CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

Concepciones de estudiantes de ingeniería sobre la conexión entre integración y derivación, y su relación con el razonamiento

TESIS

Que presenta

OMAR ARENAS BONIFACIO

Para obtener el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS

EN LA ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

Directores de Tesis:

Dr. Ernesto Alonso Sánchez Sánchez

Dr. Mario Sánchez Aguilar

Ciudad de México

MAYO, 2021

Agradecimientos

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico proporcionado para la realización de mis estudios de maestría, los cuales culminan con el presente trabajo de tesis.

También quiero agradecer al Dr. Ernesto Sánchez Sánchez y al Dr. Mario Sánchez Aguilar por su dedicación y paciencia en la dirección de este trabajo. Sin su apoyo no se hubiera obtenido este resultado.

Agradezco al Dr. Gonzalo Zubieta Badillo y al Dr. Jesús Salinas Herrera por su valioso apoyo en la revisión de la versión previa de esta investigación. Sus observaciones fueron de gran ayuda para realizar la versión final.

También agradezco a mi esposa Maricela Posadas Pineda y a mis familiares, por la motivación y el apoyo que me brindaron mientras realizaba los estudios de maestría.

Concepciones de estudiantes de ingeniería sobre la conexión entre integración y derivación, y su relación con el razonamiento

Resumen

Según Sofronas et al. (2011), uno de los objetivos del curso de cálculo de primer año de licenciatura debe ser la construcción de conexiones y relaciones entre y a través de conceptos y/o habilidades centrales (derivada, integral, límite, series y sucesiones, y aproximación). Siendo el primer teorema fundamental, un constructo que muestra tal relación. Sin embargo, dicho tema es complejo. Por ello, se realiza la presente investigación para identificar algunos elementos a incluir en el diseño de una propuesta de instrucción que busque mejorar la comprensión de los estudiantes sobre dicho teorema. Se identifican algunas concepciones que manifiestan los estudiantes sobre la relación entre integración y derivación y se relacionan estas concepciones con su razonamiento. En el estudio participaron 18 estudiantes (18-21 años) de ingeniería de una universidad privada ubicada en la Ciudad de México. El instrumento consiste en un cuestionario de tres problemas. El método utilizado es estudio de caso, mientras que para el análisis de los datos se empleó la codificación y categorización (que forma parte de los procedimientos de la teoría fundamentada). Este método consiste, a grandes rasgos, en codificar las respuestas de cada participante y agruparlas en categorías de acuerdo con sus similitudes. A través de las categorías formadas, se propusieron tres niveles de razonamiento (procedimental, pre-operacional o declarativo y operacional) y se identificaron tres concepciones (dos del nivel pre-operacinal y una del nivel operacional). Las dos concepciones del razonamiento pre-operacional, que originaron respuestas incorrectas, pueden expresarse de la siguiente manera: “acumulación de una función razón de cambio” e “integración y derivación son operaciones inversas (como elevar al cuadrado y sacar raíz cuadrad con números positivos)”. Mientras que la concepción del nivel operacional puede expresarse como “derivada de la integral es igual al integrando evaluado en el límite superior de la integral”.

Palabras clave: concepción, razonamiento, primer teorema fundamental del cálculo

Engineering students' conceptions of the connection between integration and derivation, and its relation to reasoning

Abstract

According to Sofronas et al. (2011), one of the goals of the first year of undergraduate calculus course should be the construction of connections and relationships between and through core concepts and/or skills (derivative, integral, limit, series and sequences, and approximation). Being the first fundamental theorem, a construct that shows such a relationship. However, such a topic is complex. Therefore, the present research is carried out to find some elements to include in the design of an instruction proposal that seeks to improve students' understanding of this theorem. Some conceptions expressed by students about the relationship between integration and derivation are identified and these conceptions are related to their reasoning. The study involved 18 engineering students (18-21 years old) from a private university located in Mexico City. The instrument consists of a questionnaire with three problems. The method used is case study, while coding and categorization (part of the grounded theory procedures) were used for data analysis. This method basically consists of codifying the answers of each participant and grouping them into categories according to their similarities. Through the formed categories, three levels of reasoning (procedural, 'pre-operative' or declarative and operative) were proposed and three conceptions (two of the 'pre-operative' level and one of the operative level) were identified. Conceptions of 'pre-operative' reasoning, which gave rise to incorrect answers, can be expressed as follows: "accumulation of a change ratio function" and "integration and derivation are inverse operations (such as squaring and computing out square root with positive numbers)". While the conception of the operative level can be expressed as "the derivative of the integral is equal to the integrand evaluated in the upper limit".

Keywords: conception, reasoning, first fundamental theorem of calculus

CONTENIDO

Pág.

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

Pág.

Introducción

Según lo indican Spivak (1996), Apostol (1999), Courant y John (1999) y Stewart (2008) el primer teorema fundamental del cálculo es importante por el hecho de proporcionar una forma sencilla de calcular integrales. Además, Courant y John (1999) y Stewart (2008) consideran que otro aspecto de importancia de este teorema es mostrar el carácter inverso de las operaciones de integración y derivación.

Sofronas et al. (2011), como resultado de una encuesta a 24 expertos en matemáticas y cálculo, establecen cuatro objetivos finales del curso de cálculo universitario de primer año. Es decir, lo que los estudiantes deben saber y poder hacer al finalizarlo. Entre los objetivos, destaca la construcción de conexiones y relaciones entre y a través de conceptos y habilidades centrales, donde el primer teorema fundamental del cálculo es uno de los constructos que muestra esta conexión.

Por otra parte, Bressoud (2009, 2011, 2018) menciona que uno de los aspectos importantes del primer teorema fundamental es que muestra la existencia de dos maneras de calcular una integral: con el límite de una suma de Riemann y con una antiderivada[1]. Pues el teorema explícitamente dice que la integral de una función es una antiderivada de esta, lo que nos da una forma de obtener la integral (pues cada formula de derivación conocida nos proporciona una fórmula de antiderivación, y por lo que establece el primer teorema fundamental del cálculo, una fórmula de integración). Mientras que la otra forma, podríamos decir, está implícita, pues es un teorema que trata de integración y este concepto se define como el límite de una suma de Riemann ($\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x$, donde $\Delta x = \frac{b-a}{n}$), y tal definición representa una forma de obtener una integral.

La idea de Bressoud (2009, 2011, 2018) está en línea con el hecho de que el teorema proporciona una forma de calcular integrales de forma sencilla, que es el aspecto que Spivak (1996), Apostol (1999), Courant y John (1999) y Stewart (2008) consideran de importancia.

[1] La antiderivada o primitiva de una función f es una función F tal que al derivarla se obtiene f, es decir que $F' = f$.

Se debe mencionar que otro objetivo, obtenido por Sofronas et al. (2011), es el dominio de conceptos y/o habilidades centrales. En estos se incluye los conceptos de derivada e integral, que son conceptos que relaciona directamente el primer teorema fundamental del cálculo. Otros conceptos de este objetivo son: limite, series y sucesiones, y aproximación. Para el caso de la derivada, consiste en la facilidad para calcular derivadas, la comprensión de la derivada como razón de cambio y representación gráfica de la derivada. Para la integral, se trata de la facilidad con las técnicas de integración, comprensión de la integral como un cambio neto o cambio total acumulado y la interpretación de la integral como área.

Por su parte, Thompson y Silverman (2008) reportan que la noción de acumulación es fundamental para comprender el concepto de integración, otros conceptos del cálculo y sus aplicaciones. Mientras que Larsen, Marrongelle, Bressoud, y Graham. (2017) sugieren que es necesario entender el concepto de razón de cambio antes de comprender el concepto derivada. Por lo tanto, se puede decir que las nociones de acumulación y razón de cambio son importantes para entender el primer teorema fundamental del cálculo, dado que este teorema establece la relación entre los conceptos de integral y derivada. Además, Thompson (1994) señala que "El teorema fundamental del cálculo [primer teorema], la comprensión de que la acumulación de una cantidad y la tasa de cambio de su acumulación están estrechamente relacionadas, es una de las características intelectuales en el desarrollo del cálculo" (p. 234)[2].

La NCTM (2009) menciona que el razonamiento y la creación de sentido debe ocurrir en las aulas de matemáticas de todos los días, ya que estos pueden ayudar a los estudiantes a organizar su conocimiento. Además, en el caso del cálculo, de acuerdo con los objetivos de aprendizaje de Sofronas et al. (2011) y los libros de Courant y John (1999) y Stewart (2008), el primer teorema fundamental del cálculo muestra la relación entre conceptos (relación entre integración y derivación, o entre acumulación y razón de cambio) y por lo tanto también puede ser útil para los estudiantes al organizar su conocimiento sobre cálculo.

Thompson (1994) menciona que las dificultades en la comprensión del primer teorema fundamental del cálculo se deben entre otras cosas a un concepto empobrecido de

[2] Las citas textuales de artículos en idioma inglés presentadas en este trabajo, corresponden con traducciones propias.

razón de cambio y comprensión débil de cantidades que se forman multiplicativamente (por ejemplo, $Distancia = velocidad \times tiempo$, $Área = base \times altura$).

Por su parte, Larsen et al. (2017) indican que el cálculo es una barrera para el progreso académico de muchos estudiantes por lo que hace falta investigación que busque mejorar su enseñanza y aprendizaje. Además, mencionan que es un curso fundamental en la mayoría de las carreras de ciencia e ingeniería.

Por ello, se realiza la presente investigación enfocándose en el primer teorema fundamental del cálculo, considerando que, de acuerdo con los objetivos de Sofronas et al. (2011) este tema relaciona los conceptos centrales del cálculo, por lo que puede ayudar a los estudiantes a organizar sus conocimientos de cálculo en general. De manera particular, en este estudio se exploran las concepciones que tienen los estudiantes de ingeniería sobre la relación entre las operaciones de integración y derivación (o entre acumulación y razón de cambio), establecida en el teorema fundamental del cálculo, y de qué manera éstas se relacionan con su razonamiento.

Las preguntas que guían este trabajo son las siguientes:

- ¿Qué concepciones sobre la relación entre integración y derivación (o entre acumulación y razón de cambio) se manifiestan en las respuestas de estudiantes de ingeniería, a problemas donde dicha relación está involucrada?
- ¿Qué niveles de razonamiento se identifican en las respuestas de estudiantes de ingeniería a problemas sobre el primer teorema fundamental del cálculo?

Respecto a la segunda pregunta, se considerará que los estudiantes tienen diferentes niveles de razonamiento, los cuales se manifiestan con diferentes grados de sofisticación en la argumentación de sus respuestas. Para proponer estos niveles, se pone la atención en los siguientes aspectos: uso de algoritmos, presentación de declaraciones sobre la aplicación de los conceptos a cierto contexto y sobre la relación entre integración y derivación, y la justificación de dichas declaraciones.

Los resultados de esta investigación pretenden aportar algunos elementos a considerarse en el diseño de una propuesta de instrucción sobre el primer teorema fundamental del cálculo para estudiantes de ingeniería. Elementos que junto con los que han sugerido otros investigadores y que se han mencionado en los párrafos anteriores de este capítulo, pueden ayudar a mejorar la comprensión del primer teorema fundamental del cálculo por parte de los estudiantes.

Capítulo 1. Antecedentes

Se presenta una reseña de algunas investigaciones en educación matemática sobre el primer teorema fundamental del cálculo a nivel universitario y un análisis de la forma en que se aborda dicho tema en algunos libros de cálculo. Cada uno de estos aspectos se trata en una sección diferente, por lo que este capítulo está dividido en dos secciones.

La mayoría de las investigaciones que se muestran, proponen una forma de instrucción del primer teorema fundamental del cálculo o de un curso de cálculo centrado en dicho teorema.

La revisión de la forma en que se aborda el primer teorema fundamental en algunos libros dirigidos a estudiantes universitarios tiene el propósito de clarificar lo que se considerará en este estudio como primer teorema fundamental del cálculo. Ya que como se verá en dicho análisis, los libros revisados difieren en la declaración de dicho teorema. La revisión incluye además los temas de integral y derivada ya que están estrechamente relacionados con el primer teorema fundamental del cálculo.

Investigaciones sobre el primer teorema fundamental del cálculo

Schoenfeld (2000) menciona que la investigación en educación matemática tiene dos propósitos principales: uno puro y otro aplicado. El propósito puro es comprender la naturaleza del pensamiento matemático, la enseñanza y el aprendizaje. Mientras que el aplicado es usar esa comprensión para mejorar la instrucción. De tal manera que se puede hablar de investigación pura o aplicada dependiendo del propósito que se persigue.

Además, Larsen et al. (2017) agrega que existen tres formas en las que la investigación aplicada puede ayudar a desarrollar propuestas para mejorar la instrucción:

> En primer lugar, la creación de innovaciones puede y debe basarse en los resultados de la investigación pura. En segundo lugar, los estudios de estudiantes y maestros involucrados en esfuerzos de innovación pueden producir hallazgos importantes con respecto a los desafíos y posibilidades de la implementación, detallando los posibles impactos de la intervención en el aprendizaje de los estudiantes y con respecto a las condiciones necesarias para lograr estos impactos. En tercer lugar, se pueden realizar estudios de eficacia y

> efectividad para evaluar hasta qué punto estas intervenciones logran sus objetivos en relación con otros enfoques de instrucción. (p. 527)

Tomando como base la distinción entre investigación básica y aplicada y las tres formas en que la investigación aplicada puede apoyar en el desarrollo de propuestas de instrucción (según Larsen et al. (2017)), se proponen cuatro categorías para agrupar los trabajos en educación matemática sobre el primer teorema fundamental del cálculo a nivel universitario. Las cuatro categorías son: investigación básica-aplicada, investigación aplicada, propuestas de instrucción y reflexión sobre la importancia del primer teorema fundamental del cálculo.

En seguida se describe cada categoría y se muestran las investigaciones que pertenecen a cada una.

Investigación básica-aplicada. Esta categoría engloba investigaciones en las que en un mismo trabajo se realiza tanto investigación básica como aplicada. Es decir, se realiza investigación básica que proporciona elementos con los que se hace una propuesta que pretende mejorar la instrucción (investigación aplicada).

En esta categoría se ubica el experimento de enseñanza de Thompson (1994). El autor exploró la comprensión por parte de un estudiante del problema de obtener la distancia recorrida por un objeto que acelera, en donde el participante no había tenido instrucción sobre cálculo antes de su participación en la investigación. Encontró que los conceptos de tasa de cambio y cambio infinitesimal son fundamentales para comprender el primer teorema fundamental del cálculo.

Basado en esos hallazgos, Thompson (1994) en el mismo estudio implementó una forma de instrucción del primer teorema fundamental del cálculo con estudiantes de matemáticas superiores y graduados. Él encontró que “los análisis de un experimento de enseñanza con 19 estudiantes de matemáticas superiores y graduados sugieren que las dificultades de los estudiantes con el Teorema provienen de conceptos empobrecidos de tasa de cambio y de imágenes pobremente desarrolladas y mal coordinadas de covarianza funcional y cantidades construidas multiplicativamente” (Thompson, 1994, p. 229).

En su experimento de enseñanza, Thompson (1994) trata de que los estudiantes comprendan la equivalencia que existe entre la razón de cambio de la acumulación y una de las cantidades que forman los fragmentos que se acumulan (la cantidad expresada mediante el integrando); es decir, busca que los estudiantes comprendan lo que Spivak (1996) llama primer teorema fundamental del cálculo.

La investigación de Thompson (1994), como se ha mencionado, es un ejemplo de investigación básica y aplicada en una misma investigación; la cual, además dio la pauta para la realización de otras investigaciones aplicadas. Algunas, realizadas por el mismo autor de manera individual y otras en conjunto con otros investigadores. Estas forman parte de la siguiente categoría.

Investigación aplicada. Thompson y Silverman (2008) señalan que el concepto de acumulación, y de manera más concreta las funciones de acumulación son importantes para entender el teorema fundamental del cálculo, y hacen un "llamado para un mayor énfasis en el TFC como explicación de una relación inherente entre la acumulación de cantidades en bits y las tasas a las que se acumula un bit incremental" (p. 51). Agregan que para comprender dicha relación se debe a su vez dar énfasis al concepto de covariación como una idea fundamental en cálculo.

Sin embargo, no todas las investigaciones aplicadas sobre la instrucción del primer teorema fundamental del cálculo se basan en el concepto de acumulación. Por ello, en esta categoría se deben distinguir 2 clases. Una incluye las propuestas de innovación basadas en la interpretación de la integral como acumulación y la otra comprende las propuestas que no consideran esta idea. Se muestran las investigaciones de cada clase.

Propuestas basadas en la interpretación de integral como acumulación. Thompson, Byerley, y Hatfield (2013), presentan una propuesta de un primer curso de cálculo universitario con énfasis en el uso de la tecnología. La propuesta consta de dos fases:

- Construir funciones de acumulación a partir de tasas de cambio.
- Obtener la tasa de cambio de las funciones de acumulación.

Los autores agregan:

> El significado que pretendemos que los estudiantes desarrollen es que $\int_a^x f\,(t)\,dt$ es la función que da la acumulación de una cantidad en el intervalo $[a, x]$ cuya acumulación cambia a una tasa de $f(t)$ para cada valor de t en $[a, x]$. Es decir, esta comprensión prevista

> de la acumulación implica el TFC, más o menos. Después de la Fase I, los estudiantes saben que $\int_a^x f\ (t)\ dt$ es una función de x y saben que $\int_a^x f(t)dt$ tiene a $f(x)$ como su tasa de cambio. (Thompson, Byerley, y Hatfield, 2013, p. 138)

Thompson y Dreyfus (2016), presentan un estudio de efectividad de una propuesta de instrucción del primer curso de cálculo universitario basado en diferenciales y en acumulación. Donde además el tema central del curso es el primer teorema fundamental del cálculo. Las ideas en las que se basan son resultado de investigaciones anteriores, por lo que este estudio solo muestra la eficacia de la propuesta. A través de la aplicación de un pre-test y un post-test muestran que su propuesta de instrucción propició un aumento en el puntaje de los participantes en el pos-test. Además, a través de entrevistas identificaron mejoras en el entendimiento por parte de los estudiantes, de los conceptos del cálculo.

Thompson (2019) presenta una propuesta de instrucción del segundo curso de cálculo universitario (aplicado con estudiantes de matemáticas y ciencias), en la que de cierta manera la relación entre acumulación y razón de cambio está presente en la mayor parte del curso (cuando una cantidad cambia a cierta razón esto implica la acumulación de dicha cantidad, por otro lado, cuando hay acumulación de una cantidad, esta se forma con cierta razón de cambio). Esta relación se presenta en dos tipos de problemas a los que les da el adjetivo de “fundamentales”:

- Obtener la acumulación de una cantidad cuando se sabe la razón de cambio a la cual está variando.
- Obtener la razón de cambio de la acumulación.

Para el autor la acumulación y razón de cambio son dos caras de la misma moneda. La integral es la acumulación de una razón de cambio mientras que la derivada es la razón de cambio de la acumulación. Se puede decir que su propuesta trata de mostrar que el teorema fundamental del cálculo es importante porque establece la relación entre los conceptos de acumulación y razón de cambio.

Thompson (2019) menciona “Como aclararé más adelante, la integral como acumulación de la tasa de cambio y la derivada como la tasa de cambio de acumulación no dependen de un sistema de coordenadas” (p. 138). Se refiere a que la acumulación y la razón de cambio son interpretaciones más generales para los conceptos integral y derivada respectivamente. Pues las interpretaciones de integral como área, y derivada como pendiente, solo son aplicables cuando se trata con funciones representadas en un sistema de coordenadas cartesiano.

Carlson, Smith, y Persson (2003) por su parte, proponen una forma de instrucción del primer curso de cálculo universitario, enfocado en el primer teorema fundamental del cálculo y basado en ideas de covariación, acumulación y razón de cambio. La propuesta busca mejorar la comprensión, por parte de estudiantes universitarios, del primer teorema fundamental; y determinar experimentalmente si se promueven dichas mejoras. Sin embargo, una de sus conclusiones es: "en particular, las debilidades observadas sugieren que el marco debe incluir una articulación más cuidadosa de las acciones mentales involucradas en la comprensión y aplicación de las declaraciones y relaciones expresadas por el Teorema Fundamental del Cálculo" (p. 172).

Hay que notar que todas las propuestas son para un curso completo de cálculo universitario. La mayoría son para el primer curso, mientras que la propuesta de Thompson (2019) es para el segundo curso.

Propuestas que no se basan en la interpretación de integral como acumulación. Rosenthal (1992) presenta una propuesta de instrucción con la cual pretende que los estudiantes descubran el primer teorema fundamental del cálculo a través de actividades guiadas por el profesor. Se enfoca específicamente en el descubrimiento del corolario del primer teorema:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

donde F es una antiderivada de f.

En la propuesta emplea el ejemplo de la velocidad, es decir donde $f(x)$ proporciona la velocidad en función del tiempo.

Thirey y Wooster (2013) proponen usar manipulativos físicos para la enseñanza de algunas propiedades de la integral y del teorema fundamental del cálculo, donde, aunque no se muestran datos empíricos concluyen que los participantes declararon tener una mejor comprensión de los conceptos al trabajar juntamente con las representaciones físicas y simbólicas.

Kirsch (2014) presenta una propuesta de instrucción cuyo objetivo es desarrollar una "comprensión visual del (primer) teorema fundamental del cálculo" (p. 691). Esta busca en cierta manera resolver la confusión que tienen algunos estudiantes sobre cómo el teorema fundamental relaciona el área bajo gráficas de funciones y pendiente de rectas tangentes. Para ello utiliza la interpretación de integral como área bajo la curva de una función, y la interpretación de la derivada como razón de cambio. Busca clarificar que la derivada de la función que proporciona el área bajo la curva de una función (derivada de la función integral) proporciona la pendiente de la recta tangente a la función integral no la pendiente de la función de la cual se obtiene el área bajo su gráfica. Una de sus conclusiones es que "antes de que se pruebe un teorema, tiene que haber ideas básicas apropiadas de su significado, ¿quizás una demanda irrazonable de instrucción matemática?" (p. 694).

Robles, Tellechea, y Font (2014) presentan una propuesta de secuencia didáctica para la enseñanza del teorema fundamental del cálculo para estudiantes de ingeniería y de ciencias exactas. Se apoyan en el uso de tecnología informática, específicamente el software Descartes. Mediante las tareas de la secuencia, los autores tratan de que a través de la interacción con estas herramientas los estudiantes descubran la relación entre conceptos que involucra el teorema fundamental del cálculo, además de apreciar dicho carácter fundamental.

La propuesta se apoya en la representación gráfica de la integral como área bajo la curva de una función. Según los autores, la propuesta trata de:

> propiciar que el estudiante descubra, con base en su propia intuición, los elementos que le permitirán entender el papel fundamental del TFC en la articulación del Cálculo, buscando ir más allá de lo que, con frecuencia, constituye el único logro al final de un curso de Cálculo Integral desde el contexto exclusivo de las representaciones analíticas: *si se deriva la función integral se obtiene la función que se integra.* (Robles, Tellechea, y Font, 2014, p. 71)

Verzosa, Guzon, y De las peñas (2014) describen una secuencia de lecciones para la enseñanza de la definición de límite y del primer teorema fundamental del cálculo. Usan herramientas digitales (GeoGebra) y su objetivo es que los estudiantes construyan sus entendimientos sobre dichos conceptos. Las lecciones sobre el teorema fundamental son para cursos orientados a negocios. Se representa a la integral como área bajo la curva y a su vez se utiliza esta representación para abordar, como ejemplo, el problema de la distancia recorrida por un objeto que se mueve a una velocidad $f(t)$.

Todas las propuestas de instrucción mencionadas en alguna parte se apoyan en la representación de la integral como área bajo la curva de una función. Sobre dicho enfoque de instrucción, donde se utiliza dicha representación de la integral, Thompson y Silverman (2008) mencionan que es "eficiente pero no generativo", pues no permite la aplicación a otras funciones cuyo dominio y contra dominio no estén expresados en cantidades que no sean longitudes.

Propuestas de instrucción. Otros trabajos sobre el primer teorema fundamental del cálculo a nivel universitario consisten en propuestas de instrucción de dicho tema. Estas no se colocaron dentro de la categoría de investigación aplicada ya que, aunque son propuestas de innovación, no representan al menos una de las formas en que la investigación apoya el desarrollo de innovaciones según Larsen at al. (2017). Es decir, no se menciona con claridad en las publicaciones cómo se basa en los hallazgos de investigación básica, no se muestran los efectos de su implementación y no se presenta en estudio de eficacia o efectividad de una propuesta de instrucción.

Gordon y Gordon (2003) plantean una propuesta de instrucción que se basa en la obtención de la fórmula para integrales definidas de algunas funciones, apoyándose en el uso de una calculadora graficadora TI-86. A grandes rasgos, la estrategia consiste en que los estudiantes obtengan, usando la calculadora, la integral de una función para distintos valores del límite superior. Después, mediante regresión se obtiene la función que representa dicha integral. Se emplean varios ejemplos, con los que se pretende que los estudiantes identifiquen que la función integral es una antiderivada de la función que se está integrando.

Vajiac y Vajiac (2008) presentan una forma de mostrar a los estudiantes el primer teorema fundamental del cálculo, según los autores, de forma intuitiva. En esta se utiliza la interpretación de la integral como área bajo la curva de una función y se emplea el teorema del valor medio para integrales en la demostración, que también se pretende que sea intuitiva.

Reflexión sobre la importancia del primer teorema fundamental del cálculo. En esta categoría se incluye la reflexión de Bressoud (2009, 2011, 2018) sobre la importancia del primer teorema fundamental del cálculo. Él menciona que el primer teorema fundamental del cálculo es realmente un teorema de integración; y que su importancia radica en que muestra que existen dos maneras de obtener una integral, mediante el límite de una suma de Riemann y a través de una antiderivada. Por ello sugiere que se reintroduzca el adjetivo “integral” en el nombre de este teorema, enfatizando el hecho de que establece la naturaleza dual de la integración, como límite de suma de Riemann y como una antiderivada.

Sobre la definición de integral como límite de una suma de Riemann, Bressoud (2011) menciona que no es suficiente con introducirla en los cursos ya que es compleja. Agrega: “Si queremos que los estudiantes entiendan la integración como un límite, entonces necesitan experiencia trabajando con estas sumas en contextos que los lleven a apreciar la importancia de esta definición” (p. 111).

Sobre la forma de abordar el primer teorema fundamental del cálculo Bressoud (2011) menciona: “Para el cálculo de primer año [universitario], una declaración menos precisa y más intuitiva puede ser mucho más útil” (p. 109). Él concluye que al planear cómo se debe enseñar el teorema fundamental del cálculo se debe tener en cuenta el objetivo que se quiere lograr para enfocar el trabajo hacia su cumplimiento.

Ensayo sobre el primer teorema fundamental del cálculo

Se presenta una revisión de la forma en que se presenta el primer teorema fundamental del cálculo en cuatro libros dirigidos a estudiantes universitarios. Se enlistan enseguida:

- Spivak (1996)
- Apostol (1999)
- Courant y John (1999)
- Stewart (2008)

Se eligieron estos libros por considerarse que son los que comúnmente se emplean como apoyo en cursos de cálculo universitario en carreras de ingeniería (sin embargo, se verá en el siguiente párrafo que uno de estos libros está dirigido para estudiantes de matemáticas). Estos difieren en la forma en que presentan el primer teorema fundamental del cálculo.

Incluso uno de ellos difiere de los demás en el orden en que presenta las dos ramas del cálculo (cálculo diferencial y cálculo integral). Por ello puede pensarse en estos libros como una muestra de las diferentes formas en que se presenta el primer teorema fundamental del cálculo y el cálculo en general en libros de texto.

De acuerdo con lo que los autores declaran de manera explícita o implícitamente se puede decir que el libro de Spivak (1996) está dirigido para estudiantes de matemáticas, mientras que el de Apostol (1999) es para estudiantes de matemáticas, física e ingeniería. Courant y John (1999) dirigen su libro para estudiantes de matemáticas, ciencias en general e ingeniería; por su parte, Stewart (2008) explícitamente declara que su libro está pensado para científicos e ingenieros. La Tabla 1 resume lo que se ha mencionado, y muestra que se tiene un libro dirigido solo para estudiantes de matemáticas, uno para científicos e ingenieros y dos tanto para estudiantes de matemáticas como para estudiantes de otras disciplinas.

Tabla 1. ¿A quiénes van dirigidos los libros revisados?

Autor del libro	Libro dirigido a estudiantes de:
Spivak (1996)	Matemáticas
Apostol (1999)	Matemáticas, física e ingeniería
Courant y John (1999)	Matemáticas, ciencias e ingeniería
Stewart (2008)	Ciencias e ingeniería

El objetivo principal es revisar el tema del primer teorema fundamental del cálculo, sin embargo, se prestará también suficiente atención al tema de integral y derivada ya que son los conceptos que están muy relacionados con dicho teorema. Otros temas como límite y función que, aunque también tiene relación, no se considerarán en este análisis.

Los puntos en los que se pondrá atención son: si trata de un teorema o dos, los recursos didácticos utilizados, la importancia del teorema, qué relación establece entre las operaciones de integración y derivación, el uso del teorema del valor medio en la demostración, el orden en que se tratan los temas de integral, derivada y teorema fundamental del cálculo, la forma de abordar los temas de integración y derivación, y la notación que se utiliza. Se abordan tales puntos por considerarse que estos pueden influir en las concepciones que un estudiante se forma sobre el primer teorema fundamental, y sobre la relación entre este teorema y los conceptos principales del cálculo.

¿Un teorema y su corolario o dos teoremas? Revisando la forma en que se enuncia el teorema en los libros mencionados, se identifica que se hace de diferente manera: Apostol (1999) y Spivak (1996) mencionan dos teoremas, primer y segundo teorema fundamental del cálculo; Spivak (1996) además enuncia el corolario del primer teorema; Courant y John (1999) y Stewart (2008) lo enuncian como uno solo, pero compuesto de dos partes. A partir de esta observación surgen las preguntas: ¿qué ventajas o desventajas tiene un acercamiento respecto al otro?, ¿o es lo mismo?

Para tratar de contestar la pregunta anteriormente planteada, se revisaron los libros mencionados, buscando en qué aspectos difieren y en qué son semejantes, encontrándose lo que se muestra en los párrafos siguientes.

Spivak (1996) enuncia el primer teorema como:

> TEOREMA 1 (PRIMER TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INFINITESIMAL)
>
> Sea f integrable sobre $[a, b]$ y defínase F sobre $[a, b]$ por
>
> $$F(x) = \int_a^x f$$
>
> Si f es continua en c de $[a, b]$, entonces F es derivable en c, y
>
> $$F'(c) = f(c)$$
>
> (si $c = a$ o b, entonces $F'(c)$ se entiende que representa la derivada por la derecha o por la izquierda de F.) (p. 399)

Además, agrega:

> […], la derivabilidad de F en c queda asegurada por la continuidad de f en c. Sin embargo, el teorema 1 es interesante en extremo cuando f es continua en todos los puntos de $[a, b]$. En este caso F es derivable en todos los puntos de $[a, b]$ y

$F' = f$. (p. 402)

Posteriormente enuncia el corolario:

COROLARIO

Si f es continua sobre $[a, b]$ y $f = g'$ para alguna función g, entonces

$\int_a^b f = g(b) - g(a)$(p. 403)

Después agrega:

El corolario del teorema es tan útil que es llamado con frecuencia el segundo teorema fundamental del cálculo infinitesimal. En este libro reservaremos el nombre para un resultado algo más fuerte (que, sin embargo, en la práctica no es mucho más útil). Según acabamos de decir, una función f puede ser de la forma g' aunque f no sea continua. Si f es integrable entonces se cumple todavía que

$\int_a^b f = g(b) - g(a)$.

La demostración, sin embargo, debe ser del todo diferente - no podemos aplicar el teorema 1, de modo que deberemos volver a la definición de integrales. (p. 405)

Finalmente enuncia el segundo teorema:

TEOREMA 2 (SEGUNDO TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INFINITESIMAL)

Si f es integrable sobre $[a, b]$ y $f = g'$ para alguna función g, entonces

$\int_a^b f = g(b) - g(a)$. (p. 405)

Es clara la similitud entre el corolario del primer teorema fundamental del cálculo y el segundo. Sin embargo, se puede puntualizar que la diferencia radica en las hipótesis: el corolario está basado en las hipótesis de que f es continua en un punto c de $[a, b]$ y que $f = g'$, mientras que las hipótesis del segundo teorema es que f es integrable sobre $[a, b]$ y $f = g'$, es decir, f no necesariamente es continua. En el Anexo E se muestra la demostración que presenta Spivak (1996) de este teorema y se propone un ejemplo.

Se debe recalcar que Spivak (1996) advierte que algunos autores al corolario del primer teorema fundamental lo llaman “segundo teorema fundamental del cálculo” por su utilidad en el cálculo de integrales de funciones continuas.

Como se ha mencionado, Apostol (1999) enuncia dos teoremas; el primero es:

> TEOREMA 5.1. PRIMER TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO. Sea f una función integrable en $[a, x]$ para cada x de $[a, b]$. Sea c tal que $a \leq c \leq b$ y definamos una nueva función A del siguiente modo:
>
> $A(x) = \int_c^x f(t)\ dt$ si $a \leq x \leq b$
>
> Existe entonces la derivada $A'(x)$ en cada punto x del intervalo abierto (a, b) en el que f es continua, y para tal x tenemos
>
> (5.1) $A'(x) = f(x)$ (p. 247)

Posteriormente enuncia el segundo teorema fundamental del cálculo de la siguiente manera:

> TEOREMA 5.3. SEGUNDO TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO. Supongamos f continua en un intervalo abierto I, y sea P una primitiva cualquiera de f en I. Entonces, para cada c y cada x en I, tenemos
>
> (5.7) $P(x) = P(c) + \int_c^x f(t)dt$
>
> El teorema 5.3 nos indica cómo encontrar una primitiva P de una función continua f. Integrando f desde un punto fijo c a un punto arbitrario x y sumando la constante $P(c)$ obtenemos $P(x)$. Pero la importancia real del teorema radica en que poniendo la ecuación (5.7) en la forma
>
> (5.8) $\int_c^x f(t)dt = P(x) - P(c)$.
>
> se ve que podemos calcular el valor de una integral mediante una simple substracción si conocemos una primitiva P. (p. 251)

Sobre el término “primitiva” empleado en la cita anterior, Apostol (1999), indica que “Una función P se llama primitiva (a antiderivada) de una función f en un intervalo abierto I si la derivada de P es f, esto es, si $P'(x) = f(x)$ para todo x en I” (p. 50)

Los dos teoremas de Apostol (1999), se corresponden con lo que Spivak (1996) llama primer teorema fundamental del cálculo y corolario del primer teorema fundamental del cálculo, porque, aunque difieren en algunos aspectos que serán señalados al final de esta sección, los dos tratan de funciones continuas de la misma manera que el primer teorema fundamental del cálculo y corolario, de Spivak (1996).

Independientemente de si lo que Apostol (1999) llama segundo teorema fundamental del cálculo se trate en realidad de un corolario o un teorema, se puede decir que Spivak (1996) enuncia el segundo teorema en una forma más general, pues trata de funciones integrables independientemente si son continuas o no.

Ahora consideraremos a los autores que enuncian un solo teorema, compuesto de dos partes.

Courant y John (1999), enuncian la primera parte del teorema fundamental del cálculo, de la siguiente manera:

> EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO (Primera Parte). La integral indefinida $\phi(x)$ de una función continua $f(x)$ posee siempre una derivada $\phi'(x)$ y, además,
>
> $\phi'(x) = f(x)$. (p. 206)

La integral indefinida de una función continua, la define como $\phi(x) = \int_{\alpha}^{x} f(u)du$, donde α es cualquier punto del dominio de f. Cuando introduce el concepto de integral indefinida menciona que f es continua en el intervalo $[a, b]$ el cual contiene a α, y que la integral a su vez es continua en el mismo intervalo.

La segunda parte es la siguiente:

> La diferencia de dos funciones primitivas $F_1(x)$ y $F_2(x)$ de la misma función $f(x)$ es siempre una constante
>
> $F_1(x) - F_2(x) = c.$
>
> Así, a partir de cualquier función primitiva $F(x)$ pueden obtenerse todas las demás en la forma
>
> $F(x) + c$

mediante una elección adecuada de la constante c. Recíprocamente, para cada valor de la constante c de la expresión $F_1 = F(x) + c$ representa una función primitiva de $f(x)$. (pp. 208-209)

Estos autores indican "Cualquier función $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$, se denomina función primitiva de $f(x)$, o, simplemente, una primitiva de $f(x)$; esta terminología sugiere que la función $f(x)$ es deducida de $F(x)$" (Courant y John, 1999, p. 208)

Stewart (2008) enuncia la primera parte del teorema de la forma siguiente:

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO, PARTE I. Si f es continua en $[a, b]$, entonces la función g definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt \quad a \leq x \leq b$$

Es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), y $g'(x) = f(x)$. (p. 391)

La segunda parte, la presenta como se muestra en seguida:

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO, PARTE 2 Si f es continua en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

donde F es una antiderivada de f, es decir, una función tal que $F' = f$. (p. 384)

Lo que Courant y John (1999) y Stewart (2008) enuncian como Teorema fundamental del cálculo (partes 1 y 2), se corresponden con lo que Spivak (1996) llama primer teorema fundamental del cálculo y corolario del primer teorema fundamental del cálculo, pues se basan en la hipótesis de que f es continua, aunque presentan ciertas diferencias que serán señaladas en los párrafos siguientes.

Se ha hecho notar que lo que Apostol (1999) declara como primer teorema fundamental del cálculo, y lo que Courant y Jonh (1999) y Stewart (2008) enuncian como primera parte del teorema fundamental del cálculo se corresponden con lo que Spivak (1996) considera primer teorema fundamental del cálculo ya que en todos estos casos se trata de funciones continuas, aunque existen ciertas diferencias. Éstas radican en tres aspectos:

1. El intervalo (o punto) en que la función f es continua (establecida en las hipótesis).

2. El intervalo (o punto) en que $F'(x) = f(x)$ (establecido en la conclusión del teorema).
3. La forma en que se define la función F (o A).

En la Tabla 2 se muestran estos aspectos de la formulación de cada autor, donde se puede identificar lo siguiente:

- En la hipótesis, Spivak (1996) y Apostol (1999) se refieren a la continuidad de la función en un punto, mientras que Courant y John (1999) y Stewart (2008) consideran la continuidad de la función en un intervalo; por lo que en cada caso se emplean argumentos diferentes en la demostración. A su vez, Apostol (1999) considera la continuidad de la función en un punto de un intervalo abierto, mientras que Spivak (1996) considera un punto de un intervalo cerrado, y Stewart (2008) todo el intervalo cerrado. Por su parte Courant y John (1999) consideran que la función f es continua en su dominio, el cual puede ser un intervalo abierto o cerrado.
- Spivak (1996) y Stewart (2008) definen $F(x) = \int_a^x f$, donde a es el límite inferior del intervalo en que la función es integrable. Mientras que Apostol (1999) la define como $A(x) = \int_c^x f(t)\ dt$, donde el punto c es un punto del intervalo en que f es integrable, de igual manera que el punto x. En este último caso se tiene la posibilidad (la cual no considera directamente la formulación de Spivak (1996)) de que el límite superior de la integral sea menor que el inferior. Spivak (1996), por su parte, argumenta que el teorema puede ser aplicable si el límite superior es menor que el límite inferior de la integral ($x < a$). El menciona que, en ese caso, se tendría que $F'(x) = f(x)$, solo si la función $F(x)$ está definida para $x < a$ (lo cual es posible si f es integrable para valores menores que a).
- La formulación de Courant y John (1999) es similar a la de Apostol (1999), en el hecho de considerar la posibilidad de que x sea menor que α. La cual, como se ha mencionado, no es declarada explícitamente por Spivak (1996) en el enunciado del teorema, sino que después de demostrar el teorema menciona esa posibilidad.
- La conclusión del teorema es aplicable a los extremos del intervalo de acuerdo con la formulación de Spivak (1996); mientras que Apostol (1999) y Stewart (2008) no los incluyen. La razón por la que Spivak (1996) los incluye es declarado explícitamente,

pues menciona que si $c = a$ o $c = b$, $F'(c)$ representa la derivada por la derecha y por la izquierda de F, respectivamente. Courant y Jonh (1999) consideran que la conclusión del teorema es aplicable al dominio de la función; que como se ha indicado, puede ser un intervalo abierto o cerrado. Por ello, en caso de tratarse de un intervalo cerrado; en los extremos $F'(a)$ y $F'(c)$ representarían la derivada anterior y posterior, respectivamente. Los autores no hacen esta declaración, sin embargo, en la parte donde abordan el tema de derivación, mencionan los conceptos derivada anterior y derivada posterior que corresponden con la derivada por la derecha y derivada por la izquierda (que menciona Spivak (1996)), respectivamente.

- Apostol (1999) y Stewart (2008), que no incluyen los puntos extremos del intervalo en la conclusión del teorema (es decir, consideran un intervalo abierto), en las páginas donde abordan el tema de derivación, mencionan que la derivada de una función existe solo si

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

  Con lo que, en los extremos del intervalo no existe derivada, por ello excluyen dichos puntos.

- En el caso de Spivak (1996), Apostol (1999) y Courant y John (1999), la conclusión se aplica al intervalo (o punto) en que f es continua (de hecho, lo indican explícitamente). Es decir, existe una correspondencia entre el punto o intervalo en que la función f es continua (hipótesis del teorema) y el punto o intervalo en que aplica la conclusión del teorema. En tanto que, en el caso de Stewart (2008) la conclusión del teorema aplica a un intervalo abierto (a, b), mientras que la hipótesis es que la función es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$.

Tabla 2. Características de la formulación del primer teorema fundamental del cálculo de acuerdo con varios autores

Autor	Intervalo (o punto) en que f es continua (hipótesis)	Definición de F (o A)	Intervalo (o punto) en que $F'(x) = f(x)$ (conclusión)
Spivak (1996)	c de $[a, b]$	Se define F sobre $[a, b]$ por: $$F(x) = \int_a^x f$$	c de $[a, b]$
Apostol (1999)	x de (a, b)	$$A(x) = \int_c^x f$$ $$a \leq c \leq b$$ $$a \leq x \leq b$$	x de (a, b)
Courant y John (1999)	Dominio de f	$$\phi(x) = \int_\alpha^x f(u)du$$ donde α es cualquier punto del dominio de f	Dominio de f
Stewart (2008)	$[a, b]$	$$g(x) = \int_a^x f(t)dt$$ $$a \leq x \leq b$$	(a, b)

Salvo las diferencias mencionadas en la hipótesis y conclusión de los teoremas mencionadas anteriormente, se puede decir de manera concreta que lo que Courant y John (1999), y Stewart (2008) llaman *el teorema fundamental del cálculo* (partes 1 y 2) corresponde con lo que Spivak (1996) llama *primer teorema fundamental del cálculo* y *corolario del primer teorema fundamental del cálculo*; mientras que Apostol (1999) al enunciar el primer teorema fundamental del cálculo, se refiere a lo mismo que Spivak (1996), sin embargo, Apostol (1999) llama segundo teorema fundamental del cálculo a lo que Spivak

(1996) llama corolario. La razón es que, como se ha mencionado anteriormente, en todos estos casos tratan de funciones continuas.

Dado que tres de los autores, independientemente de la forma en que nombran el teorema o teoremas, se refieren a lo que Spivak (1996) llama primer teorema fundamental del cálculo y su corolario y que ninguno de los demás autores enuncia un teorema que pueda corresponder con el segundo teorema de Spivak (1996); el resto de este análisis estará enfocado solo en el primer teorema fundamental del cálculo en el sentido descrito por Spivak (1996).

Recursos didácticos. Se revisará ahora si los autores emplean algún recurso en la exposición del primer teorema fundamental de cálculo para mostrar su validez antes de la demostración formal.

Spivak (1996) no emplea ningún recurso en la presentación del primer teorema fundamental del cálculo. Enuncia el teorema de la manera que anteriormente se ha indicado y luego coloca la demostración basada en definiciones hechas para este propósito y teoremas presentados y demostrados en secciones anteriores del libro.

Por su parte, Apostol (1999) emplea un ejemplo sobre la relación entre integración y derivación antes de presentar el teorema. Se trata de la función $f(x) = x^2$, muestra que la integral indefinida de esta función es $A(x) = \int_c^x t^2 dt = \frac{x^3}{3} - \frac{c^3}{3}$ (resultado obtenido mediante la definición de integral, tema que se aborda en una sección anterior del libro) y que derivando se obtiene $A'(x) = x^2$, es decir que $A'(x) = f(x)$.

Después de presentar el teorema, indica "Damos primero una justificación geométrica que sugiere el por qué el teorema debe ser cierto; luego damos una demostración analítica" (p. 248). La justificación geométrica está basada en la interpretación de la integral como área bajo la curva, y el teorema del valor medio para integrales (la figura que se muestra en el libro es parecida a la presentada en este documento como Figura 1). Establece que $\frac{A(x+h)-A(x)}{h} = f(z)$, donde $x \leq z \leq x+h$, luego indica: "encontramos que $f(z) \to f(x)$ cuando $h \to 0$ con valores positivos. Si $h \to 0$ con valores negativos, se razona en forma parecida. Por consiguiente, $A'(x)$ existe y es igual a $f(x)$" (p. 248).

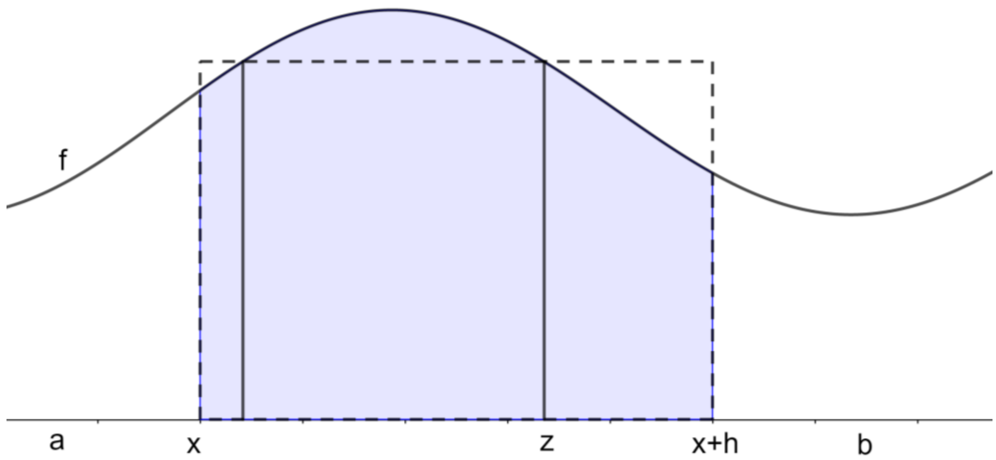


Figura 1. Interpretación geométrica del primer teorema fundamental del cálculo según Apostol (1999)

Después, el autor justifica la necesidad de una demostración formal mencionando que en la demostración que ha presentado se ha supuesto que la función f es continua en un entorno del punto x, mientras que la hipótesis del teorema es que f es continua en el punto x.

Courant y John (1999) no utilizan ningún recurso que pudiera servir al lector para ver la validez del teorema antes de la demostración. Enuncian el teorema y luego presentan la demostración apoyándose en el teorema del valor medio para integrales.

Stewart (2008), de manera similar a Apostol (1999), presenta un ejemplo en que se cumple que $g' = f$, donde $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ (obtiene $\int_a^x f(t)\,dt$ a partir de la definición de integral como límite de una suma de Riemann). Después muestra que esto se cumple para cualquier función continua $f(x) \geq 0$. Para ello se apoya de la interpretación de integral como área bajo la curva representada con una figura similar a la Figura 2. Con dicha idea y ahora haciendo referencia a una figura como la presentada en este documento como Figura 3, llega a establecer lo siguiente:

> Para h pequeñas, a partir de la figura puede ver que esta área es aproximadamente igual al área del rectángulo con altura $f(x)$ y ancho h:
>
> $$g(x+h) - g(x) \approx hf(x)$$

por eso $\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \approx f(x)$

En consecuencia, por intuición, espere que

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(x)$$

El hecho de que esto sea verdadero, aun cuando f no sea necesariamente positiva, es la primera parte del teorema fundamental del cálculo. (Stewart, 2008, p. 381)

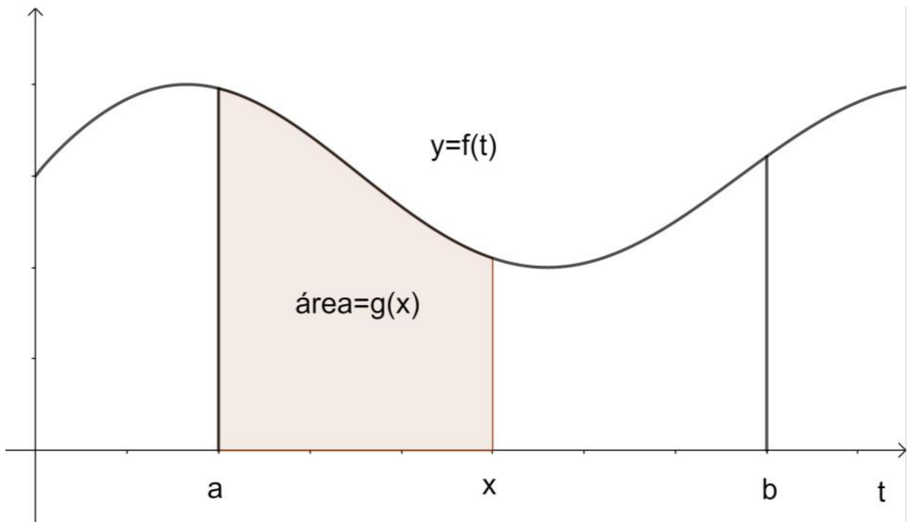


Figura 2. Interpretación de la integral como área bajo la curva

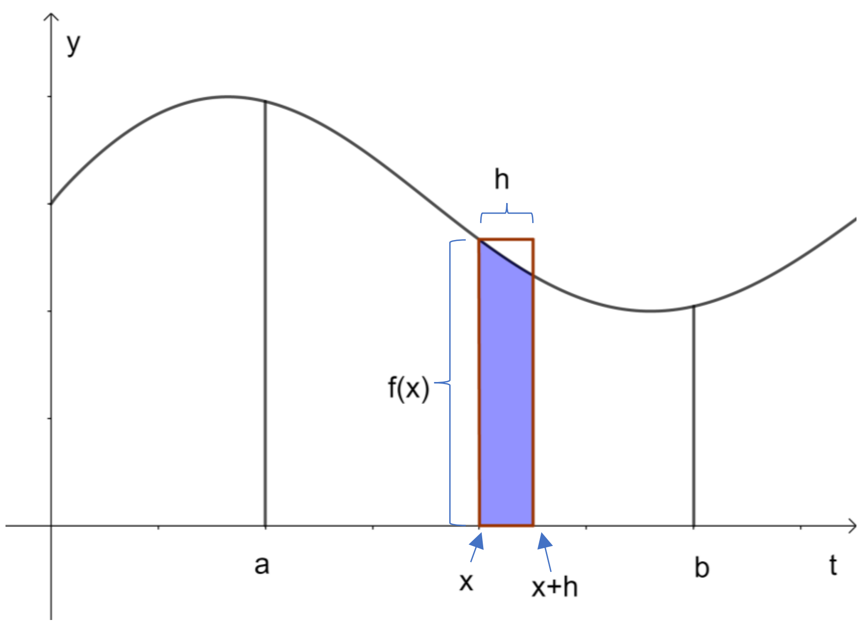


Figura 3. Área debajo de la gráfica de f de x a $x + h$

Como se ha visto, únicamente Apostol (1999) y Stewart (2008) utilizan ejemplos de casos particulares y gráficas donde se interpreta a la integral como área bajo la curva como apoyo en la presentación del primer teorema fundamental del cálculo.

Importancia del primer teorema. Una pregunta sobre el primer teorema puede ser, ¿cuál es su importancia, o por qué llamarlo fundamental? Guiados por esta pregunta, ahora se pondrá atención en identificar la razón por la que los autores lo consideran importante.

Spivak (1996) menciona que "con frecuencia [el corolario del primer teorema fundamental del cálculo] reduce los cálculos de integrales a una trivialidad" (p. 403). Posteriormente agrega: "El corolario del teorema 1 es tan útil que es llamado con frecuencia el segundo teorema fundamental del cálculo infinitesimal" (p. 405). Y más adelante menciona la importancia y similitud del corolario y el segundo teorema: "Hemos utilizado ya el corolario del teorema 1 (o lo que equivale a lo mismo, el teorema 2) para hallar las integrales de unas cuantas funciones elementales [...]" (p. 406).

Por su parte, Apostol (1999) indica que:

> El teorema 5.3 [llamado por él, segundo teorema fundamental del cálculo; al que Spivak (1996) llama corolario] nos indica cómo encontrar una primitiva P de una función continua f. Integrando f desde un punto fijo c a un punto arbitrario x y sumando la constante $P(c)$ obtenemos $P(x)$. Pero la importancia real del teorema radica en que poniendo la ecuación (5.7) en la forma
>
> $$(5.8)\ \int_c^x f(t)dt = P(x) - P(c)$$
>
> se ve que podemos calcular el valor de una integral mediante una simple substracción si conocemos una primitiva P. El problema de calcular una integral se ha transformado en otro problema, el de hallar la primitiva P de f. En la práctica, el segundo problema es más fácil de abordar que el primero. Cada fórmula de derivación proporciona de manera inmediata un ejemplo de una primitiva de una cierta función f, de donde resulta una fórmula de integración para dicha función. De las fórmulas de derivación antes estudiadas, y como consecuencia del segundo teorema fundamental, se pueden deducir las siguientes fórmulas de integración [...] (p. 251)

Courant y John (1999) comentan que la importancia radica en tres aspectos: mostrar el carácter inverso de las operaciones de derivación e integración, para invertir el proceso de derivación y para evaluar integrales. La justificación para la afirmación anterior es la siguiente:

- El subcapítulo donde enuncian el teorema fundamental del cálculo lo titulan *la derivada de la integral* y antes de enunciar el teorema declaran: "como ya se afirmó, la conexión entre integración y derivación es la piedra angular del cálculo diferencial e integral" (p. 206). Y después de enunciar la primera parte del teorema (que corresponde con lo que Spivak (1996) y Apostol (1999) llama primer teorema fundamental del cálculo) agregan: "Este carácter inverso de las operaciones de derivación e integración es el hecho básico del cálculo" (p. 206)
- En una parte posterior de este capítulo incluye un apartado llamado *Inversión de la derivación* donde incluye lo siguiente:

  El teorema fundamental muestra que la integral indefinida $\phi(x)$, esto es, la integral con un límite superior variable x, de una función $f(x)$, es una solución del siguiente problema: dada $f(x)$ determinar una función $F(x)$ tal que

  $$F'(x) = f(x)$$

  Este problema requiere invertir el proceso de derivación (p. 208)

- Además, incluyen un apartado llamado *el uso de la función primitiva para la evaluación de integrales definidas* y otro llamado *Ejemplos* donde mencionan: "En el capítulo 3 se hará un uso extensivo del teorema fundamental al evaluar integrales [...]" (p. 212)

Stewart (2008), al igual que Courant y John (1999), menciona que la importancia del teorema radica en mostrar el carácter inverso de las operaciones de integración y derivación, además de permitir calcular integrales de forma sencilla. Como introducción al tema del teorema fundamental menciona:

> El teorema fundamental del cálculo recibe de manera apropiada este nombre porque establece una conexión entre las dos ramas del cálculo: el cálculo diferencial y el cálculo integral [...]. El teorema fundamental del cálculo da la correspondencia inversa inequívoca entre la derivada y la integral. Newton y Leibniz explotaron esta correspondencia y la aplicaron para desarrollar el cálculo en un método matemático sistemático. En particular, ellos advirtieron

> que el teorema fundamental les permitía calcular con gran facilidad áreas e integrales, sin tener que calcularlas como límites de sumas como en las secciones 5.1 y 5.2 [con límite de sumas de Riemann]. (pp. 379-380)

Después de enunciar el teorema agrega los siguientes comentarios que recalcan que la importancia radica en el hecho de permitir calcular integrales de forma sencilla:

> Sin duda, el teorema fundamental del cálculo es el teorema más importante en este campo y, de hecho, alcanza el nivel de uno de los más grandes logros de la mente humana. Antes de ser descubierto, desde los tiempos de Eudoxo y Arquímedes, hasta la época de Galileo y Fermat, los problemas de hallar áreas, volúmenes y longitudes de curvas eran tan difíciles que sólo un genio podía afrontar el reto. Pero ahora, armados con el método sistemático que Newton y Leibniz desarrollaron como el teorema fundamental, en los próximos capítulos verá que estos estimulantes problemas son accesibles para todos.
>
> La eficacia del teorema fundamental depende de que se cuente con un suministro de antiderivadas de funciones. (p. 387)

Como se puede notar, todos estos autores, entre los argumentos sobre la importancia del primer teorema fundamental del cálculo, mencionan que ésta radica en que nos proporciona una forma sencilla de calcular una integral mediante una antiderivada; mientras que solo dos de ellos (Courant y John (1999) y Stewart (2008)) mencionan de manera explícita que el teorema es importante porque muestra la relación inversa entre derivación e integración.

Relación entre integral y derivada. Hasta este momento se han identificado las razones por las cuales los autores consideran importante el primer teorema fundamental del cálculo, entre éstas se encuentra el hecho de mostrar la relación entre integración y derivación. Ahora específicamente se enfocará la atención en identificar qué relación atribuyen los autores a las operaciones de derivación e integración. Que como se ha mostrado en la sección anterior, para Courant y John (1999) y Stewart (2008), esta es una relación inversa.

Spivak (1996) no menciona de manera explícita la relación entre integral y derivada, pero es claro que de manera implícita se menciona en la declaración del primer teorema. Apostol (1999), por su parte menciona:

> El tipo de relación entre estos dos procesos [integración y derivación] es en cierta forma semejante al que hay entre «elevar al cuadrado» y «extraer la raíz cuadrada». Si se eleva al cuadrado un número positivo y luego se busca la raíz cuadrada positiva del resultado, se vuelve al número original. Análogamente, si se calcula la integral de una función continua f se obtiene una nueva función (la integral indefinida de f) que después de derivada reproduce la función original f. (p. 247)

Nos habla de las operaciones en un orden, integrar y después derivar, no se menciona qué sucede si primero se deriva y luego se integra.

Como ya se ha mencionado, Courant y John (1999), emplean la palabra *inverso* para referirse a la relación entre integración y derivación, pero mencionan el mismo orden de las operaciones mencionado por Apostol (1999), pues declaran:

> Esto es, la derivación de la integral indefinida de una función continua reproduce siempre al integrando:
>
> $$\frac{d}{dx}\int_{\alpha}^{x} f(u)du = f(x)$$
>
> Este carácter inverso de las operaciones de derivación e integración es el hecho básico del cálculo. (Courant y John, 1999, p. 206)

Y agregan lo siguiente, donde de manera implícita se refiere al mismo orden de las operaciones:

> […] La primera parte del teorema fundamental del cálculo afirma, sin embargo:
>
> Toda integral indefinida $\phi(x)$ de la función $f(x)$ es una primitiva de $f(x)$. (Courant y John, 1999, p. 208)

Stewart (2008), también menciona el carácter inverso de las operaciones, pero como se verá, él sí menciona las dos formas en que se pueden aplicar las operaciones, integrar una función y después derivar o derivar una función y después integrar. Incluye, un apartado llamado *La derivación y la integración como procesos inversos*, donde, refiriéndose a la parte 1 del teorema fundamental del cálculo [primer teorema fundamental del cálculo de acuerdo con la forma presentada por Spivak (1996)] menciona: "[...] en la cual se afirma que si integra f y, a continuación, deriva el resultado, regresa a la función original f" (p. 387). Sobre la parte 2 del teorema (lo que Spivak (1996) llama corolario del primer teorema fundamental del cálculo) agrega:

> Como $F'(x) = f(x)$, la parte 2 puede reescribirse así
>
> $$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$$
>
> En esta versión se afirma que si toma una función F, la deriva y luego integra el resultado, vuelve a la función original F, pero en la forma $F(b) - F(a)$. Tomadas juntas, las dos partes del teorema fundamental del cálculo expresan que la derivación y la integración son procesos inversos. Cada una deshace lo que hace la otra. (p. 387)

Sobre la importancia del teorema, se ha mencionado que los cuatro autores mencionan que esta o parte de esta radica en el hecho de proporcionar una forma de evaluar una integral de forma más sencilla de lo que sería obtenerla con la definición (límite de una suma de Riemann). También, los cuatro mencionan que este teorema muestra la relación entre integral y derivada, pero solo Courant y John (1999) y Stewart (2008) se refieren a esta relación como inversa. Sin embargo, solo Stewart (2008) muestra la forma de proceder en las dos situaciones que se pueden presentar, integrar la derivada de una función y derivar la integral de una función.

Uso del teorema del valor medio en la demostración. Spivak (1996), Apostol (1999) y Stewart (2008) no utilizan el teorema del valor medio para integrales en la demostración del primer teorema fundamental del cálculo; sin embargo, Apostol (1999) lo utiliza para mostrar que el teorema es válido, antes de presentar la demostración. Es importante señalar que en el caso del primer teorema fundamental enunciado por Spivak (1996) y Apostol (1999), las hipótesis del teorema no permiten utilizarlo. La hipótesis del primer teorema fundamental del cálculo establece que la función es continua en un punto del intervalo, mientras que una de las hipótesis del teorema del valor medio es que la función f debe ser continua en todo el intervalo.

Stewart (2008), como se mencionó, no utiliza este teorema para la demostración. Y, de hecho, menciona: “El teorema del valor medio para integrales es una consecuencia del teorema del valor medio para las derivadas y el teorema fundamental del cálculo” (p. 444). Solo Courant y John (1999) utilizan el teorema del valor medio para integrales en la demostración del teorema fundamental del cálculo. Por ello se presenta el teorema del valor medio para integrales antes del primer teorema fundamental del cálculo.

Orden de los temas integración, derivación y teorema fundamental del cálculo. Ya que sabemos que el teorema nos proporciona una forma alternativa y más sencilla de obtener una integral mediante una antiderivada, es decir, que con la aplicación del teorema se puede obtener una fórmula de integración para cada formula de derivación conocida; podemos preguntarnos: ¿sería conveniente abordar primero el tema de derivación y después integración, o en orden inverso? Para decidirlo se podría pensar en los beneficios e inconvenientes de hacerlo de cada una de dichas formas. En este momento solo se identificará en que orden se aborda en los libros que se están revisando.

Apostol (1999) y Courant y John (1999) tratan primero el cálculo integral, llegando a obtener la fórmula de integral definida de algunas funciones (funciones potencias y/o polinómicas) partiendo de la definición, mientras que Spivak (1996) y Stewart (2008) abordan primero el cálculo diferencial y después el cálculo integral. Sin embargo, es importante notar que Spivak (1996) también muestra la forma de proceder para obtener algunas fórmulas para integrales a partir de la definición ($f(x) = c, f(x) = x$, $f(x) = x^2$), mientras que Stewart (2008) solo muestra algunos ejemplos concretos de integrales definidas aplicando la definición, no obtiene ninguna fórmula. Algunas fórmulas para integrales las obtiene después, apoyándose del primer teorema fundamental del cálculo y de las fórmulas de derivación mostradas en el capítulo donde aborda este tema.

Se puede decir que en el caso de los libros de Apostol (1999), Courant y John (1999) y Spivak (1996), independientemente del orden que se aborden los temas de integración y derivación, se deja claro la autonomía del tema de integración. Me refiero a que se muestra que es posible obtener integrales de funciones continuas sin usar el teorema fundamental del cálculo. Señalan que en muchas funciones será difícil o tal vez imposible hacer de manera precisa, pero que se pueden obtener aproximaciones tan precisas como se quiera. Mientras que, en el caso del libro de Stewart (2008), dado los escasos ejemplos sobre integrales con la definición y el paso rápido a la utilización del teorema fundamental para la obtención de fórmulas para integrales, puede dar la impresión de que para calcular integrales es indispensable emplear el primer teorema fundamental del cálculo.

Forma de abordar los temas de derivada e integral. Ahora se analizará la forma que los autores mencionados abordan los temas de derivada e integral, los cuales están directamente relacionados con el primer teorema fundamental del cálculo. Primero se revisará el tema de derivada y después el de integral.

Derivada. Spivak (1996) utiliza el problema de obtener la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto para mostrar la necesidad de definir el concepto de derivada. Después de definirlo utiliza el ejemplo de una función que proporciona la distancia que ha recorrido un objeto dependiendo del tiempo para mostrar que la interpretación física de la derivada es en este caso la velocidad instantánea, y aclara que "es un concepto teórico, y una abstracción, que no corresponde con ninguna cantidad observable" (p. 203). Finalmente menciona que la velocidad instantánea es a veces llamada *tasa de variación de la posición*, que se aplica también a otras situaciones físicas donde una cantidad varia con el tiempo.

Apostol (1999) muestra cómo resolver el problema de obtener la velocidad instantánea de un objeto que cuya posición está dada por la función $f(t)$, y se apoya en este para definir el concepto de derivada. Menciona además que "el número $f'(x)$ también se denomina coeficiente de variación de f en x" (p. 196). Posteriormente muestra que la derivada puede ser interpretada como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto.

Courant y John (1999) abordan el problema de obtener la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto, resolviéndose como un límite de un cociente de diferencias. Se utiliza la solución de este problema para definir la derivada, y después utiliza este concepto para "substituir el concepto intuitivo de velocidad o rapidez por una definición precisa" (p. 183).

Stewart (2008) plantea los problemas de obtener la pendiente de la tangente a una gráfica en un punto y obtener la velocidad instantánea de un cuerpo cuya posición está dada por $s(t)$. Se muestra la manera de resolverlos a través de aproximaciones. Posteriormente, aborda el tema de límite. Después, regresa al problema de las tangentes empleando el concepto de límite para definir la recta tangente a una curva en un punto. De igual manera aborda nuevamente el problema de la velocidad instantánea. Después, apoyándose de los 2 ejemplos introduce el concepto de derivada. Finalmente, empleando el concepto de derivada define el concepto de razón de cambio instantánea, dando ejemplos como

> la velocidad de un objeto es la razón de cambio del desplazamiento con respecto al tiempo; el costo marginal es la razón de cambio del costo de producción con respecto al número de artículos producidos; la razón de cambio de la deuda con respecto al tiempo es de interés en economía. (p. 150)

Y, además, agrega:

> Todas estas razones de cambio se pueden interpretar como pendientes de tangentes. Esto le confiere un significado adicional a la solución del problema de la tangente. Siempre que resuelva problemas en que intervienen rectas tangentes, no resuelve sólo un problema de geometría. También resuelve implícitamente una gran variedad de problemas de la ciencia y la ingeniería en que intervienen razones de cambio. (p. 150)

De manera concreta, se puede decir que Spivak (1996) y Courant y John (1999) se apoyan en el problema de determinar la pendiente de la rectan tangente a una curva para introducir el concepto de derivada, y con este concepto abordan el problema de velocidad. Spivak (1996) emplea el problema de la velocidad para mostrar una interpretación física de la derivada, mientras que Courant y John (1999) lo emplean como ejemplo de la utilización del concepto derivada para definir de manera precisa otro concepto (velocidad).

Apostol (1999) se apoya de los mismos ejemplos, pero los utiliza en otro orden. Utiliza la velocidad instantánea para introducir el concepto de derivada, y una vez hecho esto, utiliza el problema de la pendiente de la recta tangente a una curva para mostrar una interpretación de la derivada.

Stewart (2008) lo aborda de manera diferente a los anteriores, emplea ambos ejemplos (pendiente de la recta tangente a una curva y velocidad instantánea) para introducir el tema de límite y posteriormente abordar el tema de derivada. A su vez emplea este concepto para definir tasa de cambio instantánea de $y = f(x)$ respecto a x como la derivada $f'(x)$.

En todos los casos se utiliza un ejemplo antes de introducir el concepto derivada y otro después. Los ejemplos comunes en los textos son el de obtener la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función y el de la velocidad instantánea.

Es importante notar que, en algunos casos, los autores mencionan otros nombres con los que se conoce a la derivada o se le relaciona con otros conceptos. Spivak (1996) relaciona el concepto de derivada con la de tasa de variación, pues menciona que a veces la velocidad recibe el nombre de tasa de variación, agregando que este concepto se aplica a situaciones donde una cantidad cambia con el tiempo. Apostol (1999) menciona que a la derivada también se le conoce como coeficiente de variación. Mientras que Stewart (2008) define la razón de cambio instantáneo de $y = f(x)$ respecto a x como la derivada de $f(x)$. Menciona que tal concepto es utilizado en ciencias e ingeniería. De acuerdo con la forma en que Apostol (1999) se refiere al concepto de tasa de variación y Stewart (2008) al de razón de cambio instantánea, se puede decir que difieren en que el primero se aplica cuando se tiene una función que depende del tiempo, mientras que la tasa de cambio instantánea es aplicable a funciones que no dependan necesariamente del tiempo. Stewart (2008) da el siguiente ejemplo: "el costo marginal es la razón de cambio del costo de producción con respecto al número de artículos producidos" (p. 150).

Otro aspecto que hay que notar es que en el libro de Stewart (2008) se incluyen una cantidad importante de aplicaciones, al grado de que, como se ha mencionado, se ubican en un capítulo aparte. Esto parece razonable por ser un libro dirigido a estudiantes de ciencias e ingeniería, quienes tienen que desarrollar cierta habilidad para aplicar los conceptos matemáticos para resolver problema de la realidad.

Integral. Spivak (1996) se apoya en el problema de obtener el área de una región delimitada por la gráfica de una función f, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$; para llegar a definir el concepto de integral definida. De hecho, declara "la integral $\int_a^b f$ recibe el nombre de área de $R(f, a, b)$ cuando $f(x) \geq 0$ para todo x de $[a, b]$" (p. 355). Después, en la sección de problemas, se presentan ejemplos que muestran la aplicabilidad de este concepto:

- Determinar el área de una región distinta a la que se empleó para llegar a la definición de integral (para esto se emplean coordenadas polares)
- Calcular la longitud de una curva
- Calcular volúmenes de revolución
- Áreas de regiones de superficie curva

Apostol (1999), de manera similar, aborda el problema de determinar el área bajo la curva de una función definiendo para ello el concepto de área de manera axiomática. Después, define el concepto de integral de una función escalonada:

> DEFINICIÓN DE INTEGRAL DE FUNCIONES ESCALONADAS. La integral de s de a a b, que se designa por el símbolo $\int_a^b s(x)dx$, se define mediante la siguiente fórmula:
>
> $$\int_a^b s(x)dx = \sum_{k=1}^{n} s_k \cdot (x_k - x_{k-1})$$
>
> Es decir, para obtener el valor de la integral, se multiplica cada valor s_k constante, por la longitud de intervalo k-ésimo correspondiente, formando el producto $s_k \cdot (x_k - x_{k-1})$ y se suman luego todos los productos obtenidos. (p.80)

Posteriormente agrega: "La integral de s es igual a la suma de las áreas de cada uno de los rectángulos, prescindiendo de los valores que toma s en los puntos de división" (p. 81)

Después de mencionar las propiedades de esta integral, y apoyándose de este concepto define el concepto de integral definida para funciones más generales (funciones acotadas), señalando que esta integral representa el área bajo la curva, para lo cual enuncia un teorema:

> Teorema 1.10. Sea f una función no negativa integrable en un intervalo $[a, b]$, y sea Q el conjunto de ordenadas de f sobre $[a, b]$. Entonces Q es medible y su área es igual a la integral $\int_a^b f(x)dx$. (p. 92)

Es importante señalar que Apostol (1999) se refiere al *conjunto de ordenadas*, de la siguiente manera:

> Sea f una función no negativa cuyo dominio es el intervalo cerrado $[a, b]$. La parte del plano comprendida entre la gráfica de f y el eje de las x se denomina el *conjunto de ordenadas* de f. Precisando más, el conjunto de ordenadas de f es el conjunto de todos los puntos (x, y) que satisfacen las desigualdades:
>
> $a \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq f(x)$. (p. 75)

El autor menciona varias aplicaciones de la integral, como: obtener el área de regiones comprendidas entre 2 curvas, cálculo de volúmenes y trabajo.

Courant y John (1999) también, abordan el problema de obtener el área debajo de la curva de una función, y llama a esta área integral de la función. Posteriormente dan una definición analítica de integral y mencionan:

> en el párrafo anterior aceptamos al área bajo una curva como una cantidad dada intuitivamente, y a continuación ésta se presentó como un valor límite. Ahora se invertirá el procedimiento. No se invocará más a la intuición para asignar un área a la región bajo una curva continua; por el contrario, se comenzará de manera puramente analítica [...]. (pp. 145-146)

Stewart (2008), como preámbulo a la definición de integral presenta el problema de obtener el área bajo la curva de una función y el problema de obtener la distancia recorrida por un objeto del cual se conoce su velocidad en todo tiempo. En este último se apoya de una representación gráfica de la función mostrando que al obtener el área de un rectángulo cuya base es un pequeño intervalo de tiempo y cuya altura es $v(t)$ se obtiene una aproximación al desplazamiento en ese pequeño intervalo. Llega a establecer que en ambos casos se pueden obtener mejores aproximaciones dividiendo el intervalo en más partes, mostrando que el valor preciso es el límite cuando n tiende a infinito.

Después de mencionar que el tipo de límite que apareció cuando se abordó el problema del área bajo la curva y el de la distancia aparece en diversidad de situaciones, define el concepto de integral definida:

> DEFINICIÓN DE INTEGRAL DEFINIDA Si f es una función continúa definida para $a \leq x \leq b$, divida el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual ancho $\Delta x = (b - a)/n$. Haga que $x_0(= a)$, x_1, ..., $x_n(= b)$ sean los puntos extremos de estos subintervalos y elija x_0^*, x_1^*, ..., x_n^* como los puntos muestras en estos subintervalos, de modo que x_i^* se encuentre en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces la integral definida de f, desde a hasta b, es
>
> $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$
>
> siempre que exista este límite, si existe, f es integrable en $[a, b]$. (p. 366)

Después, enuncia el teorema fundamental del cálculo (que corresponde con lo que Spivak (1996) considera primer teorema fundamental del cálculo y su corolario) y muestra algunas aplicaciones de la integral, como determinación de áreas entre curvas y cálculo de volúmenes; además, incluye un capítulo aparte con más aplicaciones entre las que se encuentran longitud de arco, área de superficies de revolución, algunos ejemplos de física e ingeniería como fuerza y presión hidrostática, ejemplos de economía, biología y probabilidad.

Como se ha visto, todos los autores utilizan como el preámbulo a la definición de integral, el problema de obtener el área bajo la curva de una función; Stewart (2008), además de este utiliza el de obtener la distancia recorrida por un objeto del cual se conoce su velocidad en todo tiempo. Todos, con excepción de Courant y John (1999) muestran aplicaciones del concepto, entre las que destacan, áreas entre 2 curvas, longitud de curvas y volumen de sólidos de revolución, y Stewart (2008) además incluye una gran cantidad de otros ejemplos.

Sobre la notación. Durante la revisión de los libros se ha notado que en todos estos se mencionan otras formas de simbolizar los conceptos de integral y derivada, que están directamente relacionado con el teorema fundamental del cálculo, por lo que en este apartado se puntualizan estas observaciones, abordando primero la notación de la derivada y después la de integral.

Derivada. Spivak (1996) emplea la notación $f'(a)$ para simbolizar la derivada de una función en un punto y f' para referirse a la función derivada. Menciona además que la *notación clásica* $\frac{df(x)}{dx}$, a veces se usa para designar a la función derivada y en otras ocasiones al valor de la derivada en x. Agrega que para vencer esta ambigüedad algunos autores emplean $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=a}$ para designar a $f'(a)$.

Apostol (1999), al definir la derivada de una función emplea $f'(x)$, menciona que f' expresa que la derivada es una función que se obtuvo de la función f, y cuyo valor en x es $f'(x)$. Menciona otras formas de simbolizar este concepto, por ejemplo y', y'', …, y^n, $f'(x)$ $f''(x)$,…, $f^n(x)$ para derivadas de diferente orden. Agrega que $\dot{y}$ y $\ddot{y}$ son empleados por algunos autores para referirse específicamente a la velocidad y aceleración, respectivamente.

Df, $D2f$ y $D2f(x)$ son ejemplos de otra notación introducida por L. Arbogast, según lo indicado por Apostol (1999), quien enfatiza la importancia que ha tenido la elección adecuada de la notación en el desarrollo de las matemáticas.

Sobre la notación de Leibniz dy/dx, Apostol (1999) menciona que tiene la ventaja de resumir el proceso completo del cálculo de un cociente de diferencias y paso al límite ($\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$). Este autor, no especifica, como en el caso de Spivak (1996), la forma de simbolizar la derivada de una función en un punto.

Courant y John (1999) utilizan la notación de Lagrange $y' = f'(x)$ (los autores así lo indican), pero mencionan que existen otras formas de simbolizar la derivada, por ejemplo: $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$ y $\frac{d}{dx}f(x)$. Agregan que la notación $f'(x)$ indica que se trata de una función de x.

Stewart (2008) emplea $f'(a)$ para referirse a la derivada en un punto y $f'(x)$ a la función derivada. Menciona además las siguientes formas de simbolizar la derivada:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = Df(x) = D_x f(x)$$

Agrega que, sobre la notación de Leibniz $\frac{dy}{dx}$, es "útil y sugerente, en especial cuando se usa en la notación de incrementos $\left[\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \lim_{\Delta \mathrm{x} \to 0} \frac{\Delta \mathrm{y}}{\Delta \mathrm{x}}\right]$" (p. 157) la cual se emplea de la siguiente manera para referirse a la derivada de una función en un punto:

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$ o $\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=a}$

Todos los autores mencionan diferentes formas de simbolizar el concepto derivada, sin embargo, solo Apostol (1999) menciona explícitamente la importancia que tiene la elección de una notación adecuada en el desarrollo de las matemáticas. Apostol (1999) y Stewart (2008) mencionan la utilidad de la notación de Leibniz.

Integral. Spivak (1996), al definir el concepto de integral definida emplea la notación $\int_a^b f$, y aclara: "El símbolo ∫ recibe el nombre de *signo integral* y en su origen era una *s* alargada, por «suma»; los números *a* y *b* reciben el nombre de *límites de integración inferior y superior*" (p. 355). Después de mostrar una pequeña lista de fórmulas de integrales definidas agrega que "la notación $\int_a^b f$ adolece de falta de notación conveniente para designar a funciones definidas mediante fórmulas. Por esta razón resulta también útil otra notación[...]: $\int_a^b f\,(x)dx$ significa precisamente lo mismo que $\int_a^b f$" (p. 364). Además, después de mostrar las fórmulas (a las que se refiere en la cita anterior) con esta nueva notación añade: "obsérvese que, lo mismo que en la notación $\lim_{x \to a} f(x)$, el símbolo x puede sustituirse por otra letra cualquiera (con excepción, por supuesto, de f, a, o b)" (p. 364)

Sobre el símbolo dx, menciona que carece de significado aisladamente, y agrega:

> En la ecuación
>
> $$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3},$$
>
> El símbolo $x^2 dx$ entero puede ser considerado como una abreviación para: La función f tal que $f(x) = x^2$ para todo x. (p. 365)

Apostol (1999), al definir la integral definida de funciones escalonadas utiliza $\int_a^b s(x)dx$ y al abordar una sección dedicada a la notación menciona que en lugar de la letra x se puede utilizar cualquier otro símbolo, dando los siguientes ejemplos: $\int_a^b s(t)dt$ y $\int_a^b s(u)du$. Agrega: "Los símbolos x, t, u, etc., que se utilizan en este sentido, se denominan «variables aparentes»" (pp. 85-86).

Menciona que algunos autores suprimen las variables aparentes junto con el símbolo d quedando $\int_a^b s$. Sobre esto, indica que:

> expresa con más fuerza que la integral depende solamente de la función s y del intervalo $[a, b]$. Así algunas fórmulas toman una forma más simple con esta notación. Por ejemplo, la propiedad aditiva se expresa: $\int_a^b (s + t) = \int_a^b s + \int_a^b t$. Sin embargo, resulta más complicado escribir algunas fórmulas, como por ejemplo, las de los teoremas 1.7 y 1.8 con la notación abreviada. (p. 86)

Los teoremas mencionados son los siguientes:

> Teorema 1.7. INVARIANZA FRENTE A UNA TRASLACIÓN
>
> $\int_a^b s(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} s(x-c)dx$ para todo real c (p. 84)
>
> Teorema 1.8. DILATACIÓN O CONTRACCIÓN DEL INTERVALO DE INTEGRACIÓN
>
> $\int_{ka}^{kb} s\left(\frac{x}{k}\right) dx = k \int_a^b s(x)dx$ para todo $k > 0$ (p. 84)

Courant y John (1999) utilizan el símbolo F_a^b para referirse en primer momento a la integral de a hasta b de la función f. Después utilizan la notación de Leibniz $\int_a^b f(x)dx$, sobre la que mencionan:

> El signo de integral es una modificación del signo de sumatoria en forma de S grande que se usó en la época de Leibnitz. El paso al límite a partir de una subdivisión finita de porciones Δx_i es indicada mediante el uso de la letra d en lugar de Δ. Sin embargo, al utilizarse esta notación no debe tolerarse el misticismo del siglo XVIII de considerar dx como un "infinitamente pequeño" o "cantidad infinitesimal", o de considerar la integral como una "suma de un número infinito de cantidades infinitamente pequeñas". Tal concepción está desprovista de significado claro y oscurece lo que anteriormente se ha formulado con precisión. Desde el punto de vista presente, el símbolo individual dx no ha sido definido. (pp. 147-148)

Y, además agregan:

> El símbolo particular que se utiliza para la variable de integración es una cuestión sin importancia alguna (así como en la notación para sumas no importa cómo se denominó al índice de la sumatoria); en lugar de $\int_a^b f\,(x)dx$ puede igualmente escribirse $\int_a^b f\,(t)dt$ o bien $\int_a^b f\,(u)du$. (p. 148)

Stewart (2008), al definir el concepto de integral definida utiliza $\int_a^b f\,(x)dx$ para simbolizarlo y agrega 2 notas para aclarar ciertos aspectos sobre la integral, en donde se mencionan algunas cuestiones de la notación:

> Leibniz introdujo el símbolo ∫ y se llama signo integral. Es una S alargada y se eligió debido a que la integral es un límite de sumas. En la notación $\int_a^b f(x)dx$, $f(x)$ se llama integrando, y a y b se conocen como los límites de integración; a es el límite inferior y b es el límite superior. El símbolo dx no tiene significado en sí; la expresión $\int_a^b f(x)dx$, vista como un todo, es un símbolo único. La dx indica simplemente que la variable independiente es x" […]. La integral definida $\int_a^b f(x)dx$ es un número; que no depende de x. De hecho, podría utilizar cualquier letra en lugar de x, sin cambiar el valor de la integral: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(r)dr$" (pp. 366-367)

Todos los autores señalan que la integral definida solo depende de la función a integrar y del intervalo de integración, no de la variable x por lo que se podría usar cualquier otra. Los autores, con excepción de Stewart (2008) mencionan que la notación $\int_a^b f$ expresa fuertemente dicha dependencia. Sin embargo, mencionan que la notación $\int_a^b f(x)dx$ permite con facilidad escribir algunas fórmulas. Por otra parte, Spivak (1996), Courant y John (1999) y Stewart (2008) mencionan que el símbolo ∫ tiene su origen en una *S* alargada.

Sobre el símbolo dx, Spivak (1996) y Stewart (2008) mencionan que, no tiene un significado por sí mismo, pero dentro del símbolo completo $\int_a^b f(x)dx$ indica que la variable independiente es x. Y solo Courant y John (1999) relacionan ese símbolo con Δx, mencionando que el dx indica el paso al límite de una *subdivisión finita de porciones.*

Resumen. Dado que diferentes autores llaman de distinta manera a lo que Spivak (1996) considera el primer teorema fundamental del cálculo y su corolario, y que Spivak (1996) enuncia, además, el segundo teorema fundamental, es importante recalcar que la diferencia entre los dos radica en que el segundo es para funciones integrables (las cuales pueden ser discontinuas), mientras que el primero es para funciones continuas; esto nos puede ayudar a identificar si lo que se declara en algún otro libro como segundo teorema fundamental del cálculo, lo es en el sentido en que Spivak (1996) lo declara o corresponde con el corolario.

De manera muy resumida se puede decir que la importancia del primer teorema fundamental del cálculo es mostrar la relación entre las dos ramas del cálculo, el cálculo diferencial e integral, y proporcionar una forma sencilla de calcular una integral a través de una antiderivada, en lugar de hacerlo con el límite de una suma de Riemann.

Sobre la relación entre las operaciones de integración y derivación establecida por el primer teorema fundamental del cálculo, aunque los autores difieren en algunos aspectos, se puede decir que todos coinciden en que, si se integra una función, y se deriva el resultado, se obtiene la función original.

El primer teorema fundamental del cálculo nos presenta una manera sencilla de calcular integrales, sin embargo, para varias funciones estas pueden ser obtenidas de forma precisa con la definición de integral, y en los casos de que no, se pueden obtener aproximaciones tan precisas como se desee.

Sobre los temas de derivada e integral, relacionados directamente con el primer teorema fundamental del cálculo, los problemas de obtener la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función y el de obtener la velocidad instantánea de un objeto del que se conoce su posición en todo tiempo, son ejemplos típicos utilizados para introducir el concepto de derivada y para mostrar una aplicación de este concepto. El problema de calcular el área bajo la gráfica de una función en un intervalo dado es el que se utiliza como motivación del concepto de integral. Los ejemplos comunes para mostrar la aplicación de este concepto son: determinar áreas entre 2 curvas, longitud de curvas y volumen de sólidos de revolución.

Todos los autores mencionan varias formas de simbolizar los conceptos de derivada, sin embargo, solo Apóstol (1999) menciona de manera explícita la importancia de la elección de una notación adecuada. Sobre el símbolo para la integral $\int_a^b f(x)dx$, todos los autores mencionan que, ya que la integral solo depende de la función y de los límites de integración, en lugar de x se puede utilizar cualquier otra variable (excepto a, b y f). Sobre el símbolo dx, solo Spivak (1996) y Stewart (2008) mencionan que este no tiene significado por sí solo, y que dentro del símbolo de integral completo indica que la variable independiente es x.

Capítulo 2. Marco conceptual

Este capítulo incluye los conceptos que ayudan a comprender el desarrollo del presente trabajo y a partir de los cuales se fundamentan las conclusiones. Se incluyen dos tipos, conceptos del contenido matemático del cual se está explorando el razonamiento y concepciones de los estudiantes, y conceptos de educación matemática.

Dentro de los primeros, se presenta el primer teorema fundamental del cálculo, y acumulación y razón de cambio, que son interpretaciones de los conceptos integral y derivada, respectivamente. Tales nociones pueden ayudar a los estudiantes a comprender el primer teorema fundamental del cálculo. Los conceptos de educación matemática son precisamente, razonamiento y concepciones.

El marco conceptual que se presentará se realizó siguiendo la idea de Miles y Huberman (1994) sobre lo que es un marco conceptual:

> Un marco conceptual explica, ya sea gráficamente o en forma narrativa, los principales aspectos a estudiar (los factores clave, los constructos o las variables) y las presuntas relaciones entre ellos. Los marcos pueden ser rudimentarios o elaborados, basados en la teoría o de sentido común, descriptivos o causales. (p. 18)

En seguida se describen los conceptos mencionados, iniciando con los del contenido matemático y siguiendo con los de educación matemática.

Integral como acumulación

Una interpretación posible del concepto integral definida e indefinida (en el Anexo D se presentan sus definiciones) es como acumulación. Sobre esta interpretación, Thompson y Silverman (2008) declaran: “El concepto de acumulación es fundamental para la idea de integración y, por lo tanto, está en el centro de la comprensión de muchas ideas y aplicaciones en el cálculo” (p. 43). De acuerdo con lo que plantean, la idea de acumulación es trivial cuando se le relaciona con cuestiones de la vida diaria, pero resulta complicado cuando se aplica al concepto de integral. Según los autores la dificultad radica en dos aspectos:

> Primero, a los estudiantes les resulta difícil pensar en algo que se acumula cuando no pueden conceptualizar los "bits" que se acumulan [...]. Segundo, la idea matemática de una función

> de acumulación, representada como $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, implica tantas partes móviles que es comprensible que los estudiantes tengan dificultades para comprenderlo y emplearlo. (Thompson y Silverman, 2008, p. 43)

Aunque Thompson y Silverman (2008) se refieren inicialmente al concepto de acumulación, en la mayor parte del artículo utilizan el término funciones de acumulación, sobre las que declaran "Las funciones de acumulación pueden representarse generalmente mediante $F(x) = \int_a^x f(t)dt$" (p. 43). Es decir, la función integral o integral indefinida.

Los autores, a través de un ejemplo, explican que, para comprender las funciones de acumulación, los estudiantes deben coordinar tres cantidades: x, $f(x)$ y $\int_a^x f(t)dt$. Argumentan, además, que esta interpretación de la integral como acumulación es útil para que los estudiantes comprendan que la integral puede representar otra cantidad diferente a área, para lo cual es necesario comprender las sumas de Riemann:

> Una suma de Riemann, entonces, hecha por una suma de "bits" incrementales, cada uno de los cuales está hecho multiplicativamente por dos cantidades [las cantidades en que están expresados f y x], representa una cantidad total de la cantidad derivada cuyos bits están definidos por $f(c)\Delta x$ [donde $c \in [x, x + \Delta x]$]. Por lo tanto, para que los estudiantes vean "área bajo una curva" como una cantidad que no sea área, es imperativo que conciban las cantidades que se acumulan como creadas al acumular bits incrementales que se forman de manera multiplicativa. (Thompson y Silverman, 2008, p. 45)

Mencionan que el límite es una de las dificultades que tienen los estudiantes al comprender las funciones de acumulación.

Thompson y Silverman (2008) no lo indican específicamente de esta manera, pero de acuerdo con las referencias mostradas anteriormente, puede ser claro que las funciones de acumulación son integrales indefinidas que se definen con el límite de una suma de Riemann. En donde además se debe pensar que la variable independiente x representará cierta cantidad y $f(x)$ otra, de tal manera que $f(c)\Delta x$ (donde $c \in [x, x + \Delta x]$) es una cantidad creada a partir de las otras dos cantidades.

Derivada como razón de cambio

Stewart (2008) menciona que una posible interpretación de la derivada de una función (el Anexo D se presenta su definición) es como una razón de cambio, la cual se puede obtener cuando una cantidad y depende de otra cantidad x. Por lo que al haber un incremento en x (Δx) se tendrá el correspondiente incremento en y (Δy).

Al cociente de diferencias ${\Delta y}/{\Delta x}$, le llama razón de cambio promedio de y con respecto a x en el intervalo que define Δx. Y al límite de este cociente de diferencias, cuando Δx tiende a cero, le llama razón (instantánea) de cambio de y con respecto a x. De tal manera que establece que "la derivada $f'(a)$ es la razón de cambio instantánea de $y = f(x)$ con respecto a x cuando $x = a$" (Stewart, 2008, p.148). Courant y John (1999) expone algo equivalente a lo que indica Stewart (2008), con la diferencia de que le llama "razón promedio de variación" a lo que Stewart (2008) llama "razón promedio de cambio", y llama "razón instantánea de variación" (o razón de variación) a lo que Stewart (2008) llama razón de cambio. Además, Spivak (1996) utiliza el término "tasa de variación" para referirse a una interpretación de la derivada, aplicable a situaciones físicas donde una cantidad varía con el tiempo.

Orton (1983) indica que se deben sentar las bases de la idea de razón de cambio a lo largo de la vida escolar de los alumnos, y no esperar hasta la instrucción sobre cálculo. Por su parte, Larsen et al. (2017) mencionan que es necesario que los estudiantes comprendan el concepto razón de cambio antes de estudiar el concepto derivada. Además, Thompson (1994) indica que el concepto de razón de cambio (y cambio infinitesimal) es fundamental para comprender el primer teorema fundamental del cálculo.

Primer teorema fundamental del cálculo

De acuerdo con lo presentado en el *Ensayo sobre el primer teorema fundamental del cálculo* (que forma parte del capítulo de Antecedentes de este trabajo), parece conveniente la forma en que Spivak (1996) enuncia los teoremas fundamentales del cálculo. Ya que abarcan funciones más generales que las consideradas por otros autores (Apostol (1999), Courant y John (1999) y Stewart (2008)). Por ello, se considera en este trabajo el primer teorema fundamental en la forma propuesta por Spivak (1996) la cual se muestra en el Anexo C.

Sobre la relación entre acumulación y razón de cambio, Thompson y Silverman (2008) mencionan "cuando algo cambia, algo se acumula. Cuando algo se acumula, se acumula a cierto ritmo. Entender bien la tasa de cambio, entonces, significa que uno ve la acumulación y su tasa de cambio como dos caras de una moneda" (p. 49), y esta relación es la que establece el primer teorema fundamental del cálculo.

Concepciones

Confrey (1990) utiliza el termino concepciones para referirse a creencias, teorías, significados y explicaciones, que desarrollan los estudiantes sobre su mundo y sobre palabras utilizadas en ciencias, matemáticas y programación. Agrega que algunos investigadores han usado el término concepciones erróneas para referirse a concepciones que están en conflicto con los significados aceptados en ciencia, matemáticas y programación.

Por su parte Fujii (2014) menciona que algunos investigadores evitan el término concepciones erróneas porque tales concepciones las consideran como malentendidos y comprensiones parciales que se desarrollan y cambian a lo largo de los años escolares. Además de mencionar que "desde la perspectiva de un niño, es una concepción razonable y viable basada en sus experiencias en diferentes contextos o en sus actividades de la vida diaria" (p. 453).

Relacionado con lo mencionado en el párrafo anterior, se debe indicar que Balacheff (2013) señala que el aprendizaje: "es un proceso cuyo resultado es una evolución de concepciones que se refuerzan, cuestionan o transforman" (p. 12).

Razonamiento

La NCTM (2009), define en términos generales el razonamiento como "el proceso de sacar conclusiones sobre la base de evidencia o suposiciones declaradas" (p. 4). Sobre el razonamiento en matemáticas aclaran:

> El razonamiento en matemáticas a menudo se entiende como un razonamiento formal, en el que las conclusiones se deducen lógicamente de los supuestos y definiciones. Sin embargo, el razonamiento matemático puede tomar muchas formas, que van desde la explicación informal y la justificación hasta la deducción formal, así como las observaciones inductivas.

El razonamiento a menudo comienza con exploraciones, conjeturas en una variedad de niveles, comienzos falsos y explicaciones parciales antes de llegar a un resultado. (p. 4)

Basado en esta definición de razonamiento, en los niveles del modelo SOLO[3] (niveles en que pueden clasificarse las respuestas de los estudiantes a cierta tarea) y en los datos de la aplicación del instrumento de esta investigación, se proponen cuatro niveles de razonamiento de los estudiantes al abordar problemas donde se involucran los conceptos de integral, derivada y primer teorema fundamental del cálculo.

Como se ha mencionado, estos niveles forman parte de los resultados de esta investigación (es decir emergieron del análisis de los datos), por lo que en esta sección se describen de manera muy general, mientras que en los capítulos de *Análisis y resultados* y *Conclusiones* se muestra el proceso que llevo a proponerlos y se describen de manera más detallada.

A grandes rasgos, los niveles del modelo SOLO en que pueden clasificarse las respuestas a una tarea, pueden describirse de la siguiente manera según Pegg (2014):

- Uniestructural: el estudiante se enfoca en el dominio / problema, pero usa solo una pieza de información relevante y, por lo tanto, puede ser inconsistente.
- Multiestructural: se utilizan dos o más datos sin que se perciban relaciones entre ellos. No se produce integración. Alguna inconsistencia puede ser aparente.
- Relacional: Todos los datos ahora están disponibles, con cada pieza tejida en un mosaico general de relaciones. El todo se ha convertido en una estructura coherente. No hay inconsistencia presente en el sistema conocido. (p. 572)

Se usa esta idea, pero en lugar de considerar los datos (cantidad y relación entre estos) en los que el estudiante se enfoca al abordad un problema, se consideran tres aspectos que

---

[3] SOLO es la sigla de Structure of the Observed Learning Outcome, que es una propuesta de Biggs y Collins (1982), la cual, de acuerdo con Pegg (2014) “es un marco general para evaluar sistemáticamente la calidad [del aprendizaje] en términos de características estructurales y jerárquicas” p. 572).

pueden presentarse al argumentar sus respuestas, uno de los cuales relaciona a los otros dos. Se describen a continuación:

- Aplicación de algoritmos de integración y derivación, que es necesario, pero no suficiente para resolver problemas no rutinarios.
- Interpretación de dichos conceptos en el contexto del problema, lo cual implica hacer declaraciones y suposiciones sobre ello (incluye interpretar a la integral como acumulación y/o derivada como razón de cambio); y/o declaraciones sobre la relación entre integral y derivada.
- Justificación sobre las declaraciones. Donde se utilicen las definiciones para argumentar la utilización de los conceptos en los contextos, lo que permite establecer una relación entre las declaraciones hechas y los algoritmos utilizados.

Tabla 3. Aspectos identificados en las respuestas de cada nivel de razonamiento y su relación con los niveles de SOLO

Nivel de razonamiento	Nivel SOLO	Aspectos		
		Algoritmos	Declaraciones	Justificación
Procedimental	Uniestructural	X		
Pre-operacional o declarativo	Multiestructural	X	X*	
Operacional		X	X	
Conceptual	Relacional	X	X	X

Nota: Se usó X* para indicar que las respuestas se hacen declaraciones incorrectas sobre interpretación de integral como acumulación, derivada como razón de cambio y/o sobre la relación entre integración y derivación.

La Tabla 3 muestra de forma sintética los niveles de razonamiento identificados en las respuestas de los estudiantes (y el nivel conceptual, que es un nivel no identificado, pero deseable en estudiantes universitarios), su posible relación con los niveles de SOLO, y los aspectos o características principales de las respuestas de cada nivel. La primera columna contiene los niveles de razonamiento, la segunda el nivel SOLO que corresponde con las respuestas de cada nivel, mientras que las tres restantes indican los diferentes aspectos (que se han señalado anteriormente) que pueden contener las respuestas. Se indica con “X” si el nivel de razonamiento presenta la característica indicada en el encabezado de la columna.

Habiendo dado una visión general de las características de los niveles, se describen a continuación:

Razonamiento procedimental. Las respuestas que son originadas por este nivel de razonamiento consisten en la aplicación del algorítmico de derivación o integración. Es decir, solo se considera un aspecto de la solución, por lo que este nivel podría corresponder con el nivel Uniestructural de SOLO. En el caso donde el problema consiste en realizar una de dichas operaciones, este nivel de razonamiento permite obtener una respuesta correcta. Mientras que, donde los problemas requieren la consideración de más de un aspecto (por ejemplo, un problema no rutinario donde se tiene que interpretar los conceptos en el contexto del problema), este nivel no es suficiente para resolverlo exitosamente.

Razonamiento pre-operacional o declarativo. Este nivel se manifestó con dos aspectos en la argumentación de la respuesta. Se realizan de manera correcta (en la mayoría de los casos) los algoritmos de integración y derivación, y se hacen declaraciones erróneas sobre las interpretaciones de los conceptos en el contexto del problema o solo se indica que existe cierta relación entre los conceptos, pero no se dice en que consiste. Este nivel de razonamiento correspondería con el nivel Multiestructural de SOLO.

Razonamiento operacional. A este nivel de razonamiento, se le llama “operacional” por el hecho de que permite obtener respuestas correctas (si no se cometen errores aritméticos). Este nivel del razonamiento se identificó en respuestas en las que se usan los algoritmos de integración y/o derivación y se hacen declaraciones correctas sobre la interpretación de estos conceptos en el contexto del problema (como acumulación y razón de cambio, respectivamente) y/o sobre la relación entre los conceptos de integración y derivación. Por ello podría corresponder con el nivel multiestructural de SOLO.

Razonamiento conceptual. Este nivel se manifestaría con el uso de los algoritmos de integración y/o derivación, declaraciones sobre la relación entre estas operaciones y/o sobre la aplicación de los conceptos al contexto de los problemas; y justificación sobre las declaraciones, mediante definiciones de los conceptos. El último aspecto es el que permite establecer una relación coherente entre las declaraciones y el uso de los algoritmos en la solución, por ello correspondería con un nivel relacional de SOLO.

Capítulo 3. Método

La investigación que se presenta explora el razonamiento de los estudiantes al resolver problemas relacionados con el primer teorema fundamental del cálculo. Es una investigación tipo cualitativo, pues los hallazgos no se sustentan en mediciones rigurosas de cantidad, calidad, intensidad o frecuencia, sino en las respuestas de los estudiantes (símbolos y textos) a las preguntas formuladas y en las interpretaciones que un grupo de investigadores dieron a estos datos. En particular, la manera en que se concibe el presente trabajo toma algunas características de dos métodos generales que posibilitan tener un mejor entendimiento del fenómeno estudiado (Denzin y Lincoln, 1994). Estos métodos son el *estudio de caso* y la *teoría fundamentada*, de los cuales se harán comentarios más adelante.

Dos aspectos que conviene destacar de la presente investigación y que Creswell (2014) considera que son características de la investigación cualitativa son las siguientes:

- no se trata de probar una teoría, sino generarla;
- el instrumento consiste en un cuestionario de preguntas abiertas.

Como se ha mencionado, se utiliza el método de estudio de caso (Stake, 1994), donde el caso está formado por el conjunto de respuestas que dieron los participantes (un grupo de estudiantes universitarios) a los problemas sobre el primer teorema fundamental del cálculo. El caso no es el conjunto de participantes, pues una vez que estos respondieron los problemas que les administramos, perdimos contacto con ellos, de manera que no es posible reexaminarlos. En cambio, sus respuestas sí se pueden examinar con detalle de manera que es posible explorar cómo se manifiesta su razonamiento al trabajar con los problemas que se les aplicaron.

La codificación y categorización son parte de los procedimientos de la teoría fundamentada (Birks y Mills, 2015), los cuales se utilizaron para el análisis de los datos. Aunque el objetivo de la teoría fundamentada es formular una teoría, en el presente estudio, dada la limitación de tiempo para la obtención de suficientes datos que permitieran llevar a cabo todo el conjunto de procedimientos sugeridos por dicho método, solo se establecen algunas hipótesis sobre el razonamiento de los estudiantes. No obstante, la perspectiva apunta hacia la generación de una teoría modesta.

En lo que sigue, se informa sobre aspectos más concretos de la investigación. Primero se da información sobre los participantes, después se describe el instrumento utilizado para la colecta de datos, y finalmente se explica el procedimiento empleado, tanto para la aplicación del instrumento como para el análisis de los datos obtenidos.

Participantes

En este estudio participaron 18 estudiantes de entre 18-21 años de las carreras de ingeniería de una universidad privada ubicada en la Ciudad de México, los cuales habían concluido un curso de cálculo al momento de contestar el cuestionario propuesto.

En la Tabla 4 se enumeran los participantes y se presenta la información que proporcionaron.

Tabla 4. Participantes

Participante	Pseudónimo	Edad
1		21
2		19
3		
4	Tito	20
5	Anton	20
6		20
7		19
8		19
9		19
10	Miguel	20
11	Charly	19
12		
13	Competitivo	19
14	Val	20
15	Susana	19
16		
17	Maña	20
18		20

Dado que la mayoría no proporcionó un pseudónimo, para referirse a cada uno de ellos en el resto de este documento se hará a través del número asignado en la Tabla 4.

Instrumento

El instrumento fue un cuestionario de tres problemas, en dos de estos se plantean situaciones contextuales que se pueden resolver aplicando el primer teorema fundamental del cálculo para concluir que $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$ o realizando las operaciones de integración y derivación, donde, se aplica el corolario del primer teorema fundamental del cálculo para calcular la integral indefinida $\int_a^x f(t)dt$. En el último problema de la serie se plantea en abstracto el mismo tipo de situación.

El cuestionario se muestra en el *Anexo A* al final de este documento. Los problemas 1 y 2 constan de cuatro incisos mientras que el problema 3 no contiene incisos.

De forma general su puede decir que el instrumento trata de indagar sobre la relación que los estudiantes atribuyen a los conceptos de integración y derivación (o entre acumulación y razón de cambio), la cual es establecida por el primer teorema fundamental del cálculo. En seguida se detalla el propósito de cada problema del cuestionario.

Discusión sobre los problemas del cuestionario. En esta sección se trata de hacer explícito el motivo por el que se propuso cada uno de los problemas del cuestionario que resolvieron los participantes. A través de este cuestionario se trató de indagar sobre su razonamiento acerca del primer teorema fundamental del cálculo, y sobre las interpretaciones de los conceptos de integral y derivada.

En principio, las instrucciones generales del cuestionario: *Conteste las siguientes preguntas, anotando lo más detallado posible el razonamiento que lo llevó a la respuesta*; tratan de motivar al estudiante a utilizar todos sus conocimientos relacionados con el tema del primer teorema fundamental del cálculo.

De manera particular el cuestionario busca indagar sobre:

- si el estudiante percibe a la integral como acumulación y la derivada como razón de cambio;
- la forma en que aplica el primer teorema fundamental del cálculo;

- si el hecho de que los problemas (1 y 2) se ubican en situaciones conocidas, les resulta útil el aplicar el primer teorema fundamental del cálculo y los conceptos de integral y derivada;
- los recursos que utiliza en resolver los problemas y/o justificar sus respuestas.

Como se ha mencionado, el cuestionario está compuesto de tres problemas, las principales características de cada problema se muestran en la Tabla 5. Se indica el contexto en el que se ubican, la cantidad de incisos que incluye y los conceptos que el participante puede utilizar para resolverlos.

Tabla 5. Principales características de los problemas del cuestionario

Problema	Contexto	Incisos	Conceptos involucrados
1	Flujo de agua en una llave	4	• Integral y acumulación • Derivada y razón de cambio • Primer teorema fundamental del cálculo • Corolario del primer teorema fundamental del cálculo
2	Volumen de agua contenida en un cilindro	4	• Integral y acumulación • Derivada y su interpretación • Primer teorema fundamental del cálculo • Corolario del primer teorema fundamental del cálculo
3	Matemático	0	• Integral • Derivada • Primer teorema fundamental del cálculo

Habiendo dado un panorama general sobre el cuestionario, se presentan en seguida, de manera un tanto más detallada, lo que se busca con cada problema.

Problema 1. El enunciado es:

1. Por un grifo sale agua a una razón variable $q(t) = \frac{1}{10}\sqrt{t+4} - \frac{2}{10}$ *(dada en litros por segundo) que es colectada en un contenedor.* $V(x)$ *representa el agua que se ha colectado desde que se abre el grifo (*$t = 0$*) hasta el tiempo* $t = x$*.*

1.1.¿Cuál es la razón de cambio del volumen $V(x)$ *respecto al tiempo, en los tiempos* $t = 5\ s, t = 21\ s$ *y* $t = 32\ s$*?*

1.2.Obtenga $V(x)$

1.3.$V_a(x)$ *representa el volumen que se ha almacenado desde* $t = a$ *hasta* $t = x$ *(*$x > a$*). Obtenga* $V_a(x)$

1.4.Obtenga $\frac{dV_a(x)}{dx}$

Este problema está ubicado en un contexto de flujo de agua en una llave, donde se proporciona la razón a la cual sale el agua, esta es una razón de cambio del volumen con respecto al tiempo[4]; la cual está expresada como una función.

Para resolver el problema en su totalidad es necesario aplicar los conceptos de integración y derivación, donde es necesario emplear el corolario del primer teorema fundamental para calcular la integral. Sin embargo, se puede aplicar, además de los conceptos mencionados, aplicando el primer teorema fundamental del cálculo para resolver dos de sus incisos (1.1 y 1.4) de forma más rápida.

El inciso 1.1 se diseñó para averiguar si el estudiante:

- aplica el teorema fundamental del cálculo;
- obtiene una respuesta al realizar las operaciones de integración y derivación (sin aplicar el primer teorema fundamental del cálculo, pero aplicando su corolario);

[4] A la razón de cambio del volumen de agua respecto al tiempo se le conoce como *gasto* o *caudal* y las unidades pueden estar dadas en l/s, m^3/h o en cualquier otra unidad de volumen sobre unidad de tiempo. En lo posterior se referirá a esta cantidad como gasto

- lo resuelve, apoyándose del conocimiento del fenómeno de flujo de agua, es decir, considerando que $q(t) = \frac{dv}{dt}$, donde v es el volumen en el depósito en función del tiempo, llegando a establecer que $V'(x) = q(x)$;
- emplea recursos como diagramas, tablas, etc. para tratar de entender el problema y/o justificar su respuesta.

El inciso 1.2 busca específicamente encontrar evidencia de si los estudiantes perciben a la integral como acumulación en este contexto, en cuyo caso llegarían a establecer que:

$$V(x) = \int_0^x q(t)\,dt$$

La evidencia consiste en la justificación de utilizar la integral de $q(t)$ para obtener el volumen. Tal justificación consiste a su vez, en primero indicar que con una suma de Riemann se puede obtener un volumen aproximado, que es la suma de fragmentos de volumen, la cual se obtiene de forma precisa al tomar el límite. En este caso, resulta muy importante la utilización de una representación gráfica de la función $q(t)$, para mostrar que al obtener el área bajo la curva de la función $q(t)$ desde $t = 0$ hasta $t = x$, se obtiene el volumen de agua que ha salido de la llave durante el intervalo indicado. Para esto es necesario dividir el intervalo $[0, x]$ en n partes, formando rectángulos de base $\Delta t = x/n$ y altura $q(t)$, de donde la suma de sus áreas son una aproximación al área bajo la curva (ver Figura 4). En este punto, una forma de mostrar que el área bajo la curva representa el volumen, es representar uno de los rectángulos de base Δt y altura $q(t)$ para explicar que al obtener su área multiplicando sus dimensiones en el contexto del problema, se multiplican el tiempo (dado en s) y el gasto (dado en l/s), por lo que, eliminando segundos, quedan unidades de volumen (l). De tal manera que el área del cada rectángulo representa volumen, y así, al obtener el área bajo la curva de $q(t)$ desde $t = 0$ hasta $t = x$ se obtiene en realidad el volumen que ha salido de la llave en el intervalo indicado.

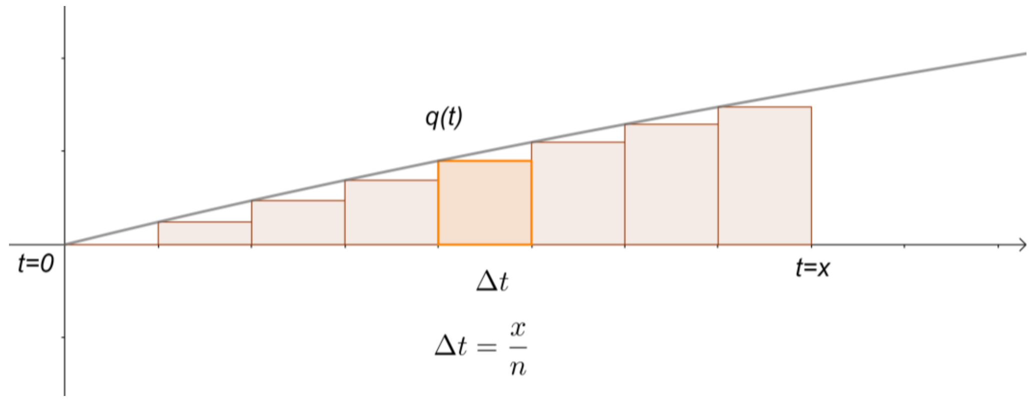


Figura 4. Aproximación al área bajo la curva

Es importante notar que, el hecho de que el estudiante exprese $V(x) = \int_0^x q(t)\,dt$ sin justificación podría deberse a que en sus cursos han aprendido sobre la relación entre $q(t)$ y $V(x)$, pero esto no indicaría que el estudiante interpreta a la integral como acumulación.

El inciso 1.3, al igual que el 1.2 se ideó con la intención de buscar evidencia de si los estudiantes perciben la integral como acumulación y por lo tanto si comprenden que se puede tener dicha acumulación desde diferentes puntos de partida (límite inferior de la integral):

$$V_a(x) = \int_a^x q(t)\,dt$$

Por último, el inciso 1.4 pretende lo mismo que el inciso 1.1, además de averiguar si los estudiantes emplean el hecho de que la derivada de la función integral solo depende del límite superior de esta.

La función utilizada en este problema $q(t) = \frac{1}{10}\sqrt{t+4} - \frac{2}{10}$, fue propuesta considerando que es fácil de integrar, para que los estudiantes no ocupen tanto tiempo en las operaciones y se enfocaran en la aplicación de los conceptos.

Problema 2. El enunciado de este problema se coloca enseguida:

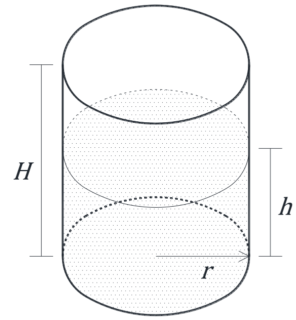
2. *Se tiene un depósito de forma cilíndrica cuyo radio de la base es r y altura H (ver figura anexa); el depósito contiene agua hasta una altura h. $V(x)$ representa el volumen contenido en tal depósito cuando h toma el valor x.*

2.1. *Exprese analíticamente* $V(x)$

2.2. *Exprese* $V(x)$ *como una integral*

2.3. *Obtenga* $\frac{dV(x)}{dx}$

2.4. *¿Qué expresa* $\frac{dV(x)}{dx}$*?*



De manera general, el problema 2 trata de averiguar la manera en que los estudiantes aplican el primer teorema fundamental del cálculo en un contexto diferente al problema 1, sin embargo, el especial interés de este es conocer la interpretación que dan los estudiantes a la derivada de una función.

El inciso 2.1 solo pide que el estudiante escriba la función que expresa el volumen de agua contenido en un cilindro dependiendo de la altura de esta (es decir, la altura del agua *h* no a la altura del cilindro *H*). Para hacer esto, únicamente tiene que utilizar su conocimiento de la fórmula para calcular el volumen de un cilindro y utilizar los símbolos que se indican en el enunciado de manera adecuada (diferenciar entre altura de agua *h* y altura del cilindro *H*). Considerando que la fórmula del volumen de un cilindro es altamente probable que los estudiantes la conozcan, para muchos este inciso puede no representar realmente un problema, por lo que se debe mencionar que el objetivo principal de este inciso es guiar al estudiante en la solución de los demás incisos.

El inciso 2.2 tiene por objetivo averiguar si los estudiantes son capaces de expresar una función como una integral y si al hacerlo emplean la noción de acumulación. Difiere con el problema 1 en cuanto a que, en este, la función que se debe integrar no es una función razón de cambio, además de que aquí se pide explícitamente que empleen una integral mientras que en el problema 1 no se hace así, sino que el estudiante debe decidir utilizar este concepto. Se espera que los participantes recurran a representaciones gráficas y a ideas de acumulación para llegar a la solución.

La expresión $V(x)$ *representa el volumen contenido en tal depósito cuando h toma el valor x* pretende ser sugerente de la necesidad de la utilización de las 2 variables (*h* y *x*) al resolver este inciso, empleando la noción de acumulación. Es decir, al considerar que el volumen contenido en el depósito cuando $h = x$ es la acumulación de fragmentos de volumen desde $h = 0$ hasta $h = x$.

Se mencionará de manera un tanto simplificada la forma en que se puede resolver. Pueden partir de un diagrama de un cilindro, donde la altura del agua es x. Considerando que el agua contenida es a su vez un cilindro, este se puede dividir en n cilindros de igual altura $\Delta h = x/n$. De donde resulta evidente que (ver Figura 5):

$$V(x) = V_1 + V_2 + \cdots + V_n = \sum_{i=1}^{n} V_i$$

Donde V_i es el volumen del i-ésimo cilindro de altura Δh, considerando que se enumeran desde abajo.

Sabiendo que el volumen de cada uno de estos cilindros se obtiene multiplicando el área de la base por la altura:

$$V(x) = A_1 \cdot (\Delta h) + A_2 \cdot (\Delta h) + \cdots + A_n \cdot (\Delta h) = \sum_{i=1}^{n} A_{\mathrm{i}} \cdot (\Delta h)$$

Donde A_{i} es el área de la base del i-ésimo cilindro de altura Δh.

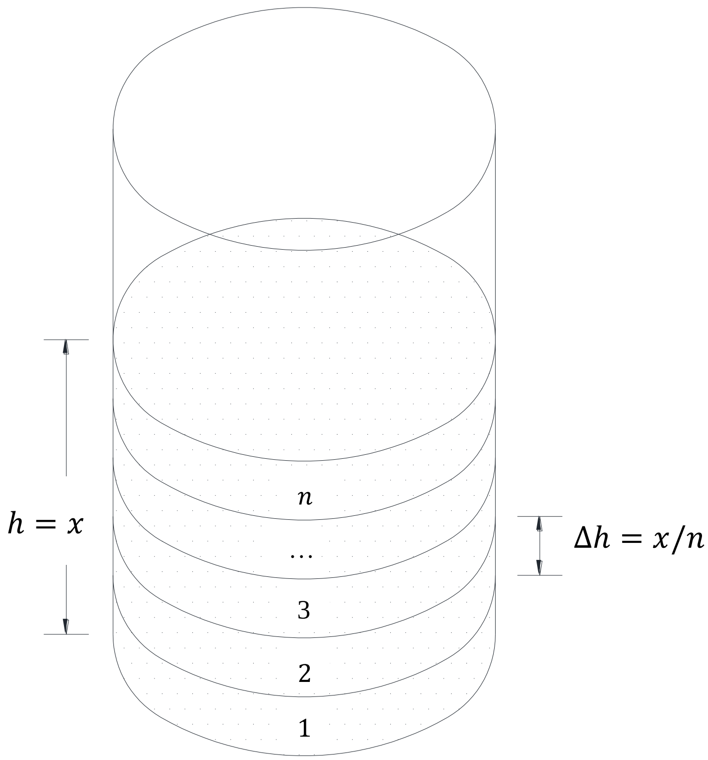


Figura 5. División del volumen de agua contenida en un cilindro en n cilindros de igual altura Δh

Ahora, notando que el área de la base de cada cilindro se puede expresar como una función de la altura del agua, se tiene:

$$V(x) = A(0 \cdot \Delta h) \cdot \Delta h + A(1 \cdot \Delta h) \cdot \Delta h + \cdots + A((n-1) \cdot \Delta h) \cdot \Delta h = \sum_{j=0}^{n-1} A(j \cdot \Delta h) \cdot \Delta h$$

Donde $A(j \cdot \Delta h)$ es el área de la base del cilindro $j + 1$. También se puede considerar como el área de la base superior del cilindro cuya altura es altura es $h = i \cdot \Delta h$ (ver Figura 6).

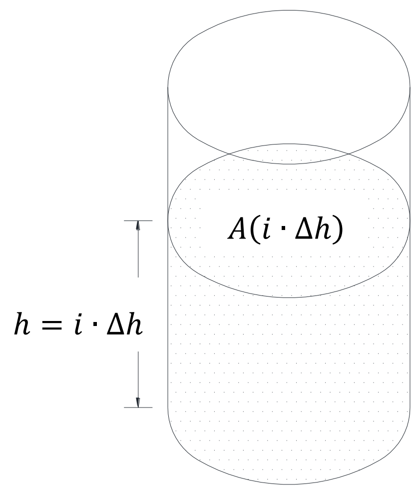


Figura 6. Área de la base superior del cilindro cuya altura es $h = i \cdot \Delta h$

En este punto, apoyándose de la definición de integral se puede llegar a establecer que:

$$V(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(i\Delta h) \cdot \Delta h = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A\left(i\frac{x-0}{n}\right)\left(\frac{x-0}{n}\right) = \int_0^x A(h)dh = \int_0^x \pi r^2 dh = \pi r^2 \int_0^x dh.$$

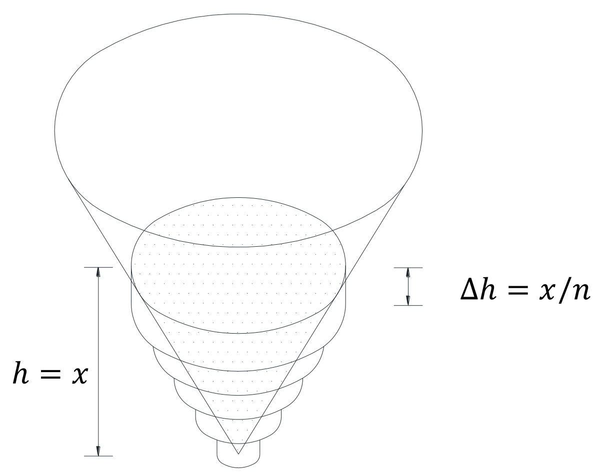


Figura 7. Aproximación al volumen de un cono mediante cilindros de igual altura $\Delta h = i \cdot \Delta h$

Es importante mencionar que, en este punto parece innecesario emplear el límite de la suma de Riemann, dado que $V(x) = \sum_{i=1}^{n} A(i \cdot \Delta h)(\Delta h) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(i \cdot \Delta h)(\Delta h)$, es decir, que no importa en cuantos cilindros se divida el cilindro formado por el agua, sumándolos se obtiene de manera precisa el volumen de agua, no una aproximación. Por lo que se puede pensar en la necesidad de utilizar otra figura en el problema, por ejemplo, un cono invertido donde al área de la base superior de cada cilindro (de altura Δh) sí cambia con la altura del agua.

En el caso de un cono invertido, siguiendo el mismo procedimiento, se obtendría una aproximación al volumen con una suma de Riemann $V(x) \cong \sum_{i=1}^{n} A(i \cdot \Delta h)(\Delta h)$; y de manera precisa al tomar el límite $V(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(i \cdot \Delta h)(\cdot \Delta h)$, como puede verse en la Figura 7. Y este punto de la solución, los estudiantes se enfocarían en resolver el problema de expresar el área de la base de cada cilindro (de altura Δh) como función de la altura del agua (ver Figura 8), el cual puede ser complicado para muchos, por lo que gastarían mucho tiempo en esto y podrían no llegar a resolver el problema de expresar la integral que se pide. Por esto, se decidió emplear el cilindro, que es un ejemplo sencillo para ver si los estudiantes emplean las ideas de acumulación al intentar expresar una función conocida ($V(x)$) como una integral.

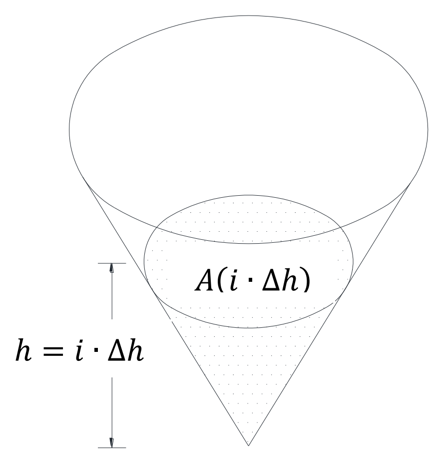


Figura 8. Área de la base del cono (formado por el agua) en función de la altura h

El inciso 2.3 está pensado como un problema rutinario ya que se puede resolver al aplicar una fórmula de derivación muy sencilla y seguramente conocida por todos los estudiantes (se tiene que derivar la función obtenida en el inciso 2.1 que es $V(x) = \pi r^2 x$), sin embargo a través de este se puede indagar sobre el conocimiento de los estudiantes de la relación entre integración y derivación, pues se pide derivar la función que en el inciso anterior se ha expresado como una integral (es decir, se pide obtener $\frac{d}{dx}V(x)$, donde $V(x) = \pi r^2 \int_0^x dh$).

En el inciso 2.4 se pregunta sobre la interpretación de la derivada de $V(x)$, se busca averiguar si esta se interpreta como una razón de cambio o de alguna otra manera, por ejemplo, como pendiente de la recta tangente, en el caso de que se apoyen de una representación gráfica de la función.

Problema 3. El enunciado del último problema es:

3. Si $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$, obtenga $F'(x)$, justifique su respuesta.

Este plantea de manera abstracta una situación donde debe suponer la continuidad de la función $f(t)$ en x para aplicar el primer teorema fundamental del cálculo o utilizar el conocimiento sobre la relación que existe entre los conceptos de integración y derivación para poder resolverlo. Es decir, se puede resolver conociendo la relación entre los conceptos mencionados, aunque se desconozca que dicha relación es un hecho establecido por el primer teorema fundamental del cálculo.

Se busca averiguar sobre los elementos que los alumnos recuerdan del teorema, si emplean las definiciones de derivación e integración para tratar de justificar su respuesta, ideas de acumulación y razón de cambio, si aplican una regla memorizada y si hacen explicita la suposición sobre la continuidad de la función $f(t)$.

Como comentario general sobre el cuestionario, se debe recalcar que, aunque los estudiantes deben emplear el corolario del primer teorema fundamental del cálculo para resolver el problema 1 (para calcular la integral del inciso 1.2), el interés principal del cuestionario es indagar sobre el conocimiento y razonamiento de los estudiantes sobre la relación de las operaciones de integración y derivación establecida por el primer teorema fundamental del cálculo. De esta manera, lo expuesto en esta sección, comprende los aspectos principales a ser considerados en el análisis de las respuestas de los participantes al cuestionario.

Procedimiento de ejecución

Se contactó a un profesor de la universidad privada a la que se ha hecho referencia. Se le explicó, a grandes rasgos los objetivos de la investigación y se le solicitó que hiciera la invitación a sus alumnos para que participaran contestando un cuestionario. El profesor hizo la invitación, y dado que algunos aceptaron, se acordó con dicho profesor dedicar 45 minutos de una de sus clases para hacer la aplicación del instrumento, es decir, para que los participantes contestaran el cuestionario. Dicha aplicación, realizada en el lapso indicado, se describe a continuación.

Para iniciar la aplicación del cuestionario se le proporcionó a cada uno de los 18 estudiantes que aceptaron participar, una hoja donde estaban escritas las preguntas y varias hojas blancas para escribir sus respuestas. Aunque las instrucciones incluidas en el cuestionario indican que debían detallar lo más posible el razonamiento que los llevó a sus respuestas, se les dio estas mismas instrucciones de forma verbal a todo el grupo. Se les indicó además que con el fin de proteger su privacidad podrían no llenar el cuadro donde se solicita su nombre o podrían colocar un pseudónimo. Se les mencionó que disponían de 45 minutos para responder el cuestionario.

Conforme terminaban de contestar, iban entregando sus cuestionarios y sus hojas de trabajo. Estas se enumeraron en el orden que fueron entregados, y este es el orden que se les dio a los participantes (ver Tabla 4).

Procedimiento de análisis

Se analizaron por separado las respuestas de cada inciso de todos los participantes buscando similitudes, de manera que las respuestas similares se nombraron con un código común. Los códigos formados fueron discutidos y consensados con un grupo de investigadores. Este proceso de discusión y consenso se realizó en varias sesiones, hasta llegar a establecer los códigos mostrados en el capítulo de *Análisis y resultados*, en los que se trató de que cada uno de estos caracterizara a un grupo de respuestas de cada inciso.

A través del análisis de los códigos formados, se identificó la relación entre estos, comparando, tanto los códigos de cada inciso como los de todo el instrumento. De esta manera se proponen las categorías mostradas en los capítulos de *Análisis y resultados* y C*onclusiones*. Se formularon las conclusiones del presente trabajo apoyándose en las categorías identificadas y los códigos que las conforman.

Capítulo 4. Análisis y resultados

En las respuestas de los participantes a la serie de problemas que resolvieron, se identificaron interpretaciones que los estudiantes tienen sobre algunos conceptos relacionados con el primer teorema fundamental del cálculo. Por ejemplo, conceptos como función, derivada, integral, y por supuesto, sobre el teorema mismo. Como parte del análisis de las respuestas se formaron varios códigos que corresponden a ciertas formas de razonar de los estudiantes (patrones de razonamiento). En esta sección se presentan dichos códigos y un ejemplo de respuesta correspondiente.

Como se ha mencionado, el instrumento empleado fue una serie de tres problemas, de los cuales, los problemas 1 y 2 incluyen cuatro incisos y el problema 3 solo uno. Esta sección se divide de la siguiente manera: se presenta por separado cada problema, y a su vez, dentro de cada problema se presenta cada inciso.

Para cada inciso de cada problema se presenta una tabla donde se enlista y detalla cada código (por ejemplo Tabla 6, Tabla 7, Tabla 8 y Tabla 9 para los incisos del problema 1). Las tablas en las que se presenta esta información están formadas por cuatro columnas, en la primera se indica el nombre del código, en la siguiente se indica su descripción, la tercera contiene la proporción de respuestas que se asignaron a cada código, y finalmente en la cuarta columna se agregan los ejemplos más representativos de cada código (se coloca la imagen de la respuesta del participante e inmediatamente abajo se coloca la transcripción de ésta). Como se ha indicado, la tercera columna contiene la proporción de respuestas que forman cada código, esta proporción se indica como fracción y en porcentaje. En ambos casos, la proporción está dada en relación con el número de participantes (18). También es importante aclarar que, en las tablas mencionadas, los códigos se han colocado en forma descendente en relación con su proporción.

Para cada problema, después de las tablas donde se detallan los códigos de cada inciso, se indica a través de una serie de tablas, el código y puntuación asignada a cada respuesta de los 18 participantes. Con esta información se obtuvo una puntuación general para el grupo de 18 participantes para cada problema. La puntuación máxima para los problemas uno y dos es de 72, la cual se obtendría si todos los participantes obtuvieran un punto en cada inciso. De esta manera, para el problema 3 la puntuación máxima es de 18, ya que este no contiene incisos.

Problema 1

El primer problema de la serie es el siguiente:

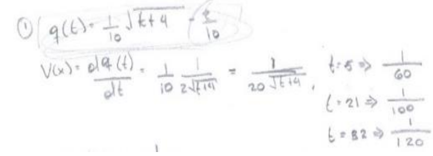
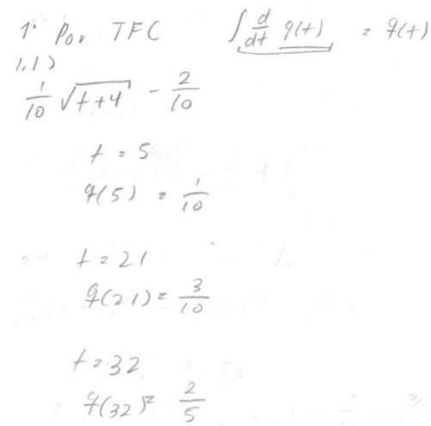
1. Por un grifo sale agua a una razón variable $q(t) = \frac{1}{10}\sqrt{t+4} - \frac{2}{10}$ (dada en litros por segundo) que es colectada en un contenedor. $V(x)$ representa el agua que se ha colectado desde que se abre el grifo ($t = 0$) hasta el tiempo $t = x$.
   1.1. ¿Cuál es la razón de cambio del volumen $V(x)$ respecto al tiempo, en los tiempos $t = 5\ s, t = 21\ s$ y $t = 32\ s$?
   1.2. Obtenga $V(x)$
   1.3. $V_a(x)$ representa el volumen que se ha almacenado desde $t = a$ hasta $t = x$ ($x > a$). Obtenga $V_a(x)$
   1.4. Obtenga $\frac{dV_a(x)}{dx}$

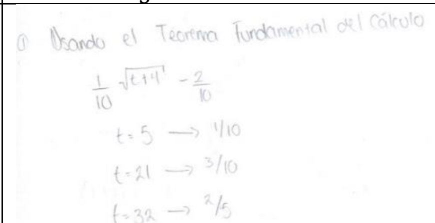
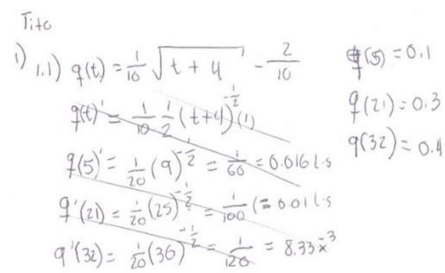
En las secciones siguientes se muestran los códigos formados con las respuestas que los participantes dieron para cada inciso de este problema.

Inciso 1.1. La Tabla 6 muestra y detalla los códigos formados con las respuestas de los estudiantes al inciso 1 del problema 1.

Tabla 6. Códigos de las respuestas del inciso 1.1

Código	Descripción	Proporción de respuestas	Ejemplos
¿Cuál es la razón de cambio del volumen $V(x)$ respecto al tiempo, en los tiempos $t = 5\ s, t = 21\ s$ y $t = 32\ s$?			
Estrategia inmediata	Se emplea una estrategia que parece ser diseñada antes de comprender y conectar todas las indicaciones del problema, por lo que realiza una de las	12/18 (66.67%)	1.1) $\int_0^5 \frac{1}{10}\sqrt{t+4} - \frac{2}{10}$ $= \frac{1}{15}(t+4)^{3/2} - \frac{2}{10}t\Big\|_0^5 =$ $= \frac{1}{15}(t+4)^{3/2} - \frac{2}{10}t\Big\|_0^{21} =$ $= \frac{1}{15}(t+4)^{3/2} - \frac{2}{10}t\Big\|_0^{32} =$ “$\int_0^5 \frac{1}{10}\sqrt{t+4} - \frac{2}{10}$

Código	Descripción	Proporción de respuestas	Ejemplos
	siguientes operaciones: • Integral definida de la función que proporciona el problema. • Derivada de dicha función.		$= \frac{1}{15}(t+4)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{10}t\Big\rvert_0^5 =$ $= \frac{1}{15}(t+4)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{10}t\Big\rvert_0^{21} =$ $= \frac{1}{15}(t+4)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{10}t\Big\rvert_0^{32} =$”  “ $q(t) = \frac{1}{10}\sqrt{t+4} - \frac{2}{10}$ $V(x) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t+4}}$ $= \frac{1}{20\sqrt{t+4}}$ $t = 5 \Rightarrow \frac{1}{60}$ $t = 21 \Rightarrow \frac{1}{100}$ $t = 32 \Rightarrow \frac{1}{120}$”
Conceptual yuxtapuesta	El problema se resuelve aplicando el primer teorema fundamental del cálculo de forma sintética (es decir al identificando que $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$), pero se cometen los siguientes errores: • Se confunde la integral indefinida con antiderivada. • Las operaciones de integración y derivación se indican en orden inverso a como el	3/18 (16.67%)	 “$Por\ TFC\ \int \frac{d}{dt} q(t) = q(t)$ 1.1) $\frac{1}{10}\sqrt{t+4} - \frac{2}{10}$ $t = 5$ $q(5) = \frac{1}{10}$ $t = 21$ $q(21) = \frac{3}{10}$

Código	Descripción	Proporción de respuestas	Ejemplos
	problema lo sugiere.		$t = 32$ $q(32) = \frac{2}{5}$”
Conceptual imprecisa	Lo que se declara en las respuestas parece corresponder con la aplicación del primer teorema fundamental del cálculo en forma sintética, es decir, identificando que $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$; sin embargo, esto no se declara de manera explícita.	2/18 (11.11%)	 “$Usando\ el\ Teorema\ Fundamental\ del\ Cálculo$ $\frac{1}{10}\sqrt{t+4} - \frac{2}{10}$ $t = 5 \rightarrow {}^{1}/_{10}$ $t = 21 \rightarrow {}^{3}/_{10}$ $t = 32 \rightarrow {}^{2}/_{5}$”
Operacional	Se realizan las operaciones de integración indefinida y derivación, que se requieren para resolver el problema. Se emplea el primer teorema fundamental del cálculo (y su corolario) al obtener la integral indefinida, pero sin declarar que se está utilizando. Se puede decir que se trata de una aplicación extendida del teorema porque, como se ha indicado, se realizan las operaciones de integración y derivación en lugar de identificar que $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$.	1/18 (5.56%)	 “$q(t) = \frac{1}{10}\sqrt{t+4} - \frac{2}{10}$ $q(5) = 0.1$ $q(21) = 0.3$ $q(32) = 0.4$”

El inciso 1.1 plantea una situación que puede resolverse de alguna de las siguientes maneras:

- Realizando las operaciones de integración y derivación involucradas, empleando el primer teorema fundamental del cálculo y su corolario para calcular la integral indefinida
- Aplicando de manera sintética el primer teorema fundamental del cálculo, es decir, considerando que $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$; con lo cual no es necesario calcular la integral de la función, ni la derivada del resultado
- Otra opción, que, aunque es difícil realizar, se debe ser consciente de su existencia. Se trata de realizar las operaciones de integración y derivación, pero sin utilizar el primer teorema fundamental del cálculo para calcular la integral, es decir, obtenerla a través de la definición como el límite de una suma de Riemann

En cualquiera de estos casos es necesario interpretar a la integral como acumulación y a la derivada como razón de cambio.

Doce respuestas (66.67%) se categorizaron como *Estrategia inmediata* (ver Tabla 6). Éstas son incorrectas, pues mientras se solicita obtener $V'(x)$, las respuestas presentan $q'(x)$ (50%) o $\int_0^x q(t)dt$ (16.67%). Para tratar de entender por qué se presentan estos tipos de respuestas en esta proporción, se analiza la manera en que se plantea el problema. Primero se proporciona una función $q(t)$ que expresa la razón a la que sale el agua de una llave en función del tiempo (dada en litros por segundo), después se indica que la función $V(x)$ expresa el volumen de agua que se colecta en un contenedor desde que se abre la llave hasta un tiempo x, y finalmente se pide obtener la razón de cambio del volumen $V(x)$ con respecto al tiempo. Habría que conectar varias ideas y conceptos matemáticos tan solo para entender el problema y diseñar una estrategia de solución adecuada. En cierta manera la proporción elevada del tipo de respuestas que se mencionan sugieren una tendencia de los estudiantes a diseñar una estrategia antes de entender en su totalidad las indicaciones y la relación de los conceptos con la situación planteada; por lo que, la mayoría (50%) proporciona la derivada de la función $q(t)$ dado que se pide la razón de cambio de una función, y la función que se proporciona es $q(t)$.

Por otra parte, solo cinco respuestas (27.78%) presentan al menos indicios de argumentación basada en el primer teorema fundamental del cálculo y/o indican que la integral y la derivada son operaciones inversas, pero en ninguna de éstas la aplicación es correcta o no se especifica la manera en que se aplicó. Se trata de las categorías *Conceptual yuxtapuesta* y *Conceptual imprecisa* (ver Tabla 6). Se debe notar que, en las respuestas correspondientes, los participantes consideran que solo existe un teorema fundamental del cálculo, no dos, pues utilizan la frase "el teorema fundamental del cálculo" para referirse a él.

Las respuestas codificadas como *Conceptual yuxtapuesta*, aunque son poco frecuentes en este inciso, presenta dos problemas importantes:

- en principio consideran que la integral indefinida y la antiderivada son el mismo concepto y, por otro lado
- aplican las operaciones de integración y derivación en orden contrario a lo sugerido por el problema.

Sobre la integración indefinida y anti-diferenciación:

Un tipo de error en las respuestas de esta categoría es la siguiente declaración:

$$\int \frac{d}{dt} q(t)dt = q(t)$$

La situación planteada, $\int \frac{d}{dt} q(t)dt$, corresponde con un problema de anti-diferenciación, no de integración. Para mostrar que es así, se presenta la solución en donde en ningún momento se hará uso del concepto integral ni del primer teorema fundamental del cálculo.

El símbolo $\int \frac{d}{dt} q(t)dt$ representa la antiderivada de la función $\frac{d}{dt} q(t)$, es decir que, al derivar la función $\int \frac{d}{dt} q(t)dt$ se obtiene $\frac{d}{dt} q(t)$. Con esto en mente, se designa a $g(t) = \int \frac{d}{dt} q(t)dt$, se tiene entonces que $g'(t) = \frac{d}{dt} q(t)$; por lo tanto, $g(t)$ es la familia de funciones $q(t) + c$, pues la derivada de cada función de esta familia es $\frac{d}{dt} q(t)$, ya que la derivada de $q(t)$ es $\frac{d}{dt}q(t)$ y la derivada de la constante C es cero. Entonces: $\int \frac{d}{dt}q(t)dt = q(t) + C$

Sobre el orden de las operaciones de integración y derivación:

Esta última situación puede deberse a la falta de comprensión del contexto, sin embargo, si no es así, es decir si el estudiante comprendió el problema, entonces se debe a la concepción de que las operaciones de integración y derivación son inversas como lo son dos funciones biyectivas cuya composición es la identidad, en las que se puede invertir el orden sin alterar el resultado.

En el caso de las operaciones de integración y derivación no sucede de esta manera. Para mostrarlo, pensemos en una función $f(t)$ continua en el intervalo $a \leq t \leq b$, con la cual realizaremos las operaciones de integración y derivación en un orden y después en orden contrario.

Primero, integrando se tiene $\int_a^x f(t)dt$ con $a \leq x \leq b$, derivando el resultado se tiene $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$ (por el primer teorema fundamental del cáclulo).

Ahora cambiando el orden, al derivar la función se tiene $\frac{d}{dt}f(t)$; y después integrando el resultado, se tiene: $\int_a^x \frac{d}{dt}f(t)dt = f(x) - f(a)$. En este caso, se detallan los pasos que llevaron al resultado mostrado: considerando que $F(x) = \int_a^x \frac{d}{dt}f(t)dt$, el primer teorema fundamental del cálculo nos dice que $F'(x) = \frac{d}{dt}f(x)$, es decir $F(x) = f(x) + C$. En este punto se puede proceder de dos maneras para terminar de resolver la situación (determinar el valor de C):

- Aplicando el corolario del primer teorema fundamental del cálculo: ya que $f(x) + C = \int_a^x \frac{d}{dt}f(t)dt$, entonces $\int_a^x \frac{d}{dt}f(t)dt = [f(x) + C] - [f(a) + C] = f(x) - f(a)$
- Aplicando el primer teorema fundamental: se tiene que $f(x) + C = \int_a^x \frac{d}{dt}f(t)dt$, entonces $f(x) = \int_a^x \frac{d}{dt}f(t)dt - C$, por lo tanto $f(a) = \int_a^a \frac{d}{dt}f(t)dt - C = -C$; quedando que $C = -f(a)$. Finalmente se tiene $\int_a^x \frac{d}{dt}f(t)dt = f(x) - f(a)$

Comparando los resultados obtenidos al aplicar las operaciones mencionadas en diferente orden, es fácil notar que éstos serán iguales solo en el caso particular de que $f(a) = 0$.

Resulta prudente preguntarse: ¿por qué los estudiantes emplean la idea de operaciones inversas como elevar al cuadrado y sacar raíz cuadrada (considerando números positivos), en las que se pueden invertir el orden en que se aplican sin que se modifique el resultado, como una interpretación del teorema, sin considerar que eso sucede solo cuando $f(a) = 0$?

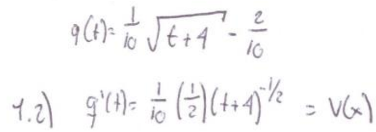
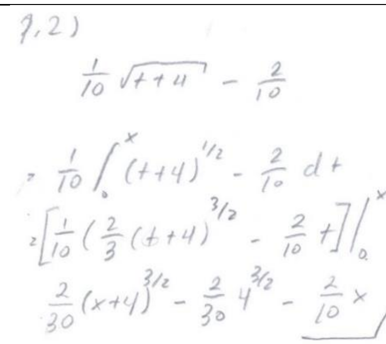
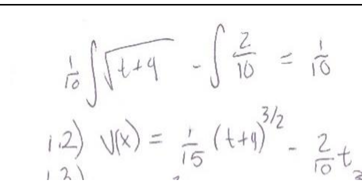
Reflexionando sobre esta pregunta, una posible respuesta es que, aunque los estudiantes han llevado instrucción sobre las particularidades de la relación entre integral y derivada, después de concluir un curso tratan de conservar un conocimiento de la forma más simple posible, es decir de una forma que a través de su razonamiento puedan determinar los detalles. En este caso puede ser considerando que el primer teorema fundamental de cálculo establece que las operaciones de integración y derivación son inversas. De hecho, al momento de declararlo uno se da cuenta que es fácil de memorizar, y, de hecho, de entender de esa manera si uno tiene en mente el ejemplo de las operaciones de elevar al cuadrado y sacar raíz cuadrada (con números positivos). El problema de esta forma de aprender el teorema es que esto solo es válido, como se ha mencionado, en el caso particular de que $f(a) = 0$, y los estudiantes no recuerdan esta particularidad.

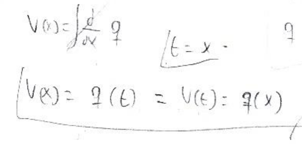
Desde una perspectiva general de las respuestas de este inciso, se puede decir que los estudiantes se apresuran a seguir una estrategia, antes de haber comprendido todos los elementos del problema. Además, en algunos casos se identifica cierta idea sobre el teorema fundamental del cálculo, pero mal articulada. Se trata de la siguiente concepción:

- La derivación e integración son operaciones inversas como lo es elevar al cuadrado y obtener la raíz cuadrada de números positivos, donde se puede invertir el orden de estas sin que se modifique el resultado.

Inciso 1.2. En la Tabla 7 presentada a continuación, se muestran los códigos formados con las respuestas de los participantes a este inciso.

Tabla 7. Códigos de las respuestas del inciso 1.2

Código	Descripción	Proporción de respuestas	Ejemplos
Obtenga $V(x)$			
Estrategia inmediata	Se emplea una estrategia que parece ser diseñada antes de comprender y conectar todas las indicaciones del problema, por lo que se obtiene la derivada de la función proporcionada en lugar de la integral definida, en el intervalo indicado. En uno de los casos se cometen errores en la derivación.	9/18 (50.00%)	 “$q(t) = \frac{1}{10}\sqrt{t+4} - \frac{2}{10}$ 1.2) $q'^{(t)} = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{2}\right)(t+4)^{-1/2} = V(x)$”
Acumulación imprecisa	Se relacionan correctamente los elementos del concepto integral definida con los elementos del problema, que es sobre acumulación, pero no se argumenta por qué se emplea la integración. En un caso se cometen errores en la integración.	6/18 (33.33%)	 “$\frac{1}{10}\sqrt{t+4} - \frac{2}{10}$ $= \frac{1}{10}\int_0^x (t+4)^{1/2} - \frac{2}{10}\,dt$ $= \left[\frac{1}{10}\left(\frac{2}{3}(t+4)\right)^{3/2} - \frac{2}{10}t\right]\Big\|_0^x$ $= \frac{2}{30}(x+4)^{3/2} - \frac{2}{30}4^{3/2} - \frac{2}{10}x$”
Integral indefinida = antiderivada	Respuesta obtenida mediante una antiderivada, cuando el procedimiento correcto consiste en	3/18 (16.67%)	

Código	Descripción	Proporción de respuestas	Ejemplos
	calcular una integral indefinida. Al parecer el estudiante no percibe la diferencia entre estos dos conceptos.		“$\frac{1}{10}\int\sqrt{t+4}-\int\frac{2}{10}=\frac{1}{10}$ 1.2) $V(x)=\frac{1}{15}(t+4)^{3/2}-\frac{2}{10}t$ “  “$V(x)=\int\frac{d}{dx}q \qquad t=x$ $V(x)=q(t)=V(t)=q(x)$”

El problema consiste en obtener una expresión para el volumen de agua que se colecta en un depósito conociendo la razón a la cual el agua cae. Se requeriría interpretar a la integral como acumulación para resolverlo, pues considerando que el volumen de agua es acumulación de cantidades de agua ($\Delta V=q(t)\cdot\Delta t$) se puede llegar a plantear que el volumen es la integral de la función $q(t)$ desde $t=0$ hasta $t=x$.

La mitad de las respuestas de este inciso se codificaron como *Estrategia inmediata* por razones similares a las que se consideraron al codificar de esta manera algunas respuestas del inciso 1.1, anteriormente mostrado. Mientras que se obtuvieron solo seis respuestas correctas (33.33%) clasificadas como A*cumulación imprecisa*, que como el nombre de la categoría indica, pueden corresponder con una idea imprecisa de la integral como acumulación ya que no se indican cuáles son los fragmentos que se acumulan, lo cual justificaría la utilización de la integral para obtener el volumen.

Todas las categorías de este inciso (ver Tabla 2) muestran que resulta problemático para los estudiantes trasladar los conceptos del cálculo a una situación contextual, lo cual puede deberse a dos situaciones:

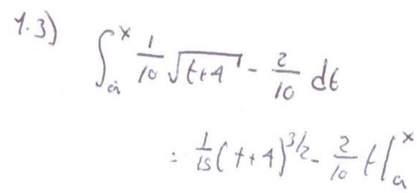
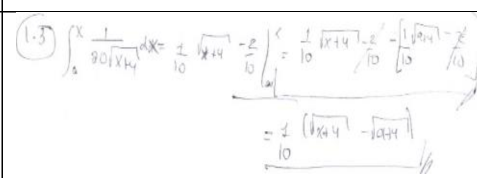
- No han desarrollado esa habilidad
- No poseen un grado de comprensión de los conceptos que les permita hacer dicha aplicación (en especial del concepto integral)

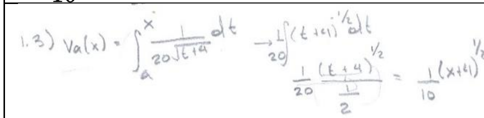
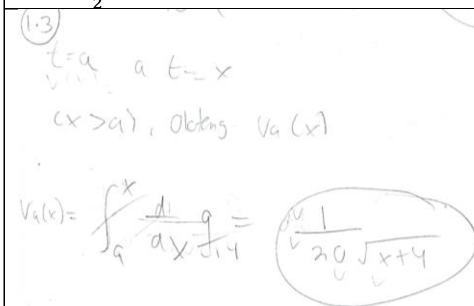
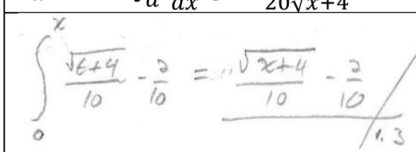
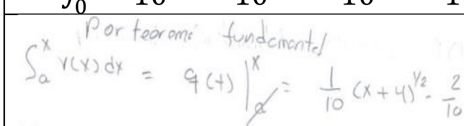
Considerando los dos puntos anteriores, nos lleva a la siguiente cuestión, ¿se puede comprender un concepto matemático sin haber desarrollado en cierto grado, la habilidad de aplicarlo en situaciones de resolución de problemas?

En este inciso se presentaron tres respuestas (categoría Integra indefinida=antiderivada) donde se muestra que los estudiantes consideran que integral indefinida y antiderivada son el mismo concepto.

Inciso 1.3. La Tabla 8 muestra los códigos formados con las respuestas de los participantes para este inciso.

Tabla 8. Códigos de las respuestas del inciso 1.3

Código	Descripción	Proporción de respuestas	Ejemplos
$V_a(x)$ representa el volumen que se ha almacenado desde $t = a$ hasta $t = x$ $(x > a)$. Obtenga $V_a(x)$			
Acumulación imprecisa	Respuestas correctas obtenidas mediante integración, donde se relacionan correctamente los elementos de este concepto con el problema, que es sobre acumulación, pero no se justifica por qué se emplea la integración. En un caso se cometen errores en la integración.	11/18 (61.11%)	 "$\int_a^x \frac{1}{10}\sqrt{t+4} - \frac{2}{10}dt = \frac{1}{15}(t+4)^{3/2} - \frac{2}{10}t\Big\|_a^x$"
$Acumulación = \int_a^x \frac{d}{dt} f(t)d$	Respuestas obtenidas mediante una integral indefinida, que al considerar que el enunciado del problema sugiere la acumulación, se infiere que los	7/18 (38.89%)	 "$\int_a^x \frac{1}{20\sqrt{x+4}}dx = \frac{1}{10}\sqrt{x+4} - \frac{2}{10}\Big\|_a^x$

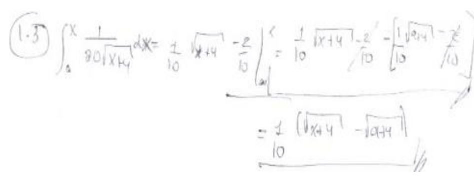
Código	Descripción	Proporción de respuestas	Ejemplos
	estudiantes relacionan estos dos conceptos. Además, se expresa la idea de que toda función que se integra debe ser la derivada de una función.		$= \frac{1}{10}\sqrt{x+4} - \frac{2}{10} - \left[\frac{1}{10}\sqrt{a+4} - \frac{2}{10}\right]$ $= \frac{1}{10}\left(\sqrt{x+4} - \sqrt{a+4}\right)$”
			 “$V_a(x) = \int_a^x \frac{1}{20\sqrt{t+4}} dt$ $\rightarrow \frac{1}{20}\int_a^x (t+4)^{-1/2} dt$ $\frac{1}{20}\frac{(t+4)^{1/2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{10}(x+4)^{1/2}$”
			 “$t = a \quad a \quad t = x$ $(x > a), \quad obtenga \;\; V_a(x)$ $V_a(x) = \int_a^x \frac{d}{dx} q = \frac{1}{20\sqrt{x+4}}$”
			 $\int_0^x \frac{\sqrt{t+4}}{10} - \frac{2}{10} = \frac{\sqrt{x+4}}{10} - \frac{2}{10}$
			 “$\int_a^x V(x)dx = q(t)\vert_{\cancel{a}}^{x} = \frac{1}{10}(x+4)^{1/2} - \frac{2}{10}$”

Este inciso del problema solicita, al igual que el inciso anterior, encontrar la expresión para el volumen de agua que se ha acumulado en un depósito, considerando que el agua sale de una llave, sin embargo, la diferencia radica en que en este se considera un tiempo arbitrario $t = a$ a partir del cual se debe obtener la acumulación de volumen.

Once respuestas (61.11%) son correctas (categoría A*cumulación imprecisa*), pues se obtuvieron mediante integración de la función $q(t)$, por lo que se puede suponer que se interpreta a la integral como acumulación, sin embargo, como en el inciso anterior, no se muestran cuáles son los fragmentos que se acumulan.

Todas las respuestas de este inciso se obtuvieron mediante integración, y ya que en el enunciado del problema se relaciona al volumen con acumulación, se puede suponer que el estudiante relaciona a la integral con acumulación. Sin embargo, se presentaron respuestas (38.89%) donde además se muestra que el estudiante interpreta que toda función por integrar debe ser una derivada (categoría $Acumulación = \int_a^x \frac{d}{dt} f(t)dt$), lo cual es erróneo en el caso particular del problema, donde además se presentaron otros errores, que, junto con este, se describen enseguida:

- Algunos participantes derivaron la función $q(t)$ e integraron el resultado desde $t = a$ hasta $t = x$, creyendo que de esta manera obtendrían el volumen. Por ejemplo, la respuesta del participante 14, que se muestra enseguida junto con su transcripción.



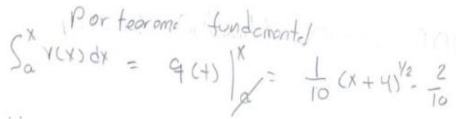
"$\int_a^x \frac{1}{20\sqrt{x+4}} dx = \frac{1}{10}\sqrt{x+4} - \frac{2}{10}\Big|_a^x = \frac{1}{10}\sqrt{x+4} - \cancel{\frac{2}{10}} - \left[\frac{1}{10}\sqrt{a+4} - \cancel{\frac{2}{10}}\right]$
$= \frac{1}{10}\left(\sqrt{x+4} - \sqrt{a+4}\right)$"

En el ejemplo, esencialmente el estudiante hizo lo siguiente:

$$V_a = \int_a^x \frac{d}{dx} q(t)dt = q(x) - q(a)$$

De donde es posible notar que el error estuvo en el planteamiento, es decir en considerar que el volumen se obtiene con la integral mostrada. Sin embargo, lo realizado después de ello ($\int_a^x \frac{d}{dt} q(t)dt = q(x) - q(a)$), con excepción de errores en la notación (uso de t y x), es correcto (se aplicó, aunque no se declara, el corolario del primer teorema fundamental del cálculo).

- Otros participantes solo indicaron las operaciones y argumentaron que aplicando el teorema fundamental del cálculo obtienen que $V_a = q(x)$, como en la respuesta del participante 12 mostrada en seguida junto con la transcripción, el cual declara que $V(x) = \frac{d}{dx}q(t)$.



“Por teorema fundamental

$\int_a^x V(x)\,dx = q(t)|_{\cancel{a}}^{x} = \frac{1}{10}(x+4)^{1/2} - \frac{2}{10}$”

En abstracto, lo que se declara en el ejemplo es lo siguiente:

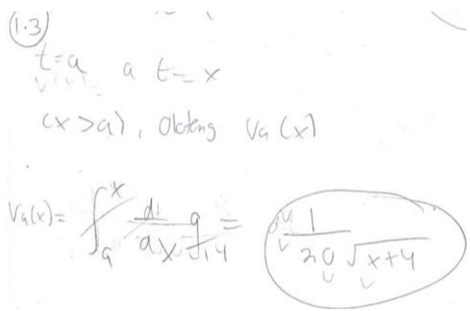
$$V_a = \int_a^x \frac{d}{dx} q(t)dt = q(x)$$

En este caso, tanto el planteamiento como los pasos posteriores son incorrectos, pues no se aplica adecuadamente el corolario del primer teorema fundamental del cálculo.

- En un caso especial se declara algo como lo siguiente:

$$V_a(x) = \int_a^x \frac{d}{dx} q = \frac{d}{dx} q$$

Se trata de la respuesta del participante 13, que se muestra a continuación con su correspondiente transcripción:



"$t = a \;\; a \;\; t = x$

$(x > a), obtenga\ V_a(x)$

$V_a(x) = \int_a^x \frac{d}{dx} q = \frac{1}{20\sqrt{x+4}}$"

El razonamiento que llevó a dicha respuesta parece ser el siguiente: al derivar la función q, se elimina la operación de integración $\int_a^x \frac{d}{dx} q$, por lo que se obtiene $\frac{d}{dx} q$.

En todos estos, como se ha mencionado, el error común es la concepción de que toda función a integrar debe ser una razón de cambio. En las respuestas se observa que los estudiantes han adquirido cierta instrucción sobre la relación entre acumulación y razón de cambio, pero han desarrollado ciertas malinterpretaciones de esta relación o no han visto explícitamente de qué manera esto se relaciona con el primer teorema fundamental del cálculo. Han percibido que toda función que se integra debe ser una derivada, cuando no necesariamente es así. Sobre la relación entre la acumulación y razón de cambio al parecer los estudiantes no tienen claro lo siguiente:

- Al obtener la acumulación de una cantidad que no está expresada mediante una derivada, se aplica el corolario del primer teorema fundamental del cálculo, de la siguiente manera:

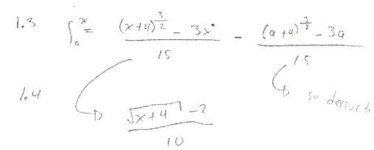
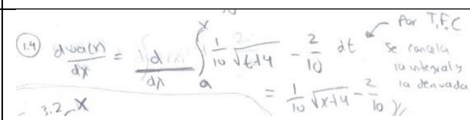
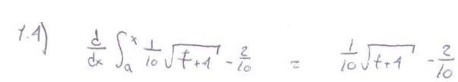
$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a), donde\ F(t)\ es\ una\ antiderivada\ de\ f(t)$$

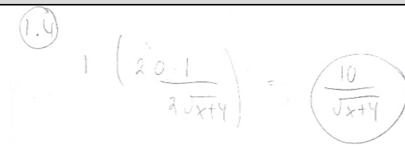
- Al obtener la acumulación de una cantidad formada por dos cantidades, donde una de estas está expresada mediante la derivada de una función, se procede de manera similar a la situación anterior:

$\int_a^x \frac{d}{dt} q(t)dt = q(x) - q(a)$, donde claramente $q(t)$es una antiderivada de $\frac{d}{dt} q(t)$.

Inciso 1.4. En la Tabla 9 se muestran los códigos formados con las respuestas de los participantes al último inciso del problema 1.

Tabla 9. Códigos de las respuestas del inciso 1.4

Código	Descripción	Proporción de respuestas	Ejemplos
Obtenga $\frac{dV_a(x)}{dx}$			
Algorítmica	Se realiza la operación que se pide (derivación) sin identificar las relaciones entre los demás elementos del problema, de donde se podría notar que es posible aplicar el primer teorema fundamental del cálculo para resolver el problema.	8/18 (44.44%)	 “ $\int_a^x \quad = \frac{(x+4)^{\frac{3}{2}} - 3x}{15} - \frac{(a+4)^{\frac{3}{2}} - 3a}{15}$ $su\ derivada\ da$ 0 $\frac{\sqrt{x+4}-2}{10}$”
Conceptual	Se resuelve el problema identificando que $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$. En algunos casos se declara que este hecho lo establece el teorema fundamental del cálculo (se refieren el primer teorema fundamental). En algunos casos presentan errores en la notación (uso de las variables t y x).	4/18 (22.22%)	 “ $\frac{dV_a(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\int_a^x \frac{1}{10}\sqrt{t+4} - \frac{2}{10}dt$ $Por\ TFC\ se\ cancela\ la\ integral\ y\ la\ derivada$ $= \frac{1}{10}\sqrt{x+4} - \frac{2}{10}$”  “ $\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{1}{10}\sqrt{t+4} - \frac{2}{10} = \frac{1}{10}\sqrt{t+4} - \frac{2}{10}$”
Sin respuesta	-	5/18 (27.78%)	

Código	Descripción	Proporción de respuestas	Ejemplos
Sin código	-	1/18 (5.56%)	 “ $1\left(20\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+4}}\right)=\frac{10}{\sqrt{x+4}}$”

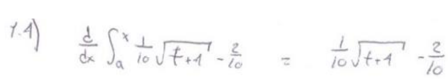
El problema pedía explícitamente obtener la derivada de $V_a(x)$. Considerando la información proporcionada y las soluciones de los incisos anteriores podía resolverse de dos maneras: derivando la función $V_a(x)$ o aplicando el primer teorema fundamental del cálculo. Sin embargo, dado que la forma inmediata de resolverlo es derivando función dada, una proporción elevada de respuestas (44.44%) se obtuvieron de esta manera (Categoría *Algorítmica*).

En las respuestas codificadas como *Conceptual* se argumenta con la idea de que la integral y derivada son operaciones inversas, en algunos de estas se menciona que esto es lo que establece “el teorema fundamental del cálculo”.

La concepción de que la integral y derivada son operaciones inversas originó un error en algunos casos, que consiste en utilizar la variable t en lugar de x después de cancelar las operaciones de integración y derivación, como se muestra enseguida:

$$\cancel{\frac{d}{dx}}\cancel{\int_a^x} q(t)d\cancel{t} = q(t)$$

Como ejemplo se tiene la respuesta del participante 6:



“$\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{1}{10}\sqrt{t+4}-\frac{2}{10}=\frac{1}{10}\sqrt{t+4}-\frac{2}{10}$”

Cinco estudiantes (27.78%) no contestaron este inciso, lo cual representa una proporción relativamente elevada considerando que se trataba de un problema rutinario, pues no era necesario emplear el primer teorema fundamental del cálculo.

Puntuación general de las respuestas del problema 1. Con el fin de verificar que este problema no estaba fuera de los conocimientos y capacidades de la mayoría de los participantes, se asignó una puntuación a las respuestas y se obtuvo una puntuación general del grupo de participantes. De manera que una puntuación baja podría ser indicativa de que el problema no es apto para el nivel educativo en el que se encuentra el grupo de participantes.

En la Tabla 10 se muestra los códigos y los puntos otorgados a las respuestas de cada inciso del problema 1 para cada participante. Los puntos asignados fueron 0, 0.5 o 1.0 de acuerdo con los criterios indicados en la Tabla 11.

La Tabla 10 consta de cinco columnas, la primera contiene la lista de los 18 participantes, mientras que en las cuatro restantes se ubican los códigos asignados a sus respuestas para cada inciso, donde además se presenta la puntuación de sus respuestas entre paréntesis.

Tabla 10. Código y puntuación de las respuestas del problema 1 para cada participante

Participante	Código y puntuación			
	Inciso 1.1	Inciso 1.2	Inciso 1.3	Inciso 1.4
1	Estrategia inmediata (0)	Acumulación imprecisa (1)	Acumulación imprecisa (1)	Conceptual (1)
2	Estrategia inmediata (0)	Acumulación imprecisa (1)	Acumulación imprecisa (1)	Algorítmica (1)
3	Conceptual yuxtapuesta (0.5)	Integral indefinida=Antiderivada (0)	Acumulación imprecisa (0.5)	Algorítmica (0.5)
4	Operacional (1)	Integral indefinida=Antiderivada (0.5)	Acumulación imprecisa (1)	Algorítmica (1)
5	Estrategia inmediata (0)	Integral indefinida=antiderivada (0.5)	Acumulación imprecisa (1)	Algorítmica (1)
6	Estrategia inmediata (0)	Estrategia inmediata (0)	Acumulación imprecisa (1)	Conceptual (0.5)
7	Conceptual yuxtapuesta (0.5)	Acumulación imprecisa (1)	Acumulación imprecisa (1)	SR (0)
8	Conceptual yuxtapuesta (0.5)	Acumulación imprecisa (1)	Acumulación imprecisa (1)	SR (0)

Partici pante	Código y puntuación			
	Inciso 1.1	Inciso 1.2	Inciso 1.3	Inciso 1.4
9	Conceptual imprecisa (1)	Acumulación imprecisa (1)	Acumulación imprecisa (1)	Conceptual deficiente (0)
10	Estrategia inmediata (0)	Estrategia inmediata (0)	Acumulación imprecisa (1)	Conceptual (0.5)
11	Estrategia inmediata (0)	Acumulación imprecisa (1)	Acumulación imprecisa (1)	Conceptual (1)
12	Estrategia inmediata (0)	Estrategia inmediata (0)	$Acumulación = \int_a^x \frac{d}{dt} f(t) dt$ (0)	Algorítmica (0.5)
13	Estrategia inmediata (0)	Estrategia inmediata (0)	$Acumulación = \int_a^x \frac{d}{dt} f(t) dt$ (0)	SC (0)
14	Estrategia inmediata (0)	Estrategia inmediata (0)	$Acumulación = \int_a^x \frac{d}{dt} f(t) dt$ (0)	Algorítmica (0.5)
15	Estrategia inmediata (0)	Estrategia inmediata (0)	$Acumulación = \int_a^x \frac{d}{dt} f(t) dt$ (0)	SR (0)
16	Estrategia inmediata (0)	Estrategia inmediata (0)	$Acumulación = \int_a^x \frac{d}{dt} f(t) dt$ (0)	Algorítmica (0.5)
17	Estrategia inmediata (0)	Estrategia inmediata (0)	$Acumulación = \int_a^x \frac{d}{dt} f(t) dt$ (0)	SR (0)
18	Conceptual imprecisa (1)	Estrategia inmediata (0)	$Acumulación = \int_a^x \frac{d}{dt} f(t) dt$ (0)	Algorítmica (0.5)
Notas: Los números entre paréntesis son los puntos asignados a cada respuesta SC: sin código SR: sin respuesta				

Tabla 11. Criterios para asignar puntuación a las respuestas del problema 1

Puntos	Criterios
0	• Respuestas obtenidas mediante operaciones inadecuadas. Por ejemplo, obtenidas mediante derivación, cuando debería ser mediante integración. • Sin respuesta.
0.5	• Respuesta numérica correcta, pero donde se hace una declaración incorrecta. Por ejemplo $\int \frac{d}{dx} q(t)\, dt = q(t)$. • Respuesta incorrecta obtenida mediante un procedimiento correcto.

Puntos	Criterios
	• Respuesta incorrecta debida a errores al utilizar una estrategia adecuada. • Respuesta correcta obtenida mediante un procedimiento correcto donde el uso de los símbolos es incorrecto. • Respuesta correcta obtenida mediante una operación incorrecta (por ejemplo, al confundir integral indefinida con antiderivada).
1	• Respuesta numérica correcta, pudiendo o no incluir justificación, donde no se hace ninguna declaración incorrecta. Se usa de manera adecuada la notación.

En la Tabla 12 se indica la cantidad de respuestas a las que se les asignó cada puntuación (0, 0.5 y 1.0), la cual se utilizó para obtener una puntuación general de este problema. Se debe enfatizar que la puntuación máxima posible es de 72, la cual se hubiera obtenido si los 18 participantes alcanzaran un punto en cada uno de los cuatro incisos.

Tabla 12. Cantidad de respuestas de cada inciso del problema 1 de cada puntuación

Puntos	Cantidad de respuestas				Total
	Inciso 1.1	Inciso 1.2	Inciso 1.3	Inciso 1.4	
1	3	6	10	5	24
0.5	3	2	1	7	13
0	12	10	7	6	35
Puntuación general para este problema: 30.5/72					

Como puede verse, la puntuación general del problema 1 (30.5/72) indica que este problema no es fácil de resolver, pero los conocimientos que los estudiantes poseen les permite abordarlo. Se enfatiza que el objetivo no es verificar si los estudiantes pueden o no resolver el problema, sino ver qué ideas expresan al resolverlos.

Problema 2

El enunciado de este problema se muestra a continuación:

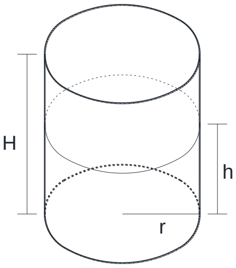
2. Se tiene un depósito de forma cilíndrica cuyo radio de la base es r y altura H (ver Figura anexa); el depósito contiene agua hasta una altura h. $V(x)$ representa el volumen contenido en tal depósito cuando h toma el valor x.

2.1.Exprese analíticamente $V(x)$.

2.2. Exprese $V(x)$ como una integral.

2.3. Obtenga $\frac{dV(x)}{dx}$.

2.4. ¿Qué expresa $\frac{dV(x)}{dx}$?



En seguida, se presentan los códigos y el análisis de las respuestas de los participantes a cada inciso de este problema.

Inciso 2.1. La Tabla 13 muestra los códigos formados con las respuestas que los participantes dieron al inciso uno del problema 2.

Tabla 13. Códigos de las respuestas del inciso 2.1

Código	Descripción	Proporción de respuestas	Ejemplos
Exprese analíticamente $V(x)$			
Noción operativa de función	Emplean la variable independiente x o h como variable independiente de la función.	8/18 (44.44%)	2- 3.1 V= πr²h V(x)= πr²x ← altura x "$V = \pi r^2 h$ $V(x) = \pi r^2 x \leftarrow altura\ x$"
			2 3.1 V(x) = πr²h "$V(x) = \pi r^2 h$"
Noción débil de función	Emplean una constante en lugar de la variable independiente en la función.	4/18 (22.22%)	2- V(X) = πr²·H → 3.1 "$V(x) = \pi r^2 \cdot H$"
			V(x)= πrH H = h = x = altura "$V(x) = \pi r H \qquad H = h = x = altura$"
Sin respuesta	-	6/18 (33.33%)	

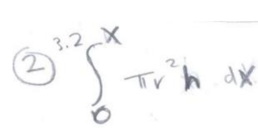
El problema consiste básicamente en escribir una expresión para el volumen del agua contenido en un depósito cilíndrico en función de la altura del agua. Para responder, el estudiante tendría en primer lugar que recodar la fórmula para calcular el volumen de un cilindro, y después identificar las medidas del cilindro como constantes, y la altura del agua como variable.

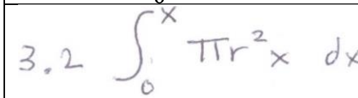
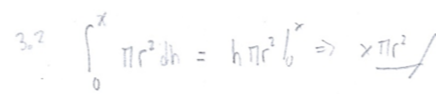
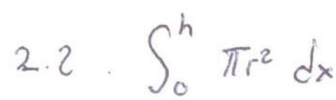
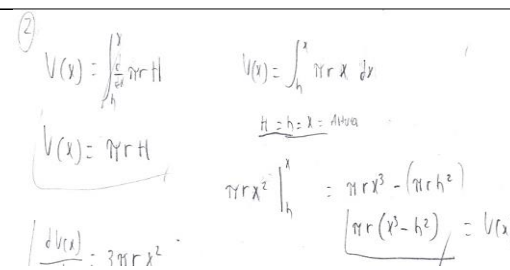
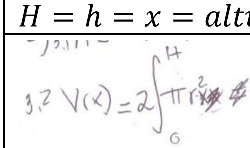
Una proporción elevada de respuestas (44.44%, clasificadas como *Noción operativa de función*) muestran una utilización consistente de las variables e indican adecuadamente que los valores que toma la función dependen de la variable independiente. El problema pedía explícitamente que expresaran el volumen en función de x. Por lo que se consideró como respuestas correctas en las que utilizaron x, y como respuesta parcialmente correcta donde se usó la variable h. Esto debido a que la variable h representa los valores que toma la altura del agua, y x representa los valores que toma h. Hay que recordar que se usó la variable x para tener la posibilidad de expresar el volumen como una integral desde $h = 0$ hasta $h = x$ (es lo que se pide en el inciso 2.2).

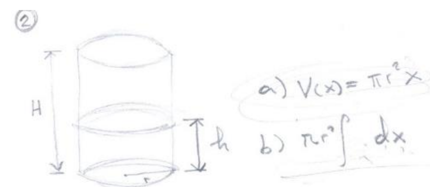
Otras respuestas (22.22%), las del código *Noción débil de función*, utilizan la constante H en lugar de la variable independiente x. Por ello se puede decir que los participantes no conciben el carácter dinámico de la función, donde al variar los valores de la variable independiente cambian los valores que toma la variable dependiente (covariación). Es decir, interpretan a la función como una fórmula. Seis estudiantes (33.33%) no contestaron este inciso.

Inciso 2.2. La Tabla 14 presentada a continuación muestra los códigos creados con las respuestas de los participantes al inciso 2 de este problema.

Tabla 14. Códigos de las respuestas del inciso 2.2

Código	Descripción	Proporción de respuestas	Ejemplos
Exprese $V(x)$ como una integral			
Acumulación errónea	Uso adecuado de los límites de integración, por lo que se infiere que el participante relaciona la	6/18 (33.33%)	 "$\int_0^x \pi r^2 h dx$"

Código	Descripción	Proporción de respuestas	Ejemplos
	integral con la acumulación. Sin embargo, la función por integrar es errónea.		 “$V(x) = \int_0^x \pi r^2 H dH$”  “$\int_0^x \pi r^2 x dx$”
Acumulación imprecisa	El uso correcto de los límites de integración sugiere que los estudiantes poseen la noción de la relación entre integral y acumulación. Sin embargo, no justifican de manera concreta por qué la integral propuesta expresa la acumulación de la cantidad involucrada en el problema.	5/18 (27.78%)	 “$\int_0^x \pi r^2 dh = h\pi r^2\|_0^x \Rightarrow x\pi r^2$”  “$\int_0^h \pi r^2 dx$”
Algorítmica	Se presenta la integral que solicita el problema, pero de manera incorrecta los límites de integración y la función por integrar.	2/18 11.11%	 “$V(x) = \int_h^x \pi r x dx$ $H = h = x = altura$”  “$V(x) = 2\int_0^H \pi r^2$”

Código	Descripción	Proporción de respuestas	Ejemplos
Integral indefinida = antiderivada	Respuesta obtenida mediante una antiderivada, cuando el procedimiento correcto es obtener una integral indefinida. Al parecer el estudiante no percibe la diferencia de estos dos conceptos.	2/18 (11.11%)	 "$V(x) = \pi r^2 \int x dx$"
			 "$V(x) = \pi r^2 \int dx$"
Sin respuesta	-	3/18 (16.67%)	

El problema consiste en escribir la integral con la que se obtiene el volumen de agua contenida en un cilindro en función de la altura del agua.

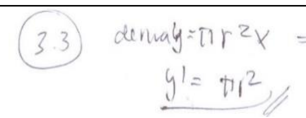
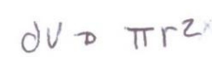
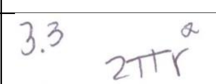
Algunas respuestas (27.78%, código *Acumulación imprecisa*) incluyen una integral indefinida con los límites cero y x, lo que hace suponer que relacionan la integral con acumulación, sin embargo, en ninguno de estos casos se representan cuáles son los fragmentos que se acumulan (fragmentos de volumen). Además, en el 33.33% de las respuestas indican correctamente los límites de integración, pero de manera incorrecta la función por integrar (código *Acumulación errónea*). Por otro lado, 11.11% colocan incorrectamente tanto los límites de integración como la función por integrar (código *Algorítmica*). Al parecer el estudiante, en este último caso, da respuesta sin tener cuidado en que esta tenga sentido.

El 1l.11% de los estudiantes contestó con una antiderivada, estas respuestas se codificaron como *Integral indefinida=antiderivada* pues las respuestas muestran que se usa una antiderivada como si se tratara de una integral indefinida. Se perciben como lo mismo, sin embargo, la relación puede establecerse brevemente de la siguiente manera: la integral indefinida de una función es una función, mientras que la antiderivada de una función es una familia de funciones. Tres participantes (16.67%) no contestaron este inciso.

Las respuestas de este inciso muestran en algunos casos que los estudiantes relacionan a la integral con acumulación, pero en ningún caso existe una explicación de cómo el concepto de integral sirve para obtener el volumen. En este sentido, los datos muestran que es necesario emplear la idea de acumulación junto con la definición de integral (límite de una suma de Riemann) para desarrollar en los estudiantes, por una parte, claridad sobre los conceptos y por otra, la habilidad para aplicarlos a diversidad de contextos.

Inciso 2.3. En la Tabla 15 se detallan los códigos creados con las respuestas del tercer inciso del problema 2, que proporcionaron los participantes.

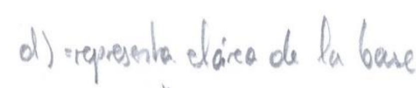
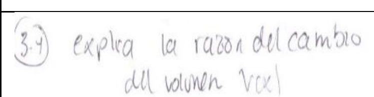
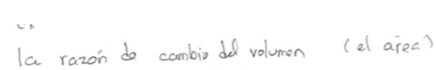
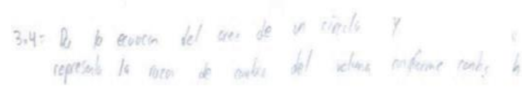
Tabla 15. Códigos de las respuestas del inciso 2.3

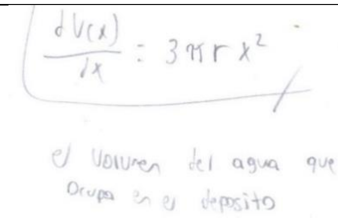
Código	Descripción	Proporción de respuestas	Ejemplos
Obtenga $\frac{dV(x)}{dx}$			
Algorítmica	Se realiza la operación indicada (derivación), pero el participante no identifica que el problema también puede resolverse aplicando el primer teorema fundamental del cálculo.	12/18 (66.67%)	 “$deriva\ y = \pi r^2 x$ $y' = \pi r^2$”  “$dV \rightarrow \pi r^2$”
Sin respuesta	-	5/18 (27.78%)	
Sin código	-	1/18 (5.56%)	 “$2\pi r^2$”

Doce estudiantes (66.67%, categoría *Algorítmica*) contestaron a este problema, ya sea derivando la función propuesta en el inciso 2.1 o derivando la expresión obtenida al resolver la integral propuesta en 2.2. Ninguno utilizó el primer teorema fundamental del cálculo, esto era de esperarse ya que la forma inmediata de obtener la respuesta es de la manera en que lo hicieron. Cinco participantes (27.88%) no contestaron este inciso.

Inciso 2.4. La Tabla 16 muestra los códigos creados con las respuestas que los participantes dieron al último inciso del problema 2.

Tabla 16. Códigos de las respuestas del inciso 2.4

Código	Descripción	Proporción de respuestas	Ejemplos
¿Qué expresa $\frac{dV(x)}{dx}$?			
Algorítmica	Las respuestas dan muestra de que el estudiante percibe a la derivada solo como una operación, pues al tratar de dar una interpretación de este concepto, solo identifica que el resultado de la derivación coincide con una fórmula conocida.	8/18 (44.44%)	 “d) representa el área de la base”
Conceptual deficiente	El estudiante relaciona la derivada con la razón de cambio, pero no se mencionan todos los elementos importantes de este concepto	5/18 (27.78%)	 “Explica la razón de cambio del volumen V(x)”  “La razón de cambio del volumen (el área)”
Conceptual	El participante proporciona una interpretación de la derivada	1/18 (5.56%)	

Código	Descripción	Proporción de respuestas	Ejemplos
	como razón de cambio y menciona de manera congruente los elementos de este concepto.		“Da la ecuación de un círculo y representa la razón de cambio del volumen conforme cambia h”
Sin respuesta	-	3/18 (16.67%)	
Sin código	-	1/18 (5.56%)	 “$\frac{dV(x)}{dx} = 3\pi r x^2$ El volumen del agua que ocupa en el depósito”

La pregunta únicamente solicita dar una interpretación de la derivada de la función $V(x)$. Una proporción alta (44.44%) respondió únicamente que la derivada expresa el área de la base del cilindro, no se menciona que la derivada esté relacionada con el concepto razón de cambio o con otro concepto, por lo que dichas respuestas se categorizaron como *Algorítmicas*.

En algunas respuestas (5.56%) se menciona el concepto razón de cambio, pero no se mencionan los elementos que incluye este concepto. En las respuestas se hacen declaraciones como “la razón de cambio del volumen”, sin mencionar que el volumen cambia cuando cambia la altura. Esto podría deberse a dos razones:

1. El estudiante ha memorizado el hecho de que la derivada expresa una razón de cambio, sin que tenga una comprensión de lo que significa razón de cambio.
2. El estudiante es consciente de que al escribir “razón de cambio del volumen” este concepto expresa que el cambio del volumen ocurre cuando cambia la altura, pues el volumen es función de la altura, por lo que le parece innecesario mencionarlo.

Con base en lo anterior podemos mencionar que se identifican tres interpretaciones sobre la derivada:

- Derivada como una operación sin atribuirle un significado.
- Como razón de cambio de una cantidad respecto al cambio en otra.
- Como razón de cambio, pero sin tener una idea precisa de lo que esto significa, es decir, siendo la frase "razón de cambio" solo una etiqueta.

La interpretación sobre la derivada más común en las respuestas de este inciso es como una operación pues como se mencionó anteriormente 44.44% de las respuestas muestran esta interpretación.

Un hecho relacionado con percibir a la derivada únicamente como una operación es el no hacer uso o desconocer las definiciones de los conceptos integral y derivada. Como se ha visto en los incisos anteriores de este problema y el problema anterior, en ninguna respuesta se trata de utilizar la definición de integral (como límite de una suma de Riemann) para justificar que con la integral indefinida se obtiene el volumen de agua. Además, como se verá más adelante, en las respuestas del problema 3, ningún estudiante trató al menos de justificar el primer teorema fundamental del cálculo empleando las definiciones de integral y derivada que están involucradas.

Puntuación general de las respuestas del problema 2. De la misma manera que se hizo para el problema 1, se asignó una puntuación a las respuestas proporcionadas por los participantes a cada inciso. Esto se hizo con el fin de tener evidencia de que el problema propuesto no sobrepasa las capacidades y conocimientos de los participantes. La Tabla 17 contiene los códigos y puntos otorgados a las respuestas que proporcionó cada participante a cada uno de los incisos. La asignación de puntos (0, 0.5 o 1 punto) se realizó conforme a los criterios indicados en la Tabla 18.

La Tabla 17 consta de cinco columnas, en la primera se enlistan los 18 participantes, en tanto que las cuatro columnas restantes, contienen los códigos de las respuestas de cada participante para cada uno de los cuatro incisos, seguida por la puntuación entre paréntesis.

Tabla 17. Códigos y puntuación de las respuestas del problema 2 para cada participante

Participante	Código y puntuación			
	Inciso 2.1	Inciso 2.2	Inciso 2.3	Inciso 2.4
1	SR (0)	Acumulación errónea (0)	SR (0)	Conceptual deficiente (0.5)
2	SR (0)	Acumulación errónea (0)	SR (0)	Conceptual deficiente (0.5)
3	Noción débil de función (0)	Algorítmica (0)	Algorítmica (0)	SC (0)
4	Noción operativa de función (0.5)	Algorítmica (0)	SC (0)	Algorítmica (0.5)
5	Noción operativa de función (1)	Acumulación imprecisa (1)	Algorítmica (1)	Conceptual (1)
6	Noción operativa de función (0.5)	Acumulación imprecisa (0.5)	Algorítmica (1)	Algorítmica (0.5)
7	SR (0)	SR (0)	SR (0)	SR (0)
8	SR (0)	SR (0)	SR (0)	SR (0)
9	SR (0)	SR (0)	SR (0)	SR (0)
10	Noción operativa de función (0.5)	Acumulación imprecisa (0.5)	Algorítmica (1)	Algorítmica (0.5)
11	SR (0)	Acumulación imprecisa (1)	Algorítmica (1)	Algorítmica (0.5)
12	Noción débil de función (0)	Integral indefinida=antiderivada (0)	Algorítmica (1)	Conceptual deficiente (0.5)
13	Noción débil de función (0)	Acumulación errónea (0)	Algorítmica (0)	Algorítmica (0.5)
14	Noción operativa de función (0.5)	Acumulación errónea (0)	Algorítmica (1)	Conceptual deficiente (0.5)
15	Noción operativa de función (0.5)	Acumulación errónea (0)	Algorítmica (1)	Conceptual deficiente (0.5)
16	Noción operativa de función (1)	Integral indefinida=antiderivada (0)	Algorítmica (1)	Algorítmica (0.5)
17	Noción débil de función (0)	Acumulación errónea (0)	Algorítmica (1)	Algorítmica (0.5)
18	Noción operativa de función (1)	Acumulación imprecisa (1)	Algorítmica (1)	Algorítmica (0.5)
Notas: Los números entre paréntesis son los puntos asignados a cada respuesta SC: sin código SR: sin respuesta				

Tabla 18. Criterios para asignar puntuación a las respuestas del problema 2

Puntos	Criterios
0	• Declaración incorrecta • Sin respuesta • Confusión entre contantes y variables
0.5	• Se menciona algo que es correcto, pero se omite algún elemento importante • Uso de la variable h en lugar de x y viceversa
1	• Respuesta correcta. Uso adecuado de la notación, constantes y variables • Se incluyen los elementos esenciales de un concepto (razón de cambio)

En la Tabla 19 se indica la cantidad de respuestas a las que se les asignó cada puntuación (0, 0.5 y 1.0) en cada inciso del problema 2, con lo que se obtuvo una puntuación general de todos los participantes para este problema. La puntuación general máxima posible para este problema es de 72.

Tabla 19. Cantidad de respuestas de cada inciso del problema 2 de cada puntuación

Puntos	Cantidad de respuestas				Total
	Inciso 2.1	Inciso 2.2	Inciso 2.3	Inciso 2.4	
1	3	3	10	1	17
0.5	5	2	0	13	20
0	10	13	8	4	35
Puntaje general para este problema: 27/72					

La puntuación general de este problema 2 es muy similar a la del problema 1, por lo que se puede decir que la solución está al alcance de los conocimientos de los participantes, pero nos es inmediata. Dicha característica del problema permitió explorar las ideas que los estudiantes tienen sobre el concepto de función, integral y derivada.

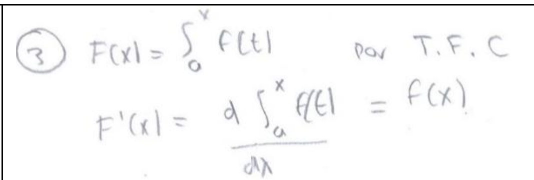
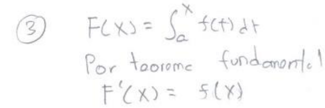
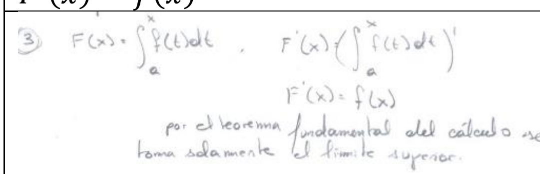
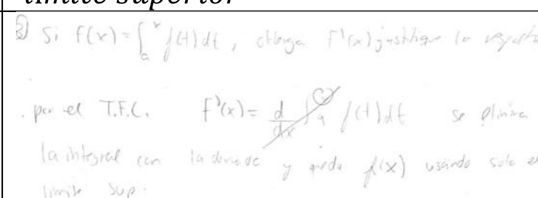
Problema 3

El enunciado de este problema se muestra en seguida:

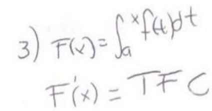
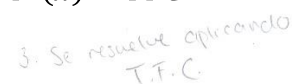
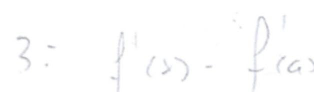
3. Si $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$, obtenga $F'(x)$, justifique su respuesta.

Códigos. La Tabla 20 detalla los códigos que se formaron mediante el análisis de las respuestas que los participantes dieron al problema 3. Para ello se consideraron las interpretaciones mostradas sobre la relación entre las operaciones de integración y derivación; y sobre el primer teorema fundamental del cálculo.

Tabla 20. Códigos de las respuestas del problema 3.

<table>
<tr><th>Código</th><th>Descripción</th><th>Proporción de respuestas</th><th>Ejemplos</th></tr>
<tr><td colspan="4">Si $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, obtenga $F'(x)$, justifique su respuesta</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Teorema fundamental del cálculo</td><td rowspan="3">La respuesta se justifica con una declaración que corresponde con una forma típica en que se enuncia el primer teorema fundamental del cálculo en los libros. No se menciona que las operaciones de integración y derivación son inversas</td><td rowspan="3">5/18 (27.78%)</td><td>
$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ por T.F.C
$F'(x) = \frac{d\int_a^x f(t)dt}{dx} = f(x)$</td></tr>
<tr><td>
"$F(x) = \int_a^x f(t)dt$
$por\ el\ teorema\ fundamental$
$F'(x) = f(x)$ "</td></tr>
<tr><td>
"$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, F'(x) = \left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'$
$F'(x) = f(x)$
$por\ el\ teorema\ fundamental\ del\ cálculo\ se\ toma\ solamente\ el\ límite\ superior$"</td></tr>
<tr><td>Operaciones inversas-operacional</td><td>Aplicación de la idea de que las operaciones de integración y derivación son inversas. Aunque en</td><td>4/18 22.22%</td><td>
"Si $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, obtenga $F'(x)$ justifique la respuesta</td></tr>
</table>

Código	Descripción	Proporción de respuestas	Ejemplos
Si $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, obtenga $F'(x)$, justifique su respuesta			
	algunos casos se comete el error al usar la variable t en lugar de x, esto no impediría usar eficientemente esta idea en problemas contextuales.		Por el T.F.C. $F'(x)=\cancel{\frac{d}{dx}\int_a^x} f(t)dt$ se elimina la integral con la derivada y queda $f(x)$ usando solo el límite sup.” “$F'(x)=f(t)$”
Operaciones inversas	Respuestas en las que, como justificación, se emplea la idea de que la integral indefinida y derivada son operaciones inversas. En algunos casos se declara que el teorema fundamental del cálculo (primer teorema) establece dicha relación. Errores en la notación.	3/18 (16.67%)	"$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt, obtener\ F'(x)$ $\cancel{\frac{d}{dx}\int_a^x} f(t)\,dt=f(x)dx\ por\ T.F.C.$” “$F'(x)=dt$” “$f(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ $f'(x)=\cancel{\int_a^x \frac{d}{dx}} f(t)\,dt=$ $f'(x)=f(t)dt$ $debido\ a\ que\ la\ integral\ se\ cancela\ por\ el\ teorema\ fundamental$ $f'(x)=f(t)dt$”

Código	Descripción	Proporción de respuestas	Ejemplos
Si $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, obtenga $F'(x)$, justifique su respuesta			
Referencia al teorema fundamental del cálculo	Únicamente se hace referencia a que la situación que se plantea está relacionada o se resuelve con el teorema fundamental del cálculo.	2/18 (11.11%)	 “$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ $F'(x) = TFC$”  Se resuelve aplicando T.F.C.
Yuxtaposición del primer teorema fundamental del cálculo	Respuestas que se asemejan al corolario del primer Teorema fundamental del cálculo, donde parece haber una yuxtaposición de los elementos de dicho corolario y teorema.	1/18 (5.55%)	 “$f'(x) - f'(a)$”
Sin respuesta	-	3/18 (16.67%)	

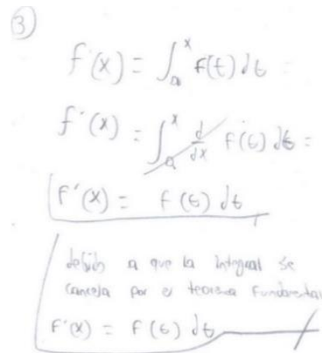
El problema consiste en obtener la derivada de una función $F(x)$ que se ha definido como una integral, donde para resolverse se debe aplicar el primer teorema fundamental del cálculo si se considera que $f(t)$ es continua o el segundo teorema fundamental si $f(t)$ no es continua, solo integrable.

En la codificación de las respuestas, mostrada en la Tabla 20, puede notarse la predominancia de la idea de operaciones inversas al tratar de justificar un hecho que es consecuencia del primer teorema fundamental del cálculo, pues en el 38.89% de éstas se emplea dicha idea (categorías *Operaciones inversas* y *Operaciones inversas-operacional*). En las respuestas del código Operaciones inversas se presentan algún tipo de los errores que se enlistan a continuación:

- $F'(x) = f(t)dt$. Error en el uso de las variables t y x, y el símbolo dt. En las respuestas donde se comete este error explícitamente se declara lo siguiente:

$$F'(x) = \cancel{\frac{d}{dx}} \cancel{\int_a^x} f(t)dt = f(t)dt$$

En seguida se coloca un ejemplo, el cual corresponde con la respuesta del participante 3.



"$f(x) = \int_a^x f(t)dt$

$f'(x) = \cancel{\int_a^x \frac{d}{dx}} f(t)dt$

$f'(x) = f(t)dt$

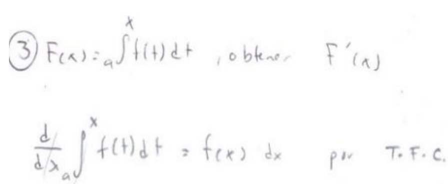
Debido a que la integral se cancela por el teorema fundamental

$f'(x) = f(t)dt$"

- $F'(x) = f(x)dx$. Error en el uso del símbolo dx. En las respuestas donde se cometió este error se declara algo como lo siguiente:

$$F'(x) = \cancel{\frac{d}{dx}} \cancel{\int_a^x} f(t)dt = f(x)dx$$

Un ejemplo de este error es la respuesta del participante 2:



"$F(x) = \int_a^x f(t)dt$, obtener $F'(x)$

$\cancel{\frac{d}{dx}} \cancel{\int_a^x} f(t)dt = f(x)dx$ por T.F.C."

- $F'(x) = dt$. El razonamiento que pudo llevar a esta respuesta se representa enseguida:

$$F'(x) = \cancel{\frac{d}{dx}} \cancel{\int_a^x f(t)}dt = dt$$

La respuesta del participante 14 mostrada enseguida, es un ejemplo de este error:

3 F'(x) = dt

"$F'(x) = dt$"

De manera similar en algunas respuestas de la categoría Operaciones inversas se comete el siguiente error:

- $F'(x) = f(t)$. El error consiste en el uso incorrecto de las variables t y x. El razonamiento que pudo llevar a esta respuesta se representa enseguida:

$$F'(x) = \cancel{\frac{d}{dx}} \cancel{\int_a^x} f(t)\cancel{dt} = f(t)$$

La respuesta del participante 17, que se muestra enseguida, es un ejemplo de este tipo de error.

3.- F'(x) = f(t)

"$F'(x) = f(t)$"

Es importante mencionar que la razón para incluir el adjetivo "operacional" en el nombre de un código donde hay error en el uso de las variables t y x, es porque la aplicación de esta idea de operaciones inversas empleando la variable t no impidió dar respuesta correcta a los problemas contextuales del instrumento (problemas 1 y 2).

Los errores mostrados hacen notar que los estudiantes tienen la concepción de que las operaciones de integración y derivación son inversas como las operaciones de obtener la raíz cuadrada y elevar al cuadrado, con números positivos. Estas operaciones cuando aparecen juntas, como en $\sqrt{x^2}$, se puede eliminar el símbolo de raíz cuadrada junto con el número 2 que indica que la cantidad esta elevada al cuadrado. En el caso de las operaciones de integración y derivación (suponiendo que son inversas como elevar al cuadrado y sacar raíz cuadrada), los errores muestran una confusión sobre qué elementos forman parte del símbolo integral. Los estudiantes que proporcionaron las respuestas en las que se comete los errores mostrados anteriormente, perciben el símbolo integral como constituido de una de las siguientes maneras (que es lo que eliminan junto con el símbolo de derivación):

- $\int_a^x \quad dt$
- $\int_a^x$
- $\int_a^x f(t)$

Por otra parte, puede verse en la Tabla 20, que en menor proporción se presentaron respuestas donde se utiliza la forma típica en que se enuncia el primer teorema fundamental del cálculo (categoría *Teorema fundamental del cálculo*), que consiste básicamente en afirmar que cuando se presenta la situación que plantea el problema, la derivada es $F'(x) = f(x)$. Esto corresponde con otra conceoción sobre la relación entre derivación e integración.

También en una proporción baja se presentaron respuestas en las que solo se señala que la situación está relacionada con "el teorema fundamental del cálculo" (código *Referencia al teorema fundamental del cálculo*).

Se debe destacar que en ninguna respuesta hubo:

- Intento de demostración.
- Utilización de las definiciones de los conceptos de integral y derivada para representar la situación planteada.
- Utilización de representaciones gráficas del problema.
- Suposiciones explícitas sobre la continuidad de la función $f(t)$.

Puntuación general del problema 3. De la misma manera que se hizo para los problemas 1 y 2, se asignó a las respuestas de los participantes cierta puntuación, en este caso, de acuerdo con los criterios indicados en la

Tabla **22**. Esta puntuación se presenta en la Tabla 21, donde, para cada participante se muestra el código que se asignó a la respuesta que proporcionó seguido de la puntuación colocada entre paréntesis.

Tabla 21. Códigos y puntuación de las respuestas del problema 3 para cada participante

Participante	Código y puntuación
1	Teorema fundamental del cálculo (1)
2	Operaciones inversas (0.5)
3	Operaciones inversas (0.5)
4	Referencia al teorema fundamental del cálculo (0)
5	Teorema fundamental del cálculo (1)
6	Teorema fundamental del cálculo (1)
7	SR (0)
8	SR (0)
9	Referencia al teorema fundamental del cálculo (0)
10	Yuxtaposición del primer teorema fundamental del cálculo (0)
11	SR (0)
12	Teorema fundamental del cálculo (1)
13	Operaciones inversas-operacional (1)
14	Operaciones inversas (0)
15	Operaciones inversas-operacional (0.5)
16	Teorema fundamental del cálculo (1)
17	Operaciones inversas-operacional (0.5)
18	Operaciones inversas-operacional (1)
Notas: Los números entre paréntesis son los puntos asignados a cada respuesta SC: sin código SR: sin respuesta	

Tabla 22. Criterios para asignar puntuación a las respuestas del problema 3

Puntos	Criterios
0	• Declaración que realmente no representa una respuesta • Respuesta incorrecta • Sin respuesta
0.5	• Respuesta incorrecta debida al uso inadecuado de la notación
1.0	• Respuesta correcta • Uso correcto de la notación

En la Tabla 23 se indica la cantidad de respuestas a las que se designó cada puntuación (0, 0.5 y 1.0), con la cual se obtuvo una puntuación general para este problema. La puntuación máxima posible (18) se tendría si los 18 participantes obtuvieran 1 punto en sus respuestas.

Tabla 23. Cantidad de respuestas del problema 3 de cada puntuación

Puntos	Cantidad de respuestas
1	7
0.5	4
0	7
Puntaje general para este problema: 9/18	

La puntuación general del problema 3 (9/18) es muy similar a las de los problemas 1 y 2, por lo que se puede decir que el problema no resulta inmediato de resolver, pero se ubica dentro de las capacidades y conocimientos de los participantes.

Considerando los códigos formados con las respuestas de los tres problemas se puede conjeturar que los estudiantes dan mayor importancia a la parte procedimental de los conceptos integral, derivada y primer teorema fundamental del cálculo y ninguna a las definiciones, esto al grado que se emplea el primer teorema fundamental del cálculo y su corolario, en algunos casos, sin ser consciente de que se está utilizando. Lo cual hace plantearse la pregunta de si los libros y la instrucción promueven esta situación. Además, antes de esta pregunta sería conveniente reflexionar sobre el papel de las definiciones en el aprendizaje de las matemáticas en las diferentes disciplinas como la física y la ingeniería.

Resumen

En el análisis y los resultados presentados, es posible identificar tres categorías de respuestas. Una en la que el estudiante lleva a cabo correctamente el procedimiento para integrar o derivar, pero no muestra un esfuerzo de interpretar estos conceptos al contexto del problema, a la que se le llamará categoría procedimental. Otra consiste en respuestas en las que se muestra que el estudiante sabe que existe una relación entre los conceptos integral y derivada o entre el concepto y una interpretación, pero desconoce cuál es precisamente esa relación o tiene una concepción de ésta que lo lleva a cometer errores, a la que se nombrará categoría pre-operacional o declarativa. La última categoría corresponde con respuestas en las que el estudiante sabe cuál es la relación entre los conceptos, y además realiza correctamente las operaciones involucradas, a la que se propone nombrar categoría operacional.

En la Tabla 24 se muestran los códigos de las respuestas de cada inciso de cada pregunta agrupados de acuerdo con lo anteriormente mencionado. Se indica con [P] los códigos que integran la categoría Procedimental, con [PO], los que forman parte de la categoría Pre-operacional o declarativa y con [O] los de la categoría Operacional.

Tabla 24. Categorías formadas con las respuestas de los participantes

Problema	Inciso			
	1	2	3	4
1	Estrategia inmediata (66.67%) [P]	Estrategia inmediata (50%) [P]	Acumulación imprecisa (61.11%) [O]	Algorítmica (44.44%) [P]
	Conceptual yuxtapuesta (16.67%) [PO]	Acumulación imprecisa (33.33%) [O]	Acumulación $= \int_a^x \frac{d}{dt} f(t)dt$ (38.89%) [PO]	Conceptual (22.22%) [O]
	Conceptual imprecisa (11.11%) [O]	Integral indefinida = antiderivada (16.67%) [PO]		
	Operacional (5.56%) [O]			
2	Noción operativa de función (55.56%) [O]	Acumulación errónea (33.33%) [P]	Algorítmica (66.67%) [P]	Algorítmica (44.44%) [P]
	Noción débil de función (11.11%) [PO]	Acumulación imprecisa (27.78%) [O]		Conceptual deficiente (27.78%) [PO]
		Integral indefinida=antiderivada (11.11%) [PO]		Conceptual (5.56%) [O]
		Algorítmica (11.11%) [P]		
	Teorema fundamental del cálculo (27.78%) [O]			

Problema	Inciso			
	1	2	3	4
3	Operaciones inversas-operacional (22.22%) [O]			
	Operaciones inversas (16.67%) [PO]			
	Referencia al teorema fundamental del cálculo (11.11%) [PO]			
	Yuxtaposición del primer teorema fundamental del cálculo (5.55%) [PO]			

Notas:

- Entre paréntesis se coloca la proporción de respuestas de cada código.
- P: procedimental, PO: pre-operacional, O: operacional.

Capítulo 5. Conclusiones

Basado en lo presentado en el capítulo de Análisis y resultados, se exponen las respuestas a las preguntas de investigación planteadas en la Introducción. Se indican además aspectos que podrían tomarse en cuenta al diseñar una propuesta de instrucción sobre el primer teorema fundamental del cálculo a nivel universitario para carreras de ingeniería, se incluyen las limitaciones de la investigación y además ideas sobre posibles investigaciones derivadas de este trabajo. Se divide este capítulo en cinco secciones. La primera y segunda sección contestan a las dos preguntas de investigación (cada sección presenta la respuesta a una pregunta). Mientras que en las tres secciones restantes se abordan cada uno de los demás aspectos que se han mencionado.

Concepciones de los estudiantes

La primera pregunta de investigación del presente trabajo es: ¿Qué concepciones sobre la relación entre integración y derivación (o acumulación y razón de cambio) se manifiestan en las respuestas de estudiantes de ingeniería, a problemas donde dicha relación está involucrada?

Se identificaron algunas concepciones sobre la relación entre integración y derivación (o entre acumulación y razón de cambio) en algunas de las respuestas de las categorías "pre-operacional o declarativa" y "operacional". Es decir, considerando la definición de concepción mostrada en el Marco conceptual, significados que los participantes han desarrollado sobre la relación entre tales conceptos.

Siendo más específicos, en la categoría "preoperacional o declarativa" se identificó una concepción sobre la relación entre acumulación y razón de cambio, y una concepción sobre la relación entre integración y derivación. Se trata de la concepción *Acumulación de una función razón de cambio* y la concepción *Integración y derivación son operaciones inversas (como elevar al cuadrado y sacar raíz cuadrada con números positivos)*. Además, en la categoría "operacional" se identificó la concepción *Derivada de la integral es igual al integrando evaluado en el límite superior de la integral*, la cual es una concepción sobre la relación entre integración y derivación.

Las concepciones de la categoría “pre-opreacional o declarativa” pueden considerarse parciales (concepción *Acumulación de una función razón de cambio* y concepción *Integración y derivación son operaciones inversas (como elevar al cuadrado y sacar raíz cuadrada con números positivos)*), ya que fueron la causa de respuestas incorrectas. Mientras que la concepción de la categoría “operacional” permitió resolver correctamente los problemas (concepción *Derivada de la integral es igual al integrando evaluado en el límite superior de la integral*).

Se debe mencionar que, en el análisis de la respuesta, se identifica que los participantes saben que la acumulación implica integración y que la derivación implica razón de cambio, pero poseen significados deficientes de las nociones de acumulación y razón de cambio.

Para el caso de la acumulación, en las respuestas no representan los fragmentos que se acumulan, por lo que se puede decir que el uso que hacen de las ideas de acumulación es como usarían esta idea en situaciones de la vida cotidiana. Por ejemplo, el inciso 1.3, donde se pide que obtengan el volumen de agua que se ha almacenado (o acumulado) en un intervalo de tiempo, varios participantes contestaron integrando una función. Lo hicieron de dicha manera porque saben, por su experiencia, que el agua que sale de una llave puede acumularse en un depósito, y que la acumulación implica integración. Sin embargo, en muchos casos eligieron incorrectamente la función por integrar al no estar conscientes de cómo se construyen los fragmentos que se acumulan. De hecho, quienes eligieron correctamente la función por integrar, no justificaron tal decisión.

Para el caso de la razón de cambio, la situación es similar. Los estudiantes saben que cuando se habla de razón de cambio se habla de derivación, y viceversa. Por lo que cuando se les pregunta por el significado de la derivada en un cierto contexto, responden que es la razón de cambio de la función. Pero no indican que se trata del cambio de una cantidad respecto al cambio en otra cantidad.

Habiendo hecho tal aclaración, se describen las concepciones que se han mencionado:

Acumulación de una función razón de cambio. En las respuestas algunos estudiantes, de cierta manera declaran que la acumulación de una cantidad se obtiene necesariamente con la integral de una función que representa una razón de cambio o la derivada de una función, como en el caso de la distancia recorrida por un objeto.

En dicho ejemplo, si se conoce la posición de un objeto en todo tiempo, dada mediante una función $f(t)$, la velocidad en cada tiempo t será la derivada $v(t) = \frac{d}{dt}f(t)$, y la distancia recorrida desde $t = a$ hasta un tiempo arbitrario x será la integral $\int_a^x \frac{d}{dt}f(t)\,dt$. Los fragmentos que se acumulan (fragmentos de distancia) se forman al multiplicar dos cantidades, una de las cuales es una razón de cambio; por lo que puede estar expresada mediante la derivada de una función.

Al parecer, los participantes en algunos casos pasan por alto la posibilidad de que se puede tener la acumulación de una cantidad sin que cada fragmento se forme necesariamente al multiplicar una cantidad que representa una razón de cambio, por otra cantidad. Un ejemplo de este último caso es el volumen de agua contenido en el cilindro (que se plantea en uno de los problemas del cuestionario), en donde los fragmentos que se acumulan (volumen) se forman al multiplicar dos cantidades (área de la base y fragmento de altura), sin embargo, ninguna de estas es una razón de cambio.

Con lo mencionado se puede notar que la concepción de que la acumulación se obtiene únicamente con la integral de una función razón de cambio puede considerarse como una concepción parcial (se propone este nombre, considerando la cita de Fujii (2014) incluida en el Marco conceptual de este trabajo, donde se menciona que lo que algunos consideran concepciones erróneas otros las consideran comprensiones parciales). La concepción completa o de mayor generalidad es que la acumulación se puede obtener al integrar cualquier función (función razón de cambio o no), siempre que cada fragmento que se acumula tenga sentido.

Integración y derivación son operaciones inversas (como elevar al cuadrado y sacar raíz cuadrada con números positivos). Algunos participantes consideran que la integración y derivación son inversas como lo son las operaciones de elevar al cuadrado y sacar raíz cuadrada, al realizar estas operaciones con números positivos. Es decir, donde se puede intercambiar el orden de las operaciones sin que se modifique el resultado, como en la siguiente situación: $\left(\sqrt{x}\right)^2 = \sqrt{x^2} = x$. Guiados por esa concepción eliminan los símbolos que indican cada operación cuando aparecen de una de las siguientes formas $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt$ o $\int_a^x \frac{d}{dt}f(t)dt$, y en ambas obtienen el mismo resultado $f(x)$. Se debe mencionar que, al realizar dicha eliminación de símbolos, se muestra que para algunos participantes el símbolo integral está constituido de algunas de las siguientes formas: $\int_a^x$, $\int_a^x \quad dt$, $\int_a^x f(t)$ (que son los símbolos que eliminan junto con el símbolo de derivación).

En cada situación ($\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt$, $\int_a^x \frac{d}{dt}f(t)dt$) se debe proceder de distinta manera, como se detalló en el capítulo de Análisis y resultados. En el primer caso se tiene que $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$ mientras que en el segundo caso el resultado es $\int_a^x \frac{d}{dt}f(t)dt = f(x) - f(a)$. Por lo que se puede establecer que la concepción de que la integral y derivada son inversas como lo son las operaciones de elevar al cuadrado y sacar raíz cuadrada de números positivos, puede considerarse como una concepción parcial

Derivada de la integral es igual al integrando evaluado en el límite superior de la integral. Es una concepción identificada en algunas de las respuestas de la categoría “Operacional”. Se puede decir que esa concepción consiste en considerar que las operaciones de integración y derivación son inversas, pero solo considerando el siguiente orden: $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt$. Por ello, al eliminar los símbolos que indican cada operación el resultado es $f(x)$, es decir el integrando evaluado en el límite superior de la integral. Esta concepción, más la habilidad de aplicar los conceptos en los problemas contextuales, les permitió resolverlos exitosamente.

Niveles de razonamiento

La segunda pregunta de investigación planteada es: ¿Qué niveles de razonamiento se identifican en las respuestas de estudiantes de ingeniería a problemas sobre el primer teorema fundamental del cálculo? De acuerdo con la definición general de razonamiento propuesta por la NCTM (2009) y mostrada en el marco conceptual de este trabajo, el razonamiento es un proceso. Considerando esto, las respuestas de los participantes (que se han agrupado en categorías y presentado en el capítulo de Análisis y resultados), son el resultado de dicho proceso. Por ello se infiere que cada categoría de respuestas fue originada por un tipo de razonamiento. Ahora, considerando que las respuestas de las diferentes categorías muestran un grado de sofisticación en la argumentación, se pueden considerar niveles de razonamiento en lugar de tipos de razonamiento. Estos niveles de razonamiento tienen las características que se describen a continuación:

Razonamiento procedimental. Consiste en el proceso en el cual el participante identifica el problema que se le presenta como un problema rutinario (aún en los casos en que no es así), por lo que implementa una estrategia de solución que consiste en la aplicación del algoritmo que, de acuerdo con lo que sabe, resuelve dicho problema.

La característica principal de este tipo de razonamiento es la ejecución correcta de algoritmos para derivar e integrar, aplicados de una de las dos situaciones siguientes:

a) Problemas no rutinarios, en los que no se pide realizar una operación específica, sino que se dan los elementos para que el participante genere una estrategia de solución.
b) Problemas rutinarios, donde se pide explícitamente realizar una operación, por ejemplo, donde se pide derivar una función dada.

Tal forma de proceder lleva a respuestas incorrectas en los casos en que los problemas no son rutinarios, es decir, donde la solución no se obtiene con la aplicación de un algoritmo específico.

Se puede decir, que los participantes que aplicaron este nivel de razonamiento no identifican la relación entre los conceptos (la relación entre integral y derivada mediante el primer teorema fundamental del cálculo) o de un concepto con una interpretación (por ejemplo, interpretación de la derivada como razón de cambio). O de forma más general, que no hay una interpretación de los conceptos en el contexto del problema.

Razonamiento pre-operacional o declarativo. Consiste en la utilización de un argumento que se basa en las relaciones entre los conceptos involucrados en los problemas, pero sin representar el argumento de manera operacional. En las respuestas se expresa, de manera explícita o implícita, que existe una relación entre los conceptos integral y derivada, o un concepto con una interpretación (integral con acumulación y/o derivada con razón de cambio), no obstante, fallan en su ejecución concreta. Aunque cabe mencionar que, como en el razonamiento procedimental, cuando se involucra un algoritmo, lo realizan de manera correcta.

La característica principal de este nivel de razonamiento es la declaración por parte de los estudiantes de la existencia de ciertas relaciones entre los conceptos involucrados y/o la interpretación de estos en el contexto (integral como acumulación y/o derivada como razón de cambio). Las respuestas incorrectas en este nivel de razonamiento fueron originadas por las siguientes situaciones:

1. Se declara que existe relación en los conceptos, pero no se menciona en que consiste tal relación. Como ejemplo se tiene un caso en que el estudiante indica que el problema 3 se resuelve aplicando el teorema fundamental del cálculo (lo cual es cierto), pero no lo realiza.
2. Concepciones parciales, que se han mencionado al contestar la primera pregunta de investigación, y que se pueden sintetizar de la siguiente manera:
    - La acumulación se obtiene únicamente mediante la integración de una función razón de cambio.
    - Integral y derivada son inversas como lo es elevar al cuadrado y sacar raíz cuadrada (con números positivos).

Razonamiento operacional. Se manifiesta mediante la implementación de una estrategia que aplica propiedades y conceptos pertinentes en la solución de problemas no rutinarios. En la argumentación se menciona la existencia de una relación entre las operaciones de integración y derivación, y de dichos conceptos con su interpretación como acumulación y razón de cambio, respectivamente, además del uso correcto de los algoritmos correspondientes.

En este nivel se emplea la concepción "la derivada de la integral es igual al integrando evaluado en el límite superior de la integral" (mencionada en la sección anterior de este capítulo), en donde se identificaron dos situaciones que se podrían catalogar como deficiencias en la argumentación de la solución a los problemas contextuales, que sin embargo no impidieron proporcionar una respuesta correcta:

- Uso indistinto entre las variables t y x en el símbolo de integral indefinida.
- No se presenta una justificación de la relación mencionada (relación entre integral y derivada o entre estos conceptos y su interpretación), basada en las definiciones de los conceptos.

Como se ha indicado, el razonamiento procedimental es el razonamiento del nivel más bajo de los tres niveles propuestos, mientras que, el razonamiento operacional es el más sofisticado. Sin embargo, uno de mayor nivel se manifestaría con el uso de las definiciones de los conceptos y de teoremas al momento de argumentar, y con del uso preciso de la simbología correspondiente. La noción de acumulación puede ser de ayuda al comprender el concepto de integración y el primer teorema fundamental del cálculo (Thompson y Silverman, 2008) y la noción de razón de cambio es de utilidad en la comprensión de la derivación (Larsen et al., 2017), y, por ende, ayudarían a comprender las definiciones correspondientes. Por lo tanto, pueden apoyar a alcanzar el nivel mayor de razonamiento al que se ha hecho referencia y al que se ha propuesto llamarle razonamiento conceptual.

Es posible notar que el conocimiento de los algoritmos de integración y derivación no garantiza su uso productivo en la solución de problemas. Para que sea así, es necesario conocer, además, la relación entre los conceptos y una interpretación de estos (pertinente al problema que se desea resolver). Con lo mencionado se quiere recalcar que la aplicación correcta de algoritmos es una característica de los tres niveles de razonamiento propuestos.

Aspectos por considerar al diseñar una propuesta de instrucción sobre el primer teorema fundamental del cálculo

De acuerdo con el análisis y resultados y las respuestas a las preguntas de investigación de este trabajo, se hacen las siguientes recomendaciones para diseñar sesiones de instrucción sobre el primer teorema fundamental del cálculo. Esto, considerando las interpretaciones de integral y derivada como acumulación y razón de cambio, respectivamente.

La habilidad en el uso de algoritmos de integración y derivación no garantiza la aplicación eficiente de estos en la solución de problemas. Sin embargo, como se vio anteriormente, el razonamiento operacional requiere de la aplicación correcta de algoritmos. Por lo tanto, las sesiones de enseñanza que enfaticen la comprensión conceptual no deben descuidar desarrollar esta otra habilidad.

Se debe discutir cuál debe ser la concepción de integral que se espera que los estudiantes adquieran al finalizar el primer curso de cálculo de una carrera de ingeniería. Puede ser la siguiente:

- Integral es la acumulación de una cantidad que se forma al agregar cantidades que resultan de multiplicar, a su vez, dos cantidades. Una de estas cantidades se representa por intervalos de la variable independiente y la otra se representa por intervalos de la variable dependiente.

Para esta concepción, se pueden emplear ejemplos de las tres situaciones siguientes:

- Situaciones donde una función directamente proporciona cierta cantidad en función de otra (por ejemplo, área en función de la altura $A(h)$), y donde cada fragmento (volumen) que se acumula se forma como $A(h) \cdot \Delta h$.
- Situaciones donde una función proporciona la derivada de otra función, por ejemplo, $v(t) = \frac{df(t)}{dt}$. Donde, $f(t)$ proporciona la posición de un objeto en un tiempo t, por lo que $\frac{df(t)}{dt}$ proporciona su velocidad. De tal manera que cada fragmento de distancia se forma como $\frac{df(t)}{dt} \cdot \Delta t$.
- Situaciones donde cada fragmento no se forma directamente al multiplicar 2 cantidades, como es el caso de la longitud de curvas. Se puede consultar en algunos libros de cálculo que la longitud de la curva de una función $f(x)$ desde $x = a$ hasta $x = b$, se calcula con la siguiente integral:

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

  Cada fragmento de longitud se calcula con $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2}$, pero haciendo las manipulaciones pertinentes, se obtiene que dicha expresión equivale a $\sqrt{1 + [f'(x)]^2} \cdot \Delta x$. Fórmula en la que es posible notar que cada fragmento se forma al multiplicar dos cantidades, una representada por los valores de la variable independiente y otra por los valores de la función compuesta $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$.

Para los tres ejemplos mencionados, la integral se puede representar como el área bajo la gráfica de una función. En el primer caso, como el área bajo la curva de $A(h)$, en el segundo como área bajo la curva de $\frac{df(t)}{dt}$, y en el tercero como área bajo la gráfica de la función compuesta $g(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$.

La instrucción sobre el primer teorema fundamental del cálculo (sobre cálculo y matemáticas en general) deben evitar desarrollar concepciones parciales en los estudiantes (pues pueden ser el origen de errores), por lo que se debe tener cuidado en dos aspectos que se indican enseguida.

En el aspecto conceptual se debe:

- Desarrollar en los estudiantes la comprensión de que el teorema fundamental del cálculo muestra la estrecha relación que existe entre acumulación y razón de cambio.

Y en el aspecto algorítmico se debe:

- Clarificar que el primer teorema fundamental del cálculo proporciona una forma sencilla de obtener una integral, sin el cual se tendrían que calcular con límite de una suma de Riemann, es decir, que existen dos formas de calcular integrales. Este es el aspecto en el cual según Bressoud (2009, 2011, 2018) radica la importancia del primer teorema fundamental del cálculo. Además de mostrar la relación entre integración y derivación.
- Enfatizar que el primer teorema fundamental en la forma enunciada por Spivak (1996) es aplicable solo a funciones continuas.
- Clarificar la relación entre integral definida, integral indefinida y antiderivada.

Limitaciones de la investigación

Como se ha mencionado, con el instrumento utilizado se indagó sobre las concepciones de los estudiantes sobre el teorema fundamental del cálculo y sobre el razonamiento que expresan al resolver problemas sobre dicho teorema. En seguida se mencionan tres posibles limitaciones de esta investigación, relacionadas con el instrumento:

- Por una parte, el instrumento no fue sometido a un proceso de validación. Proceso en el que investigadores de educación matemática con experiencia en temas de cálculo, hubieran proporcionado críticas y sugerencias de mejora para que el instrumento lograra indagar sobre lo que se pretendía. El trabajo se hubiera beneficiado de tal validación.

- El otro aspecto es, que como se ha mencionado en secciones anteriores de este capítulo, solo se hicieron suposiciones sobre el razonamiento del estudiante. Suposiciones basadas en las respuestas escritas de los problemas, es decir en el resultado de su razonamiento. Una forma de vencer esta limitación podría ser complementando los datos con entrevistas a los participantes, donde se indague sobre los motivos por los que resolvieron los problemas de la manera que lo hicieron.
- Otra limitación, similar a la anterior, tiene que ver con las concepciones identificadas. El enunciado de los problemas y las instrucciones dadas verbalmente a los participantes (antes de que contestaran el instrumento) posiblemente no fueron suficientes para motivarlos a expresar en sus respuestas los significados que poseen sobre la relación entre las operaciones de integración y derivación (o acumulación y razón de cambio), por ello, los hallazgos se consideran limitados.

Ideas sobre futuras investigaciones

En principio, como se ha mencionado, con los resultados de esta investigación, junto con los aspectos que se han señalado en la Introducción, se pretende diseñar una propuesta de instrucción que promueva la concepción, sobre la relación entre integración y derivación, que permita o promueva un razonamiento operacional, e incluso buscar desarrollar en los estudiantes un nivel de razonamiento más sofisticado (razonamiento conceptual). En el que sean capaces de argumentar porqué las operaciones que realizan resuelven determinado problema. La propuesta inicial puede ser mejorada mediante investigación de diseño.

Otra idea de investigación es caracterizar las concepciones que se han identificado en el presente trabajo, utilizando el modelo de Balacheff (2013). Este modelo afirma que las concepciones pueden ser caracterizadas por cuatro elementos: un conjunto de problemas, un conjunto de operadores, un sistema de representación y una estructura de control. Esta caracterización sería de apoyo en diseño instruccional, para motivar aquellas concepciones que sean productivas, y evitando las concepciones parciales.

Además, podría discutirse, cual es la concepción o concepciones sobre el teorema fundamental del cálculo que se espera que los estudiantes tengan al finalizar el primer curso de cálculo universitario. La cual también podría caracterizarse empleando el marco de Balacheff (2013).

Referencias

Apostol, T. M. (1999). Calculus. Volumen 1. Cálculo con funciones de una variable con una introducción al álgebra lineal. Barcelona: Editorial Reverté, S.A.

Balacheff, N. (2013). cK¢, a model to reason on learners' conceptions. En M. Martinez & A. Castro Superfine (Eds.), *Proceedings of the 35th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 2-15). Chicago, IL: University of Illinois at Chicago.

Biggs J., & Collis, K. (1982). *Evaluating the quality of learning: the SOLO taxonomy*. New York: Academic.

Birks, M. & Mills, J. (2015). *Grounded Theory. A practical guide*. London: Sage Publication, Inc.

Bressoud, D. M. (2009). Restore the Integral to the Fundamental Theorem of Calculus. *MAA Launchings.* Recuperado el 27 de Julio de 2019, de https://www.maa.org/external_archive/columns/launchings/launchings_05_09.html

Bressoud, D. M. (2011). Historical reflections on teaching the fundamental theorem of integral calculus. *The American Mathematical Monthly, 118*(2), 99-115.

Bressoud, D. M. (2018). Gaps in Student Understanding of the Fundamental Theorem of Integral Calculus. *MAA Launchings.* Recuperado el 27 de Julio de 2019, de https://www.maa.org/external_archive/columns/launchings/launchings_05_09.html

Carlson, M. P., Smith, N., & Persson, J. (2003). Developing and Connecting Calculus Students' Notions of Rate-of Change and Accumulation: The Fundamental Theorem of Calculus. En N. A. Pateman, B. J. Dougherty & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education held jointly with the 25th Conference of PME-NA, Vol. 2* (pp. 165-172). Honolulu, HI: College of Education, University of Hawai'i

Confrey, J. (1990). A Review of the Research on Student Conceptions in Mathematics, Science, and Programming. *Review of Research in Education, 16*, 3-56. Retrieved November 23, 2020, from http://www.jstor.org/stable/1167350.

Courant, R., & John, F. (1999). *Introducción al cálculo y análisis matemático. Volumen 1*. México, D.F.: Editorial Limusa, S.A. de C.V.

Creswell, J. W. (2014). *Research Design: Qualitative, Quantitative and Mixed Methods Approaches* (4th ed.). Thousand Oaks, CA: Sage

Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (1994). Introduction. Entering the field of qualitative research. In N. K. Denzin, Y. S. Lincoln (eds.), *Handbook of Qualitative Research (1-17)*. Thousand Oaks, CA: Sage Publication, Inc.

Fujii, T. (2014). Misconceptions and Alternative Conceptions in Mathematics Education. In Lerman S. (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 453-455). Dordrecht: Springer.

Gordon, S. P., & Gordon, F. S. (2003). Using data analysis to discover the fundamental theorem of calculus. *PRIMUS, 13*(1), 85-91. DOI: 10.1080/10511970308984048

Kirsch, A. (2014). The fundamental theorem of calculus: visually? *ZDM Mathematics Education, 46*(4), 691-695.

Larsen, S., Marrongelle, K., Bressoud, D., & Graham, K. (2017). Understanding the concepts of calculus: frameworks and roadmaps emerging from educational research. In J. Cai (Ed.), *The compendium for research in mathematics education* (pp. 526-580). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Miles, M. B., & Huberman A. M. (1994). Focusing and bounding the collection of data. The substantive start. En *Qualitative Data Analysis: An Expanded Sourcebook* (pp. 16-39). London: Sage publications.

NCTM (2009). *Focus in high school mathematics: Reasoning and sense making*, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Pegg, J. (2014). Structure of the Observed Learning Outcome (SOLO) Model. In Lerman S. (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 570-572). Dordrecht: Springer.

Robles Arredondo, M. G., Tellechea Armenta, E., y Font Moll, V. (2014). Una propuesta de acercamiento alternativo al teorema fundamental del cálculo. *Educación Matemática, 26*(2), 69-109.

Rosenthal, B. (1992). Discovering and experiencing the fundamental theorem of calculus. *PRIMUS:* Problems*, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 2*(2), 131-144. DOI:10.1080/10511979208965657

Schoenfeld, A. H. (2000). Purposes and Methods of Research in Mathematics Education. *Notices* of *the American Mathematical Society, 47*(6), 641–649

Sofronas, K. S., DeFranco, T. C., Vinsonhaler, C., Gorgievski, N., Schroeder, L., & Hamelin, C. (2011). What does it mean for a student to understand the first-year calculus? Perspectives of 24 experts. *The Journal of Mathematical Behavior, 30*(2), 131−148.

Spivak, M. (1996). *Cálculo infinitesimal.* México, D.F.: Reverté Ediciones, S.A. de C.V.

Stake, R. E. (1994). Case Studies. In N. K. Denzin, Y. S. Lincoln (eds.), *Handbook of Qualitative Research (236-247).* Thousand Oaks, CA: Sage Publication, Inc.

Stewart, J. (2008). *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas.* México, D.F.: Cengage Learning Editores, S.A. de C.V.

Thirey, B., & Wooster, R. (2013). The Touchy-Feely Integral: Using Manipulatives to Teach the Basic Properties of Integration. *PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, *23*(7), 605-616. DOI:10.1080/10511970.2013.796576

Thompson, P. W. (1994). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational Studies in Mathematics*, *26*(2-3), 229-274.

Thompson, P. W., & Silverman, J. (2008). The concept of accumulation in calculus. In M. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and practice in undergraduate mathematics* (pp. 43–52). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Thompson, P. W., Byerley, C., & Hatfield, N. (2013). A conceptual approach to calculus Made possible by technology. *Computers in the Schools, 30*(1-2), 124–147.

Thompson, P. W., & Dreyfus, T. (2016). A coherent approach to the fundamental theorem of calculus using differentials. En R. Göller, R. Biehler, R. Hochmuth & H. Rück (Eds.), *Proceedings of the Conference on Didactics of Mathematics in Higher Education as a Scientific Discipline* (pp. 355-359). Hannover, Germany: KHDM.

Thompson, P. W. (2019). Making the Fundamental Theorem of Calculus Fundamental to Students' Calculus. En J. Monaghan, E. Nardi and T. Dreyfus (Eds.), *Calculus in upper secondary and beginning university mathematics – Conference proceedings* (pp. 38-55). Kristiansand, Norway: MatRIC. Recuperado el 18 de septiembre de 2020, de https://matric-calculus.sciencesconf.org/

Thompson, P. W., & Silverman, J. (2008). The concept of accumulation in calculus. In M. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and practice in undergraduate mathematics, MAA Notes Vol. 73* (pp. 43–52). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Vajiac, A., & Vajiac, B. (2008) Areas and the Fundamental Theorem of Calculus. International *Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 39*(8), 1023-1036. DOI: 10.1080/00207390802136545

Verzosa, D., Guzon, A. F., y De las peñas, M. L. A. N. (2014). Using dynamic tools to develop an understanding of the fundamental ideas of calculus. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 45(2), 190–199.

Anexos

Anexo A. Instrumento

Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN

Departamento de Matemática Educativa

Maestría en Matemática Educativa

Test

Elaboró: Omar Arenas Bonifacio omar.arenas@cinvestav.mx

Nombre:	
Grado y grupo:	
Institución:	
Edad:	
Fecha:	

Instrucciones: Conteste las siguientes preguntas, anotando lo más detallado posible el razonamiento que lo llevó a la respuesta.

1. Por un grifo sale agua a una razón variable $q(t)=\frac{1}{10}\sqrt{t+4}-\frac{2}{10}$ (dada en litros/segundo) que es colectada en un contenedor. $V(x)$ representa el agua que se ha colectado desde que se abre el grifo ($t=0$) hasta el tiempo $t=x$.

    1.1.¿Cuál es la razón de cambio del volumen $V(x)$ respecto al tiempo, cuando $t=32\ s$?

    1.2.Obtenga $V(x)$.

    1.3.$V_a(x)$ representa el volumen que se ha almacenado desde $t=a$ hasta $t=x$ ($x>a$). Obtenga $V_a(x)$.

    1.4.Obtenga $\frac{dV_a(x)}{dx}$.

2. $V(h)$ representa el volumen de agua contenido en un depósito en función de la altura del agua h. Se trata de un depósito de forma cilíndrica cuyo radio de la base es $r = 1$ y altura $H = 3$ (ver Figura 1).

   2.1. Exprese analíticamente $V(h)$.

   2.2 Exprese $V(h)$ como una integral.

   2.3 Obtenga $\frac{dV(h)}{dh}$.

   2.4 ¿Qué expresa $\frac{dV(h)}{dh}$?

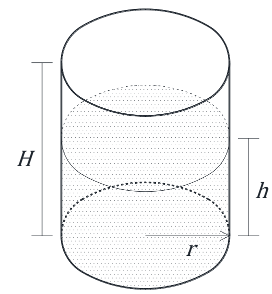


Figura 1

3. Si $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$, obtenga $F'(x)$, justifique su respuesta.

Anexo B. Solución del cuestionario

Se presenta una propuesta de solución a los problemas del cuestionario que resolvieron los participantes (Anexo A), abordándose de acuerdo con los conocimientos que se espera que tenga un estudiante después de concluir un curso de cálculo en una carrera de ingeniería.

Se colocan en seguida las instrucciones generales del cuestionario y el enunciado del problema 1, seguido de la propuesta de solución; posteriormente se colocan los problemas 2 y 3 de esta misma manera.

Problema 1

Instrucciones: *Conteste las siguientes preguntas, anotando lo más detallado posible el razonamiento que lo llevó a la respuesta.*

1. *Por un grifo sale agua a una razón variable* $q(t) = \frac{1}{10}\sqrt{t+4} - \frac{2}{10}$ *(dada en litros por segundo) que es colectada en un contenedor.* $V(x)$ *representa el agua que se ha colectado desde que se abre el grifo (*$t = 0$*) hasta el tiempo* $t = x$*.*

   1.1. *¿Cuál es la razón de cambio del volumen* $V(x)$ *respecto al tiempo, en los tiempos* $t = 5\ s, t = 21\ s$ *y* $t = 32\ s$*?*

   1.2. *Obtenga* $V(x)$

   1.3. $V_a(x)$ *representa el volumen que se ha almacenado desde* $t = a$ *hasta* $t = x$ *(*$x > a$*). Obtenga* $V_a(x)$

   1.4. *Obtenga* $\frac{dV_a(x)}{dx}$

<u>Datos:</u>

$q(t) = \frac{1}{10}\sqrt{t+4} - \frac{2}{10}$, $q(t)$ es la razón con la que sale el agua del grifo en litros sobre segundo (l/s)

$V(x)$ es el volumen que se ha almacenado en un depósito desde el tiempo $t = 0$ hasta $t = x$

Solución del inciso 1.1. Los valores para calcular son:

$V'(5) = ?$

$V'(21) = ?$

$V'(32) = ?$

Opción de solución A. De acuerdo con los datos, el volumen se obtiene mediante la siguiente integral:

$$V(x) = \int_0^x q(t)\,dt = \int_0^x \left(\frac{1}{10}\sqrt{t+4} - \frac{2}{10}\right) dt$$

De donde es posible apreciar que, aplicando el primer teorema fundamental del cálculo, se tiene la siguiente igualdad:

$$V'(x) = q(x)$$

Por lo que, mediante sustitución se obtiene:

$$\mathrm{V}'(5) = \mathrm{q}(5) = \frac{1}{10}\sqrt{5+4} - \frac{2}{10} = \frac{3}{10} - \frac{2}{10} = \frac{1}{10}$$

$$\mathrm{V}'(21) = \mathrm{q}(21) = \frac{1}{10}\sqrt{21+4} - \frac{2}{10} = \frac{5}{10} - \frac{2}{10} = \frac{3}{10}$$

$$\mathrm{V}'(32) = \mathrm{q}(32) = \frac{1}{10}\sqrt{32+4} - \frac{2}{10} = \frac{6}{10} - \frac{2}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

En los tres casos, las unidades de medición de las cantidades indicadas son l/s ya que se trata de una razón de cambio del volumen respecto al tiempo; y el volumen está dado en litros y el tiempo en segundos ■

Opción de solución B. De acuerdo con los datos, el volumen se obtiene con la integral siguiente:

$$V(x) = \int_0^x q(t)\,dt = \int_0^x \left(\frac{1}{10}\sqrt{t+4} - \frac{2}{10}\right) dt = \frac{1}{10}\cdot\frac{(t+4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{2}{10}t\Bigg|_0^x$$

$$= \frac{2}{30}(t+4)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}t\Big|_0^x = \frac{1}{15}(t+4)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}t\Big|_0^x$$

$$= \left[\frac{1}{15}(x+4)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x\right] - \left[\frac{1}{15}(0+4)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}(0)\right]$$

$$= \frac{1}{15}(x+4)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x - \frac{8}{15}$$

En donde se ha empleado el corolario del primer teorema fundamental del cálculo, pues se ha utilizado el conocimiento de que la función $\frac{2}{30}(t+4)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}t$ es una antiderivada de la función $\frac{1}{10}\sqrt{t+4} - \frac{2}{10}$ que se desea integrar. El corolario establece que para para calcular la integral se debe evaluar dicha antiderivada en el límite superior, y restar tal antiderivada evaluada en el límite inferior, como se ha realizado.

Ahora, derivando:

$$V'(x) = \frac{1}{15}\cdot\frac{3}{2}(x+4)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{5} = \frac{1}{10}\sqrt{x+4} - \frac{1}{5}$$

En donde se puede sustituir 5, 21 y 32 segundos para dar la respuesta:

$$V'(5) = \frac{1}{10}\sqrt{5+4} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10} - \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$$

$$V'(21) = \frac{1}{10}\sqrt{21+4} - \frac{1}{5} = \frac{5}{10} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$$

$$V'(32) = \frac{1}{10}\sqrt{32+4} - \frac{1}{5} = \frac{6}{10} - \frac{1}{5} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

De la misma manera que en la opción de solución A, las unidades son l/s ■

Observaciones. En ambas opciones de solución se ha empleado el hecho de que el volumen se obtiene como $V(x) = \int_0^x q(t)\,dt$, una forma de justificarlo es la siguiente:

La Figura 9 representa la función $q(t)$. Al obtener una aproximación al área bajo la gráfica desde $t = 0$ hasta $t = x$, a través de una suma de Riemann, se obtiene una aproximación al volumen de agua que ha salido de la llave en dicho intervalo de tiempo; pues el área de cada rectángulo, que se obtiene multiplicando su base por la altura, representa un fragmento de volumen, ya que en el contexto del problema al obtener el área mencionada, se ha multiplicado gasto ($q(t)$ en litros/segundo) por tiempo (t en segundos) con lo que se obtiene volumen (en litros).

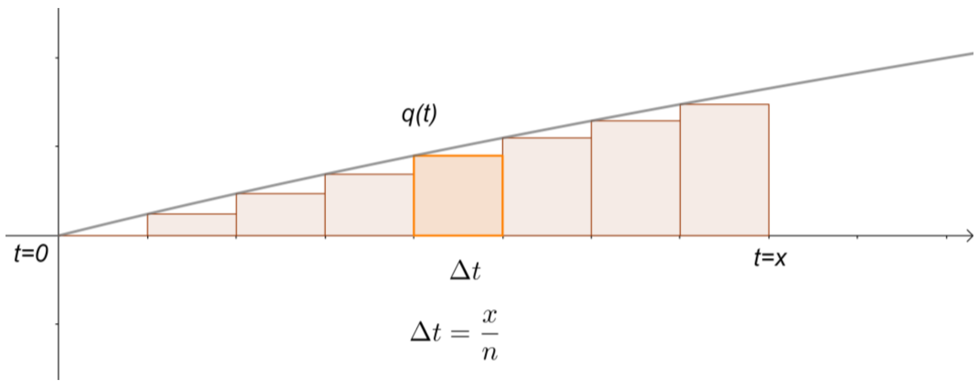


Figura 9. Aproximación al área bajo la curva de la función $q(t)$

Entonces, el volumen se obtiene de forma precisa con el límite de una suma de Riemann:

$$V(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} q(i\Delta t) \cdot \Delta t \,; donde\ \Delta t = \frac{x}{n}$$

Que se puede expresar de la siguiente forma, la cual coincide con la definición de integral:

$$V(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} q\left(i\frac{x-0}{n}\right) \cdot \frac{x-0}{n} = \int_{0}^{x} q(t)dt$$

Solución del inciso 1.2. $V(x) = ?$ De acuerdo con los datos, el volumen se obtiene mediante integración de la función $q(t)$ desde $t = 0$ hasta $t = x$:

$$V(x) = \int_0^x q(t)\,dt$$

$$V(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{10}\sqrt{t+4} - \frac{2}{10}\right)dt = \frac{1}{10}\cdot\frac{(t+4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{2}{10}t\Bigg|_0^x = \frac{2}{30}(t+4)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}t\Bigg|_0^x$$

$$= \frac{1}{15}(t+4)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}t\Bigg|_0^x = \left[\frac{1}{15}(x+4)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x\right] - \left[\frac{1}{15}(0+4)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}(0)\right]$$

$$= \frac{1}{15}(x+4)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x - \frac{8}{15}$$

$$V(x) = \frac{1}{15}(x+4)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x - \frac{8}{15}$$

En este caso, al igual que en la *Opción de respuesta B* del inciso 1.1, se ha empleado el corolario del primer teorema fundamental del cálculo.

La justificación para obtener el volumen mediante la integración de la función $q(t)$ ya se ha presentado en la solución del inciso 1.1.

Solución del inciso 1.3. $V_a(x) = ?$ De manera similar al inciso anterior, la respuesta a este inciso se obtiene mediante integración, solo que ahora se realiza desde $t = a$ hasta $t = x$.

$$V_a(x) = \int_a^x q(t)\,dt = \frac{1}{10}\cdot\frac{(t+4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{2}{10}t\Bigg|_a^x = \frac{2}{30}(t+4)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}t\Bigg|_a^x$$

$$= \frac{1}{15}(t+4)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}t\Bigg|_a^x = \left[\frac{1}{15}(x+4)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x\right] - \left[\frac{1}{15}(a+4)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}(a)\right]$$

$$= \frac{1}{15}(x+4)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x - \frac{1}{15}(a+4)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{5}(a)$$

$$= \frac{1}{15}\left[(x+4)^{\frac{3}{2}} - (a+4)^{\frac{3}{2}}\right] + \frac{1}{5}(a-x)$$

$$V_a(x) = \frac{1}{15}\left[(x+4)^{\frac{3}{2}} - (a+4)^{\frac{3}{2}}\right] + \frac{1}{5}(a-x)$$

La justificación para utilizar la integral es la misma que la presentada en la solución del inciso 1.1, únicamente cambiando el límite inferior 0 por a. Se ha empleado, al igual que en los casos anteriores, el corolario del primer teorema fundamental del cálculo para obtener la integral.

Solución del inciso 1.4. $\frac{dV_a(x)}{dx} = ?$

Opción de solución A. Se deriva la función obtenida en la solución al inciso 1.3:

$$\frac{dV_a(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{15}\left[(x+4)^{\frac{3}{2}} - (a+4)^{\frac{3}{2}}\right] + \frac{1}{5}[a-x]\right\}$$

$$= \frac{1}{15}\left[\frac{3}{2}(x+4)^{\frac{1}{2}} - 0\right] + \frac{1}{5}[0-1] = \frac{3}{30}(x+4)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{5}$$

$$= \frac{1}{10}(x+4)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{5}$$

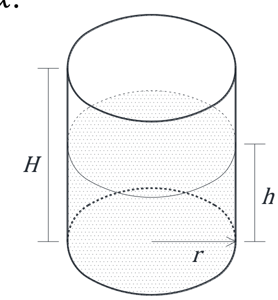
$$\frac{dV_a(x)}{dx} = \frac{1}{10}\sqrt{x+4} - \frac{1}{5}$$

Opción de solución B. Ya que se tiene que $V_a(x) = \int_a^x q(t)\,dt$ y se pide $\frac{dV_a(x)}{dx}$, se puede aplicar el primer teorema fundamental del cálculo, obteniéndose:

$$\frac{dV_a(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\int_a^x q(t)\,dt = q(x) = \frac{1}{10}\sqrt{x+4} - \frac{2}{10}$$

Problema 2

2. *Se tiene un depósito de forma cilíndrica cuyo radio de la base es r y altura H (ver figura anexa); el depósito contiene agua hasta una altura h. $V(x)$ representa el volumen contenido en tal depósito cuando h toma el valor x.*



2.1. Exprese analíticamente $V(x)$

2.2. Exprese $V(x)$ como una integral

2.3. Obtenga $\frac{dV(x)}{dx}$

2.4. ¿Qué expresa $\frac{dV(x)}{dx}$?

Datos:

Cilindro de radio r y altura H que contiene agua hasta una altura $h = x$.

Solución del inciso 2.1. La fórmula para el volumen de un cilindro como el indicado en el problema es $V = \pi r^2 h$. Expresándolo como función de la variable x, se tiene que: $V(x) = \pi r^2 x$.

Solución del inciso 2.2. Dividiendo el cilindro formado por el agua en n cilindros de altura Δh (como se muestra en la Figura 10) se tiene que el volumen es:

$$V(x) = V_1 + V_2 + \cdots + V_n = \sum_{i=1}^{n} V_i$$

Donde V_i es el volumen del i-ésimo cilindro de altura Δh, considerando que se enumeran en forma consecutiva comenzando desde abajo.

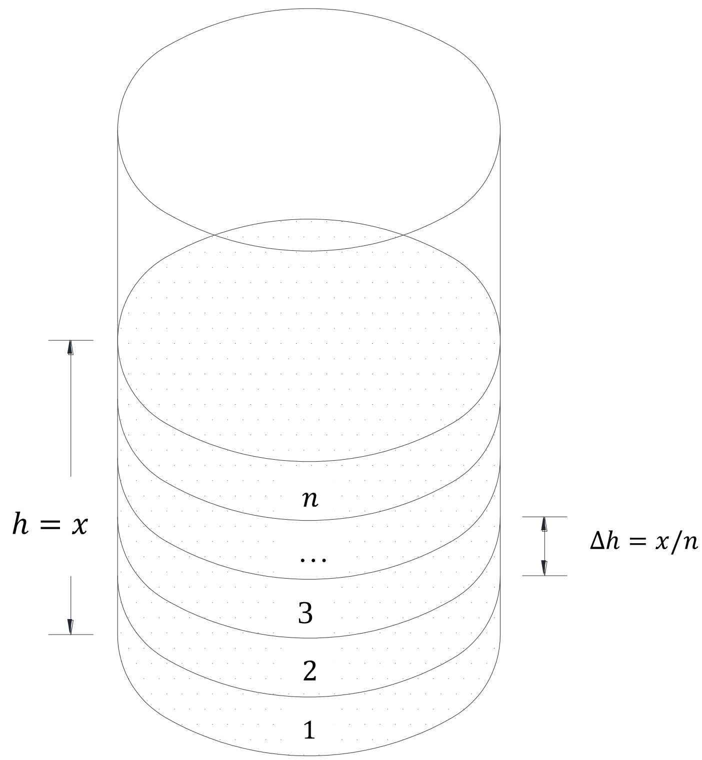


Figura 10. Esquema de apoyo en la solución del problema 2.2

Sabiendo que el volumen de cada uno de estos cilindros se obtiene multiplicando el área de la base por la altura:

$$V(x) = A_1 \cdot (\Delta h) + A_2 \cdot (\Delta h) \ldots + A_n \cdot (\Delta h) = \sum_{i=1}^{n} A_\mathrm{i} \cdot (\Delta h)$$

Donde A_i es el área de la base del i-ésimo cilindro de altura Δh.

Ahora, notando que el área de la base de cada cilindro se puede expresar como una función de la altura del agua, se tiene:

$$V(x) = A(0 \cdot \Delta h) \cdot \Delta h + A(1 \cdot \Delta h) \cdot \Delta h + \cdots + A((n-1) \cdot \Delta h) \cdot \Delta h = \sum_{j=0}^{n-1} A(j \cdot \Delta h) \cdot \Delta h$$

Donde $A(j \cdot \Delta h)$ es el área de la base del cilindro $j + 1$.

Sin embargo, hay que notar que la expresión anterior se puede expresar como un límite cuando n tiende a infinito:

$$V(x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} A(i\Delta h)\cdot \Delta h = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} A\left(i\frac{x-0}{n}\right)\cdot \frac{x-0}{n}$$

Se puede notar que la expresión anterior corresponde con la definición de integral y que el área de todos los cilindros de altura Δh es πr^2 (es decir se trata de una función constante), por lo que se tiene que:

$$V(x) = \int_0^x A(h)\,dh = \int_0^x \pi r^2\,dh = \pi r^2 \int_0^x dh$$

Solución del inciso 2.3. $\frac{dV(x)}{dx} =?$

Opción de solución A. Se sabe, por la solución al inciso anterior, que:

$$V(x) = \pi r^2 \int_0^x dh$$

Por lo que, para obtener lo que se pide, se puede aplicar el primer teorema fundamental del cálculo, obteniéndose lo siguiente:

$$\frac{dV(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\pi r^2 \int_0^x dh\right) = \pi r^2 \cdot \frac{d}{dx}\int_0^x dh = \pi r^2$$

Opción de solución B. De la solución del inciso 1 se sabe que $V(x) = \pi r^2 x$, por lo que solo hay que derivar esta función, obteniéndose:

$$\frac{dV(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(\pi r^2 x) = \pi r^2 \cdot \frac{d}{dx}(x) = \pi r^2 \cdot 1 = \pi r^2$$

$$\frac{dV(x)}{dx} = \pi r^2$$

Solución del inciso 2.4. Considerando que $V(x)$ es el volumen de agua contenido en el cilindro, el cual es función de la altura del agua; y que además la derivada puede ser interpretada como una razón de cambio instantánea, entonces $V'(x) = \pi r^2$, es la razón de cambio instantánea del volumen de agua contenido en el cilindro respecto a la altura del agua x.

Problema 3

3. Si $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$*, obtenga* $F'(x)$*, justifique su respuesta.*

Datos:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

Solución:

Si $f(t)$ es una función continua en x, el primer teorema fundamental del cálculo establece que: $F'(x) = f(x)$.

Sin embargo, una justificación más detallada es la siguiente (considerando que $f(t)$ es continua en un intervalo $[a, b]$ que contiene a x):

$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$, por lo que,

$$F'(x) = \frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\, dt = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x}$$

Aplicando el teorema del valor medio para integrales se tiene:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(z)\Delta x}{\Delta x}, donde\ x \leq z \leq x + \Delta x$$

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(z) = f(x)$$

$$F'(x) = f(x)$$

Anexo C. Primer teorema fundamental del cálculo enunciado por Spivak (1996)

El primer teorema fundamental del cálculo es enunciado por Spivak (1996) de la siguiente manera:

> TEOREMA 1 (PRIMER TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INFINITESIMAL)
>
> Sea f integrable sobre $[a, b]$ y defínase F sobre $[a, b]$ por
>
> $$F(x) = \int_a^x f$$
>
> Si f es continua en c de $[a, b]$, entonces F es derivable en c, y
>
> $$F'(c) = f(c)$$
>
> (si $c = a$ o b, entonces $F'(c)$ se entiende que representa la derivada por la derecha o por la izquierda de F). (p. 399)

Y la demostración que propone es:

> Supondremos que c está en (a, b), el lector podrá suplir las fáciles modificaciones necesarias para $c = a$ o b. Por definición,
>
> $$F'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h}.$$
>
> Supongamos primero que $h > 0$. Entonces
>
> $$F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f.$$
>
> Definamos m_h y M_h como sigue […]:
>
> $$m_h = \inf\ \{f(x): c \leq x \leq c+h\},$$
>
> $$M_h = \sup\ \{f(x): c \leq x \leq c+h\}.$$
>
> Del teorema 13-7 se sigue que
>
> $$m_h \cdot h \leq \int_c^{c+h} f \leq M_h \cdot h,$$
>
> Por lo tanto,

$$m_h \leq \frac{F(c+h)-F(c)}{h} \leq M_h.$$

Si $h \leq 0$, solamente habría que cambiar algunos pocos detalles del razonamiento. Sea

$$m_h = \inf \{f(x): c+h \leq x \leq c\},$$

$$M_h = \sup \{f(x): c+h \leq x \leq c\}.$$

Entonces

$$m_h \cdot (-h) \leq \int_{c+h}^{c} f \leq M_h \cdot (-h).$$

Por ser

$$F(c+h) - F(c) = \int_{c}^{c+h} f = -\int_{c+h}^{c} f,$$

se obtiene

$$m_h \cdot h \geq F(c+h) - F(c) \geq M_h \cdot h.$$

Puesto que $h < 0$, la división por h invierte de nuevo la desigualdad, obteniéndose el mismo resultado que antes:

$$m_h \leq \frac{F(c+h)-F(c)}{h} \leq M_h.$$

Esta igualdad se cumple para cualquier función integrable, sea o no continua. Sin embargo, puesto que f es continua en c

$$\lim_{h \to 0} m_h = \lim_{h \to 0} M_h = f(c)$$

y esto demuestra que

$F'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{F(c+h)-F(c)}{h} = f(c)$. ■ (Spivak, 1996, pp. 400-401)

Cuando el autor menciona el teorema 13-7 se refiere al teorema 7 del capítulo 13, el cual se coloca enseguida:

Teorema 7

Supóngase f integrable sobre $[a, b]$ y que

$m \leq f(x) \leq M$ para todo x de $[a, b]$

Entonces

$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$. (Spivak, 1996, p. 373)

Anexo D. Definición de integral y derivada

Integral definida. Spivak (1996) define función integrable e integral de la siguiente manera:

> Una función f acotada sobre $[a, b]$ es integrable sobre $[a, b]$ si $sup\{L(f, P)$: P es una partición de $[a, b]\} = inf\{ U(f, P)$: P es una partición de $[a, b]\}$. [Es decir, cuando el supremo de las sumas inferiores es igual a ínfimo de las sumas superiores.]
>
> En este caso, este número común recibe el nombre de integral de f sobre $[a, b]$ y se denota por $\int_a^b f$.
>
> (El símbolo ∫ recibe el nombre de signo integral y su origen era una s alargada, por “suma”; los números a y b reciben el nombre de límites de integración inferior y superior). La integral $\int_a^b f$ recibe el nombre de área de $R(f, a, b)$ cuando $f(x) \geq 0$ para todo x de $[a, b]$. (p. 355)

Para tratar de aclarar esta definición es importante colocar aquellos detalles que el autor señala antes de la definición anteriormente mostrada:

- En este capítulo intentaremos solamente definir el área de algunas regiones especiales […]: aquellas que están limitadas por el eje horizontal, los vértices $(a, 0)$ y $(b, 0)$, y la gráfica de una función f tal que $f(x) \geq 0$ para todo x de $[a, b]$. Conviene denotar esta región por $R(f, a, b)$. (Spivak, 1996, p. 346)
- Definición

  Suponga que f es acotada sobre $[a, b]$ y $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ es una partición de $[a, b]$. Sea

  $m_i = inf\{f(x): t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$,

  $M_i = sup\{f(x): t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$.

  La suma inferior de f para P, designada por $L(f, P)$, se define poniendo

  $L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1})$.

  La suma superior de f para P, designada por $U(f, P)$, se define poniendo

  $U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1})$. (Spivak, 1996, p. 348)

Además, se debe mencionar que Spivak (1996) señala que la integral también se definirá para funciones para las que no se cumple que $f(x) \geq 0$ para toda x en $[a, b]$. Menciona:

> Si f es la función dibujada en la figura 2 [grafica de una función que es positiva en un dos intervalos y negativa en uno], la integral representará la diferencia entre las áreas de las regiones de sombreado claro [donde $f(x) > 0$] y de sombreado fuerte [donde $f(x) < 0$] («área algebraica» de $R(f, a, b)$). (p. 346)

Integral indefinida. La definición de integral mostrada anteriormente corresponde con lo que comúnmente se presenta en los cursos de cálculo como integral definida de una función en un intervalo. Por otra parte, Spivak (1996) define una función creada mediante integración (integral indefinida) de la siguiente manera:

> Supongamos ahora que f es integrable sobre $[a, b]$. Podemos definir una nueva función F sobre $[a, b]$ por
>
> $F(x) = \int_a^x f = \int_a^x f(t)dt$. (p. 373)

Es importante mencionar otra situación donde se utiliza el símbolo integral de una forma un tanto diferente a las mencionada hasta este momento. Se trata de $\int f(x)dx$, al respecto, Apostol (1999) menciona:

> Hemos definido una primitiva P de una función f como cualquier función para la que $P'(x) = f(x)$. Si f es continua en un intervalo, una primitiva viene dada por una fórmula de la forma
>
> $$P(x) = \int_C^x f(t)dt,$$
>
> y todas las demás primitivas pueden diferir de esa tan sólo en una constante. Leibniz usó el símbolo $\int f(x)dx$ para designar una primitiva general de f. Con esta notación, una igualdad como
>
> (5.12) $\int f(x)dx = P(x) + C$
>
> se considera como otra forma de escribir $P'(x) = f(x)$. (p. 257)

Derivada. Se toma la definición propuesta por Spivak (1996), que abarca la derivada de una función en un punto y la derivada como una nueva función:

> La función f es derivable en a si
>
> $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe

En este caso el límite se designa por $f'(a)$ y recibe el nombre de derivada de f en a. (Decimos también que f es derivable si f es derivable en a para todo a del dominio de f). (p. 201)

Anexo E. Demostración del segundo teorema fundamental de cálculo y un ejemplo

Se coloca la demostración de Spivak (1996) del segundo teorema fundamental del cálculo y posteriormente se muestra un ejemplo donde se aplica dicho teorema. Para la demostración hay que tener presente que el teorema del valor medio establece que: "Si f es continúa en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces existe un número x en (a, b) tal que $f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ " (Spivak, 1996, p. 266).

La demostración es la siguiente:

> Sea $P = \{t_0 = t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n\}$una partición cualquiera de $[a, b]$. Según el teorema del valor medio existe un x_i en $[t_{i-1}, t_i]$ tal que
>
> $$g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(x_i)(t_i - t_{i-1})$$
>
> $$= f(x_i)(t_i - t_{i-1})$$
>
> Si
>
> $$m_i = \inf\{f(x): t_{i-1} \leq x \leq t_i\},$$
>
> $$M_i = \sup\{f(x): t_{i-1} \leq x \leq t_i\},$$
>
> entonces, evidentemente
>
> $$m_i(t_i - t_{i-1}) \leq f(x_i)(t_i - t_{i-1}) \leq M_i(t_i - t_{i-1}).$$
>
> Es decir,
>
> $$m_i(t_i - t_{i-1}) \leq g(t_i) - g(t_{i-1}) \leq M_i(t_i - t_{i-1}).$$
>
> Sumando estas ecuaciones para $i = 1, \dots, n$ obtenemos
>
> $$\sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) \leq g(b) - g(a) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1})$$
>
> De manera que $L(f, P) \leq g(b) - g(b) \leq U(f, P)$
>
> Para toda partición P. Pero esto significa que $g(b) - g(a) = \int_{-1}^{0} f$. (Spivak, 1996, pp. 406-406)

El ejemplo es el siguiente:

Se tiene la función f definida de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

Se trata de una función definida por trozos y Spivak (1996) muestra que este tipo de funciones son integrables. Por lo que se quiere obtener la siguiente integral: $\int_{-2}^{2} f(x)dx$.

Primero consideremos que el teorema 4 del capítulo 13 de Spivak (1996) establece lo siguiente:

> Sea $a < c < b$. Si f es integrable sobre $[a, b]$, entonces f es integrable sobre $[a, c]$ y sobre $[c, b]$. Recíprocamente, si f es integrable sobre $[a, c]$ y sobre $[c, b]$, entonces f es integrable sobre $[a, b]$. Finalmente, si f es integrable sobre $[a, b]$ entonces
>
> $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$. (p. 368)

Por lo tanto, para el problema planteado se tiene que

$$\int_{-2}^{2} f = \int_{-2}^{0} f + \int_{0}^{2} f.$$

Sea $g(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$, de tal manera que para los intervalos $(-2,0)$ y $(0,2)$ $g'(x) = f(x)$.

Se puede tener $P = \{t_0 = -2, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n = 0\}$ y $Q = \{t_0^* = 0, t_1^*, \dots, t_{n-1}^*, t_n^* = 2\}$ particiones cualesquiera de $[-2,0]$ y $[0,2]$ respectivamente. Para cada subintervalo de las dos particiones, es posible aplicar el teorema del valor medio, ya que se cumplen con las hipótesis de dicho teorema en los dos intervalos. Es decir, la función g es continua en $[-2,0]$ y $[0,2]$ y derivable en $(-2, 0)$ y $(0,2)$. Por lo que, de acuerdo con la demostración del segundo teorema fundamental del cálculo mostrada anteriormente, para cada intervalo ($[-2,0]$ y $[0,2]$) se tiene respectivamente que, $\int_{-1}^{0} f = g(0) - g(-1)$ y $\int_{0}^{2} f = g(2) - g(0)$.

Entonces

$$\int_{-2}^{2} f = \int_{-2}^{0} f + \int_{0}^{2} f = [g(0) - g(-2)] + [g(2) - g(0)] = g(2) - g(-2)$$

$$\int_{-2}^{2} f = g(2) - g(-2) = 2 - 0 = 2.$$