CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Unidad Zacatenco
Departamento de Matemática Educativa

"Razonamiento abductivo e inductivo durante el proceso de prueba en Geometría Analítica con GeoGebra: Un estudio de casos en el nivel bachillerato"

Tesis que presenta:

Ma. Dalia Lozano Grande

Para obtener el grado de:

Doctora en Ciencias

en la especialidad de

Matemática Educativa

Director de la Tesis:

Dr. Gonzalo Zubieta Badillo

Ciudad de México Octubre 2020

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt) por el apoyo financiero que permitió llevar a cabo mis estudios de Doctorado.

Becario No. 281995

Agradezco al Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav) por la oportunidad de crecimiento y al Instituto Politécnico Nacional por el apoyo otorgado para la conclusión de esta Tesis.

A mi hija Ari Amalia, a mis padres Araceli y Germán, a mi familia y amigas: Mil gracias, por su apoyo y compañía.

ÍNDICE

RESUMEN

En este documento se exponen los resultados de una investigación llevada a cabo con estudiantes de nivel bachillerato en tormo al estudio de las formas de razonamiento emergentes al resolver problemas de prueba de geometría analítica por medio de argumentación utilizando el software GeoGebra, tales como abducción e inducción. En este sentido, es importante reconocer el papel que juega la herramienta deslizador para generar conjeturas, generalizar patrones numéricos y llevar a cabo la prueba de arrastre. El tipo de prueba llevada a cabo en este contexto, se caracteriza entonces de forma general, por ser un tipo particular de argumentación validada con ayuda del software mediante una práctica de generalización algebraica.

ABSTRACT

In this document, the results of an investigation carried out with high school students are presented to study the emerging reasoning ways to solve analytical geometry test problems through argumentation using GeoGebra software, such as abduction and induction. In this sense, it is important to recognize the role that the slider tool plays to generate conjectures, generalize numerical patterns and carry out the drag test. The type of proof carried out in this context is then characterized in a general way, as a particular type of argumentation validated with the help of software through a practice of algebraic generalization.

PRESENTACIÓN

Actualmente se reconoce la importancia del razonamiento y la prueba en el aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles educativos, así como las dificultades encontradas en estudiantes y profesores en esta área. En efecto, muchos estudiantes y profesores enfrentan serias dificultades al razonar sobre ideas matemáticas y al construir y comprender argumentos matemáticos. La expansión de investigaciones en esta área, ha ofrecido importantes puntos de vista, pero aún hay muchas preguntas para las cuales son necesarias respuestas teóricas y empíricas. En este sentido, el presente trabajo ofrece un estudio acerca del razonamiento llevado a cabo por estudiantes de bachillerato durante el proceso de resolución y prueba en problemas de Geometría analítica con ayuda del software GeoGebra empleando argumentación. En particular, el estudio hace énfasis en el papel que desempeña la herramienta deslizador GeoGebra, sin dejar de lado otros recursos que los estudiantes emplean tanto para elaborar conjeturas como para validarlas, a partir del empleo recurrente de ciertas acciones que en conjunto son llamadas Estructuras de control. Así, se pone énfasis en los tipos de razonamiento empleados con mayor frecuencia en este tipo de situaciones: la abducción y la inducción que son formas naturales de razonamiento matemático pues se manifiestan en la generación de nuevas ideas y en la generalización de resultados, siendo éstas, prácticas[1] indispensables durante el proceso de prueba que culmina en la construcción de expresiones algebraicas.

El reporte de esta investigación se compone de cinco capítulos. Con el fin de introducir al lector se presenta a continuación una breve síntesis de cada uno de estos.

En el primer capítulo se exponen los Antecedentes y el Problema de investigación. Los temas que se abordan son precisiones acerca de conceptos relacionados con argumentación y prueba, tipos de razonamiento, tratamiento de la Geometría analítica en el aula y uso del software de Geometría Dinámica. Así mismo, se introducen ciertos aspectos teóricos relacionados con lo tratado en el Marco conceptual, tales como la Unidad cognitiva, el

[1] Se emplea este término en el sentido de un ejercicio continuo o de una acción recurrente; para el caso de esta investigación, nos referimos a una estructura de control precisamente.

Modelo de Toulmin y el Modelo CKĆ. Por último, se plantea el problema, los aportes, el objetivo y las preguntas de investigación.

En el segundo capítulo se delimitan y exponen los temas del Marco conceptual: La Continuidad estructural, el uso del Modelo de Toulmin y de la llamada Estructura de control (del Modelo CKĆ) para analizar abducción e inducción, también el sistema global del proceso de argumentación y finalmente los razonamientos ascendente y descendente presentes en los procesos cognitivos.

En el capítulo tres concerniente a la metodología de investigación, se brindan algunas precisiones acerca de lo que es un estudio de casos, las etapas del estudio experimental, la población de estudio, el protocolo de investigación y los problemas propuestos.

En el cuarto capítulo, se lleva a cabo el análisis cualitativo del proceso de argumentación de tres equipos de estudiantes, quienes resolvieron dos de los problemas propuestos. Dicho análisis se realizó en tres vertientes: La identificación del tipo de razonamiento (abducción, inducción o deducción) utilizando el Modelo de Toulmin, el análisis de la Estructura de control y el reconocimiento del razonamiento ascendente o descendente. Finalmente se sintetiza cada resolución con un esquema global que ilustra el proceso de argumentación y las etapas del proceso de prueba o validación final presentes en cada caso.

En el quinto capítulo, se da respuesta a las preguntas de investigación con la información sintetizada en algunas tablas, las cuales, contienen los resultados obtenidos en el capítulo anterior. Finalmente, en este mismo capítulo, se proponen algunas líneas de investigación que pueden seguirse a partir de lo encontrado en ciertos resultados considerados inconclusos o que dan luz sobre problemas que se consideran pendientes de resolver.

CAPÍTULO 1

ANTECEDENTES Y PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se dan algunas precisiones importantes acerca del concepto de prueba en Matemática Educativa y de su papel junto con la argumentación en la clase de matemáticas. De igual modo, se aborda el proceso de exploración-prueba y con este concepto se introducen otros que sirven de preámbulo al Marco conceptual de esta investigación, tales como: La Unidad Cognitiva, la validación y la generalización, la C-Prueba y el modelo de Toulmin en combinación con el Modelo CKḈ. Se hace también una introducción acerca del origen de la Geometría Analítica y de las formas de razonamiento que se encuentran en sus raíces epistemológicas, así como su tratamiento didáctico en la actualidad (incluido el concepto de problema abierto en matemática educativa). También se da una introducción a los tipos de razonamiento presentes a lo largo de los procesos de prueba: Deducción, abducción e inducción. Finalmente, un acercamiento al uso del software de Geometría Dinámica y su potencialidad para el tratamiento de la Geometría Analítica en la clase de matemáticas.

1.2 ANTECEDENTES

1.2.1 Algunas precisiones acerca de la prueba en matemática educativa

La trasposición didáctica, investigada por Chevallard en 1985 aduce que la matemática (al igual que otras ciencias), experimenta siempre una transformación adaptativa bajo las reglas y valores del sistema didáctico para lograr convertirse en contenido de enseñanza. La demostración, considerada el núcleo de la matemática, también se ve afectada por las condiciones de dicho sistema y por tal motivo, no puede enseñarse del mismo modo en un aula de clase como se trata en un ambiente puramente científico.

Abordar la enseñanza del pensamiento deductivo o de la demostración en una clase, requiere de un antecedente; se plantea entonces un estado previo llamado prueba, el cual implica desarrollar ciertas habilidades como analizar, conjeturar y argumentar. ¿Cómo lograr que los estudiantes sean conscientes de las características sobresalientes del proceso de prueba? ¿Cómo potenciar en ellos las habilidades necesarias en la actividad de probar? Para Balacheff (2000) resultó primordial establecer una distinción entre los vocablos explicar, validar, probar, y demostrar, los cuales con frecuencia se consideran sinónimos en la práctica de la enseñanza de la matemática. A su modo de ver, dicha costumbre representa un obstáculo para las investigaciones sobre el asunto que nos interesa, pues conduce a homologar diferentes niveles de actividad matemática. A continuación, algunas de sus precisiones:

- *"Explicación:* Desde la perspectiva de Piaget (1970), diríamos que explicar, "en el terreno de las ciencias deductivas", es en primer lugar despejar las "razones" para "responder a la pregunta del Por qué" Tiene como propósito establecer en el interlocutor un sistema de objetos caracterizados por una cierta homogeneidad (…). La base de la explicación es esencialmente la lengua natural (…).
- *Validación:* Está así ligado a fines prácticos: proporciona las garantías necesarias para una puesta en acción, es decir, la acción de decidir acerca de la veracidad de una aserción (…).
- *Prueba:* Es una validación para una comunidad dada en un momento dado. El paso de la explicación a la prueba hace referencia a un proceso social por el cual un discurso que asegura la validez de una proposición cambia de posición siendo aceptada por una comunidad (…).
- *Demostración*: Es una validación tan sólo para una comunidad en particular: la matemática. Se trata de una serie de enunciados que se organizan siguiendo un conjunto bien definido de reglas (…). La demostración en matemáticas se fundamenta sobre un cuerpo de conocimientos fuertemente institucionalizado, sobre un conjunto de definiciones, de teoremas y de reglas de deducción... este principio es uno de los fundamentos del rigor matemático (…). Lo que caracteriza a las demostraciones como género del discurso es su forma estrictamente codificada." (Balacheff, 2000, pp. 11-13).

Lo anterior lleva a considerar el papel fundamental que guarda el recurso de la interacción social como promotor de los procesos de validación de resultados y como agente de devolución de la responsabilidad matemática a los estudiantes sobre lo que producen. Al respecto, Larios (2006) basado en los aportes de Balacheff, advierte que, en el caso de estudiantes con diferentes niveles de razonamiento, la interacción social se convierte también en un obstáculo debido a malentendidos, falta de consensos o intentos por lograr que prevalezcan las opiniones de algunos sobre las de otros, lo cual, lleva en ocasiones a presentar y defender enunciados falsos o rechazar enunciados verdaderos. Estas acciones, específicas de la interacción social nos obligan a analizar un fenómeno importante de los procesos de obtención de la prueba: la argumentación.[2]

1.2.2 Argumentación: Su papel en la clase de matemáticas y su relación con la prueba

Argumento es un razonamiento para probar o demostrar una proposición[3] o para convencer sobre lo que se afirma o se niega. (RAE, 2016). De acuerdo con Boero (2008) en las últimas cuatro décadas las investigaciones sobre argumentación se han desarrollado de forma notable. Se han estructurado diversos marcos teóricos con perspectivas de investigación diferentes: Desde la función de convencimiento de la actividad argumentativa expuesta por Toulmin[4], hasta el análisis de los aspectos sintácticos (formales). Algunos otros estudios han considerado las características argumentativas específicas de las actividades matemáticas. En este caso, Boero y su equipo, han comenzado su trabajo a partir del análisis cognitivo de la argumentación versus prueba llevado a cabo por Duval en 1991. Otros antecedentes de sus investigaciones son los trabajos de Erna Yackel y de Götz Krummheuer que se explican a continuación.

Yackel (2001) se interesa en el aprendizaje de las matemáticas enfocado en la comprensión, en el razonamiento y en "el dar sentido". Muestra además que los constructos de normas sociales y sociomatemáticas proporcionan un medio para analizar aspectos de explicación, justificación y argumentación en las aulas de matemáticas. Propone usar el esquema de argumentación de Toulmin a manera de herramienta metodológica. Su interés se centra en la explicación matemática y la justificación como logros interaccionales y no como argumentos lógicos, es decir, en lo aceptable, individual y colectivamente, y no en si un argumento se considera matemáticamente válido. También retoma los principios de la Teoría del interaccionismo simbólico que tiene sus raíces en los trabajos de George Herbert Mead y de John Dewey, la cual fue desarrollada extensamente por Herbert Blumer en 1969.

---

[2] Balacheff en su obra "Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas", escrita en 1987 y traducida al español en el año 2000, considera que la argumentación no conlleva a una prueba; posición que ha flexibilizado en artículos más recientes escritos a partir del año 2008, algunos de los cuales forman parte del marco conceptual de este trabajo.
[3] Enunciación de una verdad demostrada o que se trata de demostrar (RAE, 2016)
[4] Toulmin Stephen Edelson. Filósofo y educador británico. Analizó la estructura de la argumentación.

Uno de los principios de esta teoría es la centralidad dada al proceso de interpretación en la interactuación, es decir, plantea que los individuos al interactuar se enfrentan a considerar lo expuesto por otro o a interpretar lo que está haciendo. Las acciones de cada persona se forman, en parte, cuando ella cambia, abandona, retiene o revisa sus planes basados en las acciones de otros.

Ahora bien, Yackel advierte, lo que cuenta como explicaciones o justificaciones matemáticas aceptables responden a una norma sociomatemática. La norma no es una noción individual sino colectiva. Así, para describir normas, en nuestro caso, las normas de la clase, hay que describir las expectativas y obligaciones constituidas en el aula. En sus estudios, ha observado etapas evolutivas de la argumentación. Al trabajar con niños de segundo grado notó que inicialmente los niños necesitaban aprender claramente las expectativas sobre sus explicaciones y justificaciones pues en ocasiones, por ejemplo, interpretaban las preguntas de la profesora como indicadores de error. Conforme el año escolar progresaba, las explicaciones de los estudiantes adquirieron significativamente el carácter de descripciones de acciones sobre los objetos que resultaron fundamentales en su experiencia. A medida que los episodios evolucionaron, los estudiantes contribuyeron a la negociación de las normas actuando cada vez más de acuerdo con las expectativas. Así la discusión progresó y los estudiantes no sólo respondieron a las preguntas del instructor, sino también iniciaron comentarios mostrando cambios importantes en la *comprensión de la estructura de participación en el aula*. Del mismo modo, Yackel realizó experimentos con estudiantes de nivel superior y observó resultados semejantes en la evolución de la argumentación cuando se discutían inicialmente las expectativas (normas). Su enfoque sobre argumentación resulta útil como herramienta metodológica para documentar el aprendizaje colectivo de una clase y para mostrar los cambios en la configuración de participación en el aula a lo largo del tiempo.

Krummheuer desarrolla en 1995 la Teoría de las interacciones del aprendizaje de matemáticas en situaciones cotidianas de clase. Estas situaciones son definidas como las acciones de referencia mutua de los participantes en una clase de matemáticas. En tal escenario aparece la noción de argumentación. Para él, un argumento se define como una secuencia de enunciados matemáticos que pretende convencer, mientras que la argumentación puede considerarse como el desarrollo de un discurso matemático conectado lógicamente. El argumento es una subestructura específica dentro de una argumentación compleja o su resultado. *La argumentación es entonces un proceso y el argumento su producto*. Este autor señala que la argumentación se refiere tradicionalmente a un individuo convenciendo a un grupo de oyentes, pero también puede ser un proceso interno llevado a cabo por una persona. Utiliza el término "argumentación colectiva" para describir una argumentación llevada a cabo por un grupo de individuos.

Krummheuer (2007) afirma que el aprendizaje matemático en clase está basado en la participación de los estudiantes en un proceso de argumentación colectiva la cual tiene una génesis y se desarrolla con el tiempo. En un nivel empírico analiza dicho proceso de argumentación con la Teoría de Toulmin (de forma semejante a como lo utiliza Erna Yackel) para conocer la estructura de los argumentos en el curso de la interacción grupal. En un nivel teórico, considera diferentes estados de autonomía en la participación durante el proceso de argumentación.

1.2.3 El papel de la prueba y la intuición en el salón de clase

Gila Hanna en el año 2000 realiza un estudio sobre la intención de la prueba en el salón de clase. Afirma que una de las principales tareas de los educadores matemáticos es entender el papel de la prueba en la enseñanza para incrementar su utilización en las aulas. De acuerdo con ella, la prueba rigurosa es de importancia secundaria para el entendimiento. Enseñar la naturaleza y los estándares del razonamiento deductivo es importante, pues se necesita conocer cuándo un resultado debe establecerse o no, sin embargo, la prueba brinda su mejor contribución en el aula solo cuando se utiliza una prueba explicativa[5]. Considerando esto, resulta claro que *la principal función de la prueba en matemáticas es la validación de proposiciones, pero la más importante función adicional es la explicación o clarificación*. Clarificar significa mostrar el "por qué" un teorema es cierto y "convencer" significa mostrar que es cierto.

En ese sentido, conviene ahondar en el término "intuición", la cual puede entenderse como:

[5] Zubieta (1994), tomando como base un trabajo de Reuben Hersh de 1993*: Proving is convencing and explaining*, Educational Studies in Mathematics, afirma que el papel principal de la prueba en la investigación es *convencer*, en cambio, en la enseñanza a nivel bachillerato y licenciatura, es *explicar*.

> "la captación primera de conceptos que nos permite comprender lo que nos rodea, surge desde la niñez y constituye el punto de partida de la investigación y del aprendizaje". La intuición, por momentos salta escalones del razonamiento lógico. (…). Es cierto que este método puede conducirnos por caminos falsos y por ello es necesario extremar el cuidado, pero debe aprovecharse la intuición para ayudar al aprendizaje. Debemos recordar, en los niveles elemental, básico y medio, no se están formando matemáticos, se está enseñando a usar la matemática y educando en la comprensión y el manejo del método de esta ciencia. Se está enseñando a pensar lógicamente. Hace falta educar en la intuición". (Crespo, 2005, p.24).

La postura de promover el aspecto intuitivo como preámbulo de la operatividad lógica, tiene como base los estudios hechos por Piaget. Jean Piaget, en sus "Seis estudios de psicología" hace referencia al pensamiento del niño entre los cuatro y los ocho años. En esta etapa, explica, la inteligencia es operatoria concreta y el pensamiento intuitivo y prelógico. Al respecto comenta:

> "Hay una cosa que sorprende en el pensamiento del niño pequeño: el sujeto afirma constantemente y no demuestra jamás (…). Cuando preguntamos algo a niños de menos de siete años, nos sorprende su incapacidad de fundar las afirmaciones, e incluso su dificultad para reconstruir retrospectivamente la forma en que han llegado a ellas. Asimismo, el niño de cuatro años no sabe definir los conceptos que emplea y se limita a designar los objetos correspondientes o a definirlos por el uso ("es para…"), bajo la doble influencia del finalismo y de la dificultad de justificación (…); hasta alrededor de los siete años, el niño sigue siendo prelógico y suple la lógica por el mecanismo de la intuición [que es], simple interiorización de las percepciones y los movimientos en forma de imágenes representativas y de "experiencias mentales", que prolongan por tanto los esquemas sensorio-motores sin coordinación propiamente racional (…). ¿Qué les falta a esas intuiciones para ser operatorias y transformarse así en un sistema lógico? Simplemente prolongar en ambos sentidos la acción ya conocida por el sujeto hasta convertirse en móviles y reversibles (…). Todo hábito es, en

> efecto, irreversible: por ejemplo, escribimos de izquierda a derecha y haría falta todo un nuevo aprendizaje para poder hacerlo de derecha a izquierda (y viceversa para los árabes). Lo mismo ocurre con las percepciones, que siguen el curso de las cosas y con los actos de inteligencia sensorio-motriz que, también, tienden hacia un objetivo y no vuelven atrás (…). Comparada con la lógica, la intuición es, pues, un equilibrio menos estable por falta de reversibilidad…”. (Piaget, 1993, pp.48-54).

1.2.4 Proceso de Exploración-Prueba: Su relación con la Resolución de Problemas

Si se pretende que la argumentación evolucione hacia una prueba, las conjeturas juegan un papel muy importante. Se requiere la existencia de una conjetura en la mente del estudiante porque es la afirmación que va a ser verificada a partir del convencimiento intuitivo, de la argumentación o de la exploración. La conjetura tiene un alto grado de convicción intuitiva por parte del individuo y no una convicción formal, pues al buscarla el individuo realiza verificaciones para convencerse que es “verdadera” o que “pudiera ser verdadera”. La formulación de una conjetura antes de construir su prueba, es un proceso a ser inducido por el docente, por medio de actividades y estrategias adecuadas, inmersos todos los actores en un contexto educativo también adecuado (Larios, 2006).

Lozano (2014), en su Tesis de Maestría, considera el Modelo Exploración-Prueba de Hsieh, Horng y Shy (2012), en el cual se ilustran las etapas más comunes del proceso de resolución de problemas de prueba (ver figura 1.1). Aunque el orden de aparición de las etapas es flexible, pues los estudiantes pueden trabajar simultáneamente en varias fases, el modelo resulta útil para diferenciar cada actividad y visualizar la estructura general del proceso de resolución de problemas. Como puede observarse, la formulación de conjeturas está precedida de otra etapa llamada exploración, sobre todo cuando se trabajan problemas abiertos. En esta fase, el estudiante indaga en varias direcciones para reconocer el campo de acción, manipular las figuras y comenzar a suponer o conjeturar. Después de elaborar la conjetura, los intentos de prueba comienzan como explicaciones informales hacia sí mismo y hacia otros. Durante estas etapas, si la interacción social entra en juego, la argumentación está presente y va evolucionando.

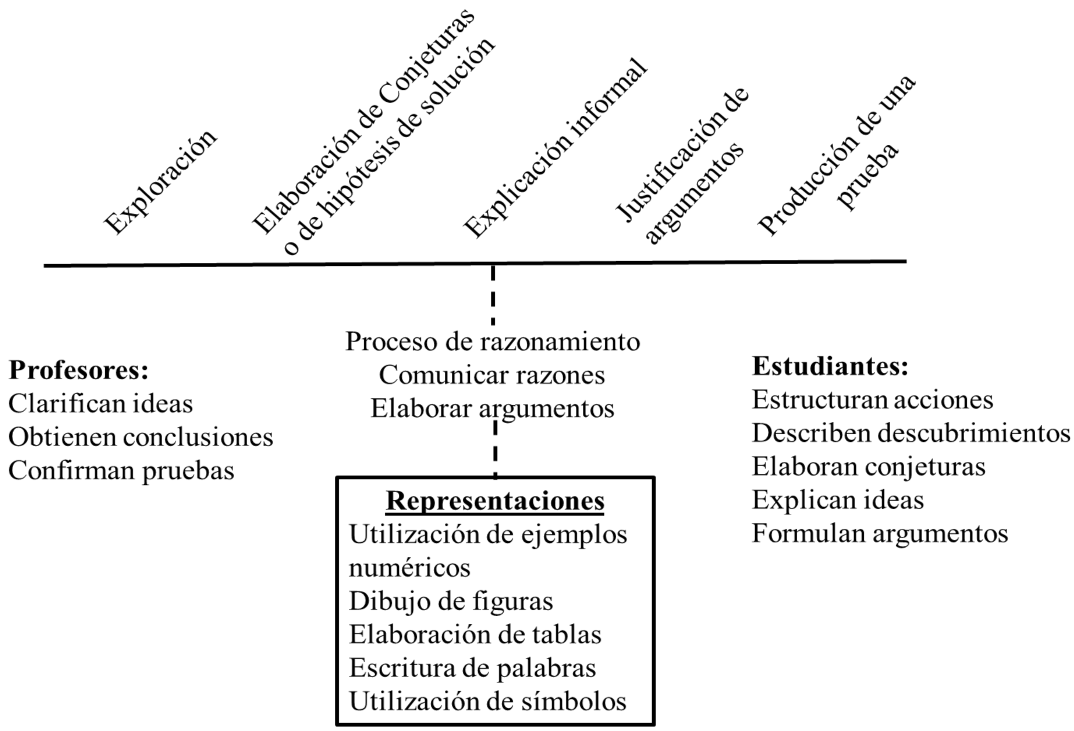


Figura 1.1. Modelo Exploración-Prueba[6]

Cuando se comienzan a estructurar dichas explicaciones, comienza la etapa de justificación de los argumentos. Para Yackel (2001), la justificación es colectiva, su desarrollo depende del reto impuesto por el interlocutor al poner en duda las afirmaciones y eventualmente, dependiendo de los requerimientos de rigor practicados en clase, se llega a una prueba.

Para Hanna (2000), explorar y probar, son parte de la totalidad del proceso de resolución de problemas y ambas son necesarias para el éxito en matemáticas. La exploración conduce al descubrimiento y la prueba a la confirmación. El reto de la clase entonces es utilizar el disfrute de la exploración para motivar a los estudiantes a aportar una prueba, o al menos a realizar un esfuerzo para seguir una provista por el profesor. Una razón es que la exploración no refleja la totalidad de las matemáticas porque los matemáticos aspiran a obtener cierto grado de certidumbre el cual solo puede alcanzarse mediante una prueba.

[6] Figura tomada de Hsieh F.-J., Horng W.-S. & Shy. H.-Y. (2012). "From Exploration to Proof Production", por Hsieh et al., 2012, *Proof and Proving in Mathematics Education*, p. 289.

1.2.5 La Unidad Cognitiva

En las clases de matemáticas, generalmente cuando se solicita a los estudiantes brindar una prueba, se les da la afirmación y luego se insta a que la prueben. En el proceso no se argumenta, no se elaboran conjeturas ni se genera el enunciado a ser tomado en cuenta, solo se reconstruye el proceso de razonamiento de alguien que ya lo ha hecho. Esta situación genera obstáculos en el aprendizaje del estudiante pues los recursos cognitivos para probar no le son accesibles.

En Italia, un grupo de investigadores en Didáctica de la Matemática (que incluyen entre otros a Paolo Boero, Maria Alessandra Mariotti, Rossella Garuti y Bettina Pedemonte[7]) han explorado la producción de conjeturas y de pruebas hechas por estudiantes en contextos de geometría, aritmética y álgebra por medio de la argumentación. Con estos trabajos han obtenido evidencia experimental de las relaciones existentes entre la producción de una conjetura y la construcción de su prueba desde una perspectiva cognitiva. Así, Pedemonte (2003) explica:

> "Durante la producción de la conjetura, el estudiante progresivamente desarrolla su afirmación a través de una intensiva actividad argumentativa funcionalmente entremezclada con la justificación de sus elecciones. Durante la subsecuente etapa de afirmación-prueba, el estudiante se vincula con este proceso en una forma coherente, organizando algunos argumentos llevados a cabo previamente de acuerdo con un encadenamiento lógico (Boero, Garuti, Mariotti, 1996)". (Pedemonte, 2003, p.2).

Este es el fenómeno referido por los autores como *unidad cognitiva.* De acuerdo con Pedemonte (2003), durante el proceso de resolución de un problema de prueba en equipo, se desarrolla una actividad de argumentación para producir una conjetura. La prueba se produce cuando la oración establecida en la conjetura se hace válida dentro de una teoría matemática. Entonces, la prueba es una argumentación particular basada en conocimiento teórico matemático. Para ellos*, un argumento en matemáticas puede ser de tipo lingüístico, pero también están incluidos los datos numéricos, las figuras, etc.*

[7] También se encuentran Federica Olivero, Maria G. Bartolini, Bussi Giampaolo Chiappini, A. Sibilla, Enrica Lemut y Franca Ferri.

1.2.6 Polémica sobre la Unidad Cognitiva entre argumentación y prueba

Una de las motivaciones que dieron origen a las investigaciones sobre la Unidad Cognitiva se remonta a lo establecido por Duval en 1991. Para él, existe una brecha de tipo cognitivo entre argumentar y probar: En las pruebas, los pasos se conectan por un "proceso de reciclaje": la conclusión de un paso sirve como condición de entrada para el paso siguiente, en cambio, en la argumentación, las inferencias están basadas en los mismos contenidos de la oración, la conexión entre dos proposiciones es una conexión intrínseca puesto que la afirmación es considerada y reinterpretada desde diferentes puntos de vista. Duval sostiene así que es necesaria una didáctica explícita para el pasaje de la argumentación a la prueba y cuando habla de una evolución en las resoluciones de los estudiantes, toma en cuenta básicamente dos criterios: la presencia de un razonamiento deductivo y la modificación profunda de la actitud a lo largo de la búsqueda de las soluciones.

Larios (2006), considerando las investigaciones hechas por Duval, explica que pasar de una argumentación basada en significados, de naturaleza semántica, a una prueba ya con elementos de naturaleza sintáctica (referente al orden de enunciación y al aspecto formal), representa un aspecto importante a tomarse en cuenta en el tratamiento de la prueba en el aula. Además, para él, sí existe el paso de la argumentación a la prueba, pero no necesariamente cuando se intenta llevar a cabo a través de actividades que dejan en completa libertad (o casi completa libertad) a los estudiantes. Además, otros elementos están involucrados en este paso, como son el uso de las construcciones lingüísticas y el contrato didáctico.

1.2.7 Validación matemática

Balacheff (2010, 2015) coincide con la postura de Duval en el sentido de que el razonamiento deductivo solicitado en una prueba matemática (fuera del ámbito escolar) está basado en el encadenamiento de ideas mientras que en la argumentación una misma afirmación puede ser reinterpretada. Desde esta perspectiva, *la argumentación representa un obstáculo epistemológico para el aprendizaje de la prueba*, pero, dependiendo de las herramientas de razonamiento y de las representaciones disponibles, la argumentación permanece como un posible marco de validación matemática (acercamiento cuasi empírico).

> "Este cambio del vocabulario de la verdad al vocabulario de la validez, el cual sugiere un cambio de la prueba a la validación, es más importante de lo que nos hemos dado cuenta. La validación se refiere a construir razones para aceptar una declaración específica, dentro de un marco aceptado, conformado por reglas y por otras afirmaciones previamente aceptadas también. Desde este punto de vista, la validación busca una prueba absoluta en un *contexto explícito* y puede así reclamar certeza como principio fundamental (…). Probar puede ser visto como una última realización de controlar y validar" (Balacheff, 2010, p.5).

Bajo esa consideración ha caracterizado, junto con Patricio Herbst, ciertas nociones de prueba en el aula y ha encontrado una relación entre concepciones y prueba matemática en el ámbito escolar (ver figura 1.2):

> "Una concepción es una validación dependiente: En otras palabras, podemos determinar la existencia de una concepción porque existe un dominio observable en el cual "ésta trabaja" y en el cual existen significados para validarla y desafiar posibles falsificaciones (…). Los argumentos, de forma semejante a una discusión, implican tres tipos de consideraciones críticas: la búsqueda de certeza, la búsqueda de la comprensión y los requisitos para una comunicación exitosa. Restringir la evaluación al lado de la "certeza" está jugando a lo seguro, ya que este aspecto es obligatorio para la transformación de las ideas matemáticas. Sin embargo, este reduccionismo no es viable desde una perspectiva de aprendizaje, especialmente cuando los estudiantes se introducen en la prueba matemática (…). Los educadores necesitan dar un estatus académico a las actividades que no pueden conducir a lo que sería una prueba para los matemáticos profesionales, pero que tienen sentido como actividades matemáticas". (Balacheff, 2010, pp. 19-21).

En este mismo sentido, Goizueta et al. (2014), consideran la validación como aquello relacionado con el contingente de restricciones, consideradas buenas razones para dar soporte o rechazar una afirmación en un contexto particular de justificación, no necesariamente restringido por estándares absolutos.

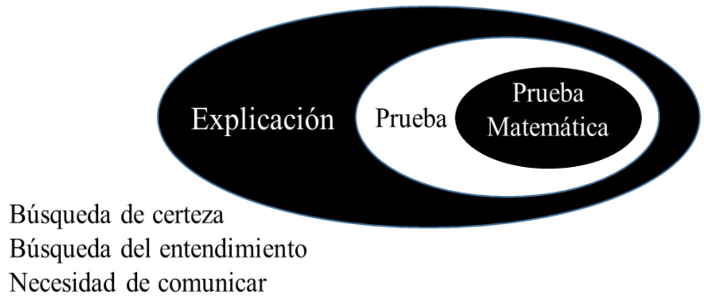


Figura 1.2. Explicación y Prueba[8]

Esto implica que la validez no es una propiedad de las afirmaciones por sí mismas, sino que emerge desde el modo con el que son tratadas contextualmente; este tratamiento puede presentarse de forma implícita. Así, al intentar encontrar la solución a un problema, si los estudiantes realizan cálculos, éstos pueden considerarse razones para validar una solución y, por lo tanto, considerarse argumentos.

1.2.8 C-Prueba

Existe un ensayo titulado “Proving and Knowing in Public: What Counts as Proof in a Classroom” en un libro llamado “Teaching and Learning Proof across the grades” publicado en 2009, donde Patricio Herbst y Nicolas Balacheff exponen la intención de contribuir a una teoría descriptiva de las actividades matemáticas en el salón de clase. Herbst y Balacheff (2009) sugieren que dichas actividades pueden "*contar como prueba*" dependiendo del grado de reconocimiento hecho por un observador de todos los significados que existen para esta palabra. La cuestión a considerar entonces es qué tipo de representaciones de prueba pueden construirse con las actividades llevadas a cabo en la clase de matemáticas. Resaltemos dos etapas durante las cuales un observador, considerando la perspectiva del profesor, identifica procesos que pueden representar pruebas locales:

- La primera etapa es la de la *costumbre*: La pregunta básica en esta etapa se refiere al lugar que toma la prueba en el trabajo matemático acostumbrado en una clase, esto en períodos de tiempo del orden de un año.
- Una segunda etapa es la de las *prácticas estables* con las cuales ciertos significados o

[8] Figura tomada de Balacheff, N. (2010). Bridging knowing and proving in mathematics: An essay from a didactical perspective. *Explanation and Proof in Mathematics*, Manuscrito previo a su impresión, p. 27.

mecanismos se aplican para ir controlando la fiabilidad del proceso de resolución de los problemas. Así, a la *utilización recurrente de ciertos medios para evaluar lo producido y asegurar la validez de la toma de decisiones y de las acciones durante la resolución de un problema matemático, se le llama estructura de control*.

La validación de un resultado mediante la estructura de control (como una práctica sistemática o estable), puede considerarse una prueba en el contexto de observación. Es en esta etapa cuando se ponen de manifiesto las concepciones matemáticas[9] particulares y es cuando se puede inspeccionar la naturaleza de dicha prueba y diseñar vías para describir su papel. Las *costumbres* locales ligadas a dichas prácticas de *control* conllevan a las *C-pruebas*: acciones llevadas a cabo para validar resultados dentro de las concepciones y las costumbres locales de prueba matemática. Una C-prueba se presenta, en cierto contexto, cuando la solución encontrada puede reconstruirse sin revivir la experiencia de encontrarla, entonces, *la validación mediante una estructura de control utilizada por costumbre en clase representa una C-prueba*. En cualquier caso, debe representar *un proceso mediante el cual una solución real a un problema se reconstruye analizándolo de otra forma, renunciando así a la necesidad de volver a ejecutar la experiencia de solución mediante la revisión y corrección de los mismos pasos*. Evidentemente, los participantes pueden llamar a lo que hacen para justificar la solución a un problema, de formas distintas, incluyendo el término "prueba", pero no necesariamente es así. De este modo, para considerar si algo "cuenta como prueba" en el aula, un observador debe prestar atención a varios estratos de actividad puesto que no existe una caracterización única y universal de prueba, es más, en contextos escolares existe dependencia a términos vagos y a piezas aisladas de conocimiento empírico o perceptual lo cual, representa un verdadero desafío a cualquier observador que deba decidir definitivamente si se está en presencia de una validación a nivel de prueba matemática.

1.2.9 Generalizar y Validar

Mason (1999) afirma que detectar patrones y expresar generalidad son acciones que se encuentran en el centro de las matemáticas y, por tanto, el estudio de esta disciplina debe ayudar a desarrollar y refinar estas capacidades naturales. La capacidad de generalizar se

[9] Se entiende por *concepción* matemática al conjunto de intuiciones, un conocimiento de "saber cómo" o alguna construcción mental que permite a los estudiantes elegir durante la resolución de un problema.

relaciona con la capacidad de agrupar y de ordenar, es decir, de enfatizar o de pasar por alto, de enfocar la atención de distintas formas. El proceso de encontrar un patrón en el camino hacia lograr la generalización, implica buscar el caso general que represente una serie de casos particulares; entonces, la pregunta clave para lograrlo sería ¿Qué es invariante o qué cambia en estos casos? Es decir, ¿Qué es lo mismo y qué es distinto en ellos?" En este sentido, una manera adecuada de incitar a los estudiantes a detectar y expresar generalidad es dejar que discutan a cerca de la preservación de tales invariantes y porqué es necesario buscar el caso general que las exprese. Por otra parte, un enfoque que apele a las capacidades de los estudiantes para detectar patrones y expresar generalidad conlleva las bases de la demostración, pues *la naturaleza inductiva de los patrones es la base para una demostración inductiva de las relaciones* (Mason, 1999). Mason también sugiere que el proceso de generalizar consta de tres etapas: a) Cuando se ve la regularidad, la diferencia o la relación (el ver), b) Cuando se expone dicho descubrimiento (el decir o expresar, esto es verbalmente en la mayoría de los casos) y c) El registro escrito del modo más preciso posible (registro simbólico).

Rojas y Vergel (2014) aseguran desde la perspectiva del "álgebra temprana", que el reconocimiento de lo general desempeña un papel esencial como condición previa del surgimiento de las expresiones: "Queremos insistir que estas formas de expresión son progresivas y evolucionan, desde movimientos, gestos, palabras, frases hasta la incorporación explícita de símbolos "inventados" y/o convencionales para "capturar" la generalidad y hacerla operativa" (Rojas y Vergel, 2014, p. 692). De igual modo afirman, que cuando los estudiantes tienen la vivencia del alcance de la generalidad, sus expresiones son la base psicológica del sentido que tienen las variables.

Por otro lado, durante el proceso de generalización, pocas veces se reflexiona sobre lo que los estudiantes "ven, dicen y registran. ¿Cómo podrían verificarlo?, ¿Cómo podrían estar seguros que sus expresiones resultan ciertas? ¿Quién valida el resultado de una generalización en el aula? ¿Cómo se establece la validez del conocimiento matemático en la escuela? En la mayoría de los casos en las aulas de clase se considera válido todo aquello que resulta de la autoridad del docente. Al respecto, Villa (2006), citando a Radford (1996), refiere que la generalización no es una actividad libre de contexto pues hay tipos de generalizaciones que pueden ser todos muy diferentes; principalmente hace mención sobre la naturaleza de dos tipos distintos: los patrones geométricos y los patrones aritméticos. La figura 1.3 muestra un ejemplo de cada uno.

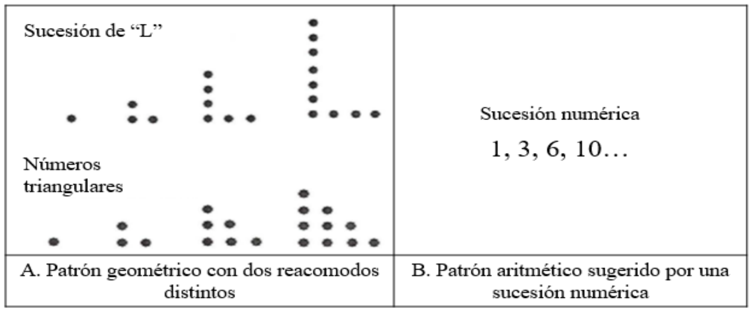


Figura 1.3. Ejemplos de patrones geométrico y aritmético de la generalización $\frac{n(n+1)}{2}$

En ambos tipos de patrones es necesario incluir las competencias de los estudiantes para dar explicaciones y argumentos de los procedimientos elaborados, la justificación de la selección de una estrategia para abordar el problema y la comprobación de las expresiones mediante la satisfacción de los datos que aportan los patrones. Ahora, particularmente, en cuanto a los patrones aritméticos, resulta imposible encontrar una única expresión simbólica que los generalice y sugiere que en el aula se incluyan reflexiones sobre la variedad de las expresiones y el contexto del cual surgen. Finalmente plantea la necesidad de involucrar al estudiante en el proceso de validación, establecer determinadas condiciones para que sea factible llevarlo a cabo e incluir dicho proceso como una fase de la generalización.

1.2.10 El Modelo de Toulmin

Toulmin Stephen Edelston fue un filósofo y educador británico quien propuso en el año de 1958, en su libro ''The Uses of Argument", un modelo para describir la estructura de la argumentación. Los elementos más importantes de este modelo son: Afirmación (C: Claim) que es una aseveración del orador o su punto de vista, Dato o Datos (D: Data) son los motivos o la información en la cual se basa la afirmación y Garantía (W: Warrant), es decir, la regla de inferencia o la justificación de cómo los datos apoyan tal afirmación, la garantía es el puente entre la afirmación y los datos[10] (ver figura 1.4).

[10] En su modelo, Toulmin considera la aparición de los elementos de un argumento en el orden que dicta el razonamiento deductivo: Datos, Garantía y Afirmación. Más adelante veremos que este modelo permite analizar también otros tipos de razonamiento de acuerdo con los conceptos de abducción e inducción estudiados ya con mucho tiempo de antelación por Charles Sanders Pierce.

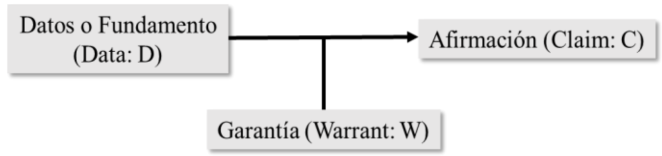


Figura 1.4. Modelo básico de Toulmin: Estructura de la argumentación

El modelo anterior es la estructura base de un argumento, pero pueden requerirse elementos auxiliares para describirlo. Toulmin precisa tres de estos: Un Calificador (Q: Qualifier), una Reserva o Excepción (R: Rebuttal) y un Respaldo (B: Backing). La validez de la garantía puede debilitarse si existen excepciones a la regla y en tales condiciones deben insertarse. Si este es el caso, la fuerza de la afirmación se debilita por medio de un calificador. Por otro lado, se requiere un respaldo si la autoridad de la garantía no se acepta de manera directa (ver figura 1.5).

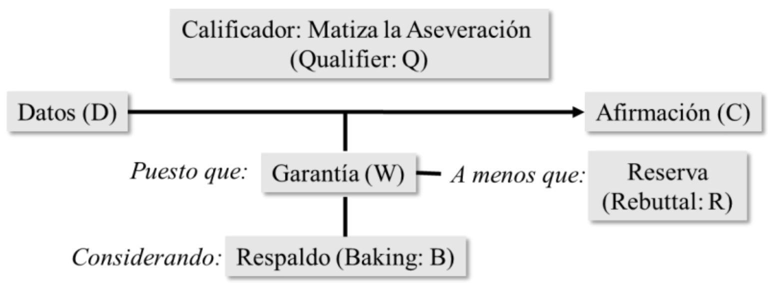


Figura 1.5. Modelo completo de Toulmin

Así entonces, los elementos de la prueba deductiva como generalmente se les reconoce, pueden representarse también con el modelo de Toulmin (ver figura 1.6).

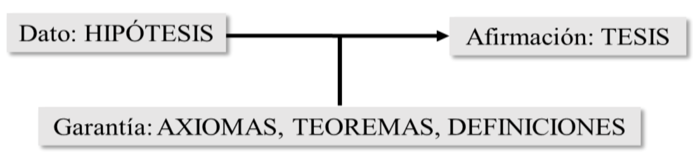


Figura 1.6. Elementos de la prueba deductiva en el Modelo de Toulmin

1.2.11 El Modelo Toulmin-CKĆ

Bettina Pedemonte y Nicolás Balacheff publicaron en marzo de 2016 un artículo en el cual explican cómo intervienen las concepciones de los estudiantes en el proceso de argumentación y prueba durante la resolución de problemas geométricos. Por medio del uso del modelo de Toulmin enriquecido con el CKĆ, Pedemonte & Balacheff (2016) desarrollan un análisis cognitivo para explicar diferentes formas de intervención del sistema de conocimientos de los estudiantes para generar pruebas.

Cuando los estudiantes resuelven problemas matemáticos proceden basados en su entendimiento de los conceptos y de los procedimientos relacionados. Además, está bien documentado que esta actividad no es compatible desde el comienzo con la estructura de lo que será considerada una prueba matemática. En lugar de eso, presentan una serie de intuiciones, conocimiento de “saber cómo” y una variedad de construcciones mentales que permiten a los estudiantes hacer elecciones y tomar decisiones. Cuando se presentan construcciones y respuestas no acordes con los estándares matemáticos, es común utilizar la palabra “misconception” para hacer referencia a dichos conocimientos. Sin embargo, esta palabra tiene una connotación negativa, pues oculta el hecho de que en muchas situaciones ese conocimiento funciona a pesar de que en efecto se pueda probar que no resulta generalizable a todos los casos relacionados. Por esta razón, Balacheff usa el término “conception” (concepción) el cual resulta más neutral para referirse a tales estructuras mentales complejas. Una concepción se construye a través de:

- Un conjunto de Problemas o situaciones que sean una herramienta suficiente para construir una solución. Puede verse como una esfera de práctica (P) en la cual el entendimiento se desarrolla y se fortalece.
- Un conjunto de Operadores (R) utilizados para solucionar el problema.
- Representaciones (L) que son el registro semiótico utilizado. Es importante considerar que la relación entre operadores y representaciones es muy fuerte puesto que únicamente se puede acceder a los conceptos matemáticos a través de sus representaciones.
- Una estructura de control ($\sum$): Son los medios que tienen los estudiantes para tomar decisiones y evaluar lo que producen. A lo largo de todo el proceso de resolución de problemas, los estudiantes se apoyan en la estructura de control para asegurarse de la validez y adecuación de sus decisiones y acciones. Además, prepara la transición entre la fase de resolución del problema (problema solving) y la obtención de la prueba de esa solución.

Este modelo se construye sobre la base de las concepciones de los estudiantes y no sobre conocimientos formales (teoremas) presentes de manera explícita; de hecho, sus siglas significan: *Ḉ: Concept, K: Knowing, C: Conception* (Balacheff y Gaudin 2002). Además, de acuerdo con Pedemonte (2008), puede ser integrado al modelo de Toulmin como se muestra en la figura 1.7.

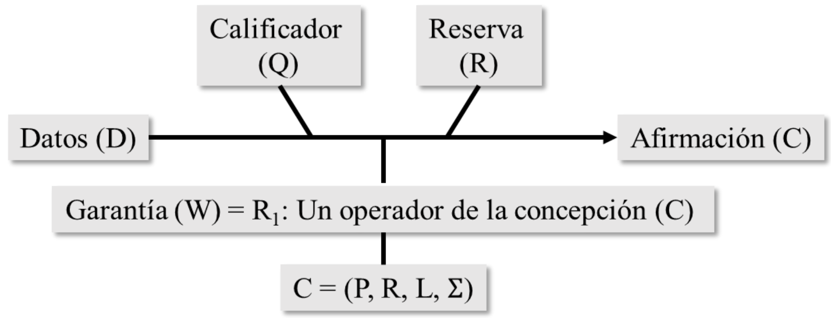


Figura 1.7. Modelo CKǴ integrado en el modelo de Toulmin

1.2.12 La Geometría Analítica: Origen y propuestas de tratamiento en el aula

a) Métodos de análisis y de síntesis

Se entiende por Geometría Analítica "la aplicación del álgebra simbólica al estudio de problemas geométricos mediante la asociación de curvas y ecuaciones indeterminadas en un sistema de coordenadas" (González, 2003). La Geometría Analítica, hereda su nombre del método de análisis de los griegos. Pero ¿en qué sentido se utiliza esta palabra? El término análisis lo aplicaron Platón y Pappus para describir el proceso de descender a partir de lo que se desea demostrar hasta llegar a alguna verdad conocida (admitida o probada anteriormente). Por lo tanto, es lo contrario a la síntesis, que es la presentación deductiva de lo hallado por medio del análisis. El análisis comienza entonces "asumiendo como cierto aquello que hay que probar" (González, 2003) [11]. Se atribuye a Platón (427-347 a. C.) la invención del método analítico, quizá porque lo describe al final del Libro VI de La República. Platón lo formula como un método pedagógicamente conveniente pues cuando una cadena de razonamientos que parte de ciertas premisas hasta una conclusión no es obvia, se puede invertir el proceso; uno puede empezar por la proposición que ha de probarse y deducir de ella una conclusión ya conocida. Si entonces podemos invertir los pasos en esta cadena de razonamientos, el resultado (síntesis) es una prueba legítima de la proposición. Lo anterior, nos deja ver al análisis geométrico griego como una fecunda heurística[12] no apreciable en las obras clásicas.

El método cartesiano retoma el análisis geométrico griego (oculto en la mayoría de las obras de Euclides) y lo complementa con la síntesis algebraica (ya desarrollada en su época por los árabes y por el matemático francés François Viète). El análisis y el álgebra permiten

[11] Este método encuentra su equivalente en el razonamiento abductivo tratado más adelante.
[12] Heurística: En el sentido de George Polya se entiende el estudio de los métodos y las reglas para el descubrimiento y la invención.

traducir los datos geométricos de forma que sean tratables por medio del automatismo del cálculo algebraico y surge así el análisis algebraico. René Descartes en el Discurso del Método afirma haber estudiado el análisis de los geómetras y el álgebra, no obstante, se percató que el primero está siempre tan limitado a considerar las figuras, que "no puede ejercitar el entendimiento sin cansar grandemente la imaginación, y en la segunda, tanto se han sujetado sus cultivadores a ciertas reglas y a ciertas cifras, que han hecho de ella un arte confuso y oscuro". (Descartes, trad. 2010, p.47). Así, pensó en buscar algún otro método que tuviese las ventajas de ambos, excluyendo sus defectos. En la notación cartesiana hubo además una clave geométrica basada en considerar a un segmento como una magnitud geométrica continua y al mismo tiempo como una medida numérica, entonces la potencia de una línea recta se sigue considerando línea recta, así que cuadrado y cubo no indicarían magnitudes planas o espaciales, sino la segunda o tercera potencia de un número y de este modo, las operaciones aritméticas quedan incluidas en un terreno estrictamente algebraico. Descartes rompía así con la tradición griega al abandonar el llamado principio de la homogeneidad[13].

b) La Geometría Analítica actual y su tratamiento en Didáctica de las matemáticas

Pierre Fermat desarrolla los fundamentos de la Geometría analítica casi de manera simultánea y por separado a Descartes. Este último comienza con la curva de un lugar geométrico y obtiene la ecuación del lugar, por su parte Fermat lo hace de forma inversa, inicia desde una ecuación algebraica e infiere las propiedades geométricas de la curva correspondiente. González (2007) afirma:

> "Con la Geometría Analítica de Fermat se alcanzaba el máximo grado de eficacia en la aplicación del antiguo método de Análisis a los problemas geométricos (…). Por su parte, Descartes elabora un potente método analítico-sintético de ataque a los problemas geométricos que utiliza el Álgebra como instrumento algorítmico." (González, 2007, p. 221).

La Geometría que desarrollan Fermat y Descartes, que al cabo de doscientos años se llamó Geometría Analítica, estudia dos temas fundamentales: la obtención de las ecuaciones

[13] Según establecía la Ley de homogeneidad de Vieta, solo era posible comparar magnitudes de igual dimensión. Si una letra representa una longitud, el producto de dos letras es una superficie, y el de tres un volumen.

de los lugares geométricos y el estudio de las propiedades de las curvas –sobre todo las definidas por ecuaciones lineales y cuadráticas– mediante el Álgebra. Ahora, no se debe atribuir a Fermat ni a Descartes el uso del sistema de coordenadas como se usa hoy en día en las escuelas. Fue Euler quien en 1748 sistematizó la geometría analítica introduciendo además de las coordenadas rectangulares en el espacio, las oblicuas y las polares. También estudió las transformaciones de los sistemas de coordenadas, clasificó las curvas según el grado de sus ecuaciones estudiando sus propiedades generales, trató las secciones cónicas y las formas canónicas de las ecuaciones de segundo grado.

Considerando lo anterior y pasando al contexto de Didáctica de las matemáticas, podemos citar el trabajo de Contreras, A., Quesada, M. C., & Armenteros, M. (2002), que hace referencia a la necesidad de alejarse de una secuenciación rígida de los contenidos e integrar ambas visiones: La analítica y la sintética[14]. Para Gascón (2002), se debe reivindicar la investigación sobre cómo integrar en la geometría del bachillerato las técnicas sintéticas con las analíticas. Sugiere comenzar mostrando determinadas limitaciones de las técnicas sintéticas clásicas y la forma de solventarlas utilizando las analíticas o mostrar ciertos problemas donde se vea la continuidad de la problemática geométrica y la necesidad de utilizar la síntesis para trazar la estrategia de resolución mediante análisis algebraico.

c) Problemas abiertos

Como puede verse, el tipo de razonamiento que da origen a la Geometría analítica, está plenamente relacionado con los métodos de descubrimiento. Fomentar la integración tanto del análisis algebraico como de la síntesis geométrica para la resolución de un problema, puede aunarse de manera creativa con el diseño de problemas que inviten a la generación de conjeturas. Dentro del diseño de actividades se contempla una tipología particular de problemas que cumplen con lo anterior, son los llamados problemas *abiertos*, los cuales permiten mayor libertad para la exploración, no sugieren un único método de solución y hacen que la responsabilidad de resolverlos resida en las producciones propias de los estudiantes; esto crea la posibilidad de una intensa actividad argumentativa. Cuando se asigna

[14] Actualmente se asocia la visión analítica con el Análisis algebraico creado por Descartes y no con el método de Análisis griego. Del mismo modo, la visión sintética, hace referencia al método deductivo utilizado en la obra geométrica de Euclides; aunque, como hemos documentado anteriormente, el Análisis fue el método de descubrimiento utilizado por los geómetras griegos (oculto por mucho tiempo) y la Síntesis (deducción), si bien mostrada como presentación de resultados en la obra de Euclides, es el razonamiento natural en el tratamiento algebraico.

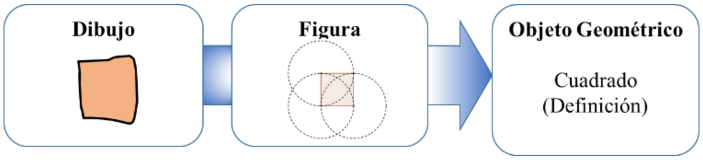
un problema abierto, quien lo resuelve no solo debe encontrar la hipótesis que justifica un hecho, sino también el hecho a ser justificado, es decir, los problemas abiertos promueven tanto la generación de conjeturas como su justificación o su prueba. (Baccaglini-Frank, 2010).

1.2.13 El software de Geometría Dinámica y su potencialidad en el tratamiento de Geometría Analítica: El caso de GeoGebra

La Geometría Dinámica es un término que se refiere a la Geometría estudiada con herramientas computacionales (software) en las que el usuario puede realizar construcciones geométricas, es decir, combinaciones de objetos geométricos, y manipularlas con el ratón (o con algún otro periférico señalador) para modificar su forma sin perder sus propiedades. (Larios, 2006). Una de sus potencialidades es permitir la exploración, el descubrimiento de relaciones y el planteamiento de conjeturas. *Los procesos cognitivos que desarrollan los estudiantes al trabajar con estos ambientes son: la visualización, la construcción y el razonamiento* (Guerrero, 2011).

La característica dinámica (o de movimiento) del software hace necesario destacar la diferencia entre dibujo y figura, pues en este ambiente las construcciones geométricas se realizan con base en relaciones lógicas entre objetos y no sólo basándonos en su apariencia. Un dibujo, puede contener información ocasionalmente innecesaria, con aspectos que no guardan relación con el objeto geométrico, y sí con el aspecto general, tales como el color o el grosor o también aspectos que influyen con la apreciación como la orientación. El objeto geométrico es el referente teórico del dibujo y está restringido o "controlado" por las definiciones y limitantes lógicas. La llamada figura se considera el representante de una clase

de objetos que comparten ciertas propiedades geométricas. En el software de geometría dinámica, el usuario especifica las relaciones subyacentes del objeto matemático y la computadora debe preservar ese objeto mientras deja las características superficiales (el dibujo) completamente maleables". La figura es el resultado obtenido (Larios, 2006).



|*Figura 1.8.* Diferencia entre dibujo, figura y objeto

Esta diferenciación, que se percibe al momento de realizar construcciones geométricas con el software, cobra especial importancia en Geometría Analítica pues de acuerdo con Fernández (2011), existe un problema representacional que aparece sin que los profesores procuren evitarlo: la forma de asociar las curvas a los dibujos sin tener en cuenta la diferencia conceptual. Otro aspecto sobre la importancia del uso del software de Geometría Dinámica en Geometría Analítica es *la revitalización del concepto lugar geométrico*[15] pues en estos ambientes los objetos se mueven dependiendo de las condiciones geométricas sobre las que fueron construidos. Por ejemplo, un punto sobre una circunferencia, puede moverse sólo alrededor de ésta, es decir se trata de un punto cualquiera de la circunferencia, concepto que responde justamente al de lugar geométrico.

Ciertos programas permiten la visualización de lugares geométricos como un punto que deja un rastro a medida que se mueve (en algunos casos denominada traza) o permiten el trazo de la trayectoria de en forma aparentemente continua. El manejo de lugares geométricos resulta ser un elemento diferenciador en el manejo de los objetos geométricos puesto que solo en pocos casos se pueden marcar intersecciones con éstos o modificarlos dinámicamente.

De acuerdo con Montoya (2008), la ventaja que ofrece el software de geometría dinámica al resolver problemas de lugares geométricos es permitir primeramente el uso de la representación geométrica con la representación verbal y posteriormente relacionar ambas con la representación algebraica lo cual fortalece la capacidad intuitiva.

GeoGebra es un software de Geometría Dinámica (SGD) y un sistema de álgebra computacional (CAS) de código abierto creado para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas desde la escuela intermedia hasta nivel universitario. Brinda al usuario la capacidad de construir, cambiar las representaciones de los objetos matemáticos o tomar medidas, a través del uso de la barra de herramientas o mediante la combinación de comandos introducidos en la barra de entrada. También es posible ingresar información a través de su

[15] De acuerdo con Álvarez (2014), cuando se solicita encontrar un lugar geométrico, la solución consiste en determinar qué puntos tienen dos o más propiedades explicitas en el enunciado del problema. El conjunto de todos los puntos que cumplen tales condiciones es el lugar geométrico solicitado. Si una figura geométrica contiene todos los puntos que satisfacen una determinada propiedad y, recíprocamente, sólo contiene puntos que la verifican, esa figura es el lugar geométrico de dichos puntos. Es decir, las condiciones “tener la propiedad” y “pertenecer al lugar” son equivalentes.

hoja de cálculo. GeoGebra presenta un interfaz de usuario con tres ventanas principales que contienen: la representación algebraica, la gráfica y la numérica de objetos matemáticos, así como una cuarta ventana para el cálculo algebraico a través del CAS (Chumpitas, 2013). Las manipulaciones o modificaciones de objetos matemáticos en una de las ventanas (algebraica, gráfica, o bien, en hoja de cálculo) tienen repercusión de forma inmediata en las ventanas restantes.

Existen en particular dos herramientas de GeoGebra útiles para manipular o modificar los objetos matemáticos en su interfaz gráfica, los cuales adquieren especial importancia durante los procesos de validación o justificación: el arrastre y el uso del deslizador. El arrastre permite modificar directamente la forma o posición de los objetos geométricos construidos por el usuario mediante el uso del ratón (o algún otro periférico de la computadora) sin que se dejen de preservar las relaciones con las que fueron construidos.

El examen de arrastre consiste en mover puntos arrastrables o semi-arrastrables a fin de ver si la figura mantiene las propiedades geométricas iniciales; precisamente con este examen se tiene la posibilidad de validar resultados pues esta acción explota la capacidad del software de mantener las relaciones geométricas entre los elementos de una construcción y verificar si está construida correctamente. Larios (2006), basado en los resultados de sus experimentos, afirma que los estudiantes al construir una prueba generalmente presentan justificaciones basadas en la evidencia empírica y además hacen referencia a los instrumentos utilizados. Esta manera de justificar particularmente en el área de la Geometría está apoyada en información visual y para el caso del uso del software de Geometría Dinámica en el uso del arrastre y de la medición.

Por otro lado, “un deslizador es una herramienta del software que posibilita al usuario la vinculación, en tiempo real, de intervalos de valores continuos o discretos a parámetros que son parte de expresiones algebraicas más complejas, realizar los ajustes necesarios sobre los extremos del intervalo y visualizar dinámicamente los cambios que sufren las expresiones involucradas y sus representaciones análogas (las curvas, en el caso de las funciones) mientras el parámetro toma distintos valores”. En el entorno del GeoGebra se requiere considerar dos cuestiones al aplicar un deslizador: el tipo de deslizador y los valores mínimo y máximo. El software permite construir deslizadores de tipo: (i) número, usados para realizar variaciones entre números reales, (ii) ángulo, para realizar variaciones entre valores angulares, y (iii) entero, los cuales se utilizan para realizar variaciones entre números enteros.

Al crear el deslizador el GeoGebra le asocia un rótulo, por lo general una letra minúscula, que puede renombrarse fácilmente. En relación a lo segundo, los valores mínimo y máximo del deslizador son aquellos que representan los extremos del intervalo de variación del parámetro (Gutiérrez, 2015).

1.2.14 Antecedentes sobre las formas de razonamiento presentes en los procesos de prueba: Abducción, inducción y deducción

Al resolver problemas de prueba en el ámbito de la Geometría Analítica utilizando GeoGebra, nos interesa estudiar también cuáles son los mecanismos de razonamiento puestos en juego. De acuerdo con Moreno (2001): "Las herramientas computacionales han modificado profundamente la naturaleza de las exploraciones y la relación de dichas exploraciones con la sistematicidad del pensamiento matemático…es posible (incluso) que el uso sostenido de la herramienta desemboque en cambios a nivel de las estrategias de solución de problemas y en cambios a nivel de la manera misma como se plantea el problema.

En otras palabras, puede ocurrir que el pensamiento matemático del estudiante quede afectado radicalmente por la presencia de la herramienta". Dicha transformación ocurre conforme se utiliza la herramienta computacional de forma sostenida, dando lugar a la producción de *esquemas de uso* los cuales permiten atribuir un significado a los objetos (matemáticos) en función de la orientación de la actividad y de las tareas a desarrollar.

Lo anterior nos remite a estudiar los tipos de razonamiento presentes en la actividad matemática para después centrarnos en el razonamiento característico de los problemas que abordaremos en nuestro trabajo los cuales tienen como instrumento de mediación el software de Geometría Dinámica.Considerando acercamientos pedagógicos como la Resolución de problemas de Polya, el aprendizaje del descubrimiento de Bruner y el Método socrático, Meyer (2010) identifica como característica común a todos estos, el énfasis sobre la autonomía del estudiante, quien es capaz de reconocer las relaciones matemáticas por sí mismo y crear ideas nuevas a partir del establecimiento de hipótesis. No obstante, a pesar de ser reconocida la importancia de descubrir y generar hipótesis, actualmente existe la necesidad de elaborar conceptos teóricos para ayudar a entender y reconstruir los procesos de descubrimiento, más aún cuando, de forma por demás limitada, se les atribuyen definiciones relacionadas con términos generales como la Intuición.

Como ya hemos mencionado, la invención del *método de descubrimiento llamado Análisis* se atribuye a Platón (427-347 a. C.), pero fue Pappus (290-350 d. C.) en su Tesoro del Análisis quien lo da a conocer como el método empleado por los geómetras griegos para la resolución de sus problemas (González, 2003 pp. 23-24)[16]. *Ese modo de razonar es el antecedente de lo que llamaremos de ahora en adelante abducción.* El término es creado por Charles Sanders Peirce, quien alrededor de 1870 la define como *el proceso de formar una hipótesis explicativa*. De acuerdo con él, *la abducción es la única operación lógica que introduce una idea nueva* y la distingue de otro tipo de razonamiento muy similar, la *inducción definida a menudo como el descubrimiento de leyes generales a partir de casos específicos*. Así, la diferencia entre Inducción y abducción está relacionada con el hecho de si un número de casos comparten una característica determinada. Estamos en presencia de un razonamiento inductivo cuando generalizamos una característica en una clase a partir de cierto número de casos o cuando hallamos una característica en cierta proporción de casos, e inferimos que se presenta en la misma proporción en una clase entera. *La abducción en cambio, se presenta cuando en cierto caso encontramos algunas características "muy curiosas", que se explicarían por la suposición de que fuera un caso de una regla general, es decir nos percatamos que las mismas características están presenten en una clase o que son parte de una regla conocida. También se observa cuando constatamos que en ciertos aspectos dos objetos guardan una marcada semejanza, e inferimos que se asemejan entre sí notablemente en otros aspectos*. Hacia 1878, Peirce plantea sus descripciones en términos de reglas, casos y resultados (ver tabla 1).

[16] Algunos autores atribuyen el antecedente de la abducción a Aristóteles (383-322 a. C.) quien desarrolló también una idea de inferir desde los efectos hacia las causas en los *Segundos analíticos* del compendio *Órganon* (Ver: http://www.joanmaragall.com/fronesis/1/aristoteles.html). Los seguidores de Aristóteles de la época Medieval y del Renacimiento llamaron a esta forma de inferir: *resolutio* en contraste con *compositio* que procede de las causas a los efectos. Estos términos latinos son traducciones de los términos griegos que dan lugar a los de análisis y síntesis respectivamente; no obstante, algunos pensadores han identificado esta última forma de razonamiento más bien con la inducción. Niiniluoto (1999).

Tabla 1

Deducción, Inducción y Abducción de acuerdo con Pierce en 1878

	Deducción
Regla	Todos los frijoles de esta bolsa son blancos
Caso	Estos frijoles son de esta bolsa
Resultado	Estos frijoles son blancos
	Inducción
Caso	Estos frijoles son de esta bolsa
Resultado	Estos frijoles son blancos
Regla	Todos los frijoles de esta bolsa son blancos
	Abducción (Hipótesis)
Resultado	Estos frijoles son blancos
Regla	Todos los frijoles de esta bolsa son blancos
Caso	Estos frijoles son de esta bolsa

Meyer (2018) expone la abducción con el siguiente ejemplo matemático: Cuando se multiplican dos potencias de la misma base a^b y a^c $(a, b, c \in N)$, entonces el producto es a^{b+c}. Para que los estudiantes puedan descubrir esta regla, un profesor les solicita que determinen $3^2 \cdot 3^5$ y 3^7 utilizando calculadora. El razonamiento abductivo se muestra en la figura 1.9:

Resultado: $3^2 \cdot 3^5 = 2187$ y $3^7 = 2187$

Caso: Las bases son las mismas y $2 + 5 = 7$

Regla: Cuando se multiplican dos potencias con la misma base a^b y a^c $(a, b, c \in N)$, entonces el producto es igual a a^{b+c}

Figura 1.9. Abducción para el reconocimiento de una regla matemática

Como es evidente, lo que tienen en común ambos ejemplos de abducción (en la tabla 1 y en la figura 1.9) es que *comienzan con el resultado, también llamado hecho observable*. Al respecto, Meyer explica: "El reconocimiento de la regla y el caso toma lugar de forma simultánea para explicar el resultado: *No es posible inferir regla y resultado paso por paso, porque el caso se encuentra contenido por completo en el antecedente de la regla*." (Meyer, 2018, p. 3). De acuerdo con Eco (1983) citado en Meyer (2018): "[…] *el problema real no* *es si se encuentra primero el Caso o la Regla, sino más bien cómo descifrar Regla y Caso al mismo tiempo, ya que ambas están relacionadas, ligadas por una especie de quiasmo*" (Meyer, 2018, p. 3). Así, la existencia inicial de solo una premisa, indica que la abducción no puede proveer de conocimiento seguro, puesto que cabe la posibilidad de que existan otras razones que lleven al mismo resultado. Un ejemplo similar utilizando razonamiento inductivo se puede dar utilizando varios casos numéricos

Casos: $a^1 \cdot a^4 = a^5$

$a^2 \cdot a^5 = a^7$

$a^3 \cdot a^6 = a^9$

$a^8 \cdot a^3 = a^{11}$

Resultados: Las bases son las mismas y

$1 + 4 = 5$

$2 + 5 = 7$

$3 + 6 = 9$

$8 + 3 = 11$

Regla: Cuando se multiplican dos potencias con la misma base a^b y a^c $(a, b, c \in N)$, entonces el producto es igual a a^{b+c}

Figura 1.10. Inducción para la confirmación de una regla matemática

De acuerdo con Belluci (2018), *una hipótesis (o conjetura) se sugiere mediante abducción, se verifica mediante inducción y puede explicarse por deducción*. Por otro lado, Reid (2018) retoma una síntesis de las ideas de Pierce hecha por Habermas (1987) en la cual se distinguen *dos funciones del término abducción: Como explicación y como descubrimiento.* En la primera, se acepta la regla hipotéticamente considerándola como una "ley" para inferir el caso a manera de explicación causal. En la segunda función, se comienza con el caso "sorprendente" y se busca una regla tentativa; es aquí donde se presenta una mezcla de inducción y abducción apoyadas mutuamente[17].

Ahora bien, la única "inferencia[18] matemática" permitida en el sentido de la lógica formal,es la deducción pues ésta garantiza certidumbre y conduce a la certeza y al conocimiento irrefutable, pero no permite acceder al conocimiento que no está implícito en las premisas**[19].** De acuerdo con el Diccionario de Filosofía de Cambridge, deducción es una secuencia finita de enunciados donde el último enunciado es la conclusión de tal secuencia y

[17] Tal como se verá en algunas de las resoluciones de los problemas de la presente investigación.
[18] Inferir: Sacar una consecuencia o deducir algo de otra cosa (RAE).
[19] Premisa: Señal o indicio por donde se infiere algo o se viene en conocimiento de ello (RAE).

donde cada enunciado que precede a la conclusión es un axioma, una premisa o un resultado de los enunciados precedentes dado por una regla de inferencia. En un sentido secundario, deducción se refiere a una inferencia en la que el hablante afirma los resultados concluyentes necesariamente desde las premisas. Continuando con el ejemplo matemático, se puede obtener el resultado de un nuevo caso particular aplicando (o explicando) la regla ya conocida:

Caso: $2^2 \cdot 2^6$

Regla: Cuando se multiplican dos potencias de la misma base a^b y a^c $(a, b, c \in N)$, entonces el producto es a^{b+c}.

Resultado: $2^2 \cdot 2^6 = 2^8$

Figura 1.11. Deducción para obtener el resultado de un nuevo caso usando una regla matemática

1.3. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y APORTES DE LA INVESTIGACIÓN

1.3.1 Problema de Investigación

En el bachillerato, y en el sistema escolarizado mexicano en general, se da poca importancia al desarrollo de habilidades para la prueba matemática y en particular, al uso de la argumentación para validar resultados. Salvar estas dificultades puede buscarse en situaciones que permitan a los estudiantes sustentar sus afirmaciones y devolverles la responsabilidad de lo que producen. Una ventaja del software de Geometría Dinámica es permitir la verificación de resultados con gran rapidez lo cual puede aprovecharse para involucrar a los estudiantes en la práctica de probar sus resultados argumentando. Además, *es posible desarrollar con su uso las formas de razonamiento propias del arte de descubrir: la abducción y la inducción.*

En la presente investigación *se analizan entonces, las formas de razonamiento surgidas durante el proceso de prueba con el uso del software de Geometría Dinámica GeoGebra, en un área de la matemática escolar poco estudiada como lo es la Geometría Analítica*; en particular cuando los estudiantes trabajan por equipos y se les da libertad de argumentar la validez de sus propuestas de solución; todo esto en un contexto de bachillerato de la Ciudad de México.

1.3.2 Comentarios sobre el Estado del Arte del tema Razonamiento y la prueba asistida por computadora en Matemática Educativa: Aportaciones de la presente investigación

El abordaje del problema del proceso de prueba en el aula ha sido estudiado ampliamente desde diferentes perspectivas. Así, por ejemplo, Guershon, H., Stylianides, A., Boero, P., Miyazaki, M. & Reid, D. (2017), durante el ICME-13, organizaron un grupo de estudio temático que brindó una visión general del estado del arte del tema Razonamiento y Prueba en Educación Matemática[20]. Se menciona este antecedente debido a las líneas de investigación de Paulo Boero y David Reid, consideradas referentes importantes en la sección de Antecedentes y en el Marco Conceptual de la presente investigación. En dicho foro, se analizaron y discutieron cuatro temas principales: 1) Cuestiones epistemológicas relacionadas con el proceso de prueba. 2) Problemas en el aula relacionados con el proceso de prueba. 3) La enseñanza y el aprendizaje de la prueba: problemas y dilemas y 4) Cuestiones relacionadas con el uso de ejemplos en el proceso de prueba.

Por otro lado, la Comisión Internacional sobre Instrucción Matemática, para su Estudio número 19 (ICMI-19) organizó 6 grupos de trabajo (WG) alrededor del tema Proceso de Prueba en Matemática Educativa[21]:

WG1: Desarrollo Cognitivo de la Prueba

WG2: Argumentación

WG3: Experimentación con Software de Geometría Dinámica

WG4: Prueba en el Currículum Escolar, Conocimiento para la Enseñanza de la Prueba y Transición desde la Escuela elemental a la Secundaria

WG5: La naturaleza de la prueba en el salón de clases

WG6: Prueba en el nivel superior.

De forma complementaria, el Comité del Programa Internacional (IPC) de esta misma comisión, editó un Volumen sobre los resultados de sus estudios, dividido en 6 Partes (Hanna y Villiers, 2012):

Parte I: Prueba y Cognición

[20] Treceavo Congreso Internacional sobre Matemática Educativa (ICME-13). Llevado a cabo en 2016 en la Ciudad de Hamburgo, Alemania. Las Memorias fueron publicadas al año siguiente.

[21] La Conferencia del Estudio del ICMI tuvo lugar en Taipei, Taiwan del 10 al 15 de mayo del 2009.

Parte II: Experimentación: Retos y Oportunidades

Parte III: Percepciones históricas y educativas de la prueba

Parte IV: Prueba en el Currículum escolar

Parte V: Argumentación y transición al nivel superior

Parte VI: Lecciones desde las tradiciones culturales de Oriente

Esta investigación se puede ubicar en la línea de Razonamiento y Prueba en Matemática Educativa del primer caso (ICME-13) y en particular dentro de Problemas en el aula relacionados con el proceso de prueba. Respecto a los tópicos de los grupos de trabajo del ICMI-19, puede situarse en el de Experimentación con Software de Geometría Dinámica y de manera específica dentro de la Parte II, en el capítulo "Acercamientos experimentales al pensamiento teórico: Artefactos y pruebas" (Hanna y Villers, 2012, p. 5). *En nuestro trabajo se trata de igual forma el tema de argumentación, pero lo consideramos como un medio para analizar los tipos de razonamiento. Así mismo, la prueba se considera un tipo particular de argumentación validada con ayuda del software GeoGebra mediante una práctica sistemática de generalización.* Es importante resaltar que precisamente estas líneas de investigación son las desarrolladas por algunos otros autores cuyos resultados se mencionan en el Marco Conceptual y en los antecedentes de este trabajo: Ferdinando Arzarello, Mariolina Bartolini Bussi, Maria A. Mariotti y Patricio Herbst; este último, trabajó dentro del tópico de la Parte IV en el capítulo "Proceso de prueba y la interacción estudiante-profesor: Teorías y Contextos, y aportó, entre otros aspectos, el uso de las interacciones en el salón de clase para arribar a ciertas normas compartidas, preámbulo del concepto de C-Prueba. Tomando en cuenta dichos antecedentes de investigación, consideramos que las aportaciones de nuestro estudio son las siguientes:

1. Se propone el estudio de la prueba en Geometría Analítica, lo cual no resulta muy común pues gran parte de las investigaciones a nivel bachillerato, se centran en la prueba de resultados en problemas de álgebra o de geometría euclidiana. Más aún, aquellas investigaciones referentes a la Unidad Cognitiva.
2. La población de estudio pertenece al bachillerato mexicano, donde el estudio de la Geometría Analítica, al igual que el resto de asignaturas de los cursos de matemáticas, se hace de forma regular a través de la resolución de problemas de casos particulares. Las prácticas de probar y generalizar no se presentan de manera sistemática. De ahí

la importancia de la serie de actividades previas a la aplicación de los problemas finales las cuales resultaron en una propuesta para el rediseño de problemas convencionales para su tratamiento con GeoGebra.

3. Dicha propuesta de rediseño, puede considerarse una aplicación práctica a desarrollar a partir de los resultados de esta investigación, pues estos apuntan a que *el uso de la herramienta deslizador de GeoGebra es de suma utilidad para promover razonamiento abductivo e inductivo.*
4. En el aspecto teórico, se propone vincular el uso del concepto de Estructura de control, del Modelo Toulmin- cKȼ (útil para precisar el análisis de las concepciones puestas en juego durante la resolución de los problemas: Análisis referencial) con el análisis de las formas de razonamiento generadas (Análisis estructural), en los casos específicos del uso del deslizador GeoGebra. Esto a través de la observación del doble uso que puede darse a esta herramienta: 1) Para crear conjeturas y generalizar, y 2) Como herramienta auxiliar en la etapa final del proceso de prueba (validación final llevando a cabo una prueba de arrastre).

Es posible resumir entonces que la aportación principal estriba en proponer el uso de ciertas herramientas del programa GeoGebra para generar determinados tipos de razonamiento (abducción e inducción) y para llevar a cabo una prueba de características específicas durante la resolución de problemas de Geometría Analítica con lo cual se pueden establecer ciertas condiciones de validez mínimas que debe cumplir la prueba de un resultado en un contexto similar al de nuestro estudio.

1.4. Objetivo de la Investigación

Identificar los patrones de razonamiento y el tipo de prueba que puede obtenerse durante la resolución de problemas Geometría analítica mediante argumentación con ayuda del software GeoGebra en un contexto de nivel bachillerato.

1.5. Preguntas de Investigación

- ¿Qué caracteriza a la prueba en Geometría Analítica, llevada a cabo por estudiantes de bachillerato construida a través de la argumentación con ayuda del software GeoGebra?

- ¿Cuáles son las prácticas recurrentes[22] utilizadas al resolver problemas de Geometría Analítica con GeoGebra en los cuales se busca llegar a una prueba generalizada de tipo algebraico?
- ¿Cómo intervienen la abducción y la inducción durante la resolución de este tipo de problemas y de qué forma se relacionan estos razonamientos con el uso de GeoGebra?

[22] Estructuras de control

CAPÍTULO 2

MARCO CONCEPTUAL

2.1 INTRODUCCIÓN

La base teórica general con la cual se estudiará el tema elegido, gira en torno al concepto de *Continuidad Estructural* desarrollado por Betina Pedemonte en varios de sus artículos. Esta idea está relacionada con el tipo de razonamiento llevado a cabo durante la resolución de problemas abiertos de álgebra y geometría a través de argumentación hasta llegar a una prueba y forma parte de los trabajos del grupo de investigación encabezado por Paolo Boero enfocados al estudio de la Unidad Cognitiva. Pedemonte retoma con ese propósito, la idea de utilizar el Modelo de Toulmin para analizar la inducción y la abducción, siendo ambos, tipos naturales de razonamiento que preceden al lógico deductivo. Si se utilizan ciertas herramientas de GeoGebra en el diseño de problemas de Geometría Analítica (disciplina donde convergen tanto el álgebra como la geometría) para apoyar la generación y validación de conjeturas, nos importa analizar cómo interviene el uso sistemático de estas en el tipo de razonamiento y cómo son resueltos los problemas. Para lograr lo anterior, se retoma el concepto de Estructura de Control del Modelo Toulmin-CKĆ, desarrollado por Pedemonte y Balacheff en 2016, así como el de razonamiento ascendente y descendente de Arzarello y otros autores (también de la línea de la Unidad Cognitiva).

2.2 DELIMITACIÓN DEL MARCO CONCEPTUAL

Como ya se ha mencionado, el tema de este trabajo abarca tres aspectos generales relacionados entre sí: *Las características de la prueba mediante argumentación en Geometría Analítica utilizando GeoGebra, el razonamiento emergente en este tipo de situaciones, así como las prácticas recurrentes y las principales herramientas de GeoGebra utilizadas para llegar a una prueba generalizada de tipo algebraico*. La relación que guardan estos aspectos con las líneas de investigación para abordarlos y los autores correspondientes se muestran en la tabla 2.

Tabla 2

Líneas de Investigación del Marco Conceptual

Aspecto a tratar	Línea de Investigación	Autores
Razonamiento y prueba mediante argumentación	Continuidad estructural	Pedemonte
	Uso del Modelo de Toulmin para el análisis del razonamiento abductivo e inductivo en la argumentación	Pedemonte, Buchbinder y Martínez Knipping
Uso del software y su relación con el razonamiento	La Estructura de Control (del Modelo Toulmin-CKĆ)	Pedemonte y Balacheff
	Prácticas de arrastre y Procesos cognitivos asociados	Arzarello, Olivero y Robutti

2.3 CONTINUIDAD ESTRUCTURAL: LOS APORTES DE PEDEMONTE AL CONCEPTO DE UNIDAD COGNITIVA

Bettina Pedemonte analiza y compara la argumentación, que apoya una conjetura, con la prueba, en la resolución de problemas abiertos de geometría y de álgebra. Esta comparación la lleva a cabo considerando dos aspectos: el *sistema referencial* y el *sistema estructural* (Pedemonte, 2007b). El primero incluye las representaciones (lenguaje, heurísticas, dibujos) y los conocimientos (concepciones o teoremas) mientras que el segundo se refiere a la conexión lógica cognitiva entre afirmaciones (abducción, inducción o deducción). En el análisis de la resolución de problemas geométricos, sus resultados muestran que en muchos casos existe cierta continuidad "natural" tanto en los sistemas referenciales como en la estructura lógica; en este último aspecto la continuidad dificulta construir una prueba deductiva. Es decir, la argumentación que genera la conjetura es de tipo abductivo al igual que la prueba obtenida. Es importante resaltar que de acuerdo con Pedemonte[23] (2007a) la

[23] Del mismo modo lo considera así en sus trabajos previos sobre argumentación y prueba.

prueba debe ser deductiva y basada en teoremas. Considera también que la conjetura no siempre es el resultado de una argumentación, en cuyo caso puede considerarse un «hecho»[24].

La argumentación entonces puede estar relacionada con la conjetura de dos maneras: la argumentación *constructiva*, que contribuye a elaborar dicha conjetura y por lo tanto precede a la afirmación y la argumentación *estructurante* que intenta justificarla cuando ésta ha sido previamente construida como un "hecho". En el año 2010, Paolo Boero, Nadia Douek, Francesca Morselli y Bettina Pedemonte sintetizan sus contribuciones a las perspectivas teóricas hechas respecto a la relación existente entre argumentación y prueba. En particular, acerca de los resultados obtenidos por Pedemonte en relación a la continuidad en las formas de razonamiento (continuidad estructural) durante el proceso de elaboración de conjeturas hasta la obtención de una prueba en problemas geométricos y algebraicos, afirman:

> “Algunos experimentos en clases de geometría (Pedemonte, 2007) han destacado que esta continuidad estructural "espontánea" entre la argumentación abductiva y la "prueba abductiva" puede ser un obstáculo para los estudiantes en la construcción de una prueba deductiva. No obstante, esta continuidad entre la argumentación abductiva y la prueba parece estar ausente cuando los estudiantes llevan a cabo pruebas algebraicas. De hecho, a diferencia del ejemplo en geometría, la distancia estructural entre la argumentación y la prueba (desde una argumentación abductiva hasta una prueba deductiva) no es una de las dificultades comunes que enfrentan los estudiantes para resolver problemas que involucran propiedades de números. Como la prueba algebraica se caracteriza por una fuerte estructura deductiva, los pasos abductivos en la actividad de argumentación pueden ser útiles para vincular el significado de las letras utilizadas en la prueba algebraica con los números usados en la argumentación (…) (Pedemonte, 2008). Además, en este caso, el análisis realizado a través del modelo de Toulmin ha demostrado que, a diferencia del caso geométrico, los pasos abductivos en la argumentación pueden ser útiles para la construcción de la prueba si favorecen la continuidad en el "contenido" de la argumentación y la prueba (a veces los pasos abductivos asumen un papel

[24] En Lozano (2014) se explica la continuidad de la argumentación abductiva a una prueba del mismo tipo la cual generalmente se presenta en las resoluciones de los problemas geométricos. Si en la abducción se parte de hechos observables (las construcciones geométricas), resulta “natural” que la argumentación estructurante culmine también en una prueba abductiva.

importante en la argumentación porque, a través de ellos, el razonamiento de los estudiantes mantiene la conexión entre la construcción de una conjetura y la prueba)”. (Boero et al., 2010, p.8).

2.4 USO DEL MODELO DE TOULMIN PARA ANALIZAR ABDUCCIÓN E INDUCCIÓN

En el modelo de Toulmin, cada diagrama representa un razonamiento deductivo, es decir, los datos y las garantías conducen a una afirmación. Traducido en los términos utilizados por Charles S. Pierce, un caso y una regla, nos llevan a un resultado. Ver el Modelo de Toulmin para la deducción en la figura 2.1. En dicha figura, el signo de interrogación (?) representa el elemento que se busca.

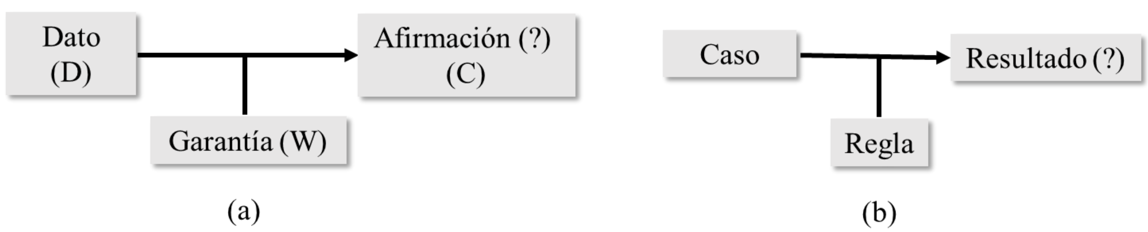


Figura. 2.1. Modelo para un argumento deductivo: (a) En términos de Toulmin (b) En términos de Pierce

Ahora, de acuerdo con autores como Pedemonte, B. y Reid, D. (2011a) o Prusak, Hershkowitz y Baruch (2012), con dicho modelo es posible también representar otros tipos de estructuras argumentativas como la abducción o la inducción. En un argumento abductivo dada la afirmación o resultado (hecho observable), se reconoce (por intuición) la garantía o regla de inferencia y se suponen como plausibles (o sea se buscan) los datos o casos que la explican (ver figura 2.2).

Figura. 2.2. Modelo para un argumento abductivo: (a) De acuerdo con Pedemonte (usa los mismos términos de Toulmin) (b) En los términos de Pierce

Es importante hacer notar que tanto la deducción como la abducción (por explicación), tienen como puente entre afirmación (resultado) y dato (caso), la garantía, siempre representada por una regla de inferencia. Por el contrario, en el razonamiento inductivo, de acuerdo con Pedemonte & Buchbinder (2011b) así como con Martínez & Pedemonte (2014), los ejemplos son considerados como datos (o casos), mientras que la garantía corresponde a un patrón de generalización (dado como el resultado de dichos casos); la regla de inferencia obtenida con el patrón de generalización de los datos es ahora la afirmación obtenida[25] (ver figura 2.3).

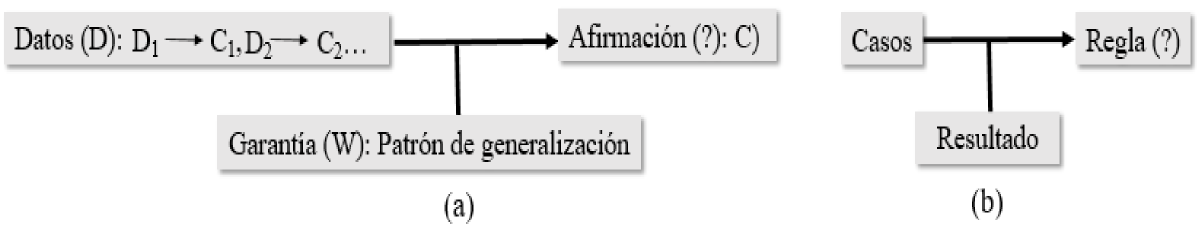


Figura 2.3. Argumento inductivo: (a) De acuerdo con Pedemonte. (b) De acuerdo con Pierce

C_1, $C_2 \ldots C_n$ representan afirmaciones hechas en pasos previos o también argumentos construidos a base de ejemplos, en cuyo caso, pueden representarse también como se muestra en la figura 2.4.

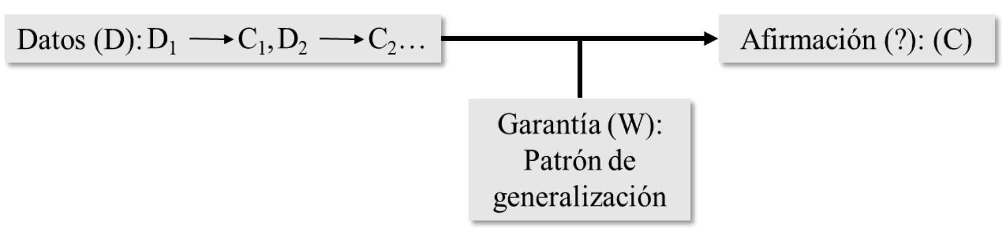


Figura 2.4. Argumentos que funcionan como datos en inducción

2.5 Estructura Global de argumentación en los Procesos de Prueba

Los procesos de prueba matemática en el salón de clase siguen sus propias y peculiares formas de justificar y fundamentar. Knipping (2008) proporciona ciertas herramientas de

[25] Pedemonte, en las citas antes mencionadas, retoma los tipos de inducción de Harel, G. (2001) quien divide los tipos de razonamiento inductivo en Generalización del Patrón del Proceso y Generalización del Patrón del Resultado (PPG y RPG por sus siglas en inglés). En esta investigación únicamente se distingue entre inducción y abducción, por lo cual no hacemos énfasis en dichas categorías ni tampoco se retoman las de abducción en el sentido de Eco (1983): abducción sobre-codificada, sub-codificada y creativa que fueron retomadas por Pedemonte (2011a).

análisis en forma de diagramas, las cuales resultan útiles para reconstruir la estructura global de argumentación de los procesos de prueba y evidenciar los esquemas de justificación o fundamentación de aseveraciones o resultados. Además, permiten comparar estos comportamientos globales entre diferentes tipos de resolución de un mismo problema o entre problemas similares. Para construir estos esquemas, Knipping (2008) aporta un método de reconstrucción de argumentos en el salón de clase; las etapas son:

- Reconstrucción y significado de los diálogos secuenciados, identificando los episodios importantes.
- Reconstrucción de los pasos de los argumentos de cada episodio (elaborada con algún Modelo de Toulmin que resulte funcional) y de las secuencias cortas de pasos que forman "encadenamientos" para elaborar una estructura de argumentación global.
- Comparar los argumentos locales y las estructuras de argumentación globales para revelar diferencias y similitudes en sus formas de justificar o fundamentar.

En la figura 2.5 se ejemplifica un esquema de reconstrucción global de la argumentación de cierta resolución a un problema matemático con el encadenamiento de sus argumentos. Cada argumento se encuentra representado con su respectivo modelo de Toulmin y sobrepuesta se encuentra, la simbología propuesta por Knipping (2008). En este ejemplo, no se muestra el problema, únicamente la simbología del esquema de reconstrucción de la argumentación global.

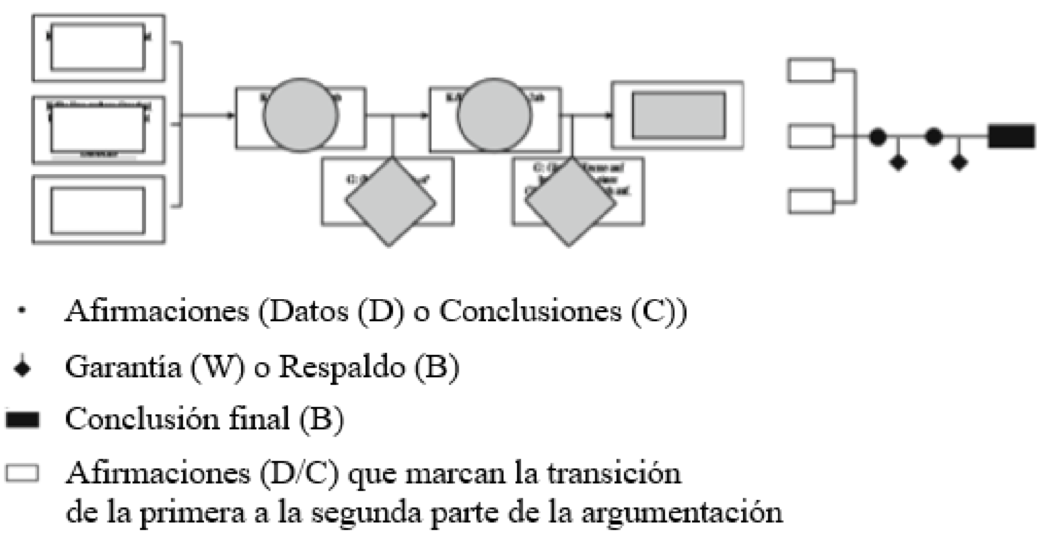


Figura 2.5. Esquema de la reconstrucción global de una argumentación [26]

[26] Figura tomada de Knipping, C. (2008). A method for revealing structures of argumentations in classroom proving processes. *ZDM Mathematics Education*, p. 435.

2.6 ESTRUCTURA DE CONTROL Y ANÁLISIS DEL RAZONAMIENTO EN UNA C-PRUEBA

Como se explicó en la sección 2.3, la argumentación promovida durante la resolución de problemas abiertos, busca acceder a una prueba final de tipo deductivo (estructuralmente hablando). En este sentido, Pedemonte establece una clara distinción entre la naturaleza lógica de la argumentación y la de la prueba. No obstante, es importante hacer notar que el contexto escolar de sus estudios es distinto en muchos aspectos al contexto de nuestra investigación.

Acuña (1996), al realizar una investigación con estudiantes de bachillerato en México, considera que el trabajo de elaboración de conjeturas no ha sido desarrollado en el aula previamente a la enseñanza de los procesos de prueba. Es así como los estudiantes, al iniciar este nivel, *no están en condiciones de construir pruebas de tipo intelectual debido a su formación matemática basada en cálculos, resolución de algoritmos y problemas rutinarios*. A pesar de ello, afirma, *es necesario trasponer la frontera que divide a las pruebas pragmáticas de las pruebas intelectuales*[27] *a través de la toma de conciencia sobre la importancia de generalizar*. Hoy en día coincidimos con tal afirmación y *en esta investigación nos atenemos a la noción de prueba de Herbst & Balacheff (2009)* (mencionada en la sección 1.2.8): *La C-prueba (Conception proof), cuya base se encuentra en el reconocimiento de un concepto más flexible de prueba y acepta una validación apoyada en estructuras de control locales (Σ).*

También *consideramos factible en esta investigación aceptar una prueba de tipo abductivo o inductivo, en cuanto al tipo de razonamiento (sistema estructural)*. El análisis del sistema estructural se llevará a cabo utilizando el modelo de Toulmin y servirá para identificar algún indicio de evolución de razonamiento abductivo al deductivo, así como para diferenciar abducción de inducción. En este sentido, es importante aclarar que Pedemonte (2003) también llegó a admitir como factible la posibilidad de considerar aceptables pruebas abductivas en las resoluciones de problemas geométricos. En cuanto al sistema referencial, haremos énfasis en el análisis de la Estructura de Control del Modelo Toulmin-CKḈ explicado en las secciones 1.2.8 y 1.2.11 de los antecedentes (ver niveles (A) y (B) en la figura 2.6). Además, se vincula el uso de dicha Estructura de Control para analizar cómo se genera razonamiento ascendente y descendente (explicado en la sección 2.6) y la relación

[27] Se refiere a la clasificación de pruebas hecha por Balacheff (2000).

que guardan estas formas de considerar el razonamiento con lo que es la abducción y la inducción (Niveles (C) y (D) en la figura 2.6). Finalmente se utilizan diagramas donde es posible sintetizar la estructura global del proceso de argumentación y observar cómo se lleva a cabo la C-Prueba.

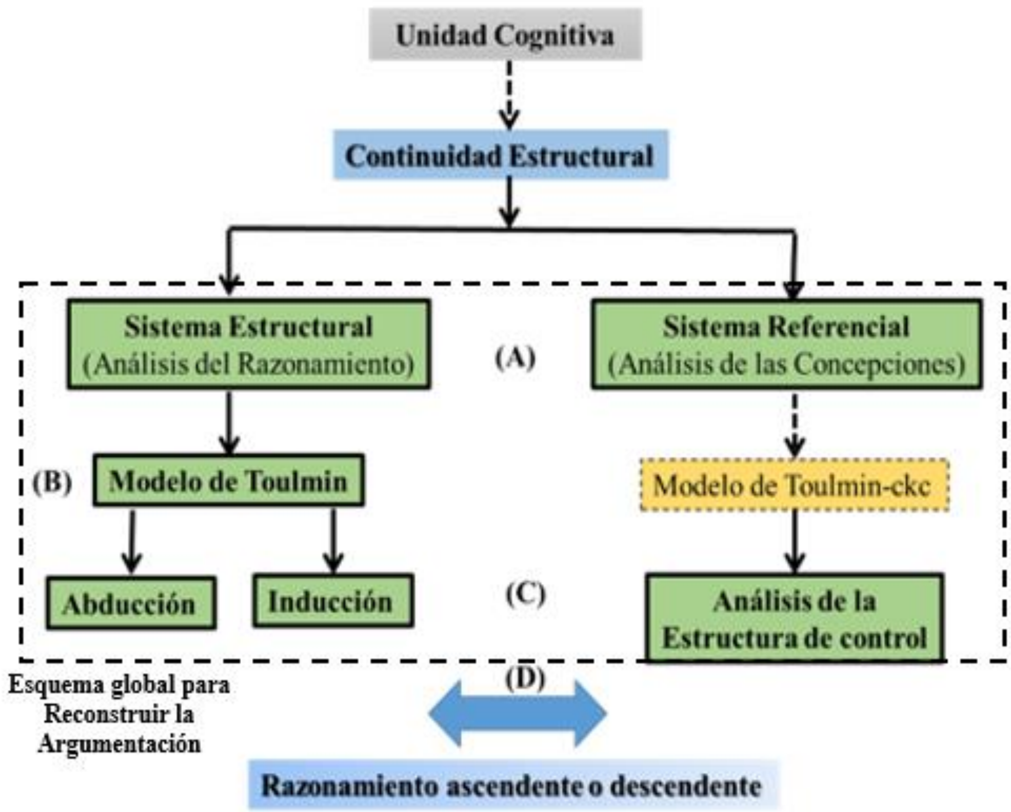


Figura 2.6. Estructura del Marco Conceptual

2.7 El Arrastre y los Razonamientos ascendente y descendente

La investigación ha demostrado que las herramientas proporcionadas por el Software de Geometría Dinámica (DGS) impactan la forma de abordar los problemas abiertos en geometría euclidiana. En los antecedentes de este trabajo, se mencionó que el examen de arrastre consiste en mover ciertos puntos sobre los que está basada la construcción de una figura para ver si esta mantiene las propiedades geométricas iniciales y verificar si está construida correctamente. Arzarello, Olivero, Paola, & Robutti (2002) encontraron que el arrastre revela algunos aspectos cruciales del razonamiento geométrico en la dialéctica existente entre lo perceptivo y lo teórico. Aseguran que no solo se deben considerar los objetos matemáticos, por ejemplo, las figuras, sino también las apreciaciones de los estudiantes, sus movimientos, sus gestos, el lenguaje y los artefactos que utilizan como instrumentos mediadores (ver figura 2.7).

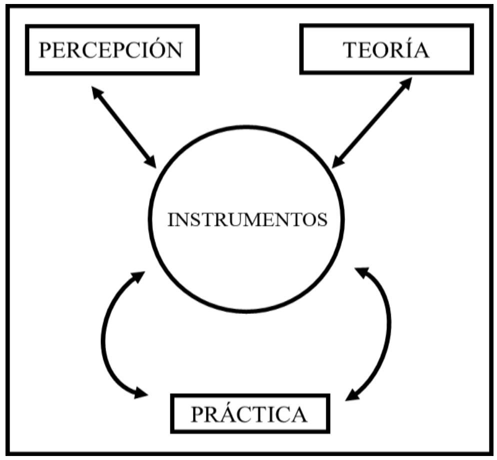


Figura. 2.7. Dialéctica entre lo perceptivo y lo teórico en el razonamiento geométrico[28]

Arzarello et al. (2002) esbozaron las diferentes funciones de arrastre con el software Cabri Geometre y propusieron una jerarquía para clasificar y describir algunos de sus procesos de aprendizaje. Mediante la observación de cómo los estudiantes utilizan el mouse durante la resolución de problemas con Cabri, encontraron las siguientes modalidades:

- *Arrastre errante*: Se lleva a cabo moviendo de forma aleatoria los puntos básicos mostrados en pantalla, sin un plan, para descubrir configuraciones interesantes o regularidades en las figuras.
- *Arrastre confinado*: Aquí se mueve un punto semi-arrastable (ya está vinculado a un objeto).
- *Arrastre guiado*: Se arrastran los puntos básicos de un dibujo para darle una forma particular.
- *Arrastre del "Dummy locus"*: Se mueve un punto básico para que la figura mantenga una propiedad descubierta "intuitivamente".
- *Arrastre vinculado*: Enlaza un punto a un objeto y lo mueve hacia ese objeto.

[28] Figura de "A cognitive analysis of dragging practices in Cabri enviroments", por Arzarello, F., 2002, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, Vol. 34(3), p. 66.

- *Prueba de arrastre*: Se mueven los puntos arrastrables o semi-arrastrables para ver si la figura guarda las propiedades iniciales. Si es así, entonces la figura pasa la prueba; si no, el dibujo no fue construido de acuerdo con las características geométricas pretendidas.

Arzarello et al. (2002) analizan las prácticas de arrastre desde un punto de vista cognitivo. Sus principales puntos de análisis pueden resumirse así:

- El arrastre representa un medio para la relación teórico-perceptual del análisis geométrico creando entidades con un nuevo estatus llamados Objetos Matemáticos Estructurados: conceptos, su representación y las relaciones entre ellos.
- La posibilidad del arrastre ofrece información útil para la fase de descubrimiento (Fases de Exploración-Conjetura de acuerdo con el Modelo Exploración-Prueba de Feng-Jui Hsieh. Ver sección 1.2.4) y de esta forma, se provee un soporte pare lograr pruebas como explicaciones de conjeturas o de propiedades.
- Las prácticas basadas en el software pueden enmarcarse en una evolución cognitiva que va de las percepciones a las ideas abstractas. En este sentido, existen dos clases de procesos cognitivos de acuerdo con las situaciones concretas: *Procesos de razonamiento ascendentes y procesos descendentes*. Los primeros evolucionan de las figuras a la teoría para explorar libremente una situación, buscando regularidades, invariantes, etc. Los segundos evolucionan de la teoría a las figuras, para validar o refutar conjeturas o para verificar propiedades.
- En ambos procesos uno puede observar diferentes dinámicas entre el uso del “lápiz y papel” y los ambientes dinámicos; *la transición de uno al otro está regida por la abducción. La formación de abducciones se produce debido a la ingenuidad de quien se enfrenta al problema y la función de arrastre ayuda a mediar esta circunstancia*.
- La evolución desde la percepción hasta un sustento de carácter cada vez más teórico está marcada por una especie de “cadencia” de la modalidad ascendente a la descendente y viceversa.

Entonces, examinar *la forma en que los estudiantes usan el arrastre proporciona una visión de sus procesos cognitivos*. Los estudiantes pueden aprovechar las diferentes modalidades de arrastrarse para lograr *objetivos como explorar, conjeturar, validar y justificar*. Por ejemplo, los arrastres errante y guiado se usan en la fase de descubrimiento y el dummy locus ayuda a construir conjeturas, en ambos casos se presentan procesos de razonamiento de tipo ascendente. Con el arrastre dummy locus, se inicia el cambio de un razonamiento ascendente a uno descendente y se presenta la abducción. *La prueba de arrastre se utiliza principalmente para validar conjeturas y en particular las conjeturas originadas visualmente o por medio de una construcción, por lo tanto, revela una especie de control descendente*. La evolución de lo perceptivo a lo teórico a través de modalidades ascendentes y descendentes no ocurre automáticamente y se requiere un cuidadoso diseño didáctico para dar apoyo a los estudiantes en los procesos de resolución de problemas abiertos cuando utilizan ambientes de geometría dinámica.

Arzarello et al. (2002) han propuesto las modalidades de arrastre y sus procesos cognitivos en base a estudios llevados a cabo con Cabri, sin embargo, en el presente trabajo se utiliza el software GeoGebra y tal como se puede ver en el siguiente capítulo, *se introduce la herramienta deslizador para llevar a cabo la prueba del arrastre frecuentemente*. Esto representa una diferencia importante, pues con esta herramienta *es posible asociar simultáneamente los cambios en las propiedades geométricas de las figuras con valores numéricos útiles para observar un patrón aritmético que el estudiante puede generalizar algebraicamente. En este punto, nuestra investigación hace un nuevo aporte evidenciando el papel del deslizador como parte de una estructura de control.*

CAPÍTULO 3

METODOLOGÍA

3.1 INTRODUCCIÓN

En este Capítulo 3, se explican las razones de la elección de la Metodología del estudio de casos y las particularidades del diseño experimental. Así, en la sección 3.2 se justifica dicha metodología y el método cualitativo de análisis. La sección 3.3 describe la población de estudio, los recursos empleados y las etapas de la investigación. Finalmente, se detallan los problemas propuestos, sus características, las modificaciones hechas a partir del estudio exploratorio y ciertas soluciones factibles a los problemas finales aplicados a los estudiantes.

3.2 METODOLOGÍA: ESTUDIO DE CASOS

Entendemos por metodología un enfoque general para estudiar un problema de investigación, mientras que el método es una técnica específica para recoger datos (Bonache, 1999). En este sentido, la metodología utilizada en esta investigación es el estudio de casos de tipo explicativo, pues se pretende contestar a preguntas del tipo "¿Cómo…?" así como depurar la teoría del marco conceptual ajustándola al contexto de la población de estudio. En lugar de limitarnos a la mera descripción, se llevará a cabo una inducción de tipo analítico (no estadístico) para hacer una aportación a manera de hipótesis partiendo del análisis de la relación que guardan los casos entre sí y con lo planteado en el marco conceptual.

3.2.1 Justificación de la metodología y del método empleado

El método a utilizar será de tipo cualitativo pues los datos se recolectaron a través de observaciones, video grabaciones, transcripción y análisis de los procedimientos de resolución de los problemas planteados. Además, se eligieron los casos por su capacidad explicativa más que por un énfasis de representatividad. Esto ayudará a precisar la teoría general a los casos de contextos semejantes. Se justifica también la utilización del estudio de casos de tipo explicativo y de método cualitativo porque a medida que se descubran nuevos hechos, se pueden cambiar o ajustar los presupuestos teóricos iniciales. Tal flexibilidad es aceptable porque proporciona mayores oportunidades para obtener información que no se encontró en el marco conceptual (por ejemplo, en los artículos consultados sobre la Unidad Cognitiva se trabajaron problemas de aritmética, álgebra o geometría, pero no de Geometría

Analítica y la población de estudio no era mexicana). Generalmente, las críticas hechas a la elección del estudio de casos como estrategia de investigación son la poca fiabilidad o consistencia (en caso de querer repetir el mismo estudio con diferentes investigadores) y la falta de validez externa, dada por la generalización estadística (Bonache, 1999). Para aumentar el grado de fiabilidad se presenta un protocolo de investigación y en cuanto al problema de la generalización, se aclara que la de tipo estadístico no es la única, también existe la lógica de la réplica presente cuando un mismo estudio contiene más de un caso. Este tipo de lógica se basa en la inducción analítica, en la cual, se trata de observar lo general en los casos particulares estudiados. En el protocolo de la sección 3.3.2, se mostrarán las etapas de investigación, incluido el estudio exploratorio y los pasos del método cualitativo de análisis se definirán en el Capítulo 4.

3.3 DISEÑO EXPERIMENTAL

3.3.1 Descripción de la población y recursos empleados

La población de estudio fueron jóvenes entre 16 y 17 años, estudiantes del C.E.C. y T. 8 “Narciso Bassols” del I.P.N. quienes cursaron la materia de Geometría Analítica en el tercer semestre de bachillerato. *Los estudiantes desconocían los programas de geometría dinámica. Del mismo modo, la práctica de probar les resulta totalmente ajeno.* Durante la primera etapa, el estudio piloto, se trabajó con diecisiete jóvenes: siete mujeres y diez hombres, seleccionados de los grupos de Geometría Analítica asignados a la investigadora quien es profesora en el C.E.C. y T. 8. La segunda etapa se llevó a cabo el año siguiente con 9 estudiantes (8 varones y una mujer) seleccionados con base en las calificaciones más altas[29]. También fueron consideradas sus posibilidades de tiempo para colaborar en la investigación pues se requería trabajar en contra turno o los sábados.

La resolución de los problemas se hizo utilizando tanto lápiz y papel como el software GeoGebra en su versión 5.0 instalado en las máquinas de un aula solicitada para los fines de la investigación. El mayor inconveniente en ambas etapas fue la inconsistencia de los estudiantes para asistir en tiempo y forma, así como la falta de disponibilidad del espacio con el número de máquinas requeridas los días sábado.

[29] Los cursos de Geometría Analítica en el Nivel Medio Superior del Instituto Politécnico Nacional (nivel bachillerato) se dividen en tres períodos parciales para su evaluación. Las calificaciones a las cuales se hace referencia fueron las del primer período.

3.3.2 Protocolo de investigación

- *Primera etapa*: *Estudio exploratorio realizado en tres fases entre diciembre de 2015 y abril de 2016.*

Fase 1. Uso del GeoGebra en clases convencionales con proyector: Se llevó a cabo aproximadamente en nueve sesiones del curso normal con grupos completos[30]. En estas sesiones además de mostrarles de forma expositiva la cualidad de movimiento o dinamismo del software, se trabajaron tanto problemas convencionales como no convencionales. En algunos problemas se utilizaron datos generalizados (con literales), lo cual no es común en el contexto de estudio donde se acostumbra solo resolver problemas de casos particulares con datos numéricos. A continuación, un ejemplo.

Se tiene un cuadrado con a unidades de longitud (ver figura 3.1) ¿Cuáles son las coordenadas de sus vértices si sus diagonales están sobre los ejes?

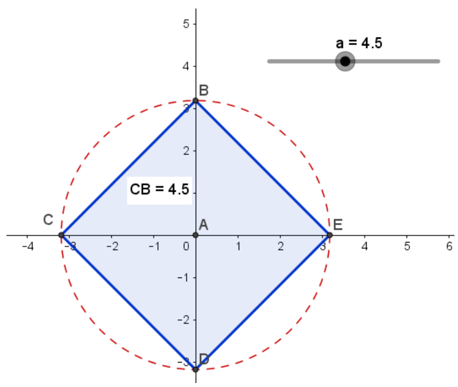


Figura. 3.1. Cuadrado de lado a

Otro factor importante fue validar resultados recurriendo a la práctica de resolver un mismo problema por diferentes formas. Esto fue necesario debido a la cultura de recurrir al profesor para cerciorarse si un problema está bien resuelto o no. Esta nueva práctica devuelve a los estudiantes, en gran parte, la responsabilidad de lo que producen y se les introduce a reconocer, al menos empíricamente y por separado, dos cualidades de la prueba: *la validación de resultados y la generalización algebraica*. Lo anterior se hizo considerando lo planteado en el marco conceptual referente a la C-prueba. El siguiente es un ejemplo de los problemas planteados en esta fase; adaptado de Reid (1966). De hecho, fue el primero en el cual se observó *la utilidad de introducir el deslizador para facilitar la comprensión de lo que es un*

[30] Los grupos en el plantel mencionado son de 45 estudiantes en promedio aproximadamente.

dato generalizado (lado de longitud a). Algunos otros problemas rediseñados para esta fase se muestran en el Anexo 1.

Fase 2. Actividades a manera de Laboratorio: Se llevaron a cabo siete sesiones por cada grupo, con una sesión para seleccionar, por medio de una actividad, a los estudiantes que resolverían los dos problemas finales de la siguiente fase. Para llevar a cabo estas actividades, se trabajó en parejas y se utilizó tanto GeoGebra como lápiz y papel. En esta fase fueron seleccionados los diecisiete estudiantes antes mencionados, quienes resolvieron los problemas finales. La Actividad G, mostrada a continuación, es un ejemplo de los problemas aplicados en la segunda fase de esta primera etapa (ver fig. 3.2). El resto de las actividades se muestran en el Anexo 2.

Actividad G: Construir tres circunferencias concéntricas en el origen del plano cartesiano con radios de 1, 2 y 3 unidades. En las intersecciones de estas circunferencias con el eje positivo y, trazar rectas paralelas al eje x. Ubicar los puntos de intersección de tales rectas con las circunferencias. ¿A qué lugar geométrico pertenecen los puntos I, K, A, L y J? Justifica tu respuesta

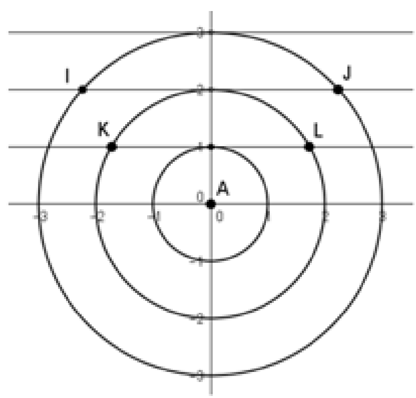


Figura. 3.2. Construcción inicial de la Actividad G

Para el caso de esta actividad, la intención fue permitir que los estudiantes se percataran que *la naturaleza de un lugar geométrico no se puede determinar solo con base en la apariencia de su curva*. Fue curioso notar que inicialmente nadie duda en afirmar que se trata de una parábola. Esto se debe a lo descrito por Fernández (2011), ya explicado en los antecedentes, acerca del problema representacional de las clases de Geometría Analítica, en el cual, con demasiada frecuencia, se asocia la forma de las curvas a los dibujos (y no a las figuras) sin tener en cuenta la diferencia conceptual, dada por la definición o por la ecuación del lugar geométrico. Utilizando la herramienta de construcción de cónica del programa es posible percatarse que la curva se asocia a una elipse, no obstante probarlo, dejando a un lado la apariencia, requiere como una posibilidad, analizar la ecuación asociada mostrada en la vista algebraica. El caso general puede determinarse con la ayuda de un deslizador, modificación que se implementó posteriormente en la segunda etapa de la investigación[31], tal como se muestra más adelante en la figura 3.3.

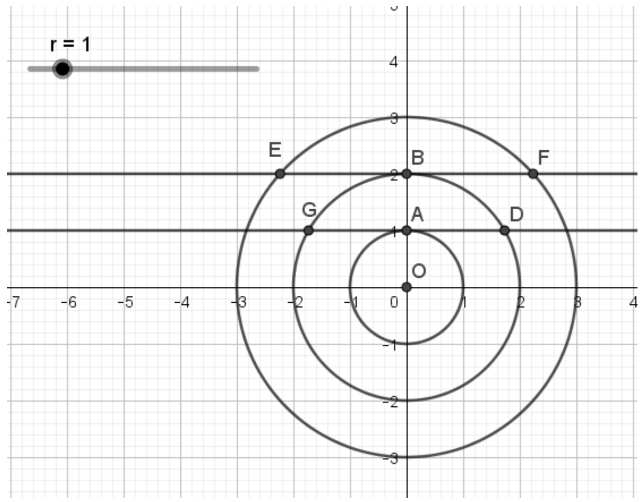


Figura. 3.3. Construcción final de la Actividad G

Fase 3. Aplicación de dos Problemas finales: Dos sesiones de dos horas cada una. Los diecisiete estudiantes también trabajaron en parejas utilizando GeoGebra así como lápiz y papel[32]. Es importante hacer notar que este primer acercamiento exploratorio (con sus tres fases), sirvió para aumentar el grado de familiaridad con el método de estudio, refinar los problemas propuestos y precisar los alcances de la investigación. Durante este período salió a la luz la importancia del uso de las herramientas deslizador y barra de entrada como particularidades del software GeoGebra y se identificó una diferencia importante entre el uso que se da al deslizador como herramienta para el arrastre y cómo se lleva a cabo esta función en otros softwares como Cabri. También, *resultó de mucha utilidad configurar esta herramienta con valores enteros para facilitar el razonamiento inductivo*. Por ejemplo, la Actividad G de la fase dos de esta primera etapa (mostrada en la Figura 3.1), se rediseñó nuevamente para implementarla en la segunda etapa del estudio introduciendo la herramienta

[31] En este problema, se hizo también un cambio en las literales que indican los puntos y denotar con la letra *O* al origen de coordenadas.
[32] El primero de estos es el Problema 1 ilustrado en la Figura 3.4; el segundo (que posteriormente se descartó para la segunda etapa de la investigación pues la primera fue el estudio exploratorio) se muestra en el Anexo 3.

deslizador y solicitando un valor generalizado del mismo modo como se adaptó el problema de la figura 3.3:

Actividad G (rediseñada): Genera un deslizador r (Mín: 0, Máx: 7, Incremento 1). Coloca un punto O en el origen de coordenadas y tres circunferencias concéntricas en O de radios $r, 2\,r\ y\ 3r$. Traza dos rectas paralelas al eje x que pasen por las intersecciones de las dos primeras circunferencias con el eje y. Marca las intersecciones como A, B, D, E, F y G tal como se muestra en la Figura 3.3. ¿Cuál es el lugar geométrico al que pertenecen los puntos *E, G, O, D* y *F* ? Justifica tu respuesta.

- *Segunda etapa: Estudio de casos realizado entre octubre y diciembre de 2017.*

Ya es el estudio de casos propiamente dicho, en el cual se implementaron las tres fases del estudio preliminar con las modificaciones a los problemas explicadas anteriormente. La fase 1 se repitió de nuevo con los dos grupos completos de Geometría Analítica asignados el siguiente semestre. No obstante, considerando las posibilidades de tiempo de los estudiantes y el uso de los recursos en la escuela, las fases 2 y 3 únicamente se aplicaron a los nueve estudiantes a quienes se les aplicarían tres problemas finales. Ellos fueron seleccionados también en base a su calificación y a sus posibilidades de tiempo.

En esta segunda etapa ya se había desarrollado cierto grado de familiaridad con el método de estudio. En la fase tres se descartó uno de los problemas finales del estudio preliminar y se implementaron otros dos que fueron adaptados para su resolución utilizando el mismo esquema de diseño, es decir, *introduciendo la herramienta deslizador de GeoGebra configurado con valores enteros y solicitando generalizar el resultado para justificar la respuesta y lograr la C-Prueba*. En la siguiente sección se explican con mayor detalle.

3.3.3 Problemas propuestos

En esta sección se muestran dos de los tres problemas finales tal como se aplicaron en la fase 3 de la segunda etapa. Las figuras asociadas a los enunciados del problema estuvieron disponibles en GeoGebra, así, los estudiantes estuvieron en libertad de realizar trazos auxiliares o introducir las expresiones que creyeran pertinentes. En cuanto al uso de las herramientas, se limitó la de "cónica dados cinco puntos" pues en el estudio exploratorio nos percatamos que la versión 5.0 de GeoGebra presenta "inestabilidad" con algunas curvas y al asignar cinco puntos cualesquiera sobre el lugar geométrico dado, los puntos presentan ligeros movimientos fuera de esta curva y el software hace un ajuste distinto para cada posición. Se decidió proveer las figuras con el software de geometría dinámica, porque darles solo el diagrama con el texto o solicitar a los estudiantes dibujar las figuras hubiese ocupado más tiempo y se les hubiese distraído de los principales objetivos.

Los argumentos fueron videograbados y se transcribieron. También se guardaron tanto los archivos de GeoGebra como los registros escritos, aunque la mayor parte de sus análisis los llevaron a cabo de manera oral y utilizando el software. La profesora (investigadora) estuvo presente y su papel fue cuestionar los argumentos de los estudiantes cuando observaba alguna incongruencia de importancia. De igual modo, llegó a intervenir para reorientar la discusión, pero no dio las soluciones. Los problemas propuestos, son no convencionales respecto a los implementados en cursos regulares que son dictados por la costumbre de la academia de matemáticas de acuerdo al currículum. Los problemas se consideran abiertos de acuerdo a lo descrito en los antecedentes. A continuación, se muestra cada uno junto con algunas posibles resoluciones y comentarios.

Problema 1. $A(0{,}0)$ es el centro de una circunferencia de radio a, E es un punto sobre dicha circunferencia, f y g son bisectrices de los ángulos B y C respectivamente y D es el incentro del triángulo BCE ¿Cuál es el lugar geométrico descrito por D al mover el punto E?

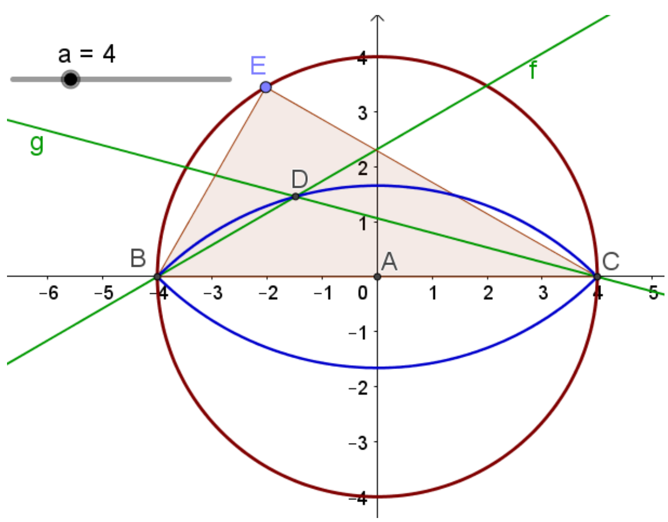


Figura 3.4. Construcción inicial en GeoGebra del Problema 2.

La idea para el diseño de este problema con geometría analítica surgió de un problema general planteado con geometría euclidiana por Contreras (2012).

- *Planteamiento inicial del Problema 1 utilizando Geometría Euclidiana*

En la Figura 3.5 se muestra un triángulo ABC. O es circunferencia inscrita al triángulo y el punto I es su incentro. Si D es el punto medio del arco AC perteneciente al circuncírculo, probar que: $\overline{AD} = \overline{DI} = \overline{DC}$.

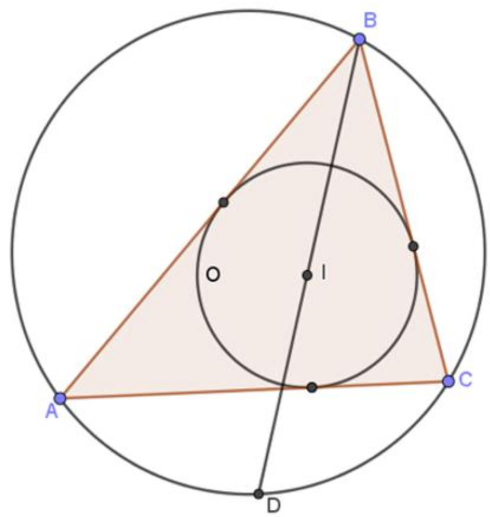


Figura 3.5. Problema original con geometría euclidiana

La solución del problema original con geometría euclidiana se muestra en el Anexo 4. Al implementar el deslizador, nos percatamos que esta herramienta funciona como parte fundamental de una estructura de control junto con la barra de entrada de GeoGebra; en este sentido, el espectro de opciones para validar resultados se amplía. Además, al limitar a números enteros los valores de a, se encuentra una forma más fácil de relacionar este radio variable con la ecuación del lugar geométrico que representa la solución del problema. Se da así la posibilidad de fomentar además de la abducción, el razonamiento inductivo para llegar a una C-prueba aceptable de acuerdo con lo establecido en el marco conceptual.

- *Solución esperada del Problema1*

Conjetura: El lugar geométrico son dos arcos de circunferencia. Esta conjetura se puede construir utilizando la herramienta del software "circunferencia dados tres puntos" o utilizando las mediatrices de $\overline{BD}$ y $\overline{DC}$ (Figura 3.6) y encontrando su intersección para localizar el centro. Después se puede recurrir a la herramienta "circunferencia centro-punto". Dado que GeoGebra solo arroja la ecuación de la circunferencia para valores particulares del radio a y se quiere probar que el lugar geométrico son dos arcos de circunferencia sin importar el valor que tome este radio, la prueba esperada consistiría en determinar las ecuaciones, obtener el radio y las coordenadas de los centros, todo en función de a. Posteriormente, se consideraría suficiente la validación utilizando el software.

Prueba generalizada: Al mover el deslizador a con el cual se controla la medida del radio de la circunferencia inicial, se observa que las coordenadas de los puntos $B, C,\ E\ y\ D$ pueden tomar diversos valores, por lo tanto se establecen las coordenadas de los puntos B y C (intersecciones con el eje de las abscisas) en función de a: $B(-a, 0)$ y $C(a, 0)$. Partiendo de la conjetura inicial, y considerando solo uno de los arcos, por ejemplo BDC, la nueva circunferencia tendría como centro la intersección de las mediatrices de BD y de DC: Punto G en la figura 3.6 cuyas coordenadas serían $(0, -a)$. Utilizando el software se traza una circunferencia con centro en G que pase por C, se genera así la circunferencia k que coincide con el arco superior del lugar geométrico.

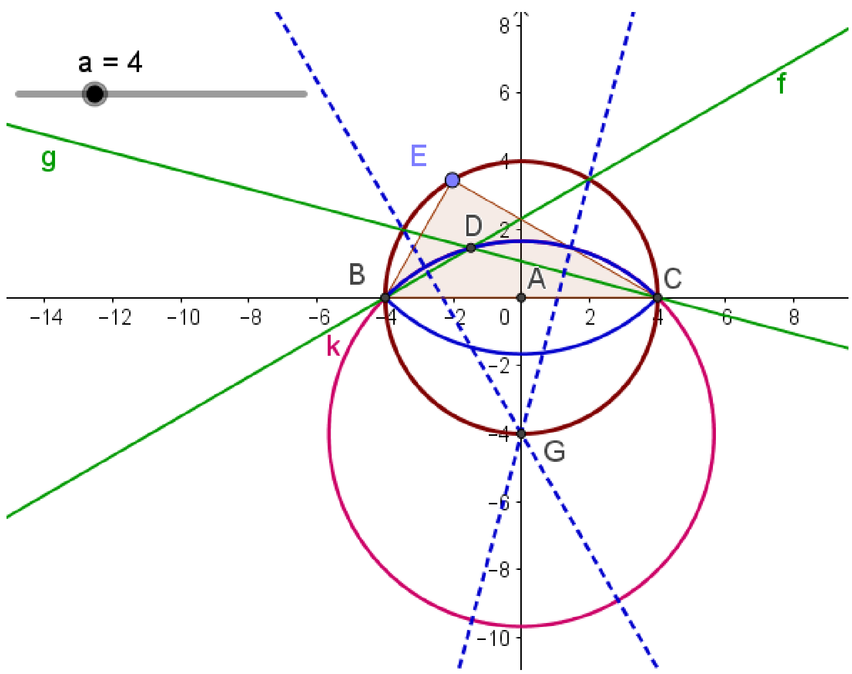


Figura.3.6. Circunferencia *k*: Lugar geométrico del punto *D*

Ahora es necesario generalizar la ecuación de la circunferencia k: Prestando atención a los valores del deslizador a en un intervalo [0,5] por ejemplo, en la ecuación k se puede observar el siguiente patrón:

$$si\ a = 5,\ \ x^2 + (y + a)^2 = 10a$$

$$si\ a = 4,\ \ x^2 + (y + a)^2 = 8a$$

$$si\ a = 3,\ \ x^2 + (y + a)^2 = 6a$$

$$si\ a = 2,\ \ x^2 + (y + a)^2 = 4a$$

$$si\ a = 1,\ \ x^2 + (y + a)^2 = 2a$$

$si\ a = 0,$ se obtiene un como lugar geométrico el punto $(0,0)$.

Ahora, si se analiza de forma inductiva:

$$10 = 2 * 5$$

$$8 = 2 * 4$$

$$6 = 2 * 3$$

$$4 = 2 * 2$$

$$2 = 2 * 1$$

Es decir: $r^2 = 2 * a * a = 2a^2 \therefore\ r = a\sqrt{2}$. Al observar la Figura 3.6 y aplicar el Teorema de Pitágoras se puede comprobar también que: $GC = a\sqrt{2}$. Entonces la ecuación del lugar geométrico *k* es: $\boldsymbol{x^2 + (y + a)^2 = 2a^2}$

Se puede probar su validez ampliando el intervalo de a y moviendo el punto E a lo lago de ambos arcos. Así mismo, si se introduce esta expresión en la barra de entrada de GeoGebra, la curva se superpone y coincide con el lugar geométrico al cambiar los valores de a con el deslizador, es decir, soporta la "prueba de arrastre". Una prueba como esta implica análisis abductivo durante la construcción de la conjetura y cuando se buscan las expresiones generalizadas de las coordenadas del centro G, razonamiento inductivo al buscar la ecuación de la circunferencia con el patrón observado para el radio y razonamiento deductivo, implícito en los desarrollos algebraicos y en el establecimiento final de la ecuación.

Problema 2. Sea O un punto fijo en el origen de coordenadas, A un punto móvil sobre la parábola $x^2 = ty$, $\overline{AB}$ un segmento perpendicular al eje y y OAB un triángulo inscrito en la parábola. a) ¿Cuáles son las coordenadas del punto A (para cualquier valor de t) en el momento que OAB es equilátero? b) ¿Cuál es la superficie válida para cualquier valor de t en ese momento? Justifica tus respuestas (ver figura 3.7).

Este fue un problema adaptado del libro Curso de Geometría Analítica de Agustín Anfossi. Editorial Progreso, página 64. La siguiente es la redacción original en el libro para su resolución con lápiz y papel: Calcúlese el área de la superficie del triángulo equilátero inscrito en la parábola $y^2 = 4px$, dado que uno de los vértices del triángulo coincide con el origen. Como puede observarse, en la adaptación con GeoGebra, la orientación de la parábola cambia y se generaliza el problema con ayuda de un deslizador.

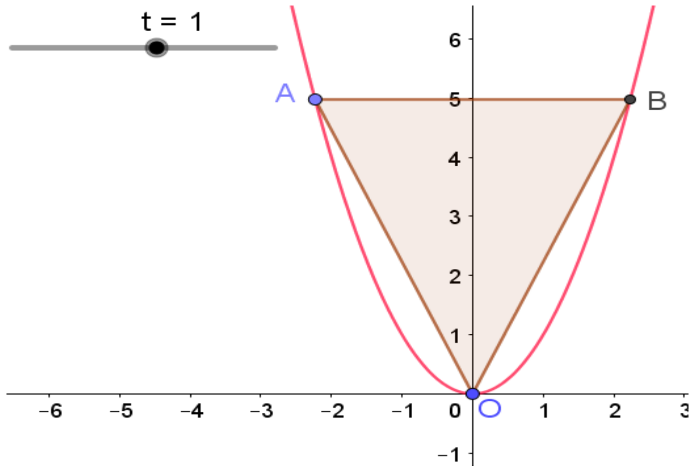


Figura. 3.7. Construcción en GeoGebra del Problema 2

En el problema original resulta difícil visualizar la variedad de triángulos inscritos, por el contrario, en la versión dinámica, una interrogante útil es cómo pueden utilizarse los recursos de GeoGebra para encontrar un triángulo equilátero entre la variedad de triángulos inscritos que pueden observarse al arrastrar el punto A.

- *Solución esperada del Problema 2*

Al arrastrar A, se puede aproximar AOB a un triángulo equilátero. Es posible que este tipo de arrastre (que podría ser considerado como dummy locus de acuerdo a las categorías de Arzarello) propicie a través de razonamiento abductivo, recordar la construcción geométrica de un triángulo equilátero. En la figura 3.8, el punto A se ha arrastrado hasta que ambas circunferencias, de radio AO y centros en A y B toquen respectivamente B y A, en dicho momento el triángulo es equilátero (o se aproxima a ello).

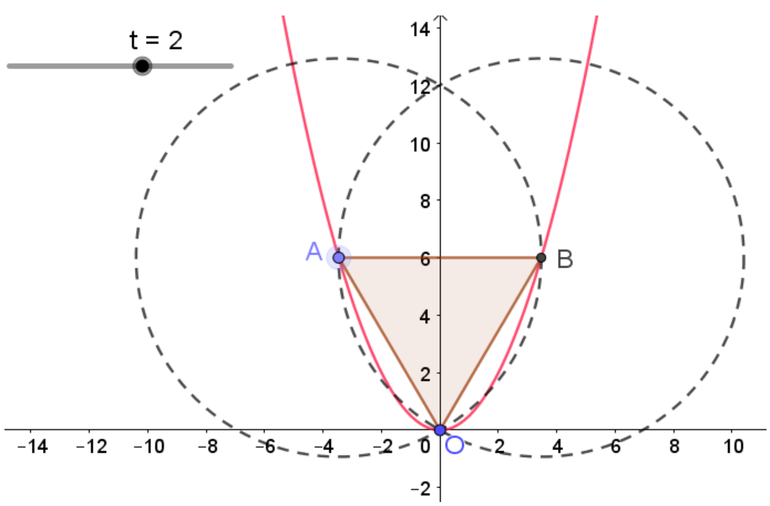


Figura. 3.8. Circunferencias de radios AO con centros en A y B respectivamente

Como la altura del triángulo AOB corresponde a la ordenada de A, si se mueve el deslizador *t* se puede hacer la siguiente *conjetura*:

$$y_A = 3t$$

Y como la parábola es el lugar geométrico de A, puede establecerse la siguiente ecuación:

$$x^2 = 3t^2 \;\therefore x = \pm\sqrt{3} * t$$

Entonces: $$x_A = \pm\sqrt{3} * t$$

Para verificar, al introducir estas coordenadas en la barra de entrada, el nuevo punto generado coincide con las coordenadas de B para cualquier valor de *t*. La superficie es entonces:

$$3\sqrt{3} * t^2$$

Otra manera de calcular la abscisa es utilizando valores exactos de las relaciones trigonométricas:

$$sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3t}{OA}$$

$$\overline{OA} = \frac{6t}{\sqrt{3}} = 2t\sqrt{3}$$

y como $OA = AB$

$$x = \mathrm{t}\sqrt{3}$$

CAPÍTULO 4
ANÁLISIS DE DATOS

4.1 INTRODUCCIÓN

Se presenta en este capítulo, el análisis cualitativo de tres casos de resolución: El equipo de Joel y Alejandro, el de Martín y Ricardo y el de Adriana y Ulises. Los dos primeros corresponden al Problema 1 y el tercero al Problema 2. El formato de la presentación de cada caso se hace con dos tablas y un diagrama. En la tabla primera, se exponen los episodios en los cuales se ha divido el análisis de la argumentación entre pares y las líneas de los diálogos que abarca cada uno; en la segunda tabla, los diálogos con los argumentos dividida en episodios, el análisis del razonamiento y la estructura de control empleada en cada uno. Al final de cada caso se muestra una síntesis del proceso de resolución empleando la simbología de Kippling (2008). Es importante aclarar que a pesar de que en los dos últimos casos no se logra completar la C-Prueba, resulta importante identificar la manera como se generan y desarrollan las formas de razonamiento en cada episodio, así como la forma en la que interviene el uso de GeoGebra en el proceso de control de resultados. De esta forma se identificaron *patrones de validación recurrentes (Estructuras de control)* las cuales serán comparadas en el Capítulo 5.

4.2 ANÁLISIS DE LOS CASOS REPORTADOS

Comenzamos con el análisis de los fragmentos del primer par de resoluciones del Problema 1 (Para recordar dicho problema ver sección 3.3.3 y figura 3.4 del Capítulo 3). La simbología mostrada en la tabla 3 resulta de gran utilidad para la lectura de las tablas subsecuentes. Como ya se ha mencionado, en cada caso se muestra primeramente un resumen de los episodios en los cuales se divide la argumentación de cada proceso de resolución. Para el primer caso, el de Joel y Alejandro, este resumen es el de la tabla 4. En las tablas 5 y 6 (referidas al análisis de los argumentos) se sugiere leer primero los diálogos por episodio en la columna izquierda y posteriormente el análisis estructural, referencial y de los procesos cognitivos, también de cada episodio en la columna del lado derecho. Al final, se anexa el diagrama con el análisis global de todo el proceso, con la intención de identificar y comparar las coincidencias en las formas de razonamiento de cada episodio y la estructura general del proceso de prueba.

Tabla 3

Simbología utilizada en la transcripción y en el análisis de los argumentos

Símbolo	Significado
L1, L2, L3,…	Simbolizan las líneas. Las ocasiones en las que cada persona interviene
P, J, A	Simbolizan las iniciales de los participantes
[*Letra cursiva*]	Observaciones sobre lo dicho por los interlocutores o las acciones de GeoGebra que acompañan al discurso.
[…]	Puntos suspensivos entre corchetes. Significan que se ha omitido una parte del discurso el cual es irrelevante para los propósitos de la investigación
(…)	Puntos suspensivos entre paréntesis. Indican breves pausas hechas por los estudiantes y la profesora (investigadora)
$\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \mathrm{C}_3, \ldots$	La letra C con subíndices: Afirmación o aseveración
$\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2, \mathrm{D}_3, \ldots$	La letra D con subíndices: Dato en el cual se basa cada afirmación
?	Indica que el elemento es desconocido en un inicio
$W_1, \mathrm{W}_2, \mathrm{W}_3, \ldots$	La letra W con subíndice: Garantía: que justifica cómo los datos apoyan la afirmación
$B_1, \mathrm{B}_2, \mathrm{B}_3, \ldots$	La letra B con subíndices: Respaldo que reafirma la Garantía

En la tabla 4, mostrada a continuación, el final de cada episodio está determinado por el objetivo a alcanzar en el proceso de resolución. Así, en un episodio pueden presentarse uno o dos tipos diferentes de razonamiento para lograr obtener lo indicado en cada subtítulo de las tablas, en cuyo caso entonces, el episodio se dividirá en uno o dos momentos respectivamente.

Tabla 4

Resumen de los episodios de la argumentación de Joel y Alejandro. Problema 1

Episodios	**Líneas**
1. Conjetura inicial	L1-L8
2. Obtención del término $2ay$	L9-L16
3. Obtención del término a^2 y de la ecuación final	L17-L20
4. Obtención de las coordenadas del centro	L21-L35

Tabla 5

Análisis de los argumentos de Joel y Alejandro para la resolución del Problema 1 (Primera parte)

<table>
<tr><th>Episodio 1: Conjetura inicial</th><th>Figuras y Análisis de la argumentación. Episodio 1</th></tr>
<tr><td rowspan="3">L1. A: Podrían ser dos circunfer… bueno [Elige la herramienta circunferencia dados tres puntos y da clic en BHC generando una circunferencia que pasa por estos tres puntos]. ¿Ya viste? [Con la misma herramienta genera la circunferencia que pasa por BDC].

L2. P: Pero ¿Cómo saben que es circunferencia?

L3. J: Pues es que coinciden, bueno acá está una circunferencia dados tres puntos.

L4. P: ¿Cómo podrías estar seguro que sí es circunferencia?

L5. A: Por su ecuación

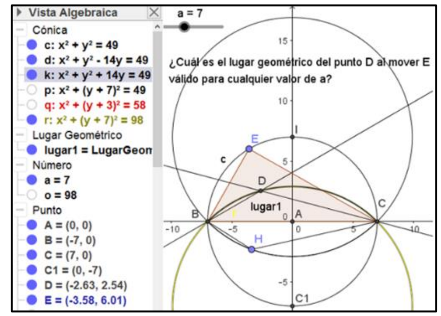
L6. J: Bueno también, x^2 y y^2 tienen coeficientes iguales [Antes de responder, marca la ecuación y la cambia a su forma general]. Y ahorita me acordé sobre lo de las</td><td>

Figura 4.1. El lugar geométrico son dos arcos de circunferencia
La Conjetura inicial es una afirmación basada en el hecho de que las circunferencias dados tres puntos (generadas con la herramienta de GeoGebra) coinciden con el lugar geométrico solicitado (lugar geométrico 1). Ya trazadas las circunferencias, GeoGebra genera la ecuación correspondiente pero en función de los valores particulares del radio a (ver figura 4.1).</td></tr>
<tr><td><u>Análisis estructural del Episodio 1 (Tipos de razonamiento)</u></td></tr>
<tr><td>La conjetura inicial C_1 (Primer Resultado o Afirmación) aún se pone en duda y el Dato por encontrar (D_1) es la ecuación generalizada del lugar geométrico. Joel respalda su hipótesis con base en que los coeficientes de x^2 y de y^2 de la ecuación generada son iguales para cualquier valor de a, lo cual es garantía (W_1) de su afirmación (ver figura 4.2). El razonamiento inicial es abducción por descubrimiento ya que él seguramente</td></tr>
</table>

cuerdas de la circunferencia. Son tres puntos, si es una circunferencia dados tres puntos tengo la herramienta […] [*Traza los segmentos BH y HC*] y después podría trazar las mediatrices…

L7. J: Entonces la ecuación del lugar geométrico puede ser la de una circunferencia, aunque nada más sea por este rango por el que pase [*Señala el lugar geométrico 1*] […]

L8. P: Ahora, ¿Qué sucede si mueven el deslizador? ¿Qué pasa con las expresiones? […] Habría que encontrar la ecuación que me determine, estas dos circunferencias, una generalizada.

"recuerda" algún problema (tratado en clase) de circunferencia dados tres puntos y la curva es circunferencia si pasa por *BHC* y si, además, cumple con la prueba (visual) de arrastre llevada a cabo con el deslizador. La garantía y el respaldo pueden considerarse de tipo conceptual pero la estructura de Control, la cual es parte de dicha garantía, contiene una fuerte carga visual como se analizará enseguida. También se presenta un segundo respaldo (B_2) que no se trabaja en un inicio pero se retoma más adelante.

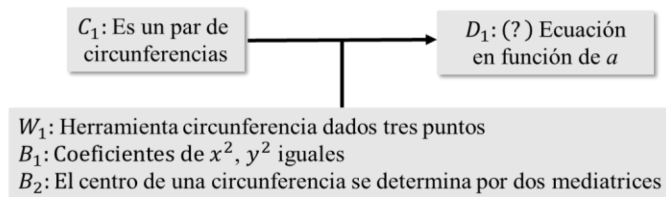
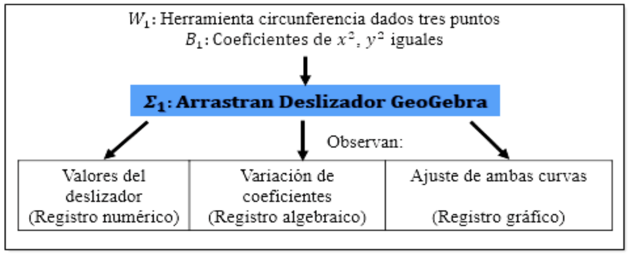
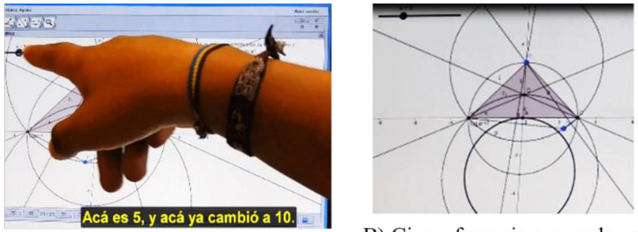


Figura 4.2. Abducción por descubrimiento en la conjetura inicial

Análisis referencial del Episodio 1 (Estructura de control)

Parte fundamental de la Garantía W_1, reafirmada por B_1, es la Estructura de control Σ_1, la cual consiste en el uso del deslizador para llevar a cabo una peculiar prueba de arrastre (ver figura 4.3): Al moverlo, no solo se observa el comportamiento de la curva en la Vista gráfica de GeoGebra, sino también, este comportamiento en relación a cada valor numérico del deslizador, y al mismo tiempo, la relación con los valores numéricos de los coeficientes de la ecuación mostrada en la vista algebraica. La garantía y el respaldo se exhiben explícitamente en los diálogos, no así lo que observan y relacionan, lo cual se presenta de manera implícita y también forma parte de la estructura de control.

	 *Figura 4.3.* Estructura de control de W_1 y B_1
	Análisis de los Procesos Cognitivos con el uso del deslizador. Episodio 1: (Razonamiento ascendente y descendente)
	Como la afirmación inicial parte de la conjetura que el lugar geométrico son dos arcos de circunferencia (hecho observable), el razonamiento es abducción, tal como se analizó anteriormente. Se evoluciona de la observación de la figura (de ambas curvas, la del lugar geométrico 1 y la generada con la herramienta circunferencia dados tres puntos) al supuesto teórico que implica encontrar el dato de la ecuación generalizada de dicho lugar geométrico, esto implica razonamiento de tipo ascendente.
Episodio 2: Conjetura inicial	**Figuras y Análisis de la argumentación. Episodio 2**
L9. A: Una es negativa porque va hacia abajo y la otra es positiva porque está hacia el lado positivo.	 A) Razonamiento inductivo B) Circunferencia generada por $x^2 + y^2 + 2ay = 0$ *Figura 4.4.* Razonamiento y gráfica de la primera expresión obtenida

L10. J: 8, 10, cuando el radio de esta circunferencia es 2 [*Señala la circunferencia inicial c*] lo va a multiplicar para la *y* [*Aumenta el valor del radio a moviendo el deslizador: Lo deja en 4 y dice 8, lo deja en 5 y dice 10*] ¿No sería por *2a*? ¿Por *2ay* no? Para la ecuación de esta [*Señala relacionando con el dedo índice el valor del deslizador con el coeficiente del tercer término de las ecuaciones d y k mostradas en la Figura 1, dadas en su forma general*]

L11. A: ¿Y por qué por 2?

L12. J: Porque ve aquí el radio de *a* es 4, acá el resultado que está dando es 16, igual que la ecuación pequeña [*Señala la circunferencia inicial*], nada más que aquí le está sumando 8 en *y*. Bueno esta es 8*y* que es el doble del radio de *a*. ¿*2a* por *y* no?

L13. A: No espérate

L14. J: Acá es 5 y acá ya cambió a 10, 6, 12. [*Ver Figura 4.4 (A)*]

Durante este lapso, los estudiantes logran obtener la expresión para el tercer término de la ecuación solicitada en función de a (ver figura 4.4(A)). Para los diferentes casos o valores del deslizador se identifican las operaciones llevadas a cabo y se encuentra el valor generalizado del coeficiente del tercer término de la ecuación buscada: $2ay$. Aún falta redefinir la ecuación completa pues al introducir la expresión sugerida en la barra de entrada, se genera una circunferencia concéntrica de radio menor (figura 4.4 (B)).

Análisis estructural del Episodio 2 (Tipos de razonamiento)

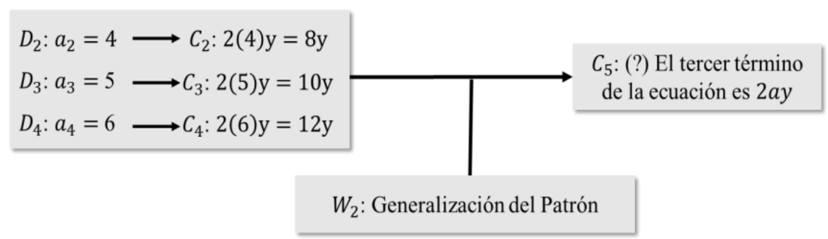


Figura 4.5. Razonamiento inductivo para la afirmación C_5

El razonamiento para este argumento es *inducción* porque a partir de casos particulares se llega a un resultado generalizado (figura 4.5). Los datos de ent
rada son cada uno de los valores del deslizador: 4, 5 y 6, con los cuales Joel se percata de la operación invariante que es el producto de cada uno de estos por $2y$ observando los resultados: $8y, 10y, 12\ y$. Se llega así a la aseveración de que el tercer término de la ecuación del lugar geométrico es $2ay$.

L15 A: Sí, tienes razón [*Introduce la ecuación* $x^2 + y^2 + 2ay = 0$]

L16. J: ¿Qué pasa ahí? […][*Ver Figura 4.4 (B)*].

Análisis referencial del Episodio 2 (Estructura de control)

El Patrón numérico garantiza la generalización del término $2ay$. Es importante resaltar que en este argumento, el uso del deslizador no solamente es parte de la Estructura de control de resultados de la Garantía W_2, sino también, ayuda a generar la afirmación C_5 a manera de hipótesis por medio de inducción.

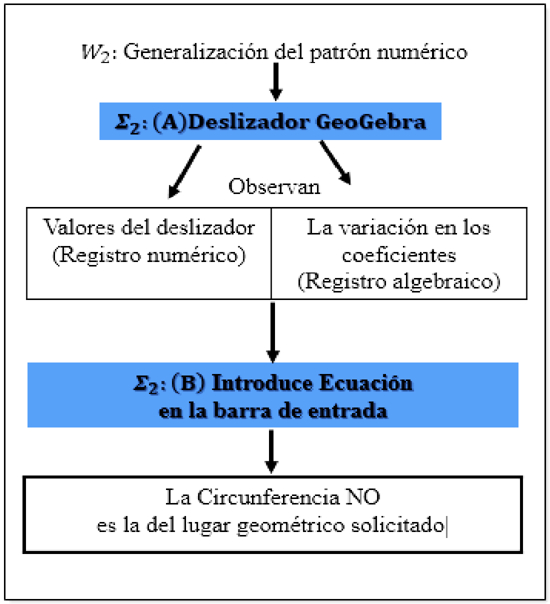
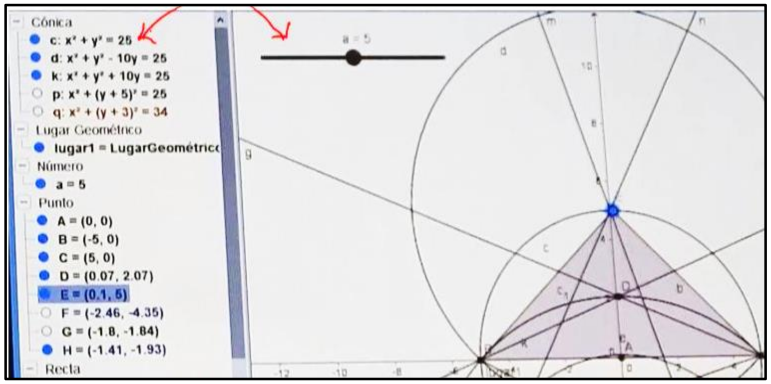


Figura 4.6. Estructura de control de W_2

El uso del deslizador en la Estructura de control entonces cumple una doble función: por un lado, ayuda a generar el patrón numérico (Ver líneas L10-L14 y la figura 4.6 (A)) y por el otro, ayuda al arrastre de la curva, o al menos esa es la intención inicial,

	debido a que se presenta un error en el lado derecho de la ecuación (ver línea L16 y figuras 4.4 (B) y 4.6 (B)).
	Análisis de los Procesos Cognitivos con el uso del deslizador. Episodio 2 (Razonamiento ascendente y descendente)
	Llegados a este punto, es posible hacer una diferencia respecto a lo aportado por Arzarello referente a los procesos cognitivos. Con la herramienta deslizador, tal como se ha mencionado, la prueba de arrastre implica observar los valores numéricos de la herramienta misma pero también, los valores de las expresiones en la Vista algebraica y el comportamiento de la curva. Arzarello considera razonamiento descendente aquel que va del análisis de las figuras a lo conceptual o teórico y razonamiento descendente el que se lleva a cabo de forma inversa: de lo teórico a lo figural. No obstante, el arrastre utilizado en nuestra investigación también implica un tipo de razonamiento que puede considerarse ascendente (Evidenciado en las líneas L10-L14 y en la figura 4.6 (A)) pero que no evoluciona desde lo figural, sino que parte de la observación del cambio en los registros aritméticos (en la herramienta y en los coeficientes de las expresiones) y culmina en un nivel más teórico: la generalización algebraica. En este episodio, los estudiantes también se percatan seguramente del cambio en la gráfica, pero esto no resulta fundamental para definir el término *2ay*. Una vez que Joel encuentra dicho término, Alejandro lo verifica utilizando otro valor del deslizador y, posteriormente, con el resultado generado en la vista gráfica, cuando introducen la ecuación en la barra de entrada. En este momento se presenta razonamiento descendente. La Estructura de

	control permite corregir la expresión algebraica en la siguiente etapa. Ver figura 4.6 (B).
Episodio 3: Conjetura inicial	**Figuras y Análisis de la argumentación. Episodio 3**
	 *Figura 4.7*. Valores del deslizador y del lado derecho de la ecuación en la vista gráfica de GeoGebra
	<u>Análisis estructural del Episodio 3 (Tipos de razonamiento)</u>
	Se puede considerar este razonamiento como *inducción* porque Alejandro relaciona los valores del deslizador y los de la ecuación en la vista algebraica (figura 4.7). El diagrama del análisis se muestra en la Figura 4.8. La afirmación C_6 se enuncia de forma inmediata, pero lo que se generaliza es el dato D_5 que es el cuadrado de cada caso particular. La garantía es el cumplimiento del patrón numérico el cual se presenta de forma implícita.

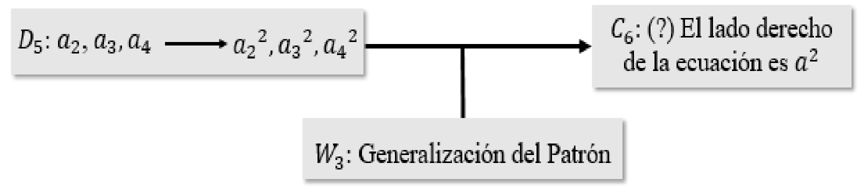


Figura 4.8. Primer momento: Inducción para encontrar el término a^2

Finalmente introduce la ecuación final y lleva a cabo la prueba de arrastre. (figura 4.9 y 4.10). Para el último paso, puede considerarse la existencia de razonamiento deductivo puesto que del dato se infiere la aseveración final contando con la garantía de la prueba de arrastre. Sin embargo, la naturaleza de la garantía no es conceptual (teorema o axioma) y la profesora sugiere reforzarla mediante un respaldo como se verá en las etapas siguientes.

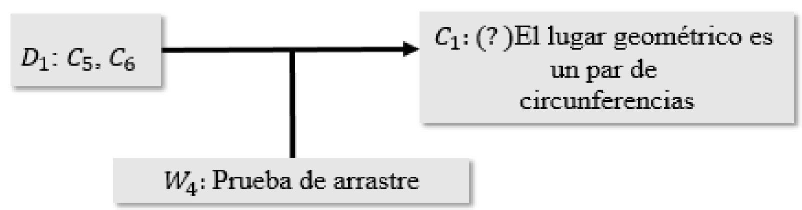


Figura 4.9. Segundo Momento: Deducción no obstante el tipo de garantía

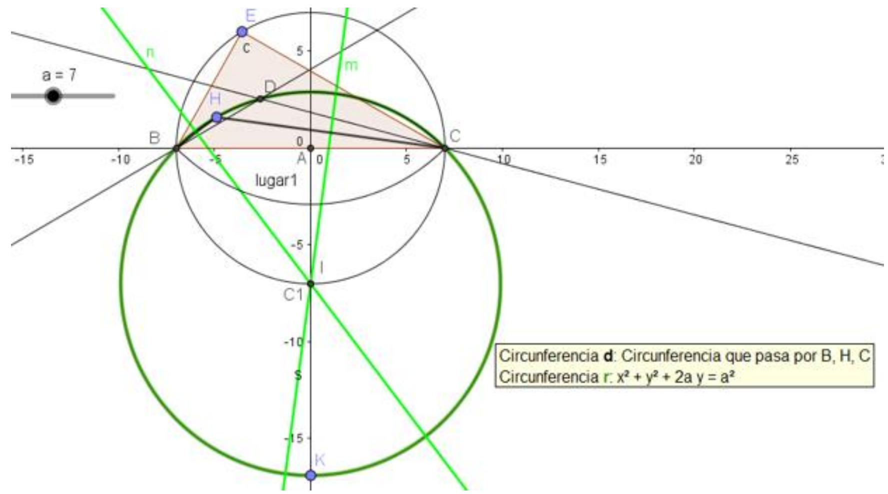


Figura 4.10. Lugar geométrico de $x^2 + y^2 + 2(a)(y) = a^2$ en color verde

Análisis referencial del Episodio 3 (Estructura de control)

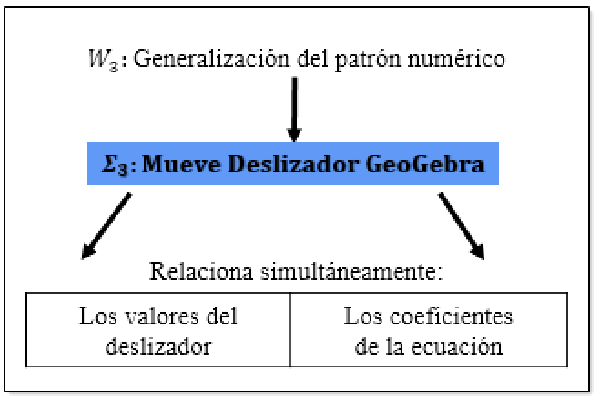


Figura 4.11. Estructura de control de W_3: Primer momento

La estructura de control de la garantía W_3, de forma similar a la de la garantía anterior, está basada en el uso del deslizador para obtener el patrón numérico generalizado, solo que en este caso Alejandro relaciona los valores numéricos tanto del deslizador como de los coeficientes de la ecuación en la vista algebraica simultáneamente, generalizando así los resultados obtenidos de elevar al cuadrado cada valor del deslizador (ver figura 4.11). La posterior prueba visual de arrastre conlleva a afirmar que es el término apropiado para poder establecer la ecuación final (ver figura 4.12).

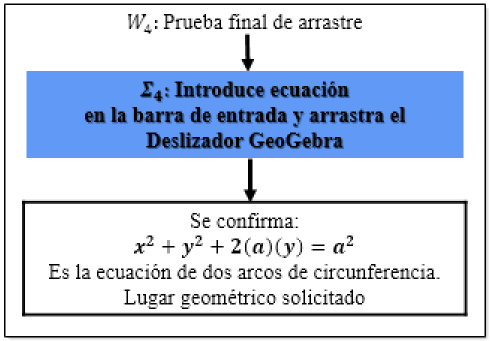
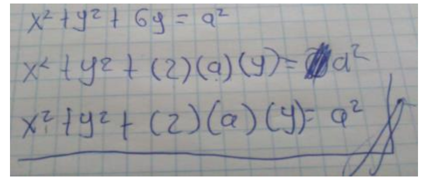


Figura 4.12. Estructura de control de W_4: Segundo Momento

Al introducir $x^2 + y^2 + 2(a)(y) = a^2$ en la barra de entrada aparece esa misma expresión en la vista algebraica y la circunferencia en la vista gráfica coincide con el arco superior del lugar geométrico 1 y con la circunferencia dados tres puntos la cual construyeron al establecer la conjetura inicial (Bloque1) y se mantiene al llevar a cabo la prueba de arrastre con el deslizador para cualquier valor del radio a y también al

	mover el incentro. Este desarrollo fue de los pocos registrados también en lápiz y papel (ver figuras 4.12 y 4.13).  Figura 4.13 Registro escrito de la ecuación final
	<u>Análisis de los Procesos Cognitivos con el uso del deslizador. Episodio 3 (Razonamiento ascendente y descendente)</u>
	Se considera que el razonamiento en el primer momento es ascendente porque se parte de datos numéricos y culmina en el establecimiento de una expresión algebraica tal como se ilustra en la figura 4.11. En el segundo momento, figura 4.12, el razonamiento es descendente porque una vez introducida la ecuación $x^2 + y^2 + 2(a)(y) = a^2$ los estudiantes mueven el deslizador para realizar la prueba de arrastre y observan que ahora la nueva circunferencia sí coincide con el lugar geométrico para cualquier valor de a, es decir, se transita del registro algebraico a la observación del registro figural (visual). Como se ve, este tercer episodio se divide en dos momentos, cada uno con un tipo de razonamiento distinto, para obtener al final la ecuación final requerida.

Una vez que los estudiantes llevaron a cabo la C-prueba, es decir, para este caso, determinaron la ecuación generalizada del lugar geométrico 1 (recorrido del incentro) y confirmaron la conjetura inicial, la profesora solicita dos datos extra que sirvan cono respaldo, es decir, para reafirmar la aseveración: Las coordenadas del centro y la longitud del radio de las circunferencias, ambas en función de a.

Al requerirse las coordenadas del centro, los estudiantes retoman la idea de la intersección de las mediatrices, lo cual corresponde al respaldo B_2 (ver figuras 4.2 y 4.10) y analizan el problema primero mediante abducción y después por inducción como se muestra a continuación en la Tabla 6. Se sugiere nuevamente consultar la figura 4.21 que contiene el esquema para el análisis global y el seguimiento de todo el proceso de prueba de la resolución de Joel y Alejandro, esto para guiarse respecto al orden de los subíndices utilizados en los diagramas del Modelo de Toulmin.

Tabla 6

Análisis de los argumentos de Joel y Alejandro para las garantías faltantes del Problema 1 (Segunda parte)

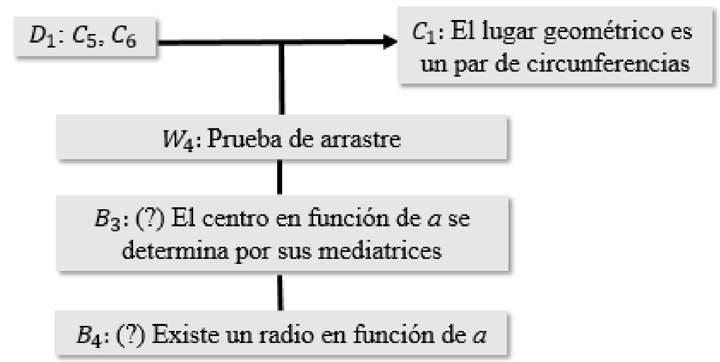
<table>
<tr><th>Episodio 4: Obtención del centro</th><th>Figuras y Análisis de la argumentación. Episodio 4</th></tr>
<tr><td>L21. P: […] ¿Cuáles son las coordenadas de ese centro?
L22. J: [Retoma los trazos de las mediatrices de las cuerdas BH y DC y con la herramienta intersección, de las rectas m y n, ubica el punto I]
L23. J: ¿Pero y si no es constante?
L24. A: ¿Cómo que si no es constante?
L25 J: Bueno, en x siempre va a ser 0 [Mueve el deslizador y observa los valores de la ordenada de I]
L26 J: 4 y el valor de a es 4 […] Pues es el valor de a [señala la distancia del origen de coordenadas al punto I, sobre el eje y]. Es que estoy viendo que el valor de a es la intersección I. Si yo muevo a que está en 4, coincide con la coordenada y del punto I; 5 y se mueve a 5. Entonces el centro de la circunferencia sería $(0, a)$
L28. P: A ver introdúcela</td>
<td>

Figura 4.14. Búsqueda de garantías extras para reafirmar C_1
Las coordenadas del centro y el valor del radio, todo en función de a, constituyen ahora los respaldos solicitados B_3 y B_4 de la conjetura inicial C_1, por lo cual, el diagrama de la Figura 4.9, para el análisis del Episodio 4, queda como se muestra en la Figura 4.14. Se debe resaltar una diferencia importante entre el respaldo B_1 de la conjetura inicial (figura 4.2) y el respaldo B_3 (figura 4.14): En el respaldo B_1 se evidencia que el estudiante sabe, en términos generales, que el centro se puede determinar a través de mediatrices, pero en B_3 ya tiene conciencia que las coordenadas deben estar generalizadas.</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>
L29. A: Pero te va a dar la de arriba; hay que darle (0, -a).
L33. P: […] A ver, muévela…
L34. J: [Mueve el deslizador y observa que el centro introducido coincide con el punto I desplazándose de forma satisfactoria]
L35. A: ¡Ahí está! Ya quedó.
</td>
<td>

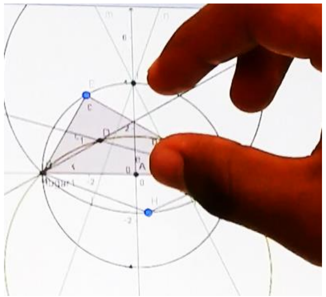



Figura 4.15. Joel se percata que la ordenada coincide con la distancia a

<u>Análisis estructural del Episodio 4 (Tipos de razonamiento)</u>

El análisis del razonamiento para la determinación del centro se puede dividir en dos momentos: El primero cuando Joel se percata que el movimiento del punto I es solamente vertical (L23-L25) y el segundo cuando se da cuenta que la ordenada coincide con el valor del radio a (L26-L35 y figura 4.15). En el primer momento se presenta razonamiento abductivo; abducción como explicación, porque la regla W_5: El centro está dado por la intersección de las mediatrices, se toma como verdadera (ver figura 4.16). En este primer momento la garantía sí es de tipo conceptual y se expresa de manera explícita. La afirmación C_7 es un hecho observable (tal es la naturaleza de gran parte de las afirmaciones en abducción). El dato faltante D_6 es el valor de la ordenada porque Joel se ha percatado que para cualquier posición de I, la abscisa es constante, cero.
</td>
</tr>
</table>

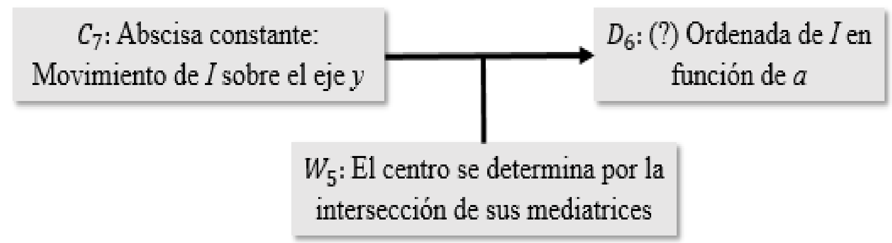


Figura 4.16. Primer momento: Abducción para la conjetura acerca del centro

En el segundo momento, inmediatamente después que Joel se percata que la abscisa es cero, identifica que la ordenada variable coincide con el cambio en los valores de a que es el dato D_7. Concluye entonces que las coordenadas son las de la afirmación C_8 es decir la garantía B_3 buscada. El razonamiento transita desde los casos particulares a la afirmación que los generaliza, o sea es *inducción* (ver figura 4.17).

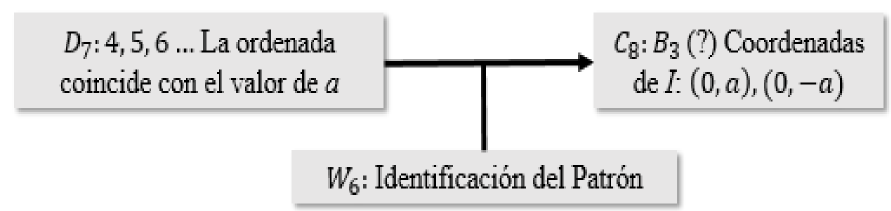


Figura 4.17. Segundo momento: o inductivo para obtener coordenadas de I

	Análisis referencial del Episodio 4 (Estructura de control)

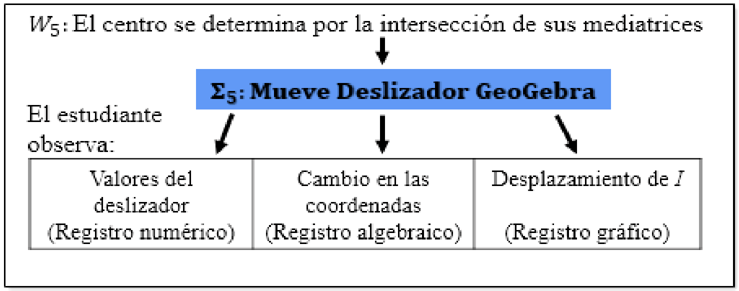


Figura 4.18. Estructura de control de la garantía W_5: Primer momento

La figura 4.18 muestra la Estructura de control de la garantía W_5 del primer momento en la obtención de las coordenadas de I (razonamiento abductivo), la cual consiste en el uso del deslizador para observar los valores de este y el cambio en las coordenadas de la intersección I así como visualizar su desplazamiento vertical. Finalmente, en la figura 4.19 se observa la estructura de control del segundo momento, el de la inducción, en la cual se recurre primeramente al deslizador como medio para encontrar el patrón numérico y la relación que guarda con el cambio de distancia a mostrada en la vista gráfica de GeoGebra $\Sigma_6(A)$ y posteriormente se utiliza esta misma herramienta para llevar a cabo la prueba de arrastre junto con la barra de entrada del programa $\Sigma_6(B)$.

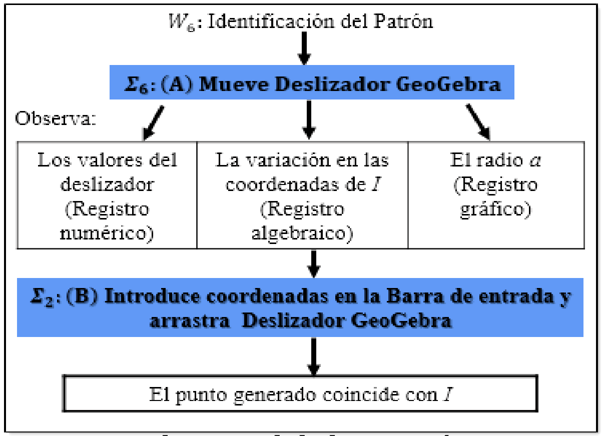


Figura 4.19. Estructura de control de la garantía W_6: Segundo momento

Análisis de los Procesos Cognitivos con el uso del deslizador. Episodio 4 (Razonamiento ascendente y descendente)

En el primer momento, el razonamiento fue abductivo; se partió de un hecho observable: La generación del punto *I* (por medio de la herramienta intersección) y la observación de su desplazamiento en la Vista gráfica. Joel se percatan que el desplazamiento horizontal de *I* siempre es cero y que sólo se mueve verticalmente, al tiempo que pone atención en el registro algebraico (en la Vista algebraica) y en el numérico (en los valores del deslizador). Hasta ahí el razonamiento es ascendente. Posteriormente, a través de inducción, se concluye en el establecimiento de las coordenadas generalizadas del centro buscado. En este segundo momento, se parte de registro numérico y se concluye en el algebraico, por lo tanto, el razonamiento también es ascendente a pesar de

	que, como sucede en la inducción con el uso del deslizador, esta caracterización no se apega a lo establecido por Arzarello pues no se parte del registro figural. Por último, durante la prueba de arrastre el razonamiento es descendente porque se introduce la expresión algebraica y se valida visualmente.

Finalmente, solo se comenta que Joel y Alejandro, intentaron encontrar una expresión para el radio, pero no les fue posible encontrarla. Se muestra el registro escrito de su intento en la figura 4.20.

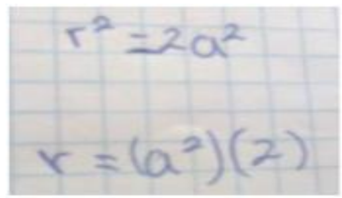


Figura 4.20. Intento para encontrar una expresión generalizada del radio

En la figura 4.21 se muestra un esquema global que ilustra el análisis del proceso de resolución: Se parte del Modelo de Toulmin del episodio 1 en el cual se presenta razonamiento abductivo y el dato a buscar (D_1) es la ecuación del par de circunferencias de la conjetura inicial (C_1). Una vez aceptada la necesidad de encontrar la ecuación generalizada, se presentan los episodios 2 y 3. En el episodio 2 hubo inducción y en el 3 inducción y deducción. Al utilizar los resultados de ambos episodios como datos para obtener la ecuación solicitada, se obtiene en el episodio 4 el Dato faltante (D_1) de la abducción inicial, completando con ello la C-prueba. No obstante, la profesora solicita reforzar la aseveración inicial C_1 y los estudiantes buscan entonces generalizar las garantías B_3 y B_4, de las cuales solamente alcanzan a completar la primera de ellas.

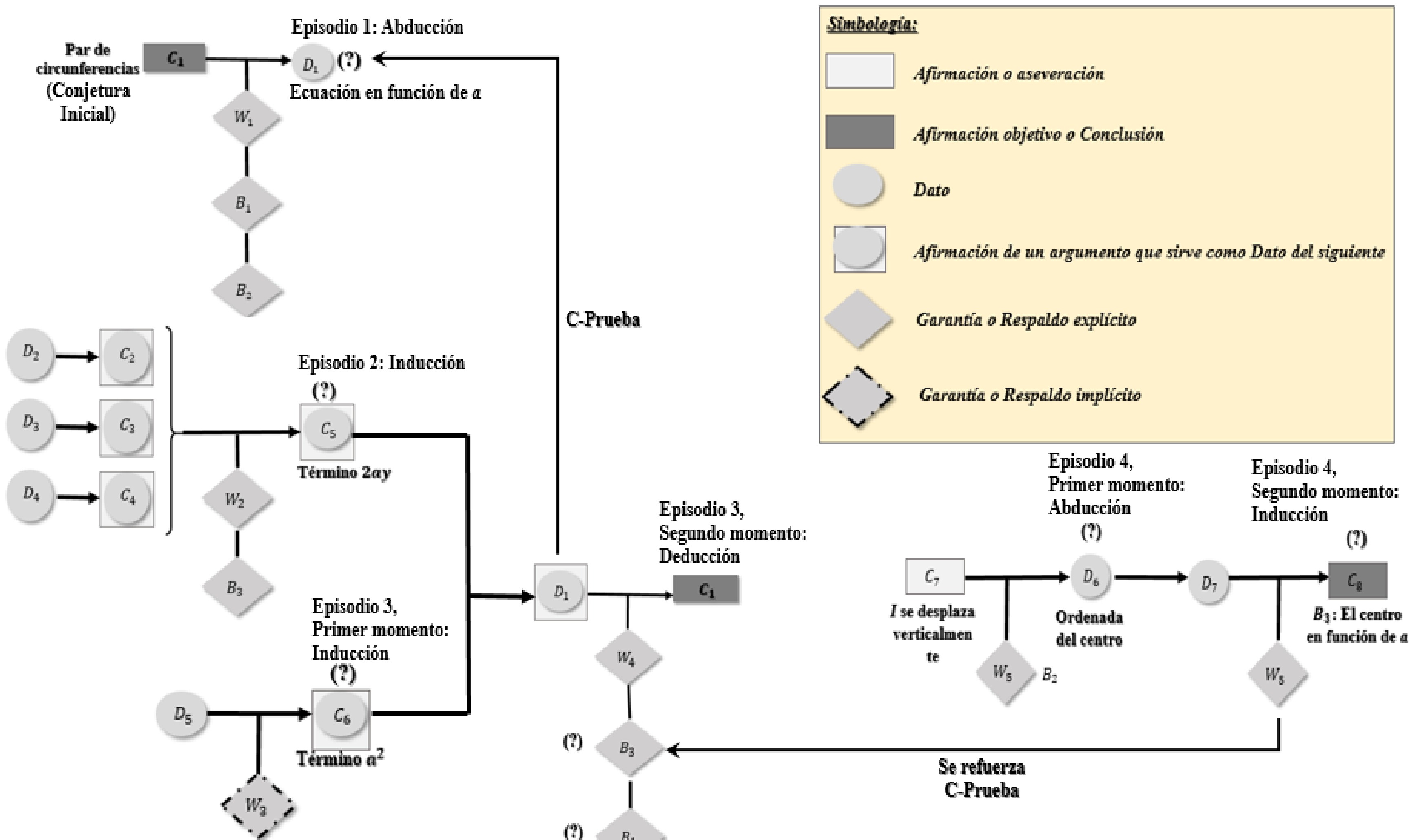


Figura 4.21. Resolución del Problema 1 de Joel y Alejandro: Esquema para el análisis global

A continuación, se presenta el caso de Martín (M) y Ricardo (R). Se expone únicamente un fragmento del proceso de resolución del mismo Problema 1; sólo la etapa donde encuentran el valor generalizado tanto del centro como del radio ya que en esa parte de su resolución hacen uso del Teorema de Pitágoras, lo cual no es algo común en las resoluciones del resto de participantes. Es importante aclarar que en la última sesión Ricardo se ausentó y por esta razón al final del episodio 2, aparecen las explicaciones o diálogos sólo con Martín y la Profesora (P). El análisis del fragmento de la argumentación de Martín y Ricardo se divide solo en dos episodios (ver tabla 7).

Tabla 7

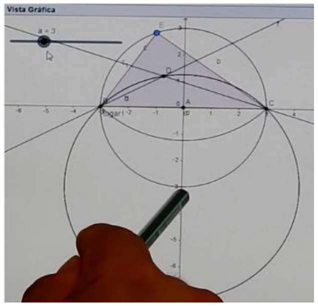
Resumen de los episodios de la argumentación de Martín.y Ricardo. Problema 1

Episodios	**Líneas**
1. Obtención de las coordenadas generalizadas del centro	L1-L14
2. Obtención de la longitud del radio en función de *a*	L15-L35

Los diálogos de los episodios anteriores se muestran en la columna izquierda de la tabla 8. El análisis estructural, el referencial (es decir, de la estructura de control específicamente) y del sentido de los procesos cognitivos se encuentra en la columna del lado derecho, del mismo modo que en el caso anterior.

Tabla 8

Análisis de los argumentos de Martín y Ricardo para la resolución del Problema 1 (Fragmento Final)

Episodio 1: Obtención de las coordenadas generalizadas del centro	**Figuras y Análisis de la argumentación. Episodio 1**
L1 P: ¿Cuál sería el valor del radio de tu circunferencia nueva? ¿Porqué? Porque ya encontraron la ecuación, pero ¿Qué datos te da la ecuación? L2 R: El radio L3 M: Y el centro. Como x no tiene término [*Se refiere al término* x^2] sabemos que en el eje x sería cero [*el desplazamiento*] y en y sería 3, entonces esta intersección sería el centro [*En ese momento el deslizador se encuentra en* $a = 3$]. A ver, apunta esta ecuación ordinaria y de ahí sale el centro y el radio [*Señala* $x^2 + (y+3)^2 = 18$]. Entonces el centro tiene coordenadas $(0, -3)$. ¿Están invertidos los signos verdad? (…). [*Se refiere a los signos de h y k en la fórmula de la ecuación ordinaria de la circunferencia manejada en clase:* $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$] Bueno, entonces sí cambiaría porque aquí sería $-k$ y ya sacando el término sería -3.	 *Figura 4.22.* Martín señala la intersección del lugar geométrico con el eje de las ordenadas La obtención de las coordenadas del centro comienza con el análisis del caso particular $a = 3$ (radio de la circunferencia inicial con centro en *A*). Conociendo la forma de la ecuación de la circunferencia con centro fuera del origen: $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$, se obtiene el centro $(0, -3)$ así como el dato del radio al cuadrado igual a 18, este es el primer momento del primer episodio (L1-L5). La profesora hace la observación de que se trata de un caso particular y posteriormente intentan generalizar estos datos, este es el segundo momento del primer episodio (L6-L14) que concluye con la determinación del punto *F* (ver figura 4.23).

L4 R: ¿Y el radio?

L5 M: El radio al cuadrado es igual a 18.

L6 P: Ese sería el centro y el radio para $a = 3$

L7 R: […] Ah! Entonces sería $(0, h)$ no, $(0, k)$

L8 M: Pero ¿Qué es a para esta circunferencia? [*Señala nuevamente la circunferencia dados tres puntos*] (…) Aaah! Sí, sí sí sí mira [*Mueve el deslizador:* $a = 3$, $a = 4$, $a = 5$ *y señala el desplazamiento vertical del centro*]

L9 R: Hay que ponerle $(0, a)$

L10 P: […] ¿Cómo podrían verificar que ese es el centro?

L11 M: Con la intersección

L12 P: ¿Cuál intersección?

L13 M: Bueno, yo digo que con la intersección de la circunferencia pequeña con el eje y. Ese vendría siendo el centro

L14 R: [*Emplea la herramienta intersección, da click en la circunferencia inicial y en el eje* y, *generando así el punto F*]

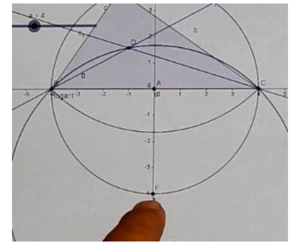


Figura 4.23. Generan punto *F* con la herramienta intersección (L13)

Análisis estructural del Episodio 1 (Tipos de razonamiento)

En el primer momento, el razonamiento llevado a cabo tiene las características de ser deductivo (ver figura 4.24), pues se comienza con el dato particular D_1 que es el punto $(0, -3)$ la garantía W_1 es teórica puesto que es la forma de la ecuación ordinaria de la circunferencia con centro fuera del origen de coordenadas y la conclusión C_1, valor de los parámetros h y k para ese caso particular, es la conclusión del argumento. Sin embargo, la profesora hace hincapié en que se requiere el centro generalizado, es decir, para cualquier valor de a. El siguiente momento de la búsqueda del centro es cuando se intenta dar estas coordenadas (ver figura 4.25).

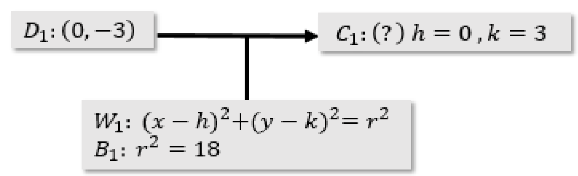


Figura 4.24. Primer momento: Deducción en un caso particular del centro

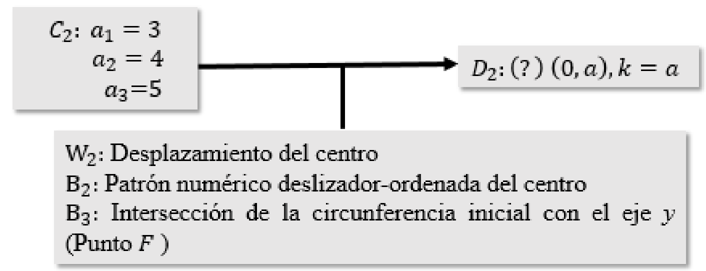


Figura 4.25. Segundo momento: Abducción para obtener $(0, a)$

En este segundo momento, los estudiantes recurren al uso del deslizador y logran darse cuenta que el desplazamiento del nuevo centro es vertical y su distancia con el origen de coordenadas coincide con el valor de *a*. Como centran su atención en la vista gráfica, el razonamiento parte de un hecho observable, por lo cual se considera abducción. El patrón numérico corresponde a un respaldo (B_2), al igual que la acción de marcar la intersección *F*, pues ambos elementos sirven para dar mayor validez a su afirmación. Este argumento, en el cual pareciera haber detrás razonamiento inductivo, es abducción por descubrimiento, pues como se explicó en la sección 1.2.14, este razonamiento suele presentarse en combinación con inducción; pero el elemento principal que los lleva a afirmar las coordenadas generales del centro, es un desplazamiento observado en la vista gráfica.

Análisis referencial del Episodio 1 (Estructura de control)

En la figura 4.24, puede observarse que la garantía inicial es la forma de la ecuación de la circunferencia con centro fuera del origen: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$. Los estudiantes determinan las coordenadas del centro para el caso particular $a=3$ observando los valores correspondientes en la Vista algebraica de GeoGebra en la cual leen: $x^2+(y+3)^2=18$. La observación de los valores correspondientes de h, k y r^2 en la Vista algebraica es la estructura de control para este argumento (Figura 4.26) pues les lleva a decidir que el centro es $(0,-3)$. En un segundo momento, el del razonamiento mostrado en la figura 4.25, la estructura de control se compone del uso del deslizador (con el cual mueven el punto que creen es el centro del lugar geométrico del punto D) y del uso de la herramienta de GeoGebra punto de intersección, tal como se muestra en la figura 4.27. Esta estructura de control forma parte de la garantía de un razonamiento abductivo pues son estos los medios que permiten desplazar el centro y afirmar cuáles son las coordenadas generalizadas del centro.

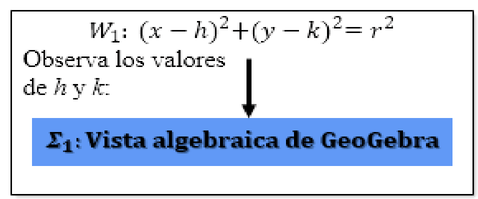


Figura 4.26. Estructura de control de W_1: Primer momento

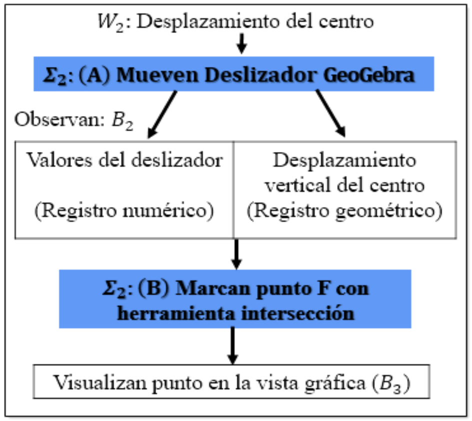


Figura 4.27. Estructura de control de W_2: Segundo momento

<u>Análisis de los Procesos Cognitivos con el uso del deslizador Episodio 1 (Razonamiento ascendente y descendente)</u>

En el primer momento de este episodio consideramos que no puede hablarse de razonamiento ascendente o descendente puesto que se trabaja todo el tiempo en el registro numérico. En el segundo momento, de L6 a L9 el razonamiento es ascendente porque va del registro numérico (cuando observan los valores del deslizador) a la generalización algebraica de las coordenadas, en la cual la abstracción es de un nivel ligeramente mayor.

Posteriormente, de L10 a L14, el razonamiento es descendente ya que pasan del registro algebraico al geométrico cuando marcan la intersección F y validan dicha generalización.

Episodio 2: Obtención del radio en función de *a*	**Figuras y Análisis de la argumentación. Episodio 2**

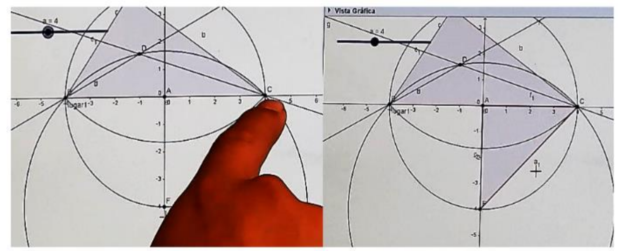
L15 P: […] Lo que pasa es que necesitas el valor del radio movible

L16 M: ¡Ah, mira! Viene siendo a, si ahorita hacemos una circunferencia, o sea ¿Sí estás de acuerdo que este es el centro no? De esta [*Se refiere al lugar geométrico solicitado*], moviendo a para donde sea, porque mira, si cambiamos se sigue respetando el centro [*Mueve el deslizador*: : $a = 4, a = 3, a = 2$ *y regresa* : $a = 3, a = 4$], sabemos cuanto vale a no? Que va de aquí a aquí, que sería el radio de esta circunferencia [*Señala la circunferencia inicial*] y a igual es el mismo punto de acá [*Sic. Señala la distancia de* : $(0,0)$ a $(3,0)$].

L17 R: No

L18 M: (…) Sí. La distancia de A a C es la misma que de A a F, esa sigue siendo a, en este caso es 4, 4 para acá y 4 para acá [*Han movido el deslizador en* $a = 4$]. Entonces si cerramos esto se forma un triángulo [*Señala con su mano sobre la pantalla el segmento FC. Figura*

En la figura 4.28 se muestran dos escenas importantes del Episodio 2: La primer en la cual Martín se percata que el radio solicitado es en realidad la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos iguales (figura 4.28 (a)) y la segunda, en el cual traza dicho polígono y establece que puede obtener su valor empleando el Teorema de Pitágoras (figura 4.28 (b)). A continuación, los análisis correspondientes para este episodio.



(a) Martín señala la distancia $\overline{FC}$ (b) Traza el triángulo AFC

Figura 4.28. Obtención del radio (Episodio 2)

<u>Análisis estructural del Episodio 2 (Tipos de razonamiento)</u>

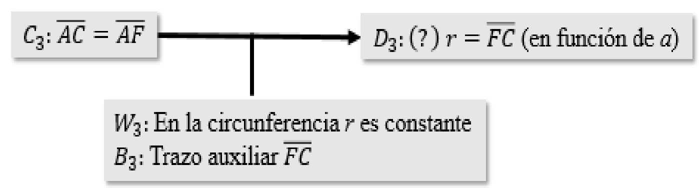


Figura 4.29. Primer momento: Abducción para obtener $r = \overline{FC}$

En la figura 4.29, se muestra el modelo de Toulmin para el primer momento de esta argumentación. De L15 a L18 en el diálogo, Martín se

4.27(a)] y la hipotenusa de ese triángulo viene siendo el radio del lugar geométrico que traza *D* […].

L19 M: Mira, si hago un polígono [*Da click en la herramienta polígono*] y uso *A, F* y *C*, ya sabemos que estos son catetos iguales [*Señala con el indicador del mouse AF y AC*] y a_1 es el radio de la circunferencia [*Figura 4.27(b)*].

L20 P: [*A partir de aquí comienza el diálogo solo entre Martín y la Profesora* […] ¿Cómo podrías obtener una expresión igual, generalizada para el radio?

L21 M: […] Bueno, yo lo haría con el teorema [*Menciona y anota:* $c^2 = a^2 + b^2$] en este caso son lo mismo ¿No? Es la constante a, entonces quedaría como [*Menciona y anota* $c^2 = 2a^2$].

L22 P: ¡Aah! Ya.

L23 M: ¿Sí? Porque en este caso siempre van a ser constantes pues siempre van a ser *a* [*Señala ambos catetos del triángulo rectángulo*]

L24 P: ¡Ah! Ya el radio de la circunferencia [*La inicial*] que viene a ser tu cateto ¡Ajá!

percata que las distancias $\overline{AC}$ y $\overline{AF}$ son iguales y que su medida corresponde al valor de *a* (radio inicial constante). Si bien mueven el deslizador, el énfasis lo ponen en la figura y como parten de un hecho geométrico observable (Afirmación C_3), se considera razonamiento abductivo. La garantía (W_3) sigue siendo de naturaleza perceptiva porque el descubrimiento se hace sobre la figura y lo mismo ocurre con el respaldo (B_3), sin embargo, resulta ser muy importante dicho respaldo porque el trazo auxiliar $\overline{FC}$ es lo que lleva a afirmar que $r = \overline{FC}$, dato faltante (D_3) para este argumento, y también motiva el trazo del polígono AFC del siguiente.

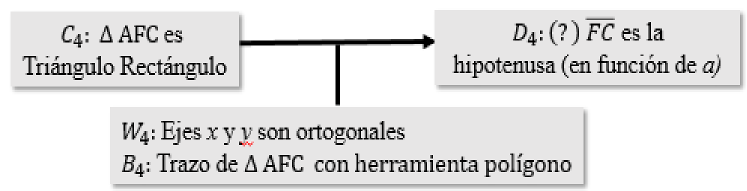


Figura 4.30. Segundo momento: Abducción para obtener $\overline{FC}$

En el modelo de Toulmin mostrado en la figura 4.30, se presenta el análisis del razonamiento que llevan a cabo para afirmar que $\overline{FC}$ es la hipotenusa del triángulo rectángulo AFC. En L18, Martín lleva a cabo mentalmente, el trazo de $\overline{FC}$, es decir, "cierra" la figura. Posteriormente, en L19, traza el polígono *AFC* y algo importante: Afirman que se trata de un triángulo rectángulo (C_4) porque implícitamente asumen que los ejes del plano cartesiano son ortogonales. Aquí se tiene una garantía implícita (W_4) y dicho trazo (B_4) es

L25 M: Sí y son iguales. Y ya esta expresión la metería en la fórmula ¿No? Como sustituyendo radio al cuadrado

L26 P: Eso sería para la ecuación de la circunferencia, pero esa ya la tenían

L27 M: Sí, solo que esa también sería la forma generalizada

L28 P: ¿Cómo te quedaría el radio?

L29 M: Dos veces *a* al cuadrado

L30 P: Esa sería tu…

L31 M: ¡Ah! Pero ese sería el radio al cuadrado […]. Sería que esta pasara, bueno, despejar, para que quedara c sola, c vendría siendo el radio, bueno sí, vendría siendo así [*Expresa y anota* $c = \sqrt{2a^2}$]

L32 P: Ajá (…) ¿Hay alguna forma de verificar esa expresión, usando el software?

L33 M: Bueno, una simple sería con la de centro-radio y dándole ese radio ¿No?

L34 P: ¡Ándale!

L35 M: [*Enseguida elige la herramienta de circunferencia dado un centro y su radio. Va*

un respaldo también de tipo perceptivo. Una vez asumido el hecho de que el radio corresponde a una hipotenusa, enseguida, Martín emplea la fórmula del Teorema de Pitágoras (ver dato (D_5) en figura 4.31 (a) correspondiente a las líneas L20-L21). En la garantía se tiene el conocimiento de este Teorema (W_5), pero también, se tiene como respaldo B_5, el cual, anteriormente fue parte de la garantía empleada para la afirmación C_3: Es decir que el radio es constante (ver figura 4.31 (b)). El razonamiento (que comienza a partir de un dato y tiene una garantía teórica) se considera deducción. La conclusión (C_5) es el hecho de que el radio al cuadrado es igual a dos veces el cuadrado de a.

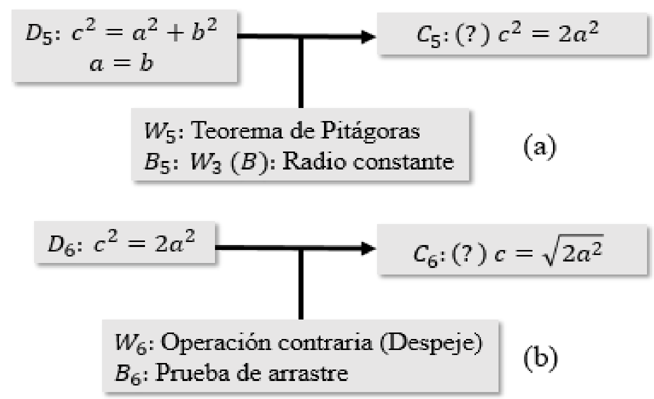


Figura 4.31. Tercer momento: Deducción en operaciones algebraicas

Finalmente, por medio de una operación algebraica se obtiene el radio solicitado: $\sqrt{2a^2}$ (ver líneas L28-L35). Tal como afirma Pedemonte, el álgebra conlleva razonamiento deductivo, en este caso, porque la garantía es

<table>
<tr>
<td rowspan="3">mencionando los pasos y ejecutando. Posteriormente coloca el cursor sobre la expresión de la nueva circunferencia que aparece en la vista algebraica y aparece una etiqueta: Circunferencia h: Circunferencia con centro F y radio sqrt (2a^2)] (…) Y si cambiamos a, se va a cambiar también [Lleva a cabo la prueba de arrastre usando el deslizador].</td>
<td>un conocimiento teórico operativo acerca de las operaciones contrarias. La prueba de arrastre es solo un respaldo, pero, aquí se presenta otra diferencia con respecto a la estructura de control usada anteriormente para validar resultados, esta diferencia se explicará enseguida en el análisis referencial.</td>
</tr>
<tr>
<td><u>Análisis referencial del Episodio 2 (Estructura de control)</u></td>
</tr>
<tr>
<td>Al inicio, en el primer momento del segundo episodio (ver figura 4.29), el análisis comienza cuando descubren que $\overline{AF} = \overline{AC}$, estos segmentos son de igual medida porque ambos son posiciones distintas de un mismo radio (el de la circunferencia solicitada), lo cual corresponde a la garantía W_3 . La estructura de control la constituyen en este momento el uso del deslizador y el de la barra de entrada. En el primer caso, figura 4.32 (A), el deslizador sirve para darse cuenta cómo se desplaza el punto F (centro) y como aumenta o disminuye el valor de a, no solo en el deslizador, sino sobre la gráfica, es importante percatarse que la naturaleza visual del descubrimiento permite asegurar que el deslizador ayuda a promover, en este caso, razonamiento abductivo, y no inductivo, como en la mayoría de los argumentos anteriores. En seguida, al estacionar el deslizador en $a = 4$, figura 4.32 (B) es señalada sobre la vista gráfica la congruencia de los segmentos y se lleva a cabo imaginariamente el trazo auxiliar FC.</td>
</tr>
</table>

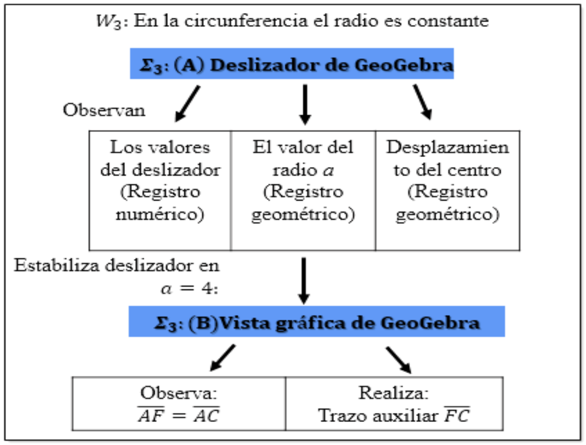


Figura 4.32. Estructura de control de W_3: Primer momento

En un segundo momento, el del argumento de la Figura 4.30, la garantía implícita W_4 es que los ejes del plano cartesiano son ortogonales. La estructura de control de dicha garantía, es el uso de la Vista gráfica de GeoGebra (ver figura 4.34). Sobre dicha vista gráfica, se observa y se traza el triángulo rectángulo *AFC*.

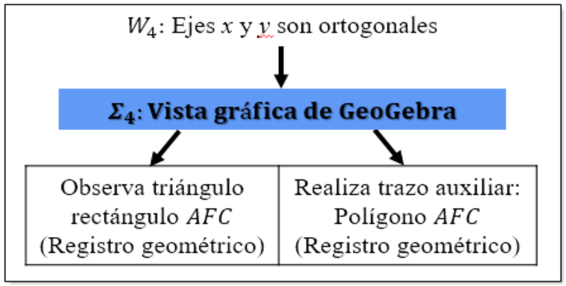


Figura 4.33. Estructura de control de W_4: Segundo momento

	Una vez identificado el triángulo rectángulo y el hecho de que el radio es la hipotenusa, se procede a realizar los cálculos algebraicos. De acuerdo con las Figuras 4.34 y 4.35 este es el tercer momento. En la figura 4.34, la garantía W_5 es el conocimiento del Teorema de Pitágoras, aquí se recuerda este teorema y se retoma la estructura de control Σ_3 que es la observación sobre la vista gráfica de $\overline{AF} = \overline{AC}$, los cuales equivalen al radio a. Esto permite llegar a la igualdad: $c^2 = 2a^2$. En la figura 4.35, se muestra la garantía W_6, que es el conocimiento de las operaciones contrarias en álgebra. La estructura de control Σ_6 en su primera parte es de tipo algebraico, en concreto es la operación contraria a la potenciación y en una segunda parte, consiste, en la aplicación de la herramienta circunferencia centro radio, dando click en el punto F y en el valor del radio el valor del despeje: $\sqrt{2a^2}$. Es importante resaltar la diferencia en la estructura de control final con respecto a la del caso de Joel y Alejandro, en este último, ellos introducen la ecuación del lugar geométrico y después utilizan el deslizador para arrastrar la curva, en cambio, Martín insiste en emplear la herramienta circunferencia centro-radio, lo cual permite validar la expresión algebraica del radio, no así la del centro. Él ya no alcanza a sustituir ambas expresiones algebraicas en la ecuación con forma: $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$, con lo cual hubiese validado ambas, pero es claro que lo tenía presente. Ver L25 del episodio 2 del diálogo.

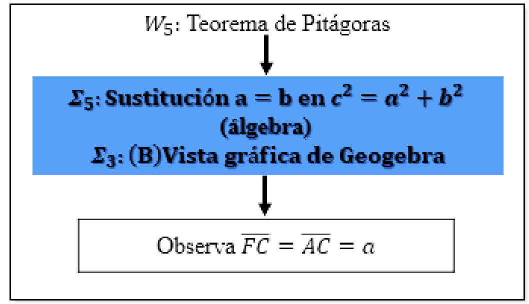


Figura 4.34. Estructura de control de W_5: Tercer momento (a)

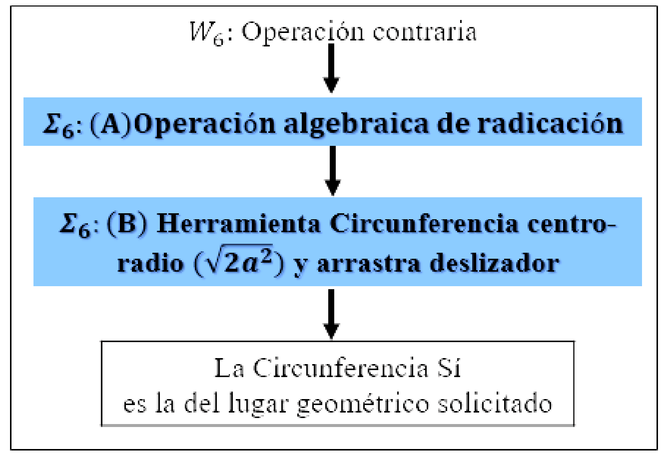


Figura 4.35. Estructura de control de W_6: Tercer momento (b)

<u>Análisis de los Procesos Cognitivos con el uso del deslizador Episodio 2 (Razonamiento ascendente y descendente)</u>

Para analizar los procesos cognitivos de este segundo episodio, podemos comenzar con lo sucedido en las líneas L15 a L19, para este lapso, el

	razonamiento es ascendente pues en ambos se presenta abducción y esta parte de observaciones hechas sobre la vista gráfica de GeoGebra hasta llegar al establecimiento de una expresión algebraica para el radio del lugar geométrico solicitado, mediante el Teorema de Pitágoras. De las líneas L20 a L35, donde existe deducción hasta culminar con la prueba de arrastre, el razonamiento es descendente porque va en sentido inverso.

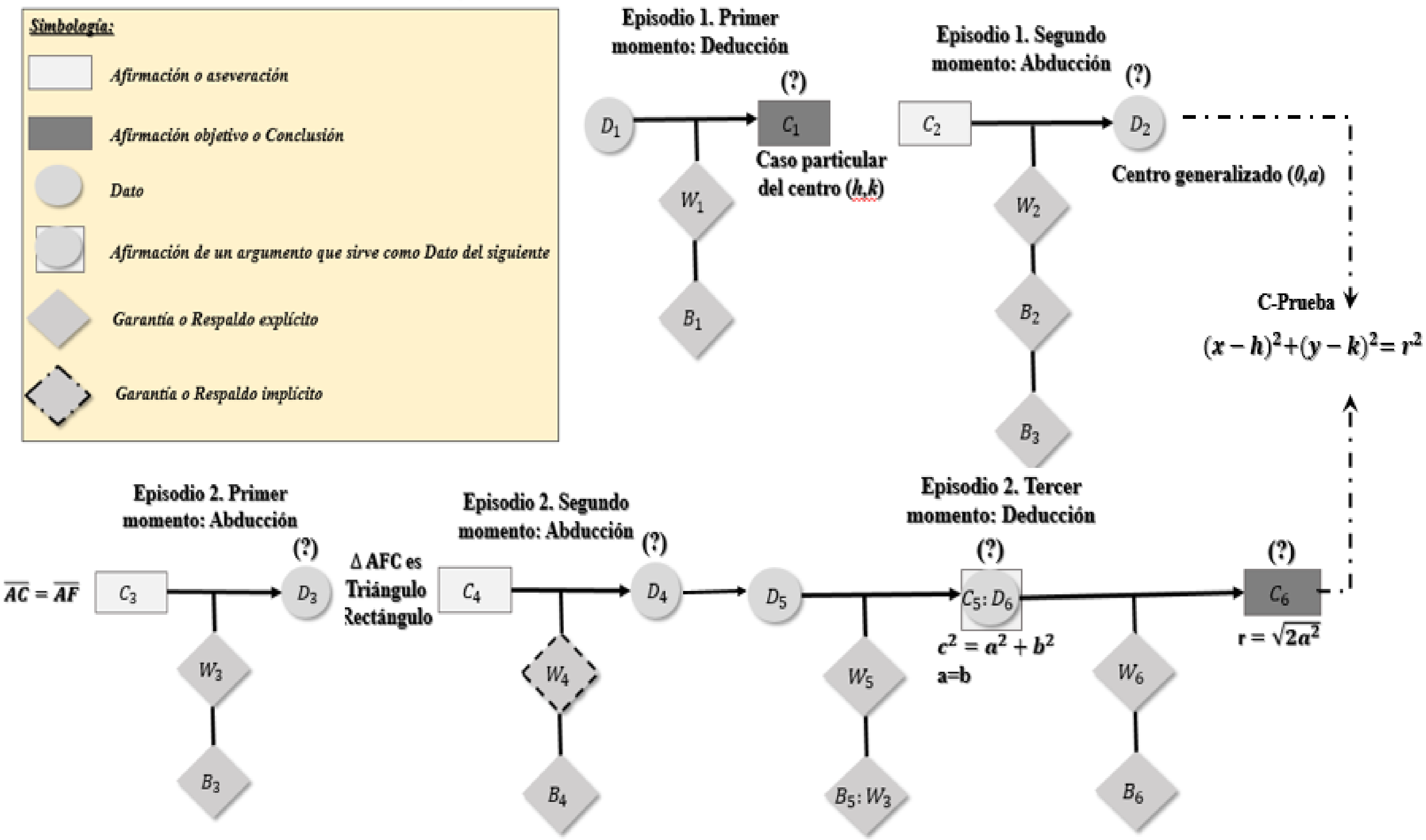


Figura 4.36. Fragmento de la resolución del Problema 1 de Martín y Ricardo: Esquema para el análisis global

En la figura 4.36 se muestra el esquema global que ilustra el fragmento del análisis de la resolución de Martín y Ricardo: Como se retomó únicamente el fragmento relativo a encontrar el centro y el radio del lugar geométrico par de circunferencias, partimos del Modelo de Toulmin del primer momento del episodio 1 donde encuentran el centro para el caso particular $a = 3$, no obstante, consideramos que el proceso de generalización comienza en el segundo momento de este mismo episodio en el cual, por medio de abducción se encuentra el dato D_2 que es el centro $(0, a)$. Posteriormente, en el primer y segundo momentos del segundo episodio, se percatan, también por abducción en ambos, que el radio solicitado es en realidad la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Y es en este mismo episodio, en un tercer momento, que aplicando el Teorema de Pitágoras y sabiendo que los catetos son de igual medida, se encuentra la hipotenusa o radio solicitado en función de a. El respaldo B_3 (Prueba de arrastre) permite validar este último resultado. A pesar de que Martin ya no lo llevó a cabo, mostró intención de sustituir ambos resultados en la ecuación: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, debido a esto, se marca con flechas de línea interrumpida la culminación del proceso. Con ello, se hubiese culminado la C-Prueba pues se habría obtenido nuevamente el resultado: $x^2 + y^2 + 2ay = a^2$.

A diferencia del caso de Joel y Alejandro, este último equipo mostró indicios de razonamiento deductivo en varias ocasiones porque su procedimiento de resolución se basó en el conocimiento de la ecuación de la circunferencia con centro fuera del origen de coordenadas: $x^2 + y^2 + 2(a)(y) = a^2$ y en operaciones algebraicas sustituyendo los datos encontrados con ayuda de GeoGebra en el Teorema de Pitágoras. Por otro lado, es importante señalar que además de estas diferencias en el tipo de razonamiento, la estructura de control utilizada también mostró cierta diferencia pues utilizaron de manera importante lo observado en la vista gráfica del software GeoGebra, así como el recurso de un trazo auxiliar, lo cual fue clave para dar una resolución basada en el análisis geométrico pero que culminó con cálculos algebraicos. En este sentido, el deslizador ayudó a generar sobre todo razonamiento abductivo y no inductivo como en los otros casos. Esta herramienta, junto con el uso de los recursos de la vista gráfica, sirvieron para la labor de descubrimiento, la cual, culminó con expresiones algebraicas que ya no fueron sustituidas para dar un nuevo respaldo a la ecuación del lugar geométrico solicitado.

En seguida se expone el caso de Adriana (A) y Ulises (U). Ellos resolvieron el Problema 2 el cual fue explicado en la Metodología, Capítulo 3 (ver figura 3.11). En la tabla 9 se muestran los episodios en los cuales fue dividido el análisis de su proceso de resolución.

Tabla 9

Resumen de los episodios de la argumentación de Adriana y Ulises. Problema 2

Episodios	**Líneas**
1. Posición del punto A para generar el triángulo equilátero	L1-L12
2. Obtención de la ordenada del punto A	L13-L17
3. Obtención de la abscisa del punto A y establecimiento de sus coordenadas	L18-L31
4. Obtención del área del triángulo equilátero	L32-L33

A continuación, en la tabla 10 se muestran los argumentos sostenidos durante el proceso de resolución. Al igual que en los casos anteriores, en la columna izquierda se encuentran los diálogos y en la columna derecha los tres diferentes tipos de análisis para cada episodio. También para este caso, el deslizador está configurado con valores enteros. Para comenzar, los estudiantes colocan en la pantalla el archivo en Word con la redacción del problema y abren la construcción en GeoGebra. Mueven el deslizador y arrastran el punto A. Después leen el enunciado.

Tabla 10

Análisis de los argumentos de Adriana y Ulises para la resolución del Problema 2

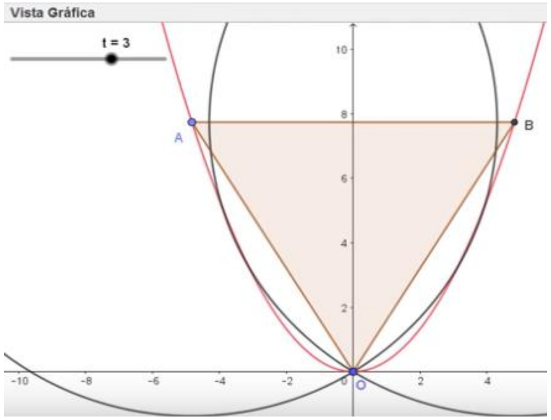
<table>
<tr>
<th>Episodio 1: Posición del punto A para generar el triángulo equilátero</th>
<th>Figuras y Análisis de la argumentación. Episodio 1</th>
</tr>
<tr>
<td>
L1 U: No da el equilátero [Observan en la vista algebraica de GeoGebra la medida de los segmentos a, b, o, que corresponden a los lados del triángulo]
L2 P: […] Piensen ¿Cómo pueden asegurar que los lados sean iguales?
L3 U: Sería centro en A (…) [Elige la herramienta circunferencia centro punto. Da click en A y en O, después en B y en O]. ¡Ah no!, no coinciden [Se refiere a que las circunferencias recién generadas no coinciden con la parábola en los puntos A y B. Ver Figura 4.37. Después arrastra el punto A hasta que visualmente ambas circunferencias pasan por los puntos A y B. Ver Figura 4.38. Posteriormente, observa las medidas de los segmentos que conforman los lados del triángulo, los cuales, en esa
</td>
<td>


Figura 4.37. Trazo auxiliar: Circunferencias $\overline{AO}$ y $\overline{BO}$

En la construcción GeoGebra del problema, se arrastra el punto A y cambia el triángulo AOB. Lo que se requiere es conocer la posición de A para la cual dicho triángulo es equilátero; no obstante, como ya se ha dado a conocer en el Capítulo 3, la abscisa contiene un número irracional. Para facilitar entonces la visualización de dicho triángulo, los estudiantes trazan dos circunferencias auxiliares, tal como se utilizaron para su construcción en una de las actividades previas a la aplicación del problema. En las figuras 4.38 y 4.39 se muestran ambos momentos: El primero,
</td>
</tr>
</table>

posición miden 10.29, 10.29 y 10.33] Aquí se formarían, pero…

L4 A: Son unas décimas las que faltan.

L5 U: […] [*Mueve el deslizador: t=3, t=2, t=1. Observa que la relación entre los lados del triángulo se sostiene. Aplica el zoom y arrastra el punto A hasta que las medidas parecen ser las mismas en la vista algebraica*]. Es que mira [*Ver Figura 4.38*]

L6 U: ¡Oh sí! Ya se logró [*Sin embargo vuelve a mover A*] ¿Cuál era? Nooo…era más para arriba. Ya está maestra, encontramos un triángulo equilátero pero cuando t es 1.

L7 P: Mueve el deslizador.

L8 U: No, en $t = 3$ ya no coincide.

L9 P: ¿Por qué dices que ahí es equilátero?

L10 U: Porque todos sus lados miden lo mismo. Me fijé en la medida de cada segmento.

L11 P: ¿Entonces para qué dibujaste las circunferencias?

L12 U: Para basarme hacia donde ir y moviendo el punto A es donde coinciden, pero nos guiamos con cuando se generan dichas circunferencias y el segundo, cuando se arrastra A para que estas circunferencias se conviertan en el trazo que visual y geométricamente explican la existencia de dicho triángulo equilátero.

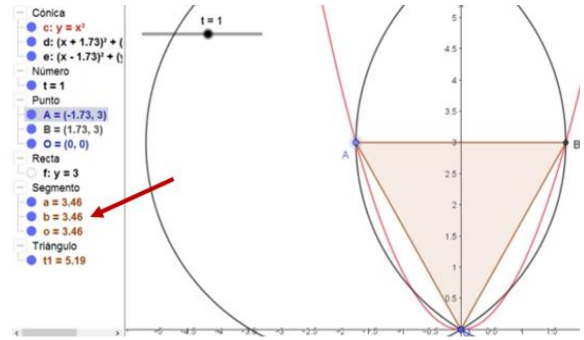


Figura 4.38. Circunferencias $\overline{AO}$ y $\overline{BO}$ pasan por B y A respectivamente

Análisis estructural del Episodio 1 (Tipos de razonamiento)

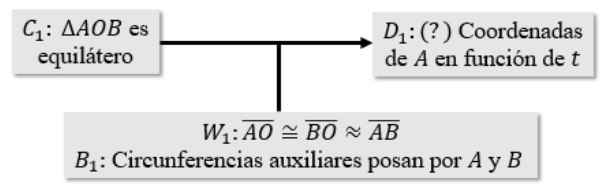
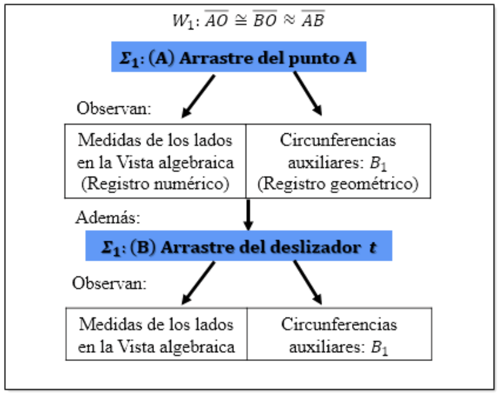


Figura 4.39. Abducción por explicación para lograr que ΔAOB sea equilátero

Como se ha mencionado, las circunferencias sirven como elemento auxiliar que guía el sentido del movimiento de A para ayudar a generar visualmente el triángulo equilátero. Una vez que los lados son "casi" iguales la afirmación C_1 es que AOB es equilátero (en la figura 4.39), la base de dicha aseveración W_1 es el conocimiento acerca de la congruencia de los lados en ese tipo de polígonos.

las medidas del triángulo. Aunque en $t = 3$ ya no coinciden	Existe, además, el respaldo B_1 de que tal congruencia se presenta porque los lados del triángulo son los radios de dos circunferencias iguales. Sin embargo, consideramos que es un respaldo, además, de carácter implícito porque la garantía primordial sigue siendo la medida de los lados. Por otro lado, sin importar el valor de t, la abscisa de A es irracional, lo cual implica variación en los resultados aproximados del cálculo de la medida de los lados del triángulo, específicamente del lado AB (lado o en la vista algebraica de GeoGebra) y esta diferencia se manifiesta de forma evidente para ciertos valores de t cuando el redondeo es de dos o tres cifras. Uno de esos valores es $t = 3$; ver L8 en el diálogo. Esta excepción se considera una reserva del argumento (La explicación de este elemento en el Modelo de Toulmin se encuentra en las secciones 1.2.10 y 1.2.11), puesto que se debilita la solidez de la afirmación. No obstante, como veremos en el siguiente episodio (en L13), la profesora interviene para que, a pesar de este hecho, se considere válida la afirmación y la resolución continúe.
	<u>Análisis referencial del Episodio 1 (Estructura de control)</u>
	La Estructura de control para el primer argumento, la conforman Σ_1 (A) que es el arrastre del punto A y Σ_2(B), el arrastre del deslizador, los cuales se muestran en la figura 4.40. Con ambas se procura llevar al triángulo, por medio de una especie de arrastre dummy locus, a la forma de triángulo equilátero con ayuda de las circunferencias como trazo auxiliar, B_1 (registro geométrico en la vista gráfica),

	para tratar de ajustar los lados y que sean de igual medida (registro numérico en la vista algebraica). Es importante hacer notar que el uso del trazo auxiliar, en este caso se considera solo un respaldo pues los estudiantes hacen énfasis en que su principal medio de control es la medida de los lados (L11 y L12).  *Figura 4.40*. Estructura de control para la garantía W_1
	<u>Análisis de los Procesos Cognitivos con el uso del deslizador Episodio 1 (Razonamiento ascendente y descendente)</u>
	El razonamiento es de tipo ascendente, pues durante el arrastre del punto A, se comienza con la observación del ajuste de las circunferencias en la vista gráfica y se culmina con determinación de la necesidad de establecer las coordenadas de dicho punto a pesar de que las circunferencias no coincidan exactamente.

Episodio 2: Obtención de la ordenada de A

L13 P: (…) Regrésate a 1. Yo quiero saber qué coordenadas tiene A para cualquier valor de t. Es decir, ¿Qué tienen en común todas las coordenadas de A cuando cambias t?

L14 U: y va de 3 en 3, y de A. Va de 3 en 3, casi. [*Observa: Cuando* $t = 1, A(-1.73,3)$, $t = 2, A(-3.46,5.99)$, $t = 3, A(-5.19,8.99)$].

L15 P: Dale en Opciones, Redondeo, 5 cifras ¿Por qué no le aplicas zoom cerca del punto B?

L16 U: […][*Aplica redondeo a 5 cifras y observa*] ¿Punto B? [*Da zoom. Ver Figura 4.41*]. Entonces Podemos suponer que cuando coinciden va a ser 6 ¿No? A ver (…) Sí, ahí ya coinciden ¿Y ahora?

L17 A: y vale 9, ahí t vale 3, se multiplica por 3 [*Se fija que cuando* $t = 3, A(-5.19615,9)$]. A ver cambia la t [*Mueven el deslizador: Si* $t = 2$ *, en ese momento* $A(-3.464,6)$, *si* $t = 4, A(-6.9282,12)$].

Figuras y Análisis de la argumentación. Episodio 2

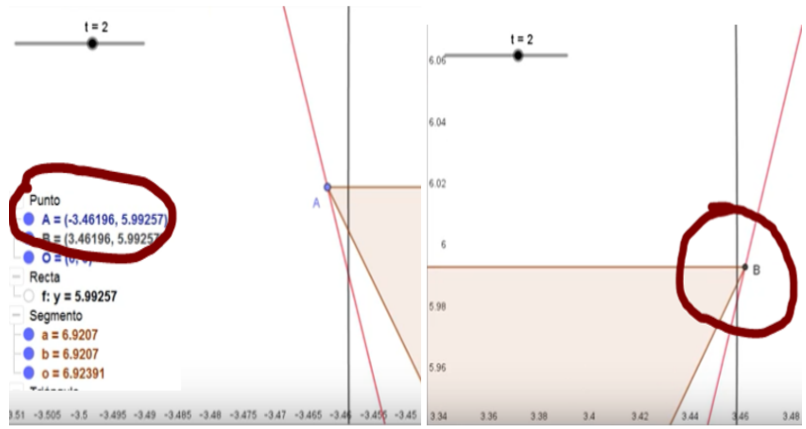


Figura 4.41. Acercamientos a los vértices y coordenadas de A para $t = 2$

Al inicio de este argumento, la profesora interviene para que no se preste mayor importancia al hecho de que los valores son aproximaciones; para ello solicita se estacionen en el valor del deslizador $t = 1$ y plantea la misma pregunta pero de modo distinto. En la línea L14, Ulises plantea la conjetura de que la ordenada cambia “de tres en tres” y enfatiza: “casi”. Después del redondeo y de ajustar los puntos A y B para tratar de obtener de forma más exacta el trazo del triángulo equilátero, en las líneas L15 y L16 terminan de validar su afirmación con el uso del deslizador.

Análisis estructural del Episodio 2 (Tipos de razonamiento)

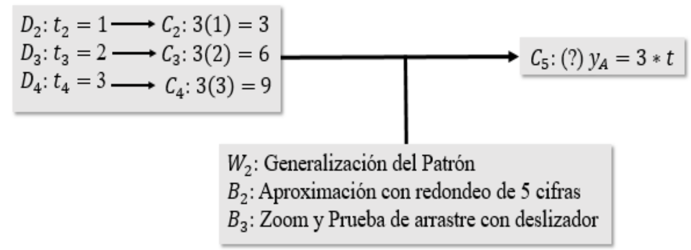
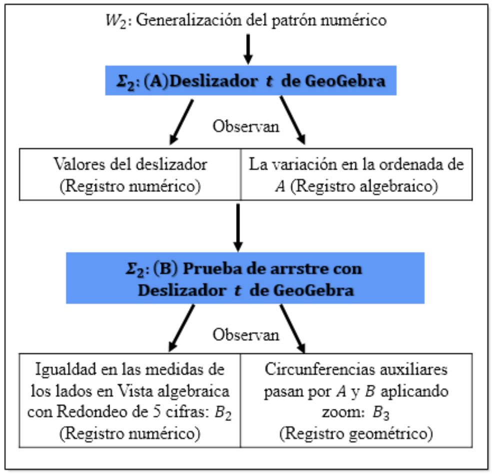
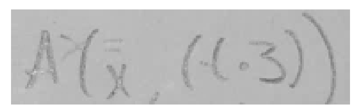


Figura 4.42. Razonamiento inductivo para obtener la ordenada del punto A

En la figura 4.42 se muestra el Modelo de Toulmin con el que se analiza el razonamiento llevado a cabo para obtener y_A. En L14 y L16 tanto Ulises como Adriana, moviendo el deslizador y observando la relación entre los valores de t y las coordenadas de A, detectan y verifican respectivamente, que la relación es $3t$ para la ordenada. El proceso comienza con los valores de $t = 1, t = 2,\ t = 3$ (cada uno de los cuales corresponden a los datos D_2, D_3 y D_4) al observar que cambian de tres en tres, lo que en realidad infieren es la generalización del producto $3 \cdot t$ que corresponde a la afirmación C_5. Como se parte de datos numéricos particulares y se concluye con una generalización algebraica, el razonamiento es inducción. La garantía W_2 es el patrón de la operación observada (multiplicación) y los respaldos son el redondeo B_2 y el zoom junto con la prueba de arrastre B_3 porque ayudan a reafirmar el patrón encontrado.

	Análisis referencial del Episodio 2 (Estructura de control)
	 *Figura 4.43.* Razonamiento inductivo para obtener la ordenada del punto *A* Para la obtención de la ordenada, la garantía W_2 del razonamiento inductivo está dada por la generalización encontrada a partir de los casos particulares. De forma similar a argumentos anteriores, en los cuales las garantías son patrones de generalización de operaciones (como ejemplo, ver análisis referencial del episodio 2 del caso de Joel y Alejandro), el uso en dos etapas de la herramienta deslizador, constituye el elemento central de la Estructura de control. La primera etapa, es cuando el deslizador se utiliza para encontrar dicho patrón, como en Σ_2 (A) de la figura 4.43 y la segunda, es cuando esta herramienta se usa para efectuar la prueba de arrastre, Σ_2 (B) en la misma figura.

	Análisis de los Procesos Cognitivos con el uso del deslizador Episodio 2 (Razonamiento ascendente y descendente)
	El uso del deslizador para encontrar el patrón numérico que generaliza los casos particulares, da lugar a un razonamiento de tipo ascendente, pues se evoluciona del registro numérico al algebraico, posteriormente, verifican la expresión $y = 3 * t$ con otros dos valores particulares de la variable, es decir, llevan a cabo un cierto tipo de prueba de arrastre con la misma herramienta para validar que las circunferencias sigan pasando por los puntos A y B, lo cual asegura que el triángulo sigue siendo equilátero: B_3, pero sobre todo, que los valores de y_A correspondan con el resultado de dicho producto. En esta segunda etapa entonces, se razona de forma descendente.

Episodio 3: Obtención de la abscisa de A y establecimiento de sus coordenadas	**Figuras y Análisis de la argumentación. Episodio 3**
L18 U: Sí. Así es. ¿Y cómo sabemos la coordenada de x? O sea, la ordenada de A sería x coma t por 3 ¿No? [*Ver registro escrito en la Figura 4.44*] ¿Y el valor de x cómo lo sacamos? L19 A: ¿Cuánto vale x en la fórmula de aquí? L20 U: ¿En la fórmula de esta parábola?	 *Figura 4.44.* Registro escrito del resultado de y_A en función de t En L18, establecen el punto A tal como se observa en la figura 4.44 y Ulises se pregunta ahora cómo sacar el valor de la abscisa. Adriana se percata que dicho valor puede obtenerse de la ecuación de la parábola del problema: $x^2 = yt$. En

L21 A: Sí

L22 U: x vale t por y.

L23 A: x cuadrada.

L24 U: Es lo que estamos… ¡Sí tienes razón! (…) Si x dos [*Se refiere a* x^2] es igual a t por y, 3 por 3 ¿Siempre va a ser 3? [*En ese momento el deslizador está en* $t = 3$]. Entonces sería raíz de t por y [*Anota:* $A(x, (t * 3)$, *en seguida* $A\left(\sqrt{t * y}, (t * 3)\right)$. *Ver registro escrito en la Figura 4.45*] A ver, si t vale 1, 1 por 3 es 3. Raíz de 3 es 1.732 *[Compara con el resultado de la abscisa de A mostrado en la vista algebraica de GeoGebra*].

L25 A: ¡Sí!

L26 P: […] ¿Y dónde hicieron todo eso? A ver hazlo ¿No? [*De esa forma les solicita el registro escrito*]

L27 U: Bueno, pon primero esto, a ver…

L28 A: $x^2 = t * y$

L29 U: Ajá, entonces sería si $t = 2$, entonces $y = 6$ [*Enuncia y anota. Ver Figura 4.46 con el registro*

L24, Ulises finalmente registra el valor de x y establece ambas coordenadas. figura 4.45.

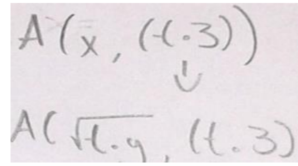


Figura 4.45. Registro escrito de las coordenadas de *A* en función de t

Adriana verifica la expresión $\sqrt{t \cdot y}$ correspondiente a x_A dando tres valores distintos a t (ver Figura 4.46) con lo cual valida su resultado, no obstante y tal como se puede observar en la figura 4.45, la abscisa no termina de establecerse por completo en función de t, lo cual acarreará un problema más adelante, en L31, al tratar de aplicar la C-prueba ya sistematizada en la cual se introduce la expresión generalizada del punto A para después aplicar el arrastre con el deslizador.

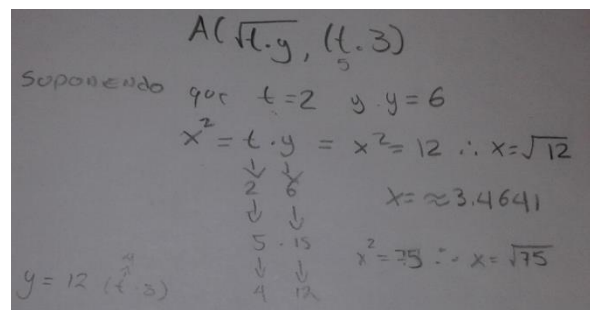


Figura 4.46. Verificación de las coordenadas de *A* con distintos valores de t

escrito con los diferentes valores de t, y , x^2. *Valida ubicando el deslizador en cada valor de t y constata los resultados obtenidos en su calculadora con los valores de las coordenadas que aparecen en la vista algebraica de GeoGebra*].

L30 P: ¿Cómo usarías el programa para saber que estas coordenadas son válidas para cualquier valor de t?

L31 U: Introducimos un punto pero en valor diferente y vemos si coincide con A. Vamos a ponerle P [*Enuncia e introduce en la barra de entrada: (sqrt(t*y), (t*3)). Aparece en la vista algebraica de GeoGebra lo mostrado en la Figura 4.50. Existe un error al introducir el punto P porque las coordenadas no se encuentran ambas en función de t pero en ese momento no se percatan de ello*] […]

<u>Análisis estructural del Episodio 3 (Tipos de razonamiento)</u>

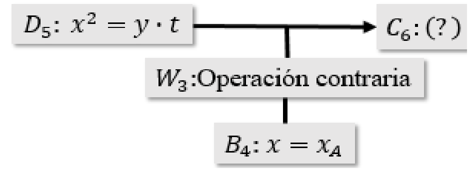


Figura 4.47. Primer momento: Deducción para la obtención de la abscisa de A

El razonamiento detrás del argumento principal, primer momento, en el tercer episodio, se analiza con el modelo de la figura 4.47, en el cual se parte de un dato, D_5, que es la ecuación de la parábola que brinda el problema. Se asume que Adriana conoce que A es vértice del triángulo equilátero AOB y al mismo tiempo, pertenece a la parábola pues ésta es su "rastro" o lugar geométrico. De acuerdo a lo explicado en la sección 1.2.10, figura 1.5, el respaldo de un argumento puede considerarse un simil de la palabra "Considerando", por esta razón ese hecho es el respaldo B_4. El dato D_5, es entonces la ecuación de la parábola del problema ($x^2 = y \cdot t$) y aplicando la operación contraria a la potenciación (radicación), se llega a la afirmación C_6: $x_A = \sqrt{y \cdot t}$. La operación contraria es la base que fundamenta el resultado, por lo tanto es la garantía W_3 del argumento. El razonamiento de la figura 4.47 es el correspondiente al de las líneas L23-L29 en el diálogo en un primer momento.

Una vez encontradas ambas coordenadas (afirmaciones C_5 y C_6), en un segundo momento, se establece el punto $A\left(\sqrt{y \cdot t}, 3t\right)$ tal como se muestra en la figura 4.48. Pero la abscisa aún no depende por completo del parámetro t lo cual provoca que al introducir en la barra de entrada P con estas coordenadas, éste no aparezca en la gráfica como un punto, sino como un segmento de recta, lo cual constituye un error en la prueba cuyas causas no pudieron identificarse en ese momento (Figura 4.49). Debido a esto, no logran completar la C-prueba a pesar de la validez de su conjetura.

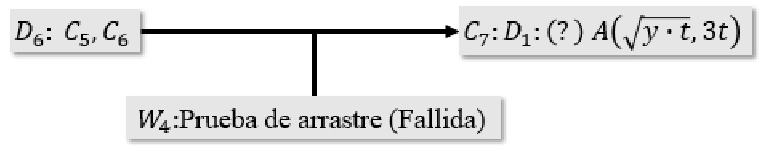


Figura 4.48. Segundo momento: Deducción para establecer las coordenadas de A

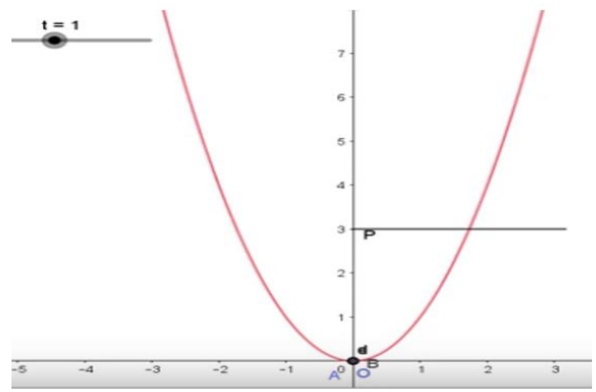


Figura 4.49. Al introducir $P\left(\sqrt{y \cdot t}, 3t\right)$, se genera un segmento de recta

Análisis referencial del Episodio 3 (Estructura de control)

En la figura 4.50, se indica que la estructura de control Σ_3 comienza con la aplicación de la operación contraria, en este caso radicación, y culmina con la prueba de arrastre Σ_4 del segundo momento de este episodio (ver figura 4.51). Sin embargo, es importante aclarar que la operación contraria propiamente dicha, de acuerdo con lo explicado en la sección 1.2.11 es un operador, no obstante, se incluye como parte de la Estructura de control, así como se ha hecho en argumentos anteriores, solo por cuestiones prácticas ya que la operación interviene de manera importante en el proceso de validación de la expresión de las coordenadas.

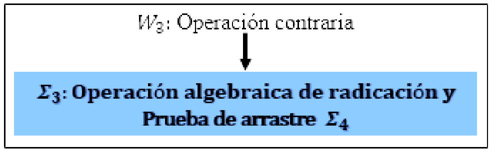


Figura 4.50. Primer momento: Estructura de control para la garantía W_3

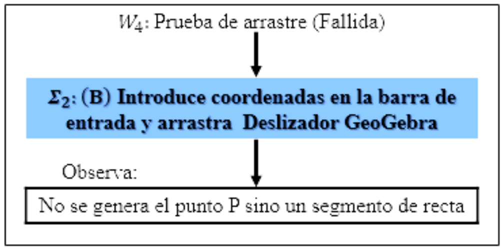
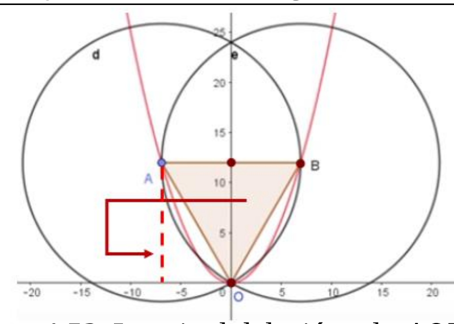


Figura 4.51. Segundo momento: Estructura de control para la garantía W_4

	Análisis de los Procesos Cognitivos con el uso del deslizador Episodio 3 (Razonamiento ascendente y descendente)
	En el primer momento, se introduce una expresión algebraica (generalizada) del punto P y en el segundo, se arrastra el deslizador con lo cual se observa cómo se comporta la construcción geométrica con lo cual se puede observar un razonamiento de tipo descendente. Tal como ya se ha reportado, GeoGebra no generó el punto esperado, debido a que en la expresión de la abscisa $\sqrt{y \cdot t}$, faltó sustituir el valor de $y = 3t$ y hacer la reducción correspondiente. A falta de ello, el programa generó el lugar geométrico de la serie de puntos con abscisa $\sqrt{y \cdot t}$ y ordenada $3t$ en el intervalo de t especificado. Por tal motivo no les fue posible validar el resultado como ya se había hecho de manera sistemática en gran parte de los episodios mostrados y la C-Prueba no se concluye en este caso; no obstante, se continúa con la obtención del área del triángulo ABO.
Episodio 4: Obtención del área del triángulo	**Figuras y Análisis de la argumentación. Episodio 4**
L32 P: [...] Ahora hay que obtener el área para cualquier valor de t. L33 U: (...) Si volteamos esta parte hacia acá sería un rectángulo, entonces el área es igual a raíz de t por y, por t por 3 [*Ver Figura 4.52*]. (...) Para $t = 3$,	 *Figura 4.52.* La mitad del triángulo AOB se invierte

el área es igual a raíz de 3 por y, por 3 por t. Ahora t es 4 y y es 12. Entonces para $t = 4$, y es 12 [*Adriana obtiene el área para el valor particular de* $t = 4$ *y comprueba con el valor arrojado por GeoGebra. Figura 4.53*].

Para la obtención del área, Ulises se da cuenta que el área del triángulo AOB equivale a la del rectángulo de diagonal AO (ver figura 4.52). En dicha imagen, los puntos en rojo se marcaron para indicar los vértices del triángulo que se invirtió. Dicho rectángulo tiene como superficie $\left(\sqrt{t \cdot y}\right)(3t)$. En la figura 4.53 se muestra la expresión y su verificación para el caso particular de $t = 4$. Como se observa, no llegan a obtener el valor simplificado del área: $3\sqrt{3} \cdot t^2$, debido al error ya comentado.

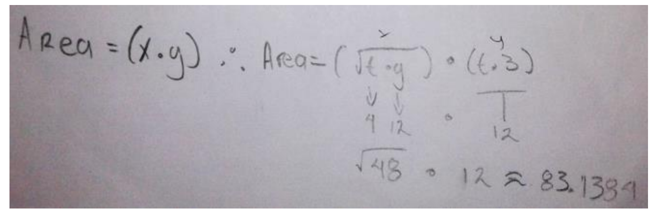


Figura 4.53. Obtención del área del triángulo AOB: Registro escrito

<u>Análisis estructural del Episodio 4 (Tipos de razonamiento)</u>

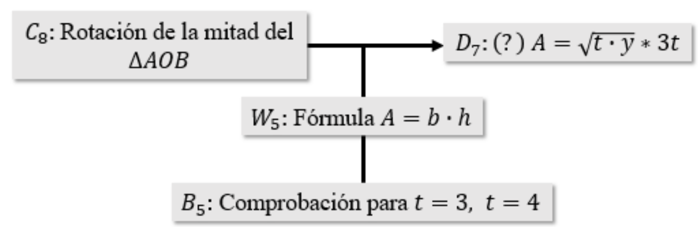


Figura 4.54. Razonamiento abductivo para la obtención del área del triángulo AOB

El razonamiento para la obtención del área del triángulo AOB (ver figura 4.54), comienza con una rotación figural, lo cual es un hecho observable a partir del conocimiento de que el área de un triángulo equivale a la mitad de la del rectángulo con la misma base. La rotación y conformación del rectángulo es la afirmación C_8 de la cual se parte, para llegar a la obtención de la expresión generalizada de tipo algebraico D_8. La garantía W_5 es el conocimiento de cómo obtener el área de un rectángulo y la comprobación numérica hecha a base de cálculos con dos distintos valores de t así como su consecuente comprobación con los valores de las coordenadas arrojadas en la vista algebraica de GeoGebra es el respaldo que fortalece la garantía.

Análisis referencial del Episodio 4 (Estructura de control)

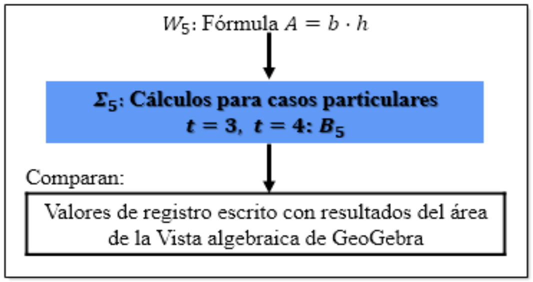


Figura 4.55. Estructura de control para la garantía W_5

En este caso, la estructura de control, está dada primordialmente por los cálculos que los estudiantes realizan con lápiz y papel para los casos particulares

	enunciados en la figura 4.55. La verificación de los resultados con los resultados arrojados por GeoGebra permiten validar la expresión del área. Este medio de control, aunque le hemos llamado estructura, no es algo sistemáticamente utilizado por los estudiantes en los casos de esta investigación.
	Análisis de los Procesos Cognitivos con el uso del deslizador Episodio 4 (Razonamiento ascendente y descendente)
	De acuerdo con la figura 4.52, la mitad del triángulo AOB se invierte y de ahí se infiere que el área de AOB equivale a la de un rectángulo de base x_A y altura y_A; el razonamiento al ir del análisis de la figura a la determinación de la expresión algebraica, es de tipo ascendente y esto puede constatarse debido a que se presenta abducción. Después, al verificar con casos particulares, se lleva a cabo la validación de la expresión y el razonamiento se torna descendente porque va de lo algebraico a lo numérico.

El análisis global del caso de Adriana y Ulises se muestra en la figura 4.56. El proceso de resolución y prueba de este equipo, es muy similar en estructura al primer caso de estudio: el de Joel y Alejandro, a pesar de tratarse de un problema distinto. En este sentido, es importante señalar que inicialmente, en ambos, se presenta razonamiento abductivo, pero en el caso de Adriana y Ulises la abducción no es por descubrimiento sino por explicación pues se toma como cierta la afirmación C_1 referente a la posición hipotética del punto A para la cual se genera el triángulo equilátero. Además, como ya se ha explicado, y como se muestra en la figura 4.56, la C-Prueba no se logra completar a cabalidad a pesar de haberse completado el proceso y de ser correcta la solución.

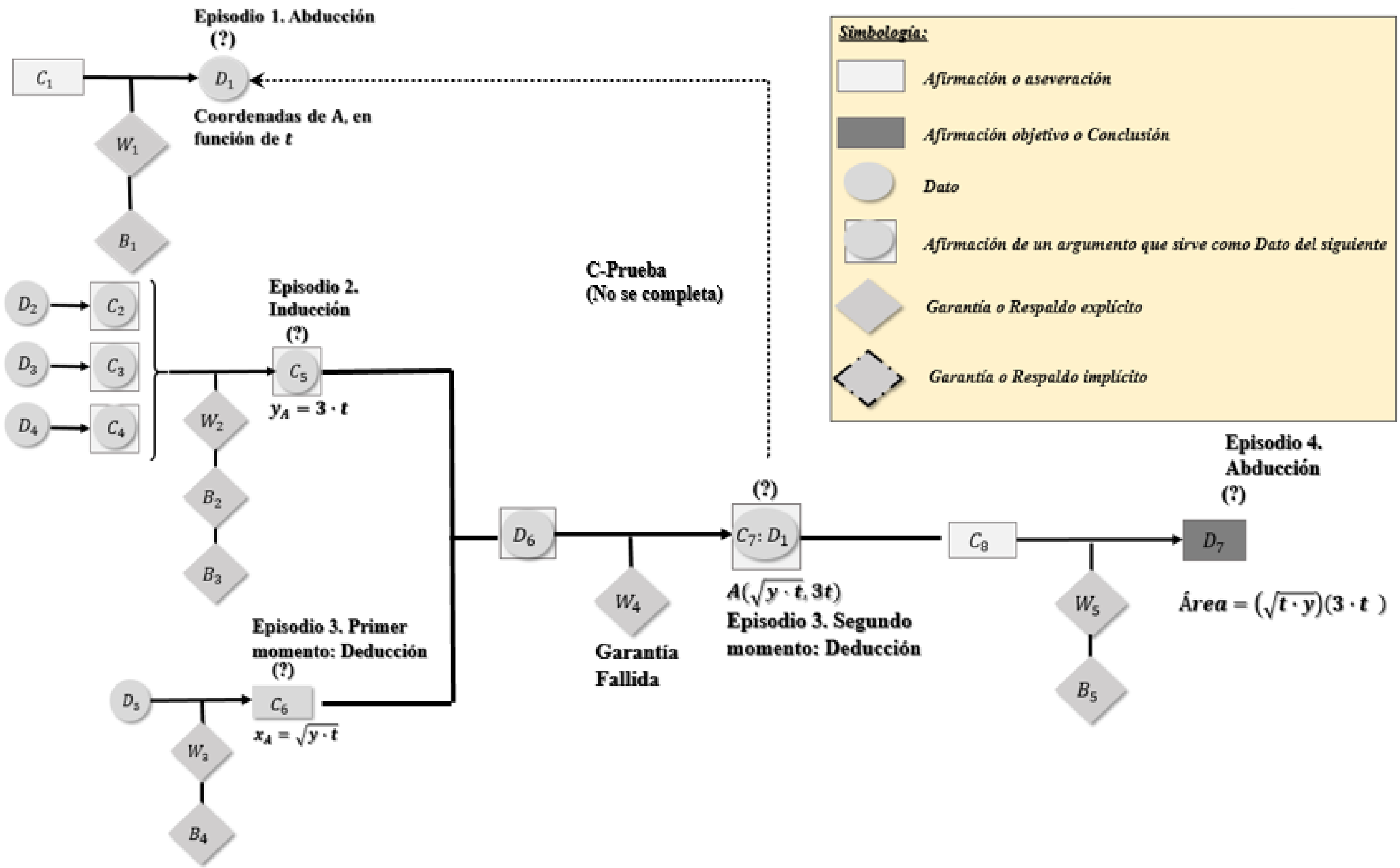


Figura 4.56. Fragmento de la resolución del Problema 2 de Adriana y Ulises: Esquema para el análisis global

CAPÍTULO 5
CONCLUSIONES Y PROSPECTIVAS DE INVESTIGACIÓN

5.1 INTRODUCCIÓN

Los casos reportados en este documento, tal como se aclaró en el Capítulo 3, se eligieron por su capacidad explicativa más que por su representatividad. La combinación de las diferentes teorías utilizadas en el Marco Conceptual y nuestra propuesta para adecuarlas en la interpretación de la información, ayudaron a ajustar dichos presupuestos teóricos al contexto particular de estudio y retomar sólo aquellos elementos útiles. Resulta importante resaltar dos adecuaciones teóricas llevadas a cabo en esta investigación:

- De todos los elementos que componen el modelo CKĆ para el análisis referencial (análisis de las concepciones), se retomó únicamente la Estructura de Control y su relación con el razonamiento.
- El concepto de razonamiento ascendente o descendente de Arzarello, al momento de ser utilizado para el estudio del papel de la herramienta deslizador en la generación de abducción o inducción, se amplía considerando no solo el paso del registro figural al algebraico (y visceversa), sino también, una etapa intermedia que es el paso por el registro numérico, es decir, consideramos que con el uso del deslizador GeoGebra, el nivel de abstracción del razonamiento puede ir de lo figural a lo numérico y posteriormente al algebraico (y de forma inversa también), facilitando la capacidad para generalizar resultados que ayuden a probar o a refinar conjeturas que al inicio se elaboran preponderantemente de forma visual.

Además de las contribuciones para la adecuación de los presupuestos teóricos, a continuación, se presentan las respuestas a las preguntas de investigación, y ciertas prospectivas de investigación que juzgamos factibles para ampliar las propuestas del uso del software para la promoción del razonamiento matemático natural de los estudiantes y para el mejoramiento del proceso de prueba por argumentación.

5.2 RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

1) ¿Qué caracteriza a la prueba en Geometría Analítica, llevada a cabo por estudiantes de bachillerato construida a través de la argumentación con ayuda del software GeoGebra? En la sección 1.2.8, se definió una C-prueba como *la validación mediante una estructura de control utilizada por costumbre en clase.* En este documento se reportan 3 casos distintos que explican diferentes modos de utilizar de las herramientas de GeoGebra, en particular el deslizador durante la validación de cada afirmación. De forma general, la estructura de control utilizada a lo largo del proceso de obtención de cada C-prueba se menciona a continuación:

Caso de Joel y Alejandro: Para el Problema 1, obtienen una expresión algebraica del lugar geométrico propuesto en la conjetura inicial con ayuda del deslizador GeoGebra (Generalización de un patrón numérico de casos particulares) e introducen la expresión en la barra de entrada de la ventana del programa para llevar a cabo la prueba de arrastre utilizando el mismo deslizador.

Caso de Martín y Ricardo[33]: Se obtienen las expresiones algebraicas del centro y del radio del lugar geométrico (circunferencia) establecido en la conjetura inicial. Se pretende sustituir estas expresiones en la fórmula $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$. No obstante, no se logra completar el proceso. Este caso en particular resulta interesante porque no se utiliza de forma preponderante el deslizador, en su lugar, resulta importante el uso de un trazo auxiliar sobre la figura en la vista gráfica y el uso de cálculos algebraicos. El proceso de prueba descansa más sobre la observación de las figuras geométricas más que en un proceso de razonamiento inductivo de generalización de casos particulares como en el caso anterior.

Caso de Adriana y Ulises: El proceso de resolución comienza con un trazo auxiliar y posteriormente combina el uso del deslizador (para la generalizar casos particulares como en el Caso de Joel y Alejandro) pero validan las expresiones obtenidas mediante la comprobación con casos particulares con cálculos llevados a cabo utilizando lápiz, papel y calculadora. En este caso surge un inconveniente que impide realizar la C-Prueba con la Estructura de control acostumbrada (uso del deslizador en la prueba de arrastre).

- *Conclusión respecto a la respuesta de la primera pregunta de investigación:*

La C-prueba en el contexto de estudio, gira en torno a la validación de una expresión algebraica que generaliza casos particulares utilizando principalmente la herramienta deslizador o mediante la comprobación utilizando cálculos a lápiz y papel. No obstante, también se presenta el caso del uso de trazos auxiliares y la utilización de fórmulas de lugares

[33] En este caso se reporta únicamente la etapa final del proceso de prueba, tal como se explicó en el Capítulo 4.

geométricos, así como de operaciones algebraicas para lo cual, el uso del deslizador no es preponderante. *La prueba entonces se caracteriza por ser un tipo particular de argumentación validada con ayuda del software y mediante una práctica de generalización*. El razonamiento empleado a lo largo del proceso de la obtención de la C-prueba se explica en la respuesta de la pregunta 3. Durante el proceso de obtención de una C-prueba, como ya se mencionó, se utiliza cierta estructura de control para ir validando resultados parciales hasta culminar en la validación de un resultado final. De eso trata la respuesta a la pregunta 2 que se da a continuación.

2) ¿Cuáles son las *<u>prácticas recurrentes</u>* utilizadas al resolver problemas de Geometría Analítica con GeoGebra en los cuales se busca llegar a una prueba generalizada de tipo algebraico? Los medios para la toma de decisiones o para validar resultados (estructura de control) y los casos en los cuales se presentan se enlistan en la tabla 11.

Tabla 11

Resumen de las <u>Estructuras de control</u> con los casos y los episodios donde se presentan

Estructuras	Casos	Episodios
A) Uso del deslizador para mover la figura y generar conjeturas a partir de visualización	Joel y Alejandro Martín y Ricardo	1, 4 1
B) Uso del deslizador para generalizar un patrón numérico y para efectuar la prueba de arrastre	Joel y Alejandro Adriana y Ulises	2, 3 y 4 2
C) Trazo auxiliar y visualización de la figura moviendo el deslizador	Joel y Alejandro Martín y Ricardo Adriana y Ulises	4 2 1
D) Uso del deslizador para generalizar un patrón numérico y comprobación mediante cálculos a lápiz y papel.	Martín y Ricardo Adriana y Ulises	2 3
E) Visualización y rotación de una figura en la vista gráfica de GeoGebra sin realizar trazo auxiliar alguno.	Adriana y Ulises	4

Con la información de la tabla 11 es posible enlistar los tipos de Estructuras de control (A, B, C, D y E) mostrados en la tabla 12.

Tabla 12

Resumen de las Estructuras de control con los casos y los episodios donde se presentan

Casos	Episodios	Estructuras de Control
Joel y Alejandro	1	A
	2	B
	3	B
	4	A,B, C
Martín y Ricardo	1	A
	2	C,D
Adriana y Ulises	1	C
	2	B
	3	D
	4	E

- *Conclusión respecto a la respuesta de la segunda pregunta de investigación:*

En la tabla 12, se puede observar que la Estructura de control que más se presenta en el total de episodios es la representada con la letra B. Esto significa que *la práctica más frecuente es el uso del deslizador para generalizar un patrón numérico y para efectuar la prueba de arrastre*. La que le sigue en frecuencia es A: Uso del deslizador para mover la figura y generar conjeturas a partir de visualización. Como se puede observar, la práctica del uso del deslizador configurado con valores enteros, ayuda no solo a la práctica de generalizar y realizar el arrastre sino también a la formulación de conjeturas.

3) ¿Cómo intervienen la abducción y la inducción durante la resolución de este tipo de problemas y de qué forma se relacionan estos razonamientos con el uso de GeoGebra? Para responder esta pregunta es necesario aclarar nuevamente que la argumentación en este trabajo es un medio para poder analizar los tipos de razonamiento. Entonces, retomaremos la información de las figuras 4.21, 4.36 y 4.56, las cuales muestran los esquemas de análisis global de los procesos de argumentación, los cuales se integran con los Modelos de Toulmin de cada episodio encadenados para visualizar el proceso completo de la C-prueba en cada caso. En esas figuras, para cada episodio, se indican también los razonamientos empleados en cada argumento particular. Considerando la información de tales esquemas, agregamos una columna más a la tabla 12 generando así la tabla número 13:

Tabla 13

Resumen de las Estructuras de control y los tipos de razonamiento generados

Casos	Episodios	Estructuras de Control	Razonamiento
Joel y Alejandro	1	A	Abducción por descubrimiento
	2	B	Inducción
	3	B	Primer momento: Inducción Segundo momento: Deducción
	4	A,B, C	Primer momento: Abducción por explicación Segundo momento: Inducción
Martín y Ricardo	1	A	Primer momento: Deducción Segundo momento: Abducción por descubrimiento
	2	C,D	Primer momento: Abducción por descubrimiento Segundo momento: Abducción por explicación Tercer momento: Deducción
Adriana y Ulises	1	C	Abducción por explicación
	2	B	Inducción
	3	D	Primer momento: Deducción Segundo momento: Deducción
	4	E	Abducción por descubrimiento

- *Conclusión respecto a la respuesta de la tercera pregunta de investigación:*

Atendiendo a la información de la tabla 13, es posible observar que en los tres casos el proceso comienza con razonamiento abductivo, se presenta inducción en las etapas intermedias y en dos casos se concluye con Deducción. Es importante resaltar el caso de Martín y Ricardo el cual comienza con razonamiento deductivo, pero esto se debe a que al inicio deducen las coordenadas de un caso particular (a partir de la fórmula para la ecuación de la circunferencia con centro fuera del origen de coordenadas); no obstante, el proceso de resolución generalizada inicia con abducción por descubrimiento. Por otro lado, al no utilizar la Estructura de control Tipo B, transitan de razonamiento abductivo a deductivo sin pasar por inducción. Podemos interpretar la razón de este hecho en que la resolución de este equipo se basó en un trazo auxiliar y en la observación del comportamiento geométrico de las figuras en la vista gráfica de GeoGebra, situación que sería aconsejable retomar para investigaciones posteriores. Así, constatamos que la manera en la cual intervienen los tres tipos de razonamiento obedece a lo planteado por Belluci (2018) en la sección 1.2.14, referente al hecho de que una hipótesis (o conjetura) se sugiere mediante abducción, se valida mediante inducción y puede explicarse por deducción. Ahora, en cuanto a la relación entre el uso de las herramientas de GeoGebra y el razonamiento generado, observando la misma tabla 13, es posible percatarse que *no existe un patrón definido de relación, no obstante, cuando se utiliza el deslizador para mover las figuras y generar conjeturas a partir de visualización (Estructura de control Tipo A), el razonamiento implicado generalmente es abducción por descubrimiento y cuando se utiliza el deslizador para generalizar un patrón numérico y para efectuar la prueba de arrastre (Estructura de control Tipo B), el razonamiento generado inicialmente es inducción*. Por otro lado, atendiendo al nivel de abstracción logrado en cada episodio cabe recordar que la abducción da lugar a razonamiento ascendente, es decir, que evoluciona de lo perceptivo a lo más abstracto (teórico), el razonamiento inductivo, genera también razonamiento ascendente, pero tal y como se aclaró en su momento, este no parte de la percepción de la figura, sino de datos numéricos que evolucionan hacia la obtención de una expresión algebraica.

5.4 PROSPECTIVAS DE INVESTIGACIÓN

En dos de los casos reportados en el presente trabajo, la obtención de la C-prueba no se llevó a cabo por completo. En ambos casos, posiblemente la intervención adecuada de la profesora-investigadora hubiera propiciado que se concluyera el proceso de prueba, y es en este sentido que se posibilita continuar con la línea de investigación referente a la intervención del profesor en el proceso de argumentación y prueba. La intervención exitosa en este tipo de situaciones no resulta fácil, más aún cuando existen muchas variables por controlar durante la experimentación. Pedemonte (2018) sugiere algunas pautas de intervención en la misma línea de investigación de la Unidad cognitiva. Resultaría interesante retomar dichas pautas y complementarlas investigando más al respecto. Por otro lado, resulta importante resaltar lo referente al Diseño de problemas de Geometría analítica para incentivar un análisis más geométrico (tal vez de forma similar al del caso de Martin y Ricardo) con el objeto de promover en mayor medida el tránsito de razonamiento abductivo al deductivo. Esto puede llevarse a cabo analizando el uso de otras herramientas de GeoGebra por medio de problemas más simples como los adaptados en las actividades preliminares de esta investigación o mejor aún problemas de contexto. Por último, cabe recordar que la presente investigación es un estudio de casos cuyas propuestas vertidas a lo largo del trabajo debieran ponerse a prueba en investigaciones más amplias de carácter cuantitativo; esto podría llevarse a cabo adaptando problemas más simples como los rediseñados en las actividades preliminares de esta investigación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acuña, C., (1996). Un modelo de tratamiento didáctico para la enseñanza del razonamiento deductivo y de la demostración en el nivel medio superior. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en matemática educativa* (pp. 93-109). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Anfossi, A. (1966). *Geometría Analítica*. México D.F., México: Progreso.

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practices in cabri enviroments. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *34(3)*, 66-72. doi.org/10.1007/BF02655708

Baccaglini-Frank, A. (2010a). *Conjecturing in dynamic geometry: A model for conjecture-generation through maintaining dragging* (Tesis Doctoral). University of New Hampshire.

Baccaglini-Frank, A. (2010b). The maintaining dragging scheme and the notion of instrumented abduction. En *Proceedings of the 10th Conference of the PME-NA* (pp. 607-615).

Balacheff, N. (2000). Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas. *Una empresa docente*. Recuperado de: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00520133/

Balacheff, N., & Gaudin, N. (2002). Students conceptions: an introduction to a formal characterization. Recuperado de: http://hal.univ-grenoble-alpes.fr/hal-00190425/document

Balacheff, N. (2010). Bridging knowing and proving in mathematics: A didactical perspective. En *Explanation and Proof in Mathematics* (pp. 115-135). Springer US.

Balacheff, N. (2015). The complexity of the epistemological and didactical genesis of mathematical proof. [Mensaje en un blog]. Recuperado de https://nicolas-balacheff.blogspot.mx/2015/09/math-ed.html#comment-form

Bellucci, F. (2018). Eco and Peirce on Abduction. *European Journal of Pragmatism and American Philosophy [Online]*, X-1.doi: 10.4000/ejpap.1122

Boero, P., Douek, N., & Ferrari, P. (2008). Developing mastery of natural language. *Handbook of international research in mathematics education* (p. 262).

Boero, P., Douek, N., Morselli, F. & Pedemonte, B. (2010). En Pinto, M. M. F. (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 179-209). Belo Horizonte, Brazil: PME. Recuperado de: http://www.lettredelapreuve.org/pdf/PME34/RF-Boero-e-Reaction.pdf

Bonache, J. (1999). El estudio de casos como estrategia de construcción teórica: características, críticas y defensas. *Cuadernos de economía y dirección de la empresa*. 3, 123-140. Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=195459

Contreras, A., Quesada, M., & Armenteros, M. (2002). Sobre la geometría sintética y analítica: la elipse y sus construcciones. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *5*(2), 111-132.

Contreras E. (29 de julio de 2012). Problema 741 GoGeometry: lugar geométrico, incentro, congruencia de segmentos [Archivo de video]. Recuperado de: https://youtu.be/Asa1SJnv_v0

Crespo, C. (2005). La importancia de la argumentación matemática en el aula. *Premisa (Revista de la Sociedad Argentina de Educación Matemática)*, 24, 23-29. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/228791538_LA_IMPORTANCIA_DE_LA_ARGUMENTACION_MATEMATICA_EN_EL_AULA

Chumpitaz, D. (2013). *La Génesis Instrumental: Un estudio de los procesos de instrumentalización en el aprendizaje de la función definida por tramos mediados por el software Geogebra con estudiantes de ingeniería* (Tesis de Maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú. Perú. Recuperado de http://tesis. pucp. edu. pe/repositorio/handle/123456789/4514).

Eco, U. (1983). Horns, Hooves, and Insteps. Some Hypotheses on Three Types of Abduction. En Eco, U. & Sebeok T. (Eds), *The Sign of Three: Dupin, Holmes, Pierce* (pp.198-220). Bloomington, Indiana University Press (H).

Fernández, E. (2011). *Situaciones para la enseñanza de las cónicas como lugar geométrico desde lo puntual y lo global. Integrando Cabri Géometre II Plus* (Tesis Doctoral). Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Santiago de Cali, Colombia.

Gascón, J. (2002). Geometría sintética en la ESO y analítica en el Bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados? *Suma*, 39, 13-25. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/7351/

Guershon, H., Stylianides, A., Boero, P., Miyazaki, M. & Reid, D. (2017). Topic Study Group No. 18: Reasoning and Proof in Mathematics Education. En G. Kaiser (Ed.), *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education* (458-462). Hamburgo, Alemania: ICME-13 Monographs, Springer Open. doi: 10.1007/978-3-319-62597-3_45

Goizueta, M., Mariotti M. & Planas, N. (2014). Validating in the mathematics classroom. En Oesterle, S., Liljedahl, P., Nicol, C., & Allan, D. (Eds.) *Proceedings of the Joint Meeting 3 - 169 of PME 38 and PME-NA 36* (pp. 169-176). Vancouver, Canada: PME.

González P. M. (2003). *Los orígenes de la geometría analítica.* Fundación Canaria Orotava. Islas Canarias.

González P. M. (2007). Raíces históricas y trascendencia de la geometría analítica. *Sigma*, 30, 25-236. Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2529640

Gutiérrez, R. E., & Prieto, J. L. (2015). Deformación y reflexión de funciones con GeoGebra. El caso de las parábolas definidas por la expresión g (x)= ax^ 2. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *88* (marzo de 2015), 115-126.

Hanna, G. (2000). Proof and its classroom role: a survey. *ENCONTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA-EIEM*, *9*, 75-104.

Hanna G. & Villiers M. de (2012). Proof and Proving in Mathematics Education, *New ICMI Study Series* 15. doi: 10.1007/978-94-007-2119-6_1

Harel, G. (2001). The development of mathematical induction as a proof scheme: A model for DNR-based instruction. En S. Campbell y R. Zazkis (Eds.), *Learning and Teaching number theory* (pp. 185-212). Norwood, NJ: Ablex.

Herbst, P., & Balacheff, N. (2009). Proving and Knowing in Public: What Counts as Proof in a Classroom. En Stylianou, D., Blanton, M. & Knuth, E. (Eds.), *Teaching and learning proofs across the Grades: A K-16 perspective, Routledge*. *Studies in Mathematical Thinking and Learning Series* (pp. 40-70). Michigan EUA.

Hsieh F.-J., Horng W.-S. & Shy. H.-Y. (2012). From Exploration to Proof Production. En G. H. (Eds), *Proof and Proving in Mathematics Education* (pp. 279-303). Dordrecht, Netherlands: Springer.

Kindle, J. H. (1991). *Geometría Analítica.* Edo. México, México: McGraw-Hill.

Knipping, C. (2008). A method for revealing structures of argumentations in classroom proving processes. *ZDM Mathematics Education*. doi.org/10.1007/s11858-008-0095-y

Krummheuer, G. (2007). Argumentation and participation in the primary mathematics classroom: Two episodes and related theoretical abductions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *26*(1), 60-82.

Larios, V. (2006). Demostrar es un problema o el problema es demostrar. *Reflexiones y propuestas sobre el aprendizaje y la enseñanza de la demostración en ambientes de Geometrıa Dinámica.* Querétaro, México: Escuela de Bachilleres, Universidad Autónoma de Querétaro.

Lozano, M. D. (2014). *Justificación argumentativa en la prueba geométrica informal* (Tesis de maestría). CINVESTAV, Ciudad de México.

Martínez, M. & Pedemonte, B. (2014). Relationship between inductive arithmetic argumentation and deductive algebraic proof. *Educational Study of Mathematics. Sringer Science, 86*,125-149. doi: 10.1007/s10649-013-9530-2

Mason, J. (1999). La incitación al estudiante para que use su capacidad natural de expresar generalidad: las secuencias de Tunja. *Revista EMA*, *4*(3), 232-247.

Meyer, M. (2010). Abduction—A logical view for investigating and initiating processes of discovering mathematical coherences. *Educational studies in mathematics*, 74(2), 185-205.

Meyer, M. (2018). Options of Discovering and Verifying Mathematical Theorems- Task-design from a Philosophic-logical Point of View. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *14*(9). doi.org/10.29333/ejmste/92561

Montoya, M. D. (2008). *Una exploración de lugares geométricos a través de software dinámico* (Tesis de maestría). CINVESTAV, México, Distrito Federal.

Moreno, L. (2001). Instrumentos matemáticos computacionales. *Memorias del Seminario Nacional*. Recuperado de: http://mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-81040_archivo1.pdf

Niiniluoto, I. (1999). Defending abduction. *Philosophy of science*, *66*, S436-S451.

Pedemonte, B. (2003). What kind of proof can be constructed following an abductive argumentation. *Proceedings of the Third Conference on European Research in Mathematics Education*. CNR Genova. Recuperado de: http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/CERME3/Groups/TG4/TG4_Pedemonte_cerme3.pdf

Pedemonte, B. (2007a). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational studies in mathematics*, *66*(1), 23-42. Recuperado de: https://www.researchgate.net/publication/225469822_How_can_the_relationship_between_argumentation_and_proof_be_analysed

Pedemonte, B. (2007b). Structural relationships between argumentation and proof in solving open problems in algebra. En *Proceedings of the V Congress of the European Society for Research in Mathematics Education CERME* (Vol. 5, pp. 643-652).

Pedemonte, B., & Reid, D. (2011a). The role of abduction in proving processes. *Educational studies in mathematics*, *76*(3), 281-303. doi: 10.1007/s10649-010-9275-0

Pedemonte, B., & Buchbinder, O. (2011b). Examining the role of examples in proving processes through a cognitive lens: the case of triangular numbers. *ZDM*, *43*(2), 257-267.

Pedemonte, B., & Balacheff, N. (2016). Establishing links between conceptions, argumentation and proof through the ck¢-enriched Toulmin model. The Journal of Mathematical Behavior, 41, 104-122.

Piaget, J. (1993). *Seis estudios de psicología.* Barcelona, España: Planeta-De Agostini

Prusak, N., Hershkowitz, R. & Schwarz, B. B. (2012). From visual reasoning to logical necessity through argumentative design. *Educational Studies in Mathematics. Springer for research and development*, *79*(3), 19-40. doi: 10.1007/s10649-011-9335-0

Real Academia Española. (2016). *Diccionario de la lengua española* (23.ª ed.). Consultado en https://www.rae.es

Reid, M. (2018). Abductive Reasoning in Mathematics Education: Approaches to and Theorisations of a Complex Idea. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *14*(9). https://doi.org/10.29333/ejmste/92552

Rider, P. (1966). *Geometría Analítica.* Barcelona, España: Montaner y Simón.

Rojas-Garzón, P. & Vergel, R. (2014). Procesos de Generalización y Pensamiento Algebraico. *Educación Científica y Tecnológica*, *2*(688). doi:10.14483/23448350.7753.

Villa, J. (2006). El proceso de generalización Matemática: Algunas reflexiones en torno a su validación. *Tecno Lógicas.* 139-151. doi:10.22430/22565337.525.

Yackel, E. (2001). Explanation, justification and argumentation in mathematics classrooms. En M. Van den Heuvel-Panhuizen (Eds.), *Proceedings of the 25th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 9–24). Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.

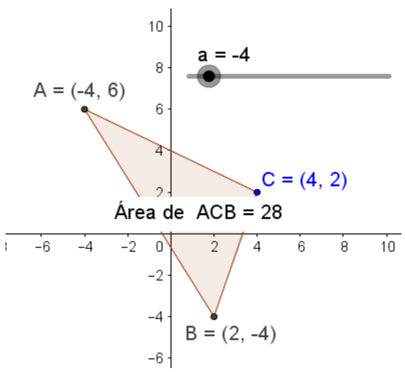
Zubieta G. (1994). Probar es convencer y explicar. *Memorias de la IV Jornada Sobre la Enseñanza de la Geometría* (pp. 35–42). Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV.

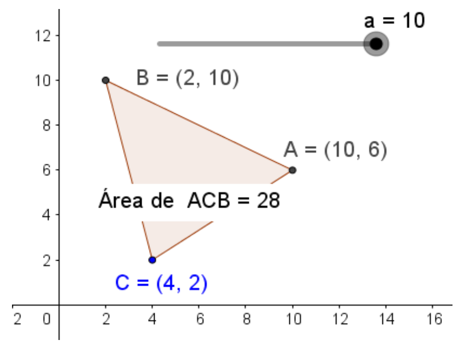
ANEXOS

ANEXO 1: PROBLEMAS ADICIONALES IMPLEMENTADOS EN LA FASE 1 DE LA PRIMERA ETAPA DE INVESTIGACIÓN (ESTUDIO PILOTO)

Problema I

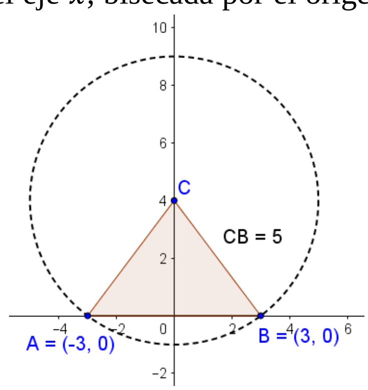
El área de un triángulo cuyos vértices son $(a, 6)$, $(2, a)$, $(4{,}2)$ es 28. Encuéntrense los valores de a.





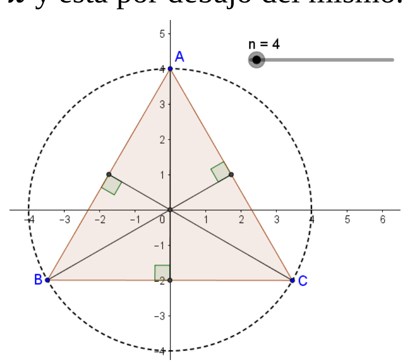
Problema II

La base de un triángulo isósceles es de 6 unidades; cada uno de sus lados iguales es de 5 unidades. Su base está sobre el eje x, bisecada por el origen. ¿Cuáles son las coordenadas de sus vértices? (Dos casos)



Problema III

El lado de un triángulo equilátero es de $\boldsymbol{a}$ unidades. Sus medianas se cortan en el origen. Uno de los lados es paralelo al eje $\boldsymbol{x}$ y está por debajo del mismo. ¿Cuáles son las coordenadas de sus vértices?



ANEXO 2: ACTIVIDADES ADICIONALES IMPLEMENTADAS EN LA FASE 2 DE LA PRIMERA ETAPA DE INVESTIGACIÓN

I. Guía Rápida de Referencia (Actividades A, B y C)[34]

¿Qué es GeoGebra? Un conjunto unificado y fácil de usar que conforma un potente programa de Matemática Dinámica. Un utilitario para enseñar y aprender en todos los niveles educativos. Un encuadre versátil en el cual se conjugan **geo**metría interactiva, ál**gebra**, el cálculo propio del análisis y de las estadísticas y sus registros gráficos, de organización en tablas y de formulación simbólica. Una fuente abierta del programa libre accesible en www.geogebra.org

Lo Primero a Destacar:

- *GeoGebra* facilita a los estudiantes la creación de construcciones matemáticas y modelos para las exploraciones interactivas y los sucesivos cambios de parámetros.
- *GeoGebra* es también una herramienta de autoría que les permite a los docentes crear páginas-web interactivas, seleccionarlas de entre las que colegas de todo el mundo ofrecen para compartir las producciones en www.geogebratube.org.

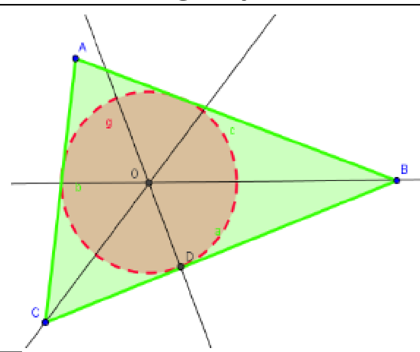
Al abrir *GeoGebra*, aparece la siguiente ventana:

Guiando con el ratón (o *mouse*) los útiles de la *Barra de Herramientas* pueden trazarse construcciones en la *Vista Gráfica* a partir de elementos cuyas coordenadas o ecuaciones aparecen, en simultáneo, en la *Vista Algebráica:* lo geométrico y lo algebraico en GeoGebra, se complementan y se registran uno junto al otro.

En la *Barra de Entrada* pueden anotarse directamente coordenadas, ecuaciones, comandos y funciones que pasarán a representarse en la *Vista Gráfica* al ingresarse pulsando *Enter* (*Intro* en algunos teclados). Comenzaremos con algunas construcciones de tipo geométrico.

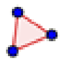
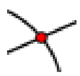
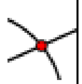
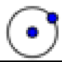
Primer Ejemplo: Circunferencias en un Triángulo.

Tarea: A) Construir un triángulo y una circunferencia inscrita



[34] Guía de Referencia Rápida de GeoGebra 4.2 www.geogebra.org – Traducción de Liliana Saidon. Incluye Las tres primeras Actividades de la Fase 1 de la Primera etapa.

Construcción Guiada por el Ratón o Mouse
Preparativos: Abrir el menú Disposiciones y seleccionar *Geometría*.
Pasos de la Construcción:

1		Seleccionar de la barra de herramientas, la de *“***Polígono***”*. Ahora, un *clic* tras otro en la Vista Gráfica, permite crear los vértices *A*, *B*, y *C* de un triángulo que se cierra reiterando un *clic* sobre A.
2		Elegir la *“Bisectriz”:* (un clic sobre el cuarto botón que aparece en la barra de herramientas, despliega todas las disponibles y activar la cuarta, la **Bisectriz**). Para trazar las de un par de ángulos, basta con indicar los tres puntos que los delimitan, en sentido anti-horario con el vértice siendo el segundo punto laterales: *B, C, A* para uno y *A, B, C*
3		Con la herramienta **“Intersección de Dos Objetos”**, indicando ambas bisectrices, queda establecido el punto del centro de la circunferencia buscada. Para llamarlo *“O”*, *basta con un* clic derecho sobre el punto (Mac OS: ctrl-clic) y elegir *“Renombra”* del menú contextual desplegado.
4		Se traza la “**Recta Perpendicular***”* desde *“O”* al segmento *a* (del lado que une *a B* con *C*.
5		*S*e vuelve a emplear la herramienta “**Intersección de Dos Objetos***”* para que quede establecido el de la perpendicular con el lado *a*, *“E”*. *<u>Atención</u>:* Es importante distinguir que lo que se interseca sea la perpendicular con el lado, no con el triángulo que es una alternativa también posible pero errónea en este
6		Con *“***Circunferencia dados su Centro y uno de sus Puntos***”* se completa la construcción con un *clic* en el punto centro *O* y otro en el de intersección recientemente creado, “*E”*.
7		Con *“****Elige y Mueve****”* se puede emplear el ratón o *mouse* para desplazar los vértices del triángulo y notar como toda la construcción se ajusta dinámicamente a los cambios, manteniendo las relaciones establecidas que dan lugar a la circunferencia correspondiente.

Algunas Pistas:
Los botones de “*Deshace”/y* *“Rehace”* en la esquina derecha de la barra de herramientas son muy útiles para el desenvolvimiento de cualquier construcción y conviene emplearlos al menos tentativamente

Para ocultar un objeto, basta con apuntarlo y con un *clic* derecho (en SO Mac, Ctrl-*clic*) y en el menú contextual desplegado, quitar la tilde a *Muestra Objeto*.

Para cambiar la apariencia de los objetos, (color, tipo de trazo…) se puede emplear la barra de estilo: un *clic* en el margen superior de la Vista Gráfica, lo expone u oculta. Para más opciones, basta con un clic (en Mac OS: Ctrl- *clic*) sobre el ícono de *Propiedades de GeoGebra* y seleccionar *Objetos* del menú.

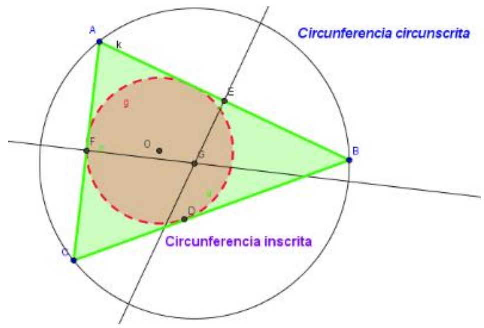
Los Ejes y la Cuadrícula pueden mostrarse u ocultarse empleando la Barra de Estilo.

Se pueden seleccionar diferentes *vistas* como la Vista Algebraica, Gráfica, Hoja de Cálculo y/o CAS de Álgebra Simbólica, según se tilden o no en el menú “*Vista*”, o en la barra lateral de Apariencias (a la derecha de la Vista Gráfica).

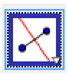
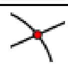
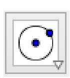
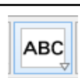
Para desplazar la construcción en la *Vista Gráfica*, basta con seleccionar la herramienta que “Desplaza la Vista Gráfica” y arrastrarla con ayuda del *mouse* o ratón.

 El Protocolo de Construcción es un ítem del menú Vista en cuya ventana emergente se lista la secuencia de construcción (para revisarla paso a paso y cambiar el orden o modificarla). Usando los botones correspondientes se puede volver a realizar la construcción paso a paso. En su propio menú se fija la lista exhaustiva de datos a ostentar por cada paso de construcción. Además, se pueden desplazar las filas de cada paso hacia arriba o abajo para modificar el orden de los pasos.

Tarea: B) Construir ahora una circunferencia circunscrita al triángulo



Preparativos: Oculta la perpendicular al lado BC así como las bisectrices.
Pasos de la Construcción:

1		Seleccionar de la barra de herramientas, la de *mediatriz* y obtener la mediatriz de los lados AB y AC.
2		Ubicar el punto de intersección de ambas *mediatrices.*
3		Seleccionar de la barra de herramientas, la de *circunferencia dados el centro y un punto sobre la circunferencia.*
4		Seleccionar la herramienta Texto y coloca el nombre a cada circunferencia.

Construcción utilizando la Barra de Entrada

Preparativos: Vamos ahora a llevar adelante la construcción de la circunferencia inscrita, pero usando la barra de entradas, por lo que recomenzamos todo pidiendo *Nuevo* del menú *Archivo*. Abrimos el menú *Disposiciones* para seleccionar *Algebra y Gráficos.*
Pasos de Construcción:
Veamos cómo construir el mismo triángulo desde la Barra de Entrada.

Comenzamos por abrir una nueva hoja de trabajo (**Archivo** – **Nuevo**) e introducir los siguientes comandos en la Barra de Entrada (al pie de la pantalla), pulsando *Enter* (*Intro* en algunos teclados) al final de cada línea.

A = (2, 1)
B = (12, 5)
C = (9, 11) Polígono
[A, B, C]
CircunferenciaInscrita [A, B, C]
b_a = Bisectriz[A, B, C]
b_b = Bisectriz[B, C, A] M
= Interseca[b_a, b_b]

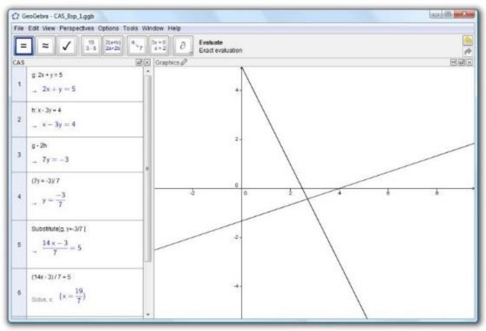
Algunos trucos:

- Auto completado de comandos: después de ingresar las dos primeras letras de un comando, se completa una palabra sugerida. Si se trata del comando deseado, basta pulsar *Enter (Intro en algunos teclados)* pero si no es así, se continúa tecleando el nombre del comando.
- No es necesario teclear el nombre de cada comando: es posible seleccionarlos de la lista situada a la derecha del campo de entradas.
- Un *clic* sobre el botón Ingresa (a la izquierda) activa el modo Campo de entradas que permite introducir directamente un objeto, simplemente eligiéndolo

  con un *clic* en la Ventana de Álgebra o en la Zona Gráfica.
- Una ventana expone explicaciones más detalladas al respecto al pulsar el botón de *Ayuda* con un *clic* sobre el correspondiente botón de la izquierda.
- Combinando las ventajas de las dos formas de trabajo posibles, mediante el *mouse* o ratón y con la introducción de comandos, se obtendrán los mejores resultados con *GeoGebra*.
- En la barra de menu de windows elige Opciones, después elige Avanzado y después preferencias vista gráfica. En Barra de Navegación elige Muestra. Aparecerá una barra con la cual podrás ver los pasos de tu construcción a manera de reproducción

Ejemplo 2: Resolución de un Sistema de Ecuaciones

Desafío*: Resolver un sistema de ecuaciones lineales por método de suma y resta.*



Preparativos: Pulsando la flecha en el borde lateral derecho de la Vista Gráfica, en *Apariencias*, seleccionar x= *CAS y Gráficos*. La sigla CAS refiere a álgebra simbólica computacional. Es importante tener en cuenta que la Vista CAS de Cálculo Simbólico sólo está disponible a partir de GeoGebra 4.2 en adelante.

Pasos de Construcción: Se deben anotar los siguientes comandos en las filas de la vista CAS, pulsando *Enter* (*Intro* en algunos teclados), después de cada línea.

1	g: 2x + y = 5	… para crear la recta g
2	h: x – 3y = 4	… para crear la recta h
3	g – 2h	Se restan las ecuaciones para eliminar la variable x
4	)	Ingresar) para obtener el resultado de la línea previa. Ahora, basta con teclear /7 para obtener (7y = -3)/7
5	Sustituye[g, y=-3/7]	Sustituye y por -3/7 en la primera ecuación g.
6	2x - 3 / 7 = 5 Resuelve: $\left\{x = \frac{19}{7}\right\}$	Ahora, un *clic* en la herramienta *Resuelve* para obtener la solución de x también.

7	{x = 19 / 7} ResoluciónN: $\{x = 2.71\}$ y = (-3) / 7 ResoluciónN: $\{y = -0.43\}$	Clic en las filas con los resultados para x y para y. Click en Resolución numérica (aproximación).

Algunos Trucos: La vista CAS permite trabajar con fracciones, ecuaciones y fórmulas que incluyan variables indefinidas, de modo que los estudiantes puedan incursionar en este tipo de tareas con *GeoGebra*.

$\frac{15}{3 \cdot 5}$ Para manipular solo una parte de una expresión, basta con seleccionarla con el *mouse* o ratón y a continuación un *clic* sobre la herramienta, por ejemplo, Factoriza, que afectará a la expresión escogida.

x = La solución también se puede determinar inmediatamente, definiendo *f(x)* y *g(x)* en el ejemplo previo, seleccionando ambas filas y aplicando la herramienta que Resuelve.

Más información:

Software	http://www.geogebra.org Página web de *GeoGebra* www.geogebra.at en la cual encontrarán tanto información complementaria y diversificada como la última versión del programa.
Manual y Tutoriales	http://wiki.geogebra.org
GeoGebra en Tube	http://www.geogebratube.org
Ejemplos y Materiales (Banco de Recursos	www.geogebra.at/en/wiki
Foro de Usuarios	http://www.geogebra.org/forum

Tarea: C) Construye un triángulo con sus tres Alturas, medianas, mediatrices, bisectrices y sus tres ángulos. Con el uso de la barra de herramientas obtén su área y su perímetro.

II. Actividades D, D2, E, E2 Y F.

Tarea: D) Resuelve el siguiente problema utilizando GeoGebra y contesta la siguiente pregunta. Guarda el archivo en la USB con el nombre "Tarea D".

Liconsa va a colocar una lechería cercana a tres pueblos no colineales de tal forma que la distancia que recorran los habitantes de cada localidad a la lechería sea la misma. ¿Dónde debe ubicar Liconsa su lechería y por qué?

Tarea[35]: D2) Resuelve el siguiente problema utilizando geogebra y contesta la siguiente pregunta. Guarda el archivo en la USB con el nombre "Tarea D2".

A) Activa la apariencia Álgebra con el plano cartesiano.

B) Crea 2 deslizadores llamados h y b (dar un intervalo de 1 unidad a cada uno de ellos).

C) Ubica tres puntos: $A(0,0), B(b,0)$ y $C(0,h)$.

D) Traza una paralela al eje x que pase por el punto C.

E) Coloca un punto D sobre esta última recta.

[35] Para llevar a cabo las Tareas D y E, los grupos de la asignatura de Geometría Analítica a cargo se dividieron en dos secciones, por esa razón se aplicaron dos versiones distintas de cada una.

F) Traza un triángulo A, B, D

1. ¿Si mueves el punto D (sin mover A ni B) cambia el área del triángulo? ¿Por qué?
2. ¿Qué sucede con el área si mueves el punto B (sin mover $A\ ni\ D$)? ¿Por qué?
3. ¿Qué sucede con el área si ahora mueves el punto C? ¿Por qué?
4. Utilizando las variables de los títulos de los deslizadores, escribe la expresión para representar el área de cualquier triángulo observado en tu construcción.

Tarea: E) Sigue las instrucciones y resuelve el siguiente problema utilizando GeoGebra o realizando los cálculos necesarios a lápiz y papel (También puedes emplear el CAS) Contesta las preguntas que se plantean. Guarda el archivo en la USB con el nombre "Tarea E_iniciales de los integrantes_No. Máquina".

A) Activa la apariencia Álgebra con el plano cartesiano.

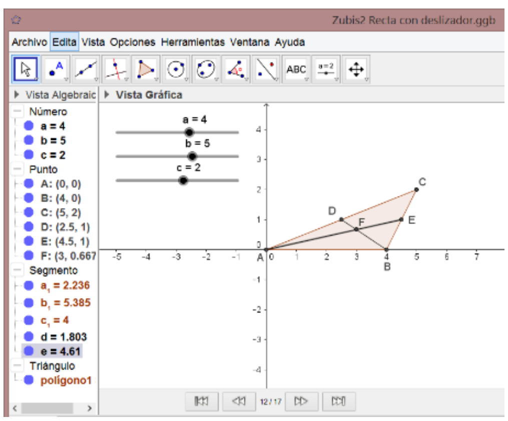
B) Crea 3 deslizadores llamados a, b y c (a los deslizadores a y c dar un intervalo de 1 unidad, al b dar intervalo de 0.1).

C) Ubica tres puntos: $A(0,0), B(a, 0)\ y\ C(b, c)$.

D) Únelos con un triángulo (Mueve cada uno de los deslizadores y observa como son los desplazamientos de los vértices).

E) Traza dos medianas cualesquiera del triángulo.

F) Ubica el punto de intersección de ambas medianas y nómbralo F.



G) Deja la coordenada c del punto C en la posición que gustes. ¿Cuál es el lugar geométrico del punto C al mover la coordenada b?

H) En general, para CUALQUIER posición del punto C ¿Cuál es el lugar geométrico del Punto C al mover la coordenada b? Escribe el nombre del lugar geométrico y Justifica tu respuesta.

I) ¿Cuál es el lugar geométrico del punto F al mover la coordenada b?

J) Para CUALQUIER posición del punto C ¿Cuál es la relación entre ambos lugares geométricos? Justifica tu respuesta.

Tarea: E2) Sigue las instrucciones y resuelve el siguiente problema utilizando GeoGebra o realizando los cálculos necesarios a lápiz y papel (También puedes emplear el CAS) Contesta las preguntas que se plantean. Guarda el archivo en la USB con el nombre "Tarea E2_iniciales de los integrantes_No. Máquina".

A) Activa la apariencia Álgebra con el plano cartesiano.

B) Crea 1 deslizador llamado *R* (dar un intervalo de 0 a 20 y un incremento de 1 unidad)

C) Ubica un punto *O* en el origen del plano cartesiano.

D) Traza una circunferencia con centro en *O* y de radio *R* (con la herramienta circunferencia centro-radio)

E) Con la herramienta punto en objeto coloca un punto *E* sobre la circunferencia.

F) Marca los puntos de intersección de la circunferencia con el eje *x* y nómbralos *A* y *B*.

G) Úne los puntos *A*, *B* y *E* con un triángulo.

H) Traza dos medianas cualesquiera del triángulo.

I) Ubica el punto de intersección de ambas medianas y nómbralo *F*.

J) Coloca *R* en el valor que quieras ¿Cuál es el lugar geométrico del punto *F* al mover el punto *E*?

K) En general, para CUALQUIER valor de *R* ¿Cuál es el lugar geométrico del Punto *F* al mover el punto *E*? Justifica tu respuesta.

L) ¿Cuál es la relación entre ambos lugares geométricos?
G) ¿Cuál es la relación entre los puntos *E* y *F*?

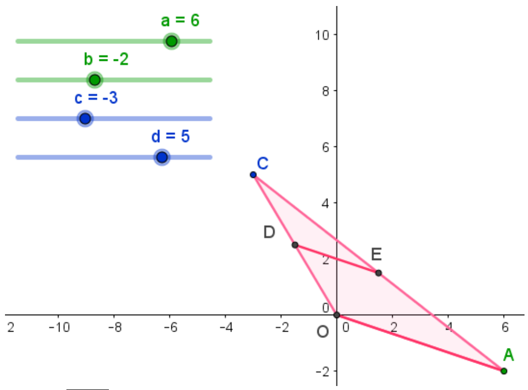
Tarea: F) Sigue las instrucciones y resuelve el siguiente problema utilizando GeoGebra. Contesta las preguntas que se plantean.

A. Abre la apariencia Geometría.
B. Traza una circunferencia dado un centro y un punto sobre la misma.
C. Coloca un punto que se pueda deslizar únicamente sobre la circunferencia (Punto en objeto). Renombra dicho punto como *P*.
D. Traza una recta tangente a dicha circunferencia que pase por *P* (Puedes emplear la herramienta disponible). Mueve el punto *P* ¿Cómo son el radio y la recta tangente entre sí? ¿Cómo podrías verificarlo? ¿Cambia esta relación si aumenta o disminuye el radio de la circunferencia?
E. Oculta el punto *B*. Coloca otro punto sobre la circunferencia y nómbralo Q. Traza una cuerda *PQ* y su mediatriz. Mueve el punto P ¿Por dónde pasa siempre dicha mediatriz?
F. Traza un triángulo *APQ* ¿Qué tipo de triángulo es? Justifica tu respuesta
G. Genera un nuevo archivo.

H. Traza una recta dados dos puntos (después de trazada la recta oculta dichos puntos).
I. Coloca otro punto fuera de la recta y nómbralo *P*.
J. Reto: Traza una <u>circunferencia tangente</u> a la recta que pase por *P* (Tip: Coloca un punto *M* que se deslice por la recta; la circunferencia deberá tocar ambos puntos: *P* y *M*)
K. Traza el lugar geométrico que describe el centro de dicha circunferencia al mover el punto *M*.

ANEXO 3: PROBLEMA ADICIONAL DE LA FASE 3 DE LA PRIMERA ETAPA DE INVESTIGACIÓN (ESTUDIO PILOTO)

AOC es un triángulo con vértices $O\ (0,0)$, $A(a,b)\ y\ C(c,d)$. D y E son los puntos medios de los lados OC y CA ¿Cómo son los segmentos DE y OA entre sí? Justifica tu respuesta.



Conjeturas: $\overline{DE}$ es la mitad de $\overline{OA}$ y ambos son paralelos.

Prueba algebraica:

$C(c,d)$, $O(0,0)$, $A(a,b)$.

Si D es el punto medio de OC, entonces sus coordenadas son: $D\left(\frac{c}{2},\frac{d}{2}\right)$

Del mismo modo, si E es el punto medio de CA, sus coordenadas son: $E\left(\frac{c+a}{2},\frac{d+b}{2}\right)$

Con estos datos, se calculan las longitudes de $\overline{OA}$ y $\overline{DE}$:

$\overline{OA} = \sqrt{a^2+b^2}$

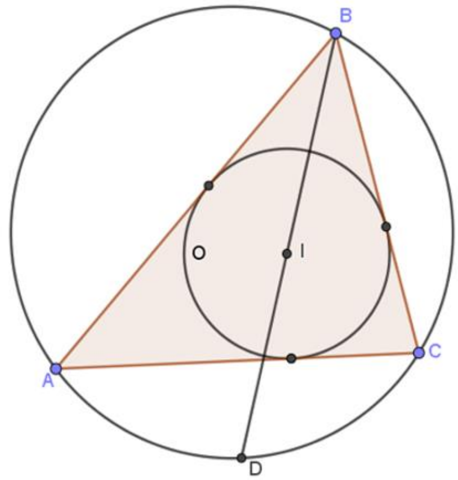
$$\overline{DE} = \sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

$$\therefore\ \overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{OA}$$

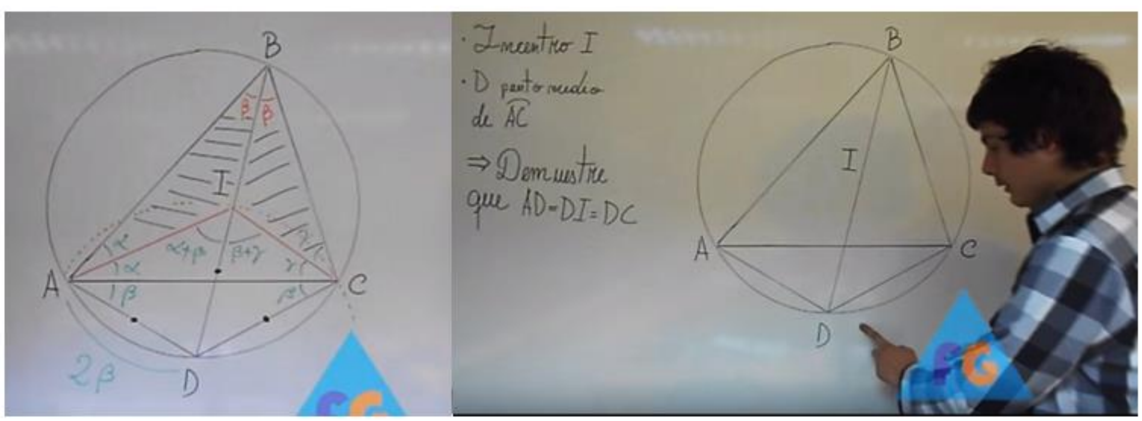
Para probar que $\overline{DE} \parallel \overline{OA}$: $m_{OA} = m_{DE}$

$$m_{OA} = \frac{b}{a};\ m_{DE} = \left(\frac{\frac{b}{2}}{\frac{a}{2}}\right) = \frac{b}{a}$$

ANEXO 4: SOLUCIÓN A LA VERSIÓN ORIGINAL DEL PROBLEMA 1 (SEGUNDA ETAPA) UTILIZANDO GEOMETRÍA EUCLIDIANA



Se tiene un triángulo ABC. O es circunferencia inscrita al triángulo y el punto I es su incentro. Si D es el punto medio del arco AC perteneciente al circuncírculo, probar que: $\overline{AD} = \overline{DI} = \overline{DC}$. Enseguida se muestran figuras de la fuente original: https://www.youtube.com/watch?v=Asa1SJnv_v0&t=358s



Solución:

Si $\overline{AI} = \overline{DI}$, entonces ΔAID es isósceles. Del mismo modo sucede con ΔDIC , ya que $\overline{DI} = \overline{DC}$. Por otro lado, si arco $AD = DC = 2\beta$, entonces $\measuredangle ACD = \measuredangle CAD = \beta$ y si $\overline{AI}$ e $\overline{IC}$ son bisectrices, entonces $\measuredangle BAI = \measuredangle IAC = \alpha$ (Lo mismo sucede con $\measuredangle ICA = BCI$). Finalmente, $\measuredangle AID = \measuredangle DIC = \alpha + \beta$ por ser ángulos exteriores a los triángulos AIB y BIC, lo cual implica que AID y DIC son triángulos isósceles y que $\overline{AD} = \overline{DI} = \overline{DC}$. Es importante observar que al ser estos segmentos iguales, significa que es posible trazar una circunferencia con centro en D que pase por C, A e I. Dicha circunferencia, sería el lugar geométrico de tal incentro.