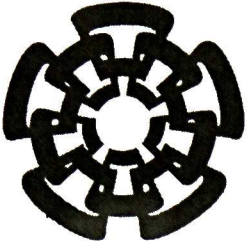




CT 926-551

Dec. 2016



Centro de Investigación y de Estudios Avanzados  
del Instituto Politécnico Nacional  
Unidad Guadalajara

# **Generación de Trayectorias para un Robot Humanoide**

Tesis que presenta:

**Leobardo Emmanuel Campos Macías**

para obtener el grado de:

**Maestro en Ciencias**

en la especialidad de:

**Ingeniería Eléctrica**

Directores de Tesis

**CINVESTAV  
IPN  
ADQUISICION  
LIBROS**

**Dr. Eduardo José Bayro Corrochano  
Dr. Alexander Georgievich Loukianov**

CLASIF.. CT 00827  
ADQUIS.. CT-926-SSI  
FECHA: 23-05-2016  
PROCED.. DEN 2016  
\$

# **Generación de Trayectorias para un Robot Humanoide**

**Tesis de Maestría en Ciencias  
Ingeniería Eléctrica**

Por:

**Leobardo Emmanuel Campos Macías**  
Ingeniero en Mecatrónica

Centro de Enseñanza Técnica Industrial 2013

Becario de Conacyt, expediente no. 300636

Directores de Tesis

**Dr. Eduardo José Bayro Corrochano**  
**Dr. Alexander Georgievich Loukianov**

# Resumen

En esta tesis se utiliza el modelado del péndulo invertido en tres dimensiones para generar patrones de caminado usando el criterio de estabilidad del punto de momento cero y con esto generar un estabilizador para asegurar el seguimiento de los patrones generados y un método para resolver la cinemática inversa de un robot humanoide bípedo usando las bases del álgebra geométrica conformal.

Se modela la dinámica de un robot humanoide bípedo como un péndulo invertido en tres dimensiones y se relaciona con el punto de momento cero para obtener una ecuación diferencial ordinaria la cual se resuelve analíticamente. Se explican las bases teóricas para desarrollar y probar los algoritmos de control propuestos para el caminado dinámico estable.

Se propone un método para diseñar la trayectoria del punto de momento cero en base a la posición de los pasos de un robot humanoide considerando el criterio de estabilidad, es decir, que el punto de momento cero se encuentre siempre dentro del polígono de soporte, con dicha trayectoria se generan los patrones de caminado. Para asegurar que los patrones de caminado sean seguidos por el robot humanoide, así mismo, se introduce un estabilizador basado en la técnica de control por modos deslizantes y un algoritmo para conocer la cantidad de giro de cada unión del robot humanoide bípedo conociendo las trayectorias de la cadera y los pies, basado en álgebra geométrica conformal.

Finalmente se realizan simulaciones de los algoritmos desarrollados para comprobar el funcionamiento de la generación de patrones, su estabilizador y la solución de la cinemática inversa. Se concluye con la aplicación en línea de dichos algoritmos al prototipo *MexOne* logrando resultados satisfactorios, además de una descripción detallada de los componentes físicos y eléctricos del prototipo y la configuración de las librerías para la aplicación de los algoritmos.

# Abstract

In this dissertation the modeling of three-dimensional inverted pendulum is used to generate walking patterns using the stability criterion based on the zero moment point theory and thereby generate a stabilizer to ensure the tracking of those patterns. Finally a method to solve the inverse kinematics of a humanoid biped robot using the foundations of conformal geometric algebra is shown.

The dynamics of a biped humanoid robot is modeled as an inverted pendulum in three dimensions and is related to the zero moment point to obtain an ordinary differential equation. The foundations to develop and test the proposed control algorithms for dynamic stable walking are explained.

A method is proposed to design the trajectory for the zero moment point based on the position of the steps of a humanoid robot considering the stability criterion, that is that the zero moment point always lies inside the support polygon. With this, the walking patterns are generated. To ensure that the patterns are followed by a walking humanoid robot, a stabilizer based on sliding mode control technique is proposed. An algorithm to determine the amount of rotation of each joint of the humanoid biped robot based on conformal geometric algebra is shown.

Finally simulations of the developed algorithms are performed to check the performance of the pattern generation, the stabilizer and the method to solve the inverse kinematics. The on-line application of those algorithms to the prototype *MexOne* achieving satisfactory results are shown along with a detailed description of the physical and electrical components of the prototype and the configuration of libraries for the application of the algorithms.

# Agradecimientos

Antes que nada agradezco a mis padres, Rosa María Macías Jiménez y Leobardo Campos Flores, por su apoyo incondicional a lo largo de toda mi vida y en todos mis estudios ya que sin ellos este trabajo no sería posible. En pocas palabras esta tesis está dedicada por completo a ellos y a el esfuerzo que todos los días hacen por darme todo lo necesario para lograr mis metas y mis sueños. A Karla Guadalupe Campos Macías y toda mi familia por todo el apoyo que se me mostró en cualquier forma.

A Linda Valencia por su apoyo y comprensión en los últimos meses de este viaje y en la etapa mas importante, la finalización y escritura de este trabajo.

Especialmente a todos mis compañeros de la generación 2013 de Control Automático por ese gran equipo que formamos en donde se discutían todos los problemas de todas las materias e incluso los problemas de los diferentes temas de tesis de cada uno, mas de alguna parte de este trabajo es generada en base a ideas expuestas en esas platicas.

A mis asesores, Prof. Eduardo Bayro y Dr. Alexander Loukianov, por la ayuda y atención prestadas y la confianza dada para la realización de este trabajo, y por ser en muchas ocasiones ejemplo para mi desarrollo profesional y personal.

Finalmente a Conacyt por el apoyo económico y al Cinvestav Guadalajara por darme las facilidades de terminar este trabajo.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación y Objetivos	3
1.2. Contenidos .	4
<b>2. Preliminares</b>	<b>5</b>
2.1. Fundamentos de la Locomoción Bípeda	6
2.1.1. Cinemática del Caminado	6
2.1.2. Análisis del Caminado	8
2.2. Modelo Dinámico	10
2.2.1. Péndulo Invertido Lineal en Tres Dimensiones	10
2.2.2. Punto de Momento Cero ( <i>ZMP</i> )	13
2.2.3. Ecuaciones del Punto de Momento Cero	16
2.3. Técnicas de Control .	18
2.3.1. Estabilidad	18
2.3.2. Funciones Escalares Positivas Definidas	19
2.3.3. Funciones de Lyapunov	20
2.3.4. Estabilidad en Sentido de Lyapunov	21
2.3.5. Control por Modos Deslizantes	22
2.4. Álgebra Geométrica .	27
2.4.1. Álgebra Geométrica Conformal	28
2.4.2. Transformaciones Conformes	31

<b>3. Fundamentos Teóricos</b>	<b>33</b>
3.1. Generación del Patrón de Caminado	34
3.2. Ley de Control	39
3.2.1. Control para una Referencia Constante	42
3.2.2. Control para Seguimiento de una Trayectoria .	43
3.3. Cinemática Inversa	48
3.3.1. Método Analítico	49
3.3.2. Método Álgebra Geométrica	50
<b>4. Análisis Experimental</b>	<b>57</b>
4.1. Simulaciones	58
4.2. Resultados Experimentales	64
<b>5. Conclusiones</b>	<b>73</b>
5.1. Conclusiones	73
5.2. Trabajo Futuro	75
<b>A. Descripción del Prototipo</b>	<b>77</b>
A.1. Especificaciones Generales	77
A.2. Sensores	82
A.3. Actuadores	88
<b>B. Implementación en el prototipo</b>	<b>93</b>
B.1. Calibración del prototipo	96
<b>Bibliografía</b>	<b>99</b>

# Índice de tablas

2.1. Notación de <i>roll</i> , <i>pitch</i> y <i>yaw</i>	8
2.2. Representación de las entidades y sus duales en conformal	31
2.3. Transformaciones conformales y sus versores representados	32
4.1. Parámetros de simulación	58
4.2. Parámetros de implementación.	64
A.1. Grados de libertad.	78
A.2. Ejes de rotación.	79
A.3. Eslabones del <i>MexOne</i>	80
A.4. Especificaciones del IMU.	82
A.5. Sensores de fuerza.	83
A.6. Valores obtenidos del proceso de caracterización.	85
A.7. Especificaciones motores MX-106R	88
A.8. Distribución de los actuadores	88

# Índice de figuras

2.1. Definiciones cartesianas.	7
2.2. <i>Roll</i> , <i>pitch</i> y <i>yaw</i> .	8
2.3. Ciclo de caminado humano.	9
2.4. Fases de caminado humano.	9
2.5. Longitud del paso en el ciclo de caminado.	10
2.6. Péndulo invertido en tres dimensiones	11
2.7. Definición del punto de momento cero	13
2.8. Polígono de soporte	13
2.9. Centro de masa, punto de momento cero y polígono de soporte	14
2.10. Fuerzas de reacción en el suelo	14
2.11. Estados de equilibrio	19
2.12. Modo deslizante en la intersección de la discontinuidad de las superficies.	24
2.13. Atracción de la variedad deslizante.	25
2.14. Generación del par de puntos por medio de intersecciones.	29
3.1. Estructura de control básica.	34
3.2. Estructura de una pierna de 6 grados de libertad.	35
3.3. Trayectoria en el tiempo del <i>ZMP</i> .	36
3.4. Definición de la posición de los pasos.	39
3.5. Retrato de fases.	41
3.6. Estructura de una pierna de 6 grados de libertad.	48
3.7. Cinemática inversa analítica.	49

3.8. Intersección de las esferas $s_1$ y $s_2$ .	52
3.9. Par de puntos.	53
3.10. Definición de las líneas que representan la distancia de los eslabones.	54
4.1. Simulación del punto de momento cero.	58
4.2. Simulación del centro de masa.	59
4.3. Simulación del $ZMP$ y $CoM$ .	59
4.4. Simulación del seguimiento del punto de momento cero.	60
4.5. Simulación del seguimiento del centro de masa.	61
4.6. Simulación del seguimiento de la velocidad del centro de masa.	61
4.7. Simulación de la ley de control $u(t)$ .	62
4.8. Simulación de la superficie deslizante $\sigma(t)$	62
4.9. Referencias de las uniones para la pierna derecha.	63
4.10. Entorno gráfico de la cinemática inversa.	63
4.11. Trayectoria del punto de momento cero.	65
4.12. Trayectoria del centro de masa.	65
4.13. Trayectorias del $ZMP$ y $CoM$ .	66
4.14. Posición de la trayectoria de referencia del $ZMP$ en el plano sagital y la posición del $ZMP$ del prototipo.	67
4.15. Posición de la trayectoria de referencia del $ZMP$ en el plano frontal y la posición del $ZMP$ del prototipo.	67
4.16. Posición de la trayectoria de referencia del $CoM$ en el plano sagital y la posición del $CoM$ del prototipo.	68
4.17. Posición de la trayectoria de referencia del $CoM$ en el plano frontal y la posición del $CoM$ del prototipo.	68
4.18. Aceleración del $CoM$ como señal de control de entrada en el plano sagital.	69
4.19. Aceleración del $CoM$ como señal de control de entrada en el plano frontal.	69
4.20. Trayectorias de referencia para la pierna izquierda.	70
4.21. Trayectorias de referencia para la pierna derecha.	70
4.22. Trayectorias de ángulos en radianes para la pierna izquierda.	71
4.23. Trayectorias de ángulos en radianes para la pierna derecha.	72

ii	A.1. Dimensiones	77
	A.2. Centro de masa	78
	A.3. Articulaciones de la parte inferior del <i>MexOne</i> .	79
	A.4. Articulaciones de la pierna izquierda (I).	80
	A.5. Articulaciones de la pierna pzquierda (II).	81
	A.6. Articulaciones de la pierna izquierda (III).	81
	A.7. Circuito de los sensores de fuerza.	83
	A.8. Distancia entre los sensores de fuerza.	84
	A.9. Análisis de la proyección de las fuerzas en cada sensor, con una fuerza distribuida en la plantilla de 100 N.	84
	A.10. Gráficas de la función polinómica de tercer grado para los sensores de la pierna derecha.	86
	A.11. Gráficas de la función polinómica de tercer grado para los sensores de la pierna izquierda.	87
	A.12. Controlador motor MX-106R.	89
	A.13. Resultados del seguimiento de trayectorias sin ganancia PID.	90
	A.14. Resultados del seguimiento de trayectorias con ganancia PID.	91
	B.1. Interacción entre librerías.	95
	B.2. Puntos de calibración de uniones.	96
	B.3. Interfaz gráfica para el calibrado de uniones.	97

# Capítulo 1

## Introducción

Un **robot humanoide**; es un robot con forma de humano, como muchos robots en la ciencia ficción, puede ser el robot que primero se identifica por la mayoría de las personas. Aunado a esto, es muy difícil afirmar que todos los robots deberían ser robots humanoides, considerando que los aviones no asemejan pájaros, dado esto, las funciones que desempeñará el robot determinarán la forma que tendrá el robot.

Es importante considerar lo que se espera de un robot antes de determinar la forma óptima que tendrá, por ejemplo, un automóvil satisface la función de ir de un lugar a otro. Se propone entonces, que clase de deseos se quiere que el robot satisfaga, por ejemplo, se dice que los robots deben hacer tareas que los seres humanos no quieren hacer. Considerando como los robots realizan sus funciones, las características de un robot humanoide se pueden resumir en; i) Un robot humanoide debe poder trabajar en un ambiente humano tal cual esta formado, ii) un robot humanoide debe usar las herramientas humanas tal cual están diseñadas y iii) un robot humanoide debe tener la forma de un ser humano.

Para lograr los puntos anteriores, se propone el uso de robots bípedos, es decir, con dos piernas. Un robot bípedo que puede ser reconocido por tener una forma antropomórfica, que procese y realice acciones para emular algún conjunto de dimensiones físicas, cognitivas y sociales de un humano, es llamado **robot humanoide bípedo**. Para poder adaptarse al ambiente humano, usar las herramientas que usamos a diario y tener la forma humana es necesario usar este tipo de robots, ya que se necesitan dos piernas para lograr el caminado estable en el suelo plano o en un terreno desigual, subir o bajar escaleras y rampas, agacharse, arrastrarse, levantarse, etcétera.

Hacer que un robot humanoide camine de forma antropomórfica es un problema relevante, ya que el caminado bípedo es muy inestable y tratar de resolver este problema ha sido el caso de estudio desde hace mucho tiempo. Generar patrones de caminado y sistemas de control que aseguren el seguimiento de dichos patrones para lograr la estabilidad de un robot humanoide bípedo ha sido uno de los casos de estudio.

El robot humanoide P2 desarrollado por Honda Motor Co., Ltd. y anunciado oficialmente en 1996, tiene un sistema de control que envuelve un camino de retroalimentación desde la inclinación del cuerpo hasta las fuerzas de reacción correspondientes al suelo y aumentando o disminuyendo el par aplicado en el tobillo [1] [2]. Otro método, esta basado en el modelo del péndulo invertido en el cual se modifican las ubicaciones del pie para la estabilización hay unos cuantos robots que usan este método como el BIPER-3 [3]. Okada, Furuta y Tomiyama proponen un método de estabilización basado en el control de la aceleración del centro de masa por medio del cambio dinámico del tiempo de muestreo y su implementación al robot bípedo MK.3 y el robot humanoide morph3 [4].

Para la mayoría de los robots que caminan, se desea que el cuerpo mantenga una postura vertical durante el caminado. La forma mas fácil es rotar las juntas de la entepierna de tal manera que el cuerpo mantenga el estado deseado basado en la lectura de un sensor. Esto es posible aun para puntos de contacto de los pies ya que el par generado al rededor de la unión de la entepierna es generado por la fuerza de fricción en el suelo. Este tipo de control es implementado en los Raibert's hopping robots y el robot humanoide desarrollado por Kumagai et al. [5]. Como un método novedoso de control de postura, Hirose, Takenaka et al. propusieron un modelo de control del *ZMP*. De acuerdo a su explicación, funciona cuando el cuerpo del robot real es inclinado mas hacia adelante que el modelo original, el modelo del cuerpo es fuertemente acelerado con respecto a la trayectoria planeada. Esto cambia el objetivo de la fuerza inercial y el objetivo del *ZMP* va entonces mas hacia atrás con respecto al *ZMP* original, produciendo entonces una postura de recuperación de todo el cuerpo [1].

Existen ademas diferentes métodos, como el llamado "nonlinear oscillator an central pattern generators" inspirado en el trabajo de Taga, Hase et al. [6] simulan muy detalladamente modelos humanos en tres dimensiones controlados por un sistema *CPG* (Central Pattern Generators) jerárquico y demostrando un caminado en tres dimensiones estable. Usando aprendizaje y computo evolutivo, Tedrake et al. diseñó un robot caminante semi-pasivo en tres dimensiones equipado con cuatro actuadores cuyos movimientos son adquiridos por aprendizaje por refuerzo en linea. Se reportó que el robot pudo aprender un patrón de caminado adecuado para varias condiciones del suelo en al rededor de veinte minutos [7].

Sin embargo, estos métodos de corrección son complicados de implementar y no ofrecen la robustez que las técnicas por modos deslizantes brindan. Además de usar un modelado sencillo para simular la dinámica de un robot humanoide bípedo, se ofrece la robustez necesaria para no tomar en cuenta los parámetros de la planta, como la altura del centro de masa y son tomadas como perturbaciones *matched*. Solo conociendo la lectura de la proyección de fuerzas que hace el robot en el suelo, se logra diseñar el estabilizador para que el caminado dinámico sea estable según el criterio de estabilidad, donde el punto de momento cero siempre se encuentra dentro del polígono de soporte.



## 1.1. Motivación y Objetivos

Esta tesis es el resultado de investigaciones actuales llevadas a cabo en el Laboratorio de Control del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN (CINVESTAV), Unidad Guadalajara. Dicho grupo esta comprometido en crear un robot humanoide bípedo estable. Una trayectoria estable es un conjunto de trayectorias para las uniones que permite el movimiento bípedo estable. Este compromiso involucra muchos retos, como el control de un largo numero de grados de libertad para asegurar la locomoción bípeda.

Para llegar a un robot humanoide que permita su operación con alta autonomía, es importante generar trayectorias estables para el centro de masa del robot humanoide dada respecto al marco de referencia global y basadas en el criterio del punto de momento cero para que el robot humanoide no caiga. Con esto, se necesita un estabilizador, que asegure el seguimiento de estas trayectorias generadas y garantice el caminado estable haciendo que la ubicación de los pasos y el centro de masa sea la mas cercana a los patrones propuestos y finalmente conocer la cantidad de giro de cada unión del robot humanoide por medio de la cinemática inversa.

El desarrollo de un método sistemático y eficiente para generar un patrón de caminado considerando la ubicación de los pasos y el punto de momento cero para el centro de masa y un sistema de control para garantizar el seguimiento de dichos patrones, ademas de una cinemática inversa para conocer la cantidad de giro de cada unión del robot humanoide es lo que concierne a esta tesis. En este trabajo, la dinámica de un péndulo invertido en tres dimensiones es usada para aproximar la dinámica de un robot humanoide y es aplicada directamente en combinación con el criterio de estabilidad del punto de momento cero, los cuales son presentados formalmente en la Sección 2.2. Además, se presenta un novedoso método de estabilización usando control por modos deslizantes aprovechando las bondades de robustez en cuanto a variaciones paramétricas se refiere.

El objetivo de esta tesis es entender los principios del punto de momento cero y su implementación para generar patrones de caminado y estabilizadores para el centro de masa. Esta tesis se enfoca ademas, en generar análisis teórico de control y generación de patrones de caminado considerando primero un sistema simplificado y aplicarlo al sistema de alto numero de grados de libertad. Los objetivos particulares son por lo tanto;

- *Generar patrones de caminado estable basados en el modelo del péndulo invertido en tres dimensiones y su relación con el punto de momento cero.*
- *La creación de un estabilizador por medio de una ley de actuación para la aceleración del centro de masa basada en el control por modos deslizantes aprovechando las bondades en cuanto a robustez se refiere.*

- *Generación de un método para conocer la cantidad de giro de cada unión de un robot humanoide por medio de álgebra geométrica conformal.*
- *Aplicación de los tres anteriores puntos al robot prototipo humanoide bípedo MexOne que se encuentra en el Laboratorio de Control Automático.*

## 1.2. Contenidos

Describir las bases teóricas del desarrollo y la aplicación de algoritmos de control basados en modelos dinámicos para el caminado dinámico estable de un robot humanoide bípedo, la simulación de dichos algoritmos para validar su funcionamiento y su aplicación en línea a prototipos humanoides están distribuidos en este documento de la siguiente manera:

**CAPÍTULO 2: PRELIMINARES.** Se hace una revisión sobre los conocimientos teóricos necesarios para poder generar patrones de caminado, diseñar un estabilizador y generar la cantidad de giro de cada unión. Se provee una visión general sobre la cinemática del caminado y algunos conceptos claves del andar humano. Después se profundiza en el modelo del péndulo invertido en tercera dimensión y su linealización considerando que solo se mueve a lo largo de un plano paralelo al suelo. Se genera el concepto del punto de momento cero y se relaciona con el modelo del péndulo invertido para dar lugar a las ecuaciones del *ZMP*, que son usadas para concretar el estabilizador propuesto. Se explican conceptos básicos de teoría de control y finalmente se da una breve introducción a las entidades geométricas y su representación en álgebra geométrica conformal así como las operaciones importantes que existen en dicha álgebra.

**CAPÍTULO 3: FUNDAMENTOS TEÓRICOS.** Se describe la propuesta de generación de patrones de caminado basado en la ubicación de los pasos. Después se desarrolla el estabilizador, considerando la actuación en la aceleración del centro de masa del robot humanoide para garantizar el seguimiento de los patrones generados y por último, la obtención de la cantidad de giro de cada unión del robot bípedo, por medio de entidades geométricas generadas con álgebra geométrica conformal.

**CAPÍTULO 4: ANÁLISIS EXPERIMENTAL.** Presenta la metodología usada para la simulación de los algoritmos propuestos. Se da una breve descripción del prototipo *MexOne* usado para la aplicación del estabilizador y la cinemática inversa, los sensores disponibles y sus actuadores. Al final se presenta la descripción y resultados en línea de la aplicación en el prototipo.

**CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES.** Se establecen las conclusiones de esta tesis y las ideas para el trabajo futuro que a este trabajo concierne.

## Capítulo 2

# Preliminares

La locomoción humana se ha descrito como una serie de movimientos alternantes-rítmicos de las extremidades del tronco que determinan un desplazamiento hacia adelante del centro de gravedad, pero antes de que se exponga la propuesta para imitar estos movimientos en un robot humanoide bípedo se deben conocer conceptos fundamentales sobre herramientas matemáticas, modelado y técnicas de control. Una introducción y breve desarrollo de dichos conceptos son presentados en este capítulo. Primero se abordan los fundamentos de la locomoción bípeda; definiciones establecidas sobre la marcha del caminado y representaciones matemáticas sobre los movimientos de las partes de un robot humanoide se encuentran en la Sección 2.1. Seguido, en la Sección 2.2, se muestra el modelado dinámico para poder generar patrones de caminado parecidos a los de un ser humano y su relación con las fuerzas en el piso. En la Sección 2.3 se abordan las nociones básicas sobre las técnicas de control usadas en este trabajo y finalmente una breve introducción al álgebra conformal usada para obtener la relación de rotación de cada unión es mostrada en la Sección 2.4.

## 2.1. Fundamentos de la Locomoción Bípeda

Antes de seguir adelante, alguna terminología básica es introducida. Para definiciones mas formales de algunos de estos temas, se invita al lector a consultar [8] [9]. La terminología permitirá una descripción informal de los elementos esenciales de un modelo dinámico de un robot bípedo que se usa en esta tesis.

### 2.1.1. Cinemática del Caminado

La teoría de analizar la relación entre la posición y orientación de un eslabón y los ángulos de su unión o junta, de un mecanismo es llamada CINEMÁTICA. Es la base en la cual la robótica esta formada.

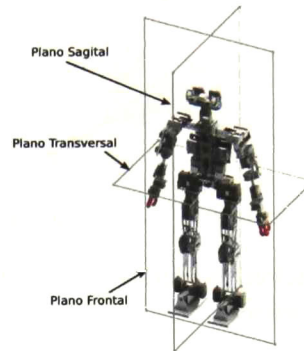
Para permitir que las piernas de un robot humanoide genere un caminado como ser humano en tres dimensiones, se necesitan al menos seis grados de libertad (DoF), los cuales son completamente actuados. El diseño mecánico de los miembros inferiores es básico para determinar el caminado que se puede lograr. La pierna esta hecha de dos segmentos que determinan el largo del paso y que tan lejos puede llegar el pie, que es la interfaz entre el robot bípedo y el suelo. La articulación humana de la cadera es una unión esférica perfecta, es reproducida por muchos robots humanoides con tres juntas de revolución las cuales son ortogonales consecutivamente. La rodilla humana realiza esencialmente la simple función mecánica de flexión y es reproducida por una junta de revolución. Finalmente, las rotaciones en un tobillo y pie humano son un poco complejos, pero sobresalen dos ejes rotacionales que son funcionalmente requeridos, esta ultima articulación se imita con una junta universal. Dicha configuración descrita, es la configuración básica para generar un caminado como humano [8] y es la configuración usada en esta tesis.

Otra tarea importante es definir claramente la posición de cada parte del robot. Para hacer esto, se define un punto especial directamente debajo del robot en su posición inicial como se muestra en la Figura 2.1a. Tomando este punto como el origen, se define un sistema de coordenadas fijo donde el eje de coordenadas  $x$  encara hacia adelante, el eje  $y$  hacia la izquierda y  $z$  encara hacia arriba, se llama a estas coordenadas  $\sum_w$  y se usan para describir al robot humanoide y sus movimientos. Estas coordenadas son llamadas COORDENADAS DEL MUNDO, ademas como se muestra en la Figura 2.1b, con dicho sistema se puede definir tres planos de movimiento del robot humanoide,

- **(Plano Sagital)** El plano sagital es el plano longitudinal, paralelo al plano  $(x - z)$ , que divide al cuerpo en las secciones izquierda y derecha.
- **(Plano Frontal)** El plano frontal es el plano paralelo al plano  $(y - z)$  y perpendicular al plano sagital. Este separa al cuerpo en las porciones delantera y trasera.



(a) Origen de las coordenadas del mundo y locales.



(b) Planos seccionales humanos.

Figura 2.1: Definiciones cartesianas.

- **(Plano Transversal)** El plano transversal es el plano paralelo al plano  $(x - y)$  y es perpendicular a los planos sagital y frontal, además corta la cadera.

Pensemos ahora en un SISTEMA DE COORDENADAS LOCAL  $\Sigma_a$ , el cual está ligado al hombro izquierdo como se muestra en la Figura 2.1a. A diferencia del sistema de coordenadas del mundo que está fijo al suelo, las coordenadas locales se mueven junto al eslabón adjunto. Es posible relacionar el sistema de coordenadas del mundo con el sistema local por medio de una transformación homogénea de la forma [10]

$$\begin{bmatrix} p_w \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^a R_w & {}^a p_w \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_a \\ 1 \end{bmatrix} = {}^w T_a \begin{bmatrix} p_a \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

donde  $p_a$  es la posición del hombro visto desde el sistema de coordenadas local,  ${}^w p_w$  es la posición del hombro visto desde el sistema de coordenadas global y  ${}^a R_w$  una matriz de rotación que describe la orientación del hombro y su movimiento rotacional.

Las rotaciones básicas son rotaciones al rededor de los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ , las cuales se llaman *Roll*, *Pitch* y *Yaw* y son mostradas en la Figura 2.2.

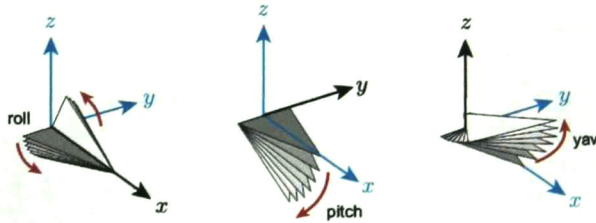


Figura 2.2: *Roll, pitch y yaw.*

A continuación se muestra una lista de los ejes de rotación, sus nombres y la notación usada en esta tesis.

Eje de Rotación	Nombre	Notación
Eje $x$	<i>Roll</i>	$\phi$
Eje $y$	<i>Pitch</i>	$\theta$
Eje $z$	<i>Yaw</i>	$\psi$

Tabla 2.1: Notación de *roll, pitch y yaw*

Para rotar un objeto dado un ángulo, se definen las siguientes matrices

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_x(\phi) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \\
 \mathbf{R}_y(\theta) &= \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \\
 \mathbf{R}_z(\psi) &= \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

### 2.1.2. Análisis del Caminado

Caminar es la repetición alternada, de una pierna a otra, de los mismos movimientos elementarios. Su característica cíclica resultante puede ser descrita en dos diferentes formas. Según los ortopedistas, el ciclo de caminado coincide con el movimiento cíclico de una pierna [11]. Convencionalmente, el ciclo inicia cuando el talón golpea al siguiente golpe de talón del mismo pie, como se muestra en la Figura 2.3. Para la locomoción humana, esta descripción es la que mejor aplica al análisis cualitativo de caminado y particularmente a las disfunciones identificables de cada pierna. El análisis dinámico y de control en esta sección se examina

desde el punto de vista de la coordinación global de los movimientos intersegmentales de las dos piernas.



Figura 2.3: Ciclo de caminado humano.

Caminar entonces debe ser tratado como una serie de pasos, los cuales son movimientos de referencia elementales que pueden ser ejecutados en una variedad de formas, pero con unas características mecánicas estrictamente definidas. Un paso está formado por dos principales fases cinemáticamente distintas

- **(Fase de Apoyo Sencillo)** es la fase en la cual el sistema de locomoción se desenvuelve como una cadena cinemática abierta, es decir, cuando solo un pie está en contacto con el suelo.
- **(Fase de Apoyo Doble)** es la fase en la cual, el sistema de locomoción se desenvuelve como una cadena cinemática cerrada, es decir, cuando los dos pies están en contacto con el suelo.

En la Figura 2.4 se muestra un ejemplo de las fases del caminado. La ausencia de un período de apoyo doble distingue el correr del caminar. Con el aumento de la velocidad de la marcha, la duración del apoyo doble disminuye y hay un aumento en el tiempo gastado en que alguno de los pies no tocan el suelo.

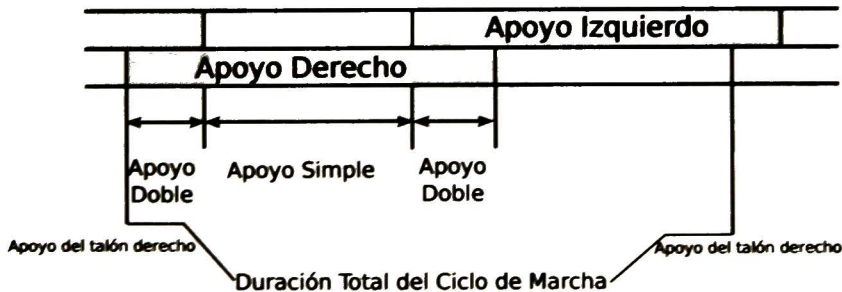


Figura 2.4: Fases de caminado humano.

En la Figura 2.5 se muestra finalmente, la longitud del paso completo es la distancia lineal entre los sucesivos puntos de contacto del talón del mismo pie. La longitud del paso es la distancia lineal en el plano de progresión entre los puntos de contacto de un pie y el otro pie.

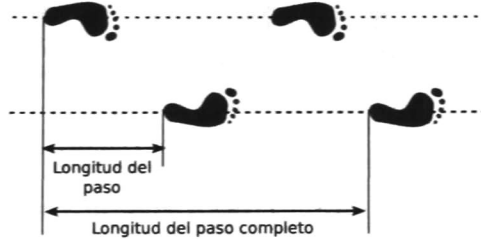


Figura 2.5: Longitud del paso en el ciclo de caminado.

## 2.2. Modelo Dinámico

La mayoría de investigaciones dedicadas a la generación de patrones de caminado bípedo pueden ser clasificadas en dos categorías principales. La primera categoría usa conocimiento preciso de los parámetros dinámicos del robot, por ejemplo la masa, la ubicación del centro de masa y la inercia de cada eslabón para generar patrones de caminado. Por eso, todo cae en la precisión de los datos del modelado [1] [12]. Por el contrario, la segunda categoría usa conocimiento limitado de la dinámica, por ejemplo el momento angular total, la ubicación del centro de masa. Una propuesta común, la usada en este trabajo, es el uso de un péndulo invertido en tres dimensiones, cuyo movimiento es restringido a moverse a lo largo de una superficie paramétrica, como modelo dinámico del robot. Como se usa muy poca información sobre la dinámica real, este enfoque se basa en control por retroalimentación [13] [14].

### 2.2.1. Péndulo Invertido Lineal en Tres Dimensiones

Cuando un robot bípedo soporta su peso con una pierna, su dinámica dominante se representa como un solo péndulo invertido que conecta el pie de soporte y el centro de masa de todo el robot. La Figura 2.6 representa dicho péndulo invertido, que consiste de un punto de masa y una pierna telescópica sin masa.



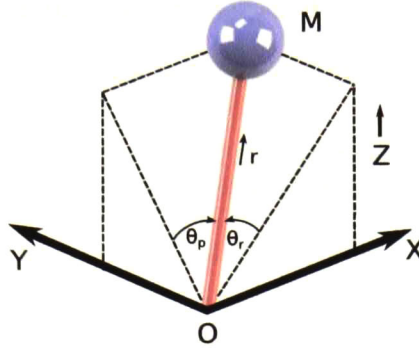


Figura 2.6: Péndulo invertido en tres dimensiones

La posición del punto de masa  $p = [x, y, z]$  es únicamente especificada por un conjunto de variables  $q = (\theta_r, \theta_p, r)$  [15].

$$\begin{aligned} x &= r S_p \\ y &= -r S_r \\ z &= r D \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde  $S_r = \sin \theta_r$ ,  $S_p = \sin \theta_p$  y  $D = \sqrt{1 - S_r^2 - S_p^2}$ . Sea  $(\tau_r, \tau_p, f)$  el actuador por par y fuerza asociados con las variables de estado  $(\theta_r, \theta_p, r)$ . Con estas entradas, la ecuación que describe el movimiento del péndulo invertido en tres dimensiones en coordenadas cartesianas esta dada de la forma

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = (J^T)^{-1} \begin{pmatrix} \tau_r \\ \tau_p \\ f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

donde  $m$  es la masa del péndulo y  $g$  es la aceleración de la gravedad. La estructura del jacobiano  $J$  es

$$J = \frac{\partial p}{\partial q} = \begin{pmatrix} 0 & r C_p & S_p \\ -r C_r & 0 & -S_r \\ -r C_r S_r / D^1 & -r C_p S_p / D & D \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Para eliminar el jacobiano inverso que aparece en la Ecuación (2.4), se multiplica la matriz  $J^T$  por la izquierda

$$m \begin{pmatrix} 0 & -r C_r & -r C_r S_r / D \\ r C_p & 0 & -r C_p S_p / D \\ S_p & -S_r & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_r \\ \tau_p \\ f \end{pmatrix} - mg \begin{pmatrix} -r C_r S_r \\ -r C_p S_p / D \\ -D \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

<sup>1</sup> Donde  $C_r = \cos \theta_r$  y  $C_p = \cos \theta_p$ .

Tomando el primer renglón de la Ecuación (2.6) y multiplicando por  $D/C_r$  se obtiene

$$m(-rD\ddot{y} - rS_r\ddot{z}) = \frac{D}{C_r}\tau_r + rS_rmg. \quad (2.7)$$

Sustituyendo la relación cinemática de la Ecuación (2.3) en (2.7), se obtiene una ecuación que describe la dinámica a lo largo de la coordenada  $y$ , de la forma

$$m(-z\ddot{y} + y\ddot{z}) = \frac{D}{C_r}\tau_r - mgy. \quad (2.8)$$

Se sigue un procedimiento similar con el segundo renglón de la Ecuación (2.6) para obtener la dinámica en la coordenada  $x$ , descrita de la forma

$$m(z\ddot{x} - x\ddot{z}) = \frac{D}{C_p}\tau_p - mgx. \quad (2.9)$$

El patrón de movimientos del péndulo tiene bastas posibilidades, se debe seleccionar uno que sea adecuado para caminado. Por esta razón, se aplican restricciones para limitar el movimiento del péndulo. Una de las restricciones limita el movimiento en un plano con una normal dada por el vector  $(k_x, k_y, -1)$  y la intersección de  $z$  con  $z_c$

$$z = k_x x + k_y y + z_c \quad (2.10)$$

donde  $k_x$  y  $k_y$  determinan la pendiente del plano y  $z_c$  determina la altura del plano restrictivo. Para un robot caminando en un terreno áspero, el vector normal debe coincidir con la pendiente del piso y la intersección de  $z$  debe ser la distancia aproximada del centro de masa del robot con respecto al piso. Se tiene entonces la segunda derivada con respecto al tiempo de la Ecuación (2.10)

$$\ddot{z} = k_x \ddot{x} + k_y \ddot{y}. \quad (2.11)$$

Sustituyendo estas restricciones en las Ecuaciones (2.8) y (2.9) se obtiene la dinámica del péndulo de la forma

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \frac{g}{z_c}y - \frac{k_y}{z_c}(x\ddot{y} - \ddot{x}y) - \frac{1}{mz_c}\tau_x \\ \ddot{x} &= \frac{g}{z_c}x - \frac{k_x}{z_c}(x\ddot{y} - \ddot{x}y) - \frac{1}{mz_c}\tau_y \end{aligned} \quad (2.12)$$

donde  $\tau_x$  y  $\tau_y$  son entradas virtuales que son introducidas para compensar la no linealidad, dadas de la forma

$$\begin{aligned} \tau_r &= \frac{C_r}{D}\tau_x \\ \tau_p &= \frac{C_p}{D}\tau_y \end{aligned} \quad (2.13)$$

### 2.2.2. Punto de Momento Cero (*ZMP*)

En 1972, Vukobratovic y Stepanenko definieron el punto de momento cero *ZMP* al inicio del articulo sobre el control de robots humanoides [16]. Todo lo referente al *ZMP* inicia ahí. En la Figura 2.7 se muestra un ejemplo de la distribución de las fuerzas a través del pie. Como la carga tiene el mismo signo en todas las partes de la superficie, puede ser reducida a una fuerza resultante  $R$ . Sea entonces el punto en la superficie del pie, donde la resultante  $R$  pasa, conocido como el punto de momento cero o *ZMP*.

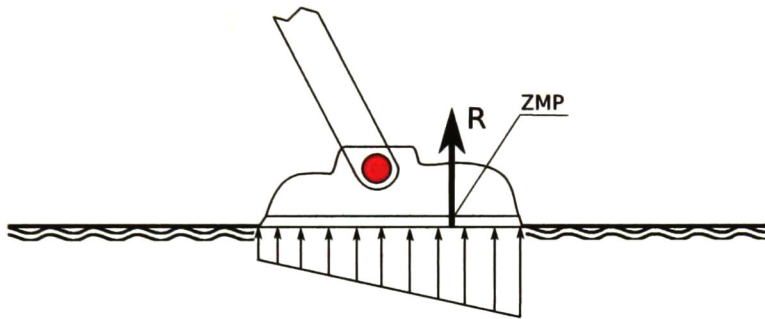


Figura 2.7: Definición del punto de momento cero

Ademas, como se muestra en la Figura 2.8, consideraremos a la región formada cerrando todos los puntos de contacto entre el robot y el piso usando un cordón elástico. A esta región se le conoce como polígono de soporte o de estabilidad. Matemáticamente el polígono de soporte es definido como un envolvente convexo, el cual es el conjunto convexo mas pequeño que incluye a todos los puntos. El *ZMP* siempre existe dentro del polígono de estabilidad.

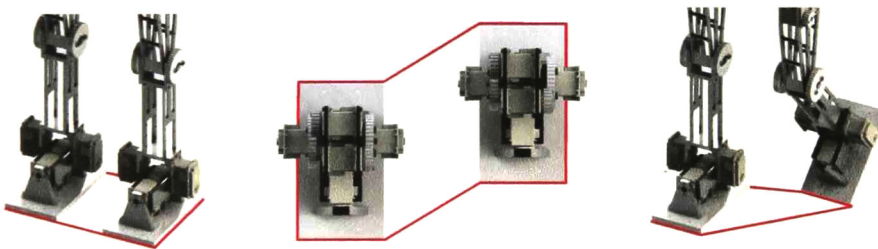


Figura 2.8: Polígono de soporte

En las Figuras 2.9 se ilustra la relación entre el centro de masa *COM*, *ZMP* y el polígono de soporte mientras un humano se para en el suelo. Se le llama la proyección al piso del *COM* al punto donde la línea de gravedad desde el *COM* intersecta al piso. Como se muestra en la Figura 2.9a, cuando un humano se para en el piso, el *ZMP* coincide con la proyección al piso del *COM*. Por otro lado, cuando un humano se mueve dinámicamente como se muestra

en la Figura 2.9b, la proyección del *COM* puede existir fuera del polígono de soporte, pero el *ZMP* no puede existir fuera del mismo.

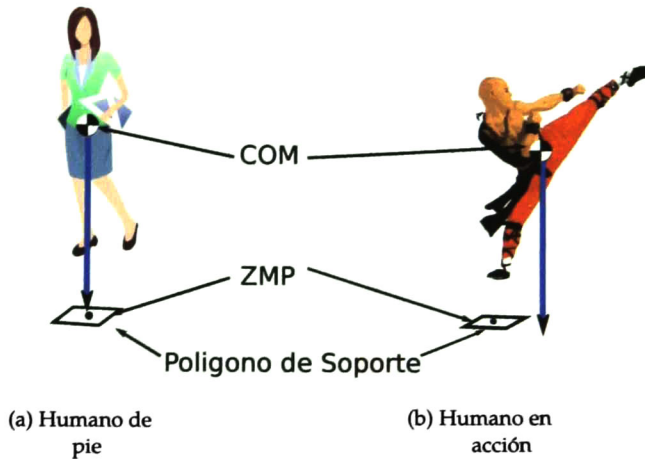


Figura 2.9: Centro de masa, punto de momento cero y polígono de soporte

Se considera la fuerza de reacción en el piso aplicada al robot moviéndose en tres dimensiones en un terreno plano.

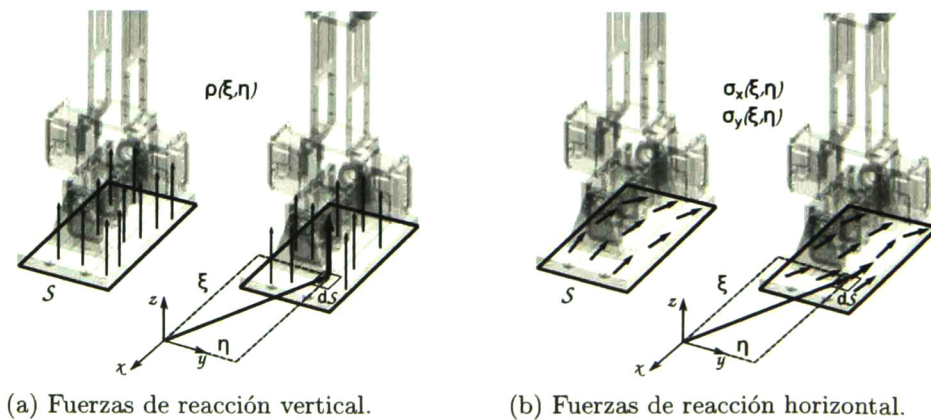


Figura 2.10: Fuerzas de reacción en el suelo

La componente horizontal y vertical de las fuerzas de reacción son mostradas en las Figuras 2.10a y 2.10b respectivamente. Sea  $r = [\xi, \eta, 0]^T$  la posición del vector definido en el suelo. Además, sea  $\rho(\xi, \eta)$  la componente vertical de la fuerza de reacción del piso aplicada a cada unidad de área. La suma de la componente vertical de la fuerza de reacción del piso

es expresada

$$f_z = \int_S \rho(\xi, \eta) dS, \quad (2.14)$$

donde  $\int_S$  denota el área de integración de contacto entre la suela del pie y el piso. El momento  $\tau_n(p)$  de la fuerza de reacción del piso al rededor del punto  $p = [p_x, p_y, 0]^T$  se calcula de la forma

$$\begin{aligned} \tau_n(p) &\equiv [\tau_{nx} \quad \tau_{ny} \quad \tau_{nz}]^T \quad (2.15) \\ \tau_{nx} &= \int_S (\eta - p_y) \rho(\xi, \eta) dS \\ \tau_{ny} &= - \int_S (\xi - p_x) \rho(\xi, \eta) dS \\ \tau_{nz} &= 0. \end{aligned}$$

Se supone que

$$\begin{aligned} \tau_{nx} &= 0 \quad (2.16) \\ \tau_{ny} &= 0 \end{aligned}$$

de la Ecuación (2.15), el punto donde el momento de la componente vertical de la fuerza de reacción del piso se vuelve cero se expresa como

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{\int_S \xi \rho(\xi, \eta) dS}{\int_S \rho(\xi, \eta) dS} \quad (2.17) \\ p_y &= \frac{\int_S \eta \rho(\xi, \eta) dS}{\int_S \rho(\xi, \eta) dS}. \end{aligned}$$

Como  $\rho(\xi, \eta)$  es equivalente a la presión sobre la superficie de la suela, el punto  $p$  es el centro de presión o en otras palabras el *ZMP*.

Por otra parte, se considera ahora el efecto de la componente horizontal de la fuerza de reacción del suelo. Sea  $\sigma_x(\xi, \eta)$  y  $\sigma_y(\xi, \eta)$  las componentes, en  $x$  y  $y$  respectivamente, de las fuerzas de reacción horizontales del suelo. La suma de ellas se expresa como

$$\begin{aligned} f_x &= \int_S \sigma_x(\xi, \eta) dS \quad (2.18) \\ f_y &= \int_S \sigma_y(\xi, \eta) dS. \end{aligned}$$

El momento  $\tau_t(p)$  de la fuerza horizontal de reacción del suelo al rededor de un punto  $p$  en la superficie del suelo es expresada como

$$\begin{aligned}\tau_t(p) &\equiv [\tau_{tx} \quad \tau_{ty} \quad \tau_{tz}]^T & (2.19) \\ \tau_{tx} &= 0 \\ \tau_{ty} &= 0 \\ \tau_{tz} &= \int_S \{(\xi - p_x)\sigma_x(\xi, \eta) - (\eta - p_y)\} dS.\end{aligned}$$

Estas ecuaciones significan que las fuerzas horizontales de reacción del suelo generan la componente vertical del momento. Se concluye entonces que las fuerzas de reacción del suelo distribuidas a lo largo de la superficie de la suela pueden ser remplazadas por la fuerza

$$f = [f_x \quad f_y \quad f_z]^T \quad (2.20)$$

y el momento

$$\begin{aligned}\tau_p &= \tau_n(p) + \tau_t(p) & (2.21) \\ &= [0 \quad 0 \quad \tau_{tz}]^T\end{aligned}$$

sobre el *ZMP*  $p$ . Cuando un robot se mueve,  $\tau_{tz} = 0$  generalmente no se satisface. Por esto, el *ZMP* no es un punto donde todas las componentes del momento se vuelven cero. Se define formalmente al *ZMP* como el punto donde la componente horizontal del momento de la fuerza de reacción del suelo se vuelve cero.

### 2.2.3. Ecuaciones del Punto de Momento Cero

Haciendo uso de los previos conceptos y algoritmos, se puede calcular el *ZMP* en función de las Ecuaciones (2.12) del péndulo invertido lineal en tres dimensiones. La fuerza de reacción del suelo se puede expresar usando el *ZMP* ( $p$ ), la fuerza ( $f$ ) y el momento ( $\tau_p$ ) al rededor de la línea vertical incluyendo el *ZMP* [9].

Calculando el momento de la fuerza de reacción del suelo se obtiene

$$\tau = p \times f + \tau_p. \quad (2.22)$$

La relación entre la fuerza de reacción del suelo y el momento y entre el momento de reacción del suelo y el momento angular son descritos por

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{P}} &= mg + f & (2.23) \\ \dot{\mathcal{L}} &= c \times mg + \tau\end{aligned}$$

donde  $\dot{\mathcal{P}}$  es la derivada con respecto al tiempo del momento linear del robot,  $\dot{\mathcal{L}}$  el momento angular del robot y  $c$  el centro de masa, descritas de la forma

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= [\mathcal{P}_x \ \mathcal{P}_y \ \mathcal{P}_z]^T \\ \mathcal{L} &= [\mathcal{L}_x \ \mathcal{L}_y \ \mathcal{L}_z]^T \\ c &= [x \ y \ z]^T \\ \mathbf{g} &= [0 \ 0 \ -g]^T\end{aligned}\quad (2.24)$$

Sustituyendo las Ecuaciones (2.23) en (2.22) y resolviendo con respecto a  $\tau_p$ , resulta

$$\tau_p = \dot{\mathcal{L}} - c \times mg + (\dot{\mathcal{P}} - mg) \times p \quad (2.25)$$

usando las Ecuaciones (2.24), la Ecuación (2.25) se puede escribir de la forma:

$$\begin{aligned}\tau_x &= \dot{\mathcal{L}}_x + mgy + \dot{\mathcal{P}}_y p_z - (\dot{\mathcal{P}}_z + mg)p_y = 0 \\ \tau_y &= \dot{\mathcal{L}}_y - mgy - \dot{\mathcal{P}}_x p_z + (\dot{\mathcal{P}}_z + mg)p_x = 0.\end{aligned}\quad (2.26)$$

Considerando que el efecto de

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{L}}_x + mgy + \dot{\mathcal{P}}_y p_z \\ \dot{\mathcal{L}}_y - mgy - \dot{\mathcal{P}}_x p_z\end{aligned}\quad (2.27)$$

es pequeño y puede ser compensado por un controlador instalado en el robot humanoide y ademas

$$\dot{\mathcal{P}}_z = m\ddot{z} \quad (2.28)$$

la Ecuación (2.26) se reescribe de la forma

$$\begin{aligned}\tau_x &= -mp_y(\ddot{z} + g) \\ \tau_y &= mp_x(\ddot{z} + g).\end{aligned}\quad (2.29)$$

En esta tesis, se considera unicamente el caso cuando el robot humanoide camina sobre una superficie plana, esto es  $p_z = 0$  y su centro de masa (*COM*) se desplaza a lo largo de un plano horizontal,  $k_x = 0$  y  $k_y = 0$  de la Ecuación (2.10). Con estas consideraciones, sustituyendo la Ecuación (2.29) en (2.12) se obtiene

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= \frac{g}{z_c} y + \frac{g}{z_c} p_y \\ \ddot{x} &= \frac{g}{z_c} x + \frac{g}{z_c} p_x.\end{aligned}\quad (2.30)$$

Despejando con respecto al  $ZMP$  se obtiene

$$\begin{aligned} p_y &= y - \frac{z_c}{g} \ddot{y} \\ p_x &= x - \frac{z_c}{g} \ddot{x} \end{aligned} \quad (2.31)$$

las cuales son conocidas como las ecuaciones del  $ZMP$ .

## 2.3. Técnicas de Control

Para poder diseñar un controlador para un caminado bípedo que asegure las posiciones deseadas del centro de masa y el punto de momento cero, que es el tema principal de esta tesis, se presenta una breve noción de conceptos básicos acerca de herramientas de control que se necesitan. Se exponen las herramientas básicas necesarias para desarrollar el algoritmo de control que se propone en el Capítulo 3. Esta sección comienza con una revisión del análisis básico sobre la Estabilidad de Lyapunov y concluye con las nociones del control por modos deslizantes.

### 2.3.1. Estabilidad

En las siguientes subsecciones, se revisan las nociones básicas acerca de la Estabilidad de Lyapunov. Si se quieren mas detalles, el lector puede referirse a [17]. La estabilidad de un sistema de control es extremadamente importante y es generalmente considerado un tema de seguridad cuando se diseña un sistema. Por ejemplo la inestabilidad de un reactor nuclear puede derivar en una catástrofe inimaginable. El objetivo de la teoría de estabilidad, es generar conclusiones acerca del comportamiento cualitativo de trayectorias sin tener que resolver analíticamente o simular exhaustivamente para todas las posibles condiciones iniciales. Esta teoría es gracias al científico ruso A.M. Lyapunov (1982) [18].

Para mejor comprensión del problema de estabilidad, se formulan los conceptos básicos para el modelo no lineal

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.32)$$

donde  $\mathbf{x}$  es un vector de estados (de  $n$  dimensión) y  $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t)$  es un vector de  $n$  dimensión cuyos elementos son funciones de  $x_1, x_2, \dots, x_n$  y  $t$ . Se supone que  $\mathbf{x} = 0$  es un punto de equilibrio del sistema (2.32),  $\mathbf{f}(0, t) = 0^2$

---

<sup>2</sup> Generalmente, un punto  $\mathbf{x}_e \in \mathbb{R}^n$  es un punto de equilibrio del sistema si  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_e, t) = 0$ . Se puede afirmar sin pérdida de generalidad ya que se puede hacer un cambio de coordenadas tal que  $\mathbf{x}_e = 0$  (por ejemplo,  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_e$ ).

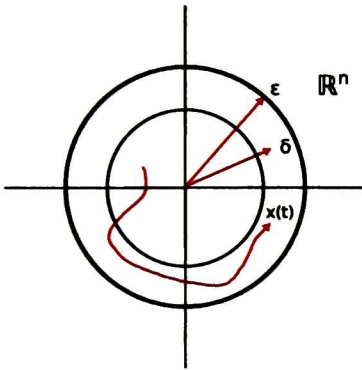


Para dar definiciones precisas sobre los conceptos de estabilidad, sea la norma euclídeana denotada por  $\|\mathbf{x}\|$  de un vector  $\mathbf{x}$ , por ejemplo  $\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}^T \mathbf{x})^{1/2} = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$ . Entonces se tienen las siguientes definiciones

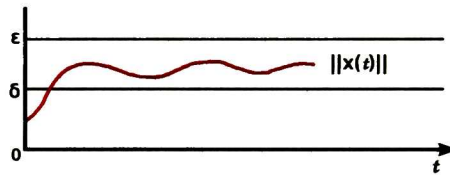
**Definición 2.1. (Equilibrio Estable)** Se dice que el sistema es estable en 0 si para cualquier trayectoria  $\mathbf{x}(t)$  y  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que  $\|\mathbf{x}(0)\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < \epsilon$  conforme  $t \rightarrow \infty$ .

**Definición 2.2. (Localmente Asintóticamente Estable)** El sistema es localmente asintóticamente estable (L.A.S.) en 0 si  $\exists \delta > 0$  tal que  $\|\mathbf{x}(0)\| < \delta \Rightarrow \mathbf{x}(t) \rightarrow 0$  conforme  $t \rightarrow \infty$ .

**Definición 2.3. (Globalmente Asintóticamente Estable)** El sistema es globalmente asintóticamente estable (G.A.S.) si para cualquier trayectoria  $\mathbf{x}(t)$ , se tiene  $\mathbf{x} \rightarrow 0$  conforme  $t \rightarrow \infty$ .



(a) Trayectoria representativa del estado de equilibrio estable.



(b) Trayectoria respecto al tiempo  $t$

Figura 2.11: Estados de equilibrio

Las Figuras 2.11a y 2.11b muestran los estados de equilibrio y una trayectoria típica correspondiente a un estado de equilibrio.

### 2.3.2. Funciones Escalares Positivas Definidas

Una función escalar  $V(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se dice positiva definida en una región  $\Omega$  (que incluye el origen del espacio de estados) si

$$\begin{aligned} V(0) &= 0 \\ V(\mathbf{x}) &> 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \{0\} \end{aligned} \tag{2.33}$$

Una función variante en el tiempo  $V(\mathbf{x}, t)$  se dice positiva definida en una región  $\Omega$  (que incluye el origen del espacio de estados) si es acotada por debajo por una función variante en el tiempo definida positiva, esto es, existe una  $V(\mathbf{x})$  definida positiva tal que

$$\begin{aligned} V(0, t) &= 0 \quad \forall t \geq 0 \\ V(\mathbf{x}, t) &> V(\mathbf{x}) \quad \forall t \geq 0 \quad \text{y} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \{0\} \end{aligned} \quad (2.34)$$

**Definición 2.4. (Funciones Escalares Positivas Semi-Definidas)** Una función escalar  $V(\mathbf{x})$  se dice ser *positiva semi-definida* si es positiva para todos los estados en la región  $\Omega$  exceptuando el origen y algunos otros estados, donde es cero.

**Definición 2.5. (Funciones Escalares Negativas Semi-Definidas)** Una función escalar  $V(\mathbf{x})$  se dice ser *negativa semi-definida* si  $-V(\mathbf{x})$  es positiva semi-definida.

**Definición 2.6. (Funciones Escalares Indefinidas)** Una función escalar  $V(\mathbf{x})$  se dice ser *indefinida* si en la región  $\Omega$  asume tanto valores como positivos y negativos.

### 2.3.3. Funciones de Lyapunov

Las funciones de Lyapunov son importantes para la teoría de estabilidad. Informalmente, pueden ser definidas como una función escalar que toma valores positivos en cualquier lado excepto en el punto de equilibrio, y decrece (o es no-creciente) a lo largo de cualquier trayectoria del sistema.

Considere entonces, el sistema no lineal (2.32), y la función escalar  $V(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Se supone que  $V(\mathbf{x})$  tiene la primera derivada parcial respecto al tiempo continua, se define  $\dot{V}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \nabla V \cdot \dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt} V(\mathbf{x}(t)). \quad (2.35)$$

La Ecuación (2.6) expresa la razón de cambio de  $V$  a lo largo de una trayectoria y puede ser evaluada. Con esto se establece la siguiente definición

**Definición 2.7. (Funcion de Lyapunov)** Si la función escalar  $V(\mathbf{x})$  es localmente definida positiva y su derivada respecto al tiempo,  $\dot{V}(\mathbf{x})$  es localmente negativa semi-definida, entonces  $V(\mathbf{x})$  es una función de Lyapunov candidata para el sistema (2.32).

Se puede tomar a  $V(\mathbf{x})$  como una función generalizada de energía, y a  $-\dot{V}(\mathbf{x})$  como la función asociada de disipación generalizada.

### 2.3.4. Estabilidad en Sentido de Lyapunov

La teoría de Lyapunov es usada para hacer conclusiones acerca de trayectorias de un sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  (por ejemplo G.A.S) sin encontrar las trayectorias (por ejemplo, resolviendo la ecuación diferencial). Es similar al método de energía usado en mecánica para investigar la estabilidad de los puntos de equilibrio.<sup>3</sup>

Para aplicar el método de Lyapunov, se usa una función candidata de Lyapunov  $V$ , la cual es similar a esa energía disipada.

Un teorema de Lyapunov típico tiene la forma

- Si existe una función  $V(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  que satisface “algunas condiciones” en  $V$  y  $\dot{V}$ .
- Entonces, las trayectorias del sistema satisfacen “algunas propiedades”

Para el caso de sistemas autónomos, el teorema de estabilidad de Lyapunov puede ser establecido de la forma

**Teorema 2.3.1. (Estabilidad de Lyapunov para Sistemas Autónomos)** Sea  $x = 0$  un punto de equilibrio de un sistema descrito de la forma

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.36}$$

donde  $f(x) : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  es localmente Lipschitz [17] y  $D \subset \mathbb{R}^n$  un dominio que contiene el origen. Sea  $V(x) : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función de Lyapunov candidata para el sistema (2.36).

#### CASO 1

Si  $\dot{V}(x)$  es negativa semi-definida, entonces  $x = 0$  es un punto de equilibrio estable.

#### CASO 2

Si  $\dot{V}(x)$  es negativa definida, entonces  $x = 0$  es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

En los dos casos, si las condiciones se mantienen para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $\|x\| \rightarrow \infty$  implica que  $V(x) \rightarrow \infty$ , entonces  $x = 0$  es globalmente estable en el CASO 1 y globalmente asintóticamente estable en el CASO 2.

*Prueba.* La prueba a este teorema puede ser encontrada en [17]. □

---

<sup>3</sup> Para que un sistema sea asintóticamente estable, se considera que esta disipando energía.

**Ejemplo (Sistema Escalar)** Considere el sistema escalar

$$\dot{x} = -x^3, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.37)$$

Se investiga entonces, la estabilidad del origen  $x = 0$  del sistema (2.37). Considere la función candidata de Lyapunov

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2 \quad (2.38)$$

y su derivada con respecto al tiempo, dada en la forma

$$V(x) = \frac{\partial V}{\partial x}(-x^3) = -x^4 \quad (2.39)$$

la cual, es negativa definida para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Entonces, por el teorema 2.3.1, el origen es globalmente asintóticamente estable.

### 2.3.5. Control por Modos Deslizantes

En esta subsección se presentan conceptos básicos, matemáticos y aspectos de diseño sobre la teoría del control por modos deslizantes. Para mayores detalles se refiere a [19], [20], [21].

El control por modos deslizantes es un controlador de estructura variable (VSC) reconocido como uno de los métodos de diseño de control con mayor eficiencia aplicable a una amplia gama de tipos de sistemas incluyendo sistemas no lineales, sistemas múltiples entradas múltiples salidas (MIMO), sistemas modelados en tiempo discreto, sistemas de larga-escala o infinitos. La investigación en esta área fue propuesta y elaborada por diferentes científicos (Emel'yanov, Taran, Utkin, etc.) de la Unión Soviética al rededor de 50 años atrás. Desde entonces, la metodología de control por modos deslizantes ha tenido mucha más atención de parte de la comunidad internacional de control.

Esencialmente, el control por modos deslizantes utiliza como retroalimentación una ley de control discontinua para forzar a los estados del sistema a alcanzar y subsecuentemente mantenerse en una superficie especificada dentro del espacio de estados (también llamada superficie deslizante o de conmutación). La dinámica del sistema cuando se encuentra en la superficie deslizante se describe como un movimiento deslizante ideal y representa el comportamiento controlado del sistema.

La ventaja principal de dicho movimiento deslizante es la baja sensibilidad a la variación de parámetros de la planta y perturbaciones que elimina la necesidad del modelado exacto

del sistema. El control por modos deslizantes permite el desacoplamiento de la dinámica del sistema en componentes parciales independientes, y como resultado, el sistema se comporta como un sistema de orden reducido con respecto al original.

### Planteamiento del Problema

Considere el siguiente sistema lineal

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (2.40)$$

donde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . El componente de la retroalimentación discontinua es dado por

$$u_i = \begin{cases} u_i^+(\mathbf{x}, t), & \text{si } \sigma_i(\mathbf{x}) > 0 \\ u_i^-(\mathbf{x}, t), & \text{si } \sigma_i(\mathbf{x}) < 0 \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.41)$$

donde  $\sigma_i(\mathbf{x}) = 0$  es la  $i$ -ésima superficie deslizantes, y

$$\sigma(\mathbf{x}) = (\sigma_1(\mathbf{x}), \sigma_2(\mathbf{x}), \dots, \sigma_m(\mathbf{x}))^T = 0 \quad (2.42)$$

es la variedad deslizante de dimensión  $n - m$ .

El problema de control consiste en desarrollar funciones continuas  $u_i^+$ ,  $u_i^-$  y la superficie deslizante  $\sigma(\mathbf{x}) = 0$  tal que el sistema en lazo cerrado de las Ecuaciones (2.40) y (2.41) exhiban un movimiento deslizante en la variedad deslizante  $\sigma(\mathbf{x}) = 0$  de dimensión  $n - m$ .

El diseño de una ley de control por modos deslizantes puede ser dividida en dos fases

1. Se construye una superficie deslizante adecuada tal que la dinámica del sistema confinado a la variedad deslizante produzca un comportamiento deseado.
2. Se diseña una ley de control discontinua tal que force a la trayectoria del sistema a llegar a la superficie deslizante y además se mantenga ahí.

La superficie deslizante  $\sigma(\mathbf{x}) = 0$  es una variedad de dimensión  $n - m$  en  $\mathbb{R}^n$  determinada por la intersección de  $m(n - 1)$ -variedad deslizante  $\sigma_i(\mathbf{x}) = 0$ . La superficie deslizante es diseñada tal que la respuesta del sistema sea restringida a  $\sigma(\mathbf{x}) = 0$  tenga un comportamiento deseado.

La superficie de la Ecuación (2.42) puede ser no lineal; en esta tesis se enfoca en la superficie deslizante lineal de la forma

$$\sigma(\mathbf{x}) = \mathbf{S}\mathbf{x}(t) = 0 \quad (2.43)$$

donde  $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

Una vez que se diseñó la superficie deslizante, el siguiente aspecto importante del control por modos deslizantes es garantizar la existencia de un modo deslizante. Un modo deslizante existe si en la vecindad de la superficie deslizante ( $\sigma(\mathbf{x}) = 0$ ) los vectores de velocidad de las trayectorias de los estados es siempre dirigida hacia la superficie deslizante. Consecuentemente si las trayectorias de los estados intersectan la superficie deslizante, el valor de las trayectorias de los estados permanece al rededor de una vecindad de  $\{\mathbf{x} | \sigma(\mathbf{x}) = 0\}$ . Si un modo deslizante existe en  $\sigma(\mathbf{x}) = 0$ , entonces  $\sigma(\mathbf{x}) = 0$  es nombrada superficie deslizante. Como se muestra en la Figura 2.12, un modo deslizante en  $\sigma(\mathbf{x}) = 0$  puede surgir aun en el caso de que el modo deslizante no exista en cada una de la superficie  $\sigma_i(\mathbf{x}) = 0$  tomadas por separado.

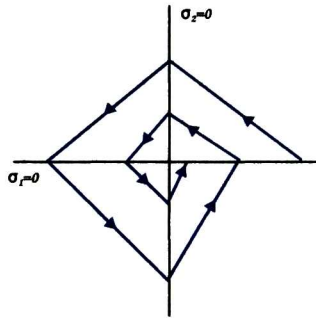


Figura 2.12: Modo deslizante en la intersección de la discontinuidad de las superficies.

Un modo deslizante ideal existe solo cuando las trayectorias de los estados  $\mathbf{x}(t)$  de la planta controlada satisface  $\sigma(\mathbf{x}(t)) = 0$  para todo  $t \geq t_0$  para algún  $t_0$ . Iniciando desde el tiempo  $t_0$ , el estado del sistema es restringido a la discontinuidad de la superficie, la cual es un conjunto invariante después de que el modo deslizante ha sido establecido.

Esto requiere de una conmutación infinitamente rápida. En sistemas reales, hay imperfecciones como retrasos, histéresis, etc. tales que obligan a la conmutación a ocurrir en frecuencia infinita. El estado del sistema oscila cercano a una vecindad de la superficie deslizante. Esta oscilación es llamada *chattering*. Si la frecuencia de oscilación es muy alta comparada con la respuesta dinámica del sistema, las imperfecciones y la conmutación con frecuencia finita son usualmente pero no siempre despreciables.

## Existencia del Modo Deslizante

La existencia de un modo deslizante requiere la estabilidad del estado de la trayectoria hacia la superficie deslizante  $\sigma(\mathbf{x}(t)) = 0$  al menos en la vecindad  $\{\mathbf{x} | \sigma(\mathbf{x}) = 0\}$ , por ejemplo el estado del sistema debe acercarse a la superficie al menos asintóticamente. Dicha vecindad es llamada dominio de atracción. Desde un punto de vista geométrico, el vector tangente o

la derivada con respecto al tiempo del vector de estados debe apuntar directo a la superficie deslizante dentro de la región de atracción como muestra la Figura 2.13.

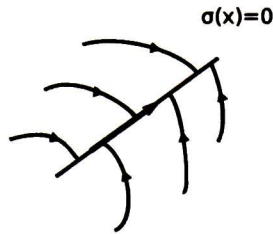


Figura 2.13: Atracción de la variedad deslizante.

La existencia del modo deslizante puede ser visto como un problema generalizado de estabilización, por eso la teoría de estabilidad de Lyapunov proporciona una herramienta importante para el análisis. Específicamente, la estabilidad de la superficie deslizante requiere de escoger una función generalizada de Lyapunov  $V(x)$  tal que sea positiva definida y tenga una derivada con respecto al tiempo negativa en la región de atracción.

Una función de Lyapunov usual es

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\sigma^2(\mathbf{x}) \quad (2.44)$$

la cual es globalmente positiva definida. En control por modos deslizantes,  $\dot{\sigma}$  dependerá del control por eso una retroalimentación conmutante con ganancias establecidas pueden ser escogidas tales que

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial t} < 0 \quad (2.45)$$

en el dominio de atracción, entonces la trayectoria del estado converge a la superficie y es restringido a la superficie para todo el tiempo subsecuente.

### Diseño de la Superficie Deslizante

El método de control equivalente puede ser usado para determinar el movimiento del sistema restringido a la superficie deslizante  $\sigma(\mathbf{x}(t)) = 0$ . La naturaleza analítica de este método lo vuelve una herramienta poderosa para propósitos de diseño y análisis. Considere el sistema de la Ecuación (2.40) y se supone que en tiempo  $t_0$ , la trayectoria del estado de la planta intercepta la superficie deslizante y un modo deslizante existe para  $t \geq t_0$ . El primer paso para diseño por medio del método de control equivalente es encontrar la entrada  $\mathbf{u}_{eq}$  tal que la trayectoria del estado se mantenga en la superficie deslizante  $\sigma(\mathbf{x}(t)) = 0$ . La existencia del modo deslizante implica que  $\sigma(\mathbf{x}(t)) = 0$ , para todo  $t \geq t_0$  y  $\dot{\sigma}(\mathbf{x}(t)) = 0$ .

Al diferenciar  $\sigma(\mathbf{x})$  con respecto al tiempo a lo largo de la trayectoria de (2.40), resulta

$$\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\mathbf{x}}\right)\dot{\mathbf{x}} = \left(\frac{\partial\sigma}{\partial\mathbf{x}}\right)(\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}_{eq}(t)) = 0 \quad (2.46)$$

donde  $\mathbf{u}_{eq}$  es llamado *control equivalente*. Note que, bajo la acción del control equivalente  $\mathbf{u}_{eq}$  cualquier trayectoria iniciada desde la superficie deslizante  $\sigma(\mathbf{x}(t)) = 0$  permanece en ella, ya que  $\dot{\sigma}(\mathbf{x}(t)) = 0$ . Como consecuencia de esto, la superficie deslizante  $\sigma(\mathbf{x}(t)) = 0$  es un conjunto invariante. Entonces, para calcular  $\mathbf{u}_{eq}$ , se supone que le producto  $\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\mathbf{x}}\right)(\mathbf{B})$  es no singular para todo  $t$  y  $\mathbf{x}$ , de esa forma

$$\mathbf{u}_{eq} = \left(\frac{\partial\sigma}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{B}\right)^{-1} \frac{\partial\sigma}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{A}\mathbf{x}(t). \quad (2.47)$$

Por lo tanto, dada  $\sigma(\mathbf{x}(t_0)) = 0$ , la dinámica del sistema en la superficie deslizante para  $t \geq t_0$ , es obtenida al sustituir (2.47) en (2.40), resultando

$$\dot{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{B}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{B}\right)^{-1} \frac{\partial\sigma}{\partial\mathbf{x}}\right)\mathbf{A}\mathbf{x}(t). \quad (2.48)$$

En el caso especial de la superficie deslizante lineal  $\sigma(\mathbf{x}) = \mathbf{S}\mathbf{x}(t)$ , la Ecuación (2.48) resulta en

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{I} - \mathbf{B}(\mathbf{S}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{S})\mathbf{A}\mathbf{x}(t). \quad (2.49)$$

Esta estructura puede ser explotada para generar un beneficio en el diseño de la superficie deslizante. La Ecuación (2.48) con la restricción  $\sigma(\mathbf{x}) = 0$  determina el comportamiento del sistema en la superficie deslizante.

## Diseño del Control

El diseño de control es el segundo paso en el procedimiento del control por modos deslizantes. Se supone que la superficie deslizante ya se diseñó. Entonces el problema se reduce a escoger las ganancias de retroalimentación de conmutación capaces de forzar a las trayectorias de los estados de la planta hacia la superficie deslizante y mantener una condición de modo deslizante. Muchos enfoques para el diseño se han propuesto, una posible estructura de control de (2.41) es

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{i_{eq}} + \mathbf{u}_{i_N} \quad (2.50)$$



donde  $u_{i_{eq}}$  es la  $i$ -ésima componente del control equivalente (que es continuo) y  $u_{i_N}$  es el término discontinuo de (2.41). Para los controladores que tienen esta estructura, resulta que

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{u}_{eq} + \mathbf{u}_N)) \\ &= \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}_{eq}) + \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{B}\mathbf{u}_N \\ &= \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{B}\mathbf{u}_N.\end{aligned}\tag{2.51}$$

Por simplicidad se asume que  $\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{x}}\right) \mathbf{B}$  es no singular y que el término discontinuo es elegido de la forma

$$\mathbf{u}_N = -\mathbf{K}_\sigma \left[ \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{B} \right]^{-1} \text{sign}(\sigma(\mathbf{x}))\tag{2.52}$$

Estas condiciones permiten una verificación sencilla de la suficiencia de las condiciones para la existencia de y alcanzabilidad del modo deslizante

$$\begin{aligned}\sigma(\mathbf{x})\dot{\sigma}(\mathbf{x}) &= \sigma(\mathbf{x}) \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{B}\mathbf{u}_N \\ &= -\mathbf{K}_\sigma \sigma(\mathbf{x}) \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{B} \left[ \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{B} \right]^{-1} \text{sign}(\sigma(\mathbf{x})) \\ &= -\mathbf{K}_\sigma \sigma(\mathbf{x}) \text{sign}(\sigma(\mathbf{x})) = -\mathbf{K}_\sigma \|\sigma(\mathbf{x})\|.\end{aligned}\tag{2.53}$$

## 2.4. Álgebra Geométrica

En 1844, el matemático alemán, Hermann Gunther Grassman (1809-1877), publicó en *Lineale Ausdehnungslehre*, la primera edición de su cálculo geométrico que ofrecía una manera original de describir operaciones geométricas. En este trabajo se presenta una extensión del álgebra Euclidiana, apareciendo el *producto exterior* como el principal producto geométrico de esta teoría. Con esta operación, el producto de vectores generaba áreas, volúmenes y objetos de altas dimensiones.

El álgebra geométrica, también conocida como *álgebra de Clifford*, por William K. Clifford (1845-1879), es una herramienta que mediante una serie de operaciones y propiedades, extiende el sistema de números reales hacia el cálculo vectorial. En la década de 1960, esta álgebra es introducida con una interpretación geométrica por David Hestenes planteando a las álgebras geométricas como una herramienta para unificar los conceptos de geometría con el álgebra y los grupos de Lie, y facilitar su uso en física e ingeniería.

Una de las principales características del álgebra de Clifford (o algebra geometrica), es que nos permite representar entidades de orden mayor con una simbología compacta, además de permitir operarlas de forma lineal. Las líneas, planos o esferas son ejemplos de entidades de orden mayor y son representadas como únicos elementos del álgebra de Clifford. En esta tesis solo se abordan los conceptos mas básicos del Álgebra Geométrica, para conocer mas acerca de las propiedades de las entidades mencionadas o las operaciones, se invita al lector a consultar [22] [23].

### 2.4.1. Álgebra Geométrica Conformal

El álgebra geométrica de un espacio 3D Euclidiano  $\mathcal{G}_3$  tiene una base en puntos, es decir trabaja con vectores que representan puntos en el espacio, el álgebra de motores  $\mathcal{G}_{3,0,1}^+$  trabaja con una base de líneas. Utilizando el plano de Minkowski [22] para generar *vectores nulos*, se expande el espacio Euclidiano  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^{n+1,1} = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{1,1}$ . Esta expansión del espacio Euclidiano resulta en el álgebra geométrica conformal  $\mathcal{G}_{n+1,1}$ . Se llama *cono nulo* al conjunto  $\mathbb{N}^{n+1}$  de todos los vectores nulos en  $\mathbb{R}^n$

Esta nueva álgebra llamada *Álgebra Geométrica Conformal*, tiene la característica de tomar a la esfera como su unidad de cálculo, lo cual permite trabajar con otras primitivas geométricas (líneas, puntos, planos, círculos, etc.) En general un punto Euclidiano  $\mathbf{x}(\mathbb{R}^n)$ , puede ser representado en  $\mathbb{R}^{n+1}$  como

$$\mathbf{x}_c = \mathbf{x} + \alpha e_0 + \beta e_\infty \quad (2.54)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son escalares,  $e_0$  y  $e_\infty$  denotan una base nula [22]. El espacio vectorial conformal derivado de  $\mathbb{R}^3$  es denotado como  $\mathbb{R}^{4,1}$ . Esta álgebra correspondiente  $\mathcal{G}_{4,1}$  contiene una base vectorial dada por  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_\infty\}$  y contiene  $2^5$  elementos. Además, el pseudo-escalar unitario esta dado por

$$\mathbf{I}_c = e_{\infty 0 1 2 3} = \mathbf{E} \mathbf{I}_E \quad (2.55)$$

donde  $\mathbf{I}_E$  es el pseudo-escalar unitario de  $\mathcal{G}_3$  representado por  $\mathbf{I}_E = e_{123}$ . A continuación se presentan las entidades o primitivas geométricas del álgebra geométrica conformal.

#### Puntos

Los *puntos* del álgebra geométrica conformal (*CGA*) se consideran elementos del cono nulo [22] y tienen las siguientes propiedades

$$\{\mathbf{x}_c \in \mathcal{G}_{n+1,1} | \mathbf{x}_c^2 = 0, \mathbf{x}_c \cdot e_\infty = -1\} \quad (2.56)$$

La Ecuación (2.54) relaciona los puntos euclidianos de  $\mathbf{R}^3$  con puntos conformales. Formalmente, el mapeo entre puntos euclidianos y puntos conformales viene dado por

$$\mathbf{x}_c = \mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^2\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0 \quad (2.57)$$

donde  $\mathbf{x}_c \in \mathcal{G}_{3+1,1}$  y  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ .

### Par de Puntos

El producto exterior de dos puntos, hace explícito la entidad llamada *par de puntos* en su forma dual, que está definida por

$$\begin{aligned} \mathbf{PP}^* &= \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \\ &= \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \wedge \mathbf{e}_0 - \frac{1}{2}[(\mathbf{b}\mathbf{a}^2 - \mathbf{a}\mathbf{b}^2) \wedge \mathbf{e}_\infty + (\mathbf{b}^2 - \mathbf{a}^2)\mathbf{E}]. \end{aligned} \quad (2.58)$$

donde  $\wedge$  es el producto exterior y se describe con detalle en [22]. El par de puntos también pueden ser obtenidos en su forma estándar por la intersección de tres esferas, la intersección de una esfera y una línea o la intersección de un plano y un círculo. La Figura 2.14 muestra la obtención del par de puntos en las formas mencionadas.

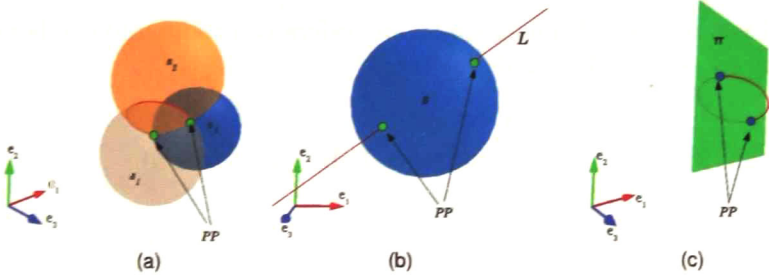


Figura 2.14: Generación del par de puntos por medio de intersecciones.

### Esferas

La ecuación de la *esfera* de radio  $\rho$  con centro en el punto  $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^n$  viene dada por

$$(\mathbf{x} - \mathbf{p})^2 = \rho^2 \quad (2.59)$$

la cual se puede expresar como una ecuación equivalente en términos de puntos conformales de la forma

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{p} = -\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{p})^2 = -\frac{1}{2}\rho^2 \quad (2.60)$$

y usando  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_\infty = -1$ , la Ecuación (2.60) se simplifica a

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x} \cdot \mathbf{p} &= (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_\infty) \frac{1}{2} \rho^2 \\
 \mathbf{x} \cdot \mathbf{p} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_\infty) \frac{1}{2} \rho^2 &= 0 \\
 \mathbf{x} \cdot (\mathbf{p} - \frac{1}{2} \rho^2 \mathbf{e}_\infty) &= 0 \\
 \mathbf{x} \cdot \mathbf{s} &= 0
 \end{aligned} \tag{2.61}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \mathbf{s} &= \mathbf{p} - \frac{1}{2} \rho^2 \mathbf{e}_\infty \\
 &= (\mathbf{p} + \frac{1}{2} \mathbf{p}^2 \mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0) - \frac{1}{2} \rho^2 \mathbf{e}_\infty \\
 &= \mathbf{p} + \frac{1}{2} (\mathbf{p}^2 - \rho^2) \mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0
 \end{aligned} \tag{2.62}$$

representa a la esfera en el *CGA*.

## Plano

Para definir el *plano* en *CGA*, imaginemos una esfera con radio infinito, la cual deriva en un plano. El plano en esta álgebra es definido por

$$\begin{aligned}
 \pi^* &= \mathbf{e}_\infty \wedge \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \\
 &= \mathbf{e}_\infty \wedge \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} + \mathbf{E}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \wedge (\mathbf{c} - \mathbf{a}) \\
 &= \mathbf{e}_\infty \mathbf{I}_{\mathbf{E}} d + \mathbf{NE}
 \end{aligned} \tag{2.63}$$

## Círculo

La representación estandar de un *círculo* puede ser obtenida mediante la intersección de un plano y una esfera, sin embargo la definición formal nos indica que un círculo es obtenido mediante la intersección de dos esferas  $s_1$  y  $s_2$  esto indica que para cada punto del círculo  $\mathbf{x} \in \mathbf{z}$ , se cumple

$$\mathbf{x} \in \mathbf{z} \iff \mathbf{x} \in \mathbf{s}_1 \text{ y } \mathbf{x} \in \mathbf{s}_2. \tag{2.64}$$

Si  $s_1$  y  $s_2$  son linealmente independientes, se puede desarrollar lo siguiente

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x} \in \mathbf{z} &\iff (\mathbf{x} \cdot \mathbf{s}_1) \mathbf{s}_2 - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{s}_2) \mathbf{s}_1 = 0 \\
 &\iff \mathbf{x} \cdot (\mathbf{s}_1 \wedge \mathbf{s}_2) = 0 \\
 &\iff \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} = 0
 \end{aligned} \tag{2.65}$$

donde  $z = s_1 \wedge s_2$  es la intersección de las esferas. Estas ecuaciones confirman que, al igual que el caso de la esfera, si el punto conformal  $x$  pertenece al círculo  $z$  se cumple

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{z} = 0 \tag{2.66}$$

### Línea

Haciendo una analogía al caso de los planos, las *líneas* se pueden definir como un círculo de radio infinito, es decir, uno de los puntos que lo definen es  $e_\infty$ . Entonces la forma dual de la línea esta dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^* &= e_\infty \wedge \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \\ &= e_\infty \wedge \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \wedge \mathbf{E} \\ &= e_\infty \mathbf{M} + \mathbf{rE} \end{aligned} \tag{2.67}$$

donde  $\mathbf{M} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$  es un bivector representando el momento[22]. En resumen, en la Tabla 2.2 de la representación de las entidades y sus duales en conformal.

Entidad	Representación	Grado	Representación Dual	Grado
Esfera	$s = \mathbf{p} + \frac{1}{2}(\mathbf{p}^2 - \rho^2)\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0$	1	$s^* = a \wedge b \wedge c \wedge d$	4
Punto	$x = \mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^2\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0$	1	$x^* = (-\mathbf{E}x - \frac{1}{2}\mathbf{x}^2\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0)\mathbf{I}_E$	4
Plano	$\pi = \mathbf{N}\mathbf{I}_E - d\mathbf{e}_\infty$ $\mathbf{N} = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{a} - \mathbf{c})$ $d = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c})\mathbf{I}_E$	1	$\pi^* = \mathbf{e}_\infty \wedge a \wedge b \wedge c$	4
Línea	$L = P_1 \wedge P_2$ $= \mathbf{r}\mathbf{I}_E + \mathbf{e}_\infty\mathbf{M}\mathbf{I}_E$ $\mathbf{r} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ $\mathbf{M} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$	2	$L^* = \mathbf{e}_\infty \wedge a \wedge b$	3
Círculo	$z = s_1 \wedge s_1$ $s_z = (\mathbf{e}_\infty \cdot z)\mathbf{z}$ $\rho_z = \frac{z^2}{(\mathbf{e}_\infty \wedge z)^2}$	2	$z^* = a \wedge b \wedge c$	3
Par de Puntos	$PP = s_1 \wedge s_2 \wedge s_3$	3	$PP^* = a \wedge b, X^* = \mathbf{e}_\infty \wedge x$	2

Tabla 2.2: Representación de las entidades y sus duales en conformal

### 2.4.2. Transformaciones Conformales

Se llama transformación conformal de figuras geométricas, a aquella que preserva su forma, es decir, la transformación no afecta los ángulos de la figura y por ende preserva líneas

rectas y círculos. Cualquier transformación conformal en  $\mathbb{R}^n$  puede ser expresada como una composición de *inversiones* en esferas y *reflexiones* en hiperplanos. En general una transformación conformal se define como

$$g(\mathbf{x}) = G\mathbf{x}\widehat{G}^{-1} = \sigma\mathbf{x}' \quad (2.68)$$

donde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1,1}$ ,  $G$  es un versor y  $\sigma$  es un escalar. El factor escalar es aplicado para preservar y asegurar la restricción  $\mathbf{x}' \cdot \mathbf{e}_\infty = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_\infty = -1$ .

En la tabla 2.3 se presentan las transformaciones conformales y sus versores representados usados en esta tesis. Para mayor detalle, refiérase a [22] [23].

Tipo	$g(\mathbf{x})$ en $\mathbb{R}^n$	Versor en $\mathcal{G}_{n+1,1}$	$\sigma(x)$
Inversión	$\frac{\rho^2}{\mathbf{x}-\mathbf{p}} + \mathbf{p}$	$s = \mathbf{p} - \frac{1}{2}\rho^2\mathbf{e}_\infty$	$\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{p}}{\rho}\right)^2$
Reflexión	$-\mathbf{n}\mathbf{x}\mathbf{n} + 2\mathbf{x}\delta$	$P = \mathbf{n} + \delta\mathbf{e}_\infty$	1
Traslación	$\mathbf{x} - \mathbf{t}$	$\mathbf{T} = 1 + \frac{1}{2}\mathbf{t}\mathbf{e}_\infty$	1
Rotación	$R_\theta\mathbf{x}\widetilde{R}_\theta$	$R_\theta = \exp\left(-\frac{\theta}{2}l\right)$	1

Tabla 2.3: Transformaciones conformales y sus versores representados

## Capítulo 3

# Fundamentos Teóricos

El sistema de locomoción humana es el modelo arquetípico para el arreglo cinemático de muchos robots bípedos. El objetivo a alcanzar, es avanzar de manera sencilla y fluida como el caminado humano. Sin embargo, aunque natural y al parecer no muy limitado, el caminado humano demanda muchos grados de libertad complementarios en el cuerpo entero. La descripción del modelo presentado, es basada en la cinemática de las piernas y se replican los grados de libertad básicos para lograr un caminado parecido al caminado humano [8].

Caminar se define como avanzar a un ritmo moderado levantando y bajando cada pie en turno, de tal modo que un pie esta en el suelo mientras el otro esta siendo levantado [24]. Existen entonces dos tipos de caminados, llamados, caminado estático y caminado dinámico, en el caminado estático, la proyección del centro de masa nunca deja el polígono de soporte durante el caminado mientras que en el caminado dinámico, existen momentos en que dicha proyección deja el polígono de soporte. El caminado estático no es interesante desde el punto de vista de control puesto que es bastante fácil además de que los pies de los humanos son muy pequeños para poder hacer un caminado estático. Es por esto que en este capítulo se propone un procedimiento para realizar caminado dinámico en un robot humanoide.

La Figura 3.1 muestra la estructura del control para el caminado bípedo presentado en esta tesis. Primero se usa un generador de patrón de caminado que en situaciones ideales, el caminado bípedo puede ser realizado con sólo dar estos patrones al robot, pero para este propósito se debe obtener un modelo exacto del robot que se mueva exactamente como se desea con un piso perfectamente horizontal. En situaciones de la vida real, un robot humanoide puede caerse fácilmente por desniveles en el piso de tan solo milímetros o dinámicas no consideradas del mismo robot. Para contener esto, una acción de control que modifique el patrón de caminado basada en sensores de fuerza, giroscopios, acelerómetros y otros dispositivos es necesaria, dicha acción de control es propuesta usando técnicas de modos deslizantes para obtener robustez ante variaciones paramétricas y convergencia en tiempo finito.

En la Sección 3.1 se presenta la propuesta para obtención de patrones de caminado,

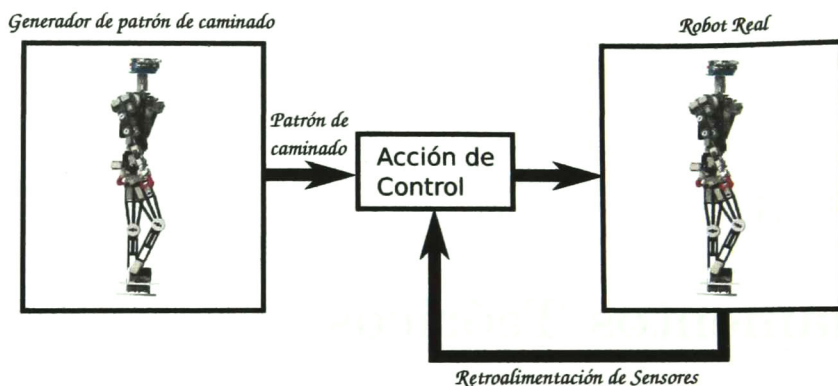


Figura 3.1: Estructura de control básica.

en la Sección 3.2 se desarrolla la acción de control y se demuestra matemáticamente su funcionalidad, finalmente se explican dos métodos para la obtención de la cinemática inversa en la Sección 3.3.

### 3.1. Generación del Patrón de Caminado

Para situaciones de caminado bípedo estático prácticas, como subir escaleras o evadir un obstáculo, es mejor si se especifica directamente la posición de los pies del humanoide. La Figura 3.2 ilustra un ejemplo simple donde se especifica la posición de los pies, que pueden ser generadas arbitrariamente o con un algoritmo para evasión de obstáculos, considerando las constantes físicas del robot como la separación entre los pies o la cantidad del largo de un paso. En cualquier caso, se considera que se conoce el ancho y largo del pie del robot, formando con esto un envolvente convexo. Ahí se coloca el punto deseado del *ZMP* de tal manera que el robot sea estable.



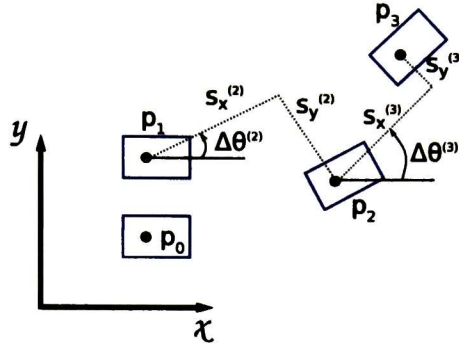


Figura 3.2: Estructura de una pierna de 6 grados de libertad.

Como se muestra en la Figura 3.2, estos puntos pueden ser representados con respecto a un marco de referencia global, en términos de las coordenadas  $x$  y  $y$ , y el cambio de dirección del caminado  $\Delta\theta$  de la forma

$$\begin{bmatrix} p_x^{(n)} \\ p_y^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x^{(n-1)} \\ p_y^{(n-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \Delta\theta^{(n)} & -\sin \Delta\theta^{(n)} \\ \sin \Delta\theta^{(n)} & \cos \Delta\theta^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x^{(n)} \\ -(-1)^n s_y^{(n)} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

donde  $s_x$  es el largo del paso a lo largo de la dirección caminado,  $s_y$  el ancho de paso para la dirección lateral y  $n$  indica el enésimo paso que es representado en referencia al marco de coordenadas globales como  $p_x$  y  $p_y$ .

Conociendo estos valores y por simplicidad, se tiene un robot caminando en una superficie plana y solo se considera el movimiento de un robot humanoide en el plano sagital,  $(x - y)$ , pero el movimiento en el plano frontal,  $(y - z)$  se trata de la misma manera. Con la Ecuación (3.1) se forma una trayectoria para el ZMP dada por una función *spline* monótona [25]. Sea entonces  $p_{zmp}^{(j)} = [x_{zmp}^{(j)} \ y_{zmp}^{(j)} \ z_{zmp}^{(j)}]^T$  la trayectoria del ZMP que pertenece al  $j$ -th segmento de tiempo. Entonces, la trayectoria del ZMP en el plano sagital se expresa como

$$x_{zmp}^{(j)} = \sum_{i=0}^{\eta} a_i^{(j)} (t - t_{j-1})^i, \quad t_{j-1} \leq t \leq t_j, \quad j = 1, \dots, m \quad (3.2)$$

donde  $a_i^{(j)}$  ( $i = 0, \dots, \eta, j = 1, \dots, m$ ) son coeficientes escalares. Un ejemplo de la trayectoria del ZMP se muestra en la Figura 3.3, el robot empieza a caminar en tiempo  $t = t_0$ . Después de terminar el paso en tiempo  $t = t_1$ , el robot se para en dos piernas hasta el tiempo  $t = t_2$ . Seguido, el robot comienza otro paso en tiempo  $t = t_2$ . Se puede observar, que el ZMP en tiempo  $t = t_0$  es igual a  $p_x^{(0)}$  hasta el tiempo  $t = t_1$ . Del tiempo  $t = t_1$  a  $t = t_2$  pasa de  $p_x^{(0)}$  a  $p_x^{(1)}$

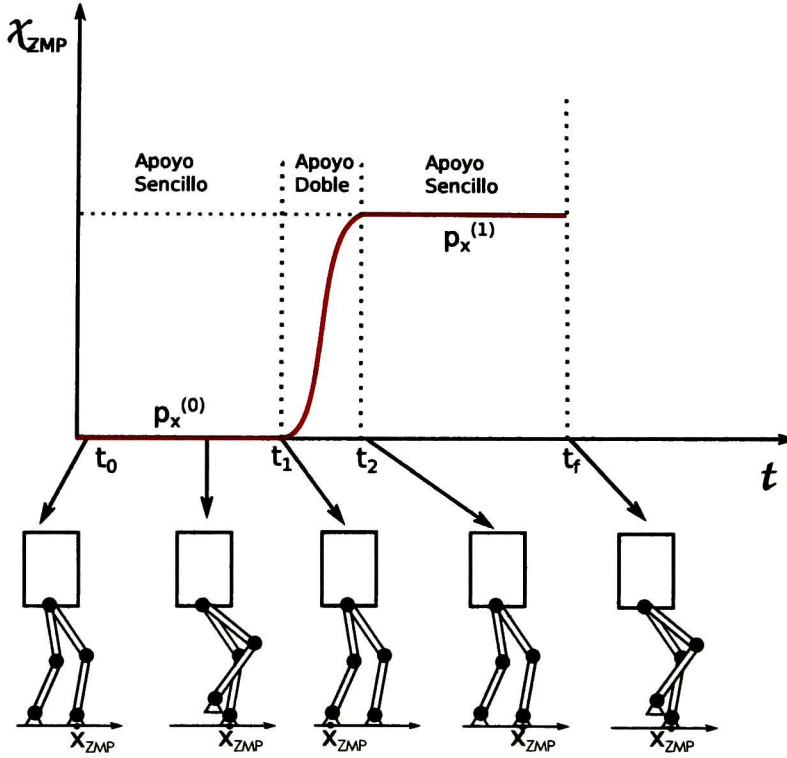


Figura 3.3: Trayectoria en el tiempo del ZMP

Sea  $p_{com}^{(j)} = [x_{com}^{(j)} \quad y_{com}^{(j)} \quad z_{com}^{(j)}]^T$  la trayectoria del centro de masa (COM) correspondiente a la trayectoria del ZMP perteneciente al  $j$ -ésimo segmento de tiempo. Como ya se vió en la sección 2 la relación entre el ZMP y el COM en el plano sagital es expresada por la siguiente ecuación diferencial ordinaria,

$$x_{zmp}^{(j)} = x_{com}^{(j)} - \frac{z_{com}^{(j)} - z_{zmp}^{(j)}}{g} \ddot{x}_{com}^{(j)}. \quad (3.3)$$

Sustituyendo Ecuaciones (3.2) y (3.3), y resolviendo con respecto a  $x_{com}^{(j)}$ , se obtiene la solución analítica [26] de la posición del centro de masa en el plano sagital de la forma

$$x_{com}^{(j)} = V^{(j)} \cosh(T_c(t - t_{j-1})) + W^{(j)} \sinh(T_c(t - t_{j-1})) + \sum_{i=0}^{\eta} A_i^{(j)} (t - t_{j-1})^i \quad j = 1, \dots, m. \quad (3.4)$$

donde

$$\begin{aligned} a_i^{(j)} &= A_i^{(j)} - \frac{1}{T_c^2}(i+1)(i+2)A_{i+2}, & i=0, \dots, \eta-2 \\ a_i^{(j)} &= A_i^{(j)}, & i=\eta-1, \eta \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde  $T_c = \sqrt{g/(z_{com} - z_{zmp})}$ , y  $V^{(j)}$  y  $W^{(j)}$  ( $j = 1, \dots, m$ ) denotan coeficientes escalares.

La Ecuación (3.3) incluye sinh y cosh en su parte homogénea. Para prevenir que la solución de la Ecuación (3.3) diverja con el paso del tiempo,  $V^{(j)}$  y  $W^{(j)}$  ( $j = 1, \dots, m$ ) deben ser determinados usando el problema de valores en la frontera de dos puntos, donde, tanto como la posición inicial y final del centro de masa son especificados. Por otra parte, como la velocidad inicial del centro de masa no puede ser especificada, es difícil asegurar la continuidad entre dos trayectorias del centro de masa. Para planear la trayectoria en tiempo real, las nuevas trayectorias calculadas del centro de masa son conectadas a las actuales.

Existen  $2m$  incógnitas en la Ecuación (3.3). Para determinar estas incógnitas, se proponen las siguientes  $2m$  condiciones de frontera; condición inicial (posición del centro de masa)

$$x_{com}^{(1)} = V^{(1)} + A_0^{(1)} \quad (3.6)$$

Conexión de dos segmentos (posición/velocidad del centro de masa) ( $j = 1, \dots, m-1$ )

$$\begin{aligned} V^{(j)} \cosh(T_c(t_j - t_{j-1})) + W^{(j)} \sinh(T_c(t_j - t_{j-1})) + \sum_{i=0}^{\eta} A_i^{(j)}(t_j - t_{j-1})^i \\ = V^{(j+1)} + A_0^{(j+1)} \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} V^{(j)} T_c \sinh(T_c(t_j - t_{j-1})) + W^{(j)} T_c \cosh(T_c(t_j - t_{j-1})) + \sum_{i=0}^{\eta} i A_i^{(j)}(t_j - t_{j-1})^{i-1} \\ = W^{(j+1)} T_c + A_1^{(j+1)} \end{aligned} \quad (3.8)$$

La condición terminal (posición del centro de masa)

$$\begin{aligned} x_{com}^{(m)}(t_f) = V^{(m)} \cosh(T_c(t_f - t_{m-1})) \\ + W^{(m)} \sinh(T_c(t_f - t_{m-1})) + \sum_{i=0}^{\eta} A_i^{(m)}(t_f - t_{m-1})^i \end{aligned} \quad (3.9)$$

Haciendo uso de las Ecuaciones (3.6), (3.7), (3.8) y (3.9),  $2m$  incógnitas  $V^{(j)}$ ,  $W^{(j)}$  ( $j = 1, \dots, m$ ) pueden ser determinadas de la forma

$$y = Z^{-1}w, \quad (3.10)$$

donde

$$y = [V^{(1)} \quad W^{(1)} \quad \dots \quad V^{(m)} \quad V^{(m)}]^T \quad (3.11)$$

$$Z = \begin{bmatrix} z_0 & 0 & \dots & 0 \\ Z_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ \vdots & & Z_j & \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & Z_{m-1} \\ 0 & \dots & 0 & z_{m-1} \end{bmatrix}$$

$$z_0 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$Z_j = \begin{bmatrix} \cosh(T_c(t_j - t_{j-1})) & \sinh(T_c(t_j - t_{j-1})) & -1 & 0 \\ T_c \sinh(T_c(t_j - t_{j-1})) & T_c \cosh(T_c(t_j - t_{j-1})) & 0 & -T_c \end{bmatrix}$$

$$z_{m-1} = [0 \quad 0 \quad \cosh(T_c(t_f - t_{m-1})) \quad \sinh(T_c(t_f - t_{m-1}))],$$

$$w = \left[ \begin{aligned} & x_{com}^{(1)}(t_0) - A_0^{(1)} \dots A_0^{(j+1)} - \sum_{i=0}^{\eta} A_i(t_j - t_{j-1})^i A_1^{(j+1)} \\ & - \sum_{i=0}^{\eta} i A_i(t_j - t_{j-1})^{i-1} \dots x_{com}^{(m)}(t_f) - \sum_{i=0}^{\eta} A_i^{(m)}(t_f - t_{m-1})^i \end{aligned} \right]^T$$

Podemos confirmar que la matriz  $Z$  es invertible al observar la posición de  $Z_j$  ( $j = 1, \dots, m-1$ ) incluida en  $Z$  y de rango  $Z_j = 2$  ( $j = 1, \dots, m-1$ ). Sustituyendo  $V^{(j)}$  y  $W^{(j)}$  ( $j = 1, \dots, m$ ) obtenidas por la Ecuación (3.10) en (3.4), se obtiene la trayectoria del centro de masa para una trayectoria dada del  $ZMP$ , que satisface las condiciones iniciales y finales para la posición del centro de masa ( $COM$ ).

## 3.2. Ley de Control

En la sección 3.1 se explica el método propuesto para generar trayectorias para el centro de masa de un robot humanoide de tal forma que siga una secuencia de pasos generada, basado en el criterio de estabilidad para el punto de momento cero; pero como ya se explicó en la Sección 2, la dinámica del humanoide se simplifica a una ecuación que relaciona el punto de momento cero con el centro de masa sin considerar diferentes dinámicas. Es por esto que en situaciones prácticas, el robot humanoide no siempre podrá seguir la referencia dada para el centro de masa, haciendo que la referencia del punto de momento cero (*ZMP*) no se siga y que el criterio de estabilidad usado se vea comprometido, derivando en caminado inestable del robot humanoide.

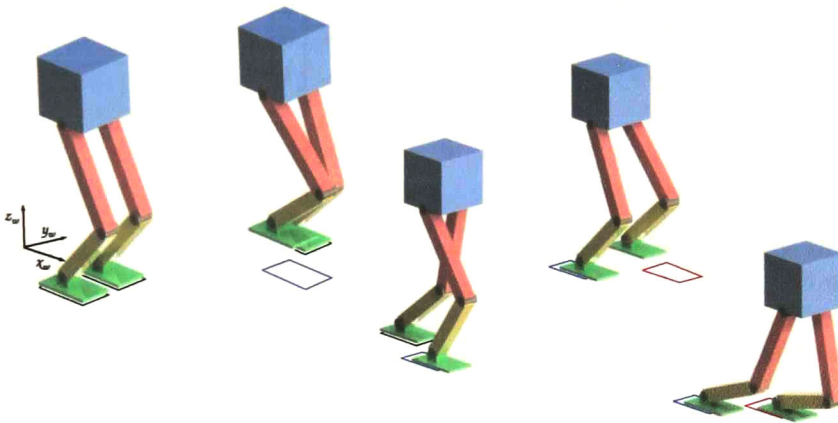


Figura 3.4: Definición de la posición de los pasos.

La Figura 3.4 muestra un ejemplo, donde el robot humanoide no coloca los pies en la posición deseada por diferentes situaciones no consideradas en el modelado de la dinámica; como la fricción entre la suela del humanoide y el piso o el par de los actuadores, haciendo que no siga la trayectoria deseada para el *ZMP*, que fue creada basado en el criterio de estabilidad; como la trayectoria del centro de masa fue creada en base a la trayectoria del *ZMP* con referencia al marco de coordenadas global  $x_w, y_w, z_w$ ; el robot humanoide pierde estabilidad, ya que el centro de masa queda adelantado.

Basado en la Ecuación (3.3) del punto de momento cero *ZMP* y considerando que el robot humanoide se mueve sobre una superficie plana y que su centro de masa se mueve sobre un plano horizontal paralelo al piso, se puede representar esta ecuación de la forma

$$x_{zmp} = x_{com} - \left( \frac{z_c}{g} \right) \ddot{x}_{com} \quad (3.12)$$

donde  $z_{zmp} = 0$  y  $z_{com} = z_c$  y  $z_c$  denota la altura constante del piso al centro de masa del robot.

Se define entonces la acción de control para corregir la trayectoria del punto de momento cero (*ZMP*) como la derivada de la aceleración horizontal del centro de masa [27]

$$\frac{d}{dt} \ddot{x} = u \quad (3.13)$$

considerando que al menos se tiene la medición del (*ZMP*) y combinando las Ecuaciones (3.12) y (3.13) el siguiente estado de espacios, continuo, lineal e invariante en el tiempo se puede escribir de la siguiente manera,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (3.14)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

donde  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  son la posición, velocidad y aceleración del centro de masa respectivamente.  $y$  es la posición del (*ZMP*) y  $k = \frac{z_c}{g}$ .

Haciendo un análisis general de la Ecuación (3.14), se demuestra que el sistema es completamente controlable por medio de la matriz de controlabilidad

$$\mathfrak{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

ya que la Ecuación (3.15) es de rango pleno. Es decir, podemos llevar los estados de una posición inicial  $x(t_0)$  a una posición final  $x(t_1)$  al tiempo  $t_1$  por medio de una entrada  $u(t)$ .

Ademas, se puede descomponer la Ecuación (3.12) de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= kx_1 + kp_{zmp} \end{aligned} \quad (3.16)$$

donde  $x_1 = x_{com}$ . De la Ecuación (3.16) se obtienen los puntos de equilibrio,  $x_1 = -p_{zmp}$  y  $x_2 = 0$ . Sin pérdida de generalidad, se puede considerar  $p_{zmp} = 0$  ya que se puede hacer una transformación de coordenadas con respecto al marco de referencia global. Según el retrato de fases de la Ecuación (3.12) mostrado en la Figura 3.5, se concluye que el único punto de equilibrio es inestable.

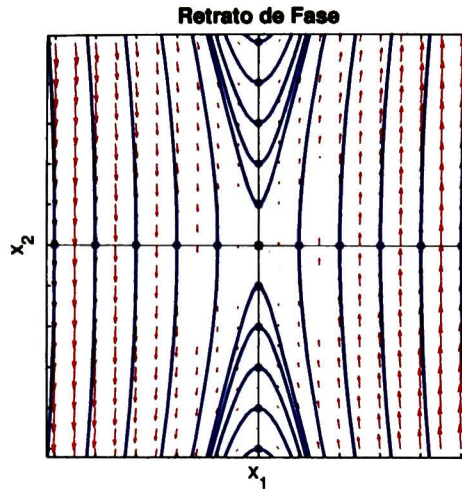


Figura 3.5: Retrato de fases.

Por otra parte, el sistema descrito en la Ecuación (3.14) tiene grado relativo uno, ya que la acción de control esta presente en la primera derivada de la salida  $y(t)$  y además es de fase no mínima. Esta afirmación se verifica haciendo uso de la siguiente transformación no singular

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 - kx_3 \\ z_2 &= x_2 \\ z_3 &= x_1 \end{aligned} \quad (3.17)$$

la cual reduce la Ecuación (3.14) en la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 - ku \\ \dot{z}_2 &= (z_3 - z_1)^{\frac{1}{k}} \\ \dot{z}_3 &= z_2. \end{aligned} \quad (3.18)$$

En la superficie  $z_1(t) = y(t) = 0$  para todo  $t$ , el sistema (3.18) es gobernado por su dinámica cero

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= \frac{1}{k} z_3 \\ \dot{z}_3 &= z_2. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Es de notable atención, que el subsistema (3.19) es inestable. Este análisis será tomado en cuenta, considerando el problema de diseñar una ley de control tal que la salida  $y(t)$

del sistema (3.14) siga una referencia dada, proporcionada por la trayectoria del *ZMP*. Esta trayectoria es definida como una función continua en el tiempo, considerando los pasos del robot y los tiempos entre apoyo sencillo y doble, formada como se explica en la sección 3.1.

### 3.2.1. Control para una Referencia Constante

El sistema (3.14) es inestable y además de fase no mínima, entonces, se propone una acción de control para la estabilización del sistema, es decir, hacer que la posición, velocidad y aceleración del centro de masa tiendan asintóticamente al punto de equilibrio, que la velocidad y aceleración sean cero, mientras que la posición sea  $p_x$ ; se escoge  $p_x$  de tal manera que cumpla el criterio de estabilidad, es decir, que el *ZMP* este siempre dentro del polígono de soporte. Sin pérdida de generalidad, se elige  $p_x = 0$ , que el robot humanoide se encuentra en doble apoyo y el origen para las coordenadas del marco de referencia global coinciden con  $p_x$ . Se aplica entonces la transformación no singular de la Ecuación (3.17) al sistema (3.14), lo que resulta en el sistema transformado de la Ecuación (3.18) y se analiza el subsistema,

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= \frac{1}{k}(z_3 - z_1) \\ \dot{z}_3 &= z_2. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Como el sistema es de fase no mínima, se debe estabilizar su dinámica cero; se propone entonces,

$$z_{1_{des}} = -k_2 z_2 - k_3 z_3. \quad (3.21)$$

Y además,

$$\sigma = z_1 - z_{1_{des}}. \quad (3.22)$$

Se supone que existe una manera de hacer que  $\sigma = 0$  y que  $z_1 = z_{1_{des}}$ , sustituyendo la Ecuación (3.21) en (3.20) resulta el siguiente subsistema

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= \frac{k_3+1}{k} z_3 + \frac{k_2}{k} z_2 \\ \dot{z}_3 &= z_2. \end{aligned} \quad (3.23)$$

De esta manera, se pueden modificar las constantes  $k_2$  y  $k_3$  de tal manera que el subsistema (3.23) tienda asintóticamente a cero, el cual puede ser escrito de la forma

$$\dot{z}_{23} = A_z z_{23} \quad (3.24)$$

donde

$$A_z = \begin{bmatrix} \frac{k_2}{k} & \frac{k_3+1}{k} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad z_{23} = \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$



Se afirma entonces que el subsistema de la Ecuación (3.23) es internamente estable si y solo si la parte real de los valores propios de la matriz  $A_z$  es negativa, esto es,  $\Re\{\lambda_i(A_z)\} < 0$  [28]. Y según el polinomio característico del sistema (3.23)

$$s^2 - \frac{k_2}{k}s - \frac{k_3 + 1}{k} = 0. \quad (3.26)$$

Se cumple el criterio de estabilidad [29] para  $k_2 < 0$  y  $k_3 < -1$ , ya que la constante  $k$  siempre es positiva. Imponiendo estas condiciones, la dinámica cero se estabiliza, ya que los estados  $z_2$  y  $z_3$  tienden asintóticamente a cero, pero para que se cumpla esto, como ya se mencionó antes, se debe asegurar que  $\sigma = 0$  de la Ecuación (3.22), para demostrar esto, se elige la siguiente función de Lyapunov

$$V(\sigma) = \frac{1}{2}\sigma^2 \quad (3.27)$$

que es definida positiva, y su derivada con respecto al tiempo

$$\begin{aligned} \dot{V}(\sigma) &= \sigma\dot{\sigma} \\ &= \sigma(\dot{z}_1 - \dot{z}_{1des}) \\ &= \sigma(\dot{z}_1 + k_2\dot{z}_2 + k_3\dot{z}_3) \\ &= \sigma(z_2 - ku + \frac{k_2}{k}(z_3 - z_1) + k_3z_2). \end{aligned} \quad (3.28)$$

se elige entonces la acción de control  $u$  de tal manera que  $\dot{V}(\sigma)$  sea definida negativa,

$$u = \frac{1}{k} \left( (1 + k_3)z_2 + k_2 \left( \frac{z_3 - z_1}{k} \right) + \gamma \text{sign}(\sigma) \right) \quad (3.29)$$

donde  $\gamma > 0$  se logra que  $\sigma$  tienda asintóticamente a cero y con esto  $z_1$  también lo haga.

### 3.2.2. Control para Seguimiento de una Trayectoria

El diseño de una ley de control para el propósito de imponer una respuesta prescrita al estado estable del sistema de la ecuación 3.14 incluye tener la salida  $y(\cdot)$  de la planta controlada siguiendo asintóticamente cualquier salida de referencia prescrita  $y_{ref}(\cdot)$ . Esto significa el imponer que el error de seguimiento, definido como la diferencia entre la salida de referencia y la salida actual, sea una función del tiempo que converge a cero mientras el tiempo tiende al infinito. Hay muchas maneras de resolver este problema, por ejemplo, usando la técnica de regulación de la salida [30], sin embargo, esta técnica es desarrollada para el caso donde la trayectoria de referencia es generada por un exosistema. En esta tesis, la función de referencia para un robot humanoide, es una función arbitraria del tiempo, y no hay ningún

exosistema. Por esa razón, primero se debe formar un sistema dinámico (exosistema) que genera el estado estable para las variables de la planta, y el control por modos deslizantes es usado para evitar el calculo del valor de estado estable para la entrada de control y lograr robustez respecto a incertidumbres de la planta.

Por las propiedades del sistema de la ecuación 3.14 descritas anteriormente, algunas funciones de referencia deben ser obtenidas ademas de la referencia para la salida  $y_{ref}(\cdot)$ , para lograr esto, se considera que

$$y_{ref}^{(j)} = x_{zmp}^{(j)} = \sum_{i=0}^{\eta} a_i^{(j)}(t - t_{j-1})^i, \quad t_{j-1} \leq t \leq t_j, \quad j = 1, \dots, m \quad (3.30)$$

en la misma forma que la ecuación 3.2. Siguiendo la teoría de regulación, teniendo la trayectoria de referencia para la salida 3.30, se necesita definir el estado estable  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  y  $\pi_3$  para las variables de estado  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$ , respectivamente para el sistema de la ecuación 3.14. El estado estable  $\pi_1$  se define de la misma manera que la solución analítica de la ecuación 3.4. Entonces, el sistema de referencia se define de la forma

$$\begin{aligned} \dot{\pi}_1^{(j)} &= \pi_2^{(j)} \\ \dot{\pi}_2^{(j)} &= \pi_3^{(j)} \\ \dot{\pi}_3^{(j)} &= \zeta(t)^{(j)} \end{aligned} \quad (3.31)$$

donde  $\zeta(t)^{(j)}$  es tratada como una función del tiempo desconocida. Ahora, usando Ecuaciones (3.30), (3.4) y (3.31) resulta en

$$y_{ref} = \pi_1 + k\pi_3. \quad (3.32)$$

Entonces,  $\pi_1(t)$  es la trayectoria de referencia para el estado  $x_1$ , y  $\pi_2(t)$  para el estado  $x_2$  en el sistema de la Ecuación (3.14); ambos son generados por la Ecuación (3.31).

Una vez que las funciones de referencia son establecidas, las siguientes funciones de error son definidas

$$\begin{aligned} e_1 &= x_1 - \pi_1 \\ e_2 &= x_2 - \pi_2 \\ e_3 &= y - y_{ref}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Después, calculando la derivada con respecto al tiempo de la Ecuación (3.33) y usando las Ecuaciones (3.14), (3.31) y (3.32), el sistema dinámico del error es obtenido de la forma

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= \frac{1}{k}(e_1 - e_3) \\ \dot{e}_3 &= e_2 - k(u - \zeta(t)). \end{aligned} \quad (3.34)$$

En aras de simplicidad, introduciendo las nuevas variables  $\varepsilon_1 = e_1$ ,  $\varepsilon_2 = e_2$  y  $\varepsilon_3 = \dot{e}_2$  la Ecuación (3.34) es reducida a la siguiente forma canónica

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_1 &= \varepsilon_2. \\ \dot{\varepsilon}_2 &= \varepsilon_3. \\ \dot{\varepsilon}_3 &= u - \zeta(t).\end{aligned}\tag{3.35}$$

Para diseñar un control por modos deslizantes que estabilice el sistema (3.35) una función deslizante ( $\sigma$ ) es diseñada de la forma

$$\sigma = k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2 + \varepsilon_3\tag{3.36}$$

donde  $k_1$  y  $k_2$  son parámetros constantes de control.

Además, usando las Ecuaciones (3.35) y (3.36) el movimiento de proyección en el subespacio de  $\sigma$  es obtenido de la forma

$$\dot{\sigma} = k_1\varepsilon_2 + k_2\varepsilon_3 + u - \zeta(t).\tag{3.37}$$

La función deslizante se debe llevar a cero, para diseñar la ley de control se elige una función de Lyapunov de la forma

$$V(\sigma) = 2\sqrt{\frac{1}{2}\dot{\sigma}^2 + \lambda_2|\sigma|}\tag{3.38}$$

donde  $\lambda_2 > 0$ ; la cual es definida positiva, y su derivada en el tiempo

$$\dot{V}(\sigma) = \frac{\dot{\sigma}\ddot{\sigma} + \lambda_2\dot{\sigma}\dot{\sigma}}{\sqrt{\frac{1}{2}\dot{\sigma}^2 + \lambda_2|\sigma|}}.\tag{3.39}$$

Se elige entonces el algoritmo *Super-Twisting* [31] como acción de control, descrito de la forma

$$\begin{aligned}u &= \lambda_1|\sigma|^{\frac{1}{2}}\text{sign}(\sigma) + w \\ \dot{w} &= \lambda_2\text{sign}(\sigma)\end{aligned}\tag{3.40}$$

donde  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , son constantes definidas positivas. Usando la Ecuación (3.40), la segunda derivada con respecto al tiempo de la función deslizante ( $\sigma$ ) esta dada de la forma

$$\ddot{\sigma} = -\lambda_1\frac{\dot{\sigma}}{2\sqrt{|\sigma|}} - \lambda_2\text{sign}(\sigma) + \Phi\tag{3.41}$$

donde  $\Phi$  es una función de los estados  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  y la perturbación  $\zeta(t)$ . Además se supone que

$$|\Phi| \leq \varphi_0. \quad (3.42)$$

Sustituyendo las Ecuaciones (3.36), (3.37) y (3.41) en (3.39), la derivada con respecto al tiempo de la función de Lyapunov propuesta resulta de la forma

$$\dot{V}(\sigma) = \frac{-\lambda_1 \frac{\dot{\sigma}^2}{2|\sigma|} + \frac{\dot{\sigma}}{\sqrt{|\sigma|}} \dot{\Phi}}{\sqrt{\frac{\dot{\sigma}^2}{2|\sigma|} + \lambda_2}}. \quad (3.43)$$

Si  $\frac{\dot{\sigma}^2}{|\sigma|} > \varepsilon^2$ , donde  $\varepsilon$  es una constante mayor a cero y además

$$\varphi_0 < \frac{1}{2} \lambda_1 \varepsilon \gamma \quad (3.44)$$

donde  $\gamma$  es una constante menor a uno, entonces la función de Lyapunov decae a ritmo finito [19] mas allá del dominio  $D$  en el plano  $(\sigma, \dot{\sigma})$  con límites  $\dot{\sigma} - \varepsilon\sqrt{\sigma} = 0$ ,  $\dot{\sigma} + \varepsilon\sqrt{\sigma} = 0$

$$\dot{V}(\sigma) \leq -\frac{1}{2} \lambda_1 (1 - \gamma) \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\frac{1}{2} \varepsilon^2 + \lambda_2}} < 0. \quad (3.45)$$

Aun mas, el sistema de lazo cerrado de las Ecuaciones (3.37) y (3.40) se vuelve

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= k_1 \varepsilon_2 + k_2 \varepsilon_3 + \lambda_1 |\sigma|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\sigma) + w - \zeta(t) \\ \dot{w} &= \lambda_2 \text{sign}(\sigma). \end{aligned} \quad (3.46)$$

Suponiendo que las condiciones de las Ecuaciones (3.42) y (3.44) se mantienen, entonces se alcanza la convergencia en tiempo finito de la variable de control  $w$  a  $k_1 \varepsilon_2 + k_2 \varepsilon_3 - \zeta(t)$ , resultando en

$$\dot{\sigma} = -\lambda_1 |\sigma|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\sigma). \quad (3.47)$$

La solución de la Ecuación (3.47) para la variable deslizante  $\sigma(t)$  tiende a cero en tiempo finito  $t_r$  definido por [20]

$$t_r \leq \frac{2}{\lambda_1} |\sigma_0|^{\frac{1}{2}}. \quad (3.48)$$

El algoritmo (3.40) es un control por modos deslizantes de segundo orden, se puede usar porque el sistema (3.35) tiene grado relativo uno. Este control permite tomar en consideración

perturbaciones del sistema de la Ecuación (3.14), que satisfaga la condición de *matching*. Estas perturbaciones representan incertidumbres resultantes por la diferencia entre el modelado (3.14) y la dinámica precisa del robot humanoide. Esto permite que la constante  $z_c$  sea un parámetro desconocido ya que puede ser considerada como una perturbación *match*. La ley de control (3.40) es además una función continua, lo que permite su aplicación en tiempo real.

Ya se demostró la convergencia de la superficie deslizante en tiempo finito  $\sigma = 0$ , eso hace que  $\varepsilon_3 = -k_1\varepsilon_1 - k_2\varepsilon_2$ . Entonces la dinámica del sistema a lazo cerrado es descrito como una ecuación de modos deslizantes de segundo orden reducida de la forma

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_1 &= \varepsilon_2 \\ \dot{\varepsilon}_2 &= -k_1\varepsilon_1 - k_2\varepsilon_2.\end{aligned}\tag{3.49}$$

Y puede ser escrito de la forma

$$\dot{\varepsilon}_{12} = A_\varepsilon \varepsilon_{12}\tag{3.50}$$

donde

$$A_\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \varepsilon_{12} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}\tag{3.51}$$

Se afirma entonces que la Ecuación (3.49) es internamente estable si y solo si la parte real de los valores propios de la matriz  $A_\varepsilon$  es negativa, esto es,  $\Re\{\lambda_i(A_\varepsilon)\} < 0$  [28]. Y según el polinomio característico del sistema de la Ecuación (3.49)

$$s^2 + k_2s + k_1 = 0.\tag{3.52}$$

Se cumple el criterio de estabilidad [29] para  $k_1 > 0$  y  $k_2 > 0$ . Con estas condiciones,  $\varepsilon_1(t)$  y  $\varepsilon_2(t)$  convergen asintóticamente a cero. Esto es que los errores  $e_1$ ,  $e_2$  y  $e_3$  de la Ecuación (3.33) convergen a cero también.

### 3.3. Cinemática Inversa

Una vez que se ha calculado la trayectoria del cuerpo que deberá cumplir el robot humanoide para mantener la estabilidad, se deben generar trayectorias que deberán de seguir los pies del robot. Éstas son generadas en la misma manera que se explico en la sección 3.1, considerando el largo del paso en las coordenadas  $x$  y  $y$ , y la altura del paso en  $z$ . Para los ángulos, de la misma manera, una trayectoria para el *yaw*  $\psi$  considerando la cantidad de giro. Para caminado en terreno uniforme, *roll*  $\phi$  y *pitch*  $\theta$  se consideran como cero, pero si el humanoide camina en terreno no uniforme, por ejemplo una rampa, se considera un incremento de estos ángulos. Este y otros enfoques similares, quedan fuera del alcance de esta tesis.

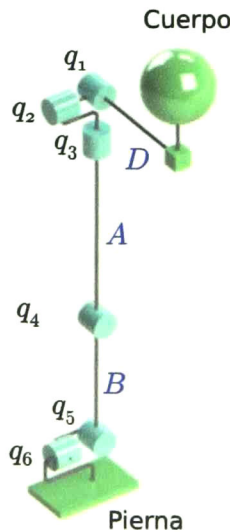


Figura 3.6: Estructura de una pierna de 6 grados de libertad.

Se estudia entonces, la configuración de 6 grados de libertad mostrada en la figura 3.6 para la pierna derecha, la pierna izquierda se trata de la misma manera, además, para simplificar las ecuaciones, se define a la constante  $D$  como la distancia entre el cuerpo y la junta esférica de la cadera; las constantes  $A$  y  $B$  son definidas como la distancia del muslo y la parte baja de la pierna respectivamente.

Tomando todo esto en cuenta existen varias maneras de resolver este problema, se abordarán dos métodos; analítico y por álgebra geométrica.

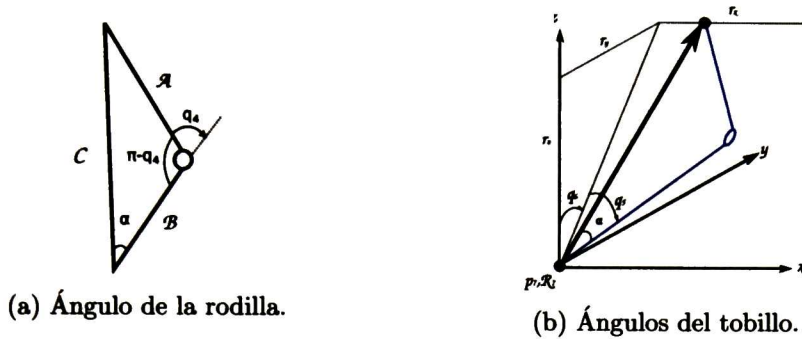


Figura 3.7: Cinemática inversa analítica.

### 3.3.1. Método Analítico

Se considera que en cada instante de tiempo se tienen la posición y orientación del cuerpo y la pierna derecha  $(p_1, R_1)$  y  $(p_7, R_7)$  respectivamente. Entonces la posición de la cadera esta dada en la forma [9]

$$p_2 = p_1 + R_1 \begin{bmatrix} 0 \\ D \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

Después, se calcula la posición de la entrepierna viéndola desde el espacio de coordenadas del tobillo

$$r = R_7^T (p_2 - p_7) \equiv [r_x \ r_y \ r_z]^T \quad (3.54)$$

A partir de esto, se calcula la distancia entre el tobillo y la cadera

$$C = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}. \quad (3.55)$$

Como se muestra en la Figura 3.7a, si se considera el triángulo  $ABC$  obtenemos el ángulo de la rodilla a partir de la ley de cosenos

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos(\pi - q_4). \quad (3.56)$$

Y el ángulo de la rodilla esta dado en la forma

$$q_4 = -\cos^{-1} \left( \frac{A^2 + B^2 - C^2}{2AB} \right) + \pi. \quad (3.57)$$

Se define al ángulo de la parte inferior del triangulo como  $\alpha$  y de la ley de senos se obtiene

$$\frac{C}{\sin(\pi - q_4)} = \frac{A}{\sin \alpha} \quad (3.58)$$

Y despejando

$$\alpha = \sin^{-1} \left( \frac{A \sin(\pi - q_4)}{C} \right) \quad (3.59)$$

Como se muestra en la Figura 3.7b, a partir del vector  $r$ , se calculan los ángulos de *roll* y *pitch* del tobillo en la forma

$$q_6 = \text{atan2}(r_y, r_z)^1 \quad (3.60)$$

$$q_5 = -\text{atan2}(r_x, \text{sign}(r_z) \sqrt{r_y^2 + r_z^2}) - \alpha. \quad (3.61)$$

Sólo resta por calcular los ángulos de *yaw*, *roll* y *pitch* de la cadera. De las ecuaciones que define cada unión

$$R_7 = R_1 R_z(q_3) R_x(q_2) R_y(q_1) R_y(q_4 + q_5) R_x(q_6) \quad (3.62)$$

se obtiene

$$R_z(q_3) R_x(q_2) R_y(q_1) = R_1^T R_7 R_x(-q_6) R_y(-q_4 - q_5). \quad (3.63)$$

Expandiendo el lado izquierdo de la Ecuación (3.63) y calculando el lado derecho, resulta

$$\begin{bmatrix} c_3 c_1 - s_3 s_2 s_1 & -s_3 c_2 & c_3 s_1 + s_3 s_2 c_1 \\ s_3 c_1 + c_3 s_2 s_1 & c_3 c_2 & s_3 s_1 - c_3 s_2 c_1 \\ -c_2 s_1 & s_2 & c_2 c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}^2 \quad (3.64)$$

Se obtiene entonces

$$q_1 = \text{atan2}(-R_{31}, R_{33}) \quad (3.65)$$

$$q_2 = \text{atan2}(R_{32}, -R_{12} s_3 + R_{22} c_3) \quad (3.66)$$

$$q_3 = \text{atan2}(-R_{12}, R_{22}). \quad (3.67)$$

### 3.3.2. Método Álgebra Geométrica

Se considera al igual que en la sección 3.3.1, que en cada instante de tiempo se tienen la posición y orientación del cuerpo en la forma  $x_b, y_b, z_b, \phi_b, \theta_b, \psi_b$  para las coordenadas  $x, y$  y  $z$ , y *pitch*, *yaw* y *roll* respectivamente, en referencia a un marco de coordenadas global. La posición y orientación de la pierna,  $x_L, y_L, z_L, \phi_L, \theta_L, \psi_L$  para las coordenadas  $x, y$  y  $z$ , y *pitch*, *yaw* y *roll* respectivamente. Se supone que la posición y orientación de la pierna son dados en términos de un marco de coordenadas de referencia fijo al cuerpo.

<sup>1</sup> Esta función calcula el ángulo entre el vector  $(x, y)$  y el eje  $x$ .

<sup>2</sup> Donde  $c_1 = \cos q_1$  y  $s_1 = \sin q_1$ .



Se crean tres rotores que describen el *pitch*, *yaw* y *roll* deseado de la pierna:

$$\begin{aligned} R_{x_L} &= e^{-\frac{1}{2}\phi_L e_{23}} \\ R_{y_L} &= e^{-\frac{1}{2}\theta_L e_{31}} \\ R_{z_L} &= e^{-\frac{1}{2}\psi_L e_{12}} \end{aligned} \quad (3.68)$$

Y un rotor general que describe la orientación general de la pierna

$$R_L = R_{x_L} R_{y_L} R_{z_L}. \quad (3.69)$$

Después, con las coordenadas euclidianas, se forma un trasladador

$$T_L = e^{-\frac{1}{2}(x_L e_1 + y_L e_2 + z_L e_3) e_\infty} \quad (3.70)$$

Usando las Ecuaciones (3.69) y (3.70), un motor que describa la pose deseada de la pierna en términos del marco de coordenadas del cuerpo, se da en la forma

$$M_L = T_L R_L. \quad (3.71)$$

Un punto conformal el cual describe el centro del cuerpo, otro que describe la posición inicial de la unión de la cadera usando la distancia constante conocida  $D$  y otro mas que muestra la condición inicial de la unión del tobillo usando las constantes  $A$  y  $B$ , son definidos

$$\begin{aligned} x_w &= 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 + \frac{1}{2}(0e_1 + 0e_2 + 0e_3)^2 e_\infty + e_0 \\ x_h &= -De_1 + 0e_2 + 0e_3 + \frac{1}{2}(-De_1 + 0e_2 + 0e_3)^2 e_\infty + e_0 \\ x_{fw} &= -De_1 - (A + B)e_2 + 0e_3 + \frac{1}{2}(-De_1 - (A + B)e_2 + 0e_3)^2 e_\infty + e_0. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Con el fin de encontrar la pose deseada de la unión del tobillo, el motor de la pierna es aplicado a la Ecuación (3.72)

$$x_f = M_L \cdot (x_{fw}) \cdot \tilde{M}_L. \quad (3.73)$$

Dos esferas son definidas con centro en los puntos creados en las Ecuaciones (3.72) y (3.73)

$$\begin{aligned} s_1 &= x_h - \frac{1}{2}A^2 e_\infty \\ s_2 &= x_f - \frac{1}{2}B^2 e_\infty, \end{aligned} \quad (3.74)$$

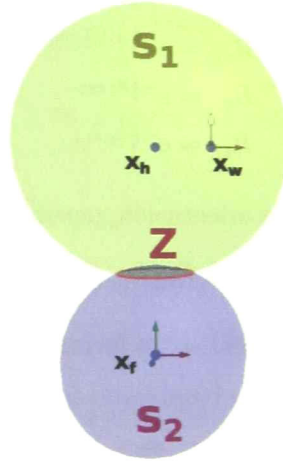


Figura 3.8: Intersección de las esferas  $s_1$  y  $s_2$ .

y el producto exterior es aplicado entre las esferas de la Ecuación (3.74). Como se muestra en la Figura 3.8 esto conlleva a la creación de un círculo,

$$Z = s_1 \wedge s_2. \quad (3.75)$$

Una línea es creada en la coordenada  $e_3$  y transformada con el motor de la pierna, esto, con el propósito de encontrar la unión del tobillo deseada

$$L_3 = M_L \cdot (e_0 \wedge e_3 \wedge e_\infty) \cdot \tilde{M}_L. \quad (3.76)$$

Una línea normal al círculo de la Ecuación (3.75) es generada de la forma

$$L_c = Z \wedge e_\infty, \quad (3.77)$$

con esto, un plano el cual intersecte el círculo de la Ecuación (3.75) en la distancia más larga desde el centro hacia el borde es formado usando las Ecuaciones (3.76) y (3.77)

$$P = (L_c \cdot (e_0 \wedge e_\infty)) \wedge L_3, \quad (3.78)$$

esto crea dos puntos de intersección que representan la intersección de las dos entidades geométricas de la Ecuaciones (3.75) y (3.78) las cuales son matemáticamente dadas por

$$pp = Z \wedge (P - I). \quad (3.79)$$

Por consiguiente, dos posibles configuraciones para la unión de la rodilla son encontradas,

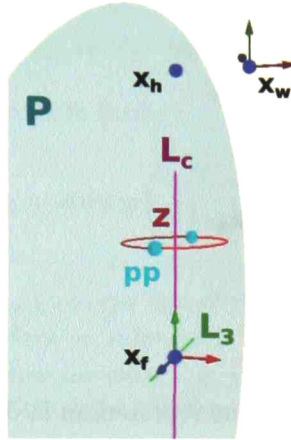


Figura 3.9: Par de puntos.

como se observa en la Figura 3.9. Con el propósito de lograr el diseño antropomórfico que se desea, la restricción de tomar el punto positivo es impuesta, resultando el punto de la rodilla descrito por

$$pp_d = pp - l \tag{3.80}$$

$$x_k = \frac{pp_d + \sqrt{pp_d \cdot pp_d}}{pp_d \cdot e_\infty}$$

Hasta aquí, los tres puntos mas importantes  $x_h$ ,  $x_k$  y  $x_f$  de la configuración deseada dada la pose del cuerpo y de la pierna han sido encontrados. Con estos, tres líneas representando la distancia de los eslabones entre cada unión son definidas usando las Ecuaciones (3.72) y (3.80), y se puede observar en la Figura 3.10.

$$Link_D = e_\infty \wedge x_w \wedge x_h \tag{3.81}$$

$$Link_A = e_\infty \wedge x_h \wedge x_k$$

$$Link_B = e_\infty \wedge x_k \wedge x_f.$$

Finalmente, con esta información, la cantidad de rotación de cada unión es fácilmente calculada. El ángulo entre las líneas  $Link_A$  y  $Link_B$  de la Ecuación (3.81) nos otorga el *roll* de la rodilla

$$q_A = \arccos \left( \frac{\sqrt{Link_A \cdot Link_B}}{|Link_A| |Link_B|} \right) \tag{3.82}$$

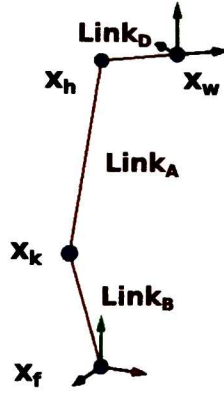


Figura 3.10: Definición de las líneas que representan la distancia de los eslabones.

Para encontrar el *roll* de la unión esférica de la cadera, un plano de referencia es creado de la siguiente manera

$$P_{1_r} = e_3 \wedge x_h \wedge x_k \wedge e_\infty, \quad (3.83)$$

y un plano paralelo al plano frontal al del robot humanoide el cual se mueve a conforme las esferas se mueven, es definido por

$$P_{1_f} = x_w \wedge x_h \wedge x_k \wedge e_\infty. \quad (3.84)$$

Con las Ecuaciones (3.83) y (3.84) la cantidad de rotación es descrita por

$$q_1 = \frac{\pi}{2} - \arccos \left( \frac{\sqrt{P_{1_r} \cdot P_{1_f}}}{|P_{1_r}| |P_{1_f}|} \right) \quad (3.85)$$

Para encontrar el *yaw* de la ya mencionada junta esférica, el ángulo entre los eslabones descrito por las líneas *Link<sub>D</sub>* y *Link<sub>A</sub>* de la Ecuación (3.81) simplemente es calculado por

$$q_2 = \frac{\pi}{2} - \arccos \left( \frac{\sqrt{Link_D \cdot Link_A}}{|Link_D| |Link_A|} \right) \quad (3.86)$$

Respecto a la junta universal del tobillo, el ángulo de rotación en la dirección de *yaw* es encontrado usando las líneas de las Ecuaciones (3.76) y (3.81)

$$q_5 = \frac{\pi}{2} - \arccos \left( \frac{\sqrt{Link_B \cdot L_3}}{|Link_B| |L_3|} \right) \quad (3.87)$$

Para encontrar la cantidad de rotación en la dirección del *roll* de la unión del tobillo, una línea paralela al plano sagital del robot humanoide es creada y transformada por el motor de la pierna de la Ecuación (3.71)

$$L_{31} = M_L \cdot (e_0 \wedge e_1 \wedge e_\infty) \cdot \tilde{M}_L \quad (3.88)$$

usando esto, el ángulo es dado de la forma

$$q_6 = \arccos \left( \frac{\sqrt{\text{Link}_B \cdot L_{31}}}{|\text{Link}_B| |L_{31}|} \right) - \frac{\pi}{2}. \quad (3.89)$$

Finalmente, el último ángulo, el cual describe la cantidad de giro en la dirección de *pitch* de la unión esférica de la cadera es calculado. Primero, algunos rotores y trasladores son definidos usando las condiciones iniciales y la información de las uniones obtenidas hasta ahora. Esto dará la posición virtual del tobillo.

$$T_{h31} = e^{-\frac{1}{2}(x_h)e_\infty} \quad (3.90)$$

$$T_{h32} = e^{-\frac{1}{2}(De_1 - Ae_2 + 0e_3)e_\infty}$$

$$R_{h31} = e^{-\frac{1}{2}(q_1)e_{23}}$$

$$R_{h32} = e^{-\frac{1}{2}(q_2)e_{31}}$$

$$R_{h33} = e^{-\frac{1}{2}(0)e_{12}}$$

$$R_{h34} = e^{-\frac{1}{2}(q_4)e_{31}}$$

Con la Ecuación (3.90), un motor general que describe la pose virtual del tobillo es dado por

$$M_h = (T_{h31} \cdot (R_{h31} \ R_{h32} \ R_{h33}) \ \tilde{T}_{h31}) \cdot (T_{h32} (R_{h34}) \tilde{T}_{h32}). \quad (3.91)$$

después, con la condición inicial del tobillo en la Ecuación (3.72), el punto virtual, el cual da la pose del tobillo es calculado con

$$x_{v_f} = M_h \ (x_{f_w}) \cdot \tilde{M}_h \quad (3.92)$$

para poder hacer mas certero el calculo, un plano virtual también se forma por

$$P_{v_f} = e_\infty \wedge x_w \wedge x_{v_f} \wedge x_k \quad (3.93)$$

además, un plano es creado con el propósito de imponer una restricción geométrica

$$P_{c_f} = e_\infty \wedge x_h \wedge x_k \wedge x_f \quad (3.94)$$

entonces si la distancia, calculada como

$$(x_{vf} \wedge P_{cf})/I_E, \quad (3.95)$$

entre el punto virtual del tobillo descrito en la Ecuación (3.93) y la restricción impuesta por el plano de la Ecuación (3.94) es mayor o igual a cero, la cantidad de giro esta dada por

$$q_3 = \arccos \left( \frac{\sqrt{(Link_B \wedge x_h) \cdot P_{vf}}}{|(Link_B \wedge x_h)| |P_{vf}|} \right) \quad (3.96)$$

caso contrario, se obtiene por

$$q_3 = -\arccos \left( \frac{\sqrt{(Link_B \wedge x_h) \cdot P_{vf}}}{|(Link_B \wedge x_h)| |P_{vf}|} \right) \quad (3.97)$$

Los planos y líneas definidas en las ecuaciones previas pueden ser orientados o trasladados dependiendo de las necesidades del robot humanoide, definiendolas con una pose diferente para lograr diferentes configuraciones, esto ayuda a la evasión de obstáculos. Respecto a la prevención de auto-colisiones, las restricciones geométricas impuestas en las Ecuaciones (3.80) y (3.95) ayudan a restringir el movimiento de los eslabones, y aun mas, el radio de las esferas (3.74) facilita la obtención de configuraciones alcanzables dentro del espacio de trabajo del robot bípedo humanoide.

Estas ecuaciones pueden ser solamente aplicadas a los robots que tengan la misma configuración de la Figura 3.6, por ejemplo, si el robot no tiene tres juntas cuyos ejes de giro se intersectan en un punto, como la articulación de la cadera, un algoritmo diferente es necesario.

## Capítulo 4

# Análisis Experimental

Con el motivo de ilustrar el desempeño del método propuesto para la generación de patrones de caminado, el seguimiento de dichos patrones generados por medio de una ley de control y la obtención de referencias para cada unión por medio de cinemática inversa, una serie de simulaciones y experimentos en línea fueron realizados. Los detalles y resultados de estas simulaciones y experimentos son presentados a continuación. Este capítulo comienza con un caso de estudio para hacer simulaciones y probar los algoritmos, en la sección 4.1 se genera una trayectoria para el punto de momento cero (*ZMP*) cumpliendo el criterio de estabilidad para con esto generar el patrón de caminado del cuerpo. Después se pone a prueba la ley de control variando los parámetros de simulación y corroborando la robustez de la técnica de modos deslizantes, con dicha referencia de posición para el centro de masa, se obtiene la cinemática inversa. Esta tesis presenta experimentos en línea, con un prototipo robot bípedo humanoide real, el cual se encuentra en el Laboratorio de Control Automático del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN (CINVESTAV), Unidad Guadalajara, llamado *MexOne*. Una descripción del prototipo, como la longitud de los eslabones, el peso y algunos diseños asistidos por computadora son presentados en el Apéndice A. Para poder aplicar la ley de control se necesita medir el punto de momento cero, en la misma sección se explica el método usado, además de una serie de pruebas para comprobar el movimiento del centro de masa del prototipo y se da una breve reseña sobre los actuadores del *MexOne*. En el Apéndice B se explica la forma de aplicación al prototipo y como se realiza el experimento. En la sección 4.2 se presentan los satisfactorios resultados.

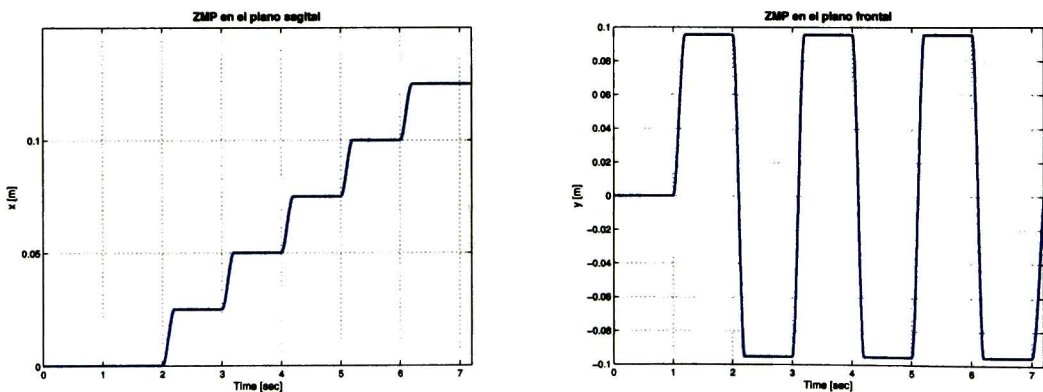
## 4.1. Simulaciones

Con el propósito de evaluar el desempeño de los algoritmos propuestos, se implementaron los algoritmos desarrollados en el Capítulo 3 usando herramientas de simulación, específicamente *MatLab* y *ChuCac*. Primero, se genera la trayectoria deseada del punto de momento cero usando la función “*interp1*” definida en *MatLab* la cual otorga los cuatro coeficientes de una función cubica monótona a trozos, siendo de clase  $C^1$ . Los valores usados para generar esta trayectoria de definen como se muestra en la Tabla 4.1.

Parámetro	Símbolo	Valor
Tiempo de apoyo simple.	$T_{sgt}$	0.8 s
Tiempo de apoyo doble.	$T_{dbl}$	0.2 s
Longitud del paso (sagital)	$s_x$	0.025 m
Longitud del paso (frontal)	$s_y$	0.095 m
Ángulo de paso	$\Delta\theta$	0
Número de Pasos	$n$	5

Tabla 4.1: Parámetros de simulación

con estos datos y la Ecuación (3.1), se obtienen polinomios continuos de tercer grado, y son mostrados en las Figuras 4.1a y 4.1b, que muestran la trayectoria en las coordenadas  $x$  y  $y$  respectivamente conforme al tiempo. Es importante remarcar que la posición del ZMP en los pasos, es diseñada considerando el criterio de estabilidad, es decir, que siempre se encuentra dentro del polígono de soporte.

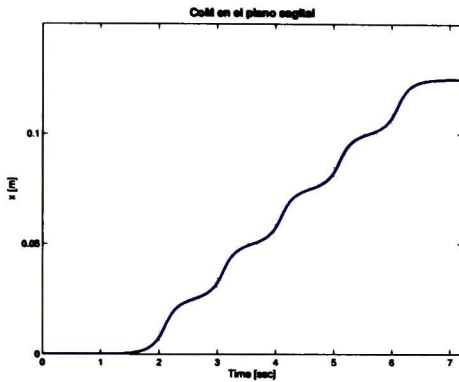


(a) Punto de momento cero en el plano sagital. (b) Punto de momento cero en el plano frontal.

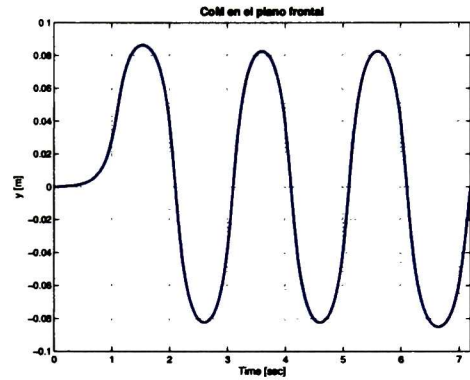
Figura 4.1: Simulación del punto de momento cero.



Con los polinomios obtenidos en la forma de la Ecuación (3.2) se resuelve analíticamente la Ecuación (3.3) considerando una constante de gravedad  $g = 9,81m/s^2$  y una altura del centro de masa  $z_{com} = 0,3318m$  y se obtienen los patrones de caminado que debe seguir el robot humanoides bípedo para generar un caminado dinámico estable según las condiciones deseadas. Las Figuras 4.2a y 4.2b muestran las simulaciones obtenidas.



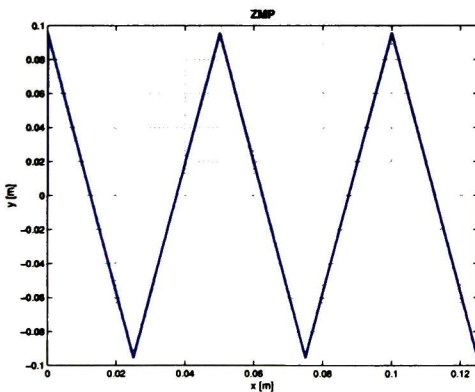
(a) Centro de masa en el plano sagital.



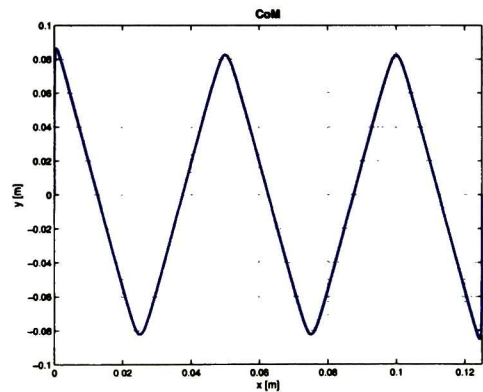
(b) Centro de masa en el plano frontal.

Figura 4.2: Simulación del centro de masa.

Una vista del punto de momento cero y el centro de masa simulados vistos desde el plano transversal, son mostrados en las Figuras 4.3a y 4.3b



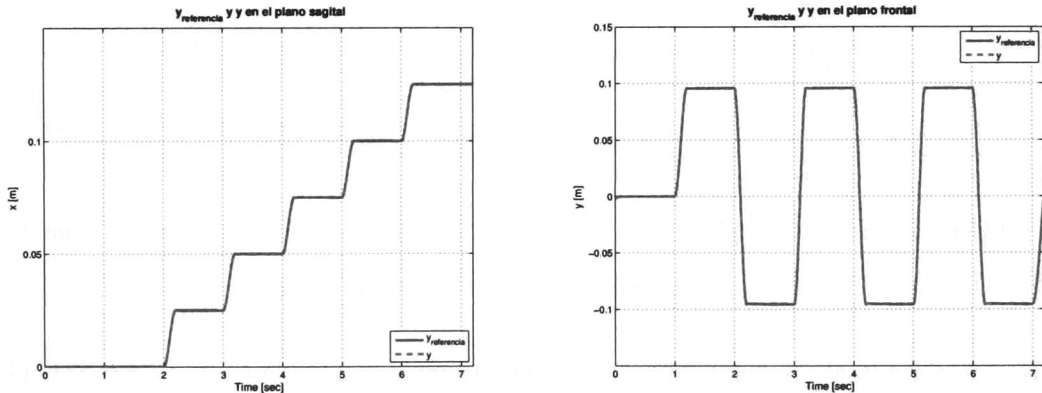
(a) Punto de momento cero en el plano transversal.



(b) Centro de masa en el plano transversal.

Figura 4.3: Simulación del ZMP y CoM.

Una vez creadas las referencias para el punto de momento cero (*ZMP*) y el centro de masa (*CoM*) de un robot humanoide, se certifica el desempeño del algoritmo de control por modos deslizantes, en específico, el algoritmo *Super-Twisting*, usando el desarrollo mostrado en la sección 3.2.2. Las trayectorias  $y_{ref}$ ,  $\pi_1$  y  $\pi_2$  son generadas usando las Ecuaciones (3.32) y (3.31).  $k_1 = 20$  y  $k_2 = 50$  son las constantes usadas para la formación de la superficie deslizante de la Ecuación (3.36),  $\lambda_1 = 10$  y  $\lambda_2 = 5$  son establecidas para formar la ley de control de la Ecuación (3.40) y se toma como una perturbación *matched* a la altura del centro de masa considerada en la ley de control como  $z_{com} = 0.2$ , la cual difiere de la planta real, además de una función  $\Delta(t) = 2\sin(t)$  que simula ruido en los parámetros de la planta. Con estas condiciones, los resultados obtenidos del seguimiento de trayectoria en los planos sagitales y frontales conforme al tiempo son mostrados en las Figuras 4.4a y 4.4b.

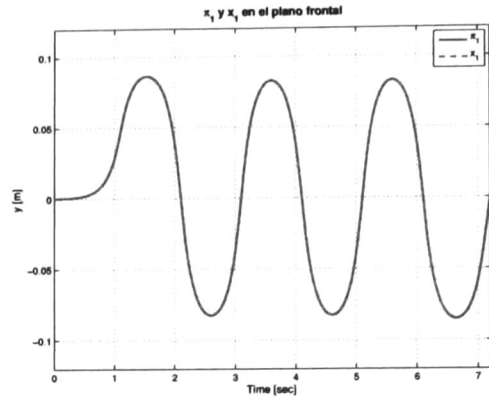
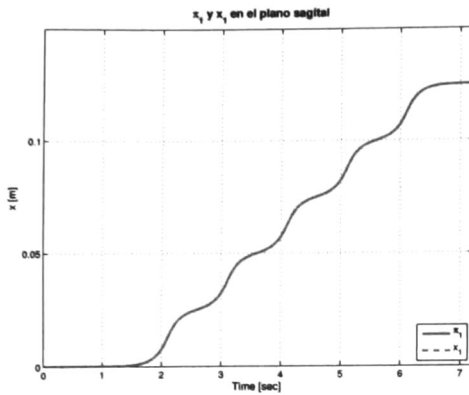


(a) Seguimiento del *ZMP* en el plano sagital. (b) Seguimiento del *ZMP* en el plano frontal.

Figura 4.4: Simulación del seguimiento del punto de momento cero.

El centro de masa  $\pi_1$  puede ser apreciado en las Figuras 4.5a y 4.5b comparados con la trayectoria del *CoM* en términos del marco de coordenadas global donde se observa el error de seguimiento casi igual a cero y sin respuesta transitoria, esto es gracias a la convergencia en tiempo finito del sistema a lazo cerrado, que es proporcionada por la ley de control propuesta mostrada en la Ecuación (3.48).

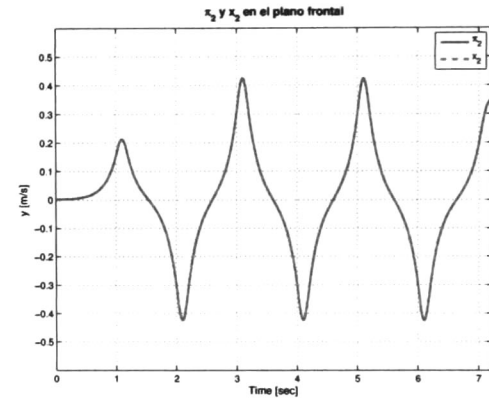
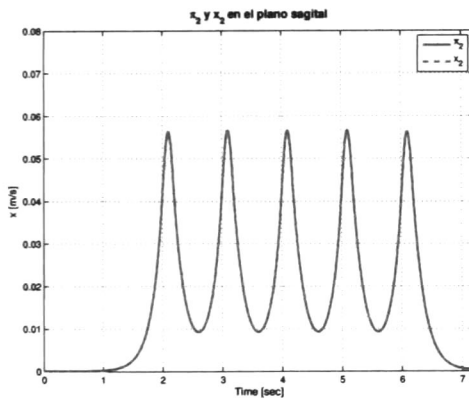
La trayectoria de velocidad  $\pi_2$  y el seguimiento del robot son observados en las Figuras 4.6a y 4.6b. Estas trayectorias de velocidad son continuas y alcanzables por el centro de masa de un robot humanoide bípedo.



(a) Seguimiento del *CoM* en el plano sagital.

(b) Seguimiento del *CoM* en el plano frontal.

Figura 4.5: Simulación del seguimiento del centro de masa.

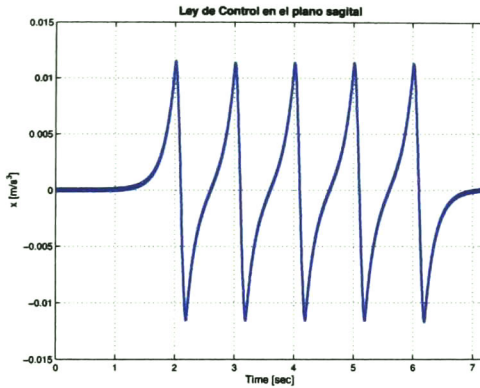
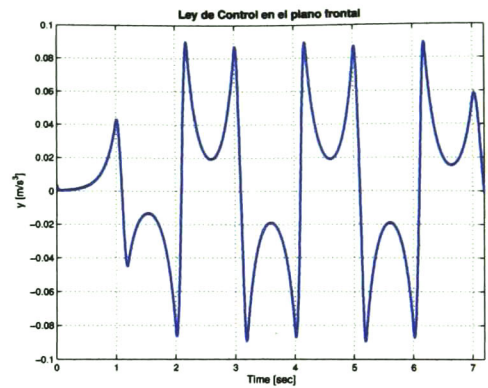
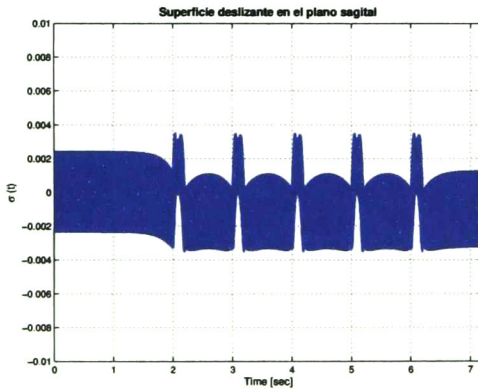
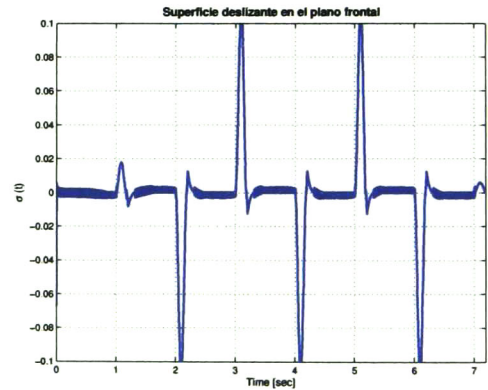


(a) Seguimiento de  $x_2$  en el plano sagital.

(b) Seguimiento de  $x_2$  en el plano frontal.

Figura 4.6: Simulación del seguimiento de la velocidad del centro de masa.

La señal de entrada obtenida por la ley de control es mostrada en las Figuras 4.7a y 4.7b, la cual es igual a la perturbación ( $\zeta(t)$ ) en estado estable. Finalmente la respuesta de la variable deslizante es mostrada en las Figuras 4.8a y 4.8b. Como se aprecia, el movimiento deslizante ocurre desde el inicio, esto otorga mejores características con respecto a robustez e incertidumbres del sistema, el cual es la principal aportación de este algoritmo.

(a)  $u(t)$  en el plano sagital.(b)  $u(t)$  en el plano frontal.Figura 4.7: Simulación de la ley de control  $u(t)$ .(a)  $\sigma(t)$  en el plano sagital.(b)  $\sigma(t)$  en el plano frontal.Figura 4.8: Simulación de la superficie deslizante  $\sigma(t)$ 

Por último, con la señal de control  $u(t)$ , se genera la referencia para el centro de masa del robot humanoide bípedo y considerando que el centro del robot humanoide se encuentra en la cadera, se utiliza el algoritmo de cinemática inversa desarrollado en la sección 3.3.2 para generar las trayectorias de cada unión. Se hace uso del software *CluCalc* para realizar los cálculos. Las trayectorias obtenidas para un paso de la pierna derecha son mostradas en la Figura 4.9. El entorno gráfico para visualizar los resultados es mostrado en la Figura 4.10.

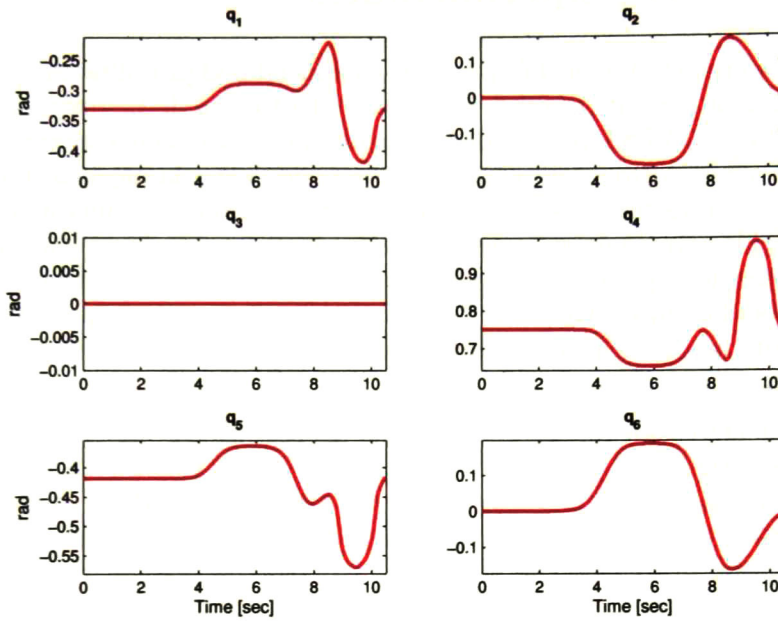


Figura 4.9: Referencias de las uniones para la pierna derecha.

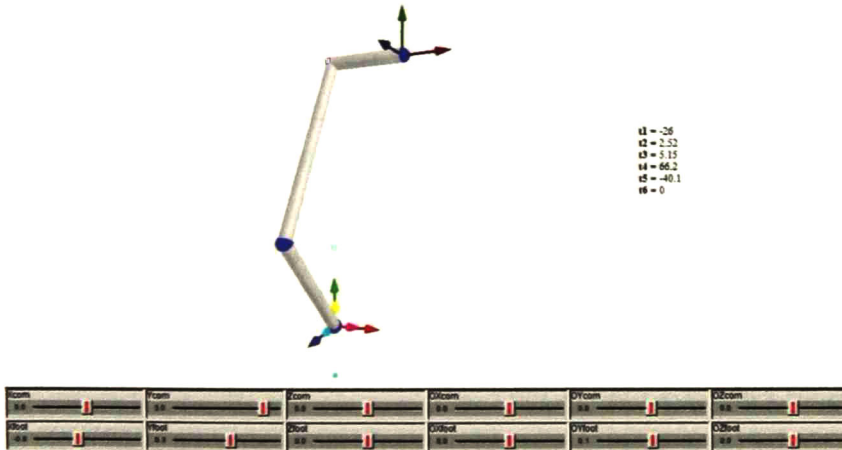


Figura 4.10: Entorno gráfico de la cinemática inversa.

## 4.2. Resultados Experimentales

Los algoritmos presentados en el Capítulo 3 son aplicados al prototipo *MexOne* el cual se encuentra en el Laboratorio de Control Automático del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN (CINVESTAV), Unidad Guadalajara. Se necesitan conocer las constantes físicas, los sensores y los métodos de actuación para poder lograr la implementación en línea. En el apéndice A se presentan las especificaciones. Se comienza con una descripción física del robot humanoide seguido de los sensores y actuadores usados y termina con los componentes y partes eléctricas que lo componen. La implementación de software y su distribución en librerías se abordan en el Apéndice B, donde se da una explicación detallada de cada librería, además de una descripción de los arreglos necesarios para realizar el experimento satisfactoriamente.

Para el experimento expuesto en este trabajo se usan los datos de la Tabla 4.2. Usando la Ecuación (3.1), se obtienen los valores para las Ecuaciones (B.7) y (B.8). Aplicando las librería *Interpolation.h* se obtiene la trayectoria de referencia para el *ZMP* respecto al marco de coordenadas global. Los resultados para el plano sagital y frontal se pueden observar en las Figuras 4.11a y 4.11b.

Parámetro	Símbolo	Valor
Tiempo de apoyo simple.	$T_{sgl}$	1.3 s
Tiempo de apoyo doble.	$T_{dbl}$	0.8 s
Longitud del paso (sagital)	$s_x$	0.04 m
Longitud del paso (frontal)	$s_y$	0.095 m
Ángulo de paso	$\Delta\theta$	0
Número de Pasos	$n$	19
Paso de Discretización	$\Delta t$	0.001 s

Tabla 4.2: Parámetros de implementación.

Se considera una altura del péndulo invertido de 0,045 m, posiciones y velocidades iniciales de cero tanto para el plano sagital y frontal. Y se usa como parámetros de entrada para la librería *WalkingSolver.h*. En las Figuras 4.12a y 4.12b se observan los resultados. Una vista del punto de momento cero y el centro de masa vistos desde el plano transversal, son mostrados en las Figuras 4.13a y 4.13b

Una vez creadas las referencias para el punto de momento cero *ZMP* y el centro de masa *CoM* del robot humanoide, se certifica el desempeño del algoritmo de control por modos deslizantes, en específico, el algoritmo *Super-Twisting*, usando la implementación explicada en el Apéndice B de la librería *controlLib.h*. Las constantes  $k_1 = 100$  y  $k_2 = 500$  son usadas para la formación de la superficie deslizante de la Ecuación (3.36),  $\lambda_1 = 50$  y  $\lambda_2 = 20$

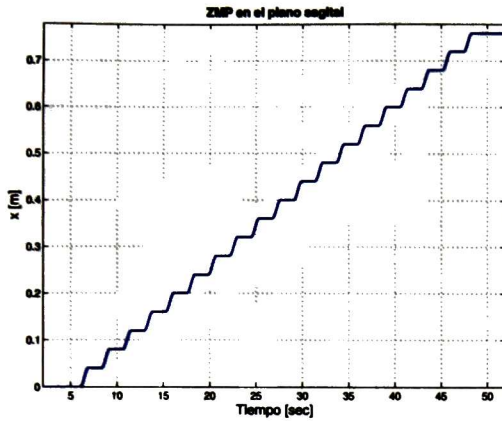
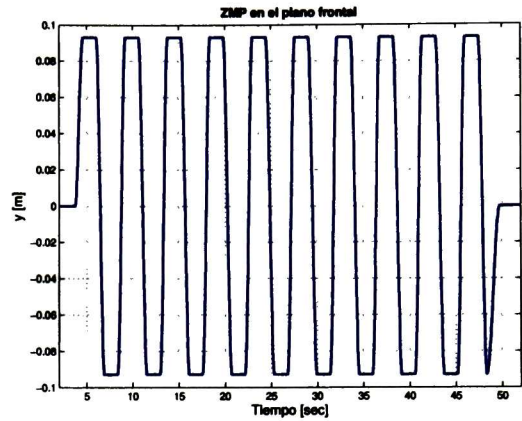
(a) *ZMP* en el plano sagital.(b) *ZMP* en el plano frontal.

Figura 4.11: Trayectoria del punto de momento cero.

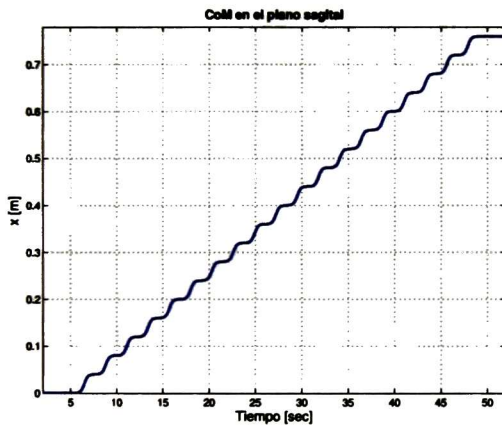
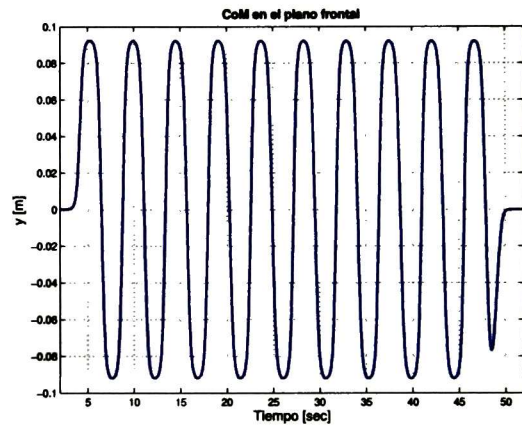
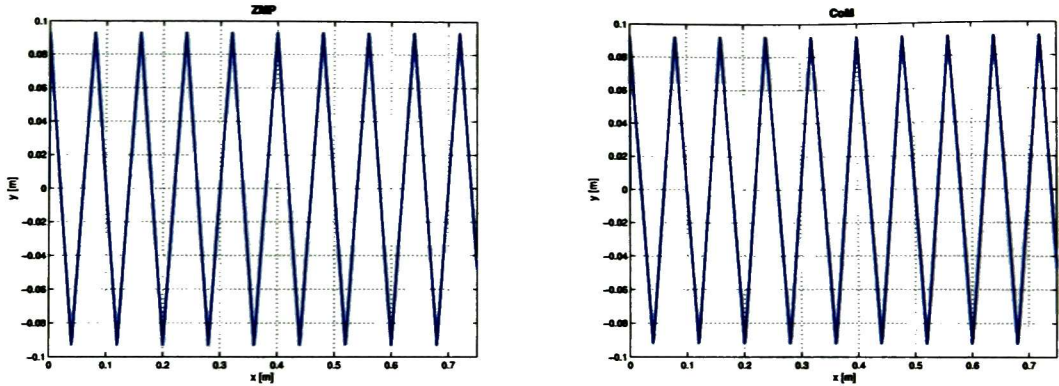
(a) *CoM* en el plano sagital.(b) *CoM* en el plano frontal.

Figura 4.12: Trayectoria del centro de masa.

son establecidas para formar la ley de control de la Ecuación (3.40) y se toma como una perturbación *matched* a la altura del centro de masa considerada en la ley de control como  $z_{com} = 0.2$  m, la cual difiere de la planta real. Con estas condiciones, los resultados obtenidos del seguimiento de trayectoria en los planos sagitales y frontales conforme al tiempo son mostrados en las Figuras 4.4a y 4.4b. En las Figuras 4.14 y 4.15 se muestra la referencia del *ZMP* y el *ZMP* medido del robot humanoide por medio de la librería *ZMP.h* en el plano



(a) Punto de momento cero en el plano transversal. (b) Centro de masa en el plano transversal.

Figura 4.13: Trayectorias del *ZMP* y *CoM*.

sagital y frontal respectivamente. Se puede observar un poco de ruido que aparece debido a las propiedades de los materiales de los sensores, sin embargo el seguimiento de la señal de referencia es satisfactoria y muestra una mejora del desempeño en comparación a los experimentos sin ley de control.

Después, en las Figuras 4.16 y 4.17, la trayectoria del centro de masa *CoM* y la trayectoria del *CoM* estimada del robot, son presentadas; el *CoM* del prototipo es un poco diferente al *CoM* propuesto con respecto al marco de coordenadas global, esto es debido a que se necesita compensar el movimiento con el fin de seguir el *ZMP* propuesto, probando que la ley de control esta funcionando.

Finalmente, en las Figuras 4.18 y 4.19 la aceleración es aplicada al cuerpo del prototipo bípedo en forma de la posición del cuerpo cada instante de tiempo y computando la cinemática inversa.



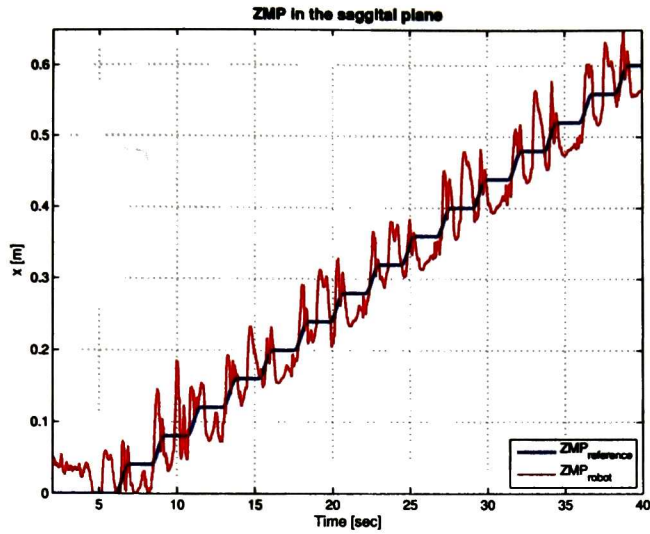


Figura 4.14: Posición de la trayectoria de referencia del *ZMP* en el plano sagital y la posición del *ZMP* del prototipo.

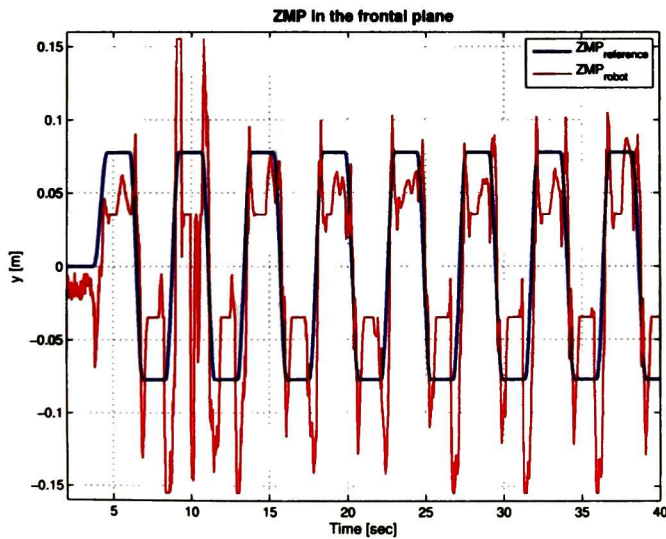


Figura 4.15: Posición de la trayectoria de referencia del *ZMP* en el plano frontal y la posición del *ZMP* del prototipo.

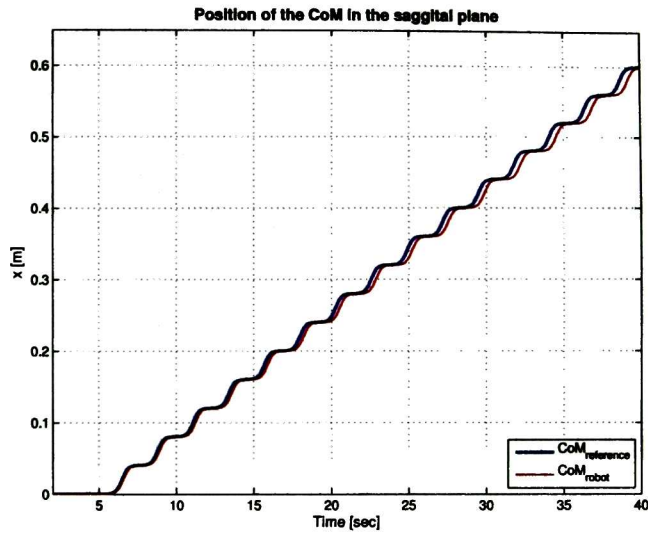


Figura 4.16: Posición de la trayectoria de referencia del  $CoM$  en el plano sagital y la posición del  $CoM$  del prototipo.

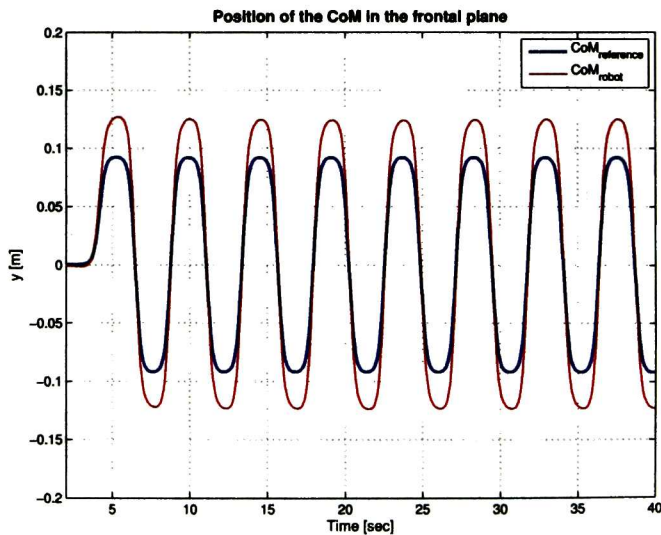


Figura 4.17: Posición de la trayectoria de referencia del  $CoM$  en el plano frontal y la posición del  $CoM$  del prototipo.

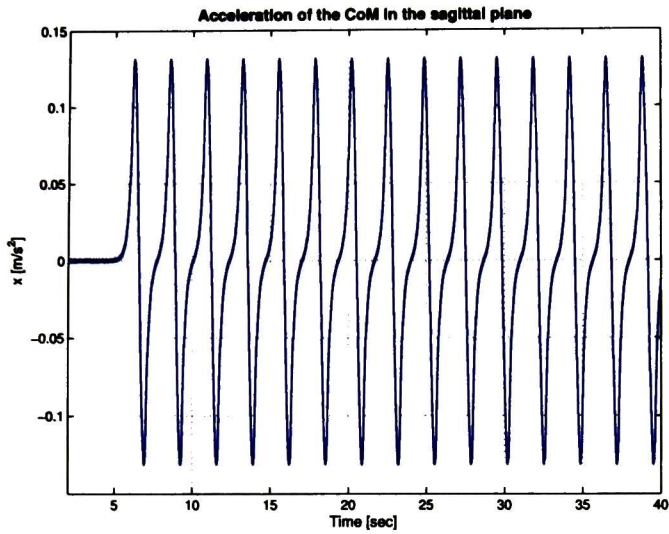


Figura 4.18: Aceleración del *CoM* como señal de control de entrada en el plano sagital.

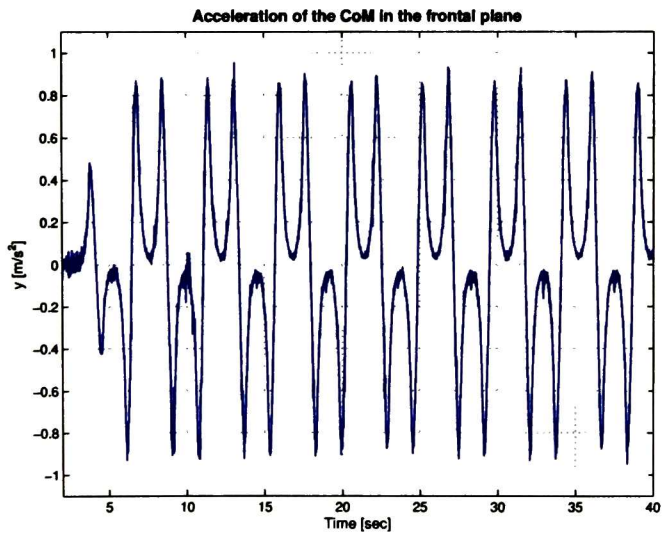


Figura 4.19: Aceleración del *CoM* como señal de control de entrada en el plano frontal.

Por último, se genera la referencia para la posición de la pierna izquierda y derecha usando la librería `Interpolation.h`, considerando los parámetros de la Tabla 4.2. Las figuras 4.20 y 4.21 muestran los resultados obtenidos para una altura de paso de tres centímetros.

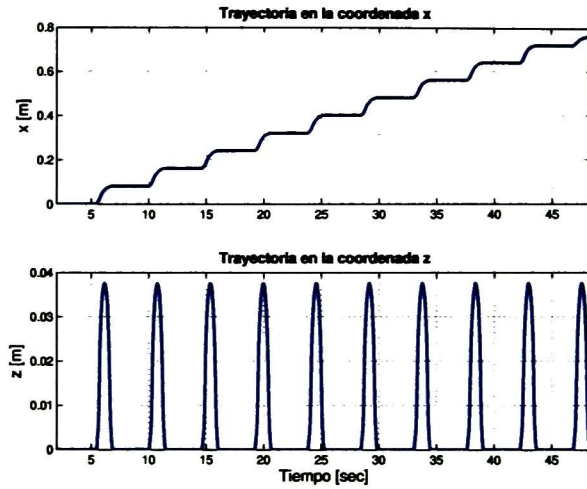


Figura 4.20: Trayectorias de referencia para la pierna izquierda.

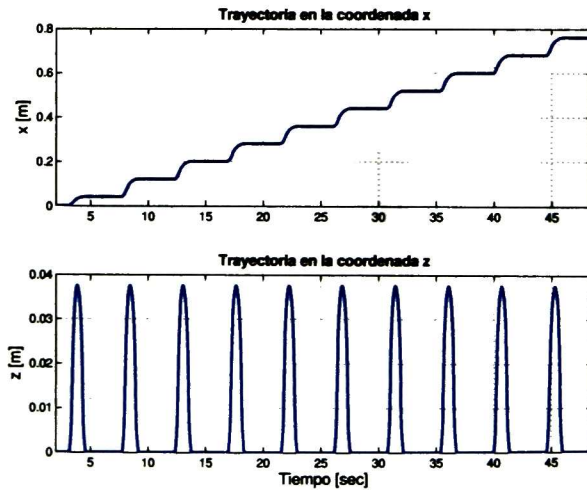


Figura 4.21: Trayectorias de referencia para la pierna derecha.

Usando la librería `IKSolver.h` y `DynamixelMexOne.h` se obtienen la cantidad de giro de cada unión y se envían a los actuadores del robot humanoide bípedo *MexOne*. Las Imágenes 4.22 y 4.23 muestran los ángulos aplicados en este experimento.

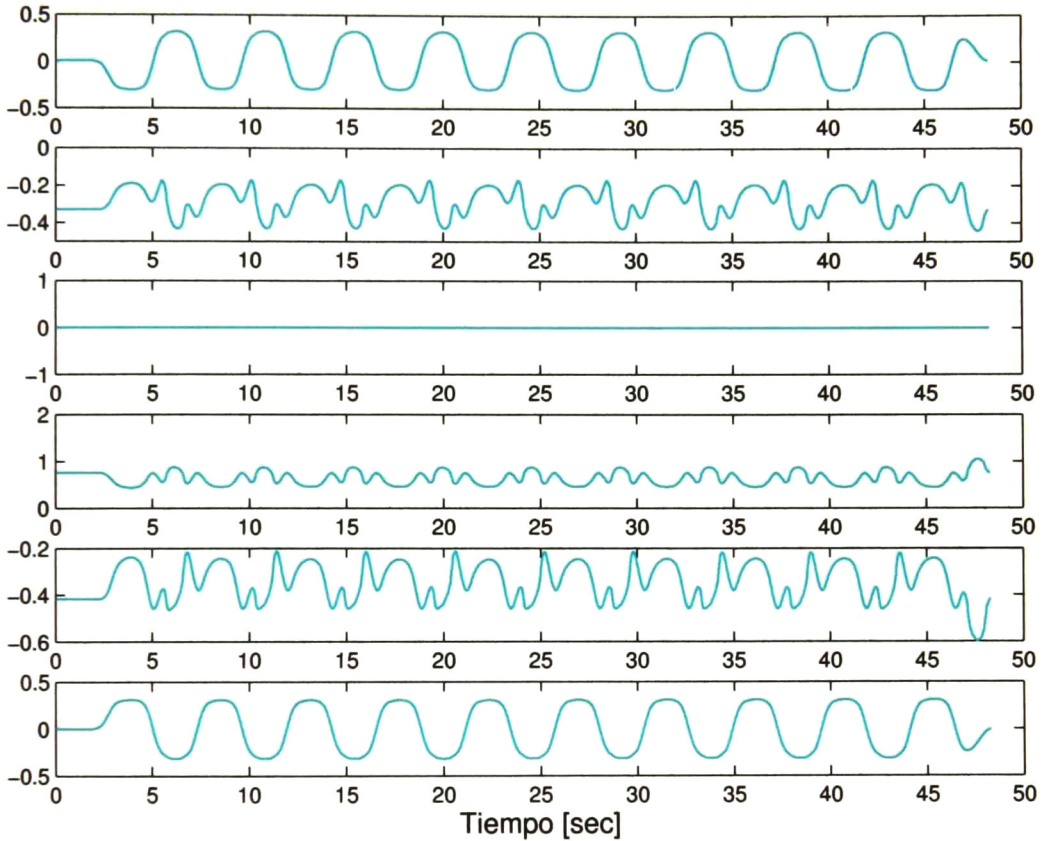


Figura 4.22: Trayectorias de ángulos en radianes para la pierna izquierda.

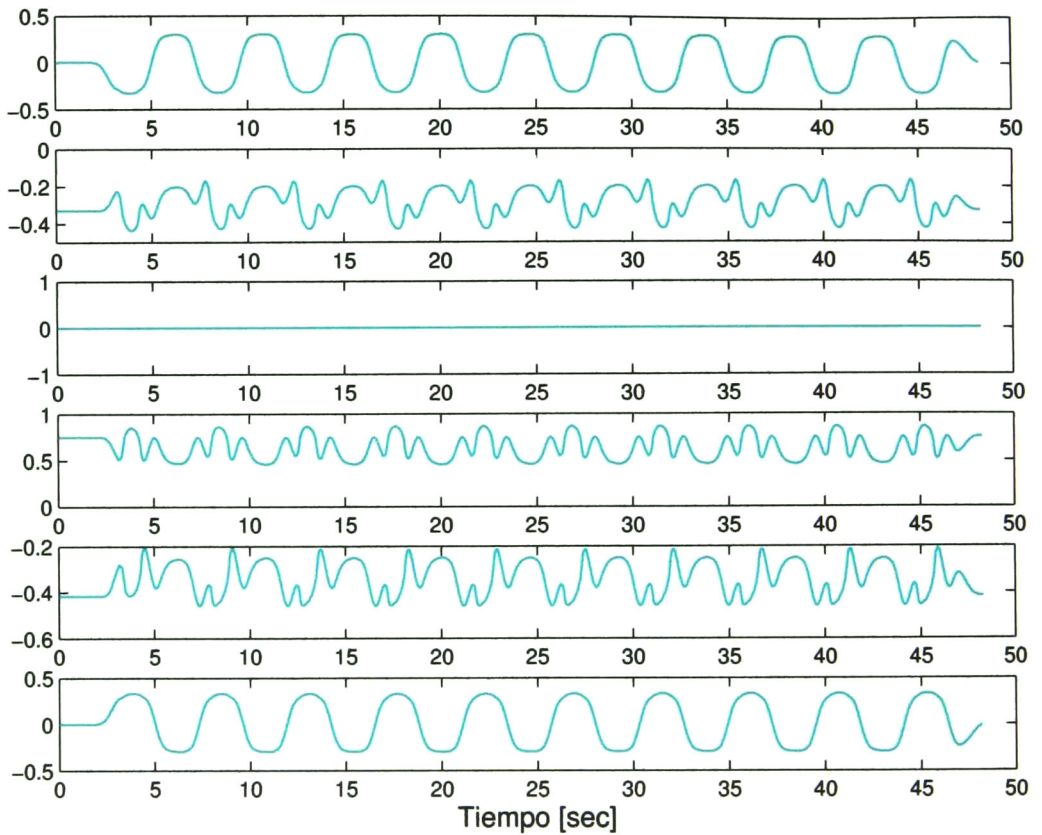


Figura 4.23: Trayectorias de ángulos en radianes para la pierna derecha.

## Capítulo 5

# Conclusiones

### 5.1. Conclusiones

Como se menciona en la introducción, esta tesis se enfoca en el estudio del diseño de patrones de caminado, un estabilizador bajo la teoría de modos deslizantes y un método para la cinemática inversa para generar el caminado dinámico estable para robots humanoides bípedos. La investigación en robótica humanoide es un importante tema para la ciencia y en particular para la ingeniería por los beneficios ya generados y los futuros por generar. Sin embargo, al tiempo de investigación de esta tesis, aún estamos en los inicios de la era de robots humanoides. El desarrollo de esquemas de control para para el movimiento bípedo estable sigue siendo una tarea ingenieril muy compleja que requiere nuevos enfoques.

Las principales conclusiones derivadas del trabajo realizado en esta tesis pueden ser agrupadas en los siguientes puntos:

- Primero que nada, esta tesis provee una reseña de los fundamentos de la locomoción bípeda, introduce al lector en la terminología básica del caminado, seguido de una descripción detallada de modelo del péndulo invertido lineal en tres dimensiones, el cual resulta de usar la dinámica de un péndulo invertido con el objetivo de modelar el caminado bípedo. El beneficio de modelar la dinámica de un bípedo como un péndulo invertido es que resulta un método conveniente para aplicar el criterio de estabilidad del punto de momento cero, el criterio mas importante para determinar el movimiento estable de un robot humanoide. Dicha relación es abordada en esta tesis. Finalmente se expone un breve resumen sobre el álgebra geométrica conformal, con la cual se propone un método para resolver la cinemática inversa de un robot humanoide bípedo.

- Se muestra que se pueden generar trayectorias para el punto de momento cero, considerando la posición de los pasos del robot humanoide de una forma eficiente.
- Con dichas trayectorias se pueden generar patrones de caminado dinámico estables para el centro de masa en los planos sagital y transversal.
- La aplicación del algoritmo *Super-Twisting* para asegurar el seguimiento de las trayectorias con robustez, es decir, las variaciones paramétricas que el modelo resultante del péndulo invertido y el punto de momento cero, no afectan el desempeño del estabilizador.
- La solución de cinemática inversa, dada una posición y orientación deseada del cuerpo y la pierna se obtienen las cantidades de rotación de cada articulación para alcanzar dichas poses.
- La generación de patrones de caminado, la aplicación del estabilizador propuesto y la solución de la cinemática inversa son satisfactorios.

Como conclusión, se resaltan las principales contribuciones de esta tesis:

- Conociendo la posición de los pasos de un robot humanoide, se propone un método eficiente para generar trayectorias para el punto de momento cero considerando el criterio de estabilidad.
- La obtención de los patrones de caminado para el centro de masa, dada una trayectoria del punto de momento cero.
- Se genera un algoritmo de control para el seguimiento de trayectorias, generando un exosistema para el estado estable asegurando el seguimiento aún con dinámica cero por medio del algoritmo *Super-Twisting* considerando variaciones paramétricas resultantes del modelado.
- La propuesta de un algoritmo para resolver la cinemática inversa de un robot humanoide bípedo de seis grados de libertad por medio de álgebra geométrica conformal, agregando restricciones geométricas para evitar configuraciones no alcanzables para el espacio de trabajo del robot.
- La generación del software necesario para la aplicación de los algoritmos explicados a un prototipo humanoide.
- La aplicación de los métodos comprobando su funcionalidad al prototipo robot bípedo humanoide *MexOne*.



Cabe mencionar que el autor de este trabajo cree que el método desarrollado para lograr el caminado dinámico estable es prometedor, ya que en condiciones ideales, conociendo la posición de los pasos de un robot se asegura que se cumplan la posiciones deseadas de los pasos.

Finalmente el autor expone la realización en línea del **PRIMER CAMINADO DINÁMICO ESTABLE DEL PROTOTIPO ROBOT BÍPEDO HUMANOIDE *MezOne*** que se encuentra en el Laboratorio de Control Automático del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN (CINVESTAV), Unidad Guadalajara. El cual es un logro muy importante y digno de resaltar.

## 5.2. Trabajo Futuro

Existen interesantes líneas de investigación abiertas en esta tesis que pueden ser seguidas en el trabajo futuro. Por ejemplo, la siguiente investigación se puede enfocar en como generar la posición de los pasos de un robot humanoide bípedo, es decir, dado un punto de inicio y un punto final, donde el robot debe colocar los pies para que se logre y aún mas, considerando obstáculos y desniveles.

Otra línea de investigación puede ser el generar el exosistema del capítulo 3.2.2 sin resolver una ecuación diferencial primero, de esta manera se puede lograr el cambio de referencia mientras se va resolviendo el control. Como información adicional, se intentó construir un observador para el exosistema del sistema en lazo cerrado, incluso generar las trayectorias desde el punto de vista de lógica difusa, donde existen funciones de membresía y se obtuvo un polinomio de infinitas derivadas para construir un derivador por modos deslizantes. Estos métodos no dejaron resultados satisfactorios.

Por último, se puede considerar el movimiento de los brazos de forma armónica para lograr un caminado aún mas estable y disminuir la energía utilizada por los actuadores de las piernas [32]. El autor de esta tesis implementó un movimiento en los brazos arbitrarios tomando solo en cuenta que mientras la pierna estuviera dando un paso el brazo contrario estuviera oscilando hacia el lado positivo del eje coordenado  $x$ , logrando mejoría y mayor estabilidad, es por eso que se recomienda tomar en consideración esta propuesta.

## Apéndice A

# Descripción del Prototipo

### A.1. Especificaciones Generales

#### DIMENSIONES GENERALES

- Altura: 1104,00 mm
- Anchura: 494,00 mm
- Profundidad: 215,00 mm

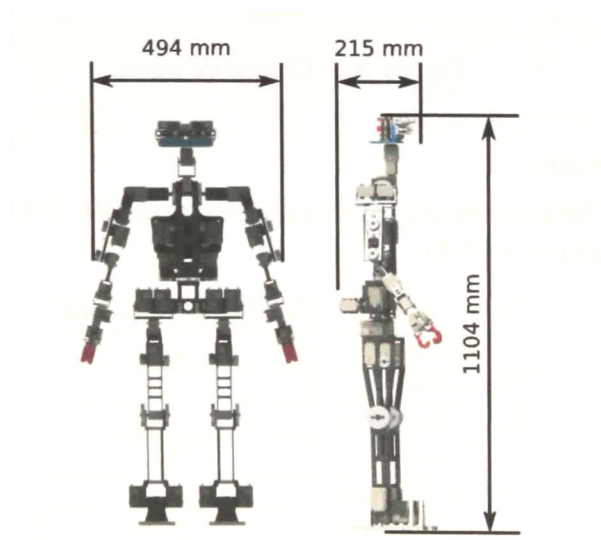


Figura A.1: Dimensiones

### PESO

El peso total del *MexOne* es al rededor de 10,435 kg. El centro de masa se encuentra a 140,18 mm, 527,82 mm y  $-120,94$  mm en las coordenadas  $x$ ,  $y$  y  $z$  respectivamente, en referencia al marco de coordenadas de la planta de la suela del pie derecho como se muestra en la Figura A.2.

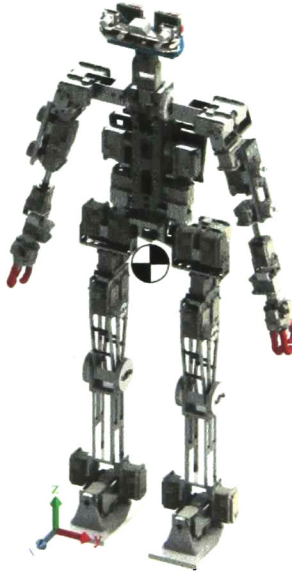


Figura A.2: Centro de masa

### GRADOS DE LIBERTAD

El prototipo *MexOne* esta provisto con un total de 29 grados de libertad (DoF), siguiendo la distribución mostrada en la Tabla A.1.

	Cantidad de DoF
Cabeza	2
Brazo Derecho	7
Brazo Izquierdo	7
Cintura	1
Pierna Derecha	6
Pierna Izquierda	6

Tabla A.1: Grados de libertad.

CINEMÁTICA

La estructura cinemática de la parte inferior del *MexOne* es representada por la Figura A.3. Puesto que el principal interés de esta tesis es en el movimiento de las piernas, se hace especial enfoque en dicha parte del prototipo. Cada marco mostrado está situado en el origen de cada unión. Todas las uniones son de revolución, y su eje de rotación está especificado en la Tabla A.2 usando la convención de la mano derecha. El eslabón base del robot está ubicado muy cerca del centro de masa, en la cintura.

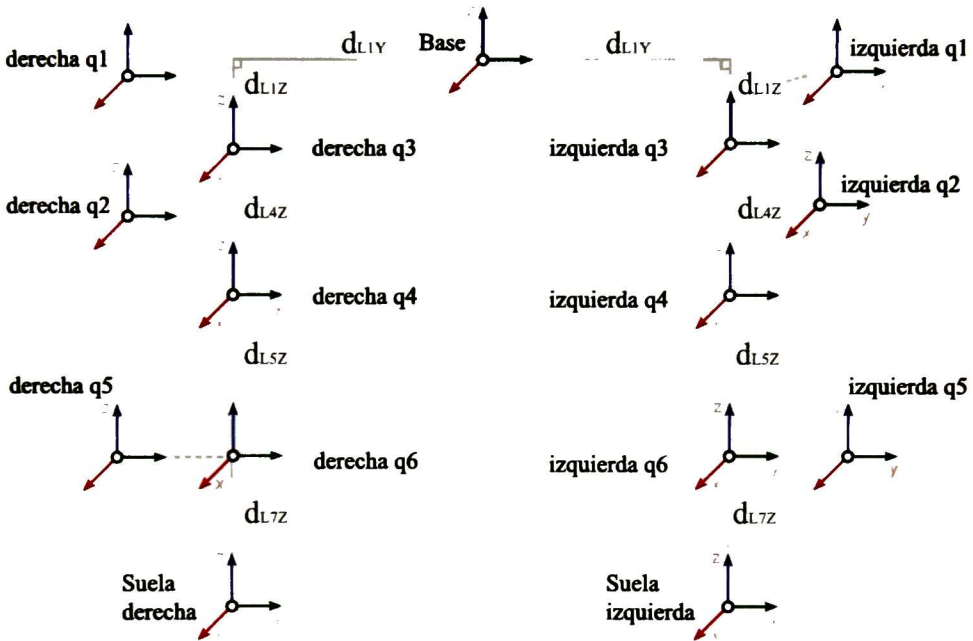


Figura A.3: Articulaciones de la parte inferior del *MexOne*.

Derecha	Eje	Izquierda	Eje
$q_1$	$x$	$q_1$	$x$
$q_2$	$y$	$q_2$	$y$
$q_3$	$z$	$q_3$	$z$
$q_4$	$y$	$q_4$	$y$
$q_5$	$y$	$q_5$	$y$
$q_6$	$x$	$q_6$	$x$

Tabla A.2: Ejes de rotación.

Las distancias en milímetros son especificadas en la Tabla A.3

Parámetro	Valor
$d_{L1y}$	95,54
$d_{L1z}$	20,50
$d_{L4z}$	298,63
$d_{L5z}$	238,18
$d_{L7z}$	65,13

Tabla A.3: Eslabones del *MexOne*

Las Figuras A.4, A.5 y A.6, indican los marcos de coordenadas locales de cada unión de la pierna izquierda.



(a) Eslabón base.

(b) Pierna izquierda  $q_1$ .

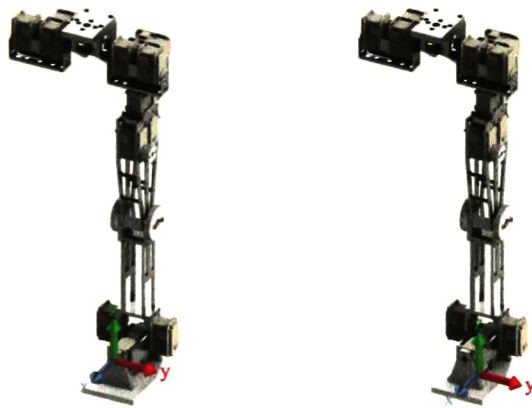
(c) Pierna izquierda  $q_2$ .

Figura A.4: Articulaciones de la pierna izquierda (I).



(a) Pierna izquierda  $q_3$ .      (b) Pierna izquierda  $q_4$ .      (c) Pierna izquierda  $q_5$ .

Figura A.5: Articulaciones de la pierna pzquierda (II).



(a) Pierna izquierda  $q_6$ .      (b) Articulación de la suela.

Figura A.6: Articulaciones de la pierna izquierda (III).

## A.2. Sensores

El prototipo robot humanoide bípedo *MexOne* posee una serie de diferentes sensores, en esta sección se describen los necesarios para la aplicación de los algoritmos generados.

### INERTIAL MEASUREMENT UNIT

Hay una unidad de medida inercial (IMU) marca *Trivisio*, colocada en la cadera. Cerca del centro de masa del *MexOne*. Cuenta con tres sensores en los tres ejes para medir aceleración (tres acelerómetros), cambio angular (tres giroscopios) y el campo magnético (tres sensores magneto-inductivo). Otorga datos calibrados a una frecuencia entre 10 y 100 Hz, además de una API para Windows o Linux. Las especificaciones del dispositivo se observan en la Tabla A.4.

Acelerometro	Escala	$\pm 16$ g
	Resolución	13-bit
Giroscopio	Escala	$\pm 1500$ o/s
	Resolución	13-bit
Sensor Magnetico	Escala	$\pm 1100$ $\mu$ T
	Resolución	250 Hz
Sensor de Temperatura	Precisión	$\pm 0.5$ ° C
Frecuencia		100 Hz
Precisión de Orientación	Pitch/roll	0.5 °
	Yaw	1.0 °

Tabla A.4: Especificaciones del IMU.

### SENSORES DE FUERZA

El robot humanoide cuenta con sensores modelo A201 de *FlexiForce* con el objetivo de medir fuerzas con un máximo de 445 N (0-100lb). Estos sensores son pequeños y flexibles, fáciles de usar además de su bajo costo. Las especificaciones según el fabricante son mostradas en la Tabla A.5.

	Rendimiento Típico
Linealidad (Error)	< ±3 %
Repetibilidad	< ±2,5 % de gran escala
Histéresis	< 4,5 % de gran escala
Drift	< 5 % según escala de tiempo logaritmico
Tiempo de Respuesta	< 5 μsegundos
Temperatura de Operación	-40° - 60°

Tabla A.5: Sensores de fuerza.

Que están conectados según muestra la Figura A.7.

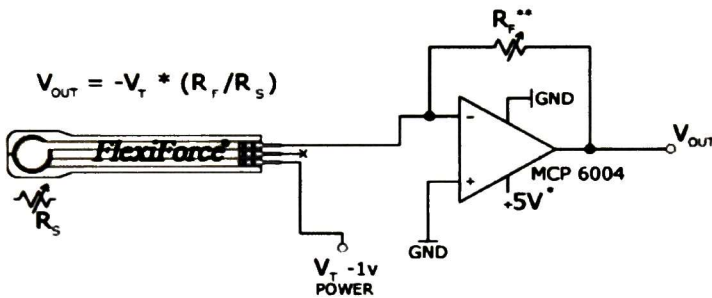


Figura A.7: Circuito de los sensores de fuerza.

Conociendo todos estos datos, se procede a caracterizar el sensor. Debido a que los sensores *FlexiForce* cuentan con un área de sensado circular de 9,53 mm de diámetro y solo son capaces de medir la componente perpendicular de una fuerza, es necesario aplicar dicho esfuerzo de manera vertical a la superficie de sensado. Para la caracterización correcta del sensor se utiliza un dispositivo calibrador, el cual consiste en una palanca que en uno de sus extremos cuenta con un tornillo perpendicular al eje de la misma con un diámetro de 9,525mm, mismo que cubre la superficie activa del sensor. Previo a la caracterización del sensor, se lleva a cabo una calibración; consiste en colocar tres veces durante aproximadamente quince segundos el 110 % del máximo a medir, es decir 44 libras.

El proceso de caracterización consiste en colocar pesos conocidos en el extremo contrario al de la ubicación del sensor y aumentar el peso de manera gradual y medir la tensión que genera el sensor. Los resultados obtenidos de cada uno de los dieciséis sensores se muestran en la Tabla A.6. La variación observada es debido a las propiedades intrínsecas de construcción del sensor, y según a los materiales utilizados tienen una tolerancia similar a los resistores.

A partir de estos datos, se obtiene una función del tipo

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \tag{A.1}$$



donde  $a_3$ ,  $a_2$ ,  $a_1$  y  $a_0$  son constantes de interpolación,  $x$  es el valor del voltaje que se obtiene del sensor y  $f(x)$  el valor en gramos. Usando la función "polyfit" de *MatLab* se obtienen las constantes de interpolación. Las Figuras A.10 y A.11 muestran las gráficas obtenidas de la función de los sensores asignados a la pierna derecha y a la pierna izquierda respectivamente.

Hay ocho sensores de fuerza por cada pie ubicados como se muestra en la Figura A.8. Esta distribución es de vital importancia para la medición de la proyección de las fuerzas en

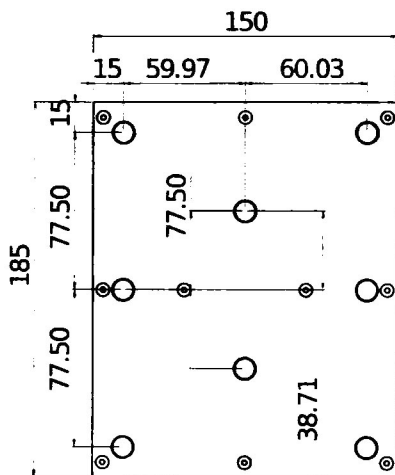


Figura A.8: Distancia entre los sensores de fuerza.

el eje  $z$  respecto al marco de referencia global y es la más óptima según el análisis de fuerzas de la Figura A.9, ya que se quiere imitar el caminado humano, se examinan los puntos donde existe más presión en el pie de un ser humano [33].

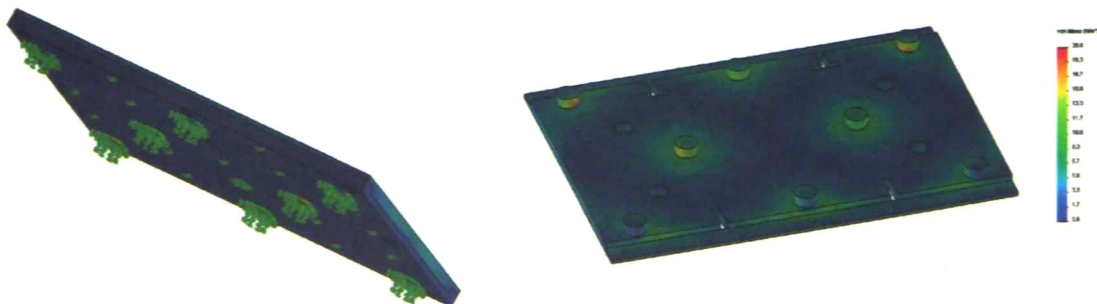


Figura A.9: Análisis de la proyección de las fuerzas en cada sensor, con una fuerza distribuida en la plantilla de 100 N.

Peso	Valor de Tensión (mV)															
	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	R8	L1	L2	L3	L4	L5	L6	L7	L8
0	0.002	0.001	0.002	0.008	0.003	0.000	0.001	0.001	0.000	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.000
100	0.066	0.065	0.110	0.070	0.149	0.040	0.088	0.045	0.036	0.020	0.019	0.025	0.018	0.049	0.030	0.010
2954	0.600	0.625	0.643	0.601	0.822	0.393	0.565	0.270	0.290	0.307	0.225	0.328	0.226	0.694	0.247	0.081
5274	0.625	1.144	1.187	1.005	1.389	0.740	0.926	0.461	0.472	0.512	0.404	0.630	0.407	1.021	0.444	0.158
7688	1.100	1.629	1.557	1.442	1.903	0.990	1.268	0.664	0.723	0.740	0.616	0.900	0.563	1.291	0.691	0.257
10095	1.555	2.083	2.003	1.830	2.398	1.288	1.568	0.913	0.955	0.930	0.830	1.146	0.747	1.337	0.907	0.381
10595	2.060	2.193	2.082	1.906	2.515	1.329	1.650	0.994	0.976	0.984	0.852	1.175	0.782	1.377	0.915	0.392
11095	2.122	2.274	2.150	1.970	2.603	1.377	1.706	1.066	1.002	1.007	0.864	1.215	0.836	1.420	0.943	0.421
11595	2.199	2.355	2.225	2.027	2.677	1.425	1.758	1.134	1.127	1.040	0.898	1.258	0.857	1.485	0.971	0.406
12095	2.285	2.437	2.300	2.093	2.750	1.487	1.812	1.205	1.154	1.071	0.926	1.286	0.895	1.525	1.021	0.444
12595	2.350	2.508	2.421	2.164	2.829	1.533	1.867	1.271	1.170	1.124	0.968	1.314	0.944	1.550	1.010	0.502
13095	2.421	2.606	2.503	2.223	2.916	1.619	1.922	1.379	1.188	1.175	0.980	1.354	0.944	1.621	1.080	0.482
13595	2.607	2.674	2.582	2.291	3.006	1.674	1.968	1.463	1.218	1.192	1.006	1.391	0.956	1.652	1.216	0.522
14095	2.682	2.750	2.654	2.366	3.081	1.720	2.021	1.545	1.230	1.215	1.041	1.425	0.986	1.720	1.202	0.537
14595	2.786	2.822	2.793	2.445	3.208	1.769	2.090	2.173	1.250	1.241	1.076	1.640	1.007	1.766	1.250	0.595
15095	2.862	2.904	2.882	2.524	3.281	1.860	2.139	2.265	1.275	1.393	1.130	1.665	1.034	1.870	1.322	0.577
15595	2.943	2.961	2.965	2.580	3.362	1.964	2.190	2.346	1.315	1.465	1.175	1.717	1.064	1.905	1.370	0.635
16095	3.010	3.070	3.034	2.632	3.435	2.029	2.239	2.421	1.333	1.474	1.195	1.737	1.077	1.931	1.402	0.630
16595	3.154	3.143	3.165	2.695	3.522	2.073	2.275	2.513	1.346	1.495	1.236	1.757	1.095	1.963	1.430	0.658
17095	3.223	3.217	3.233	2.742	3.622	2.119	2.350	2.595	1.372	1.540	1.325	1.811	1.115	2.025	1.466	0.664
17595	3.278	3.308	3.301	2.808	3.680	2.170	2.360	2.682	1.415	1.582	1.357	1.840	1.137	2.057	1.482	0.682
18095	3.380	3.369	3.420	2.872	3.756	2.215	2.414	2.765	1.445	1.580	1.371	1.877	1.162	2.100	1.530	0.700

Tabla A.6: Valores obtenidos del proceso de caracterización.

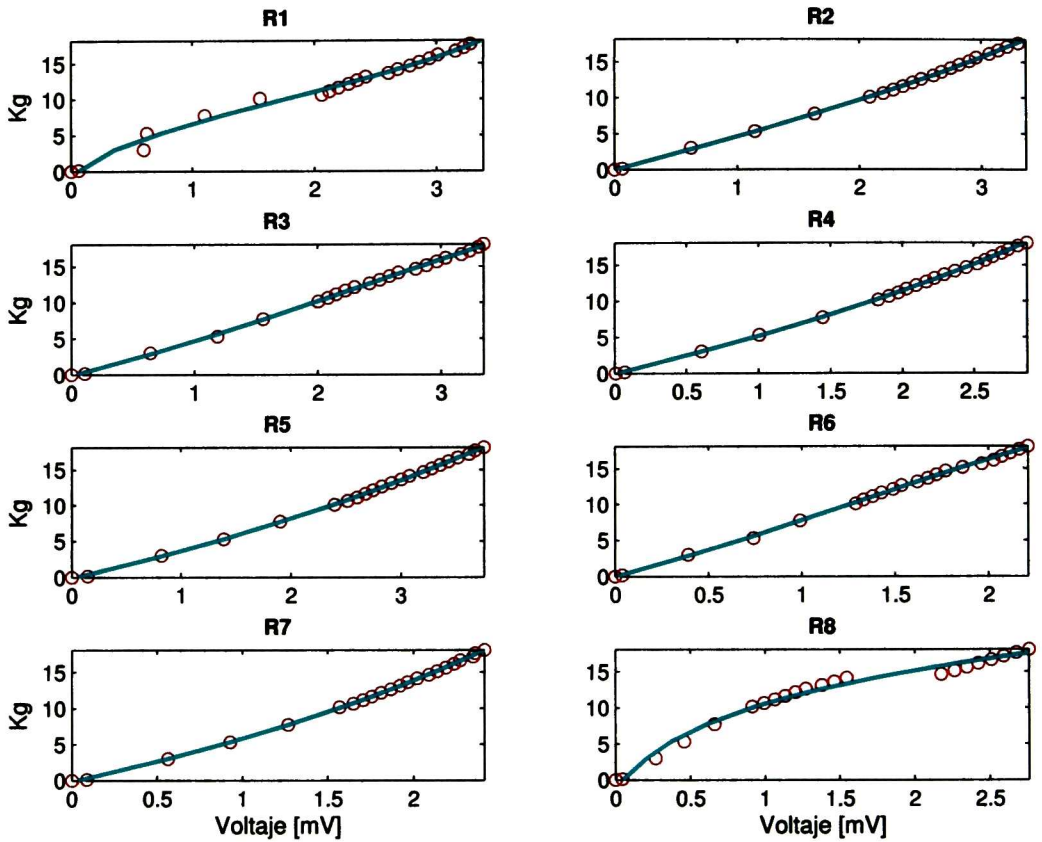


Figura A.10: Gráficas de la función polinómica de tercer grado para los sensores de la pierna derecha.

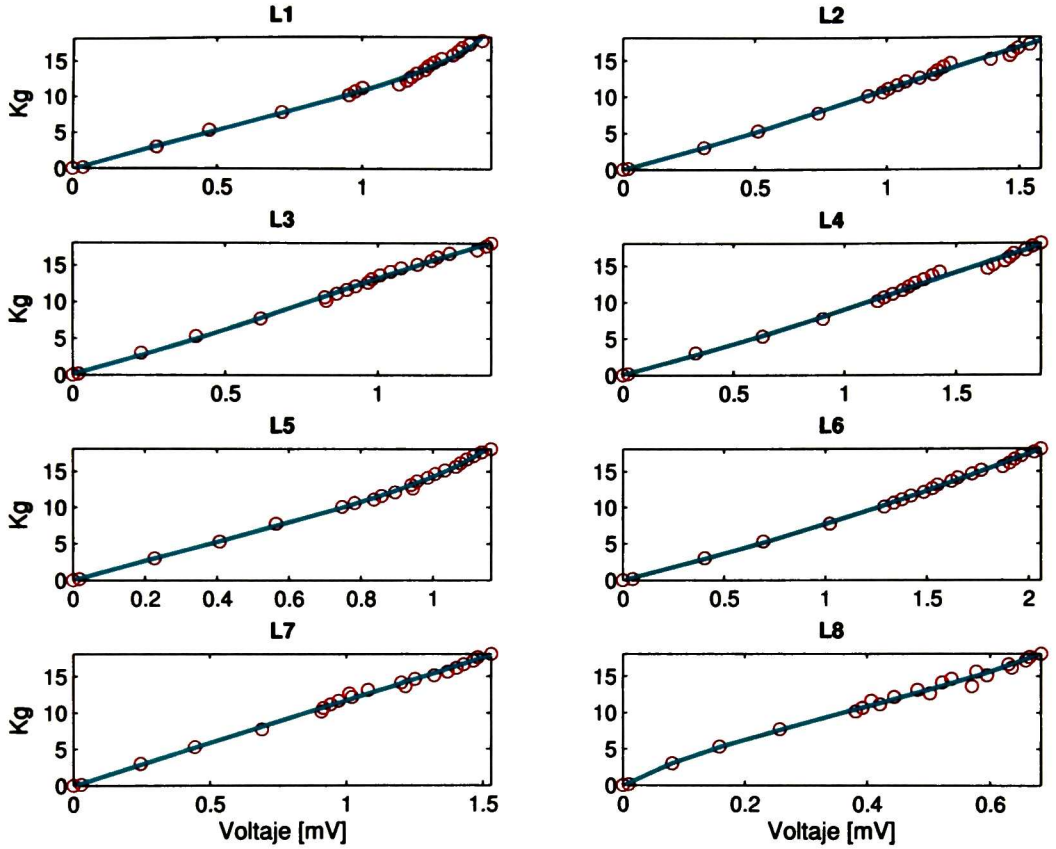


Figura A.11: Gráficas de la función polinómica de tercer grado para los sensores de la pierna izquierda.

### A.3. Actuadores

Cada grado de libertad de la parte baja del *MexOne* es impulsado por motores eléctricos marca *Dynamixel* modelo MX-106R. La Tabla A.7 se muestran las especificaciones de cada motor.

	Unidad	Datos
Peso	gramos	153
Dimensión	mm	40.2 x 65.1 x 46
Relación de Transmisión	material	225:1 (Spur/Metal)
Conexión	–	RS-485
Resolución del Sensor (Encoder)	–	Encoder Absoluto (360°/4096)
Motor	–	Maxon Motor
Voltaje de Operación	V	10 – 14.8
Par Nominal	N·m	8.4 a 12V
Corriente Nominal	A	5.2 a 12V
Velocidad sin Carga	RPM	

Tabla A.7: Especificaciones motores MX-106R

Todos los motores se comunican con una velocidad de transmisión de 1000000.0 BPS, un tiempo de retorno establecido de 10 micro-segundos con alarmas activadas para máximo par aplicado, máxima temperatura y mala escritura de instrucción. La distribución de los motores en la estructura de las piernas y cadera del prototipo es mostrada en la Tabla A.8.

Motor ID	Ubicación	Modo	Posición Inicial	Sentido de Giro	Motor ID	Ubicación	Modo	Posición Inicial	Sentido de Giro
20	derecha_q1	M	2120	positivo	31	izquierda_q2	M	2096	negativo
21	derecha_q2	E	–	–	32	izquierda_q2	E	–	–
22	derecha_q2	M	2003	negativo	33	izquierda_q3	M	2048	positivo
23	derecha_q3	E	2048	positivo	34	izquierda_q4	M	1950	negativo
24	derecha_q4	M	2070	negativo	35	izquierda_q4	E	–	–
25	derecha_q4	E	–	–	36	izquierda_q5	E	–	–
26	derecha_q5	M	2050	positivo	37	izquierda_q5	M	2052	negativo
27	derecha_q5	E	–	–	38	izquierda_q6	M	2020	negativo
28	derecha_q6	E	–	–	39	izquierda_q6	M	–	–
29	derecha_q6	M	2048	negativo	18	Base	E	–	–
30	izquierda_q1	M	2237	positivo	19	Base	M	1766	negativo

M: Maestro E: Esclavo.

Tabla A.8: Distribución de los actuadores

Se usan las ecuaciones de factor de conversión para escribir las palabras usando la API

que provee *Dynamixel*, dado una posición deseada (ángulo) y una velocidad deseada (rpm)

$$\text{posición deseada} = \text{posición inicial} + \left( \left( (\text{ángulo}) \left( \frac{180}{\pi} \right) \left( \frac{4095}{360} \right) \right) (\text{sentido de giro}) \right) \quad (\text{A.2})$$

$$\text{velocidad deseada} = \frac{((\text{velocidad}) (0,159154943)(60)) (1023)}{64} \quad (\text{A.3})$$

Finalmente, los motores cuentan con un controlador PID por hardware distribuido como se muestra en la Imagen A.12. Las ganancias proporcional, integral y derivativa, fueron calibradas usando el método de Ziegler–Nichols [34]. donde  $K_u$  ganancia de oscilación fue 120 y  $T_u$  el periodo de oscilación de 0.8 segundos. Quedando finalmente la ganancia proporcional en 27, la ganancia integral 9 y la ganancia derivativa 20. El desempeño antes y después del tuning de las ganancias se muestran en las gráficas de las Figuras A.13 y A.14.

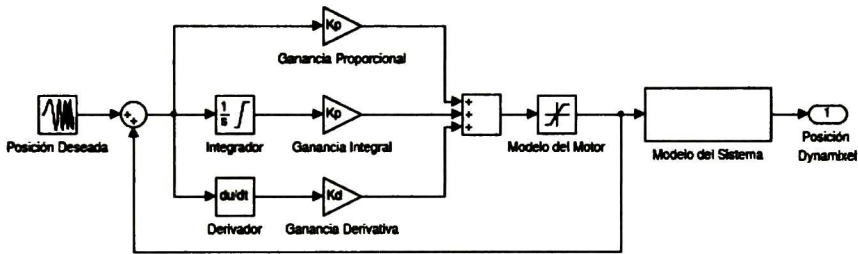


Figura A.12: Controlador motor MX-106R.

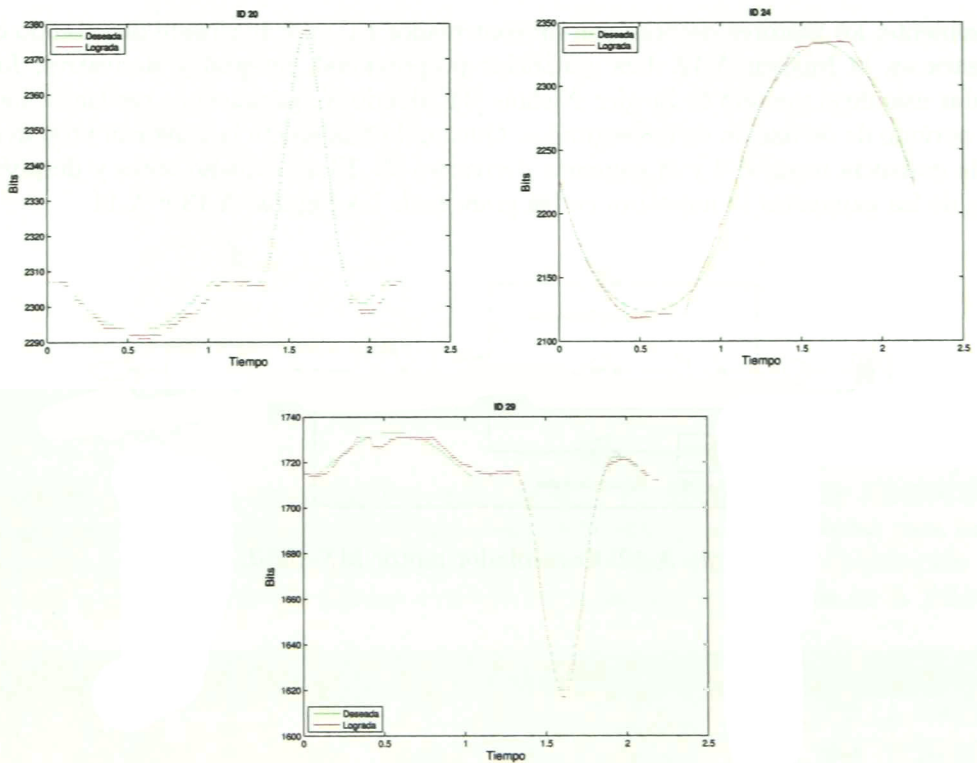


Figura A.13: Resultados del seguimiento de trayectorias sin ganancia PID.

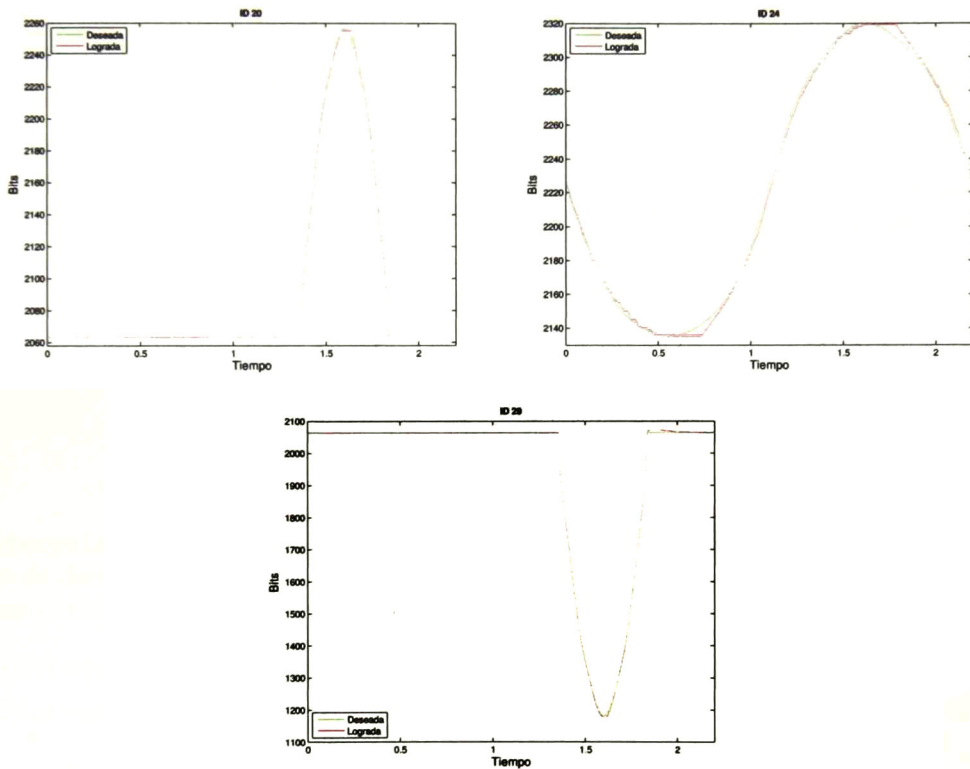


Figura A.14: Resultados del seguimiento de trayectorias con ganancia PID.



## Apéndice B

# Implementación en el prototipo

Se usan las librerías estándar (STL) del lenguaje de programación C++ para implementar los algoritmos que se exponen en el Capítulo 3, los cuales se dividen en las siguientes librerías,

`Interpolation.h`  
`WalkingSolver.h`  
`IKSolver.h`  
`DynamixelMexOne.h`  
`ZMP.h`  
`controlLib.h`.

`Interpolation.h` se encarga de implementar el proceso de interpolación, es decir, dado  $\eta$  puntos de datos,  $(x_1, y_1), \dots, (x_\eta, y_\eta)$ , una función *spline* cubica monotona [25] es una función a trozos definida de la forma:

$$S_1(x) = y_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 + d_1(x - x_1)^3 \quad \forall x \in [x_1, x_2] \quad (\text{B.1})$$

$$S_1(x) = y_2 + b_2(x - x_2) + c_2(x - x_2)^2 + d_2(x - x_2)^3 \quad \forall x \in [x_2, x_3]$$

$\vdots = \vdots$

$$S_{\eta-1}(x) = y_{\eta-1} + b_{\eta-1}(x - x_{\eta-1}) + c_{\eta-1}(x - x_{\eta-1})^2 + d_{\eta-1}(x - x_{\eta-1})^3 \quad \forall x \in [x_{\eta-1}, x_\eta].$$

Las  $3\eta - 3$  incógnitas (*b's*, *c's*, *d's*) son elegidas para satisfacer las siguientes restricciones de interpolación y suavidad:

- Condiciones de Interpolación

$$S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_i + 1) = y_{i+1} \quad (\text{B.2})$$

- Condición de Suavidad

$$S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1}) \quad (\text{B.3})$$

- Condición de Suavidad

$$S''_i(x_{i+1}) = S''_{i+1}(x_{i+1}) \quad (\text{B.4})$$

- *Not-A-Knot*

$$S'''_1(x_2) = S'''_2(x_2) \quad S'''_{\eta-2}(x_{\eta-2}) = S'''_{\eta-1}(x_{\eta-2}) \quad (\text{B.5})$$

La implementación en lenguaje C se basa en [35].

Se define entonces los  $n$  parámetros de entrada, donde  $n$  es el número de pasos,

$$[x_1 = 0, \quad x_1 = T_{sgl}, \quad x_2 = x_1 + T_{dbl}, \quad \dots, \quad x_{n-1} = x_{n-2} + T_{sgl} \quad x_n = x_{n-1} + T_{dbl}] \quad (\text{B.6})$$

para el plano sagital,

$$[y_1 = 0, \quad y_2 = p_x^{(1)}, \quad y_3 = p_x^{(1)}, \quad \dots, \quad y_{n-1} = y_{n-2} + p_x^{(n)} \quad y_n = y_{n-1} + p_x^{(n)}] \quad (\text{B.7})$$

para el plano frontal.

$$[y_1 = 0, \quad y_2 = p_y^{(1)}, \quad y_3 = p_y^{(1)}, \quad \dots, \quad y_{n-2} = -p_y^{(n)} \quad y_{n-1} = -p_y^{(n)} \quad y_n = 0] \quad (\text{B.8})$$

**WalkingSolver.h** se encarga de la implementación del algoritmo presentado en la Sección 3.1, en específico la solución de la Ecuación (3.3).

**IKSolver.h** implementa en lenguaje C++ la cinemática inversa de la Sección 3.3.1, donde la entrada es la referencia de la pose del cuerpo y la referencia de la pose del pie,  $y$  y la salida son doce cantidades de rotación para cada unión del robot bípedo humanoide para lograr las poses deseadas.

**DynamixelMexOne.h** funciona como una interfaz entre los valores generados y la API provista por *Dynamixel* para los sistemas de actuación. Es decir, según los parámetros de calibración se suma o resta la cantidad de rotación obtenida por la cinemática inversa y se convierte a bits según la resolución de cada actuador y se envía a los motores. Además se usa el kernel de linux para asegurar que el paso de discretización sea el indicado.

**ZMP.h** obtiene el *ZMP*. Usando la API de *phidget* se obtiene la magnitud de fuerza de cada sensor y aplicando la interpolación descrita en el Apéndice A se encuentra una estimación

validada de la proyección de las fuerzas del robot humanoide con respecto al piso. Conociendo la posición euclidiana de cada sensor se calcula el *ZMP* para cada pie de la forma

$$zmp_{x_1} = \frac{\sum_{h=1}^H p_{hx} f_{hz}}{\sum_{h=1}^H f_{hz}} \quad (\text{B.9})$$

donde,  $h$  es el número de sensores,  $p_{hx}$  y  $f_{hz}$  es la posición en la coordenada  $x$  y fuerza, respectivamente del  $h$ -ésimo sensor.

Para calcular el *ZMP* de los dos pies se usa

$$zmp_x = \frac{zmp_{R_x} f_R + zmp_{L_x} f_L}{f_R + f_L} \quad (\text{B.10})$$

donde  $zmp_{R_x}$  es la posición del *ZMP* respecto al marco global de coordenadas y  $f_R$  la fuerza de reacción del pie derecho. La posición del *ZMP* en la coordenada  $y$  se trata de la misma manera.

`controlLib.h` implementa los algoritmos de control de la Sección 3.2.2, donde la integral se aproxima por el método de Euler [36].

$$\int f(x) = x_0 + f(x)\Delta t \quad (\text{B.11})$$

En la Imagen B.1 se muestra un diagrama de interacción entre las librerías para la implementación en línea con el prototipo *MexOne*.

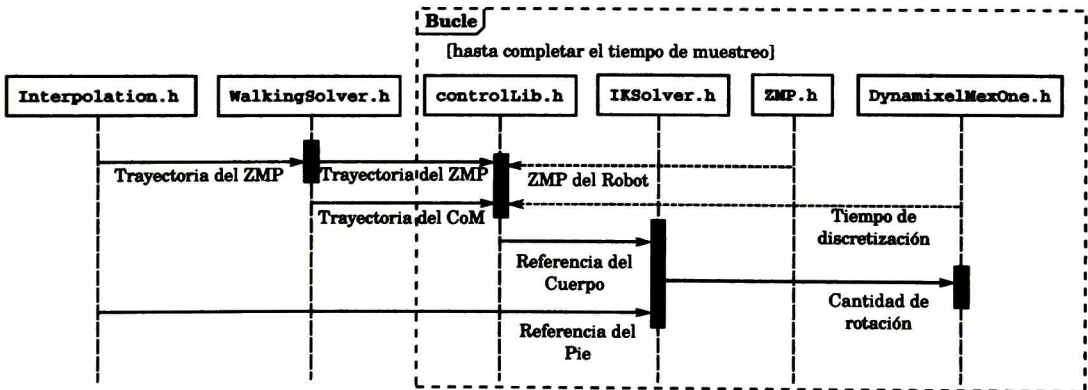


Figura B.1: Interacción entre librerías.

## B.1. Calibración del prototipo

Antes de iniciar con el experimento, el robot humanoide bípedo *MexOne* debe cumplir ciertos requisitos para que el experimento funcione de manera adecuada y se obtengan los resultados esperados. En primer lugar se debe asegurar que las posiciones iniciales de los actuadores cumplan con que los puntos A, B, C, D y E de la Figura B.2 sean paralelos entre si y ortogonales al plano sagital. Los puntos F, G, H y I de la Imagen B.2 deberán ser paralelos entre si y ortogonales al plano frontal. Para lograr de manera mas eficiente estas restricciones, se diseño la aplicación mostrada en la Figura B.3.

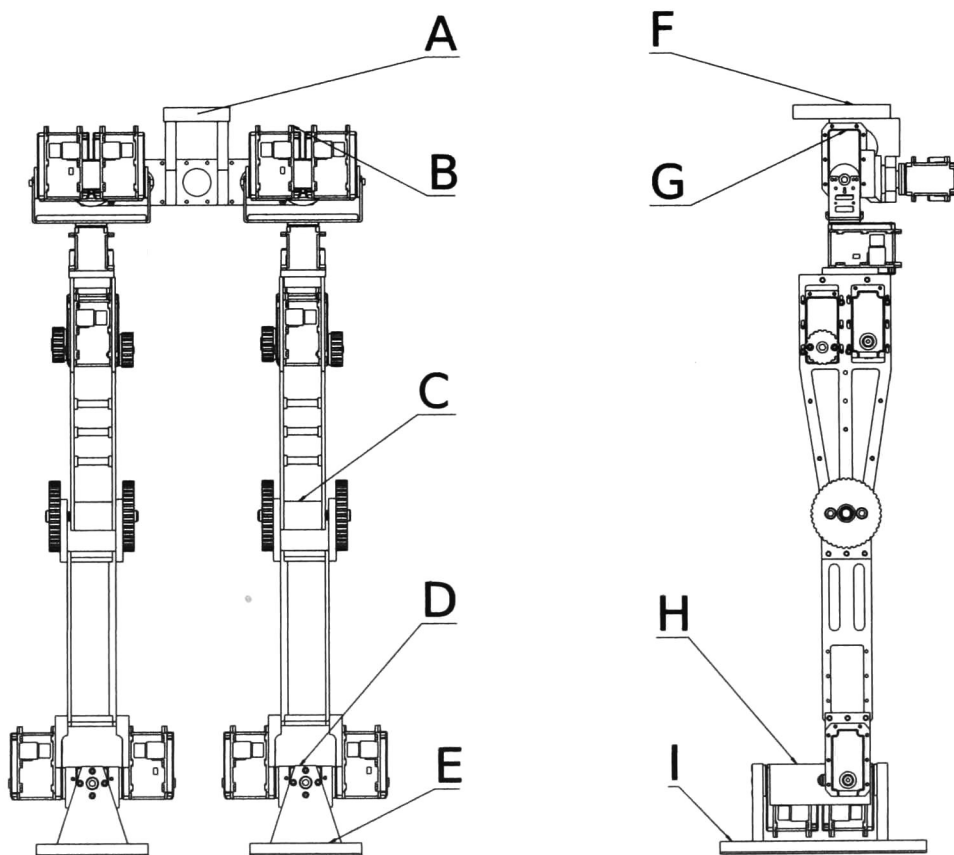


Figura B.2: Puntos de calibración de uniones.

Finalmente se debe asegurar que todos los sensores de fuerza montados en las plantas de los pies del humanoide *MexOne* estén todos en contacto con el suelo con la misma presión antes de montarlas al robot humanoide.



Figura B.3: Interfaz gráfica para el calibrado de uniones.

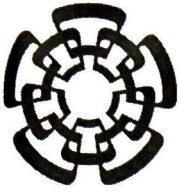
# Bibliografía

- [1] K. Hirai, M. Hirose, Y. Haikawa, and T. Takenaka. The development of honda humanoid robot. In *Robotics and Automation, 1998. Proceedings. 1998 IEEE International Conference on*, volume 2, pages 1321–1326. IEEE, 1998.
- [2] A. Takanishi. The realization of dynamic walking by the biped walking robot. In *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 459–466, 1985.
- [3] H. Miura and I. Shimoyama. Dynamic walk of a biped. *The International Journal of Robotics Research*, 3(2):60–74, 1984.
- [4] Y. Okumura, T. Tawara, K. Endo, T. Furuta, and M. Shimizu. Realtime zmp compensation for biped walking robot using adaptive inertia force control. In *Intelligent Robots and Systems, 2003.(IROS 2003). Proceedings. 2003 IEEE/RSJ International Conference on*, volume 1, pages 335–339. IEEE, 2003.
- [5] M. Kumagai and T. Emura. Sensor-based walking of human type biped robot that has 14 degree of freedoms. In *Mechatronics and Machine Vision in Practice, 1997. Proceedings., Fourth Annual Conference on*, pages 112–117. IEEE, 1997.
- [6] G. Taga, Y. Yamaguchi, and H. Shimizu. Self-organized control of bipedal locomotion by neural oscillators in unpredictable environment. *Biological cybernetics*, 65(3):147–159, 1991.
- [7] R. Tedrake, T. W. Zhang, and H. S. Seung. Stochastic policy gradient reinforcement learning on a simple 3d biped. In *Intelligent Robots and Systems, 2004.(IROS 2004). Proceedings. 2004 IEEE/RSJ International Conference on*, volume 3, pages 2849–2854. IEEE, 2004.
- [8] C. Chevallereau, G. Bessonnet, G. Abba, and Y. Aoustin. *Bipedal Robots: Modeling, Design and Walking Synthesis*. John Wiley & Sons, New York City, USA, 2013.
- [9] S. Kajita, H. Hirukawa, K. Harada, and K. Yokoi. *Introduction to Humanoid Robotics*. Springer, N.J., USA, 2014.

- [10] W. M. Spong and M. Vidyasagar. *Robot Dynamics and Control*. John Wiley & Sons, New York City, USA, 2008.
- [11] E. Ayyappa. Normal human locomotion, part 1: Basic concepts and terminology. *JPO: Journal of Prosthetics and Orthotics*, 9(1):10–17, 1997.
- [12] J. Yamaguchi, E. Soga, S. Inoue, and A. Takanishi. Development of a bipedal humanoid robot-control method of whole body cooperative dynamic biped walking. In *Robotics and Automation, 1999. Proceedings. 1999 IEEE International Conference on*, volume 1, pages 368–374. IEEE, 1999.
- [13] T. Sugihara, Y. Nakamura, and H. Inoue. Real-time humanoid motion generation through zmp manipulation based on inverted pendulum control. In *Robotics and Automation, 2002. Proceedings. ICRA'02. IEEE International Conference on*, volume 2, pages 1404–1409. IEEE, 2002.
- [14] S. Kajita and K. Tani. Study of dynamic biped locomotion on rugged terrain-derivation and application of the linear inverted pendulum mode. In *Robotics and Automation, 1991. Proceedings., 1991 IEEE International Conference on*, pages 1405–1411. IEEE, 1991.
- [15] S. Kajita, F. Kanehiro, K. Kaneko, K. Yokoi, and H. Hirukawa. The 3d linear inverted pendulum mode: a simple modeling for a biped walking pattern generation. In *Intelligent Robots and Systems, 2001. Proceedings. 2001 IEEE/RSJ International Conference on*, volume 1, pages 239–246 vol.1, 2001.
- [16] M. Vukobratovic and B. Borovac. Zero-moment point-thirty five years of its life. *International Journal of Humanoid Robotics*, 1(01):157–173, 2004.
- [17] H. K. Khalil and J. W. Grizzle. *Nonlinear Systems*, volume 3. Prentice Hall, New Jersey, USA, 1996.
- [18] JF. Barrett. Bibliography of am lyapunov's work. *International Journal of Control*, 55(3):785–790, 1992.
- [19] V. Utkin, J. Guldner, and J. Shi. *Sliding Mode Control in Electro-mechanical Systems*, volume 34. CRC press, USA, 2009.
- [20] Y. Shtessel, C. Edwards, L. Fridman, and A. Levant. *Sliding Mode Control and Observation*. Control Engineering. Birkhäuser, Switzerland, 2013.
- [21] C. Edwards and S. Spurgeon. *Sliding Mode Control: Theory and Applications*. CRC Press, USA, 1998.

- [22] E. Bayro-Corrochano. *Geometric Computing: for Wavelet Transforms, Robot Vision, Learning, Control and Action*. Springer, N.J., USA, 2010.
- [23] H. Li, D. Hestenes, and A. Rockwood. Generalized homogeneous coordinates for computational geometry. In *Geometric Computing with Clifford Algebras*. G. Sommer (Ed.), pages 27–59. Springer, 2001.
- [24] A. Hornby, S. Sydney, et al. Oxford advanced learner’s dictionary. 51:1, 2005.
- [25] F. N. Fritsch and R. E. Carlson. Monotone piecewise cubic interpolation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 17(2):238–246, 1980.
- [26] K. Harada, S. Kajita, K. Kaneko, and H. Hirukawa. An analytical method for real-time gait planning for humanoid robots. *International Journal of Humanoid Robotics*, 3(01):1–19, 2006.
- [27] S. Kajita, F. Kanehiro, K. Kaneko, K. Fujiwara, K. Harada, K. Yokoi, and H. Hirukawa. Biped walking pattern generation by using preview control of zero-moment point. In *Robotics and Automation, 2003. Proceedings. ICRA '03. IEEE International Conference on*, volume 2, pages 1620–1626 vol.2, Sept 2003.
- [28] T. Kailath. *Linear Systems*, volume I. Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, USA, 1980.
- [29] C. T. Chen. *Linear System Theory and Design*. Oxford Series in Electrical and Computer Engineering. Oxford University Press, England, 1984.
- [30] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Communications and Control Engineering. Springer, London, England, 1995.
- [31] A. Levant. Principles of 2-sliding mode design. *Automatica*, 43(4):576–586, 2007.
- [32] J. Park. Synthesis of natural arm swing motion in human bipedal walking. *Journal of biomechanics*, 41(7):1417–1426, 2008.
- [33] J. Daunoraviciene. Analysis of the plantar pressure distribution in children with foot deformities. *Acta Bioeng Biomech*, 12(1):29–34, 2010.
- [34] J. G. Ziegler and N. B. Nichols. Optimum settings for automatic controllers. *trans. ASME*, 64(11), 1942.
- [35] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery. *Numerical Recipes in C*, volume 2. Cambridge university press, Cambridge, England, 1996.
- [36] U. M. Ascher and L. R. Petzold. *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations*, volume 61. Siam, USA, 1998.





# CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL I.P.N. UNIDAD GUADALAJARA

El Jurado designado por la Unidad Guadalajara del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional aprobó la tesis

Generación de Trayectorias para un Robot Humanoide

del (la) C.

Leobardo Emmanuel CAMPOS MACÍAS

el día 11 de Septiembre de 2015.

Dr. Edgar Nelson Sánchez Camperos  
Investigador CINVESTAV 3E  
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. Eduardo José Bayro Corrochano  
Investigador CINVESTAV 3D  
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. Alexander Georgievich Loukianov  
Investigador CINVESTAV 3C  
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. Luis Enrique González Jiménez  
Profesor Investigador Asociado A  
ITESO



CINVESTAV - IPN  
Biblioteca Central



SSIT0013502