



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

SECCIÓN DE MECATRÓNICA

**Navegación Autónoma de un Cuatrirrotor estimando la
matriz de Homografía**

Tesis que presenta:
Ray Manzarek Aguirre Trujillo

Para obtener el grado de:
Maestro en Ciencias

En la especialidad de:
Ingeniería Eléctrica

Director de la Tesis:
Dr. Hugo Rodríguez Cortes

Agradecimientos

A mi familia: *Por apoyarme en cada decisión y proyecto, por que sin ellos no hubiese logrado mis objetivos. Por estar siempre y en todo momento. Por ser la fuente de inspiración para salir adelante día con día.*

A Marisol Gómez Ruiz: *Por brindarme su apoyo y cariño. Por ser mi compañera de vida a lo largo de estos años. Por todo el esfuerzo, paciencia y sacrificio brindado. Por siempre creer en mí.*

Al Dr. Hugo Rodríguez Cortés: *Por ser un gran asesor, persona y amigo. Por darme la oportunidad de trabajar con él. Por la paciencia y confianza brindada. Por su tutoría, consejos, enseñanzas y aportaciones.*

A mis amigos y compañeros del CINVESTAV: *Por su apoyo, amistad y compañía a lo largo de la maestría. Por los buenos momentos dentro y fuera del CINVESTAV. En especial a Ezequiel Huesca, Diego García, Olaf Vazquez, Iván Gonzalez y Jesus Valentín. Por permitirme conocerlos y aprender cosas valiosas de ustedes.*

A mis compañeros de laboratorio: *Por compartir sus conocimientos y experiencias conmigo. En especial a Alejandro Gómez Casasola por su ayuda y aportaciones en la realización de este proyecto.*

A los doctores de la sección de mecatrónica: *Por sus enseñanzas, conocimientos y experiencias a lo largo de la maestría. Por darme la oportunidad de realizar mis estudios de maestría en la sección de mecatrónica del departamento de ingeniería eléctrica del CINVESTAV.*

A CONACYT: *Por el apoyo económico para realizar mis estudios de maestría y al CINVESTAV por el apoyo e infraestructura para la realización de mis estudios.*

Resumen

Para que un vehículo aéreo navegue dentro o fuera de un entorno se debe conocer su posición. Si el vehículo no cuenta con una asistencia remota, su posibilidad de desplazamiento dependerá de su capacidad para reconocer formas y objetos del entorno, usando un sistema de navegación. Actualmente, los sistemas de navegación integran algoritmos de visión por computadora, con lo que es posible realizar navegación autónoma. Este trabajo se enfoca en la implementación de un sistema de navegación autónomo en un cuatrirrotor, basado en la estimación de posición por medio de un algoritmo de visión. El algoritmo estima una secuencia de homografías de una imagen situada en tierra, mientras el vehículo se encuentra en movimiento. Obtenidas las homografías, se calcula la posición del cuatrirrotor, con lo que es posible implementar una técnica de control. El enfoque utiliza la representación de la homografía como un elemento del grupo especial lineal $SL(3, \mathbb{R})$ y define un observador en esta estructura. Para validar el algoritmo, se presentan experimentos en un entorno de simulación que emula condiciones físicas reales.

Abstract

For an air vehicle to navigate in or out of an environment, it must know its position. If the vehicle does not have remote assistance, its ability to move will depend on its ability to recognize shapes and objects in the environment, using a navigation system. Currently, navigation systems integrate computer vision algorithms, with which it is possible to perform autonomous navigation. This work focuses on implementing an autonomous navigation system in a quadrotor, based on position estimation employing visual information. The algorithm estimates a sequence of homography matrices of an image located on the ground while the vehicle is in motion. Once the homographs are obtained, the quadrotor position is calculated, with which it is possible to implement a control technique. The approach uses the homography matrix representation as an element of the linear special group $SL(3, \mathbb{R})$ and defines an observer in this structure. Numerical experiments are presented in a simulation environment that emulates real physical conditions to validate the proposed approach.

Índice

Lista de figuras	XI
1. Introducción	1
1.1. Navegación Autónoma	2
1.2. Herramientas para la navegación autónoma	3
1.2.1. Filtro de Kalman	3
1.2.2. Algoritmos de visión por computadora	4
1.2.2.1. SLAM	4
1.2.2.2. Homografía	4
1.2.3. Otros métodos	5
1.3. Planteamiento del problema	5
1.4. Objetivo	5
1.5. Objetivos particulares	6
1.6. Organización del documento	6
2. Preliminares matemáticos	7
2.1. Teoría de grupos	7
2.1.1. Grupo	8
2.1.2. Subgrupos	10
2.2. Grupos Infinitos	11
2.3. Cálculo diferencial en grupos	12
2.3.1. Variedad	13
2.4. Grupos de Lie	16
2.5. Cinemática sobre una variedad	18
2.6. Observadores en grupos de Lie	24
2.7. Visión por computadora	26
2.8. Perspectiva y plano proyectivo	26
2.9. Representación de un punto en coordenadas homogéneas	27
2.9.1. Coordenadas cartesianas	27
2.9.2. Coordenadas homogéneas	27
2.10. Imagen	28

2.11. Modelo de la cámara	29
3. Modelado y control	35
3.1. Multirrotores	35
3.1.1. Cuatrirrotores	35
3.2. Modelado	37
3.3. Controlador interno	39
4. Observador de homografía	43
4.1. Geometría de características en un plano	43
4.2. Homografía	45
4.2.1. Homografía como elemento del grupo especial lineal $\mathbf{SL}(\mathbf{3}, \mathbb{R})$.	46
4.3. Cinemática de la cámara	48
4.4. Observador no lineal en $\mathbf{SL}(\mathbf{3}, \mathbb{R})$	49
5. Simulaciones	51
5.1. ROS	51
5.2. Gazebo	52
5.3. Simulador AR.Drone	52
5.4. Calibración de la cámara	53
5.5. Algoritmo de detección de esquinas	53
5.6. Simulación	54
6. Conclusiones y trabajo futuro	65
6.1. Conclusiones	65
6.2. Trabajo futuro	66
Bibliografía	66

Lista de figuras

1.1. UAV modelo tailsitter.	2
2.1. Cuadrado.	8
2.2. Movimientos del cuadrado.	9
2.3. Ejemplo de combinación de simetrías.	9
2.4. Propiedad de continuidad.	12
2.5. Variedad diferenciable.	13
2.6. Línea real.	14
2.7. Parametrización en \mathbb{R}^2 , continuidad.	15
2.8. Parametrización en \mathbb{R}^2 , continuidad y conectividad.	16
2.9. Acción de un grupo de Lie sobre un espacio vectorial V	18
2.10. Derivada en el tiempo en \mathbb{R}^2	19
2.11. Grupo de curvas pertenecientes al grupo de Lie G	20
2.12. Grupo de Lie, acción de operadores.	22
2.13. Automorfismos internos	22
2.16. Representación de un punto en \mathbb{R}^2	27
2.17. Representación de un punto en \mathbb{P}^2	28
2.18. Cámara pinhole.	28
2.19. Modelo cámara pinhole.	29
2.20. Análisis del modelo de la cámara pinhole.	29
2.21. Análisis geométrico, cámara pinhole.	30
2.22. Análisis del plano $X - Y$	30
2.23. Parámetros intrínsecos.	32
2.24. Modelo de proyección.	33
3.1. Configuraciones de un cuatrirrotor, en + a la izquierda, configuración en X a la derecha.	36
3.2. Configuración del cuatrirrotor AR.Drone 2.0.	36
3.3. Movimientos de un cuatrirrotor.	37
3.4. Marcos de referencia de un Cuatrirrotor.	37
4.1. Geometría para el análisis del observador de homografía.	44

5.1. Logo del Sistema Operativo Robótico.	51
5.2. Entorno de simulación Gazebo para el AR.Drone.	52
5.3. Imagen usada para el algoritmo de estimación de la homografía.	54
5.4. Detección de esquinas, algoritmo de Harris.	54
5.5. Trayectorias circulares.	55
5.6. Estimación de la matriz de homografía, usando el cuatrirrotor AR.Drone 2.0.	56
5.7. Detección de esquinas, simulación.	57
5.8. Posiciones de las trayectorias circulares.	57
5.9. Errores de posición, trayectorias circulares.	58
5.10. Elementos H_{13} , de las matrices de homografía.	59
5.11. Trayectorias circulares estimadas.	60
5.12. Posiciones de las trayectorias circulares estimadas.	61
5.13. Trayectoria rectangular.	62
5.14. Posiciones trayectoria rectangular.	63
5.15. Elementos H_{13} y H_{23} , de las matrices de homografía.	64

Capítulo 1

Introducción

Los vehículos aéreos no tripulados, UAVs por sus siglas en inglés Unmanned Aerial Vehicles, están disponibles desde la Segunda Guerra Mundial. En los años 60, los UAVs se emplearon en misiones de reconocimiento militar, posteriormente, en los años 80, su uso se extendió al ámbito civil. Una de las primeras aplicaciones civiles tuvo lugar en Japón, en tareas de fumigación de cultivos. En años más recientes, los vehículos aéreos han tenido un gran desarrollo, gracias al avance tecnológico en la miniaturización de componentes mecánicos, electrónicos y electromecánicos [1]. Este desarrollo tecnológico generó reducción de costos, eficiencia y fiabilidad haciendo posible el uso de drones en diversas tareas [2]. Los países que han dominado el desarrollo de este sector de la aeronáutica son Estados Unidos, Francia y China, el primero en el ámbito militar y los últimos en la fabricación de drones de consumo.

Desde hace varios años se han realizado importantes esfuerzos para resolver problemas de gestión en desastres naturales mediante el uso de UAVs, lo que ha resultado ser eficiente para guiar a los equipos de rescate. El atractivo de estos sistemas nace del hecho de que los UAVs tienen flexibilidad de respuesta a un costo relativamente bajo, en comparación con los métodos tradicionales de búsqueda y rescate. Con este propósito se han diseñado diferentes UAVs, equipados con diferentes tecnologías como sensores láser, cámaras y espectrómetros, para detectar supervivientes e información que proporcione información a detalle del desastre. En [3], se hace referencia al uso de un UAV de ala fija para búsqueda y rescate en áreas silvestres. Este vehículo tiene la capacidad de permanecer en el aire por hasta 120 minutos, llevando a bordo una cámara que ayuda a guiar a los rescatistas.

Dentro de los diferentes UAVs, existe un modelo de ala fija capaz de despegar y aterrizar verticalmente, denominado Tailsitter [2], figura 1.1. Esta aeronave, por su diseño híbrido entre un UAV del tipo multirrotor (despegue y aterrizaje) y un UAV de ala fija, puede ofrecer grandes ventajas en aplicaciones de búsqueda y rescate. Entre los UAV de ala fija y multirrotor, existen ventajas y desventajas para misiones

de búsqueda y rescate. Los UAV de ala fija tienen una velocidad de vuelo alta, por lo que deben volar a una altura considerable, siendo no adecuados para búsqueda detallada, al no poder permanecer en vuelo estacionario a baja altura. En cambio los UAV multirrotores tienen la capacidad de vuelo estacionario a diferentes alturas [1].



Figura 1.1: UAV modelo tailsitter.

En diversas investigaciones se ha explorado la posibilidad de desplegar equipos colaborativos entre robots en tierra y robots aéreos. Un ejemplo, se puede encontrar en [3] y [4], para la generación de mapas tridimensionales del entorno, en respuesta a escenarios causados por fenómenos naturales, donde las construcciones resultan dañadas e inaccesibles para los seres humanos. En estas aplicaciones los robots aéreos ofrecen ventajas sobre los robots terrestres, incluida la capacidad de maniobrar a través de diferentes entornos recopilando información de lugares inaccesibles para los robots terrestres [4].

1.1. Navegación Autónoma

La mayoría de UAV comerciales funciona según el principio, maestro/esclavo, es decir, un operador humano controla su movimiento desde una ubicación remota. No obstante en situaciones difíciles, inaccesibles o peligrosas para el ser humano, existe la necesidad de integrar un algoritmo de navegación y guía de vuelo para operar el UAV con mayores grados de autonomía [5]. Por ejemplo en Fukushima, Japón, después del accidente nuclear de 2011, se utilizaron UAV para recabar información sobre el nivel de radiación en el ambiente [1]. En situaciones extremas como la de Fukushima, es necesario que el UAV tenga la capacidad de operar de forma autónoma, es decir, desplazarse dentro de un espacio de trabajo desde un punto inicial a un punto objetivo, evitando colisionar con objetos fijos o móviles sin la asistencia de un piloto humano.

Las técnicas de navegación autónoma se han desarrollado con el objetivo de aumentar la flexibilidad en las misiones de vuelo y salvaguardar la interacción del vehículo con su entorno [6]. El nivel de autonomía de los vehículos no tripulados, de acuerdo a la clasificación propuesta por el departamento de defensa de los Estados Unidos enumera cuatro niveles [7]. El nivel básico es el sistema controlado por un humano, el cual toma todas las decisiones relacionadas con la operación del vehículo. En el siguiente nivel, el vehículo puede realizar funciones independientes del control humano, es decir, puede realizar tareas al recibir una orden, sin la necesidad de que exista una participación humana; la única interacción existente sería cuando el ser humano activa o desactiva esa orden. El tercer nivel, es un sistema supervisado por humanos, el cual puede realizar tareas cuando se le otorgan permisos e instrucciones; tanto el vehículo como el supervisor pueden iniciar acciones, sin embargo, esto está limitado a un espacio de trabajo. El último nivel, es el sistema es totalmente autónomo, el cual recibe comandos e instrucciones preprogramadas y los traduce en tareas específicas sin ninguna interacción con el humano, aunque por seguridad en caso de emergencia el humano puede interferir y detener el vehículo. La investigación en este trabajo se centra en los vehículos aéreos autónomos, enfocándose en el tercer nivel dentro de la clasificación anterior [7].

1.2. Herramientas para la navegación autónoma

Los avances en navegación autónoma con vehículos aéreos ha dado lugar a muchas aplicaciones, entre estas podemos encontrar el mapeo tridimensional con el que es posible captar el diseño y relieve del entorno. Por ejemplo, en un edificio que ha sido afectado, el vehículo aéreo podría extraer información sobre el estado estructural del edificio y realizar mapas de alta fidelidad para aplicaciones de búsqueda y rescate [4]. La navegación se refiere a la determinación de la posición y orientación de un vehículo con respecto a un sistema de referencia inercial. El término navegación autónoma se refiere a la determinación de la posición y orientación del vehículo sin la ayuda de sensores externos al vehículo. El interés en la navegación autónoma ha generado la necesidad de implementar métodos robustos y eficientes para determinar la ubicación precisa de los vehículos no tripulados [8].

1.2.1. Filtro de Kalman

El filtro de Kalman, también conocido como estimación cuadrática lineal, es un algoritmo que utiliza una serie de mediciones con ruido estadístico e inexactitudes, para producir una estimación durante un periodo de tiempo [9]. En esencia, es un estimador recursivo, que puede dividirse en dos etapas: predicción y actualización. La etapa de predicción utiliza el estado estimado anterior para producir un estimado del estado actual, sin utilizar información del estado actual. En la etapa de actualización dicha estimación se combina con información del estado actual para obtener una mejor estimación del estado [6].

1.2.2. Algoritmos de visión por computadora

Recientemente, se han aplicado diferentes técnicas de inteligencia artificial para lograr la operación autónoma. Este enfoque hace uso de algoritmos que integran redes neuronales y algoritmos de visión. En [10], se propone un sistema de navegación basado en visión por computadora, que utiliza redes neuronales y máquinas de estado finito. Las redes neuronales se utilizan en el procesamiento de las imágenes tomadas por la cámara, con esto, se ayuda al vehículo a identificar áreas libres de obstáculos. Los datos entregados por las redes neuronales son procesados y utilizados por la máquina de estados finitos, que identifica el estado actual de robot y define que acción debe tener el robot de acuerdo con la imagen procesada.

1.2.2.1. SLAM

El SLAM, es una técnica usada por robots y vehiculos autónomos para construir un mapa de un entorno desconocido, mientras simultáneamente determina su ubicación dentro de ese mapa [11]. En los primeros enfoques el SLAM se centraba en el uso de sensores de alcance como el sonar y el láser, sin embargo estos tienen algunas desventajas como su costo y computacionalmente son ineficientes cuando el número de características es grande [12]. Es por eso que se ha optado por el uso de cámaras para la generación de mapas, entre las que destacan las cámaras monoculares, estéreo y RGB-D¹ [13].

1.2.2.2. Homografía

La posición y orientación de características geométricas en una secuencia de imágenes puede relacionarse por medio de la matriz de homografía. La matriz de homografía es una transformación invertible que relaciona características geométricas de dos imágenes de una misma escena [14]. Por lo tanto, la matriz de homografía contiene la traslación y la rotación que experimenta la cámara entre las dos escenas. Esta información puede interpretarse como la posición y orientación de un robot móvil respecto a una imagen en coordenadas homogéneas. Usar la matriz de homografía desempeña un papel importante en muchos problemas de visión por computadora y robótica [15]. La matriz de homografía puede calcularse a partir de diferentes características de una imagen, el caso más estudiado se realiza a partir de la correspondencia de puntos, donde se han propuesto diferentes técnicas que proporcionan una estimación de la matriz de homografía. La calidad de la estimación depende en gran medida del algoritmo utilizado y el tamaño del conjunto de puntos considerado.

La matriz de homografía pertenece al conjunto de matrices con determinante diferente de cero, el cual se conoce como el grupo especial lineal, con la multiplicación entre matrices como la operación del grupo [16]. Es posible asociar a la matriz de homografía una variedad. Como consecuencia, el conjunto de matrices de homografía define un

¹Una cámara RGB-D (Red, Green, Blue-Depth), es una cámara a color con un sensor de profundidad.

grupo de Lie. La continuidad y conectividad entre los elementos de este grupo de Lie, permite establecer trayectorias entre matrices de homografía y como resultado establece relaciones cinemáticas entre la matriz de homografía y la velocidad a lo largo de la trayectoria. Las relaciones cinemáticas permiten plantear el problema de estimar a la matriz de homografía en términos de un esquema de observación de estados [17].

1.2.3. Otros métodos

En robótica móvil, la odometría se utiliza para estimar la posición relativa de un robot, respecto a su localización inicial. Dentro de los tipos de odometría, existe la odometría visual, que estima el movimiento del vehículo por medio de un sistema de visión, gracias a los cambios en las secuencias de imágenes. En [8], se hace uso de la odometría visual, con un método que combina la información del flujo óptico y visión estéreo para estimar y controlar la posición de un cuatrirrotor a lo largo de una trayectoria definida. El flujo óptico es una herramienta para el análisis de imágenes, que permite el estudio de los desplazamientos de los objetos en dos dimensiones, es decir, en movimientos laterales, verticales y rotaciones en el plano de la imagen [18]. El resultado del flujo óptico, está dado por vectores de desplazamiento que indican la distancia y la dirección del movimiento. La visión estéreo es una técnica que trabaja en 3 dimensiones, es decir, es posible extraer información tridimensional de los objetos observados y permite la reconstrucción de esos objetos con técnicas de visión [18]. La fusión de sensores es un método empleado para la navegación de vehículos autónomos, que aumenta la robustez y precisión en los resultados obtenidos al mezclar la información de diferentes sensores [19].

1.3. Planteamiento del problema

Las operaciones de búsqueda y rescate en edificios dañados requiere de robots móviles capaces de realizar operaciones de forma autónoma basada en sensores a bordo del vehículo. La operación autónoma de un robot móvil requiere acceso a todos sus estados. La tecnología actual permite fusionar sensores para determinar los estados de la dinámica rotacional de los robots móviles. Determinar su posición y velocidad traslacional, sin recurrir a sensores externos, es el principal problema para lograr la operación autónoma. En edificios dañados no se tiene acceso garantizado a la señal del sistema de posicionamiento global y la posibilidad de instalar marcadores es remota. Los sensores visuales surgen como la alternativa con mayor viabilidad para resolver el problema de posicionamiento en los robots móviles.

1.4. Objetivo

Implementar un algoritmo para la operación autónoma de un cuatrirrotor basada en sensores a bordo del vehículo.

1.5. Objetivos particulares

- Revisar la teoría de grupos de Lie y estudiar su uso en el diseño de observadores.
- Analizar un observador de la matriz de homografía propuesto en [20].
- Implementar el observador en un ambiente de simulación diferente al reportado en [20].
- Implementar una estrategia de guía de vuelo a partir de la información del observador.

1.6. Organización del documento

El documento está organizado de la siguiente manera:

- **Capítulo 2:** Se introducen los preliminares matemáticos, relacionados con la interpretación del observador y el algoritmo de estimación de la homografía. Para el observador se explican conceptos matemáticos que relacionan a los grupos de Lie con la cinemática. En cuanto al algoritmo de estimación, se describen algunas propiedades geométricas que ayudan a comprender el cálculo de la matriz de homografía.
- **Capítulo 3:** Se muestra el modelo y características de los cuatrirrotores, además se describe el esquema de control usado.
- **Capítulo 4:** Se presenta el modelo de observador de estimación de la matriz de homografía y su relación con el grupo $SL(3, \mathbb{R})$, el cual está basado en el artículo [20].
- **Capítulo 5:** Se presentan los resultados obtenidos de implementar el estimador de homografía, en el entorno de simulación gazebo, que incorpora el modelo virtual de la cámara del AR.Drone 2.0 para la implementación del estimador.
- **Capítulo 6:** Se muestran las conclusiones de este trabajo y se propone trabajo a futuro.

Capítulo 2

Preliminares matemáticos

Este capítulo, introduce conceptos sobre la teoría de grupos y geometría de visión por computadora. Estos conceptos se utilizarán en los capítulos posteriores.

2.1. Teoría de grupos

Los sistemas dinámicos con parámetros concentrados generalmente se describen por ecuaciones diferenciales, en un espacio de configuración Euclidiano, por ejemplo, \mathbb{R}^N . Sin embargo, no todos los sistemas dinámicos tienen variables de configuración en el espacio Euclidiano. Existen situaciones donde las variables de configuración se encuentran en un conjunto con una estructura matemática diferente [21], por ejemplo en un grupo de Lie.

La teoría de grupos nace del concepto de operación binaria. Inicialmente, el estudio de las matemáticas se enfocó en métodos para calcular sumas y multiplicaciones de números naturales y números racionales positivos [22]. Sin embargo, pronto fue evidente que lo importante no era sumar o multiplicar, sino los elementos, la operación binaria y sus propiedades. Con esto, se dio origen al concepto de grupo [22]. Las bases de la teoría de grupos tienen su origen en el trabajo de Évariste Galois [23], al asociar la solución de ecuaciones polinomiales con grupos de permutaciones entre sus coeficientes. Fue Camille Jordan quien desarrolló en gran forma el trabajo de Galois, Serret y otros predecesores, introduciendo el concepto de homomorfismo², siendo el primero en estudiar grupos infinitos. Más tarde, Sophus Lie, Felix Klein y Henri Poincaré desarrollaron el estudio de grupos infinitos considerablemente, la idea fundamental y esencial de un grupo es la ley de composición u operación binaria y no la naturaleza de sus objetos [22].

²Función entre grupos que preserva la operación binaria.

Hoy en día, la teoría de grupos es una de las áreas de las matemáticas que más aplicaciones tiene, desde las ciencias exactas hasta la música [24]. En las ciencias exactas, incluye áreas tales como la geometría algebraica, teoría de números y topología; en física y química su aplicación tiene lugar en el estudio de las estructuras moleculares y sus simetrías, mientras que en la música puede ser aplicada en la composición, usando las diferentes formas musicales que dan estructura a las canciones, por medio de la melodía y armonía, un ejemplo de esto se describe en [25].

2.1.1. Grupo

El par (G, \circ) , que consiste en un conjunto G y una operación binaria \circ , forma una estructura matemática llamada grupoide³. Un grupo es una pareja (G, \circ) , con G un conjunto no vacío y \circ una función $f : G \times G \rightarrow G$, llamada operación binaria, con las siguientes propiedades:

- La operación “ \circ ” es **cerrada**.

$$g_1, g_2 \in G \implies g_1 \circ g_2 \in G$$

- La operación “ \circ ” es **asociativa**.

$$g_1, g_2, g_3 \in G \implies (g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3)$$

- Existe el **elemento identidad** e , tal que:

$$g_1 \in G \implies g_1 \circ e = g_1 = e \circ g_1$$

- Para cualquier elemento g_1 , existe un **elemento inverso**, g_1^{-1} tal que:

$$g_1 \circ g_1^{-1} = e$$

Ejemplo 2.1.

Toda figura es congruente consigo misma. Sin embargo, algunas figuras son congruentes consigo mismas en más de una forma, ya sea por su simetría o algún movimiento que deja a la figura inalterada. A partir de esta premisa, consideramos una figura (cuadrado), que tendrá enumerado cada uno de sus vértices, como se muestra en la figura 2.1.

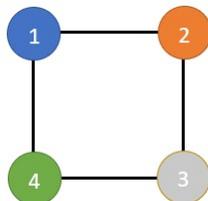


Figura 2.1: Cuadrado.

³Conjunto con cualquier tipo de operación binaria.

El primer movimiento es la ausencia de movimiento, es decir, dejarlo tal como esta, ver figura 2.2a, es sencillo observar que este movimiento, sera nuestro elemento identidad e . Los siguientes 3 movimientos, son las rotaciones que hacen que el cuadrado vuelva a colocarse en su misma posición. Estas rotaciones son 90° (r_1), 180° (r_2) y 270° (r_3), como se muestra en las figuras 2.2b, 2.2c, 2.2d, respectivamente. Existe también el movimiento de rotación en 360° , aunque resulta ser el mismo que el elemento identidad.

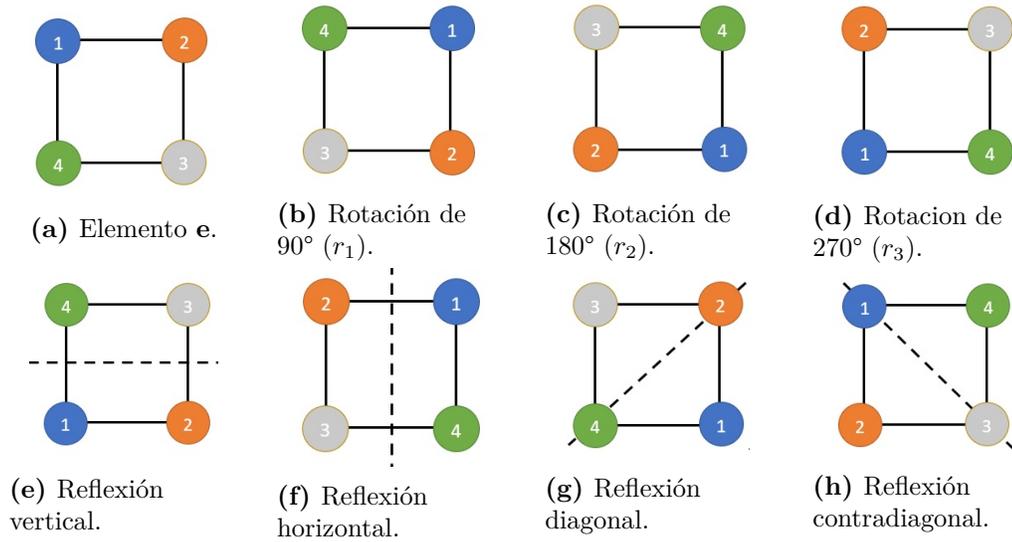


Figura 2.2: Movimientos del cuadrado.

Además de las rotaciones, que cumplen con la premisa de ser movimientos que dejan a la figura inalterada, se tiene un conjunto de reflexiones respecto a los ejes de simetría de la figura. La primera reflexión es la vertical (r_v), figura 2.2e, seguido, de la horizontal (r_h), figura 2.2f. La tercer reflexión, es la diagonal (r_d), figura 2.2g y la última, es la contradiagonal (r_c), figura 2.2h. Considerando el conjunto de las simetrías anteriores, se tiene $G = \{e, r_1, r_2, r_3, r_v, r_h, r_d, r_c\}$. De la figura 2.3, se puede comprobar:

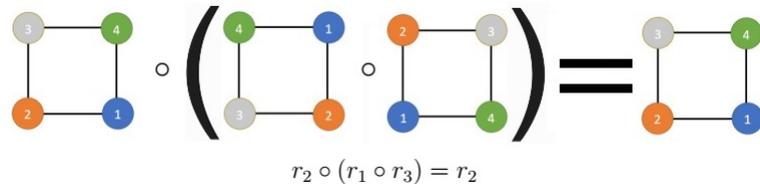


Figura 2.3: Ejemplo de combinación de simetrías.

- Es cerrado para la operación \circ , ya que $r_1, r_2, r_3 \in G$ y el resultado $r_2 \in G$.
- La operación \circ , es asociativa, ya que se cumple $r_2 \circ (r_1 \circ r_3) = (r_2 \circ r_1) \circ r_3$.

- Existe el elemento identidad e , tal que $r_2 \circ e = r_2 = e \circ r_2$.
- Existe el elemento inverso, r_2^{-1} tal que: $r_2 \circ r_2^{-1} = e$.

Las propiedades anteriores, pueden ser verificadas, haciendo uso de la tabla 2.1 (tabla de multiplicación del grupo). Esta muestra las posibles operaciones binarias en él. Analizando la tabla, se observa que la operación de composición no es conmutativa ⁴.

\circ	e	r_1	r_2	r_3	r_v	r_h	r_d	r_c
e	e	r_1	r_2	r_3	r_v	r_h	r_d	r_c
r_1	r_1	r_2	r_3	e	r_c	r_d	r_v	r_h
r_2	r_2	r_3	e	r_1	r_h	r_v	r_c	r_d
r_3	r_3	e	r_1	r_2	r_d	r_c	r_h	r_v
r_v	r_v	r_d	r_h	r_c	e	r_2	r_1	r_3
r_h	r_h	r_c	r_v	r_d	r_2	e	r_3	r_1
r_d	r_d	r_h	r_c	r_v	r_3	r_1	e	r_2
r_c	r_c	r_v	r_d	r_h	r_1	r_3	r_2	e

Tabla 2.1: Tabla de multiplicación del grupo G , de simetrías del cuadrado.

2.1.2. Subgrupos

Sea (G, \circ) un grupo. Un subgrupo no vacío D de G es un subconjunto $D \subseteq G$, tal que (D, \circ) es a su vez un grupo con la operación heredada de G . Esto es, la operación \circ es cerrada en D . Si la propiedad asociativa se cumple en G ; en D por ser un subconjunto, también se cumple. El elemento identidad pertenece también a D y la inversa de todo elemento de D , es también un elemento de D .

Del grupo $G = \{e, r_1, r_2, r_3, r_v, r_h, r_d, r_c\}$ del ejemplo 1, podemos generar los subgrupos, $D_1 = \{e, r_1\}$, $D_2 = \{e, r_1, r_2, r_3\}$, $D_3 = \{e, r_v\}$, $D_4 = \{e, r_d, r_c\}$, $D_5 = \{e, r_v, r_h\}$, los cuales cumplen con las propiedades de grupos.

Al hacer uso de la teoría de grupos, surgen algunas interrogantes, que tienen relación con la modelación de fenómenos físicos por medio de sistemas dinámicos. Un concepto fundamental en el modelado de sistemas dinámicos es la variación infinitesimal de una variable respecto a otra, que conduce al concepto de derivada, por lo que surgen las siguientes preguntas. 1. ¿Es posible utilizar el cálculo diferencial en grupos?. 2. ¿La naturaleza finita de los elementos de un grupo es un obstáculo para definir los conceptos de continuidad⁵ y conectividad⁶?

⁴Los grupos que satisfacen la propiedad conmutativa, son conocidos como grupos conmutativos o grupos abelianos.

⁵La continuidad es utilizada para saber que pasa alrededor de cada uno de los elementos y saber si es posible utilizar cálculo diferencial.

⁶La conectividad es usada para saber si es posible realizar una trayectoria.

2.2. Grupos Infinitos

El conjunto de matrices invertibles de dimensión $n \times n$ con entradas en el campo \mathbb{F} , junto con la operación de multiplicación, forman el grupo general lineal definido como

$$GL(n, \mathbb{F}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} | \det(A) \neq 0\} \quad (2.1)$$

El campo \mathbb{F} , puede remplazarse por números reales \mathbb{R} , números complejos \mathbb{C} ó cuaternos \mathbb{Q} . A partir del grupo $GL(n, \mathbb{F})$, se pueden generar subgrupos ⁷, por ejemplo, dado que cada número real es un caso especial de un número complejo, es decir, $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, se tiene

$$GL(n, \mathbb{R}) \subseteq GL(n, \mathbb{C}) \quad (2.2)$$

Además, como el $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, con A y B matrices invertibles es posible definir el subgrupo, conocido como grupo especial lineal

$$SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} | \det(A) = 1\} \subseteq GL(n, \mathbb{R}) \quad (2.3)$$

Otro ejemplo de subgrupo de $GL(n, \mathbb{C})$ es el que contiene matrices unitarias, conocido como grupo unitario, definido como

$$U(n) = \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} | AA^* = I\} \subseteq GL(n, \mathbb{C}) \quad (2.4)$$

Los grupos clasicamente estudiados, se generan como intersecciones de los grupos anteriores. Por ejemplo, la intersección de los grupos unitario y especial, produce el grupo especial unitario

$$SU(n) = U(n) \cap SL(n, \mathbb{C}) \subseteq GL(n, \mathbb{C}) \quad (2.5)$$

La intersección de los grupos espacial unitario y el grupo especial lineal, con elementos en los reales, produce el grupo ortogonal

$$O(n, \mathbb{R}) = U(n) \cap GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) | AA^T = I\} \quad (2.6)$$

La intersección entre el grupo lineal unitario y el grupo especial lineal, produce el grupo real especial ortogonal

$$SO(n) = U(n) \cap SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) | AA^T = I; \det(A) = 1\} \quad (2.7)$$

⁷Trivialmente, cada grupo tiene al menos dos subgrupos, llamados impropios, el elemento identidad $\{e\}$ y el mismo, es decir, $G \subseteq G$ y $\{e\} \subseteq G$. Un subgrupo propio D sera el que cumpla $\{e\} \neq D \neq G$.

2.3. Cálculo diferencial en grupos

La teoría de grupos nació como herramienta para resolver ecuaciones algebraicas (polinomiales) usando grupos finitos. Dicha herramienta evolucionó en el trabajo de Sophus Lie con el objetivo de resolver, o al menos simplificar ecuaciones diferenciales, usando grupos infinitos. Los grupos infinitos abren la posibilidad de introducir conceptos propios del cálculo diferencial, tales como límite y continuidad [26].

Dado un grupo, la figura 2.4 ilustra que sucede si en lugar de realizar la operación $g_1 \circ g_2$ se realiza la operación $(g_1 + d_1) \circ (g_2 + d_2)$, con d_1 y d_2 desviaciones pequeñas, o que sucede si en lugar de obtener g_1^{-1} , se obtiene $(g_1 + d)^{-1}$, con d una desviación pequeña. ¿El resultado de la operación será algo cercano a $g_1 \circ g_2$ o a g_1^{-1} , respectivamente?.

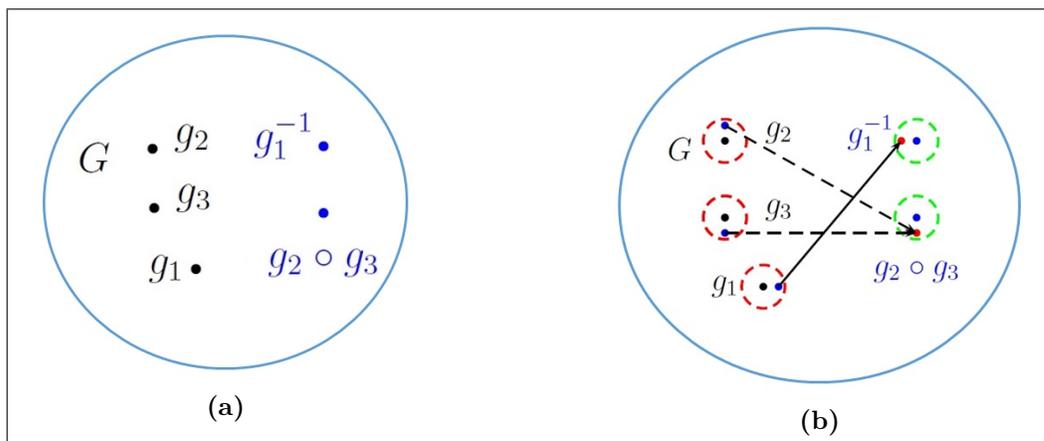


Figura 2.4: Propiedad de continuidad.

Todos los grupos matriciales anteriores tienen un número incontable de elementos y las operaciones de grupo pueden ser continuas. La clave para formalizar el concepto de continuidad es la topología. Por lo que para ser continuo, un grupo incontable debe tener la estructura topológica de una variedad⁸.

Para la mayoría de grupos infinitos, los elementos del grupo se pueden parametrizar con elementos de un espacio Euclidiano. El número de parámetros que se necesitan para caracterizar a los elementos del grupo es la dimensión del grupo y es la dimensión de la variedad [27]. Los números reales que parametrizan un grupo pueden considerarse coordenadas del grupo, con ello se adquiere una estructura topológica de variedad, lo que permite definir límites de sucesiones de elementos del grupo. La mayor parte de los grupos de interés son los llamados Grupos de Lie. Estos son grupos donde el conjunto G es a la vez un grupo y una variedad, y las operaciones del grupo son continuas y diferenciables en la topología asociada.

⁸Espacio que parece Euclidiano a pequeña escala en todas partes.

2.3.1. Variedad

Las variedades son conjuntos con una estructura matemática, conocida como estructura geométrica diferencial, que se utiliza para describir los conjuntos sobre los que evolucionan los sistemas dinámicos [21]. Una variedad diferenciable n -dimensional M_n , consiste de lo siguiente:

- Un espacio topológico \mathcal{T} . Esto incluye una colección de conjuntos abiertos U_α que cubre Υ : $\cup_\alpha U_\alpha = \mathcal{T}$.
- Una colección de mapeos (charts) ϕ_α , con $\phi_\alpha(U_\alpha) = V_\alpha \in \mathbb{R}^N$. Cada ϕ_α es un isomorfismo de U_α a V_α .

Un espacio topológico \mathcal{T} en tres dimensiones, puede visualizarse como todos los planos generados sobre una superficie, cuya unión genera a \mathcal{T} .

En la figura 2.5, se observa un grupo G , con elementos g_1, g_2, g_3 . Cada elemento tiene una vecindad alrededor, denotada como U_α, U_β y U_γ para g_1, g_2, g_3 respectivamente. Cada elemento de G puede mapearse a un conjunto de \mathbb{R}^N por medio de las funciones ϕ_α, ϕ_β y ϕ_γ . La dimensión N de la variedad que parametriza un grupo de Lie es el número de parámetros continuos necesarios para describir las operaciones de forma única.

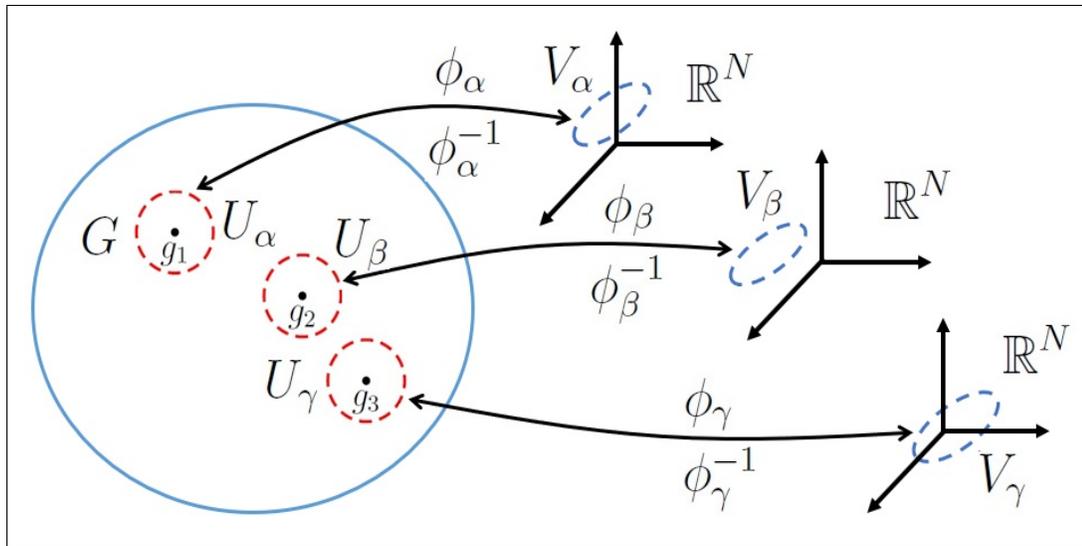


Figura 2.5: Variedad diferenciable.

Ejemplo 2.2.

Sea una matriz de 2×2 con variables en los reales y perteneciente al grupo especial lineal $SL(2, \mathbb{R})$, es decir, $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$. Al pertenecer al grupo especial lineal, la condición $\det(A) = 1$ impone una restricción. Por lo que se puede definir la variedad M como

$$M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1x_4 - x_2x_3 = 1\} \quad (2.8)$$

Por lo tanto, cada elemento del grupo en $SL(2, \mathbb{R})$, esta determinado por un punto en el espacio tridimensional Euclidiano. Una parametrización de $SL(2, \mathbb{R})$ es

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & \frac{1+x_2x_3}{x_1} \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

La parametrización de un grupo no es única y definir la mejor parametrización es un problema no trivial. En el ejemplo anterior, ¿Qué sucede cuando $x_1 \rightarrow 0$? La respuesta es que existe una discontinuidad, debida a la parametrización utilizada $SL(2, \mathbb{R})$.

Ejemplo 2.3.

Dado un punto p sobre \mathbb{R} como se muestra en la figura 2.6. Considerando $\alpha_1 > 0$ y $\alpha_2 \in \mathbb{R}$, las operaciones de desplazamiento y escalamiento sobre p son:

$$\alpha_1 p = p' \quad (2.10)$$

$$p + \alpha_2 = p' \quad (2.11)$$

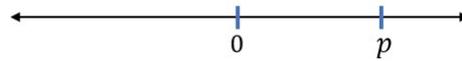


Figura 2.6: Línea real.

Combinando las operaciones

$$\alpha_1 p + \alpha_2 = p' \quad (2.12)$$

Al expresar al punto p con coordenada x en forma homogénea, se tiene:

$$\begin{bmatrix} x' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Notar que

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in GL(2, \mathbb{R}) \quad (2.14)$$

En esta parametrización es posible asociar a cada matriz del grupo un vector en \mathbb{R}^2 , como se muestra en la figura 2.7.

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Por otro lado, esta parametrización tiene dos inconvenientes. Primero, no captura la operación de inversión de forma continua, es decir, valores de α_1 negativos, el cruce por cero generaría una matriz que no pertenece al grupo. Segundo, el elemento neutro no corresponde con el elemento neutro en \mathbb{R}^2 . Es posible encontrar una parametrización para resolver estos puntos, sin embargo, esta búsqueda no se aborda en este trabajo.

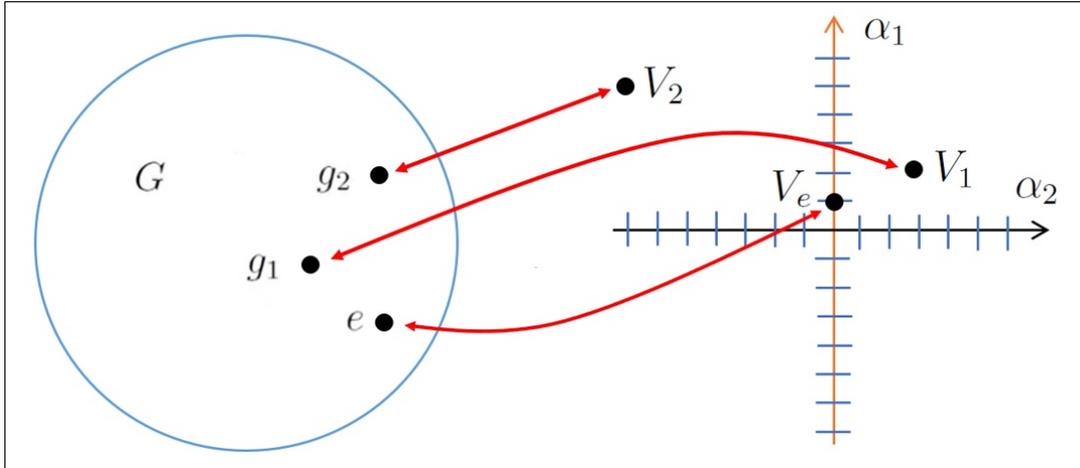


Figura 2.7: Parametrización en \mathbb{R}^2 , continuidad.

En el caso de la conectividad, se analiza, la posibilidad de trazar una curva que conecte dos elementos del grupo, como se muestra en la figura 2.8; por ejemplo el elemento e con el elemento g_x . El grupo G contiene elementos que pueden ser utilizados para trazar la curva, tal y como se observa en la figura 2.8. Esta misma curva, vista desde la parametrización \mathbb{R}^2 , traza la curva V_e a V_x .

Matemáticamente, puede analizarse con la definición de límite. Para esto, se toma un elemento g_m cercano a g_x , como se muestra gráficamente en la figura 2.8 y como se expresa a continuación

$$g_m = g_m(g_{m-1}^{-1}g_{m-1})(g_{m-2}^{-1}g_{m-2}) \cdots (g_2^{-1}g_2)(g_1^{-1}g_1)(e^{-1}e) \quad (2.16)$$

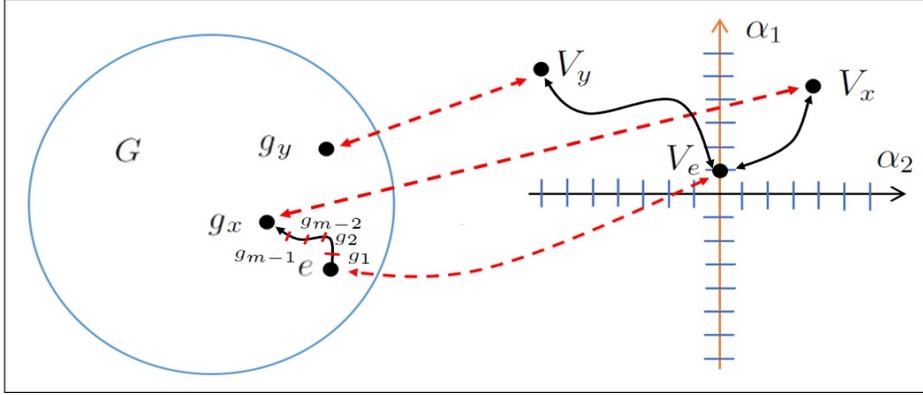


Figura 2.8: Parametrización en \mathbb{R}^2 , continuidad y conectividad.

Por asociatividad la expresión anterior se reescribe como:

$$g_m = (g_m g_{m-1}^{-1})(g_{m-1} g_{m-2}^{-1})(g_{m-2} g_{m-3}^{-1}) \cdots (g_2 g_1^{-1})(g_1 e^{-1})e \quad (2.17)$$

por otra parte, la propiedad de continuidad implica que $(g_{m-1} g_{m-2}^{-1}) \approx e$, así se obtiene:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left[(g_m g_{m-1}^{-1})(g_{m-1} g_{m-2}^{-1})(g_{m-2} g_{m-3}^{-1}) \cdots (g_2 g_1^{-1})(g_1 e^{-1})e \right] = e \quad (2.18)$$

Cada elemento del grupo puede ser expresado en términos de un número infinito de elementos, cercanos a la identidad, lo que cumple con la propiedad de continuidad, es decir

$$g_x = g_x \lim_{m \rightarrow \infty} \left[(g_x g_{m-1}^{-1})(g_{m-1} g_{m-2}^{-1})(g_{m-2} g_{m-3}^{-1}) \cdots (g_2 g_1^{-1})(g_1 e^{-1})e \right] \quad (2.19)$$

Como conclusión:

- Las partes conectadas de un grupo que contienen al elemento identidad es un subgrupo.
- Las partes conectadas y desconectadas de un grupo conservan la estructura de una variedad, aunque esto no asegura la conectividad.

2.4. Grupos de Lie

Un grupo de Lie, es un grupo continuo, conectado con operación de composición analítica⁹.

La continuidad del grupo implica que tiene asociada una variedad diferencial. El grupo es conectado, es decir, existe una trayectoria que une a cualquier par de elementos del grupo. Las operaciones $g_1 \circ g_2$ y $g_1 \circ g_1^{-1} = e$ son diferenciables.

⁹Analítica: existe la expansión en series de Taylor de la operación de composición.

Ejemplo 2.4.

Considerando la siguiente parametrización, para $SL(2, \mathbb{R})$

$$g(V_x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & \frac{1+x_2x_3}{x_1} \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}) \quad (2.20)$$

La operación de composición, dada por

$$g(x_1, x_2, x_3) \circ g(y_1, y_2, y_3) = g(z_1, z_2, z_3)$$

es

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & \frac{1+x_2x_3}{x_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & \frac{1+y_2y_3}{y_1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_1y_1 + x_2y_3 & x_1y_2 + x_2\frac{1+y_2y_3}{y_1} \\ x_3y_1 + \frac{1+x_2x_3}{x_1}y_3 & x_3y_2 + \frac{(1+x_2x_3)(1+y_2y_3)}{x_1y_1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & \frac{1+z_2z_3}{z_1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.21)$$

con

$$\begin{aligned} z_1 &= \psi_1(V_x, V_y) = x_1y_1 + x_2y_3 \\ z_2 &= \psi_2(V_x, V_y) = x_1y_2 + x_2\frac{1+y_2y_3}{y_1} \\ z_3 &= \psi_3(V_x, V_y) = x_3y_1 + \frac{1+x_2x_3}{x_1}y_3 \end{aligned}$$

es analítica, excepto en $x_1 = y_1 = 0$.

La operación para determinar el inverso de un elemento, esta definida como

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & \frac{1+x_2x_3}{x_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & \frac{1+y_2y_3}{y_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

de donde

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & \frac{1+y_2y_3}{y_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1+x_2x_3}{x_1} & -x_2 \\ -x_3 & x_1 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

La acción de un grupo usando las coordenadas de la variedad

$$\begin{aligned} y_1 &= \psi_1(V_x) = \frac{1+x_2x_3}{x_1} \\ y_2 &= \psi_2(V_x) = -x_2 \\ y_3 &= \psi_3(V_x) = -x_3 \end{aligned} \quad (2.24)$$

también es analítica, excepto en $y_1 = 0$

Se considera que un grupo de Lie actúa sobre un espacio vectorial V si:

- **Cerradura**, $f : G \times V \rightarrow V$. (2.25)

- **Asociatividad**, $(g_1 \circ g_2)V = g_1(g_2V)$. (2.26)

- Existe el **elemento inverso para todo** $v \in V$ y $g \in G$ se tiene: (2.27)
 $g_1^{-1}(g_1V) = V$.

- Existe el **elemento identidad**, $eV = V$. (2.28)

La acción del grupo sobre el espacio vectorial puede generar simetrías, por ejemplo, conservar la norma de los elementos del espacio vectorial sobre el que actúa.

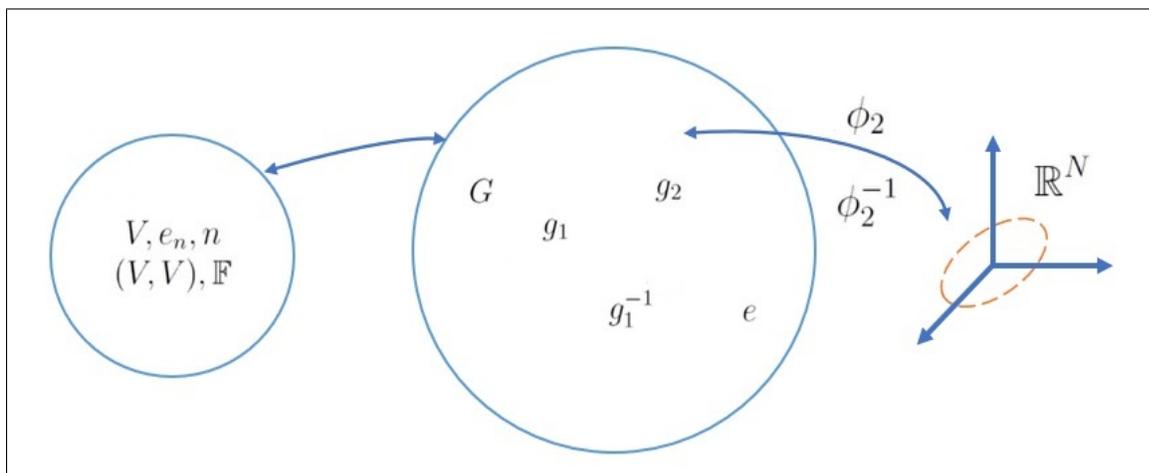


Figura 2.9: Acción de un grupo de Lie sobre un espacio vectorial V .

2.5. Cinemática sobre una variedad

El movimiento de partículas, cuerpos rígidos y cuerpos deformables se describe en términos de la evolución en el tiempo de las variables de configuración dentro de una variedad. La cinemática compuesta por ecuaciones diferenciales y posiblemente ecuaciones algebraicas asociadas, describe la derivada con respecto al tiempo de las variables de configuración. La derivada con respecto al tiempo de las variables de configuración es un elemento del espacio tangente en cada instante, ver figura 2.10.

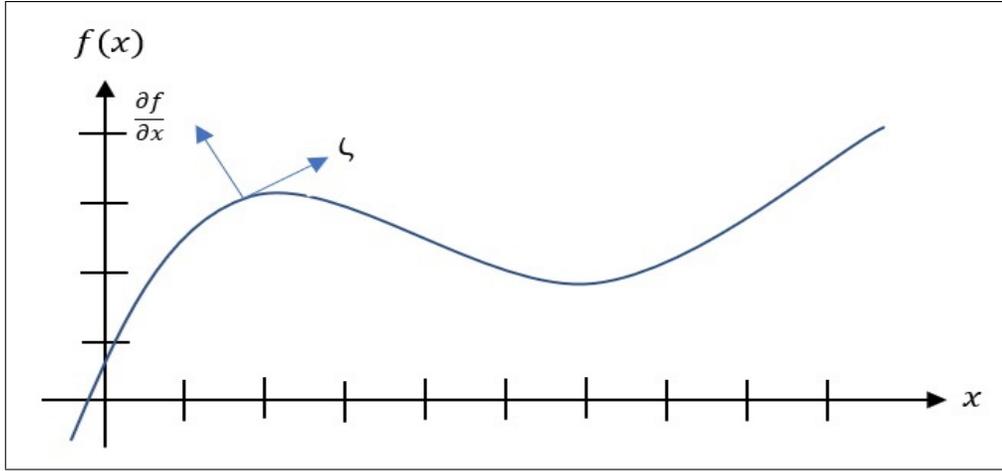


Figura 2.10: Derivada en el tiempo en \mathbb{R}^2 .

El espacio tangente a una variedad diferencial M en el espacio Euclidiano se define como

$$T_x M = \left\{ \zeta \in \mathbb{R}^n \mid \frac{\partial f_i}{\partial x} \zeta = 0, i = 1, \dots, \ell \right\} \quad (2.29)$$

con

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) = 0, i = 1, \dots, \ell\} \quad (2.30)$$

Si los vectores $\frac{\partial f_i}{\partial x}$, $i = 1 \dots \ell$ son linealmente independientes, se dice que la variedad M tiene una dimensión $n - \ell$. El espacio tangente consiste del conjunto de vectores ortogonales a los gradientes de las funciones que definen a la variedad.

Ejemplo 2.5.

Considerando la siguiente variedad

$$M = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = 0\} \quad (2.31)$$

si $\frac{\partial f}{\partial x} \neq 0$ cuando $f(x) = 0$, M tiene dimensión 1.

El espacio tangente de M , puede describirse como:

$$T_x M = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \zeta = S \frac{\partial f}{\partial x}, S \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, S + S^T = 0 \right\} \quad (2.32)$$

donde S , es una matriz antisimétrica.

Desde el punto de vista de la ingeniería, existen algunos sistemas físicos descritos por ecuaciones diferenciales donde el espacio de configuración es un grupo de Lie. ¿Cuál es el equivalente del espacio tangente a un grupo de Lie? Para identificar el espacio tangente a una curva conformada por elementos de un grupo de Lie, se procede como sigue. Se define una curva/trayectoria¹⁰ parametrizada por una variable escalar, por ejemplo la variable t . Entonces, se puede definir: $\forall t \in \mathbb{R} \rightarrow g(t) \in G$.

Considere ahora un grupo de curvas suaves, $g_1(t)$, $g_2(t)$ y $g_3(t)$, en el grupo de Lie G , que pasa por el elemento identidad $e \in G$, como se muestra en la figura 2.11.

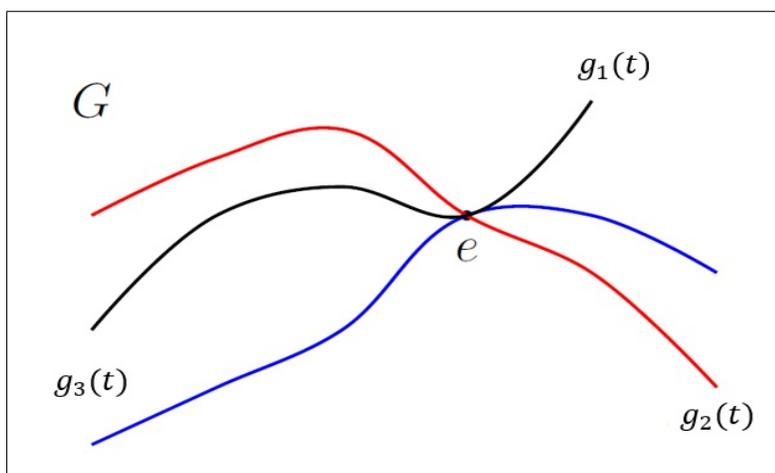


Figura 2.11: Grupo de curvas pertenecientes al grupo de Lie G .

La derivada de la trayectoria con respecto a t se define en la forma usual como

$$g'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t} \quad (2.33)$$

Esta derivada se interpreta como el vector velocidad de las trayectorias que pasan por el elemento identidad. Si en $t = 0$, $g(0) = e$, entonces el vector tangente en e es $g'(0)$.

Ejemplo 2.6.

Calcular el vector tangente en la identidad del grupo de Lie, $SL(2, \mathbb{R})$, parametrizado de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} 1 + x_1 & x_2 \\ x_3 & \frac{1+x_2x_3}{1+x_1} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

¹⁰En una variedad es una función continua $g : I \rightarrow M$ con I un intervalo abierto de \mathbb{R} .

Se puede construir una trayectoria suave para $SL(2, \mathbb{R})$, de la siguiente manera:

$$g(t) = \begin{bmatrix} 1 + x_1 t & x_2 t \\ x_3 t & \frac{1 + x_2 x_3 t^2}{1 + x_1 t} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

así

$$g'(t) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & \frac{2 + x_2 x_3 t - x_1 + x_1 x_2 x_3 t^2}{(1 + x_1 t)^2} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

en $t = 0$, se tiene:

$$\begin{aligned} g'(0) &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & -x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= x_1 X_{x_1} + x_2 X_{x_2} + x_3 X_{x_3} \end{aligned} \quad (2.37)$$

El espacio tangente de un grupo de Lie G en el elemento identidad e se conoce como el álgebra de Lie de G y se denota como \mathfrak{g} . Es álgebra por que tiene las propiedades de un espacio vectorial, por lo que se pueden introducir conceptos como dimensión, base, producto interno. La dimensión del álgebra de Lie \mathfrak{g} es igual a la dimensión de la variedad que parametriza el grupo de Lie.

Para determinar el espacio tangente en cualquier punto de la trayectoria se definen los siguientes operadores, cuya acción se ilustra en la figura 2.12.

$$\forall g \in G, \begin{cases} \text{Traslación izquierda } L_g : G \rightarrow G \mid L_g(g_1) = gg_1 \\ \text{Traslación derecha } R_g : G \rightarrow G \mid R_g(g_1) = g_1g \end{cases} \quad (2.38)$$

Las operaciones L_g y R_g son suaves por las propiedades del grupo de Lie. Para determinar la derivada de $L_g(g_1)$ con respecto a g_1 se consideran dos variables de parametrización $s, t \in \mathbb{R}$. Por lo tanto,

$$L_g(g_1) = g(s)g_1(t) \quad (2.39)$$

se considera que $g_1(0) = e$ y $g'_1(0) \in \mathfrak{g}$. Fijando s y derivando con respecto a t se obtiene

$$L'_g(g_1(t)) = g(s)g'_1(t) = g(s)X \quad (2.40)$$

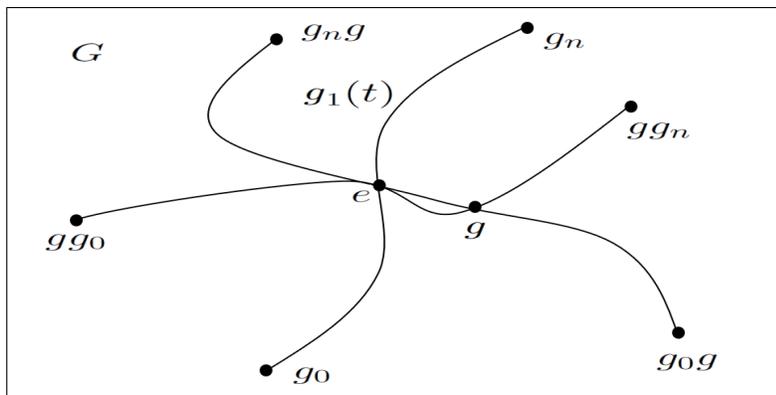


Figura 2.12: Grupo de Lie, acción de operadores.

un isomorfismo¹¹ entre el álgebra de Lie \mathfrak{g} y el espacio tangente en g denotado como $T_g G$, por lo tanto,

$$T_g G = \{g \in G, X \in \mathfrak{g} \mid gX\} \quad (2.41)$$

Además se definen automorfismos¹² internos $R_{g^{-1}} \circ L_g = L_g \circ R_{g^{-1}}$, expresados como \mathbf{Ad}_g , es decir:

$$\mathbf{Ad}_g(g_1) = R_{g^{-1}} \circ L_g(g_1) = R_{g^{-1}}(L_g(g_1)) = gg_1g^{-1} \quad (2.42)$$

donde $\mathbf{Ad}_g : G \rightarrow G$, este automorfismo de G deja invariante al elemento identidad, esto se ilustra en la figura 2.13.

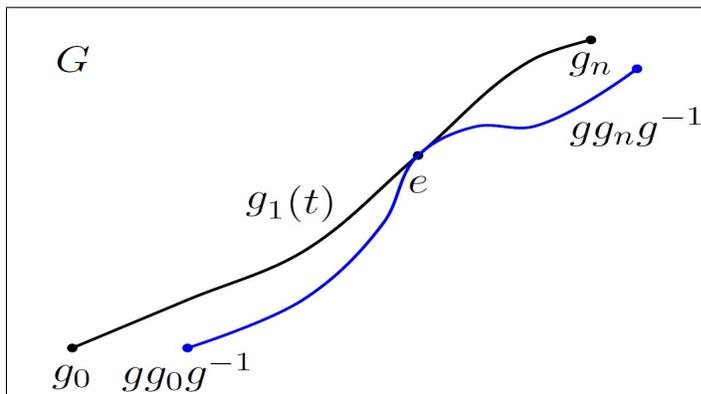


Figura 2.13: Automorfismos internos

¹¹Es un homomorfismo que admite un inverso.

¹²Es un isomorfismo en si mismo.

La derivada de $\mathbf{Ad}_{\mathbf{g}}(g_1)$ con respecto a g_1 , en $g_1 = e$, se calcula considerando:

$$\mathbf{Ad}_{\mathbf{g}}(g_1(t)) = gg_1(t)g^{-1}. \quad (2.43)$$

con $g_1(0) = e$ y $g_1'(0) \in \mathfrak{g}$, entonces

$$\mathbf{Ad}_{\mathbf{g}}'(g_1(t))|_{t=0} = gg_1'(t)g^{-1}|_{t=0} = gXg. \quad (2.44)$$

donde $X \in \mathfrak{g}$.

Denotando $\mathbf{Ad}_{\mathbf{g}}'(g_1(t))|_{t=0}$ por $Ad_g(X)$, de donde se obtiene el siguiente mapeo, llamado representación adjunta de G .

$$\mathbf{Ad}_{\mathbf{g}}(X) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \quad (2.45)$$

Para un sistema dinámico cuyo espacio de configuración es un grupo de Lie, la relación cinemática entre las variables de configuración y su velocidad es

$$\dot{g} = gX, \quad \text{con } g \in G, X \in \mathfrak{g} \quad (2.46)$$

La noción de perpendicularidad entre la curva en G y su espacio tangente puede expresarse con el operador traza¹³

$$(g, gX) = \text{tr}(g^{\top}gX) = 0 \quad (2.47)$$

a partir de esto es posible identificar el álgebra de Lie para el grupo especial lineal $SL(n, \mathbb{R})$, como:

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \{X \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid \text{tr}(X) = 0\} \quad (2.48)$$

¹³El operador traza de una matriz A de $n \times n$, está definida como la suma de los elementos de su diagonal principal, es decir, $\text{tr}(A) = \text{traza}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$.

2.6. Observadores en grupos de Lie

En esta sección se formula de forma general el problema de observación en sistemas cuyo espacio de configuración es un grupo de Lie.

Definición 2.1.

Sea G un grupo de Lie compuesto por matrices $g \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $X \in \mathbb{R}^n$ un espacio vectorial sobre el cual actúa G . Sea $V \in \mathbb{R}^n$ un espacio vectorial de velocidades. Un sistema cinemático es

$$\begin{aligned} \dot{g} &= g\mathcal{V}(V) \\ y &= \mathcal{Y}(g, X) \end{aligned} \quad (2.49)$$

con $\mathcal{V}(V) \in \mathfrak{g}$ y \mathcal{Y} una acción suave de G sobre X que representa la salida del sistema cinemático. El problema de observación de interés en este trabajo puede formularse como sigue

Definición 2.2.

Considere un sistema cinemático de la forma (2.49). Diseñar un sistema dinámico

$$\hat{g} = \Phi(\hat{g}, y)$$

tal que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{g} = g \quad (2.50)$$

con $\Phi(\hat{g}, y) \in \mathfrak{g}$.

Para satisfacer la condición (2.50) es necesario medir la distancia entre g y \hat{g} . La distancia debe tener congruencia con las operaciones de grupo. En un grupo de Lie, la distancia no puede establecerse como se hace en el espacio euclidiano. En el espacio euclidiano la distancia entre dos elementos debe ser cero para que ambos sean el mismo. En un grupo de Lie no se tiene un elemento cero equivalente. La distancia puede establecerse en términos del elemento identidad como sigue

$$\tilde{g} = \hat{g}^{-1}g = \hat{g}g^{-1} \quad (2.51)$$

entonces, si \tilde{g} es igual a cero, se tiene que $\hat{g} = g$. La selección de la coordenada del error en (2.51) depende fuertemente en la función de salida \mathcal{Y} y de las propiedades del grupo de Lie. Por ejemplo, suponga que $G = SL(3, \mathbb{R})$ entonces $\mathfrak{g} = \{S \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid S + S^T = 0\}$. En este caso, se tiene

$$\dot{g} = g\hat{V}$$

con $\hat{V} \in \mathfrak{g}$. Entonces

$$\tilde{g} = \hat{g}g^{-1} \tag{2.52}$$

dado que $g \in SL(3, \mathbb{R})$ existe g^{-1} . Por lo tanto, cuando

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{g} = e$$

se satisface (2.50). De las propiedades de G se tiene

$$gg^{-1} = e$$

de tal forma que

$$\dot{g}^{-1} = -\hat{V}g^{-1}$$

A partir de (2.52) se obtiene

$$\dot{\tilde{g}} = (\dot{\hat{g}} - \hat{g}\hat{V})g^{-1}$$

de donde

$$\dot{\hat{g}} = \hat{g}\hat{V} + \Gamma(y, \hat{g})$$

con $\Gamma \in \mathfrak{g}$. Finalmente,

$$\tilde{g} = \Gamma(y, \hat{g})g^{-1}$$

El diseño del observador se completa al demostrar que \tilde{g} converge a e . La complejidad del diseño depende de que g sea observable con la información disponible en y y de poder diseñar la función Γ que garantice que (2.50) se satisfaga.

2.7. Visión por computadora

La visión por computadora se encarga de la deducción automática de la estructura y propiedades del mundo tridimensional, posiblemente dinámico, a partir de una o varias imágenes bidimensionales [28].

2.8. Perspectiva y plano proyectivo

Las coordenadas homogéneas, surgen de dos conceptos importantes, la perspectiva y el plano proyectivo. El concepto de perspectiva, surge en aplicaciones relacionadas con el arte o la fotografía. La perspectiva permite resaltar características estéticas en una pintura, imagen, escultura, etc. al atraer la atención de uno o más puntos en específico. En este contexto nace la idea de que las líneas paralelas se intersectan en el infinito, tal como se observa en la figura 2.14a. En la realidad las vías nunca se llegan a tocar en ningún punto, pero en perspectiva, en un punto muy lejano se intersectan. El punto en donde las líneas en el infinito se intersectan, se le conoce como punto en el infinito, ver figura 2.14b.

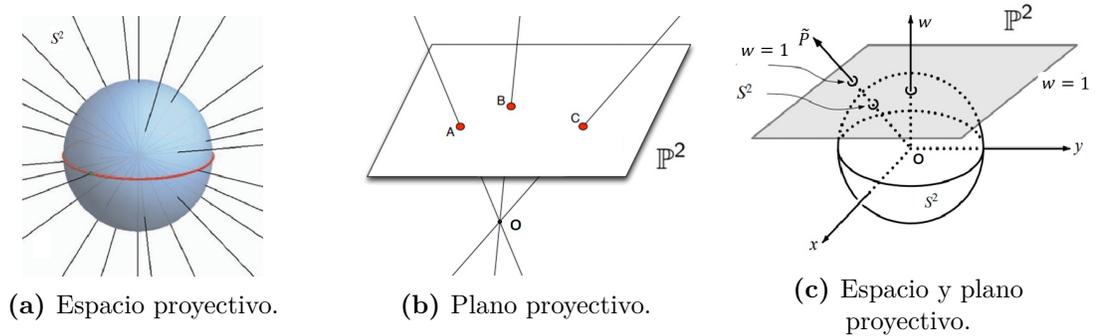


(a) Intersección de rectas paralelas.



(b) Punto en el infinito.

Uniendo todas las líneas que intersectan el punto en el infinito, se puede formar el espacio proyectivo, denotado por S^2 . En la figura 2.15a, se muestra el espacio proyectivo, que puede representarse por una esfera, siendo este un modelo sencillo y fácil de interpretar, aunque en la realidad su modelo es complejo y difícil de visualizar. Dentro del espacio proyectivo se encuentra el plano proyectivo, ver figuras 2.15b y 2.15c. En este plano están definidas las coordenadas homogéneas, útiles para el cálculo de la matriz de homografía.



2.9. Representación de un punto en coordenadas homogéneas

2.9.1. Coordenadas cartesianas

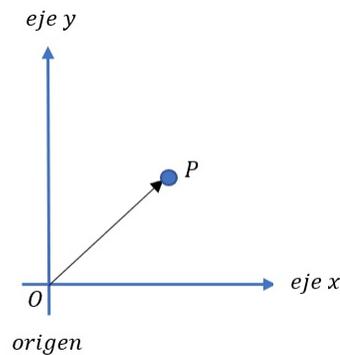


Figura 2.16: Representación de un punto en \mathbb{R}^2 .

Un punto en dos dimensiones es representado por dos coordenadas en un plano cartesiano, por lo que existe en el espacio \mathbb{R}^2 , ver figura 2.16.

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{donde } P \in \mathbb{R}^2 \quad (2.53)$$

2.9.2. Coordenadas homogéneas

Un punto en tres dimensiones puede interpretarse con coordenadas homogéneas sobre un plano proyectivo \mathbb{P}^2 , ver figura 2.17. En coordenadas homogéneas todo punto en dos dimensiones esta definido por tres coordenadas, como se muestra a continuación

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{P}^2 \quad \text{con } w \neq 0 \quad (2.54)$$

Las coordenadas homogéneas se utilizan en transformaciones bidimensionales, tales como la traslación, escalamiento y rotación. Una aplicación de esto, puede verse en el ejemplo 2.3, donde se utilizan las coordenadas homogéneas para representar la traslación y escalamiento en una dimensión. En la figura 2.17, se observa la representación de un punto en coordenadas homogéneas. Se observa que w tiene un valor arbitrario y representa un factor de escala, que por simplicidad en $w = 1$ se encuentra el plano proyectivo \mathbb{P}^2 .

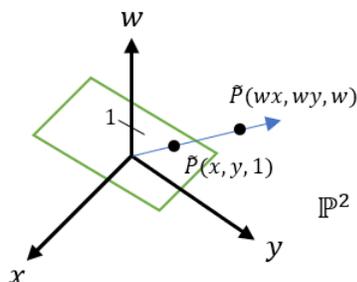


Figura 2.17: Representación de un punto en \mathbb{P}^2 .

2.10. Imagen

Una imagen es el resultado de la adquisición de una señal proporcionada por un sensor¹⁴, que convierte la información del espectro electromagnético en codificaciones numéricas [28]. A cada una de estas codificaciones se les denomina punto o píxel y generalmente contiene el nivel de iluminación o color en un punto en la escena. En otros términos, una imagen es la proyección del mundo real (3D), sobre un espacio bidimensional (2D). Cuando una cámara está en movimiento¹⁵, las imágenes varían en el tiempo. El modelo más básico, es el de la cámara de orificio invertido o modelo de cámara pinhole, mostrado en la figura 2.18.

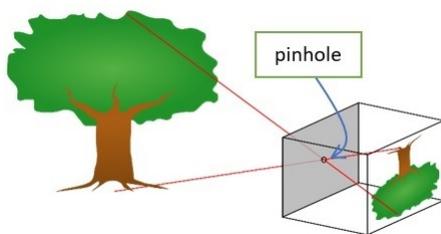


Figura 2.18: Cámara pinhole.

¹⁴Los sensores más utilizados para la adquisición de imágenes son las cámaras.

¹⁵En el caso de este trabajo, se tienen dos cámaras a bordo del AR.Drone 2.0,

2.11. Modelo de la cámara

Una cámara se compone de un conjunto de lentes utilizados para dirigir la luz, es decir, hacer un cambio controlado en la dirección de propagación de la onda. Considerando el modelo más simple (lente delgada); se tiene un modelo definido por un eje (eje óptico) y un plano perpendicular (plano focal), con una abertura circular centrada en el centro óptico, es decir, la intersección entre el plano focal y el eje óptico, ver la figura 2.19.

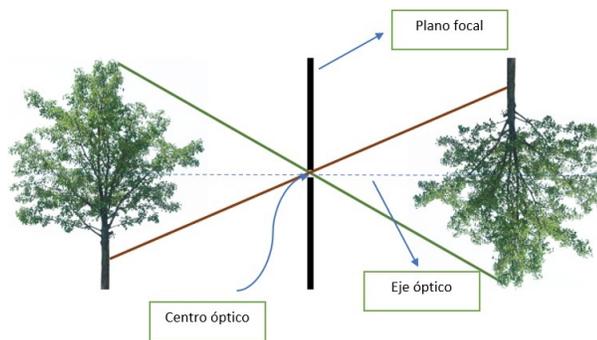


Figura 2.19: Modelo cámara pinhole.

Las figuras 2.18 y 2.19, muestran el modelo de la cámara pinhole, donde los rayos de luz provenientes de un objeto atraviesan un pequeño agujero para formar una imagen invertida de él, como se observa en las figuras 2.18 y 2.19. El haz de luz atraviesa el orificio, situado en el mismo lugar que el centro óptico, al suceder esto, el haz de luz se refleja en el plano de la imagen que se encuentra a una distancia f del centro óptico, de forma invertida; lo mismo sucede con todos los haces de luz que en el plano de la imagen forman una imagen invertida del objeto 3D.

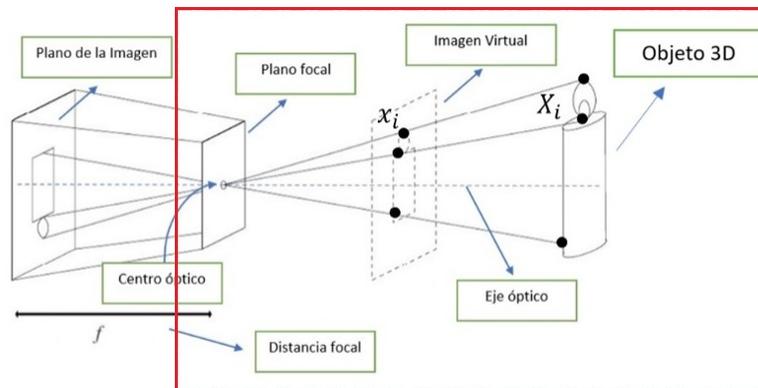


Figura 2.20: Análisis del modelo de la cámara pinhole.

Si se asume que existe una imagen virtual a la misma distancia f del centro óptico y del lado contrario al plano de la imagen, esta puede utilizarse para generar el modelo

geométrico de proyección de la cámara, evitando el problema de la inversión de la imagen. De la figura 2.20, se puede extraer la parte delimitada por el rectángulo rojo, dando como resultado la figura 2.21. Por conveniencia, $f = 1$. El objeto en el espacio, con puntos $X_i = (X, Y, Z)$, se proyecta en dos dimensiones, dando como resultado una imagen virtual, a la que se le puede atribuir un plano con puntos $x_i = (x, y)$.

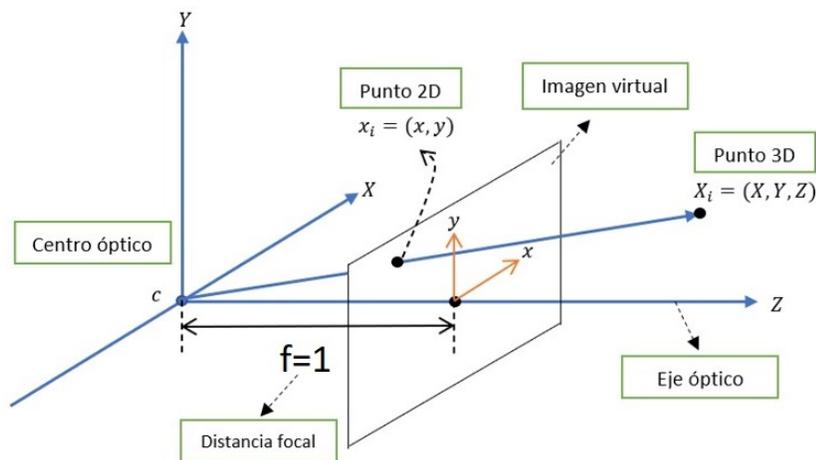


Figura 2.21: Análisis geométrico, cámara pinhole.

Tomando el plano $Z - Y$, de la figura 2.21, se pueden generar dos triángulos; el triángulo con vértices cfy y el triángulo cZY , como se muestra en la figura 2.22. A partir de lo anterior es posible establecer las siguientes relaciones

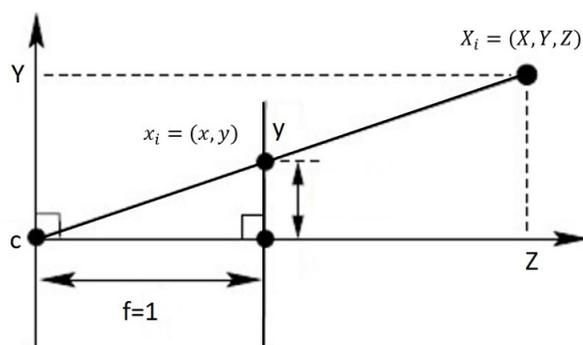


Figura 2.22: Análisis del plano $X - Y$.

$$\frac{y}{f} = \frac{Y}{Z} \quad \implies \quad y = f \frac{Y}{Z} \quad \therefore \quad x = f \frac{X}{Z} \quad (2.55)$$

Expresando las relaciones anteriores en forma matricial y transformado las coordenadas (x, y) a coordenadas homogéneas, con $w = 1$, se tiene:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

Representando ambos puntos en coordenadas homogéneas, se tiene:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

Así, el modelo de la cámara queda expresado como:

$$x = KT(X) \quad \text{con} \quad x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad y \quad X = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

donde T , es una matriz de transformación homogénea que corresponde a los parámetros extrínsecos de la cámara. Estos parámetros relacionan los sistemas de referencia del mundo real y la cámara, describiendo la posición (ξ) y orientación (R) de la cámara en el sistema de coordenadas del mundo real.

$$T = \begin{bmatrix} R & \xi \\ O & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \xi_1 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & \xi_2 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & \xi_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

y donde K , de la expresión 2.58, es la matriz de parámetros intrínsecos de la cámara. Los parámetros intrínsecos son aquellos que definen la geometría interna y la óptica de la cámara. Estos determinan como la cámara proyecta los puntos del mundo 3D en el plano de la imagen 2D. En la figura 2.21, se observa que la imagen virtual, cuenta con un sistema coordenado (x, y) , el cual representa la proyección bidimensional. Para el procesamiento de imagen, este sistema debe representarse en píxeles¹⁶, por lo que es necesario definir un nuevo sistema coordenado, con origen en la esquina inferior izquierda y con coordenadas (u, v) , como se observa en la figura 2.23. A partir de esto, un punto (P_u, P_v) , puede ser representado por las siguientes expresiones, donde las constantes α_u y α_v , son el ancho y el alto de un píxel, respectivamente.

$$u = \alpha_u x + p_u = \alpha_u \frac{fX}{Z} + p_u = \alpha_x \frac{X}{Z} + p_u \quad (2.60)$$

$$v = \alpha_v y + p_v = \alpha_v \frac{fY}{Z} + p_v = \alpha_y \frac{Y}{Z} + p_v \quad (2.61)$$

¹⁶Un píxel, es la unidad más pequeña y diminuta para formar una imagen completa.

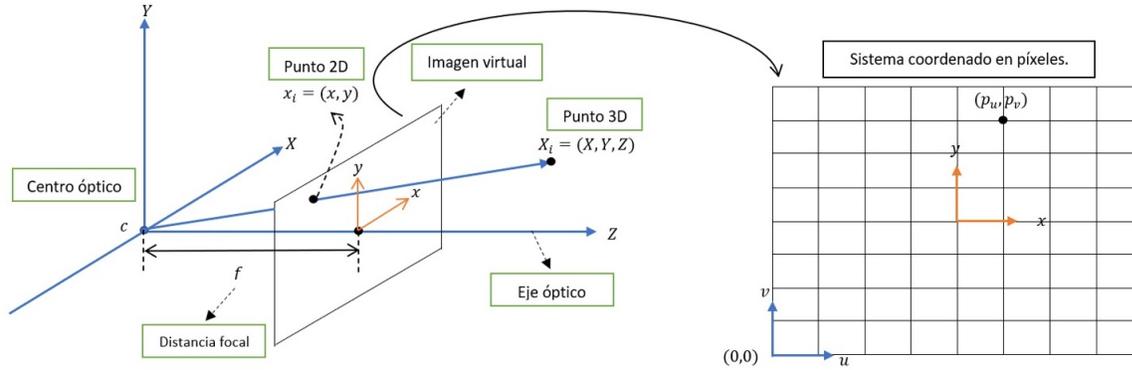


Figura 2.23: Parámetros intrínsecos.

En la matriz K , es común encontrar un valor s , relacionado con la distorsión del lente de la cámara, lo que modifica la perpendicularidad de los ejes u y v . Para la obtención del modelo de la cámara, esta distorsión no se considera, ya que se está realizando el análisis del modelo más simple, por lo que no hay una distorsión óptica debida al lente de la cámara. Así, la matriz K de parámetros internos, está dada por:

$$K = \begin{bmatrix} \alpha_x & 0 & p_u \\ 0 & \alpha_y & p_v \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

Finalmente, en la expresión, se observa el modelo completo de la cámara, el cual tiene la forma

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_x & 0 & p_u & 0 \\ 0 & \alpha_y & p_v & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \xi_1 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & \xi_2 \\ r_{31} & r_{23} & r_{33} & \xi_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

Simplificando el modelo anterior, resulta:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

El modelo simplificado de la expresión 2.64, visto desde la imagen virtual con $Z = 0$, se cancela la tercer columna de la matriz C , como se observa en la figura 2.24, esto puede reescribirse en términos de una matriz H . A esta matriz resultante se le conoce como matriz de homografía.

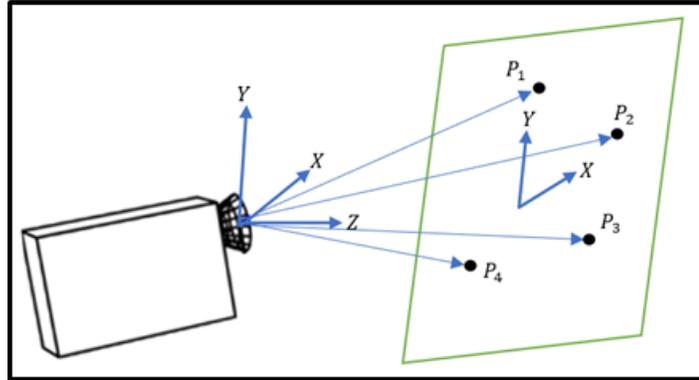


Figura 2.24: Modelo de proyección.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

La obtención de la matriz de homografía es clave para la implementación del algoritmo de visión, que permitirá estimar la posición del cuatrirrotor. En la figura 2.24, se observan cuatro puntos, los cuales son los mínimos necesarios para que el algoritmo de visión se ejecute. Este algoritmo, no cuenta con un sistema de referencia, por lo que toma la información inercial y visual proporcionada por los sensores para realizar la navegación a través de los ejes cartesianos. Las posiciones se derivan de operaciones y relaciones geométricas pertenecientes al espacio proyectivo, es por eso que se introdujeron conceptos como topología, grupos de Lie, álgebra de Lie, entre otros.

Capítulo 3

Modelado y control

Los vehículos aéreos poseen una dinámica, subactuada y no lineal. Por lo que probar estabilidad de los errores de regulación o seguimiento de trayectorias utilizando leyes de control no lineal no es trivial [29]. En este capítulo se presenta el modelo genérico de un cuatrirrotor, con un controlador interno similar al que se implementa en los vehículos comerciales. La estructura resultante permite controlar la posición espacial y el ángulo de guiñada utilizando sensores con bajo ancho de banda, lo que es ideal para implementar estrategias de guía de vuelo basadas en navegación autónoma.

3.1. Multirrotores

Entre los diferentes tipos de UAV, destacan los multirrotores, los cuales se clasifican según la cantidad de motores con la que cuentan, por ejemplo, bicopteros, tricópteros, cuatrirrotores, hexacópteros y optocópteros. En aplicaciones de búsqueda y rescate los multirrotores se emplean por mantener un vuelo estacionario y por realizar despegues y aterrizajes verticales. Los multirrotores proporcionan versatilidad en modos de vuelo, sin embargo son inestables en lazo abierto, por lo que es necesario un algoritmo de control para que puedan ser operados remotamente por un humano [6].

3.1.1. Cuatrirrotores

Los cuatrirrotores son vehículos de ala rotativa, propulsados por cuatro rotores. A diferencia de un helicóptero, los cuatrirrotores no cuentan con plato cíclico, el cual aerodinámicamente inclina el vector empuje. Los helicópteros son aerodinámicamente más eficientes, pero mecánicamente son más complejos.

Los cuatrirrotores se componen de cuatro motores fijos a los extremos de sus brazos, los cuales puede tener una configuración en cruz "+" o en equis "X", ver figura 3.1.

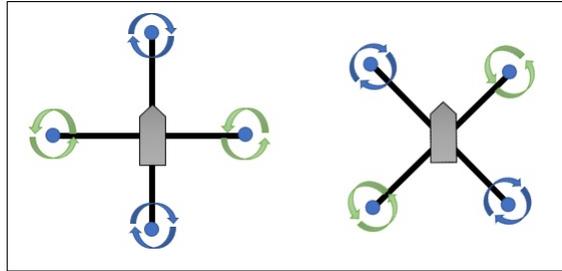


Figura 3.1: Configuraciones de un cuatrirrotor, en + a la izquierda, configuración en X a la derecha.

En este trabajo se utiliza el cuatrirrotor AR.Drone 2.0 de la marca Parrot, el cual tiene una configuración en "X". El sentido de giro de los motores del cuatrirrotor se elige de forma que un par de motores giren en sentido horario y el otro par en sentido anti-horario, ver 3.2. Esta configuración tiene por objetivo compensar los pares generados por los motores alrededor del eje vertical del cuatrirrotor y controlar el giro alrededor de este eje.



Figura 3.2: Configuración del cuatrirrotor AR.Drone 2.0.

El cuatrirrotor puede desplazarse en cualquier dirección en el espacio al variar el empuje de sus rotores, de acuerdo a [6], como se muestra en la imagen 3.3.

- Movimiento ascenso-descenso (eje Z): aumentar o disminuir el empuje de los cuatro motores en la misma proporción.
- Movimiento lateral (eje Y): aumentar o disminuir el empuje generado por los dos motores derecho o izquierdos y hacer lo contrario con los otros dos motores.
- Movimiento frontal (eje X): aumentar o disminuir el empuje generado por los motores frontales o traseros y hacer lo contrario con los otros dos motores.
- Rotación en guiñada (giro alrededor del eje Z): aumentar o disminuir el empuje generado de los pares de rotores que tienen el mismo sentido de giro y hacer lo contrario con el otro par.

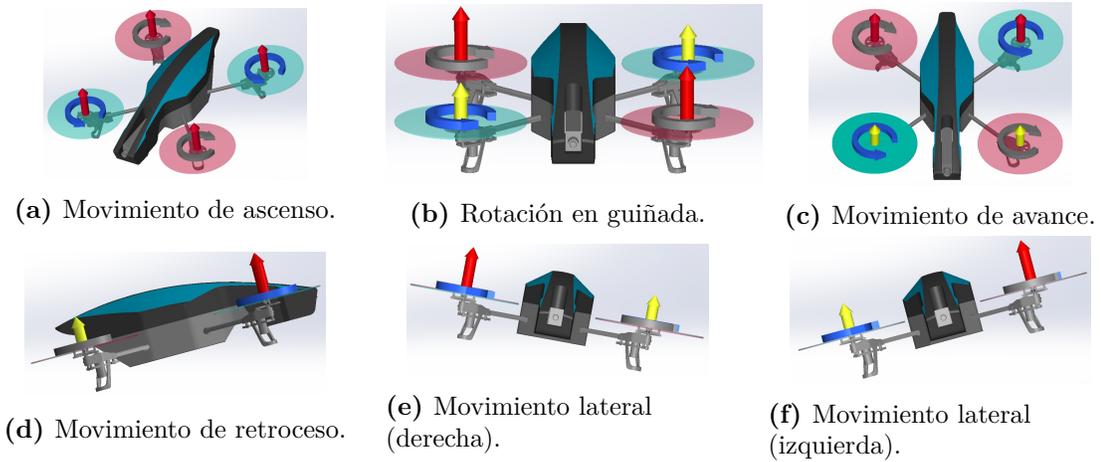


Figura 3.3: Movimientos de un cuatrirrotor.

3.2. Modelado

La dinámica del cuatrirrotor se obtiene considerando al vehículo aéreo como un cuerpo rígido, sometido a fuerzas gravitacionales y a fuerzas aerodinámicas debidas a los rotores. Para la obtención del modelo matemático se realizan las siguientes consideraciones.

1. El cuatrirrotor tiene una estructura lo suficientemente rígida para despreciar las deformaciones.
2. La fuerza que se genera en cada uno de los rotores es perpendicular al plano de las hélices.
3. Se considera que los efectos aerodinámicos en la estructura mecánica del vehículo son despreciables.

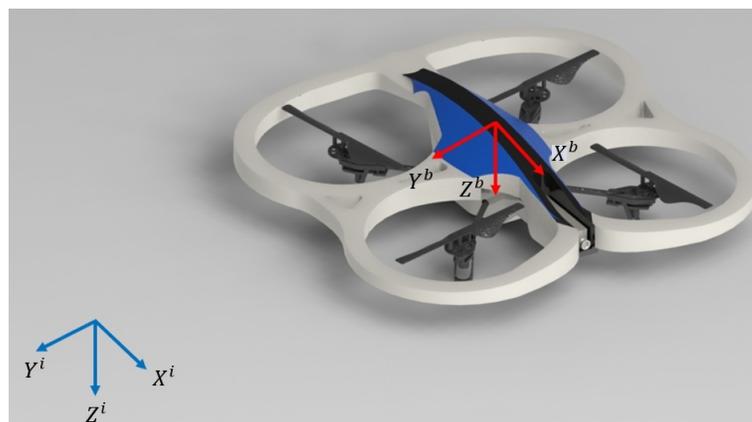


Figura 3.4: Marcos de referencia de un Cuatrirrotor.

Definiendo el marco de coordenadas inerciales $X^i Y^i Z^i$ y el marco de coordenadas corporal $X^b Y^b Z^b$, tal como se muestra en la figura 3.4. A partir de esta representación y basado en [30] es posible describir la dinámica de traslación del cuatrirrotor, como se muestra a continuación

$$\dot{\xi} = RV^b \quad (3.1)$$

$$m\ddot{\xi} = mge_3 - T_T R e_3 \quad (3.2)$$

donde $\xi = [x \ y \ z]^T$ es la posición de cuatrirrotor con respecto al marco de coordenadas inerciales, V^b es la velocidad traslacional en ejes corporales, m es la masa del cuatrirrotor, g es la constante de aceleración debida a la gravedad, T_T es el empuje total del cuatrirrotor, $R \in SO(3)$ es la matriz de rotación de ejes cuerpo a ejes inerciales y e_3 es un vector de la forma $e_3 = [0 \ 0 \ 1]^T$.

La rotación de un vehículo aéreo puede representarse utilizando diversos métodos, en este caso se usa la convención de los ángulos de Euler, muy utilizada para aplicaciones en ingeniería aeronáutica. Esta convención también es conocida como ángulos de Tait-Bryan o ángulos de Cardano. Tres ángulos describen una rotación tridimensional a través de tres rotaciones sucesivas, es decir:

- Rotación correspondiente al ángulo roll o de alabeo ϕ . Se realiza alrededor del eje X .
- Rotación correspondiente al ángulo pitch o de cabeceo θ . Se realiza alrededor del eje Y .
- Rotación correspondiente al ángulo yaw o de guiñada ψ . Se realiza alrededor del eje Z .

A partir de estas rotaciones, se definen la matriz de rotación que representan la orientación del cuerpo rígido con respecto al sistema de referencia inercial. Tomando en cuenta las siguientes consideraciones $\cos(\theta) = c_\theta$, $\sin(\theta) = s_\theta$, $\tan(\theta) = t_\theta$, R esta dada por:

$$R = \begin{bmatrix} c_\psi & s_\psi & 0 \\ s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\phi & -s_\phi \\ 0 & s_\phi & c_\phi \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Así R es la matriz de rotación que describe la orientación del marco de referencia corporal relativo al marco de referencia inercial, esta dada por:

$$R = \begin{bmatrix} c_\psi c_\theta & c_\psi s_\phi s_\theta - c_\phi s_\psi & s_\phi s_\psi + c_\phi c_\psi s_\theta \\ c_\theta s_\psi & c_\phi c_\psi + s_\phi s_\psi s_\theta & c_\phi s_\psi s_\theta - c_\psi s_\phi \\ -s_\theta & c_\theta s_\phi & c_\phi c_\theta \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

La dinámica rotacional del cuatrirrotor [30], es

$$\dot{R} = R\Omega^\times \quad (3.5)$$

$$\dot{\Omega} = J^{-1}(M_b - \Omega \times J\Omega) \quad (3.6)$$

donde $\Omega^\times = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix}$, es una matriz antisimétrica, $J = \begin{bmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{bmatrix}$, es la

matriz de inercia del cuatrirrotor, $M_b = [M_x \ M_y \ M_z]^T$ es el vector de momentos aplicados, $\Omega = [p \ q \ r]^T$ es el vector de velocidades angulares medidas desde el sistema de coordenadas corporal. Al utilizar los ángulos de Tait-Bryan, el vector de velocidades angulares Ω y las derivadas con respecto al tiempo de los ángulos de Euler $\dot{\Phi} = [\dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}]^T$, están relacionadas en base a una matriz de transformación [30] $W(\Phi)$, dada por la siguiente expresión

$$\dot{\Phi} = W(\Phi)^{-1}\Omega \quad (3.7)$$

donde

$$W(\Phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s_\theta \\ 0 & c_\phi & c_\theta s_\phi \\ 0 & -s_\phi & c_\theta c_\phi \end{bmatrix} \Rightarrow W^{-1}(\Phi) = \begin{bmatrix} 1 & t_\theta s_\phi & t_\theta c_\phi \\ 0 & c_\phi & -s_\phi \\ 0 & \frac{s_\phi}{c_\theta} & \frac{c_\phi}{c_\theta} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Al expandir las ecuaciones anteriores, el modelo del cuatrirrotor es:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -T_T(s_\phi s_\psi + c_\phi c_\psi s_\theta) \\ m\ddot{y} &= T_T(c_\psi s_\phi - c_\phi s_\psi s_\theta) \\ m\ddot{z} &= mg - T_T(c_\phi c_\theta) \\ \dot{\phi} &= p + rc_\phi t_\theta + qs_\phi t_\theta \\ \dot{\theta} &= qc_\phi - rs_\phi \\ \dot{\psi} &= \frac{rc_\phi}{c_\theta} + \frac{qs_\phi}{c_\theta} \\ J_{xx}\dot{p} &= M_x + J_{yy}qr - J_{zz}qr \\ J_{yy}\dot{q} &= M_y + J_{xx}pr + J_{zz}pr \\ J_{zz}\dot{r} &= M_z + J_{xx}pq - J_{yy}pq \end{aligned} \quad (3.9)$$

3.3. Controlador interno

El enfoque tradicional, en la comunidad de control automático, para abordar el problema de regulación o seguimiento de trayectorias en un cuatrirrotor se plantea a

partir de la definición de los errores de posición traslacional y ángulo de guiñada. Las diversas técnicas de control se enfocan en encontrar la forma en que las entradas de control puedan modificar las dinámicas de tales errores; generalmente este proceso implica derivar con respecto al tiempo a las señales de error. En este enfoque, el desempeño de la estrategia de control depende de un algoritmo de navegación preciso, ya que el ruido, la latencia y los errores de navegación se propagan hasta la entrada de control.

Esta estrategia de control no se utiliza en los drones comerciales, en los cuales, el control de la posición traslacional y del ángulo de guiñada del drone lo realiza visualmente el operador. Los drones comerciales utilizan una estrategia de control interna que se encarga de hacer converger a los ángulos de alabeo y cabeceo, a la velocidad vertical y a la velocidad de guiñada a referencias definidas por el operador. El algoritmo de navegación para este control interno puede realizarse de forma autónoma utilizando un sistema de referencia de orientación y rumbo (AHRS en inglés) y un sensor ultrasónico. El AHRS permite determinar los ángulos de Tait-Bryan y la velocidad angular, mientras que el sensor ultrasónico puede complementarse con un sensor visual y por medio de flujo óptico estimar la velocidad vertical.

Al asumir que el controlador interno logra su objetivo, es decir, $\phi \rightarrow \phi_d$, $\theta \rightarrow \theta_d$, $r \rightarrow r_d$ y $\dot{z} \rightarrow \dot{z}_d$ de forma rápida. Las referencias pueden considerarse como las nuevas entradas de control, esto es, $\phi_d = u_\phi$, $\theta_d = u_\theta$, $r_d = u_r$ y $\dot{z}_d = u_z$. Bajo estas condiciones, el modelo dinámico del cuatrirrotor expresado en 3.9 se reduce a

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= (\varphi(\Lambda, t) - g) \left(c_\psi t_{u_\theta} + s_\psi \frac{t_{u_\phi}}{c_{u_\theta}} \right) \\ \ddot{y} &= (\varphi(\Lambda, t) - g) \left(s_\psi t_{u_\theta} - c_\psi \frac{t_{u_\phi}}{c_{u_\theta}} \right) \\ \dot{z} &= u_z \\ \dot{\psi} &= u_r \end{aligned} \tag{3.10}$$

donde $\varphi(\Lambda, t)$ es una función que depende de la técnica de control utilizada y debe ser igual a cero cuando la velocidad vertical converge a su referencia deseada. La dinámica para ψ se obtiene al considerar que las velocidades de alabeo y cabeceo son igual a cero cuando los ángulos respectivos convergen a su referencia. En los siguientes desarrollos se considera que

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= -g \left(c_\psi t_{u_\theta} + s_\psi \frac{t_{u_\phi}}{c_{u_\theta}} \right) \\
\ddot{y} &= -g \left(s_\psi t_{u_\theta} - c_\psi \frac{t_{u_\phi}}{c_{u_\theta}} \right) \\
\dot{z} &= u_z \\
\dot{\psi} &= u_r
\end{aligned} \tag{3.11}$$

La ventaja de utilizar este esquema de control es que ahora para controlar la posición traslacional y el ángulo de guiñada se puede utilizar un algoritmo de navegación con características de desempeño menores, por ejemplo, un bajo ancho de banda. Reescribiendo las expresiones 3.11 de manera matricial, se tiene

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = g \begin{bmatrix} -c_\psi & -s_\psi \\ -s_\psi & c_\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{u_\theta} \\ \frac{t_{u_\phi}}{c_{u_\theta}} \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

El control de orientación del AR.Drone lleva a ϕ y a θ a sus referencias u_ϕ y u_θ , respectivamente, por lo que es posible proponer un control PD para el plano $x - y$, como se muestra a continuación

$$\begin{bmatrix} -c_\psi & \frac{-s_\psi}{c_{u_\theta}} \\ -s_\psi & \frac{c_\psi}{c_{u_\theta}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{u_\theta} \\ t_{u_\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -kd_x \dot{\tilde{x}} - kp_x \tilde{x} + \ddot{x}_d \\ -kd_y \dot{\tilde{y}} - kp_y \tilde{y} + \ddot{y}_d \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

Despejando u_θ y u_ϕ , se tiene:

$$u_\theta = -\text{atan}(c_\psi \theta_{ax} + s_\psi \phi_{ax}) \tag{3.14}$$

$$u_\phi = -\text{atan}(c_{u_\theta} s_\psi \theta_{ax} - c_{u_\theta} c_\psi \phi_{ax}) \tag{3.15}$$

Donde θ_{ax} y ϕ_{ax} , están definidas como:

$$\begin{bmatrix} \theta_{ax} \\ \phi_{ax} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -kd_x \dot{\tilde{x}} - kp_x \tilde{x} + \ddot{x}_d \\ -kd_y \dot{\tilde{y}} - kp_y \tilde{y} + \ddot{y}_d \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

con kd_x , kd_y , kp_x y kp_y como constantes positivas y donde x_d y y_d son trayectorias suaves.

El uso del controlador interno simplifica considerablemente el modelo del cuatrirrotor. Con esta configuración se pueden utilizar sensores de posición y de guiñada con un ancho de banda menor. Este es el caso cuando se utiliza visión artificial para determinar la posición del cuatrirrotor.

Capítulo 4

Observador de homografía

El problema de extraer información tridimensional a partir de información bidimensional, ha sido abordado a lo largo de la historia, utilizando proyecciones en perspectiva. Actualmente la proyección en perspectiva, parte de la geometría proyectiva, es uno de los problemas estudiados en visión por computadora. Las tareas relacionadas con la visión capturan la información del entorno físico para la extracción de características visuales (formas, texturas, colores), mediante técnicas fotográficas (iluminación, óptica, filtros). Desde el punto de vista de ingeniería, la visión por computadora tiene como objetivo ayudar a los sistemas en tareas, navegación autónoma, ensamblaje robótico y procesos de inspección industrial.

Por su naturaleza los problemas en representaciones en perspectiva son propensos a ser mal modelados y en ocasiones son difíciles de resolver a menos que se impongan restricciones. La tarea de seleccionar un modelo matemático correcto para los modelos en perspectiva, puede resolverse haciendo uso de representaciones geométricas primitivas, como puntos, líneas, curvas, superficies y volúmenes. Los datos visuales se obtienen mediante una proyección de imágenes observadas en la superficie de la imagen de la cámara.

4.1. Geometría de características en un plano

Basado en [20], se puede considerar una cámara desplazándose a una altura constante sobre el plano π , como se muestra en la figura 4.1.

Suposición 4.1.

La cámara se considera rígidamente unida a un cuatrirrotor, lo bastante cerca de su centro de gravedad, para considerar que la posición y orientación de la cámara es la misma que la del cuatrirrotor.

Suponiendo que \mathring{A} denota las coordenadas proyectivas para el plano de la imagen de una cámara \mathring{A} y $\{\mathring{A}\}$ denota su marco de referencia, con origen en el centro óptico de la cámara. $\xi \in \mathbb{R}^3$ denota la posición del marco $\{A\}$ con respecto a $\{\mathring{A}\}$ expresada en $\{\mathring{A}\}$. La orientación del marco $\{A\}$ con respecto al marco $\{\mathring{A}\}$, se representa con una matriz de rotación, elemento del grupo ortogonal especial, $R \in SO(3) : \{A\} \rightarrow \{\mathring{A}\}$.

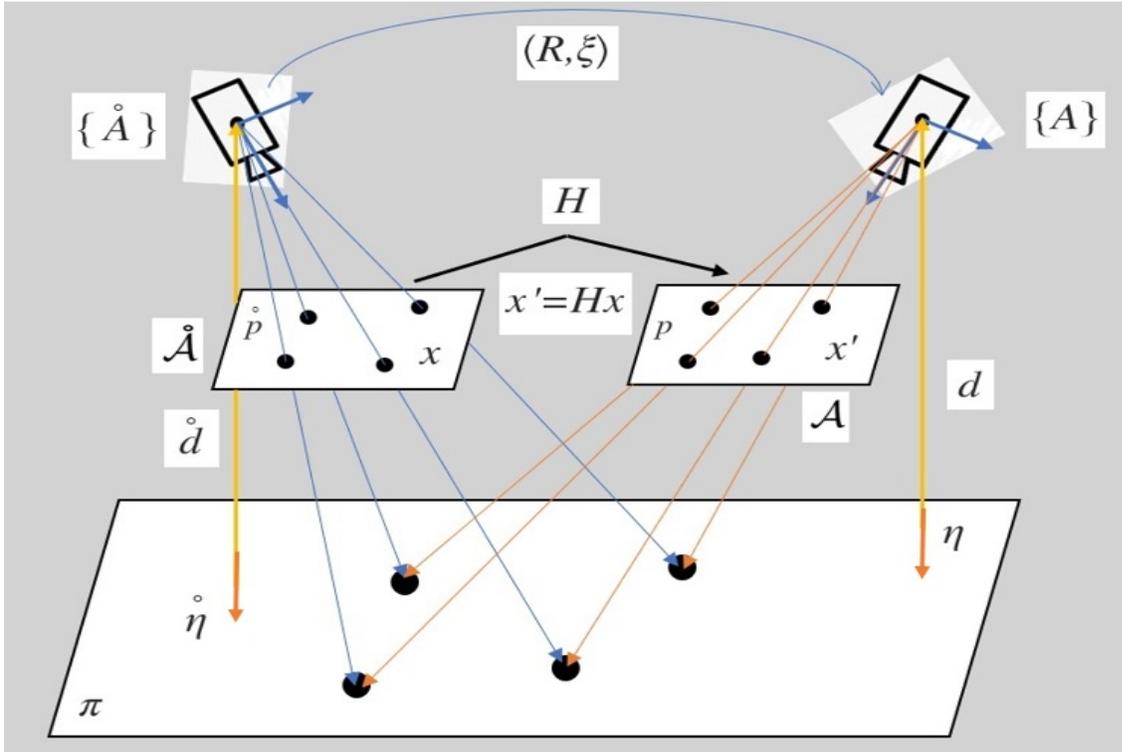


Figura 4.1: Geometría para el análisis del observador de homografía.

La posición de la cámara determina una transformación de cuerpo rígido de $\{A\}$ a $\{\mathring{A}\}$ (y viceversa) [31]. Se tiene:

$$\mathring{P} = RP + \xi \quad (4.1)$$

que representa una relación entre las coordenadas del mismo punto en el marco de referencia ($\mathring{P} \in \{\mathring{A}\}$) y en el marco actual ($P \in \{A\}$). Los parámetros internos de la cámara, descritos en la expresión 2.62, se utilizan, de tal forma que se tiene la siguiente correspondencia entre los puntos reales y los proyectados sobre los planos de la imagen

$$\mathring{p} \cong K\mathring{P}, \quad p \cong KP \quad (4.2)$$

donde $p \in A$ es la imagen de un punto cuando la cámara esta alineada con el marco $\{A\}$, y puede representarse en coordenadas homogéneas, utilizando la expresión 2.54, es decir $[x, y, w]^T$. Del mismo modo, $\mathring{p} \in \mathring{A}$ es la imagen del mismo punto visto cuando la cámara está alineada con el marco $\{\mathring{A}\}$. Si la cámara está calibrada (se conocen los parámetros intrínsecos), todas las cantidades se pueden escalar adecuadamente y la ecuación 4.2 se puede escribir como:¹⁷

$$\mathring{p} \cong \mathring{P}, \quad p \cong P \quad (4.3)$$

4.2. Homografía

La matriz de homografía puede obtenerse a partir de las relaciones entre puntos de una secuencia de imágenes como sigue [20] y [32].

Suposición 4.2.

Suponga que se tiene una cámara calibrada observando a la superficie plana π la cual contiene un conjunto de n puntos objetivo ($n \geq 4$), tal que:

$$\pi = \{ \mathring{P} \in \mathbb{R}^3 : \mathring{\eta}^T \mathring{P} - \mathring{d} = 0 \} \quad (4.4)$$

donde $\mathring{\eta}$ es un vector unitario perpendicular al plano π , expresado en el marco $\{\mathring{A}\}$ y \mathring{d} es la distancia del plano al origen de $\{\mathring{A}\}$. De las relaciones de cuerpo rígido de la expresión 4.1, se tiene $P = R^T \mathring{P} - R^T \xi$. Definiendo $\zeta = -R^T \xi$. Como todos los puntos se encuentran sobre la misma superficie plana, se tiene:

$$P_i = R^T \mathring{P}_i + \frac{\zeta \mathring{\eta}^T}{\mathring{d}} \mathring{P}_i, \quad i = \{1, \dots, n\} \quad (4.5)$$

Usando la expresión 4.3, los puntos proyectados satisfacen:

$$p_i \cong \left(R^T + \frac{\zeta \mathring{\eta}^T}{\mathring{d}} \right) \mathring{p}_i, \quad i = \{1, \dots, n\} \quad (4.6)$$

El mapeo proyectivo $H : \mathcal{A} \rightarrow \mathring{\mathcal{A}}$, $H := \left(R^T + \frac{\zeta \mathring{\eta}^T}{\mathring{d}} \right)^{-1}$ se denomina homografía y relaciona la ubicación de puntos en el plano π cuando se observa desde dos posiciones

¹⁷En geometría proyectiva, el símbolo \cong , representa igualdad, hasta cierto factor de escala.

definidas por los sistemas de coordenadas \mathcal{A} y $\mathring{\mathcal{A}}$. La homografía H puede escribirse como

$$H \cong \left(R + \frac{\xi \eta^T}{d} \right) \quad (4.7)$$

donde η es un vector unitario perpendicular al plano π , expresado en el marco $\{A\}$ y d es la distancia entre $\{A\}$ y el plano π , medida de forma perpendicular a π . Analizando la figura 4.1 se pueden deducir las siguientes relaciones [33]

$$\eta = R^T \mathring{\eta} \quad (4.8)$$

$$d = \mathring{d} - \mathring{\eta}^T \xi = \mathring{d} + \eta^T \zeta \quad (4.9)$$

La matriz de homografía contiene la información de la posición y orientación (R, ξ) de la cámara desde el marco actual, $\{A\}$ al marco de referencia, $\{\mathring{A}\}$. Dado que la relación entre los puntos de una imagen y la matriz de homografía es una relación proyectiva, solo es posible determinar H hasta un factor de escala [34].

4.2.1. Homografía como elemento del grupo especial lineal $SL(3, \mathbb{R})$

A partir de la expresión 2.3, el grupo especial lineal $SL(3, \mathbb{R})$, esta definido como:

$$SL(3, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid \det(A) = 1\} \quad (4.10)$$

Ya que solo es posible determinar la matriz de homografía hasta un factor de escala, a cualquier matriz de homografía H , se le puede asociar una matriz única de reescalamiento (ver [35] y [36]), $\bar{H} \in SL(3)$, tal que $\bar{H} = \det(H)^{-\frac{1}{3}} H$. Por lo tanto H , puede considerarse como elemento de $SL(3, \mathbb{R})$. Por otra parte, el mapeo ν , tal que:

$$\begin{aligned} \nu &= SL(3) \times \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2, \\ (H, p) &\mapsto \nu(H, p) \cong \frac{Hp}{|Hp|} \end{aligned} \quad (4.11)$$

es un grupo de acción de $SL(3, \mathbb{R})$ que actúa sobre el espacio proyectivo \mathbb{P}^2 y que cumple con las propiedades enunciadas en las expresiones 2.25-2.28, ya que:

$$\nu(H_1, \nu(H_2, p)) = \nu(H_1 H_2, p), \nu(I, p) = p \quad (4.12)$$

donde H_1, H_2 y $H_1 H_2 \in SL(3, \mathbb{R})$ e I es el elemento identidad en $SL(3, \mathbb{R})$. El significado geométrico de la expresión 4.12, es que el movimiento de la cámara entre las vistas \mathcal{A}_0 y \mathcal{A}_1 , seguido del movimiento entre las vistas \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 es el mismo que el movimiento entre las vistas \mathcal{A}_0 y \mathcal{A}_2 , [36].

El álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ para el grupo $SL(3, \mathbb{R})$, es el conjunto de matrices con traza igual a cero, (ver expresión 2.48), es decir:

$$\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R}) = \{X \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid \text{tr}(X) = 0\} \quad (4.13)$$

El operador adjunto es un mapeo $Ad : SL(3, \mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ definido en la expresión 2.45, por lo que para H , se tiene:

$$Ad_H X = HXH^{-1}, \quad H \in SL(3, \mathbb{R}), \quad X \in \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R}) \quad (4.14)$$

Dadas dos matrices $A, B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, el producto interno y la norma de Frobenius en $SL(3, \mathbb{R})$ son

$$(A, B) = \text{tr}(A^T B), \quad \|A\| = \sqrt{(A, A)} \quad (4.15)$$

Sea \mathbb{P} la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ sobre $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ con respecto al producto interno (\cdot, \cdot) [36].

$$\mathbb{P}(H) := \left(H - \frac{\text{tr}(H)}{3} I \right) \in \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R}) \quad (4.16)$$

Para cualquier matriz $G \in SL(3, \mathbb{R})$ y $B \in \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$, se puede establecer que $(B, G) = (B, \mathbb{P}(G))$ y a partir de 4.15 y 2.47, se tiene

$$\text{tr}(B^T G) = \text{tr}(B^T \mathbb{P}(G)) \quad (4.17)$$

Dado que H , puede considerarse como un elemento de $SL(3, \mathbb{R})$, es posible determinar H , módulo factor de escala γ , como sigue:

$$H = \gamma \left(R + \frac{\xi \eta^T}{d} \right) \quad (4.18)$$

Existen varios enfoques para determinar H , tal como se describe en [37] y en [31]. El cálculo directo del determinante de H en combinación con la expresión 4.9 y usando el hecho de que $\det(H) = 1$, muestra que $\gamma = \left(\frac{d}{\xi} \right)^{\frac{1}{3}}$ [36].

4.3. Cinemática de la cámara

El movimiento de la cámara unida al cuatrirrotor, sobre una superficie plana, genera una secuencia de matrices de homografía. Así, la velocidad de la secuencia de homografías esta asociada con la variación instantánea en la medición de la imagen actual \mathcal{A} . La velocidad angular del cuerpo rígido Ω y la velocidad lineal V^b de $\{A\}$ con respecto a $\{\dot{A}\}$ expresada en $\{A\}$. La cinemática de la cámara unida al cuatrirrotor (R, ξ) , esta descrita por las expresiones 3.1 y 3.5. De la expresión 4.9, se tiene: $\dot{d} = -\eta^T V$ y $\frac{d}{dt}\dot{d} = 0$ [38]. Esta es una restricción sobre la variación de η y \dot{d} , precisamente es la restricción de velocidad asociada con el hecho de que la imagen de referencia es estacionaria.

Lema 4.1.

Considerando una cámara unida al cuatrirrotor con un marco móvil \mathcal{A} que se mueve con la cinemática de las expresiones 3.1 y 3.5 viendo una escena plana estacionaria. $H : \mathcal{A} \rightarrow \dot{\mathcal{A}}$ denota la homografía de la expresión 4.18, donde se asume que la cámara esta calibrada. La velocidad del grupo $U \in \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ inducida por el movimiento del cuatrirrotor, es tal que:

$$\dot{H} = HU \quad (4.19)$$

donde U , esta dada por

$$U = \left(\Omega_{\times} + \frac{V\eta^T}{d} - \frac{\eta^T V}{3d} I \right) \quad (4.20)$$

Prueba 4.1.

Considerando la derivada en el tiempo de 4.18, se tiene:

$$\dot{H} = \gamma \left(\dot{R} + \frac{\dot{\xi}\eta^T + \xi\dot{\eta}^T}{d} - \frac{d\dot{\xi}\eta^T}{d^2} \right) + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} H \quad (4.21)$$

De las expresiones 3.1 y 3.5, se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{H} &= \gamma \left(R\Omega_{\times} + \frac{RV\eta^T + \xi\eta^T\Omega_{\times}}{d} + \frac{\eta^T V\xi\eta^T}{d^2} \right) + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} H \\ &= \gamma \left(\left[R + \frac{\xi\eta^T}{d} \right] \Omega_{\times} + \left[R + \frac{\xi\eta^T}{d} \right] \frac{V\eta^T}{d} \right) + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} H \\ &= H \left(\Omega_{\times} + \frac{V\eta^T}{d} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} I \right) \end{aligned}$$

Aplicando la restricción de que $\text{tr}(U) = 0$ para cualquier elemento de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$, se obtiene:

$$0 = \text{tr} \left(\Omega_{\times} + \frac{V\eta^T}{d} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} I \right) = \frac{\eta^T V}{d} + \frac{3\dot{\gamma}}{\gamma} \quad (4.22)$$

Teniendo en cuenta que la velocidad de grupo U inducida por el movimiento del cuatrirrotor, depende de las variables η y d que definen la geometría de la escena en el tiempo t , así como el factor de escala γ . Dado que estas variables no se pueden extraer directamente de las mediciones, en consecuencia se reescribe

$$U := (\Omega_{\times} + \Gamma), \quad \text{con} \quad \Gamma = \left(\frac{V\eta^T}{d} - \frac{\eta^T V}{3d} I \right) \quad (4.23)$$

Suponiendo que el marco $\{\mathring{A}\}$ es estacionario, el vector Ω puede obtenerse del AHRS. El termino Γ esta relacionado con el movimiento de traslación expresado en el marco actual $\{A\}$.

4.4. Observador no lineal en $\mathbf{SL}(3, \mathbb{R})$

El objetivo de la estimación de $H(t) \in SL(3, \mathbb{R})$, es proporcionar una estimación $\hat{H} \in SL(3, \mathbb{R})$ que conduzca al término del error $\tilde{H} = \hat{H}H^{-1}$ a la matriz identidad I mientras se asume que $U \in \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ es conocida. La ecuación del estimador se plantea directamente como un filtro cinemático en $SL(3, \mathbb{R})$ con estado \hat{H} alimentado por un termino de corrección basado en una colección de n mediciones $p_i \in \mathbb{P}^2$, de la forma

$$p_i = \frac{H^{-1}\mathring{p}_i}{|H^{-1}\mathring{p}_i|}, \quad i = \{1, \dots, n\} \quad (4.24)$$

El observador incluye un término de corrección derivado de las mediciones y depende implícitamente del error \tilde{H} . La forma general del filtro estimador es

$$\dot{\hat{H}} = \hat{H}U + k_p\omega\hat{H} \quad (4.25)$$

El término de innovación o corrección $\omega \in \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ se considera como una función de error de las mediciones p_i y sus estimaciones \hat{p}_i (o como una función de error de los puntos medidos \mathring{p}_i y sus estimaciones e_i), depende implícitamente de \tilde{H} . Las estimaciones \hat{p}_i de p_i se definen de la siguientes manera,

$$\hat{p}_i = \frac{\hat{H}^{-1}\mathring{p}_i}{|\hat{H}^{-1}\mathring{p}_i|} \quad (4.26)$$

De manera equivalente, las estimaciones e_i de \mathring{p}_i y el error \tilde{H} , se definen como:

$$e_i = \frac{\hat{H}p_i}{|\hat{H}p_i|} = \frac{\tilde{H}\mathring{p}_i}{|\tilde{H}\mathring{p}_i|}, \quad \tilde{H} = \hat{H}H^{-1} \quad (4.27)$$

Definición 4.1.

Un conjunto \mathcal{M}_n de $n \geq 4$ direcciones vectoriales $\mathring{p}_i \in \mathbb{P}^2$ ($i = \{1 \dots n\}$) se denomina consistente, si contiene un subconjunto $\mathcal{M}_4 \subset \mathcal{M}_n$ de 4 direcciones vectoriales constantes de modo que todas sus tripletas vectoriales sean linealmente independientes. Esta definición implica que si el conjunto \mathcal{M}_n es consistente, entonces, para todo $\mathring{p}_i \in \mathcal{M}_4$ existe un único conjunto de tres escalares $b_j \neq 0$ ($j \neq i$), tal que:

$$\mathring{p}_i = \frac{y_i}{|y_i|} \quad \text{donde} \quad y_i = \sum_{j=1(j \neq i)}^4 b_j \mathring{p}_j \quad (4.28)$$

Teorema 4.1.

Sea $H : \mathcal{A} \rightarrow \mathring{A}$ que denota la homografía de la expresión 4.18 y considera la cinemática de 4.19 junto con 4.23. Asumiendo que $U \in \{\mathring{A}\}$ es conocida y considerando el estimador no lineal definido en 4.25, $\omega \in \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ esta dado por

$$\omega = \sum_{i=1}^n \pi_{e_i} \mathring{p}_i e_i^T \quad (4.29)$$

donde $\pi_x = (I - xx^T)$, para todo $x \in \mathbb{P}^2$. Entonces, si el conjunto \mathcal{M}_n de las direcciones medidas \mathring{p}_i es consistente, el equilibrio $\tilde{H} = I$ es asintoticamente estable.

Prueba 4.2.

La prueba considera la siguiente función de Lyapunov.

$$\mathcal{L}_0 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} |e_i - \mathring{p}_i|^2 \quad (4.30)$$

cuya derivada con respecto al tiempo es

$$\dot{\mathcal{L}}_0 = -k_P \left\| \sum_{i=1}^n e_i \mathring{p}_i^T \pi_{e_i} \right\|^2 \quad (4.31)$$

Utilizando la propiedad de consistencia de los puntos observados se puede concluir que el error de observación converge a I . Los detalles de la prueba pueden consultarse en [20].

Capítulo 5

Simulaciones

En este capítulo se describe la implementación del observador de la matriz de homografía, en el entorno de simulación 3D (Gazebo) que hace uso del Sistema Operativo Robótico (ROS), para controlar al cuatrirrotor AR.Drone 2.0.

5.1. ROS

El Sistema Operativo Robótico por sus siglas en inglés ROS, es un software usado para el desarrollo de la robótica. El objetivo principal de ROS es reusar códigos de desarrollo científico e industrial en el área de la robótica. ROS tiene la filosofía de que sus programas sean de uso libre, escalables según la aplicación deseada e integrables con todo el software robótico existente y futuro. Por ello el sistema se creó teniendo en cuenta otras plataformas de software abiertas, como OpenCV y Gazebo, existiendo librerías para su uso en ROS [39].



Figura 5.1: Logo del Sistema Operativo Robótico.

ROS se compone de un conjunto de librerías de programación, aplicaciones, drivers y herramientas de visualización, monitorización, simulación y análisis, todas reutilizables para el desarrollo de nuevas aplicaciones para robots tanto simulados como reales. ROS proporciona servicios de un sistema operativo pero sin serlo, ya que se instala sobre otro, en general Linux y de manera recomendada Ubuntu, y por ello también recibe la denominación de Meta-Sistema Operativo [40]. Posee su propio

manejador de paquetes mediante comandos desde la terminal para la gestión, compilación y ejecución de archivos. Su estructura es modular, de forma que cada programa o aplicación, lo que en ROS se denomina como nodo, se ejecuta dentro otro ejecutable (Master) que funciona de núcleo del sistema y hace las veces de plataforma por la que se comunican los diferentes nodos mediante tópicos y/o servicios.

5.2. Gazebo

Gazebo es un simulador de entornos 3D que posibilita evaluar el comportamiento de un robot en un mundo virtual. Permite, entre muchas otras opciones, diseñar robots de forma personalizada, crear mundos virtuales usando sencillas herramientas CAD y permite la importación de modelos ya creados. Es posible sincronizarlo con ROS de forma que los robots emulados publiquen la información de sus sensores y así poder implementar un control que dé ordenes al robot [39].

5.3. Simulador AR.Drone

Gazebo contiene un paquete para simular el cuatrirrotor Parrot AR.Drone 2. El simulador es compatible con ROS por lo que toda la información que se envía y recibe, se realiza a través de mensajes de ROS. El paquete provee información de los sensores integrados en el vehículo, como la velocidad de traslación, aceleración, velocidad angular, orientación, posición, entre otros datos útiles en el monitoreo y control del cuatrirrotor. El simulador tiene la ventaja de emular en tiempo real las cámaras del AR.Drone, lo que resulta útil en la implementación de algoritmos de visión. Al ser un simulador dinámico el comportamiento del cuatrirrotor es similar al de un entorno real. En la figura 5.2, se muestra el entorno de simulación del AR.Drone, dentro de gazebo.

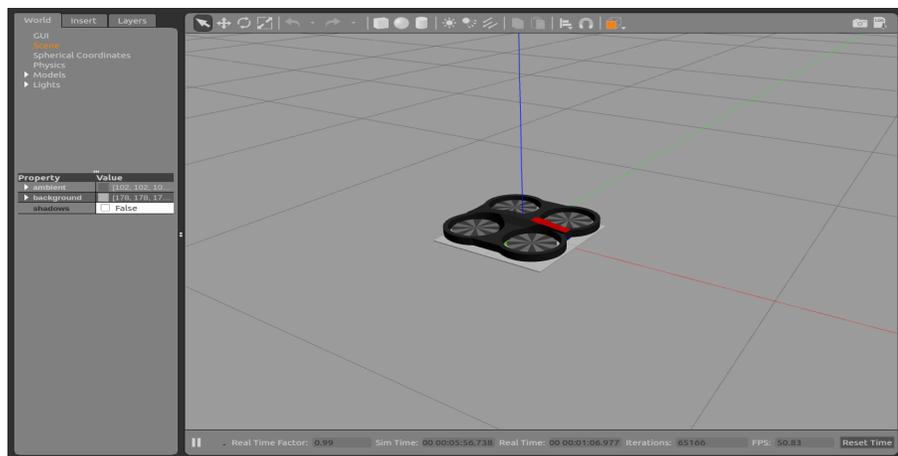


Figura 5.2: Entorno de simulación Gazebo para el AR.Drone.

5.4. Calibración de la cámara

El proceso de calibración consiste en obtener los parámetros que definen el modelo de la cámara, descritos en el capítulo 2. El proceso es necesario para obtener medidas exactas de la escena. La correcta calibración ayuda con la precisión de los datos al implementar un algoritmo de visión. En la actualidad existen diferentes métodos y algoritmos que toman imágenes de una plantilla desde diferentes posiciones y orientaciones, con lo cual es posible calcular los parámetros de la cámara. En [41], se encuentra el procedimiento de calibración y se describen algunos métodos comúnmente usados. Para la simulación en gazebo, no es necesaria la calibración, ya que los parámetros internos y externos de la cámara, pueden ser extraídos directamente del simulador de AR.Drone. Por ejemplo, los valores de la matriz K , utilizados son:

$$K = \begin{bmatrix} 374.6706 & 0 & 320.5 \\ 0 & 374.6706 & 180.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Si se quisiera realizar el procedimiento de calibración en gazebo, puede consultarse la documentación para hacerlo desde la página oficial de ROS. Para realizar experimentos en el modelo físico del cuatrirrotor, es necesario realizar la calibración, la cual puede ser consultada en [42].

5.5. Algoritmo de detección de esquinas

Para realizar la estimación de la matriz de homografía, es necesario un algoritmo de detección de puntos. Los puntos se utilizan para construir las entradas del estimador y así determinar la matriz de homografía mientras el cuatrirrotor se encuentra en movimiento. El algoritmo para detectar puntos es el detector de esquinas, propuesto por Chris Harris y Mike Stephens [43], comúnmente conocido como detector de Harris. En términos generales, el detector analiza cada píxel en la imagen para encontrar una intersección entre dos bordes, es decir, una esquina¹⁸. La figura 5.3, muestra la imagen utilizada para la detección de puntos y para la estimación de la matriz de homografía. El color de la figura, se escogió por conveniencia, ya que resalta sobre otros colores y evita detecciones erróneas al aplicar el algoritmo.

¹⁸Una esquina puede ser considerada un caso particular de punto.

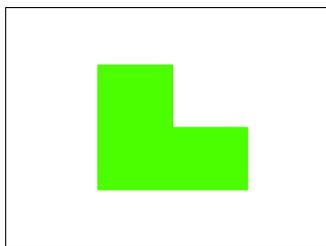


Figura 5.3: Imagen usada para el algoritmo de estimación de la homografía.

Al aplicar el detector de Harris a la figura 5.3, se obtienen como resultado los puntos en color rojo, que corresponden a las esquinas de la figura, esto puede observarse en la siguiente figura

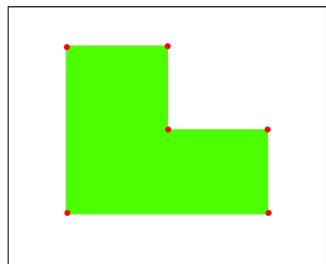


Figura 5.4: Detección de esquinas, algoritmo de Harris.

5.6. Simulación

Para determinar la posición del cuatrirrotor a partir de la estimación de la matriz de homografía, se utiliza la expresión 4.25, que muestra la derivada de la matriz de homografía estimada, es decir, \hat{H} . Debido a la propiedad de convergencia del error de estimación de la matriz de homografía, se considera que \hat{H} , asintóticamente será igual a H . El paso siguiente será obtener la posición del cuatrirrotor, a partir del vector de posición ξ . Este puede obtenerse a partir de la expresión 4.18, es decir:

$$H = \gamma \left(R + \frac{\xi \eta^T}{d} \right) \quad \text{con} \quad d = z \quad y \quad \eta^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En la expresión, aparece el término γ , que representa un factor de escala, el cual depende de la variación de posición de la cámara a lo largo del eje z . En los experimentos $z = 1$, lo que significa que el cuatrirrotor, vuela a una altura constante. Por lo que $d = \dot{d} = 1$, resultando en:

$$H = \left(R + \frac{\xi \eta^T}{d} \right)$$

Realizando las operaciones adecuadas se llega a la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} = z \left(\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \right) \quad (5.2)$$

Despejando las posiciones x , y , y con $z = 1$, el vector de posición ξ resulta:

$$\begin{aligned} x &= (H_{13} - R_{13}) \\ y &= (H_{23} - R_{23}) \\ z &= 1 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Con el vector de posición es posible navegar y realizar seguimiento de trayectorias. Gazebo permite conocer información del cuatrirrotor y del entorno, por medio de tópicos¹⁹. En los primeros experimentos, se utilizaron los datos proporcionados por gazebo, es decir, se tomó la posición y la velocidad del entorno, para controlar el vehículo y realizar el seguimiento de trayectoria.

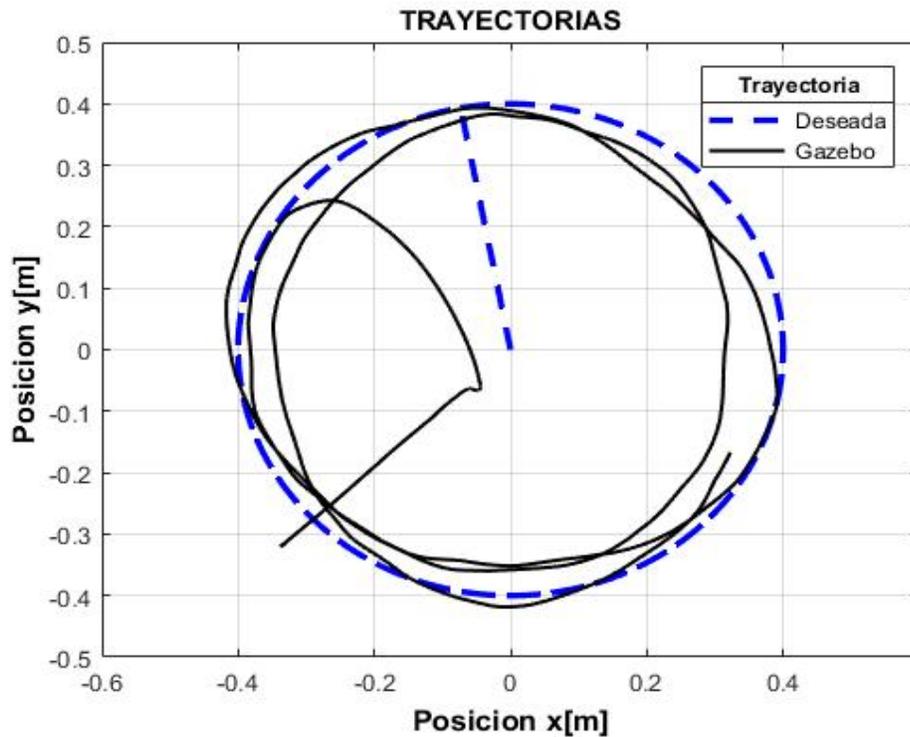


Figura 5.5: Trayectorias circulares.

¹⁹Los tópicos son los canales de información entre los nodos

La figura 5.5, muestra la trayectoria que realiza el cuatrirrotor, gracias a los datos de gazebo, es muy próxima a la trayectoria deseada, lo que verifica el control PD para el plano $x - y$. Para propósitos de este proyecto, el control PD, funciona adecuadamente, siendo innecesaria la implementación de un control más robusto. El objetivo principal del proyecto está encaminado en implementación y comprobación del algoritmo de visión. Para la programación del algoritmo de visión se utilizó la librería OpenCV (Open Computer Vision) de visión artificial, ampliamente utilizada en aplicaciones de detección de movimiento, reconocimiento de objetos, reconstrucción 3D a partir de imágenes, entre otras aplicaciones.

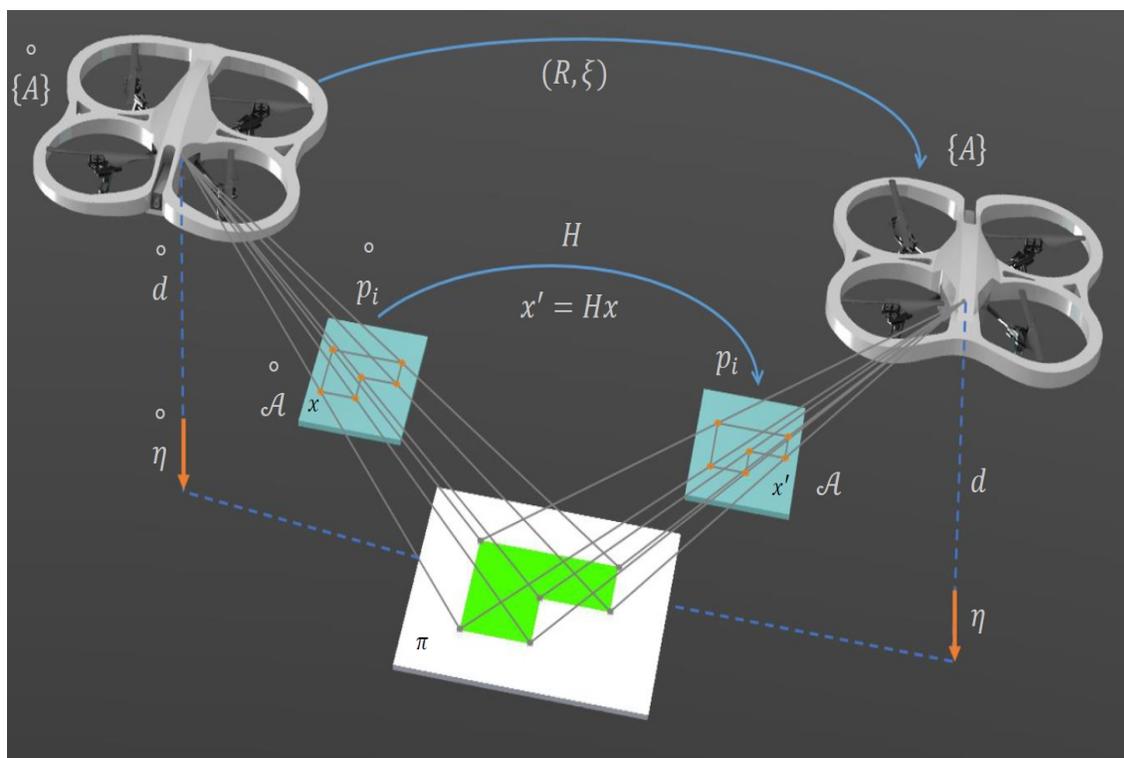


Figura 5.6: Estimación de la matriz de homografía, usando el cuatrirrotor AR.Drone 2.0.

La figura 5.6, muestra el principio de funcionamiento del algoritmo de visión. En términos simples, cuando el cuatrirrotor despegue, el algoritmo de Harris comienza a identificar las esquinas de la figura 5.3 (la figura representa la superficie plana π). Las esquinas, representan los puntos que definen la geometría contenida en la imagen (como mínimo se requieren 4 puntos). Estos puntos son observados por la cámara inferior del cuatrirrotor en todo momento. A partir de los puntos es posible generar las mediciones que alimentan al observador. El algoritmo de Harris se restringe, para reconocer solo las esquinas de la figura en color verde, mediante la aplicación de un filtro, tal como se muestra en la figura 5.7.

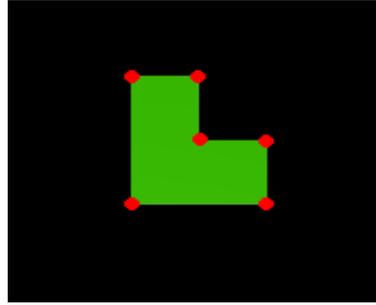


Figura 5.7: Detección de esquinas, simulación.

Es importante mencionar que la cámara debe captar en todo momento la figura contenida en el plano π , si esto no ocurre, el algoritmo pierde datos y el control de posición se inestabiliza. Las siguientes gráficas, corresponden al seguimiento de la trayectoria de la figura 5.5.

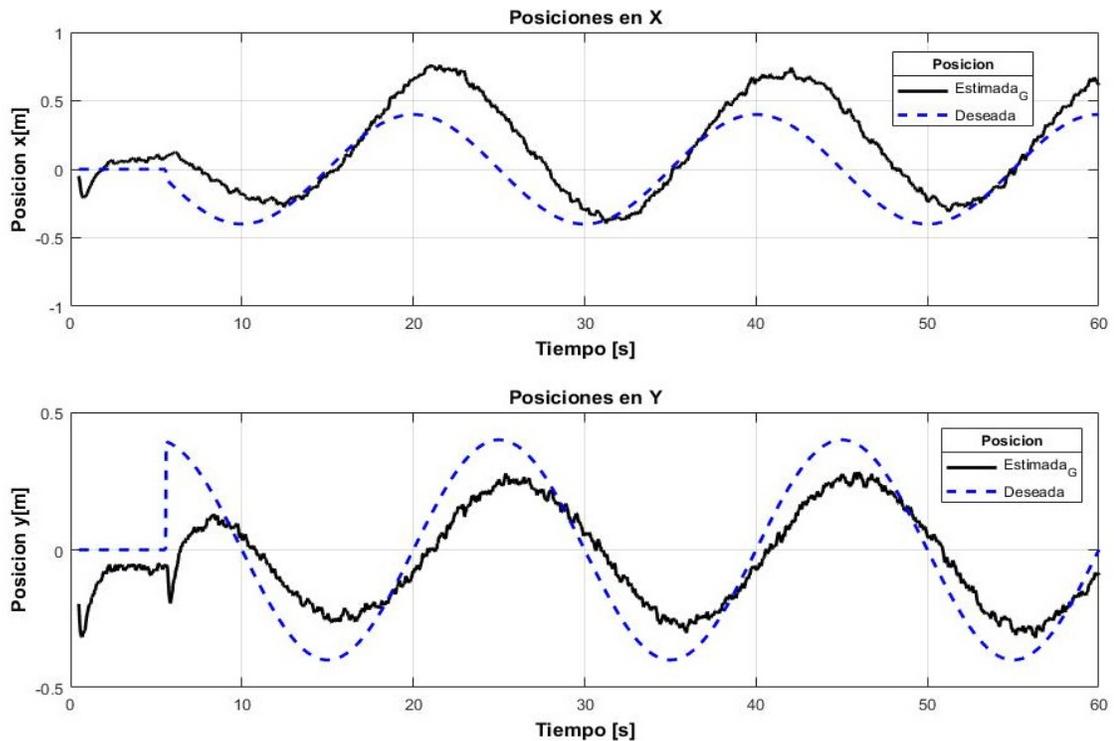


Figura 5.8: Posiciones de las trayectorias circulares.

La figura 5.8, muestran las posiciones deseada y estimada, esta última obtenida a partir de la estimación de la matriz de homografía, usando los datos de gazebo. Cabe mencionar que las gráficas no inician en cero, debido a que el algoritmo de estimación, se ejecuta después de que el cuatrirrotor despega. La simulación se realizó con un periodo $T = 20$ y con una ganancia $k_p = \text{diag}(5.7 \ 1.7 \ 1.8)$. Estas simulaciones muestran que el algoritmo funciona y aunque el seguimiento de trayectoria no es exacto, los errores de posición, oscilan en valores cercanos a cero, tal como se observa en la figura 5.9.

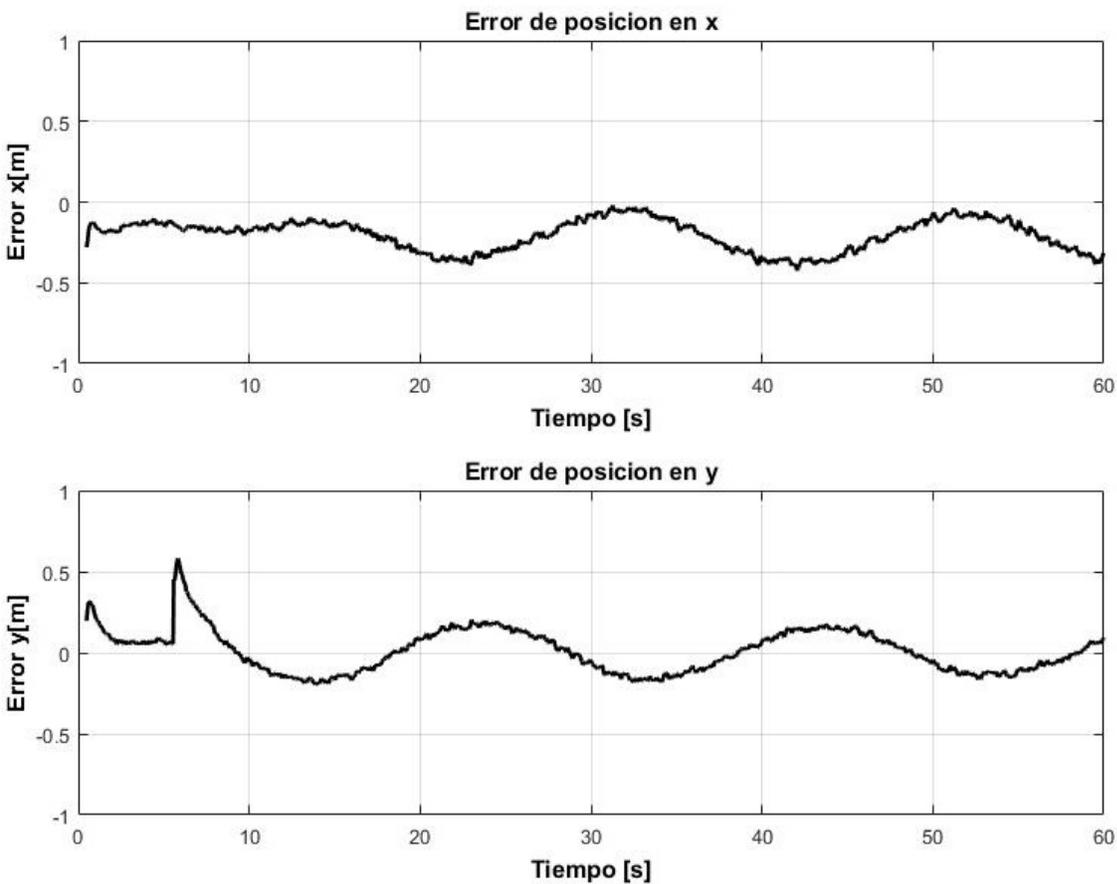


Figura 5.9: Errores de posición, trayectorias circulares.

Las figuras anteriores, verifican el algoritmo de estimación, aunque también es posible verificarlo por medio de la matriz de homografía.

En la librería de OpenCV, existe un comando que calcula la matriz de homografía, con esto, es posible hacer una comparación entre la matriz de homografía estimada y la matriz de homografía de OpenCV. La figura 5.10, presenta la comparación de uno de los nueve elementos de la matriz de homografía, el elemento H_{13} . Se observa que la H estimada usando los datos de gazebo, sigue muy de cerca el valor de la H obtenida por el comando de OpenCV, lo que verifica el funcionamiento del algoritmo.

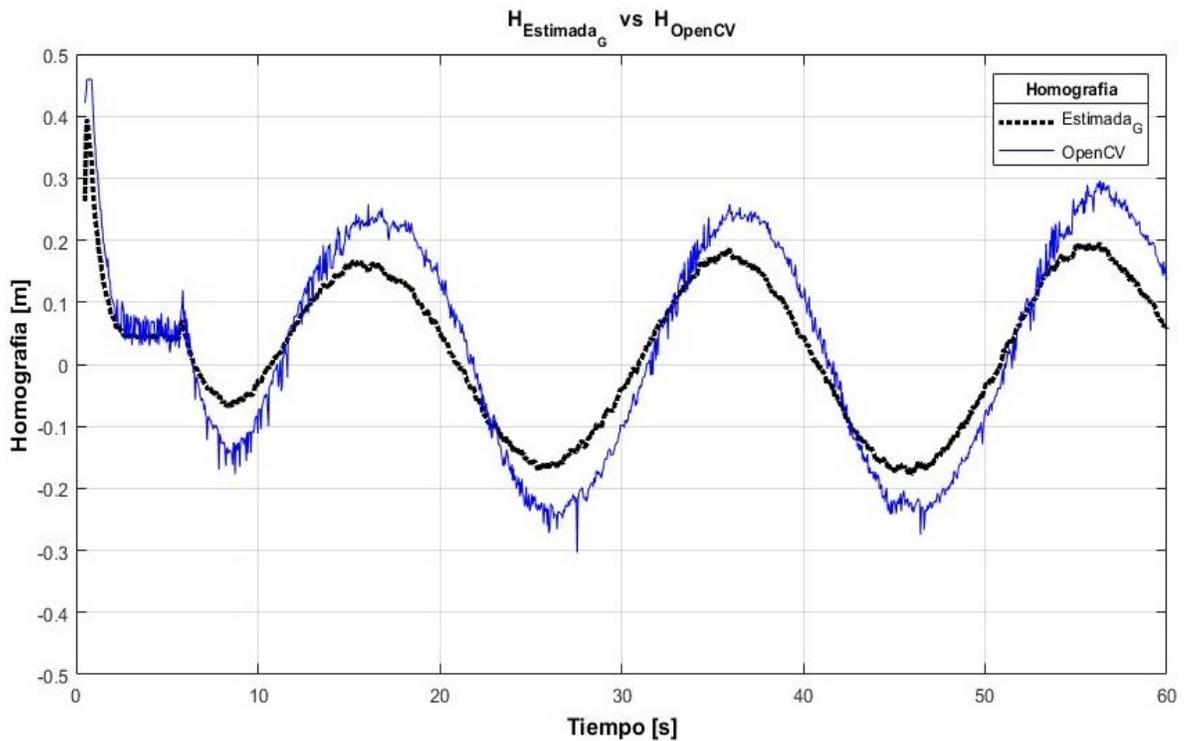


Figura 5.10: Elementos H_{13} , de las matrices de homografía.

Las siguientes simulaciones, usan la estimación de matriz de homografía, para calcular la posición del cuatrirrotor, con esto es posible controlar el vehículo, usando solo los datos estimados, sin hacer uso de gazebo. La trayectoria "gazebo", corresponde a la trayectoria generada a partir de los datos de gazebo y la trayectoria "estimador_H", corresponde a la trayectoria generada gracias a la estimación de la matriz de homografía. Las simulaciones, se realizaron con los mismos parámetros de las simulaciones anteriores.

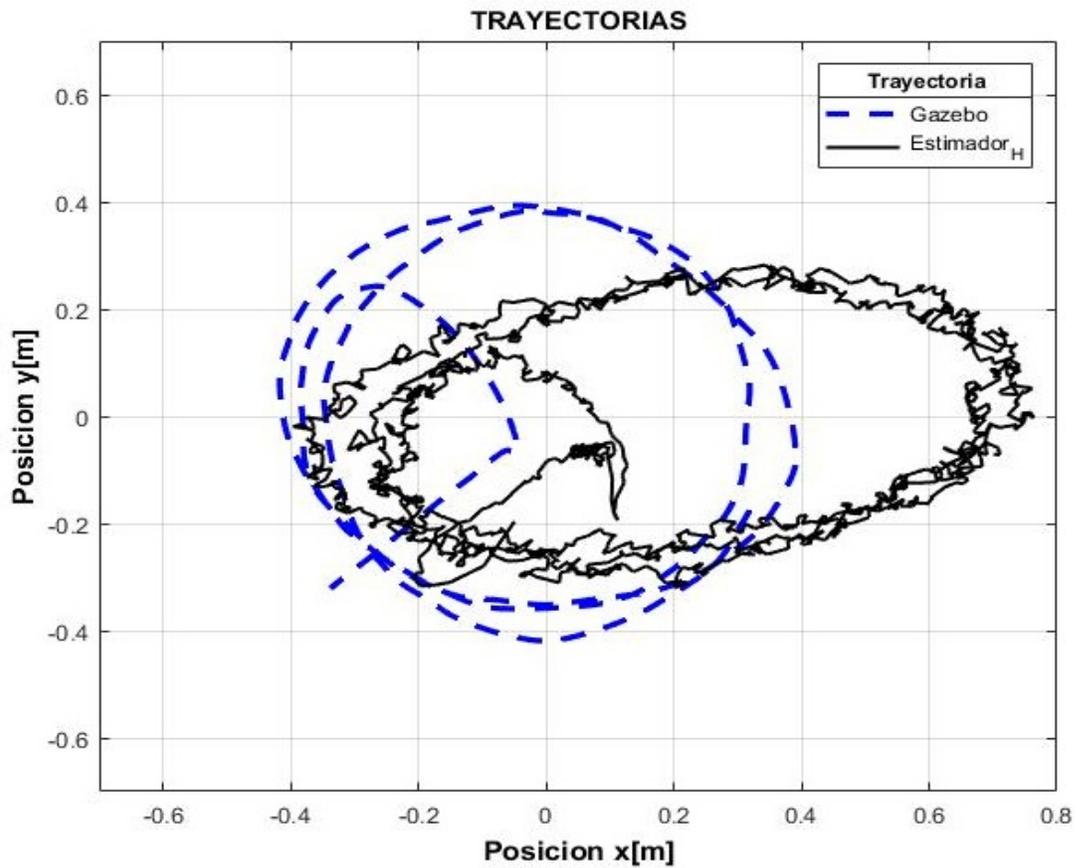


Figura 5.11: Trayectorias circulares estimadas.

Las gráficas de la figura 5.12, muestran la comparación entre las posiciones, obtenidas a partir de la estimación de la matriz de homografía. La gráfica punteada muestra la posición a partir del control con datos de gazebo y la gráfica continua, muestra la posición a partir del control con datos derivados del estimador.

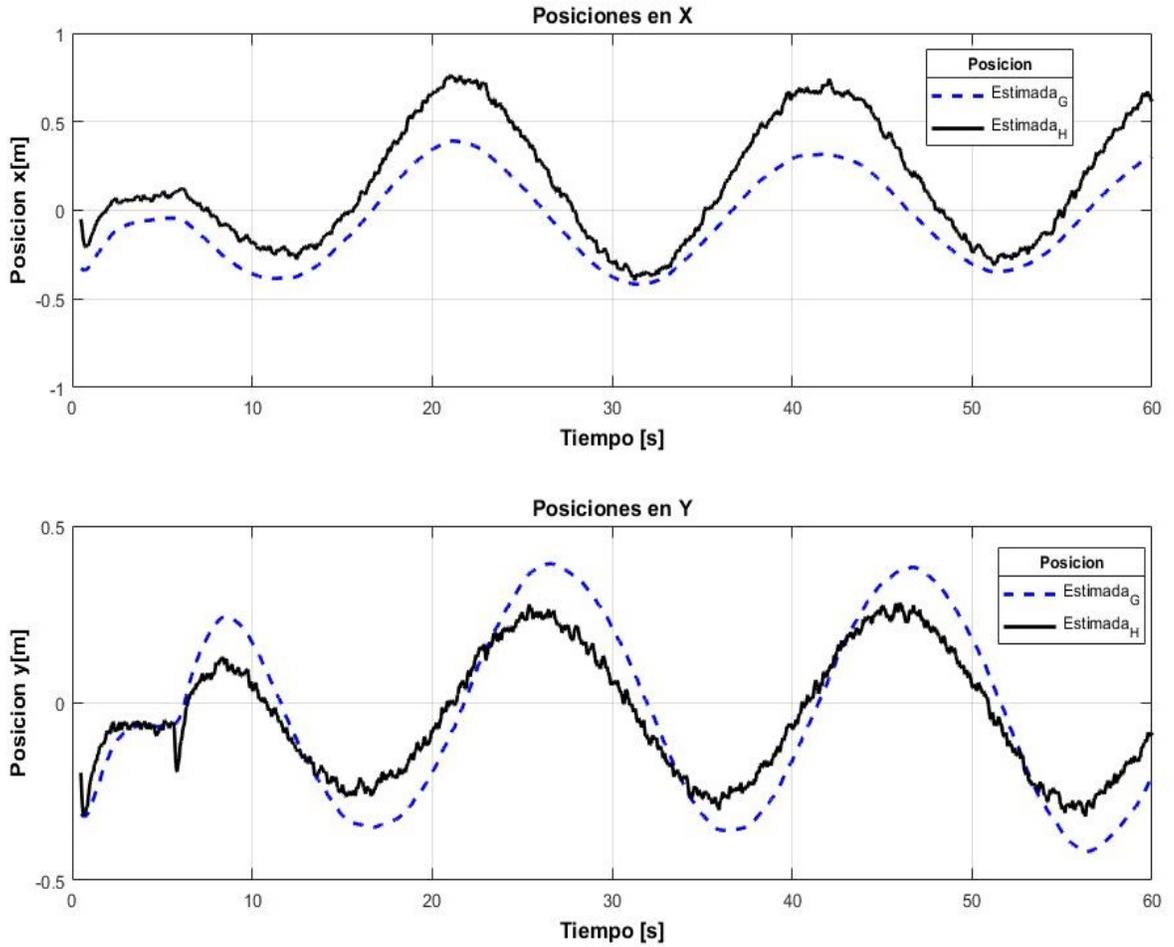


Figura 5.12: Posiciones de las trayectorias circulares estimadas.

La siguiente figura, presenta los resultados obtenidos de realizar una trayectoria rectangular.

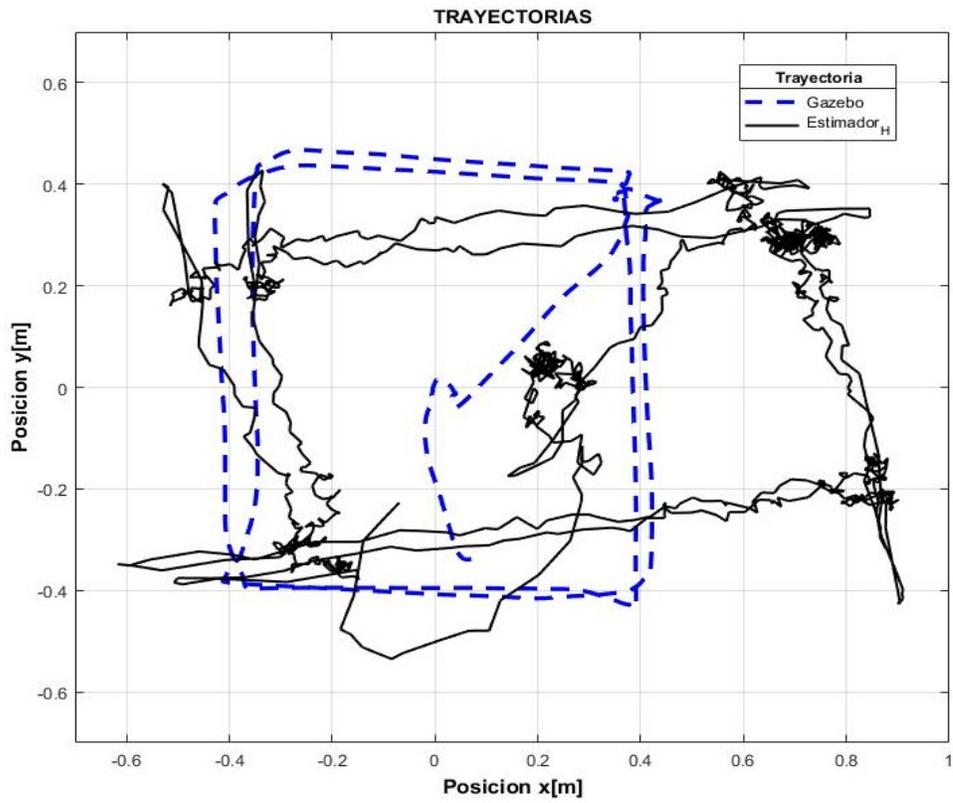


Figura 5.13: Trayectoria rectangular.

Las gráficas de la figura 5.14, muestran las posiciones, obtenidas a partir de la estimación de la matriz de homografía. Al estimarse la matriz, es posible calcular el vector de posición, como se muestra en la ecuación 5.3. Si este se conoce, las posiciones pueden ser calculadas y utilizadas para el control PD y realizar una navegación sin depender de un sistema de referencia, tal como el que proporciona gazebo.

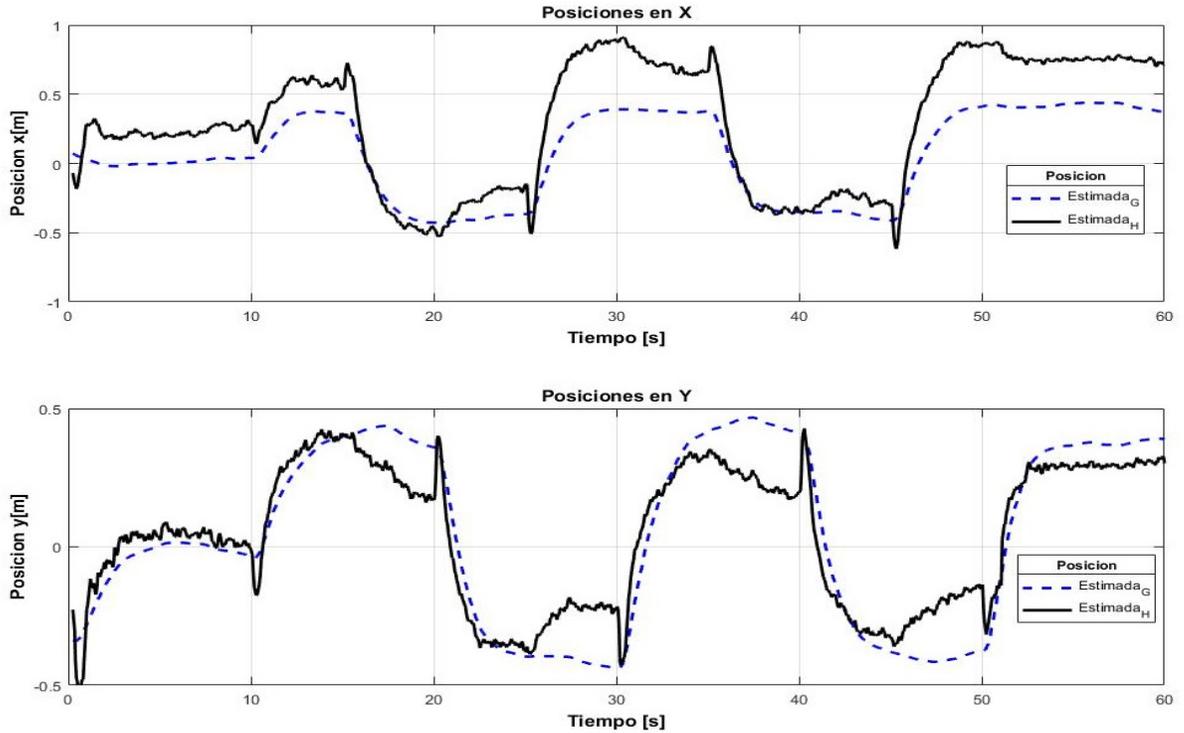


Figura 5.14: Posiciones trayectoria rectangular.

Por último se presenta la comparación entre los elementos de las matrices de homografía obtenidas. Una por medio del estimador y la otra por medio del comando de OpenCV. Con estas simulaciones se comprueba que es posible prescindir de un sistema de referencia para implementar un control de seguimiento de trayectoria, lo cual se toma como base para realizar navegación autónoma.

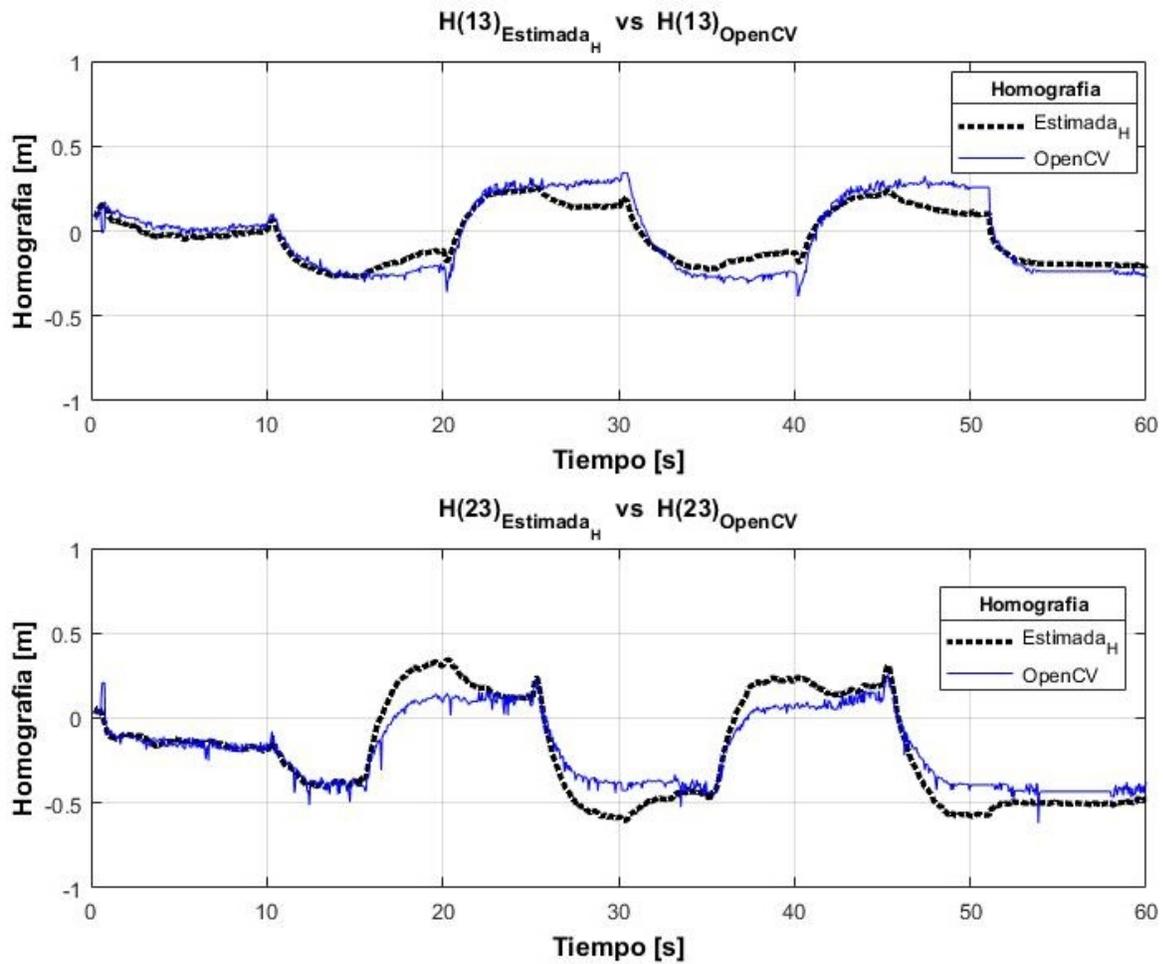


Figura 5.15: Elementos H_{13} y H_{23} , de las matrices de homografía.

Capítulo 6

Conclusiones y trabajo futuro

6.1. Conclusiones

En este trabajo se presentó e implementó un algoritmo de visión para estimar la posición del cuatrirrotor AR.Drone 2.0. En los experimentos, se observó que el estimador tiene un buen desempeño, ya que fue posible navegar a través de trayectorias definidas usando solo los datos calculados por el algoritmo, sin depender de un sistema de posicionamiento. El enfoque de navegación a través del cálculo de matrices de homografía, tiene un coste computacional relativamente bajo a diferencia de otros algoritmos de visión por computadora, como el SLAM, aplicado en [42].

La matemática utilizada en el proyecto, es una pequeña parte de la teoría de grupos. Existe un sin fin de clasificaciones y métodos, para el estudio de la teoría de grupos y sus aplicaciones en ingeniería. La teoría de grupos ayuda a comprender los términos y operaciones realizadas por el observador, para describir las características físicas del algoritmo implementado. Es importante resaltar que los cálculos de la matriz de homografía se realizan en el espacio proyectivo, el cual tiene sus propias reglas y propiedades. En el espacio proyectivo muchas de las propiedades surgen en base a suposiciones, ya que visualizarlo de manera física, resulta bastante difícil, a diferencia de un espacio Euclidiano. En general el estudio de la teoría de grupos en el espacio proyectivo es extensa y complicada, es aquí donde la topología tiene su aplicación, la cual trata de explicar de alguna manera el comportamiento y las propiedades de los cuerpos geométricos y como estos se comportan en un espacio y en otro.

La implementación del algoritmo y control del cuatrirrotor, dentro del entorno de simulación, ofrece grandes beneficios, ya que la simulación asemeja de forma aproximada al modelo físico, por lo que los resultados obtenidos son parecidos. Una ventaja del simulador sobre el modelo físico, es la repetibilidad, ya que se puede repetir el experimento tantas veces sea necesario. A diferencia del modelo físico que depende

de una fuente de energía para alimentar a todos sus componentes, lo que ocasiona un número limitado de repeticiones. Para el AR.Drone 2.0, el tiempo de vuelo estimado ronda entre los 12 y 15 minutos entre cada carga.

Otra ventaja del simulador, es la capacidad de procesamiento. En el simulador, el procesamiento recae en el hardware que integra el equipo de cómputo. Si se utiliza un equipo con buenas especificaciones, los cálculos y simulaciones se realizarán eficazmente, a diferencia del AR.Drone 2.0, el cual integra un microcontrolador con baja capacidad computacional, lo que limita la comunicación y transferencia de datos y el procesamiento de imagen. Para el procesamiento de imagen, en el modelo físico, se necesita calibrar la cámara tantas veces sea necesario. El cálculo de la calibración varía según las condiciones lumínicas del entorno, limitándose por completo en la ausencia de una fuente de iluminación, para el modelo de la cámara del AR.Drone 2.0.

Si bien es cierto, la navegación realizada no es del todo autónoma, hay que destacar que el seguimiento de trayectoria se realizó sin depender de un sistema de posicionamiento, lo cual cumple con la navegación autónoma. En general el algoritmo de visión se puede mejorar y optimizar usando otras técnicas de procesamiento de imagen, como detección de formas y patrones, aprendizaje automático o métodos basados en redes neuronales, lo cual requerirá una mayor demanda computacional. Los resultados obtenidos servirán de base para implementar el algoritmo desde otros enfoques.

6.2. Trabajo futuro

Como trabajo futuro se propone:

- Implementar el estimador de velocidad descrito en [44], para complementar el estimador de posición.
- Implementar un control más robusto para el seguimiento de trayectorias.
- Realizar pruebas físicas, mediante la implementación del estimador usando el cuatrirrotor AR.Drone 2.0.
- Implementar el algoritmo en un vehículo aéreo diferente al AR.Drone 2.0, que incorpore una mejor resolución de cámara y una mayor capacidad de procesamiento.
- Estudiar la factibilidad de complementar el algoritmo en base a otros enfoques de visión por computadora.
- Explorar las aplicaciones de la homografía fuera de la robótica móvil.
- Estudiar a detalle la teoría vista en este trabajo, para tratar de optimizar y mejorar el algoritmo de estimación.

Bibliografía

- [1] “Uso de drones: retos y oportunidades,” Oficina de información científica y tecnológica para el congreso de la union. Recuperado de: https://www.foroconsultivo.org.mx/INCyTU/documentos/Completa/INCYTU_18-016.pdf.
- [2] “Plan estratégico para el desarrollo del sector civil de los drones en españa 2018-2021,” Gobierno de España. Recuperado de: <https://www.fomento.gob.es/NR/rdonlyres/7B974E30-2BD2-46E5-BEE5-26E00851A455/148411/PlanEstrategicoDrones.pdf>.
- [3] J. Qi, D. Song, H. Shang, N. Wang, C. Hua, C. Wu, X. Qi, and J. Han, “Search and rescue rotary-wing uav and its application to the lushan ms 7.0 earthquake,” *Journal of Field Robotics*, vol. 33, no. 3, pp. 290–321, 2016.
- [4] N. Michael, S. Shen, K. Mohta, V. Kumar, K. Nagatani, Y. Okada, S. Kiribayashi, K. Otake, K. Yoshida, K. Ohno, *et al.*, “Collaborative mapping of an earthquake damaged building via ground and aerial robots,” in *Field and service robotics*, pp. 33–47, Springer, 2014.
- [5] D. J. Bruemmer and D. A. Few, “Autonomous navigation system and method,” Sept. 8 2009. US Patent 7,587,260.
- [6] M. Rosaldo, “Control de grupos de cuadrirrotos empleando observadores de estado,” *Departamento de Ingeniería Eléctrica, Sección Mecatrónica, Cinvestav*, 2019. México, Ciudad de México.
- [7] B. Vergouw, H. Nagel, G. Bondt, and B. Custers, “Drone technology: Types, payloads, applications, frequency spectrum issues and future developments,” in *The future of drone use*, pp. 21–45, Springer, 2016.
- [8] R. Strydom, S. Thurrowgood, and M. V. Srinivasan, “Visual odometry: autonomous uav navigation using optic flow and stereo,” in *Proceedings of Australasian conference on robotics and automation*, 2014.
- [9] R. E. Kalman, “A new approach to linear filtering and prediction problems,” 1960.

- [10] D. O. Sales, P. Shinzato, G. Pessin, D. F. Wolf, and F. S. Osorio, "Vision-based autonomous navigation system using ann and fsm control," in *2010 Latin American Robotics Symposium and Intelligent Robotics Meeting*, pp. 85–90, IEEE, 2010.
- [11] H. Durrant-Whyte and T. Bailey, "Simultaneous localization and mapping: part i," *IEEE robotics & automation magazine*, vol. 13, no. 2, pp. 99–110, 2006.
- [12] R. Munguía and A. Grau, "Monocular slam for visual odometry: A full approach to the delayed inverse-depth feature initialization method," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2012, 2012.
- [13] R. Mur-Artal and J. D. Tardós, "Orb-slam2: An open-source slam system for monocular, stereo, and rgb-d cameras," *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 33, no. 5, pp. 1255–1262, 2017.
- [14] E. R. Davies, *Computer and machine vision: theory, algorithms, practicalities*. Academic Press, 2012.
- [15] M. Sonka, V. Hlavac, and R. Boyle, *Image processing, analysis, and machine vision*. Nelson Education, 2014.
- [16] R. Szeliski, *Computer vision: algorithms and applications*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [17] B. Cyganek and J. P. Siebert, *An introduction to 3D computer vision techniques and algorithms*. John Wiley & Sons, 2011.
- [18] G. A. P. Escamilla, "análisis de movimiento en 3 dimensiones en video de alta velocidad para evaluación de sistemas dinámicos," *Requisito parcial para obtener el grado de maestro en optomecatrónica. Centro de investigaciones en óptica, AC. León, Guanajuato, México*, 2012.
- [19] N. Nourani-Vatani, J. Roberts, and M. V. Srinivasan, "Imu aided 3d visual odometry for car-like vehicles," in *Australasian Conference on Robotics and Automation*, 2008.
- [20] T. Hamel, R. Mahony, J. Trumpf, P. Morin, and M.-D. Hua, "Homography estimation on the special linear group based on direct point correspondence," in *2011 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, pp. 7902–7908, IEEE, 2011.
- [21] T. Lee, M. Leok, and N. H. McClamroch, "Global formulations of lagrangian and hamiltonian dynamics on manifolds," *Springer*, vol. 13, p. 31, 2017.
- [22] E. Lluís-Puebla, *Teoría de Grupos*. Sociedad Matemática Mexicana, 2014.
- [23] É. Galois, *Écrits et mémoires mathématiques d'Évariste Galois*. Gauthier-Villars, 1962.
- [24] F. Barrera Mora, *Introducción a la teoría de grupos*. Uaeh, 2004.

- [25] G. Mazzola, *The topos of music: geometric logic of concepts, theory, and performance*. Birkhäuser, 2012.
- [26] M. Macho, “¿qué es la topología?,” 2002. Recuperado de: <http://www.ehu.es/~mtwmastm/sigma20.pdf>.
- [27] A. González, “Introducción a los grupos,” 2000. Recuperado de: <http://hep.fcfm.buap.mx/ecursos/TTG/lecturas/Antonio>
- [28] E. Alegre, G. Pajares, and A. De la Escalera, “Conceptos y métodos en visión por computador,” *España: Grupo de Visión del Comité Español de Automática (CEA)*, 2016.
- [29] G. V. Raffo, “Modelado y control de un helicóptero quadrotor,” *Universidad de Sevilla*, 2007.
- [30] J. J. Corona-Sánchez and H. Rodríguez-Cortés, “Trajectory tracking control for a rotary wing vehicle powered by four rotors,” *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, vol. 70, no. 1-4, pp. 39–50, 2013.
- [31] Y. Ma, S. Soatto, J. Kosecka, and S. S. Sastry, *An invitation to 3-d vision: from images to geometric models*, vol. 26. Springer Science & Business Media, 2012.
- [32] M.-D. Hua, J. Trumpf, T. Hamel, R. Mahony, and P. Morin, “Nonlinear observer design on $sl(3)$ for homography estimation by exploiting point and line correspondences with application to image stabilization,” *Automatica*, vol. 115, p. 108858, 2020.
- [33] E. Malis, “S. benhimane,” *The International Journal of Robotics Research*, vol. 26, no. 7, pp. 661–676, 2007.
- [34] D. Kriegman, “Homography estimation,” *Lecture computer vision I, CSE a*, vol. 252, 2007.
- [35] E. Malis and M. Vargas, *Deeper understanding of the homography decomposition for vision-based control*. PhD thesis, INRIA, 2007.
- [36] E. Malis, T. Hamel, R. Mahony, and P. Morin, “Estimation of homography dynamics on the special linear group,” in *Visual Servoing via Advanced Numerical Methods*, pp. 133–150, Springer, 2010.
- [37] D. Lingrand, “Particular forms of homography matrices.,” in *BMVC*, pp. 1–10, Citeseer, 2000.
- [38] O. D. Faugeras and F. Lustman, “Motion and structure from motion in a piecewise planar environment,” *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, vol. 2, no. 03, pp. 485–508, 1988.
- [39] M. Quigley, B. Gerkey, and W. D. Smart, *Programming Robots with ROS: a practical introduction to the Robot Operating System*. O’Reilly Media, Inc., 2015.

- [40] A. Martinez and E. Fernández, *Learning ROS for robotics programming*. Packt Publishing Ltd, 2013.
- [41] C. R. Viala and A. J. S. Salmerón, “Procedimiento completo para el calibrado de cámaras utilizando una plantilla plana,” *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI*, vol. 5, no. 1, pp. 93–101, 2008.
- [42] L. Nieto, “Estimador de escala de posición en slam monocular para navegación autónoma de un cuatrorotor,” *Departamento de Ingeniería Eléctrica, Sección Mecatrónica, Cinvestav*, 2019. México, Ciudad de México.
- [43] C. G. Harris, M. Stephens, *et al.*, “A combined corner and edge detector.,” in *Alvey vision conference*, vol. 15, pp. 10–5244, Citeseer, 1988.
- [44] R. C. Leishman, J. C. Macdonald, R. W. Beard, and T. W. McLain, “Quadrotors and accelerometers: State estimation with an improved dynamic model,” *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 34, no. 1, pp. 28–41, 2014.