CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO,

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

Una Reconstrucción Racional de la tríada *medida-métrica-distancia,* y su relación con la Topología. Un estudio Socioepistemológico.

Tesis que presenta

Maximiliano Izzi Prato

Para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

En la especialidad de Matemática Educativa

Director de la tesis:

Dr. Ricardo Arnoldo Cantoral Uriza

Ciudad de México Noviembre, 2021

Como estudiante extranjero, agradezco ampliamente al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt) de México por el fundamental apoyo brindado para la realización de esta investigación.

Maximiliano Izzi Prato

CVU:1015955

Agradecimientos.

Agradezco a mis padres y hermano; Liliana, Jorge y Mauricio, por el apoyo constante, las enseñanzas, la familia y la vida misma. Sin ustedes no podría haber sido.

Agradezco a Julieta, mi compañera de camino. Gracias por la risa, lo compartido y por la vida.

Agradezco profundamente al Dr. Ricardo Cantoral, por su compromiso, dedicación e invaluable labor en su rol de guía, director y profesor en el desarrollo de este trabajo de investigación. Muchas gracias profesor por todas sus enseñanzas, el apoyo y el cariño.

Agradezco al Dr. Cordero, por el compromiso con que también nos acercó el espíritu de la Socioepistemología, las enseñanzas brindadas en los seminarios de maestría y por su calidez humana. De la misma manera agradezco profundamente a las Dra. Montiel y Dra. Farfán por el apoyo constante para con nuestra formación y por los excelentes seminarios brindados.

Agradezco mucho a mis nuevos hermanos latinoamericanos, Rodolfo y Selvin, por las experiencias y el cariño compartido, académico, pero sobre todo humano.

Agradezco a mis amigos, colegas y compañeros de generación Enrique, Gerardo y Eleany, con los que por suerte también compartimos muchas risas y cotidianidad.

Agradezco mucho a mis colegas del seminario de Construcción Social del Conocimiento Matemático, Rebeca, Wendolyne, Cristian, Viridiana, Antonio, Elena, Abraham, Melisa, Itacuishi, por la profunda reflexión académica indispensable para la consolidación de este trabajo de investigación, además por el cariño y compromiso compartido.

Agradezco en general al personal del Cinvestav, en especial a Adriana del departamento de Matemática Educativa, e Iván del departamento de Becas y Estímulos, por sus valiosos apoyos y siempre buena disposición frente a cualquier tipo de duda o complicación.

Muchas gracias al Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional de México por recibirme y haberme hecho sentir desde un principio como uno más. Gracias México, gran país que se excede de belleza y cultura, gracias a su gente por lo vivido en estos dos años.

Contenido

Resumen

Este proyecto de investigación surge a partir de una problemática relacionada a la pregunta: ¿Qué significados tienen los objetos estudiados en la asignatura Topología? Esta primera motivación, y la visión desde la *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa* (*TSME*), permiten una exploración de posibles caminos hacia una descentración de alguno de los conceptos centrales que configuran a esta rama de la matemática. Asumimos que todo conocimiento matemático, incluso aquel que es considerado avanzado, es parte de una construcción social. Iniciamos una ruta que permitió identificar las relaciones de las nociones de *medida-métrica-distancia* con la axiomática del *espacio topológico* y la noción de *función continua* entre los mismos. En particular, se identifican significados de *medida* en el objeto *espacio normado,* y significados de *distancia* en el objeto *espacio métrico,* escenarios de posibles resignificaciones de estos en donde se señalan su *valor de uso* y una *epistemología de prácticas* en función de cada contexto.

Para desarrollar esta investigación, se realizó una problematización del saber matemático en el sentido de la *TSME*, según las cuatro dimensiones del saber: *didáctica, cognitiva, epistemológica y social.* Para el análisis de la primera*,* se analizaron textos escolares que se identificaron con importancia histórica para el desarrollo de la Topología, reconstruyendo de ellos la relación entre *espacios métricos* y *espacios topológicos.* Además, se revisó literatura específica del campo de la Matemática Educativa que nos diera información de las problemáticas en cuanto al aprendizaje y enseñanza de la Topología. Para problematizar la *dimensión epistemológica y social*, se recurrió a fuentes que hicieran viable una historización de la noción de *medida* (que antes ubicamos relacionada a la construcción del *espacio topológico*), de carácter epistemológico-filosóficas y social-antropológicas. Esto permitió visualizar los procesos de construcción social de nociones de *medida-distancia* en la historia de las prácticas de la humanidad, en donde se identificaron resignificaciones del *espacio normado* y el *espacio métrico,* y un teorema en uso: *todo espacio normado genera un espacio métrico / en las prácticas en donde se institucionaliza un saber de medida se genera una noción descentrada de distancia.*

Para la configuración de los resultados, se articula de manera coherente la información obtenida a partir de cada uno de los análisis realizados. Los resultados se estructuraron de la siguiente manera:

- Se dio evidencias de que la construcción social de algunas *métricas* con mayor grado de complejidad, son producto de procesos de *resignificación progresiva* del saber, y que articulan y posibilitan la *comparación* específica de algunas *magnitudes* abstractas, como pueden ser: el *valor productivo de terrenos de siembra*.

- Se explicitan tres niveles de la práctica de *comparar*, con matices diferentes en cada uno. La primera comparación permite la construcción social de *unidades de medida,* la segunda permite la obtención de *medidas* de *magnitudes*, y el tercer nivel permite la expresión de la cercanía o lejanía en términos de la *magnitud* medida, es decir un concepto de *distancia* descentrado. En cada caso se explicitaron escenarios en donde se aprecian estas prácticas, que proveen significados de los saberes en función del contexto.

- Se planteó un análisis de los objetos *espacio normado* y *espacio métrico*, en las prácticas antes mencionadas. Se reconoce una estructura en las prácticas equivalente a la estructura en los objetos. Se toma la postura de que los segundos son una abstracción de los primeros, y se plantea una Reconstrucción Racional Socioepistemológica que busca explicitar la relación entre *medida-métrica-distancia* y la Topología. Se plantean escenarios de posibles resignificaciones de estos saberes.

Abstract

This research project arises from a problem related to the question: What meanings do the objects studied in the Topology subject have? This first motivation, and the vision from the Socioepistemological Theory of Mathematics Education, allowed an exploration of possible paths towards a decentration of some of the central concepts that make up this branch of mathematics. Assuming that all mathematical knowledge, even that which is considered advanced, is part of a social construction, we start a route that allowed us tu identify the relationships of the notions of *measure-metric-distance* with the axiomatics of the topological space and the notion of continuous function between them. In particular, meanings of *measure* are identified in the *normed space* object, and meanings of *distance* in the *metric space* object, scenarios of possible resignifications of these where their *use value* and an epistemology of practices are indicated according to each context.

To develop this research, a problematization of mathematical knowledge was carried out in the sense of the Socioepistemological Theory of Mathematics Education, according to the four dimensions of knowledge: didactic, cognitive, epistemological and social. For the analysis of the first one, a selection of school texts was made that were identified with historical importance for the development of Topology, and we reconstructed from them the relationship between metric spaces and topological spaces. In addition, specific literature in the field of Mathematics Education was reviewed to provide us with information on the problems regarding the learning and teaching of Topology. To problematize the epistemological and social dimension, sources were used that would make a historicization of the notion of measurement viable (which we previously located related to the construction of the topological space), these being epistemological-philosophical and social-anthropological in nature. This allowed to visualize the processes of social construction of notions of *measure-distance* in the history of the practices of humanity, where resignifications of the *normed space* and the *metric space* were identified, and a theorem in use: *all normed space generates a metric space / Every practice in which a knowledge of measurement is institutionalized generates an off-centered notion of distance.*

For the configuration of the results, the information obtained from each of the analyzes carried out is articulated in a coherent way. The results were structured as follows:

• Evidence was given that the social construction of some *metrics* with a higher degree of complexity are the product of processes of progressive resignification of knowledge, and that they articulate and enable the specific comparison of some abstract *magnitudes*, such as: the productive value of land for sowing.

• Three levels of the practice of comparing are made explicit, with different nuances in each one. The first comparison allows the social construction of *units of measurement*, the second allows obtaining *measurements* of *magnitudes*, and the third level allows the expression of closeness or distance in terms of the *magnitude measured*, that is, an off-center concept of *distance*. In each case, scenarios where these practices are appreciated, which provide meanings of knowledge depending on the context, were made explicit.

• An analysis of the objects *normed space* and *metric space* was proposed, in the aforementioned practices. A structure is recognized in the practices equivalent to the structure in objects. The position is taken that the latter are an abstraction of the former, and a Socioepistemological Rational Reconstruction is proposed that seeks to make explicit the relationship between *measure-metric-distance* and Topology, proposing scenarios of possible resignifications of knowledge.

1. Planteamiento de la problemática.

1.1 Motivaciones personales.

Antes de comenzar esta investigación, en mis últimos años como profesor de matemática había sido una preocupación buscar significados de la matemática estudiada en clase. En general, sentía muy perjudicial el predominio de la algoritmia y de procesos metódicos en textos y programas oficiales. Comenzaba a convencerme, por ejemplo, de que la pregunta que tantas veces hacen los estudiantes: “¿Para qué sirve la matemática? ¿Para qué sirve esto que estudiamos?”, tenía alguna relación con una incapacidad sistémica de la matemática escolar, para evidenciar significados sociales importantes y reales asociados a cada saber matemático. De esta manera, se oculta la funcionalidad de la matemática o es evidenciada de manera superficial o ficticia.

Dentro de mi formación académica, en los cursos de matemática formal que llevé en el Instituto de Profesores Artigas de Montevideo – Uruguay (IPA – ANEP), mayoritariamente dominaba un paradigma formalista lógico-deductivo. Aunque es cierto que paulatinamente, gracias a un grupo amplio de investigadores que se han formado en posgrado dentro del campo de la Matemática Educativa, se está promoviendo un cambio sobre el concepto de la formación del profesorado de matemática. En estos cursos, los momentos en que lograba significar los saberes resultaban iluminadores y afirmaban mi vocación por el estudio de las matemáticas, además de consolidar mi identidad como profesor. En particular, en la asignatura Topología, en la que se estudian objetos matemáticos de un nivel alto de abstracción, articulados desde la coherencia axiomática y estructural de la disciplina, que jerarquizaba un manejo riguroso y formalista de los conceptos. Aquí era importante generar una creatividad para producir demostraciones que articularan definiciones y teoremas. Considero que la asignatura fue para mí de gran interés y que aportó mucho a mi formación profesional. No sólo porque me permitió robustecer y ampliar mi conocimiento matemático, por ejemplo, permitiendo generar ideas de transversalidad entre los distintos campos de la matemática, sino que además, me posibilitó generar una intuición para trabajar con las nociones topológicas que sin ella hubiera sido por demás dificultosa la asignatura. Las construcciones de mis ideas en torno a esta asignatura, a pesar del dominio formalista, parecían guiadas por una intuición.

Posteriormente, me acerqué a un seminario de Homeomorfismos Expansivos y Sistemas Dinámicos, en la Facultad de Ingeniería de la Universidad de la República (Udelar-Uruguay), en donde muchas nociones de Topología eran protagónicas. Aquí seguí reconociendo la importancia de esta intuición de la que hablaba anteriormente, no sólo en mí, sino que también en los matemáticos que estaban en el seminario. Entendí que este interés, tenía más relación con la construcción de significados, de nociones abstractas, que permitieran un mejor manejo conceptual. Esta curiosidad tenía que ver más con los objetos de estudio de la Matemática Educativa, que con los de la propia Matemática. El camino definido por mi vocación claramente priorizaba estos aspectos didácticos.

Cercano a este momento es que tuve un acercamiento intencional a la *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME).* Las interrogantes sobre los significados, construcciones sociales, racionalidades en contexto, sabiduría como conocimiento en uso, etc. comenzaron a ser de particular interés. ¿Qué caracteriza al pensamiento Topológico si lo descentramos de sus objetos abstractos? Por ejemplo, ¿qué significados del concepto de compacidad pueden existir?, ¿y del de conectividad?, ¿qué significa continuidad en contextos topológicos? Y una pregunta que en un principio fue importante: ¿Qué significan estas nociones topológicas, concretamente en espacios métricos?

Este tipo de preguntas se volvieron de interés, ya que se orientaba a reconocer qué caracterizaba esa intuición que yo reconocía tanto en mí como en colegas a los que nos interesaba mucho la asignatura. Podría decirse que, considerábamos la expresión formal de los conceptos como puntos de partida de ideas que debíamos significar, o como conclusiones de ideas producidas en extensas reflexiones previas. Escribir una demostración tiene sus dificultades propias, y requiere de un manejo técnico considerable. Pero, si lográbamos identificar por qué un teorema nos parecía cierto y convencernos de ello mediante argumentos variados, escribir la prueba se volvía algo técnico, que requería estructurar en una prueba deductiva ideas de las que ya nos habíamos convencido, al menos parcialmente. En muchos casos evaluábamos o producíamos nuestras conjeturas, sobre distintos *espacios métricos* que permitieran incluso generar visualizaciones. Esto podría haber estado siendo parte importante de ese proceso en el cual afirmábamos nuestras suposiciones.

El *Discurso Matemático Escolar* (*dME*) (se describe en la *sección 2* de este escrito), de alguna manera invisibiliza que el pensamiento matemático, incluso el que es considerado avanzado es producto de construcciones sociales (Cantoral, 2016). A partir de reflexiones conjuntas con el grupo de

Construcción Social del Conocimiento Matemático, del Área de Educación Superior del departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, apoyados también en literatura (Bastán et al., 2006; Narli, 2010), interpretamos que muchos cursos de Topología que se dictan tanto en el profesorado de matemática como otras formaciones profesionales presentan una matemática normada por el *dME,* centrado en definiciones, demostraciones lógico deductivas, procedimientos, algoritmos, etc. dificultando los caminos para lograr un saber con significados que posibilite visualizar usos en contextos. Esto puede provocar, que no se aprecie la importancia de la asignatura en la formación profesional, acentuado más aún, en el profesorado de matemática que posteriormente en su mayoría se dedicará a la enseñanza de la matemática en niveles de secundaria o bachillerato.

La estructuración de la matemática escolar en un desarrollo conceptual utilitario encadenado, en donde cada conocimiento es necesario para el siguiente, parecería promover la idea de que los temas que se trabajan en secundaria están muy lejos del pensamiento requerido en cursos de nivel superior como los de Topología. Desde la *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa* se postula que se puede generar una transversalidad en donde se potencie el desarrollo del pensamiento matemático entre los distintos niveles de formación mediante *epistemologías de prácticas*. En un determinado momento de la reflexión, comenzamos a pensar que el explorar el desarrollo del pensamiento métrico, entendido en un sentido amplio, y su vínculo con ideas de la Topología, sería de interés para este proyecto. Fue el camino a seguir, que elegí y que me eligió.

1.2. Aspectos métricos de la Topología.

La investigación desde la postura teórica de la Socioepistemología, ha provisto evidencias de que el conocimiento matemático avanzado es producto de complejos procesos de construcción social (Cantoral, 2016) ¿Por qué sería de otra manera con los saberes que caracterizan a la Topología?

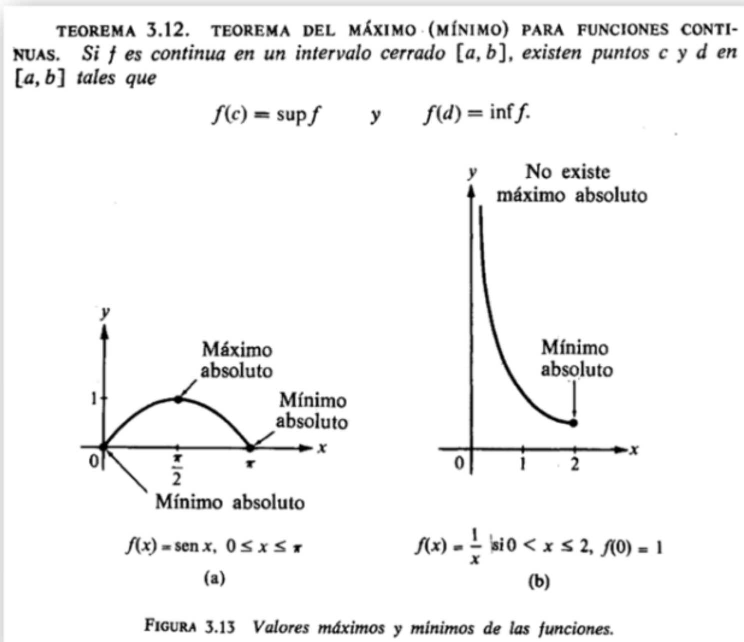
Un primer objetivo, consistió en buscar escenarios que posibilitaran ver cómo conceptos propios de la Topología, como son la *continuidad*, *compacidad*, y *conectividad*, tenían significados y funcionalidades contextuales. Además nos interesó rastrear los orígenes históricos de alguna de estas nociones. Raman-Sundstrom (2015) analiza el desarrollo conceptual de la noción de *compacidad* a lo largo del siglo XIX hasta las primeras décadas del siglo XX. Evidencia el esfuerzo histórico que hace la comunidad matemática para lograr una definición general que pudiera describir las características del concepto para cualquier *espacio topológico*. Nos interesó este trabajo, ya que deja ver cómo en aras de la generalidad se sacrifican significados de la *compacidad* que fueron importantes en el proceso histórico de la construcción del concepto. Particularmente, en *espacios métricos* tiene características que podrían generar significados de una manera que difícilmente se lograría con la definición general. Incluso en *espacios métricos* particulares podrían emerger significaciones concretas del concepto.

En la búsqueda de generalización hacia otros espacios, se asume que hay determinadas propiedades que se pretenden de la noción de *compacidad*. Por ejemplo, se requería considerar los aspectos que ya se reconocían valiosos en $\mathbb{R}^n$, y además resolver las contradicciones que se generaban al intentar extender esta noción a otros espacios. Una de las características de los *conjuntos compactos*, es la siguiente: Si una función $f: A \to \mathbb{R}$ es *continua*, con A un *subconjunto compacto* de $\mathbb{R}^n$, entonces f admitirá un valor *máximo*, y un *mínimo*. Este teorema, en concreto para números reales, con la *métrica* usual, comúnmente se estudia en últimos años de bachillerato y en cursos universitarios de Cálculo (*figura 1.1*).

Raman-Sundstrom (2015), reconoce una línea evolutiva del concepto, y menciona que “Fréchet, quien definió la *compacidad secuencial* en su tesis de 1906, dijo que su definición provenía de su deseo de generalizar este teorema a espacios abstractos” (p. 3) [Traducción propia], además de que reconocía la prueba de este teorema a Weierstrass, y que también era acorde al pensamiento de

Bolzano. Lo que se conoce en la actualidad como el teorema de Heine-Borel (1895) plantea que un subconjunto de $\mathbb{R}$, con la *métrica usual*, es *compacto* si es *cerrado* y *acotado* (Raman-Sundstrom, 2015). Estas condiciones implican *compacidad* también en $\mathbb{R}^n$ (con la *métrica usual*), lo que indicaría que es una idea importante ya que caracteriza una amplia familia de conjuntos sobre los cuales cualquier *función continua* tendrá un *máximo* y un *mínimo*. Esta caracterización de *compacto* como conjunto *cerrado* y *acotado*, para otros espacios, no sería suficiente.

Figura 1.1. Teorema de Máximos y Mínimos.



TEOREMA 3.12. TEOREMA DEL MÁXIMO (MÍNIMO) PARA FUNCIONES CONTINUAS. *Si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, existen puntos c y d en $[a, b]$ tales que*

$$f(c) = \sup f \qquad y \qquad f(d) = \inf f.$$

FIGURA 3.13 *Valores máximos y mínimos de las funciones.*

Recuperado de Apostol (2001, p. 184)

Por ejemplo, si consideramos la *métrica del supremo* ($\| \ \|_\infty$), y la *distancia* entre *funciones continuas* que esta genera (*figura 1.2*), tendríamos un *espacio métrico* que define una manera particular de *distancia*, sobre el espacio de *funciones continuas* en un *intervalo* dado. Digamos que B, es el conjunto de *funciones continúas* definidas en el intervalo $[0,1]$, y que para cada $f \in B$, $\|f\|_\infty \le 1$. Cada elemento de este conjunto es una *función continúa* definida en el intervalo $[0,1]$, contenidas entre las rectas $y = 1$ e $y = -1$. Algunos, y solamente algunos elementos de este espacio se muestran como ejemplo en la *figura 1.3*, ya que dibujar este espacio es imposible debido a lo complejo de su naturaleza.

Figura 1.2. *Métrica del supremo* en el *espacio de funciones continuas* en el intervalo $[a,b]$.

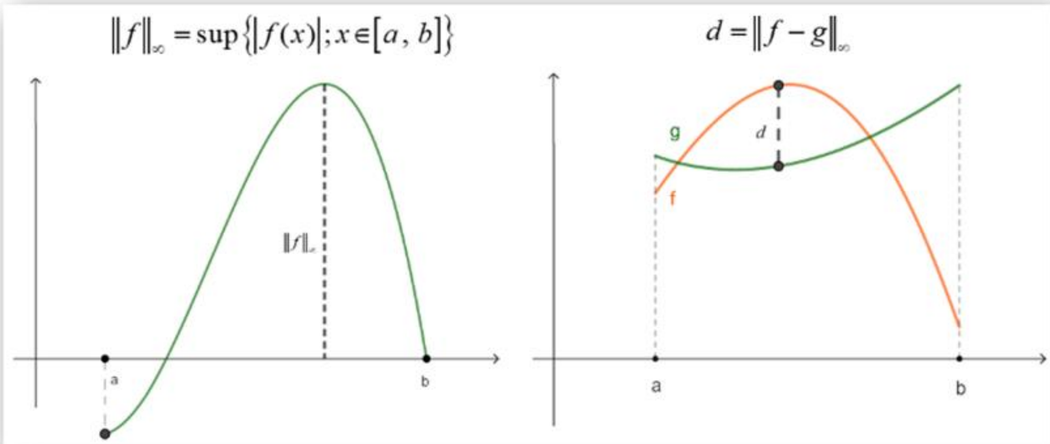
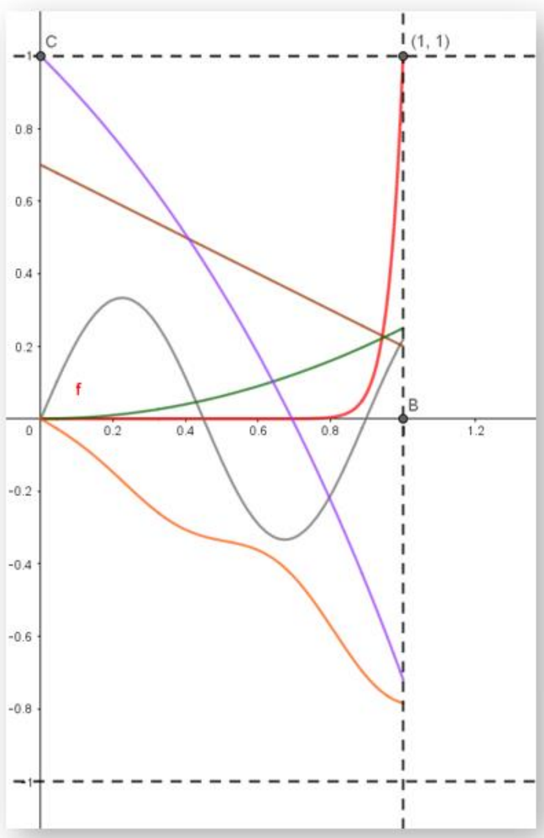
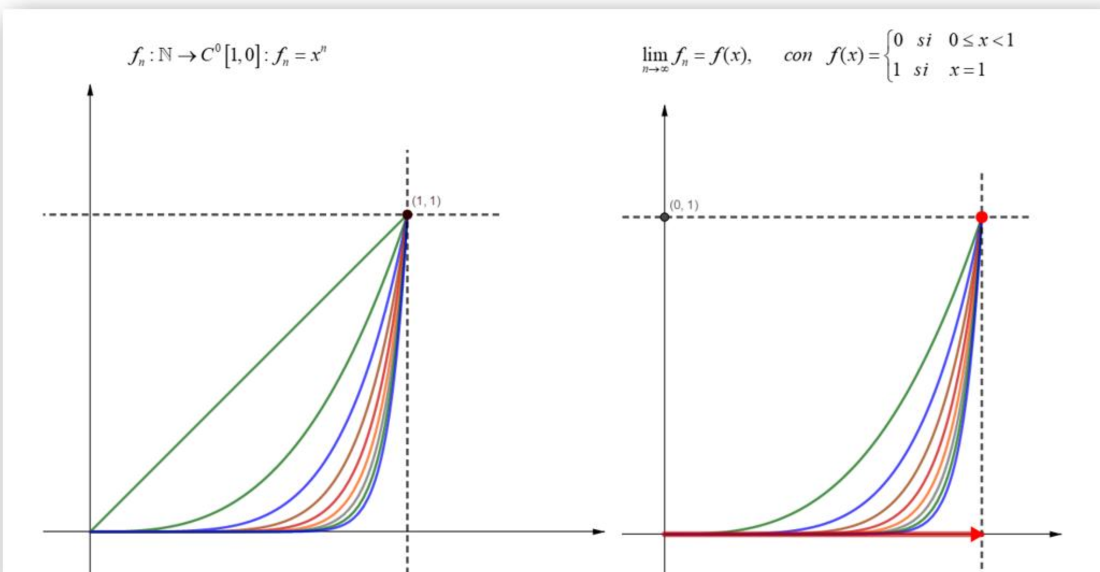


Figura 1.3. Ejemplos de algunos elementos del espacio $C^0[0,1]$.



Este conjunto es acotado ya que la *norma* de cada elemento puede medir a lo sumo uno, y *cerrado* debido a que los *puntos de acumulación* están incluidos en el conjunto. En el caso de $\mathbb{R}^n$ con la *métrica usual*, las propiedades de *cerrado* y *acotado* ya eran suficientes para que el conjunto fuera *compacto*. En este caso se genera un conflicto, y es que existen *sucesiones* que no *convergen* ni admite *subsucesión convergente*, siendo esto algo no esperado para un conjunto *compacto* (Raman-Sundstrom, 2015). Por ejemplo, la sucesión $f_n(x) = x^n$, donde cada f_n está definida en el intervalo $[0,1]$, está incluida en el conjunto B. Sucede que dicha sucesión, cuando $n \to \infty$ no *converge uniformemente*, sino que *converge puntualmente* a una *función discontinua* que no pertenece al espacio *(figura 1.4)*. Es importante considerar el tipo de *convergencia* aquí, siendo la *convergencia uniforme* la que tiene sentido para esta *métrica del supremo*, porque la idea de cercanía está caracterizada por esta *métrica.*

Figura 1.4. Sucesión de funciones en el espacio $C^0[0,1]$, que no converge, ni tiene subsucesión convergente.



Para evitar este problema, Ascoli en 1883 introdujo la noción de *equicontinuidad* (*figura 1.5*), y concluiría que los *conjuntos compactos* en este espacio son los conjuntos *cerrados*, *acotados* y *equicontinuos* (Raman-Sundstrom, 2015). Esta última noción, controla la *variación* de los elementos de una *familia de funciones equicontinua*, es decir, que sus *derivadas* no puedan ser indefinidamente grandes. En el caso de una *sucesión de funciones equicontinua*, se evita que las *funciones* se acerquen tanto como sea necesario a secciones verticales, posibilitando la *convergencia uniforme* a una *función del espacio*. Esta condición de *equicontinuidad* que se le requiere a los *conjuntos compactos* en este espacio, provoca que, la *sucesión de funciones* $f_n = x^n$ al no ser *equicontinua* no se considere un *conjunto compacto*, ni tampoco el propio conjunto B.

Esto nos pareció interesante, ya que esta caracterización tiene sentido únicamente para este tipo de espacios de *funciones continúas*. Esto debido a que para garantizar la *compacidad se* involucran conceptos que sólo se pueden señalar si los elementos son *funciones*, como es esta noción de *equicontinuidad* que impone una condición en la *variación* de estas, y que no tendría sentido en otros espacios.

Figura 1.5. Concepto de *equicontinuidad.*

Definición. Sea (Y, d) un espacio métrico. Sea $\mathcal{F}$ un subconjunto del espacio de funciones $\mathcal{C}(X, Y)$. Si $x_0 \in X$, el conjunto $\mathcal{F}$ de aplicaciones se dice que es ***equicontinuo en*** x_0 si, dado $\epsilon > 0$, existe un entorno U de x_0 tal que, para todo $x \in U$ y toda $f \in \mathcal{F}$,

$$d(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

Si el conjunto $\mathcal{F}$ es equicontinuo en x_0, para todo $x_0 \in X$, se dice simplemente que es ***equicontinuo***.

Recuperado de Munkres (2002, p. 315).

Un momento fundamental en la reflexión que veníamos construyendo, se dio al ver que la *métrica del supremo* ($\| \|_\infty$) que determina *distancias* entre los elementos en este espacio, está jugando un rol protagónico que influye directamente en la interpretación de la *compacidad*. Creímos que una forma de comenzar a buscar significados para las nociones topológicas consistía en centrar la atención en el comportamiento de determinados *espacios métricos*, variar el tipo de espacios sobre los que se van a pensar *distancias*, y también *variar las métricas* que definen cómo se van a pensar las *distancias* entre los elementos del espacio.

Márquez (2018), nos confirma lo fundamental que es el *espacio métrico* para la Topología. Ella realiza un estudio socioepistemológico, dentro del campo de la Matemática Educativa y observa que en la obra de Fréchet en la que se reconocen raíces de la Topología, se documenta una de las primeras formulaciones generales de la noción *de espacio métrico*, y se declara que los elementos de estos espacios pueden ser de naturaleza amplia. También en los libros actuales recomendados para cursos de Topología, usualmente se realiza una introducción mediante *espacios métricos* o se le dedica una sección completa al estudio de sus particularidades (Kelley, 1955; Mendelson, 1990; Munkres., 2002) analizando sus características topológicas. Fue fundamental para nuestra investigación, reconocer que algunos teoremas que admiten demostración para *espacios métricos*, como que la *unión infinita* de *conjuntos abiertos* es un *abierto*, o que la *intersección finita* de *conjuntos abiertos* es un *abierto*, encuentran sus equivalentes en los axiomas que definen a un *espacio topológico* (como se verá en la *sección 4.6*).

Continuar este tipo de estudio a mayor profundidad y realizar un análisis histórico-epistemológico de nociones como las de *compacidad*, como podría sugerir este primer análisis, podría haber sido un camino. Pero en ese momento ya habíamos ubicado nuestro interés en ver que las nociones topológicas consideradas tan abstractas podrían tener significados particulares en *espacios métricos* concretos. Otro factor fundamental que comenzó a determinar el camino de nuestro proyecto de investigación se dio al reflexionar sobre posibles usos y significados en algunos escenarios sociales. Los *espacios métricos* no son más que aquellos en donde se pueden determinar *distancias* entre sus elementos, aunque se amplía tanto la naturaleza de estos, como la misma racionalidad de la *distancia* y las maneras de determinarlas.

1.3. Métrica, medida y distancia, primeros cuestionamientos.

La discusión aún se mantenía *centrada en objetos*, desde nuestro enfoque socioepistemológico nos interesaba identificar un camino hacia una *descentración*. Es decir, reconocer elementos del desarrollo histórico, identificar *usos* y *significados* en prácticas contextuales, que permitieran un análisis en términos de la *construcción social del conocimiento matemático*. Este camino lo consideramos de interés, con posibilidades de ser productivo y requirió centrar nuestra atención en el concepto de *espacio métrico*, que se relaciona directamente con ideas de *métrica*, *medida* y *distancia*, saberes presentes en las matemáticas, las matemáticas escolares y en el pensamiento matemático de la actividad humana en general.

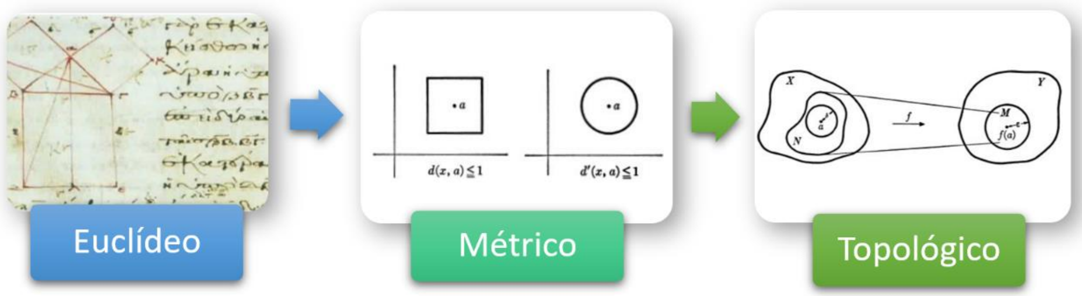
El *espacio métrico* como objeto formal, puede interpretarse como una generalización de las propiedades de la *métrica euclídea* hacía otros espacios de naturaleza variada (se analiza en la *sección 4.1*). La noción de *medida* heredada del paradigma euclidiano tiene un protagonismo hegemónico en el *dME*. Hemos visto que, por lo general los objetos sobre los que se piensan medidas y distancias (el concepto de *medida,* y el de *distancia* están los interpretamos de manera interrelacionada como veremos la *sección 4.2*) son puntos del plano, áreas de figuras planas, volúmenes de figuras geométricas en el espacio, etc. También se producen medidas de velocidades, alturas, peso, etc. herencia de la Física, que estamos considerando en nuestra problemática, pero que en el *dME* en muchos casos son involucradas en contextos ficticios.

Por ningún motivo quisiéramos que se interprete que le restamos importancia a la *métrica euclídea* usual. Compartimos la idea de que es un saber fundamental ¿Pero por qué no considerar que otras *maneras de medir* y *objetos que medir*, también podrían ser de interés en la matemática escolar? Creímos en un comienzo que el reconocer explícitamente este relativismo de las prácticas que involucran la *medida* podría ayudar a reconocer un carácter relativista de la matemática misma, en oposición al pensamiento único de la matemática que domina en el *dME*.

En la *figura 1.6*, se esquematiza los procesos de generalización que reconocimos en la matemática escolar, en donde cada paso abstrae propiedades generales de la situación anterior. A esto se refiere cuando se señala que la Topología es una generalización de generalizaciones. Incluso es coherente con la idea de que puede interpretarse como una generalización del Análisis Matemático (Bastán et al., 2006; Márquez, 2018), ya que las definiciones *"épsilon-delta"* que son centrales en el Análisis

Matemático o el Cálculo Diferencial e Integral que consideran la racionalidad de la *medida euclidiana* usual de manera intrínseca, se amplían con el concepto de *espacio métrico*, en cursos avanzados.

Figura 1.6. El *espacio topológico*, incluye al *métrico*, y este último al *euclídeo*.



Existen diversos ejemplos de *métricas* no *euclídeas* en la matemática escolar. Se pueden medir *distancias* entre conjuntos, entre funciones, distancias no usuales entre puntos en el plano, etc. A pesar de esto, consideramos que muchas veces puede no quedar claro para qué se piensan así las *distancias*, sino que, así se hace porque lo requiere el problema estructurado en formato escolar, opacando el *valor de uso* del *saber*. Consideramos esto muy perjudicial, porque asumimos que la *medida-distancia* puede tener un valor epistemológico generado a partir de prácticas concretas, que resalten su funcionalidad. Para poder identificar esto, necesitábamos una descentración *del objeto* matemático en el sentido de la *TSME* (Cantoral, 2016). A modo de ejemplo, algunas interrogantes que guiaron nuestro camino en un comienzo fueron:

¿Cómo se puede ampliar el universo de espacios imaginables cuando se habla de *métrica*? ¿Se pueden proponer escenarios donde la noción de distancia no sea la evidente? ¿Cómo mide un niño? ¿Qué mide un niño? ¿Cómo mide un profesional? ¿Qué mide un profesional?, en general ¿Cómo miden las personas en su cotidiano? ¿Qué miden? ¿Qué se piensa en general de lo que es una medida o *métrica*? ¿Cómo se concibe la *medida* en la matemática?

Podríamos pensar que las diferentes formas de *medir* en la actividad humana en general, tantos *objetos* de diferente naturaleza en tantos escenarios nos permitirían ver si existe un panorama social más amplio de la noción de *medida*, que pueda ser de interés estudiar para el rediseño del *discurso Matemático Escolar* como es concebido en (Cantoral, 2016; Soto, 2010).

Dentro del paradigma formalista se resaltan las propiedades generales del *espacio métrico* (*figura 1.7*). Este objeto, como conjunto de axiomas que define la generalidad de lo que es considerado una *métrica*, podría estar opacando la particularidad de cada una como sistema o instrumentación, que posibilita la obtención de *distancias* para un determinado fin. La definición de una *métrica* como una *función*, o sea, un proceso que permite la obtención de *medidas-distancias* opaca las particularidades de estos procesos que emergen de cada escenario. Tuvo sentido pensar, que es en estos procesos en donde también se reconoce actividad matemática con *racionalidades contextualizadas* y *significados* que provienen del *valor de uso*. No se podría generar un sistema que pueda obtener *medidas-distancias* en un escenario, si este no fuera coherente con las características específicas del mismo.

Figura 1.7. Definición axiomática de *espacio métrico*.

There are many topological spaces in which the topology is derived from a notion of distance. A **metric** for a set X is a function d on the cartesian product $X \times X$ to the non-negative reals such that for all points x, y, and z of X,

(a) $d(x,v) = d(y,x)$,
(b) (*triangle inequality*) $d(x,y) + d(y,z) \geqq d(x,z)$,
(c) $d(x,y) = 0$ if $x = y$, and
(d) if $d(x,y) = 0$, then $x = y$.

Recuperado de Kelley (1955, p. 118).

Al considerar la *dimensión social del saber*, en un principio tomamos la postura de que las ideas de *medida*, *métrica* y *distancia* se podrían interrelacionar de muchas maneras diferentes según cada práctica (en el desarrollo de este trabajo de investigación, profundizaremos en la relación directa entre estas nociones). Pensamos a la *medida*, como una valoración numérica de alguna propiedad (*magnitud*) del objeto medido, como pueden ser longitudes, temperatura, capacidad, cantidad de cambio, madurez, intensidad, peso, costo, extensión de trayectos no rectos, compacidad de figuras planas, cantidad promedio de nacimientos en una población, distribución de la riqueza, y un amplio etcétera. La *distancia*, la consideramos directamente relacionada a estas medidas, debiendo esta expresar *proximidad* o *lejanía* entre objetos, es decir qué tan lejos o cerca están unos de otros, en términos de la *magnitud* medida. A la *métrica*, la consideramos como el sistema, de naturaleza muy variada (percepción basada en la experiencia, una técnica, un teorema, etc.) que permitiera la obtención de medidas y distancias. El *espacio métrico*, involucraría a todos estos elementos.

Con la intención de lograr una *descentración del objeto*, nos permitimos la búsqueda de formas de *medir* en la actividad humana, en un sentido amplio. Por ejemplo, Angel et al. (2010) muestran cómo se pueden *medir* las formas de ciertas figuras desde la Geografía. En particular señalan cómo se interpreta de diez maneras diferentes lo que significa que una figura sea más o menos *compacta*, trasparentando en cada caso una intención práctica que influencia, el cómo se concibe esta propiedad que se busca observar.

En este caso, *lo compacto*, toma claramente cierta distancia de la idea topológica formal, tiene una interpretación contextual y se puede *medir*. No es que una figura únicamente pueda ser o no *compacta*, sino que puede ser más o menos *compacta*. En este artículo, se muestran diez interpretaciones de esta propiedad, y respectivamente diez *métricas* que permiten cuantificar qué tan compactas son. Es interesante que el círculo aparece como la figura óptima según las diez *métricas* diferentes, y en este sentido, sería una figura de referencia.

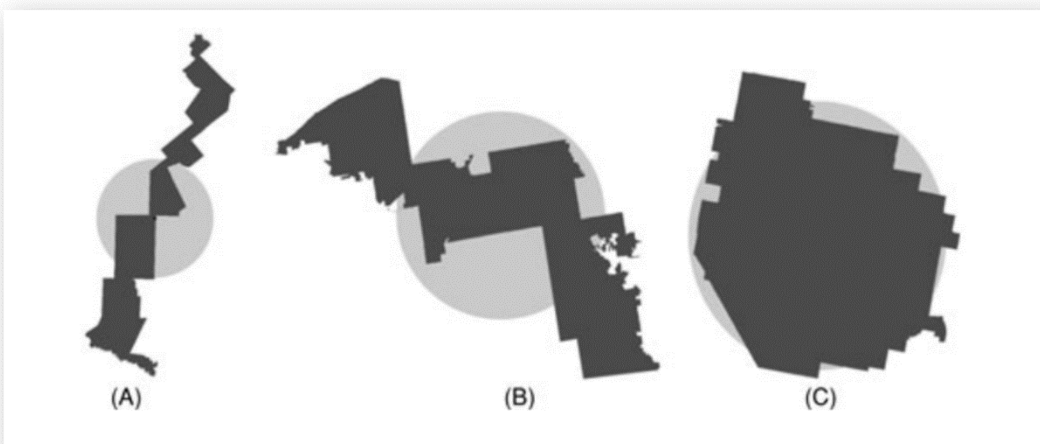
Por ejemplo, una de estas, es el Índice de Intercambio ("Exchange Index" = I_x) que permite determinar qué tan *compacta* es una figura, a partir de un cálculo de una proporción de áreas (Angel et al., 2010). Un hecho documentado, conocido con el término *"Gerrymandering",* implica la manipulación de los límites de distritos electorales, con la intención de acumular o dispersar cierta población que se sabe tiene determinadas intención de voto. Esto se ha documentado ampliamente en EE.UU., y también hay referencias que señalan que han habido conflictos políticos similares en México (Law et al., 2016; Meng y Palmer-rubin, 2017). La manipulación descarada de las fronteras generalmente provoca formas extrañas que tienen valores en este Índice I_x muy bajos *(figura 1.8).*

> Los jueces de la Corte Suprema de los EE. UU., cuando discuten sobre la manipulación, a menudo aluden a su aspecto de intercambio de votantes: "Un distrito que se extiende para apoderarse de comunidades minoritarias pequeñas y aparentemente aisladas no es razonablemente compacto" (Corte Suprema de EE. UU. 2006a); "Protuberancias de formas muy específicas que se extienden para incluir

a los demócratas, o fisuras que se retuercen para esquivar republicanos" (Tribunal Supremo de los Estados Unidos, 2004); "Incorporó múltiples, pequeños y lejanos núcleos de población minoritaria" (Tribunal Supremo de EE. UU. 2006b); sus "muchos pasillos estrechos, alas o dedos ... se extienden para encerrar a los votantes negros, mientras que excluyen a los residentes hispanos cercanos" (Tribunal Supremo de los Estados Unidos, 1996). (Angel et al., 2010, p. 447) [Traducción propia][1]

Calcular el *Índice de Intercambio* (I_x) de un distrito implica: conocer el área de la figura que representa al distrito ($Á$), dibujar un círculo con esa área sobre el *centro de masa* del mismo, calcular el área de superposición de la figura con este círculo (O_s) y determinar el índice según el siguiente cociente: $I_x = O_s / Á$.

Figura 1.8. Exchange Idex.



Nota: Distrito de Texas (A), índice bajo (0.3), Ohio (B) con índice medio (0.5) y Arizona (C) con índice alto (0.9). Recuperado de Angel et al. (2010, p. 448).

[1] Justices on the US Supreme Court, when discussing gerrymandering, often allude to its voter exchange aspect: "A district that reaches out to grab small and apparently isolated minority ity communities is not reasonably compact" (US Supreme Court 2006a); "specific protuberances on the draconian shape that reach out to include Democrats, or fissures in it that squirm away from Republicans" (US Supreme Court 2004); "incorporated multiple, small, farflung pockets of minority population" (US Supreme Court 2006b); "its many narrow corridors, wings, or fingers reach out to enclose black voters, while excluding nearby Hispanic residents" (US Supreme Court 1996). (Angel et al., 2010, p. 447)

Lo peculiar de esto, es que hay una intencionalidad explicita de producir *métricas* que midan determinados aspectos (*magnitudes*) de la forma de una figura plana, y que puedan servir, al interactuar con otras *métricas*, de sistema de contralor. Los elementos del contexto sobre los que se consideran medidas son distritos (interpretados como figuras planas), y la *magnitud* que se mide es *compacidad*. La *métrica* que permite obtener medidas implica cálculos de áreas y cocientes producidos a gran velocidad mediante software (Angel et al., 2010), y podríamos interpretar que estas, a partir de *comparaciones*, permiten ver una *distancia* en términos de *compacidad* entre los distintos distritos, identificando qué tan lejos está un de otro en términos de esta *magnitud.*

Este es solamente un ejemplo, que nos permite describir nuestra motivación por estudiar la *dimensión social* de la *métrica*, es decir, qué significados y racionalidades ha tenido, o puede tener. También reconocer diferentes momentos históricos por los que ha transitado el concepto, para contrastarlos con las características que posee en la matemática escolar actual, e identificar el carácter epistemológico de la *medida-métrica-distancias* basado en prácticas. Todo concurrió, a que este trabajo de investigación se enmarcara en una *problematización* de estos saberes interrelacionados, según las *dimensiones del saber* matemático (*social, epistemológica, cognitiva y didáctica*) (Cantoral, 2016), buscando identificar su evolución histórica, debido a su presencia jerárquica en la actividad humana en general.

2. Consideraciones teóricas.

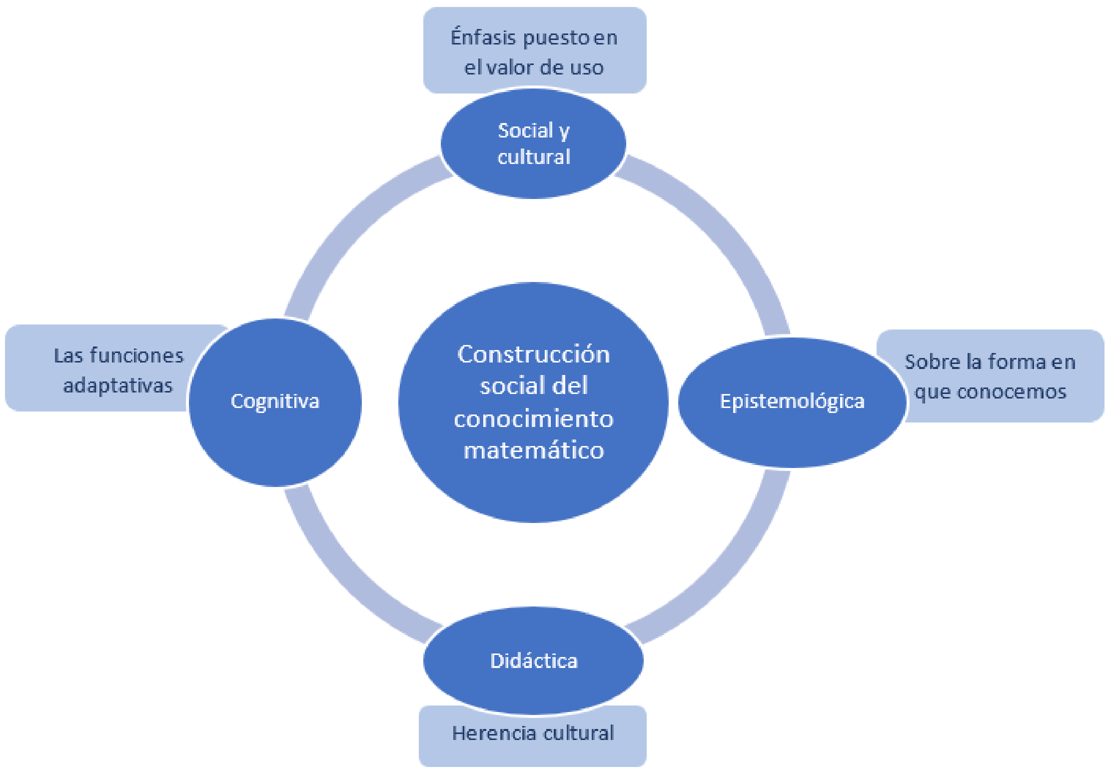
Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa.

El marco teórico considerado para esta investigación es la *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa* (*TSME*) (Cantoral, 2016). Esta teoría científica del campo disciplinar de la Matemática Educativa, está dentro del paradigma sociocultural de la disciplina y estudia la construcción social del conocimiento matemático y su difusión institucional. Considera en sus objetos de estudio, que el conocimiento matemático no ha emergido originalmente por una intencionalidad didáctica explicita, para ser enseñado, sino que este es construido en contextos sociales diversos, para dar respuesta a problemáticas particulares. Se considera que la *sabiduría humana*, se conforma tanto en el *saber sabio*, como en el *técnico* o *popular*, siendo una producción social con contexto y herencia. No considerar estas influencias socioculturales para intervenciones didácticas sería, en cierto sentido, desnaturalizar los propios procesos de construcción de saberes matemáticos.

La *TSME,* considera al *saber* como *conocimiento en uso,* y que este se configura desde cuatro dimensiones: *didáctica, epistemológica, cognitiva y social* (*figura 1.2*). La consideración de la *dimensión social* influencia las otras tres, haciendo posible generar análisis en las investigaciones desde un aparato teórico que considera estas cuatro dimensiones del saber de manera sistémica.

Por ejemplo, la *dimensión didáctica* del saber matemático desde la *TSME*, considera que el fenómeno didáctico es más extenso del que sucede en las aulas escolares de matemática, o en la misma institución educativa. Los fenómenos de trasmisión del saber se dan en diversos escenarios socioculturales y de manera específicamente funcional a cada uno. La *dimensión epistemológica*, al considerarse en relación con la *dimensión social*, admite que la construcción social de saberes matemáticos se conforma de *epistemologías de prácticas*, es decir, que el saber matemático se constituye con características propias a partir de una relación de los individuos con sus realidades contextuales, en *donde desarrollan prácticas intencionadas que anteceden y acompañan* el desarrollo de los objetos matemáticos. La *dimensión cognitiva*, pasa a considerar la influencia de elementos socioculturales en la explicación de por qué formamos determinadas nociones de una manera y no de otra. Cada una de las *dimensiones del saber* están en función de las otras tres, es por esto, que al incorporar una cuarta dimensión, se afectan todas en su conjunto, y la concepción misma de lo que es el saber matemático.

Figura 1.2. Enfoque sistémico de las dimensiones del saber *para la* Socioepistemología.



Recuperado de Cantoral (2016, p.155).

La *TSME*, se establece sobre cuatro principios fundamentales que expresan su racionalidad, y que son funcionales a la hora de configurar sus objetos de estudio, plantear problemáticas, y explicar los resultados de las investigaciones. Estos sin un orden jerárquico prestablecido, son: el *principio de la normatividad de la practica social, principio de racionalidad contextualizada, principio del relativismo epistemológico* y *principio de la resignificación progresiva.*

1. ***Principio normativo de la práctica social***: plantea que las prácticas sociales son la base y orientación en los procesos de construcción del conocimiento matemático, son generadoras de conocimiento. Estas tienen cuatro funciones:

a. *Normativa:* la práctica social, “no es lo que hace en sí el individuo o grupo sino lo que les hace hacer lo que hacen, digamos norma su accionar” (Cantoral, 2016, p. 162). “Las prácticas sociales se caracterizan por ser insustanciales, pero inferibles (…) se expresan en los planos individuales, colectivos e históricos. Son el producto de un análisis, no de una observación” (p. 160).

b. *Reflexiva-Discursiva:* La reflexión discursada sobre las prácticas, permite la construcción de explicaciones y significados necesarios para el entendimiento, haciendo viable la generación de identidades.

c. *Identitaria:* “lo que la práctica social produce son identidades, pues configura un escenario de representaciones sociales en los que se auto confirma el rol del sujeto en el mundo”(Cantoral, 2016, p. 168).

d. *Pragmática:* “permite orientar las acciones en actividad humana, al adquirir la capacidad de producir intencionalidad e interacción de la actividad con la práctica hasta alcanzar niveles de competencia deseado, la *expertez o* la experiencia” (Cantoral, 2016, p. 168).

2. ***Principio de racionalidad contextualizada****:* plantea que la “relación del sujeto al saber es una función del contexto” (Cantoral, 2016. p. 162). Es decir, la construcción social de conocimiento matemático responde a valores funcionales en cada contexto, que no pueden ser dejados de lado al momento de interpretar las particularidades de un saber constituido por un sujeto (individual o social).

3. ***Principio de relativismo epistemológico:*** en contraposición al absolutismo epistemológico que predomina en la concepción de saberes matemáticos, que presume que sus verdades son universales, se plantea la idea de *relativismo*, sosteniendo que “el saber es, de hecho, una multitud de saberes con verdades relativas”(Cantoral, 2016, p. 164).

4. ***Principio de resignificación progresiva:*** se considera que los saberes se significan a partir de su *valor de uso* en contextos. Estos significados son puestos en funcionamiento iteradamente en situaciones nuevas, produciendo en cada caso una nueva etapa de significación con particularidades propias de cada nuevo contexto.

Se plantea un modelo de *anidación de prácticas* para explicar la *construcción social del conocimiento* (*figura 2.2*).

> Se pasa de la ***acción***, directa del sujeto (individual, colectivo o histórico) ante el medio en tres acepciones (material o entorno, organizacional o contexto, social o normativo), esto se organiza como una ***actividad*** humana (situada socioculturalmente), para perfilar una ***práctica*** (iteración deliberada del sujeto y regulada por el contexto) [práctica socialmente compartida]; dicha práctica cae bajo la regulación de una ***práctica de referencia*** que es la expresión material e ideológica de un paradigma (ideológico, disciplinar y cultural), las que a su vez son normadas mediante sus cuatro funciones por la ***práctica social*** (normativa, identitaria, pragmática, discursiva-reflexiva). (Cantoral, 2016, p. 159) [aclaración y subrayados agregados]

***Figura 2.3*.** Modelo de anidación de prácticas.

Recuperado de Cantoral (2016. p. 338).

Desde finales de la década de los años 80, se señala la existencia de un *discurso Matemático Escolar (dME)* protagonista del fracaso escolar en cuanto a la difusión institucional del saber matemático. Cantoral y Farfán (1990) señalan con claridad al *dME: "las dificultades en la transferencia de* *significados matemáticos tenían sus raíces en el discurso matemático utilizado, que ha saber, está fuertemente influido por los paradigmas típicos del discurso matemático puro*” (p. 1).

Soto (2010) analiza la evolución histórica del constructo *dME,* lo establece como un sistema de razón que norma qué es lo correcto y lo que no en la enseñanza y aprendizaje de la matemática, fundamentando así lo que es esperado en la organización de la Matemática Escolar. Destacando su hegemonía, impone significados y argumentaciones que gracias a la legitimidad social que posee, son interiorizados y reconocidos por los actores del sistema didáctico sin ofrecer mayor resistencia, además de que promueve concepciones formalistas del saber matemático.

Se identifican cinco características principales del *dME*. *Atomización de los conceptos*: se considera como conocimiento únicamente a los objetos matemáticos, desprovistos de cualquier carácter social, cultural o contextual; *Carácter utilitario:* no se consideran los significados que emergen de los usos y de la funcionalidad del conocimiento; *Falta de marcos de referencia:* se soslaya que la matemática también forma parte de otras disciplinas y que puede adquirir diferentes significados y usos dependiendo de los distintos escenarios; *Concepción de la matemática como un conocimiento acabado y continuo:* planteando la imposibilidad de trastocarla, y reduciéndola a procesos de memorización de conceptos y mecanización; *Carácter hegemónico*: son aceptadas solamente algunas argumentaciones, procedimientos y significaciones, opacando otras. En la *tabla 1*, se presentan los elementos del *dME* en discusión con los principios de la *TSME,* y una propuesta de *rediseño.*

Tabla 2.1. Caracterización teórica del *dME* y la fundamentación para su rediseño. Recuperado de Cantoral, Montiel y Reyes (2015, pp. 14-15).

Discurso Matemático Escolar actual (Soto, 2010)	**Principios de la Socioepistemología (Cantoral, 2016)**	**Propuesta de r-dME**
Carácter utilitario	**Normativa de la Práctica Social**	**Carácter funcional**
La organización de la matemática escolar ha antepuesto la utilidad del conocimiento a cualquiera de sus restantes cualidades.	La significación de la matemática mediante el uso: anidación de prácticas.	La matemática escolar se organiza con base en el saber y el funcionamiento cognitivo, didáctico, epistemológico y

<table>
<tr><td></td><td></td><td>social en la vida de los seres humanos, reconociendo a las prácticas sociales en la base de la creación del conocimiento: contexto de significación.</td></tr>
<tr><td>Atomización de los conceptos</td><td>Racionalidad contextualizada</td><td>Racionalidades conceptuales diversas</td></tr>
<tr><td>No considera los aspectos sociales, contextuales y culturales que permiten la constitución del conocimiento. Racionalidad</td><td>La relación con el saber es una función contextual.</td><td>Se reconocen, privilegian y potencian diversos tipos de racionalidad relativos a la realidad en la que el individuo se encuentre en un momento y lugar; desde el cual se construirá conocimiento: aula extendida (contexto situado)</td></tr>
<tr><td>Carácter hegemónico</td><td>Relativismo epistemológico</td><td>Validación de saberes (conocimientos construidos)</td></tr>
<tr><td>Supremacía de argumentaciones y significados frente a otros.</td><td rowspan="3">La validez del saber es relativa al individuo y al grupo cultural.</td><td rowspan="3">La matemática escolar tiene diversas maneras de verse, trabajarse, construirse y desarrollarse, concibiendo que la validez del saber es relativa al individuo y al grupo cultural en el cual éste ha emergido y respecto a la racionalidad contextualizada que éste posea.</td></tr>
<tr><td>Conocimiento acabado y continuo</td></tr>
<tr><td>La enseñanza de la matemática se reduce a la mecanización de procesos o memorización de los conceptos.</td></tr>
</table>

Falta de marcos de referencia para la resignificación	Resignificación progresiva	Pluralidad de prácticas de referencia para la resignificación
Se ha soslayado el hecho de que la matemática responde a otras prácticas de referencia, donde se encuentran las bases de significados naturales	La significación no es estática, es funcional, relativa y contextual.	La pluralidad de prácticas de referencia, su interacción con diversos contextos y la propia evolución de la vida del individuo o grupo, resignificarán los saberes hasta el momento construidos, enriqueciéndolos con nuevos significados.

3. Consideraciones metodológicas.

En esta sección, transparentaremos las decisiones metodológicas que hemos tomado a lo largo de este proyecto de investigación. Con esto nos referimos a “toda elección que se toma para la realización de un proyecto de investigación, las cuales otorgan los aspectos particulares del estudio” (Torres-Corrales et al., 2020). En un principio, no declaramos una metodología a seguir, sino que mantuvimos un plan flexible, que se fuera adaptando a la nueva información que íbamos obteniendo a partir de los análisis que realizamos en las diferentes etapas, sin perder de vista los objetivos del proyecto.

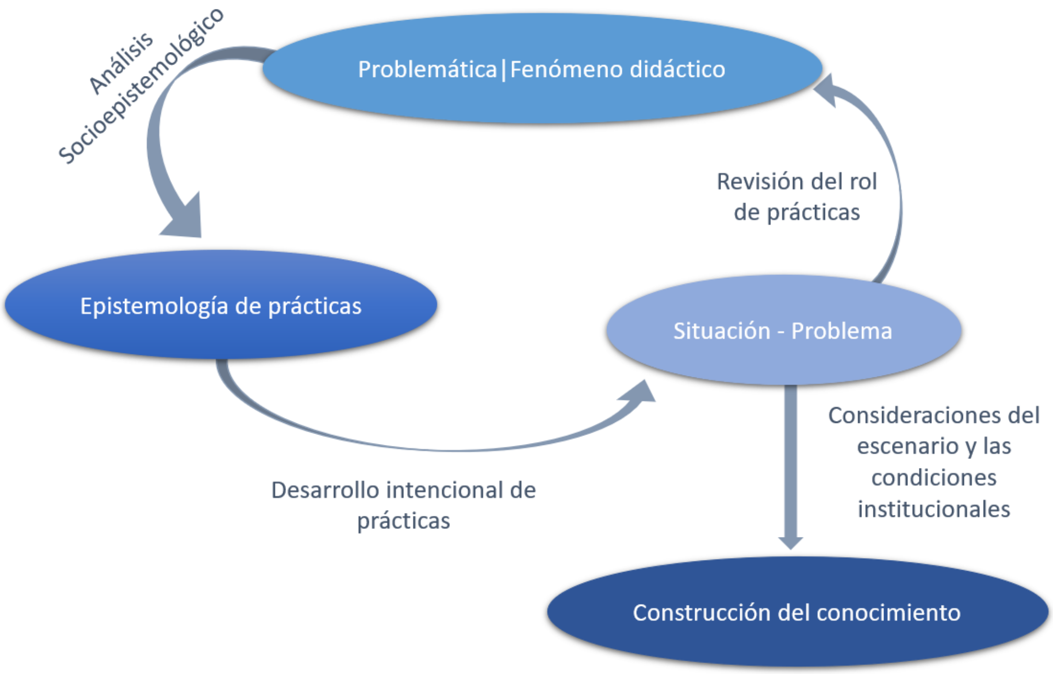
> La función del diseño es asegurar que la evidencia obtenida con los datos permita responder el problema de investigación: ¿Qué tipo de evidencia se necesita para responder a la pregunta de manera convincente? Por esa razón, el diseño debe permitir realizar ajustes durante el desarrollo del estudio. (Vaus, 2001, en Torres-Corrales et al. 2020, p. 104)

De manera global, consideramos el planteamiento metodológico para las investigaciones desde la *TSME,* propuesto en Montiel y Buendía (2012) (*figura 3.1*).

Los métodos que transparentaremos a continuación, nos permitieron desarrollar una *problematización del saber matemático* en el sentido de la *TSME* (Cantoral, 2016)*,* que constituye un *análisis socioepistemológico* en términos del esquema metodológico compartido en la *figura 3.1*, en donde se sugiere considerar ciertos aspectos para esta instancia (Montiel y Buendía, 2012), como se muestran en la *figura 3.2.*

A lo largo de nuestro proyecto de investigación, hemos considerado para nuestra *problematización del saber* según las *dimensiones del saber*, elementos de la *epistemología histórica y filosófica*, procesos de *resignificación del saber*, en escenarios escolares, profesionales y cotidianos, además de un análisis del *dME*, y de procesos de institucionalización de saberes divulgados en las prácticas humanas en contextos diferenciados. Por esto, creemos que la propuesta metodológica que se señala en la *figura 3.2,* esquematiza de manera correcta la metodológica empelada en este proyecto de investigación. A continuación, describiremos los métodos por los que hemos optado, señalando la intención de cada uno de ellos.

Figura 3.1. Esquema metodológico para *TSME*.



Recuperado de Montiel y Buendía (2012, p. 63).

Figura 3.2. Dimensiones para considerar en un análisis socioepistemológico.

Recuperado de Montiel y Buendía (2012, p. 68).

3.1. Conformación de la problemática.

Al momento de conformar la problemática, teníamos la intención de encontrar rastros en la literatura que nos permitieran significar alguna de las nociones centrales de la Topología. Para esto, realizamos una exploración libre en donde efectuamos indagaciones de literatura en buscadores académicos de conceptos claves que podrían ser de interés, de manera individual, o agrupados intencionalmente. Algunas de las palabras o conjuntos de palabras clave que rastreamos: “didáctica Topología”, “didáctica compacidad”, “didáctica conjuntos conexos”, etc. También cambiamos la palabra “didáctica”, por “epistemología” e “historia”.

Es preciso, aclarar, que también las búsquedas que señalamos anteriormente fueron realizadas en sus correspondientes traducciones al inglés, ya que gran parte de la literatura académica es publicada en este idioma. La cantidad de información que obtuvimos en un principio era amplia, pero pudimos reducirla rápidamente al someterla a filtros de nuestro interés. Buscábamos: *valor de uso en contexto, estudios histórico-epistemológicos, análisis didácticos, implicación en formación de profesores de matemática.*

Del análisis en transversal, de la literatura seleccionada en este primer momento, fue que pudimos identificar la intrincada relación entre la generalización de la idea de *distancia* producida por el concepto de *espacio métrico*, y el origen del campo de la Topología.

3.2. Análisis de la dimensión didáctica; rol del *espacio métrico* en la Topología.

En esta instancia, apoyados en el análisis anterior, buscamos identificar cómo es tratado el tema *espacio métrico* y qué relevancia se le otorga en textos de Topología.

Se identificaron libros didácticos de Topología, y otros destinados a la divulgación, libros de Cálculo Diferencial e Integral o Análisis Matemático (ya que habíamos observado que se reconoce a la Topología como una generalización del Análisis Matemático, y la noción de *métrica* también está presente en esta rama de la matemática), y algunos materiales más actuales utilizados en cursos de licenciatura del Instituto Politécnico Nacional (IPN – México) y de la Universidad Autónoma de México (UNAM). Se tuvo la intención de retomar fuentes de distintas épocas, recuperando textos desde el 1955 hasta el 2021, de manera que se pudiera analizar la evolución del tratamiento escolar de los temas de interés. Dicho análisis, buscó identificar los temas en los que se desarrollaban aspectos *métricos* (*medida-distancia-métrica*), y en cómo se relacionan con la construcción de ideas topológicas.

Para realizar este análisis, nos apoyamos en la propuesta de *análisis de contenido* de Rico et al. (2008). Uno de los objetivos de esta es “establecer diversos significados de los temas matemáticos escolares” (p. 9) y contribuir al “desarrollo de capacidades profesionales para la enseñanza vinculadas con la competencia de planificación” (p. 9). Nuestra intención en un principio, no está relacionada a la planificación, sino que buscamos *problematizar el saber* desde la *dimensión didáctica* en el sentido de la *TSME,* pero consideramos que esta propuesta metodológica también se adecuaba a nuestros objetivos, ya que nos ayudó a organizar un mapa conceptual que relaciona los objetos *espacio normado, espacio métrico y espacio topológico,* en donde ya habíamos interpretado significados interrelacionados de *medida, distancia* y *métrica* como predecesores de nociones topológicas.

Rico et al. (2008), plantean “considerar el significado de conceptos e ideas matemáticas desde una perspectiva más amplia que la de su exclusiva fundamentación formal y axiomática y de su justificación deductiva, superando pretendidas versiones canónicas del currículo que lo estancan y limitan” (p. 10). También plantean la identificación de *focos conceptuales prioritarios*, que consisten en “agrupaciones específicas de conceptos, estrategias y estructuras, que adquieren importancia especial ya que expresan, organizan y resumen agrupamientos coherentes de los contenidos” (p. 11). Este tipo de análisis no es único, sino que admite varias interpretaciones sobre el tratamiento de ciertas temáticas.

En nuestro caso, identificamos las nociones de *medida* y *distancia* como *focos conceptuales* que podrían significar el estudio de los objetos matemáticos involucrados. Se menciona también que deben de considerarse *sistemas de representación* y un *análisis fenomenológico*. Por *sistema de representación*, se entiende “cualquier modo de hacer presente un objeto, concepto o idea. Conceptos y procedimientos matemáticos se hacen presentes mediante distintos tipos de símbolos, gráficos o signos y cada uno de ellos constituye una representación” (p. 15). Para el *análisis fenomenológico* se considera que “el significado de los conceptos matemáticos se logra mostrando su conexión con el mundo real, con los fenómenos en cuyo tratamiento se implican tales conceptos”

(p. 17). Este último aspecto, se profundiza con la *problematización* de las nociones de *medida y distancia* según las dimensiones *social* y *epistemológica*, en el sentido de la *TSME*. Insistimos que en este escrito, los análisis producidos desde cada dimensión, se exponen de manera secuencial, pero en el desarrollo de la investigación se dieron en paralelo y en constante diálogo.

- Textos de Topología que se consideraron:

Por orden cronológico: **1)** *General Topology* (Kelley, 1955), **2)** *Topología general* (Hinrichsen y Fernández, 1977), **3)** *Introduction to topology* (Mendelson, 1990), **4)** *Topología* (Munkres, 2002) y **5)** *Métric spaces* (Shirali y Vasudeva, 2005).

El libro **1)**, y el **4)** se retomaron por ser recomendados en programas oficiales en cursos de licenciatura en matemática de la Universidad de la República (UDELAR – Uruguay), profesorado de matemática del Instituto de Profesores Artigas (IPA – Uruguay), en la Escuela Superior de Física y Matemática del Instituto Politécnico Nacional de México (ESFM – IPN) y Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma de México (UNAM). El **2)**, es el material en el que se basan los apuntes del curso de Topología del profesorado de matemática del IPA. El **3)** y el **5)**, son textos que se encontraron y resaltan más los aspectos *métricos* de la Topología, y fueron de especial interés para nuestro estudio.

- Textos de Cálculo que se consideraron:

Calculus (Apostol, 2001) y *Cálculo Infinitesimal* (Spivak, 2008). Por ser ampliamente utilizados en cursos de Cálculo diferencial y Análisis Matemático en cursos de licenciatura, ingenierías y profesorado.

- *Notas de cursos*, recuperados de la web que se consideraron:

Materiales de Espacios Métricos: de la Facultad de Ciencias de la UNAM para las asignaturas de Cálculo Diferencial III (Hurtado, 2021) y Topología (Antonyan, 2021)[2], y de la Escuela Superior de Física y Matemática del IPN- para la asignatura Análisis I (Maximenko, 2021)[3].

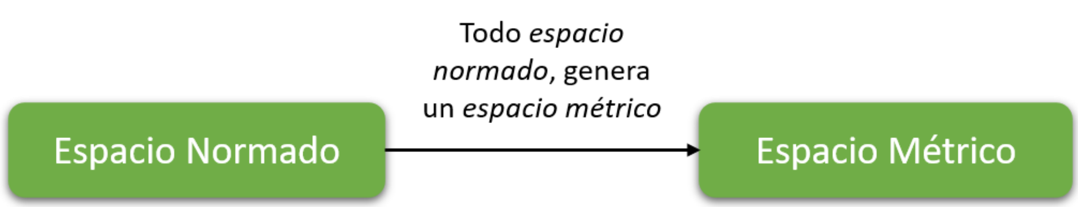
El análisis realizado en esta sección nos permitió configurar un esquema que explicita las relaciones entre los objetos *espacio normado, espacio métrico y espacio topológico,* conectados desde el

[2] Recuperados de: https://academicos.fciencias.unam.mx/wp-content/uploads/sites/94/2016/08/Notas-Topologia.pdf y http://sistemas.fciencias.unam.mx/~erhc/calculo3_2014_2/espaciosmetricos1.pdf
[3] Recuperados de: http://esfm.egormaximenko.com/

Análisis Matemático hacia la Topología. Habíamos transparentado que un objetivo de este estudio, implicaba encontrar significados de algunas de las nociones topológicas usualmente estudiadas en la matemática escolar. A partir del análisis descrito en esta sección (que se desarrollará con detalle en la *sección 4*), se toma una decisión metodológica que nos dirigió a la búsqueda de una descentración del *espacio normado* y su relación mediante un teorema, con el *espacio métrico.* Esto debido a que logramos identificar significados de *medida* en la estructura axiomática del *espacio normado,* significados de *distancia* en el *espacio métrico,* y una relación entre estas nociones de *medida* y *distancia* mediante un teorema.

Esto sin perder de vista un panorama global, que explicita la conexión identificada entre los objetos *espacio métrico, espacio topológico,* y la construcción de la noción de *continuidad* de *funciones* entre *espacios topológicos,* a partir de un teorema que involucra *continuidad de funciones* entre *espacios métricos*. Esta relación, se ubicó únicamente en el análisis de los objetos matemáticos formales (sin problematización social y epistemológica) a partir de tres teoremas para *espacios métricos,* la axiomática de *espacio topológico* y la definición de *función continua* entre los últimos. La problematización de las *dimensiones social* y *epistemológica*, la acotamos a los objetos *espacio normado, espacio métrico,* y su relación mediante un teorema (*figura 3.3*).

Figura 3.3. Relación entre norma y distancia.



A partir de los objetivos de la investigación, y de haber identificado los saberes matemáticos a problematizar, nos planteamos las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Qué rol tiene el concepto de *espacio métrico* en la Topología?

- ¿Por cuáles etapas de construcción social del conocimiento han transcurrido los saberes interrelacionados de *medida-métrica-distancia* para conformarse como pensamiento matemático avanzado? ¿Cómo se vinculan?

3.3. Historización y dialectización; dimensión epistemológica y social.

La *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa*, propone que el saber ha de ser problematizado, y un método para hacer esto, es el de *historización-dialectización* (Cantoral, 2016). Esto consiste en identificar procesos históricos de construcción social del conocimiento, ya sea a partir del estudio de obras matemáticas en donde se identifiquen epistemologías genéticas de los saberes, o como en este caso, a partir de la identificación de usos del saber en las prácticas históricas de la humanidad.

Optamos por la segunda opción, debido a que una rápida búsqueda de literatura nos permitió confirmar lo que intuimos, los significados de *medida y distancia,* que habíamos ubicado respectivamente en las estructuras de los objetos *espacio normado y espacio métrico,* podían ser identificados en las estructuras misma de las prácticas de *medir* de la humanidad. Buscamos prácticas que involucren *métricas* que no midieran las *magnitudes* usuales, y que se hubieran desarrollado antes de la divulgación de las medidas estandarizadas del Sistema Métrico Internacional (ya que identificamos una presencia dominante de estas y su propia epistemología en el *dME*) para así, poder identificar una idea generalizada de la *medida* y la *distancia*, y algunos de los procesos de construcción social por los que han transitado estos saberes.

De manera acorde con nuestros objetivos de lograr descentrar los objetos *espacio normado y métrico*, la literatura que seleccionamos resaltaba los aspectos sociales en los procesos de construcción de *métricas*. Realizamos un análisis de obras de corte social-antropológico, y epistemológico-filosófico, que nos aportaron visión en dos sentidos: un panorama global de los usos y significados de la *medida y* la *distancia,* y nos permitió analizar casos particulares en donde pudimos reconocer *racionalidad contextualizada* y una *relatividad epistemológica* en ciertas comunidades y épocas.

El estudio de la obra de dos autores fue fundamental para el desarrollo de esta sección (a pesar de que se complementaron con el análisis de otros escritos). Por un lado, el reconocimiento de la obra

"*Measures and Men",* de Witold Kula (1986), y por otro los artículos de Luca Mari en general, pero en específico Mari (2003, 2005).

El primer autor, fue un académico polaco estudioso de la historia de la economía, y en específico en la obra que señalamos, documenta de manera exhaustiva y precisa la evolución de las prácticas de *medida* en la historia de la humanidad. Su preocupación por el estudio de estos fenómenos se debía que la evolución de las ideas y de las prácticas que involucraban un*idades de medida* y construcciones de *métricas* más complejas con significados sociales, era fundamentales para la construcción de consensos necesarios para la consolidación de las economías de cada época. El autor fundamenta sus análisis sobre estudios de corte social y antropológico, y busca evitar interpretaciones llanas desde el pensamiento actual en torno a la medida, y logra reconstruir los procesos de construcción de *métricas* interpretándolas desde la racionalidad de cada época.

El segundo autor es un académico contemporáneo, estudioso de los aspectos epistemológicos y el rol de la *medida* para el desarrollo y la constitución de la ciencia. Para esto, realiza análisis históricos del desarrollo conceptual de la *medida* desde la epistemología filosófica (Mari, 2003, 2005), reconstruyendo las distintas concepciones por las que ha transitado la reflexión de la humanidad en torno a las prácticas de *medir* de la ciencia. Además, fueron de interés los artículos Mari et al. (2018, 2019), y Mari y Mencattini (2015), donde se analizan transversalmente las características epistemológicas de las prácticas de *medir,* que desarrolla la ciencia en distintos campos en la actualidad. En estos la intención es analizar estas prácticas para evaluar la posibilidad del establecimiento de una ciencia de la *medida*, que profundice la reflexión sobre la relación entre las prácticas de *medir* de la ciencia y la constitución de sus verdades y resultados.

3.4. Análisis sistémico de los apartados y configuración de resultados.

Desde la *TSME*, se declara que la problematización según las *dimensiones del saber* ha de ser sistémica, es decir, los elementos obtenidos en cada sección deben de ser puestos en discusión entre ellos, para así obtener conclusiones y resultados que expresen la complejidad de los fenómenos. Esto no significa que necesariamente se desarrolle cada momento por separado, en un orden cronológico, y que al momento final se articulen las reflexiones, sino que este análisis sistémico se realizó progresivamente a lo largo de la investigación.

Siempre permitimos que las reflexiones que se fueron obteniendo, por ejemplo, a partir de la problematización desde la *dimensión social*, pudiera influenciar y guiar la problematización según la *dimensión didáctica* o *epistemológica* (como ha sucedido en esta investigación). De manera general, la información nueva que es obtenida a partir de un análisis particular de algún elemento de la problematización del saber, se ha dialectizado con todo el análisis realizado hasta el momento, y se permitió que la nueva información pudiera afectar si fuera necesario el rumbo de la investigación, y la interpretación de los resultados.

4. Reconstrucción racional de los saberes *medida - métrica - distancia*. Análisis de los objetos matemáticos involucrados.

En este apartado, se analiza la manera en la que es abordado el tema *espacio métrico* y se realiza una interpretación de cómo se relaciona con el Análisis y la Topología, a partir del análisis de textos escolares y materiales producidos por profesores universitarios en ejercicio hasta la actualidad. La intención es hacer explicita la relación entre las nociones de *medida*, *distancia* y *espacios topológicos.*

Para esto, se realizó un análisis que articuló argumentos matemáticos que identificamos en los textos de Topología y Análisis Matemático señalados en el capítulo anterior, análisis de literatura académica específica del campo disciplinar de la Matemática Educativa, y escritos de corte social-antropológico y epistemológicos.

Esto nos permitió plantear la inferencia de la *reconstrucción racional* que implica una articulación coherente de las reflexiones que se dan a largo de este proyecto de investigación, que involucra una problematización según las *dimensiones del saber*. La relación entre las nociones de *medida* y la axiomática que fundamenta a la Topología, que comienza a plantearse en este capítulo podría ayudar a significar saberes escolares que son planteados desde una *centración en objetos*, desde axiomas a los cuales pocas veces se les encuentra sentido. Será fundamental involucrar *significaciones* de la *medida* y *distancia*, propios de contextos socioculturales en donde estos tengan un *valor de uso*. Por una necesidad metodológica es que separamos los análisis por secciones, pero insistimos en que estos se relacionan de manera coherente. El análisis planteado en este capítulo sobre los objetos matemáticos, lo hacemos de esta manera, porque pudimos ver que nos permitiría identificar escenarios en donde seguramente aparezcan resignificaciones de la *medida*, la *métrica*, la *distancia* y por lo tanto el *espacio métrico.*

Por un lado, Bastán et al. (2006, 2007) y Márquez (2018), son tres estudios de corte histórico con perfil epistemológico, que reconocen el comienzo de la consolidación de la disciplina Topología, en la tesis doctoral de Fréchet en 1906. En esta, aparece el primer planteamiento formal del objeto *espacio métrico*, siendo esta una estructura axiomática que tenía la intención de generalizar la idea de *distancia.* Por otro lado, también lo confirmamos en Raman-Sundstrom (2015), que realiza un estudio histórico de la constitución del concepto de *compacidad*, en donde fue trascendente reconocer el protagonismo de las ideas de *distancia* alternativas en otros *espacios* que no fueran exclusivamente $\mathbb{R}^n$. Finalmente, hubo una última etapa de contrastación de la información, pero con carácter de inferencia, trascendente para la confirmación de las ideas aquí planteadas y los objetivos de esta investigación: reconocer el *valor funcional* de la *métrica*, la relación que se establece entre *medida* y *distancia,* y las resignificaciones del *espacio métrico* a partir de identificar su *valor de uso* en contextos socioculturales. Esto consistió en identificar estas nociones en los estudios de corte social y antropológico, que nos brindaran información al respecto las características de la *medida* y significados específicos al ser funcional a cierta intencionalidad en contextos específicos.

Consideramos los objetos *espacio* normado y *espacio métrico* y la relación entre ellos, debido a que el primero admite significados de *medida* y el segundo de *distancia*. Aquí mostramos que el *espacio normado* admite una idea generalizada de la racionalidad de la *medida* identificada en la obra de Euclides, que se puede ver en Ríos (2020). Posteriormente, a partir de las obras de la matemática escolar señaladas, identificamos un teorema importante: cada *espacio normado*, induce un *espacio métrico*. Es decir, a partir de un *espacio normado*, se puede construir un *espacio métrico.* Identificamos en la prueba y en los ejemplos del anterior teorema, que la práctica de *comparación* está implícita en el pasaje de una idea de *medida* en el *espacio normado*, a una idea de *distancia* en el *espacio métrico* (*sección 4.2*). La *norma* permite obtener *medidas*, y a partir de procesos específicos de *comparación* (que son permitidos por las operaciones que existen en el *espacio normado*, ya que este es un *espacio vectorial* con operaciones de *suma* y *producto por un escalar* bien definidas) se generan *distancias* que heredan la racionalidad de cada *norma*.

En otra instancia, observamos que hay tres teoremas que se demuestran para cualquier *espacio métrico*, que posteriormente son heredados a los axiomas de *espacios topológicos* y la definición de *funciones continuas* entre *espacios topológicos*. Estos son que *la unión infinita o finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto*, que la *intersección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto*, y que, *si una función es continua la preimagen de un abierto a través de esta, es un abierto*. La definición de *espacio topológico* presentada reiteradamente en textos escolares garantiza entonces que cada *espacio métrico* es un *espacio topológico*, a pesar de que no todos los *espacios topológicos* son *métricos*.

De esta manera es que reconocemos un proceso de generalizaciones que nos permiten conectar ideas de *medida*, con los primeros planteamientos axiomáticos de la Topología. Es pertinente insistir, que posteriormente se articularán las reflexiones de este capítulo con actividades matemáticas en contextos que involucren la *medida* y *distancia*.

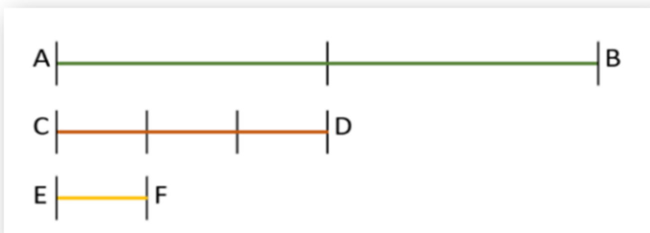
Recordemos que nuestros objetivos originales eran identificar escenarios en donde se puedan evidenciar resignificaciones de las ideas topológicas. Por este motivo restringimos nuestro objeto de estudio a la relación entre ideas de *medida* y *distancia* (interpretadas en este capítulo, en el *espacio normado* y *métrico*), porque asumimos la conjetura de que estos objetos son identificables en contextos y un buen camino racional para la construcción de la axiomática de la Topología. Este análisis, que relaciona ideas de *medida-distancia-métrica* como predecesoras de la Topología, nos permite conjeturar que en contextos en donde haya ideas de *medida*, habrá ideas de *distancia,* que permitan ubicar resignificaciones del *espacio métrico* en donde se pueda apreciar su *valor de uso*.

A lo largo de este capítulo, iremos mostrando como se puede identificar relaciones entre *espacio normado* y *espacio métrico.* Cómo el *espacio métrico* permite generalizar el Cálculo diferencial e integral en $\mathbb{R}^n$, hacia un Análisis Matemático Avanzado, y cómo la generalización producida por los *espacios métricos* puede conducir a la constitución de la Topología y su concepto de *función continua.*

4.1. *Espacios normados y medida.*

La racionalidad euclídea de la *medida* se caracteriza por generar una *magnitud* de referencia como *unidad de medida*, y comparar con esta las *magnitudes* a medir, para obtener una razón que exprese la *medida* (*figura 4.1*). Esta concepción se reconoce ya desde la Geometría Euclidiana y ha constituido un paradigma general en torno a la idea misma de *medida.* Esta racionalidad es reconocida en la literatura, puede apreciarse por ejemplo en Espinoza et al. (2018), Mari (2003) y Rios (2020).

Figura 4.1. Racionalidad de la medida euclidiana.



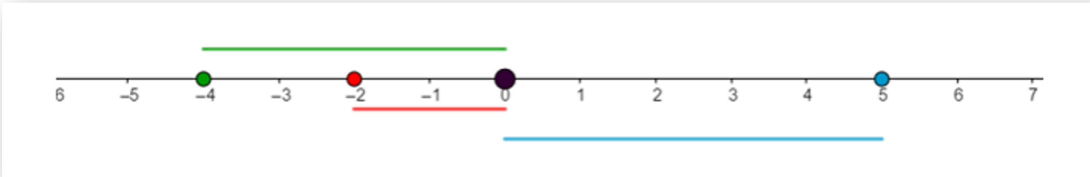
Nota: Si EF, es una unidad de medida, AB según EF, mide *6*. Recuperado de Ríos (2020, p. 59).

En el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, observamos que en muchos cursos de Cálculo o Análisis real, se define la función *Valor Absoluto,* de la siguiente manera:

$$|\ |:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:\begin{cases}|x|=x,\ si\ \ x\geq 0\\ |x|=-x,\ si\ \ x<0\end{cases}$$

En esta, el valor funcional de un elemento $x\in\mathbb{R}$, admite un significado de *medida* del valor x, según esta racionalidad paradigmática de la *medida* que es identificada en la obra de Euclides. Según esta función, la *medida* de cada *número real* se podría interpretar como la *medida* en términos de longitud del segmento ubicado en la recta real, entre cada número y el cero (*figura 4.2*)

Figura 4.2. Medida de un valor real.



Según esta interpretación, si consideramos al valor 1 como *unidad de* medida de referencia, a modo de ejemplo, la *medida* de -4 es 4 ($|-4| = 4$), la de -2 es 2 ($|-2| = 2$), y la de 5 es 5 ($|5| = 5$). Además, si se consideran otras unidades de referencia, podríamos interpretar que un valor siempre se puede *medir* en función de otro, a manera de ejemplo, generando comportamientos del siguiente tipo:

- El valor -4 al compararlo con el 2, *mide* 2: $|-4| = 2.2$

- El valor 5 al compararlo con el -2, mide $5/2$: $|5| = \left|-2\left(5/2\right)\right| = 2.\left(5/2\right)$

- De manera general: dado $x \in \mathbb{R}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ se cumple que $|\lambda x| = |\lambda||x|$. Que se puede interpretar que si se tiene un valor $y = |\lambda x|$, entonces y mide $|\lambda|$ según una *unidad de medida* x.

Esta forma de concebir la *medida* también genera dos propiedades más:

- la *medida* será siempre un valor positivo: ($|x| \geq 0 \ \forall\, x \in \mathbb{R}$)
- y que la *medida* de $x + y$ es siempre menor o igual que la *medida* de x más la *medida* de y : $|x+y| \leq |x| + |y| \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$

En Apostol (2001), la demostración de esta última propiedad se da de la forma que se muestra en la *figura 4.3.*

Figura 4.3. Demostración de la desigualdad triangular, para la norma usual en $\mathbb{R}$.

Demostración. Puesto que $x = |x|$ o $x = -|x|$, se tiene $-|x| \leq x \leq |x|$. Análogamente $-|y| \leq y \leq |y|$. Sumando ambas desigualdades se tiene:

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|,$$

y por tanto, en virtud del teorema I.38 se concluye que: $|x + y| \leq |x| + |y|$.

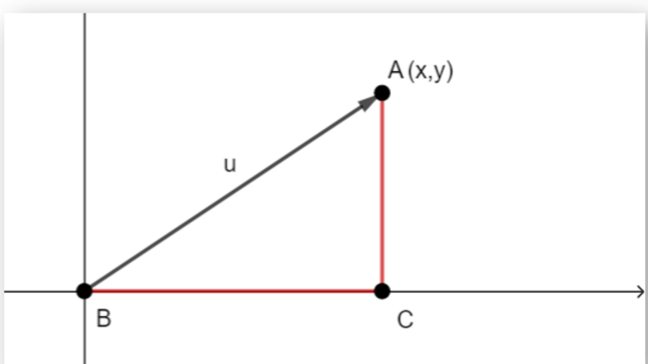
TEOREMA I.38. *Si* $a \geq 0$, *es* $|x| \leq a$ *si y sólo si* $-a \leq x \leq a$.

Recuperado de Apóstol (2001, p. 52).

Spivak (2008) es un libro de Cálculo divulgado para el uso por parte de estudiantes en cursos universitarios, se menciona que esta noción de *valor absoluto* será de especial importancia para todo el tratamiento del curso, señalando que es “un concepto sumamente importante en este libro” (p. 13). Esta generará la noción de *distancia* que será fundamental a lo largo del desarrollo conceptual, las definiciones y los teoremas característicos de la asignatura.

Estas propiedades también se mantienen al considerar esta racionalidad de la *medida* en $\mathbb{R}^2$, como la *norma* de un vector. Si consideramos un elemento $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, se puede interpretar que su *medida* se corresponde con la longitud del vector u (*figura 4.4*).

Figura 4.4. Medida de un elemento de $\mathbb{R}^2$.



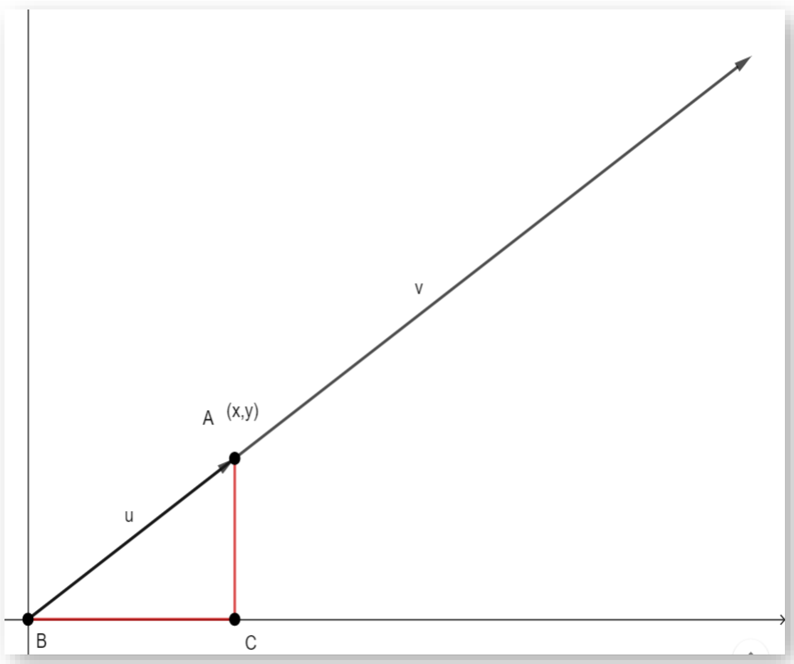
Nota: $\|(x, y)\|$ coincide con la longitud del vector *u*.

Esta *norma,* es considerada como la usual en libros de Análisis Matemático, y se define generalmente a partir de una aplicación del teorema de Pitágoras:

$$\left.\begin{array}{l} u^2 = x^2 + y^2 \\ longitud\ \ de\ \ u = \|(x,y)\| \end{array}\right\} \|(x,y)\|^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow \boxed{\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}}$$

También aquí se cumple que toda *medida* es positiva o nula y la propiedad que expresa la racionalidad euclídea de la *medida* antes descrita, $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$. La multiplicación por un valor real se concibe como un estiramiento del vector, de la siguiente manera: $\lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y) \quad \lambda \in \mathbb{R}$ (*figura 4.5)*.

Figura 4.5. Multiplicación de un elemento de $\mathbb{R}^2$ por un valor real, interpretado como un estiramiento.



Nota: En este caso, el vector ***v***, es equivalente al vector ***u*** multiplicado por 3.5 (un valor adjudicado a λ , a modo de ejemplo). Según la racionalidad de la *medida euclídea*, entonces, si ***u*** es considerado una *unidad de medida*, el vector ***v***, mide 3.5 según esta unidad.

Esta *medida* de los elementos en $\mathbb{R}^2$, también cumple con la propiedad caracaterística $\|(x_1,y_1)+(x_2,y_2)\| \le \|(x_1,y_1)\|+\|(x_2,y_2)\|$. En este espacio, se puede visualizar el motivo por el cual es usualmente nombrada como *desigualdad triángular* (*figura 4.6).*

Figura 4.6. Desigualdad triangular

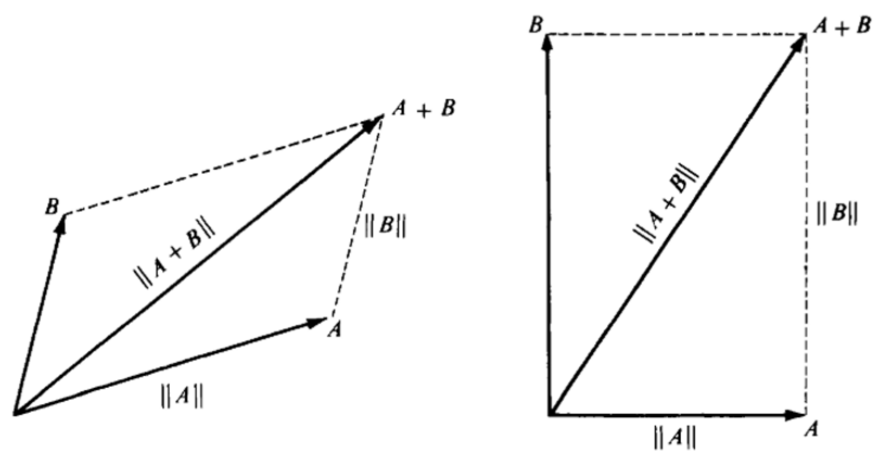


FIGURA 12.9 *Significado geométrico de la desigualdad triangular:* $\|A+B\| \le \|A\|+\|B\|$.

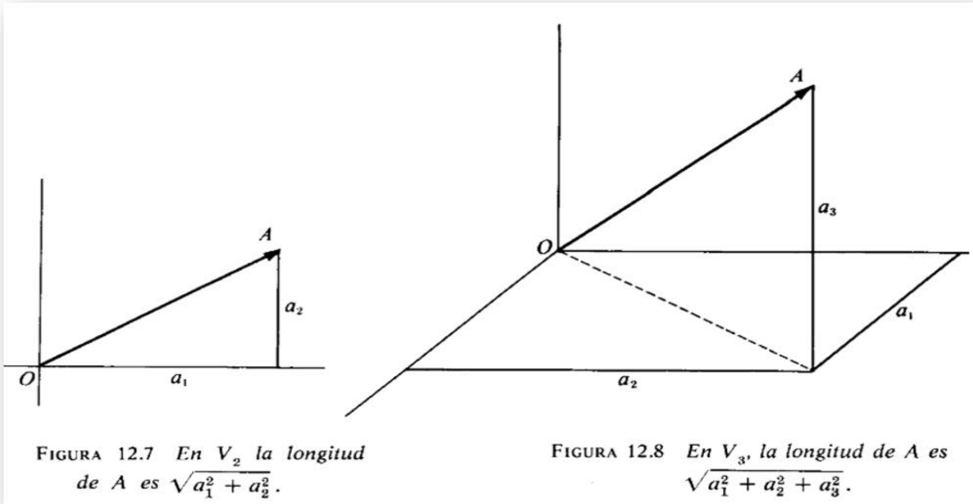
FIGURA 12.10 *Dos vectores perpendiculares satifacen la identidad pitagórica:* $\|A+B\|^2 = \|A\|^2+\|B\|^2$.

Recuperado de Apóstol (2001, p. 550).

Estás concepción de la medida, es extendida usualmente al espacio $\mathbb{R}^n$, para cualquier valor n natural (*figura 4.7*). Un elemento de este espacio se considera una n-upla de valores reales. Entonces si $\vec{u}\in\mathbb{R}^n$, $\vec{u}=(x_1,x_2,x_3 \ldots x_{n-1},x_n)$, donde $x_i\in\mathbb{R}$, $\forall\, i=1,\ldots,n$. Entonces la *medida* de sus elementos se concibe como:

$$\|\vec{u}\| = \left(\sum_{i=1}^{I=n} x_i^2\right)^{1/2}$$

Figura 4.7. Norma en $\mathbb{R}^n$.



Nota: la visualización se permite hasta la dimensión 3, aunque de manera abstracta se pueda considerar para cualquier dimensión. Recuperado de Apóstol (2001, p. 555).

Entonces estas propiedades de los *espacios normados*, que admiten una interpretación como la *medida* de los elementos de un espacio, se suelen presentar de manera generalizada como se muestra en la *figura 4.8.*

Figura 4.8. Propiedades de un *espacio normado*.

Definición 1.3 Sea V un espacio vectorial sobre $K(\mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C})$ una ***norma*** $\| \ \|$ sobre el espacio vectorial es una función $\| \ \|: V \to \mathbb{R}$ que cumple con las siguientes propiedades:

1) $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in V \quad \text{y} \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x \equiv 0$
2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall \lambda \in K, \text{ y } \forall x \in V$
3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in V$

Recuperado de Hinrichsen y Fernández (1977, p. 31).

Esta generalización, señala que en un mismo espacio se puedan admitir diferentes *normas,* es decir, se podría considerar diferentes maneras de concebir una *medida* de un elemento del espacio no restringiéndose a la *medida euclídea* usual. Además, amplía el universo de *espacios* en donde se pueden pensar *medidas* de los objetos. Esto se podría interpretar como una generalización de la racionalidad geométrica euclídea de la *medida*, hacía otras concepciones, pero manteniendo ciertas propiedades.

Ejemplo 1: una *norma* alternativa a la usual euclídea en $\mathbb{R}^n$ que aparece como ejercicio en Apostol (2001), y como ejemplo en libros de Topología (Hinrichsen y Fernández, 1977; Mendelson, 1990), es la que concibe la *medida* de un elemento $\vec{u} = (x_1, x_2, x_3 \dots x_{n-1}, x_n)$, de la siguiente manera:

$$\|\vec{u}\| = \sum_{i=1}^{i=n} |x_i|$$

En $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, admite una interpretación geométrica, como la longitud del recorrido más corto realizado desde el origen ($(0,0)$ o $(0,0,0)$), hasta el punto $\vec{u}$, pero si solamente se pudiera recorrer dicho camino por trayectos horizontales o verticales. La *medida* de un elemento, en este caso, es la suma de los *valores absolutos* de sus coordenadas. En la *figura 4.4*, la *medida* del segmento u , según esta *norma*, es la suma de las longitudes de los dos segmentos en rojo.

Ejemplo 2: Otro ejemplo, que aparece en las mismas referencias que el anterior, concibe la *medida* del elemento $\vec{u}$, de la siguiente manera:

$$\|\vec{u}\| = \max\left\{|x_i| : i = 1, \dots, n\right\}$$

Esta *norma*, también admite una interpretación geométrica. La *medida* de cada elemento de $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$, se identifica con la coordenada mayor del elemento. En la *figura 4.4*, la medida del elemento (x, y), sería claramente $|x|$. La interpretación sería, que la *medida* del elemento coincide con la mayor de las proyecciones de este hacia los ejes coordenados.

Ejemplo 3: Mencionamos que el concepto de *espacio normado* permite ampliar la idea de lo que es una *medida*, y también los espacios en los cuales construirlas. En el planteamiento de la problemática, compartimos el caso de una *norma*, definida en el *espacio de funciones continuas* sobre un intervalo real $[a, b]$, que manteniendo las propiedades de un *espacio normado,* permite producir *medidas* sobre elementos que en este caso, siendo funciones, son de otra naturaleza (*figura 4.9*)

Figura 4.9. *Norma del supremo* en el *espacio de funciones continuas*.

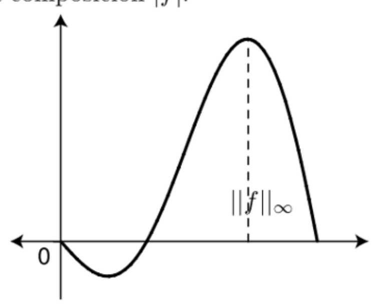
Denotaremos por $C_{[a,b]}$ el espacio de las <u>funciones continuas</u>

$$C_{[a,b]} = \{ \ f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} : \ f \text{ es una función continua } \}$$

La función

$$||f||_\infty = \sup\{ \ | \ f(x) \ | : x \in [a,b] \ \}$$

es una norma del espacio $C_{[a,b]}$, llamada la *norma del supremo*.
Geometría de la norma $||f||_\infty$: El número $||f||_\infty$ mide (o determina) la mayor abertura que tiene el gráfico de la función f respecto al eje de las abscisas, usando para ello la composición $|f|$:



Recuperado de Arellán y González (2003, p. 72).

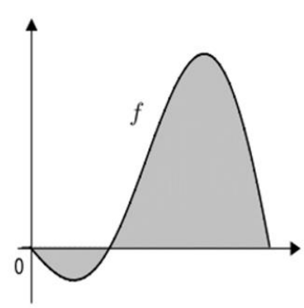
Ejemplo 4: Sobre este mismo *espacio de funciones continuas*, se puede concebir la *norma*, que adjudique *medidas* a los elementos a partir de la consideración de la *integral* de cada *función continua* en el intervalo dado (*figura 4.10)*.

Figura 4.10. *Norma* en el *espacio de funciones continuas*, producida por la *integral*.

Otra norma muy usada en el espacio de las *funciones continuas* $C_{[a,b]}$ es la función:

$$||f||_1 = \int_a^b |f(x)| \ dx$$

el número $||f||_1$ representa el área de la región acotada por el gráfico de la función f, las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje de las abscisas.



Recuperado de Arellán y González (2003 p. 75).

4.2. Relaciones entre *espacio normado* y *espacio métrico*, entre *medida* y *distancia.*

Un *espacio métrico*, es aquel, en donde se puede concebir una *distancia* entre pares de elementos de este. Es decir, se puede expresar qué tan cercanos son dos elementos según la racionalidad de una *métrica,* siendo esta una *función* que a cada par de elementos le adjudica un *número real* que significará la *distancia* que hay entre ellos. Este objeto matemático, es presentado generalmente en libros de Topología y de Análisis Matemático de manera axiomática. A continuación, mostramos algunos ejemplos ordenados cronológicamente, en donde se ven los axiomas y algunos comentarios que se hacen al respecto en cada caso.

Figura 4.11. Definición axiomática de *espacio métrico* en Kelley (1955, p. 118).

There are many topological spaces in which the topology is derived from a notion of distance. A **metric** for a set X is a function d on the cartesian product $X \times X$ to the non-negative reals such that for all points x, y, and z of X,

(a) $d(x,v) = d(y,x)$,
(b) (*triangle inequality*) $d(x,y) + d(y,z) \geqq d(x,z)$,
(c) $d(x,y) = 0$ if $x = y$, and
(d) if $d(x,y) = 0$, then $x = y$.

Figura 4.12. Definición axiomática de *espacio métrico* en Hinrichsen y Fernández (1977, p. 29).

Definición 1.1 Sea E un conjunto no vacío una ***distancia o métrica*** es una función $d : E \times E \to \mathbb{R}$ tal que verifica:
1) $d(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in E$
2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in E$
4) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad \forall x,y,z \in E$ ***desigualdad triangular***
Al par (E,d) le llamamos ***espacio métrico***

Figura 4.13. Definición axiomática de *espacio métrico* en Mendelson (1990, p. 30).

DEFINITION 2.1 A pair of objects (X, d) consisting of a non-empty set X and a function $d: X \times X \to R$, where R is the set of real numbers, is called a *metric space* provided that:

1. $d(x, y) \geqq 0, \quad x, y \in X$;
2. $d(x, y) = 0$ if and only if $x = y, \quad x, y \in X$;
3. $d(x, y) = d(y, x), \quad x, y \in X$;
4. $d(x, z) \leqq d(x, y) + d(y, z), \quad x, y, z \in X$.

The function d is called a *distance function* or *metric* on X and the set X is called the *underlying set.*

We may think of the distance function d as providing a quantitative measure of the degree of closeness of two points. In particular, the inequality $d(x, z) \leqq d(x, y) + d(y, z)$ may be thought of as asserting the transitivity of closeness; that is, if x is close to y and y is close to z, then x is close to z.

Figura 4.14. Definición axiomática de *espacio métrico* en Shirali y Vasudeva (2005, pp. 27-28).

Definition 1.2.1. A nonempty set X with a map $d: X \times X \to \mathbf{R}$ is called a **metric space** if the map d has the following properties:

(MS1) $d(x, y) \geq 0 \qquad x, \ y \in X$;
(MS2) $d(x, y) = 0 \qquad$ if and only if $x = y$;
(MS3) $d(x, y) = d(y, x) \qquad x, y \in X$;
(MS4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \qquad x, y, z \in X$.

The map d is called the **metric** on X or sometimes the **distance function** on X. The phrase "(X, d) is a metric space" means that d is a metric on the set X. Property (MS4) is often called the **triangle inequality**.

Figura 4.15. Definición axiomática de *espacio métrico* en materiales para Cálculo Diferencial e Integral III, Facultad de ciencias de la UNAM en Hurtado (2021, p. 1).

Definición 1. *Sea X un conjunto. Una métrica (o distancia) en X es una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ que tiene las siguientes propiedades*

$$a)\ \ d(x,y) = 0 \ \ si \ \ y \ \ solo \ \ si \ \ x = y$$
$$b)\ \ d(x,y) = d(y,x) \ \ \forall \ \ x, y \in X$$
$$c)\ \ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \ \ \forall \ x, y, z \in X$$

A esta última desigualdad se le llama desigualdad del triángulo.

Definición 2. *Un espacio métrico es un conjunto X provisto de una metrica d. Lo denotaremos por (X, d)*

Veamos que la distancia entre dos puntos nunca es negativa

Proposición 1. $d(x,y) \geq 0$ *para todo* $x, y \in X$

Demostración. tenemos que de las propiedades de métrica

$$0 = d(x,x) \leq d(x,y) + d(y,x) = 2d(x,y)$$

En consecuencia, $d(x,y) \geq 0$ para todos $x, y \in X$ $\square$

Figura 4.16. Definición axiomática de *espacio métrico* en materiales para Análisis Matemático I, Escuela Superior de Física y Matemáticas – IPN en Maximenko (2021, p. 1).

1. Definición (distancia o métrica). Sea X un conjunto. Una función $d\colon X^2 \to \mathbb{R}_+$ se llama *distancia* o *métrica* sobre X si se cumplen las siguientes condiciones (*axiomas de métrica*):

D1. *Desigualdad del triángulo*:

$$\forall a, b, c \in X \qquad d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b).$$

D2. *Propiedad simétrica*:

$$\forall a, b \in X \qquad d(a,b) = d(b,a).$$

D3. Para todo $a \in X$, $\quad d(a,a) = 0$.

D4. Para todo $a, b \in X$, $\quad$ si $d(a,b) = 0$, entonces $a = b$.

2. Definición (espacio métrico). Un par ordenado (X, d) se llama *espacio métrico* si X es un conjunto y $d\colon X^2 \to \mathbb{R}_+$ es una métrica sobre X.

El libro “General Topology”, de John L. Kelley (1955), es el más antiguo que hemos encontrado que desarrolla temas de Topología manteniendo una intencionalidad didáctica de divulgación del conocimiento. Si consideramos que la consolidación de esta rama de la matemática se termina de constituir a partir de las obras de Fréchet y Hausdorff producidas en el primer cuarto del siglo pasado (Bastán et al., 2006, 2007; Márquez García, 2018; Raman-Sundstrom, 2015), tiene sentido que este libro que mencionamos ha de ser uno de los primeros escritos con fines de divulgación sobre los temas que trata la Topología general.

Globalmente todas estas referencias definen el objeto *espacio métrico* de manera similar. Incluso esta primera obra Kelley (1955), caracteriza a los espacios de manera equivalente a como se muestra en los últimos materiales construidos para ser dirigidos a estudiantes actuales de licenciatura.

La definición en Kelley (1955), ya hace especial referencia a que lo *espacios métricos* que está definiendo caracterizan un grupo de *espacios topológicos*. En este caso, ya se ha definido esta noción, y después se realiza un apartado para hacer señalamientos sobre las particularidades de los *espacios topológicos* que son *métricos* (metrizables). De igual manera se realiza en Munkres (2002), libro que aparece recomendado en programas educativos de la UNAM - México, del IPN - México, Udelar - Uruguay o del IPA - Uruguay.

De manera transversal, en todas las definiciones se consideran los siguientes elementos:

- Un ***espacio*****,** como conjunto de elementos sobre los cuales se determinarán *distancias*.
- La ***métrica****,* como una *función* del *producto cartesiano* del *espacio* por si mismo hacia $\mathbb{R}$ ($X \times X \to \mathbb{R}$), siendo que esta es la que adjudica la *distancia* entre dos elementos del *espacio*.
- **Propiedad de positividad**: las *distancias* son siempre *valores reales* positivos. En Kelley (1955) y en el repartido para Análisis Matemático I de la ESFM - IPN (Maximenko, 2021), esto se considera indicando que la *métrica,* es una *función* $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$. Mientras que en las otras referencias se indica explícitamente el axioma: $d(x, y) \geq 0$. La excepción es la del material de la UNAM para Cálculo Diferencial III (Hurtado, 2021), que prueba esta propiedad a partir de las otras.
- **Propiedad reciproca o simétrica**: La *distancia* entre un punto x respecto de un punto y, es la misma que la *distancia* de y respecto de x. $d(x, y) = d(y, x)$.

- **Propiedad de "nulidad":** La única forma de que una *distancia* sea cero, es que esta sea de un punto consigo mismo. $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$.
- **Propiedad de desigualdad triangular**: El mismo nombre de esta propiedad, enfatiza la situación se compartió en la *figura 4.6,* en donde se interpreta que las longitudes de dos lados de un triángulo sumadas siempre serán mayor que la tercera.

  La interpretación que se realiza de este axioma por Mendelson (1990), es alternativa y más general, en donde se señala que garantiza una *transitividad* de la cercanía. Es decir, si x es cercano a y, e y es cercano a z según una *métrica*, necesariamente x ha de ser cercano a z ($d(x,y)+d(y,z)\geq d(x,z)$). Esta interpretación parece bastante pertinente, teniendo en cuenta que el objeto *espacio métrico*, busca generalizar la idea de *distancia*, sin embargo, esta propiedad con un nombre que sugiere la interpretación sobre la imagen de un triángulo que no necesariamente se pueda significar de igual manera en otros *espacios* que no sean el *euclídeo* usual, aunque esta imagen sirve de representación a manera de esquema, de la situación que está sucediendo en cada *espacio métrico.*
- El *espacio*, con su respectiva *métrica asociada,* es nombrado ***espacio métrico***. Un mismo *espacio,* puede tener muchas *métricas* diferentes definidas sobre él, por lo tanto, podría dar lugar a muchos *espacios métricos*.

Nos es de interés particular, reconocer la relación que existe entre un *espacio normado*, que puede adjudicar *medidas* a sus elementos, y un espacio *métrico* que adjudica *distancias* entre ellos. Para esto, retomamos el *teorema* que afirma que, si un espacio tiene una *norma*, entonces esta puede engendrar una *distancia*. Este a veces es presentado como una observación (Hinrichsen y Fernández, 1977), como una proposición (Hurtado, 2021) o como un ejercicio (Maximenko, 2021). La cuestión es que admite una demostración, y expresa una relación entre significados de *medida* y *distancia*.

Este teorema tiene una demostración simple, y tal vez sea ese el motivo por el cual en algunos casos aparece como ejercicio a cargo del lector. En Hinrichsen y Fernández (1977) y Hurtado (2021) aparece de manera similar, pudiéndose reescribir de la siguiente manera:

Hipótesis: Sea X un espacio que admite una norma $\|\ \|: X \to \mathbb{R}$, cumpliendo las propiedades que hemos mencionado anteriormente (*figura 4.8*).

Tesis: $d: X \times X \to \mathbb{R} : d(x,y) = \|x-y\|$, es una *métrica* bien definida sobre el espacio X .

Demostración: Para probar que (X,d), es un *espacio métrico,* se requiere mostrar que d cumple todas las propiedades.

i) **Positivad:**

$$\left.\begin{array}{l} \|x-y\| \geq 0 \quad \forall\, x,y \in X \quad \textit{por definición de norma} \\ d(x,y) = \|x-y\| \end{array}\right\} \Rightarrow d(x,y) \geq o \quad \forall\, x,y \in X$$

ii) **Nulidad:** $d(x,y) = 0 \iff \|x-y\| = 0 \iff x = y$

iii) **Reciprocidad:**

$$d(x,y) = \|x-y\| = \|-(y-x)\| = |-1|\,\|y-x\| = \|y-x\| = d(y,x)$$

iv) **Desigualdad triangular (o transitividad de la cercanía):**

$$d(x,y) = \|x-y\| = \|x-z+z-y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\| = d(x,z) + d(z,y)$$

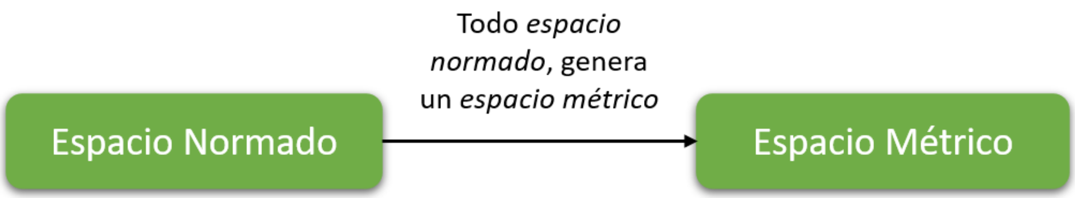
La mayoría de la demostración se limita a aplicar las propiedades de la *norma* que antes habíamos discutido. Por ejemplo;

- en *i)*, la no negatividad de la *norma* genera la no negatividad de la *distancia*.
- En *ii),* la propiedad de que la *norma* es solamente cero cuando el elemento es el *nulo*, hace que la resta $x-y$ se tenga que cancelar, implicando que la *distancia* entre dos elementos es 0, únicamente si estos elementos en realidad son el mismo.
- La misma propiedad de la *desigualdad triangular* en el *espacio normado*, es la justifica la prueba de la *desigualdad triangular* en el *espacio métrico*.

Lo que está en el centro de la demostración, más allá de la aplicación directa de las propiedades de la *norma*, es la resta: $\|x-y\|$, que tomará significados diferenciados en cada contexto, incluso si estos son intramatemáticos, como veremos próximamente en este capítulo.

Según este teorema, cada una de las *normas*, que adjudicaban *medidas* a los elementos de un *espacio*, induce un *espacio métrico* que permite generar *distancias* entre estos elementos. Vale la pena aclarar, que el teorema anterior no afirma que todo *espacio métrico* provenga de una *norma.* A partir de estas reflexiones, queda constituida la primera conexión del esquema que buscamos organizar, que reconstruye y explicita la conexión entre *medida-distancia* y *Topología* (*figura 4.17*).

Figura 4.17. Relación entre *norma* y *distancia*.



A continuación, nos interesará retomar los ejemplos de *espacios normados*, y observar qué idea de *distancia* generan. Para esto, observamos del Análisis Matemático la noción de *entorno*, que en *espacios métricos* se generaliza a la de *bola abierta* relativa a una *métrica*. Esto con el objetivo de ver cómo distintas *métricas* generan ideas alternativas de *entornos* y de cercanía.

4.2. El rol de la medida en las definiciones del Cálculo y el Análisis Matemático

A partir del teorema descrito en la sección inmediata anterior, todo *espacio normado* induce un *espacio métrico.* En el caso usual *en* $\mathbb{R}^n$:

La *norma euclídea* usual; $\|\vec{u}\| = \left(\sum_{i=1}^{I=n} x_i^2 \right)^{1/2}$

Genera la *distancia euclídea* usual: $d(\vec{x}, \vec{y}) = \left(\sum_{i=1}^{I=n} \left(x_i - y_i \right)^2 \right)^{1/2}$

$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ e $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n)$ son dos elementos de $\mathbb{R}^n$

Un entorno abierto en $\mathbb{R}$, usualmente es concebido de la siguiente manera:

Se dice que $E_{a,\varepsilon}$ es un entorno abierto de centro $a \in \mathbb{R}$ y radio $\varepsilon > 0$, si

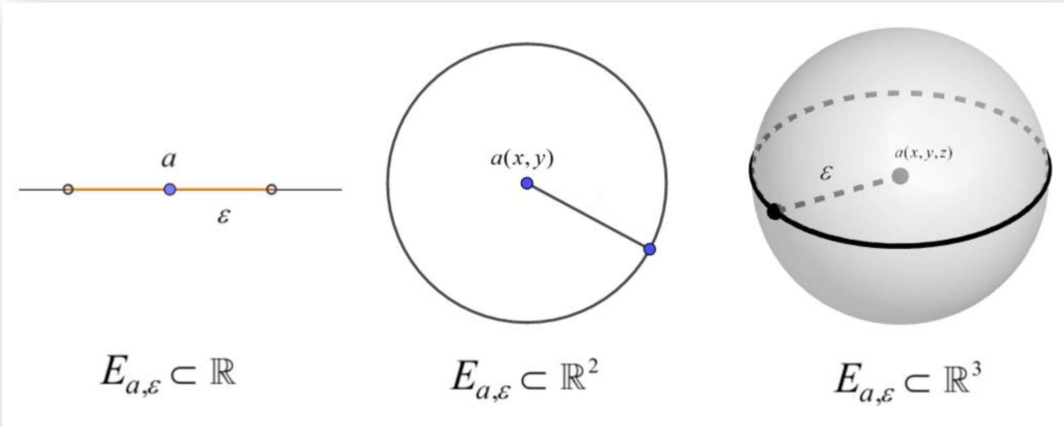
$$\forall\, x \in E_{a,\varepsilon} \Rightarrow |x - a| < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$$

Un *entorno* es el conjunto de todos los elementos que están, a menos de una *distancia* "ε", de un punto dado. Entonces, el concepto de *entorno* está relacionada intrincadamente con el de *distancia*.

De manera un poco más genérica, si se considera la *distancia euclídea* usual en $\mathbb{R}^n$:

Se dice que $E_{\vec{a},\varepsilon}$ es un *entorno abierto* de centro $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ y radio $\varepsilon > 0$, si $\forall\, \vec{x} \in E_{\vec{a},\varepsilon} \Rightarrow d(\vec{x}, \vec{a}) < \varepsilon$ (*figura 4.18*).

Figura 4.18. Entornos en $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$.



Nota: Si el entorno es abierto las fronteras no estarían incluidas en el entorno.

Estas nociones de *entorno,* que sirven para caracterizar los elementos del *espacio* que están a una cierta *distancia* de otro dado, están presentes de manera protagónica en el Cálculo y el Análisis Matemático en una o varias variables reales. Simplemente a modo de ejemplo, observemos el rol que juega la *distancia* usual en la definición de *límite* en Apostol (2001) (*figura 4.19*). De manera análoga, se encuentran presentes en las unidades temáticas de *continuidad* o *integrabilidad*. Se señala aquí la persitencia de esta *métrica*, ya que al ser conceptos fundamentales de la asignatura, influyen sobre una gran cantidad de teoremas y ejercicios propuestos a lo largo de los textos de estos cursos, construyendo así la racionalidad en la asignatura.

Figura 4.19. Métrica euclídea en concepción de la noción de límite en Apóstol (2001, pp. 157-158).

DEFINICIÓN DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN. *El simbolismo*

Métrica euclídea usual. (*MEU*)

$$\lim_{x \to p} f(x) = A \qquad [o \quad f(x) \to A \quad \text{cuando} \quad x \to p]$$

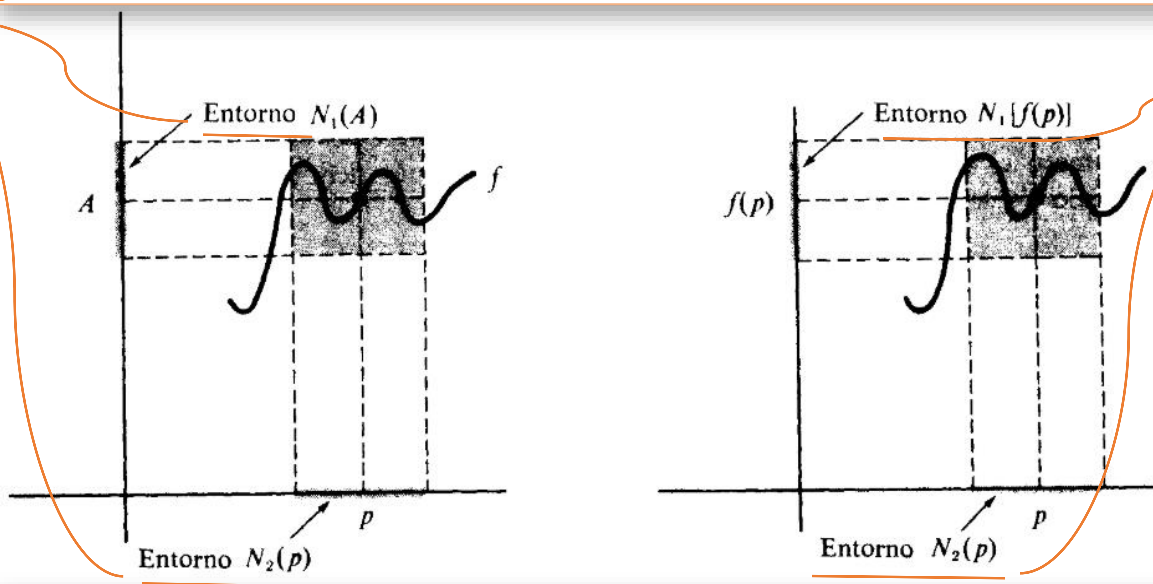
significa que para todo entorno $N_1(A)$ existe un cierto entorno $N_2(p)$ tal que

(3.1) $$f(x) \in N_1(A) \ \textit{siempre que} \ x \in N_2(p) \quad y \quad x \neq p\,.$$

Lo primero que se observa en esta definición es que en ella intervienen *dos* entornos, $N_1(A)$ y $N_2(p)$. El entorno $N_1(A)$ se cita en *primer lugar,* e indica cuán próximo queremos que sea $f(x)$ a su límite A. El segundo entorno, $N_2(p)$, nos indica lo próximo que debe estar x de p para que $f(x)$ sea interior al primer entorno $N_1(A)$.

MEU

MEU



La definición de límite también se puede formular mediante los *radios* de los entornos $N_1(A)$ y $N_2(p)$. Es costumbre designar el radio de $N_1(A)$ por ϵ (letra griega *épsilon*) y el de $N_2(p)$ por δ (letra griega *delta*). Decir que $f(x) \in N_1(A)$ es equivalente a la desigualdad $|f(x) - A| < \epsilon$, y poner que $x \in N_2(p)$, $x \neq p$, es lo mismo que escribir $0 < |x - p| < \delta$. Por lo tanto, la definición de límite puede también expresarse así:

MEU

El símbolo $\lim_{x \to p} f(x) = A$ *significa que para todo* $\epsilon > 0$, *existe un* $\delta > 0$ *tal que*

(3.2) $$|f(x) - A| < \epsilon \quad \textit{siempre que} \ 0 < |x - p| < \delta\,.$$

4.4. Otras *métricas* y entornos en textos escolares.

En los textos de Topología que hemos revisado, se cambia la palabra "*entorno abierto*", por "*bola abierta*", manteniendo el concepto. Entonces, en un *espacio métrico* (X, d), una *bola abierta* (suponemos que el nombre es herencia de la *métrica* usual en $\mathbb{R}^3$) centrada en a, con radio ε, relativa a la *métrica* d, se define de manera análoga, pero con la concepción de distancias de cada *espacio métrico.*

$$x \in B^{d}_{a,\varepsilon} = \{x \in X,\ d(a,x) < \varepsilon\}$$

Cada *espacio normado* genera una *métrica*, y a partir de esta se puede concebir una *bola abierta* acorde a la racionalidad de la *distancia* que se genera ¿Cómo se ve esto en textos escolares?

La *norma* del **ejemplo 1** que antes mencionamos que para $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$, $\|\vec{u}\| = \sum_{i=1}^{i=n} |x_i|$

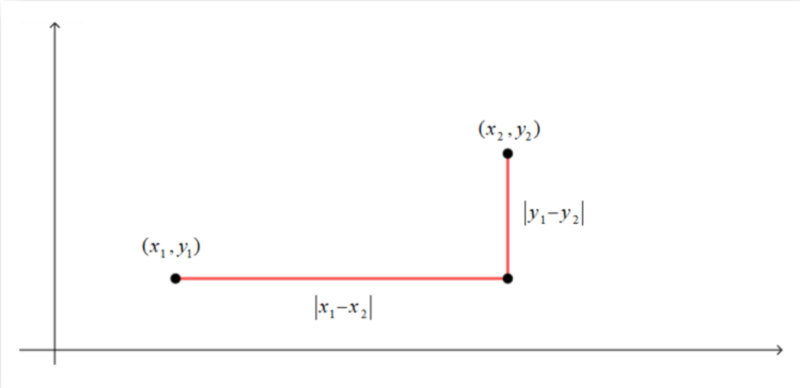
Especificamente en $\mathbb{R}^2$, $\|(x,y)\| = |x| + |y|$

Si consideramos la *métrica* que genera:

$$d((x_1, y_1),(x_2, y_2)) = \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

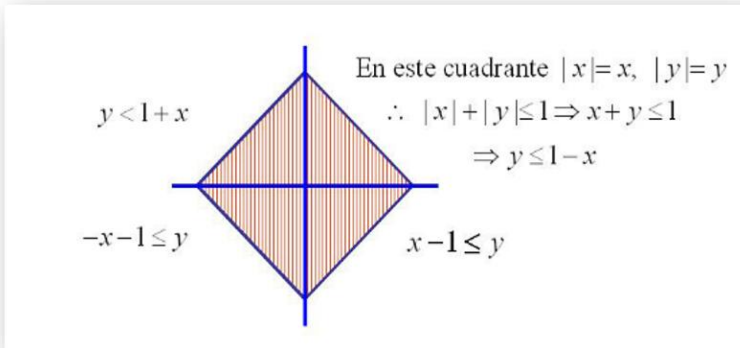
Esta es en muchos casos referida como la *métrica del taxista* (*figura 4.20*).

Figura 4.20. *Métrica del taxista.*



En Hinrichsen y Fernández, (1977) y Hurtado (2021), se muestra cómo es la figura de un *bola* en este *espacio*, que genera una figura particular, que expresa la manera de entender la cercanía según esta *métrica*.

Figura 4.21. $B_{0,1}$ con $d((x_1, y_1),(x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$.



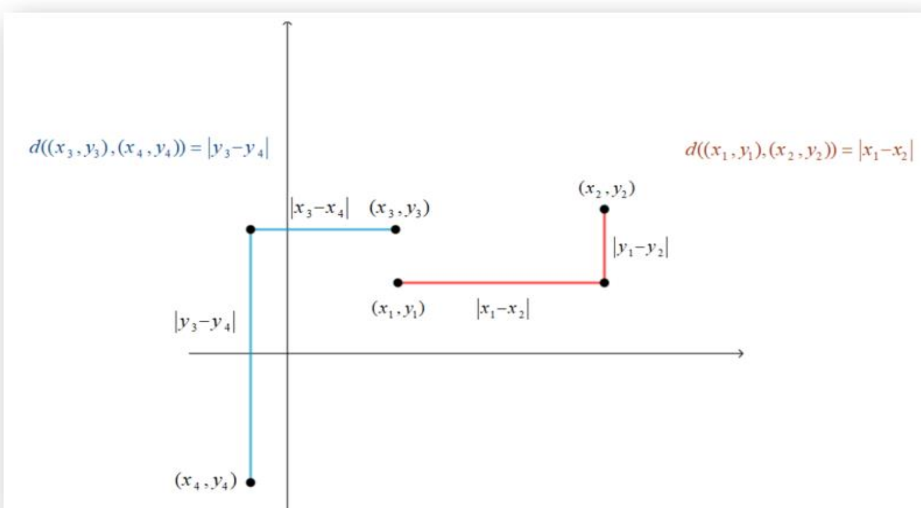
Recuperado de Hurtado (2013, p. 5).

Si consideramos la *norma* del **ejemplo 2** que antes mencionamos para $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$,

$\| \vec{u} \| = \max\{|x_i| : i = 1, \ldots, n\}$, especificamente en $\mathbb{R}^2$, $\|(x, y)\| = \max\{x, y\}$

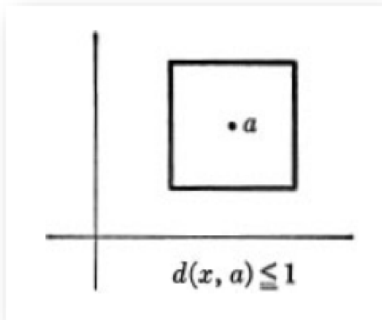
Se genera la *métrica* que se muestra en la *figura 4.22.*

Figura 4.22. Distancia producida por la *métrica* $d((x_1, y_1),(x_2, y_2)) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$.



Una interpretación, podría ser considerar los dos trayectos (horizontal y vertical), de la *métrica* del taxista, compararlos, y la *distancia* que se adjudica entre dos puntos se corresponde con el más largo de estos. En el caso de $\mathbb{R}^3$ serían tres trayectos, y en el caso de $\mathbb{R}^n$ serían n . Esta *métrica,* genera *entornos* particulares, de forma cuadrada, como se muestra en la *figura 4.23*.

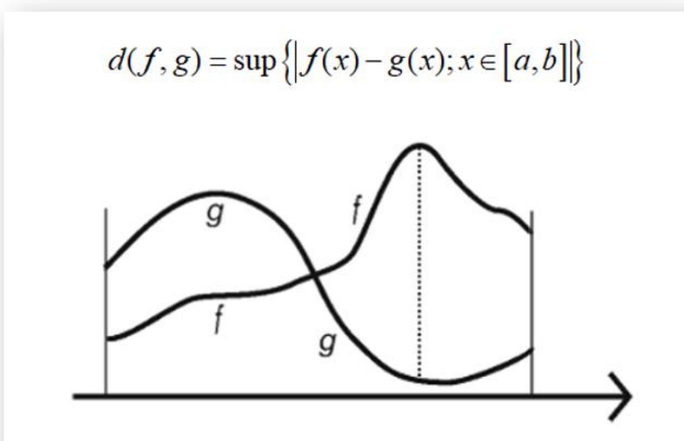
Figura 4.23. $B_{a,1}$ con $d((x_1, y_1),(x_2, y_2)) = \max\{|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|\}$.



Recuperado de Mendelson (1990, p. 33).

El **ejemplo 3**, La *norma del supremo*, en el *espacio de funciones continuas* definidas sobre un intervalo real cerrado, genera un *espacio métrico* de *funciones continuas* que se que genera una racionalidad de *distancia* que se puede interpretar geométricamente como la mayor amplitud entre dos fuciones dadas.

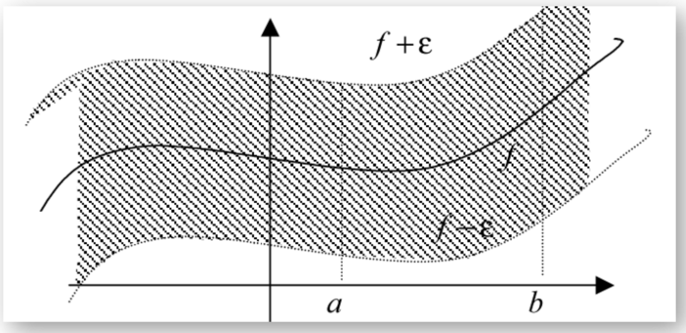
Figura 4.24. *Métrica del supremo* en el *espacio de funciones continuas*.



Recuperado de Shirali y Vasudeva (2005, p. 32).

Por lo tanto, una bola $B_{f,\varepsilon}$ en este espacio, se interpreta geométricamente como una "franja", en donde todas las funciones que sus gráficos estén incluidas en esta pertenecen al entorno.

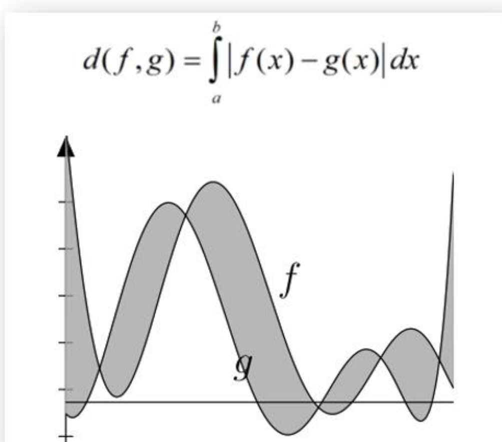
Figura 4.25. Bola abierta de centro f y radio ε en la *métrica* del supremo.



Recuperado de Hinrichsen y Fernández (1977, p. 34).

Por otro lado, la *norma* sobre el *espacio de funciones continuas*, que se genera a partir de la integral del *valor absoluto* de una función ($\|f\| = \int_a^b |f(x)|\,dx$), como vimos en el **ejemplo 4**, genera una idea geométrica de distancia, que se puede interpretar como el área que se determina entre dos curvas.

Figura 4.26. Distancia entre funciones, inducida por la *métrica* de la integral.



Recuperado de Antonyan (2016, p. 19).

Una bola $B_{f,\varepsilon}$, según esta *métrica*, incluye todas aquellas funciones g_i cuyos gráficos, junto con el de f, encierra un área de a lo sumo ε.

Si consideramos que en las definiciones del Análisis Real de una o varias variables, las definiciones de *límite, continuidad*, *integrales* que conforman la estructura de la disciplina, trabajan sobre la *métrica euclídea*. Una primera generalización del Análisis se admite al incorporar nuevas nociones de *distancia*, es decir involucrar la noción de *espacio métrico*.

Entonces por ejemplo la noción de *continuidad* puede ser extendida desde la racionalidad del Análisis. En este, una función f que es *continua*, admite la interpretación de que si dos puntos x e y están cerca, entonces $f(x)$ e $f(y)$ deberán también estar cerca. Pero esta idea de "*cerca*", puede resignificarse a las distintas racionalidades de *distancia* que generan distintos *espacios métricos*. Entonces, la idea de *continuidad* se puede extender para cualquier *espacio métrico*. Una función f será continua, si dos puntos que están cerca según una distancia d_1, implica que sus imágenes a través de f se mantienen cerca según una distancia d_2.

Una definición de continuidad de este estilo, como se puede ver por ejemplo en Mendelson (1990) y Shirali y Vasudeva (2005), sería la siguiente manera:

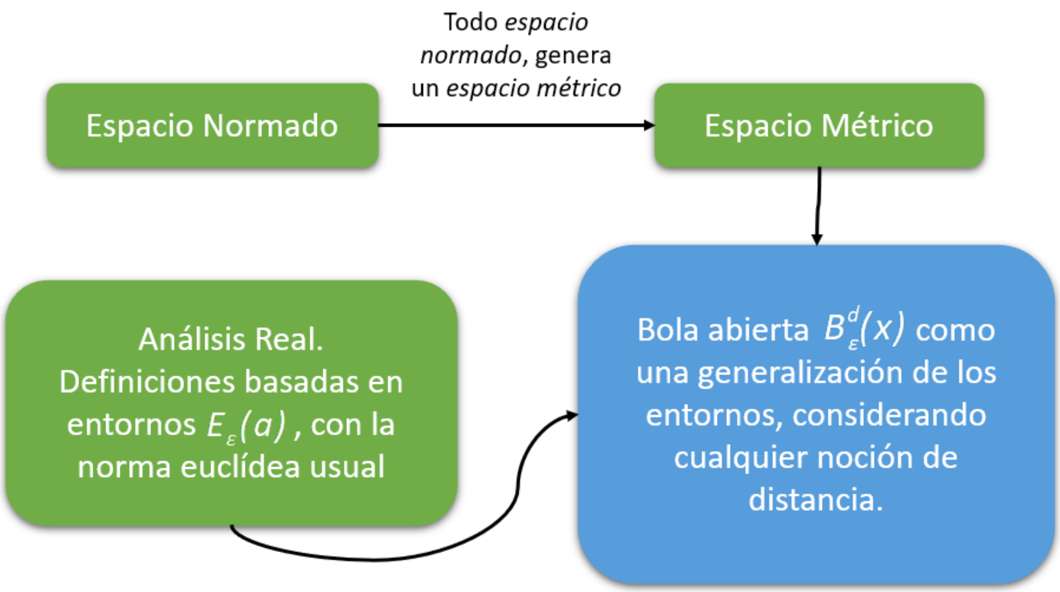
(X_1, d_1) y (X_2, d_2) dos espacios métricos. Una función $f : X_1 \to X_2$, es **continua** en un punto $a \in X$ significa que:

dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, de modo que

$$d_1(x,a) < \delta \;\Rightarrow\; d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

De manera similar se construye la definición de *límite*, con la misma racionalidad que en la *figura 4.19,* pero considerando que lo que se entiende por "cercano", depende de la racionalidad de una *distancia* engendrada por una *métrica* que no necesariamente tiene que ser la usual en $\mathbb{R}^n$. De esta manera, podríamos completar otro nivel del esquema, de la siguiente manera:

Figura 4.27. Generalización del Análisis, al involucrar *espacios métricos*.

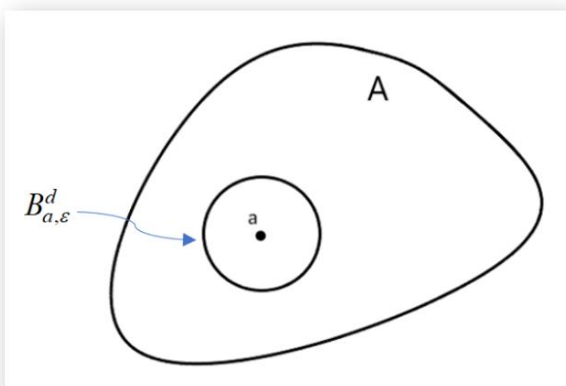


4.6. Conjuntos abiertos, y tres teoremas importantes para nuestro análisis.

En la literatura, se presenta una noción de *conjunto abierto* siempre conceptualmente igual salvo diferencias de escritura. Si consideramos un *espacio métrico* (X,d), desde un punto de vista topológico, un conjunto $A \subset X$ es *abierto*, si todos sus puntos son *interiores.* Un punto es *interior de* A $(a \in \operatorname{int} A)$, si existe una bola $B^d_{a,\varepsilon} \subset A$.

En textos de Topología, Si $a \in A$ y A es un conjunto abierto, se suele decir que A es un ***entorno*** de a (*figura 4.28*). Al conjunto de *entornos* de a se lo nombra de manera usual como $N(a)$. Entonces si $Q \in N(A)$, Q es un *entorno* de a por lo tanto es un conjunto abierto que contiene al punto a. Con esta idea, las mismas *bolas abiertas* centradas en a, son *entornos* de a.

Figura 4.28. Entorno de a.



En la Topología, este tipo de conjuntos son en un sentido literal fundamentales, ya que son los conjuntos que se consideran para configurar la estructura axiomática de *espacio topológico*. Hay dos teoremas que se presentan para *espacios métrico*, que se relacionan directamente con esta axiomática. Estos son, que la *unión finita o infinita de conjuntos abiertos de un espacio, es también un conjunto abierto* y *que la intersección finita de conjuntos abiertos de un espacio es un conjunto abierto*. Estos están presentes en la literatura que hemos señalado, con pruebas diferentes, pero esencialmente se pueden reconstruir de la siguiente manera:

Teorema 1.

Hipótesis: (X, d) un *espacio métrico*. $\{A_i\}$ una **familia infinita** de *conjuntos abiertos,*

de manera que $A_i \subset X \;\; \forall i$.

Tesis: $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ es un conjunto abierto.

Demostración:

Si $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, entonces existe al menos un $A_j \in \{A_i\}$, de manera que $x \in A_j$.

Como A_j es *abierto,* $x \in \operatorname{int} A_j$, entonces existe $B_{x,\varepsilon}^{d} \subset A_j$, y como $A_j \in \{A_i\}$,

entonces $B_{x,\varepsilon}^{d} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

Resumiendo, $\forall x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, existe $B_{x,\varepsilon}^{d} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, por lo tanto $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ es un conjunto abierto.

De manera inmediata, a partir de este teorema, se puede concluir que cualquier unión, finita o infinita de *conjuntos abiertos*, será también un *conjunto abierto*.

Teorema 2.

Hipótesis: (X, d) un *espacio métrico*. $\{A_i\}$ una **familia finita** de *conjuntos abiertos,*

de manera que $A_i \subset X \;\; \forall i = 1, 2, \ldots, n-1, n$.

Tesis: $\bigcap_{i=1}^{i=n} A_i$ es un conjunto abierto.

Demostración:

Si $x \in \bigcap_{i=1}^{i=n} A_i$, entonces $x \in A_i \ \ \forall i = 1,\ldots,n$. Como cada uno de estos conjuntos es abierto, para cada uno existe un $B^{d}_{x,\varepsilon_i} \subset A_i$, en donde el radio ε_i de cada bola, dependerá de cada conjunto abierto A_i .

Como $\{A_i\}$ es finita, se puede considerar $\varepsilon_m = \min\{\varepsilon_i \ , \ i = 1,\ldots,n\}$. De esta manera,

$$B^{d}_{x,\varepsilon_m} \subset A_i \quad \forall \ i = 1,\ldots,n \text{ , entonces } B^{d}_{x,\varepsilon_m} \subset \bigcap_{i=1}^{i=n} A_i \ .$$

Resumiendo, $\forall \, x \in \bigcap_{i=1}^{i=n} A_i$, existe $B^{d}_{x,\varepsilon_m} \subset \bigcap_{i=1}^{i=n} A_i$, por lo tanto $\bigcap_{i=1}^{i=n} A_i$ es abierto.

El tercer teorema que nos parece de importancia para nuestra *reconstrucción racional* conceptualiza la *continuidad* en términos de *conjuntos abiertos*. En los *espacios métricos*, estos conjuntos siguen dependiendo de la *métrica,* pero como veremos próximamente, en los *espacios topológicos*, las propiedades de los *conjuntos abiertos* se definen en la axiomática, por lo que un *espacio topológico* no necesariamente ha de tener una *métrica*. La demostraciones del siguiente teorema, se obtuvieron de Mendelson (1990).

Teorema 3.

Sea $f : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ una *función continua* en un punto $a \in X_1$ **sí y sólo si,** para cada *entorno* M de $f(a)$ contenido en X_2 , existe otro *entorno* N de a contenido en X_1 , de modo que: $f(N) \subset M$ o de manera equivalente

$$N \subset f^{-1}(M)$$

Demostración del teorema directo:

f es continua en un punto $a \in X_1$. Se debe de probar que dado un entorno M de $f(a)$, se puede encontrar otro entorno N de a, de modo que $f(N) \subset M$ (*figura 4.29*).

Como M es abierto y contiene a $f(a)$, existe $B^{d_2}_{f(a),\varepsilon} \subset M$. Como f es continua en a, existe $B^{d_1}_{a,\delta}$ de modo que $f(B^{d_1}_{a,\delta}) \subset B^{d_2}_{f(a),\varepsilon}$

Por la misma definición, $B^{d_1}_{a,\delta}$ es un entorno de a, entonces se considera $B^{d_1}_{a,\delta} = N$.

Entonces se tiene que $f(N) = f(B^{d_1}_{a,\delta}) \subset B^{d_2}_{a,\varepsilon} \subset M$, por lo tanto, se encontró N, tal que $f(N) \subset M$.

Demostración del teorema reciproco:

Aquí se supone que f admite la propiedad de que para cada *entorno* M de $f(a)$ existe un *entorno* correspondiente N de a, de modo que $f(N) \subset M$. Se considera entonces un $\varepsilon > 0$. Para demostrar que f sea continua en a se debe demostrar que existe un $\delta > 0$ de modo que: $f(B^{d_1}_{a,\delta}) \subset B^{d_2}_{f(a),\varepsilon}$ (*figura 4.30*).

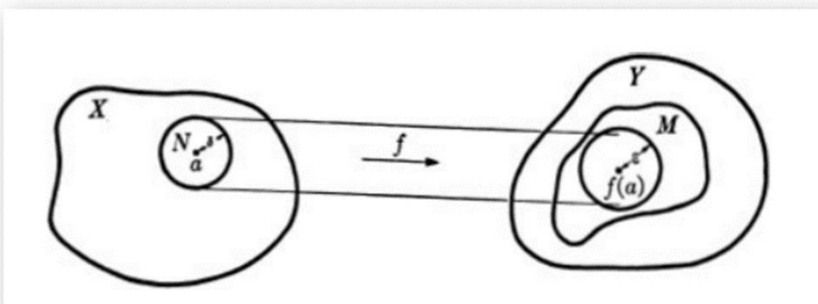
Dado $\varepsilon > 0$, se considera $B^{d_2}_{f(a),\varepsilon} = M$ por ser esta bola un entorno de $f(a)$, por la propiedad que se asume que se cumple, existe N *entorno* de a, de manera que $f(N) \subset M$. Como N es *entorno de* a, entonces es *abierto,* entonces existe $B^{d_1}_{a,\delta} \subset N$. Entonces:

$f(B^{d_1}_{a,\delta}) \subset f(N) \subset M = B^{d_2}_{f(a),\varepsilon}$, por lo tanto $f(B^{d_1}_{a,\delta}) \subset B^{d_2}_{f(a),\varepsilon}$, lo que afirma que f es continua en a.

En cuanto a la demostración de estos teoremas, Mendelson (1990) comenta:

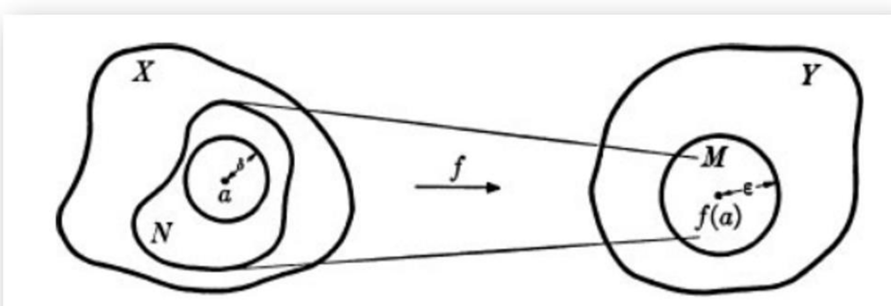
> La demostración de la primera parte del teorema anterior se puede representar gráficamente considerando un entorno arbitrario M de $f(a)$ [*figura 4.29*]. Dado que M es un entorno de $f(a)$, contiene una bola abierta $B_{f(a),\varepsilon}$ para algún $\varepsilon > 0$. Como f es continua en a, para algún $\delta > 0$ la vecindad $N = B_{a,\delta}$ es llevada a M por f. De manera similar, la demostración de la segunda parte del teorema [*figura 30*]. Comenzamos con el entorno $M = B_{f(a),\varepsilon}$. La propiedad asumida de f nos permite afirmar que hay un entorno de N de a que es llevado a M por f. Dado que N es un entorno de a, tenemos una *bola abierta* $B_{a,\delta}$ contenida en N, que también debe llevarse hacia M. (Mendelson, 1990, pp. 43-44)

Figura 4.29. Esquema de la demostración del directo.



Recuperado de Mendelson (1990, p. 43).

Figura 4.30. Esquema de la demostración del reciproco.



Recuperado de Mendelson (1990, p. 44).

Este teorema, muestra un aspecto de la *continuidad*, que consideramos hace emerger la idea que caracteriza al *homeomorfismo* entre *espacios topológicos*. Esto debido a que aquí se relaciona directamente la noción de cercanía que provee el concepto de *bola abierta,* con la noción de cercanía que provee la noción de *entorno abierto*. Este último*,* a pesar de que aún está interpretado desde la *métrica,* no es tan rígido en su forma como la noción de *bola abierta*, que es desde donde se definía usualmente *continuidad* en Análisis Matemático.

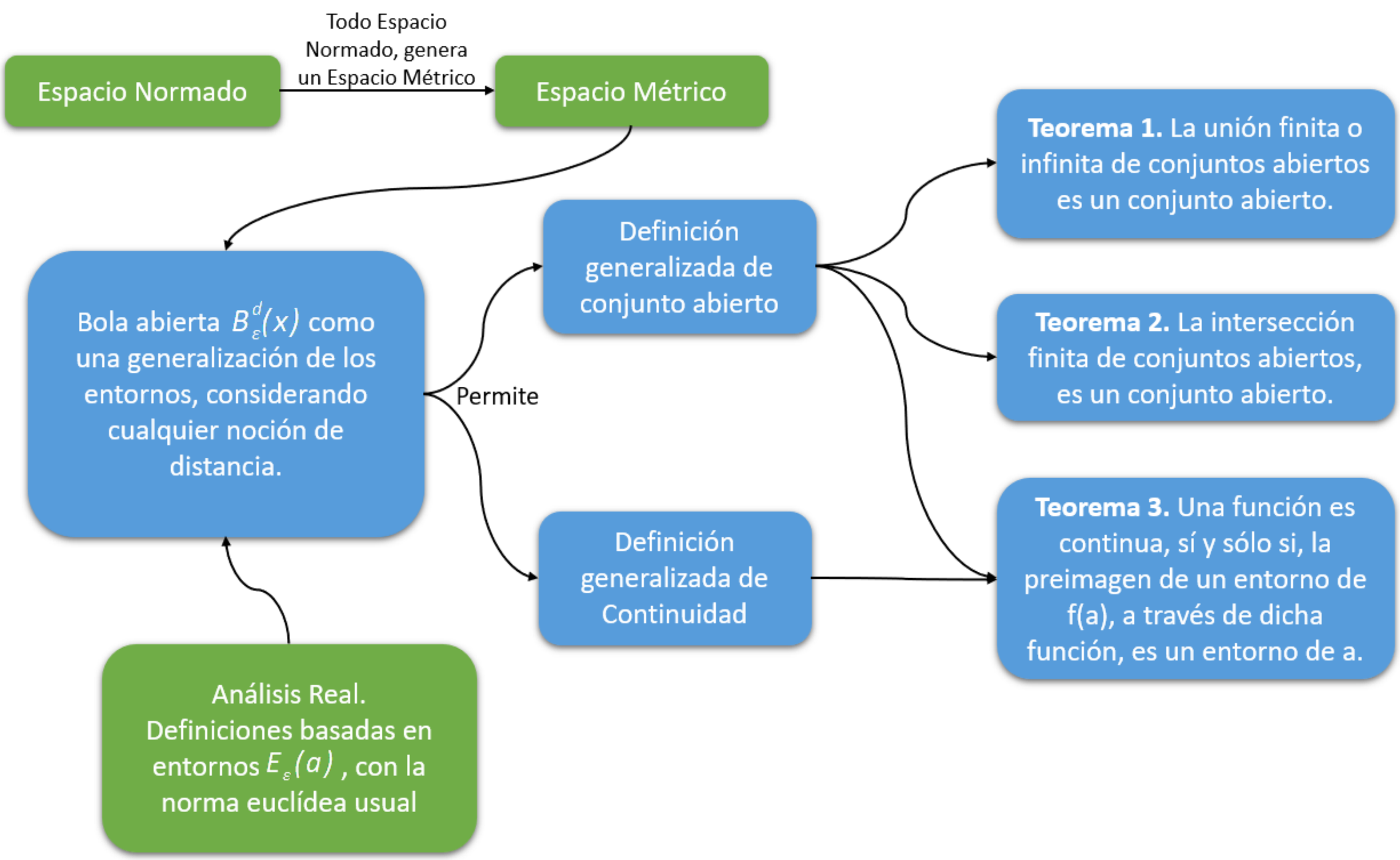
Mendelson (1990), menciona que el anterior teorema, podría escribirse de manera concreta de la siguiente manera:

Teorema: Sea $f:(X_1,d_1)\rightarrow(X_2,d_2)$ una función continua en a, **sí y sólo si**, para cada *entorno* M *de* $f(a)$*,* se cumple que $f^{-1}(M)$ es un *entorno* de a.

Nos interesa enfatizar, en la condición *necesaria y suficiente* del teorema ("*sí y sólo si"*). Ya que esta permite la posibilidad de definir la *continuidad* de manera alterna, es decir, a partir del teorema reciproco. Se puede afirmar que una *función* es *continua*, siempre que toda preimagen de un *entorno* de $f(a)$, sea un *entorno* de a, sin perder nada de lo que garantizaba la noción de continuidad para *espacios métricos*, ya que el teorema afirma que, si se cumple esta condición mencionada, la función será *continua* en el sentido tradicional. Este punto es importante de señalar, porque es efectivamente como se define usualmente la *continuidad de funciones* entre *espacios topológicos* (de manera genérica) sin hacer uso de la noción de *métrica* (Antonyan, 2016; Hinrichsen y Fernández, 1977; Kelley, 1955; Mendelson, 1990; Munkres, 2002).

De esta manera, se completa otra parte más del esquema que buscamos construir, que relaciona las ideas de *medida-distancia* y *Topología,* y que expresará la *reconstrucción racional* desarrollada en este trabajo de investigación (*figura 4.31*). En este momento, la generalización del Análisis a otros *espacios métricos* permite ver tres teoremas que se cumplen de manera general para todo *espacio métrico (figura 4.31).*

Figura 4.31. El Análisis Matemático involucrando *espacios métricos,* permite formular tres teoremas importantes para nuestra reconstrucción racional.



4.7. Los *espacios topológicos*, una generalización de los *espacios métricos.*

A continuación, daremos evidencia de cómo es que dos de los tres teoremas discutidos en la sección inmediata anterior, se reconfiguran en axiomas en los libros de texto de Topología que hemos analizado, y cómo el tercer teorema discutido, puede influir directamente en la definición de la continuidad entre *espacios topológicos*. Compartimos una secuencia de imágenes que presentan en cada caso, la definición de *espacio topológico,* con su correspondiente estructura axiomática:

Figura 4.32. Definición axiomática de *espacio topológico* en Kelley (1955, p. 37).

A **topology** is a family $\mathfrak{J}$ of sets which satisfies the two conditions: the intersection of any two members of $\mathfrak{J}$ is a member of $\mathfrak{J}$, and the union of the members of each subfamily of $\mathfrak{J}$ is a member of $\mathfrak{J}$. The set $X = \bigcup\{U: U \in \mathfrak{J}\}$ is necessarily a member of $\mathfrak{J}$ because $\mathfrak{J}$ is a subfamily of itself, and every member of $\mathfrak{J}$ is a subset of X. The set X is called the **space** of the topology $\mathfrak{J}$ and $\mathfrak{J}$ is a **topology for X.** The pair $(X,\mathfrak{J})$ is a **topological space.** When no confusion seems possible we may forget to mention the topology and write "X is a topological space." We shall be explicit in cases where precision is necessary (for example if we are considering two different topologies for the same set X).

Figura 4.33. Definición axiomática de *espacio topológico* en Hinrichsen y Fernández (1977, p. 43).

Espacios Topológicos

En este capítulo introduciremos el concepto de espacio topológico, rescatando de los espacios métricos las propiedades básicas que estos cumplen. Es decir que se trata de una abstracción de los mismos.

Definición 2.1 Sea X un conjunto no vacío. Una topología τ en X es una familia incluida en las partes de X

es decir $\tau \subset \mathscr{P}(X)$ tal que:

1) $X, \phi \in \tau$

2) Si $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I} \in \tau \Rightarrow \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \in \tau$

3) Si $A_1,\dots,A_n \in \tau \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$

A los miembros de τ llamamos ***abiertos***

Al par formado por τ y X llamamos ***espacio topológico.***

Ejemplo 2.1 Sea (E,d) un espacio métrico, entonces $\tau_d = \{A : A \text{ abierto en } E\}$ τ_d es una topología por los propiedades que ya vimos se cumplen 1,2,3.

Figura 4.34. Definición axiomática de *espacio topológico* en Mendelson (1990, p.71).

DEFINITION 2.1 Let X be a non-empty set and $\mathfrak{I}$ a collection of subsets of X such that:

$O1$. $X \in \mathfrak{I}$.
$O2$. $\emptyset \in \mathfrak{I}$.
$O3$. If $O_1, O_2, \ldots, O_n \in \mathfrak{I}$, then

$$O_1 \cap O_2 \cap \ldots \cap O_n \in \mathfrak{I}.$$

$O4$. If for each $(X, \mathfrak{I})$, then $\bigcup_{\alpha \in I} O_\alpha \in \mathfrak{I}$.

The pair of objects $(X, \mathfrak{I})$ is called a *topological space*. The set X is called the *underlying set*, the collection $\mathfrak{I}$ is called the *topology* on the set X, and the members of $\mathfrak{I}$ are called *open* sets.

Figura 4.35. Definición axiomática de *espacio topológico* en Munkres (2002, p. 86).

Definición. Una ***topología*** sobre un conjunto X es una colección $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:

(1) $\varnothing$ y X están en $\mathcal{T}$.

(2) La unión de los elementos de cualquier subcolección de $\mathcal{T}$ está en $\mathcal{T}$.

(3) La intersección de los elementos de cualquier subcolección finita de $\mathcal{T}$ está en $\mathcal{T}$.

Un conjunto X para el que se ha definido una topología $\mathcal{T}$ se llama ***espacio topológico***.

Hablando con propiedad, un espacio topológico es un par ordenado $(X, \mathcal{T})$, formado por un conjunto X y una topología $\mathcal{T}$ sobre X, pero a menudo omitiremos hacer mención específica de $\mathcal{T}$ si no existe confusión.

Si X es un espacio topológico con una topología $\mathcal{T}$, diremos que un subconjunto U de X es un ***conjunto abierto*** de X si U pertenece a la colección $\mathcal{T}$. Usando esta terminología, se puede decir que un espacio topológico es un conjunto X junto a una colección de subconjuntos de X, llamados *conjuntos abiertos*, tales que $\varnothing$ y X son ambos abiertos, y tal que las uniones arbitrarias y las intersecciones finitas de conjuntos abiertos son abiertos.

Figura 4.36. Definición axiomática de espacio topológico en Antonyan (2016, p. 45).

Definición 3.1.1. *Sea X un conjunto no vacío. Una colección τ de subconjuntos de X se llama* **topología** *en X, si se satisfacen los siguientes axiomas:*

1. *El conjunto vacío y X están en τ.*
2. *Si $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ es una familia cualquiera de elementos de τ, entonces la unión $\bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha$ está en τ.*
3. *Si $\{U_1,\dots,U_n\}$ es una familia finita de elementos de τ, entonces la intersección $U_1\cap\cdots\cap U_n$ es elemento de τ.*

Los elementos de τ reciben el nombre de conjuntos **abiertos** *de X, y al conjunto X junto con la topología τ se llama* **espacio topológico**. *A los elementos de X se les suele llamar puntos.*

Hemos observado que en cada uno de los textos analizados (que tienen años de publicación distanciados), se presenta una definición de *espacio topológico* con la misma estructura axiomática. En esta, se resalta que una *topología* τ sobre un conjunto X , es una colección de subconjuntos de X de manera que cumplan tres axiomas. En cada una de las definiciones, existe un axioma que menciona que la *unión infinita* de cualquier familia de conjuntos de τ , está en τ . Y otro, que afirme que cualquier *intersección finita* de conjuntos de τ , ha de pertenecer a τ . El tercer axioma que se hace presente impone que tanto el conjunto vacío $\emptyset$ y el propio conjunto X estén en τ , aportando formalidad a la estructura[4].

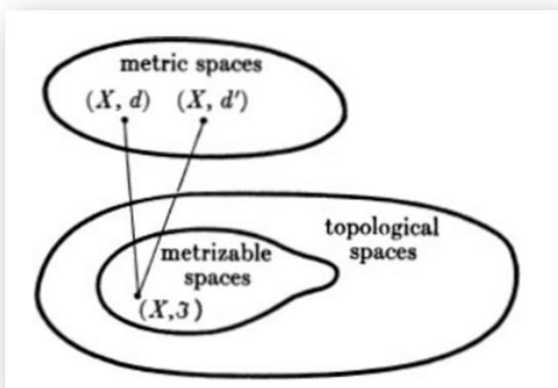
Estos son los axiomas, que en nuestro análisis, planteamos pueden ser considerados a partir de ser reconocidos y demostrados en las colecciones de *conjuntos abiertos* que se generan a partir de cualquier noción de *distancia* engendrada por cualquier *espacio métrico*. Estás propiedades que admitían una demostración a partir de la axiomática de los *espacios métricos*, son consideradas

[4] De no estar el conjunto vacío $\emptyset$ en τ , no podría haber en τ conjuntos disjuntos. Observemos que en cada *espacio métrico* (E,d)*, la métrica* d genera abiertos que cubren todo el espacio E . Si no estuviera X en τ , podrían suceder dos cosas: τ no cubre todo el espacio X , por lo tanto, no sería una *topología* sobre X , sino sobre $X' \subseteq X$. O que, en el caso de que los conjuntos de τ cubrieran todo el espacio X , pero X no estuviera en τ , τ no sería una *topología* sobre X . Esto debido a que la unión de todos los conjuntos de τ , es X , pero al no estar este en τ se contradeciría el axioma de que la unión infinita de abiertos de τ , está también en τ .

como axiomas para la configuración de la definición de *espacio topológico.* Como se puede apreciar, a cada conjunto que pertenece a una *topología* τ , se le llama *conjunto abierto.* En el caso de los *espacios métricos,* los *conjuntos abiertos* eran formados a partir de la consideración de cada *métrica*. En el caso de los *espacios topológicos*, estos conjuntos han de ser definidos. En la definición axiomática de *espacio topológico* que se encuentra en Hinrichsen y Fernández (1977) (*figura 4.33*), se señala directamente que cualquier *espacio métrico*, genera una familia de abiertos que directamente se conforman como un *espacio topológico*, porque ya fueron demostrados de manera general para cualquier *espacio métrico* los teoremas que aseguran que los axiomas de *espacio topológico* se verificarán.

Por otro lado en Mendelson (1990), se señala que los *espacios métricos*, son un subconjunto de todos los *espacios topológicos*, y son considerados como los *espacios topológicos metrizables,* sobre los cuales se puede definir una idea de *distancia*.

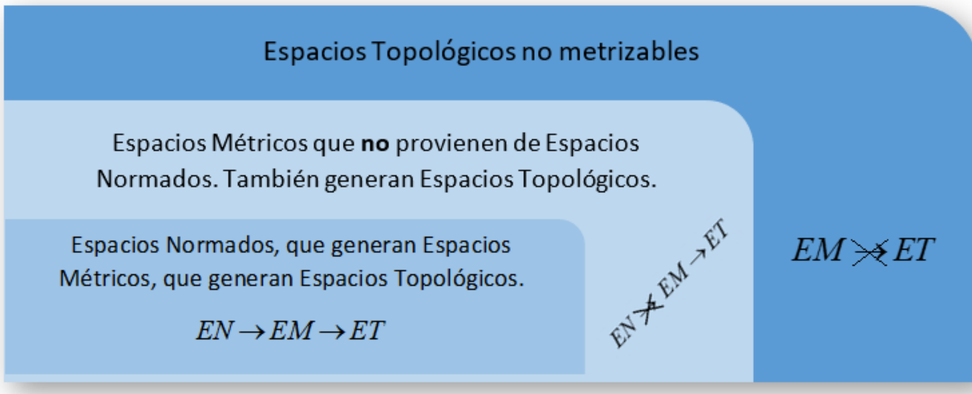
Figura 4.37. *Espacios métricos = espacios topológicos metrizables*.



Recuperado de Mendelson (1990, p. 73).

Anteriormente observamos que todo *espacio normado* generaba un *espacio métrico,* pero no todo *espacio métrico* necesariamente provenía de un *espacio normado.* En este caso, análogamente, todo *espacio métrico* genera un *espacio topológico*, aunque no todo *espacio topológico* proviene necesariamente de un *espacio métrico.* Observamos que en este tipo de abstracciones, cada momento se genera al considerar una axiomática nueva sostenida sobre las propiedades que se habían podido demostrar en una instancia anterior, considerando nuevos espacios de interés, sin despreciar los anteriores. El esquema general de estos dos saltos de abstracción se podría considerar como en la *figura 4.38*.

Figura 4.38. Esquema de la relación entre *espacio normado*, *espacio métrico y espacio topológico*.



Cada nueva instancia de abstracción permite el estudio de nuevos fenómenos, y nuevos casos que antes no podían ser estudiados y significados a partir de los objetos que se tenían. Ejemplos de *espacios topológicos* que no son metrizables, o *espacios métricos* que no provienen de *espacios normados*, pueden encontrarse, por ejemplo en Hinrichsen y Fernández (1977) y Mendelson (1990).

Nos ha parecido de gran interés este recorrido, más aún si reconocemos nuestra intención de tener un impacto de corte didáctico. Si esta axiomática de *espacio topológico* es presentada sin considerar estos recorridos, ¿Qué significados le podría asociar un estudiante a los axiomas, o la misma noción de *espacio topológico*?, creemos que, encontrar estos significados dependería de la subjetividad del estudiante, siendo que estos no son evidentes en los libros de texto que hemos analizado. En algunos casos no se sugiere la conexión, en otros casos si es que se sugiere, queda escondida en muchos otros teoremas y propiedades. Nosotros planteamos que de hacerse explicita, el tratamiento escolar de los *espacios topológicos* podría desde el comienzo, tener un sentido claro. Si a esto le sumamos, las consideraciones que tendremos en etapas siguientes de este trabajo de investigación, en donde encontramos resignificaciones del *espacio normado* y el *espacio métrico*, a partir de identificar su valor de uso en contextos, y reconocer sus estructuras en prácticas en la actividad humana, consideramos que esto sería un camino muy pertinente para el estudio de los *espacios topológicos,* que permita la construcción de un saber, al menos en un comienzo, con significados claros.

4.7. Funciones continuas entre *espacios topológicos.*

Munkres (2002), comenta:

> El concepto de función continua es básico para una gran parte de las matemáticas. Las funciones continuas sobre la recta real se pueden ver en las primeras páginas de cualquier libro de cálculo, y las funciones continuas en el plano y el espacio siguen no mucho más adelante. Clases más generales de funciones continuas surgen a medida que uno profundiza en las matemáticas. En esta sección [que comienza el estudio de las funciones continuas sobre *espacios topológicos*], formularemos una definición de continuidad que incluirá todas ellas como casos especiales y estudiaremos varias propiedades de funciones continuas. Muchas de estas propiedades son generalizaciones directas de conceptos que se aprendieron sobre funciones continuas en cálculo y análisis. (p. 116) [Aclaración agregada]

Nuestra intención en esta sección se limita a reconocer la relación que identificamos en nuestra reconstrucción racional, entre la noción de *continuidad* entre *espacios métricos,* y la noción de *continuidad* entre *espacios topológicos.* El tercer teorema que señalamos en la sección 4.6, podía generar una conceptualización alternativa de la noción de *continuidad* en términos de conjuntos abiertos. Esta se vuelve fundamental para caracterizar la *continuidad de funciones* entre *espacios topológicos*, debido a que estos no tienen necesariamente una noción de *distancia*, pero sí sus conjuntos abiertos, con sus propiedades, bien definidos. El concepto de *continuidad* es central para la Topología, porque permite definir a los *homeomorfismos*; funciones biyectivas continuas con sus respectivas inversas también continuas (*figura 4.39)*. La importancia de estas funciones proviene de que a partir de ellas es que se estudian los *invariantes topológicos* (conectividad, compacidad, metrizabilidad, etc.)*,* es decir, las propiedades de los *espacios topológicos* que se preservan mediante los *homeomorfismos*, determinando que si dos *espacios topológicos* son *homeomorfos*, comparten los invariantes topológicos que poseen.

En las *figuras 4.40 – 4.44*, de la misma manera que hemos estado haciendo, daremos evidencias de cómo es que es presentada la noción de continuidad en textos de Topología.

Figura 4.39. Concepto de *homeomorfismo* en Hinrichsen y Fernández (1977, p. 90).

Definición 4.3.1. *Sean X y Y dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Se dice que f es* **homeomorfismo** *si se satisfacen los siguientes enunciados:*

1. *f es biyectiva,*
2. *f es continua,*
3. *f^{-1} es continua.*

Diremos que los espacios X y Y son **homeomorfos** *(denotado por $X \cong Y$) si existe un homeomorfismo $f : X \to Y$.*

Figura 4.40. Concepto de *función continua* entre *espacios topológicos* en Kelley (1955, p. 85).

A map f of a topological space $(X,\mathfrak{T})$ into a topological space $(Y,\mathfrak{U})$ is **continuous** iff the inverse of each open set is open. More precisely, f is continuous with respect to $\mathfrak{T}$ and $\mathfrak{U}$, or $\mathfrak{T}$-$\mathfrak{U}$ continuous, iff $f^{-1}[U] \in \mathfrak{T}$ for each U in $\mathfrak{U}$.

Figura 4.41. Concepto de *función continua* entre *espacios topológicos* en Hinrichsen y Fernández (1977, p. 83).

Definición 3.10 Sean X e Y espacios topológicos, $f : X \to Y$, $x \in X$ se dice que f es ***continua en x*** si:
Dado $W \in N_{f(x)}$ $\exists N \in N_x$ tal que

$$f(N) \subset W$$

Decimos que f es continua si es continua en todo punto.

Observación para el caso particular de espacios métricos la definición se puede rescribir $f : X \to Y$, $x \in X$ f es continua en $x \Leftrightarrow$ dado una bola $B(f(x),\varepsilon)$ implica que existe una bola $B(x,\delta)$ tal que $f(B(x,\delta)) \subset B(f(x),\varepsilon)$ dicho de otra forma : Si dado $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que si $d(x,y) < \delta$ entonces

$$d(f(x),f(y)) < \varepsilon$$

Figura 4.42. Concepto de *función continua* entre *espacios topológicos* en Mendelson (1990, p. 88).

DEFINITION 5.2 A function $f\colon (X, \mathfrak{J}) \to (Y, \mathfrak{J}')$ is said to be *continuous at a point* $a \in X$ if for each neighborhood N of $f(a)$, $f^{-1}(N)$ is a neighborhood of a. f is said to be *continuous* if f is continuous at each point of X.

THEOREM 5.3 A function $f\colon (X, \mathfrak{J}) \to (Y, \mathfrak{J}')$ is continuous if and only if for each open subset O of Y, $f^{-1}(O)$ is an open subset of X.

Figura 4.43. Concepto de *función continua* entre *espacios topológicos* en Antonyan (2016, p. 77).

Definición 4.1.1. *Sean X y Y dos espacios topológicos, $f : X \to Y$ una función y $x \in X$. Se dice que f es* **continua en** *x si para toda vecindad U de $f(x)$ existe una vecindad V de x tal que $f(V) \subset U$.*

Si $f : X \to Y$ es continua en cada $x \in X$, se dice que f es **continua en** *X.*

Teorema 4.1.2. *Sea $f : X \to Y$ una función entre dos espacios topológicos X y Y. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *f es continua.*
2. *Para todo subconjunto $B \subset Y$, $f^{-1}(\operatorname{Int} B) \subset \operatorname{Int} f^{-1}(B)$.*
3. *Para todo subconjunto abierto U de Y, $f^{-1}(U)$ es abierto en X.*

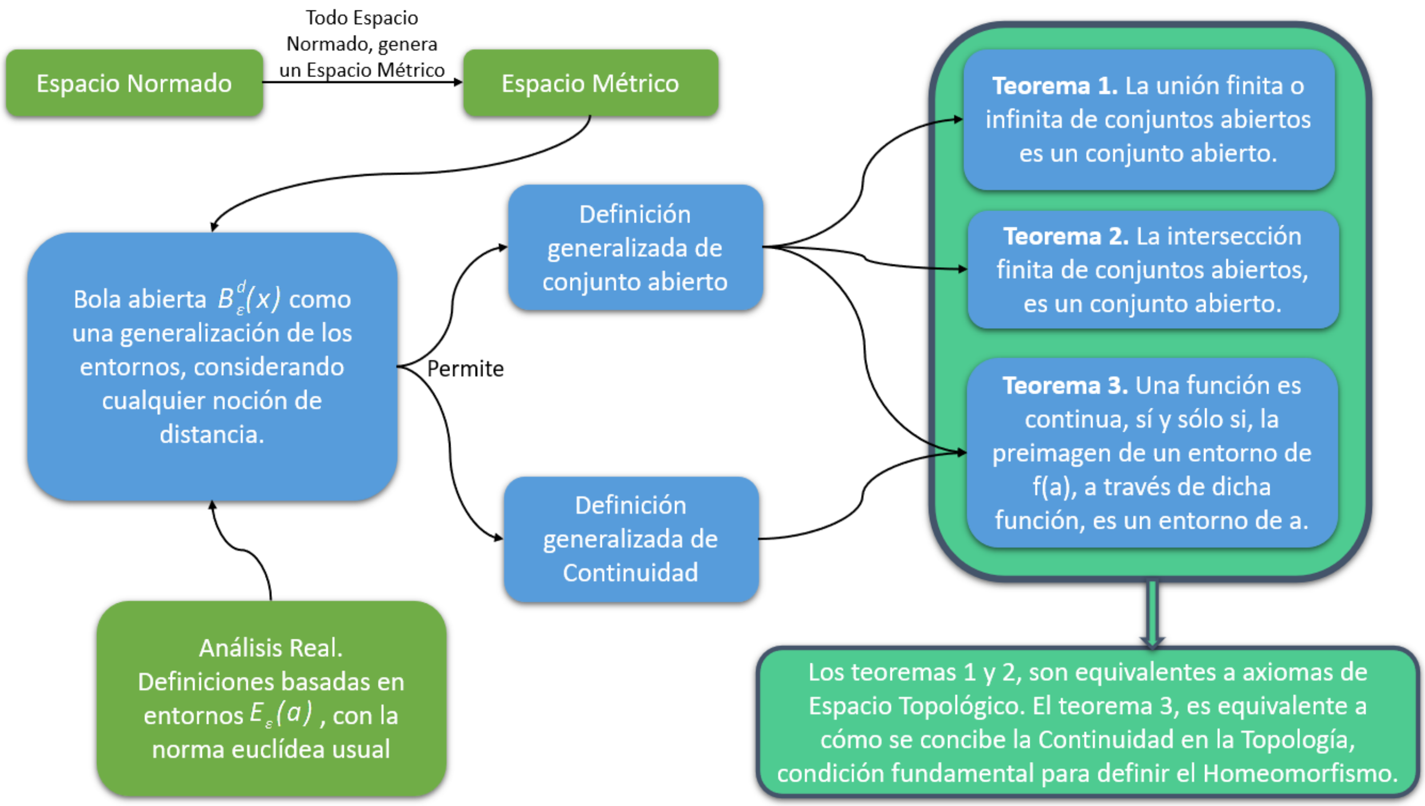
Figura 4.44. Concepto de *función continua* entre *espacios topológicos* en Munckres (2002, p. 116).

Continuidad de una función

Sean X e Y espacios topológicos. Una función $f : X \to Y$ se dice que es ***continua*** si para cada subconjunto abierto V de Y, el conjunto $f^{-1}(V)$ es un subconjunto abierto de X.

Recordemos que, en *espacios topológicos,* un entorno, un abierto, o vecindad de $f(a)$, significa únicamente un conjunto abierto que este en τ y que contenga a $f(a)$. Esta noción es la que está heredando la idea de lo que significa “cerca de $f(a)$”. Como podemos ver, en las definiciones de *continuidad* entre *espacios topológicos*, predomina la idea de que una *función* $X \to Y$ (X e Y *espacios topológicos*) es *continua* si la preimagen de un conjunto abierto de Y es un conjunto abierto de X, o que si la preimagen de un *entorno* de $f(a) \in Y$, es un *entorno* de a en X. Esta noción, para *espacios métricos* es un teorema que admite una demostración a partir de la definición de *continuidad* usual en estos espacios, que a su vez heredaba la racionalidad de las *funciones continuas con* la métrica usual en $\mathbb{R}^n$, en Cálculo o Análisis Matemático. Este vínculo entre las concepciones de *continuidad* nos confirma la intrincada relación entre los *espacios métricos* y los *espacios topológicos.* La definición axiomática de *espacios topológicos* garantiza que todo *espacio métrico* es *topológico.* Además, la conceptualización de *función continua* entre *espacios topológicos* garantiza y mantiene que las *funciones continuas* entre *espacios métricos* con la definición usual, también sean continuas según la definición de *continuidad* para *espacios topológicos*¸ ya que vimos, que si una función entre *espacios métricos* es continua en el sentido tradicional necesariamente cumple la propiedad de que la preimagen de un abierto es un conjunto abierto (*sección 4.6*). De esta manera, completamos el esquema de nuestra *reconstrucción racional*, que transparenta la intrincada relación entre los objetos *espacio normado, espacio métrico y espacio topológico,* que a su vez, los primeros admiten significados claros de *medida y distancia*, planteadas de manera generalizada, pero que permiten resignificaciones y son identificables en contextos, con valor de uso. El esquema de la *reconstrucción racional* completo hasta el momento se muestra en la *figura 4.45.*

Figura 4.45. Reconstrucción racional que identifica y transparenta la relación entre nociones de medida- distancia y espacios topológicos.



5. Epistemología de la medida. Evolución conceptual.

En este capítulo mostraremos el análisis que realizamos a partir del estudio de ciertos artículos de corte epistemológico-filosófico, que nos permitió iniciar una problematización del saber de la *medida* desde la *dimensión epistemológica* del saber. Esto fue de interés para nuestros objetivos debido a que reconocimos una intrincada relación entre las nociones vinculadas de *medida - métrica - distancia* y la axiomática de *espacio topológico*. Buscamos lograr una descentración de los objetos matemáticos formales de la triada anterior, reconociendo significados en el *valor de uso* de estos saberes en la actividad humana. Mari (2003, 2005) nos muestra reflexiones conceptuales que ha producido la humanidad con respecto a las prácticas que involucran la *medida*. Se preocupa por analizar la evolución de esta noción junto con el rol protagónico que tuvo en la consolidación de la ciencia. Observamos que, para la ciencia misma, que requiere evidencias sólidas, con alto grado de objetividad para consolidar sus verdades, históricamente se ha transitado de una concepción epistemológica de la *medida* desde una posición *metafísica* hacia una *relativista* (Mari, 2003). En la concepción *metafísica*, una *medida* se consideraba con características idealizadas como una propiedad inherente del objeto medido, mientras que en la posición *relativista* los procesos de valoración de *medidas* dependen de criterios de funcionalidad coherentes con la racionalidad de la comunidad que las está produciendo. Esto nos permitió interpretar epistemologías que se reconocen en el *discurso matemático escolar* (*dME*) en oposición a cómo se generan ideas de *medida* en escenarios de la actividad humana.

> El conocimiento humano se basa esencialmente en un proceso de prueba y revisión, iterado continuamente, no tan diferente de la forma en que aprenden los niños, en el que progresivamente algunos elementos se vuelven cada vez más sólidos, pero nada definitivos. Desde este punto de vista, el conocimiento no es un edificio a fundar, sino una red de componentes que se sustentan entre sí y adquieren un significado solo en el contexto que están contribuyendo a crear. La medición es un medio fundamental para consolidar esta red y opera internamente ella: por lo tanto, no es sorprendente que al menos algunas magnitudes no puedan definirse en última

> instancia, debido que su uso siempre requiere la referencia a una red completa de conocimiento relacionado. (Mari, 2005, 9. 11) [Traducción propia][5]

Los planteamientos propuestos en estos artículos de interés para este trabajo, al ponerlos en diálogo con los planteamientos de la *TSME* nos permiten considerar elementos que profundizan nuestra problematización. Resaltamos que esta literatura nos acercó una amplia reflexión sobre la discusión epistemológica relativa a un saber específico: la *medida*. Mari (2003, 2005), Mari et al. (2018, 2019) y Mencattini y Mari, (2015), plantean reflexiones que buscan conformar un panorama epistemológico global de la actividad que caracteriza a la *medida* para la ciencia. Se centra en cómo las comunidades científicas construyen desde cada racionalidad formas de *medir* que le sean funcionales a sus intenciones. Los objetos sobre de los cuales se miden *magnitudes* pueden ser de naturaleza amplia, como se señala en la siguiente cita:

> Un trasfondo común que surge de estos estudios es que la medición es un proceso experimental que produce información sobre las propiedades empíricas de los objetos (donde los objetos pueden ser cuerpos, sistemas, fenómenos, eventos, procesos, individuos, organizaciones, etc.), siendo dicha información expresada en forma de valores de propiedad [refiriéndose a que las medidas están asociadas a las propiedades de los objetos que miden]. (Mari et al., 2019, p. 3) [Aclaración añadida] [Traducción propia][6]

Un elemento de interés para nuestra problematización del saber, que señala Mari (2003, 2005) es que los procesos que involucran el saber de la *medida*, presentan de manera constante una intención de *evaluar* alguna *magnitud*, de manera que esta *evaluación* sea funcional a los objetivos de las comunidades que producen la *medida*. Siendo que el autor ha investigado durante años y de

---

[5] Human knowledge is essentially based on a continuously iterative, try-and-revise, adaptive, autopoietic process, not so different from the way children learn, in which progressively some elements become more and more solid but nothing is definitive. In this view, knowledge not a building to be founded, but a network of components sustaining with each other and assuming a meaning only in the context they are contributing to create. Measurement is a critical means to consolidate this network by operating internally to it: therefore it is not amazing that at least some measurands cannot be ultimately defined, so that their usage always requires the reference to a whole network of related knowledge. (Mari, 2005, p. 11)

[6] A background commonality that emerges from these studies is that measurement is an experimental process that produces informativo on empirical properties of objects (where objects can be bodies, systems, phenomena, events, processes, individuals, organizations, etc.), such information being in the form of values of property. (Mari et al., 2019, p.3)

manera transversal actividades científicas que involucran la *medida*, nos pareció importante que reconozca y señale lo que nosotros interpretamos como una *intención de evaluación* normando a las prácticas que involucran a la *medida*.

Esto nos descubrió posibles rastros, de los contextos socioculturales e intencionalidades que pueden hacer emerger usos y significados de este saber. El propio estudio de las concepciones epistemológicas por las que ha transitado el concepto de *medida* para la ciencia es de nuestro interés, por ser reflexiones sobre un contexto específico que consideramos importante, además, porque nos permite analizar qué de estos elementos y consideraciones son extrapolables a otros escenarios no necesariamente científicos o académicos.

Por ejemplo, en la etapa de la problematización según la *dimensión social* del saber, en donde reconocimos la *medida* en el saber popular (*sección 6*), siempre encontramos que también hay una intencionalidad de *evaluación* (aunque con metodologías menos rigurosas), como Mari (2003) documenta que sucede en la ciencia. No encontramos un ejemplo, en el que no se pueda aceptar una interpretación de este tipo.

A pesar de no ser un interés central del autor, se puede apreciar una sensibilidad por prácticas de *medida* que nosotros interpretamos como parte del saber popular. Esto es más que anecdótico, si entendemos que se está reconociendo cualidades epistemológicas comunes entre los procesos de medición de la ciencia, y el pensamiento métrico popular.

Un objetivo de Mari (2003) es caracterizar qué tipo específico de evaluación son las que diferencian a la *medida*, de una evaluación genérica (otro tipo de evaluaciones que no han de ser consideradas como *medidas* según los criterios de la ciencia). Se señala que el avance y desarrollo social de las ciencias, junto con el paradigma científico propuesto desde la corriente positivista no puede haber sido sostenido sobre una idea de *medida* concebida de manera laxa, si se quiere, sobre *medidas* subjetivas o arbitrarias interpretadas según el observador que la produce. La física, tuvo grandes resultados y sostuvo su jerarquía, debido a sus precisas y objetivas formas de obtener evaluaciones (*mediciones*) del mundo empírico. Entonces, reconociendo que la *medida* siempre mantiene una intención de evaluación, Mari (2003), se pregunta: ¿Qué distingue a la medida de una evaluación genérica?

Para poder responder parcialmente esta pregunta, analiza las posiciones fundamentales que se han mantenido de la idea de *medida*, presentando así un boceto para una historia conceptual de la *medición*. En esta caracterización, se reconocen tres puntos de vista distintos, correspondientes a un período *metafísico*, otro *representacional* y un último *relativista*.

5.1. Posición epistemológica metafísica

Mari (2003), para ejemplificar este primer momento que dominó en la historia de las ideas, que es considerada como la concepción epistemológica tradicional de la *medida*, retoma las siguientes citas:

- "Se suponía que los números eran los elementos de todas las cosas, y todo el cielo una escala musical y un número (filósofos pitagóricos)" (pp. 20-21)[7], escrito por Aristóteles (350 a.n.e.) en su obra Metafísica.
- "Los números están en el mundo" (p. 21)[8], Kepler (1595) escribe en una carta a Michael Maestlin.
- "El gran libro de la naturaleza no se puede entender sino aprendiendo su lenguaje y conociendo los caracteres en los que está escrito: está escrito en términos matemáticos" (p. 21)[9], escrito por Galileo Galilei (1632) en su libro Il saggiatore.
- "Cuando estás hablando de algo que puedes medir y expresar en números, sabes algo al respecto de eso; de lo contrario, tu conocimiento es escaso e insatisfactorio''[10], declaración de Lord Kelvin (1889).

Por otro lado, para referirse a esta concepción, Kuhn (1961) señala que:

> En la Universidad de Chicago, la fachada del edificio de Investigación de Ciencias Sociales lleva el famoso dicho de Lord Kelvin: "Si no puedes medir, tu conocimiento es

[7] Numbers were supposed (by the pythagorian philosophers) to be the elements of all things, and whole heaven a musical scale and a number.

[8] Numbers are in the world.

[9] The great book of nature cannot be undestood but by learning its language and knowing the characters in which it is written: it is written in mathematical terms.

[10]When you can measure what you are speaking about, and express it in numbers, you know something about it; otherwise your knowledge is of meager and unsatisfactory kind.

> escaso e insatisfactorio''. ¿Estaría esa declaración si no hubiera sido escrita por un físico, sino por un sociólogo, politólogo o economista? (p. 161)[11]

Con esta última interrogante, podríamos interpretar que se reconoce el estatus epistemológico consagrado en las ciencias básicas, claramente diferenciado del de las ciencias sociales. De manera concreta, se concluye que, en este período (que dominó hasta el siglo XIX), la concepción epistemológica dominante de la *medida* era la siguiente:

"Las medidas son propiedades inherentes de las cosas medidas"

Posición epistemológica relativista e la *medida* (Mari, 2003, p.21).

Algo "Inherente", es esencial y permanente en un ser, no se puede separar de él por formar parte de su naturaleza y no depender de algo externo (Oxford Languages, s.f., definición 1) o que por su naturaleza está de tal manera unida a algo, que no se puede separar de ello (Real academia Española, s.f., definición 1). La caracterización de la *medida* como algo "inherente" del objeto medido describe una epistemología que incluso se mantiene presente en la actualidad conviviendo con otras concepciones. Esta posición alcanzó un consenso generalizado, mucho más allá de la comunidad científica. Por ejemplo, el propósito de la obtención de objetividad se fundamenta en esta concepción, y ha sido aceptada como una necesidad que motivó la introducción del sistema métrico durante la revolución francesa (Kula, 1986; Mari, 2003).

Un problema fundamental que emergió de esta concepción tradicional, que consideraba a los numéros en el mundo, es que no se puede asumir que al obtenerlos se mantiene su carácter ideal. Esta fue la razón por la que se introduce una distinción entre cualidades primarias y secundarias. Las primarias eran consideradas como objetivas, y por lo tanto correctamente medibles, al ser observadas siempre se mantendrían iguales independientemente del sujeto que las mira, mientras que las secundarias podrían parecer diferentes a distintos sujetos (Mari, 2003).

> Los éxitos científicos y tecnológicos del método experimental durante los siglos XVII y XVIII sentaron nuevas bases para hacer de la actividad empírica de medición

[11]At the University of Chicago, the facade of the Social Science Research Building bears Lord Kelvin's famous dictum: 'If you cannot measure, your knowledge is meager and unsatisfactory'. Would that statement be there if it had been written, not by a physicist, but by a sociologist, political scientist or economist?

característica del trabajo científico. La huella del objetivismo que se consideró esencial para esta actividad se puede reconocer en el fundamento conceptual de la Teoría del Error propuesta por K.F. Gauss a principios del siglo XIX: se asume que cualquier magnitud física tiene su propio valor verdadero, por lo que la variabilidad experimental de los resultados de la medición se explica como derivada de la introducción de errores: "analizando el significado de las medidas que había obtenido, el experimentador intenta adivinar el valor real, el valor que habría producido el mejor instrumento alcanzable". (Idrac, 1960, en Mari, 2003, p. 5) [Traducción propia] [12]

5.2. Posición epistemológica representacional

Mari (2003) retoma la declaración de Carnap (1966), en donde se señala un síntoma del cambio conceptual que se estaba generando en la primera mitad del siglo XX en torno a la *medida*: ''Los fenómenos no contienen nada de numérico, sino solamente nuestra percepción. Podemos introducir conceptos numéricos estableciendo un procedimiento para medirlos. Los números son asignados a la naturaleza por nosotros mismos, porque los fenómenos exhiben solo las cualidades que observamos'' (p. 22) [Traducción propia][13]. En este sentido, la idea de que los números están en el mundo, y la *medida* de las *magnitudes* es lo que permite la obtención de su información, evoluciona hacia la idea de que los números son una construcción del pensamiento humano y que se los adjudica a *magnitudes* cuantificables que se reconocen como medibles en la naturaleza. Se realiza un cambio de concepto, de la idea de "obtener" la *medida*, a "adjudicarla".

[12] The scientific and technological successes of the experimental method during the XVII and XVIII Centuries laid new bases to make the empirical activity of measurement characteristic of the scientist work. Trace of the objectivism that was deemed essential to this activity can be recognized in the conceptual foundation of the Theory of Error proposed by K.F. Gauss at the beginning of the XIX Century: any physical quantity is assumed to have its own true value, so that the experimental variability of the measurement results is explained as deriving from the introduction of errors: ''while analyzing the meaning of the measures that he had obtained, the experimenter tries to guess the true value, the value hat would have produced the best achievable instrument".

[13] Phenomena do not contain anything of numerical, but only our sensation. We can introduce numerical concepts by establishing a procedure to measure them. Numbers are assigned to the nature by ourselves, because phenomena exhibit only the qualities we observe.

Más allá de esto, la característica dominante de “la objetividad” seguía presente, manteniendo aún criterios únicos de verdad. En esta época, se consideraba que se podía establecer relaciones claras entre estructuras algebraicas y el mundo empirico, de manera que en un proceso de obtención de medidas de este estilo, fuera posible mantener un isomorfismo entre la estructura algebraica de las medidas producidas, en relación con las cualidades de la realidad.

Entendiendo que la *medida* podría ser pensada en términos puramente matemáticos, se da una matemátización de la misma. En esta época, por ejemplo, surge la *teoría de la medida* abstracta de Borel (1898) (Gaete Peralta, 2019), y también la caracterización axiomática abstracta del *espacio métrico* por parte de Fréchet (1906) (Márquez García, 2018). La matemática, aunque se consideraba que trataba el estudio de objetos abstractos, era apreciada como una construcción del humano. Estrictamente, desde la lógica filosófica, esto impidío la consideración de la *medida*, como una propiedad inherente del objeto medido.

Esta conceptualización apenas relativiza la idea de que la *medida* es una propiedad inherente del objeto. Se seguía resaltando la idea de objetividad y que la abstracción matemática debería de preservarla. Este aspecto, por ejemplo, se puede apreciar al ver que se sigue manteniendo la idea de valor verdadero de la *medida*, como una propiedad inherente del objeto.

> A pesar de sus afirmaciones anti metafísicas, el Neopositivismo mantuvo de hecho el término “valor verdadero” y lo colocó en el centro de su concepto implícito de datos puros observables, aunque tratando de mantenerlo detrás de escena y, a veces, haciéndolo de alguna manera más confuso, como en el concepto de “valor verdadero convencional”, un oxímoron manifiesto (¿cómo puede la verdad, si existe, ser convencional?) emblemático de esta situación conflictiva es el cambio terminológico de "el valor verdadero" a "un valor verdadero". ¿Cómo es posible que algo realmente verdadero sea al mismo tiempo indeterminado? (Mari, 2003, p. 22) [Traducción propia] [14]

[14] In spite of its anti-metaphysical claims, NeoPositivism maintained in fact the term “true value”, and put it at the core of its implied concept of observable pure data, although trying to keep it behind the scenes and sometimes making it somehow fuzzier, as in the concept of “conventional true value”, a manifest oxymoron (how can truth, if existing, be conventional?) emblematic of this troubled situation is the terminological shift from “the true value” to “a true value”. How can something actually true be at the same time indeterminate?

Nosotros consideramos, desde la postura teórica de la Socioepistemología, que pueden haber "valores de verdad" relativos a las características de un contexto determinado, y a la racionalidad de una cierta comunidad (principios de *relativismo epistemológico* y *racionalidad contextualizada*). Lo que sucede aquí, es que esta idea es contradictoria con la idea de objetividad absoluta que aún se mantenía, y requirió de más reflexión para poder conceptualizarla de manera correcta. Las interrogantes que se hacen explicitas en la referencia anterior, no encontraban aún respuestas claras, aunque fueron predecesoras de una concepción epistemológica de la *medida* que considera la relatividad del pensamiento humano. En este sentido, debido a los intereses de esta investigación, en donde asumimos que este saber es considerado como una construcción social basado en prácticas, consideramos que con los procesos de matemátización abstracta, se mantiene una concepción epistemológica que deja fuera de la interpretación del fenómeno, al sujeto (individual o social) que produce la *medida*.

> Esto resalta que P2 [posición representacional] mantiene una postura metafísica sobre el rol de la verdad en la medición (...). Mientras que su diferencia básica con P1 [posición metafísica] es el énfasis en la intermediación informativa que da la representación [matematización], P2 todavía asume las propiedades empíricas como los elementos a priori sobre los que puede fundamentarse la construcción de las escalas, y luego la propia medida. Se supone tales propiedades como observables independientemente de la medición y, por lo tanto, desempeñan el papel de la realidad según la cual la verdad de la representación debe determinarse: la medición no tendría derecho a determinar la verdad, sino sólo a preservarla, mapeando adecuadamente las propiedades empíricas hacía los símbolos. (Mari, 2005, p. 7) [Traducción propia][15]

En este sentido, Mari (2003, 2005) mantiene que la matemátización de la *medida*, reproduce la idea de que esta es una propiedad inherente del objeto. Podría interpretarse entonces, que para esta

[15] This highlights that P2 [posición representacional] maintains a metaphysical stance on the role of truth in measurement (…). Wshile its basic difference with P1 [posición metafisica] is the emphasis on the informational intermediation given by the representation [matemátización], P2 still assumes the empirical properties as the a priori elements on which the scale construction, and then the measurement itself, can be founded. Such properties are assumed to be observable independently of measurement, and thus play the role of the reality in accordance to which the truth of the representation has to be determined: measurement would not be entitled to determine the truth, but only to preserve it, by suitably mapping empirical properties to symbols.

concepción, las *medidas* son valoraciones numéricas que mantienen las relaciones de los valores verdaderos inherentes de las cosas *medidas* (relación de isomorfismo). Lo que si se reconoce en esta época, es la idea germinal que comienza el transito desde la posición epistemológica metafísica de la *medida*, hacia la relativista. De esta manera, Mari (2003) concluye que, en este período (primera mitad del siglo XX), la concepción epistemológica dominante fue:

"Las medidas son resultados de operaciones [matemáticas] que preservan las relaciones observadas entre las cosas medidas"

Posición epistemológica representacional de la medida (Mari, 2003, p.21).

5.3. Posición epistemológica *r*elativista

Una última concepción considerada vigente en la actualidad admite una visión relativista de las prácticas que involucran la *medida.* El sentido de la verdad de esta debe ser interpretado desde los factores que conforman su contexto, incluso si estos son sociales, o si estos son posturas tomadas por el observador para instrumentar *medidas* (Mari, 2003). Se considera que los procesos están influenciados por racionalidades de las comunidades (para nuestros objetivos, no consideramos que sean estrictamente científica). En este sentido también, Mari et al. (2018) señalan el concepto de *intersubjetividad*. Los criterios de objetividad de la *medida*, pueden configurar una interpretación limitada. Al construir socialmente una idea de *medida*, en una comunidad que comparte determinados significados e intenciones, esta puede interpretarse de igual manera por los integrantes de la comunidad. Es decir, se mantiene una objetividad restringida a los miembros que comparten los significados (intersubjetividad). Desde la *TSME* (Cantoral, 2016), esta concepción implicaría el reconocimiento de una *racionalidad contextualizada,* el saber ha de interpretarse en función del contexto en donde se produce.

> Ninguna técnica formal para evaluar la incertidumbre de la medición puede ser el "sustituto del pensamiento crítico, la honestidad intelectual y la habilidad profesional"; la calidad y utilidad de la incertidumbre citada para el resultado de una medición depende en última instancia de la comprensión, el análisis crítico y la

> integridad de quienes contribuyen a la asignación de su valor". (Mari, 2003, p. 23) [Traducción propia][16]

De manera concreta, Mari (2003) concluye que, en la actualidad, la concepción epistemológica de la *medida* que ha ganado terreno en la ciencia es la siguiente:

"Las medidas son resultados de operaciones reconocidas como adecuadas para su objetivo de obtener información sobre las cosas medidas"

Posición epistemológica representacional de la *medida* (Mari, 2003, p.21).

La *TSME*, considera en sus principios estos aspectos relativistas en cuanto a la concepción de los saberes. De la posición de Mari (2003), se puede interpretar el valor funcional que se destaca al señalar lo que podría ser, en un sentido amplio, una *medida* para esta última concepción:

> Esta última Posición se ha expresado intencionadamente en términos muy genéricos. De hecho, nuestra reconstrucción tentativa de una "historia conceptual de la medición" llega a su fin aquí. Una respuesta a lo que hemos llamado el problema epistemológico general de la medición no puede ser de naturaleza metafísica (Posición 1) y una caracterización formal no es suficiente para ella (Posición 2), creemos que la búsqueda de las razones de la comúnmente "adecuación especial" reconocida de la medición (Posición 3) es la forma correcta de hacer frente a este problema. (Mari, 2003, p. 24) [Traducción propia][17]

---

[16] No formal technique for evaluating the measurement uncertainty can be the ''substitute for critical thinking, intellectual honesty, and professional skill; the quality and utility of the uncertainty quoted for the result of a measurement ultimately depends on the understanding, critical analysis, and integrity of those who contribute to the assignment of its value''.

[17] This latter Position has been intentionally stated in very generic terms. Indeed, our tentative reconstruction of a 'conceptual history of measurement' comes to an end here. If an answer to what we have called the general epistemological problem of measurement cannot be metaphysical in nature (as for Position 1) and a formal characterization is not enough for it (as for Position 2), we believe that the search for the reasons of the commonly recognized 'special adequacy' of measurement (as for Position 3) is the correct way to cope with such a problem.

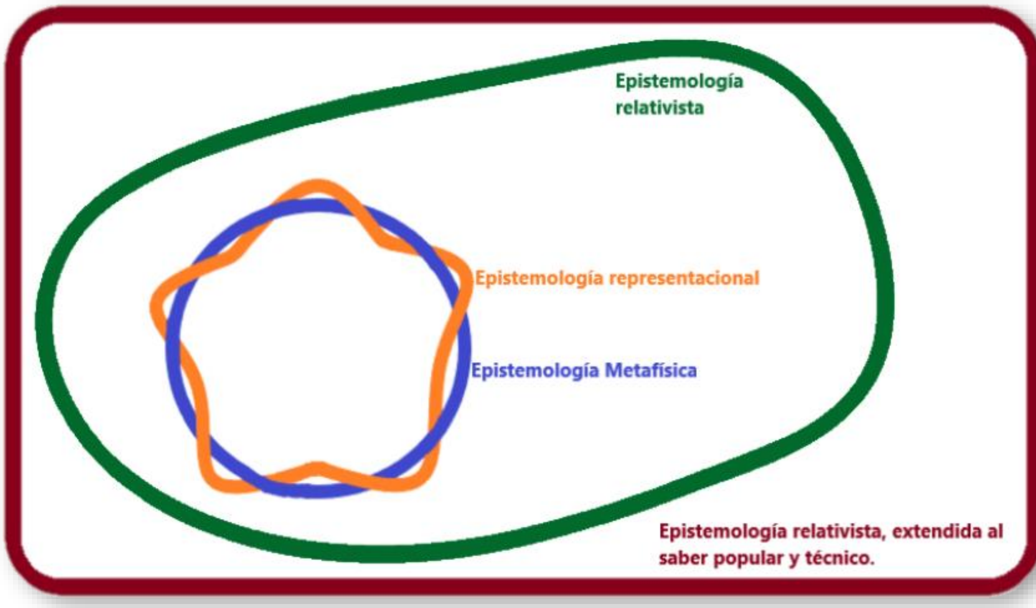
5.4. Convivencia y jerarquías de epistemologías. Interpretación en el dME.

Hemos interpretado, que estas concepciones epistemológicas conviven en la actualidad (*figura 5.1*). Cada etapa conceptual de la *medida* amplió la forma de entenderla, y los lugares en donde identificarla. La concepción final relativista considera que una *medida* debe de ser considerada como adecuada o no, según la funcionalidad que aporta en el contexto particular en el que emerge.

Esto no excluye, que una medida concebida desde la epistemología representacional pueda ser considerada pertinente en algunos escenarios. Hemos podido reconocer algunos en donde esta es funcional. Un ejemplo, es la *métrica del supremo* para *funciones continuas* en un intervalo cerrado (presentada en las *secciones 1.2 y 4.4*). En este contexto, la *medida* de una *función continua puede* ser considerada como una propiedad inherente de estas, ya que poseen un valor ideal abstracto. A pesar de configurar una epistemología que consideramos con rasgos metafísicos, es funcional para las intenciones de la comunidad matemática que buscó generalizar la noción de *conjunto compacto* a otros espacios. Podría interpretarse, desde la concepción relativista, que esta *métrica* presenta características de la epistemología metafísica, porque le es funcional y mantiene la racionalidad del contexto. Esto es un ejemplo, que nos permite visualizar que las concepciones epistemológicas conviven y se entrelazan.

Lo que hemos identificado como un problema, que debería de ser atendido, es que en el *dME* se pueden apreciar la presencia de algunas concepciones epistemológicas con más jerarquía que otras. La concepción *representacional* que prioriza las estructuras matemáticas axiomáticas como episteme dominante de la *medida* puede excluir el pensamiento métrico relativista, calificándolo de incorrecto, subjetivo, o falto de verdad (*Figura 5.2*).

Figura 5.1. *representación esquemática las conceptualizaciones epistemológicas de la medida.*



■**Epistemología metafísica**. expresión rígida, con la concepción de que la *medida* es un valor ideal inherente al objeto medido.

■**Epistemología representacional**. Flexibiliza apenas la concepción metafísica. Matematización de la *medida*. El valor de verdad de una *medida* es considerado aún inherente a los objetos medidos, sin dejar lugar a la interpretación. Es por esto, que la representamos anclada a la epistemología metafísica.

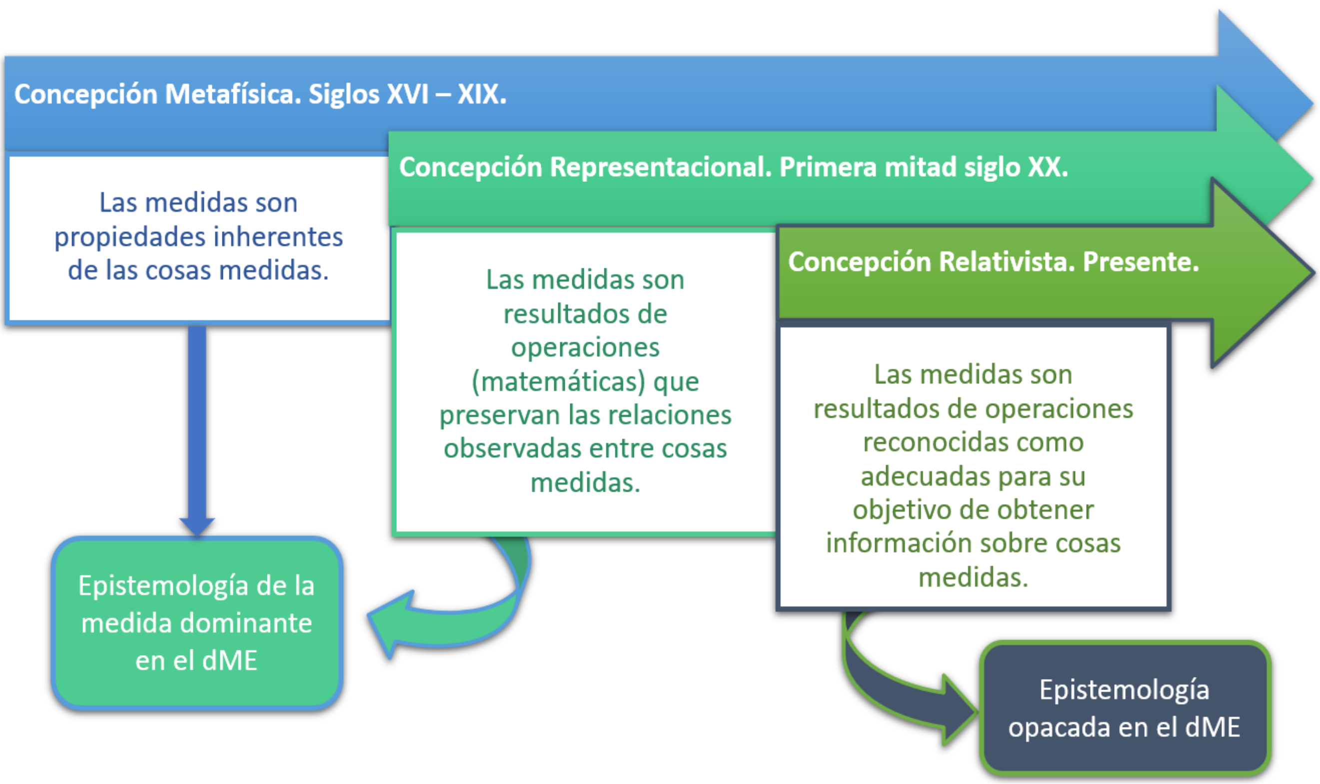
■ **Epistemología Relativista.** Las medidas son resultados de operaciones reconocidas como adecuadas para su objetivo de obtener información de las cosas medidas. El valor de verdad de las medidas depende de lo contextual. En Mari (2003, 2005), debido al interés de su trabajo, esta concepción se restringe a la interpretación de la *medida* como actividad de la ciencia.

■ **Epistemología relativista**, extendida al saber técnico y popular. De manera coherente con la visión Socioepistemológica (Cantoral, 2016), la concepción relativista de la *medida* puede ser interpretada en el conjunto completo de la sabiduría humana.

El análisis propuesto en esta sección, entre otras cosas, nos permiten interpretar el estado epistemológico de la *medida* en el *dME*. Consideramos que, la *centración en objetos* como vimos que aparece en los libros de texto de Topología y Análisis Matemático (y en algunos casos también en textos de secundaria al momento de proponer temas que involucren *medida*), reproduce un predominio epistemológico representacional con aspectos metafísicos, opacando la relatividad del pensamiento métrico de las personas.

Consideramos que la actividad de *medir* no es exclusiva de la actividad científica, sino que también vive en los saberes populares y técnicos (*figura 5.1*). En muchos casos, las son producto de extensas tradiciones prácticas heredadas de generación en generación, reproducidas debido a los significados intrínsecos que se generaban a partir de la funcionalidad que aportan en cada contexto (Kula, 1986) (se desarrolla en la *sección 6*). Consideramos pertinente tomar la postura de la concepción de la epistemología relativista de *la medida, s*iendo que esta permite interpretar prácticas de *medida* en escenarios no científicos, en donde los criterios de verdad son establecidos en función del contexto. Es por esto, que consideramos fundamental la *problematización del saber* según la *dimensión social* (Cantoral, 2016), para observar la funcionalidad de la *medida* en la evolución de las prácticas de la humanidad, más allá de las prácticas científicas.

Figura 5.2. Evolución conceptual epistemológica de la *medida* para la ciencia, interpretación de su influencia en el *dME*.



6. Descentración del objeto; la dimensión social.

6.1. Introducción.

Como identificamos en el capítulo de la *reconstrucción racional* (*sección 4*), el objeto *espacio normado* admite una interpretación que es coherente con la racionalidad de la *medida euclidiana*, y la generaliza. Al construir una *unidad de medida* y compararla con la *magnitud* a medir en un objeto, se identifica una razón que expresa una *medida.* Consideramos que esta admite una epistemología de la *medida* que puede identificarse en los usos de *unidades de medida* en contexto. Además, esta es de nuestro interés, ya que observamos la conexión matemática que hay entre los *espacios normados*, que expresan esta racionalidad de la *medida*, y los *espacios métricos* en donde se pueden interpretar *distancias* entre *magnitudes*.

Desde un punto de vista metodológico, en nuestra problematización del saber matemático desde la perspectiva socioepistemológica, optamos por la búsqueda de contextos en los que se pueda apreciar el uso de *unidades de medida*. Buscamos ver cómo estos se hacen presentes en distintas etapas históricas (historización), en prácticas de la actividad humana, influenciadas por tesituras socioculturales.

La divulgación de las *unidades de medidas* estandarizadas propuestas por el Sistema Métrico Internacional (*SMI*) como el metro, kilogramo, watt, etc., han influenciado directamente la manera en la que las personas en sus cotidianos y sobre todo en las aulas de matemática desarrollan ideas de *medida*. A partir del análisis de la obra “Measures and Men” (Kula, 1986), se identifican elementos históricos de construcción social de *unidades de medida y* de *métricas* más complejas ampliamente usadas, identificamos aspectos socioculturales influyentes en estos saberes. Antes de la divulgación de las unidades del *SMI*, las *unidades de medida* requerían de consensos generados por las comunidades que las usaban, favoreciendo significados compartidos provenientes de los contextos en donde estas aparecían con valor de uso. La historización nos permitió ver el carácter funcional del saber, en contextos en donde aún no existía la influencia del *SMI*. Pudimos observar que las epistemologías de la *medida* basadas en prácticas tienen particularidades de gran importancia que han sido excluidas del dME. En la primera mitad de este capítulo, daremos evidencia de estos aspectos.

En un segundo momento de esta sección, describiremos el caso de la *unidad de medida* "*tiro de arco*" para evidenciar de manera concreta que el *valor de uso* de ciertas *unidades de medida* expresa una concepción diferente a las del *SMI*. Esta configura una *métrica*, que expresa información de manera estimativa, sosteniéndose en una experiencia práctica y cotidiana de las comunidades que la utilizaban, siendo imposible su funcionamiento si no fuera por la experticia del uso de los instrumentos "*arco y flecha*". La selección de esta *unidad de medida* para el análisis fue producto de una elección metodológica (encontramos referencias claras de su existencia que explicaban su funcionamiento), y consideramos expresa un ejemplo claro de epistemología de la *medida* divulgada en la humanidad, y excluida del *dME*. Sostenemos que sus características son representativas de muchas otras presentes en la historia de la humanidad, incluso en la actualidad, siendo que su construcción social se diferencia de las *unidades de medida* del *SMI*.

En otra instancia, señalamos la existencia de *métricas* que requieren de articulaciones complejas de otros elementos: *métricas* basadas en *unidades de medida* previamente institucionalizadas, el reconocimiento de proporciones y elementos contextuales. Esto fue fundamental en nuestra problematización, ya que nos permitió realizar interpretaciones para nuestra *reconstrucción racional* que considera resignificaciones del objeto *espacio métrico,* identificando pensamiento matemático en el saber popular.

A partir del análisis de los *objetos matemáticos* que realizamos en la *sección 4*, observamos que la existencia de una *unidad de medida* configura una estructura de *espacio normado*, y que este genera un *espacio métrico*. Este argumento nos permite inferir la existencia de resignificaciones del *espacio métrico* en escenarios en donde emergen *unidades de medida* con valor de uso. Posteriormente, identificamos resignificaciones del *espacio métrico* en la construcción social de *métricas* con elaboraciones más complejas. En específico en la práctica de *medir* distancias inaccesibles que reconocen Espinoza et al. (2018), y en la práctica de *medir* terrenos de siembra según su *valor productivo*, que señala Kula (1986). Siendo que las *unidades de medida,* son evidencia de la sabiduría que la humanidad ha generado en torno a la *medida*, tan fundamental y divulgada en sus prácticas, los procesos de *resignificación progresiva* han producido *métricas* de mayor complejidad que posibilitan medir *magnitudes* de otra naturaleza, y generar comparaciones entre las mismas.

Lo que se reconoce como una concepción epistemológica relativista en la evolución conceptual de la *medida* (Mari, 2003), que recién se hace presente en la segunda mitad del siglo XX en el marco del desarrollo científico, sostenemos que describe de manera correcta muchas de las prácticas métricas en la actividad humana en general. Cada proceso de obtención de medidas debe de interpretarse desde la visión del grupo social que las produce, en función de su racionalidad, considerando su intencionalidad e identidad (Cantoral, 2016).

6.2. Significados sociales de la medida

A partir del estudio y análisis de literatura de corte social y antropológica (Angel et al., 2010; Chan, 1995; Gyllenbok, 2018; Harvey y Williams, 1980; Kula, 1986; Sierra, 2008), observamos que las prácticas que involucran a la *medida*, así como el mismo concepto, han evolucionado históricamente adecuándose en cada momento según distintos requerimientos sociales. Las nociones que hoy tenemos no son las que han existido siempre. Una diferencia radical, es que las *unidades de medida* globalmente estandarizadas ampliamente divulgadas en la actualidad son un fenómeno relativamente nuevo en la historia de la humanidad, y que ha afectado directamente la manera que tenemos de comprender los fenómenos que involucran ideas de *medida*.

> El hecho de que el kilogramo represente el peso de diez centímetros cúbicos de agua a la temperatura de 0° centígrados, o que el metro represente, (en sentido estricto, inicialmente representó) 1/40.000.000 de meridiano, no tiene ningún significado social inherente. La inmensa mayoría de las personas que emplean medidas desconocen estos hechos y nadie es consciente de esto cuando realmente las utiliza. Por el contrario, las medidas de las sociedades primitivas, las medidas europeas de principios de la Edad Media y las medidas populares que nos han descubierto los etnógrafos sí tienen un cierto significado social definido que explica el tamaño de las unidades, su variedad en el espacio y, en algunos casos, su mutabilidad en el tiempo. (…) después de todo, el sistema métrico, cuya aceptación supuso que la unidad de

> medida se basara en un fenómeno astronómico independiente del hombre, sólo ha estado entre nosotros desde hace un siglo y medio. (Kula, 1986, p. 4) [Traducción propia][18]

En la actualidad el proceso de estandarización del metro, no se realiza en comparación con la medida del meridiano. Se ha establecido recientemente por el *SMI* que la estandarización del metro, se produce al definirlo como la longitud rectilínea recorrida por la luz en el vacío durante un intervalo de tiempo de $1/299.792.458$, expresado en segundos (David et al., 2019) (*figura 6.1*). La técnica que permite este método de estandarización del metro se podría reproducir en muchos laboratorios a lo largo del mundo, como mencionó el Premio Nobel de Física de 1997, Bill Phillips en la 26ª "*General Conferencen on Weights and Measures*", que sucedió en Versalles en noviembre del 2018[19]. Uno de los objetivos de este cambio, es que el metro no esté referenciado a un modelo físico concreto que podría deteriorarse con el paso de los años, sino que sea definido según invariantes físicas identificadas en la naturaleza.

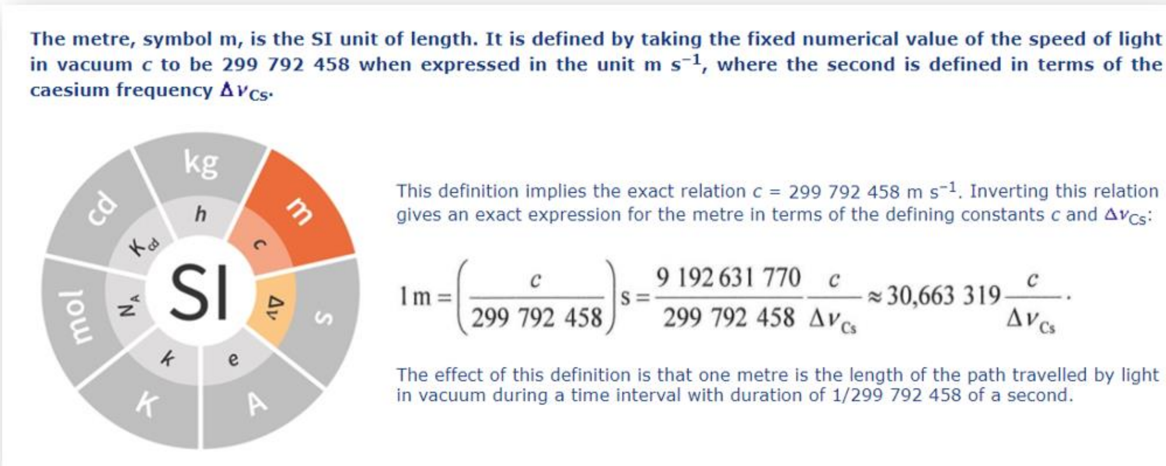
Este tipo de procesos de estandarización de la *medida*, que posibilitan un consenso en cuanto a la *magnitud* del metro (y también de otras unidades) con un grado muy alto de precisión, es un logro muy importante de la metrología y la evolución de los procesos de medición de la humanidad, sin el cual serían impensables muchos de los avances científicos que se han alcanzado en la actualidad. Por otro lado, considerando el interés de nuestra investigación de reconocer significados asociados a la *medida*, nos llamó la atención que de la misma manera que Kula (1986) señalaba que el establecimiento del metro en proporción con la *medida* de un meridiano terrestre no poseía significados sociales inherentes, este tipo de definiciones de las *unidades* estandarizadas del *SMI*,

[18] The fact that the kilogram stands for the weight of ten cubic centimeters of water at the temperature of 0° centigrade, or that the meter stands (or, strictly speaking, initially stood) for 1/40,000,000 part of the meridian, has no inherent social significance whatsoever. The overwhelming majority of people who employ measures are ignorant of these facts and none are mindful of them when actually using such measures. By contrast, the measures of primitive societies, the early medieval European measures, and folk measures that ethnographers have uncovered for us do have a certain definite social significance that explains the size of units, their variety across space, and, in some cases, their mutability over time (…) After all, the metric system, whose acceptance meant that the unit of measurement was based on an astronomical phenomenon independent of man, has been with us only for a century and a half

[19] El video de la conferencia está disponible en el siguiente enlace: https://www.youtube.com/watch?v=uPD7psTc8Ww&t=120s, en el canal oficial del BIPM (Bureau International des Poids et Mesures).

tampoco los tendría. Es decir, asumimos que ningún constructor, carpintero, arquitecto, o muchas personas en sus prácticas cotidianas al hacer uso del metro, piensan en esta definición formal, ni en que es una fracción del meridiano terrestre.

Figura 6.1. Estandarización del metro.



Recuperado de: https://www.bipm.org/en/measurement-units/

Las ideas de medida han existido desde los orígenes de las civilizaciones, perdurando y adecuándose a los cambios históricos. La literatura, la ética, la ciencia, la ingeniería, el arte, la arquitectura, etc. son considerados elementos que se desarrollaron en relación directa con las civilizaciones, y de la misma manera se considera al conocimiento matemático y en particular con protagonismo la *medida* y sus prácticas asociadas (Gyllenbok, 2018; Redman, 1990).

> Las unidades de medida han sido esenciales en todas las civilizaciones a lo largo de la historia. Desde los amaneceres de la humanidad, el hombre ha ideado, por necesidad, diversas medidas rudimentarias para ayudarse en la vida cotidiana. Suponemos que el homo sapiens del Paleolítico (2.500.000 a.n.e - 9000 a.n.e) era capaz de experimentar las estaciones, lo cercano y lo lejano, lo pesado y lo ligero, lo grande y lo pequeño, etc. Las primeras pesas eran simples piedras, se utilizaba una cáscara vacía para medir la capacidad, y las partes del cuerpo como la longitud y la anchura de los dedos, los codos y la envergadura del cuerpo, eran adecuadas para la mayoría de las necesidades de medición de la longitud. El tiempo se medía

> probablemente por los períodos del sol, la luna y otros cuerpos celestes. (Gyllenbok, 2018, p. 20) [Traducción propia][20]

Gyllenbok (2018), explicita sistemas métricos basados en *unidades de medida* que se han documentado en un grupo amplio de civilizaciones, en lugares geográficos y épocas distantes. Como pueden ser: Antigua China (2100 a.n.e.[21] - 1368), Babilonia (1894 a.n.e. - 1120 a.n.e.), La civilización Maya (1800 a.n.e. - 900), Antiguas culturas hindú, budista y jainista (1700 a.n.e. - 150 a.n.e.), Imperio Azteca (1428 a.n.e. - 1521), Arabia Antigua (900 a.n.e. - 632), Cartago (814 a.n.e. - 146 a.n.e.), Antigua Grecia (776 a.n.e. - 323 a.n.e.), Imperio Bizantino (330 - 1453), entre varias otras.

La civilización Azteca, tenía un gran desarrollo en torno al uso de *pesas y medidas*. Harvey y Williams (1980) mencionan que el idioma *Náhuatl*, hablado por esta civilización, refleja la importancia cultural de la medida y que, al observar el mercado en la capital de Tenochtitlán Hernán Cortés destacó en sus escritos: "Todo es vendido según conteos y medidas" (p. 499)[22]. Las *medidas* de longitud aztecas estaban calibradas por las dimensiones del cuerpo humano. Después de la invasión española, el sistema azteca se correlacionó con el sistema castellano. Por ejemplo, el equivalente aproximado de la vara española era el *Yollotli*, la medida desde el centro del pecho hasta la mano extendida (*Tabla 6.1*) (Gyllenbok, 2018).

Llama la atención, la relación de proporcionalidad entre el *Yollotli* y la Vara española, en proporción 1:1, debido a que podría parecer bastante casual. Por otro lado, es una *unidad de medida* antropométrica de fácil uso y acceso. El *Yollotli*, entendido como la distancia del centro del pecho hasta una mano extendida, es la mitad de la distancia entre mano y mano, cuando los brazos están extendidos. Esta última unidad, era conocida también en Europa, desde épocas incluso anteriores a nuestra era, continuó en uso al menos hasta el siglo XIX (Cooperrider y Gentner, 2019; Gyllenbok, 2018; Kula, 1986) y probablemente siga siendo utilizada aún en muchos escenarios en la actualidad. Por lo tanto, es preciso ver que dos civilizaciones, muy lejanas cultural y geográficamente, tenían

---

[20] Units of measurement have been essential in every single Civilization throughout history. Since the dawn of mankind, man has, through necessity, devised various rudimentary measures to assist him in everyday life. We assume that homo sapiens during the Paleolithic period (2,500,000 - 9000 BCE) was capable of experiencing seasons, near and far, heavy and light, big and small, etc. The early weights were simple stones, an empty shell was used for measuring capacity, and parts of the body, like lengths and widths of fingers, cubits, and body spans, were adequate for most needs in length measurement. Time was probably measured by periods of the sun, moon, and other heavenly bodies.

[21] a.n.e.: “antes de nuestra era”.

[22] Everything is sold by count and measure.

una *unidad de medida* compartida. Para devenir en saber, el conocimiento debe de tener un carácter funcional (Cantoral, 2016), entonces podríamos adjudicar, que la unidad *Yollotli*, *Vara española*, “*Fathom*”, etc. con sus pequeñas diferencias, pero siempre significadas como la extensión entre dos manos extendidas o de una mano hasta la mitad del pecho, emerge por el valor funcional que provee debido al manejo que permite, y la simple ejecución de la medida en muchos contextos, además de que la longitud que existe entre las dos manos extendidas, está siempre presente en los contextos en donde aparece el pensamiento humano. En donde está la mente está el cuerpo, siendo factible que se conformen *unidades de medida* antropocéntricas del estilo.

Tabla 6.1. Interpretación actual del sistema métrico basado en el *Yollotli*.

Metros	*Matlacicxitla*	*Tlalquahuitl*	*Niquizantli*	*Maitl*	*Mitle*	*Yollotli* ≈ Vara española
2.786	1	$1+\frac{1}{9}$	$1+\frac{1}{3}$	$1+\frac{2}{3}$	$2+\frac{2}{9}$	$3+\frac{1}{3}$
2.508		1	$1+\frac{1}{5}$	$1+\frac{1}{2}$	2	3
2.090			1	$1+\frac{1}{4}$	$1+\frac{2}{3}$	$2+\frac{1}{2}$
1.672				1	$1+\frac{1}{3}$	2
1.254					1	$1+\frac{1}{2}$
0.836						1

	Yollotli ≈ Vara española	*Tlacxitl*	*Molicpitl*	*Xocpalli*	*Macpalli*	*Centlacol*	*mahpilli*
0.836	1						
0.696	$1+\frac{1}{5}$	1					
0.417	2	$1+\frac{2}{3}$	1				
0.278	3	$2+\frac{1}{2}$	$1+\frac{1}{2}$	1			
0.209	4	$3+\frac{1}{3}$	2	$1+\frac{1}{3}$	1		
0.139	6	5	3	2	$1+\frac{1}{2}$	1	
0.174	48	40	24	16	12	8	1

Nota: Algunos de los significados de las *unidades de medida* y de las palabras son conocidos. Por ejemplo: ***Yollotli:*** Distancia desde el esternón hasta la punta de los dedos de un brazo extendido. La palabra también significa “corazón”. ***Mitle***: la distancia entre el codo y los extremos de los dedos de la otra mano. ***Maitl***: distancia entre las manos extendidas (por lo tanto, dos *Yollotli*). La palabra también significa “manos”. ***Niquizantli***: distancia desde el suelo bajo un pie hasta los dedos extendidos del brazo opuesto levantado. ***Molicpitl:*** distancia desde el codo a los extremos de los dedos del mismo brazo. La palabra “molictli” significa “codo”. ***Macpalli:*** la distancia que ocupa la palma de una mano. La palabra también significa palma. ***Mahpilli:*** largo de un dedo de la mano (falange distal). La palabra también significa “dedo”. Relación entre las *unidades de medida* recuperadas de (Gyllenbok, 2018). Significados de las palabras recuperados de Baeza (2016) y de https://gdn.iib.unam.mx.

Podemos considerar al *Yollotli* (también sus equivalentes en otras civilizaciones), como la *unidad medida* que se significa como la distancia del centro del pecho, hasta el final de la mano cuando el brazo está extendido. Esta *unidad de medida* generó un sistema métrico basado en la conmensurabilidad con respecto de ella. Si realizáramos una comparación directa de esta con el metro, podríamos interpretar una cierta arbitrariedad en la definición de este último (*tabla 6.1*).

Figura 6.2. *Braza* o "*fathom*" en relieve arquitectónico de mármol, del Egeo o Turquía occidental, 460–450 a.n.e..

Nota: "El relieve muestra varias medidas basadas en el cuerpo, incluida las brazas (cuya extensión completa está ausente), el pie (impresión sobre el brazo derecho) (Cooperrider y Gentner, 2019, p.4)". Figura Recuperada de Cooperrider y Gentner (2019, p. 4).

Kula (1986), muestra evidencias claras de que muchas civilizaciones desarrollaron sistemas métricos apoyándose en las dimensiones estables del cuerpo humano, debido a que aportaban una gran practicidad, por el constante y fácil acceso que se tiene a este tipo de *unidades de medida*.

> Para simplificar y presentar el asunto en términos estrictamente evolucionistas, podemos decir que la etapa más temprana en el desarrollo de los conceptos metrológicos del hombre es la antropomórfica, en la que las medidas más importantes corresponden a partes del cuerpo humano. Es en una etapa posterior que se hace referencia a las unidades de medida derivadas de las condiciones, objetivos y resultados del trabajo humano (...) El surgimiento de los conceptos y hábitos metrológicos del hombre es un aspecto muy importante de su aprehensión del mundo, y de la formulación de sus sistemas taxonómicos y conceptos abstractos. El hombre primitivo midió el mundo por sí mismo; para medir objetos

> independientemente de él, empleó sus propias partes: pie, brazo, dedo, palma de la mano, brazos extendidos, paso, etc. (Kula, 1986, p. 5) [Traducción propia] [23]

"Una cosa es cierta: las medidas antropométricas, que habían comenzado a evolucionar en tiempos prehistóricos y que se habían mejorado sin cesar durante miles de años, cuando una vez que evolucionaron en un sistema coherente, sirvieron bien al hombre en su trabajo" (Kula, 1986, p. 28)[24]. En este sentido, se plantea que, estas medidas pueden considerase como una gran conquista del pensamiento matemático popular. Se requiere de un proceso de abstracción colectiva, para que *unidades de medida* construidas socialmente a partir de experiencia práctica, pudiera consensuar concepciones abstractas y así conformarse un sistema métrico, comprendido y compartido por la mayoría de los integrantes a nivel de civilización.

> Había un gran número de potenciales unidades, ya que hay un gran número de partes mensurables del cuerpo humano. Sin embargo, el punto de inflexión intelectual llegó con la transición de los conceptos concretos a los abstractos, del particular mi dedo, tu dedo, al general *el dedo*. Medidas como el codo, la envergadura y el pie gozaron de vigencia en nuestra civilización hasta hace muy poco tiempo (en espera del dominio completo del sistema métrico) pero se habían convertido en abstracciones. (Kula, 1986, p. 24) [Traducción propia][25]

Este tipo de medidas, también poseían significado generado a partir de la experiencia práctica, y del uso que se le daba a cada *medida*.

---

[23] To simplify, and to present the matter in strictly evolutionist terms, we may say that the earliest stage in the development of man's metrological concepts is the anthropomorphic, in which the most important measures correspond to parts of the human body. It is in a later stage that reference is made to units of measure derived from the conditions, objectives, and outcomes of human labor (…) The emergence of man's metrological concepts and habits is a very important aspect of his apprehension of the world, and of the formulation of his taxonomic systems and abstract concepts. Primitive man measured the world by himself; to measure objects independent of him, he employed his own parts: his foot, arm, finger, palm of his hand, outstretched arms, pace, etc.

[24] One thing, is certain: anthropometric measures, which had begun to evolve in prehistoric times and which had been endlessly improved over thousands of years, when once they evolved into a coherent system, served man well in his work.

[25] There were a great many potential units, since there are a great number of measurable parts of the human body. However, the intellectual turning point came with the transition from concrete to abstract concepts, from the particular my finger, your finger, to the general the finger. Measures such as the ell (elbow), the span, and the foot enjoyed currency in our civilization until quite recently (pending the complete dominance of the metric system) but they had become abstractions.

> K. Moszynski escribe: "Cada medida tenía un propósito diferente. El pie marcaba las distancias cuando se sembraban las papas, el ritmo, las distancias en general, y el codo, abreviado como “ell”, se aplicaba a la tela. El pescador campesino se refería a su red de “30 brazas de largo y 20 codos de ancho". Podrían proporcionarse fácilmente más ejemplos de este tipo. El asunto es de la mayor importancia, el sistema se derivaba nada más que de las tareas diarias: era más fácil medir la longitud de la red por las brazas y el ancho por el codo. (Kula, 1986, p. 4) [Traducción propia][26]

Kula (1986), aprecia que las prácticas de la *medida* han sido objeto de atención, de filósofos, navegantes, etnógrafos, textos religiosos, gobernantes, etc. Desde cada óptica se consideran distintos aspectos a reflexionar, pero de manera transversal se puede apreciar que la *medida* se ha considerado como un parámetro que puede expresar el grado de desarrollo de una civilización.

> En las sociedades estratificadas, incluso en etapas muy tempranas de desarrollo, la honestidad en el empleo de pesas y medidas era muy apreciado y se ofrecían todo tipo de garantías al respecto. Por tanto, además de una garantía de la autoridad laica, surge también una de carácter sagrado. Muy pronto, también, encontramos que "la medida justa" se convierte en un símbolo de la justicia en general. Las prácticas ligadas a la actitud del hombre hacia la medición asumen el carácter de expresión simbólica de muchos elementos de la "filosofía social" popular. (Kula, 1986, p. 9) [Traducción propia][27]

---

[26] K. Moszynski writes: "Every measure served a different purpose. The foot marked the distances when potatoes were sown, the pace, distances in general, and the elbow, abbreviated to 'ell,' was applied to cloth. The peasant fisherman would refer to his net as being 30 fathoms long and 20 ells wide." Further examples of this kind could readily be provided. The matter is of the greatest importance. The system was derived from nothing other than daily tasks: it was easier to measure the length of the net by the fathom and the width by the ell.

[27] In stratified societies, even in very early stages of development, honesty in the employment of weights and measures is highly regarded and given all manner of guarantees. Therefore, in addition to a guarantee from the secular authority, one of a sacred nature emerges as well. Very early, too, we find that "the just measure" becomes symbolic of justice in general. Practices bound up with man's attitude to measurement assume the character of a symbolic expression of many elements of popular "social philosophy".

6.3. Lo métrico, una condición para la civilización

Según Norenzayan (2014), las religiones basadas en la fe en grandes dioses, como el Islam o el Cristianismo, fueron protagónicas en el desarrollo de grandes civilizaciones, en donde fue necesario generar conductas colaborativas entre individuos que mantenían relaciones anónimas. Por otro lado Haidt (2009), considera a estas religiones como fenómenos sociales complejos, fuentes de mucha información de las concepciones morales dominantes en una sociedad, así como la configuración de rasgos de su ideología y estructura. De esta manera es que los textos religiosos pueden ser analizados desde los métodos de la ciencia. Resaltamos esto, porque Kula (1986) señala variadas referencias de textos religiosos en donde se aprecia mandamientos morales sobre las prácticas que involucraban *medida*, considerándolas como una fuente de datos válida que expresa información sobre el rol y trascendencia que se le adjudicaba a dichas prácticas. A partir de la presencia de textos religiosos que señalan directamente el correcto uso de las medidas, se puede interpretar la importancia que tendrían en las civilizaciones que eran influenciadas moralmente por estas grandes religiones. De esta manera, se señala:

> Podemos seguir fácilmente esta evolución en la Biblia. En los Libros de Moisés, que constituyen un código de conducta social rodeado de sanciones sagradas, las normas relativas a las medidas todavía se expresan literalmente. Así leemos: "No haréis injusticia en juicio, en el metro, en el peso o en la medida. Justas balanzas, justas pesas, un justo Efa y un justo Hin, tendréis" (…) Esta evolución alcanza su apogeo con las palabras metafóricas de Cristo en el Nuevo Testamento: "Con la medida con que medís, os será medido; y a vosotros que oís, se os dará más"; o más elegantemente: "Dad, y se os dará; buena medida. Porque con la misma medida con que medís, se os volverá a medir". (Kula, 1986, p. 9) [Traducción propia][28]

---

[28] We can easily follow this evolution in the Bible. In the Books of Moses, which constitute a code of social conduct hedged with sacred sanctions, the norms relating to measures are still put literally. Thus, we read: "Ye shall do no unrighteousness injudgment, in meteyard, in weight, or in measure. Just balances, just weights, a just ephah, and a just hin, shall ye have." (…) This evolution reaches its apogee with the metaphorical words of Christ in the New Testament: "With what measure ye mete, it shall be measured to you: and unto you that hear shall more be given"; or more elegantly: "Give, and it shall be given unto you; good measure. For with the same measure that ye mete withal, it shall be measured to you again."

Este tipo de escritos religiosos tan influyentes durante tantos siglos, no eran simplemente recomendaciones, sino que eran grandes formadores de conducta. Esto implicaba incluso la aplicación de castigos mediante la fuerza, generalmente en respuesta a las desviaciones de los mandamientos, en este caso en cuanto a los buenos usos de los *pesos* y *medidas* (Kula, 1986) *(según la racionalidad de nuestro trabajo, los pesas también podrían ser medidas)*. Además, se interpretan como expresiones de preocupaciones sociales que señalan directamente una necesidad de generación de consensos, y el respeto de estos.

Algunas *unidades de medida* para ser funcionales han de ser interpretadas de igual manera por los integrantes de una sociedad, de esto depende directamente la posibilidad de expresar y nombrar cantidades de *magnitudes*, de modo de que todos los que son partes de esta sociedad, puedan compartir el significado de estas medidas. Los textos religiosos en donde se hace referencia al uso correcto de *pesos y medidas*, configuran narrativas de gran jerarquía social, que consideramos expresan lo trascendente que eran estos saberes para el desarrollo de las civilizaciones que requerían de complejas redes de colaboración. Cuando un saber se conforma como parte de una cultura, este genera narrativas que lo explican (Cantoral, 2016), en este caso un ejemplo de esto, son estos textos religiosos que imponían mandatos, que consideraban lo que era un comportamiento adecuado del uso de las *pesas y medidas*.

> En lo que se refiere a la sanción de las infracciones metrológicas, las penas más habituales por "malas" medidas iban dirigidas al bolsillo del infractor, y para las infracciones reiteradas la expulsión del pueblo era a veces la sanción máxima. El uso de la censura también era bastante común, y los castigos corporales también se usaban, por ejemplo, (…) el corte de dos dedos por emplear una medida deshonesta. Una pena extrema y curiosa se aplicó en Letonia en el siglo XIII. La ley implicaba una cierta proporción de tolerancia: la "mala" medida se castigaba con la muerte, pero solo si el falso codo, sobrepasaba la longitud correcta en más del largo de un dedo. (Kula, 1986, p. 21) [Traducción propia] [29]

[29] As far as punishing metrological offenses was concerned, the commonest penalties for "bad" measures were aimed at the offender's pocket, and for repeated offenses expulsion from the town was sometimes the ultimate sanction. The use of the pillory was also quite common, and corporal punishments were in use, too, for example, in Gdansk, the lopping off of two fingers for employing dishonest measure. An extreme and curious penalty was applied in Latvia in the thirteenth century, the law implying a certain ratio of tolerance: "bad" measure was punishable by death, but only if the false ell understated the correct length by more than a finger's breadth.

Antonio Pigafetta fue un marinero que acompañó a la travesía de Magallanes, en la primera vuelta alrededor del mundo que partió desde Sevilla en el año 1519 y volvió también a Sevilla en el año 1522. Este autor escribió de manera constante un diario, en donde describía aspectos que fueran relevantes de los lugares y comunidades que iban explorando. Este diario fue publicado en 1880, y escrito en 1533 (Pigafetta, 2018). De esta manera, señala aspectos que consideraba relevantes e importantes, como el comportamiento de los océanos, lugares de las islas, problemas de navegación, etc. Pero también aspectos que se consideraron de interés como, por ejemplo; los nuevos animales, la cultura encontrada, estructuras de las relaciones familiares, jerarquías sociales, el tipo de vestimenta, aspectos religiosos, etc. Entre todos estos aspectos que describe, también señala las costumbres que tenían uno de estos pueblos descubiertos en relación con el uso de *pesas y las medidas*, destacando que eran "amantes de la justicia". Según Kula (1986), Pigafetta estaba apreciando en sus declaraciones, lo que él mismo reconocía como formas civilizadas de convivencia, por lo que esta declaración dejaría ver que, desde su visión, la expresión que un pueblo manifiesta en torno a las prácticas de medir da indicios de cierto grado de evolución y madurez colectiva.

> Este pueblo, que es amante de la justicia, usa pesos y medidas. Hacen las balanzas de un pedazo de palo, sostenido hacia el medio por una cuerda, y de un lado está el platillo de la balanza atado a un extremo del fiel por tres pequeñas cuerdas, y en el otro hay una pesa de plomo que equivale al peso del platillo. Del mismo lado se añaden las pesas, que representan libras, medias libras, tercios, etc., colocando sobre el platillo las especies que se quiere pesar. Poseen también medidas de longitud y de capacidad. (Pigafetta, 1533, p. 40)

Por otro lado, Kula (1986), señala que en la descripción del Congo, que realiza Duarte López en 1591, se refiere a una tribu que se distingue por su alto grado de civilización, y señala que sus miembros "emplean números, pesos y medidas, cosas conocidas sólo en esas partes del Congo". En Kula (1986), se señala que Montaigne en sus ensayos (1580), al escribir sobre el recién descubierto Nuevo Mundo, afirma que "tan recientemente como hace cincuenta años, la palabra escrita, los pesos y medidas, la ropa, el maíz o el vino eran desconocidos allí" (p. 11)[30]. De esta última declaración, Kula (1986) interpretar lo siguiente:

[30] "As recently as fifty years ago the written word, weights and measures, clothes, corn or wine were unknown there".

> Aunque se diferencia de Pigafetta en su valoración de los pueblos de las nuevas tierras recientemente descubiertas, Montaigne se suscribe sin embargo a la misma jerarquía de valores, reconociendo el empleo de pesos y medidas como un símbolo de civilización, similar al conocimiento de la escritura, el cultivo del maíz, la elaboración de vino, o el tejido de telas. (Kula, 1986, p. 11) [Traducción propia] [31]

Creemos que estos son indicios de que las prácticas que involucran *medida,* han estado presentes globalmente, y han llamado suficiente la atención como para que sean señaladas en las referencias que hemos mencionado. Incluso se podría interpretar de esta información y las reflexiones de Kula (1986), que el empleo de *pesos y medidas* puede ser un emblema de civilización, e incluso una condición necesaria para el desarrollo de estas. Es decir, al ver indicios de que la *medida* ya era un objeto de interés intelectual y considerado importante no solamente para matemáticos, sino para exploradores, filósofos o religiosos, como en el caso de Pigafetta, Montaigne o lo textos antes citados, concuerda con esta interpretación de la *medida* como una condición para el desarrollo de las civilizaciones.

Algunas preguntas que nos hicimos a esta altura: ¿En qué se diferencian estas nociones de *medida* a las que se referían Pigafetta o Montaigne, con respecto de las dominantes en la actualidad? Si contemplamos que, entre estas épocas y la actual se dio el surgimiento del *SMI*, que revolucionó la manera en que las sociedades se vinculaban con las *unidades de medidas*, no podemos asumir que se interpretaba o interactuaba con la *medida* de la misma manera que lo hacemos ahora. ¿Cómo funcionaban las medidas? ¿Cómo se constituían? Nosotros asumimos que la información que podamos encontrar a partir del análisis de las características de estas *unidades de medidas* previas al *SMI*, nos daría luz sobre las prácticas de la *medida* en la actualidad.

Kula (1986) nos aportó mucha información, al mostrarnos en profundidad y de manera bien documentada, cómo se fueron conformando distintos tipos de *métricas*. Muchas de estas basadas en *unidades de medida* que, emergiendo de contextos a partir de su funcionalidad, tenían un significado social propio y podrían parecer extrañas desde la racionalidad dominante del pensamiento actual. En esta obra se reconocen *unidades* que emergen del comercio, el transporte,

[31] Although he differs from Pigafetta in his appraisal of the peoples of the newly discovered lands, Montaigne nonetheless subscribes to the same hierarchy of values, acknowledging the employment of weights and measures as a mark of civilization, equal to the knowledge of writing, the cultivation of corn or the making of wine, or the weaving of cloth.

los sistemas de producción, la guerra, etc. En la siguiente sección, plantearemos una descripción general de algunas de estas *unidades de medida*. Nos interesará ver cómo estas eran consensuadas y aceptadas con su valor de uso en distintos contextos. Posteriormente nos detendremos en algunas, para generar un análisis con mayor profundidad de sus particularidades.

6.4. *Unidades de medida* no estandarizadas, la *medida* antes del Sistema Métrico Internacional

Las distintas maneras de medir que se han desarrollado en contextos diferenciados convivían intrincadamente con un significado producido por el valor funcional que tenían. Compartimos aquí algunos contextos que hemos logrado identificar en donde emergen *unidades de medida*, con significados inherentes que se mantenían aunados a las mismas, siendo difícil separarlos de estas ya que, en muchos casos, se asociaban a elementos o fenómenos del contexto.

> El contenido social inherente al sistema de medidas imperante sirvió para asegurar su longevidad. Los galos, aunque recibieron de los romanos su arte de agrimensura y la institución de los censos, conservaron su propia unidad de medida tradicional. Del mismo modo, la milla romana (igual a 1.000 pasos o pasos dobles) no encontró uso en la Galia, ya que ese país, famoso por la cría de caballos, la fabricación de vagones y su caballería, prefirió conservar las leugae tradicionales (la posterior lieue francesa) de aproximadamente cuatro kilómetros. Incluso la administración romana de carreteras tuvo que aceptar como oficial la unidad de medida del país y se dedicó a marcar en los hitos distancias tanto en leugae como en millas, o en ocasiones solo en leugae para los conductores de los servicios postales imperiales, los superintendentes de carreteras y, en general, todos los asociados con el transporte en la Galia eran, después de todo, gente local. (Kula, 1986, p. 5) [Traducción propia][32]

[32] The social content inherent in the prevailing system of measures served to ensure their longevity. The Gauls, although they received from the Romans their art of surveying and the institution of the cadaster, retained their own traditional unit of measurement. Similarly, the Roman mile (equal to 1,000 paces or double steps) found no use in Gaul, since that country (renowned for horse breeding, the manufacture of wagons, and for its cavalry) preferred to retain the traditional leugae (the later French lieue) of approximately four kilometers. "Even the Roman administration of highways had to accept as official the country's unit of measurement, and took to marking on the milestones distances in leugae as well as

Las técnicas de transporte configuraban un contexto propició para la construcción de *unidades de medida* con significados asociados a su valor funcional. En este caso, las diferentes formas de trasportar productos, acordes a sus características y comercio (consistencia, caducidad, valor, distancia que ha de recorrer, etc.), generaban a partir de la reiteración intencionada de ciertas prácticas, el consenso de algunas estandarizaciones.

> En el comercio mayorista de productos básicos cuya producción era amplia, es en donde se determinan grandes unidades de medida, pero algunos productos básicos producidos en un área pequeña y vendidos por los minoristas se miden en unidades relativamente pequeñas que también se derivan del transporte. El maíz es un ejemplo de la primera categoría: aquí, el transporte determina la unidad muy grande. Por otro lado, el carbón presenta la segunda característica, medida por la canasta, al igual que los diversos productos medidos por el vagón. Una carga en barco, por la que a menudo se vende arena, es nuevamente, una medida determinada por el transporte. Y si la sal de las minas de sal de Rutenia se vende por carreta, entonces, sin duda, la carreta pronto se estandarizaría. (Kula, 1986, p. 6) [Traducción propia][33]

Otro factor importante, por el cual se buscaba estandarizar *unidades de medidas* heredadas del trasporte, era la búsqueda de implementación de impuestos sobre las transacciones comerciales por parte de gobernantes. Esto nos muestra cómo podrían ser varios los factores sociales que influenciaran el contexto, y la construcción de *unidades*. Kula (1986) muestra cómo en varios momentos históricos las intenciones de ejercer control por parte de gobiernos (de la naturaleza social que sean: señoríos feudales, reyes, religiones, estado, etc.), buscaba el control sobre las *unidades de medida*, debido a que esto facilitaba la gobernabilidad sobre una cierta región. Las unidades muchas veces eran las que a los gobernantes les convenía que fueran, de todas maneras estos aceptaban las *unidades* que poseían significados sociales y eran funcionales para las prácticas

---

in miles, or sometimes in leugae alone for the drivers of the imperial postal services, the road overseers, and, in general, all those associated with transport in Gaul were, after all, local people."

[33] In the wholesale trade of commodities whose production is dispersed, it is the large units that are so determined, but some commodities produced within a small area and sold by retailers are measured in relatively small units that are also derived from transport. Corn is an example of the former category: here, transport determines the very large unit of the last. On the other side, charcoal exhibits the latter characteristic, being measured by the basket, and so do the various products measured by the wagonload. A boatload, by which sand is often sold, is, again, a transport determined measure. And if salt from the Ruthenian salt mines is sold by the cartful, then, to be sure, the cartful will before long be standardized

de sus gobernados, ya que no era su intención limitar el buen funcionamiento (Kula, 1986). Es por esto por lo que negociaban con las tradiciones, aceptándolas porque reconocían la viabilidad que promovían, pero controlando la fluctuación de *las unidades de medida* para mantener el orden (Kula, 1986). El ejemplo de los Galos que preservaron sus medidas a pesar de ser conquistados por los Romanos, que fue citado anteriormente es un ejemplo claro de esto. Otros ejemplos claros se encuentran en las medidas producidas a partir de las técnicas de trasporte, en donde la intención de los gobiernos por cobrar impuestos se manifestaba.

> Por ejemplo, en Ginebra en los siglos XV y XVI la medida empleada en la determinación de impuestos a los comerciantes ambulantes que llegaban a la ciudad era el saco, llevado en pares dobles por el asno de carga. Aquí, tenemos un sistema que impone al contribuyente mismo, es decir, al comerciante, la necesidad de observar el estándar. Después de todo, lo que más le interesa es asegurarse de que el asno no se cargue ni se sobrecargue demasiado, ya que bien podría terminar en un paso alpino con sus mercancías esparcidas en el suelo rocoso junto a su bestia de carga caída. Tomemos otro ejemplo de una medida que se deriva de las fuerzas de producción en el transporte, en Brasil (Nordeste) hoy, el carro sirve como unidad de medida. Es una unidad pequeña, pero el interesado no se atreve a aumentarla, pues la construcción del carro es endeble y los animales de tiro débiles. (Kula, 1986, p. 7) [Traducción propia][34]

Por otro lado, Kula (1986) se refiere a cómo ciertas técnicas de producción desarrolladas a partir de largas tradiciones basadas en la experiencia y transmitida por generaciones, promovían el desarrollo de *unidades de medida*. En estos casos, estas eran funcionales en cada contexto reiterándose el hecho de que se generaban con un significado inherente propio.

[34] For instance, in Geneva in the fifteenth and sixteenth centuries, the measure employed in the assessment of taxes on traveling traders arriving in the town was the sack, as carried in double pairs by the pack-ass. Here, we have a system imposing upon the taxpayer himself, namely the trader, the necessity to observe the standard. After all, it is primarily in his interest to see that the ass should be neither too lightly loaded nor overburdened, for he might well end up on an Alpine pass with his wares strewn on the rocky ground beside his fallen beast of burden. To take another example of a measure that is derived from the forces of production in transport, in Brazil (Nordeste) today, the cartful serves as the unit of measurement. It is a small unit, but the interested party dare not increase it, for the cart's construction is flimsy and the draft animals weak.

> La asociación de medidas con las técnicas de producción (…) es bastante sorprendente en lo que respecta a los textiles, ya que la anchura de la tela está determinada por la anchura del telar, y la longitud de la pieza también está determinada en parte por consideraciones técnicas y en parte por las relativas a la organización social de la producción. La longitud de la pieza que comúnmente sale del telar se convierte, a su vez, en la unidad de longitud habitual para los textiles. Cuando los factores determinantes cambian, también cambia la longitud de la unidad en cuestión, aunque sin un cambio de nombre; y, naturalmente, esa longitud no será uniforme para diferentes tejidos, como el lino y el paño de lana, ya que los telares empleados en su confección son diferentes. Si el panel es la medida del vidrio, el tamaño del cristal lo determinaría el equipo de cortado de la cristalería. El tamaño de la lingotera con el que se mide el hierro en bruto depende de la técnica de liberación del metal fundido del horno de fundición primitivo. La barra, sin embargo, que es la medida del hierro forjado, tiene unas dimensiones derivadas de una técnica particular de fundición. (Kula, 1986, p. 6) [Traducción propia][35]

Los grados de error o exactitud (mucha o poca), también eran un asunto considerado, que influenciaba el valor de uso y significado de la *medida*. Si la *magnitud* a medir, por ejemplo, no era de gran valor, usualmente el sistema métrico para medirlo no requería de una precisión alta, y era preferida la practicidad que efectivizara una funcionalidad antes que una instrumentación que permitiera un grado alto de precisión (Kula, 1986).

> En cuya economía la extracción de polvo de oro jugó un papel importante, se contaba con un sistema de pesos muy avanzado. Por otro lado, los nómadas del Sahara, para quienes la distancia exacta de un pozo de agua a otro puede ser una cuestión de vida

[35] The association of measures with the techniques of production (...) is quite striking as far as textiles are concerned, for the width of the cloth is determined by the width of the loom, and the length of the piece also partly determined by technical considerations and partly by those relating to the social organization of production. The length of the piece commonly coming off the loom becomes, in turn, the customary unit of length for textiles. When the determinants change, so does the length of the unit in question albeit without a change of name; and naturally, that length will not be uniform for different textiles, such as linen and woolen cloth, since the looms employed in their making differ. If the pane is the measure of glass, then the size of the pane is determined by that of the milling equipment in the glassworks. The size of the pig with which raw iron is measured depends upon the technique of releasing molten metal from the primitive smelting furnace (or, in later time, from the blast furnace). The bar, however, which is the measure of wrought iron, has dimensions derived from a particular technique of smelting.

o muerte, tienen un rico vocabulario de medidas para largas distancias. También los cálculos en términos de lanzamiento de palo, tiro de arco, la distancia que lleva la voz; la distancia vista a simple vista desde el nivel del suelo, desde el lomo de un camello; o caminar distancias desde el amanecer hasta el atardecer, desde temprano en la mañana, a media mañana o al final de la mañana; la distancia a pie de un hombre sin carga que llevar, o con una carga que llevar, con un asno cargado, o con un buey; o un paseo por un terreno fácil o difícil. Estas medidas todavía se utilizan hoy en día, y encontramos referencias a ellas en fuentes históricas que se remontan a mil años o más. (Kula, 1986, p. 6) [Traducción propia][36]

[36] In whose economy the extraction of gold dust played a major part, had a very advanced system of weights. On the other hand, the Saharan nomads, for whom the exact distance from one water hole to another may be a matter of life or death, have a rich vocabulary of measures for long distances. Thus, they reckon in terms of a stick's throw or a bowshot; or the carrying distance of the voice; or the distance seen with the naked eye from ground level, or from a camel's back; or walking distances from sunrise to sunset, or from early morning, mid-morning, or late morning; or a man's walking distance with no load to carry, or with a load to carry, or with a laden ass, or with an ox; or a walk across an easy or a difficult terrain. Such measures are still in use today, and we find reference to them in historical sources going back a thousand years or more.

6.5. Una *unidad de medida* popular: “tiro de arco”

En Kula, (1986) se hace referencia a que algunas *unidades* deben su conformación al uso del “*arco y la flecha*”. Chan (1995), realiza también el planteamiento de que las primeras civilizaciones desarrollaron usos de la *medida*, influenciado por creencias filosóficas, estructuras sociopolíticas, condiciones económicas, y tradiciones culturales en general. Investiga el uso del *tiro de un arco* para *medir* longitudes, mostrando cómo esta emerge en civilizaciones identificadas con el uso de este instrumento, ya sea para la caza o el combate bélico. También se menciona que se han encontrado indicadores de que arrojar un objeto como base para conceptualizar *unidades* de longitud, ha sido una tradición popular en diferentes civilizaciones. "*A man can see a stone's throw and no farther*”, "*Grant me to come within spear-cast of that man*”, "*a spear's throw*”, "*spear-cast*”(Chan, 1995, p. 31)[37], son expresiones comunes con las que ejemplifica, que han sido identificadas de manera reiterada en textos antiguos de distintos índoles de la región asiática, haciendo siempre referencia en cada caso a *magnitud*es de longitud. Al ser el uso del *arco y fleca* una práctica reiterada, tiene sentido que se generara una *unidad de medida* que hiciera referencia al “tiro de arco”, más aún en civilizaciones en las que parte importante de su identidad se relacionaba con el uso de estos instrumentos.

Kula (1986), menciona que hay registros del uso “tiro de arco” como como referencia para la construcción de una *unidad de medida*, al menos en Hungría, Eslovakia y en Latvia entre el siglo XV y XVII. Por otro lado, Chan (1995) retoma fuentes de la civilización Eslava, Altaica, Indo-Tibetanos, China, Mongola, Turca y de Israel con referencias que persisten entre el siglo XIII hasta el XVIII. Esto nos permite identificar que este tipo de *unidades* fue de uso disperso geográficamente, y prolongado durante siglos. Se interpreta en Chan (1995) y Kula (1986) que esta *unidad* se usaba para estimar magnitudes de longitud, por lo general sobre la superficie de la tierra, que no eran simples de medir con las *unidades* antropocéntricas. Es decir, que se volvía particularmente funcional para estimar distancias dentro de rangos específicos, y sobre todo, cuando no se requerían altos niveles de precisión. No era funcional para medir longitudes de decenas de metros, tampoco lo era para medir grandes cantidades de longitud como podría ser la dimensión de un país. La funcionalidad

[37] "Un hombre puede ver hasta un tiro de piedra y no más lejos", "Concédeme que me acerque hasta tiro de lanza de ese hombre", "Tiro de lanza", “Lanzamiento de lanza”. [Traducción propia]

que se le daba, era para estimar longitudes de entre 150 hasta unos pocos miles de metros (Chan, 1995). Este tipo de *distancias* expresadas en *unidades de tiro de arco*, podrían ser estimadas de manera bastante aceptable. Asumimos que, para que fuera posible realizar esta estimación, y poder hacer a esta *unidad de medida* funcional, se requería que la comunidad tuviera una gran sensibilidad práctica con el arco y la flecha. Algunas de las civilizaciones que utilizaron esta *unidad*, incluso dependían de este instrumento para su supervivencia ya que se volvía determinante en la caza y en la guerra, actividades dominantes en su quehacer.

Desde las interpretaciones actuales, esta *unidad de medida* podría traducirse entre 150 hasta 500 metros (dependiendo de la región y considerando el lanzamiento de la flecha de manera oblicua, en 45°) (Chan, 1995). Mcleod (1965) estudia los alcances del tiro con arco en civilizaciones antiguas, y nos confirma que el anterior rango dentro de cual se puede considerar la *unidad de medida*, es coherente con el desempeño del arco antiguo. Sobre todo, en el continente de Asia, en donde el promedio general de alcance era mayor que en otras regiones. Como ya mencionamos, un aspecto destacable de esta *unidad de medida*, por el cual nos llama particularmente la atención, es el carácter estimativo de la misma. Con esto nos referimos a que, el margen de error que requiere de ser aceptado para su uso parecería ser bastante amplio, y contradice los ideales de precisión que podríamos tener a partir de las nociones de *medida* dominantes en la actualidad (al menos en el *dME*).

Por otro lado, también consideramos que la precisión obtenida del uso de esta *medida* podría ser mucho mayor de lo que nos podríamos imaginar. Probablemente así sería, ya que como muestra Chan (1995), los usuarios tenían una sensibilidad de uso del instrumento muy desarrollada, ya que convivían a lo largo de su vida con el *arco y la flecha*, incluso algunos se entrenaban para cazar en movimiento tirando desde el galope de un caballo. Por otro lado, los medios de producción de arcos y flechas, la fuerza del ejecutante y la técnica aprendida a partir de una amplia experiencia y tradición, conformarían y posibilitarían que los lanzamientos fuera suficientemente similares salvo casos excepcionales. Sin esta consideración, por más que aceptáramos que la *unidad* es funcional para realizar estimaciones, consideramos que no podría haberse consolidado e institucionalizado. Existen referencias de códigos legales en donde se usa esta *unidad* para establecer penalizaciones y multas. Esto sustenta el planteamiento anterior, porque no podría utilizarse para regular de manera abstracta un fenómeno, en donde podría haber discernimiento e intereses enfrentados, si la *unidad de medida* no estuviera plenamente institucionalizada, en el sentido de estar ampliamente aceptada socialmente, expresando una comprensión compartida de las *magnitudes* que permitiera la generación de consensos.

> En el código Oirat de 1640 de los mongoles occidentales, encontramos un conjunto de disposiciones relativas a las reglas que deben mantenerse en la caza. Los nómadas debían cazar cabalgando o acechando su presa. Durante una cacería, el orden es estrictamente cuidad. Quien adelantara o se parara al lado del cazador durante la cacería sería multado con cinco animales. Una persona que se salía de la línea y avanzaba "tres tiros de arco" por delante de los demás era multado con un caballo, "dos tiros de arco”, una oveja y "un tiro de arco", con cinco flechas. Por lo tanto, el tiro de arco, en la sociedad tradicional de Mongolia era reconocido como una unidad de distancia o longitud con implicaciones legales. (Chan, 1995, p. 43) [Traducción propia] [38]

Creemos, que sería errado pensar que el uso de esta *métrica* era imprecis. Esto sería interpretarla según la concepción dominante actual, en donde domina una epistemología de la *medida* que valora los niveles de precisión altos, determinando la concepción en torno a la *medida*. No hemos encontrado referencias en la literatura, que den evidencias de que este tipo de *unidades* no estén aún presentes en la sabiduría humana en la actualidad. Incluso podríamos inferir que sí siguen presentes. Por ejemplo, en muchos contextos populares es totalmente prescindible una alta precisión, sino que lo que se requiere es una expresión coloquial que estime *magnitudes*, y lo que sobresale es la necesidad de que esta pueda ser determinada de manera fácil y rápida (incluso instantánea), aprovechando una experiencia sensible en el mundo real compartida por los integrantes de una comunidad.

Consideramos que esta *unidad de medida* es un ejemplo de una de las tantas que pueden haber existido y pueden seguir existiendo. No es que nos interese particularmente estudiar la *unidad de medida* de *tiro de arco,* sino que la elegimos al ver su amplia presencia a lo largo de la historia en

[38] In the 1640 Oirat code of the Western Mongols, we find a set of provisions concerning the rules to be observed in hunting. Nomads were to hunt by driving or stalking their game. During a drive,order was strictly observed. Whoever passed or stood by the side of the hunter during hunt was fined five animals. A person who got out of line and advanced "three bowshots" ahead of the others was fined a horse, "two bowshots’’, a sheep, and "one bowshot," five arrows. A bowshot, therefore, was recognized in pastoral Mongolian society as a unit of distance or length with legal implications.

distintas civilizaciones y porque expresa la presencia de una epistemología de este saber matemático, que es excluida por el *discurso Matemático Escolar* actual.

En cuanto a prospectivas de investigación, es posible continuar el rastro de este tipo de *métricas*, en otros contextos, o regiones, incluso de épocas anteriores para identificar procesos de construcción social de este saber en las sociedades de épocas de antaño. Lo que es de nuestro interés en este momento, es reconocer aspectos evolutivos del saber de la *medida*. Este ejemplo, nos permite resaltar un tipo de uso de la *unidad de medida*, construido a partir de una experiencia práctica concreta, con un significado inherente asociado a un instrumento, que se preservó durante siglos en muchas regiones.

El hecho de que el uso del *arco y flecha* sea una práctica familiar y cotidiana de los miembros de las comunidades que utilizaban esta *medida,* es la que posibilitaba los consensos sociales necesarios para que un fenómeno físico pudiera ser tomado de referencia para construir una *unidad de medida*. De esta manera, permite la comunicación y una misma interpretación por parte de los integrantes de la comunidad en sus expresiones que describen *magnitudes* de longitud. Sin la consideración de la experiencia de los usuarios, la *unidad de medida* no podría haber sido institucionalizada, por eso decimos que expresa la racionalidad del contexto, y por lo tanto, una epistemología relativista del saber de la *medida.*

La concepción epistemológica metafísica, que plantea que la *medida* es una propiedad inherente del objeto que se mide, concebida de manera abstracta e ideal, pierde sentido en la consideración de la *métrica* que se genera a partir de esta *unidad*. Es claro, que esa posición epistemológica se genera a partir de la reflexión sobre las prácticas de *medir* de la ciencia, que requieren altos grados de precisión, y que no aceptarían expresiones de *magnitudes* mediante este tipo de *unidades.* Pero, cada comunidad genera sus propias *métricas* a partir de lo que considera funcional a sus intenciones. Lo que identificamos como un conflicto, es que en la matemática escolar normada por el *discurso Matemático Escolar*, dominan escenarios científicos, excluyendo otros usos y epistemologías de la *medida,* que están presentes en las prácticas de la humanidad, jerarquizando así un tipo de saber con respecto de otro.

Según nuestra postura teórica, entendiendo que en el saber sabio, el popular y el técnico en conjunto conforman la sabiduría humana (Cantoral, 2016), consideramos que en este tipo de prácticas también se construye conocimiento, y que es parte importante de la construcción social de la *métrica*, y por lo tanto, se podrían admitir resignificaciones del objeto: *espacio métrico (figura 6.3).*

En este sentido, al considerar la descentración del objeto, consideramos que en el uso de esta *métrica*, se podría interpretar que hay un espacio en donde se piensan medidas de longitudes dentro de un rango específico (entre 150 y unos pocos millares de metro, el espacio de los objetos que se mide no es el de todas las longitudes posibles, sino el de ciertos márgenes, configurados por el contexto). Hay un método conformado socialmente mediante la experiencia y la tradición, que permite la obtención y el consenso de *medidas*, con un grado de precisión suficiente para garantizar una funcionalidad adecuada. Sin esta, este tipo de *medidas* no podría haber persistido por tanto tiempo y lugares. Esta práctica, permite determinar una estimación de cuánta *distancia* existe, en términos de longitud, expresada mediante una *unidad de medida*: “a tiro de arco”.

Figura 6.3. Elementos de la *métrica* construida a partir de la *unidad de medida*: “tiro de arco”.

$$E$$

Espacio. Longitudes sobre la superficie de la tierra, entre 150 y unos pocos miles de metros (Chan, 1995).

$$\| \ \| : E \rightarrow \mathbb{R}$$

Métrica. Se reconoce un comportamiento suficientemente estable en la longitud que recorre el tiro de un arco. Se comparan *magnitudes* de longitud con la anterior para poder cuantificarlas, y generar formas discursivas de las mismas.

$$\|x\|$$

Medida. Cuantifica longitudes (evaluación), sobre la superficie de la tierra.

$$d(x,y) = \|x - y\|$$

Comparación - Distancia. La comparación de *magnitudes* del *Espacio* E, pueden ser expresadas en términos de cantidad de tiros de arco, expresando una idea *distancia*, en términos de *longitud*. Por ejemplo, cuánto más cercanos es el lugar X que el lugar Y, desde un lugar Z.

6.6. ¿Qué más además de la unidad de medida? Un ejemplo: distancias inaccesibles, en la obra de Stöffler (1513).

Espinoza et al. (2018) señalan el uso de una *métrica* para la obtención de medidas de longitudes inaccesibles. Para los objetivos de nuestra investigación, esto será un ejemplo de otro tipo de *métricas* que se hacen presentes en las prácticas en la historia de la humanidad. Hemos visto que la presencia y uso de *unidades de medida* es un fenómeno importante para el saber de la *medida*, pero sostenemos que los procesos de *resignificación progresiva* han posibilitado la construcción social de *métricas* más complejas. La determinación de *unidades de medida* y la comparación directa de *magnitudes* con estas, no es suficiente para producir *medidas* de cierto tipo de *magnitudes*. Las *unidades de medida* están presentes en la producción de todo tipo de *métricas*, pero en muchos casos no es el único factor determinante que posibilita su instrumentación. El caso que mostraremos en esta sección tiene el objetivo de ejemplificar la construcción social de este tipo de métricas.

Una de las interrogantes que nos planteamos originalmente al comenzar con esta investigación era: ¿Cómo se amplía el universo de espacios que se pueden imaginar cuando se piensa en *métricas*? ¿Se pueden proponer escenarios donde la noción de *distancia* no sea obvia? En este sentido, creemos que el carácter de "inaccesible" de las longitudes, es un elemento particular de este escenario que investigan Espinoza et al. (2018) que genera una epistemología de la *medida* a partir de una práctica concreta. Este carácter de "inaccesible", a pesar de que lo que se busca *medir* es una *magnitud* de longitud, distingue a este tipo de longitudes de otras sobre las cuales se pueden hacer comparaciones directas con las *unidades de medida*. Por este motivo consideramos que cambia la naturaleza de lo que se mide, ya no son longitudes como en otros ejemplos anteriores. En este escenario, la respuesta a la pregunta ¿Qué se mide?, debería de involucrar este señalamiento sobre la naturaleza inaccesible de las longitudes. Todos estos aspectos, son importantes para que emerja una *métrica*, *a priori* no evidente y que requiere de herramientas teórico-prácticas para poder instrumentarla, y una interpretación adecuada del contexto.

Espinoza et al. (2018) realizan un estudio de la obra *Elucidatio Fabricae Ususque Astrolabii*[39], publicada en 1513 por el matemático, astrónomo y clérigo alemán Johann Stöffler.

> Este fue uno de los primeros libros impresos acerca de la medición de distancias inaccesibles. Por tanto, es posible inferir de él aquellas ideas sobre medición que circulaban en Europa a principio del siglo XVI. Además, su autor escribió esta obra evitando la especificidad técnica, para así llegar a un público amplio, motivo por el cual encontramos en esta una estructura y organización de los conocimientos permeada por una intencionalidad de difusión masiva. Estos argumentos convierten a la obra de Stöffler (1513) en un referente interesante para explorar al saber matemático en la medición de alturas, longitudes y profundidades inaccesibles. En consecuencia, el objetivo de esta investigación es caracterizar al conocimiento puesto en uso en las proposiciones que tratan la medición de distancias inaccesibles en Stöffler (1513). (Espinoza et al., 2018, p. 250)

Con “longitudes inaccesibles”, en el caso de la obra de Stóffler (1533) se refiere por ejemplo a alturas de edificios. Para esto, se explican varias maneras de obtener estas *medidas* dependiendo de las condiciones situacionales del escenario que dependían de factores, incluso geográficos (Espinoza et al., 2018). Para poder realizar la medición, se requería de la identificación en el escenario de triángulos imaginarios, de los cuales se pudieran conocer las proporciones entre sus lados (*Figuras 6.4 – 6.5 – 6.6 – 6.7*). Por otro lado, también de un instrumento, el astrolabio, para poder medir el ángulo de visión o la inclinación del sol. El mismo instrumento, brindaba información sobre las proporciones entre los lados del triángulo que estaban interpretando en el escenario para poder hacer efectiva la medida (Espinoza et al., 2018).

Espinoza et al. (2018) describen cómo es que producían las mediciones de las longitudes inaccesibles dependiendo de factores variados. Mostraremos algunos ejemplos a fin de analizar los elementos necesarios para la instrumentación de la *métrica*.

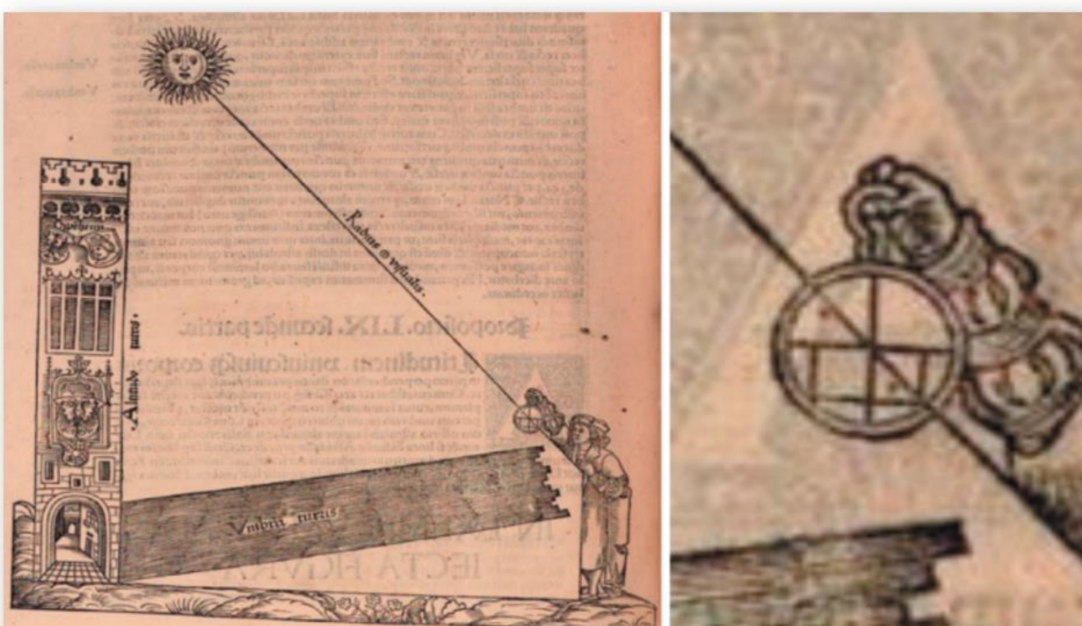
> En la proposición 61, Stöffler (1513) presenta la técnica de medición de una altura inaccesible utilizando la sombra generada por la luz del Sol o de la Luna. En este caso, la altitud del Sol o Luna será de 45 grados, por tanto, la medida de la sombra será

[39] Acerca de la fabricación y los usos del astrolabio.

> igual a la medida de la altura buscada. De esta manera, midiendo la sombra se tendrá la medida de la altura buscada. (Espinoza et al., 2018, p. 258)

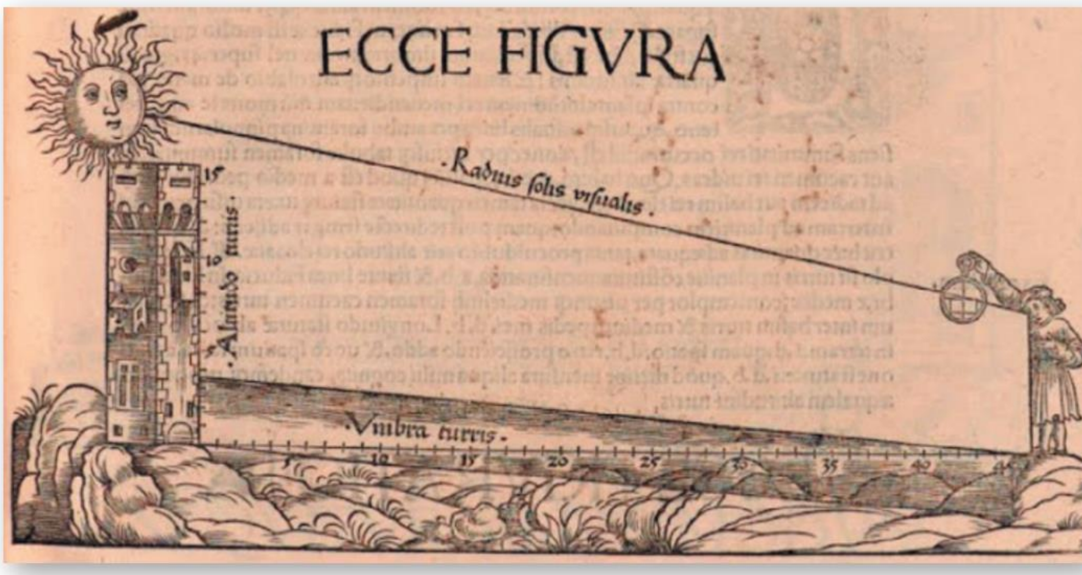
Se puede apreciar en la *figura 6.4*, que la línea de visión se dirige hacia la posición del sol, para así determinar su inclinación. En otros casos en donde se busca determinar la altura de un edificio, sin el uso auxiliar de la sombra, la línea de visión se extiende exactamente hasta la cima del edificio (*Figura 6.6*). En el primer caso, se busca medir la altura del edificio a partir de la medición de la sombra que genera. Al determinar la inclinación del sol, se identifica la proporción que habrá entre la altura del edificio y la sombra que produce. De esta manera se asocia una *magnitud* inaccesible (altura del edificio), con otra accesible y medible con *unidades de medida* tradicionales (la sombra que proyecta). Creemos que la identificación de la proporción entre la longitud inaccesible y la accesible, es un factor ineludible para responder la pregunta ¿Cómo se mide? Entonces aparece un objeto matemático (una relación proporcional) contextualizado, con un valor de uso para hacer posible la instrumentación de la *métrica*. Sin la consideración y determinación de esta proporción, está *métrica* no podría haber sido construida.

Figura 6.3. "Imagen de la técnica de medición cuando la elevación del Sol es 45º, tomada de "Elucidatio Fabricae Ususque Astrolabii", por Stöffler, 1513, segunda parte, folio LXX." (Espinoza et al., 2018, p. 258).



En el caso de que la inclinación del sol o la luna sea mayor o menor que 45°, se identifican proporciones entre la sombra que proyecta el edificio, con la altura de este. De esta manera al medir la sombra y conocer esta proporción, se puede conocer la medida de la altura del edificio (*Figura 6.5*).

Figura 6.5. "Imagen de la técnica de medición cuando la elevación del Sol es menor a 45º, tomada de "Elucidatio Fabricae Ususque Astrolabii", por Stöffler, 1513, segunda parte, folio LXXI" (Espinoza et al., 2018, p. 259).

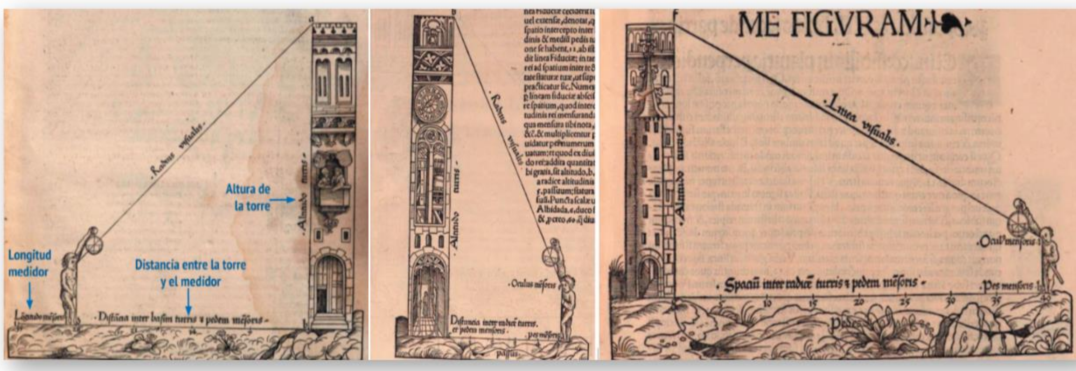


En los casos que siguen en donde se miden directamente longitudes inaccesibles sin la necesidad de recurrir a la sombra, continúan apareciendo los mismos elementos para poder producir la medida: el uso del astrolabio para medir la inclinación del ángulo de visión del observador a la cima del edificio que se busca medir y el reconocimiento de una proporción entre la longitud inaccesible y otra accesible (*Figura 6.5*).

Otro aspecto que señalan Espinoza et al. (2018), es "el uso del dinamismo del fenómeno involucrado" (p. 260). Esto hace referencia a las consideraciones dinámicas que debían de tenerse para ubicarse en el lugar y momento correcto para identificar la inclinación del sol, o el ángulo de visión. La experiencia que se debería de tener para poder producir esta medida no era menor, y su dificultad mayor posiblemente estuviera en el uso correcto del astrolabio. Es también aquí, la experiencia práctica, un aspecto fundamental para la construcción de la *métrica.*

Por ejemplo, en la técnica en la que se usa la línea visual, el dinamismo está dado por la posibilidad de desplazamiento del medidor. A su vez, en el caso de la técnica en la que se usan las sombras, el dinamismo está dado por el movimiento del Sol y la Luna. Este caso es particularmente interesante, pues hay periodos del año en los que, en Europa, no se tendrá la razón 1:1 entre alturas y sombras (Bedaque y Bretones, 2016). Por tanto, el planteamiento de Stöffler considera que, en su latitud, entre el 5 de septiembre y el 19 de marzo no se tendrá la razón 1:1. En cambio, entre el 19 de marzo y el 5 de septiembre esta razón se obtendrá dos veces al día, una antes del mediodía y otra después del mediodía. (Espinoza et al., 2018, p. 261)

Figura 6.6. Imagen de la técnica de medición cuando la línea visual está elevada 45°, mayor a 45° y menor a 45°, en “Elucidatio Fabricae Ususque Astrolabii”, por Stöffler, 1513, segunda parte, folio LXXI, recuperado de Espinoza et al. (2018, p. 260).



En resumen, para poder medir, se reconoce una proporción entre la longitud inaccesible y la longitud accesible. Se mide la última y a partir de la proporción identificada se reconstruye la longitud inaccesible. La identificación de la proporción $\overline{BD}/\overline{BC}$ (*Figura 6.7*), es imprescindible para poder obtener la medida, e identificarla requiere del uso de un instrumento especialmente diseñado para obtener el ángulo de visión. Es a esto con lo que nos referimos cuando señalamos que la *métrica*, en este caso, requiere de un pensamiento matemático que considere otros elementos además de la determinación de *unidades de medida* y la comparación con estas. También es pertinente señalar, que sin la existencia de *unidades de medida* previamente institucionalizadas, con las cuales medir las longitudes accesibles que se reconocen, no sería posible la construcción de esta *métrica*. Esto nos da indicios, de que las prácticas que involucran la *medida* se resignifican progresivamente para elaborar *métricas* de mayor complejidad que permitan medir nuevas *magnitudes.*

Figura 6.7. Esquema de la *métrica*.

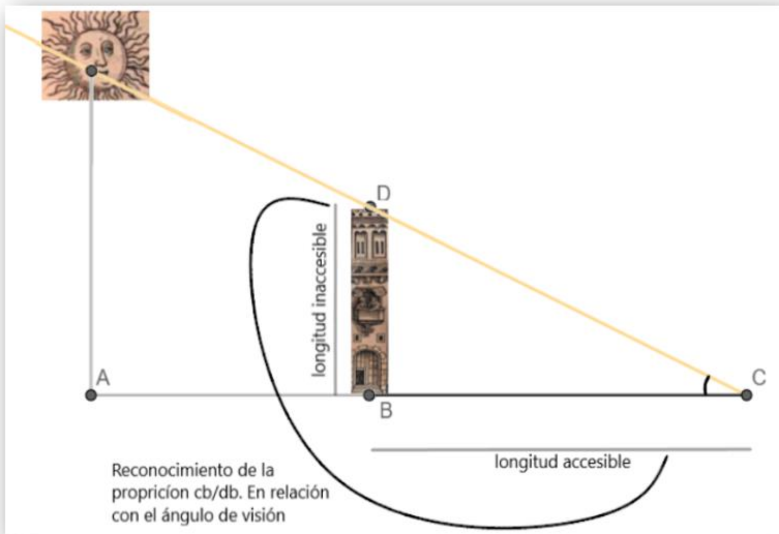


Figura 6.8. Elementos de la *métrica* para medir longitudes inaccesibles, en la obra de Stöffler (1513), reconocida por Espinoza et al. (2018).

$$E$$

Espacio. Alturas inaccesibles, imposible de comparar directamente con *unidades de medida* de longitud.

$$\| \ \| : E \to \mathbb{R}$$

Métrica. Se reconoce una proporción, entre las *magnitudes inaccesibles* y otras accesibles. Se miden las últimas, y a partir del conocimiento de la proporción se obtiene la *medida* de las *magnitudes* inaccesibles.

$$\|x\|$$

Medida. E*valúa* la altura de edificios, cuantificando *longitudes* inaccesibles.

$$d(x,y) = \left| \|x\| - \|y\| \right|$$

Comparación - Distancia. La comparación de las *medidas* obtenidas por la *métrica* permitirá saber cuánto más alto es un edificio que otro, expresando una distancia en términos de alturas entre elementos del espacio.

6.6. La Métrica como una Práctica Socialmente Compartida: *m*edidas agrarias no estandarizadas

Kula (1986) menciona que en el continente europeo, desde principios de la Edad Media hasta la introducción del *Sistema Métrico Internacional*, existía un predominio de dos tipos de *métricas* que se involucraban en las prácticas de *medición de* los terrenos cultivables. Unas resultaban de considerar el tiempo de trabajo necesario que requerían para ser sembrados, y otras de relacionar las parcelas de tierra con la cantidad de semilla que podrían sembrarse en ellas. Por otro lado, Sierra (2008), estudia los procesos de trasferencia institucional de conocimiento con el interés particular de identificar cómo es que en una comunidad, una *práctica socialmente compartida* se institucionaliza inicialmente. Para esto, se realiza un estudio empírico en el municipio de Metlatónoc, en el estado de Guerrero-México, que mantiene un arraigo en sus raíces culturales originarias, manteniendo cierta distancia de la cultura de la sociedad moderna dominante en las grandes ciudades. Por ejemplo, el 71,2 % de la población es monolingüe, queriendo esto decir, que mantienen únicamente su lenguaje originario sin manejar el español. En este estudio, se analizan muchas prácticas que involucran saberes en torno a la *medida,* con racionalidades propias de su contexto sociocultural. Entre ellas, el uso de *métrica*s no estandarizadas, dentro de las cuales, también emerge la *medida* de los terrenos para siembra según la cantidad de semilla que requieren para sembrarlos, de manera similar que sucedió, según se ha documentado por Kula (1986), no solamente en países de Europa, sino también en Asia y África.

La *TSME* considera la noción de *práctica socialmente compartida (PSC),* dentro del modelo de *anidación de prácticas* (Cantoral, 2016) (mostrado en la sección 2). Tenemos la intención de evidenciar que esta *métrica* que permite *medir* terrenos de siembra, según la cantidad de semilla que pueden tolerar sin perder productividad, se constituye como una *PSC.* Para esto, identificamos tres elementos que consideramos objetivables característicos de las mismas*: Intencionalidad, Funcionalidad y Reiteración.* La presencia de estos nos permite inferir la existencia de una *PSC,* dando indicios de que cierto conocimiento ha devenido en *saber.* Estas consideraciones son debido a que requerimos de inferir su presencia a partir del análisis de fuentes secundarias, que en este caso son de corte social - antropológico. Estas se limitan a describir la actividad dejando ver estos elementos, sin alcanzar un nivel de especificidad como el que se requeriría para estructurar un esquema específico de *anidación de prácticas* como los postula la *TSME.* De todas maneras, consideramos que para que se pueda reconocer una *PSC* específica, que exprese *uso* del *conocimiento* de una determinada comunidad es útil la identificación de estos tres elementos, que los caracterizamos de la siguiente manera:

- Una **Intencionalidad** por parte de la comunidad que reproduce la práctica. Una *PSC, n*o sucede sin motivo, es una organización de actividades deliberadas que buscan conscientemente el cumplimiento de ciertos propósitos.

- **Funcionalidad** adecuada al contexto, que persigue el cumplimiento de los propósitos organizados en la *intencionalidad*. En el caso de las *prácticas socialmente compartidas* con características *métricas,* interpretamos que las *medidas* que producen permiten una *evaluación* específica de una *magnitud* que es funcional para el desarrollo de la *intencionalidad*.

- La identificación de una **reiteración** de la práctica, que dé indicios de que no aparece de modo aislada tanto temporal como geográficamente. El hecho de que tenga una *funcionalidad* acorde a una *intencionalidad* induce a que sea mantenida en el tiempo y reconocida por una comunidad, siempre y cuando se mantenga la *intencionalidad* que la hace emerger. En este sentido, ha de estar, o haber estado *institucionalizada*.

A continuación, profundizaremos estos aspectos y los caracterizaremos desde el ejemplo concreto de la *métrica* que permite medir terrenos para cultivo, según su *valor productivo*. Para los objetivos de nuestra investigación, este análisis fue de importancia, debido a que nos permite reconstruir el funcionamiento de una *métrica* que estuvo presente con mucha jerarquía en la historia de la humanidad, que posee una propia racionalidad y epistemología de prácticas, que permite *medir* y generar una idea de *distancia,* en términos de una *magnitud* bastante abstracta, como es el *valor productivo* de los terrenos para siembra. En conclusión, nos aporta un contexto en el cual podemos encontrar resignificaciones de la *medida y distancia*, que consideramos importantes en nuestro esquema de la *reconstrucción racional* planteada en este proyecto de investigación. La determinación de esta *métrica* como una *PSC,* nos da indicios de la importancia de la presencia de significados compartidos producidos por el *valor de uso* del saber en torno a esta métrica, confirmando la importancia del desarrollo de este tipo de saberes para las comunidades que las usaban.

Intencionalidad.

Al considerar la *métrica* que produce *medidas* de superficies de tierra arable, según la cantidad de semillas que es requerida para sembrarla, la característica más enfatizada es su productividad (Kula, 1986). Se *mide* las parcelas de tierra para siembra según su *valor productivo* y no según su área. Grandes variaciones en las cosechas provocadas por las variaciones climáticas, invalidaba la posibilidad de *medir* el *valor productivo* de los terrenos según las cantidades de producción generada, ya que esta dependía de muchos otros factores además del *valor productivo* del suelo. Por otro lado, la cantidad de semilla utilizada para la siembra sería la misma en los años buenos y en los malos (Kula, 1986). Globalmente estas *métricas* se constituyen a partir de hacer corresponder *unidades de medida* de volumen, utilizadas para *medir* cantidades de semillas, con la superficie de los terrenos necesarios para sembrarlas. Pero eran varios los factores que influirían, por ejemplo, la variante de fertilidad sería fundamental, ya que afectaba las técnicas de siembra. Como veremos a continuación, hemos podido apreciar que se generaba una *compensación* según área, en función de la calidad del suelo. Es decir, se reconoce que una cantidad dada de semillas, para ser sembradas de manera efectiva, requería distintas dimensiones de área en función de la fertilidad del suelo. Sierra (2008), al referirse a esta práctica de *medir* terrenos en la comunidad de Metlatónoc, comenta:

> Ellos miden su terreno, tanto para sembrar como para saber sus límites, es importante saber que ellos en la cuestión de siembra no usan las medidas del sistema métrico decimal, utilizan las medidas de la comunidad, es decir las medidas premétricas que conocen, al ser dueños de su terreno no se ven en la necesidad de ser exactos en las medidas, miden de acuerdo con la semilla que siembran, por medio de pasos o de un mecate al cual antes le dieron una medida de acuerdo a sus brazadas. (p. 61)

Por otro lado, Kula (1986), menciona al respecto:

> Un manual francés del siglo XVIII sobre la compilación de inventarios de fincas aclara bien el asunto, de manera esquemática: para suelos de calidad media, la medida adecuada es una quinta parte más que para suelos buenos, mientras que para suelos pobres es mayor en un sexto más que en los suelos medios. La razón de la diferencia

> dice el autor, es que la semilla se siembra relativamente compacta en suelos buenos y separada en suelos pobres (21)[40]. Así, si evaluamos el asunto en términos del valor económico de una parcela de tierra cultivable, la medición por la cantidad de semilla tuvo un mérito considerable porque el valor de una hectárea puede estar lejos de ser igual al de otra, aunque los dos sean idénticas en superficie. (p. 31) [Traducción propia][41]

Aquí aparece un aspecto común en ambos contextos, que hemos interpretado caracteriza la *intencionalidad* que promueve el emerger de este tipo de métricas. En el caso de la *métrica* según la cantidad de semilla que se reconoce por ejemplo en Sologne-Francia en el siglo XVIII, esta técnica de medición podría *equivaler* el valor de terrenos que *a priori* eran diferentes, mediante una *compensación* extra en área en los terrenos de menor productividad. “La medida según la cantidad de semilla **compensaría** las diferencias y, por lo tanto, dos parcelas de área desigual podrían **equivalerse**, es decir, demostrar que tienen prácticamente el mismo *valor productivo*”(Kula, 1986, p. 31). Esto fue de especial interés para la Europa medieval, en donde los señores feudales requerían conocer el *valor productivo* real de los terrenos, más allá de sus dimensiones en áreas, para así poder realizar distribuciones equitativas entre sus vasallos, generando así una organización que le permitiera cobrar impuestos de manera justa y organizada (Kula, 1986). Las propiedades asignadas tenderían a representar aproximadamente el mismo *valor productivo*, y como consecuencia, de manera inevitable diferían considerablemente en su área (Kula, 1986). Mientras que, en el caso de Metlatónoc en la actualidad, estas prácticas métricas no estandarizadas son normadas en la comunidad por una búsqueda de ideales de “*equidad y justicia*” (Sierra, 2008). Reconocemos así que la búsqueda de una *equivalencia* de terrenos con distintos valores

---

[40]El autor realiza un apartado de notas, en donde se referencian las obras sobre las cuales apoya sus reflexiones, y las enumera en cada capítulo. Esta en particular: “Poix de Fremonville, "La pratique universelle pour la renovation des terriers et des droits seigneuriaux … par Edme … , bailly des villes et marquisat de la Palisse, commissaire aux droits seigneuriaux," Paris, chez Morel aine et Gissay, 1746, avec !'approbation et privilege du Roy, pp. 558, 562. Similarly, in Normandy, Rutkowski, Studia, p. 14.” (Kula, 1986, pp. 295-296).

[41] A sixteenth-century manual, in referring to a given area, states that more or less seed should be sown depending on the quality of the soil and the topography of the terrain. An eighteenth-century French manual on the compilation of estate inventories clarifies the matter well, if schematically: for soils of middling quality, the proper measure is one-fifth as large again as for good soils, whereas for poor soils, it is larger by a sixth; the reason for the difference, says the author, is that the seed is sown relatively thickly on good soils and sparsely on poor soils. Thus, if we appraise the matter in terms of the economic value of a piece of arable land, the measuring by the amount of seed had considerable merit because the value of one hectare may be far from equal to that of another, though the two are identical in area.

productivos estaría configurando la *intencionalidad* de esta *práctica socialmente compartida*, que *evalúa* terrenos según su productividad.

Funcionalidad.

Como habíamos mencionado anteriormente, una *métrica*, en cada caso tiene una *funcionalidad* de *evaluar* una *magnitud*, para ciertos propósitos, es decir, la *intencionalidad*. En este caso, se está buscando de alguna forma distribuir tierras de manera equitativa, y las variaciones de fertilidad (o topográficas), conllevaban a que dos terrenos de igual área no necesariamente tuvieran el mismo *valor productivo*. Por este motivo se los *mide* según la cantidad de semilla que requieren para ser sembrados, siendo que la *magnitud* que se mide es el *valor productivo*. "La consideración práctica importante, sin embargo, fue que, dependiendo de la calidad del suelo, un sembrador experimentado daría pasos más grandes o pequeños y arrojaría puñados de semillas pequeños, o soltaría puñados llenos y de manera más esparcida" (Kula, 1986, p. 31) [Traducción propia][42].

Este tipo de *métricas*, estuvieron presentes en muchos países, durante siglos, por lo tanto, es razonable que existieran variaciones de este. De manera representativa, a partir de los datos que disponemos, podemos inferir que al menos deberían de considerarse una articulación organizada de los siguientes elementos: *unidad de medida de volumen para las semillas*, *fertilidad del suelo, largo del paso, tamaño del puño de semillas, tamaño en área de la parcela de tierra necesaria para plantar las semillas* (*figura 6.8*).

Esta *métrica* permite entonces *medir* la productividad de los terrenos para siembra, y expresar esta *magnitud* con *unidades de medida* de volumen que en un principio medían cantidades de semillas. Esta expresa una sabiduría construida socialmente por las comunidades a partir de experiencia empírica, y la relación del hombre con la naturaleza mediada por el trabajo de la tierra. Esta relación específica no la entabla una persona como ser aislado, sino como miembro de una comunidad. La *métrica* brinda la posibilidad de equivaler terrenos de calidad variable a un denominador común, que es el *valor productivo*, un factor de mayor importancia para el agricultor.

A pesar de que este mecanismo, podría parecer impreciso, no necesariamente lo era. Asumimos que, de la persistencia temporal de esta *métrica*, se puede interpretar la *funcionalidad* que proveía,

---

[42] The important practical consideration, how- ever, was that, depending on the quality of the soil, an experienced sower would take larger or smaller steps and cast tightly packed or loose handfuls of seed.

y que debía de ser interpretada de manera similar por los integrantes de cada comunidad que utilizara una *métrica* de estas características. Kula (1986) muestra algunos registros, que evidencian la trasparencia que esta métrica posibilitaba:

> Registros comunitarios de procedimientos judiciales (una excelente fuente para estudiantes de la sociedad rural antigua) definen con frecuencia las parcelas de tierra en términos de la cantidad de semilla que se puede sembrar en ellas. Así, un documento dice: "Cedo y otorgo a mi hijo Gaspar, en medio de mi propiedad, ... un tramo de tierra para ser sembrado con un *celemín* de semilla"; y otro: "Acordaron asignar a Wojciech Stec suficiente terreno para que lo cubriera un *celemín*", etc.. En ocasiones, la redacción es más precisa, por ejemplo: "Casimir, el hermano mayor de Nicolás, le entrega un *bushel* y 24 *galones* de tierra" (50)[43]. Moszynski sostiene que en los casos de disputa la cantidad de tierra se decidiría "a golpe de vista" y más allá de eso [*si la disputa persistía*], con la ayuda del sembrador más honesto y experimentado, en quien se podría confiar que tendría precisión hasta un *galón* (51) [44]. Moszynski sostiene además que las medidas de las semillas eran más precisas que las unidades como "*la banda*" o "*la parcela*", y eso explica su persistencia. Hasta hace poco, por ejemplo, los montañeses de Tatra se referían a "una parcela para tomar medio *bushel* de avena" o "parcelas para cubrir con dos *bushels* de papas" (52) [45]. Los registros judiciales, por lo tanto, no dejan ninguna duda de que las medidas de semillas se han utilizado en tratos entre los campesinos polacos en los tiempos modernos, y que eran exactos no sólo para medirlos por el *bushel* sino hasta el *galón*. (pp. 38-39) [Traducción propia][46] [aclaración añadida].

[43] Referencia en Kula (1986): "S. Grodziski, ed., Ksigi sqdowe wiejskie klucza jazowskiego, 1663—1808 [Rural judicial books of the Jazow group of estates], Warsaw, 1967, nos. 416, 457, 458, 565, 607"(p. 297)

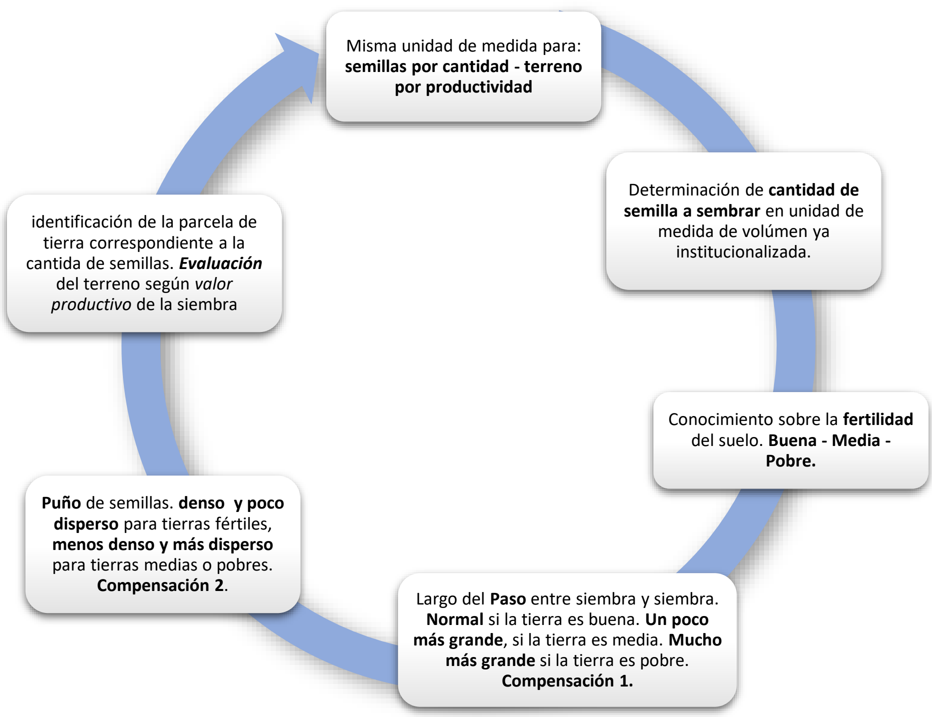
[44] Referencia en Kula (1986): "K. Moszynski, Kultura ludowa Slowian [The Folk Culture of the Slavs], p. 111"(p. 297)

[45] Referencia en Kula (1986): "K. Moszynski, Kultura ludowa Slowian [The Folk Culture of the Slavs], pp. 123-124"(p. 297)

[46] Records of judicial proceedings (an excellent source for students of rural society) frequently define pieces of land in terms of the amount of seed that can be sown upon them. Thus, one document states: "I assign to and bestow upon my son Caspar, in the middle of my holding, a piece of land to be sown with one bushel of seed"; and another: "They agreed to allocate to Wojciech Stec from their part enough ground to be covered by one bushel"; etc. Occasionally, the wording is more precise, for example: "Casimir, the elder brother of Nicholas, gives over to him one bushel and 24 gallons (garniec) of land."50 Moszynski maintains that in cases of dispute the amount of land would be decided "at sight" and thereafter with the aid of the most honest and experienced sower, who could be trusted to be right to within a gallon.51 Moszynski further holds that the seed measures were more accurate than units like "the strip" or "the patch," and that accounted for their persistence. Until recently, for instance, the Tatra mountaineers would refer to "a patch to take half a bushel of

Esta forma de medir terrenos era más persistente en regiones montañosas, en donde las diferencias topográficas eran más relevantes, mientras que, en regiones de planicies solía persistir las mediciones de terrenos según días de trabajos necesarios para labrarlos. En (Sierra, 2008), la comunidad que se estudia vive en zonas de montañas, y se hace referencia a que en muchos casos, los terrenos son de difícil acceso o presentan grandes irregularidades. Por esto asumimos que en muchos casos las tierras que se midieran con esta técnica no serían siempre de formas geométricas regulares, sino que se adaptarían a las realidades de las formas geográficas de los contextos.

Figura 6.8. Método esquemático reconstruido de la organización de prácticas que describe el funcionamiento de la *métrica* que mide terrenos según su *valor productivo*.



Nota: Para hacer corresponder *unidades de medida* de volumen de semillas con parcelas de tierra. De esta manera, se podía medir una cantidad de tierra según su *valor productivo*. Por ejemplo, esto permitía la generación de expresiones del tipo: diez galones de avena de tierra (Kula, 1986), o una cantidad de litros de terreno (Sierra, 2008).

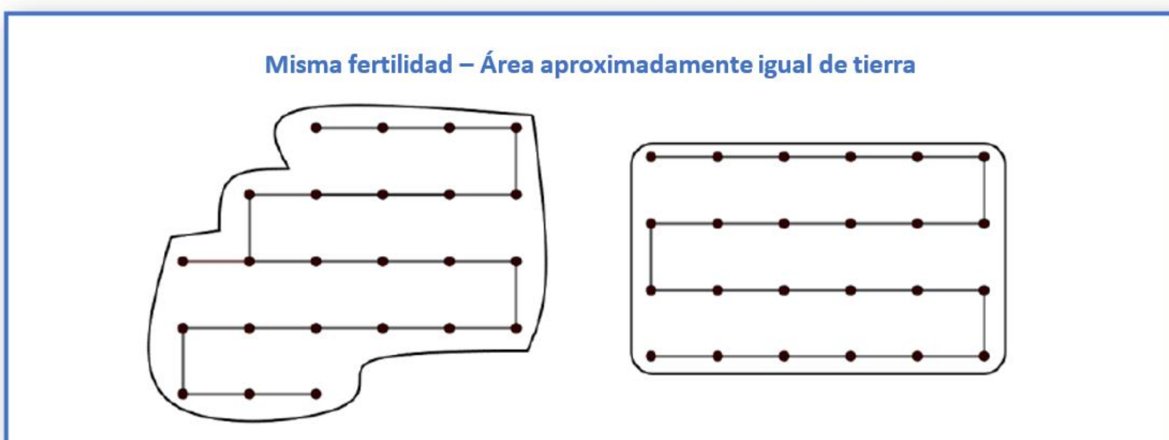
---

oats" or "patches to be covered by two bushels of spuds."52 Judicial records thus leave no doubt that seed measures have been used in dealings between Polish peasants in modern times, and that they were accurate not just to the bushel but to the gallon.

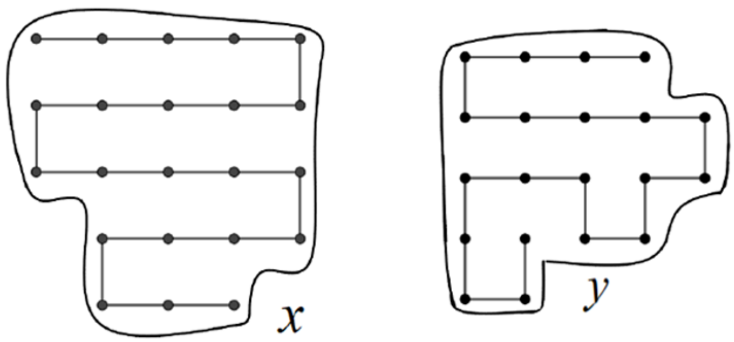
La *instrumentación* de la *métrica* no es lo mismo que su *funcionalidad*, aunque la última puede identificarse en los elementos que configuran a la primera. La primera, hace referencia a los métodos por los cuales se hace posible la obtención de la *medida*, es decir, el cómo se hace operativa la *métrica.* En esta, se puede interpretar la racionalidad del contexto*,* y de qué manera se conforma una *métrica funcional* a la *intencionalidad*.

En la *figura 6.9*, buscamos esquematizar y ejemplificar, la reconstrucción que realizamos de la instrumentación de esta *métrica* a partir de los elementos de la *figura 6.8*. Cada *nodo*, representa un punto en donde se deposita un puñado de semillas (que varía en tamaño en función de la fertilidad del terreno). El espacio entre dos *nodos* representa el *paso* que realiza el sembrador (o en algunos casos se utilizaban varas de madera para estimar distancias), haciéndolo más corto o largo dependiendo de la fertilidad que se reconoce del suelo, a partir de la experiencia empírica que se tenía. Todo este proceso, es lo que interpretamos como la *instrumentación* de la *métrica,* el cómo es que se hace corresponder *unidades de medida* de volumen utilizadas para *medir* semillas, con la cantidad de tierra que se requiere para sembrarlas. Insistimos en que, al ser una práctica tan dispersa durante tantos siglos y en tantos países, las variaciones de esta técnica debieron de ser muchas. La reconstrucción planteada en estos esquemas, la basamos en (Kula, 1986; Sierra, 2008).

Figura 6.9. Esquemas interpretativos de la *instrumentación* de la *métrica* de terrenos según cantidad de semilla.



Terreno de fertilidad media, y terreno de fertilidad buena equivalidos por compensación de área.



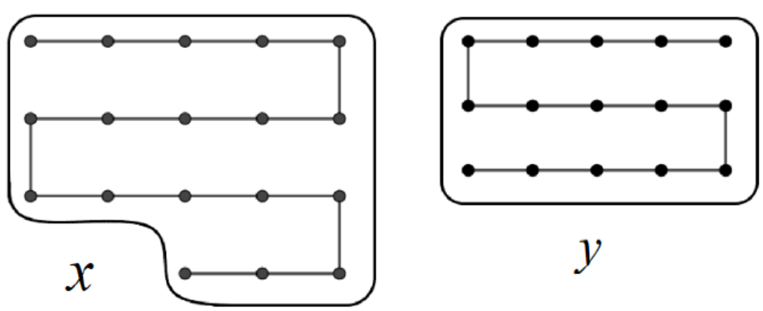
- $|x| = |y|$

Equivalentes según esta *métrica*

- Área $x \approx 1.2$ Área y

En este esquema interpretativo, cada *paso*, en el terreno x, es un 10% más largo que en y. En cada *nodo* de x, se siembra 10% menos de semilla que en los *nodos* de y.

Terreno de fertilidad pobre, y terreno de fertilidad buena equivalidos por compensación de área.



- $|x| = |y|$

Equivalentes según esta *métrica*

- Área $x \approx 1.4$ Área y

En este esquema interpretativo, cada *paso*, en el terreno x, es un 20% más largo que en y. En cada *nodo* de x, se siembra 20% menos de semilla que en los *nodos* de y.

Reiteración.

En (Cantoral, 2016), se menciona que las *Prácticas Socialmente Compartidas,* se conforman como prácticas *iteradas* e *intencionadas*, que producen significados compartidos para las comunidades que las construyen. Por lo tanto, la *iteración* de una práctica es requerida para el desarrollo de una expertez en el uso de esta, necesaria para que una actividad devenga en *PSC.* Consideramos el fenómeno de *reiteración,* como la persistencia en el tiempo o un amplio desarrollo de una actividad en distintos lugares geográficos, dan evidencia de la presencia de una *PSC* y su *iteración,* aunada a la *intencionalidad* que la hace emerger. Esta *reiteración* (por ejemplo, documentación que den evidencias de que una práctica persistió durante siglos) nos da evidencia de que se debe de haber transitado por extensos procesos de *iteración* de la *PSC,* por parte de los usuarios de esta, de lo contrario no podría haber perdurado tanto. En nuestro caso, para documentar esta *reiteración*, hemos señalado las evidencias que muestra su amplia presencia tanto temporal como geográficamente, expresando la persistencia de la *funcionalidad* de la *PSC* y de la *intencionalidad* que la está normando. En este caso, la búsqueda de "*equidad y justicia*" (Sierra, 2008), o la organización de sistemas feudales de manera equitativa (Kula, 1986), son contextos que hacen emerger esta *métrica* que equivale terrenos según su productividad, que provocan la persistencia de la misma. El amplio número de países, que desarrollaron *métricas* de este estilo, dice de una preocupación global, además de la *funcionalidad* que debió de producir esta *métrica.* En la *figura 6.10,* se presenta de manera esquemática algunos de los lugares, en donde se han reconocido el uso de este tipo de *métricas,* que miden *valor productivo* de terrenos al corresponderlos con *unidades de medida* utilizadas para medir cantidades de semillas (Kula, 1986). En cada caso, se muestra como incluso se utilizaba la misma palabra, para nombrar la *medida* de la semilla y la de la tierra, o en otros casos, había una herencia directa del nombre de la *medida* utilizada para las semillas, hacia el nombre de la *medida* utilizada para los terrenos.

> La evidencia circunstancial pero confiable del uso en innumerables países del sistema de medición de campos con semillas, se encuentra en la terminología (generalizada hasta la adopción del sistema métrico y persistiendo incluso más tarde) en la que la unidad básica de medida para las tierras agrícolas y la unidad de medida seca [una medida de volumen para productos secos sueltos como cereales, té o azúcar] a

menudo lleva los mismos nombres o muy similares. (Kula, 1986, p. 33) [Traducción propia][47] [Aclaración añadida]

Figura 6.10. Reiteración de la *métrica*, distintas regiones. Siglos XIII – XVIII.

Country	*Measures of Dry Capacity*	*Measures of Area*
France (Bourges)	boisseau	boisselée
France (Bourges)	setier	seterée
Rome	rubbio	rubbio[27]
France (Noyon)	setier	setier[28]
France (Burgundy)	bichot	bichetée
France (Burgundy)	boisseau	boisselée[29]
India[30]	kula	kula
Capo Verde[31]	quarta	quarta
Capo Verde	alqueire	alqueres
Columbia	fanega	fanegada
Hong Kong	dau	dau chung
Ifni	fanega	fanega
Japan	bu	bu
Japan	sun	sun
Japan	shaku	shaku
Libya	sáa	sáa
Malta	tomna	tomna
Malta	modd	modd
Nepal	mana	matomana
Nepal	pathi	matopathi
Holland	mud	mud
Ryukyu	shaku	shaku
Ryukyu	go	go
Vietnam	than	than
Vietnam	miéng	miéng
Vietnam	sáo	sáo
Vietnam	máu	máu

Recuperado de Kula (1986, p. 32).

[47] Circumstantial but reliable evidence of the use in numberless countries of the seed system of measuring fields is found in the terminology (widespread until the adoption of the metric system and persisting even later) in which the basic unit of measurement for agricultural land and the basic unit of dry measure often bear the same or very similar names.

6.7. Significados compartidos, generados por la Métrica como Prácticas socialmente compartida.

Reconocimos entonces, tres elementos que consideramos dan evidencia de que la *métrica* que *mide* terrenos según su *valor productivo* se había constituido como una *práctica socialmente compartida*: *Intencionalidad, Funcionalidad y Reiteración*. Esto nos da información de lo importante que ha sido este tipo de saberes en la evolución de las prácticas de *medida* en la historia de la humanidad. La *construcción social del conocimiento matemático* en el sentido de la *TSME* (Cantoral, 2016), no se da de manera espontánea, sino que se configura tras complejas herencias y procesos de *resignificación progresiva* constitutivo de una sabiduría en torno al uso de la *métrica*, que emerge en la actividad humana, siendo funcional en cada caso a ciertas intenciones. En cierto punto nos planteamos las interrogantes: ¿Por qué es posible comprender el funcionamiento y estructura de estas *métricas*, de manera racional, pero eso no alcanza para poder hacer uso de estas? o, de manera más precisa, por qué no alcanza con comprender la métrica para responder una pregunta del tipo: ¿Cuánto es aproximadamente 3 galones de tierra según esta métrica?

Consideramos que ser parte del contexto, es decir, ser un individuo parte de una comunidad que genera y reproduce una *PSC* de este estilo, que la ha conocido y desarrollado mediante la experiencia, reconociendo las cantidades necesarias de *pasos*, cuánto estirarlos, cuán grande es el *puño* de semillas que ha de sembrarse en cada lugar en relación con la *fertilidad* el suelo, permite generar una sensibilidad y *significación* de la *medida* con mayor profundidad. Alguien ajeno a esta *PSC,* por más que pueda comprender lo que se hace, cómo y para qué, no necesariamente podría reproducirla o usarla sin antes compartir la experiencia con la comunidad.

La inferencia que aquí estamos planteando, es que los miembros de una comunidad que utilizan de manera amplia una *métrica* como las que estamos describiendo, desarrollarían una experticia que le permitirá generar una sensibilidad específica en el contexto, acorde a la racionalidad de la *métrica*, y una relación específica con la *magnitud* que se mide. Si esta tiene la *intencionalidad* social de equivaler terrenos, siendo que en un principio no era evidente cómo hacerlo, tiene sentido el siguiente planteamiento: La comunidad confiaría en esta manera de *medir* el terreno según la cantidad de semilla, que expresa el *valor productivo* de un terreno, para poder entablar relaciones justas y trasparentes. El contexto, hace emerger una *métrica* específica *funcional (función* *pragmática de la práctica social)*, con una epistemología de la *medida* relativa a su práctica, que desarrollaría *significados* particulares de lo que es *medir* produciendo en los integrantes de la comunidad que la usa, una *identidad* en torno a su saber (*función identitaria de la práctica social).*

Estos *significados* compartidos, han de expresar en profundidad lo que es el factor "compartido" de esta *práctica.* No es simplemente porque la desarrollen juntos en comunidad, lo fundamental es que, de manera individual, cada integrante de la comunidad habría de producir a nivel cognitivo *significados* de esta métrica*.* El hecho de que esta emerja a partir de un contexto sociocultural compartido posibilita que estos fueran lo suficientemente cercanos unos a otros, de manera que se conforme un lenguaje común en torno a la *medida* de estos terrenos. Este tipo de prácticas se vuelven necesarias para la organización de su actividad y de su comunidad, ya que posibilita una comunicación sostenida sobre estos significados compartidos interpretados de la misma manera por los integrantes de la comunidad que usa esta *PSC* (*función discursiva de la práctica social*). Esta *métrica,* les permitiría expresar una idea de *cercano* o *lejano,* en términos del *valor productivo* de los terrenos cultivables, los usuarios expertos, podrían estimar rápidamente cuánto más valioso es un terreno en comparación con otro. Se produce una manera relativa de interpretar y relacionarse con el mundo, basado en las significaciones que producen de su saber matemático (en este caso *métrico*), que emerge siendo específicamente funcional a su propio contexto. Es difícil de creer que estas formas de *medir* la tierra hubieran persistido durante tantos siglos, en tantos lugares, si no hubiera una significación social compartida generada por el uso de esta *métrica*. Planteamos aquí, que esta forma de medir la tierra, según la cantidad de semilla que requiere para ser sembrada, es una expresión, del *relativismo epistemológico* y de una *racionalidad contextualizada*, que en este caso se conforma con elementos de la relación del hombre con la tierra, mediada por su trabajo y la tradición de siembra.

Para nuestros objetivos, identificar la presencia de este tipo de prácticas en la historia de la humanidad fue importante, ya que nos aporta una visión de los procesos de resignificación progresiva de las mismas. La descripción que aquí compartimos pretende ejemplificar un tipo de prácticas que consideramos resignifica los objetos *métrica, medida* y *distancia,* subrayando que son variados los contextos que posibilitan la construcción de este tipo de saber. Lo que venimos realizando en esta investigación es una *reconstrucción racional* de las prácticas que involucran a la *medida-métrica-distancia*, por lo tanto, nos hemos permitido realizar interpretaciones argumentadas y fundamentadas en la literatura, de cómo es que se han construido estos saberes y cómo funcionan. A pesar de que el esquema propuesto, por ejemplo, en la *figura 6.8*, es una interpretación de una organización de *prácticas* que expresa la funcionalidad de esta *métrica,* y que se podrían aceptar otras interpretaciones, es fundamental señalar, que lo importante es que sí o sí debería de estar presente una organización de prácticas del estilo que aquí planteamos, que este haciendo viable el uso de la *métrica* para sus usuarios. De otra manera, los rastros diversos que hemos encontrado de su presencia y uso no estarían.

Para expresar de manera concreta cómo vemos los elementos que rescatamos en el capítulo del análisis de los objetos matemáticos involucrados en nuestra problematización, en esta práctica de *medir* terrenos según su *valor productivo*, presentamos el esquema de la *figura 6.11*.

Figura 6.11. Constitución de la *practica socialmente compartida,* y producción de *significados* compartidos.

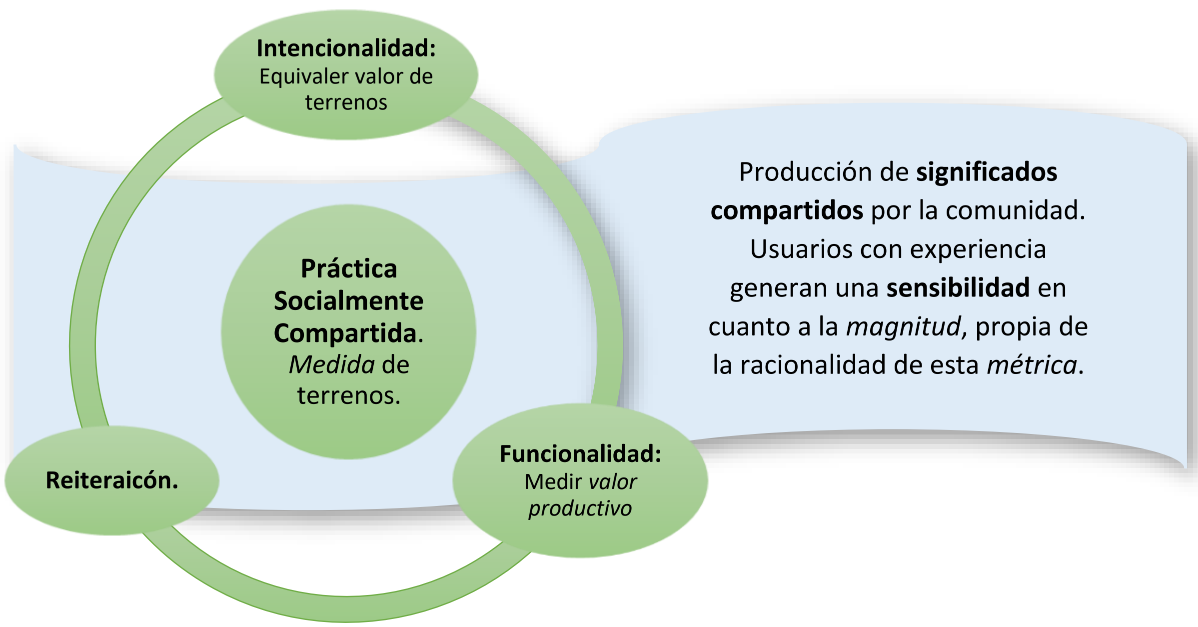


Figura 6.12. Elementos de la *métrica* para medir terrenos según su *valor productivo*, reconocida en Kula (1986) y Sierra (2008).

$$E$$

Espacio. *Valores productivos* asociados a terrenos de siembra.

$$\| \ \| : E \to \mathbb{R}$$

Métrica. Cómo se produce la *medida*, que fue explicitado en las *figuras 6.8 y 6.9* de este capítulo.

$$\|x\|$$

Medida. Expresa una *evaluación* del *valor productivo* de un terreno, en términos de una *unidad* de volumen (que expresa la cantidad de semillas que se pueden sembrar en él)

$$d(x,y) = \big| \|x\| - \|y\| \big|$$

Comparación - Distancia. La comparación de las *medidas* obtenidas por la *métrica* permitirá saber cuánto más productivo es un terreno en comparación con otro, expresando una distancia en términos de *valor productivo* entre elementos del espacio.

7. Resultados, conclusiones y reflexiones finales

En esta investigación realizamos un proceso de historización y análisis de documentos epistemológicos y antropológicos que nos aportaron información importante sobre las prácticas de la *medida* previas al siglo XIX. Las *unidades de medida* transitaban por procesos de construcción social diferentes a los que se producen en escenarios en donde dominan las estandarizadas del sistema métrico internacional, como es el caso del *dME*. En comunidades sin influencia de estas *unidades*, como es el caso de Metlatónoc, Guerrero-México hasta la actualidad (Sierra, 2008), o en múltiples países de África, Asia y Europa antes de la incorporación del *SMI* (Kula, 1986), los valores culturales y contextuales de las comunidades que serían usuarias de las *unidades de medida* influenciaban la propia epistemología de las mismas. Esto permitía que, los integrantes de cada comunidad podrían apropiarse de un *saber*, con significados importantes para su propia *identidad*.

La instauración del *SMI*, siendo esto un fenómeno social complejo, que involucra aspectos políticos y económicos de corte internacional, ha promovido significados y epistemologías de la *medida* que dominan el escenario educativo y las concepciones de esta. Desde nuestra postura, sostenemos que, adoptar una *unidad de medida* del carácter de las estandarizadas (que podría ser percibida como arbitraria si no se es conocedor de la extensa historia de su conformación), que *a priori* no tiene un significado claro para el estudiante, promueve una epistemología diferente de la que hemos reconocido en los procesos históricos de construcción social de *unidades de medida*, funcionales a cierta intencionalidad reconocida en su contexto. La primera situación podría implicar reproducir una práctica sin ser parte de su proceso de construcción social, el segundo caso implica tener un rol protagónico en la construcción social del conocimiento matemático.

7.1. Reconocimiento de *estabilidad* – La *comparación* antecede a la *métrica*.

A partir del análisis transversal, del *valor de uso* de *unidades de medida* con racionalidades propias de sus contextos, identificamos en muchos casos, la necesidad del reconocimiento de un comportamiento *estable* de una *magnitud* (ya sea asociada a un fenómeno u objeto) era requerido para la construcción de *unidades de medida*. El reconocimiento de invariantes físicos en la naturaleza, para la determinación de *unidades de medida* estandarizadas es algo documentado en la literatura, y reconocido en la historia de la *medida* (David et al., 2019; Kula, 1986).

Cuando nos referimos a comportamiento *estable*, queremos señalar que la *magnitud* presente en los fenómenos u objetos, que son tomados de referencia para la construcción social de una *unidad de medida* no podrían admitir variaciones excedidas. Sí puede suceder, como veremos a continuación, que esta *magnitud* varíe, pero deberá de hacerlo dentro de determinados parámetros que garanticen que el fenómeno pueda ser tomado de referencia para la construcción social de la *unidad de medida,* que permita la funcionalidad de la *métrica* que produce*.*

Con este último señalamiento, queremos decir que en los procesos de construcción social de algunas *unidades de medida* que mantienen un valor funcional contextual, se identifican aunadas a objetos o fenómenos que mantienen la *magnitud* que se desea medir, con un cierto comportamiento estable

En la *tabla 7.1*, enumeramos algunas *unidades de medida* que hemos identificado, que nos servirán para argumentar que: El reconocimiento de una *estabilidad* requiere de una práctica iterada de *comparación* previa, por parte la comunidad participe de la construcción social de la *unidad de medida*.

Tabla 7.1. Reconocimiento de *estabilidad* para la construcción social de *unidades de medida.*

Unidad de medida	**Descripción**	***Estabilidad* de la *magnitud***
Animal de carga	La capacidad de carga de un burro (animal), era utilizada como una *unidad de medida* para el transporte de mercancías, en regiones de Europa (antes de la revolución francesa) (Kula, 1986) y en Guerrero – México (hasta la actualidad) (Sierra, 2008).	Sobre este fenómeno, Kula (1986) reflexiona que el peso que podía cargar y el volumen de las mercancías trasportadas eran ***estables***, por el tamaño y el potencial de carga de los animales típicos de diferentes regiones, influenciado incluso por aspectos topográficos del terreno que debía ser pudiendo este complejizar la marcha. Estos animales podrían cargar una cierta relación de cantidad entre peso y volumen. Asumiendo que los usuarios de estos animales para transporte, cuando se dedicaban al comercio

		buscarían sacarle el mejor provecho de su potencial, no cargarían de menos ya que, por ejemplo, los impuestos eran cobrados por cantidad de animales (Kula, 1986). La cantidad de carga habría de ser lo suficientemente ***estable*** (poca diferencia entre ellas en una relación peso - volumen), como para que este fenómeno pudiera ser reconocido como una *unidad de medida* institucionalizada.
Una canoa de carga	Gyllenbok (2018), documenta las *unidades de medida* utilizadas por las grandes civilizaciones. Cuando se refiere a las civilizaciones prehispánicas de centro américa, se menciona que una canoa de carga era referencia para una *unidad de medida* usada para *medir* una cantidad de peso- volumen de alimentos como el maíz.	Estas canoas, eran construidas con técnicas específicas propias de la comunidad, influenciadas por tradiciones socioculturales. Las dimensiones de estas embarcaciones deberían de haber sido lo suficientemente similar (***estables***), permitiendo que una cantidad de canoas de un cierto producto, pudiera ser una expresión de una *magnitud* reconocida con funcionalidad social.
Distancia que se camina desde el amanecer hasta el anochecer, que recorre la voz, o hasta donde se puede ver con el ojo humano.	Kula (1986) menciona que el *"traslado a pie"* (desde la mañana al atardecer, o desde el mediodía al atardecer) constituyó *unidades de medida* presentes en varias civilizaciones.	Estas *unidades* que se conforman a partir de la capacidades de movilidad, de generar sonidos o de la capacidad de visión (la distancia recorrida por la voz, o la distancia hasta el punto más lejano visible) (Kula, 1986) son lo suficientemente ***estables*** en el humano, como para que estas puedan ser funcionales al expresar cantidades de *magnitud.* De manera similar a las antropocéntricas, estas se extienden de las cualidades ***estables*** existentes en el cuerpo humano. Pero, a diferencia de las primeras que se estandarizaban a partir de las dimensiones de longitud similares de las partes del cuerpo humano, estas logran estandarizarse a partir de las capacidades similares de escucha, visión, o producción de sonido entre las personas.

Tiro de arco	Kula (1986) hace referencia a que la construcción social de algunas *unidades de medida* presentes en la historia de la humanidad, deben su conformación al uso del *arco y la flecha* (descrito en la *sección 6.3*). Chan (1995) investiga el uso de estos instrumentos para medir distancias, dando evidencias de cómo esta *métrica* emerge en civilizaciones identificadas con su uso, ya sea para la caza, o el combate bélico.	En civilizaciones donde el uso del *arco y la flecha*, era un instrumento constitutivo de su identidad, se promovía que los integrantes tengan en general grado alto de experticia en el uso del instrumento (Chan, 1995). Las técnicas locales de producción de arcos y flechas (materias primas y sabiduría en torno a la producción) provocarían que estos instrumentos tengan un potencial de tiro similar (***estabilidad***). Este aspecto, unido a que la técnica de tiro de un usuario promedio habría de ser lo suficientemente ***estables***, permiten que la distancia recorrida por una flecha sea lo suficientemente ***estable***, como para que una comunidad pueda considerar esta longitud (la de la distancia que hay entre el lanzador y el destino de la flecha), como *magnitud* de referencia para construir una *unidad de medida* aceptada socialmente.
Antropocéntricas	Las *unidades de medida,* basadas en las dimensiones de longitud de partes del cuerpo humano, han existido desde tiempos ancestrales en cada una de las grandes civilizaciones (Gyllenbok, 2018; Kula, 1986; Mari, 2003; Sierra, 2008)	El cuerpo humano, en una misma civilización, ha tenido dimensiones suficientemente ***estables***, como para que se establezcan *unidades de medida* a partir de sus dimensiones.
Cantidades de tierra sembrable, según día de trabajo	En Europa, antes de la revolución francesa, se utilizaban prioritariamente dos maneras de medir las tierras de cultivo. Una era según la capacidad de trabajo que requería. Entonces, emergieron *unidades de medida*, que se expresaban por ejemplo, como la tierra necesaria para "un día de	Las técnicas de producción agrícola, en una civilización en una cierta época, habrían de ser lo suficientemente ***estables***, como para que la cantidad de tierra que es posible trabajar en un día (de sol a sol, con una parada para el almuerzo en el mediodía, con ayuda bueyes o caballos, etc.), se consolidara como una *unidad de medida* (Kula, 1986). Se han reconocido muchas variantes

trabajo de un hombre y dos bueyes” (Kula, 1986, p. 29)

de este tipo de *unidades*, y están ampliamente documentadas en la referencia anterior.

Hogaza de pan

Kula (1986) menciona que el precio de la *hogaza de pan* en Francia antes del siglo XIX, debía mantenerse inalterado, independientemente de las variaciones del precio del trigo y los cereales con los que se elaboraban (variaciones debido a influencias del clima en los cultivos). Esto debido a que el pan, tenía un valor cultural básico en la cultura francesa, y la suba de su precio llevó en muchos casos a generar grandes revueltas y manifestaciones por parte del pueblo.

El precio de la hogaza de pan se mantenía ***estable***, debido a valores culturales de una sociedad ya que la población sabía que con determinada cantidad de dinero podría comprar una hogaza de pan (Kula, 1986). En todo caso, se hacía más pequeña o grande la hogaza, para compensar el costo de las materias primas. El precio de una hogaza de pan expresaba la *medida* de su valor comercial, es decir, cuánto dinero se requería para comprar una.

Figura 11. Extraída de Kula (1986, p. 73). En la siguiente tabla se muestran las variaciones en el precio de los cereales, y cómo se compensaba en los tamaños de las *hogazas de pan*, para mantener el precio estable (*medida* del valor comercial).

Price of one last of wheat	*Weight of a wheaten roll*	*Price (pfennigs)*	*Weight of a wheaten loaf*
18 g.	ca. 0.25 lb.	3.75	ca. 0.5 lb.
14 g.	ca. 0.35 lb.		ca. 0.58 lb.
10 g.	ca. 0.43 lb.		ca. 0.66 lb.
6 g.	ca. 0.54 lb.		ca. 0.75 lb.

Price of one last of rye	*Weight of a rye loaf (white)*	*Price (pfennigs)*	*Weight of a rye loaf (wholemeal)*
15 g.	0.75 lb	3.75	1 lb.
9 g.	1 lb.		1.25 lb.
3 g.	1.25 lb.		1.5 lb.

[g = *grzywna*, a monetary unit of the period—TRANS.]

Cantidad de tierra sembrable,

Como hemos señalado en la *sección 6.5* la medición de las tierras sembrables según su *valor productivo,* era una práctica reconocida en Asia,

La ***estabilidad*** principal que aquí se reconoce, es la del *valor productivo* que se adjudica acierta cantidad de semillas. Entonces, si se tiene una tonelada de maíz para sembrar, se considera que,

África y Europa antes del siglo XIX (Kula, 1986), y en Metlatónoc-México en la actualidad (Sierra, 2008)	a pesar de los factores ambientales, esta cantidad de grano producirá una cierta cantidad hipotética de maíz para consumo. Además, estaban institucionalizadas las técnicas de siembra para optimizar la producción, permitiendo relacionar una cantidad de semillas con la cantidad de tierra necesaria para sembrarlas. Como vimos, una *unidad de medida* de volumen expresaba una cantidad de tierra de siembra.

Lo que queremos mostrar con los ejemplos compartidos en la *tabla 7.1*, es que en estos casos la conformación de las *unidades de medida* no proviene de una construcción intencionada y explicita de un elemento físico como un bushel, un kilogramo tipo, un canasto, un litro, un metro o similar, que son modelos que se pueden construir y consensuar directamente. Por el contrario, las *unidades de medida* presentadas son reconocidas a partir de elementos de cada contexto. Esto requiere de identificar un comportamiento suficientemente *estable* de la *magnitud* que se busca medir en un objeto o fenómeno concreto del contexto. El que este comportamiento sea o no suficientemente *estable*, dependerá directamente de factores contextuales y socioculturales, que permitan que a pesar de las variaciones (que se mantendrían dentro de cierto margen), el comparar con esa *magnitud* de la *unidad de medida*, mantenga la funcionalidad deseada.

A partir de esto, nos realizamos la pregunta: ¿Cómo los individuos reconocen *estabilidad* del comportamiento de una *magnitud* que desean medir, en un fenómeno protagónico del contexto en el que viven?

Planteamos que el reconocimiento de esta *estabilidad* ha de ser previo a la construcción social de la *unidad de medida*. Segundo, que el reconocer esta *estabilidad* de la *magnitud* en el fenómeno de referencia para la *unidad de medida*, requiere al menos de comparar el fenómeno con otro de la misma naturaleza, iteradamente, y así reconocer que la variación entre un suceso y el otro, es lo suficientemente pequeña, como para tomarla de referencia considerando los factores contextuales y la intencionalidad que se busca.

A modo de ejemplo, retomamos el caso de la *unidad de medida* “tiro de arco” que describimos con mejor detalle en la *sección 6.3*. Para que se pueda institucionalizar esta *unidad de medida,* se debe de haber identificado el comportamiento *estable* de este fenómeno. Es decir, que en promedio excluyendo usuarios destacados o no hábiles con el instrumento, la longitud recorrida por una flecha entre el lanzador y el punto al que llega, debió de ser suficientemente *estable.* Entendemos que, en este ejemplo en concreto, las diferencias entre un tiro y otro podrían ser considerables, pero lo suficientemente *estables*, como para garantizar la funcionalidad buscada. En este caso, era expresar *magnitudes* de longitud con un carácter de estimación. Reflexiones en torno a la *estabilidad*, podrían hacerse de cada una de las *unidades de medida* que se señalaron en la *tabla 7.1*, y probablemente de muchas otras.

Sostenemos que reconocer un fenómeno que mantiene una *magnitud estable*, requiere de efectuar *comparaciones*, y analizarlas de manera iterada a partir de muchos ejemplos del fenómeno (por ejemplo, ver muchos tiros de arco y *comparar* los recorridos). Entonces, tiene sentido plantear la inferencia, de que una *práctica* requerida por parte de los integrantes de estas civilizaciones, para la construcción social de una *unidad de medida* de este estilo, es la *comparación*. Si no hubiera *comparación* previa entre *magnitudes* existentes en los contextos de los cuales se obtienen fenómenos que conforman las *unidades de medida*, no se podría reconocer una *estabilidad* en el comportamiento de *magnitudes*, y por lo tanto no se consensuarían *unidades de medida* del estilo que aquí mencionamos.

Esto nos da evidencias, de que, al menos en este tipo de *unidades de medida*, que conformarán *métricas*, generando ideas de *distancias* y posibles *resignificaciones* del *espacio métrico*, no podrían construirse socialmente, sin la *práctica* de *comparación* por parte de los individuos de las comunidades que construyen este saber. Esto quiere decir, que en estas epistemologías de prácticas de las *métricas*, la comparación antecede al objeto. Sin *comparación,* no se puede determinar la *estabilidad* de las *magnitudes* de las *unidades de medida* que se presentaron en la *tabla 7.1*, y sin esta *estabilidad,* las *unidades de medida* no podrían ser consistentes ni funcionales, por lo tanto, las *métricas* que generaban no podrían haber emergido.

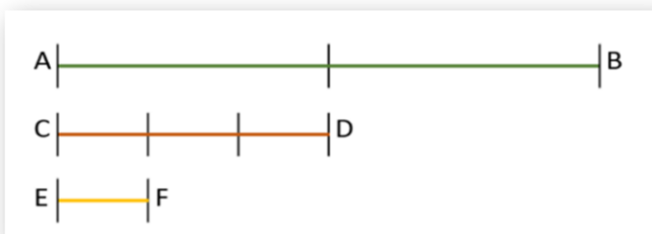
A nivel de prospectiva, sería de interés realizar diseños exploratorios en donde se proponga a estudiantes, situaciones en donde tengan que construir *unidades de medida* con estas consideraciones epistemológicas. De esta manera, se podría obtener más información al respecto de cómo la práctica de *comparación*, y el reconocimiento de comportamientos *estables* de *magnitudes* en contextos en donde haya múltiples *magnitudes* variando, puede ser un factor importante para la construcción social de *unidades de medida*.

7.2. Del reconocimiento de una estructura en las prácticas, hacia la abstracción de *espacio normado.*

Ríos (2020) muestra que en la racionalidad de los teoremas de divisibilidad que aparecen en los Elementos de Euclides, se presentan significados de *medida*, siendo estos de interés para este trabajo. Esta racionalidad, se caracteriza por generar una *unidad de medida* de referencia, y *comparar* con esta, para obtener la *medida* de un objeto. Esta concepción se reconoce ya desde la Geometría Euclidiana y ha constituido un paradigma general en torno a la idea misma de *medida*.

Si EF, es una *unidad de medida*, AB según EF, mide 6 (*Figura 7.1*). En esta racionalidad, al *medir*, se compara la *magnitud* a medir con la *magnitud* de *la unidad de medida*. La idea de *conmensurabilidad*

Figura 7.1. Racionalidad de la *medida* euclidiana.



Recuperado de Ríos (2020, p. 59).

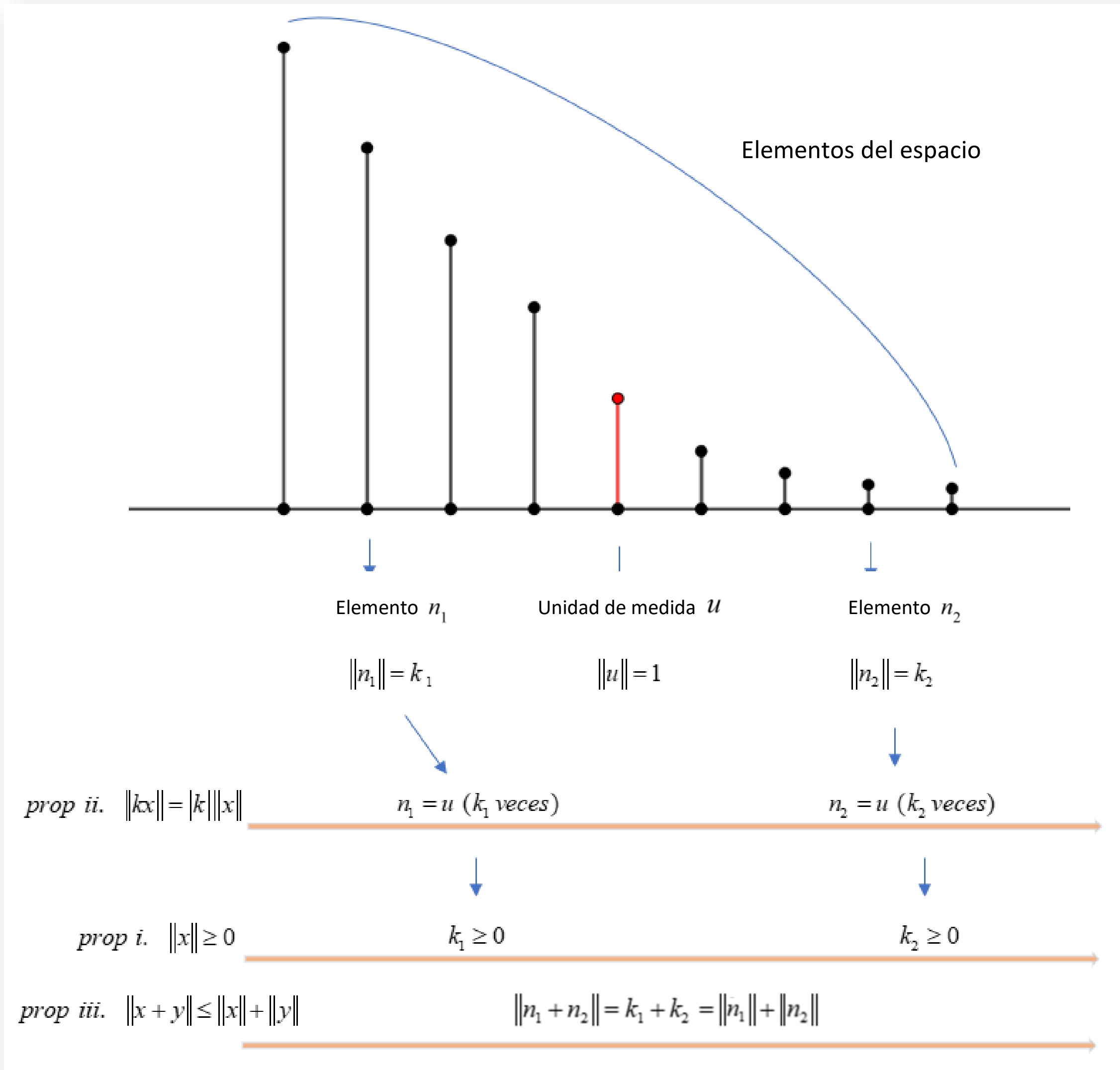
entre dos *magnitudes* para referirse a la *medida*, es reconocida ampliamente en la literatura (Espinoza et al., 2018; Mari, 2003; Rios, 2020). Esto da lugar a una racionalidad, que mantiene la funcionalidad incluso si la *razón* entre las *magnitudes* no es un número entero, pudiendo ser racional, e incluso números irracionales en escenarios intramatemáticos.

En el capítulo de la *reconstrucción racional* de la relación entre ideas de *medida-métrica-distancia* y Topología (*sección 4*), mostramos cómo en este trabajo reinterpretamos esta racionalidad de la *medida*, en el objeto matemático *espacio normado* (*figura 7.2*), señalando cómo cada propiedad de estos espacios es coherente con esta racionalidad.

La propiedad $\|kx\| = |k|\|x\|$ que se requiere de una norma expresa esta racionalidad de la *medida*. La propiedad de la positividad se cumple, ya que la *medida* es la razón existente entre la *magnitud* en la *unidad de medida* y la *magnitud* en el *objeto* medido (ambas positivas). Por último, la desigualdad triangular se cumple en esta interpretación ya que se garantiza la igualdad como se ve en la *figura 7.2*, teniendo sentido la desigualdad si es que se mantiene esta racionalidad en dimensiones mayores o iguales a dos (también desarrollado en la *sección 4*).

Por lo tanto, *medir* implica efectuar *comparaciones*. Es decir, para *medir* han de *compararse* dos *magnitudes*, la de la *unidad de medida*, con la que se busca medir. En contextos, la *unidad de medida* tiene una *magnitud* que se identifica *estable* y es conocida, por lo que comparar una *magnitud* con la de la *unidad de medida*, permite cuantificarla. Esta idea la interpretamos en los objetos matemáticos, y en las prácticas humanas que hemos analizado en la problematización del saber. Es decir, la *figura 7.2* es un esquema que representa una estructura genérica, que en contextos socioculturales donde el saber se expresa funcional, la *magnitud* de la *unidad de medida* y de los objetos del *espacio* que se pueden *medir*, pueden ser de una variedad muy amplia. Queremos hacer especial énfasis, que la estructura compartida en la *figura 7.2*, se mantiene cuando aparece una *unidad de medida* (como las mostradas en la *tabla 7.1*) para medir *magnitudes* de cierta naturaleza.

Figura 7.2. Significados de *medida* en las propiedades del *espacio normado.*



Cantoral (2019) menciona que niños frente a la pregunta de cuál es el lápiz más grande dentro de un grupo, estiman cual es el mayor. Al preguntarle ¿Por qué?, los ponen juntos de dos en dos para visualizar la diferencia de longitud. Entonces, para medir, lo que hacen es comparar. Perfectamente el esquema de la *figura 7.2*, podría haberse interpretado con lápices en vez de segmentos, y la estructura matemática que se señala sería totalmente coherente. Cuando se compara directamente dos lápices, lo que se está distinguiendo es $\|L_1 - L_2\|$, siendo L_1 la longitud de un lápiz, y L_2 la del otro. Es decir, se está apreciando una *distancia* entre estos lápices en términos de longitud. Lo que nosotros interpretamos es que el estudiante mide *magnitudes* de los objetos, y genera una idea de *distancia* entre estos a partir del estudio de estas. Esto es coherente con el teorema que señalamos en el apartado de la reconstrucción racional, un *espacio normado* que permite adjudicar *medidas* a los objetos, permite generar una idea de *distancia* entre estos.

El análisis que hemos realizado, nos permitió ver la amplia e histórica presencia de *unidades de medida* en la actividad humana (Kula, 1986). Por ejemplo, observamos que un tipo de *unidad de*

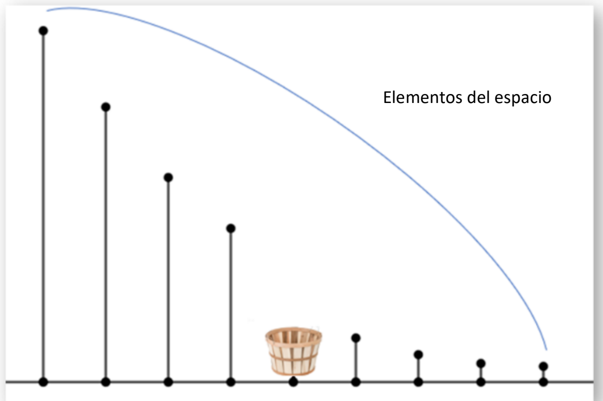
Figura 7.3. Niña comparando tamaños.

Recuperado de Cantoral (2019, p. 59).

medida presente en diferentes civilizaciones consistía en canastos de distinto tipos, de dimensiones estandarizadas, que midieran el volumen de cereales, verduras o semillas de cultivo (celemín o bushel, por ejemplo). Si consideramos a un canasto de este tipo, como la *unidad de medida*, y cada segmento del esquema de la *figura 7.4,* como una cantidad dada de producto que se busca medir, la racionalidad y también la estructura de *espacio normado* se mantendría, cambiando únicamente la naturaleza de la *magnitud*.

Por lo tanto, planteando una descentración del objeto, cualquier *espacio* de *magnitudes*, que sea posible de comparar con una *magnitud* reconocida *estable* en una *unidad de medida*, da lugar a la construcción de una *métrica* a partir del reconocimiento de razones entre *magnitudes*, y presentaría esta estructura de *espacio normado*, por lo tanto, una potencial resignificación de este objeto. De igual manera que en el ejemplo anterior, la comparación de *magnitudes* posibilitaría que emerja una idea de *distancia*. En cada caso, esta *distancia* expresaría una cercanía o lejanía en términos de cada *magnitud*.

Figura 7.4. Misma estructura, otra *magnitud*.



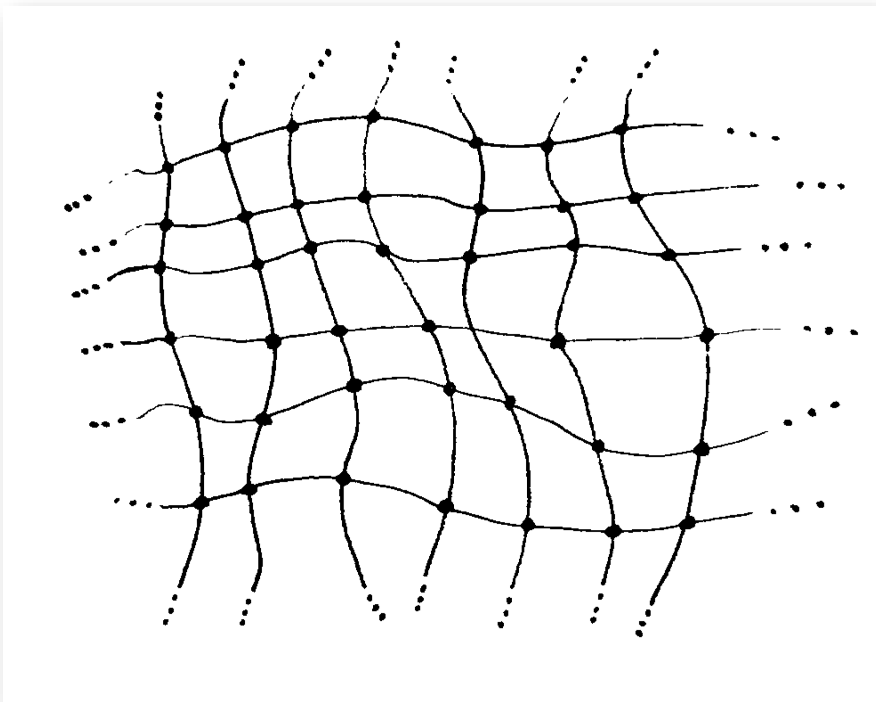
A partir de estas reflexiones consideramos que cada contexto en donde aparece una *métrica* en uso, produciendo ideas de *medida* y *distancia*, conforma un nodo de una red amplia (*figura 7.5*). En un principio sería muy difícil de pensar que podríamos identificar esta red con detalle (identificar todos los nodos), debido a la incontable cantidad de escenarios en donde aparecen *unidades de medida* en uso. Sí consideramos de interés, ejemplificar algunos casos, y conocer su existencia. La cercanía de los nodos no necesariamente implicaría que los escenarios sean cercanos geográficamente, sino que busca expresar una proximidad conceptual entre distintos usos de la *medida*. Se propone que a pesar de que los nodos representan escenarios diferentes, los procesos de resignificación progresiva del saber en el sentido de la *TSME*, mantendrá una cierta relación transversal. En cuanto al principio de *resignificación progresiva,* Cantoral (2016) menciona:

> Para la epistemología genética, la acción es la base del desarrollo del conocimiento, la acción del sujeto sobre el objeto, de ahí derivan los significados construidos. De modo que el significado dependerá en gran medida del escenario contextual donde se produce la acción, del empleo de símbolos se personaliza y despersonaliza la apropiación, se significa el objeto. (...)
>
> Este primer significado, es puesto en funcionamiento en situaciones nuevas y, bajo el mismo esquema constructivo, se resignifica, produciendo conocimientos. Esta

dinámica de significación la hemos denominado resignificación progresiva y está en la base misma del desarrollo del pensamiento. (…)

Este saber es el nuevo punto de partida para comenzar una nueva etapa de significación, en donde, se enriquecerá con la resignificación, en la cual se construirán más argumentaciones, espacios de uso, procedimientos y todo aquello que rodea a un saber. (Cantoral, 2016, pp. 165-166)

Figura 7.5. Red de significados de la *métrica.*



Nota: Cada nodo representa un escenario en donde aparece una *métrica* en uso que genera un significado relacionado al contexto. El proceso de *resignificación progresiva del saber* por el que transita un estudiante podría visualizarse como un camino que recorre sobre esta red, transitando por diferentes significados y escenarios. Al constituirse como una abstracción, el objeto *espacio normado* está presente en todos estos nodos en donde aparece en uso el saber de la *medida* (por lo tanto, también el *espacio métrico*). El *discurso Matemático Escolar*, promueve ciertos recorridos sobre esta red, excluyendo otros.

Al considerar al saber popular, técnico, y culto en su conjunto conformador de la sabiduría humana, asumimos que hay muchos escenarios con epistemologías propias. A su vez, esta misma red teórica de significados de este saber, evoluciona históricamente, de forma coherente con que los procesos de construcción social de conocimiento matemático, es decir, tiene historia.

Con esta idea queremos expresar, que existen un sinfín de escenarios (nodos), en donde aparecen *unidades de medida* en uso. En los que hemos identificado, pudimos reconocer la estructura de *espacio normado* en su funcionamiento. Sostenemos, que debe de haber una conexión entre esta multiplicidad de escenarios, y la emergencia de una estructura abstracta como la que presenta el *espacio normado,* a pesar de que esta pueda haber quedada oculta en la historia de la humanidad. Lo que planteamos en este proyecto de investigación, es una *reconstrucción racional* que tiene la intención de interpretar una conexión entre estructuras de prácticas en actividades de *medida*, y la estructura del *espacio normado*, teniendo en cuenta que este permite que emerjan ideas de *distancia* (resignificación del *espacio métrico*). Desde nuestra postura teórica, asumimos que las prácticas anteceden y acompañan al objeto, por lo tanto, tiene sentido plantear que debería de haber una conexión, entre la construcción social de *métricas,* y la abstracción del *espacio normado*, ya que presentan estructuras equivalentes en su forma. La inferencia, es que, al ser las prácticas de *medida* tan divulgadas y desarrolladas desde antaño, deben de haber antecedido la construcción de una abstracción que las describe, como es el objeto *espacio normado*. En todo caso, el reconocimiento de esta relación permitiría ya ubicar escenarios en donde encontrar potenciales resignificaciones del *espacio normado*.

7.3. Resignificación progresiva: construcción social de métricas más complejas, que permiten comparaciones de nuevas magnitudes.

En la *sección 6.4*, como ejemplo analizamos la *métrica* que produce *medidas* de alturas inaccesibles estudiadas en Espinoza et al. (2018). Vimos que era necesaria la consideración de una relación de proporcionalidad entre las alturas inaccesibles y longitudes sobre el suelo (ya sea de sombras, o del observador a la base de un edificio). De esta manera se reconocía una relación de isomorfismo entre dos espacios del estilo de los que describimos en la discusión inmediata anterior. El primer espacio E_1 de alturas de edificios que no permiten una comparación directa con la *magnitud* de una *unidad de medida* por su carácter de inaccesibles, y el segundo E_2 es conformado por las longitudes identificadas en la superficie del suelo (*figura 7.6*). Reconocer una relación proporcional entre E_1 y E_2, permitía obtener la medida en E_2, y a partir de esta, obtener medidas en E_1. Por lo tanto, esta *métrica*, requería de más que una comparación directa entre *magnitudes*, sino que se realiza la comparación de manera indirecta, a partir de la consideración de varios elementos del contexto, que permiten establecer una proporción entre ambos espacios. Esto describe una *métrica* más compleja que involucra, al menos, conocimiento de *unidades de medida* de longitud previamente institucionalizadas, el uso de un instrumento (el astrolabio) para medir la inclinación del sol e interpretar correctamente la proporción entre alturas y sombras. Esto nos dio indicios de la presencia de un proceso de resignificación progresiva de la *métrica*. Las propiedades del *espacio normado* se mantienen, heredándose desde E_2 hacía E_1, mediante una proporción (isomorfismo), y permiten la comparación de *magnitudes* que *a priori* no eran directamente comparables ($d(x,y) = \left| \|x\| - \|y\| \right|$).

Otro ejemplo de importancia para nuestro análisis, ya que nos permitió confirmar la existencia de *métricas* que fueran producto de una *resignificación progresiva* del saber, y que permitieran la comparación de nuevas *magnitudes* es la *métrica* que permite medir terrenos de siembra según su *valor productivo* (*sección 6.5*). En este caso, se tomaba de referencia una cantidad de semillas medidas con una *unidad de medida* usual de volumen, y a partir de una organización de prácticas, que implicaban el uso de otras dos *métricas* (*paso* y *puño*), y de conocimiento experiencial de las técnicas de cultivo, se establecían etapas de *compensación* de la fertilidad de tierra, aumentando o disminuyendo la superficie del terreno (*figura 7.7*). Este procedimiento, también hace corresponder una *métrica* basada en unidades *de medida* de volumen*,* con otra que involucre las *magnitudes* que se buscan medir, que *a priori,* no era evidente cómo hacerlo. Terrenos que tuvieran una superficie de área distintas, podrían medir lo mismo según esta *métrica* (*figura 7.8*).

Frente a la imposibilidad de *medir* una *magnitud* que desea ser *evaluada*, (alturas inaccesibles o *valor productivo* de terrenos de siembra), emergen nuevas *métricas* que permiten superar las dificultades provenientes del contexto, y producir *medidas* de las *magnitudes* deseadas. Sostenemos que estos ejemplos, son representativos de estos casos, al mismo tiempo, descriptivos.

La estructura de *espacio normado* que mostramos en la discusión anterior (*figura 7.2*) habría de mantenerse en estos casos. Esto lo podemos sostener, porque en el caso de la *métrica* de las alturas inaccesibles, se asocian de manera isomorfa con un espacio de *magnitudes* sobre la superficie de la tierra que admite la estructura que discutimos. En el caso de la *métrica* que mide terrenos según su *valor productivo*, sucede algo similar, ya que se relaciona directamente con la cantidad de semilla que se requerirá para sembrarlos, manteniendo también una relación isomorfa entre *valor* *productivo* y volumen de semillas, siendo que la *métrica* que permite medir las semillas por volumen es de las del tipo caracterizadas anteriormente.

Figura 7.6. Esquema de la *métrica* que mide alturas inaccesibles.

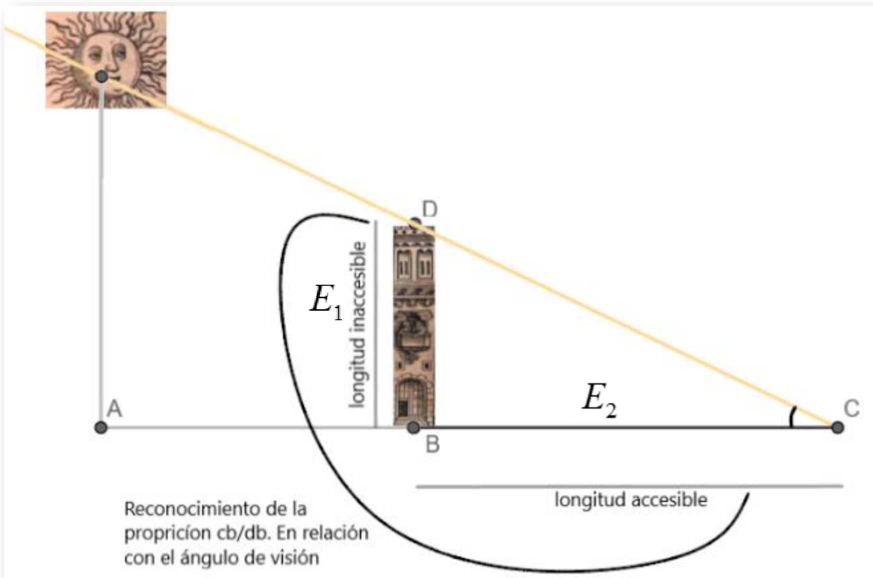


Figura 7.7. Método esquemático reconstruido, de la organización de prácticas que describe el funcionamiento de la *métrica* que mide terrenos según su *valor productivo*.

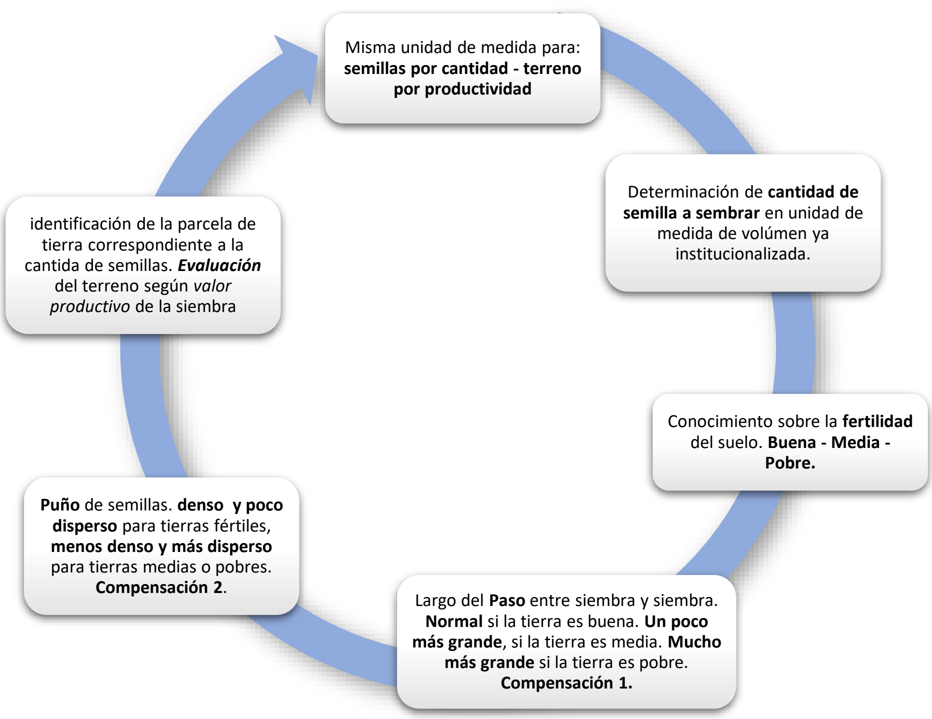
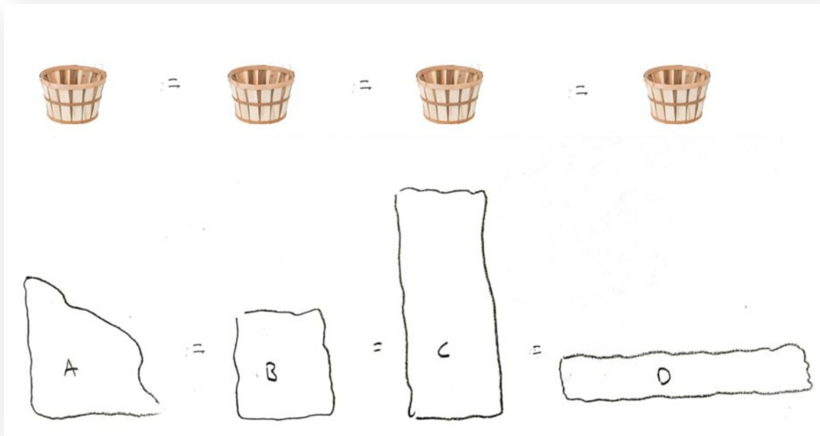


Figura 7.8. Relatividad de las *métricas.* Igual *valor productivo* no implica igual área.



7.4. De la medida, a la distancia. Tres niveles distintos de la práctica de comparación

La comparación de *magnitudes* puede generar ideas de *distancia*, y al constituirse una *métrica* como una *práctica socialmente compartida*, los integrantes del contexto en donde aparece en uso han de generar una experticia, que les posibilita compartir significados de proximidad inducidos por estas *métricas*.

Como vimos, todo *espacio vectorial normado*, admite una interpretación como un *espacio* donde se pueden identificar *medidas* sobre sus objetos. Además, vimos que siempre generan una idea de *distancia* a partir de *comparaciones,* $d(x,y)=\|x-y\|$. Para nuestros intereses, que este *espacio normado*, sea un *espacio* vectorial, es importante únicamente porque esto garantiza la existencia de una *resta* bien definida, que en nuestra interpretación es la que está representando procesos de *comparación*. La *resta*, al fin y al cabo, es al menos en muchos casos, una *comparación* en un contexto intramatemático.

En algunos casos contextuales la comparación entre las *magnitudes* se puede realizar de forma directa, como por ejemplo en el caso del niño al que se le preguntaba cuál lápiz es más grande. En ese caso, se comparaban directamente los lápices, y se mide la diferencia ($\|x-y\|$). En otros, la idea de *comparar* antes de medir se dificulta, aunque sí es posible *comparar* las *medidas*. Por ejemplo, ¿cómo es posible comparar dos terrenos de siembra por su *valor productivo* sin medir previamente? ¿O cómo se puede comparar las alturas inaccesibles sin medir previamente? Sostenemos que en estos, es la *métrica* la que permite articular una *comparación* que sin su presencia no se podría articular. Primero se producen *medidas* de una *magnitud*, y después al *comparar* ($\left| \|x\| - \|y\| \right|$), se produce una idea de *distancia*. Frente a la imposibilidad de superponer terrenos para poder ver la diferencia de productividad que hay entre ellos, emerge una *métrica* que permitiría *comparar* estos terrenos según la *magnitud* mencionada. Es esta comparación ($\left| \|x\| - \|y\| \right|$), la que permite generar una idea de cercanía o lejanía en términos de la *magnitud.* Podría decirse entonces, que cada *métrica*, articula una posibilidad de *comparar magnitudes* de cierta naturaleza.

Si se tiene un espacio E, con una norma $\| \ \| : E \to \mathbb{R}$ bien definida, ya vimos que $d(x,y) = \|x-y\|$ es una *distancia* bien definida en términos del objeto formal. Pero, como en algunos casos en contexto como los mencionados, no se puede comparar las *magnitudes* de manera previa al uso de la *métrica* ($x-y$), sino que es esta la que permite la comparación ($\left| \|x\| - \|y\| \right|$), nos llamó la atención evaluar las propiedades matemáticas de este tipo de comparación, que permitirían caracterizarla como posibles resignificaciones del *espacio métrico* en contextos. Evaluemos las propiedades considerando que x e y, son *magnitudes* como alturas inaccesibles, o valores productivos de terrenos:

Propiedad i) $\left| \|x\| - \|y\| \right| \geq 0$. Cada contexto, siempre se podrá expresar la *distancia* en términos positivos. Se podría identificar si un edificio es tanto más alto que otro, o terreno es tanto más productivo que otro. En todo caso, en cada contexto el usuario de la *métrica* ha de conocer cuál de las *magnitudes* que está comparando es la mayor. En caso de que la *distancia* sea cero, las *magnitudes* serían equivalentes. Dados cualquier x e y.

Propiedad ii) $d(x,y) = \left| \|x\| - \|y\| \right| = \left| \|y\| - \|x\| \right| = d(y,x)$. En estos contextos, será usual saber cuál es la *magnitud* mayor, por lo tanto, la *distancia* se expresa en términos de lo que le “falta” a la menor para alcanzar a la mayor. Por ejemplo, si $\|x\| > \|y\|$, tanto $d(x,y)$ como $d(y,x)$, implicaría reconocer, cuánto más grande es la *medida* x que la de y. Parecería ser que es una propiedad que en muchos contextos se trivializaría, sin embargo es protagónica en el *dME*.

Propiedad iii)

$$d(x,y)=\big|\,\|x\|-\|y\|\,\big|=\big|\,\|x\|-\|z\|+\|z\|-\|y\|\,\big|\leq\big|\,\|x\|-\|z\|\,\big|+\big|\,\|z\|-\|y\|\,\big|=d(x,z)+d(z,y)$$

$$d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$$

Consideramos que aquí se mantiene una idea de transitividad de la *distancia,* o de la cercanía como vimos en Mendelson (1990). Por ejemplo, si un terreno x tiene un *valor productivo* cercano al de z, y el de z se mantiene cercano al de y, entonces el *valor productivo* de x estará cercano al de y.

Propiedad iv) $\quad d(x,y)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \big|\,\|x\|-\|y\|\,\big|=0 \quad\Leftrightarrow\quad \|x\|=\|y\|$ [48]

Que dos *magnitudes* x e y midan lo mismo, en estos contextos garantiza que la altura x sería igual a la altura y, o que el *valor productivo* x coincidirá con el y, a pesar de que sean edificios o terrenos diferentes. Esto se da por la propia forma en la que cada una de las *métricas* se instrumentan y aportaría información importante en cada contexto, abonando al valor funcional de estas. Permite tener una relación de equivalencia de terrenos o de edificios, según la *magnitud* medida en cada caso.

Lo que es importante señalar en este momento, para los objetivos de nuestra investigación, es la presencia de indicios que sugieren que la relación identificada entre los objetos matemáticos *espacio normado* y *espacio métrico* mediante el teorema que afirma que todo *espacio normado* genera un *espacio métrico*, estaría presente en las prácticas en la actividad humana relacionando saberes de *medida* y *distancia,* mediadas por la práctica de comparación, ya sea $\|x-y\|$ o $\big|\,\|x\|-\|y\|\,\big|$. Esto nos permite descentrar el teorema al reconocer su valor funcional en contextos, de la siguiente manera: *En prácticas en donde se institucionaliza un saber de medida, se genera una saber descentrado de distancia.*

Si continuamos con la reflexión de la *sección 7.3*, resumida en la *figura 7.5,* es pertinente plantear que podría haber escenarios de resignificación del *espacio métrico*, también en cada nodo de la red

[48] Desde el punto de vista formal de los objetos formales y los espacios usualmente trabajados en el *dME*, esta condición no garantizaría que $x=y$, sino que dependería plenamente del espacio en donde viven x e y. Por ejemplo, $\|(1,1)\|=\|(-1,-1)\|$, no implica que $(1,1)=(-1,-1)$ con la norma usual en $\mathbb{R}^2$.

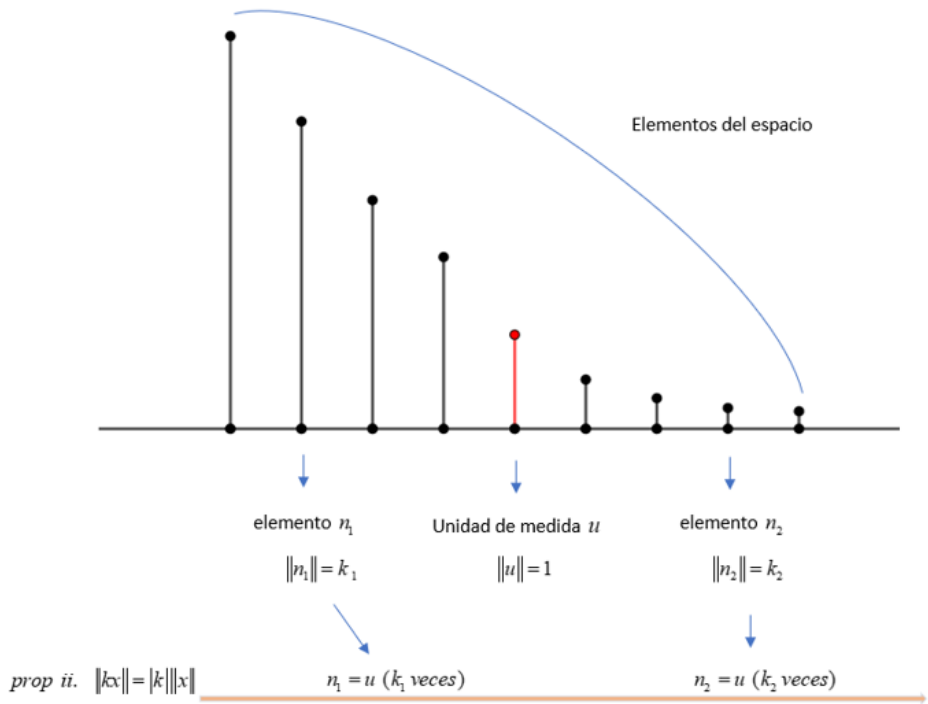
de significados de la *métrica*. Es decir, si se puede obtener medidas de un *espacio* de *magnitudes*, se puede por consecuencia, obtener una idea de *distancia* entre los objetos de dicho espacio en términos de la *magnitud* medida. A esto nos referimos cuando mencionamos que los saberes de *medida–métrica–distancia,* están interrelacionados. Entonces sería posible, por ejemplo, establecer que tan cercano es un terreno de otro, según su *valor productivo*. O en general, se podría establecer qué tan cerca o lejos está una *magnitud* de otra de la misma naturaleza, si se dispone de una *métrica* que permita medirlas, heredando desde esta una racionalidad de *distancia.* A continuación, esquematizaremos los distintos tipos o niveles de uso de la práctica de comparación que han surgido a partir del análisis que hemos realizado.

Comparación tipo 1, generación de la *unidad*:

Es la que permite reconocer un comportamiento *estable* de una *magnitud* en algún objeto o fenómeno del contexto, permitiendo que el mismo sea tomado de referencia para la construcción social de una *unidad de medida.*

Comparación tipo 2, construcción social de espacio del tipo I.

Las comparaciones **tipo 2**, comparan *magnitudes* con la de la *unidad,* para producir un espacio de medida (*espacio normado* resignificado).



Configuración de espacios de tipo II.

Existen *métricas* que articulan de manera organizada espacios de medida del **tipo I**, para producir *medidas* de otro tipo de *magnitudes*. En este trabajo las ejemplificamos con la *métrica* que mide alturas inaccesibles, y la *métrica* que mide terrenos según su *valor productivo*. En cada una de estas, hay otras del **tipo I** organizadas de manera que se mantenga una funcionalidad coherente a una intencionalidad, considerando también otros elementos del contexto. Por lo tanto, hay una organización de comparaciones del **tipo 1** y **tipo 2**, anidadas, que permiten la funcionalidad de cada *métrica.* Esto nos da indicios de un proceso de *resignificación progresiva* de la *métrica.*

Comparación tipo 3, la distancia.

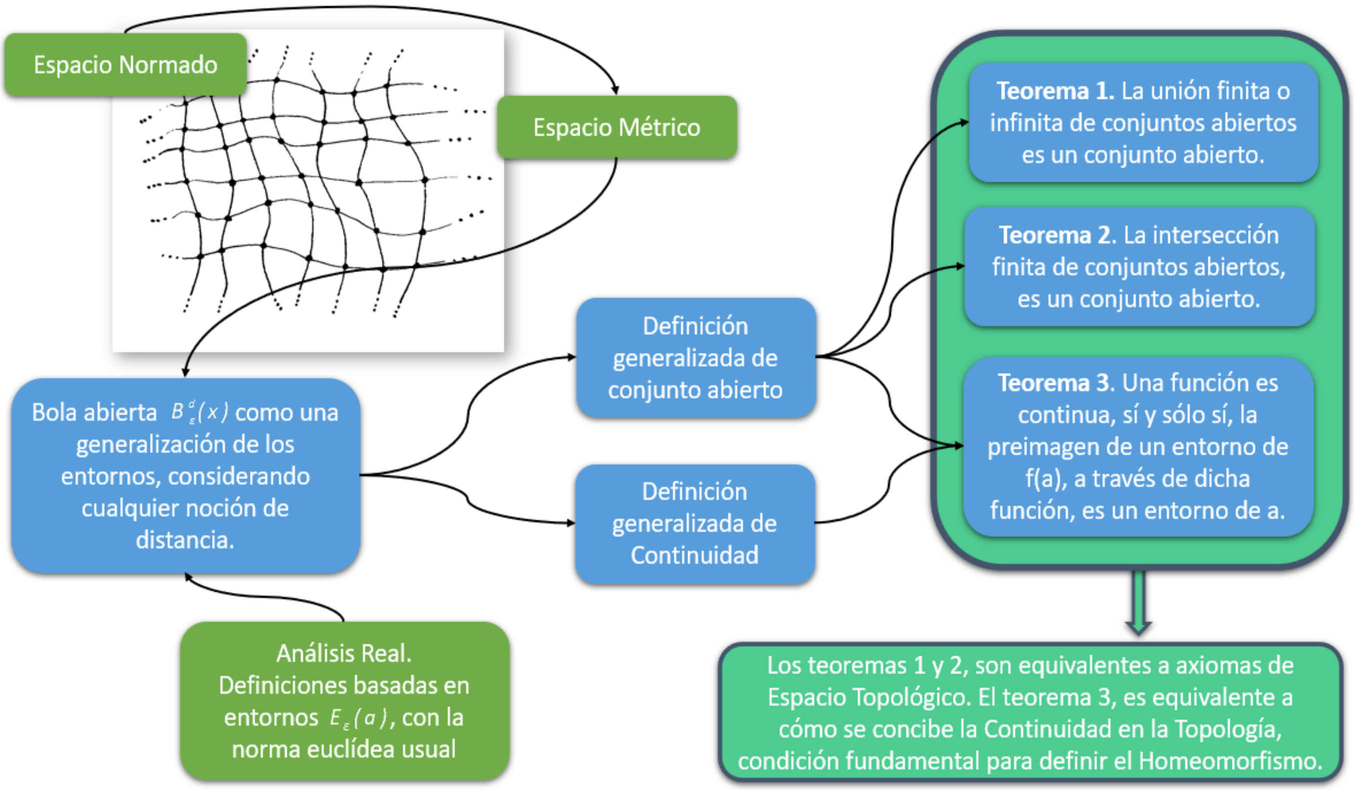
Ya sea la medición de una comparación directa de *magnitudes* como sucede en algunos casos con métricas del **tipo I** $(d(x,y) = \|x - y\|)$, o la comparación de *medidas* producidas por una *métrica* del **tipo I** o **tipo II** $(d(x,y) = \big|\|x\| - \|y\|\big|)$, en este nivel se genera un concepto de *distancia,* en términos de una *magnitud,* ya que se posibilita expresar cercanía o lejanía: qué tan cerca, qué tan lejos, cuánto más, cuánto menos, etc. está un objeto de otro, en términos de la *magnitud* que mide la *métrica.*

7.5. Esquema final de la reconstrucción racional, hasta el momento.

A modo de conclusión, planteamos el esquema de la *reconstrucción racional* que habíamos configurado en la primera parte de esta investigación, pero sosteniendo que han de incorporarse los escenarios que a partir del análisis consideramos podrían dar luz de los procesos de construcción social históricos de los saberes de *medida, métrica y distanca,* que quedan opacados cuando son presentados de manera abstracta y axiomática en los objetos *espacio normado y espacio métrico.* Para representar esto de manera visual, sumamos la imagen que representa la red de *resignificaciones* posibles de la *medida* y la *distancia* que hemos asociado a los objetos *espacio normado* y *espacio métrico*, sin perder de vista el panorama completo que conecta estos saberes con la Topología*.*

Esta *reconstrucción racional* podría plantear una ruta fructífera hacia una introducción a la axiomática del *espacio topológico,* y la noción de *función continua* de la Topología, pudiendo aportar significados a nociones que son usualmente presentadas de manera exclusivamente formal. Esto requeriría de más investigación para aportar al esquema de la reconstrucción racional significados de los objetos que aparecen en cada ítem, y que provengan de los procesos de construcción social del conocimiento matemático.

Figura 7.9. Esquema de la reconstrucción racional.



8. Referencias bibliográficas

Angel, S., Parent, J., y Civco, D. L. (2010). Ten compactness properties of circles: Measuring shape in geography. *Canadian Geographer*, *54*(4), 441–461. https://doi.org/10.1111/j.1541-0064.2009.00304.x

Antonyan, S. (2016). *Curso de Topología*. https://academicos.fciencias.unam.mx/wp-content/uploads/sites/94/2016/08/Notas-Topologia.pdf

Apostol, T. M. (2001). *Calculus*. Editorial Reverté.

Baeza, M. M. (2016). *Ejercicios para el aprendizaje de la lengua Náhuatl y Diccionario Español-Náhuatl*. Comisión Nacional para el Desarrollo de los Pueblos Indigenas (CDI).

Bastán, M., Cuenya, H., y Fioriti, G. (2007). La Topología en la formación de profesores de matemática. *Sociedad, Escuela y Matemáticas: Aportaciones de La Teoría Antropológica de Lo Didáctico*, 279–300.

Bastán, M., Cuenya, H., y Fioritti, G. (2006). Un análisis histórico-epistemológico de la Topología y su vinculación con el saber enseñado en la formación de profesores de matemática. *Revista de Educación Matemática*, 21, 1–15.

Cantoral, R y Farfán, R-M. (1990). Elementos Metodológicos para la reconstrucción de una Didáctica del Análisis en el Nivel Superior. *Cuadernos de Investigación*, *13*, 19-26.

Cantoral, R. (2016). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre la construcción social del conocimiento*. Editorial Gedisa.

Cantoral, R., Montiel, G., & Reyes-Gasperini, D. (2015). Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. *Avances de Investigación En Educación Matemática*, *8*, 9–28.

Cantoral, R. (2019). *Caminos del saber*. Editorial Gedisa

Chan, H. (1995). “The Distance of a Bowshot”: Some Remarks on Measurement in the Altaic World. *Journal of Song-Yuan Studies, 25*, 29–46.

Cooperrider, K., y Gentner, D. (2019). The career of measurement. *Cognition, 191*, 103942. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2019.04.011

David, Tiesinga, N., y Tiesinga, E. (2019). The International System of Units (SI). *NIST Special Publication*. https://doi.org/https://doi.org/10.6028/NIST.SP.330-2019

Espinoza, L., Gómez, A. V., y Zúñiga, D. V. (2018). Geometría en la práctica cotidiana: La medición de distancias inaccesibles en una obra del siglo XVI. *Revista Latinoamericana de*

Investigacion En Matematica Educativa, 21(3), 247–274. https://doi.org/10.12802/relime.18.2131

Gaete Peralta, C. A. (2019). *Estudio socioepistemológico de la integral definida a través de la categoría de modelación, un modelo de anidación de prácticas y un marco de referencia de los usos de la medida*. Facultad de ciencias de la Pontifica Universidad Católica de Valparaíso.

Gyllenbok, J. (2018). *Encyclopaedia of historical metrology, weights, and measures*. Cham: Birkhäuser. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-319-57598-8

Haidt, J. (2009). Moral psychology and the misunderstanding of religion. *The believing primate: Scientific, philosophical, and theological reflections on the origin of religión,* 278–291. https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780199557028.003.0015

Harvey, H. R., y Williams, B. J. (1980). Aztec arithmetic: Positional notation and area calculation. *Science, 210(4469)*, 499–505. https://doi.org/10.1126/science.210.4469.499

Fernández, J. L. y Hinrichsen, D. (1977). *Topología general*. Pueblo Nuevo Y Educación.

Hurtado, R. (2013). *Notas de Espacios Métricos, Cálculo Diferencial e esIntegral III*. http://sistemas.fciencias.unam.mx/~erhc/calculo3_2014_2/espaciosmetricos1.pdf

Kelley. (1955). *General Topology*. Springer.

Kuhn, B. T. S. (1961). The Function of Measurement in Modern Physical Science. *University of Chicago Press*, 161–193.

Kula, W. (1986). *Measures and Men*. Princeton University Press. https://doi.org/10.1515/9781400857739

Law, S. Y., Review, P., Polsby, D. D., y Poppern, R. D. (2016). The Third Criterion: Compactness as a Procedural Safeguard Against Partisan Gerrymandering. *Yale Law and policy review, 9(2),* 301–353.

Mari, L. (2003). Epistemology of measurement. *Measurement: Journal of the International Measurement Confederation, 34*, 17–30. https://doi.org/10.1016/S0263-2241(03)00016-2

Mari, L. (2005). The problem of foundations of measurement. *Measurement: Journal of the International Measurement Confederation, 38(4)*, 259–266. https://doi.org/10.1016/j.measurement.2005.09.006

Mari, L., y Mencattini, A. (2015). A conceptual framework for concept definition in measurement: The case of “sensitivity.” *Measurement: Journal of the International Measurement Confederation, 72(May)*, 77–87. https://doi.org/10.1016/j.measurement.2015.04.030

Mari, L., Maul, A., y Wilson, M. (2018). Intersubjectivity of measurement across the sciences. *Measurement: Journal of the International Measurement Confederation, 131(September)*, 764–770. https://doi.org/10.1016/j.measurement.2018.08.068

Mari, L., Maul, A., y Wilson, M. (2019). Can there be one meaning of "measurement" across the sciences?. *Journal of Physics: Conference Series, 1379(1)*. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1379/1/012022

Márquez García, G. (2018). *Una problematización del concepto de Topología en los inicios de la teoría de conjuntos abstractos de Fréchet*. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Istituto Politécnico Nacional.

Maximenko, E. (2019). *Espacios métricos (definición y ejemplos)*. http://esfm.egormaximenko.com/

Mcleod, W. (1965). The Range of the Ancient Bow. *Phoenix, 19(1)*, 1–14.

Mendelson, B. (1990). *Introduction to topology*. Dover publications. https://doi.org/10.2307/3611741

Meng, A., & Palmer-rubin, B. (2017). Gerrymandering Opposition: Minority-Concentrated Districts and Electoral Competition in Mexico. *Studies in Comparative International Development volumen*, *52*, 64–86. https://doi.org/10.1007/s12116-015-9206-2

Montiel, G., & Buendía, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: Ejemplos e ilustraciones. *Metodología En Matemática Educativa: Visiones y Reflexiones*, 61–88.

Munkres. (2002). *Topologia*. Pearsons Education.

Narli, S. (2010). Do Students Really Understand Topology in the Lesson ? A Case Study. *International Journal of Behavioral, Cognitive, Educational and Psychological Sciences , 2,* 121–124.

Norenzayan, A. (2014). Does religion make people moral?. *Behaviour, 151(2–3)*, 365–384. https://doi.org/10.1163/1568539X-00003139

Oxford English and Spanish Dictionary. (s.f.). *Inherente*. Recuperado el 13 de mayo de 2021, de https://www.lexico.com/es/definicion/inherente

Pigafetta, A. (2018). *Primer Viaje en Torno del Globo*. Maxtor.

Raman-Sundstrom, M. (2015). A pedagogical history of compactness. *American Mathematical Monthly, 122(7)*, 619–635. https://doi.org/10.4169/amer.math.monthly.122.7.619

Diccionario de la lengua española de la Real Academia Española. (s.f.). *Inherente*. Recuperado el 13 de mayo de 2021, de https://dle.rae.es/inherente?m=form

Redman, C. (1990). *Los orígenes de la civilización. Desde los primeros agricultores hasta la sociedad urbana en el Próximo Oriente.* Editorial Crítica Barcelona.

Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L., & Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los Números Naturales. *Suma, 2*, 7–23.

Ríos, W. (2020). *Socioepistemología y Transversalidad: Una reconstrucción racional de tres teoremas fundamentales.* Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. https://doi.org/10.13140/RG.2.2.35817.03685

Shirali, S., y Vasudeva, H. (2005). *Metric Spaces*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-78631-5_2

Sierra, E. (2008). *Pesas y medidas: un estudio socioepistemológico. El caso Metlatónoc.* Universidad Autónoma de Guerrero.

Soto, D. (2010). El discurso matemático escolar y la exclusión. Una visión socioepistemológica. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Spivak, M. (2008). *Cálculo Infinitesimal*. Editorial Reverté.

Torres-Corrales, D., Lopez-Acosta, L., y Montiel, G. (2020). Experiencias formativas de investigadores en el desarrollo de proyectos doctorales de matemática educativa. *Trazas de La Investigación Educativa En La Experiencia de Sus Quijotes: Reflexiones y Aportes*, 103–119.