrada y uno de salida.

En la Fig. 2.1.2 se ilustran las diferentes configuraciones de una  $PN$ .

### Definición 2.13. Sistemas acotados. Cotas de un lugar

Un sistema está acotado si para cualquier lugar  $p$  existe un número natural  $b$  tal que  $m(p) \leq b$  para cualquier marcado alcanzable. Si  $(N, m_0)$  es un sistema acotado, entonces se dice que  $m_0$  es un marcado acotado para  $N$ .

La cota de un lugar  $p$  en un sistema acotado  $(N, m_0)$  se define como:

$$\max\{m(p) | m \in RS(N, m_0)\}. \quad (2.13)$$

Un sistema es llamado  $b$  – *Acotado* si ningún lugar tiene una cota que sea mayor a  $b$ .

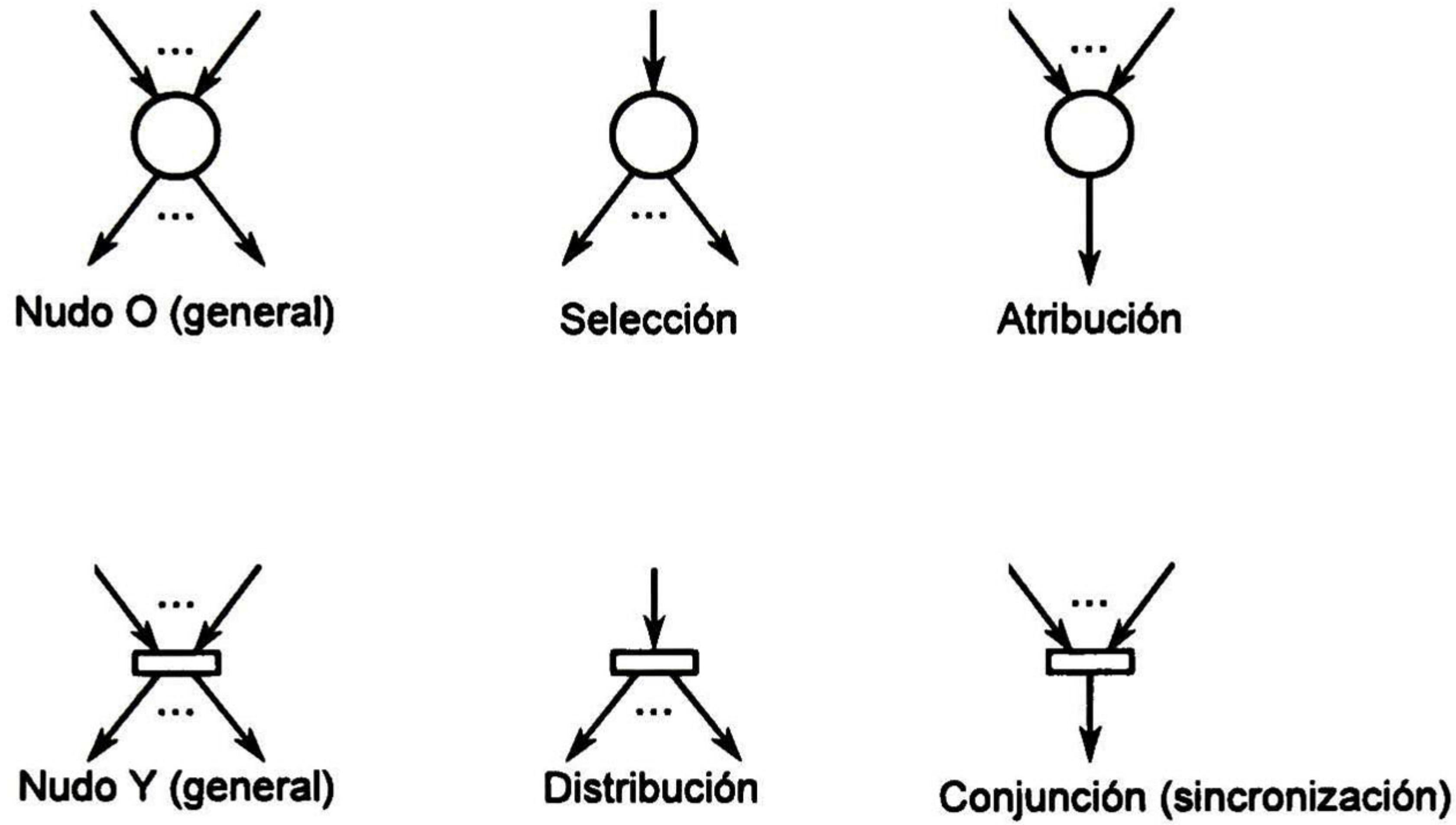


Figura 2.3: Configuraciones en una Red de Petri.

**Definición 2.14. P-invariantes (P-Semiflujos)**

Un **P-invariante** de una red  $N$  es una solución racional de la ecuación:

$$Y^T \cdot C = 0. \quad (2.14)$$

**Proposición 2.1. Propiedad fundamental de los P-invariantes**

Sea  $(N, m_0)$  un sistema y sea  $I$  un P-invariante de  $N$ . Si  $m_0 \xrightarrow{*} m$ , entonces

$$I^T \cdot m = I^T \cdot m_0. \quad (2.15)$$

La demostración se encuentra en [24].

Esta propiedad fundamental denota que existen conjuntos de lugares en una red de Petri en donde la suma de sus marcas permanece constante ante el disparo de transiciones.

**Definición 2.15. T-invariantes (T-Semiflujos)**

Un **T-Semiflujo** de una red  $N$  es una solución racional de la ecuación:

$$C \cdot X = 0. \quad (2.16)$$

**Proposición 2.2. Propiedad fundamental de los T-invariantes**

Sea  $\sigma$  una secuencia finita de transiciones de una red  $N$  que está habilitada en el marcado  $m$ . Entonces el vector de parikh  $\vec{\sigma}$  es un **T-invariante** si y sólo si  $m \xrightarrow{\sigma} m$  (es decir, si sólo la ocurrencia de  $\sigma$  reproduce el marcado  $m$ ).

La demostración se encuentra en [24].

Los P-sistemas (Máquinas de Estados) son aquellos en los que todas sus transiciones tienen exactamente un lugar de entrada y un lugar de salida.

**Definición 2.16. P-sistemas (Máquinas de estados), P-Redes**

Una red es *P-red* si  $|\bullet t| = 1 = |t \bullet| \forall t \in T$ . Un sistema  $(N, m_0)$  es un P-sistema si  $N$  es una P-red.

La propiedad fundamental de las Máquinas de Estado es que todos los marcados alcanzables contienen exactamente el mismo número de marcas. Dicho de otra forma, el número de marcas del sistema permanece invariante ante el disparo de transiciones. Lo anterior, significa que todos los lugares de una máquina de estados forman un P-semiflujo. Los grafos Marcados o T-sistemas son aquellos en los que todos los lugares tienen exactamente una transición de entrada y una salida.

**Definición 2.17. T-Sistemas (Grafos Marcados), T-redes**

Una red es *T-red* si  $|\bullet p| = 1 = |p \bullet| \forall p \in P$ . Un sistema  $(N, m_0)$  es un *T-Sistema* si  $N$  es una *T-Red*.

La propiedad fundamental de los grafos marcados es que la cantidad de marcas de los circuitos permanece invariante ante el disparo de transiciones.

Otro tipo de redes muy estudiado son las de Libre Elección (Free-Choice)

**Definición 2.18. Redes de Libre Elección (Free-Choice)**

Una red  $(P, T, F)$  es de Libre Elección si  $(p, t) \in F$  implica que el producto cartesiano  $\bullet t \times p \bullet \subseteq F$  para cada lugar  $p$  y cada transición  $t$ .

Un sistema  $(N, m_0)$  es de libre elección si  $N$  es de libre elección.

La propiedad fundamental de las redes de libre elección es que si un marcado habilita alguna transición de  $p \bullet$ , donde  $p$  es un lugar de la red, entonces habilita a todas las transiciones en  $p \bullet$ .

**Definición 2.19. Sifones**

Un conjunto  $R$  de lugares de una red son un **sifón** si las transiciones de entrada de los lugares  $R$  son también transiciones de salida de esos lugares:  $\bullet R \subseteq R \bullet$ .

Dos importantes hechos de los sifones son que: Sifones que no tienen marcas permanecen sin marcas y que los sistemas vivos no tienen sifones sin marcas.

**Definición 2.20. Trampas**

Un conjunto  $R$  de lugares de una red son una **trampa** si las transiciones de salida de los lugares  $R$  son también transiciones de entrada de esos lugares:  $R \bullet \subseteq \bullet R$ .



## 2.2. Redes de Petri Temporizadas

Las Redes de Petri Temporizadas (*TPN*, por sus siglas en inglés) evolucionan de forma similar a las Redes de Petri, pero asignan una temporización y política de resolución de conflictos particular. Existen dos modelos importantes, uno de ellos temporizado en lugares [24], pero se prefiere el modelo temporizado en transiciones, puesto que la representación de actividades de un sistema es a través de las transiciones [27]. A continuación se presenta una breve descripción de estas.

### Definición 2.21. Redes de Petri Temporizadas en Transiciones [28]

Una Red de Petri Temporizada en transiciones se define como un par  $(N, D)$  donde:

$N$  es una Red de Petri. Sea  $D : T \rightarrow (R^+ \cup 0)^{|T|}$  una función de retardos que asigna el tiempo que una transición  $t_i$  toma para realizar su disparo.

En una Red de Petri Temporizada en Transiciones, las marcas pueden tener cualesquiera de los dos atributos: **disponible** y **no disponible**. En el marcado inicial, todas las marcas se encuentran disponibles y pueden cambiar su estado cuando una transición  $t_i$  está habilitada.

Una transición  $t_j$  se encuentra habilitada cuando  $m_{disp}(p_i) \geq Pre(p_i, t_j) \forall p_i \in \bullet t_j$  y  $m_{disp}(p_i)$  son las marcas disponibles en el lugar  $p_i$ .

Cuando una transición  $t_j$  es disparada,  $Pre(p_i, t_j)$  marcas cambian su atributo a **no disponibles**, de modo que no son removidas del lugar  $p_i$  (pero permanecen congeladas y no pueden habilitar a ninguna otra transición) hasta  $d_j \in D$  unidades de tiempo después, cuando se colocan  $Post(p_k, t_j)$  marcas etiquetadas como **disponibles** en los lugares  $p_k \in t_j \bullet$ .

De hecho, la evolución de marcado de las *TPN* también cumple con la ecuación (2.1), este tipo de redes son ampliamente utilizadas para la calendarización de tareas (en inglés *scheduling*), puesto que se puede minimizar el tiempo para llegar de un marcado  $m$  a otro  $m'$  cuando existen caminos paralelos [28].

## 2.3. Redes de Petri Continuas

Las Redes de Petri Continuas (*CPN*, por sus siglas en inglés) [8] surgen a partir de un proceso de fluidificación, en el que cada una de las marcas es dividida en  $k$  partes y en el proceso al límite, cuando  $k \rightarrow \infty$  se pueden hacer disparos de partes reales de marcas.

Las *CPN* surgen como una opción para disminuir en lo posible uno de los principales problemas de los sistemas de eventos discretos (*SED*): la explosión de estados [29].

Una Red de Petri está limitada a disparos de marcas completas, es decir, la cantidad de

disparos está limitada a números naturales, mientras que en el caso de las *CPN*, se puede disparar cualquier cantidad real de marcas.

Existen trabajos de aplicación de las *CPN*, como el que se muestra en [30] y otros referentes a propiedades de éstas, como se presentan en [31], [32], [33].

**Definición 2.22.** Una **Red de Petri Continua** es el par  $\langle N, m_0 \rangle$  donde  $N = \langle P, T, \text{Pre}, \text{Post} \rangle$  es una Red de Petri y  $m : P \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}^{|P|}$  asigna un número real de marcas a cada lugar. El marcado inicial es  $m_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{|P|}$ .

A diferencia del caso discreto, en una *CPN* una transición  $t_i$  se encuentra habilitada en un marcado  $m$  si y sólo si  $\forall p \in \bullet t_i, m(p) > 0$ .

**Definición 2.23.** **Grado de habilitación de una transición**

El **grado de habilitación** de una transición  $t$  se define como:

$$\text{enab}(t, m) = \min_{p \in \bullet t} \left\{ \frac{m(p)}{\text{Pre}[p, t]} \right\}. \quad (2.17)$$

La transición  $t$  puede dispararse cualquier cantidad  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $0 < \alpha < \text{enab}(t, m)$ , llevando el sistema a un nuevo marcado  $m' = m + \alpha C(P, t)$ , donde  $C$  es la matriz de incidencia previamente mencionada.

Si un marcado  $m'$  puede ser alcanzado desde  $m_0$  con una secuencia de disparos  $\sigma$ , la ecuación fundamental de marcado puede ser reescrita como:

$$m = m_0 + C\sigma, \quad (2.18)$$

donde  $\sigma \in (\mathbb{R} \cup 0)^{|T|}$  es el vector de conteos de disparos.

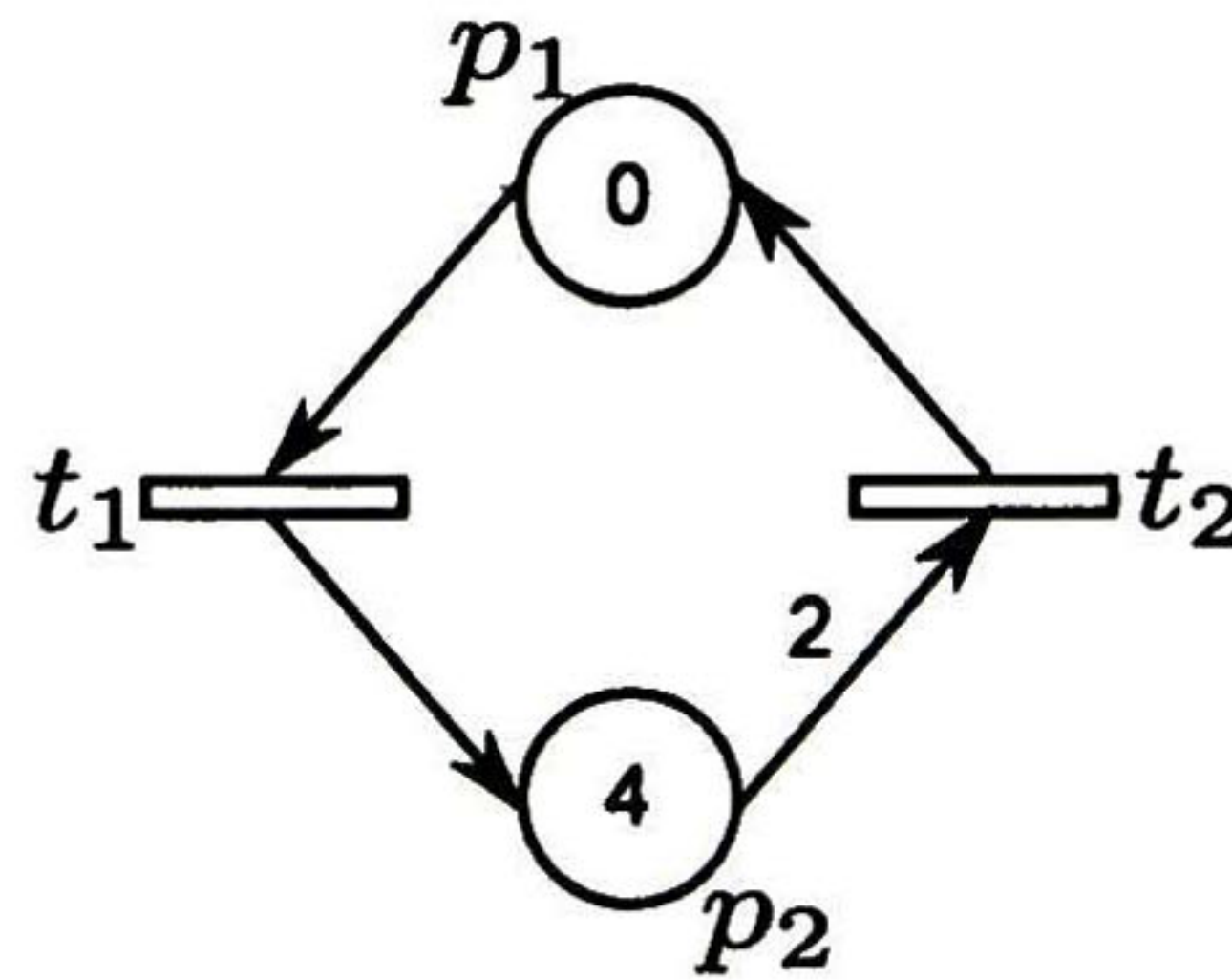


Figura 2.4: Red de Petri del Ejemplo 2.4, sólo  $t_2$  está habilitada.

**Ejemplo 2.4.** Considere la Red de Petri continua de la Fig. 2.4, el grado de habilitación de la transición  $t_2$  es  $enab(t_2, m_0) = 2$  y el grado de habilitación de  $t_1$  es  $enab(t_1, m_0) = 0$ , por lo que  $t_1$  no puede ser disparada. Entonces  $t_2$  puede dispararse con una cantidad  $\alpha_2 = 1.5 < enab(t_2, m_0)$ , por lo que de la ecuación (2.18) el marcado alcanzable será  $m = [1.5 \ 1]^T$

**Definición 2.24.** Acotamiento, vivacidad y lim-vivacidad para CPN.

Una CPN  $N_c$  se dice que es:

**Acotada** si todos sus lugares son acotados  $\forall p_i \in P, \exists b_i \in \mathbb{R} | b_i \geq m(p_i) \forall m(p) \in RS(N_c, m_0)$

**Viva** si toda transición es viva (cualquier transición puede volver a ser disparada mediante secuencias finitas desde cualquier marcado alcanzable).

La propiedad de vivacidad puede ser extendida a **lim-vivacidad** suponiendo que una secuencia de longitud infinita puede ser disparada. Una transición  $t$  no es lim-viva si y sólo si existe un marcado alcanzable tal que ninguno de sus sucesores habilite a la transición  $t$ .

**Definición 2.25.** Acotamiento estructural y vivacidad estructural.

Una red es:

**Estructuralmente acotada** cuando  $(N, m_0)$  es acotada para cualquier marcado inicial  $m_0$ .

**Estructuralmente viva** cuando existe un marcado  $m_0$  tal que la red  $(N, m_0)$  es viva.

## 2.4. Redes de Petri Continuas Temporizadas

Las redes de Petri Continuas Temporizadas o redes fluidificadas (*TCPN*, por sus siglas en inglés) son una relajación de las redes de Petri discretas que consiste en aproximar el comportamiento de una *TPN* por un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales y continuas. Tal relajación es útil para tratar sistemas que presentan el problema de la explosión de estados, el cual en el contexto de las redes de Petri se presenta en sistemas altamente marcados. Las *TCPN* proporcionan una clara descripción gráfica; un sencillo y buen soporte matemático, permitiendo la representación de relaciones causales; sincronización de procesos; asignación de recursos, etc.

**Definición 2.26.** Una Red de Petri Continua Temporizada ó *TCPN* es un sistema definido por  $(N, \lambda, m_0)$ , donde  $N$  es una CPN, y  $\lambda : T \rightarrow \{\mathbb{R} \cup 0\}^{|P|}$  es el marcado inicial de la red  $N$ .

Cuando el tiempo es incluido en una red CPN la ecuación fundamental (2.18) depende explícitamente del tiempo:  $m(\tau) = m_0 + C\sigma(\tau)$ , es posible derivar con respecto al tiempo

para obtener una ecuación dinámica:  $\dot{m}(\tau) = C \cdot \dot{\sigma}(\tau)$ . La derivada del vector de disparo  $f(\tau) = \dot{\sigma}(\tau)$  es llamada **flujo**, y nos lleva a la ecuación de la dinámica de las *TCPN* temporizadas:

$$\dot{m}(\tau) = C f(\tau). \quad (2.19)$$

El comportamiento del flujo de las transiciones está definido por alguna **semántica**. En estas semánticas se hace uso de un vector constante llamado velocidad de marcado  $\lambda : T \rightarrow \mathbb{R}^+$ , el cual asigna a cada transición  $t_i$  una constante positiva  $\lambda_i$ .

### Definición 2.27. Semántica de servidores finitos

Cada transición  $t$  tiene asociado un valor real  $\lambda(t) > 0$  el cual es la tasa máxima de flujo de la transición y es constante. Entonces el flujo queda definido como:

$$f_j = \begin{cases} \lambda_j, & \text{if } \forall p_i \in \bullet t_j \\ \min \left\{ \min_{p_i \in \bullet t_j | m_i=0} \left\{ \sum_{t_q \in \bullet p_i} \frac{f_q \cdot \text{Post}(t_q, p_i)}{\text{Pre}[p_i, t_j]} \right\}, \lambda_j \right\}, & \text{de otra forma.} \end{cases}, m_i > 0 \quad (2.20)$$

Para la semántica de **servidores finitos** (*FSS*, por sus siglas en inglés), si el marcado de los lugares de entrada de la transición  $t_i$  es estrictamente mayor que cero, su flujo será constante, igual a  $\lambda_i$ , si no es estrictamente mayor, el flujo es el mínimo entre la velocidad máxima de disparo y el flujo total de entrada a los lugares vacíos. Esta semántica corresponde a la de *velocidad constante* de [8].

### Definición 2.28. Semántica de servidores infinitos

Cada transición  $t$  tiene asociado un valor real  $\lambda > 0$  el cual es la tasa máxima de flujo de la transición y es constante. En esta semántica, la velocidad de ocurrencia es sensible al grado de habilitación de la transición, entonces el flujo queda definido:

$$f_i = \lambda_i \cdot \text{enab}(t_i, \mathbf{m}) = \lambda_i \cdot \min_{p \in \bullet t_i} \left\{ \frac{\mathbf{m}(p)}{\text{Pre}[p, t_i]} \right\}, \quad (2.21)$$

donde  $f_i$  es el flujo de la transición  $t_i$  y  $p \in \bullet t_i$  es el lugar cuyo marcado  $m(p)$  limita a  $t_i$ . Llamamos flujo efectivo a  $f(\mathbf{m})$ , el vector de flujos evaluado al marcado  $\mathbf{m}$ .

Para la semántica de **servidores infinitos** (*ISS*, por sus siglas en inglés) el flujo a través de una transición es proporcional a su grado de habilitación.

### Definición 2.29. Semántica de producto

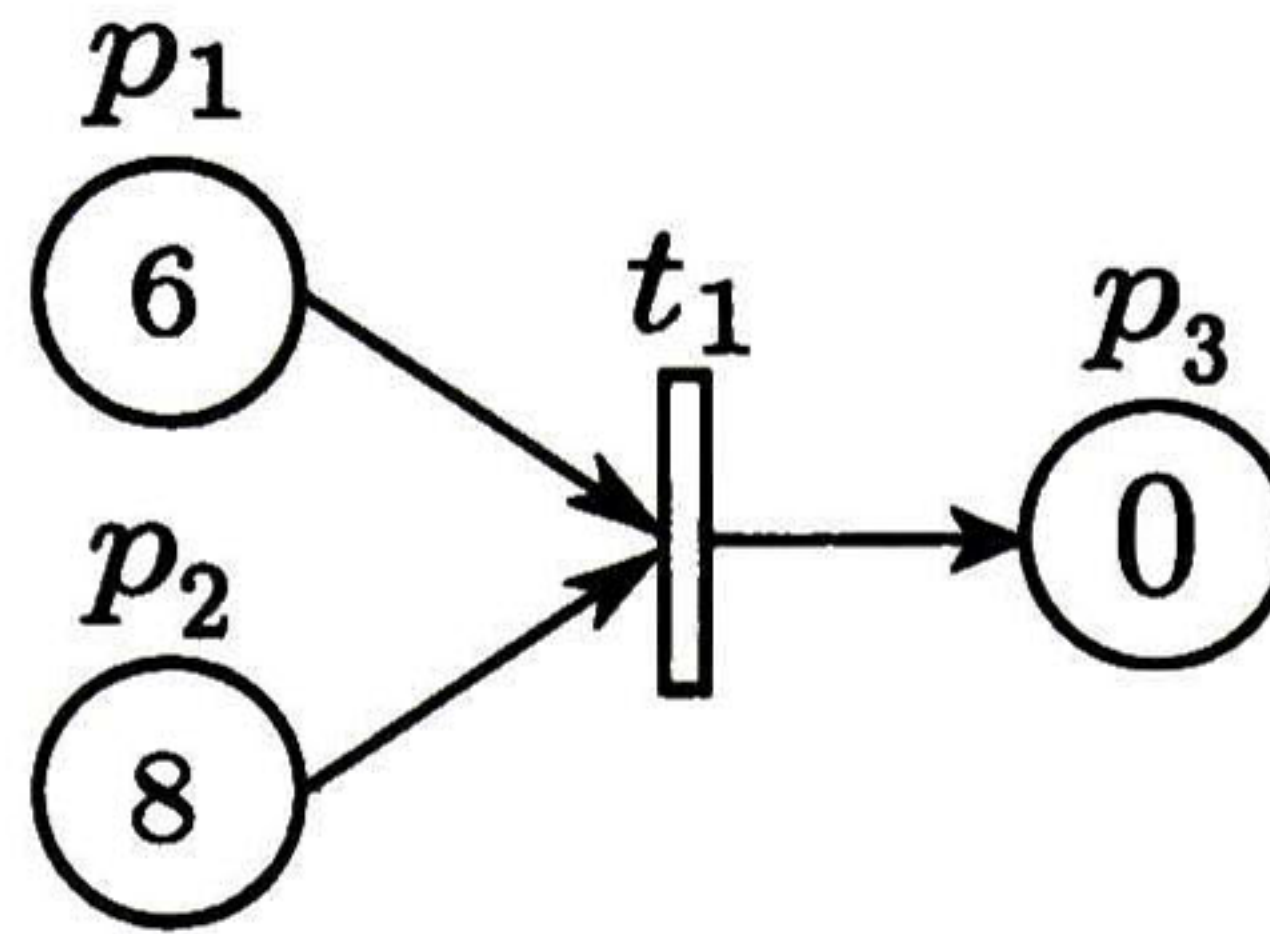


Figura 2.5: Red de Petri del Ejemplo 2.5.

Para la semántica de producto (*PS*, por sus siglas en inglés) el flujo de una función está dado por el producto de los marcados de sus lugares de entrada, definido como:

$$f_i = \lambda_i \prod_{p \in \bullet t_i} \left\{ \frac{m(p)}{\text{Pre}[p, t_i]} \right\}. \tag{2.22}$$

Esta semántica puede ser obtenida con la semántica de servidores infinitos a partir de la decoloración de redes de Petri coloreadas [9].

Interpretando las transiciones como punto de encuentro de clientes y servidores, parece que la semántica más adecuada depende del número relativo de clientes y servidores que haya en el modelo discreto.

**Ejemplo 2.5.** Sea la Fig. 2.5 la *TCPN* con tasa máxima de flujo  $\lambda(t_1) = 1$ . En la Fig. 2.6 se muestra el comportamiento del lugar  $p_1$ ,  $p_2$  y  $p_3$  respectivamente para las semánticas de servidores infinitos y de producto. Para analizar la evolución de la red bajo las semánticas definidas anteriormente se utiliza el simulador propuesto en [33].

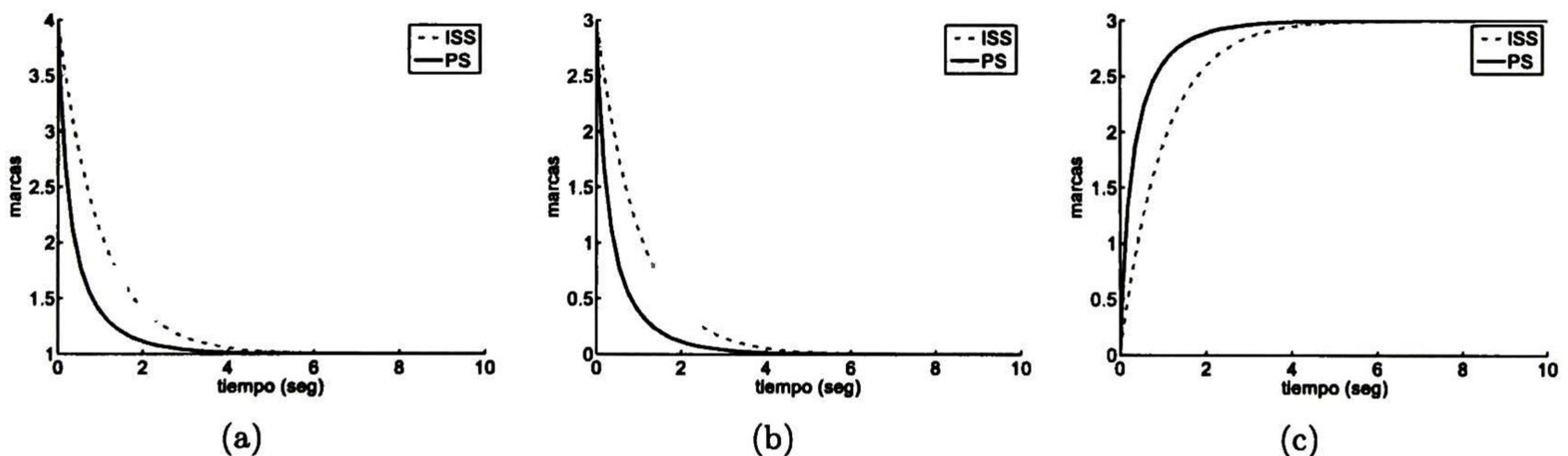


Figura 2.6: Evolución del marcado de la red del Ejemplo 2.5. a)  $p_1$ , b)  $p_2$  y c)  $p_3$  usando semántica de servidores infinitos y de producto.

Las transiciones fuente (transiciones sin lugares de entrada) no están definidas en estas semánticas puesto que ningún lugar restringe su flujo. Una manera de definir transiciones con flujo constante es modelar una transición  $t_i$  junto con un lugar  $p_j$  tal que  $\bullet t_i = t_i \bullet = p_j$  y  $\text{Pre}(p_j, t_i) = \text{Post}(p_j, t_i) = 1$  como se muestra en la Fig. 2.7.

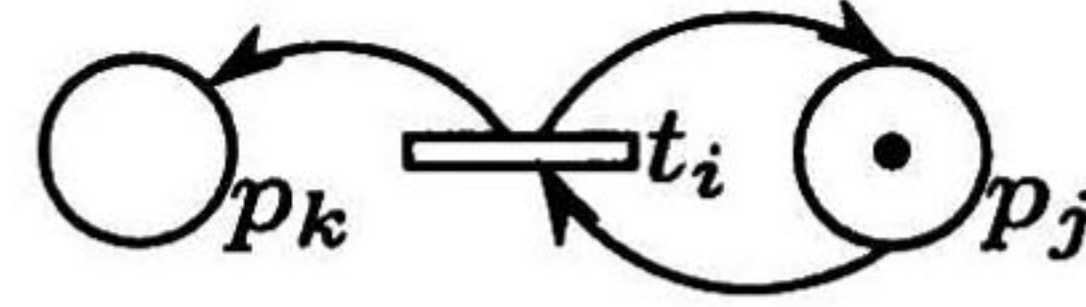


Figura 2.7: Ejemplo de una transición fuente bien definida.

**Definición 2.30.** En una *TCPN* una transición  $t_i \in T$  es llamada **bien definida** si  $|\bullet t_i| \geq 1$ , esto significa que, si se tiene al menos un lugar de entrada. Una *TCPN* es llamada **bien definida** si  $\forall t_i \in T$ ,  $t_i$  es bien definida.

En este trabajo las *TCPN* son consideradas bien definidas. Para las siguientes definiciones se consideran *TCPN* con semántica de servidores infinitos.

**Definición 2.31. Restricción en el flujo que pasa por una transición**

Sea  $\Sigma = (N_c, \lambda, m_0)$  una *TCPN* y sea  $m$  un marcado alcanzable. Se dice que el arco  $(p, t)$  restringe el flujo que pasa por una transición  $t$  en el marcado  $m$  ssi

$$f(t) = \lambda(t) \frac{m(p)}{\text{Pre}(p, t)}. \quad (2.23)$$

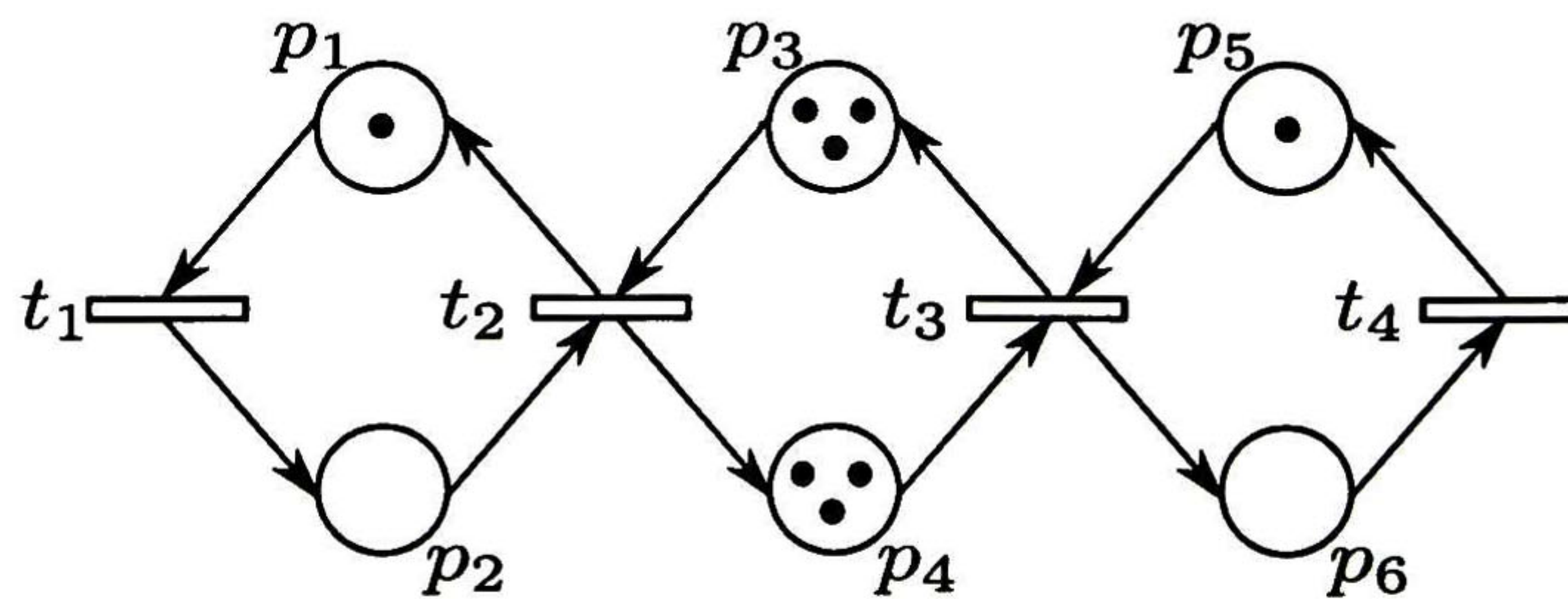


Figura 2.8: Red de Petri Continua Temporizada del Ejemplo 2.6.

**Ejemplo 2.6.** Considere la *TCPN* de la Fig. 2.8. Haciendo uso de la ecuación de flujos (2.21) tenemos:

$$\begin{aligned}
f_1 &= \lambda(t_1) \cdot m(p_1) \\
f_2 &= \lambda(t_2) \cdot \min\{m(p_2), m(p_3)\} \\
f_3 &= \lambda(t_3) \cdot \min\{m(p_4), m(p_5)\} \\
f_4 &= \lambda(t_4) \cdot m(p_6).
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Si el vector de tasa de disparo es  $\lambda = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ , entonces de la ecuación (2.19) tenemos:

$$\begin{aligned}
\dot{m} &= C \cdot f \\
\dot{m} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 m_1 \\ \lambda_2 \min\{m_2, m_3\} \\ \lambda_3 \min\{m_4, m_5\} \\ \lambda_4 m_6 \end{bmatrix} \\
\dot{m} &= \begin{bmatrix} \dot{m}_1 \\ \dot{m}_2 \\ \dot{m}_3 \\ \dot{m}_4 \\ \dot{m}_5 \\ \dot{m}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_2 - f_1 \\ f_1 - f_2 \\ f_3 - f_2 \\ f_2 - f_3 \\ f_4 - f_3 \\ f_3 - f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \min\{m_2, m_3\} - m_1 \\ m_1 - \min\{m_2, m_3\} \\ \min\{m_4, m_5\} - \min\{m_2, m_3\} \\ \min\{m_2, m_3\} - \min\{m_4, m_5\} \\ m_6 - \min\{m_4, m_5\} \\ \min\{m_4, m_5\} - m_6 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Una *TCPN* bajo la semántica de servidores infinitos es un sistema lineal conmutado, dado por el operador *min* que aparece en la ecuación de flujo (2.21). A lo largo de este trabajo se utilizará la semántica de servidores infinitos para el modelado de sistemas que presentan la característica de explosión de estados.

### Definición 2.32. Configuración

Sea  $\Sigma = (N_c, \lambda, m_0)$  una *TCPN*. Una **configuración** de  $\Sigma$  en el marcado  $m$  es un conjunto de  $(p, t)$  arcos que describen el flujo real que pasa por todas las transiciones.

$$\Pi(m)[i, j] = \begin{cases} \frac{1}{\text{Pre}[i, j]} & \text{si } p_i \text{ limita } t_j \\ 0 & \text{de cualquier otra forma} \end{cases} \tag{2.25}$$

Entonces, una configuración es una cobertura de  $T$  por sus arcos de entrada. Una posible representación de una configuración dada es a través de una matriz de configuración  $\Pi$ .

Cada configuración define un sistema lineal asociado, por lo que dependiendo del marcado de la red, la evolución del sistema estará dado por uno u otro sistema lineal. Algunas configuraciones pueden no presentarse dado el marcado inicial de la red.

El número total de configuraciones en un sistema está acotado por:

$$\text{NumConfig} = \prod_{i=1}^{|T|} |t_i|. \quad (2.26)$$

**Ejemplo 2.7.** En la red *TCPN* de la Fig. 2.8, se tienen 4 configuraciones, estas dependen de la relación que existe en los lugares de entrada de cada transición. Las matrices de configuración  $\Pi(m)$  son:

$$\Pi(m) = \left\{ \begin{array}{l} \Pi_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{si } m_2 \leq m_3 \text{ y } m_4 \leq m_5 \\ \Pi_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{si } m_3 \leq m_2 \text{ y } m_4 \leq m_5 \\ \Pi_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{si } m_2 \leq m_3 \text{ y } m_5 \leq m_4 \\ \Pi_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{si } m_3 \leq m_2 \text{ y } m_5 \leq m_4 \end{array} \right.$$

**Definición 2.33.** Matriz de máxima tasa de disparo

La matriz de máxima tasa de disparos está definida como:

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{|T|}). \quad (2.27)$$

De acuerdo a las definiciones anteriores y su notación podemos redefinir el vector de flujo (2.31) y la ecuación fundamental (2.19) como:



$$f = \Lambda \Pi(m) \cdot m \quad (2.28)$$

$$\dot{m} = C \Lambda \Pi(m) \cdot m. \quad (2.29)$$

## 2.5. Acción de Control en *TCPN*

De acuerdo a la semántica de los modelos, se observa que la única acción de control que se puede aplicar es **reducir** el flujo de disparo de transiciones [34]. Pensando por ejemplo en sistemas de producción, resulta bastante lógico pensar en frenar las máquinas, pero resulta imposible hacer que vayan más rápido que su velocidad máxima. Así, si el flujo de una transición  $t$  puede ser reducida o incluso detenida, se dirá que  $t$  es una transición controlable, de otra manera la transición es incontrolable. El flujo forzado de una transición controlable  $t_i$  es  $f_i - u_i$ , donde  $f_i$  es el flujo del sistema no forzado y  $u_i$  es la acción de control y verifica que  $0 \leq u_i \leq f_i$ . Observe que esto significa que el valor máximo de la acción de control es variable y depende del marcado. El vector de flujo controlado es:

$$\begin{aligned} f &= \Lambda \Pi(m) \cdot m - u \\ 0 &\leq u_i \leq [\Lambda \Pi(m) \cdot m]_i. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Con el fin de obtener una versión simplificada de la ecuación de estados, el vector de entradas  $u$  se reescribe como:

$$u = I_u \Lambda \Pi(m) \cdot m, \quad (2.31)$$

donde  $I_u = \text{diag}(I_{u_1}, \dots, I_{u_{|T|}})$  y  $0 \leq I_{u_i} \leq 1$ . Sustituyendo (2.31) en (2.30) y definiendo la matriz  $I_c = I - I_u$  la ecuación de estados (2.19) se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} \dot{m} &= C I_c \Lambda \Pi(m) \cdot m \\ 0 &\leq I_{c_i} \leq 1. \end{aligned} \quad (2.32)$$

## 2.6. Observador Lipschitz para *PS - TCPN*

En esta sección se presenta un observador para sistemas con la propiedad de Lipschitz. Considere un sistema no lineal descrito por:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + \Phi(x, u) \\ y &= Cx,\end{aligned}\tag{2.33}$$

donde  $\Phi(x, u)$  es una no linealidad con la propiedad Lipschitz, con una constante de Lipschitz  $\gamma$ , esto es,

$$\|\Phi(x, u) - \Phi(\hat{x}, u)\|_2 \leq \gamma \|x - \hat{x}\|.\tag{2.34}$$

Las ecuaciones (2.33) y (2.34) pueden ser utilizadas para describir una *PS – TCPN*, puesto que las salidas son una combinación lineal del marcado de los lugares, y se puede encontrar una constante de Lipschitz siempre que se conozca el rango de operación del marcado de los lugares y que la red sea acotada.

Existen en la literatura muchos diseños diferentes de observadores para un sistema de la forma (2.33) con la propiedad Lipschitz, a continuación se presenta uno reportado en [35].

Un observador para (2.33) tiene la forma

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \Phi(\hat{x}, u) + L(y - C\hat{x}).\tag{2.35}$$

La dinámica del error de estimación está dada por

$$\dot{\tilde{x}} = (A - LC)\tilde{x} + \Phi(x, u) - \Phi(\tilde{x}, u) + Bp(x),\tag{2.36}$$

donde  $\tilde{x} = x - \hat{x}$ .

**Teorema 2.1.** *Para el sistema no lineal (2.33), suponga que  $x(t)$  existe para todo  $t \geq 0$  y el vector de la función no lineal  $\Phi(x, u)$  satisface la condición Lipschitz (2.34).  $L$  puede escogerse tal que la siguiente ecuación algebraica de Riccati*

$$(A - LC)^T P + P(A - LC) + \gamma^2 P P + I + \epsilon I = 0,\tag{2.37}$$

*tiene una solución simétrica definida positiva  $P$  para algún  $\epsilon > 0$ , entonces el observador (2.35) para el sistema (2.33) es asintóticamente estable.*

*Demostración.* Considere la función candidata de Lyapunov

$$V = \tilde{x}^T P \tilde{x},\tag{2.38}$$

donde  $0 < P = P^T$  Su derivada con respecto al tiempo es

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= \dot{\tilde{x}}^T P \tilde{x} + \tilde{x}^T P \dot{\tilde{x}} \\
 &= \tilde{x}^T [(A - LC)^T P + P(A - LC)] \tilde{x} + 2\tilde{x}^T P [\Phi(x, u) - \Phi(\hat{x}, u)] \\
 &\leq \tilde{x}^T [(A - LC)^T P + P(A - LC)] \tilde{x} + \gamma^2 \tilde{x}^T P P \tilde{x} + \tilde{x}^T \tilde{x} \\
 &= \tilde{x}^T [(A - LC)^T P + P(A - LC) + \gamma^2 P P + I] \tilde{x} \\
 &= -\varepsilon \|\tilde{x}\|^2
 \end{aligned}$$

■

como  $\varepsilon > 0$ , tenemos que la derivada de (2.38) está definida negativa y con ellos el observador (2.35) para el sistema (2.33) es asintóticamente estable.

## Capítulo 3

# Modelado de un Invernadero

*En este capítulo se presenta la metodología de modelado en Redes de Petri Continuas Temporizadas reportada en [5] para modelar la temperatura y humedad de un invernadero presentado en [36].*

### 3.1. Invernadero

La agricultura es una actividad de gran importancia estratégica como base fundamental para el desarrollo. El invernadero tiene como objetivo reproducir las condiciones climáticas más adecuadas para el crecimiento y desarrollo de las plantas cultivadas en su interior con cierta independencia del medio exterior. Se trata de una estructura metálica, usada para la protección del cultivo (plantas), con cubierta plástica traslúcida que no permite el paso de la lluvia al interior.

Los invernaderos se pueden clasificar de distintas formas, según se atiende a determinadas características de sus elementos constructivos (e.g., por su perfil externo, según su fijación o movilidad, por el material de la cubierta, según el material de estructura, etc.). En la Fig. 3.1 se presenta un invernadero que cuenta con los siguientes actuadores: humidificador, sistema de calefacción por tuberías, ventiladores y ventanas; y con los siguientes sensores: temperatura interna y externa, fuerza de viento interno y externo, radiación solar externa, humedad externa e interna.

Diferentes modelos de simulación para describir el comportamiento dinámico de la temperatura y humedad dentro del invernadero han sido publicados en varios estudios. Dichos modelos pueden basarse en flujo de masa y energía [21], [37], o es derivado de sistemas de identificación usando técnicas lineales o no lineales, tales como algoritmos de mínimos cuadrado y redes neuronales para sintonizar los parámetros del modelo [22], [38].

El invernadero crea un microclima en su interior, el cuál es modelado por medio de un

balance de masa y térmico. El modelo puede ser tan preciso como se desee pero su complejidad aumenta. En este caso, el modelo más simple que logre capturar la dinámica del sistema es el mejor. Por esto, en este trabajo se retoma el modelo presentado en [5] y se incluye un sistema de calefacción para poder manipular la temperatura del invernadero.

La ley de la conservación de energía postula que el cambio neto de la energía de un sistema durante un proceso determinado es igual a la diferencia entre la energía total que entra y la energía total que sale del sistema durante dicho proceso, lo que se puede expresar como:

$$E_{entrada} - E_{salida} = \delta E, \quad (3.1)$$

lo que puede representarse también como una tasa:

$$\frac{dE}{dt} = \dot{E}_{entrada} - \dot{E}_{salida}, \quad (3.2)$$

donde  $\dot{E}_{entrada}$  y  $\dot{E}_{salida}$  son los flujos de entrada y salida de energía en el sistema, respectivamente, y  $dE/dt$  es la rapidez con la cual la energía se transfiere. Las ecuaciones anteriores son referidas como balance de energía y son expresadas en  $KJ$  y  $KW$ , respectivamente, recordando que la relación entre energía y tiempo se maneja como potencia.

La energía es susceptible de transferencia hacia o desde un sistema en tres formas, ya sea por transferencia de calor  $Q$ , donde se hace alusión a la energía molecular del sistema; por transferencia de trabajo  $W$ , refiriéndose a interacciones no causadas por una diferencia de temperatura entre un sistema y su ambiente externo; y finalmente por flujo másico  $m$ , dado que al entrar o salir masa de un sistema, la energía de este aumenta o disminuye proporcionalmente ya que la masa lleva consigo energía.

El principio de conservación de la masa, para un volumen de control, enuncia que la transferencia neta de masa hacia o desde un volumen de control durante un intervalo de tiempo  $\Delta t$  es igual al cambio neto en la masa total dentro del volumen de control durante  $\delta t$ , lo que se expresa como:

$$m_{entrada} - m_{salida} = \Delta m_{vc}, \quad (3.3)$$

donde  $\Delta m_{vc}$  representa el cambio en la masa del volumen de control durante el proceso, expresado en  $Kg$ . Al igual que el balance de energía, puede ser expresado en forma de tasa como sigue:

$$\frac{dm_{vc}}{dt} = \dot{m}_{entrada} - \dot{m}_{salida}, \quad (3.4)$$

de donde  $\dot{m}_{entrada}$  y  $\dot{m}_{salida}$  son flujos másicos hacia adentro y hacia afuera del volumen de control, respectivamente, y  $dm_{mc}/dt$  es la rapidez de cambio de masa con respecto al tiempo

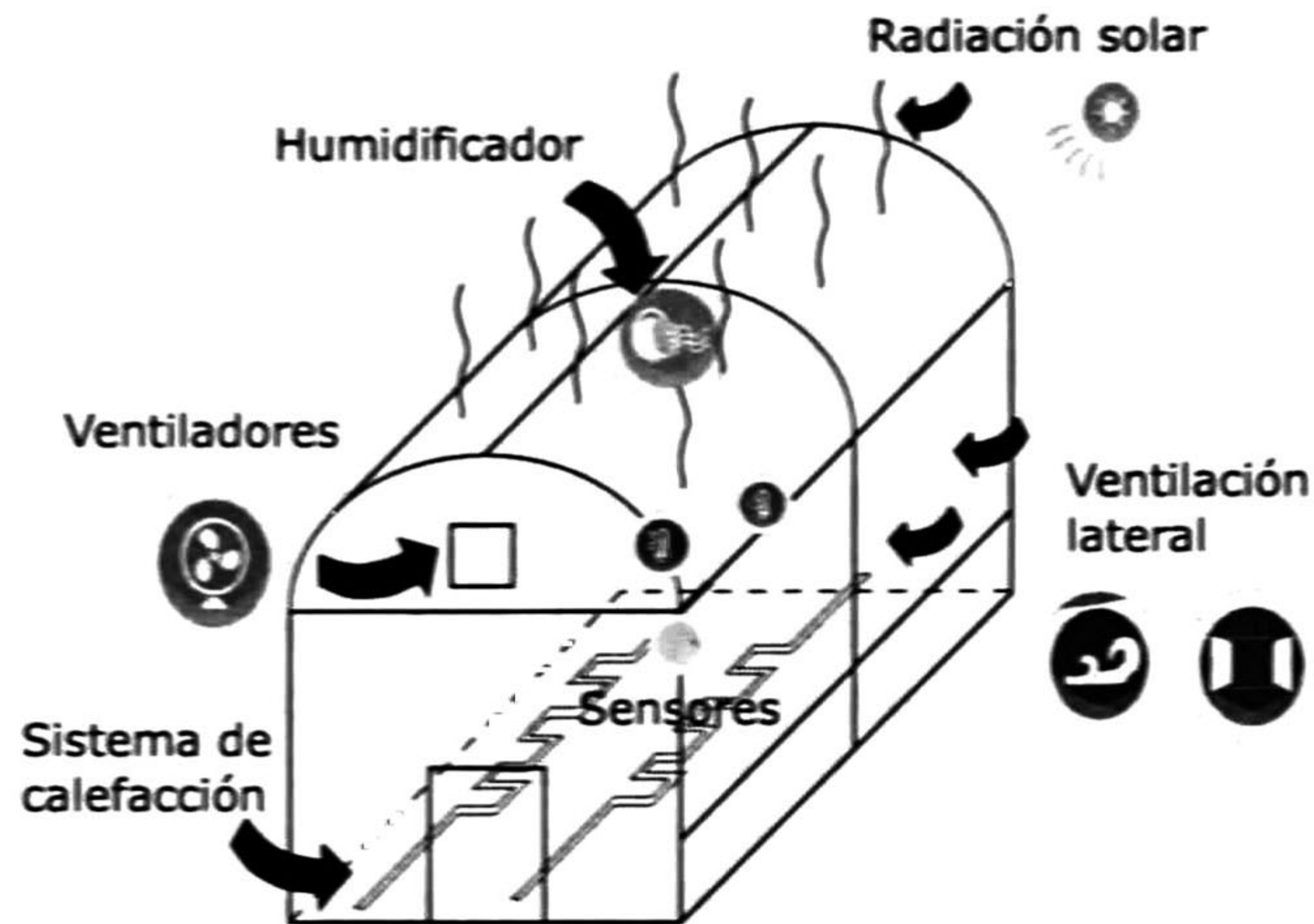


Figura 3.1: Invernadero del que se obtiene el modelo.

dentro de las fronteras del volumen de control, expresada en  $Kg/s$ . Estas ecuaciones describen el balance de masa y son aplicables a cualquier volumen de control que experimenta alguna clase de proceso.

## 3.2. Balance Térmico

Una ecuación general de balance de energía que describe el balance térmico es la siguiente

$$\frac{dQ_x}{dt} = q_{in,x} - q_{out,x} + p_x, \quad (3.5)$$

donde  $Q_x$  (en  $J$ ) es la energía del sistema,  $q_{in,x}$  (en  $J s^{-1}$ ) la entrada de energía del sistema  $x$  por unidad de tiempo,  $q_{out,x}$  (en  $J s^{-1}$ ) la energía de salida, y  $p_x$  (en  $J s^{-1}$ ) la energía generada. El sistema es acotado por la superficie real o imaginaria que lo separa del exterior.

La energía  $Q_x$  se relaciona con la temperatura  $T_x$  (en Kelvin) del sistema a través de la capacitancia térmica  $c_x$  (en  $JK^{-1}$ )

$$Q_x = c_x T_x. \quad (3.6)$$

Sustituyendo (3.6) en (3.5) obtenemos

$$c_x \frac{dT_x}{dt} = q_{in,x} - q_{out,x} + p_x. \quad (3.7)$$

La temperatura está relacionada con el promedio de la energía cinética presente en el ambiente. Si la temperatura no es uniforme en alguna parte, existe un intercambio entre esas partes del sistema entero.

### 3.2.1. Temperatura del invernadero

La temperatura del invernadero se ve afectada por la convección generada dentro del invernadero, por las plantas, el suelo, la transpiración del cultivo y por la ventilación. El sistema de tuberías de calefacción intercambia calor por convección, además aire caliente puede ser introducido al sistema. El sistema de refrigeración ocasiona la pérdida de calor por convección. La temperatura del invernadero también se ve afectada por la radiación solar, el ambiente exterior e interior, la radiación exterior e interior, y el calor latente liberado por la condensación del vapor de agua. El modelo que se usará considera solo algunas de las relaciones previamente descritas y está dado por

$$k_g \frac{dT_g}{dt} = q_{o,g}^{rad} - q_{g,o}^{vent} - q_{g,o}^{cond} - q_{g,s} + q_{p,g} - q_{g,h} + q_{g,r}^{cons} - q_{g,c}^{trans}, \quad (3.8)$$

donde  $t_g$  es la temperatura promedio del invernadero (existen lugares donde el aire es más frío o caliente que  $t_g$ ). Para una revisión más minuciosa de estos conceptos, el lector interesado puede remitirse a [36].

La ecuación anterior está expresada en watts por metro cuadrado ( $Wm^{-2}$ ). La capacidad calorífica virtual del invernadero (expresada en  $Jm^{-2}K^{-1}$ ) se calcula de la siguiente manera

$$K_g = \rho_a c_{p,a} \frac{V_g}{A_g}, \quad (3.9)$$

donde  $\rho_a$  es la densidad del aire dentro del invernadero ( $kgm^{-3}$ ),  $c_{p,a}$  la capacidad calorífica del aire ( $JK^{-1}kg^{-1}$ ),  $V_g$  el volumen del invernadero ( $m^3$ ), y  $A_g$  el área cubierta por el invernadero ( $m^2$ ).

Este modelo no considera el intercambio por convección por la radiación recibida por materiales dentro del invernadero, solo se considera la radiación solar absorbida por el sistema en general:

$$q_{o,g}^{rad} = \eta_g I_o, \quad (3.10)$$

donde  $I_o$  es la radiación solar global y  $\eta_g$  es la contribución de calor que ganan el aire y los sólidos dentro del invernadero. La radiación que se absorbe debido al sistema de calefacción se considera aparte

$$\eta_p = \frac{A_p}{A_g} \eta, \quad (3.11)$$

donde  $A_p$  es el área de la superficie de la tubería y  $\eta$  es el calor relativo absorbido por la radiación recibida ( $\eta \in [0; 1]$ ). De manera que  $\eta_g$  puede escribirse como

$$\eta_g = \eta - \eta_p = \left(1 - \frac{A_p}{A_g}\right) \eta. \quad (3.12)$$

Una aproximación de  $\eta$  es el factor de transmisión de la cubierta ( $\tau_r$ ):

$$\eta = \tau_r. \quad (3.13)$$

La temperatura interna se ve afectada por el intercambio con el exterior debido a la ventilación, como se describe a continuación

$$q_{g,o}^{vent} = u_v \rho_a c_{p,a} (T_g - T_o), \quad (3.14)$$

donde  $u_v$  es el flujo natural que depende de la velocidad del viento, y la apertura de las ventanas de barlovento  $u_v^{Apwsd}$  y sotavento  $u_v^{Aplsd}$  de acuerdo con [36]:

$$u_v = \left( \frac{p_{v1} u_v^{Aplsd}}{1 + p_{v2} u_v^{Aplsd}} + p_{v3} + p_{v4} u_v^{Apwsd} \right) v + p_{v5}, \quad (3.15)$$

donde  $p_{vj}$  con  $j = 1, \dots, 5$  son los parámetros de ventilación y  $v$  es la velocidad del viento. Normalmente, se abre primero la ventana a sotavento y después la de barlovento.

Si se desea ventilación forzada,  $u_v$  puede formularse para considerar la capacidad de aire de los ventiladores por metro cuadrado.

Existe pérdida o ganancia de calor por la conducción a través de la cubierta de plástico, como se describe a continuación

$$q_{g,o}^{cond} = U_{g,o} \frac{A_{g,o}}{A_g} (T_g - T_o), \quad (3.16)$$

donde  $U_{g,o} (Wm^{-2}K^{-1})$  es el coeficiente de transferencia de calor de la cubierta (techo y paredes) y  $A_{g,o}$  es el área total de la cubierta.

Existe ganancia o pérdida de calor por intercambio con el suelo ( $T_s$ ),



$$q_{g,s} = U_{g,s} \frac{A_{g,s}}{A_g} (T_g - T_s), \quad (3.17)$$

donde  $U_{g,s} (W m^{-2} K^{-1})$  es el coeficiente de transferencia de calor hacia el suelo y  $A_{g,s}$  es el contacto efectivo de área del suelo. El  $A_{g,s}/A_g$  es casi uno.

Se tiene una fuente de calor por medio del sistema de calefacción (agua por tuberías), como se ve a continuación

$$q_{p,g} = U_{p,g} \frac{A_{p,g}}{A_g} (T_p - T_g), \quad (3.18)$$

donde  $U_{p,g} (W m^{-2} K^{-1})$  es el coeficiente de transferencia de calor del agua en la tubería hacia la temperatura del invernadero,  $A_{p,g}$  es el área de contacto de las tuberías con el aire dentro del invernadero, y  $T_p$  es la temperatura de las tuberías.

El coeficiente global de transferencia de calor depende de una combinación de convección forzada y libre. La cual es modelada por

$$U_{p,g} = p_{p1} \sqrt{p_{p2} + \sqrt{|T_g - T_p|}}, \quad (3.19)$$

donde  $p_{p1}$  y  $p_{p2}$  son parámetros.

El calor perdido por evaporación de agua ocasionado por el humidificador, se describe por

$$q_{g,h} = \frac{1}{A_g} (1 - \gamma_1) C \kappa \rho_{H_2O} u_{hum}, \quad (3.20)$$

donde  $\kappa (J k_g^{-1})$  es el calor latente por evaporación del agua,  $\gamma_1$  representa la fracción de agua no evaporada, y  $u_{hum} (m^3 s^{-1})$  es el flujo de agua a través del humidificador. Ya que el método de enfriamiento depende de la humedad relativa del ambiente ( $RH$ ),  $C$  se usa una variable binaria:

$$C = \begin{cases} 1 & \text{si } RH < 100 \\ 0 & \text{si } RH = 100. \end{cases} \quad (3.21)$$

Algo del calor es debido a la condensación humedad en paredes y techo:

$$q_{g,r}^{cons} = \kappa (1 - \gamma_2) \varphi_{H_2O,g,r}^{cons}, \quad (3.22)$$

donde  $\gamma_2$  representa la fracción perdida por el ambiente fuera del invernadero y  $\varphi_{H_2O,g,r}^{cons}$  ( $kg[H_2O]m^{-2}s^{-1}$ ) es la razón de evapotranspiración del toldo.

El calor perdido por la evapotranspiración está descrito por

$$q_{g,c}^{trans} = \kappa E_c \quad (3.23)$$

donde  $E_c$  ( $kg[H_2O]m^{-2}s^{-1}$ ) es la razón de evapotranspiración.

### 3.2.2. Temperatura del suelo

Una primera aproximación para el intercambio entre el aire y el suelo dentro del invernadero es considerado, suponiendo que no se recibe calor directamente por la radiación:

$$K_s \frac{dT_s}{dt} = q_{g,s} - q_{s,ss}, \quad (3.24)$$

donde  $K_s$  es la capacidad calorífica virtual del suelo y  $T_s$  es la temperatura del suelo.

Existe pérdida de calor del suelo por el subsuelo dado por

$$q_{s,ss} = U_{s,ss}(T_s - T_{ss}), \quad (3.25)$$

donde  $U_{s,ss}$  ( $Wm^{-2}K^{-1}$ ) es el coeficiente de transferencia de calor hacia el subsuelo y  $T_{ss}$  es la temperatura del subsuelo que se considera constante.

### 3.2.3. Sistema de calefacción por tubería

El modelo del sistema de calefacción está dado por

$$K_p \frac{dT_p}{dt} = q_{boil,p} - q_{p,g} + q_{o,p}^{rad}, \quad (3.26)$$

donde  $K_p$  ( $JK^{-1}m^{-2}$ ) representa la capacidad calorífica de la tubería dada por

$$K_p = \rho_{H_2O} c_{H_2O} \frac{V_p}{A_g}, \quad (3.27)$$

donde  $c_{H_2O}$  es la capacidad calorífica del agua ( $JK^{-1}kg^{-1}$ ), y  $V_p/A_g$  es el volumen del sistema de tuberías por unidad de área del invernadero.

La radiación recibida está dada por

$$q_{o,p}^{rad} = \eta_p I_o, \quad (3.28)$$

donde  $\eta_p$  está dada por (3.11). Se observa que

$$q^{rad} = q_{o,g}^{rad} + q_{o,p}^{rad}. \quad (3.29)$$

El suplemento de calor para el sistema de calefacción proporcionado por el boiler está dado por

$$\begin{aligned} q_{boil,p} &= q_{in,p} - q_{out,p} \\ &= \frac{1}{A_g} \rho_{H_2O} c_{H_2O} F_p (T_{p,in} - T_{p,out}), \end{aligned} \quad (3.30)$$

donde  $T_{p,in}$  es la temperatura del agua cuando entra al sistema de calefacción,  $T_{p,out}$  es la temperatura del agua al salir que la tubería regresa al tanque de depósito de agua, y  $F_p$  el flujo de agua dentro de las tuberías ( $m^3 s^{-1}$ ).

Para simplificar la ecuación anterior, se usa una temperatura media,

$$T_p = \frac{T_{p,in} + T_{p,out}}{2}, \quad (3.31)$$

despejando  $T_{p,out}$  y sustituyendo en la siguiente ecuación (suponiendo  $T_{p,in}$  es constante y cercana a la temperatura del boiler  $T_{boil}$ ), se tiene

$$q_{boil,p} = \frac{2}{A_g} \rho_{H_2O} c_{H_2O} F_p (T_{p,in} - T_p). \quad (3.32)$$

### 3.3. Balance de Masa

Las mismas consideraciones hechas en el balance de calor se usan en el balance de masa sobre un volumen:

$$\frac{dQ_m}{dt} = q_{in,m} - q_{out,m} + p_m, \quad (3.33)$$

donde  $Q_m$  (en  $kg$ ) es la masa de un elemento del sistema,  $q_{in,m}$  y  $q_{out,m}$  (en  $kg s^{-1}$ ) son las entradas y salidas de flujo másico respectivamente, y  $p_m$  es la masa producida por

unidad de tiempo ( $kg s^{-1}$ ). Esto último es un mal uso del lenguaje porque solo se usa una parte del balance de masa relacionado a la producción de masa; por ejemplo, una planta obtiene minerales y agua del suelo, durante la fotosíntesis el agua obtenida por las raíces es transpirada al ambiente del invernadero añadiendo algo de masa, pero no es que sea generada, solo es transportada de un lugar a otro.

La masa  $Q_m$  está relacionada con la concentración  $C_m$  ( $kg m^{-3}$ ) y el volumen  $V$  (en  $m^3$ ):

$$Q_m = VC_m. \quad (3.34)$$

Substituyendo (3.33) en (3.34) se obtiene

$$V \frac{dC_m}{dt} = q_{in,m} - q_{out,m} + p_m. \quad (3.35)$$

### 3.3.1. Vapor de agua

La concentración del vapor de agua  $C_{H_2O}$  está dada por

$$\frac{V_g}{A_g} \frac{dC_{H_2O}}{dt} = E_c + \varphi_{H_2O,h,g} - \varphi_{H_2O,g,o}^{vent} - \varphi_{H_2O,g,r}^{cons}. \quad (3.36)$$

La evapotranspiración es modelada con la forma general *Penman-Monteith* [39]

$$E_c = \alpha_c \eta_c I_o + \beta_c \Delta_{p_{H_2O}} \{ \cdot \}, \quad (3.37)$$

donde  $\Delta_{p_{H_2O}} \{ \cdot \}$  es el déficit de presión de vapor. Los parámetros  $\alpha_c$  y  $\beta_c$  dependen ligeramente de la temperatura, intensidad de la radiación, y concentración de  $CO_2$ . En este modelo la dependencia es ignorada por lo que estos parámetros son constantes. Un modelo más elaborado se encuentra en [36].

El déficit de presión es la diferencia entre la presión de saturación del vapor en la temperatura de la cubierta  $T_c$  y la presión interior actual del aire  $p_{H_2O}$

$$\Delta_{p_{H_2O}} \{ \cdot \} = p_{H_2O}^{sat}(T_c) - p_{H_2O}, \quad (3.38)$$

donde  $p_{H_2O}^{sat}$  es la presión de saturación a una temperatura  $T$  (en  $K$ ) dada por

$$p_{H_2O}^{sat}(T) = c_{s1} \exp \left( \frac{c_{s2} T^C}{c_{s3} + T^C} \right) \quad (3.39)$$

donde  $T^C$  es la temperatura  $T$  en grados Celsius. Por simplicidad, la temperatura de la cubierta se considera igual a la del invernadero ( $T_c = T_g$ ). El modelo de la evapotranspiración puede ajustarse usando un factor  $f_m\{\cdot\}$  el cual depende del crecimiento del cultivo.

Al mismo tiempo el humidificador disminuye la temperatura, lo cual incrementa la concentración de vapor del invernadero:

$$\varphi_{H_2O,h,g} = \frac{1}{A_g}(1 - \gamma_1)\rho_{H_2O}u_{hum}. \quad (3.40)$$

El intercambio de vapor de agua dentro ( $C_{H_2O}$ ) y fuera ( $C_{H_2O,o}$ ) debido a la ventilación está dada por

$$\varphi_{H_2O,g,o}^{vent} = u_v(C_{H_2O} - C_{H_2O,o}). \quad (3.41)$$

Ya que la condensación solo ocurre cuando la concentración de humedad en el aire es mayor a la concentración de saturación la cual depende de la temperatura de la cubierta. Por lo que la condensación se calcula de la siguiente manera

$$\varphi_{H_2O,g,r}^{cons} = k_{g,r} \frac{A_r}{A_g} \frac{p_{H_2O} - p_{H_2O}^{sat}(T_r) - |p_{H_2O} - p_{H_2O}^{sat}(T_r)|}{2}, \quad (3.42)$$

donde  $A_r$  es la superficie total de la cubierta (techo y paredes). La rapidez de cambio de masa  $k_{g,r}$  es dado por:

$$k_{g,r} = c_{m1} \left| \frac{T_g - T_r}{c_{T_{g,r}}} \right|^{c_{m2}}, \quad (3.43)$$

donde  $c_{m1}$  y  $c_{m2}$  son parámetros. El denominador  $c_{T_{g,r}} = 1 \text{ K}$  tiene solo el propósito de adecuar la dimensión de la ecuación.

La temperatura de la cubierta es un promedio entre la temperatura interior y exterior::

$$T_r = (1 - \gamma_2)T_g + \gamma_2T_o. \quad (3.44)$$

Ya que las mediciones son tomadas como humedad relativa ( $RH$ ) la cual está definida como

$$RH_x = \begin{cases} 100 \frac{p_{H_2O,x}}{p_{H_2O}^{sat}(T)} & \text{si } p_{H_2O,x} > 0 \text{ y } p_{H_2O}^{sat}(T) > 0 \\ 0 & \text{si } p_{H_2O,x} \leq 0 \text{ y } p_{H_2O}^{sat}(T) \leq 0, \end{cases} \quad (3.45)$$

donde el subíndice  $x$  representa si la medición es dentro del invernadero ( $p_{H_2O}, RH, C_{H_2O}$ ) y fuera del invernadero ( $p_{H_2O,o}, RH_o, C_{H_2O,o}$ ).

Para calcular  $p_{H_2O,x}$  de la ecuación anterior, la concentración de vapor se obtiene de:

$$C_{H_2O,x} = \frac{p_{H_2O,x} M_{H_2O}}{R_g T_g}, \quad (3.46)$$

donde  $M_{H_2O}$  es la masa molar del agua (en  $kg \text{ mol}^{-1}$ ) y  $R_g$  es la constante de gas ideal ( $J \text{ mol}^{-1} K^{-1}$ ).

### 3.3.2. Dióxido de carbono

El modelo de concentración del  $CO_2$  está dado por

$$\frac{V_g}{A_g} \frac{dC_{CO_2}}{dt} = -\eta_{CO_2/d_w} P + \eta_{CO_2/d_w} R - \varphi_{CO_2,g,o}^{vent} + u_{CO_2}, \quad (3.47)$$

donde  $\eta_{CO_2/d_w} P$  y  $\eta_{CO_2/d_w} R$  son  $CO_2$  pérdidas o ganancias debido a la fotosíntesis y respiración respectivamente, podría considerarse como una perturbación debido a que las ecuaciones biológicas de la evapotranspiración no se consideran.

El intercambio de  $CO_2$  con el interior ( $C_{CO_2}$ ) y exterior ( $C_{CO_2,o}$ ) del invernadero debido a la ventilación está dado por

$$\varphi_{CO_2,g,o}^{vent} = u_v (C_{CO_2} - C_{CO_2,o}). \quad (3.48)$$

El suministro de  $CO_2$  puede expresarse como la abertura de una válvula ( $u_{CO_2}^{vp} \in [0, 1]$ ):

$$u_{CO_2} = u_{CO_2}^{vp} \varphi_{CO_2,in,g}^{max}, \quad (3.49)$$

donde  $\varphi_{CO_2,in,g}^{max}$  es el flujo máximo de  $CO_2$  proporcionado por el tanque de  $CO_2$ .

## 3.4. Modelo Matemático

El modelo de la sección anterior se considera como referencia, excepto por algunas consideraciones: el invernadero se considera sin plantas, de manera que el término de evapotranspiración  $q_{g,c}^{trans}$  y  $E_c$  no se incluyen. Además, ya que no existe cultivo,  $-\eta_{CO_2} P + \eta_{CO_2} R$  son cero. No se cuenta con un sistema de inyección de  $CO_2$ , así que  $u_{CO_2}$  es cero.

Con las consideraciones previas, el modelo matemático del invernadero es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 K_g \frac{dT_g}{dt} &= q_{o,g}^{rad} - q_{g,o}^{vent} - q_{g,o}^{cond} - q_{g,s} + q_{p,g} - q_{g,h} + q_{g,r}^{cons} \\
 K_s \frac{dT_s}{dt} &= q_{g,s} - q_{s,ss} \\
 \frac{V_g}{A_g} \frac{dC_{H_2O}}{dt} &= \varphi_{H_2O,h,g} - \varphi_{H_2O,g,o}^{vent} - \varphi_{H_2O,g,r}^{cons} \\
 \frac{V_g}{A_g} \frac{dC_{CO_2}}{dt} &= -\varphi_{CO_2,g,o}^{vent} \\
 K_p \frac{dT_p}{dt} &= q_{boil,p} - q_{p,g} + q_{o,p}^{rad}.
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

### 3.5. Modelado en Redes de Petri Continuas Temporizadas

Al usar las *TCPN* como metodología de modelado se tiene diferentes ventajas como: la representación gráfica de las variables que permiten un mejor entendimiento de la interacción entre ellas; los límites de los actuadores se representan por medio del marcado de los lugares; la metodología permite la construcción del modelo de manera modular, así los elementos pueden añadirse o eliminarse. De esta manera usando la metodología reportada en [5] donde se presenta un modelo de invernadero en *TCPN* de la temperatura, concentración de vapor de agua, con ventiladores, ventanas y un humidificador, se añade un sistema de calefacción para la manipulación de la temperatura.

La metodología reportada en [5] es incremental y consiste en:

1. Los módulos elementales son definidos conforme a cada ecuación básica implicada en las leyes de conservación de energía.
2. Las variables del sistema son asociadas a los lugares y las perturbaciones a los lugares función.
3. Los módulos deben representar el efecto físico de las variables usando los módulos elementales.
4. Teniendo los módulos, se unen para formar el sistema.
5. El marcado inicial y las tasas de disparo de las transiciones son dadas por los parámetros del plástico y capacidades de los dispositivos o algunas de ellas se pueden medir por

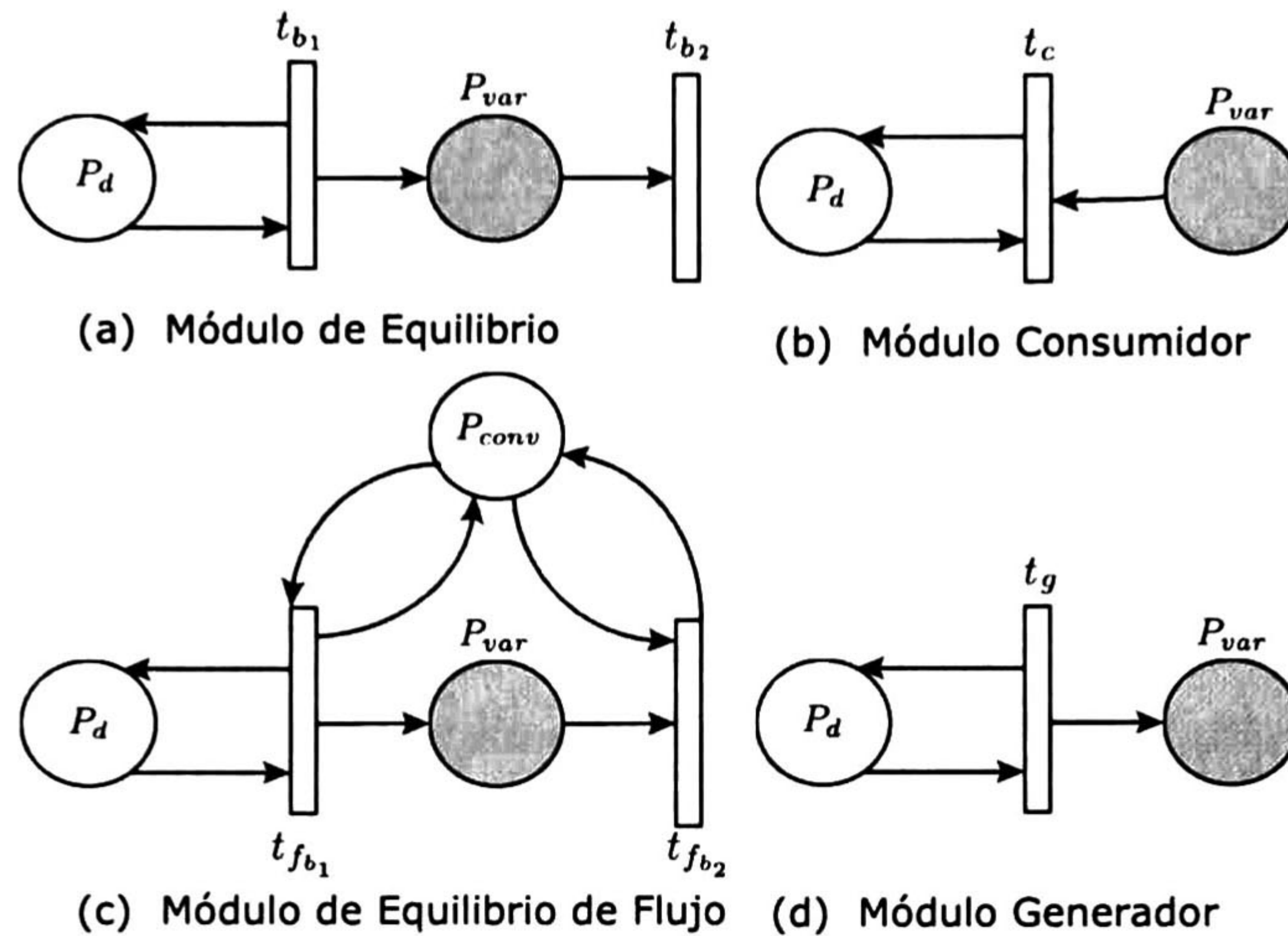


Figura 3.2: Módulos elementales en TCPN.

una estación meteorológica y el resto de ellos pueden estimarse mediante un algoritmo de regresión.

Se debe notar que el modelo final es un sistema híbrido, donde los elementos de las ecuaciones de balance térmico y de masa pueden ser modeladas por separado, en variables que buscan controlarse, dispositivos de control y perturbaciones. Por lo tanto, es mejor utilizar diversos módulos elementales como formalismo de modelado: **módulo Generador**, **módulo Consumidor**, **módulo de Equilibrio** y **módulo de Equilibrio de flujo** (ver Fig. 3.2).

Un módulo elemental se dice de **equilibrio** como se muestra en la Fig. 3.2 (a) si contiene un lugar  $p_{var}$  con un marcado  $m_{var}$ , el cual representa una variable  $x$ ; un lugar función  $p_d$  con un marcado  $m_d$  asignado que representa una función  $d(\tau)$ ; y se crean dos transiciones  $t_{b_1}$  y  $t_{b_2}$  (semántica de servidores infinitos) con flujo máximo  $\lambda_{b_1} = \lambda_{b_2} = k$  que representa un factor de ganancia. Cuando  $m_{var} \leq m_d$ , el marcado en la variable se incrementa; y cuando  $m_{var} \geq m_d$ , el marcado en la variable decrece. En otras palabras,  $m_{var}$  trata de igualar el valor en  $m_d$  ya que las tasas de disparo de ambas transiciones son iguales ( $\lambda_{b_1} = \lambda_{b_2}$ ).

Un módulo elemental se dice **consumidor** como se muestra en la Fig. 3.2 (b) si tiene un lugar  $P_{var}$  con un marcado asignado  $m_{var}$  representa una variable  $x$ ; un lugar función  $P_d$  con un marcado  $m_d$  asignado que representa una función  $d(\tau)$ ; y se crea una transición  $t_c$  (semántica de servidores infinitos) con flujo máximo  $\lambda_c = k$  que representa un factor de ganancia. La variable  $P_{var}$  pierde energía o masa debido a  $P_d$ .

Un módulo elemental se dice de **equilibrio de flujo** como se muestra en la Fig. 3.2 (c) si representa un elemento de equilibrio con una relación proporcional de flujo. Se basa en



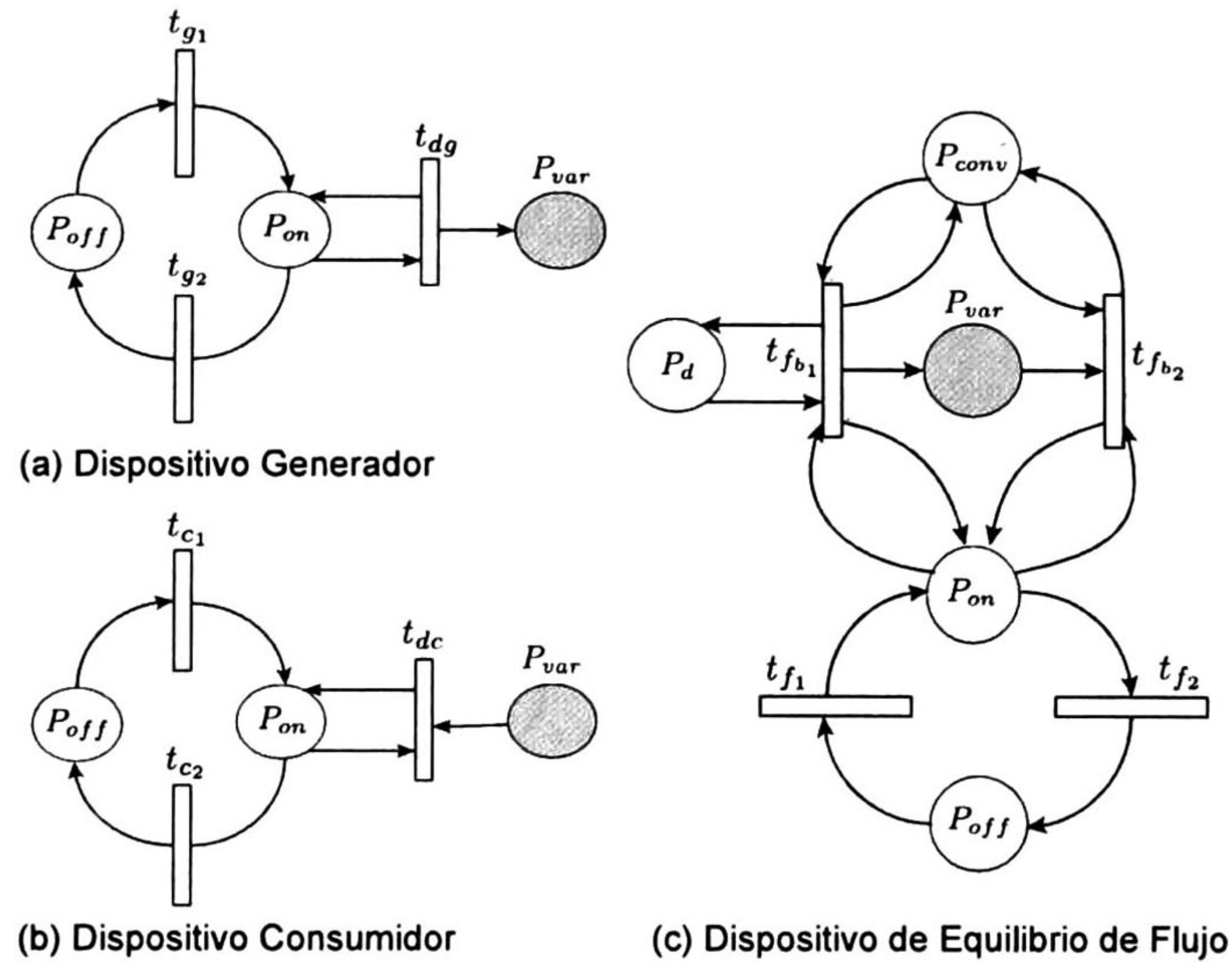


Figura 3.3: Otros módulos elementales en TCPN.

un módulo de equilibrio con un lugar extra  $P_{conv}$  con un marcado  $m_{conv}$  representando el fluido. Ya que es una relación proporcional, las transiciones  $t_{fb_1}$  y  $t_{fb_2}$  usan la semántica del producto.

Un módulo elemental se dice **generador** como se muestra en la Fig. 3.2 (d) si tiene un lugar  $P_{var}$  con un marcado asignado  $m_{var}$  representa una variable  $x$ ; un lugar función  $p_d$  con un marcado  $m_d$  asignado que representa una función  $d(\tau)$ ; y se crea una transición  $t_c$  (semántica de servidores infinitos) con flujo máximo  $\lambda_g = k$  que representa un factor de ganancia. La perturbación  $P_d$  añade energía o masa a la variable representada por  $P_{var}$ . El marcado  $m_d$  no se reduce y el marcado  $m_{var}$  depende de la función de flujo.

Los módulos de la Fig. 3.3 son controlados por un dispositivo, el cual tiene su propia dinámica que debe ser considerada en el diseño de la ley de control. El lugar  $P_{on}$  contiene el número de marcas que son transferidas a la variable del sistema  $P_{var}$ ; por ejemplo, si el ventilador no está encendido a su máxima capacidad, el flujo en un tiempo dado está representado por  $P_{on}$ , y el flujo faltante (flujo máximo menos flujo utilizado) por  $P_{off}$ .

Este modelo considera que el dispositivo tiene un número infinito de marcas por lo que los arcos no se ven afectados mientras se modifica  $m_{var}$ . Algunos de estos suministros son la energía eléctrica, agua, aire, etc.

Si la dinámica del actuador es más rápida que la del sistema, no es necesario usarla en el modelo. Por lo que su funcionamiento es similar a los módulos sin dispositivo vistos anteriormente.

$P_1$	$T_g$		$P_8$	$C_{H_2O_o}$
$P_2$	$T_s$		$P_9$	$C_{CO_2o}$
$P_3$	$C_{H_2O}$		$P_{10}$	$v$
$P_4$	$C_{CO_2}$		$P_{11}$	$F_{hum}$
$P_5$	$I_o$		$P_{12}$	$\varphi_{H_2O_{gr}}^{cons}$
$P_6$	$T_o$		$P_{13}$	$T_p$
$P_7$	$T_{ss}$		$P_{14}$	$T_{boiler}$

Tabla 3.1: Asignación de los lugares de la red a variables y perturbaciones físicas.

### 3.5.1. TCPN del invernadero

De acuerdo con el procedimiento en [5], primero se asocian los lugares con las variables implicadas: temperatura del invernadero  $T_g$ ; temperatura del suelo  $T_s$ ; concentración de  $H_2O$  y concentración de  $CO_2$ . Los lugares función son asociados con las perturbaciones: radiación solar  $I_o$ ; temperatura exterior  $T_o$ , temperatura del subsuelo  $T_{ss}$ ; concentración exterior de  $H_2O$ ; velocidad del viento  $v$ ; máximo flujo de agua del humidificador  $F_{hum}$ ; condensación del agua  $\varphi_{cons}$ , concentración exterior de  $CO_2$ , Temperatura del sistema de tuberías  $T_p$  y el máximo flujo de agua dentro de las tuberías  $F_p$ . Como se puede ver en la Tabla 3.1.

En segundo lugar, para la temperatura dentro del invernadero  $T_g$ , se crea un módulo generador para la radiación solar  $q^{rad(I_o)}$ ; un módulo consumidor para el humidificador  $F_{hum}$  ( $q^{hum}$ ); un módulo de equilibrio para la temperatura del suelo  $T_s$  ( $q^{T_s}$ ); y un módulo de equilibrio de flujo para controlar la ventilación natural ( $q^{vent}$ ). Para modelar la humedad del invernadero  $C_{H_2O}$ , se crean un módulo generador para el humidificador  $F_{hum}$  ( $\varphi^{hum}$ ); un módulo de equilibrio para la humedad exterior  $C_{H_2O}$ ; y un módulo de equilibrio de flujo para controlar la ventilación natural ( $\varphi^{vent}$ ).

También se modela la temperatura del suelo, la concentración de  $CO_2$  y el sistema de tuberías para la calefacción con el mismo procedimiento, se crea el restante de los módulos para cada variable como se observa en la Tabla 3.2 (donde el valor de los parámetros se encuentran en [36]).

Entonces, por la unión modular se obtiene el modelo del invernadero en TCPN como se muestra en la Fig. 3.4, el cual es el modelo reportado en [5] más el sistema de calefacción por tuberías. La ecuación de estados es descrita de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\dot{m}_1 &= (-I_{c1}\lambda_5 m_1 m_{10} - (\lambda_7 + \lambda_6 + I_{c3}\lambda_{23})m_1 + \lambda_4 m_2 + (I_{c1}\lambda_2)m_6 m_{10} + \lambda_3 m_6 \\
&\quad + \lambda_3 m_6 - I_{c2}\lambda_{10} m_{11} + I_{c3}\lambda_{22} m_{13} + \lambda_{11} m_{12} + \lambda_1 m_5)/K_g \\
\dot{m}_2 &= (\lambda_8 m_1 - (\lambda_9 + \lambda_{13})m_2 + \lambda_{12} m_7)/K_s \\
\dot{m}_3 &= (-I_{c1}\lambda_{15} m_3 m_{10} + I_{c1}\lambda_{14} m_8 m_{10} + I_{c2}\lambda_{16} m_{11} - \lambda_{17} m_3)[A_g/V_g] \\
\dot{m}_4 &= (-I_{c1}\lambda_{19} m_4 m_{10} + I_{c1}\lambda_{18} m_9 m_{10})[A_g/V_g] \\
\dot{m}_{13} &= I_{c3}(\lambda_{20} m_1 - \lambda_{21} m_{13} + \lambda_{24} m_{14} - \lambda_{26} m_{13} + \lambda_{25} m_5)/K_p.
\end{aligned} \tag{3.51}$$

En la Fig. 3.4 se muestra el modelo en *TCPN* de un invernadero, donde se muestra con líneas punteadas el humidificador y el sistema de calefacción; las transiciones en color negro representan las transiciones controlables del sistema, dichas transiciones se activan en pares, esto significa que al activarse la transición  $t_{10}$  del humidificador también se activa la transición  $t_{16}$ , esto debido a que el humidificador disminuye la temperatura pero afecta la humedad relativa. Los actuadores de las ventanas intercambian flujo de aire que afecta la temperatura interna, así como la humedad relativa y dióxido de carbono. Para la ley de control se toma en cuenta el grado de contribución de las transiciones que afectan la temperatura ( $t_5, t_{10}, t_{22}$ ).

Con el fin de validar la metodología usada, se realizó una comparación entre el modelo obtenido y el propuesto en [36]. Las simulaciones se realizaron en MATLAB<sup>®</sup>/Simulink<sup>®</sup> software obteniendo resultados similares. Por lo que, la metodología usando *TCPN* captura de manera fidedigna la dinámica de este tipo de sistemas.

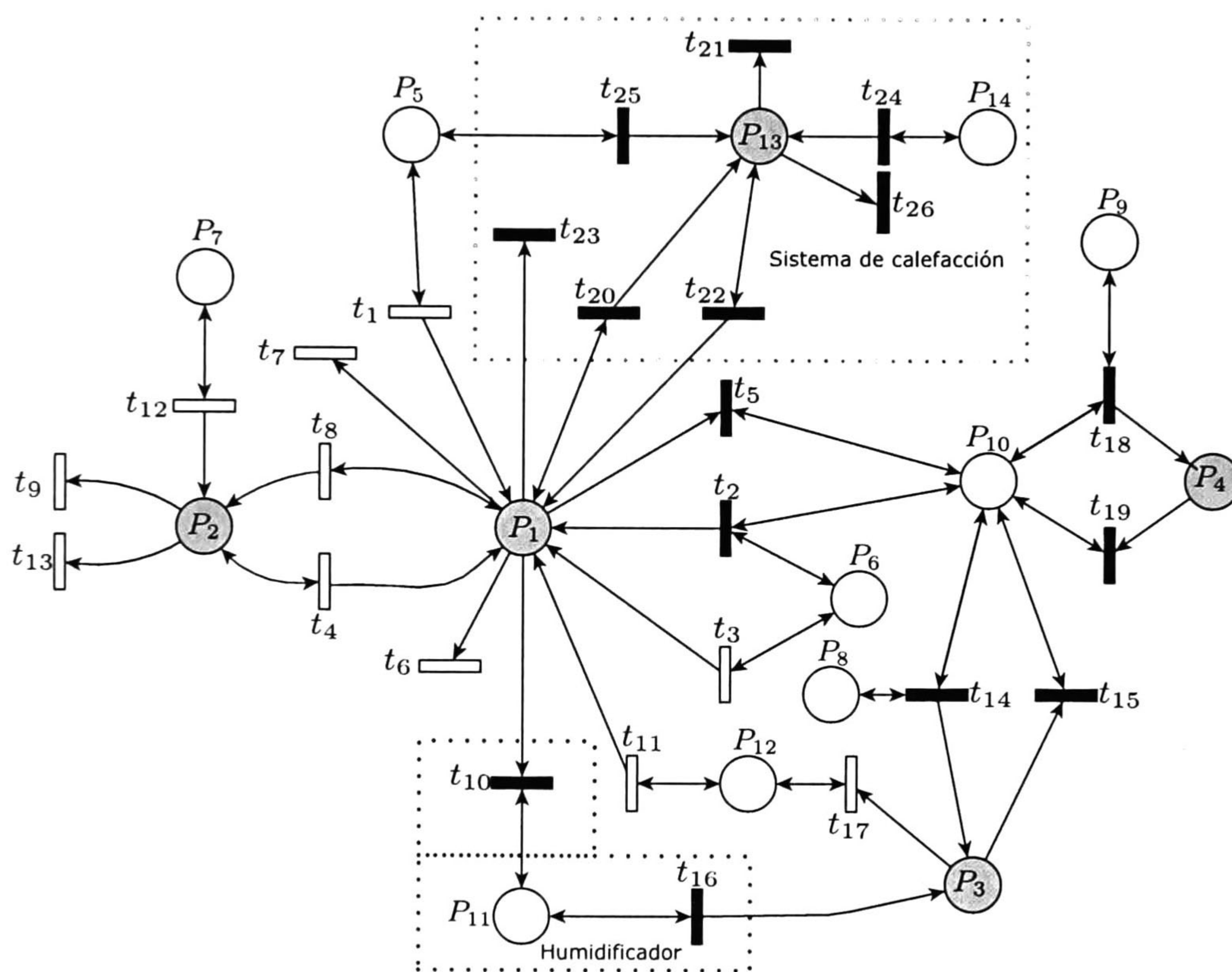


Figura 3.4: Modelo del invernadero en TCPN

Relación	Flujo	Perturbación	Variable	Módulo	Transiciones
Radiación Solar	$q(I_o)$	$I_o$	$m_5$ $T_g$	$m_1$ Generador	$t_1 = \eta_g$
Convección controlada $I_{c1}$	$q(T_o, v, T_g)$	$T_o$	$m_6$ $T_g$	$m_1$ D. Equilibrio de flujo	$t_2 = \rho_a c_{p,a}$ y $t_5 = \rho_a c_{p,a}$
Convección por plástico	$q(T_o, T_g)$	$T_o$	$m_6$ $T_g$	$m_1$ Equilibrio	$t_3 = U_{g,o}$ y $t_6 = U_{g,o}$
Intercambio con el suelo	$q(T_s, T_g)$	$T_s$	$m_2$ $T_g$	$m_1$ Equilibrio	$t_4 = U_{g,s}$ y $t_7 = U_{g,s}$
Perdida por evaporación $I_{c2}$	$q(F_{hum})$	$F_{hum}$	$m_{11}$ $T_g$	$m_1$ Dispositivo Consumidor	$t_{10} = \gamma \rho_{H_2O} (1 - k_1) U_{hum} / A_g$
Perdida por condensación	$q(\varphi_{H_2O_{g,r}}^{cons})$	$\varphi_{H_2O_{g,r}}^{cons}$	$m_{12}$ $T_g$	$m_1$ Generador	$t_{11} = \gamma(1 - k_2)$
Sistema de calefacción $I_{c3}$	$q(T_p, T_g)$	$T_p$	$m_{13}$ $T_g$	$m_1$ D. Equilibrio de flujo	$t_{20} = t_{21} = U_{p,g}$ $t_{22} = t_{23} = U_{p,g}$ $t_{24} = t_{26} = 2\rho_{H_2O} c_{p,H_2O} F_p / A_g$ $t_{25} = \eta_p$
Intercambio con el aire	$q(T_g, T_s)$	$T_g$	$m_1$ $T_s$	$m_2$ Equilibrio	$t_8 = U_{g,s}$ y $t_9 = U_{g,s}$
Conducción subsuelo	$q(T_{ss}, T_s)$	$T_{ss}$	$m_7$ $T_s$	$m_2$ Equilibrio	$t_{12} = U_{sss}$ y $t_{13} = U_{sss}$
Ganancia por evaporación $I_{c2}$	$q(F_{hum}, C_{H_2O})$	$F_{hum}$	$m_{11}$ $C_{H_2O}$	$m_3$ Dispositivo Generador	$t_{16} = \rho_{ag} (1 - k_1) / A_g$
Intercambio controlado $I_{c1}$	$q(C_{H_2O_{g,r}}, v, C_{H_2O})$	$C_{H_2O_{g,r}}$	$m_8$ $C_{H_2O}$	$m_3$ D. Equilibrio de flujo	$t_{14} = 1$ y $t_{15} = 1$
Perdida de vapor por condensación	$q(\varphi_{H_2O_{g,r}}^{cons}, C_{H_2O})$	$\varphi_{H_2O_{g,r}}^{cons}$	$m_{12}$ $C_{H_2O}$	$m_3$ Consumidor	$t_{17} = 1$
Intercambio controlado $I_{c1}$	$q(CO_{2_{g,r}}, v, CO_2)$	$CO_{2_{g,r}}$	$m_9$ $CO_2$	$m_4$ D. Equilibrio de flujo	$t_{18} = 1$ y $t_{19} = 1$

Tabla 3.2: Módulos creados para el modelo del invernadero.

## Capítulo 4

# Propuesta de Control

*En este capítulo se presenta una estrategia de control en Redes de Petri Continuas Temporizadas [16] de manera que, de un marcado inicial se pueda ir a un marcado alcanzable utilizando el grado de contribución de las transiciones controlables. La ley de control se aplica al invernadero modelado en el capítulo anterior.*

### 4.1. Ley de Control

El control del invernadero se plantea como un problema de regulación, en el cual se establece un punto de equilibrio (temperatura deseada del invernadero) y se calcula la matriz  $I_c$ . Dado que el conjunto  $E_g = \{a_1, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\}$  representa un conjunto de eventos, los valores de control en  $I_c$  en la ecuación (2.32) serán cero o uno.

La ley de control que resuelve el problema de regulación se obtiene en base a los resultados en [16], en donde se lidia con el problema de control en  $TCPN$  vivas y acotadas, con todas las transiciones controlables y con semántica de servidores infinitos. En este trabajo, se extiende la aplicación de dicha estrategia de control a un sistema híbrido no lineal, por esta razón se utiliza la semántica de producto para representar la no linealidad del sistema. Además, el modelo tiene transiciones controlables e incontrolables, lo que reduce el espacio de alcanzabilidad del sistema. A continuación se presentan los resultados reportados en [16]:

**Definición 4.1.** Sea  $(N, m_0, \lambda)$  una  $TCPN$  viva y acotada y  $m_r \in \text{int}(T_R)$  el marcado deseado. Entonces el error del marcado se calcula como

$$e(\tau) = m_r - m(\tau). \quad (4.1)$$

**Lema 4.1.** [16] Sea  $(N, m_0, \lambda)$  una  $TCPN$  y  $m_r \in \text{intRS}(N, m_0)$  el marcado requerido. Sea  $b$  un  $P$ -semiflujo de  $N$ . Entonces  $b^T e(\tau) = 0$ .

*Demostración.* De la definición del error del marcado se tiene que  $b^T e(\tau) = b^T (m_r - m(\tau))$ . Ya que  $b$  es un  $P$ -semiflujo, entonces  $b^T m_r = b^T m(\tau)$ . Por lo tanto  $b^T e(\tau) = 0$ . ■

**Definición 4.2.** Sea  $(N, m_0, \lambda)$  una  $TCPN$  viva y acotada. El grado de contribución  $\Psi_k(\tau)$  de la transición  $t_k$  de  $N$  se define como

$$\Psi_k(\tau) = e^T(\tau)c_k, \quad (4.2)$$

donde  $c_k$  es la  $k$ -ésima columna de la matriz de incidencia  $C$ .

Notar que el grado de contribución representa la proyección (producto punto) de cómo la transición quita/añade marcas (columna  $c_k$ ) sobre el error. Por lo tanto da información sobre la capacidad de dicha transición de disminuir el error de marcado.

**Lema 4.2.** [16] Sea  $(N, m_0, \lambda)$  una  $TCPN$  viva y acotada y  $v$  un  $T$ -semiflujo de  $N$ . Entonces  $\sum_{t_k \in |v|} v_k \Psi_k(\tau) = 0$ .

*Demostración.* Al ser  $v$  un  $T$ -semiflujo se cumple que  $Cv = 0$  por tanto

$$\sum_{t_k \in |v|} v_k \Psi_k(\tau) = e^T(\tau)Cv = 0.$$

■

Del Lema 4.2 se tiene que la suma del grado de contribución de cada transición en un  $T$ -semiflujo es cero, por lo tanto existen transiciones con grado de contribución positivo y otras negativo.

**Teorema 4.1.** [16] Sea  $(N, m_0, \lambda)$  una  $TCPN$  viva y acotada donde todas las transiciones son controlables. Entonces, la ley de control

$$I_{c_k} = \begin{cases} 1 & \text{si } \Psi_i > 0 \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (4.3)$$

lleva del marcado inicial  $m_0 = m(0)$  al marcado requerido  $m_r \in \text{int}(T_R)$ .

*Demostración.* Sea  $V(\bullet)$  una función

$$V(e) = \frac{1}{2}e^T(\tau)e(\tau). \quad (4.4)$$

Proponemos que  $V(e)$  es una función de Lyapunov, esto es, definida positiva, su derivada es definida negativa y satisface que  $\dot{V}(x) = 0$  únicamente en  $x = 0$ , como se muestra a continuación.

Claramente (4.4) es definida positiva. Ahora, la derivada de  $V(e)$  es

$$\dot{V}(e) = e^T(\tau)\dot{e} = -e^T(\tau)CI_c f(\tau). \quad (4.5)$$

Recordemos que  $m_r \in \text{int}(T_R)$ , entonces para cada tiempo  $\tau$  existe un vector de disparo  $\sigma(\tau) > 0$  tal que  $e(\tau) = m_r - m(\tau) = C\sigma(\tau)$ . Así

$$e^T(\tau)e(\tau) = e^T(\tau)C\sigma(\tau) > 0, \quad (4.6)$$

para  $e(\tau) \neq 0$ . Reescribiendo (4.6) se tiene

$$\begin{aligned} e^T(\tau)C\sigma(\tau) &= e^T(\tau)[\sigma_1 c_1 + \sigma_2 c_2 + \cdots + \sigma_{|T|} c_{|T|}] \\ &= \sigma_1 e^T(\tau)c_1 + \sigma_2 e^T(\tau)c_2 + \cdots + \sigma_{|T|} e^T(\tau)c_{|T|} > 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

También toda  $\sigma_i$  depende de  $\tau$ . Como  $\forall i, \sigma_i \geq 0$  entonces existe por lo menos una  $c_k$  tal que  $\sigma_k e^T(\tau)c_k > 0$  para  $e(\tau) \neq 0$ . Notar que  $\sigma_k > 0$  es estrictamente positivo, por lo que  $e^T(\tau)c_k > 0$  es también estrictamente positivo, así, de la ecuación (4.3) se tiene que  $I_c(k) = 1$ . Substituyendo estos valores en (4.5),  $\dot{V}(e)$  puede ser cero o negativo. Si la ecuación (4.5) es negativa, entonces la derivada de la función de Lyapunov es negativa, reduciendo el error.

Sin embargo, la ecuación (4.5) puede ser cero cuando el error sea diferente de cero si y solo si  $f(\tau) = 0$  o  $I_c f(\tau) = 0$  o  $I_c f(\tau) \neq 0$  está en el kernel  $C$  or  $CI_c f(\tau)$  está en el kernel de  $e^T$ . Ahora, se muestra que dichos casos no son posibles.

En el primer caso  $f(\tau) = 0$ , lo que significa que la  $TCPN$  se ha bloqueado, por lo que no se trata de una red viva y nos lleva a un contradicción.

En el segundo caso donde  $I_c f(\tau) = 0$ , el flujo de las transiciones está siendo bloqueado por  $I_c$  debido a los grados de contribución positivos y negativos pero  $I_c$  es no bloqueante, por lo que el flujo de una de las transiciones es cero. Como la  $TCPN$  es viva y acotada, entonces por el Lema 4.2 existen grados de contribución positivos y negativos. Por lo que existe un  $I_c(k) = 1$  con su correspondiente flujo  $f_k = 0$ . Entonces al menos un lugar de entrada  $t_k$  tiene cero marcas, lo cual significa que el marcado  $m$  está en la frontera, por lo que no está en  $\text{int}(T_R)$ , y  $\dot{V} = 0$ . Entonces  $N$  no está evolucionando en absoluto. Como el error no es cero, existe una transición  $t_{j_1}$  tal que  $I_c(\tau)(j_1) = 1$ , y  $t_{j_1}$  que no puede ser disparada, por lo que algún lugar de entrada  $p_{k_1}$  a  $t_{j_2}$  se encuentra desmarcado. Como el marcado requerido está dentro de  $\text{int}RS(N, m_0)$ , entonces  $m_r(k_2) > 0$  y  $e(k_1) > 0$ . Así, el lugar  $p_{k_1}$  requiere marcas. Sea  $t_{j_2}$  una transición de entrada de  $p_{k_1}$ . Dos casos son posibles,



$I_c(\tau)(j_2) = 0$  o  $I_c(\tau)(j_2) = 1$ . Si  $I_c(\tau)(j_2) = 0$  entonces por lo menos un lugar de entrada  $p_{k_2}$  de  $t_{j_2}$  requiere marcas (por lo menos tantas marcas como  $p_{k_1}$  requiere). Si  $I_c(\tau)(j_2) = 1$  entonces  $t_{j_2}$ , al igual que  $t_{j_1}$ , no puede ser disparada, lo que quiere decir que al menos un lugar de entrada  $p_{k_2}$  de  $t_{j_2}$  está desmarcado. Este procedimiento puede repetirse hasta que  $t_{j_1}$  vuelva a ser visitado ya que  $N$  es viva. Dos casos son posibles, todos los lugares  $p_{k_2}, \dots, p_{k_1}$  requieren marcas, lo que implica que  $m_r$  no sea alcanzable, o que existe un sifón vacío (un  $P$ -semiflujo no marcado) implicando que  $N$  es no viva. En ambos casos una contradicción.

En el tercer caso  $I_c f(\tau) \neq 0$  está en el kernel de  $C$ , entonces un  $T$ -semiflujo  $\Upsilon$  compuesto por las transiciones  $t_a, \dots, t_n$  está siendo disparado por completo. Lo cual significa que  $\Psi_a(\tau) > 0, \dots, \Psi_n(\tau) > 0$ . Sin embargo, por el Lema 4.2, se sabe que en un  $T$ -semiflujo  $\Upsilon$  existen grados de contribución positivos y negativos  $\Psi_\bullet(\tau)$ . Así, no todos los  $\Psi_\bullet(\tau)$  son positivos y  $I_c f(\tau)$  no puede formar un  $T$ -semiflujo en ningún tiempo  $\tau$ . Una contradicción.

En el cuarto caso  $CI_c f(\tau)$  está en el kernel de  $e^T$ , lo cual no es posible porque  $I_c$  se escoge para que la ecuación (4.7) sea positiva seleccionando únicamente los términos que la hacen positiva, así, aunque  $f_k$  no sea igual a  $\sigma_k$ , es positiva y (4.5) no puede ser cero.

Por lo tanto  $\dot{V}(e) = -e^T(\tau)CI_c f(\tau) < 0$  en todos los casos, Esto implica que la ecuación (4.4) es una función de Lyapunov. Entonces, el error es asintóticamente estable y el control (4.3) lleva el marcado  $m_0$  a  $m_r$ . ■

Notar que el cálculo del control (4.3) se realiza en tiempo polinomial.

## 4.2. Control del Invernadero

En esta sección se presenta la aplicación de la ley de control sobre el modelo de temperatura y humedad relativa presentado en el capítulo anterior con el propósito de mantener una temperatura de referencia en el invernadero. Para esto se tienen las siguientes consideraciones: todas las variables físicas son medibles, el modelo del invernadero cuenta con transiciones controlables e incontrolables por lo que la temperatura de referencia (marcado de referencia) debe ser un marcado de equilibrio dentro del espacio alcanzable de la red; se tomarán en cuenta las transiciones controlables de los actuadores que permiten manipular la temperatura. Las ventanas, ventiladores y humidificador disminuyen la temperatura, mientras el sistema de calefacción por tuberías la aumenta, las variables de concentración de vapor de agua y de  $CO_2$  se consideran sin restricciones.

Las tasas de disparo de las transiciones están en base de los parámetros nominales reportados en [36] como se muestra en la Tabla 3.2. En las Tablas 4.1 y 4.2 se muestran los parámetros de simulación utilizados, cabe mencionar, que dichos parámetros pueden estimarse por un algoritmo de regresión. El invernadero cuenta con los siguientes actuadores:

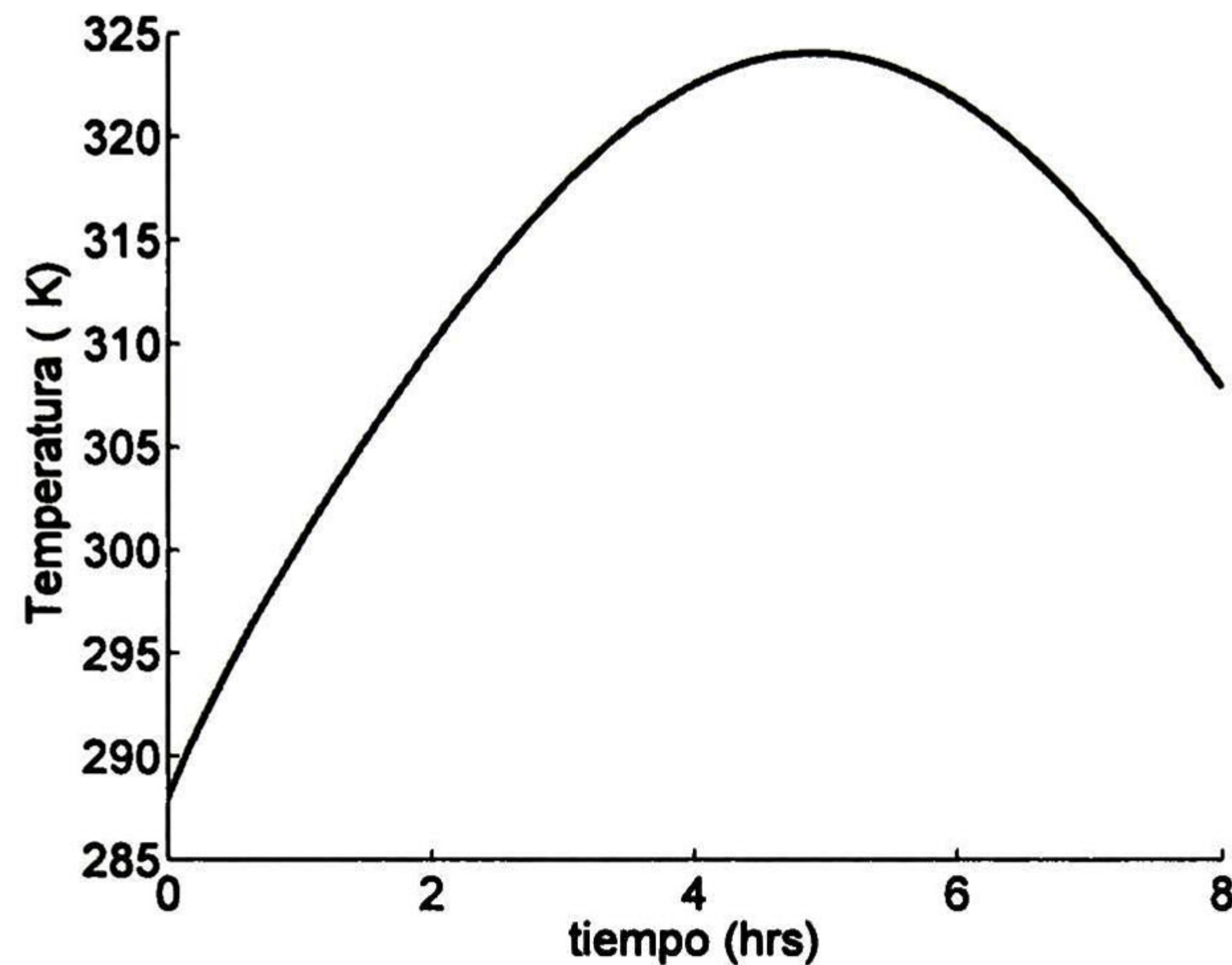


Figura 4.1: Simulación de la temperatura dentro del invernadero sin control.

ventanas (motores), ventiladores, humidificador y sistemas de calefacción (ver Fig. 3.1). Notar que, las ventanas, ventiladores y el sistema de calefacción son representados como módulos de equilibrio. Sin embargo, el humidificador se representa como un módulo consumidor.

El módulo generador (radiación solar, condensación de la humedad en paredes y techo) incrementa la temperatura interna, mientras el módulo consumidor la reduce. Para establecer las condiciones ambientales, si la calefacción del invernadero se enciende y el sistema de enfriamiento se desactiva, la temperatura interna alcanza su valor máximo ( $T_{max}$ ); en caso contrario si se desactiva el sistema de calefacción y se activa el humidificador, la temperatura interna alcanza su valor mínimo ( $T_{min}$ ). Por lo tanto la temperatura interior es controlada en dicho rango  $T_R = [T_{min}, T_{max}]$ .

Se implementó la metodología descrita en el capítulo anterior en una **Interfaz Gráfica de Usuario GUI** en MATLAB®/Simulink® software. Cada módulo elemental es representado por un elemento (ícono) en la interfaz el cual es añadido de manera modular al modelo en *TCPN* del invernadero. Por lo tanto, la *GUI* provee facilidades de manipular el sistema del invernadero, cualquier operador puede fácilmente utilizarlo, solo con seleccionar el ícono del actuador o sensor de la interfaz y unirlo con otro elemento, de manera que se puede utilizar para distintos invernaderos con diferentes elementos (actuadores/sensores).

En la Fig. 4.1 se muestra la temperatura dentro del invernadero  $T_g$ , durante un periodo de 8 horas. Se aprecia que la temperatura va en aumento y decrece con el ocaso. Sin embargo, el problema de obtener un ambiente óptimo para la producción de la cosecha dentro de un invernadero, depende de la habilidad de controlar la temperatura interna.

Lugares	
$I_o$	$= 400 \text{ sen}(0.00011t) \text{ W/m}^2$
$T_o$	$= 298 + 7 \text{ sen}(0.00011t) \text{ K}$
$T_{ss}$	$= 293.15 + 3 \text{ sen}(0.00011t) \text{ K}$
$C_{H_2O_o}$	$= 0.0060692 + 0.002 \text{ sen}(2t) \text{ kg/m}^3$
$v$	$= \begin{cases} h(t) & \text{for } h(t) = 10 \text{ sen}(0.001t) \geq 1 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$
$\varphi_{cons}$	$= 3 \times 10^{-10} + 2 \times 10^{-10} \text{ sen}(t) \text{ kg/}^2\text{s}$

Tabla 4.1: Parámetros de simulación para los lugares del modelo del invernadero.

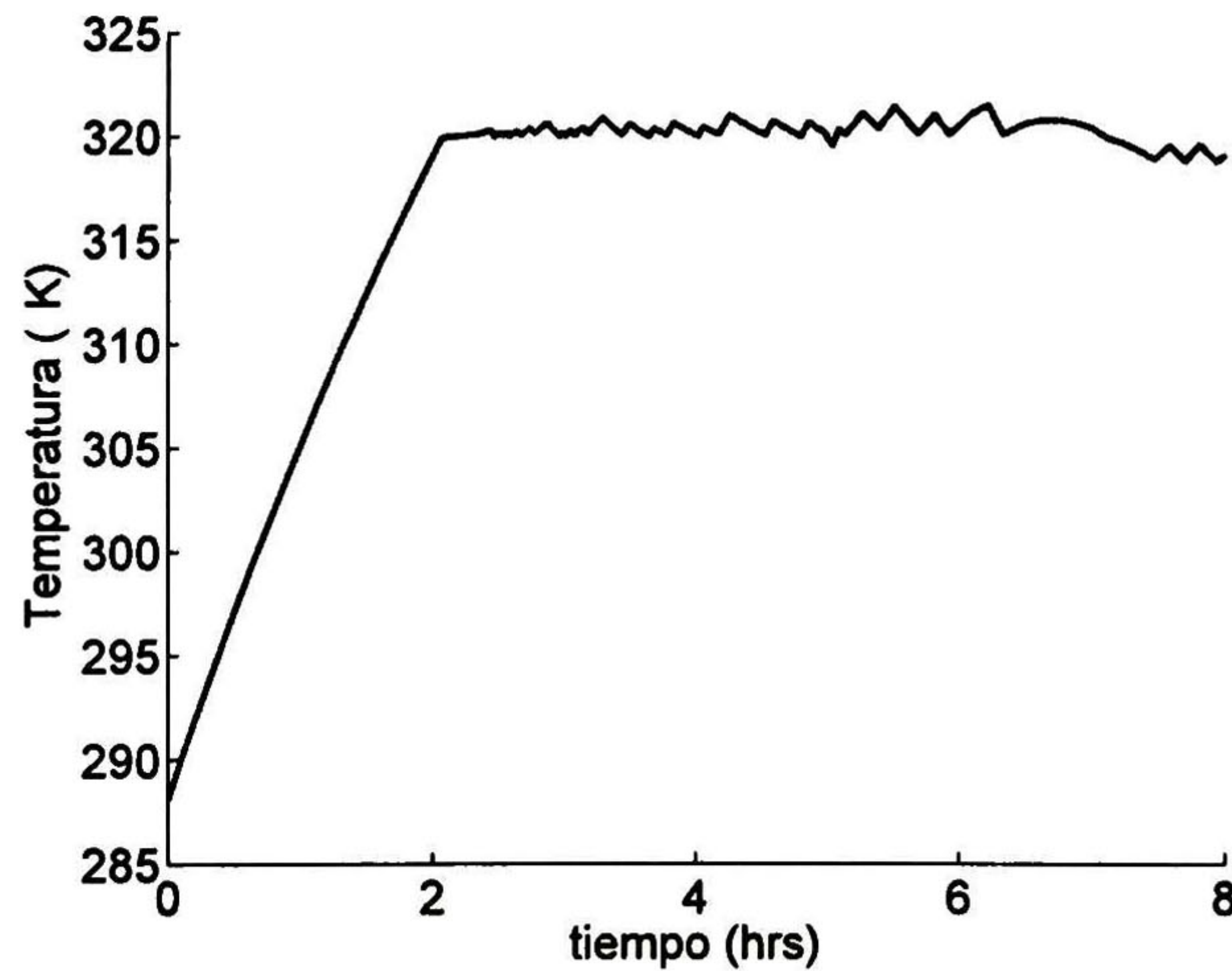


Figura 4.2: Simulación de la temperatura interna controlada (marcado deseado  $m_1 = 320K$ ).

Para facilitar la aplicación de la estrategia de control, se considera que las ventanas y ventiladores se activan con la misma señal de control  $I_{c1}$ , en el caso del humidificador,  $I_{c2}$  es la señal de control. De manera similar,  $I_{c3}$  activa el sistema de calefacción. Las transiciones asociadas a los actuadores se les llamará transiciones controlables (transiciones en negro en Fig. 3.4), y es en las cuales se analiza su grado de contribución (4.3) (transiciones controlables:  $t_5$ ,  $t_{10}$  y  $t_{22}$ ) para el control de temperatura ( $m_1$ ). Se realizó la simulación del sistema con la propuesta de control descrita, estableciendo una temperatura de referencia (marcado deseado  $m_1 = 320^\circ K$ ) y también se considera que las otras variables climáticas no tienen restricciones.

La Fig. 4.2 presenta la temperatura interna con los actuadores funcionando, y se muestra que se alcanza la referencia con la estrategia de control propuesta. En la Fig. 4.3 se observa la evolución de la ley de control para los actuadores.

Transiciones	Condiciones iniciales
$t_1 = 0.5882$	$T_g = 288 K$
$t_2 = t_5 = 1.3029 \times 10^3$	
$t_3 = t_6 = 7.9$	$T_s = 298 K$
$t_4 = t_7 = 5.75$	$C_{H_2O} = 0.0026 kg/m^3$
$t_{10} = 39470900$	
$t_{11} = 565000$	
$t_8 = t_9 = 5.75$	
$t_{12} = t_{13} = 2$	
$t_{16} = 17.4650$	
$t_{14} = t_{15} = t_{17} = t_{18} = t_{19} = 1$	
$t_{20} = t_{21} = t_{22} = t_{23} = 4.7652$	
$t_{24} = 41.7164$	
$t_{25} = 0.1120$	

Tabla 4.2: Parámetros de simulación de las tasas de disparo de las transiciones y condiciones iniciales para el modelo del invernadero.

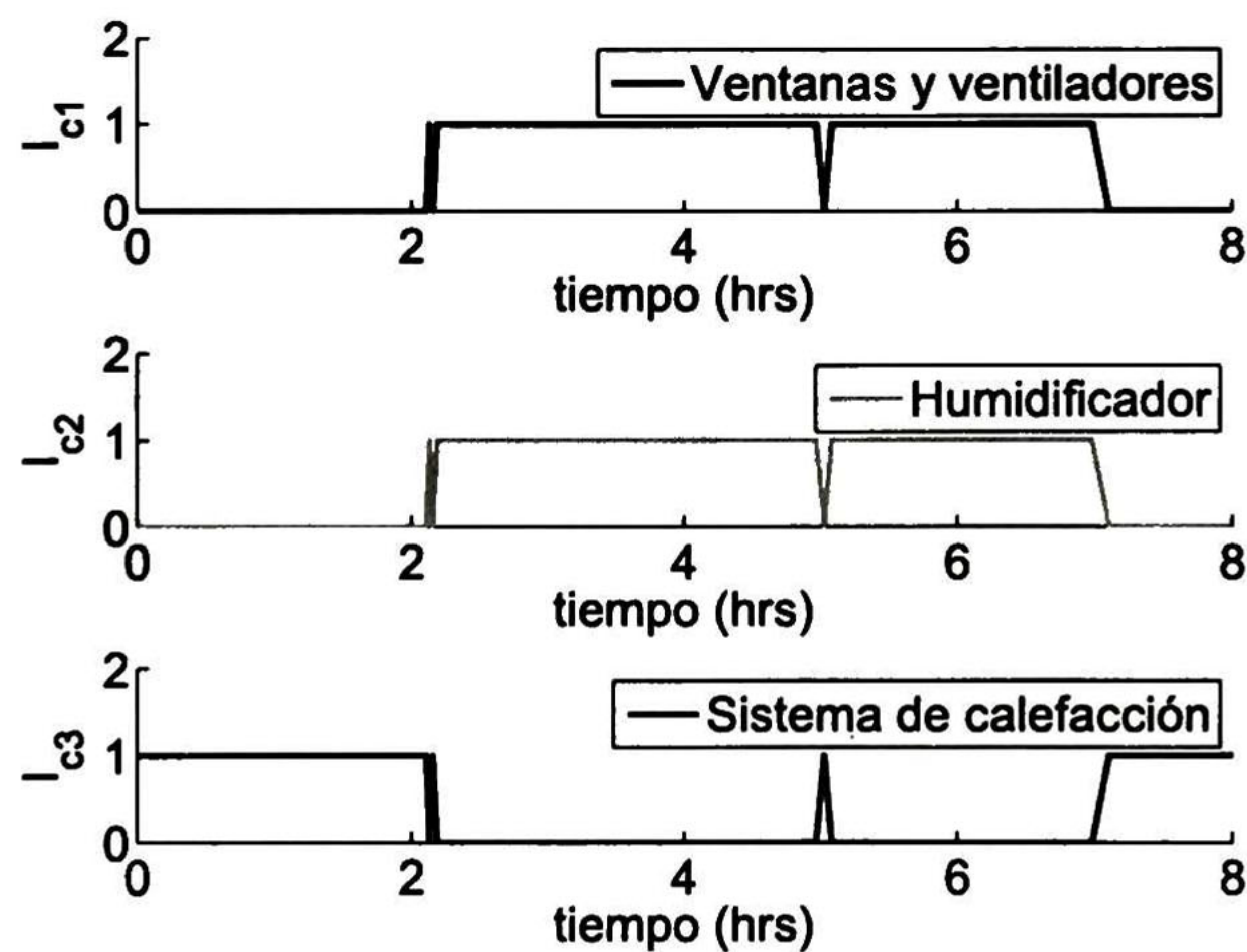


Figura 4.3: Ley de control para actuadores del modelo.

## Capítulo 5

# Detección de Faltas

*En este capítulo se propone el diseño e implementación de un diagnosticador para llevar a cabo la detección y localización de fallas. El diagnosticador se construye por medio de un observador en modos deslizantes, el cual estima el marcado de cada lugar. Además, se aborda el problema de la caracterización de diagnosticabilidad en TCPN. Se definen condiciones estructurales suficientes para diagnosticabilidad en TCPN.*

### 5.1. Introducción de Faltas al Modelo

Las fallas de sistemas se encuentran agrupadas en permanentes, intermitentes o transitorias. El presente trabajo se enfoca en detectar y localizar fallas permanentes, las cuales se presentan en la degradación de las máquinas cuando su rendimiento se reduce o el rechazo del producto generado está por encima de un límite preestablecido.

En TCPN el rendimiento máximo de la máquina se modela como el parámetro de la tasa de disparo de la transición. Por lo tanto, cuando el rendimiento de la máquina disminuye debido a una falla, la tasa de disparo (parámetro  $\lambda$ ) se reduce también en el modelo. El rechazo de los productos generados se modela como una transición de salida del lugar que representa el sitio de trabajo de la máquina; el modelo del sistema se enriquece mediante la adición de transiciones de falta. En el modelo en TCPN, la  $i$ -ésima falta de rechazo es representada por la transición  $t_{f_i}$  y un lugar llamado  $p_{f_i}$ . Se añaden arcos al lugar donde ocurre la falta.

Durante la evolución normal de la TCPN, el flujo de las transiciones de falta es igual a cero. Cuando la  $i$ -ésima falta ocurre, entonces el flujo de la transición  $t_{f_i}$  es diferente de cero (máxima tasa de disparo). En este trabajo  $F = \{f_1, \dots, f_n\}$  representa el conjunto de las posibles faltas

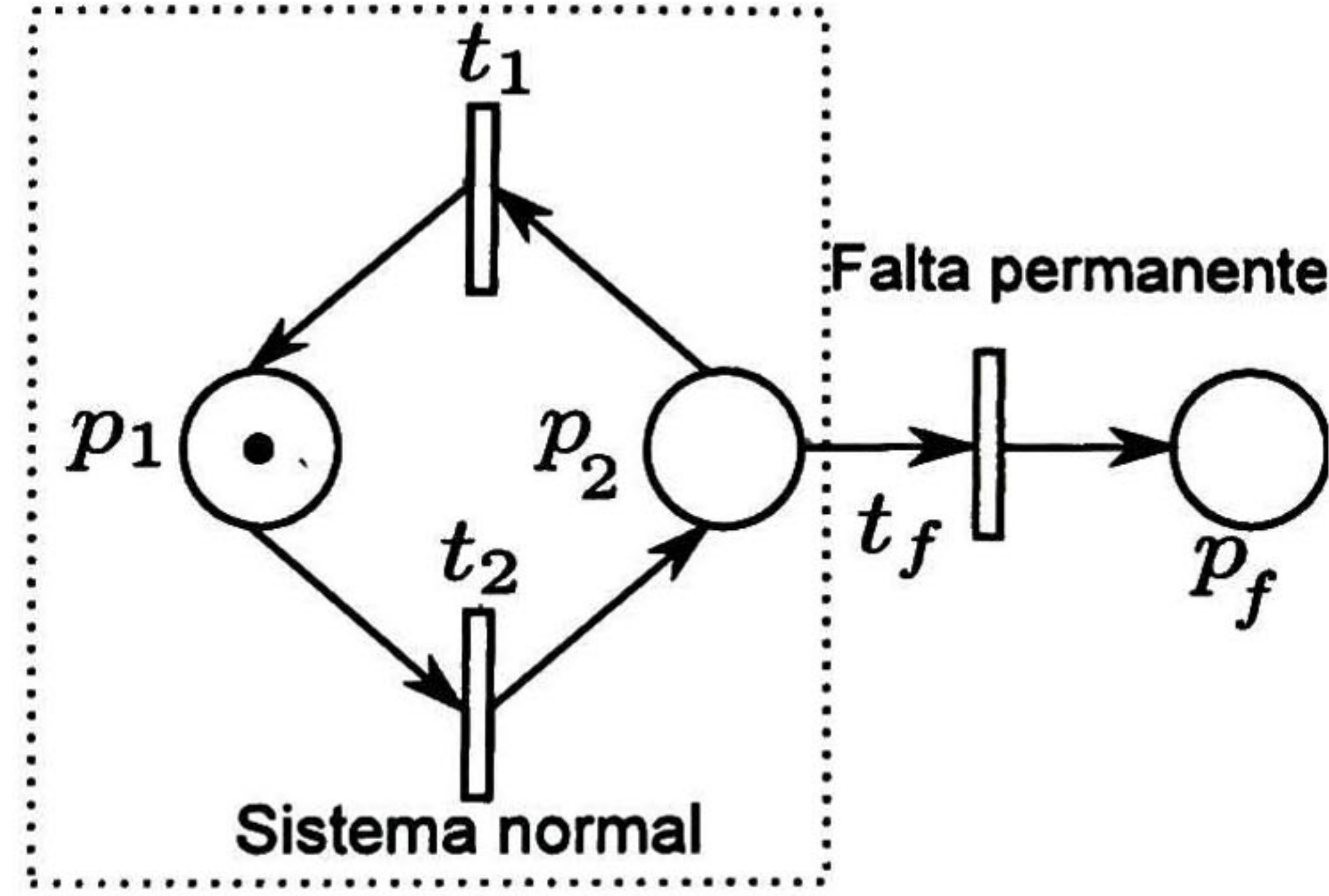


Figura 5.1: Introducción de faltas a la *TCPN*.

$$\dot{m} = C\Lambda_k\Pi_k m - \sum_{i=1}^{|P|} \gamma_i \lambda_{f_i} e_i m_i, \quad (5.1)$$

donde  $e_i$  es un vector elemental (todas las entradas igual a cero, excepto  $e_i(i) = 1$ ),  $\gamma_i \in [0, 1]$ ;  $\gamma_i = 1$  representa que la falta  $f_i$  está presente y  $\gamma_i = 0$  que la falta no está presente.

Renombrando  $\Gamma_{f_i} = [\gamma_i e_1, \dots, \gamma_{|P|} e_{|P|}]$  y  $\Lambda_f = \text{diag}(\lambda_{f_1}, \dots, \lambda_{f_{|P|}})$  y definiendo la  $|T_f| \times |P|$  matriz  $\Pi_f = I$ , entonces la ecuación (5.1) puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} \dot{m} &= [C_k \ 0] \begin{bmatrix} \Lambda_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_k \\ 0 \end{bmatrix} m - [0 \ \Gamma_{f_i}] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_{f_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \Pi_f \end{bmatrix} m \\ \dot{m} &= [C_k \ -\Gamma_{f_i}] \begin{bmatrix} \Lambda_k & 0 \\ 0 & \Lambda_{f_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_k \\ \Pi_f \end{bmatrix} m \\ y &= Sm. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Por lo tanto, la ecuación (5.2) representa el comportamiento normal y de falta de la *TCPN*. Como  $\Gamma_{f_i} \in [0, 1]$ , entonces el número de sistemas lineales pertenecientes a la familia de sistemas lineales conmutados (SLC) es multiplicado por  $|T_f|$ .

**Definición 5.1.** En una *TCPN* una falta  $f_i$  se dice detectable si la ocurrencia de la falta puede determinarse de la información de salida del sistema del tiempo  $t$   $y(t)$ ,  $t_0 < t < \infty$ , donde  $t_0$  es el instante donde la falta ocurrió. Además, la falta se dice localizable si la información contenida en  $y(t)$ ,  $t_0 < t < \infty$  es suficiente para determinar cuál  $f_i$  ocurrió en la *TCPN*.

## 5.2. Diagnóstico en TCPN

En esta sección, se presentan condiciones estructurales para el diagnóstico de faltas en TCPN's en el caso cuando sólo una falta está presente a la vez en determinado momento. Sin embargo, la extensión a la ocurrencia de múltiples faltas es simple. La idea principal es la recuperación del marcado de manera similar a los trabajos de observabilidad en TCPN presentados en [40] y [41].

**Definición 5.2.** Sea una TCPN incluyendo faltas representada por la ecuación (5.2). Una TCPN se dice diagnosticable en tiempo finito si la ocurrencia de cualquier falta  $f_i$  es detectada y localizada en  $t < \infty$ .

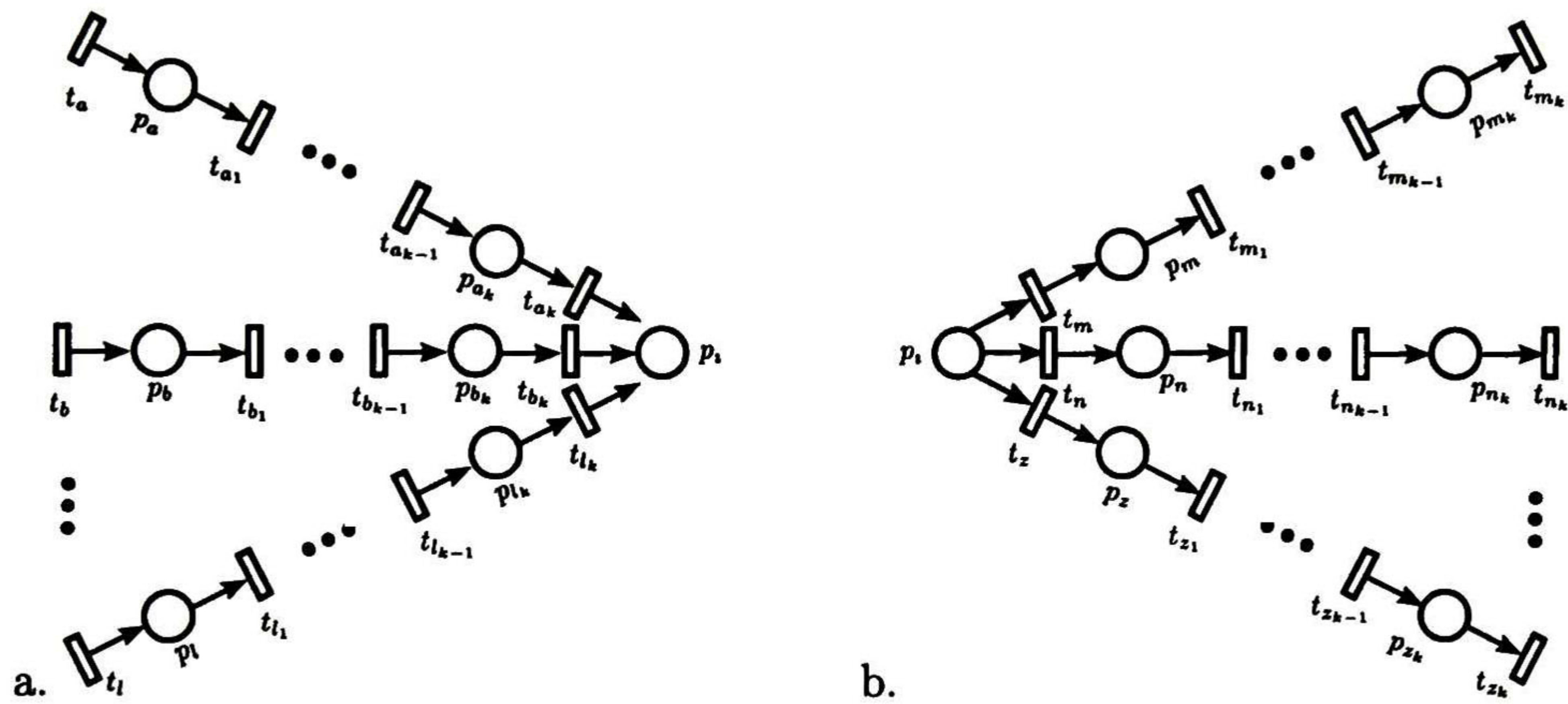


Figura 5.2: Conjunto de caminos a) hacia  $p_i$ . b) desde  $p_i$ .

**Definición 5.3.** Sea  $N = (P', T', Pre', Post')$  una TCPN fuertemente conexa libre de sincronizaciones y distribuciones. Sea  $p_i$  ( $t_x$ ) uno de sus lugares (transiciones). El trayecto de entrada  $Ip(t_x, p_i)$  es un camino desde  $t_x \rightarrow p_i$  donde  $t_x, p_1, \dots, t_i, p_i$  satisface que  $(t_x, p_1), \dots, (t_i, p_i) \in F$ .

**Definición 5.4.** Sea  $N = (P', T', Pre', Post')$  una TCPN fuertemente conexa libre de sincronizaciones y distribuciones. Sea  $p_i$  ( $t_x$ ) uno de sus lugares (transiciones). El trayecto de salida  $Op(p_i, t_x)$  es un camino desde  $p_i \rightarrow t_x$  donde  $p_i, t_1, \dots, p_{i+k}, t_x$  satisface que  $(p_i, t_1), \dots, (p_{i+k}, t_x) \in F$ .

**Definición 5.5.** Sea  $N$  una TCPN fuertemente conexa y  $p_i$  uno de sus lugares. El trayecto de entrada de  $p_i$  es un conjunto de transiciones  $Ic_{p_i} = \{t_a, \dots, t_l\}$ , tal que existen caminos dirigidos no medibles de  $t_x \rightarrow p_i$ ,  $t_x \in Ic_{p_i}$ , donde  $p_i$  no recibe flujo de marcas de ningún otro camino de la red. El trayecto de salida de  $p_i$  es un conjunto de transiciones  $Oc_{p_i} = \{t_m, \dots, t_z\}$ ,

tal que existen caminos dirigidos no medibles de  $p_i \rightarrow t_x$ ,  $t_x \in Oc_{p_i}$  y  $p_i$  no pierden flujo de marcas de ningún otro camino de la red.

**Definición 5.6.** Sea  $N$  una  $TCPN$  fuertemente conexa libre de sincronizaciones y distribuciones con sus trayectos de entrada  $Ic_{p_i}$ . El conjunto de trayectos de entrada para  $Ic_{p_i}$  es nombrado  $\mathcal{I}c_{p_i}$ .

**Definición 5.7.** Sea  $N$  una  $TCPN$  fuertemente conexa libre de sincronizaciones y distribuciones con sus trayectos de salida  $Oc_{p_i}$ . El conjunto de trayectos de salida para  $Oc_{p_i}$  es nombrado  $\mathcal{O}c_{p_i}$ .

**Proposición 5.1.** Sea  $N$  una  $TCPN$  fuertemente conexa y  $p_i$  uno de sus lugares. Si se conoce el flujo de salida del  $Oc_{p_i}$ , entonces  $m(p_i)$  puede calcularse del flujo de las transiciones en  $\mathcal{O}c_{p_i}$ .

*Demostración.* Sea  $N$  una  $TCPN$  fuertemente conexa y  $p_i$  uno de sus lugares. Sea  $\mathcal{O}c_{p_i}$  El conjunto de caminos donde  $Oc_{p_i} = \{t_l, \dots, t_q\}$  es medible; el flujo a través de la transición  $t_q$  se define como  $f_o = \lambda_v m_{i+k}$ . Ya que  $f_o$  es medible y  $\lambda_q$  se conoce de la estructura de la red (5.3), el marcado en cada lugar del camino puede calcularse

$$\dot{m}_q = \text{medible} \rightarrow m_q = \frac{\dot{m}_q}{\lambda_q}. \quad (5.3)$$

La ecuación de un  $\mathcal{O}c_{p_i}$  es

$$\dot{m}_q = \lambda_{q-1} m_{q-1} - \lambda_q m_q \quad (5.4)$$

$$\dot{m}_{q-1} = \lambda_{q-2} m_{q-2} - \lambda_{q-1} m_{q-1} \quad (5.5)$$

$\vdots$

$$\dot{m}_2 = \lambda_1 m_1 - \lambda_2 m_2, \quad (5.6)$$

donde  $m_{q-1}$  en (5.4) se calcula usando  $m_q$  de (5.3). Este procedimiento se realiza hacia abajo hasta que el marcado del último lugar es conocido. ■

**Proposición 5.2.** Sea  $N$  una  $TCPN$  fuertemente conexa y  $p_i$  uno de sus lugares con una transición extra  $t_r$  de flujo desconocido (Fig. 5.3). Sea  $Ic_{p_i} = \{t_a, \dots, t_{i-1}\}$  y  $Oc_{p_i} = \{t_i, \dots, t_q\}$ . Si el flujo de entrada del  $Ic_{p_i}$  y el de salida del  $Oc_{p_i}$  se conocen, entonces  $m(p_i)$  puede calcularse del flujo de las transiciones en  $\{t_l, \dots, t_q\} \cup Ic_{p_i}$ .



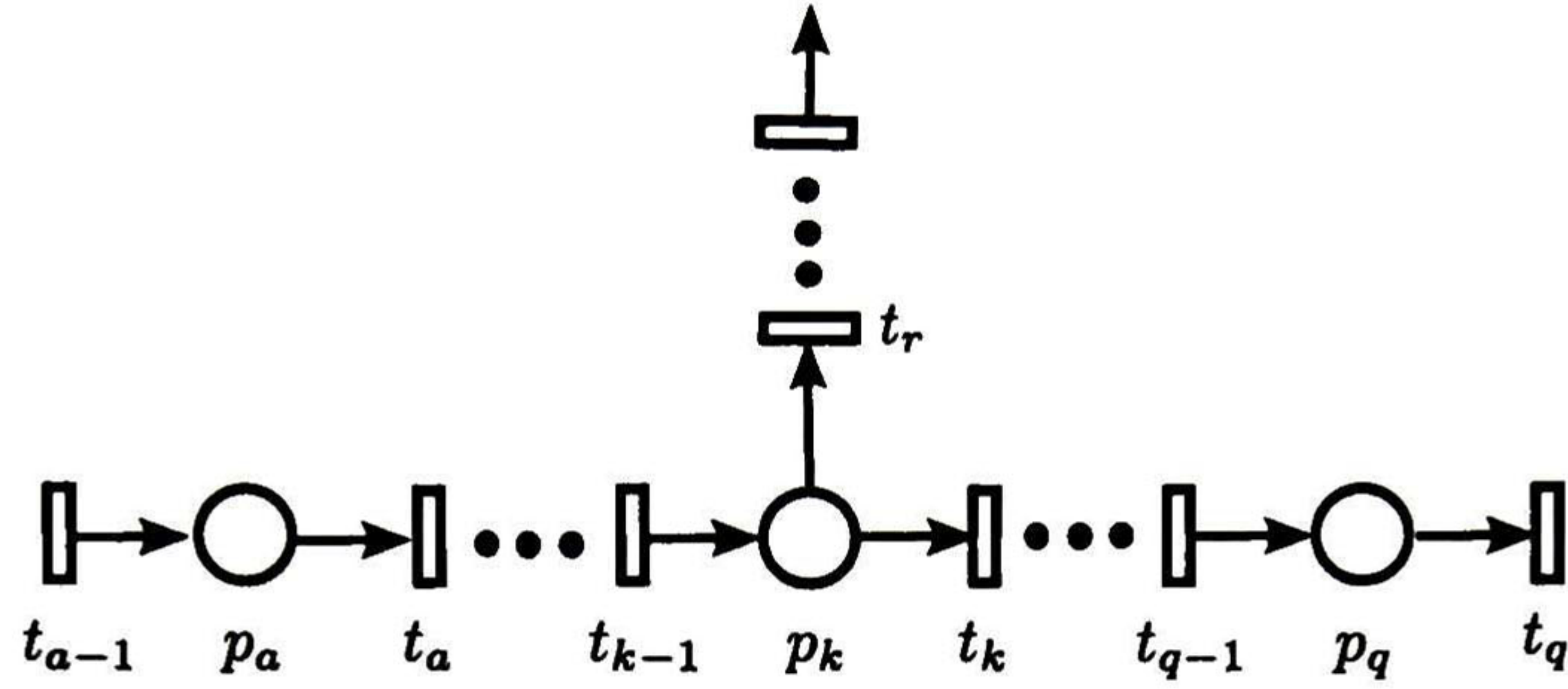


Figura 5.3: TCPN con trayecto de entrada y salida con una transición extra en  $p_i$ .

*Demostración.* De manera similar a la Proposición (5.1),  $m_q$  se conoce de (5.3), además  $m_a = m_1$  es medible.

La ecuación de estados de la TCPN descrita en la Fig. 5.3 es

$$\dot{m}_q = \lambda_{q-1}m_{q-1} - \lambda_q m_q \quad (5.7)$$

$$\dot{m}_{q-1} = \lambda_{q-2}m_{q-2} - \lambda_{q-1}m_{q-1} \quad (5.8)$$

$$\vdots$$

$$\dot{m}_k = \lambda_{k-1}m_{k-1} - (\lambda_k + \lambda_r)m_k \quad (5.9)$$

$$\dot{m}_{k-1} = \lambda_{k-2}m_{k-2} - (\lambda_{k-1})m_{k-1} \quad (5.10)$$

$$\vdots$$

$$\dot{m}_2 = \lambda_1 m_1 - \lambda_2 m_2. \quad (5.11)$$

El marcado de  $\{m_q, m_{q-1} \dots, m_k\}$  se calcula como en la Proposición 5.1. Para el marcado en  $m_k$ , el lugar tiene una transición extra desconocida y no es posible calcular  $m_{k-1}$ . Por lo que las siguientes ecuaciones son usadas.

$$\dot{m}_{k-1} = \lambda_{k-2}m_{k-2} - \frac{1}{\lambda_{k-1}} (\ddot{m}_k + (\lambda_k + \lambda_r)\dot{m}_k) \quad (5.12)$$

$$\dot{m}_{k-i} = \lambda_{k-2-i}m_{k-2-i} - \frac{1}{\lambda_{k-1-i}} (\ddot{m}_{k-i} + \lambda_{k-i}\dot{m}_{k-i}). \quad (5.13)$$

Las ecuaciones anteriores son usadas hasta  $m_1$  (lugar medible); de esta manera, la ecuación (5.10) depende de la derivada de  $m_k$  y  $m_1$ , por lo que  $\lambda_r$  puede calcularse. Posteriormente, el marcado  $\{m_{k-1}, \dots, m_2\}$  es calculado como en la Proposición 5.1. ■

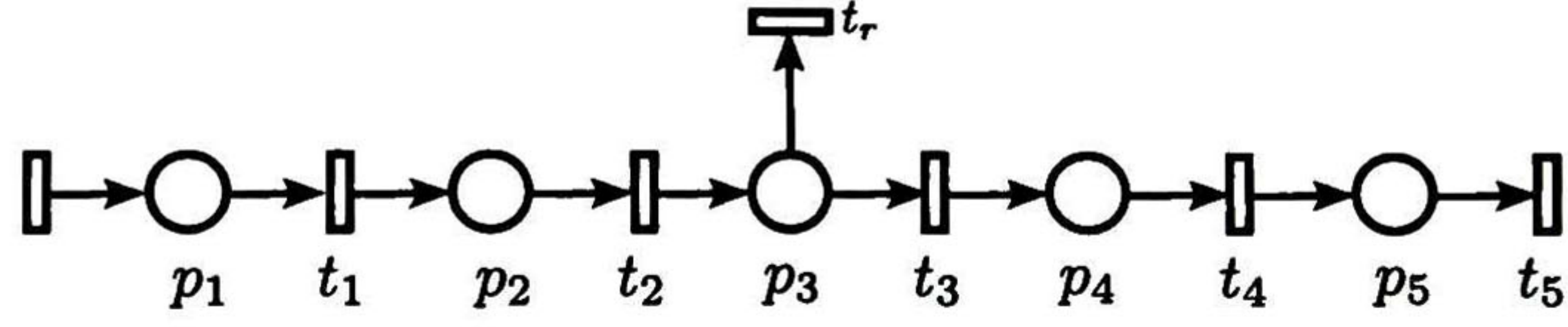


Figura 5.4: TCPN del Ejemplo 5.1

**Ejemplo 5.1.** La Fig. 5.4 muestra una región de una TCPN con la siguiente ecuación de estado

$$\dot{m}_5 = \lambda_4 m_4 - \lambda_5 m_5 \quad (5.14)$$

$$\dot{m}_4 = \lambda_3 m_3 - \lambda_4 m_4 \quad (5.15)$$

$$\dot{m}_3 = \lambda_2 m_2 - (\lambda_3 + \lambda_r) m_3 \quad (5.16)$$

$$\dot{m}_2 = \lambda_1 m_1 - \lambda_2 m_2. \quad (5.17)$$

El marcado puede calcularse como en la Proposición 5.1 y 5.2. Primeramente,  $m_5$  y su derivada son conocidas, entonces  $m_5$  se usa en (5.14) para obtener  $m_4$  (Proposición 5.1). La ecuación (5.16) tiene una transición extra  $t_r$ , por lo que las ecuaciones (5.12) y (5.13) son requeridas. Cabe recordar que  $m_1$  es medible (Proposición 5.2)

$$m_5 = f_o / \lambda_5 \quad (5.18)$$

$$m_4 = \frac{1}{\lambda_4} [\dot{m}_5 + \lambda_5 m_5] \quad (5.19)$$

$$m_3 = \frac{1}{\lambda_3} [\dot{m}_4 + \lambda_4 m_4] \quad (5.20)$$

$$m_2 = \lambda_1 m_1 - \frac{1}{\lambda_2} (\ddot{m}_3 + (\lambda_3 + \lambda_r) \dot{m}_3). \quad (5.21)$$

**Definición 5.8.** Sea un sistema en TCPN, el comportamiento de falta se modela añadiendo una transición de falta en el lugar de falta (Fig. 5.1), con la ecuación de estado (5.2).

**Teorema 5.1.** Sea  $N$  una TCPN fuertemente conexa con ausencia de sincronizaciones y distribuciones con faltas permanentes, si el lugar de falta tiene un trayecto de entrada ( $I_{c_{p_i}}$ ) con flujo de entrada conocido y un trayecto de salida ( $O_{c_{p_i}}$ ) con flujo de salida conocido, entonces la TCPN es diagnosticable entrada-salida.

*Demostración.* Sea una TCPN fuertemente conexa un sistema descrito por  $(N, \lambda_1 \dots \lambda_{|T|}, m_0)$ , y sea una  $TCPN^F$  un subsistema descrito por  $(N_f, \lambda'_1 \dots \lambda'_{|T'|}, m'_0)$  donde  $N_f =$

$(P', T', Pre', Post')$ ,  $P' \subset P$ ,  $T' \subset T$ .  $Pre'(Post') : |P'| \times |T'| \rightarrow \{0, 1\}$  y  $N_f \subseteq N$  representa la región de la *TCPN* donde un conjunto de faltas  $f_i$  pueden ocurrir. Se supone que  $N_f$  es libre de sincronizaciones y distribuciones; si los flujos de entrada y salida son conocidos, por las Proposiciones 5.1 y 5.2,  $m(p_i)$  puede calcularse. Por lo que es posible distinguir entre el sistema de falta y el normal porque  $m(p_i)$  tiene un marcado diferentes una vez que ocurre la falta. Por lo tanto es posible construir un diagnosticador para detectar la falta. ■

La distinguibilidad en *TPCN* está implicada por la observabilidad de la red, esto significa, que si la *TCPN* es observable, entonces cada par de sistemas lineales son distinguibles entre si. Esto se debe a que la matriz de configuración  $\Pi_k(m)$  depende del marcado actual de la red. Como la *TCPN* es observable, entonces el marcado y la configuración de la matriz  $\Pi_k(m)$  pueden calcularse, y por lo tanto la falta puede detectarse.

## 5.3. Aplicación: Invernadero

En esta sección se aplica un diagnosticador para posibles fallas en el modelo de invernadero presentado en el Capítulo 3. En la Fig. 5.5 se muestra el modelo global del invernadero en *TCPN's* con posibles faltas que afectan la temperatura y la humedad relativa. Todas las variables el invernadero son medibles, por lo tanto el sistema es observable y diagnosticable. Las faltas pueden deberse a una puerta abierta o un problema con la cubierta de plástico el invernadero.

Dichas faltas pueden deberse a una puerta abierta, una ventana mal cerrada, o un mal funcionamiento del humidificador, lo cual afectaría la temperatura o humedad interna del invernadero. La temperatura interna y la concentración de vapor de agua son medibles.

### 5.3.1. Diseño del diagnosticador

La *PS – TCPN* representa un sistema no lineal. Por lo tanto, el diagnosticador se basa en un observador no lineal [35] el cual estima el marcado de cada lugar.

Considere un sistema no lineal descrito por (5.22) con una perturbación de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + \Phi(x, u) + h(x) \\ y &= Cx, \end{aligned} \tag{5.22}$$

donde se asume que la perturbación  $h(x) = Bp(x)$  satisface la condición *matching* para observabilidad,  $Rank(B) = Rank(CB)$ , y  $h(x)$  puede ser desconocida y acotada  $\|p(x)\| \leq p_0$ .

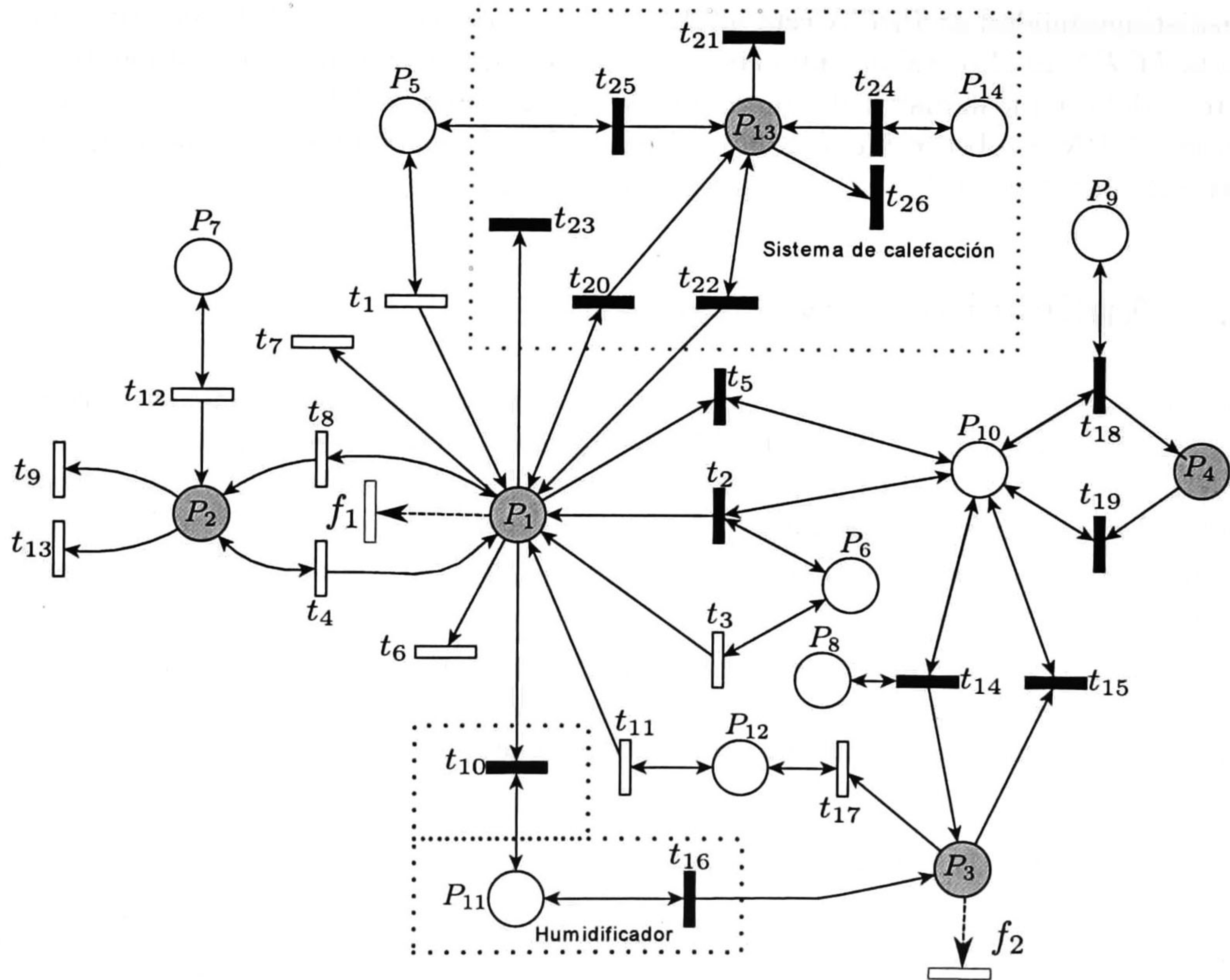


Figura 5.5: Modelo del invernadero en TCPN con transiciones de falta  $f_1$  y  $f_2$ .

Un observador para (5.22) tiene la forma

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \Phi(\hat{x}, u) + L(y - C\hat{x}) + BS_{obs}(y - C\hat{x}) \quad (5.23)$$

donde se tiene un término adicional para rechazar perturbaciones.

La dinámica del error de estimación está dada por

$$\dot{\tilde{x}} = (A - LC)\tilde{x} + \Phi(x, u) - \Phi(\tilde{x}, u) + Bp(x) - BS_{obs}(y - C\hat{x}) \quad (5.24)$$

donde  $\tilde{x} = x - \hat{x}$ .

Se asume que el sistema del error sin perturbación

$$\dot{\tilde{x}} = f_e = (A - lc)\tilde{x} + \Phi(x, u) - \Phi(\hat{x}, u)$$

es asintóticamente estable con función de Lyapunov  $V(\tilde{x}) = \tilde{x}^T P \tilde{x} > 0$

$$W_0 = \left. \frac{dV}{dt} \right|_{h=0, S_{obs}=0} = 2\tilde{x}^T P f_e < 0$$

Calculando la derivada con respecto al tiempo de la función de Lyapunov  $V(\tilde{x})$  a lo largo de las trayectorias del sistema perturbado como

$$W = W_0 + 2\tilde{x}^T P B(p - S_{obs})$$

Para el término  $S_{obs}(y - C\hat{x})$  que depende de la cota superior de la perturbación desconocida escogido como

$$S_{obs}(y - C\hat{x}) = \eta \frac{F(y - \hat{y})}{\|F(y - \hat{y})\|} \quad (5.25)$$

satisfaciendo la función escalar  $\eta > p_0$  y la ecuación  $FC = B^T P$ , la derivada con respecto al tiempo de la función de Lyapunov

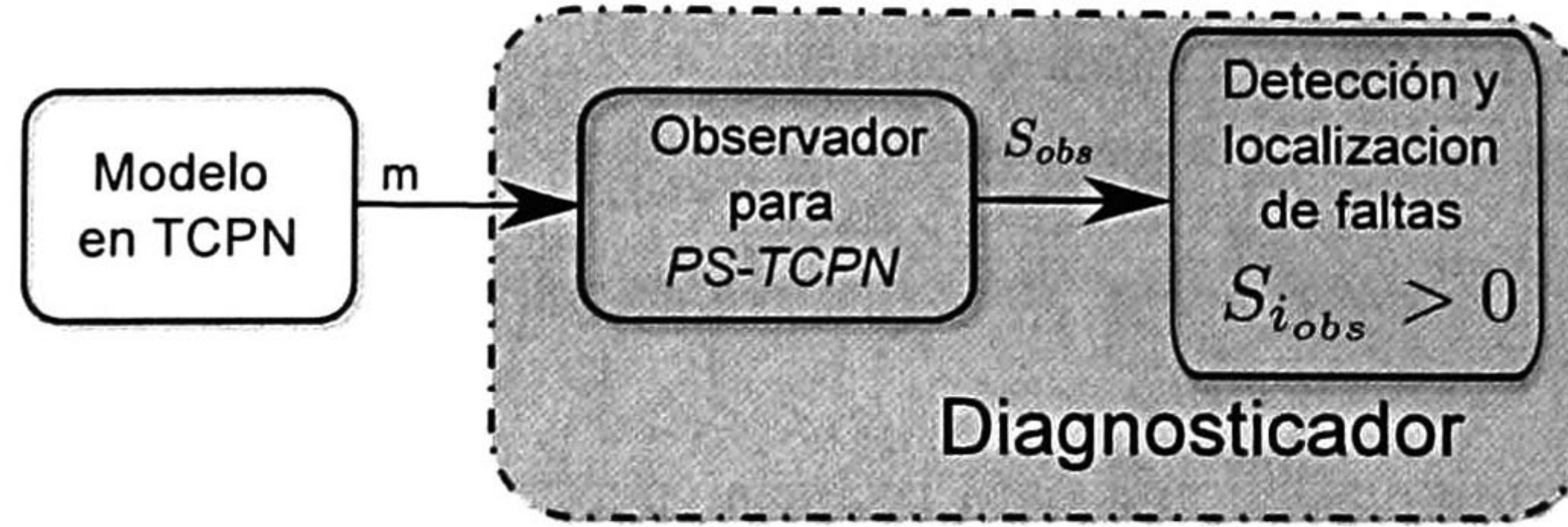


Figura 5.6: Diagnosticador usando un observador en modos deslizantes.

$$\begin{aligned}
 W &= W_0 - 2\tilde{x}^T PB\eta \frac{FC\tilde{x}}{\|FC\tilde{x}\|} + 2\tilde{x}^T PBp \\
 W &= W_0 - 2\eta\|\tilde{x}^T PB\| + 2\tilde{x}^T PBp \\
 W &< W_0 - 2\eta\|\tilde{x}^T PB\| + 2\|\tilde{x}^T PB\|\|p\| \\
 W &< W_0 - 2\|\tilde{x}^T PB\|(\eta - p_0) \\
 W &< 0
 \end{aligned}$$

es negativa. Esto implica que el sistema del error con perturbación (5.24) y con el término de observación (5.25) es también asintóticamente estable, y la perturbación es rechazada.

La aplicación de este observador se realiza en el diagnosticador. Debido a que las faltas son consideradas como perturbaciones desconocidas, cuando el término  $S_{i_{obs}}$  presente en cada lugar  $p_i$  sea diferente de cero, la falta será detectada y localizada.

Como se explicó al principio de este Capítulo, se introduce una falta permanente al lugar  $p_1$ , esta falta afecta la temperatura del invernadero. Dicha falta puede deberse a una abertura en la cubierta o simplemente que la puerta esté abierta. Para efectos de demostrar el funcionamiento del diagnosticador, se simula la falta en el modelo de temperatura en lazo abierto. La falla ocurre en dos ocasiones y debido a que el parámetro de la falta (tasa de disparo) es pequeño no se aprecia a simple vista, no obstante, en la Fig. 5.7 se aprecia el cambio en la variable de estimación  $S_{1_{obs}}$  del lugar  $p_1$  del diagnosticador. De esta manera, la falta es detectada y localizada.

También se realizó la simulación para la falla en el lugar de la concentración de vapor de agua. Al igual que con la falla en la temperatura, en la Fig. 5.8 se observa la ocurrencia de la falta en dos ocasiones y el término  $S_{2_{obs}}$  del diagnosticador. De esta manera, la falta es detectada y localizada.

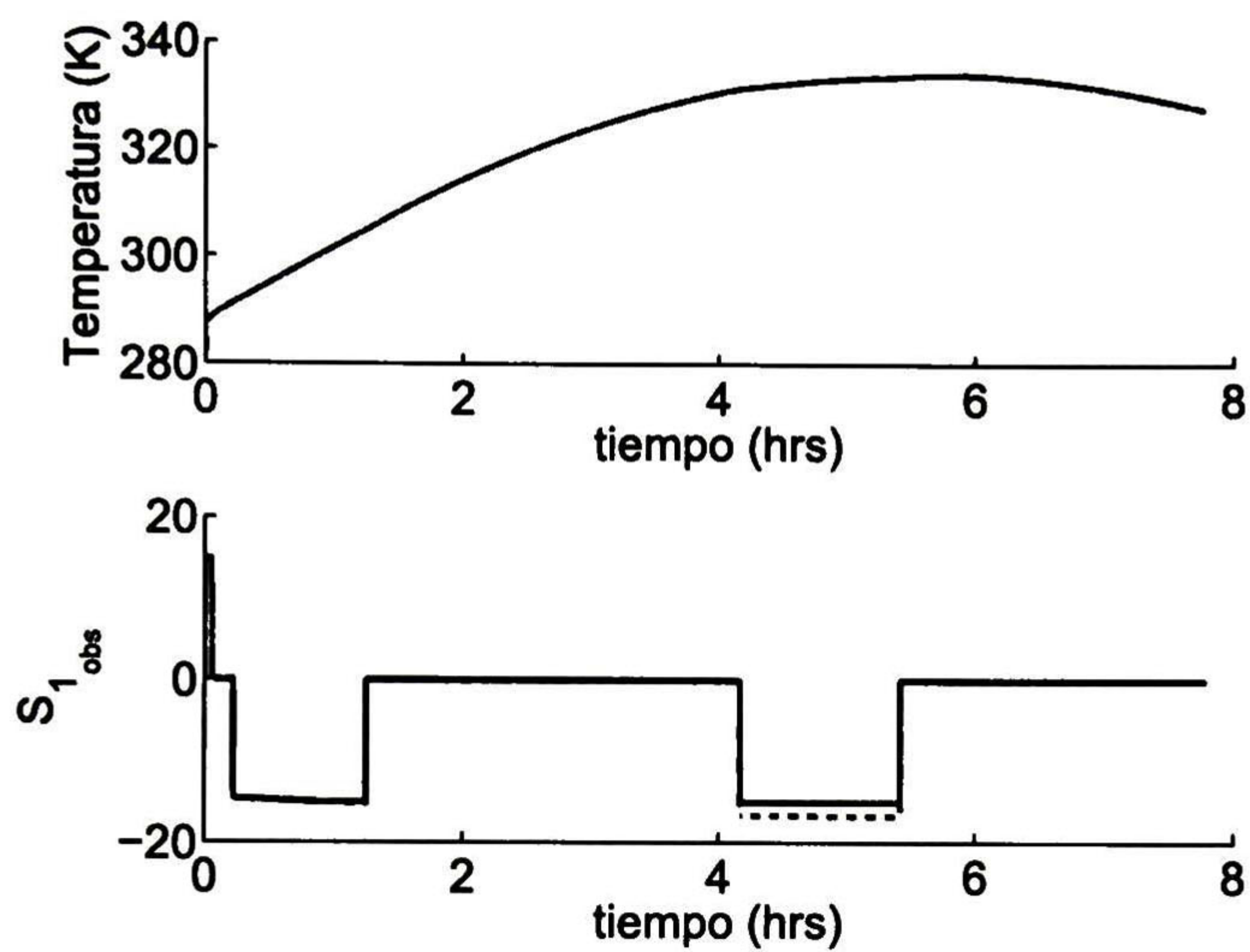


Figura 5.7: Temperatura y estimador de falta.

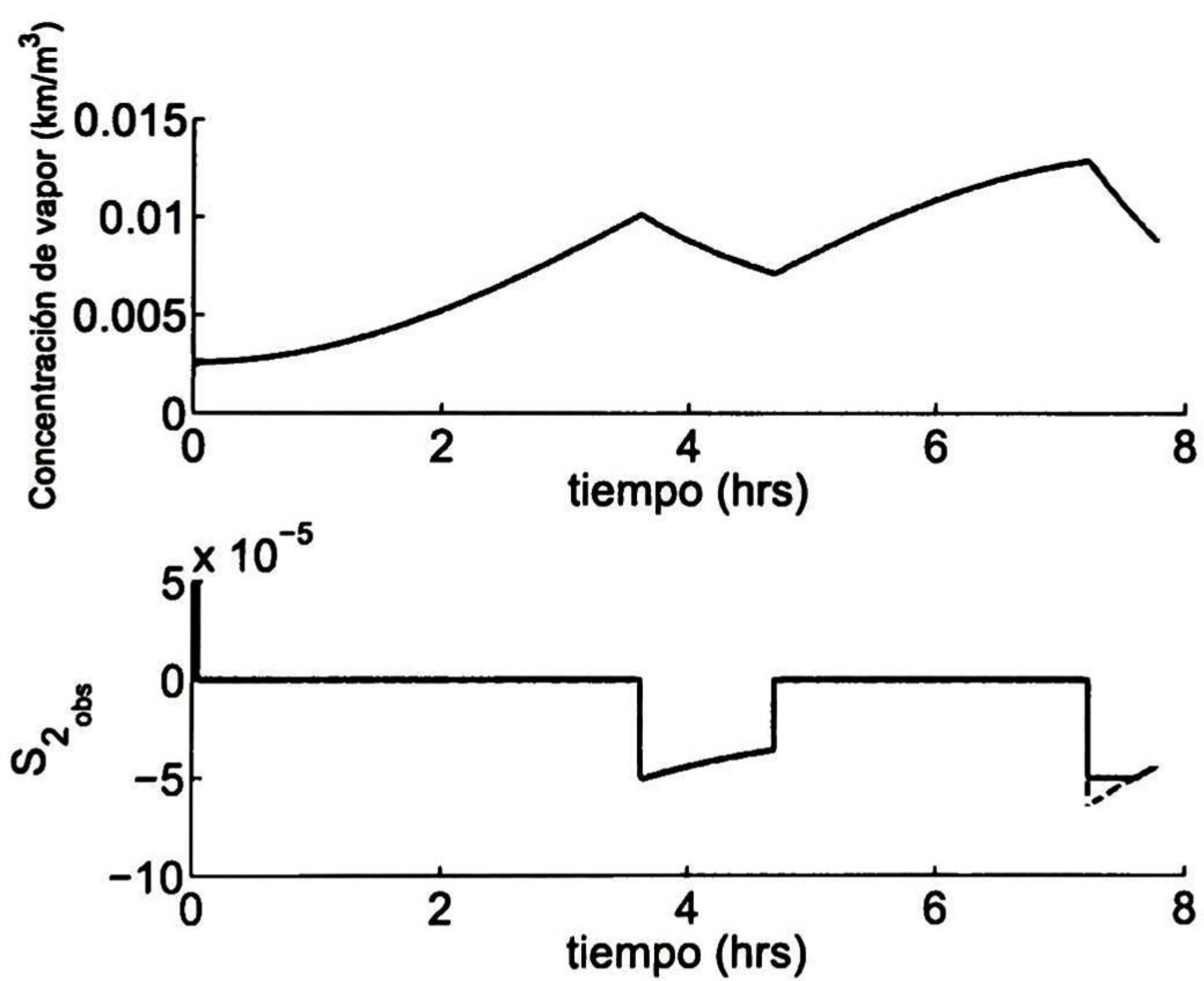


Figura 5.8: Concentración de vapor de agua y estimador de falta.

## Capítulo 6

# Conclusiones y Trabajo Futuro

En este capítulo se presentan las conclusiones finales de la tesis y el trabajo futuro relacionado con la misma.

### 6.1. Conclusiones

En este trabajo se presenta una metodología eficaz para modelar el comportamiento de sistemas de energía de manera modular permitiendo el estudio de las distintas partes que interactúan entre sí. Además, la representación gráfica de las variables permite un fácil entendimiento de la interacción entre las mismas, debido a su representación con lugares y transiciones. Las limitaciones en los actuadores se representa de manera natural por el marcado del lugar (acotado), lo cual facilita el modelado de diversos sistemas. La metodología permite una construcción modular del sistema, de manera que los elementos pueden añadirse o removerse según las necesidades. Además, se ataca el problema de alcanzar un marcado requerido (temperatura requerida) y se presenta una ley de control discreta que explota la estructura de la red. Esta la ley de control permite alcanzar un marcado requerido dentro de los límites alcanzables por los actuadores. La propuesta de control usa información de cada transición controlable, por medio del error del marcado de los lugares de entrada y salida se determina si el disparar dicha transición disminuye el marcado de error del modelo.

En el último Capítulo, se exploró el problema de detección y aislamiento de faltas para *TCPN*. Se diseñó un diagnosticador para la semántica de producto con el fin de utilizarlo en el modelo de invernadero, localizando fugas que afecten la temperatura y humedad. Finalmente, se presentaron condiciones suficientes para el diagnóstico en *TCPN*.



## 6.2. Trabajo Futuro

Los resultados obtenidos han sido satisfactorios, sin embargo existe un panorama muy amplio en este estudio. A continuación se presenta algunas mejoras a realizar. Entre los aspectos más importantes se encuentran:

- Introducir el modelo del cultivo y actuadores para el control de humedad relativa (así como se realizó con el sistema de tuberías de calefacción).

Proponer una ley de control que tome en consideración la temperatura y la concentración de vapor de agua para el ahorro de energía y mejoramiento del cultivo.

Validación del modelo con un invernadero real.

- Diseñar un diagnosticador fundamentado en condiciones estructurales de la red.

# Bibliografía

- [1] R. Ross-Leon, A. Ramirez-Trevino, and J. Alejandro Morales, “Timed continuous petri nets based control for metabolome under michaelis-menten kinetics,” in *World Automation Congress (WAC), 2012*, pp. 1–6, 2012.
- [2] J. Júlvez and R. K. Boel, “A continuous petri net approach for model predictive control of traffic systems,” *Systems, Man and Cybernetics, Part A: Systems and Humans, IEEE Transactions on*, vol. 40, no. 4, pp. 686–697, 2010.
- [3] C. Mahulea, C. Seatzu, M. Cabasino, and M. Silva, “Fault diagnosis of discrete-event systems using continuous petri nets,” *Systems, Man and Cybernetics, Part A: Systems and Humans, IEEE Transactions on*, vol. 42, pp. 970–984, July 2012.
- [4] G. Desirena-Lopez, L. Vazquez, A. Ramirez-Trevino, and D. Gomez-Gutierrez, “Thermal modelling for temperature control in mpso’s using timed continuous petri nets,” in *Control Applications (CCA), 2014 IEEE Conference on*, pp. 2135–2140, IEEE, 2014.
- [5] J. L. Tovany, R. Ross-León, J. Ruiz-León, A. Ramírez-Treviño, and O. Begovich, “Greenhouse modeling using continuous timed petri nets,” *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2013, 2013.
- [6] C. A. Petri, “Kommunikation mit automaten,” 1962.
- [7] M. Silva, E. Terue, and J. M. Colom, “Linear algebraic and linear programming techniques for the analysis of place/transition net systems,” in *Lectures on Petri Nets I: Basic Models*, pp. 309–373, Springer, 1998.
- [8] R. David and H. Alla, *Discrete, continuous, and hybrid Petri nets*. Springer, 2010.
- [9] M. Silva and L. Recalde, “Petri nets and integrality relaxations: A view of continuous petri net models,” *Systems, Man, and Cybernetics, Part C: Applications and Reviews, IEEE Transactions on*, vol. 32, no. 4, pp. 314–327, 2002.
- [10] M. Silva and L. Recalde, “On fluidification of petri nets: from discrete to hybrid and continuous models,” *Annual Reviews in Control*, vol. 28, no. 2, pp. 253–266, 2004.

- [11] A. Giua, C. Mahulea, L. Recalde, C. Seatzu, and M. Silva, "Optimal control of timed continuous petri nets via explicit mpc," *Positive Systems*, pp. 383–390, 2006.
- [12] R. Kara, M. Ahmane, J. J. Loiseau, and S. Djennoune, "Constrained regulation of continuous petri nets," *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, vol. 3, no. 4, pp. 738–748, 2009.
- [13] J. Xu, L. Recalde, and M. Silva, "Tracking control of timed continuous petri net systems under infinite servers semantics," in *17th World Congress of IFAC*, pp. 3192–3197, 2008.
- [14] L. Wang, C. Mahulea, J. Júlvez, and M. Silva, "Minimum-time control for structurally persistent continuous petri nets," in *Decision and Control (CDC), 2010 49th IEEE Conference on*, pp. 2771–2776, IEEE, 2010.
- [15] L. Wang, C. Mahulea, J. Júlvez, and M. Silva, "Control of continuous petri nets using on/off based method," in *WODES12: 11th Int. Workshop on Discrete Event Systems, Guadalajara, Mexico*, pp. 47–52, 2012.
- [16] R. Ross-León, A. Ramirez-Trevino, J. Ruiz-Leon, and E. Aguayo-Lara, "Local control law for live and bounded continuous petri nets," in *Discrete Event Systems*, vol. 12, pp. 129–134, 2014.
- [17] A. Santoyo-Sanchez, E. Ruiz-Beltrán, L. I. Aguirre-Salas, and V. H. Ortiz-Muro, "Fault diagnosis of electrical systems using interpreted petri nets," in *Emerging Technologies and Factory Automation, 2008. ETFA 2008. IEEE International Conference on*, pp. 538–546, IEEE, 2008.
- [18] A. Ramirez-Trevino, E. Ruiz-Beltran, J. Aramburo-Lizarraga, and E. Lopez-Mellado, "Structural diagnosability of des and design of reduced petri net diagnosers," *Systems, Man and Cybernetics, Part A: Systems and Humans, IEEE Transactions on*, vol. 42, no. 2, pp. 416–429, 2012.
- [19] E. Lefebvre, D; Aguayo-Lara, "Initial study for observers application to fault detection and isolation with continuous timed petri nets," *5th IFAC International Wokshop On Dependable Control of Discrete Systems, Cancún, México*, 2015.
- [20] J. Fraustro-Valdez, G. Desirena-Lopez, A. Ramirez-Treviño, J. Ruiz-Leon, "Sliding mode diagnoser for leakage fault on timed continuous petri nets," *5th IFAC International Wokshop On Dependable Control of Discrete Systems, Cancún, México*, 2015.
- [21] T. Boulard and A. Baille, "A simple greenhouse climate control model incorporating effects of ventilation and evaporative cooling," *Agricultural and Forest Meteorology*, vol. 65, no. 3, pp. 145–157, 1993.

- [22] J. Boaventura Cunha, C. Couto, and A. Ruano, "A greenhouse climate multivariable predictive controller," in *International Conference and British-Israeli Workshop on Greenhouse Techniques towards the 3rd Millennium 534*, pp. 269–276, 2000.
- [23] T. Murata, "Petri nets: Properties, analysis and applications," *Proceedings of the IEEE*, vol. 77, no. 4, pp. 541–580, 1989.
- [24] J. Desel and J. Esparza, *Free choice Petri nets*, vol. 40. Cambridge university press, 2005.
- [25] C. G. Cassandras and S. Lafortune, *Introduction to Discrete Event Systems*. Secaucus, NJ, USA: Springer-Verlag New York, Inc., 2006.
- [26] M. Silva, *Las redes de Petri: en la Automática y la Informática*. Editorial AC, 1985.
- [27] F. DiCesare, G. Harhalakis, J.-M. Proth, M. Silva, and F. Vernadat, *Practice of Petri nets in manufacturing*. Springer, 1993.
- [28] C. Ramchandani, "Analysis of asynchronous concurrent systems by timed petri nets.," 1973.
- [29] F. Balduzzi, A. Di Febbraro, A. Giua, and C. Seatzu, "Decidability results in first-order hybrid petri nets," *Discrete Event Dynamic Systems*, vol. 11, no. 1-2, pp. 41–57, 2001.
- [30] N. Zerhouni, M. Ferney, and A. El Moudni, "Transient analysis of manufacturing systems using continuous petri nets," *Math. Comput. Simul.*, vol. 39, pp. 635–639, Nov. 1995.
- [31] J. B. J. Emilio, "Técnicas Algebraicas para el Analisis y Control de Redes de Petri Continuas," 2005.
- [32] A. Balluchi, L. Benvenuti, M. D. D. Benedetto, and A. L. Sangiovanni-Vincentelli, "Design of observers for hybrid systems," in *Hybrid Systems: Computation and Control, volume 2289 of LNCS*, pp. 76–89, Springer-Verlag, 2002.
- [33] J. Júlvez, C. Mahulea, and C.-R. Vázquez, "SimHPN: A MATLAB toolbox for simulation, analysis and design with hybrid Petri nets," *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, vol. 6, pp. 806–817, May 2012.
- [34] D. Bild, S. Misra, T. Chantemy, P. Kumar, R. Dick, X. Huy, L. Shangz, and A. Choudhary, "Temperature-aware test scheduling for multiprocessor systems-on-chip," in *Computer-Aided Design, 2008. ICCAD 2008. IEEE/ACM International Conference on*, pp. 59–66, Nov 2008.
- [35] R. Rajamani, "Observers for lipschitz nonlinear systems," *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 43, no. 3, pp. 397–401, 1998.

- [36] G. Van Straten, G. van Willigenburg, E. van Henten, and R. van Ooteghem, *Optimal control of greenhouse cultivation*. CRC press, 2010.
- [37] G. P. Bot, *Greenhouse climate: from physical processes to a dynamic model*. PhD thesis, Landbouwhogeschool te Wageningen, 1983.
- [38] J. Coelho, J. B. Cunha, and P. Oliveira, “Solar radiation prediction methods applied to improve greenhouse climate control,” 2001.
- [39] O. Joliet and B. Bailey, “The effect of climate on tomato transpiration in greenhouses: measurements and models comparison,” *Agricultural and Forest Meteorology*, vol. 58, no. 1, pp. 43–62, 1992.
- [40] M. Silva, J. Júlvez, C. Mahulea, and C. R. Vázquez, “On fluidization of discrete event models: observation and control of continuous petri nets,” *Discrete Event Dynamic Systems*, vol. 21, no. 4, pp. 427–497, 2011.
- [41] E. Aguayo-Lara, A. Ramírez-Treviño, and J. Ruiz-León, “Sensor placement for distinguishability and single structure observer design in continuous timed petri nets,” *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, vol. 12, pp. 20–32, 2014.



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL I.P.N.  
UNIDAD GUADALAJARA**


El Jurado designado por la Unidad Guadalajara del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional aprobó la tesis

**Modelado incremental de sistemas híbridos**

del (la) C.

**Jaime Alberto FRAUSTRO VALDEZ**

el día 07 de Agosto de 2015.

  
Dra. Ofelia Begovitch Mendoza  
Investigador CINVESTAV 3B  
CINVESTAV Unidad Guadalajara

  
Dr. Antonio Ramirez Treviño  
Investigador CINVESTAV 3A  
CINVESTAV Unidad Guadalajara

  
Dr. Carlos Renato Vazquez Topete  
Profesor Investigador  
Centro Universitario de los Valles,  
UdG



CINVESTAV - IPN  
Biblioteca Central



SSIT0013355