Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional

Unidad Zacatenco
Departamento de Matemática Educativa

RESIGNIFICACIÓN DE LA INTEGRAL EN UNA COMUNIDAD DE ESTUDIANTES DE DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA. UNA CATEGORÍA DE ACUMULACIÓN Y LA PERSPECTIVA DE IDENTIDAD DISCIPLINAR

Tesis que presenta:

Sindi Lorely Marcía Rodríguez

para obtener el grado de:

Maestra en Ciencias
en la especialidad de
Matemática Educativa

Director de la tesis:
Dr. Francisco Cordero Osorio

Ciudad de México, diciembre de 2020

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT)
el apoyo financiero brindado para realizar mis estudios de maestría.

Sindi Lorely Marcía Rodríguez

Becaria No. 946620

Esta investigación fue financiada por CONACYT, con el Proyecto
"Una categoría de modelación matemática. La pluralidad
epistemológica y la transversalidad de saberes:
los aprendizajes de los significados de la matemática
en las ingenierías y en los diferentes niveles educativos"
Clave 0284259

Dedicado a:

Mami Nila y papi Andrés; quienes en su corazón me hicieron su hija, me apoyaron, guiaron y ahora desde el cielo continúan velando por mí.

Mis padres, por su entrega incondicional y por ese amor sempiterno que día a día manifiestan.

Los Amo.

Agradecimientos

*A **Dios**, por permitirme cumplir las metas que me tracé y las que nunca me imaginé. Su fidelidad es incondicional.*

A ***Danery, Mary, Yesi y Telvi***, mis hermanos; este tiempo fuera de casa, su apoyo y amor sincero me motivaron constantemente.

A quién me abrió las puertas para iniciar esta aventura, ***Dr. Cordero***; siempre admiraré la pasión que dedica a lo que hace y, sobre todo, su calidad humana.

A mis ***compañeros de maestría;*** por todos los aprendizajes y experiencias juntos, mi admiración y cariño a cada uno.

A cada uno de ***mis profesores;*** por los seminarios impartidos, todos fueron un espacio de crecimiento académico y humano.

Al ***Seminario de Doctorado Soltsa;*** donde junto a mis hermanos académicos de doctorado y maestría y la red Soltsa, conocí el sentido de comunidad en medio de reflexiones profundas y buenos momentos.

Al ***personal administrativo y técnico*** del Departamento y de la Biblioteca de Matemática Educativa, por su amabilidad y buen trabajo.

A los ***sinodales***, por dedicar tiempo a la lectura del documento y hacer sus comentarios y sugerencias que enriquecieron el trabajo.

A los ***estudiantes de la UPNFM*** en Honduras que formaron parte de la comunidad de estudio de esta investigación, por su esfuerzo, empeño y dedicación.

A mis ***amigos***: compatriotas hondureños y de Latinoamérica. Compartir con ustedes fue y será una experiencia enriquecedora.

A mi mayor inquisidor, quien se mantuvo constante dándome su apoyo incondicional en todo momento de este proceso y se ha encargado de acumular metas y alegrías en mi vida, a ti mi ***Giaco****,* solo puedo decirte*:* ***gracias, amor****. Lo logramos.*

Contenido

Resumen

En la enseñanza habitual del Cálculo Integral el estudiante de docencia de la matemática memoriza y emula procedimientos para resolver ejercicios típicos que impone la matemática escolar. En la presente investigación, se problematiza la enseñanza de la Integral Definida de la matemática escolar —la cual ocurre con una centración al objeto matemático— confrontándola con la matemática funcional de la Integral Definida: la Categoría de Acumulación.

La investigación se sustenta con la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, en el marco del programa Sujeto Olvidado y Transversalidad de Saberes (SOLTSA), el cual consiste recuperar la funcionalidad del conocimiento matemático y ponerla en una relación horizontal y recíproca con otros saberes.

Se muestra y justifica un *diseño de situación escolar de socialización*, construido con base en la Categoría de Acumulación y con la perspectiva de identidad disciplinar para socializar la matemática funcional de la Integral Definida. La puesta en escena del DSES, se desarrolló en una comunidad de conocimiento matemático de estudiantes de docencia de la matemática, quienes cursaban el tercer año de su carrera en Honduras.

Como parte de los resultados, se identificó, por un lado, los elementos de adherencia del discurso matemático escolar de la Integral Definida, los cuales impiden al estudiante de docencia de la matemática incorporar el conocimiento matemático funcional. Y, por otro, en contraparte, se evidenció la emergencia de los usos de la acumulación en la comunidad.

Como resultado final de la investigación se da evidencia, de los elementos de resistencia al dME, los cuales consistieron en los cuestionamientos propios de la comunidad de conocimiento matemático de estudiantes de docencia de la matemática al conocimiento que estaban legitimando (el rol de la identidad disciplinar) y la valorización de los usos de la acumulación en la nueva relación con el objeto matemático (el rol de la relación horizontal y recíproca de saberes).

Palabras Claves: Cálculo Integral, Formación Inicial Docente, Adherencia, Acumulación, Identidad Disciplinar.

Abstrac

In the usual teaching of Integral Calculus, the prospective mathematics teacher, memorizes and emulates procedures to solve typical exercises imposed by school mathematics. In the present investigation, the teaching of the Defined Integral of school mathematics is problematized —which occurs with a centering to the mathematical object— confronting it with the functional mathematics of the Defined Integral: Accumulation Category.

The research is supported by the Socio-epistemological Theory of Educational Mathematics, in the framework of the Forgotten Subject and the Transversatility of Knowledge program, which consists of recovering the functionality of mathematical knowledge and putting it in a horizontal and reciprocal relationship with other knowledge.

It shows and justifies a *design of school situation of socialization*, built based on the Category of Accumulation and with the perspective of disciplinary identity to socialize the functional mathematics of the Defined Integral. The implementation of the DSES was developed in a community of mathematical knowledge of students of mathematics teaching, who were in the third year of their career in Honduras.

As part of the results, we identified the elements of adherence to the school mathematical discourse of the Defined Integral, which prevent math teaching students from incorporating functional mathematical knowledge. And, on the other hand, the emergence of the uses of accumulation in the community was evident.

As a final result of the investigation, there is evidence of the elements of resistance to the dME, which consisted of the community of mathematical knowledge of students of mathematics teaching own questioning of the knowledge that they were legitimizing (the role of the disciplinary identity) and the valuation of the uses of accumulation in the new relationship with the mathematical object (the role of the horizontal and reciprocal relationship of knowledge).

Keywords: Integral Calculus, Initial Teacher Training, Adherence, Accumulation, Disciplinary Identity.

Introducción

En la formación inicial docente se tiene un principio: *aprender para enseñar*. Este denota un carácter identitario en los estudiantes de docencia de la matemática, es decir adquieren un saber que responde a su futuro quehacer profesional. El planteamiento anterior conlleva cuestionarnos ¿qué aprende el estudiante de docencia de la matemática? y más aún ¿qué enseña? (Opazo-Arellano, 2020).

Si se considera una matemática escolar que, habitualmente, en su enseñanza y aprendizaje ha centrado la atención en conceptos, definiciones y algoritmos, que ha dejado de lado otros saberes (en torno a esa matemática) que viven en la realidad de la gente y, además, permea todos los niveles educativos (Cordero *et al.*, 2015), entonces, podemos decir que el estudiante de docencia de la matemática en su formación está inmerso en esa matemática escolar. Esto implica que emula conceptos, definiciones y algoritmos que han sido privilegiados por el discurso Matemático Escolar[1]. En este sentido, ese discurso provoca que en la formación inicial docente se soslaye la pregunta ¿cómo usa el conocimiento matemático el que aprende para enseñar? (Opazo-Arellano, Cordero y Silva-Crocci, 2018; 2019).

Por ejemplo, parte de la formación académica del estudiante de docencia de la matemática es el estudio del Cálculo Integral. Si se piensa en la estructura habitual de esta asignatura en los planes de estudio, por lo general, se tiene una consigna: introducirlo como antiderivada, es decir, como la inversa de la derivada; de tal manera que primero se debe conocer el concepto de derivada. La razón del porqué se introduce así, pareciera ser, está en términos de la aplicación de técnicas. Además, respecto al significado de la Integral Definida como un área

[1] El discurso Matemático Escolar (dME) se ha reconocido como un sistema de razón que norma y legitima las prácticas y representaciones sociales de los agentes del sistema educativo (Soto, 2010; Soto y Cantoral, 2014).

bajo la curva, no está claro por qué es un *área bajo la curva* y su articulación con el procedimiento que se realiza para aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo. Esto genera una separación entre lo conceptual y algorítmico (Muñoz, 2000).

El escenario planteado anteriormente es en el que el estudiante de docencia de la matemática aprende para enseñar. Esto implica que, por la naturaleza del saber escolar, muchas veces, el estudiante de docencia de la matemática no considera otros saberes cuando planifica y realiza la enseñanza de la matemática (Cordero, 2016a; Opazo-Arellano y Cordero, 2019).

De esta manera, el estudiante de docencia de la matemática se adhiere al discurso Matemático Escolar, es decir lo acepta como el único y verdadero saber, no lo trastoca ni lo cuestiona (Cordero *et al.*, 2015), lo que implica que el estudiante de docencia de la matemática no incorpora su propio conocimiento matemático.

Ante esta problemática, en la presente investigación se reconoce que es indispensable incorporar un marco de referencia diferente (Cordero *et al.,* 2015) al habitual en la formación inicial docente, de tal manera que le permita al estudiante de docencia de la matemática incluir su propio saber y desde esta mirada trastocar la Matemática Escolar.

Para lograr este propósito, desde el Programa Socioepistemológico SOLTSA (donde está inmersa nuestra investigación), se ha propuesto el constructo Identidad Disciplinar, el cual busca que el estudiante trastoque el discurso Matemático Escolar al incorporar su propio uso del conocimiento matemático (Opazo-Arellano, 2020).

Con esta perspectiva, en la presente investigación, la identidad disciplinar se articula junto a la matemática funcional de la Integral: la Categoría de Acumulación. Esta categoría se asume como el nuevo marco de referencia, en el cual el estudiante de docencia de la matemática pondrá en juego su uso del conocimiento matemático. Estos elementos (Identidad Disciplinar y Categoría de Acumulación), se articulan en un *Diseño de Situación Escolar de Socialización (DSES)* que funge como *el instrumento socializador de la matemática funcional* y que está construido desde la perspectiva de Identidad Disciplinar, para que el estudiante pueda incorporar su uso del conocimiento matemático.

Reconocer que el estudiante de docencia de la matemática tiene su propio uso del conocimiento matemático, es una mirada distinta a lo que generalmente se considera para la formación inicial del docente de matemáticas. Generalmente las propuestas tradicionales consisten en incorporar más conocimiento matemático, didáctico y tecnológico en el plan de estudios de su formación, esto no permite darles a los estudiantes de docencia de la matemática la oportunidad de reflexionar, ni cuestionar sobre la matemática escolar, menos la posibilidad de incorporar su uso del conocimiento matemático. Lo cual, por el contrario, esos usos sí están en el centro de la presente investigación.

Para mostrar la manera en que se llevó a cabo nuestro cometido —incorporar un marco de referencia que le permita al estudiante de docencia de la matemática poner en juego su uso del conocimiento en lo local de la Integral Definida— en esta investigación, se estructuraron cinco capítulos. A continuación, comentamos brevemente el contenido de cada uno de ellos.

En el Capítulo I, se plantea la problemática desde nuestra postura del conocimiento matemático escolar, la cual problematiza al discurso Matemático Escolar y los fenómenos que provoca: la adherencia, la exclusión y la opacidad. Se enfoca el estudio al fenómeno de adherencia. Además, se presenta la revisión bibliográfica sobre el Cálculo Integral. Posteriormente se muestra el plan de estudios de la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, sobre el Cálculo Integral de los estudiantes de docencia de la matemática, quienes son la comunidad de estudio. Por último, se exponen las preguntas, los objetivos y la hipótesis de esta investigación.

En el Capítulo II, se discute el sustento teórico de la investigación. Este descansa en el programa socioepistemológico SOLTSA, el cual centra la atención en los usos del conocimiento matemático, bajo las categorías de conocimiento matemático que justifican la *matemática funcional* (Cordero, 2017). Aquí se presenta con detalle la Categoría de Acumulación y la perspectiva de Identidad Disciplinar, además de otros constructos utilizados en el estudio.

En el Capítulo III, se describen los aspectos metodológicos de la investigación. El tipo de investigación y la implementación de aspectos etnográficos. Además, se presenta la ruta metodológica que se desarrolló: desde el reconocimiento de la Categoría de Acumulación, la construcción del DSES, su puesta en escena, hasta el análisis de datos.

En el Capítulo IV, se desarrolla el análisis de los datos y los resultados. Un resultado importante de esta investigación son los elementos de confrontación entre el discurso Matemático Escolar de la Integral Definida y la emergencia de usos en la puesta en escena del DSES.

Finalmente, en el Capítulo V, se concluye, reflexiona, y se plantean las prospectivas de esta investigación.

Capítulo I: Consideraciones Iniciales

I.1 Aproximación a la problemática de la Investigación

Las distintas teorías y enfoques pedagógicos presentes en los sistemas educativos sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática se enfocan en que se aprendan definiciones y conceptos, además, en la ejercitación de procedimientos para responder a ciertas soluciones de problemas matemáticos escolares. Respecto a esto Cordero, Gómez, Silva-Crocci, y Soto (2015) mencionan que los modelos educativos atienden la enseñanza y aprendizaje de la matemática desde la centración en los conceptos y definiciones, lo que provee un saber escolar utilitario y acabado a quien lo aprende, soslayando su autonomía y su creatividad matemática.

Este enfoque de los sistemas educativos ha promovido una visión sobre la *Matemática Escolar:* es el único y verdadero saber. Esto provoca que, se soslayen otros tipos de saberes que emergen en el cotidiano escolar, profesional o disciplinar de la gente. A esta visión se le reconoce como el *carácter hegemónico* de la matemática escolar (Soto, 2010).

Lo anterior, deriva en adoptar la Matemática Escolar como el único referente cuando se aprende matemáticas (Opazo-Arellano y Cordero, 2019). Una expresión de esta adopción es la emulación de definiciones y procedimientos: el estudiante o profesor memoriza y reproduce problemas rutinarios de la matemática. De esta forma se "mide" la distancia de la cercanía o lejanía de la emulación que realizan (los estudiantes o profesores) de los procedimientos conceptuales que se enseñan (Cordero, 2017).

Aceptar este enfoque ha dejado en segundo plano entender *cómo usa* el conocimiento matemático la gente en la escuela, el trabajo y la ciudad. De ahí que la matemática escolar esté al servicio de sí misma y no de la *realidad*[2] del que

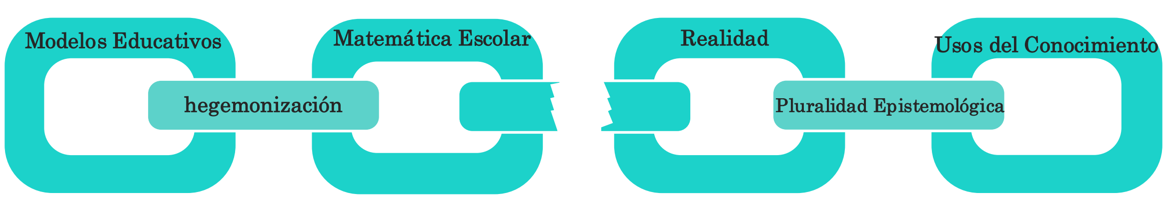
[2] La realidad se asume en este trabajo como la **relación del conocimiento entre la escuela, el trabajo y la ciudad** (Cordero, 2017)

aprende (Cordero, 2016a). Por ejemplo, en las estructuras curriculares de la matemática escolar se puede observar, que se requiere aprender primero un concepto para luego aprender el siguiente, como en el caso del Cálculo, en su mayoría la propuesta está en que: primero se debe aprender a derivar para luego integrar. Pero no se indaga o no se sabe cómo se usa ese conocimiento en distintos escenarios. Por ejemplo, ¿Cómo usa la integral el estudiante, el profesor, el ingeniero u otro profesionista?

Responder a la pregunta *cómo se usa* el conocimiento matemático implica acercarse a la realidad de la gente (Cordero, 2016a). Esta realidad debe ser interpretada en aquello que es habitual en todos los niveles educativos y en la diversidad de disciplinas, así como en el trabajo y la vida de la gente, donde se expresan los usos rutinarios, a saber: el de la obra matemática, el de la matemática de otras disciplinas e inclusive la matemática del cotidiano no disciplinar (Cordero, 2017). Es en esa realidad donde se presentan los otros saberes (*pluralidad epistemológica*) que emergen en las distintas áreas de conocimiento.

El carácter hegemónico de la matemática escolar y la ausencia del uso del conocimiento matemático ha generado una separación entre la Matemática Escolar y la Realidad. Una síntesis de lo planteado anteriormente se ilustra en la Figura 1.

Figura 1.
Separación entre la matemática escolar y la realidad



I.1.1 *El dME y el Fenómeno de la Adherencia*

Al centrar la atención en los objetos, en los sistemas educativos se ha construido un discurso Matemático Escolar (dME) que representa la epistemología dominante que se debe enseñar y aprender. Este dME, desde la postura socioepistemológica se ha caracterizado como un sistema de razón que norma y legitima las prácticas y representaciones sociales de los agentes del sistema educativo (Soto, 2010; Soto y Cantoral, 2014).

Al caracterizar el dME y reconocer la hegemonía —epistemología dominante, centrada en el objeto matemático— que ejerce sobre otros saberes, se identifica al *fenómeno de adherencia,* el que pretende que tanto los profesores como estudiantes aprendan esa matemática sin cuestionar la naturaleza funcional de ese conocimiento que se enseña; de esta manera el dME deja de lado la construcción social del conocimiento matemático, lo que provoca el *fenómeno de exclusión*, que a su vez invisibiliza la pluralidad epistemológica que vive en las realidades de la gente dando paso al *fenómeno de opacidad* (Cordero *et al*., 2015).

La adherencia al dME conlleva no cuestionar la utilidad del conocimiento matemático, por el contrario, hace que se acepte como la única verdad y no se reconozca otro tipo de saber (Cordero *et al*., 2015). Por lo tanto, se adopta el dME como la única referencia en el aprendizaje de la matemática. Lo que conlleva emular conceptos y procedimientos, soslayando la construcción del conocimiento matemático (Opazo-Arellano y Cordero, 2019).

El dME, permea todos los niveles educativos, incluso el superior. Ahí, en ese nivel, la enseñanza del Cálculo es un núcleo central en la formación matemática que reciben los estudiantes universitarios. Lo anterior, se identifica por ejemplo en los planes de estudios de distintas carreras: los estudiantes de docencia de la matemática, ingenieros, médicos, economistas, científicos y, por supuesto, matemáticos, quienes se esfuerzan por aprender y comprender los conceptos del

Cálculo (Rasmussen, Marrongelle y Borba, 2014). Es decir, parece ser que el Cálculo cumple una función dentro de la enseñanza de la matemática. Sin embargo, esta enseñanza favorece el dME, lo que genera que profesores y estudiantes conciban al Cálculo como una herramienta que únicamente provee de algoritmos eficientes, a los cuales, a posteriori, se les busca alguna aplicación (Cordero, 2005).

Dada la importancia del Cálculo, y el interés del presente estudio sobre el Cálculo Integral, se realiza una revisión bibliográfica sobre los estudios que se han desarrollado alrededor de la Integral, con el propósito, por un lado, de conocer los diferentes enfoques y avances que se tienen en esta temática y, por otro, conocer las investigaciones que buscan confrontar el dME desde *lo funcional* de la Integral.

I.2 Una Revisión Bibliográfica

A continuación, se presentan investigaciones que muestran un panorama de la enseñanza y aprendizaje del Cálculo desde diversas posturas teóricas.

I.2.1 *Investigaciones del Cálculo Integral desde diversas posturas teóricas*

Se revisó el "Teaching and Learning of Calculus", Topical Surveys (2016), que surge de las discusiones del 13º Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME) (Bressoud, Ghedamsi, Martinez-Luaces y Törner). Ahí se muestran los últimos avances de investigación en el área, acompañado de sus antecedentes. Sin embargo, para los fines de nuestra investigación solo consideramos lo relacionado con el Cálculo Integral. Además, se agregan comentarios e incorporan otras investigaciones.

- **Sobre la comprensión y dificultades del aprendizaje**

  El estudio de Kirsch (1976) muestra una de las primeras contribuciones a la comprensión de cómo enfocar la integración. Donde destacó en particular el papel de la visualización del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC), argumentando que una conceptualización de las relaciones entre la Integral y la Derivada sería posible con un énfasis adecuado de la derivada como una tasa de cambio y como la pendiente de la recta tangente.

Por otro lado, Orton (1983) sugirió que la raíz del problema, con respecto a la dificultad que presentan los estudiantes para entender la Integral Definida como límite de una suma, se debe a las dificultades que estos tienen con los límites en general.

Rasslan y Tall (2002) identifican las ideas que tienen los estudiantes alrededor del Cálculo Integral. Destacan que ningún estudiante la definió como un límite o hizo referencia a una suma de Riemann. Por el contrario, sí la relacionan con el área bajo la curva y con la resta de la antiderivada evaluada en los puntos finales. Sin embargo, la mayoría de los escolares no dieron ninguna respuesta. Lo que lleva a los autores a cuestionar el enfoque tradicional de la integración, que comienza por aproximar áreas, continuando con las reglas para calcular áreas bajo la curva y luego introducir el TFC como la herramienta que facilita la búsqueda de áreas.

Grundmeier *et al*., (2006) muestran que la comprensión de las Integrales como área ayuda muy poco a la capacidad de los estudiantes para utilizar las Integrales Definidas. En esa misma línea, Sealey (2006) documentó la dificultad de los estudiantes para conectar el concepto de Integral Definida como un área, con la Integral Definida como acumulación.

Por su parte, Haddad (2013) categorizó las dificultades de los estudiantes universitarios de primer ingreso, en relación con la distinción entre área, antiderivada e Integral. Este autor considera que la ineficiencia de los conocimientos de los estudiantes está vinculada a una confusión establecida entre estas tres nociones.

Haddad (2013), menciona que para la mayoría de los estudiantes con los que realizó el estudio, la Integral no es otra cosa que un área. Señalando que esto es un primer límite al conocimiento de los estudiantes, en el sentido de que la Integral se interpreta en términos de área sin ninguna consideración de las propiedades que la función tiene o no tiene.

Sealey y Oehrtman (2007) investigaron el papel de la aproximación como vehículo para mejorar la comprensión de los estudiantes de la Integral Definida como límite.

Thompson y Silverman (2008) han investigado las dificultades de los estudiantes con el concepto de integración como acumulación. Señalan que la mayoría de los estudiantes no reconocen la suma de Riemann como una encapsulación de un proceso de acumulación. Lo que puede ser un serio impedimento para entender el Teorema Fundamental del Cálculo (Thompson, 1994).

En cambio, Carlson *et al.* (2003) han demostrado que el énfasis en la covariación puede ayudar al desarrollo de la comprensión de la acumulación por parte de los estudiantes y su relación con el Teorema Fundamental de Cálculo.

(Las investigaciones anteriores están presentes en el "Teaching and Learning of Calculus", Topical Surveys, 2016).

Retomando la investigación de Thompson y Silverman (2008), y más allá de centrarse en las dificultades que tienen los estudiantes para la comprensión de la acumulación, es importante notar la propuesta que hacen los autores para señalar que los estudiantes poseen una compresión de la función acumulación, dado que las investigaciones que están relacionadas con esta idea, en su mayoría, hacen referencia a las opiniones que estos plantean.

Estos autores consideran importante que la idea matemática de una *función acumulación*[3] sea comprendida por el estudiante. Para ello, se debe buscar que el estudiante logre un *process conception* [comprensión de proceso] y una comprensión covariacional de la relación entre x y f. Para ejemplificar lo anterior, toman como ejemplo la función $f\ (x) = 2e^{-cos(x)} - 2.5$. Al respecto de *process conception* mencionan que:

> "This means that they must hold the perspective that though it might require actual effort to calculate any particular value of this formula [$f(x) = 2e^{-cos(x)} - 2.5$], in the end it represents a number, and the number it represents depends only on the value of x (Breidenbach, Dubinsky, Hawks, & Nichols, 1992; Dubinsky & Harel, 1992; see also Oehrtman, Carlson, & Thompson, this volume)" [Esto significa que deben mantener la perspectiva de que, aunque podría requerir un esfuerzo real calcular cualquier valor particular de esta fórmula ($f(x) = 2e^{-cos(x)} - 2.5$), al final representa un número, y el número que representa depende sólo del valor de x (Breidenbach, Dubinsky, Hawks y Nichols, 1992; Dubinsky y Harel, 1992; véase también Oehrtman, Carlson y Thompson, este volumen)]. (p. 2)

Con respecto a la covariación manifiestan que "In the case of the current example, this means understanding that as the value of x varies, the value of $2e^{-cos(x)} - 2.5$ varies accordingly" [En el caso del ejemplo actual, esto significa entender que, al variar el valor de x, el valor de $2e^{-cos(x)} - 2.5$ varía en consecuencia]. (p. 2)

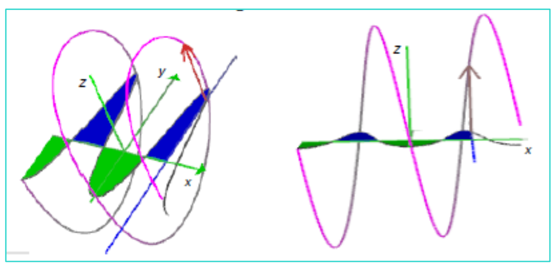
Además, señalan que los estudiantes también necesitan una comprensión covariacional de la relación entre x y f .

[3] Una función acumulación generalmente tiene la forma $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Si f es una función cuyos valores proporcionan medidas de una cantidad, y x también es una medida de una cantidad, entonces $f(c)\Delta x$, donde $c \in [x, x + \Delta x]$, es una medida de una cantidad derivada (Thompson y Silverman, 2008).

To conceive of an accumulation function defined in x is to imagine a total accumulated area for each value of x. This introduces a third dimension into the conceptualization of accumulation functions: students must coordinate three values simultaneously: x, $2e^{-cos(x)} - 2.5$, y $\int_a^x (2e^{-cos(t)} - 2.5)\ dt$. [Concebir una *función de acumulación* definida en x es imaginar un área total acumulada para cada valor de x. Esto introduce una tercera dimensión en la conceptualización de las funciones de acumulación: los estudiantes deben coordinar tres valores simultáneamente: $x, 2e^{-cos(x)} - 2.5$, y $\int_a^x (2e^{-cos(t)} - 2.5)\, dt$]. (p. 3)

Figura 2.

Representación de la relación covariacional x y f.



Nota. Coordinación de x, $2e^{-cos(x)} - 2.5$, y $\int_a^x (2e^{-cos(t)} - 2.5)\ dt$ y su proyección en el plano $x - z$. (Tomado de Thompson y Silverman, 2008)

Al finalizar los autores mencionan que:

Accumulation functions would not be important if understanding them well did not pay off elsewhere… the kind of understanding we have depicted as well structured not only pays off in other areas, they are part of understanding many related ideas and they are essential for understanding many advanced ideas in the calculus… we feel that the precise thinking and thoughtful use of notation required to understand accumulation functions well is in itself valuable mathematical activity [Las funciones de acumulación no serían importantes si el comprenderlas bien no rinde frutos en otros lugares... el tipo de comprensión que hemos

> descrito como bien estructurada no sólo vale la pena en otras áreas, sino que forma parte de la comprensión de muchas ideas relacionadas y es esencial para la comprensión de muchas ideas avanzadas en el cálculo… creemos que el pensamiento preciso y el uso reflexivo de la notación que se requiere para comprender bien las funciones de acumulación es en sí mismo una valiosa actividad matemática]. (p. 11)

Más recientemente, Serhan (2015) buscó examinar el conocimiento procedimental y conceptual que poseen los estudiantes sobre la Integral Definida. Los resultados evidencian que el conocimiento dominante en los estudiantes era el procedimental. Es decir, el que está relacionado, por una parte, el lenguaje formal, o sistema de representación de símbolos de las matemáticas, por otra, en los algoritmos o reglas, para completar las tareas matemáticas (Hiebert y Lefevre,1986; citados por el autor). Además, señala que los estudiantes, tuvieron dificultades para explicar varias de sus respuestas. También, que ningún estudiante mencionó la suma de Riemann como imagen del concepto Integral Definida y que solo unos pocos mencionaron la antiderivada.

De lo anterior, se podría resaltar, entre otros puntos, que en su mayoría las investigaciones reportan la asociación que hacen los estudiantes con la Integral y el área bajo la curva, también, las desventajas de esta asociación con la comprensión misma de la Integral Definida, y, una clara centración en el desarrollo de procesos como en la última investigación mencionada.

Además, el trabajo de Thompson y Silverman (2008), da un panorama distinto del trato de la Integral, sin embargo y de acuerdo con Mota (2019), este estudio está más relacionado con el desarrollo cognitivo de los estudiantes.

Por otro lado, la idea de función acumulación estará presente en algunos de los trabajos que se mencionan en las siguientes secciones relacionadas con la construcción de actividades o tareas alrededor del Cálculo Integral.

- **Sobre el Diseño de Tareas**

  González-Martín *et al.* (2004, 2008) se centraron en la noción de área infinita para proponer un enfoque original, basado en un escenario geométrico, que permite introducir la Integral Impropia.

  En la investigación de Kouropatov y Dreyfus (2013), se construyó y estudió un plan de estudios para estudiantes de secundaria israelíes. Para estos investigadores, la idea de la acumulación es un concepto básico para un plan de estudios de Cálculo Integral en la escuela secundaria. Más recientemente (Kouropatov y Dreyfus 2014), se centraron particularmente en los episodios de enseñanza en los que los estudiantes tratan, por primera vez y de manera intuitiva, la aproximación y acumulación.

(Las investigaciones anteriores están presentes en el "Teaching and Learning of Calculus", Topical Surveys, 2016)

Hoban (2018) mediante un contexto Físico donde se relacionan las cantidades de posición, desplazamiento y velocidad, propone un recurso para introducir la Integral, construido con base en la theory of mathematical growth [teoría del conocimiento matemático] (Tall, 2007, citado por el autor). Este recurso busca formar una comprensión profunda de la Integral a partir de desarrollar una visión multiplicatively based summation [Suma basada en la multiplicación] de la Integral, es decir, comprender el significado de la relación multiplicativa entre la Integral y la diferencial. Se considera a la acumulación como parte del TFC y tiene como uno de sus retos la formalización gradual de la suma de Riemann y su vinculación con el Teorema Fundamental de Cálculo. Sin embargo, el autor en sus conclusiones menciona que es difícil afirmar si el estudiante alcanzó o no una comprensión profunda, pero, la evidencia anecdótica sugiere que el recurso es beneficioso.

- **Sobre el Uso de Tecnología**

Moreno-Armella (2014) afirma que el análisis estándar no interrelaciona correctamente la intuición de cambio y acumulación. Se basó en la idea de Euler de la función continua como un continuo infinitesimalmente enriquecido para enfatizar el papel de la visualización en la integración del aprendizaje y la enseñanza mediante el uso de un artefacto mediador-medio digital.

Basándose en la Teoría de la Objetivación, Swidan y Yerushalmy (2014) exploraron las formas en que los estudiantes se dedican activamente a objetivar gráficamente el concepto de Integrales Indefinidas mediante el uso de artefactos dinámicos. De acuerdo con la Teoría de la Objetivación, los autores consideraron el artefacto como una parte fundamental del pensamiento de cálculo, afirmando que el papel de los profesores y los estudiantes debe ser modificado.

(Las investigaciones anteriores están presentes en el "Teaching and Learning of Calculus", Topical Surveys, 2016)

También, la investigación de Martínez y García (2016), mediante el uso de GeoGebra buscó introducir la noción de suma de Riemann a partir de la suma de áreas de rectángulos. Mencionan que se logró reducir las dificultades que presentan los estudiantes para plantear las sumas de área al introducir una notación simbólica.

Jácome, Fiallo y Parada (2018), mediante la Teoría de la Educación Matemática Realista y el uso de la tecnología, en un contexto de la Física (donde se ponen en juego las cantidades de velocidad y posición junto a las nociones de variación y acumulación), buscan caracterizar los niveles de matematización, del Teorema Fundamental del Cálculo, logrados por estudiantes de un curso de Cálculo.

Se considera que, en las investigaciones anteriores se resalta el uso de la tecnología para simular contextos geométricos (áreas) o físicos (relacionados con velocidad y tiempo) que, mediante la idea de acumulación, mejoren la enseñanza aprendizaje de la Integral Definida.

Las investigaciones que se muestran a continuación están relacionadas con los profesores y estudiantes de docencia de la matemática.

- **Sobre el Cálculo en los profesores y en la formación inicial docente.**

  Para investigar las creencias o metas de los profesores en Cálculo, Eichler y Erens (2014) se centraron en cuatro sistemas de creencias concebidos por medio de cuatro tendencias educativas de la enseñanza del cálculo: visión orientada al proceso, visión orientada a la aplicación, visión formalista y visión de esquema. Los resultados empíricos muestran la necesidad de distinguir entre objetivos centrales, objetivos subordinados y objetivos periféricos. Según este estudio, casi todos los profesores de cálculo tienen los mismos objetivos periféricos relacionados con la visión esquemática: el cálculo es un conjunto de reglas y procedimientos que deben memorizarse y aplicarse en las tareas rutinarias. (Bressoud *et al.*, 2016).

Crisóstomo (2017) realiza un análisis de la dimensión epistémica de la idoneidad didáctica de la Integral con profesores formadores de docentes de matemáticas a nivel secundario. Como uno de sus resultados, se identifica a las configuraciones epistémicas primitiva y la tecnológica, como las más aludidas en los relatos de los profesores formadores. La primera hace referencia a un significado de antiderivada y la segunda al uso de la tecnología para el estudio de la Integral.

Por su parte, Fothergill (2011) examina los aspectos que se deben destacar en un curso universitario de Cálculo diseñado para el estudiante de docencia de la matemática que se enfocan en el nivel bachillerato. En sus resultados, el aspecto que más se destaca para considerar en la enseñanza del Cálculo es la resolución de problemas, seguido de la visualización de funciones y las aplicaciones fuera de las matemáticas.

- **Sobre las características de la enseñanza del Cálculo**

En un estudio con profesores y estudiantes de Cálculo Jones, Lim y Sandler (2016) examinan cómo la forma en que se introduce la Integral, mediante las sumas de Riemann, no propicia que los estudiantes usen la concepción de multiplicatively based summation (MBS) [Suma basada en la multiplicación]. Esta se entiende como una comprensión particular de Riemann basada en la suma… que consiste en dos elementos: 1) la relación multiplicativa entre el integrando y el diferencial para crear un producto resultante, y 2) la idea de sumar pequeñas cantidades (posiblemente infinitesimalmente pequeñas) del producto resultante a lo largo de pequeñas piezas del dominio para capturar la cantidad total de esa cantidad (Jones, 2015a; citado por los autores). La idea de suma se asocia a la acumulación. Concluyen que el enfoque de presentar a la Integral de Riemann como un procedimiento para calcular, contribuye a que los estudiantes en contextos donde sería favorable utilizar MBS no lo usen.

Alanís y Soto (2011), reconocen varios aspectos característicos de la enseñanza del Cálculo Integral:

- Un énfasis en una algoritmia desprovista de significados.
- Conceptualización de la Integral basada únicamente en la noción de área.
- Falta de afinidad con otras ciencias de las cuales el cálculo es subsidiario.
- Insistencia en la enseñanza formalista a sabiendas de las dificultades que trae consigo.
- Uso de los diferenciales por sus bondades didácticas.
- El uso de la tecnología como recurso para salvar esas dificultades.

El resultado de la investigación anterior está en concordancia con lo que reportan Valencia y Valenzuela (2017), quienes analizan cinco libros de texto de Cálculo utilizados en la educación media y superior, para determinar a qué tipo de problemas están expuestos los estudiantes. Evidencian que la mayoría de los problemas son de corte convencional y muy pocos cumplen con criterios para ser problemas de modelaje. Teniendo como consecuencia que los estudiantes únicamente ejercitan los procedimientos vistos en clase.

En síntesis, las investigaciones que se han señalado en esta revisión bibliográfica muestran un panorama de los esfuerzos que se han desarrollado dentro de la disciplina *Matemática Educativa* para contribuir a esclarecer el panorama de la enseñanza y aprendizaje de la Integral Definida, desde diferentes enfoques. Se identifican aspectos como que las dificultades de los estudiantes están relacionadas con los problemas de entendimiento sobre el límite, con la asociación única de ver a la Integral Definida como área bajo la curva o la forma en la que se presenta las sumas de Riemann. Además, las propuestas de diseños en las que, su mayoría, se incorpora la idea de acumulación, donde pareciera ser, están más centradas en un aspecto cognitivo.

Asimismo, se reconocen aspectos que están presentes en la enseñanza del cálculo, mayormente centrada en el desarrollo de algoritmos, procesos y definiciones. Estas características están en la enseñanza tanto a nivel preuniversitario como universitario; características a las que los futuros docentes de matemática están expuestos en su formación.

I.2.2 *Investigaciones socioepistemológicas: un acercamiento a la Categoría de Acumulación*

En lo común de la enseñanza de la matemática escolar no se considera la puesta en uso y significados del conocimiento matemático de la gente, en escenarios de la escuela, del trabajo y de la vida. Por el contrario, únicamente se atienden problemas propios del aula de matemáticas. Desde la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (Cantoral, 2013) se desarrollan investigaciones cuyos resultados revelan un conocimiento matemático funcional y buscan su incorporación en la Matemática Escolar.

En cuanto a las investigaciones que han dado cuenta de la Integral, se evidencia que ésta se resignifica, en la puesta en uso de la gente, en una categoría de acumulación.

Cordero (2003) quién estudió diferentes momentos del desarrollo epistemológico de la teoría de integración e identificó a la expresión $\int_a^b f\,dx = F(b) - F(a)$ como el patrón de construcción. De esta manera se resignificó a la Integral por medio de la noción de acumulación, lo que permitió conformar una categoría de acumulación, la cual es un *conocimiento funcional*, es decir, aquello que es de utilidad al humano en una situación específica (Cordero y Flores, 2007).

Mota (2019) muestra cómo en el campo de modelación matemática la Integral se resignifica a través de la noción de acumulación. Misma que emerge en una situación de modelación matemática del ciclo de vida de la plaga llamada Brevipalpus Chilensis, realizada por una comunidad de conocimiento matemático de Modeladores Biomatemáticos.

Muñoz (2000) busca establecer una relación entre lo algorítmico y lo conceptual. El autor, se propone como objetivo obtener información acerca de la naturaleza de los algoritmos en el Cálculo Integral y lo que significa comprender un algoritmo. Concluye que para propiciar un enlace entre lo conceptual y lo algorítmico, teóricamente, una condición necesaria se refiere a las situaciones que se derivan de *fenómenos de variación continua*. Las que permiten analizar cuánto varían una vez que se reconoce el cómo varían. Además, establece tres estructuras relacionales entre lo conceptual y lo algorítmico, donde las nociones de *Predicción*, *Acumulación y Constantificación de la variable* tienen un rol preponderante.

Otras investigaciones, han tomado a la Acumulación como el significado o como la situación que permite resignificar otros objetos matemáticos, como por ejemplo Parra (2008), quién reconoce la falta de marcos de referencia en la matemática escolar, por lo que construye un diseño que permita resignificar a la derivada. La situación que propone es la Acumulación de un fluido, lo que permite asociar a la derivada con la razón de Acumulación o agotamiento. En algunos de los resultados que menciona, se destaca que los estudiantes establecieron la conservación de la masa, mediante el procedimiento para encontrar el dato que falta, que consiste en tener como base la siguiente relación:

$$[flujo\ de\ entrada - flujo\ de\ salida\ =\ acumulación\ en\ intervalos\ de\ tiempo]$$

La autora menciona que, aunque no estaba considerado en la situación, los estudiantes visualizan que la ecuación de la Acumulación total corresponde a la Integral. En otro estudio, Mendoza-Higuera (2013) construye un diseño basado en una situación de Acumulación de fluidos, que permite significar a la ecuación diferencial lineal como un modelo de estabilidad.

Las primeras dos investigaciones (Cordero, 2003; Mota, 2019) dan cuenta de la emergencia de la Categoría de Acumulación desde una visión funcional, la tercera investigación (Muñoz, 2000) evidencia características que permiten entrelazar procedimientos y significados en el Cálculo Integral (estas tres investigaciones se retomarán más ampliamente en la sección II.1.2 del siguiente capítulo). Las últimas dos (Parra, 2008; Mendoza-Higuera, 2013) han tomado a la Acumulación como la situación que permite resignificar otros objetos matemáticos.

El propósito del presente trabajo de investigación, que está enmarcado en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, es socializar la matemática funcional de la Integral Definida: la Categoría de Acumulación.

Para desarrollar dicho propósito, se consideró una comunidad de estudiantes de docencia de la matemática de la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán (UPNFM), en Honduras. Por tal razón, se presentan algunos aspectos, sobre la Integral, del plan de estudio de esta carrera.

I.3 La enseñanza de la Integral en el Profesorado de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán

Se presenta una revisión del plan de estudios de la carrera de Profesorado de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán junto al tratamiento que tiene la Integral en un libro de texto de la bibliografía utilizada en esta carrera. Todo esto, con el propósito de tener un acercamiento a la forma en que se conocieron las ideas del Cálculo Integral.

Esta universidad, que es la única institución de Honduras que forma a docentes de matemáticas, contempla en el plan de estudios de la carrera de Profesorado de Matemáticas tres cursos de Cálculo, de los cuales en los dos primeros se estudia la Integral, entre otras temáticas:

- Cálculo I. En este curso se centra la atención en el límite de una función y en temáticas del Cálculo Diferencial, pero, en la última temática se trata sobre la Integral como antiderivada.
- Cálculo II. En este curso se centra la atención en el Cálculo Integral, las Sucesiones y Series.

Con este marco de contenidos los estudiantes aprenden las ideas de la Integral.

A continuación, se muestra una tabla con la información detallada de ambos cursos. Se presenta únicamente lo referente al Cálculo Integral.

Tabla 1.
La Integral en la formación del estudiante de docencia de la matemática en Honduras

Calculo I	Calculo II
Descripción: Este curso aborda conocimientos básicos del cálculo diferencial que servirán de fundamento para los cursos de análisis funcional. Se inicia con el concepto de límite y continuidad de una función real, y así introducir el concepto de la derivada y sus aplicaciones, así como la resolución de problemas de optimización. Se continúa con la diferencial y sus aplicaciones	**Descripción:** Este curso proporcionará al alumno las herramientas necesarias para afrontar el aprendizaje de temas más avanzados en matemáticas. Inicia con la Integral Definida, Integrales ordinarias y las técnicas de integración, aplicando estos conceptos en la resolución de problemas de

a problemas de aproximación para finalizar con la antiderivada. Este curso se constituye en una herramienta fundamental para el desempeño profesional.	área y volúmenes, para finalizar con sucesiones, series y series de potencias.
Subcompetencias • Calcular la antiderivada de una función aplicando definiciones y teoremas.	Subcompetencias • Aplicar propiedades de la Integral Definida • Aplicar técnicas de integración para el cálculo de la Integral ordinaria • Utilizar las TIC aplicados en matemáticas en la resolución de guías específicas. • Calcular áreas y volúmenes
Áreas temáticas: • Límites de una función real (interpretación gráfica, numérica y definición, teoremas) • Continuidad de una función (definición y teoremas) • Derivada de una función real (interpretación gráfica, como tasa de variación, teoremas) • Derivadas de funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas y funciones compuestas • Derivación implícita • Límites de formas indeterminadas (Regla de L' Hopital) • Aplicaciones al análisis funcional • Problemas de optimización. • Diferenciales y aproximaciones. • **Antiderivada. La Integral Indefinida. Primer teorema fundamental del cálculo.**	**Áreas temáticas**: • **Técnicas de integración** • **La Integral Definida. Segundo teorema fundamental del cálculo** • **Integral Impropia** • **Aplicación al cálculo de áreas y volúmenes de sólidos de revolución.** • **Aplicación al cálculo de volúmenes de sólidos de secciones planas conocidas.** • **Aplicaciones.** • Concepto de sucesión. Sucesiones crecientes y decrecientes. Acotamiento. • Concepto de series infinitas. • Series de términos positivos. • Criterios de convergencia de series infinitas. • Series alternantes. Convergencia absoluta y condicional de series alternantes. • Polinomio de Taylor. Serie de Maclaurin. • Series de potencias. Radio e intervalo de convergencia. • Derivación e integración de series de potencias. • Algebra de series de potencias

Indicadores de logro	Indicadores de logro:
• Define la antiderivada y aplica propiedades. • Aplica la antiderivada al cálculo de áreas bajo la curva.	• Aplica la diferencial en la resolución de problemas de aproximación. • Interpreta el primer Teorema Fundamental del Cálculo • Interpreta la Integral Indefinida como una familia de funciones. • Aplica técnicas de integración para encontrar la Integral Indefinida. • Interpreta el segundo teorema fundamental del cálculo. • Interpreta la Integral Definida como el área bajo la curva. • Aplica las técnicas de integración para la resolución de problemas • Calcula áreas y volúmenes con la Integral Definida.

Nota. Recuperado del Plan de estudios, 2008. Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán.

La estructura del desarrollo de los temas está en concordancia con lo que se menciona en Rasslan y Tall (2002). Se podría decir que los significados que se privilegian sobre la Integral están en torno a: una antiderivada, una familia de funciones o un área bajo la curva. Además del marcado énfasis que se hace en la aplicación de técnicas (procedimientos) para determinar la Integral.

Si se considera el libro de texto "Cálculo con Geometría Analítica", octava edición de Larson, Hostetler, y Edwards (2006), que es uno de los libros que se sugiere en la bibliografía de Cálculo I y II, también se observan los elementos señalados anteriormente. Como ejemplo, se presentan algunos pasajes al respecto.

Figura 3.

Primera sección sobre Integración

Sección 4.1 **Antiderivadas o primitivas e integración indefinida**

- Escribir la función general de una ecuación diferencial.
- Usar la notación de la integral indefinida para las antiderivadas o primitivas.
- Utilizar las reglas de la integración básicas para encontrar antiderivadas.
- Encontrar una solución particular de una ecuación diferencial.

EXPLORACIÓN

Determinación de antiderivadas o primitivas Para cada derivada, describir la función original F.

a) $F'(x) = 2x$

b) $F'(x) = x$

c) $F'(x) = x^2$

d) $F'(x) = \frac{1}{x^2}$

e) $F'(x) = \frac{1}{x^3}$

f) $F'(x) = \cos x$

¿Qué estrategia se usó para determinar F?

Antiderivadas o primitivas

Suponer que se decide encontrar una función F cuya derivada es $f(x) = 3x^2$. Por lo que se sabe de derivadas, es posible afirmar que

$$F(x) = x^3 \text{ porque } \frac{d}{dx}[x^3] = 3x^2.$$

La función F es una *antiderivada* de f.

Definición de una antiderivada o primitiva

Se dice que una función F es una **antiderivada o primitiva** de f, en un intervalo I si $F'(x) = f(x)$ para todo x en I.

Nótese que F es *una* antiderivada de f, en vez de *la* antiderivada de f. Para entender por qué, observar que

$$F_1(x) = x^3, \quad F_2(x) = x^3 - 5, \quad \text{y} \quad F_3(x) = x^3 + 97$$

son todas antiderivadas de $f(x) = 3x^2$. De hecho, para cualquier constante c, la función dada por $F(x) = x^3 + C$ es una antiderivada de f.

Nota. El primer acercamiento a la Integral es mediante la antiderivada

Figura 4.

Habilidades para desarrollar en la sección 4.2

Sección 4.2 **Área**

- Emplear la notación sigma para escribir y calcular una suma.
- Entender el concepto de área.
- Aproximar el área de una región plana.
- Determinar el área de una región plana usando límites.

Nota. Los objetivos en la sección que relaciona a la Integral como área, en su mayoría, están orientados a lo procedimental.

Figura 5.

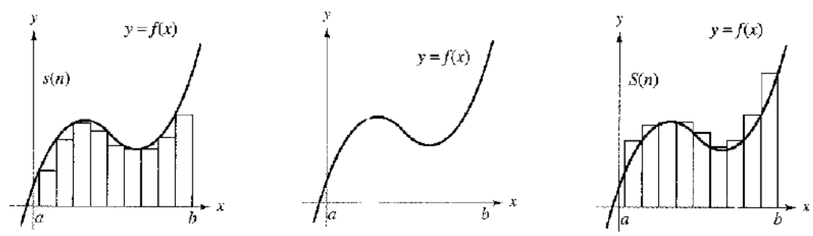
Integral como área bajo la curva

$$\text{Suma inferior} = s(n) = \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\,\Delta x$$

$$\text{Suma superior} = S(n) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta x$$

En la figura 4.12, se puede observar que la suma inferior $s(n)$ es menor o igual que la suma superior $S(n)$. Además, el área real de la región se encuentra entre estas dos sumas.

$$s(n) \leq (\text{Área de región}) \leq S(n)$$



El área de los rectángulos inscritos es menor que el área de la región

Área de la región

El área de los rectángulos circunscritos es mayor que el área de la región

Figura 4.12

Nota. Aproximación al área bajo la curva mediante las sumas de áreas superiores e inferiores

Figura 6.

Definición de la Integral Definida como un límite

Definición de una integral definida

Si f se define en el intervalo cerrado $[a, b]$ y el límite

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$$

existe (como se describió antes), entonces f es **integrable** en $[a, b]$ y el límite se denota por

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx.$$

El límite recibe el nombre de **integral definida** de f de a a b. El número a es el **límite inferior** de integración, y el número b es el **límite superior** de integración.

Figura 7.

Procedimiento para utilizar el TFC

Estrategia para utilizar el teorema fundamental del cálculo

1. *Suponiendo que se conozca* una antiderivada o primitiva f, se dispone de una forma de calcular una integral definida sin tener que utilizar el límite de la suma.
2. Cuando se aplica el teorema fundamental del cálculo, la siguiente notación resulta conveniente.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big]_a^b$$
$$= F(b) - F(a)$$

Por ejemplo, para calcular $\int_1^3 x^3\,dx$, es posible escribir

$$\int_1^3 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big]_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = 20.$$

3. No es necesario incluir una constante de integración C en la antiderivada o primitiva ya que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x) + C\Big]_a^b$$
$$= [F(b) + C] - [F(a) + C]$$
$$= F(b) - F(a).$$

Nota. Explicación de cómo se debe aplicar el TFC, cuando se conoce la expresión analítica de F (antiderivada o primitiva).

El desarrollo que se presenta en el libro de texto anterior no dista de la temática que se propone en el plan de estudios. Donde la Integral permite encontrar otra función o un área determinada entre una función y un intervalo. Sumado a ello, se observa que el conocimiento de la expresión analítica de la $f(x)$ es esencial para el cálculo de la Integral.

Finalmente, aunque lo anterior es importante, queda inmerso dentro del discurso Matemático Escolar (dME), es decir, no queda claro qué es lo funcional de la Integral Definida. Y más aún, la desventaja en la que se encuentra el estudiante de docencia de la matemática ante la adherencia que genera la imposición del dME de este conocimiento matemático. Por tal razón, es necesario incorporar otro marco de referencia que le permita al estudiante de docencia de la matemática ser parte de la construcción social del conocimiento matemático de la Integral Definida, desde donde se haga resistencia al dME (Opazo-Arellano, 2020).

I.4 Planteamiento de la investigación

El dME presente en la formación inicial docente de matemática denota el único marco de referencia que el estudiante tiene para aprender matemáticas, lo que conlleva su ubicación en el fenómeno de adherencia.

En ese sentido, Opazo-Arellano (2020) señala:

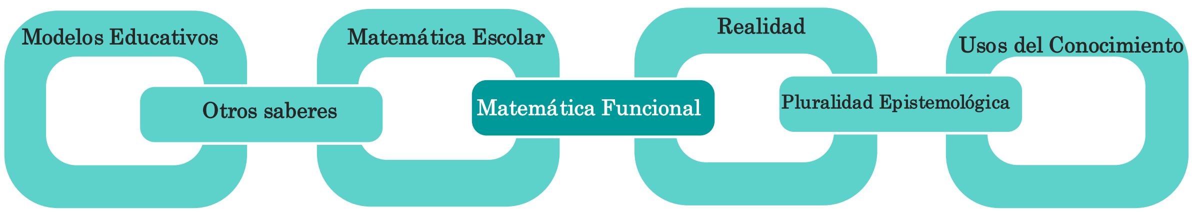
> Cuando el estudiante de docencia de la matemática no cuestiona la epistemología dominante, en definitiva *adopta el saber matemático escolar como* el único referente en la planificación y ejecución de su enseñanza. Por lo que se soslaya su conocimiento matemático y el de la gente, limitando al estudiante de docencia a solo buscar la coherencia entre lo que aprendió en su formación inicial docente y lo que le exige el sistema educativo (p. 53).

Por lo que es fundamental incorporar en la formación inicial docente otros marcos de referencia que le permitan al estudiante cuestionar la matemática escolar y legitimar otro tipo de saber.

Uno de los objetivos que busca la Teoría Socioepistemológica es el Rediseño del discurso Matemático Escolar (RdME), esto implica incorporar la *Matemática Funcional* en la escuela. Esta matemática, es el eslabón que permite relacionar, de forma recíproca y horizontal, la Matemática Escolar con la Realidad, valorando así el uso del conocimiento matemático y su pluralidad epistemológica (Cordero, 2016a).

Lo expresado en el párrafo anterior, conlleva la inclusión de otros saberes en la matemática escolar y la valoración de estos. El esquema que se presenta a continuación representa esta idea.

Figura 8.
Eslabón entre la matemática escolar y la realidad (elaboración propia)



Si nos centramos en el Cálculo Integral, el marco de referencia que valora la matemática funcional es la Categoría de Acumulación, por lo que es fundamental incorporarlo a la matemática escolar.

Además, ante el fenómeno de adherencia se debe considerar un factor que permita enfrentarlo, este es la Identidad Disciplinar que permite *resistir*[4] a tal fenómeno.

En esta investigación, la categoría de Acumulación y la Identidad Disciplinar son articulados y constituyen la base del *diseño de situación escolar de socialización* (DSES). El DSES tiene una doble función: en primer lugar, valorar los usos del conocimiento matemático y sus resignificaciones en las comunidades de conocimiento matemático de profesores y estudiantes; y, en segundo lugar, mantener la reciprocidad y la horizontalidad entre la escuela y el cotidiano de la gente (Cordero, 2017), para así modificar el papel hegemónico del dME e incorporar a la matemática escolar los usos del conocimiento matemático que emergen en el cotidiano de la gente.

Ante el panorama anterior, en esta investigación se buscó que el estudiante de docencia de la matemática confronte el conocimiento del dME del Cálculo Integral con una situación que responde a un conocimiento funcional de la

[4] Resistir quiere decir oposición al estatus quo de la matemática escolar.

Integral: la Categoría de Acumulación. De esta forma se contribuye, desde nuestra postura, a la formación inicial docente.

I.4.1 *Pregunta, Objetivos e Hipótesis de Investigación*

Ante la adherencia que genera el dME, encontrar elementos de resistencia del estudiante de docencia de la matemática contribuye al RdME en la formación inicial docente, por lo que esta investigación se plantea la siguiente pregunta.

Pregunta de Investigación:

¿Cómo resiste el estudiante de docencia de la matemática al discurso Matemático Escolar de la Integral Definida, cuando incorpora sus usos en el desarrollo de un diseño de situación escolar de socialización?

Hipótesis

La emergencia de la Categoría de Acumulación le permite al estudiante de docencia de la matemática resistir al dME de la Integral Definida.

Objetivos

- Construir un diseño de situación escolar de socialización basado en la Categoría de Acumulación, que le permita al estudiante resistir a la adherencia al dME, en nuestro caso de la Integral Definida.
- Identificar los elementos que confrontan al dME de la Integral Definida, cuando el estudiante valora los usos de este conocimiento matemático.

Capítulo II: Marco Teórico

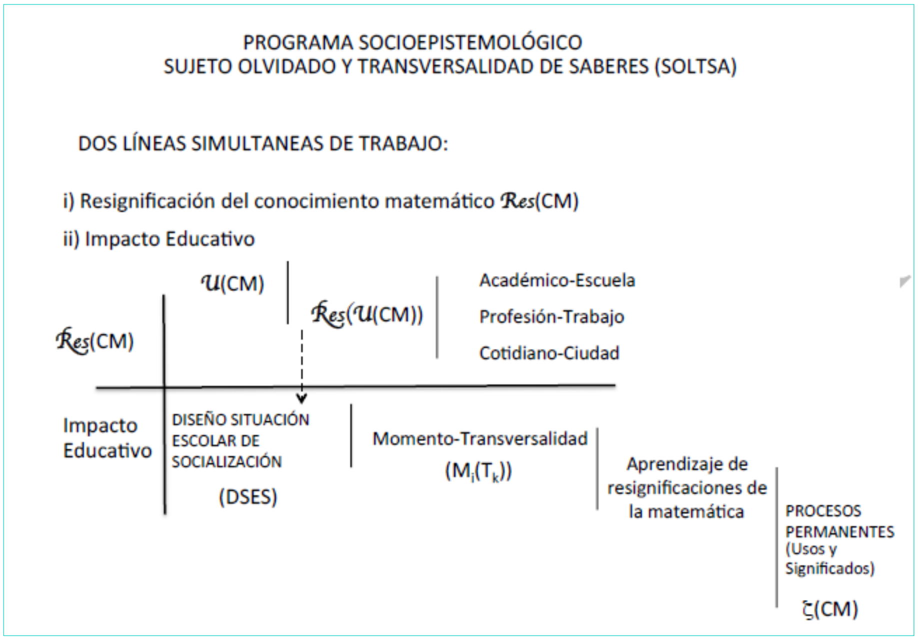
Para atender la problemática planteada en el capítulo anterior se asume la postura de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME), en la cual se busca explicar *el enigma de la construcción social del conocimiento matemático y su difusión institucional* (Cantoral, 2013).

Explicar la construcción del conocimiento matemático demandó poner la atención en las *prácticas sociales*, las cuales se constituyen como "un constructo medular que se define como un sistema complejo de procesos de dimensión social en el que se problematiza el saber matemático, considerando los distintos saberes (sabio, técnico y popular) para sintetizarlos en la sabiduría humana" (Cordero, Del Valle y Morales, 2019, p. 189).

Este constructo, en la evolución y desarrollo de la Teoría Socioepistemológica, se ha provisto de un significado en la problemática, el cual consiste en el reconocimiento de un *sujeto olvidado* que es fundamental recuperar. Este sujeto olvidado tiene diferentes expresiones: la realidad, el cotidiano, los usos del conocimiento y, en términos más genéricos, la gente (Cordero, 2016b).

Considerando la importancia de recuperar el sujeto olvidado, dentro de la Teoría Socioepistemológica, se ha conformado el programa de investigación denominado *Sujeto Olvidado y Transversalidad de Saberes (*SOLTSA*).* El objetivo principal de este programa es *revelar los usos del conocimiento matemático y sus resignificaciones en las comunidades de conocimiento matemático de la gente* (Cordero, 2016b). En él se desarrollan dos líneas simultáneas de trabajo con las que se confronta a la matemática escolar (Cordero, 2017). Las líneas de trabajo de este programa se describen en la siguiente figura.

Figura 9.
Líneas de Trabajo del Programa SOLTSA



Nota. Tomado de Cordero, 2017.

II.1 La Resignificación del Conocimiento Matemático

Al centrar la atención en la recuperación del sujeto olvidado, se cuestiona la función social del conocimiento matemático lo que implica enfocarse en los *usos* del conocimiento matemático en distintas comunidades (Cordero, 2016b).

Para dar cuenta del uso del conocimiento matemático en comunidades en diferentes escenarios —académicos, profesionales o en lo cotidiano de la sociedad—, se ha caracterizado al uso mediante el binomio *Funcionamiento* y *Forma*.

De acuerdo con Cordero y Flores (2007), el *uso* es la función orgánica (*funcionamiento*) de la situación, que se manifiestan por las *tareas* que componen la situación, y la *forma* del *uso* serán *la clase de esas tareas*. Las tareas pueden ser actividades, acciones, ejecuciones y alternancias de dominios.

Los usos se resignifican. Esto sucede cuando ocurre una *alternancia de tareas*, lo que genera una nueva función orgánica, que debatirá con las formas de los usos. A este acto de uso se le llama *resignificación de usos* (Cordero y Flores, 2007).

Esta resignificación de usos del conocimiento matemático emerge de acuerdo con lo situacional de las comunidades, de sus dominios, de las situaciones que enfrentan en su quehacer profesional, académico o cotidiano.

La *transversalidad* de los usos se evidencia en la resignificación del uso. Un mismo uso se resignifica de una comunidad a otra. *La pluralidad epistemológica* se revela en las resignificaciones que se dan en cada uno de los dominios (Cordero *et al*., 2019).

Ambos —la transversalidad de los usos y la pluralidad epistemológica— conforman lo que se denomina *Categoría del Conocimiento Matemático*. Dicha categoría responde a lo que es de utilidad al humano en una situación específica; es decir, es algo más robusto que una representación (de la realidad) o una aplicación matemática (a una situación real), es una práctica plasmada específicamente como la argumentación de la situación en cuestión (Cordero, 2017).

II.1.1 *Categoría de modelación y lo matemático*

Dentro de la categoría del conocimiento matemático está la *Categoría de Modelación* ($\zeta(Mod)$) (Cordero, 2017). La connotación de esta categoría es distinta a la modelación que se entiende en otros referentes teóricos en la Matemática Educativa. Cordero *et al.,* (2019) la presentan como una variedad de modelación la cual se explica de la siguiente manera:

> Asumimos un principio P': la matemática funcional propia de la gente en la relación recíproca y horizontal entre la matemática y el cotidiano.

Este P' genera una categoría de modelación $\zeta(Mod)$ que pone en juego el uso del conocimiento matemático, $U(CM)$, de la gente, en situaciones específicas.

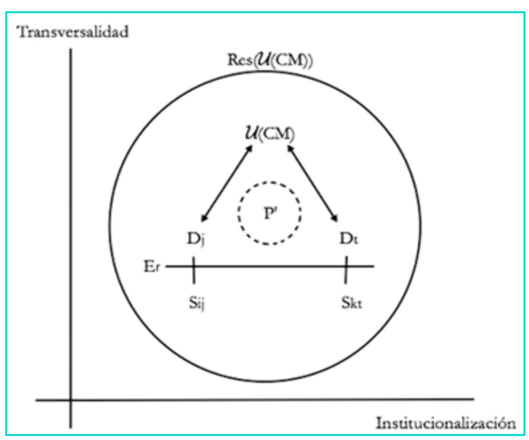
Con este supuesto no preexisten la Realidad ni la Matemática. Se considera que la gente vive entre situaciones diversas, S_k . Entonces en el tránsito entre S_k, suceden epistemologías.

Sin embargo, las S_k podrían estar sobre dominios de conocimiento D_m y en las alternancias entre los D_m. Siendo así, la categoría de modelación es la resignificación de usos, Res(U(CM), cuando sucede un tránsito entre S_k y S_m, incluso en alternancia de dominios.

Este es el conocimiento que genera $\zeta(Mod)$ y se compone de dos ejes: la institucionalización y la transversalidad de saberes, donde suceden situaciones S_{ij}, dominios D_j y alternancias de escenarios: escuela-académico, trabajo-profesión y ciudad-cotidiano.

Al esquema de la relación de todos esos elementos, le llamamos Marco del Saber Matemático de $\zeta(Mod)$ (p. 552).

Figura 10.
Marco del saber matemático de la ζ(Mod)



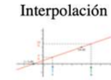
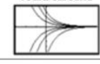
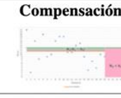
Nota. Tomado de Cordero, 2017.

Lo anterior va más allá de considerar a la modelación como un esfuerzo por relacionar el mundo real con la matemática (Cordero, 2017). Desde esta postura la Categoría de Modelación responde a lo que es de utilidad al humano en una situación específica; es decir, es algo más robusto que una representación (de la realidad) o una aplicación matemática (a una situación real), es un conocimiento funcional (Cordero, 2016a).

Otras posturas orientan el principio "relacionar" asumiendo como único conocimiento verdadero el de la escuela (o el académico) por lo cual "mide" la emulación de ese conocimiento en el cotidiano. Mientras que la postura que se asume en este trabajo privilegia las *acciones* sobre la modelación matemática; se sostiene que hay una categoría de la matemática que valora las relaciones horizontales y recíprocas entre la matemática y el mundo (Cordero *et al.,* 2019).

La estructura de la $\zeta(Mod)$ está compuesta por los usos del conocimiento matemático y las resignificaciones en situaciones específicas. Los resultados de las investigaciones que asumen esta variedad de modelación se sintetizan en lo que llamamos *Epistemología de lo Matemático*. Esta epistemología está conformada por las *Situaciones Núcleos* que reflejan, mediante elementos secuenciales, lo útil al humano.

Tabla 2.
Epistemología de lo Matemático

Construcción de lo Matemático	Situaciones						
	Variación	**Cambio**	**Transformación**	**Aproximación**	**Selección**	**Ponderación**	**Periodización**
Significaciones	Flujo Movimiento Acumulación Estado Permanente	Área bajo la curva Posición de un móvil Movimiento de un fluido	Patrones de comportamiento gráficos y analíticos	Limite Derivada Integración Convergencia	Patrón de adaptación	Distribución de comportamientos	Reproducción de Comportamientos
Procedimientos	Comparación de dos estados	Comparación de dos estados	Variación de parámetros	Operaciones lógico formales (cociente)	Distinción de cualidades	Equiparación	Comparación de Periodos
Instrumentos	Cantidad de variación continua $f(x+\mathrm{h})-f(x)=a\mathrm{h}$ $a=f'(x)$	Cantidad de variación continua $\int_a^b F' = \mathrm{F(b)} - \mathrm{F(a)}$	Instrucción que organiza comportamientos	Formas analíticas $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+\mathrm{h})-f(x)}{\mathrm{h}} = f'(x)$	Lo estable	Punto de Equilibro $\sum_1^n (x_i - \bar{x}) = 0$	Interpolación 
Argumentaciones/ Resignificación	**Predicción** $E_0 + variación = E_f$	**Acumulación** $\mathrm{E_f} - \mathrm{E_i}$	**Comportamiento tendencial** 	**Analiticidad de las funciones** $f(x+\mathrm{h}) = f(x) + f'(x)\mathrm{h} + f''(x)\frac{\mathrm{h}^2}{2!} + \cdots$	**Optimación** 	**Compensación** 	**Anticipación** 

Nota. *Adaptado de Cordero et al., 2020*

Cada una de estas situaciones permite resignificar y dotar de significado a distintos objetos matemáticos, destacando lo funcional de ellos.

II.1.2 *El conocimiento funcional de la Integral: la Categoría de Acumulación*

Dado que la S*ituación Núcleo de Cambio* es de importancia en esta investigación, se presentan los estudios que hacen referencia a su desarrollo.

Emergencia de la Categoría de Acumulación

En Cordero (1994; 2003; 2005) encontramos los resultados de un estudio que da cuenta de la resignificación de la Integral mediante la Categoría de Acumulación. El análisis en ese estudio se desarrolla en dos direcciones: **el primero, sobre la Teoría de Integración en las obras de Cauchy, Riemann, Lebesgue, Denjoy y Luzin.** El segundo, en fenómenos físicos, así como situaciones matemáticas nuevas que permitan significar la Integral.

En el primer análisis, el principal resultado es que se identifica a

$$\int_a^b f\,dx = F(b) - F(a)$$

como la idea que prevaleció en los diferentes contextos que tuvo lugar el desarrollo de la Teoría de Integración.

Se identifica que las representaciones que genera el patrón de construcción están ligadas con *cantidades variables* y el estudio de funciones. El análisis permite reconocer que los aspectos principales del desarrollo conceptual de la Integral son la consideración de la función $F(x)$ absolutamente continua y las características de las funciones derivadas $f(x)$.

Cordero (2003; 2005) menciona que, en el análisis de los fenómenos físicos, se encuentra un elemento importante, la toma del *elemento diferencial*. Lo anterior parte de centrar la atención en la expresión "t" y "$t + dt$" que permite reconocer dos aspectos en el desarrollo del Cálculo: *la evolución* y *el estado*. Estos aspectos se manifiestan en situaciones de *Variación* y *Cambio*. Ambas situaciones generan un sistema que depende del tiempo $F(t)$, que permite dar cuenta de elementos funcionales de los dos aspectos mediante la resta:

$$F(t + dt) - F(t)$$

El sistema que se genera puede seguir dos direcciones: la *evolución* de las situaciones que describe variaciones progresivas (Serie de Taylor) y el *estado* de la situación que representa el cambio total del sistema (Integral Definida).

Figura 11.

Sistema dependiente del tiempo F(t), y sus dos direcciones: la evolución y el estado de las situaciones

$$F(t + dt) - F(t)$$

Evolución de las situaciones

$$F(t + dt) = F(t) + dF(t) + d^2F(t) + algo$$

Estado de las situaciones

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx$$

Aun cuando las operaciones de la Serie de Taylor y la Integral Definida son distintas, apuntan a un mismo objetivo; lo que permite que se unifiquen en la expresión $F(b) - F(a)$.

El contexto de cantidades que fluyen[5] permite dar una significación a esta resta representando la noción de acumulación desde dos puntos de vista: de forma

[5] Se entiende por cantidad que fluye a la relación funcional susceptible de admitir cambios con respecto a sus estados, es decir, la cantidad es representada por una relación funcional $F(t)$, y fluye si al variar t $(t_0 \to t_1)$ la relación admite un cambio de estado $(F(t_0) \to F(t_1))$.

estática o de forma dinámica. Donde la comparación de estados juega un papel esencial.

Figura 12.
La acumulación en el contexto de las cantidades que fluyen

Cantidades que fluyen

Estática:
Algo que se concentra
$E_f - E_0 = A$

Dinámica:
Algo que se está agregando a una cantidad
$E_f = E_0 + A$

Al reinterpretar esta comparación de estados en la expresión de la Integral Definida, encontramos lo que denominamos *acumulación* y *valor acumulado*. La expresión

$$\int_a^b F'(x)dx$$

representa, en la *acumulación*, lo que se concentra y en el *valor acumulado*, lo que se está agregando.

Figura 13.
Formas de la Acumulación

$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx$ $\rightarrow$	Acumulación
$F(b) = F(a) + \int_a^b F'(x)dx$ $\rightarrow$	Valor Acumulado

El estado de las situaciones considera que las expresiones anteriores son el resultado de un proceso que cumple las siguientes fases:

a) $F(t + dt) - F(t) = F'(t)dt$

b) $\sum F(t+dt) - F(t) = \sum F'(t)dt$

Estas faces son la síntesis de la Integral Definida.

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx$$

A esta encapsulación se le llama *toma del elemento diferencial.* Esta toma del elemento diferencial significa que se debe hacer un *reconocimiento local* de la *situación de cambio* para reconocer *el cambio total*.

Cambio local:

$$F(t+dt) - F(t)$$

Cambio Total:

$$F(b) - F(a)$$

Con respecto a los fenómenos físicos que presenta Cordero (2003), está la continuidad de un fluido, mostrando dos formas de mirar el fluir: *participar con él* y, *ver pasar el fluir en un punto fijo*. La primera, lleva a considerar la expresión $dV' = dV + acumulación$ y la segunda a $salida - entrada = acumulación$, respectivamente.

Para la segunda forma de mirar el fluir, la determinación de la acumulación del fluido se da en una región finita y acotada. Además, al mirar el movimiento —ya sea participando en él o mirarlo pasar— se destacan dos aspectos: lo primero es *reconocer cómo varía el fenómeno y posteriormente determinar cuánto varía en cierto tiempo.* La cantidad de fluido acumulado en un tiempo dt llevó a reconocer la toma del elemento diferencial, el cual permite posteriormente expresar la acumulación del fluido en todo el dominio (Mota, 2019).

Otro resultado importante que señala Cordero (2003; 2005) es que el enfoque que se haga en las partes de la expresión

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Puede llevar a dos direcciones diferentes. Enfocarse en la parte

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Conlleva a las consideraciones de las propiedades de $f(x)$ para hallar la función primitiva $F(x)$. Mientras que centrarse en la parte de $F(b) - F(a)$ implica considerar las propiedades de $F(x)$ y darle sentido al integrando $f(x)dx$ —*que representaría una porción de* $F(x)$ por lo que tiene las mismas propiedades que este—. Además de permitir relacionar la forma algebraica o gráfica entre $F(x)$ y $f(x)$.

Aspectos relacionales entre lo conceptual y algorítmico de la Integral

Muñoz (2000), parte de la problemática de la separación entre los elementos conceptuales y algorítmicos que existe en la enseñanza del Cálculo Integral. Reconoce que para enlazar los elementos conceptuales y procedimentales se debe partir de problemas específicos de *fenómenos de variación continua*. Al respecto, el autor menciona que:

> "Estos problemas específicos no se refieren a las causas del fenómeno de variación (por qué varía), sino al *cuánto varían* una vez que se reconoce *cómo varía el fenómeno*; es decir, se plantean preguntas acerca de la ley que cuantifica (cantidad desconocida $F(t)$ que relaciona funcionalmente a las variables involucradas) al fenómeno de variación. La configuración de esta ley depende de si son dadas, o no, las condiciones iniciales del problema específico" (p. 142).

Estos problemas se dividen en dos categorías: cuando se conoce las condiciones iniciales y cuando no se conocen. En ambas categorías, es posible el estudio de tres situaciones. Si se conoce la condición inicial:

Situación 1	$F(t_0) \rightarrow T \rightarrow F(t) = ?$	Relación funcional entre variables
Situación 2	$F(t_0) \rightarrow T \rightarrow F(t_n) = ?$	Número (Estado)
Situación 3	$F(t_0) \rightarrow T = ? \rightarrow F(t_n)$	Número (Transformación)

Si las condiciones iniciales no se conocen, entonces $F(t_0)$ se representa mediante C.

Muñoz (2000) señala que en las tres situaciones anteriores se inicia la discusión de la integración, ya que la pregunta es sobre alguno de los siguientes elementos:

- La ***cantidad desconocida*** $\boldsymbol{F(t)}$ [la relación funcional]
- El ***valor acumulado*** $\boldsymbol{F(t_n)}$ [Un estado final]
- La ***acumulación*** $\boldsymbol{F(t_n) - F(t_0)}$ [la diferencia entre un estado inicial y un estado final]

Además, es necesario reconocer cómo está variando el fenómeno de variación $dF(t)/dt$ (Cordero, 1994; citado por Muñoz, 2000).

Cada una de las categorías se dividen en situaciones problemas que permiten reconocer nociones asociadas a lo conceptual, como ser:

- ***Discretización de una magnitud continua****:* cuando el tiempo y el espacio se discretiza al hacer una partición
- ***Constantificación de lo variable****:* considerar un movimiento variable como un movimiento constante en forma local
- ***Acumulación****:* suma de efectos locales que permiten reconocer un efecto total

- ***Predicción:*** a partir de un estado inicial se le suma una acumulación total para conocer un estado superior.

De acuerdo con el autor, las nociones anteriores son elementos que permiten enlazar lo conceptual con lo algorítmico de la Integral.

Transversalidad de la Categoría de Acumulación: la emergencia en una Comunidad de Modeladores Biomatemáticos

La investigación de Mota (2019) muestra cómo emerge la Categoría de Acumulación en una comunidad de conocimiento matemático de modeladores biomatemáticos. Dicha categoría emerge, ante una problemática de la comunidad: modelar el ciclo de vida de la plaga llamada Brevipalpus Chilensis.

Mota (2019) analiza la situación específica del cálculo de la constante térmica[6]. La autora observó que en esa situación específica la problemática de la comunidad es el *cómo realizar la acumulación de los grados-días.* Menciona que, para lograr una mejor aproximación a la constante térmica de la plaga, la comunidad de conocimiento matemático consideró una constante térmica por cada estado del insecto. Así, para saber cuál es la constante térmica desde el estado huevo hasta el estado adulto, únicamente se debe sumar las constantes térmicas de cada etapa.

El objetivo del cálculo propuesto por la comunidad es medir, durante el tiempo que se estime necesario, *la acumulación de grados-días por cada hora*; para ello, se describe la acumulación de grados-días desde la hora $i-1$ hasta la hora i como:

$$\frac{máx\{(g_{ij}-T_b),0\}}{24}$$

[6] Las plantas [y otros organismos] deben "consumir" o "acumular" determinada cantidad de calor, la que es medida en grados-días, desde la germinación hasta la madurez. Dicha cantidad es aproximadamente constante de acuerdo con la especie considerada y se le denomina constante térmica (Villalpando, 1985).

Donde i toma valores desde 1 hasta 24, g_{ij} está definido como la temperatura a la hora i el día j y T_b representa la temperatura umbral (temperatura mínima para el desarrollo del bicho).

Según Mota (2019), lo que se determina en la expresión $\frac{máx\{(g_{i1}-T_b),0\}}{24}$ es el *cuánto varían* (de forma local) los grados-días mediante un diferencial de tiempo. Es decir, $máx\{(g_{i1}-T_b),0\}$ representa el *cómo varía* la temperatura y el $\frac{1}{24}$ corresponde al diferencial de tiempo, una hora. La manera de determinar esa variación es a través de una resta (*acumulación*) de los grados-días acumulados en la hora i menos los grados-días acumulados hasta la hora $i-1$. La representación de esta acumulación como el estado local de la situación, es la siguiente:

$$F(t+dt)-F(t)=F'(t)dt$$

Así se tiene que

$$F(t+dt)-F(t)=\frac{máx\{(g_{i1}-T_b),0\}}{24}$$

donde $F(t+dt)$ representa grados-días acumulados en la hora i, $F(t)$ representa los grados-días acumulados hasta la hora $i-1$.

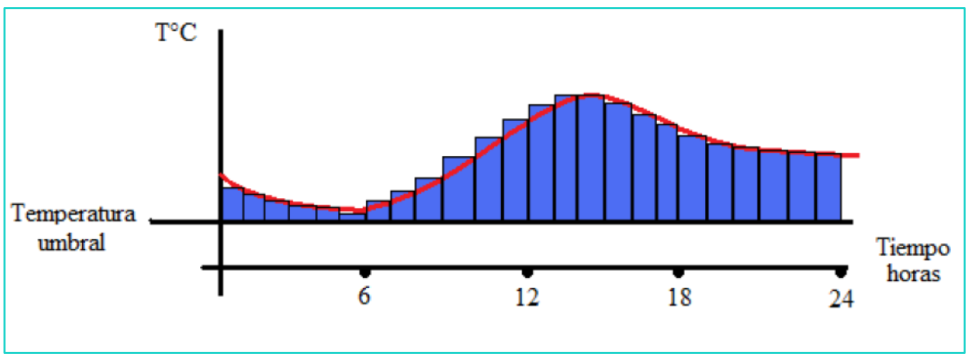
Mota (2019) menciona que, en lo anterior, se puede observar cómo la cuantificación del fenómeno permite reconocer ciertos aspectos, por ejemplo, el *cómo varía el fenómeno* (temperatura) y *el intervalo de tiempo en el que ese tipo de variación permanece* (una hora).

La expresión $\frac{máx\{(g_{i1}-T_b),0\}}{24}$ solo cuantifica lo acumulado en una hora, por lo que la comunidad de conocimiento matemático de modeladores biomatemáticos procede a la determinación de otra expresión para la cuantificación de lo acumulado para el día 1 (donde se considera el día (24 horas) como la unidad de medida) esta es:

$$K_1 = \sum_{i=1}^{24} \frac{máx\{(g_{i1} - T_b),0\}}{24}$$

> "Es claro que la suma representa la suma del área bajo la curva de la temperatura… pero cuando estemos en el caso de que la temperatura g_{i1} es menor a la temperatura base se dirá que en esa hora no se acumuló energía (grados-días)" (Huincahue, 2011; citado por Mota, 2019, p. 90).

Figura 14.
Cálculo de los grados días en el día 1.



Nota. Tomado de Huincahue (2011), p. 90; citado en Mota (2019)

De acuerdo con la autora, la expresión:

$$K_1 = \sum_{i=1}^{24} \frac{máx\{(g_{i1} - T_b),0\}}{24}$$

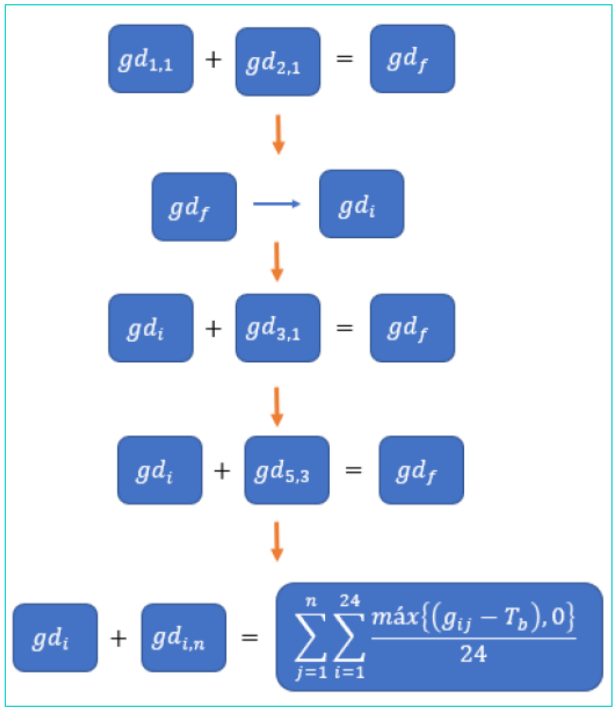
responde al *valor acumulado,* es decir, podemos notar que manifiesta la generalización de un proceso que determina lo acumulado en cierto tiempo (un día), transformando un estado en otro. Dado el tipo del fenómeno, y aunque no se haga explícito en la modelación, se determina que para acumular los grados-días al transcurrir las horas se requiere tomar a los grados-días ya acumulados y sumarle los grados-días determinados para la nueva hora, como un proceso de iteración.

La determinación de los grados-días acumulados para un día no es suficiente para alcanzar la constante térmica de la etapa 1 de la plaga, por lo que se procede a la determinación de otra expresión la cual acumule grados-días, los días que sean necesarios:

$$K = \sum_{j=1}^{n=a_j} K_j = \sum_{j=1}^{n=a_j} \sum_{i=1}^{24} \frac{máx\{(g_{i1} - T_b),0\}}{24}$$

Esta expresión al igual que la anterior a ella, responde al *valor acumulado*, pero esta vez de toda una etapa. La acumulación de los grados-días se realiza por hora y por día, los días que sean necesarios, hasta alcanzar la constante térmica de la plaga para la etapa 1, transformando un estado en otro. Además, también subyace que para acumular los grados-días al transcurrir las horas y los días se requiere tomar a los grados-días ya acumulados y sumarle los grados-días determinados para la nueva hora o el nuevo día, es decir, un estado final (representado por el valor acumulado en una hora o un día) se convierte en un estado inicial al que hay que sumar la nueva acumulación de la hora o del día para obtener el nuevo valor acumulado. La figura que se muestra a continuación expresa el proceso de iteración entre un estado inicial y un estado final (Valor Acumulado).

Figura 15.
Acumulación de grados-días para n días.



Nota. Tomado de Mota (2019)

En la investigación de Mota (2019) también se señala que con la última expresión matemática que se mostró —si se conoce cuál es la constante térmica a la que se quiere llegar— se logra determinar los grados-días faltantes al tener ya cierta acumulación, es decir, se puede desarrollar una predicción.

La autora señala que la Categoría de Acumulación surge como un conocimiento funcional que ayuda a darle solución al problema planteado en el seno de la comunidad de conocimiento matemático de modeladores biomatemáticos. La Acumulación, en esta situación específica, adquiere el significado de constante térmica.

Con los estudios mostrados hasta aquí en esta sección II.1.2, podemos decir que la Acumulación es un conocimiento funcional y transversal a diferentes dominios, ya que emerge en la obra matemática y en comunidades de conocimiento matemático. Un conocimiento con estas características, desde el programa SOLTSA, es estructurado en situaciones núcleos que permiten reconocer lo útil al humano.

Una Situación Núcleo: la Situación de Cambio

Como se muestra en las secciones anteriores, la Categoría de Acumulación está reportada en las investigaciones de Cordero (1994) —publicado en Cordero (2003; 2005)— y en Mota (2019), sin embargo, la situación núcleo que pertenece a la *Epistemología de lo matemático* de la Categoría de Acumulación no se había construido. Por lo que, para la presente investigación, se construyó esta situación núcleo (Tabla 3) con base en lo reportado en esas investigaciones.

Tabla 3.

Situación de Cambio

Construcción de lo matemático	Situación de Cambio
Significaciones	Área bajo la curva Posición de un móvil Movimiento de un fluido
Procedimientos	Comparación de dos estados
Instrumento	Cantidad de variación continua $\int_a^b F' = F(b) - F(a)$
Argumentación/ Resignificación	**Acumulación** $E_f - E_i$

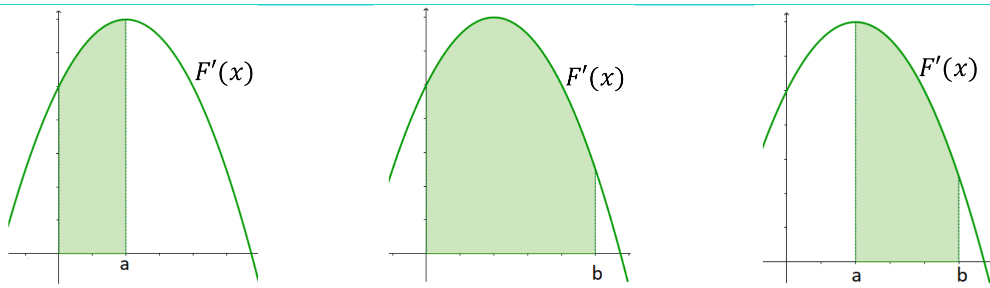
De acuerdo con Cordero (2005), se denomina *Situación de Cambio* a aquel fenómeno de variación que incluye un cambio de una cantidad inicial (o estado inicial), que bajo un proceso es transformada en otra, siendo esta el valor último en el proceso (estado final o valor acumulado).

En la Situación de Cambio se estructura lo funcional de la categoría, a través de los elementos de construcción del conocimiento. Las cantidades de variación continua permiten comparar dos estados (el estado inicial y el final). Esta comparación, generada por la resta (o una suma de estados locales), representa la acumulación que generó el cambio en el estado inicial. Lo anterior, puede tener distintos significados: el área bajo la curva, posición y movimiento.

La Acumulación como una *diferencia de estados* puede ser representada gráficamente, como se muestra en la siguiente figura. Donde $F'(x)$ representa el *cómo cambia* y, $F(a)$ junto a $F(b)$ representan estados de $F(x)$ (*cuánto cambia*).

Figura 16.

Representación de $F(b) - F(a)$



$\boldsymbol{F(a)}$	$\boldsymbol{F(b)}$	$\boldsymbol{F(b) - F(a)}$
Estado inicial	Estado final	Acumulación

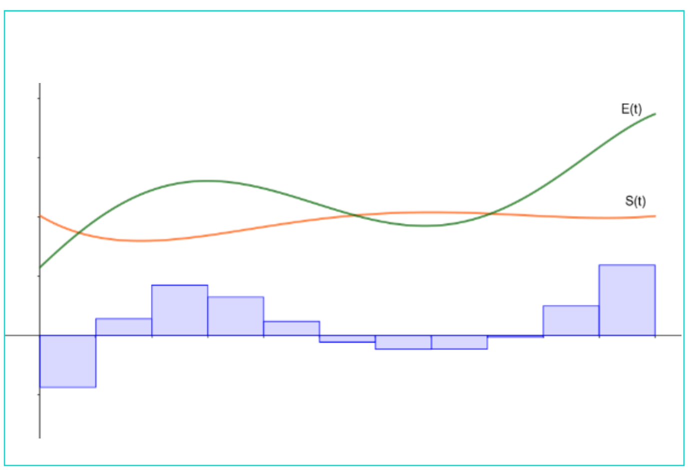
Nota. Tomada de Cordero, Muñoz y Solís (2002)

La Acumulación como una *suma de estados locales* implica reconocer a F' como una porción de un estado de $F(x)$ (Cordero, 2003; 2005).

Además, la Acumulación como *la diferencia entre la entrada y salida* de un fluido conlleva reflexionar en lo local, por lo que conocer una acumulación total requiere de *la suma de estados locales*.

Figura 17.

Representación gráfica de la Acumulación como la diferencia de la entrada y la salida.



La Categoría de Acumulación es una *argumentación autónoma* que expresa un saber, una matemática funcional, que se encuentra en escenarios profesionales o disciplinares, académicos y cotidianos, que confronta la definición de la Integral Definida presente en la Matemática Escolar, ya que, en esta, no existen entornos que favorezcan sus usos y significados. Por tal razón, la situación núcleo de Cambio conforma una base epistemológica, que coadyuva en la construcción del diseño de situación escolar de socialización.

La Matemática Escolar es el escenario en que el estudiante de docencia de la matemática aprende para enseñar (Opazo-Arellano, 2020) por lo tanto, al repensar la formación inicial docente de matemáticas desde categorías como la Acumulación, se promueve la construcción de la *Identidad Disciplinar,* factor que se discute a continuación.

II.2 Identidad Disciplinar

Como se ha mencionado, el dME causa al menos tres fenómenos: la adherencia, exclusión y opacidad. Actualmente se han formulado multifactores que hacen frente a cada uno de estos fenómenos.

La adherencia hace referencia a la aceptación del sistema hegemónico que actualmente rige la Matemática Escolar como el único saber válido (Cordero *et al*., 2015). Esta aceptación implica consecuencias poco favorables para quienes están inmersos en el sistema educativo: los estudiantes y docentes.

Por un lado, ni el profesor ni el estudiante se atreven a cuestionar y tratar de considerar argumentaciones distintas a las valoradas en el dME (Cordero *et al*., 2015). Esto a su vez provoca la exclusión de la construcción social del conocimiento matemático.

Por otra parte, genera la emulación del saber escolar —lo que evita reconocer los entornos que le dan significado al objeto matemático— que permanentemente se ejercita a partir de la resolución de problemas clásicos de la matemática escolar (Opazo-Arellano, Marcía-Rodríguez y Cordero, 2020).

Ante tal fenómeno, la *Identidad Disciplinar*, es un factor que confronta lo habitual de la enseñanza de la Matemática Escolar mediante las argumentaciones autónomas que emergen en el cotidiano de la gente (Opazo-Arellano, Cordero y Silva-Crocci, 2018; Opazo-Arellano y Cordero, 2019). La Identidad Disciplinar permite que los docentes y estudiantes incorporen su uso del conocimiento matemático, por ende, *valoren los usos del conocimiento matemático*.

En este sentido Opazo-Arellano, Cordero y Silva-Crocci (2018) consideran que la Identidad Disciplinar es un factor esencial para que el docente trastoque y transforme al dME. Por tal razón, la Identidad Disciplinar se convierte en el instrumento de *resistencia* para que el estudiante de docencia de la matemática participe en la construcción de los objetos y en las resignificaciones de los usos. Su construcción demanda tres elementos: la *legitimidad*, la *resistencia* y el *proyecto*.

Opazo-Arellano (2020) reporta un episodio de Identidad Disciplinar en una comunidad de conocimiento matemático de estudiantes de docencia de la matemática, quienes en ciertas asignaturas de su formación académica han podido reflexionar y cuestionar la Matemática Escolar. Lo anterior, les ha permitido construir una Identidad Disciplinar. Un primer aspecto en el estudio de Opazo-Arellano, fue diferenciar la Identidad Disciplinar de la Identidad Profesional en la formación inicial docente. Con respecto a esto se menciona que la Identidad Disciplinar *centra la atención en el conocimiento matemático*, por su parte la Identidad Profesional presenta la característica de centrarse en el proceso relacional de los individuos entre sí y otros. Además, este autor señala que mediante la Identidad Disciplinar el estudiante de docencia de la matemática valoriza el conocimiento matemático en los cotidianos de la gente: la escuela, el trabajo y la ciudad. Lo anterior deriva en la *construcción de la fuente de sentido*: *la resignificación del conocimiento matemático,* haciendo el llamado a repensar la matemática escolar a partir de los saberes de la gente.

Los resultados de la investigación de Opazo-Arellano (2020) reflejan que el estudiante de docencia de la matemática manifiesta la triada de la Identidad Disciplinar en la construcción de diseños escolares, a saber: la *legitimidad* de *otros saberes* se expresa cuando las preguntas que se construyeron favorecen ciertas argumentaciones que están ausentes en la Matemática Escolar. La *resistencia* se evidencia en repensar la enseñanza de la matemática desde *la pluralidad epistemológica*. Construidos desde esa mirada, los diseños generan las *argumentaciones autónomas* en quienes lo ejecutan, a su vez *proyecta* la nueva visión de la Matemática Escolar que posee el estudiante de docencia de la matemática.

Esta triada de la Identidad Disciplinar es en sí un proceso de construcción que permite al estudiante o docente legitimar otros saberes, resistir al dME cuando esos saberes son incorporados al desarrollo de sus problemáticas y proyectarlos cuando se enriquecen los objetos matemáticos. La triada anterior, está en relación con el principio *rescatar el sujeto olvidado*.

Parte de ese principio es *valorar los usos del conocimiento matemático propio de las comunidades.* Los usos del conocimiento matemático son construidos en comunidades que atienden una problemática, lo cual los lleva a comprometerse y desarrollar conocimiento en su quehacer. Para resaltar el uso del conocimiento matemático de las comunidades, desde el programa SOLTSA, se ha generado un constructo: *Modelo de Comunidad de Conocimiento Matemático*.

II.3 Modelo de Comunidad de Conocimiento Matemático

De acuerdo con Cordero (2016a), si hay conocimiento existe una comunidad que lo construye, es decir, el conocimiento matemático se construye en el seno del quehacer de las comunidades. Sin embargo, cada comunidad tiene su distintivo: el dominio de conocimiento al que pertenece, lo situacional de la problemática en su quehacer, la cultura en la que está inmersa, entre otros. Lo que implica que, para *valorar el uso del conocimiento matemático* en ella, se debe caracterizar lo propio de esa comunidad. Mediante el *Modelo de Comunidad de Conocimiento Matemático (MCCM)*, se lleva a cabo esa tarea.

Este modelo está conformado por elementos que permiten esta caracterización:

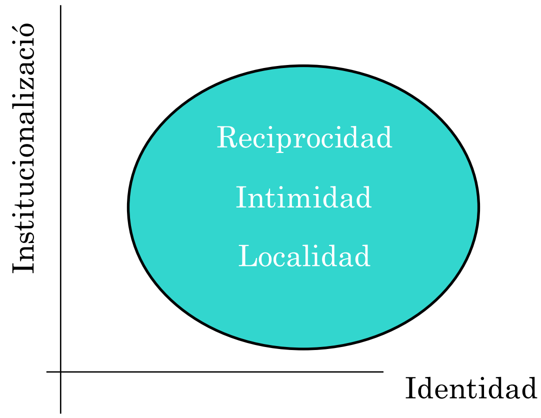
a) Ubicación de la comunidad en el saber. La CCM se ubica en un plano compuesto por dos ejes que son transversales en la comunidad. Por un lado, la *institucionalización*, como referente que señala la tradición, la cultura y la historia en el seno de la comunidad. Y, por otro, la *identidad,* que permite apreciar el uso del conocimiento matemático que distingue a la comunidad (Cordero y Silva-Crocci, 2012; Cordero, 2016a).
b) Definición de comunidad de conocimiento. Dado que no toda agrupación de personas conforma una comunidad, Cordero (2011; 2016a) reconoce que una comunidad de conocimiento matemático se conforma por:

   Reciprocidad: se refiere a que el conocimiento de la comunidad se genera por la existencia de un compromiso mutuo. Tal acción se refleja en la situación específica.

   Intimidad: el uso del conocimiento matemático es propio y privado de la comunidad, no es público. Es la categoría de conocimiento matemático.

   Localidad: El conocimiento local se da cuando existe una coincidencia de ideas, una jerga disciplinar, trabajo u oficio, intereses, lo regional, entre otros.

Figura 18.
Modelo de Comunidad de Conocimiento Matemático (MCCM)



Nota. Tomado de Cordero (2011; 2016a)

En síntesis, de la primera línea de trabajo del programa SOLTSA, se retoman resultados que dan cuenta de la matemática funcional, lo que conforman las categorías de conocimiento matemático. Además de los multifactores, como la Identidad Disciplinar, que en articulación con las categorías de conocimiento conforman elementos esenciales para el progreso del propósito del Impacto Educativo (segunda línea de trabajo en la cual se ubica la presente investigación). La Situación de Cambio y la Identidad Disciplinar, en el presente estudio, fueron los elementos que coadyuvaron en la construcción del diseño de situación escolar de socialización.

II.4 Hacia el Impacto Educativo

En la segunda línea de trabajo se conforman los multifactores y estadíos que coadyuvan a la alianza de calidad de la docencia de matemáticas. Los multifactores son los elementos que contribuyen a lograr un resultado pero que han estado ausentes y es necesario recuperarlos, tales como: identidad, inclusión, socialización, emancipación, empoderamiento, entre otros (Cordero, 2016b y Cordero, 2017).

El resultado que se busca lograr con los multifactores y estadíos, contribuye con el principal propósito de la Teoría Socioepistemológica: el *rediseño del discurso matemático escolar.*

II.4.1 *Rediseño del dME*

La separación entre la realidad y la matemática escolar que ha generado el dME al centrar la atención en los objetos matemáticos, implica que el rediseño del dME se enfoque en la *descentralización del objeto matemático,* para lograrlo se debe considerar el *saber* como *la construcción social del conocimiento* (Cantoral, 2013). Con lo cual se responde a los tres fenómenos provocados por el dME: *adherencia, exclusión* y *opacidad*. El rediseño traza un eje que los solventa y trastoca la matemática escolar (Soto, Gómez, Silva-Crocci y Cordero, 2012).

Silva-Crocci y Cordero (2014) mencionan que es necesario "trastocar la matemática escolar, ya que su construcción se fundamenta exclusivamente en epistemologías de conceptos, con la intención de generar otra matemática escolar que incorpore a su construcción fundamentos epistemológicos con base en las prácticas sociales del conocimiento matemático" (p. 1454). A través de ello se espera valorar los significados matemáticos que la gente posee y construye socialmente, estos pueden ser distintos según la profesión o la cultura a la que pertenezcan. Así se tendrá un conocimiento matemático descentralizado del objeto, por ende, compuesto de usos y significaciones que favorecen un conocimiento funcional.

Llevar el conocimiento funcional a la escuela requiere un proceso de *socialización*. Puesto que, este proceso genera una dialéctica entre la matemática escolar y el conocimiento de la gente: el cotidiano (Gómez y Cordero, 2010).

Mediante la socialización se busca que lo funcional y lo cotidiano del conocimiento puedan estar al mismo nivel del conocimiento escolar, procurando así la horizontalidad de saberes (Cordero, 2017). El diseño de situación escolar de socialización (DSES), es un instrumento esencial para tal fin.

II.4.2 *Diseño de Situación Escolar de Socialización*

Los *Diseños de Situación Escolar de Socialización* (DSES) juegan un rol preponderante en la segunda línea de trabajo. Su función esencial es: por una parte, valorar los usos del conocimiento matemático y sus resignificaciones en las comunidades de conocimiento de profesores y estudiantes; y por otro, mantener la reciprocidad y la horizontalidad entre la escuela y el cotidiano de la gente. Es decir, mediante el DSES se busca contribuir a trastocar y transformar la matemática escolar a partir de las categorías del conocimiento matemático, a la espera de un impacto educativo (Cordero, 2017).

Con el DSES, se desea modificar el papel hegemónico del dME —causante de la desigualdad en la enseñanza y aprendizaje de la matemática— incorporando los usos del conocimiento matemático que han emergido en el cotidiano de la gente. Estos usos son organizados en categorías del conocimiento matemático que sustentan una Epistemología de lo Matemático, ausente en lo habitual de la Matemática Escolar (Opazo-Arellano, Cordero y Silva-Crocci, 2018) y que reflejan la resignificación del conocimiento matemático. Esta resignificación trastoca a la epistemología dominante, lo que permite abrir la puerta a la pluralidad epistemológica que obliga la inclusión del sujeto olvidado (Cordero, 2016b).

La construcción del DSES se compone de dos elementos: una base epistemológica y una perspectiva. La base epistemológica se sustenta en cada una de las Situaciones Núcleos que conforman la epistemología de lo matemático (ver Tabla 2). La perspectiva es alguno de los multifactores que se han construido, como la identidad disciplinar.

En este proyecto de investigación —ubicado en la segunda línea de trabajo del programa socioepistemológico SOLTSA— se elaboró un DSES basado en la Categoría de Acumulación (argumentación de la Situación Núcleo de Cambio) y con perspectiva de Identidad Disciplinar. El fin de este DSES fue resignificar a la Integral Definida en una comunidad de conocimiento de estudiantes de docencia de la matemática, con el propósito de confrontar el conocimiento del Cálculo Integral de la matemática escolar, frente a una situación que responde a un conocimiento funcional de la integral.

Cada uno de los elementos referenciados en este capítulo, contribuyen, por un lado, a valorar los usos del conocimiento matemático de la Integral Definida, y por otro, a su socialización en la matemática escolar de una comunidad de estudiantes de docencia de la matemática, donde la identidad disciplinar le permite al estudiante resistir al dME de la integral definida. Lo que permite la relación recíproca y horizontal entre la matemática de la escuela y la realidad.

Capítulo III: Aspectos Metodológicos

Conocer cómo resiste el estudiante de docencia de la matemática implicó aproximarse a su realidad; develar los usos del conocimiento matemático opacados por el dME.

Este cometido llevó a enmarcar el presente estudio en una investigación cualitativa. De acuerdo con Balcázar *et al.,* (2013), un estudio de tipo cualitativo "permite acceder al conocimiento de la realidad y comprender el punto de vista del informante" (p. 21).

Asimismo, Martínez (2004) menciona que la investigación cualitativa "trata de identificar… la naturaleza profunda de las realidades, su estructura dinámica, aquella que da razón plena de su comportamiento y manifestación" (p. 66).

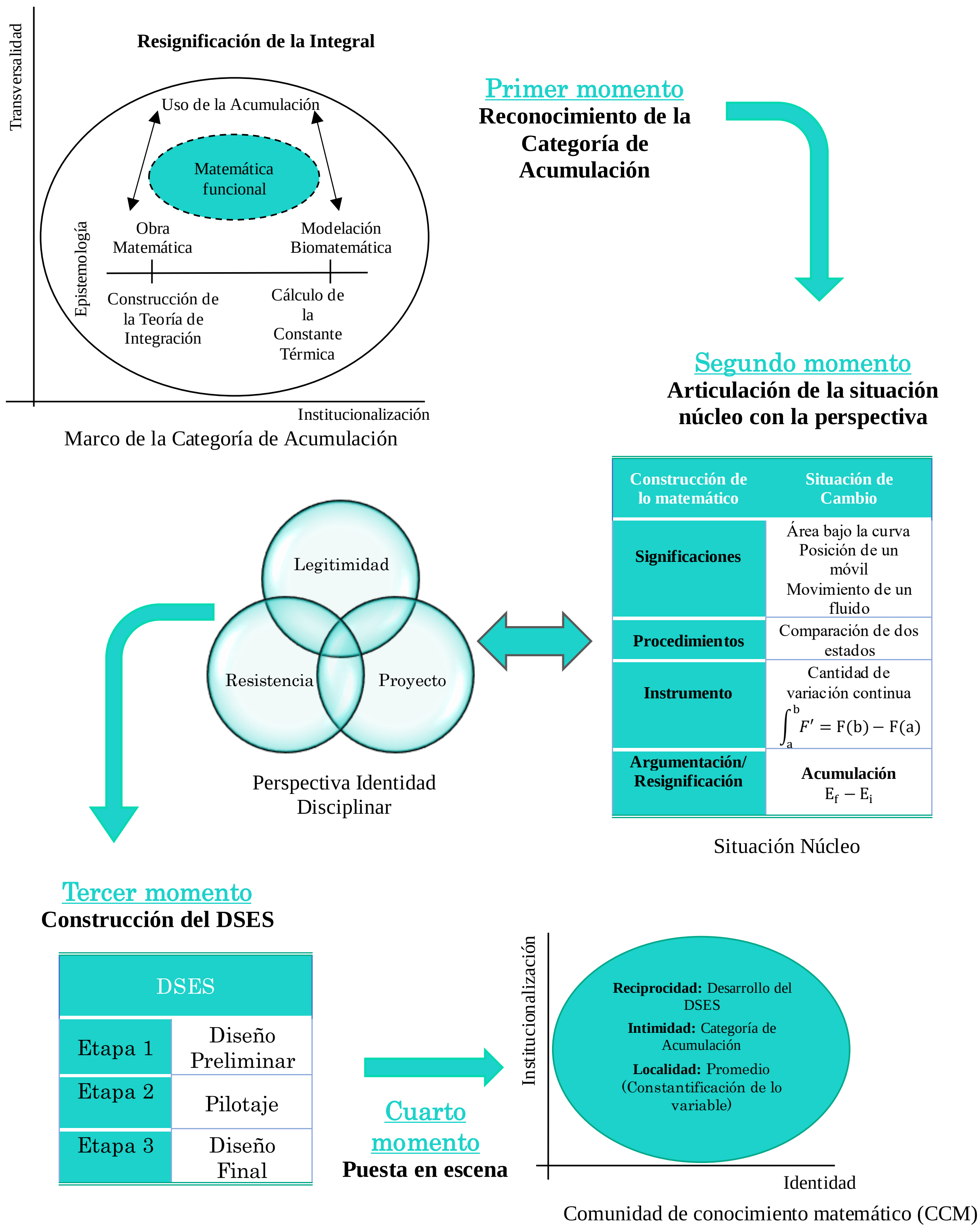
Más aún, desde la postura teórica que se asume en esta investigación —Socioepistemología— se considera que la construcción del conocimiento matemático es situacional, es decir, cada comunidad construye su propio conocimiento, y el enfoque cualitativo permite enmarcar y dirigir la acción humana y su verdad subjetiva, obteniendo de esta manera entendimiento de la singularidad de los individuos y de los grupos (Martínez, 2011; citado por Portilla, Rojas y Hernández, 2014).

Además, de acuerdo con Bartolomé (1992), en la investigación cualitativa se vislumbra una pluralidad de enfoques que son consecuencia de la finalidad que con ella se busca: "comprender… transformar la práctica o valorar un proceso" (p. 15). Esto último, valorar un proceso, también está en relación con los propósitos de nuestra postura teórica: valorar los usos del conocimiento matemático, los que reflejan un proceso de construcción social del conocimiento matemático.

III.1 Ruta Metodológica

Esta investigación, como ya lo hemos mencionado, está inmersa en el programa socioepistemológico SOLTSA. Para dar evidencias de los resultados, se han conformado elementos teórico-metodológicos ofreciendo un corpus donde se articulan los constructos del marco teórico y los datos empíricos. Estas articulaciones cumplen con un desarrollo que conlleva la coherencia de los objetivos y preguntas de investigación. El desarrollo se describe a través de momentos, para destacar los aspectos locales de la investigación. A todo esto, en conjunto, se le llama ruta metodológica (Ver Figura 19).

Figura 19. *Ruta Metodológica de la Investigación*



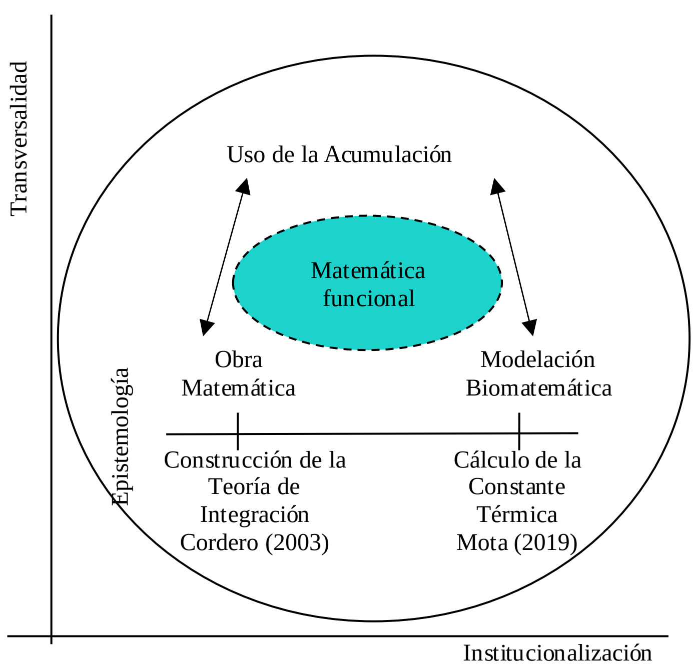
Nota. Adaptada de Giacoleti-Castillo, 2020

A continuación, se describen cada uno de los momentos de esta ruta metodológica.

III.1.1 *Primer momento: reconocimiento de la Categoría de Acumulación*

Las investigaciones de Cordero (2003) y Mota (2019) dan cuenta de la emergencia de la Categoría de Acumulación en distintos dominios: la primera en la obra matemática, donde se estudia la situación específica de la construcción de la Teoría de Integración. La segunda investigación está ubicada en un dominio de modelación biomatemática, donde se estudia la situación específica del cálculo de la constante térmica de un bicho. Esto refleja que la Categoría de Acumulación, es un conocimiento funcional en distintas comunidades y transversal a ellas en situaciones específicas del cotidiano profesional o disciplinar (Marcía-Rodríguez y Cordero, 2019). (Ver figura 20).

Figura 20.
Categoría de Acumulación



Nota. Adaptado de Cordero (2017)

Es importante mencionar que, si bien desde la investigación de Cordero (1994) hasta la fecha se reconoce a la Categoría de Acumulación como una resignificación o argumentación, no se había expresado en el cuadro de la Epistemología de lo Matemático (Tabla 2, sección II.1.1) una situación núcleo donde la acumulación sea la resignificación/argumento de dicha situación (únicamente se mostraba como uno de los significados de la Situación de Variación). En consecuencia, a partir de este primer momento —con base en las investigaciones de Cordero (2003, 2005) y Mota (2019)— se construyó la Situación de Cambio. Esta situación junto a la perspectiva de Identidad Disciplinar son la médula del segundo momento.

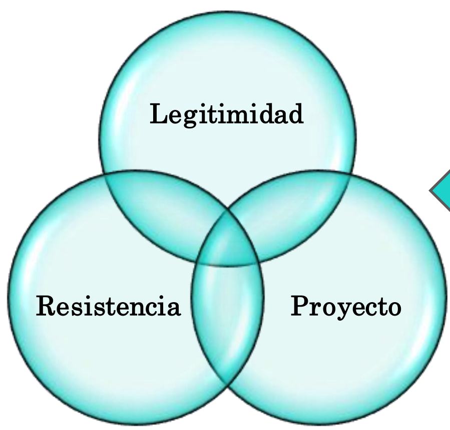
III.1.2 *Segundo momento: Articulación de la Situación de Cambio con la perspectiva de Identidad Disciplinar*

La integral definida se resignifica mediante la acumulación. Esta resignificación se estructura en una situación núcleo: Situación de Cambio, donde los significados están relacionados con el área bajo la curva, la posición y el movimiento. A partir de procedimientos que conllevan comparar dos estados, desde instrumentos que definen cantidades de variación continua. Lo anterior genera a la acumulación como la argumentación de la situación de cambio.

La identidad disciplinar está conformada por la triada: legitimidad, resistencia y proyecto. Para lograr la articulación con la categoría de acumulación, en esta investigación se preguntó: ¿qué se debe legitimar? ¿a qué se resiste? ¿qué se proyecta?

Responder a esas preguntas nos llevó a los usos del conocimiento matemático, es decir, legitimar la matemática funcional. Esta *legitimidad* del conocimiento funcional tendrá como consecuencia *resistir* al dME. El constructo *proyecto*, en este trabajo se entiende como proyección: proyectar ese conocimiento funcional mediante la valorización de los usos de la acumulación en la nueva relación horizontal y reciproca con el objeto matemático. Por lo que, desde lo local de esta investigación, se buscó que el estudiante de docencia de la matemática legitimara el uso de la acumulación, lo que conlleva a resistir al dME de la integral definida. A su vez, se proyecta la valoración del uso de la acumulación mediante la nueva relación horizontal y reciproca con el objeto matemático de la integral definida.

Figura 21.
Articulación de la situación núcleo con la perspectiva



Perspectiva:
Identidad Disciplinar

Construcción de lo matemático	Situación de Cambio
Significaciones	Área bajo la curva Posición de un móvil Movimiento de un fluido
Procedimientos	Comparación de dos estados
Instrumento	Cantidad de variación continua $\int_a^b F' = \mathrm{F(b)} - \mathrm{F(a)}$
Argumentación/ Resignificación	**Acumulación** $\mathrm{E_f} - \mathrm{E_i}$

Situación Núcleo

Reconocer la Categoría de Acumulación (primer momento) implicó la confrontación del conocimiento de la Integral Definida (desde la adherencia al dME) de la investigadora, con el conocimiento funcional que se presentaba en las investigaciones de Cordero (2003) y Mota (2019). Lo anterior es importante porque posibilitó la articulación de la situación núcleo con la perspectiva, además, permitió conformar el tercer momento.

III.1.3 *Tercer momento: Construcción del diseño de situación escolar de socialización*

Una vez articulada la situación núcleo (Situación de Cambio) con la perspectiva (Identidad Disciplinar), se procedió a definir cada una de las etapas y fases del diseño. Luego, se enfocó en la construcción de cada una de las situaciones. Consecuentemente, cuando se tuvo una primera versión del diseño, se ejecutó un pilotaje que permitió mejorarlo, validarlo y construir un guion para la entrevista no dirigida. Posteriormente, se puso en escena en una comunidad de estudiantes de docencia de la matemática y luego se procedió al análisis de los datos.

A continuación, se hace una descripción más detallada de cada una de las etapas de la construcción del diseño.

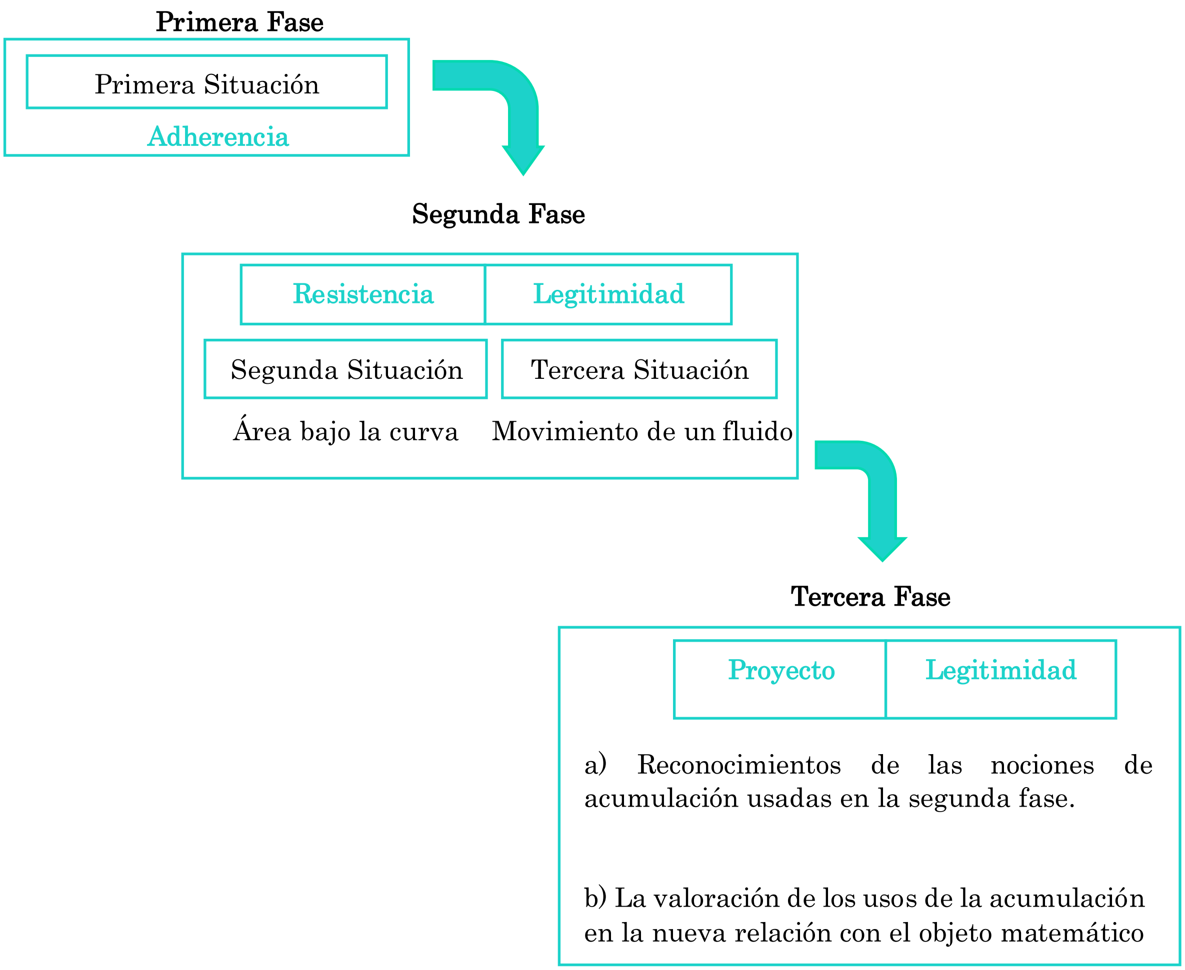
Tabla 4
Etapas en la construcción y puesta en escena del DSES

DSES	
Etapa 1	Diseño preliminar
Etapa 2	Pilotaje
Etapa 3	Diseño final

Etapa 1: *Diseño preliminar*

El diseño se conformó en tres fases (Ver figura 22). En la primera fase se pretende identificar a qué elementos del dME de la Integral Definida está adherido el estudiante de docencia de la matemática, por lo cual, la primera situación está orientado a ello. En la segunda fase se incorporan dos de los elementos de la Identidad Disciplinar: la legitimidad y la resistencia; se busca la emergencia de los usos del conocimiento matemático mediante el desarrollo de las situaciones, donde los significados que se ponen en juego son el área bajo la curva y el movimiento de un fluido. Es en el proceso de emergencia que el conocimiento funcional está siendo legitimado por el estudiante, por ende, también se está resistiendo al dME, al considerar legítimo un conocimiento que está ausente en el dME. Por último, en la tercera fase, la valoración de los usos de la acumulación en la nueva relación horizontal y recíproca con el objeto matemático: en lo específico de la presente investigación, implica retornar a la situación uno, esperando que el estudiante nuevamente la desarrolle incorporando el uso del conocimiento que se legitimó en la fase dos. De esta forma, se proyecta la valoración del uso de la acumulación en una nueva relación horizontal y recíproca con el objeto matemático de la Integral Definida, lo que permite hacer resistencia a los elementos de adherencia que se manifiestan en la fase primera fase.

Figura 22. *Fases del diseño de situación escolar de socialización*



Etapa 2: *Pilotaje*

Una vez conformada la primera versión del diseño, se procedió a su pilotaje. El pilotaje se aplicó a 10 estudiantes de docencia de la matemática (5 hombres y 5 mujeres) pasantes del sexto semestre de la carrera Licenciatura en Matemática de la Universidad Industrial de Santander, en Bucaramanga, Colombia. El plan de estudios de esta carrera se conforma de nueve semestres, con un total de 44 asignaturas. Esta puesta en escena piloto tuvo una duración de 3 horas, se desarrolló durante la asignatura denominada Seminario de Práctica. Después de esta implementación, se tuvo una primera revisión de las respuestas de cada estudiante. Con la intención de profundizar en estas respuestas se escogió a 4 estudiantes (2 hombres y 2 mujeres) que manifestaron elementos relevantes de la base epistemológica que conformó el DSES. Cabe señalar que las entrevistas tuvieron una duración aproximada de 3 a 4 horas. Parte de los resultados de esta aplicación (respuestas dadas en la primera situación) se reportan en Opazo-Arellano, Marcía-Rodríguez y Cordero (2020).

La validez del diseño está sustentada, en primera instancia, por la base epistemológica que lo conforma y, en segunda instancia, por el pilotaje desarrollado.

El pilotaje del diseño generó modificaciones en ciertas actividades, dio conocimiento sobre el tiempo que se requiere para desarrollarlo y permitió la construcción del guion de la entrevista. Además, se consideró modificar la forma de la implementación, con el fin que fuese más eficiente y provechosa.

Etapa 3*: Diseño de situación escolar de socialización*

En esta sección se muestra cada una de las fases y situaciones que conforman el *diseño de situación escolar de socialización*, con las modificaciones resultantes del pilotaje.

Primera Fase: primera situación

En esta primera situación se busca identificar a qué elementos del dME de la integral definida está adherido el estudiante de docencia de la matemática. Se esperan respuestas que estén entorno a los elementos que se identificaron en el primer capítulo: el significado relacionado con el área bajo la curva, una antiderivada, una familia de funciones o el procedimiento que se manifiesta en la Figura 7 del capítulo I. Es decir, se espera que el estudiante desarrolle lo que aprendió en la escuela.

Por otro lado, a diferencia de los ejercicios que se encuentran en los libros de texto de Cálculo Integral, se tienen dos elementos en particular. Primero, no se conocen los valores del intervalo de integración. Segundo, se tiene una condición implícita para encontrar valores posibles para a y b. Es decir, la diferencia $F(b) - F(a)$ sea igual a 30. Esto implica que el estudiante modifique el procedimiento algorítmico que está acostumbrado a desarrollar o lo complemente con algún procedimiento que le permita interpretar la situación. Lo anterior, junto a la pregunta sobre cómo se relaciona el significado con el procedimiento que realiza (inciso c) —dado que, de acuerdo con Muñoz (2000), existe una separación entre ambos— conforman el elemento de confrontación en esta primera fase. A continuación, se muestra la primera situación:

A partir del siguiente planteamiento, responde las preguntas.

$$\int_a^b (2x+1)dx = 30$$

a) ¿Cuáles podrían ser algunos valores para a y b?
b) ¿Qué significado tiene para ti la integral?
c) A partir del significado que tienes de la integral, explica el procedimiento que realizaste en el inciso a.

Segunda Fase: segunda y tercera situación

En esta fase se incorporan dos elementos de la identidad disciplinar: *la legitimidad* y *la resistencia*. Se busca la emergencia de los usos del conocimiento matemático.

Es en ese proceso de emergencia, que el conocimiento funcional está siendo *legitimado* por el estudiante, por ende, está *resistiendo* al dME.

Las preguntas en cada situación están en relación con el cuánto cambia y cómo cambia el fenómeno de variación continua en discusión (Muñoz, Cordero y Solís, 2002). De estas preguntas se derivan la acumulación y el valor acumulado (Cordero, 1994; 2003; 2005).

Lo anterior conlleva a la función orgánica de la acumulación:

Tabla 5.
Función orgánica de la Acumulación

Funcionamiento	Forma
Determinar *cuánto varía* una vez que se reconoce *cómo varía* el fenómeno.	Acumulación $\int_a^b f(x)dx = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{a})$
	Valor Acumulado $F(a) + \int_a^b f(x)dx = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{b})$

Nota. Adaptado de Mota (2019)

Lo mostrado en la tabla 5, son elementos que subyacen en la Situación de Cambio y que se consideraron en la construcción de cada pregunta en las situaciones del DSES.

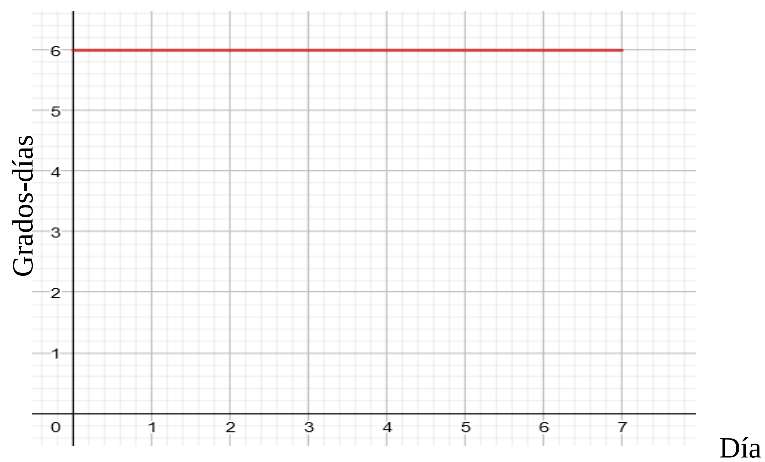
Dado que en el dME la centración está en la expresión algebraica de la f (función derivada) para encontrar a la F (función primitiva), el elemento de confrontación en esta segunda situación está en brindar el comportamiento gráfico del fenómeno de variación (F'). Además, que la centración está en preguntar directamente por la cantidad F.

El significado que se pone en juego en la segunda situación es el área bajo la curva, el contexto que se incorporó es el del cálculo de la constante térmica del ciclo de vida de un bicho (se buscó minimizar lo complejo del contexto para no perder de vista lo que se desea: la emergencia de la Categoría de Acumulación). A continuación, se presenta el numeral 1 y 2 de la segunda situación.

1) Se está investigando el crecimiento de un bicho mediante el cálculo de los grados-días (unidad que se utiliza para medir la temperatura que consume un bicho). El insecto requiere consumir una cantidad específica de grados-días en cada etapa de su crecimiento.

Conocer esta información permite saber cuántos días tarda el bicho en alcanzar cada etapa de su crecimiento, para tomar medidas preventivas ante el daño que causaría en los cultivos.

En la siguiente gráfica se muestra cuántos grados-días consume el bicho **en cada día**



a) Grafica cuántos grados-días consume el bicho **en la semana**

b) ¿Describe cómo construiste la gráfica anterior?

2) Para que el bicho consuma grados-días, la temperatura debe ser mayor a los 13 °C. Por lo que para conocer cuántos grados-días consume el insecto se usa

$$\boldsymbol{Temperatura\ ambiente - 13\ °C}$$

En la siguiente tabla se muestra el pronóstico de la temperatura ambiente para los próximos cuatro días.

Temperatura en el día	Día
18 °C	Lunes
22 °C	Martes
21 °C	Miércoles
19 °C	Jueves

a) ¿Cuántos grados-días consumirá el bicho al final de los cuatro días?

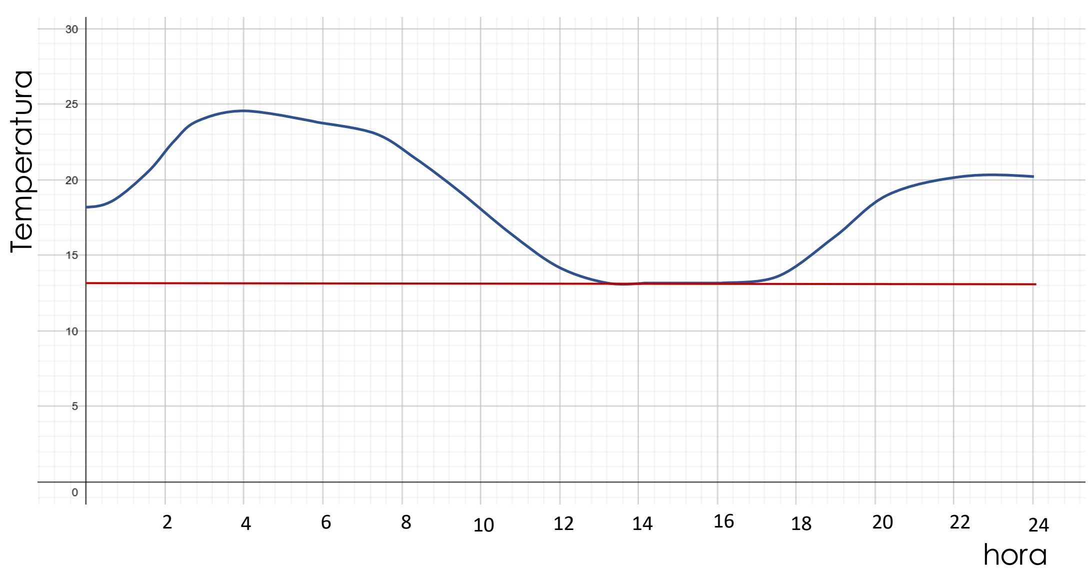
b) Hasta el domingo (día previo al lunes de la tabla anterior) el bicho ya había consumido 143 grados-días. Dado que se deben tomar medidas preventivas cuando consuma 160 grados-días, ¿qué día se deben tomar las medidas preventivas?

c) Si se requiere calcular con más precisión los grados-días consumidos por el bicho en el día, ¿qué crees que se podría hacer para lograr tal precisión?

En el primer numeral, el *cómo varía* está en términos de una gráfica constante, y una tabla de valores, para el segundo numeral. Dado que las preguntas están en términos del *cuánto varía* se espera que, en el análisis el estudiante interprete primero el *cómo varía* para llegar al *cuanto varía*. Además, en el inciso b) del numeral 2 se pregunta explícitamente por la Acumulación esperando que el estudiante recurra a la comparación de estados. Estos primeros numerales están muy relacionados con la variación discreta. La última pregunta del numeral 2 pretende ser un puente entre ese numeral y el siguiente, también reconocer el rol del tiempo en la situación.

A continuación, se presenta el numeral 3 de la segunda situación.

3) Las siguientes gráficas muestran el pronóstico de la temperatura ambiente para el viernes (azul) y la temperatura mínima para el consumo de grados-días del bicho (rojo).



a) ¿Cuántos grados-días consumirá el bicho entre las 0 y 8 horas de ese día?

b) ¿Cuántos grados-días consumirá el bicho entre las 3 y 8 horas de ese día?

c) Considerando el resultado del numeral 2, inciso a) y la información de la gráfica ¿cuántas horas tendrán que pasar para que el bicho consuma 32 grados-días?

d) ¿Cuántos grados-días en total consumirá el bicho durante los 5 días (lunes, martes, miércoles, jueves y viernes)?

e) ¿Qué ideas te permitieron encontrar la cantidad de los grados-días para **un día** y para una **cantidad de días**?

f) ¿Qué ideas te permitieron conocer el tiempo que tarda el bicho en consumir una cantidad de grados-días dada?

En este tercer numeral el *cómo varía* se da de forma gráfica. La diferencia de funciones se desarrolla con una gráfica de una función no constante y una constante y, también, se consideran los elementos mencionados anteriormente. Las últimas dos preguntas están orientadas a que el estudiante reconozca las nociones o ideas que puso en juego. Estas pueden plasmarse de forma verbal o mediante una expresión matemática.

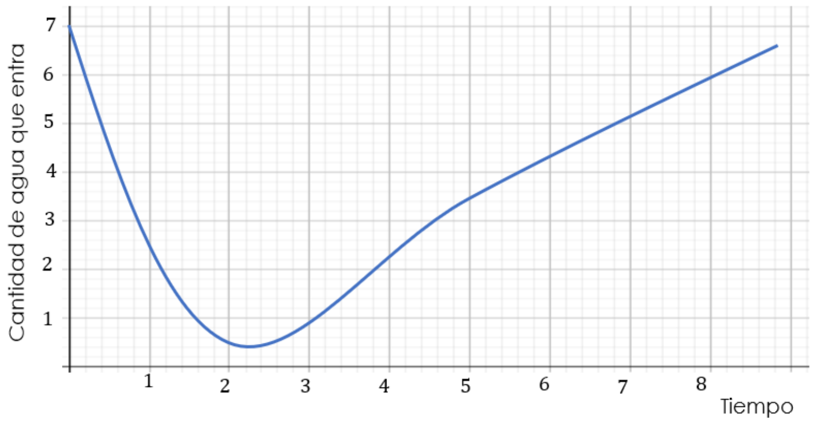
La tercera situación está en un contexto diferente: la cantidad de agua en un recipiente. Con esta tercera situación se incorporan elementos de la diferencia de dos funciones, ambas variables. El análisis gráfico, al igual que en la situación anterior, tiene un papel preponderante. A continuación, se muestra la tercera situación.

1) Se tiene un recipiente en el cual entra y sale agua por medio de dos llaves, respectivamente.

a) ¿Qué casos se podrían estudiar en esta situación?

b) Dada la respuesta anterior, ¿qué elementos se necesitan para estudiar cada uno de esos casos?

2) En la siguiente gráfica se muestra el flujo de agua que entra en el recipiente por medio de una llave.

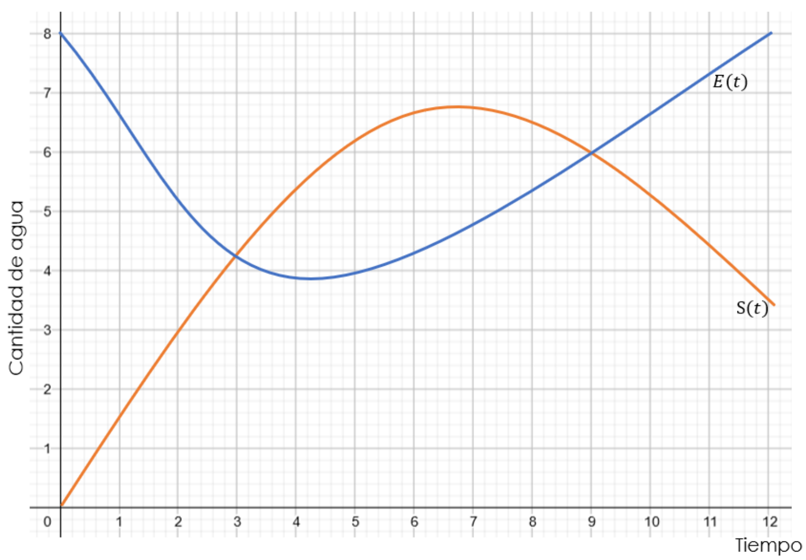


Usando la información de la gráfica anterior, responde las siguientes preguntas:

a) Se desea que la cantidad de agua en el recipiente en el tiempo 5 sea igual a 25, ¿qué cantidad de agua debe haber en el recipiente cuando este se inicie a llenar?

b) Si la cantidad de agua inicial en el recipiente es 10, ¿cuánta cantidad de agua hay en el recipiente hasta el tiempo 8?

3) Las siguientes gráficas muestran el flujo de entrada (azul) y salida de agua (roja).



a) Considerando que existe **una cantidad inicial** de agua en el recipiente, ¿cómo se podría conocer la cantidad de agua adquirida hasta el tiempo 2?

b) ¿Cómo se podría conocer la cantidad de agua adquirida entre los tiempos 2 y4?

c) ¿Cuánta cantidad de agua se adquiere hasta el tiempo 4?

d) ¿Cuánto tiempo debe pasar para que la cantidad adquirida de agua sea 9?

e) Construye una gráfica que represente la cantidad de agua en el recipiente

f) ¿Qué ideas te permitieron dar respuesta a las preguntas sobre la cantidad de agua que se adquiere en un determinado tiempo?

g) ¿Qué ideas te permitieron dar respuesta a las preguntas sobre conocer el tiempo necesario para que el recipiente adquiera una cantidad de agua dada?

En esta situación, el rol de la cantidad inicial es relevante. Por lo que se espera que el estudiante lo considere para determinar el valor acumulado. Este último, en esta situación se solicita sea expresado de forma gráfica en el inciso e.

Tercera fase: Valoración de los usos de la acumulación en la nueva relación horizontal y recíproca con el objeto matemático

Por último, como se mencionó al inicio, en la tercera fase se provee valorar los usos de la acumulación en la nueva relación con el objeto matemático de la Integral Definida que el estudiante, se presume, conoce. Primero se pregunta sobre las ideas que les permitieron resolver cada situación en la fase dos. Con esto se busca, que el estudiante pueda reconocer que la misma idea (Acumulación, Valor Acumulado) está inmersa en ambas situaciones. Luego se retorna a la primera situación, esperando que el estudiante nuevamente desarrolle la situación, pero esta vez incorporando el uso del conocimiento que se legitimó en la fase dos. De esta forma se proyecta ese uso del conocimiento y se resiste a los elementos de adherencia que se manifiestan en la fase uno.

1) Describe las ideas que te ayudaron a resolver la segunda y tercera situación.
2) Resuelve la primera situación usando esas ideas.

A diferencia de lo que se desarrolla en la matemática escolar, el DSES se basa en una epistemología que permite la resignificación de la Integral Definida mediante la comparación de dos estados (el reconocimiento del Valor Acumulado y la Acumulación), lo que representa el conocimiento útil al humano (Cordero, 2001).

III.1.4 *Cuarto Momento: Puesta en escena del DSES y análisis de datos*

- #### Etapa 1*: Puesta en escena del DSES*

Es importante mencionar que tanto el pilotaje del DSES como la puesta en escena se desarrollaron durante el confinamiento que provocó el COVID-19.

El aislamiento social generó que el sistema educativo incorporara diferentes recursos digitales como estrategia para cumplir con su labor, los cuales ofrecen la posibilidad de interacción entre el profesor y el estudiante, de forma sincrónica o asincrónica, mediante las plataformas como Zoom, Google Classroom, Edmodo y Moodle (Barrón, 2020) e inclusive WhatsApp, pasando a formar parte no sólo del léxico didáctico, sino también de la propia práctica docente (Sánchez *et al.*, 2020; citado por Ruiz, 2020).

Por tal motivo se decidió utilizar de forma sincrónica la plataforma de Zoom para la implementación del diseño y el desarrollo de entrevistas. Además, se utilizó WhatsApp como el medio para que los estudiantes enviaran el desarrollo escrito de cada situación. Al momento de la entrevista, las evidencias enviadas por WhatsApp se compartían mediante la opción compartir pantalla del programa, para poder entablar el diálogo sobre el razonamiento del estudiante.

La *entrevista no dirigida* es un aspecto etnográfico que se ha considerado en esta investigación.

Según Guber (2011) “en tanto enfoque, [la etnografía] constituye una concepción y práctica de conocimiento que busca comprender los fenómenos sociales desde la perspectiva de sus miembros” (p. 16). Además, “presenta la interpretación problematizada del autor acerca de algún aspecto de la realidad de la acción humana” (Jocobson, 1991; citado por Guber, 2011, p. 18).

Desde esta investigación, se busca rescatar un sujeto olvidado (Cordero, 2016a), en este caso al estudiante de docencia de la matemática, quien a causa del dME no le es permitido poner en uso su conocimiento matemático. Para afrontar lo anterior, es importante hacerlo partícipe de la construcción del conocimiento matemático, lo que conlleva problematizar el conocimiento matemático, el cual asumimos es producto de la acción humana.

Una forma de recolección de datos en este enfoque es la entrevista no dirigida. Esta se caracteriza por ser reflexiva y también porque el entrevistador tiene el rol de estar atento a los indicios que provee el informante, para descubrir, mediante ellos, los accesos a su universo cultural (Guber, 2011). La conveniencia de este tipo de entrevista en esta investigación es por el interés de la investigadora de conocer el razonamiento matemático, en términos de construcción, mediante las afirmaciones y explicaciones ante el desarrollo del diseño.

De acuerdo con Guber (2011), la entrevista no dirigida, tiene dos momentos durante el trabajo de campo. En el primero, el investigador debe descubrir las preguntas relevantes; en el segundo, implementar preguntas más incisivas de ampliación y sistematización de esos aspectos considerados significativos (McCracken, 1988; citado por la autora). Estos aspectos también fueron considerados para el desarrollo de la entrevista.

a) Puesta en escena

Esta investigación se desarrolló con 8 estudiantes de docencia de la matemática (6 hombres y 2 mujeres) pasantes del séptimo periodo (tercer año) de la carrera Profesorado de Matemáticas en el Grado de Licenciatura, de la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, de la Sede Nacaome, en el departamento de Valle, Honduras. El plan de estudios de esta carrera se conforma de 12 periodos (cada año contiene 3 periodos), con un total de 49 asignaturas.

Las asignaturas de Cálculo I y Cálculo II se cursan en el cuarto y quinto periodo respectivamente (segundo año) de tal manera que los estudiantes ya habían cursado estas asignaturas.

El desarrollo del diseño tuvo una duración de 3 horas. Por el limitante tiempo, únicamente se desarrolló la primera y segunda situación.

Inicialmente se envió la primera situación a cada estudiante. Una vez terminada, se envió la segunda situación. Durante el desarrollo, se atendieron dudas y al finalizar cada situación, los estudiantes opinaban sobre el desarrollo de estas o las impresiones causadas por las actividades.

b) Primer acercamiento

Después de la implementación, se tuvo una primera revisión de las respuestas de cada estudiante. Mediante este primer acercamiento se eligió para la entrevista a los estudiantes cuyas respuestas se acercaban claramente a lo que se esperaba desde la base epistemológica. Luego, se contactó a cada estudiante para conocer la disposición de tiempo (dado que las entrevistas se desarrollaron fuera del horario académico de los estudiantes). Una vez confirmada la participación, se llevaron a cabo dos entrevistas: una con un grupo de dos estudiantes —cuyos horarios coincidían y cuyas respuestas eran similares— y una segunda entrevista con un estudiante.

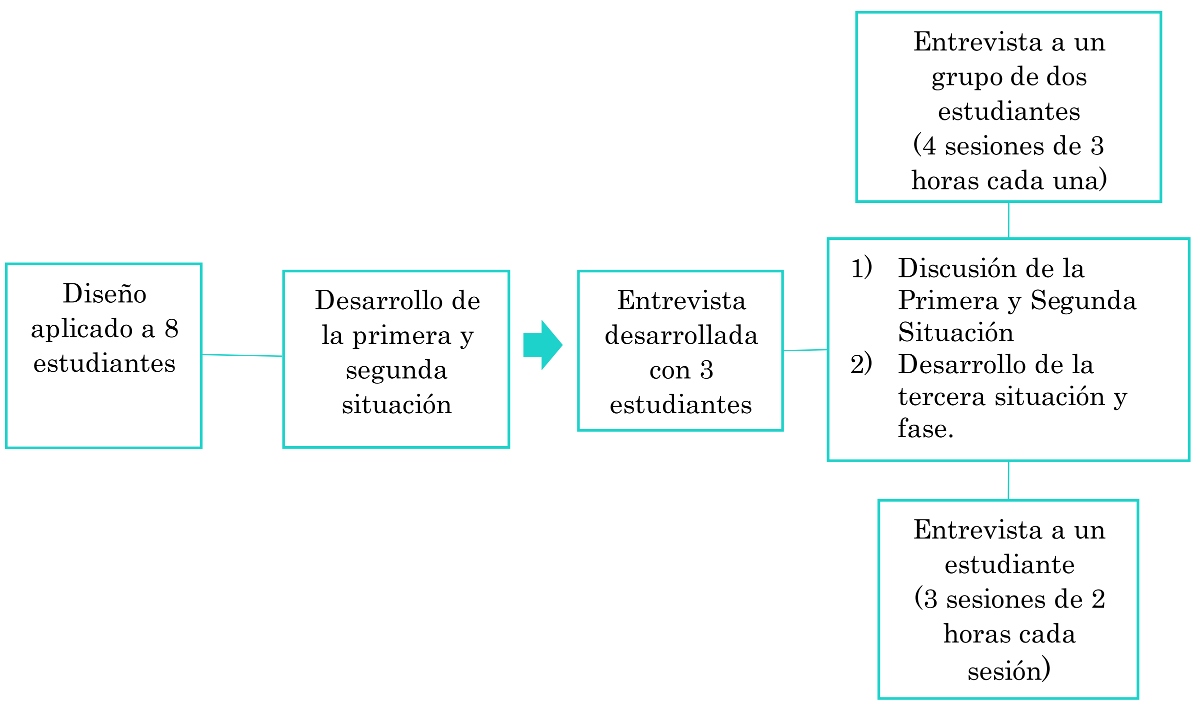
Después, se retomó las respuestas enviadas sobre la primera y segunda situación de los estudiantes seleccionados, para descubrir las preguntas relevantes —primer momento de la entrevista no dirigida— incorporándolas al guion de la entrevista (el guion no fue una estructura rígida de dicha entrevista).

c) Focalización y profundización

Las entrevistas se desarrollaron en 4 sesiones para el grupo de 2 estudiantes y 3 sesiones para el estudiante que se entrevistó de forma individual. Cada sesión tuvo una duración de 3 a 4 horas. Se inició con lo desarrollado en la implementación (primera y segunda situación). En el momento de la entrevista, las respuestas que se generaron por las preguntas encontradas en el primer acercamiento generaron otras preguntas, que permitían profundizar en los aspectos de interés. Luego se pasó a desarrollar la tercera situación y, posteriormente, culminar con la tercera fase. Simultáneo a el desarrollo de la tercer situación y fase, también se desarrolló la entrevista no dirigida, pero sin ningún guion establecido.

Para resumir esta etapa se presenta la siguiente figura:

Figura 23. *Implementación del DSES*



➢ Etapa 2: *Análisis de datos*

a) La Comunidad de Conocimiento Matemático como unidad de análisis

La comunidad de estudiantes de docencia de la matemática, en la cual se implementó el DSES, fue estudiada tomando en consideración el constructo Modelo de Comunidad de Conocimiento Matemático (MCCM) (expuesto en la sección 2 del capítulo 2). Esto permitió conocer lo propio de esta comunidad, al analizar el conocimiento matemático que emerge en el compromiso mutuo que los miembros asumen, ante las problemáticas que enfrentan desde lo situacional de su quehacer. En este sentido, la comunidad de conocimiento matemático fue considerada como la *unidad de análisis* de la investigación, caracterizada mediante el MCCM.

Referente a la unidad de análisis, Martínez (2004) señala:

> ¿Cuál sería, entonces, la unidad de análisis, es decir, el objeto específico de estudio de una investigación cualitativa? Sería la nueva realidad que emerge de la interacción de las partes constituyentes, sería la búsqueda de esa estructura con su función y significado. Esta realidad no está en los elementos sino que aparece por las relaciones que se dan entre los elementos, así como surgen las propiedades del agua que no se dan ni en el oxígeno ni en el hidrógeno por separado, o las propiedades del significado al relacionar varias palabras en una estructura lingüística, o la vida por la interacción de varias entidades fisicoquímicas, etcétera. (p. 75)

La comunidad de estudio, son estudiantes de docencia de la matemática de la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, en Honduras, quienes ante el DSES manifiestan el compromiso mutuo de brindar soluciones a problemáticas, como las situaciones planteadas en el diseño. En ese compromiso mutuo emergen las argumentaciones autónomas expresadas en los usos de la Categoría de Acumulación, lo cual desde lo local de la comunidad se expresa en la acepción de un promedio. Todo lo anterior —evidencia que se mostrará en los resultados— expresa cada uno de los elementos que componen de manera estructurada la comunidad de conocimiento matemático.

Figura 24.

Nota. Adaptado de Cordero (2011; 2016a)

Los miembros seleccionados del grupo, no se consideran como individuos aislados de sus demás compañeros o entré sí, sino que se consideran y estudian como miembros de una comunidad de conocimiento matemático.

b) *Análisis de Datos*

Triangulación

Álvarez (2008) menciona que se pueden desarrollar cuatro formas de triangular. La primera consiste en la *triangulación de métodos*, donde el investigador contrasta la información obtenida a través de una técnica (por ejemplo, la entrevista) con otras (la observación, la revisión documental). Una segunda forma sería la *triangulación de sujetos,* en ella el investigador trata de contrastar los puntos de vista de los miembros de la comunidad estudiada. La tercera forma es la *triangulación de espacios y tiempos*, la cual trata de aplicar las técnicas de recogida de información (observación, entrevista y análisis documental) en diferentes espacios y tiempos, para ver si los resultados obtenidos son consistentes. Y, por último, *triangulación de expertos*, esta se enfoca en que diferentes investigadores que se encuentren presentes en el campo a estudiar pongan en común sus visiones sobre el/los tema/s objeto de estudio.

En esta investigación se efectúan las siguientes triangulaciones:

- *Triangulación de métodos*: producciones escritas sobre el desarrollo del diseño y la entrevista no dirigida.
- *Triangulación de sujetos:* está inmersa en las diferentes evidencias sobre los elementos de emergencia de usos de la CCM(EDM). Es importante aclarar que, dada la postura teórica que se asume, no se estudió a los miembros por separado, sino como una comunidad de conocimiento matemático.
- *Triangulación de espacios y tiempos* se utilizó para fortalecer las evidencias de algunos elementos importantes en el desarrollo del DSES en la CCM(EDM) en Honduras, mediante evidencias que muestran la manifestación de esos mismos elementos en la comunidad de estudiantes colombianos que desarrolló el DSES en la etapa de pilotaje.

Elementos de adherencia

Para identificar los elementos de adherencia en la CCM(EDM) sobre el dME de la Integral Definida, se retoman tres de las 5 características que se reportan en Soto (2010) y Cordero *et al.* (2015), a saber:

Carácter hegemónico: Se manifiesta en la imposición de un solo tipo de argumentaciones, significaciones y procedimientos asociados al saber matemático escolar.

Utilitario: La organización de la matemática escolar ha antepuesto la utilidad del conocimiento a cualquiera de sus restantes cualidades… impone un objeto preexistente, lo que no permite preguntarse ¿por qué es posible que tal concepto se construya como se construyó? En ese sentido, se obliga a asumir un objeto matemático.

Concepción de que la matemática es un conocimiento acabado y continuo: Esto ha generado que la enseñanza de la matemática sea reducida a la mecanización de procesos o memorización de los conceptos.

Usos de la Integral

El reconocimiento de los usos de la integral se realizó mediante el análisis de *funcionamientos y formas* de los usos (Cordero y Flores, 2007):

Funcionamiento: Lo constituyeron las tareas o ejecuciones que la comunidad desarrolla.

Forma: Son las clases de tareas/ejecuciones, las cuales interpretamos como las maneras en que se llevan a cabo dichas tareas en la situación.

Elementos de Identidad Disciplinar

La fuente de sentido que constituye el quehacer de la comunidad está inmersa en la triada de la Identidad Disciplinar: Legitimidad, Resistencia y Proyecto. Con base en Opazo-Arellano (2020), para el análisis de los datos cada uno de estos elementos los entendemos como:

Legitimidad: Está en el *reconocimiento de otros saberes*, se manifiesta en afirmaciones verbales y escritas que aluden al conocimiento funcional.

Resistencia: Construcción y emergencia de usos.

Proyecto: La proyección de los elementos de legitimidad y resistencia se refleja en la valoración de los usos de la acumulación en la nueva relación con el objeto matemático, mediante la incorporación de los usos. Además, en reflexiones que estén relacionadas con la matemática funcional o el cuestionamiento de la matemática escolar.

En la siguiente tabla se sintetizan elementos importantes en la metodología.

Tabla 6.

Resumen de los aspectos metodológicos de la investigación.

Pregunta de Investigación	Hipótesis	Datos	Análisis
¿Cómo resiste el estudiante de docencia de la matemática al dME de la Integral Definida, cuando incorpora sus usos en el desarrollo de un diseño escolar?	La emergencia de los usos de la Integral, evidenciados a través del DSES, le permite al estudiante de docencia de la matemática resistir al dME de la Integral Definida.	Producciones escritas del desarrollo del diseño	Elementos de Identidad Disciplinar: Legitimidad Resistencia Proyecto
			Elementos de adherencia al dME de la integral definida
		Entrevista	Emergencia de usos: funcionamientos y formas

Capítulo IV: Análisis y Resultados

A continuación, se presentan los resultados obtenidos, en la puesta en escena del Diseño de Situación Escolar de Socialización (DSES), de la CCM(EDM). La nomenclatura que se utilizó para identificar a los miembros de esa comunidad es la siguiente:

Tabla 7.
Nomenclatura utilizada en el análisis de datos

Nomenclatura	
KHN	Estudiante 1 Entrevista 1
EHN	Estudiante 2 Entrevista 1
AHN	Estudiante 3 Entrevista 2
ENT	Entrevistadora

La evidencia de la comunidad de estudiantes de docencia de la matemática de Colombia se mostrará como ECO.

IV.1 Elementos de Adherencia al dME de la Integral Definida en la CCM(EDM)

Con la primera fase del DSES se pretende identificar a qué elementos del dME de la Integral Definida está adherido el estudiante de docencia de la matemática, por lo cual, la primera situación está orientada a ello.

El planteamiento de la primera situación es el siguiente:

A partir del siguiente planteamiento, responde las preguntas.

$$\int_a^b (2x+1)dx = 30$$

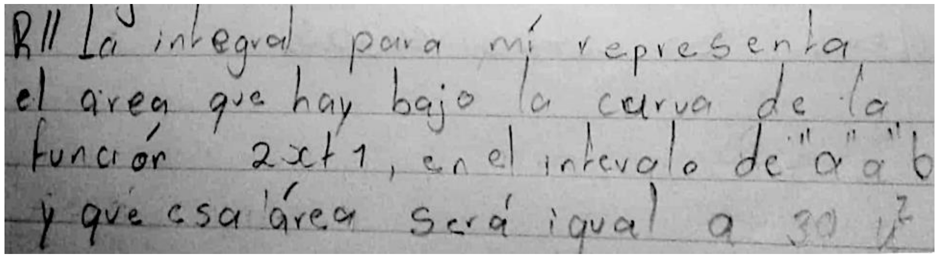
a) ¿Cuáles podrían ser algunos valores para a y b?
b) ¿Qué significado tiene para ti la integral?
c) A partir del significado que tienes de la integral, explica el procedimiento que realizaste en el inciso a.

Las respuestas del inciso *a)* y *b)* permitieron reconocer el carácter hegemónico del dME de la Integral Definida. Es decir, los significados, procedimientos y argumentos que son privilegiados por el estudiante sobre la integral definida a causa del dME.

Tabla 8.

Evidencia de los elementos del carácter hegemónico del dME de la Integral Definida

Nomenclatura	Evidencia
EHN	Si calculamos la integral y la evaluamos: $\int_a^b (2x+1)\,dx = 30$ $\Rightarrow \int_a^b (2x+1) = x^2+x \Big\|_a^b = (b^2+a) - (a^2+a)$ Sacando factor común: $b^2+\cancel{a}b - a^2+a = b(b+1) - a(a+1) = 30 \to (1)$ Buscamos posibles valores sustituyendo en (1): $b(b+1) - a(a+1) = 30$ Si $b=6$, $a=3$ $\Rightarrow 6(6+1) - 3(3+1) = 30$ $42 - 12 = 30$ $\boxed{30=30}$ Si $b=8$, $a=6$ $\Rightarrow 8(8+1) - 6(6+1) = 30$ $72 - 42 = 30$ $30 = 30$ Si $b=15$, $a=14$ $\Rightarrow 15(15+1) - 14(14-1) = 30$ $240 - 210 = 30$ $\boxed{30 = 30}$. En mi caso, desde que vi el problema, sabía que tenía que aplicar una integral para poder determinar los valores de a y b
ENT	¿Por qué lo consideró así, o sea, la ve y piensa: tengo que aplicar la integral?
EHN	[...] Ah bueno, lo consideré desde el aspecto que digamos al resolver la integral le da $x^2 + x$, ya de ahí utilizando esa respuesta, se puede sustituir los valores de a y b dentro de esa x para poder determinar qué valores pueden cumplir que dados multiplicados sumados [la expresión a la que llega es $b(b+1) - a(a+1)$; con multiplicados se refiere a la multiplicación $b(b+1)$; con sumados se refiere a la suma de $b+1$] a y b sea igual a 30 y por eso pensé, en resolver la integral.

KHN	 R11 La integral para mí representa el área que hay bajo la curva de la función 2x+1, en el intervalo de "a" a "b" y que esa área será igual a 30 u²
	Parece que era como, ir definiendo una integral indefinida, pero por tramos, de una función algo así, o sea, en el eje x y en el eje y por ejemplo. En el eje x por ejemplo, podría ser la función… en este caso sería $x = a$ y después definirla para y, algo así, no recuerdo bien, cómo es, pero, o sea, el producto de eso va a ser lo que entendemos como unidades cuadradas

La evidencia de la tabla anterior muestra un procedimiento de la CCM(EDM) que está relacionado con el procedimiento "Estrategia para utilizar el teorema fundamental del Cálculo" presentado en el libro de Larson *et al.* (2006), el cual se refiere a aplicar una regla de integración y encontrar la primitiva, y luego evaluar los límites de integración.

Dado que los valores a y b en esta situación son desconocidos, los estudiantes apelan a calcularlos mediante la estrategia de "tanteo". Es decir, una vez encontrada la expresión (en su forma más general o factorizada) que refleja el $F(b) - F(a)$ probaron con diferentes valores en a y b hasta encontrar los valores que cumplen con la condición $F(b) - F(a) = 30$. Es importante mencionar que las respuestas para los valores de a y b fueron acertadas. Sin embargo, el argumento queda en términos de manipulaciones algorítmicas más que en asociaciones con significados, como lo veremos a continuación.

En cuanto a lo referido en la pregunta del inciso *b)* sobre el significado de la integral, se hiso alusión al área bajo la curva.

Al cuestionar el por qué es un área bajo la curva (pregunta desarrollada en la entrevista), la respuesta se dio en términos de "así lo vimos en la clase de cálculo". La respuesta a esta pregunta nos permite inferir el carácter utilitario del dME, pues hace referencia a elementos que manifiesten la razón o la forma de cómo adoptaron el objeto matemático.

Tabla 9.
Evidencia de los elementos del carácter utilitario del dME de la Integral Definida

Nomenclatura	Evidencia
EHN	Es que como eso lo vimos en Cálculo II, más o menos nos explicaron eso que, al sacar una integral esta representaría un área bajo la curva de una función. Como está definida, en este caso, entonces, sería el área bajo la curva entre esos dos puntos
ENT	¿Por qué cree que sería el área bajo la curva? ¿qué lo lleva a dar esa respuesta?
AHN	Pues eso, sería dar una definición según lo que hemos aprendido, bueno, lo que yo he aprendido hasta el momento y nos han dicho, por lo general, que una integral representa el área bajo la curva, o sea, es lo que se puede calcular.
ENT	[…] Podría comentarme ¿cómo?, lo que recuerda, ¿cómo fue enseñada está idea de la integral definida como área bajo la curva en su curso de cálculo?
AHN	[…] Al inicio empezó como… como calculando, si mal no recuerdo, era el área de un cuadrado después la graficamos y mediante una integral resolvimos esa área principalmente y funcionó, entonces así fue.

Las razones del porqué los estudiantes consideran que la Integral Definida es un área bajo la curva reflejan respuestas sobre un conocimiento externo a los saberes del que aprende. Lo anterior evidencia la exclusión de la construcción del conocimiento, lo que conlleva a aceptar el dME (Cordero *et al*., 2015) de la Integral Definida.

Por otra parte, se evidencia el carácter acabado y continuo, donde se menciona la presentación de los conocimientos matemáticos como terminados y lineales, generando que la enseñanza de la matemática sea reducida a la mecanización de procesos o memorización de los conceptos (Soto, 2010; 2013; 2014; Cordero *et. al*, 2015). Esta evidencia se da en las respuestas de la pregunta *c)*, ya que no lograron responder lo que se indicaba (ver Tabla 10).

Tabla 10.

Primera evidencia de los elementos del carácter acabado y continuo del dME de la Integral Definida

Nomenclatura	Evidencia
AHN	Pues primero desarrollar la integral definida, para ello primero desarrolle la integra y luego se evalua en a y b, tomando un valor en b cualquiera trate de despejar una "a" y pues de esa manera encontrar su valor o una aproximación.
KHN	En este caso fue que apliqué la idea de área, entonces comprendí que para obtener el 30, qué sale a la par de la integral, tendría que buscar un área que sea igual a 30
ENT	Usted menciona que aplicó la idea de área. Así como que específicamente ¿dónde la aplicó?, ¿cuando factorizó?
KHN	Cuando factoricé y más que todo porque…
ENT	¿Por qué en la factorización KHN?
KHN	Porque pensé que [...] si llegué a lo mismo, casi como lo que expliqué en el caso 1, que traté de cancelar los números, cada una de las restas y llegar al 30, pero en este caso no sé qué tanta verdad tenga eliminar el término de las a, por ejemplo $[b(b+1)-a(a+1)$ se refiere a hacer 0 el término $a(a+1)]$, no sé si afectaría porque no quedaría definido en ese intervalo, algo así.
EHN	Eso lo relacioné porque en el inciso *b)* había dicho que era el área bajo la curva verdad, de una función, entonces pensé yo, bueno si ya nos lo dan igualado a 30 necesariamente ese 30 tiene que ser área bajo la curva qué está ahí entonces factoricé y en este caso tuve que encontrar los valores que me diera igual a esa área, igual a esa área que me estaban dando ahí.

Las respuestas anteriores, se limitan a describir paso a paso lo realizado en el desarrollo del inciso *a)*. Por otro lado, logran mencionar la relación que les permite reconocer que $F(b)-F(a)$ debe ser igual a 30, número que refleja el área bajo la curva. Sin embargo, esta relación que privilegia el dME de la Integral Definida, no es del todo clara cuando se muestra fuera de lo habitual de su enseñanza. Por tal razón es que se piensa que si se hace 0 al término $a(a+1)$, implicaría que el valor de a no está definido en ese intervalo.

Esta ausencia de relaciones entre los procedimientos que se realizan y su significado reflejan la mecanización y memorización de estos.

Para profundizar, se hicieron las siguientes preguntas: ¿Cuál es la relación entre el área bajo la curva y el $F(b) - F(a)$? ¿Cuál es la relación entre $2x + 1$ y $x^2 + x$?. Las respuestas siguieron sin mostrar de forma clara las relaciones entre los significados y procedimientos. Esto se presenta en la siguiente tabla.

Tabla 11.
Segunda evidencia de los elementos del carácter acabado y continuo del dME de la Integral Definida.

Nomenclatura	Evidencia
ENT	¿Qué relación cree que exista entre el $2x + 1$ que es la expresión o la función que está dentro de la integral y la función cuadrática que queda al desarrollar esa integral?
AHN	[...] Al resolver la integral de esa función lineal pues nos resultó una cuadrática
AHN	¿Una relación entre el área bajo la curva y $F(b) - F(a)$?
ENT	Si, [...] alguna idea que usted tenga de por qué se relaciona.
AHN	Pues, es que al calcular la integral así nada más, sería toda el área. Entonces, ya con $F(b) - F(a)$ pues solo recorta la parte que necesita, solo entre los valores esos.

En la respuesta a la primera pregunta queda de manifiesto que para nuestra CCM(EDM), la relación implica que al resolver la integral de la función lineal (aplicando la estrategia para utilizar el TFC) genera la función cuadrática. Pareciera ser que el argumento de la relación entre las funciones es de forma algorítmica.

Además, nuevamente se refleja que se establece en cierta medida la relación $F(b) - F(a)$ con el área bajo la curva. La CCM(EDM) reconoce que el área bajo la curva debe ser igual a 30, sin embargo, no logran desarrollar un procedimiento que le permita relacionar todas las partes, es decir, responder a la primera pregunta a partir de la relación que se logra establecer. Esto conlleva a considerar que el estudiante de docencia de la matemática está tan adherido al dME del objeto matemático, que no logra reconocer otros procedimientos para poder responder lo que se necesita.

Esta falta de relación refleja la desarticulación entre los procesos y significados que limitan los alcances del Cálculo Integral.

Esta desarticulación también se evidenció en la comunidad de estudiantes colombianos al tratar de responder el inciso *c)*. Al igual que la CCM(EDM), ECO primero se limitó a describir lo que se desarrolló en el inciso *a)*, luego al retomar la pregunta en la entrevista, para poder profundizar, se obtuvo lo siguiente:

Tabla 12.

Evidencia de la desarticulación entre procedimientos y significados en una comunidad de estudiantes de docencia de la matemática en Colombia

Nomenclatura	Evidencia
ECO	Yo lo tomo más como si fuera un rectángulo grande que está cubriendo toda esa parte, yo siempre lo que hago es como mirar cuál sería la base y cuál sería la altura, así como la enseñan con las sumas de Riemann para hallar ese tipo de integrales. Entonces eso es lo que más o menos trato de asociarle, aunque siempre me ha confundido ese [signo] menos, cuando uno estudia el Teorema Fundamental del Cálculo siempre me confundió por qué acá aparecía un [signo] menos… ese [signo] menos es como algo que hago mecánicamente pero no alcanzo a comprender muy bien por qué se utiliza ese [signo] menos al evaluar la integral.

Nota. Tomado de Opazo-Arellano, Marcía-Rodríguez y Cordero (2020)

De esta primera parte del análisis, se resumen los resultados en la siguiente tabla, donde se evidencia la desarticulación entre procedimientos y significados, la aplicación de los procedimientos de forma mecánica y la adopción de todo lo anterior a partir de la clase de cálculo que cursaron.

Tabla 13.

Características del dME de la Integral Definida en la CCM(EDM)

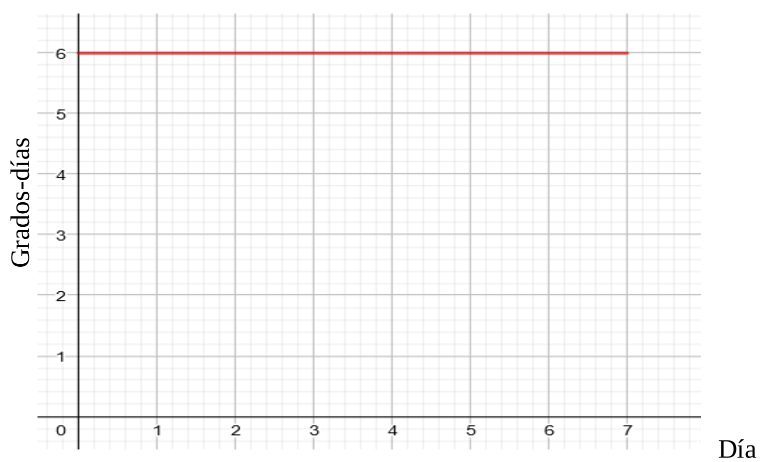
dME de la Integral	
Desarticulación de significados y procedimientos	El significado que prevalece es el área bajo la curva, sin embargo, hay ausencia de argumentos claros que manifiesten las razones del porqué se relaciona el área bajo la curva con el procedimiento de "calcular la integral" y evaluar en "*a*" y "*b*" (esto último, se ha denominado "la estrategia para utilizar el TFC").
Adopción de significados y procesos preexistentes	Asumieron los significados y procedimientos porque así lo vieron en sus cursos de cálculo.
Aplicación de procesos mecánicos	Son capaces de dar respuestas mediante la aplicación de la estrategia para utilizar el TFC, pero, estas carecen de significado.

IV.2 Emergencia de Usos de la Integral Definida en la CCM(EDM)

En la segunda fase se busca la emergencia de los usos del conocimiento matemático. A continuación, mostramos el numeral 1) de la segunda situación y las respuestas obtenidas.

Segunda Fase: Segunda Situación

1) Se está investigando el crecimiento de un bicho mediante el cálculo de los grados-días (unidad que se utiliza para medir la temperatura que consume un bicho). El insecto requiere consumir una cantidad específica de grados-días en cada etapa de su crecimiento.
Conocer esta información permite saber cuántos días tarda el bicho en alcanzar cada etapa de su crecimiento, para tomar medidas preventivas ante el daño que causaría en los cultivos.
En la siguiente gráfica se muestra cuántos grados-días consume el bicho **en cada día**



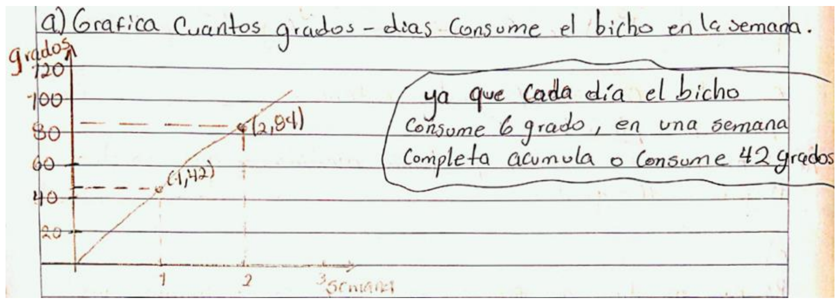
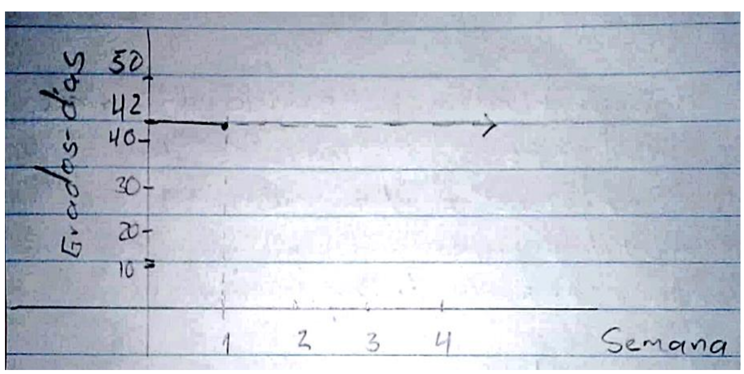
c) Grafica cuántos grados-días consume el bicho **en la semana**

d) ¿Describe cómo construiste la gráfica anterior?

Para dar respuesta a este primer numeral, los estudiantes reconocieron primero *cómo cambia* la temperatura consumida por el bicho, para luego determinar el *cuánto cambia* en la semana. Es decir, lo primero que hicieron fue reconocer que en cada día el bicho acumula 6 grados-días, luego procedieron a construir la gráfica que representa la cantidad de grados-días total. Al momento de graficar los grados-días surgen dos formas de esta. Por un lado, la gráfica donde se muestra el valor acumulado en cada semana y, por otro, la acumulación en cada semana. Esto se muestra en la siguiente tabla.

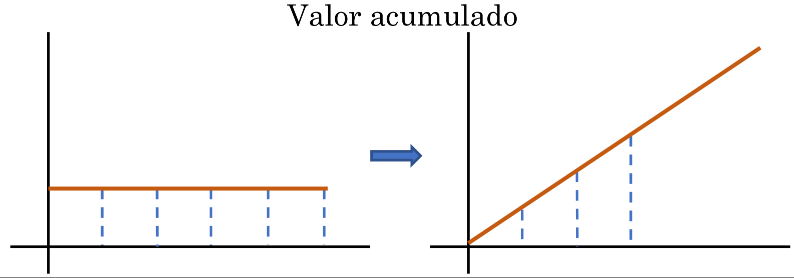
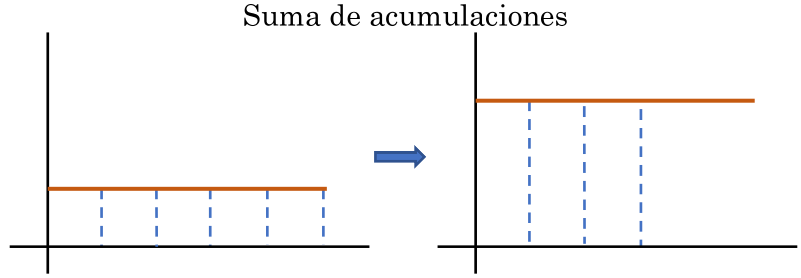
Tabla 14.

Respuestas sobre la segunda situación, numeral 1.

<table>
<tr><th>Nomenclatura</th><th>Evidencia</th></tr>
<tr><td rowspan="2">AHN</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Sí, en la primera semana puse los grados acumulados. Y, en la segunda igual, iba con la misma idea siempre, pues en la segunda semana iba a acumular lo de 14 días, los grados de 14 días, entonces así.</td></tr>
<tr><td>EHN</td><td>Pues en este caso, siempre el 6 era para cada día. Y en este caso en la gráfica que estamos haciendo nosotros, ya no es solo el 6, sino que ya va por escalas: 42 y 84, y así sucesivamente. Tomando en consideración que en cada semana consume 42 grados-días. Entonces, como que ya no sería constante en este caso, si no que va variando.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">KHN</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Bueno, ahí yo pensé que, por ejemplo, consumía seis días [grados-días] por día. Llegué a un 42. Pero me fijé en la gráfica que el 6 era constante en toda la semana. Entonces pensé que también el 42 iba a ser este constante entre cada semana, o sea, siempre iba a ser 42 por semana [...] De los intervalos, entre medio de cada semana, que podría dividir entre cada semana y también, sumándole lo que tenía anteriormente, en la semana uno, por decirlo así.</td></tr>
</table>

A partir de lo mostrado con la tabla anterior, se genera un primer uso de la Acumulación: Determinación de un Valor Acumulado. Donde el *funcionamiento* del uso es identificar cómo varían para representar cuánto varía los grados-días acumulados en este caso. Ahora bien, las *formas* de este uso están conformadas por las representaciones que desarrolla la comunidad de conocimiento matemático, es decir, por un lado, se presenta una representación donde el *valor acumulado* tiene el protagonismo y por otro, donde es *la acumulación* la que juega el papel principal, lo que implica que para conocer el valor acumulado se debe desarrollar una suma. (Ver tabla 15).

Tabla 15.
Uso 1 de la Acumulación: Determinación del Valor Acumulado

Uso 1: Determinación del Valor Acumulado	
Funcionamiento	Identificar cómo varía para representar cuánto varía
Forma 1	Valor acumulado 
Forma 2	Suma de acumulaciones 

Con este uso presentado en la tabla anterior, se evidencia un primer aspecto de la emergencia del conocimiento matemático funcional de la Integral Defina, el cual, se va fortaleciendo en el desarrollo de las siguientes actividades.

A continuación, se muestra el numeral 2 de la segunda situación del DSES y las respectivas respuestas que se obtuvieron de la puesta en escena.

2) Para que el bicho consuma grados-días, la temperatura debe ser mayor a los 13 °C. Por lo que para conocer cuántos grados-días consume el insecto se usa

$$\boldsymbol{Temperatura\ ambiente\ -\ 13\ °C}$$

En la siguiente tabla se muestra el pronóstico de la temperatura ambiente para los próximos cuatro días.

Temperatura en el día	Día
18 °C	Lunes
22 °C	Martes
21 °C	Miércoles
19 °C	Jueves

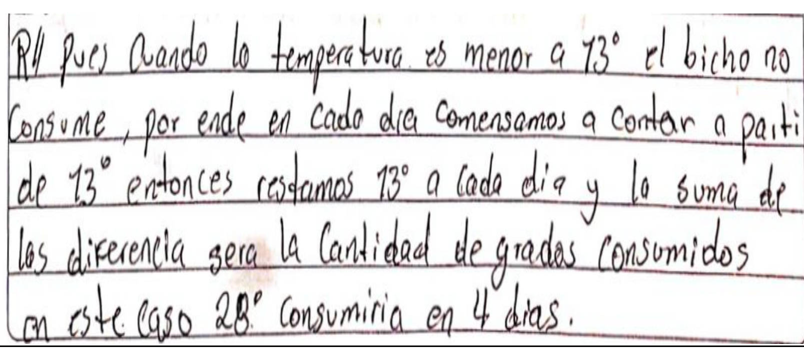
d) ¿Cuántos grados-días consumirá el bicho al final de los cuatro días?

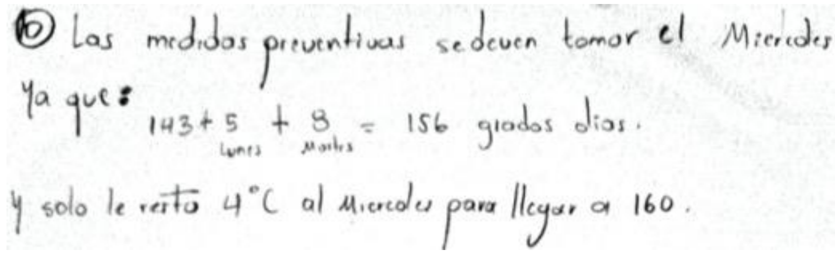
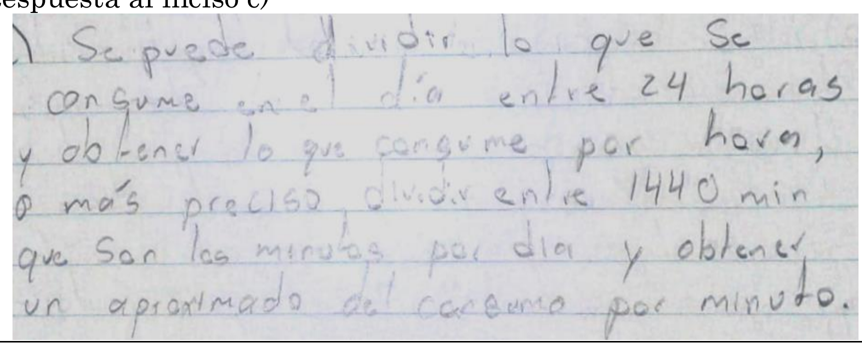
e) Hasta el domingo (día previo al lunes de la tabla anterior) el bicho ya había consumido 143 grados-días. Dado que se deben tomar medidas preventivas cuando consuma 160 grados-días, ¿qué día se deben tomar las medidas preventivas?

f) Si se requiere calcular con más precisión los grados-días consumidos por el bicho en el día, ¿qué crees que se podría hacer para lograr tal precisión?

Tabla 16.

Respuestas sobre la segunda situación, numeral 2

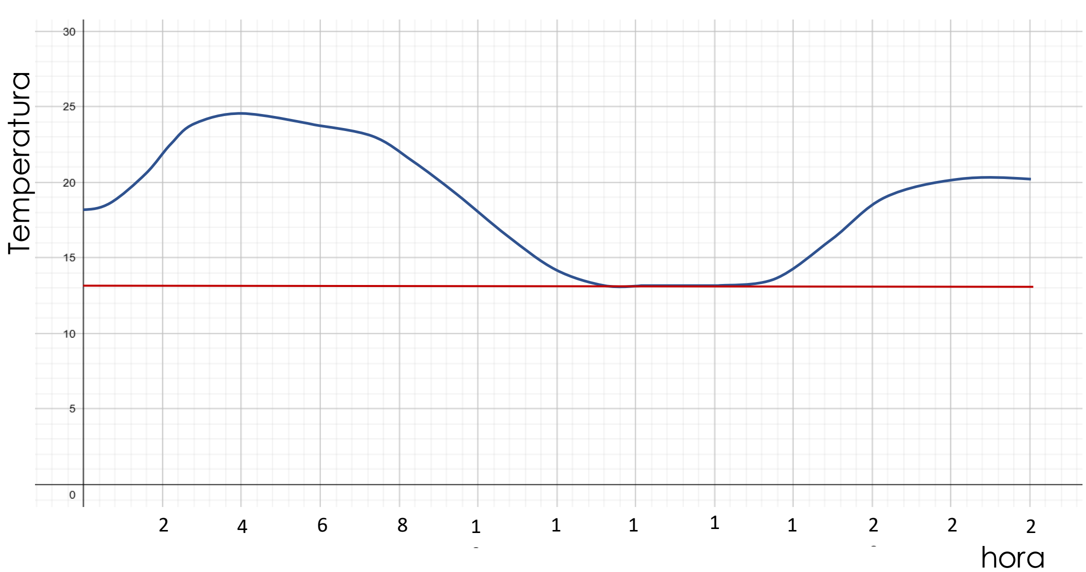
Nomenclatura	Evidencia
AHN	Respuesta al inciso a)  R/ Pues Cuando la temperatura es menor a 13° el bicho no Consume, por ende en Cada dia Comensamos a Contar a partir de 13° entonces restamos 13° a Cada dia y la suma de las diferencia sera la Cantidad de grados Consumidos en este Caso 28° Consumiria en 4 dias.
	Entonces... le resté los trece, porque a partir de esos trece, la diferencia era lo que consumía
ENT	¿Y el final? ¿Qué pasa con esas diferencias? Creo que aquí usted pone: "la suma de la diferencia".
AHN	Ajá, la sumé, sumé cada diferencia de cada día. Entonces, de los cuatro días me dio 28.

EHN	Respuesta al inciso b)  b) Las medidas preventivas se deuen tomar el Miercoles ya que: $\underbrace{143+5}_{\text{Lunes}} + \underbrace{8}_{\text{Martes}} = 156$ grados dias. y solo le resto 4°C al Miercoles para llegar a 160.
	Bien… en este caso, como ya nos había dicho, que hasta el día domingo habían 143 grados-días, entonces del lunes íbamos a partir, del lunes a jueves (o viernes parece) y como ya habíamos encontrado todos los grados-días que había consumido el bicho en el lunes, martes y miércoles, entonces necesariamente, tomé en consideración solo ir sumando los grado-días del lunes y los grados-días del martes hasta que me llegara a 160 o un número menor que 160, porque si ya se pasaba de 160 ya no cumplía los requisitos. En este caso sumé cinco más ocho. Había 156 grados hasta el martes. Entonces necesariamente al día miércoles se cumplían los 160 grados, pero no en toda la suma del día miércoles, sino que en un determinado tiempo […] en una determinada hora
KHN	Respuesta al inciso c) ) Se puede dividir lo que se consume en el día entre 24 horas y obtener lo que consume por hora, o más preciso dividir entre 1440 min que son los minutos por dia y obtener un aproximado del consumo por minuto.
	Bueno, nos están dando que la temperatura, el consumo de grados-días está dado por la temperatura actual por decirlo así, menos 13 grados Celsius, pero de esos solamente nos da por un día, por decirlo así, entonces para tener una mayor exactitud se podría dividir entre 24, que serían las horas y así sucesivamente el intervalo de tiempo. […] lo que pienso es que no se puede ser exacto. Hablo de, por ejemplo, qué pasará en el segundo 1.500 y algo, algo así, pero si decimos en el minuto tal, en el minuto [que sea] un entero por decirlo así, eso sí sería exacto. Pero más que todo pienso en intervalos que no están tan restringidos […] creo que estaría relacionada con la temperatura. Porque la temperatura no siempre va a ser constante en todo ese tiempo, sino que va a variar.

Todas las justificaciones y argumentos que la CCM(EDM) menciona, están en relación con la segunda situación. La respuesta en el inciso c), sobre cómo se podría calcular con mayor precisión los grados-días, genera por un lado considerar elementos más pequeños que la unidad del tiempo (día) por horas o minutos. Permite reconocer que el *cómo varía* estaría relacionado con la temperatura, dado que esta no sería constante. Sin embargo, se manifiesta un cuestionamiento sobre qué sucede si se suma el segundo 1.500. Este cuestionamiento surgió de los mismos estudiantes en los comentarios durante la aplicación del DSES en la clase.

Este cuestionamiento permite en el siguiente numeral, el desarrollo de varios aspectos sobre el Uso denominado Determinar una Acumulación o un Valor Acumulado (Tabla 20). A continuación, se presenta el numeral 3 de la segunda situación y las respuestas obtenidas de la CCM(EDM)

3) Las siguientes gráficas muestran el pronóstico de la temperatura ambiente para el viernes (azul) y la temperatura mínima para el consumo de grados-días del bicho (rojo).



g) ¿Cuántos grados-días consumirá el bicho entre las 0 y 8 horas de ese día?

h) ¿Cuántos grados-días consumirá el bicho entre las 3 y 8 horas de ese día?

i) Considerando el resultado del numeral 2, inciso a) y la información de la gráfica ¿cuántas horas tendrán que pasar para que el bicho consuma 32 grados-días?

j) ¿Cuántos grados-días en total consumirá el bicho durante los 5 días (lunes, martes, miércoles, jueves y viernes)?

k) ¿Qué ideas te permitieron encontrar la cantidad de los grados-días para **un día** y para una **cantidad de días**?

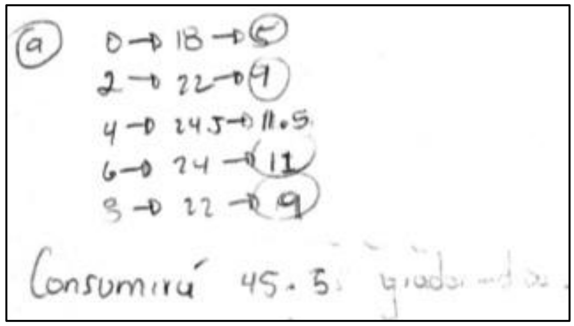
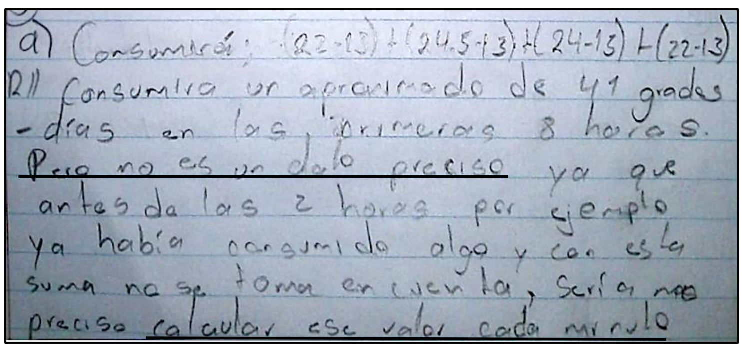
l) ¿Qué ideas te permitieron conocer el tiempo que tarda el bicho en consumir una cantidad de grados-días dada?

El análisis que desarrolló la CCM(EDM) para poder responder la pregunta del inciso a), permitió la emergencia de otro uso de la Acumulación.

La primera respuesta que se dio fue el resultado que obtuvieron al sumar los valores de los grados-días que corresponde a las horas 0, 2, 4, 6 y 8. Es decir, hicieron una *discretización* al desarrollar una partición de cantidades continuas (Muñoz, 2000). Sin embargo, para la CCM(EDM) esta primera discretización se enfoca únicamente en tomar los valores de la temperatura sobre esos puntos que se seleccionó. Por tal razón, aparece nuevamente la pregunta sobre qué sucede con los valores que no están considerando, esta vez expresada en: qué pasaba con los grados-días que estaban entre los valores que habían tomado como el 0.5 o el 2.5. Este cuestionamiento fue propio de la comunidad de conocimiento ante la situación. (Ver Tabla 17).

Tabla 17.
Evidencias de respuestas que muestran una discretización de la temperatura

Nomenclatura	Evidencia

<table>
<tr><td rowspan="2">EHN</td><td>
a) 0 → 18 → 5
2 → 22 → 9
4 → 24.5 → 11.5
6 → 24 → 11
8 → 22 → 9
Consumirá 45.5 grados-días</td></tr>
<tr><td>En este caso, lo que hice fue que, me fui al punto cero y busqué su coordenada, que en este caso era (0,18). Entonces al 18 le resté los 13 porque me están dando un valor límite en este caso, que es 13. Entonces, le resté los 13 y me dio que consumió 5 grados-días ahí, y así sucesivamente. Por ejemplo, en el punto 22 le resté los 13 y me dio 9 grados-días, y así… Y de ahí hasta llegar al 8. Sería en el 0, 2, 4, 6, 8 en el eje x. Y ahí, esos grados-días los sumé, pero ahí hubo un pensamiento que, digamos, yo lo hice con solo 2, 4, 6, 8. Pero ¿qué hubiera pasado si era 0,1,2,3,4 o sino 0, 0.5 y así sucesivamente?</td></tr>
<tr><td rowspan="2">KHN</td><td>
a) Consumirá: (22-13)+(24.5-13)+(24-13)+(22-13)
R// Consumirá un aproximado de 41 grados-días en las primeras 8 horas. Pero no es un dato preciso ya que antes de las 2 horas por ejemplo ya había consumido algo y con esta suma no se toma en cuenta, sería más preciso calcular ese valor cada minuto</td></tr>
<tr><td>Yo tengo algo similar a lo que tiene EHN, pero […] hay puntos que no, que no se tomaron en cuenta en el consumo, que siguen siendo también los que son, entre 2 y 3, por decirlo así</td></tr>
</table>

Las reflexiones y preguntas por parte de la investigadora y la CCM(EDM), permitió que se considerara un *promedio* de la temperatura, es decir, tomar varias temperaturas en diferentes momentos y obtener un promedio. Esto se presenta en la siguiente tabla.

Tabla 18.

Evidencia de respuestas que muestran la consideración sobre el promedio

Nomenclatura	Evidencia

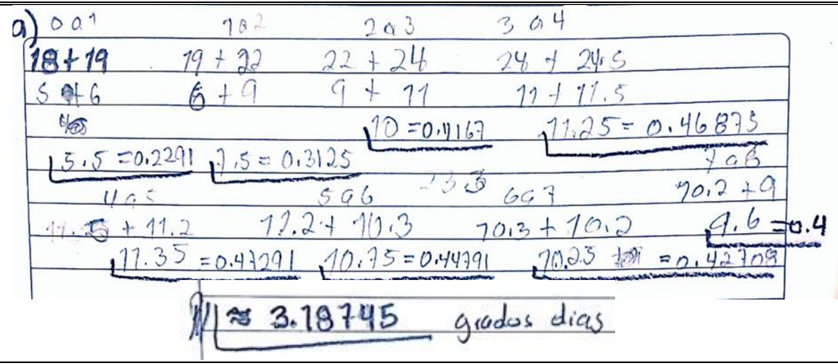
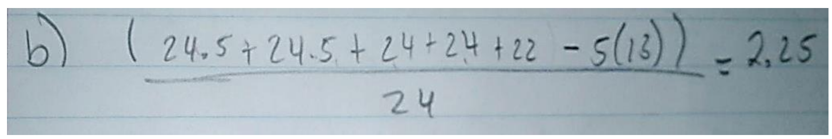
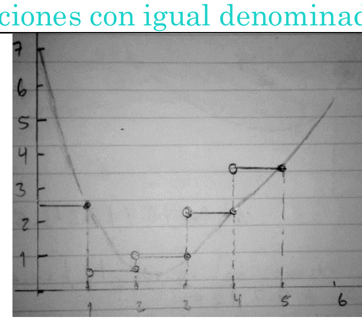
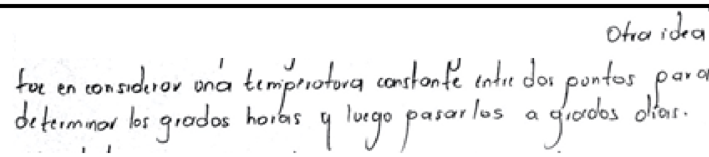
KHN	Pues, se podría hacer quizá algún promedio, ¿no? [...] el **promedio** de la temperatura en el día.
ENT	A ver KHN, usted dice por ejemplo si yo le solicitó los grados-días consumidos en todo ese día, sería ¿tomar únicamente la temperatura de la última hora por decirlo así?
KHN	Ajá, o sea, pero no, yo ahorita pienso que sería como un promedio de la temperatura en todo el día.
ENT	Y ¿cómo sería ese promedio?
KHN	Bueno la temperatura no cambia tan bruscamente, por decirlo así. Entonces [...] se puede tomar la temperatura cada hora, por decirlo así y se suman las 24 temperaturas y también se resta 13 por 24 [el producto 13×24] que sería la diferencia de los grados-días y creo que ahí estaría, no sé, no sé… creo que le falta algo.

Un elemento interesante que destacar es que, hasta este punto no se había considerado el rol del tiempo. Los cuestionamientos sobre este último punto fueron los que permitieron llegar a una respuesta que la propia CCM(EDM) validó: hacer constante la temperatura en lapsos pequeños de tiempo, lo que se denomina *constantificación de lo variable* (Muñoz, 2000). En varias ocasiones el hacer constante la temperatura, es decir, hacer constante ya sea los valores que toma la gráfica a la derecha de la partición, a la izquierda de la partición o el promedio entre ambos valores, la comunidad siguió expresándolo como el *promedio*. La toma de distintos valores conlleva que las respuestas numéricas sean distintas y la CCM(EDM) estaba consciente de ello. (Ver tabla 19).

Tabla 19.

Evidencia de considerar el promedio en lapsos cortos de tiempo (Constantificación)

Nomenclatura	Evidencia
AHN	

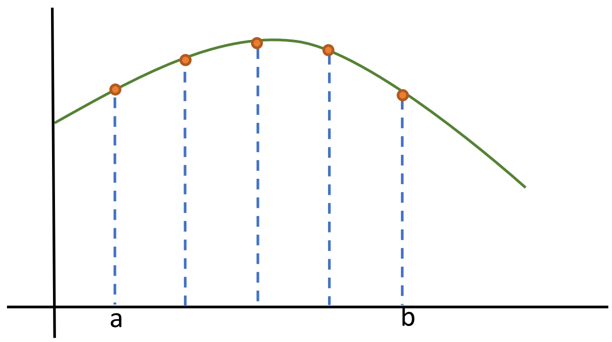
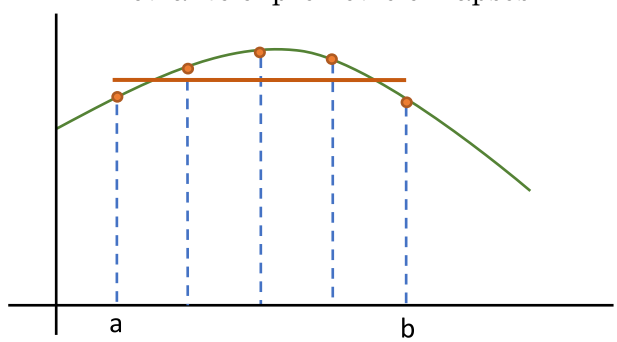
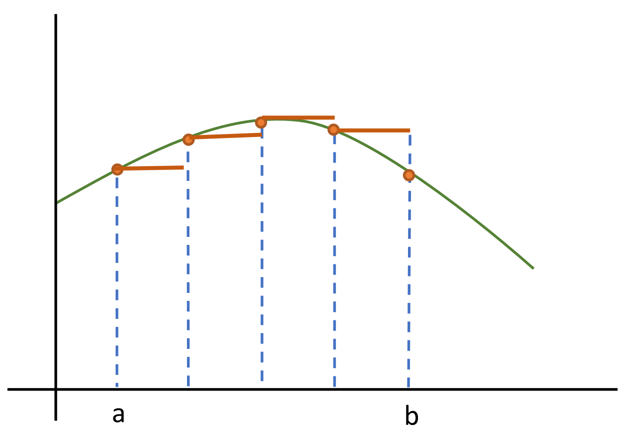
	
	Pues tomé lo que estaba en 0, que habíamos dicho 18 de ahí 19 ¿no? pero le resté, o sea, obtuve la diferencia de cada uno de estos, entonces me daba 11. De ahí 11/2, entre los dos valores, medio 5.5. A este 5.5, como era por una hora, lo dividí entre 24 y me dio 0.2291, entonces hice lo mismo con los otros y de ahí sumé todos esos resultados y me dio a 3.18, 3.19
KHN	
	Por decirlo así, lo que tomo yo para decir que es igual es que se están sumando fracciones con igual denominador
	 (Ejemplo del "promedio en un lapso" desarrollado en una de las actividades de la tercera situación)
EHN	

La incorporación del uso del conocimiento matemático disciplinar es esencial para la construcción de la Identidad Disciplinar del estudiante, la cual ha sido avasallada por el dME. Además, en esta construcción se incorporan elementos de la propia jerga de la comunidad, como el uso del término *promedio* o *lapso* en varias ocasiones cuando se hace referencia a hacer constante la temperatura o a la partición respectivamente.

La CCM(EDM) buscaba determinar un valor acumulado o una acumulación hasta cierto tiempo; el establecer el *cuánto cambia* los llevó a considerar diferentes formas de análisis para el *cómo cambia*. Esto se fue desarrollando hasta llegar a un procedimiento que fue validado y construido por la comunidad, lo que delimita un uso de la Acumulación. Este uso se muestra a continuación en la tabla 20.

Tabla 20.

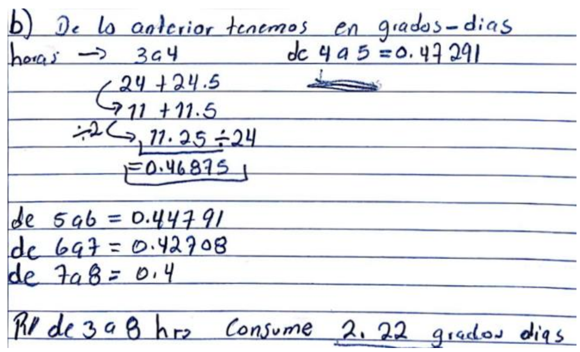
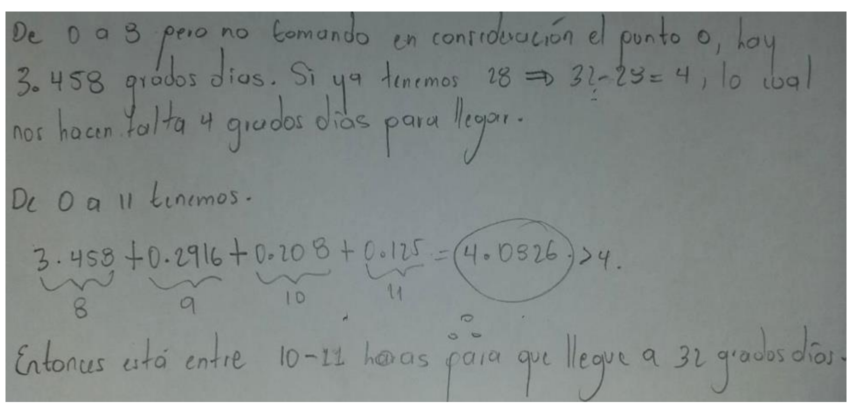
Uso 2 de la Acumulación: Determinación de la acumulación o el valor acumulado

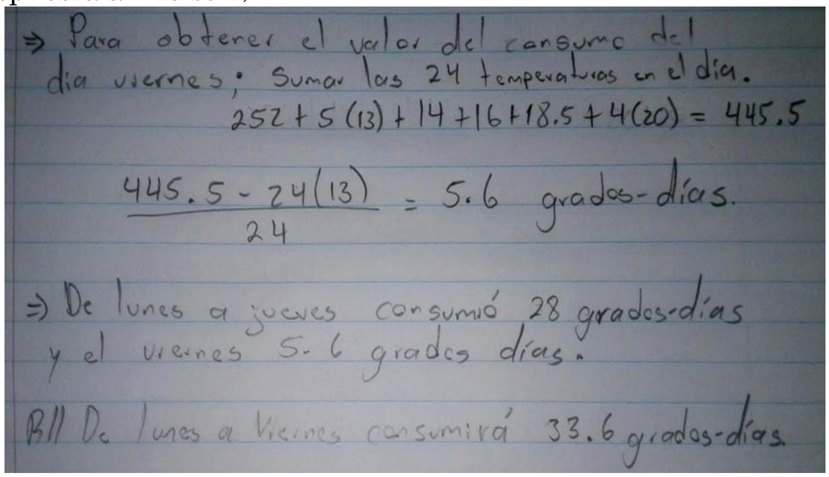
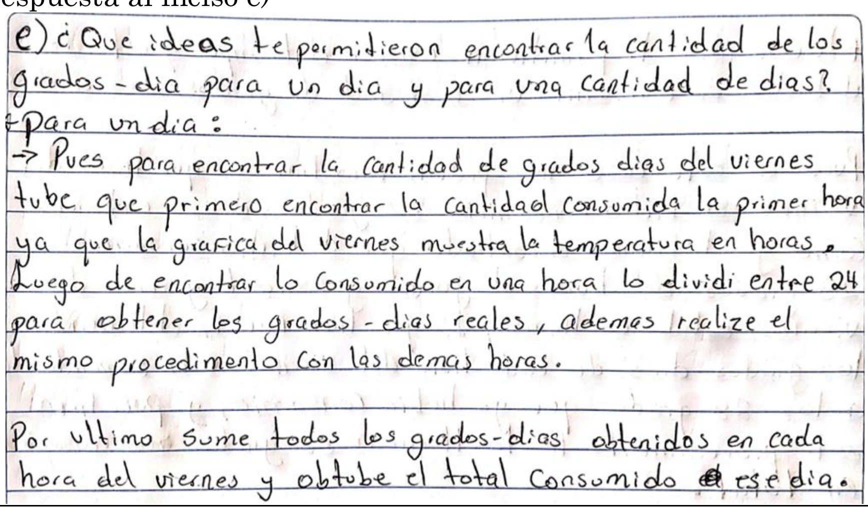
Uso 2: Determinación de la acumulación o el valor acumulado	
Funcionamiento	Establecer cuánto cambia
Forma 1	Discretización de la cantidad variable en lapsos iguales. 
Forma 2	Discretización de la cantidad variable mediante el promedio en lapsos 
Forma 3	Constantificación en lapsos iguales o menores a la unidad 

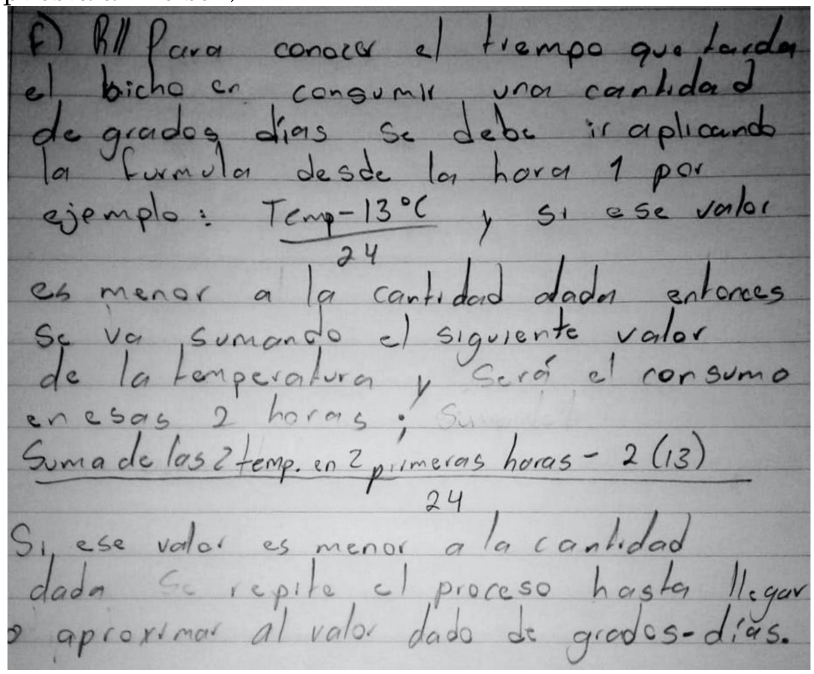
La forma 3 fue la que la CCM (EDM) siguió para poder dar respuesta a los siguientes incisos. Esto se muestra en la siguiente tabla.

Tabla 21.

Respuestas sobre la segunda situación, numeral 3

<table>
<tr><th>Nomenclatura</th><th>Evidencia</th></tr>
<tr><td rowspan="2">AHN</td><td>Respuesta al inciso b)

b) De lo anterior tenemos en grados-dias
horas → 3a4 de 4a5 = 0.47291
24 + 24.5
11 + 11.5
÷2 11.25 ÷ 24
= 0.46875
de 5a6 = 0.44791
de 6a7 = 0.42708
de 7a8 = 0.4
R// de 3a8 hrs Consume 2.22 grados dias</td></tr>
<tr><td>Lo que hice ahí fue, así como cuando saqué lo de las 8 hrs […] iba sacando el promedio de esa hora. Después, lo dividí entre 24 y me resultó de 0.46 y entonces como, esos datos los tenía anteriormente, de cuando saqué las 8 horas, entonces ahí solo lo copié. Después, lo sumé y me salió un total de aproximadamente 2.22 grados-días.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">EHN</td><td>Respuesta al inciso c)

De 0 a 8 pero no tomando en consideración el punto 0, hay 3.458 grados dias. Si ya tenemos 28 ⇒ 32-28 = 4, lo cual nos hacen falta 4 grados dias para llegar.
De 0 a 11 tenemos.
3.458 + 0.2916 + 0.208 + 0.125 = 4.0826 > 4.
8 9 10 11
Entonces está entre 10-11 horas para que llegue a 32 grados dias.</td></tr>
<tr><td>Nuestro objetivo es llegar a 32 grados-días verdad, y ya teníamos anteriormente 28 grados-días. Entonces lo que hice fue restar los 28 a los 32 y me fijé que era 4. Entonces anteriormente hallamos que de 0 a 8 horas había 3.458 grados-días […] de ahí solo le sumé las nueve horas, tomando como constante el nueve, siempre, no el 8. Y de ahí le fui sumando el 10, de ahí le fui sumando el 11. De ahí pude notar que a partir del 11 se pasaba a 4.0826 y como nuestro objetivo</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>tiene que ser igual a 4, por eso lo definí en ese intervalo de 10 a 11, pero no 11 estrictamente.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">KHN</td><td>Respuesta al inciso d)

⇒ Para obtener el valor del consumo del dia viernes: Sumar las 24 temperaturas en el dia.
$252 + 5(13) + 14 + 16 + 18.5 + 4(20) = 445.5$
$\frac{445.5 - 24(13)}{24} = 5.6$ grados-días.
⇒ De lunes a jueves consumió 28 grados-días y el viernes 5.6 grados días.
B// De lunes a Viernes consumirá 33.6 grados-días</td></tr>
<tr><td>Bueno lo que hice ahí, ya tenía el valor de todas las temperaturas hasta la hora doce. Entonces, seguía sumando las demás hasta cumplir las 24 y me dio 445.5 y ese 445.5 le resté los veinticuatro trece [refiriéndose al resultado del producto $24 \times 13 = 312$] y los dividí entre 24. Me dio que en todo el día consumió 5.6 grados-días. Y que al final de lunes a viernes consumió 33.6 grados-días.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">AHN</td><td>Respuesta al inciso e)

e) ¿Que ideas te permitieron encontrar la cantidad de los grados-dia para un dia y para una cantidad de dias?
+Para un dia:
→ Pues para encontrar la cantidad de grados dias del viernes tube que primero encontrar la cantidad consumida la primer hora ya que la grafica del viernes muestra la temperatura en horas. Luego de encontrar lo consumido en una hora lo dividi entre 24 para obtener los grados-dias reales, ademas realize el mismo procedimiento con las demas horas.
Por ultimo sume todos los grados-dias obtenidos en cada hora del viernes y obtube el total consumido ~~a~~ ese dia.</td></tr>
<tr><td>Yo diría que si fueran más días pues, la verdad, yo diría hacer el mismo procedimiento porque digamos la temperatura, posiblemente, la temperatura de hoy no vaya a ser la misma que la de mañana. Entonces posiblemente los grados [grados-días consumidos] sean diferentes, en cada día. Yo diría que hacer el mismo procedimiento cada día.</td></tr>
<tr><td>ENT</td><td>Hago el mismo procedimiento cada día, entonces un día obtengo 4, en otro día obtengo 6, otro día obtengo 5 y luego, con esos resultados de cada día ¿qué tendría que hacer?</td></tr>
</table>

AHN	Para obtener lo consumido en 5 días, pues lo sumo.
KHN	Respuesta al inciso f)  f) R// Para conocer el tiempo que tarda el bicho en consumir una cantidad de grados días se debe ir aplicando la formula desde la hora 1 por ejemplo: $\frac{Temp-13°C}{24}$ y si ese valor es menor a la cantidad dada entonces se va sumando el siguiente valor de la temperatura y será el consumo en esas 2 horas; ~~Su~~ $\frac{\text{Suma de las 2 temp. en 2 primeras horas} - 2(13)}{24}$ Si ese valor es menor a la cantidad dada se repite el proceso hasta llegar o aproximar al valor dado de grados-días.

En el inciso b) un procedimiento que se pudo utilizar es la resta $F(b) - F(a)$, es decir, calcular lo acumulado hasta la hora 3 y restarlo al resultado que ya se conocía sobre la hora 8. Sin embargo, la CCM(EDM) recurrió a la suma de los efectos acumulados.

En el inciso c) se da la comparación de dos estados: consideran el estado inicial que conocen (el valor inicial que es 28), se quiere llegar a un estado final que es 32. Al desarrollar la diferencia, los estudiantes se encuentran que se necesitan acumular 4 grados-días, por lo que se procede a ir sumando los acumulados en cada hora. Como parte del procedimiento, cada vez que acumulan realizan una comparación: el valor acumulado lo comparan con el estado final, para determinar si son iguales o menor. En el segundo caso, implica que se debe seguir acumulando.

En el inciso e) se menciona la necesidad de desarrollar el procedimiento, descrito en los incisos anteriores, en cada día. La razón es el fenómeno de variación continua que se estudia: la temperatura, la cual no es constante y varía de un día a otro. En este mismo inciso y el siguiente f) las explicaciones de los procedimientos realizados están en términos de ejemplos dentro de la misma situación. Sin embargo, se puede ver en ellos cada una de las características de la situación núcleo.

Segunda Fase: Tercera Situación

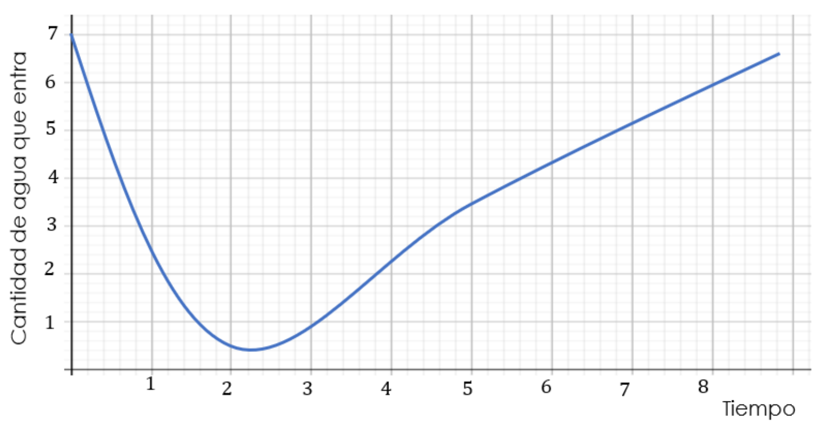
A continuación, se presentan los primeros numerales de la tercera situación.

1) Se tiene un recipiente en el cual entra y sale agua por medio de dos llaves, respectivamente.

c) ¿Qué casos se podrían estudiar en esta situación?

d) Dada la respuesta anterior, ¿qué elementos se necesitan para estudiar cada uno de esos casos?

2) En la siguiente gráfica se muestra el flujo de agua que entra en el recipiente por medio de una llave.



Usando la información de la gráfica anterior, responde las siguientes preguntas:

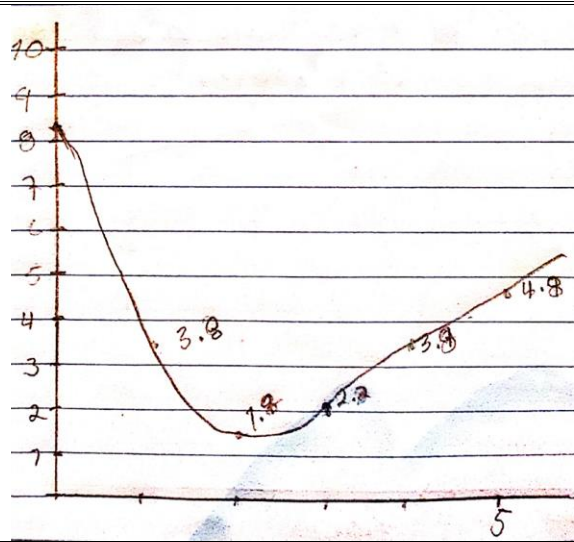
c) Se desea que la cantidad de agua en el recipiente en el tiempo 5 sea igual a 25, ¿qué cantidad de agua debe haber en el recipiente cuando este se inicie a llenar?

d) Si la cantidad de agua inicial en el recipiente es 10, ¿cuánta cantidad de agua hay en el recipiente hasta el tiempo 8?

Ante la nueva situación los estudiantes recurrieron, en un primer momento, a la discretización.

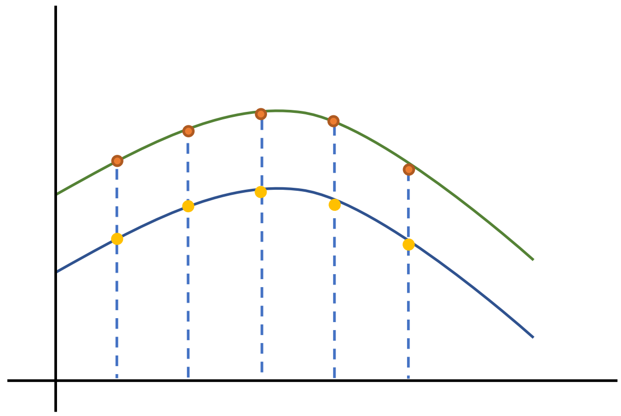
Una interpretación sobre lo que se solicita en el inciso a) numeral 2, manifiesta otro uso de la Acumulación. La interpretación que hizo la CCM(EDM) llevó al desarrollo de lo siguiente: calcular la cantidad de agua que adquirió el recipiente hasta el momento 5, luego realizar una resta entre la cantidad de agua final (a la que se quiere llegar) y la acumulada hasta el momento 5. El resultado de esa resta lo distribuyen de modo homogéneo en cada tiempo. La comprobación de la respuesta se realiza cuando al volver a sumar cada uno de los valores, el resultado es el estado final que se solicita. Esto se presenta en la siguiente tabla:

Tabla 22.
Evidencia sobre el uso distribución de la acumulación

Nomenclatura	Evidencia
AHN	
	Entonces al llegar al tiempo 5 había un valor menor a 25, sumando todas esas cantidades. Entonces lo que hice fue como, cómo se podría decir [...] por ejemplo de 7 la pasé como a 8.2, 8.3, por ahí más o menos, entonces después el primer punto digamos, en el tiempo 1, pues igual le sumé ese 1.2, ese 1.3 y llegó hasta 3.8 y así fui haciendo con los otros demás puntos y de último sumé todas las otras cantidades y me dio aproximadamente 25.
ENT	[...] ¿por qué aumentó ese valor y no otro?
AHN	Pues aumenté ese porque al ir sumando, sin aumentar, me faltaba una cantidad [...] para llegar a 25. Entonces a 25 le resté la cantidad que me obtuvo [resultado de la suma] y de ahí lo repartí en todos los puntos [...] para que me dieran a 25.

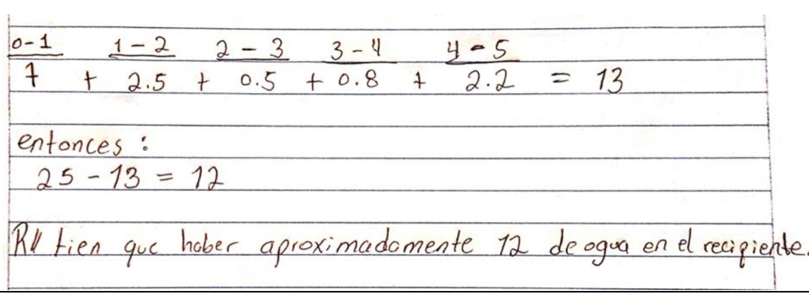
Lo mostrado en la tabla anterior, genera un nuevo uso de la Integral Definida, este es el Uso 3 de la Acumulación: Distribución de la Acumulación, el cual se presenta en la tabla 23. Este aspecto de la emergencia del uso de la Acumulación tiene una característica particular: se modifica la gráfica del cómo varía ($F'(x)$) para obtener un Estado Final. Esto da cuenta de cómo la CCM(EDM), en situaciones no habituales al dME, se permiten trastocar elementos que dentro del dME no se podría.

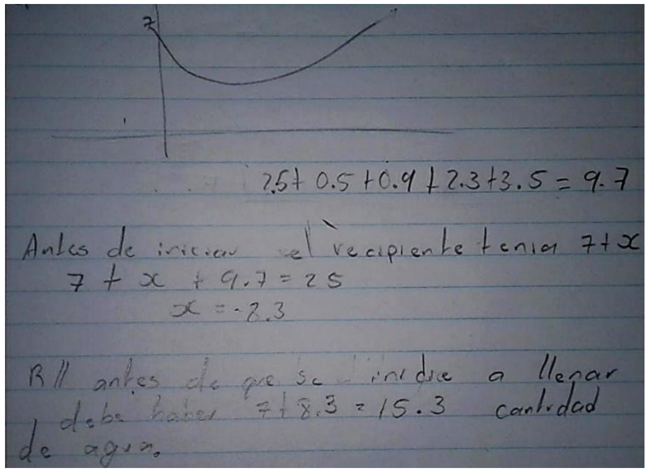
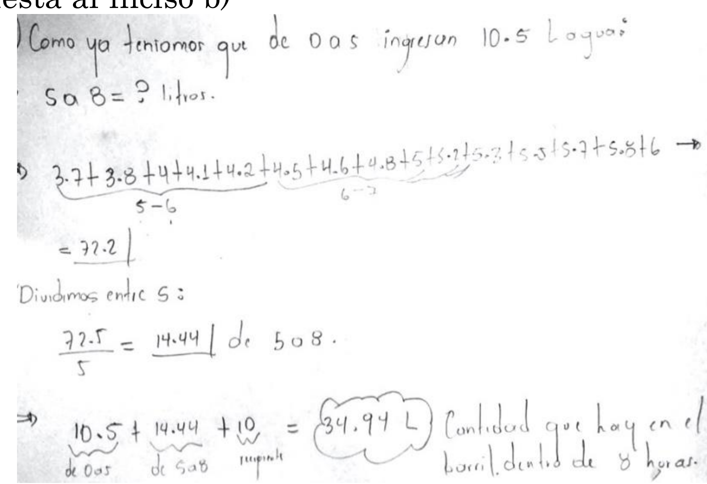
Tabla 23.
Uso 3 de la Acumulación: Distribución de la Acumulación

Uso 3 de la Acumulación: Distribución de la Acumulación	
Funcionamiento	Alcanzar un Estado Final
Forma	Determinación de la acumulación faltante para distribuirla en los diferentes lapsos 

Dado que esta fue una interpretación particular de la pregunta, se pidió que se reconsiderara la pregunta y se volviese a dar una respuesta; lo que llevó al desarrollo de lo que se presenta en la tabla siguiente.

Tabla 24.
Respuestas sobre la tercera situación, numeral 2

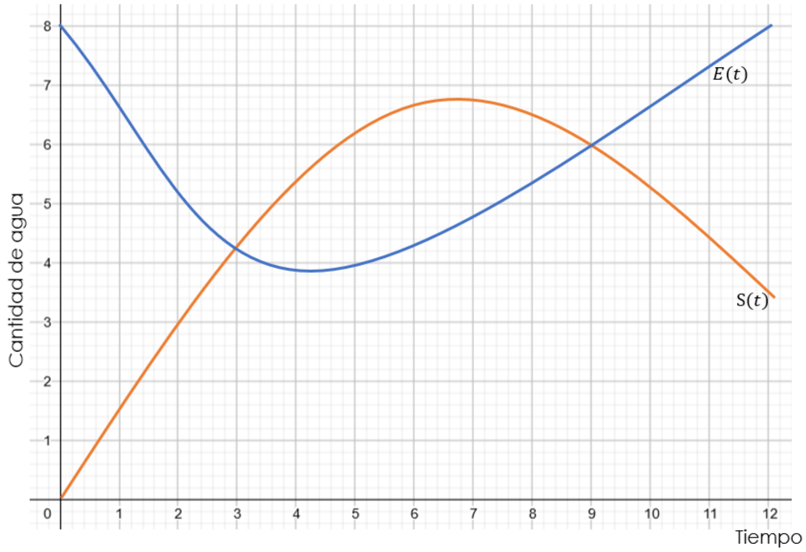
Nomenclatura	Evidencia
AHN	Respuesta al inciso a)  0-1 1-2 2-3 3-4 4-5 7 + 2.5 + 0.5 + 0.8 + 2.2 = 13 entonces : 25 - 13 = 12 R// tien que haber aproximadamente 12 de agua en el recipiente.

KHN	Respuesta al inciso a) 
	Lo que hice fue sumar la cantidad de agua que entró, considerando que de 0 a 1 se mantuvo el promedio de la entrada de agua [...] lo tomé como 2.5. Y así, sumando los 5 valores hasta llegar al tiempo 5. Y, después observé que la gráfica iniciaba en un valor 7, cuando el tiempo es 0. Entonces, como yo estaba tomando la idea de promediar esa cantidad de agua, entonces, una hora antes tomé que el valor era 7 también, de agua que había entrado en ese tiempo. Entonces $7 + x$ por decirlo así, es la cantidad de agua que ya tenía el recipiente. En este caso sería 8.3. [$7 + x$] sería la cantidad de agua que tenía el recipiente, en este caso, tomé que 7 es el valor promedio una hora antes de donde se inicia. Entonces, ya tiene ese 7 contabilizado ahí, y el x, representa lo que está antes de esa hora también. Y que después hice que eso más la suma que había tenido anteriormente, tenía que dar 25.
EHN	Respuesta al inciso b) 

En la respuesta al inciso b) de la tabla anterior, observamos que los lapsos que se toman son menores a la unidad, por tal razón lo divide entre 5. Esto con la intención de tener una mayor "precisión" al valor "real".

A continuación, se muestra el último numeral de la tercera situación.

3) Las siguientes gráficas muestran el flujo de entrada (azul) y salida de agua (roja).



h) Considerando que existe **una cantidad inicial** de agua en el recipiente, ¿cómo se podría conocer la cantidad de agua adquirida hasta el tiempo 2?

i) ¿Cómo se podría conocer la cantidad de agua adquirida entre los tiempos 2 y4?

j) ¿Cuánta cantidad de agua se adquiere hasta el tiempo 4?

k) ¿Cuánto tiempo debe pasar para que la cantidad adquirida de agua sea 9?

l) Construye una gráfica que represente la cantidad de agua en el recipiente

m) ¿Qué ideas te permitieron dar respuesta a las preguntas sobre la cantidad de agua que se adquiere en un determinado tiempo?

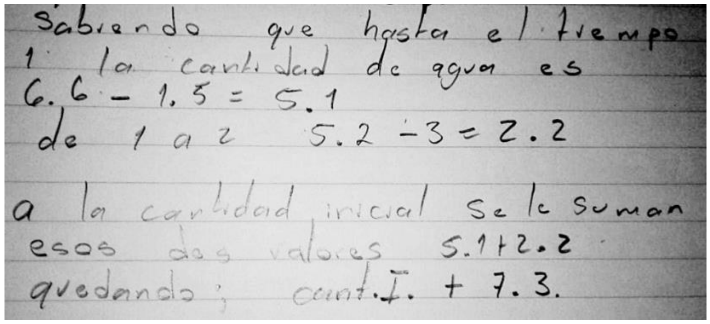
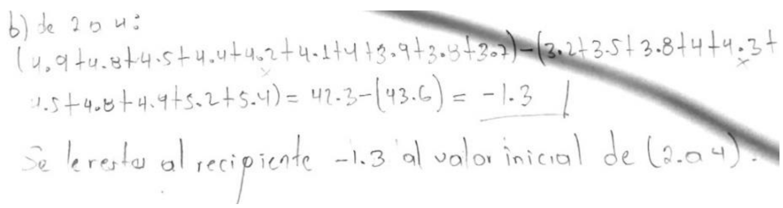
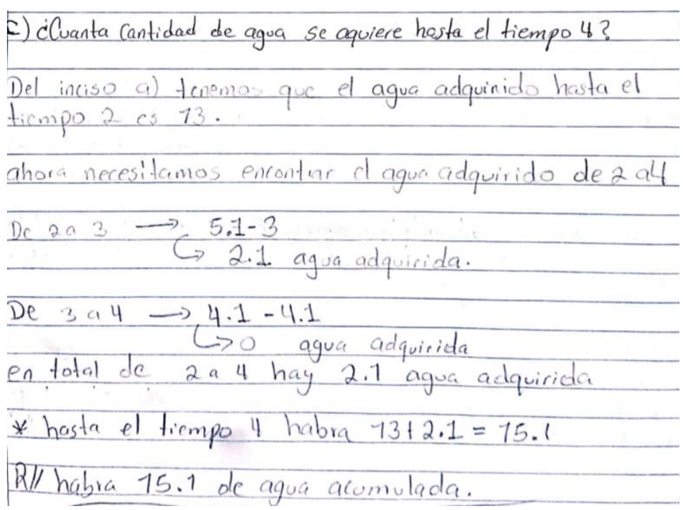
n) ¿Qué ideas te permitieron dar respuesta a las preguntas sobre conocer el tiempo necesario para que el recipiente adquiera una cantidad de agua dada?

Ante las preguntas anteriores, la CCM(EDM) proporciona las respuestas mostradas en la siguiente tabla:

Tabla 25.

Respuestas sobre la tercera situación, numeral 3, incisos a), b) y c)

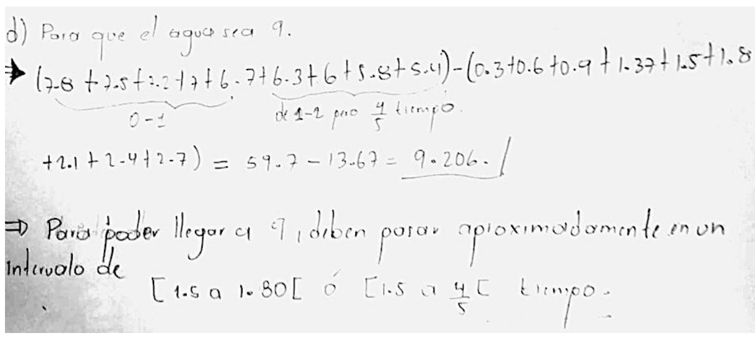
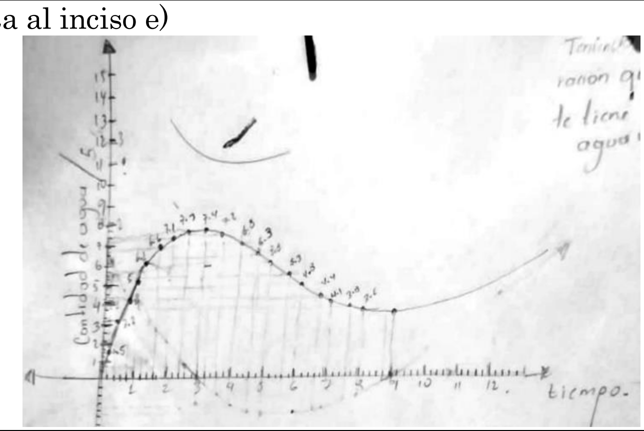
Estudiante	Evidencia

KHN	Respuesta al inciso a)  Sabiendo que hasta el tiempo 1 la cantidad de agua es 6.6 − 1.5 = 5.1 de 1 a 2 5.2 − 3 = 2.2 a la cantidad inicial se le suman esos dos valores 5.1+2.2 quedando; cant.I. + 7.3.
EHN	Respuesta inciso b)  b) de 2 a 4: (4.9+4.8+4.5+4.4+4.2+4.1+4+3.9+3.8+3.7)−(3.2+3.5+3.8+4+4.3+ 4.5+4.8+4.9+5.2+5.4) = 42.3−(43.6) = −1.3 Se le resta al recipiente −1.3 al valor inicial de (2 a 4).
AHN	Respuesta al inciso c)  c) ¿Cuanta cantidad de agua se aquiere hasta el tiempo 4? Del inciso a) tenemos que el agua adquirido hasta el tiempo 2 es 73. ahora necesitamos encontrar el agua adquirido de 2 a 4 De 2 a 3 → 5.1 - 3 ↳ 2.1 agua adquirida. De 3 a 4 → 4.1 - 4.1 ↳ 0 agua adquirida en total de 2 a 4 hay 2.1 agua adquirida * hasta el tiempo 4 habra 73+2.1 = 75.1 R// habra 75.1 de agua acumulada.

En las preguntas de los incisos a), b) y c), se hace énfasis en el valor o el estado inicial. Por lo que esto se refleja en los procedimientos de los estudiantes. Además, al igual que en la situación 2, se consideran los distintos valores que toma la gráfica del flujo de entrada en los extremos de los lapsos de tiempo, para hacerlo constante; es decir, los valores que toma la gráfica a la derecha, a la izquierda o el promedio entre ambos valores. Esto conlleva que las respuestas numéricas sean distintas.

Esto último, tuvo más relevancia en la respuesta al inciso d), dado que, al considerar lapsos cortos de tiempo, el intervalo donde se cumplía lo que se solicitaba era más corto que si se tomaba de unidad en unidad.

Tabla 26.
Respuestas sobre la tercera situación, numeral 3, incisos d) y f)

Nomenclatura	Evidencia
EHN	Respuesta al inciso d) 
	Anteriormente, habíamos hecho de 0 a 2 horas [...] entonces, fui haciendo eso, dividiendo entre 5. Entonces lo que fui haciendo fue como irle quitando valores a ese 2, como irle quitando un valor entonces ya no sería hasta dos horas, sino que sería de 0 a 1 y de 1 a 2, pero en este caso solo tomaríamos hasta 4/5 de hora y de ahí 3/5 de hora. Entonces me pude fijar que, si lo hacía de 0 a 1 y de 1 a 2 pero de 1 a 2, con 3/5 daba como a 8 punto y fracción y, si ya lo hacía de 1 a 2, pero tomando en cuenta 4/5 daban 9.206. Entonces más o menos un aproximado podría ser ese.
	Respuesta al inciso e) 

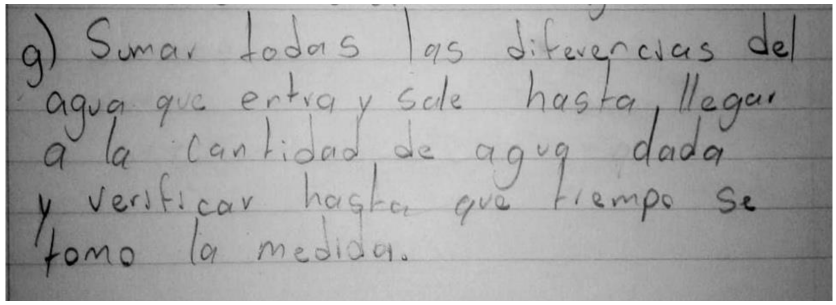
En el inciso d) observamos la acumulación de forma “inversa”. Es decir, se conoce el estado final al que se quiere llegar, sin embargo, el estado inicial que se tiene es mayor al estado final (el tiempo 2 representa el momento del estado final). Entonces, para poder responder, se inicia hacia atrás, quitando una pequeña acumulación hasta lograr aproximarse al valor del estado final (al que se quiere llegar).

En el inciso e) una primera respuesta fue la gráfica de la resta de la entrada menos la salida, es decir, la gráfica del *cómo varía*. Las preguntas y comentarios sobre si esa gráfica representaba la cantidad total de agua en el recipiente generaron que se reconociera que la gráfica construida no representaba la cantidad total, sin embargo, que esta se podría conocer mediante la suma de las acumulaciones. Esta última idea permitió la construcción de la gráfica que se muestra en la respuesta del inciso e) y además relacionar ambas gráficas.

Al responder las últimas preguntas del numeral 3, sobresale el desarrollo de las diferencias y la suma de estas, como la idea principal que se utilizó. Esto se muestra en la tabla 27 que se presenta a continuación.

Tabla 27.
Respuestas sobre la tercera situación, numeral 3, incisos f) y g)

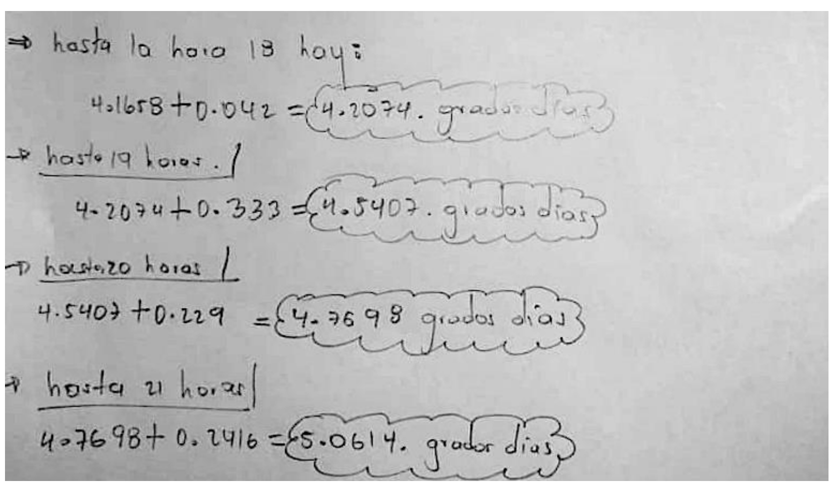
Nomenclatura	Evidencia
AHN	Respuesta al inciso f) f) ¿Que ideas te permitieron dar respuesta a la preguntas sobre la cantidad de agua que se adquiere en un determinado tiempo? Primero Calcular el agua que adquiere el recipiente, Segundo " " " " sale del " y por ultimo Calcular la diferencias en cado momento.
	Obtener las diferencias en cada tiempo o sea la diferencia del agua que entra y el agua que sale hasta un determinado tiempo, entonces ir calculando esas diferencias hasta [...] y después sumar la diferencia para obtener un total.

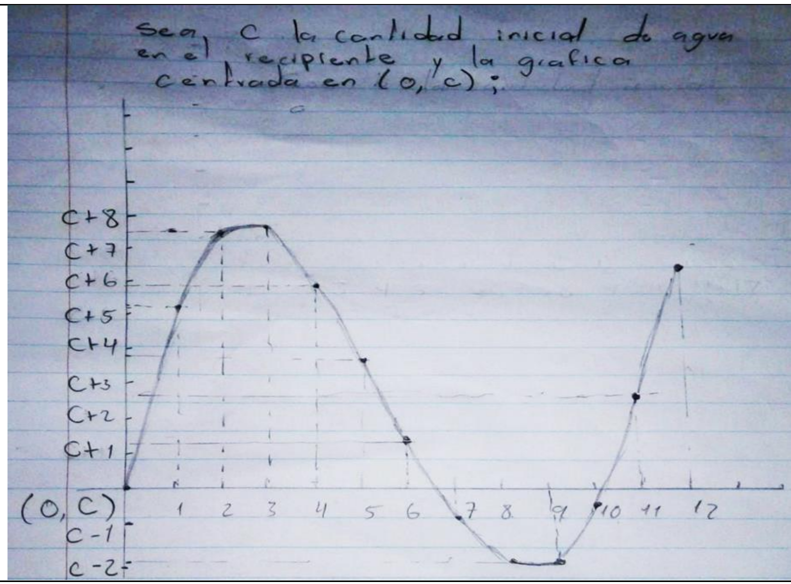
KHN	Respuesta al inciso g)  g) Sumar todas las diferencias del agua que entra y sale hasta llegar a la cantidad de agua dada y verificar hasta que tiempo se tomo la medida.

En cada situación, se reconoció el papel que tenía el valor inicial o el estado inicial, permitiendo reconocer otro uso de la acumulación: determinación del valor acumulado o la acumulación mediante una cantidad inicial. A continuación, se muestran las evidencias de este uso, con distintas respuestas obtenidas en diferentes incisos de la segunda y tercera situación.

Tabla 28.

Evidencias sobre las formas 2 y 3 del uso 4.

Estudiante	Evidencia
EHN	Desarrollo de la respuesta al inciso d) Numeral 3) segunda situación  ⇒ hasta la hora 18 hoy: 4.1658 + 0.042 = 4.2074. grados días → hasta 19 horas. 4.2074 + 0.333 = 4.5407. grados días → hasta 20 horas 4.5407 + 0.229 = 4.7698 grados días → hasta 21 horas 4.7698 + 0.2416 = 5.0614. grados días
KHN	Respuesta al inciso e) Numeral 3) tercera situación

	
	Ahí digo que el valor de C es la cantidad de agua inicial que posee el recipiente. Entonces, esa gráfica tiene el origen en $(0, C)$, que sería la cantidad de agua en ese momento. Por ejemplo, si notamos en el tiempo 0, todavía no recibe agua por decirlo así, entonces está en $(0, C)$, está con la cantidad de agua inicial. Entonces pasa el tiempo 1. Entonces al tiempo 1 me dice que a la cantidad inicial se le va a sumar lo que es la cantidad de agua que recibió hasta el tiempo 1 y eso me dio que sería $C + 5$. Bueno, ahí la escala que hice es, tomando en cuenta de que C está en una posición [el valor de C es] 0 también. Desde ahí se inicia. Entonces, 0, C+1, C+2 y así la escala en y .

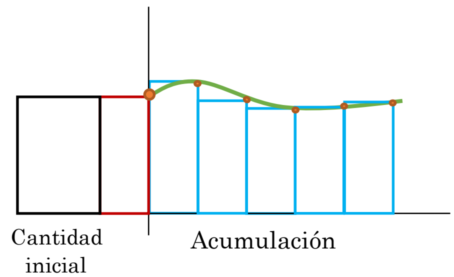
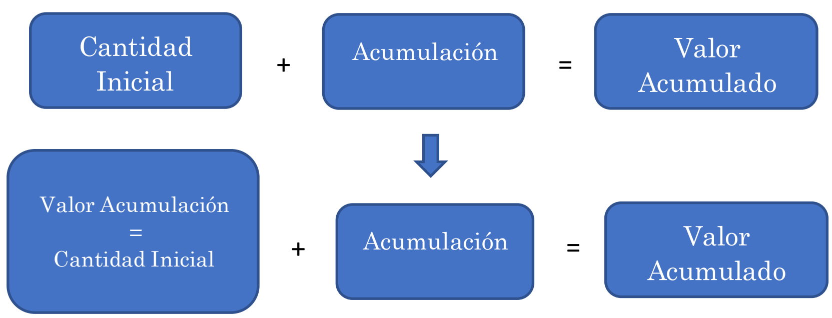
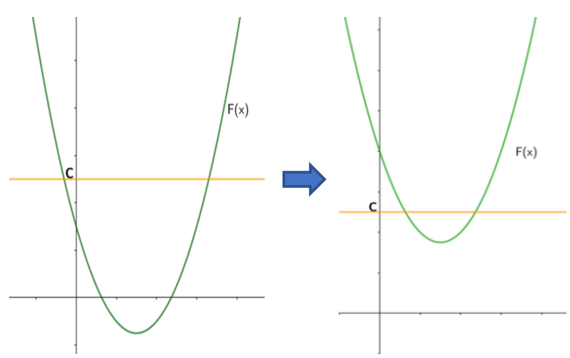
En la tabla 24, la respuesta al inciso a) refleja una forma de uso de la Acumulación a partir de la cantidad inicial en la gráfica del *cómo varía*. Lo anterior es significativo, dado que la CCM(EDM) en ciertas ocasiones consideran a ese valor inicial como la cantidad inicial. Mediante preguntas que indagaban la veracidad de lo que estaban afirmando, se reconocía que ese valor no representa la cantidad inicial. Sin embargo, ya en esta respuesta el estudiante da un significado a ese valor, al considerarlo como el promedio de agua que entró la hora antes de iniciar a llenarse. Asimismo, se reconoce que ese promedio, sumado con una cantidad de agua que desconoce, conforma la cantidad inicial de agua en el recipiente.

En la primera evidencia de la tabla 28, se manifiesta un proceso de iteración que está presente en la comunidad de conocimiento matemático de modeladores biomatemáticos reportado por Mota (2019); es decir, el valor acumulado se convierte en cantidad inicial cuando se necesita sumar una nueva acumulación. Lo anterior es una nueva forma del uso que refleja el mismo funcionamiento anterior: determinar el valor acumulado o la acumulación.

La segunda evidencia en la tabla anterior muestra una nueva forma para determinar el valor acumulado o acumulación mediante una cantidad inicial. Esta vez de manera gráfica. La constante C en lo habitual del dME se utiliza para hablar de la familia de funciones, mientras que la CCM(EDM) le da un sentido gráfico, es decir el valor de C determinará los valores de y (que representa la cantidad de agua en el recipiente) en la gráfica del *cuánto varía*.

Tabla 29.

Uso 4 de la Acumulación: Determinación del Valor Acumulado a partir de una Cantidad Inicial

Uso 4: Determinación del Valor Acumulado a partir de una Cantidad Inicial	
Funcionamiento	Determinar cantidades iniciales y finales
Forma 1	Reconocimiento de la cantidad inicial como el valor acumulado antes del instante en que se inicia a acumular. 
Forma 2	Iteración de cantidades iniciales y finales 
Forma 3	Generalización de la gráfica de la primitiva al tener un valor inicial cualquiera. 

En síntesis, el proceso de valorización de la Categoría de Acumulación, mediante las situaciones que componen el Diseño de Situación Escolar de Socialización (DSES), inicia con los cuestionamientos y reflexiones que la propia CCM(EDM) desarrolló. La emergencia de la Categoría de Acumulación se refleja en un proceso de construcción que inicia con una *discretización* y finaliza con la *constantificación de la cantidad variable*. Esto fue posterior a reconocer el *cómo varía*. Además, se muestran los funcionamientos y formas de los usos de la Integral Definida relacionados con *determinar un valor acumulado o una acumulación*, cuando la cantidad inicial es 0 o un número mayor a ello. Todos estos elementos dotan de significado a la Integral Definida, permitiendo que se resignifique como Acumulación.

IV.3 Elementos de Identidad Disciplinar en la CCM(EDM)

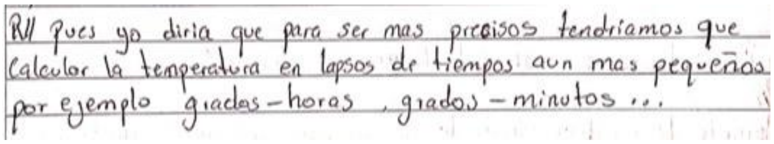
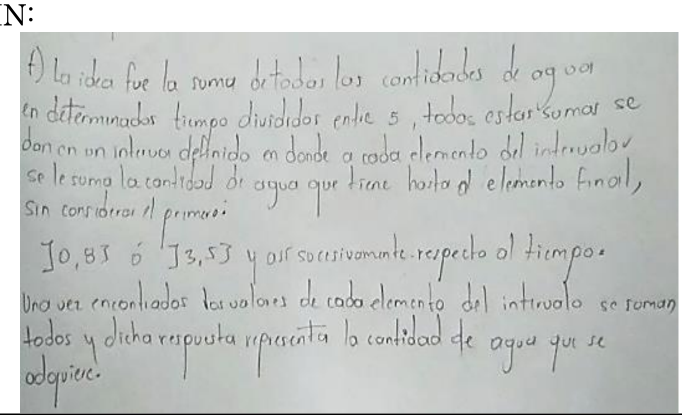
Dado que las situaciones del DSES manifiestan elementos distintos a los que habitualmente están en la matemática escolar, nuevamente se retoma la primera situación, así la CCM(EDM) incorpora las ideas desarrolladas en la segunda fase, es decir, valoriza los usos de la acumulación.

La legitimidad se expresa en el reconocimiento de otros saberes. El estudiante construye y cuestiona su propio conocimiento matemático, así los procedimientos que desarrollan están ligados a un significado y no solo a una fórmula qué recordar y aplicar.

En el desarrollo del DSES, se observan respuestas desde lo funcional de la CCM (EDM), implicando que los miembros de esta comunidad están legitimando ese conocimiento funcional de la Integral Definida. Respecto a estos aspectos de legitimidad, se presenta a continuación:

Tabla 30

Aspectos de legitimidad

Aspectos	Evidencia
Explicaciones funcionales (Reconocimiento de otros saberes)	AHN:  R// Pues yo diria que para ser mas precisos tendriamos que calcular la temperatura en lapsos de tiempos aun mas pequeños por ejemplo grados-horas , grados-minutos ... Al calcularse, así como estaba los grado-días, pues más que todo, es un aproximado diría yo, no sé. Entonces, ya al medir los grados por hora, por minuto o por segundo, ya sería más exacto.
	EHN:  f) La idea fue la suma de todas las cantidades de agua en determinados tiempo divididos entre 5 , todos estas sumas se dan en un intervalo definido en donde a cada elemento del intervalo se le suma la cantidad de agua que tiene hasta el elemento final, sin considerar el primero.]0,8] ó]3,5] y así sucesivamente respecto al tiempo. Una vez encontrados los valores de cada elemento del intervalo se suman todos y dicha respuesta representa la cantidad de agua que se adquiere.

Ahora bien, la emergencia de usos de la Integral Definida manifiesta la resistencia a lo hegemónico del dME, ya que la CCM(EDM) no está emulando un conocimiento que se les está enseñando, sino que es el propio conocimiento que posee lo que emerge ante el desarrollo del DSES. El uso 2 de la acumulación es la evidencia de cómo la CCM(EDM), al problematizar elementos del tiempo, desarrolla sus usos del conocimiento matemático. (Ver tabla 31).

Tabla 31.
Aspectos de Resistencia

Aspectos	Evidencias	
Emergencia de usos	Uso 2: Determinación del Valor Acumulado o la Acumulación	
	Funcionamiento	Determinar la acumulación o el valor acumulado
	Forma 1	Discretizar la cantidad variable en lapsos iguales a la unidad
	Forma 2	Discretizar la cantidad variable mediante el promedio en lapsos
	Forma 3	Constantificación en lapsos iguales o menores a la unidad

El conocimiento funcional de la Integral Definida que la CCM(EDM) ha legitimado, se proyecta cuando se retorna a la primera situación: se regresa a la primera situación y se solicita a la CCM(EDM) que la desarrolle nuevamente con las ideas que se pusieron en juego en la segunda y tercera situación. Esto compone la tercera fase del DSES.

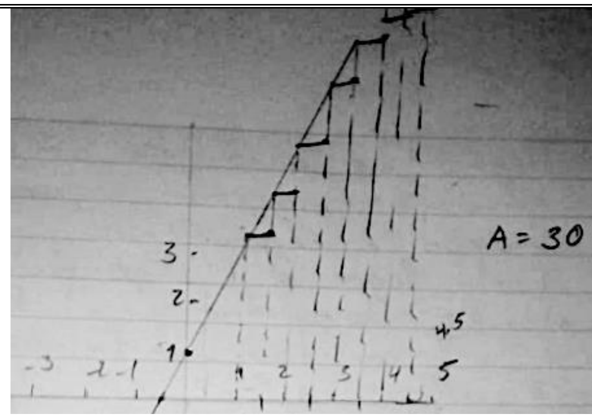
En esta tercera fase, la CCM(EDM) partió con el reconociendo del *cómo varia* en la situación. Una vez logrado lo anterior, se incorporó los argumentos que emergieron en la segunda fase, específicamente la forma 3 del Uso 2 de la Acumulación: Determinar la Acumulación o el Valor acumulado (Ver tabla 20). Esto permitió una representación visual, que en la primera fase estuvo ausente, con lo cual también explicaron la razón del procedimiento y su relación con el significado del área bajo la curva. De esta manera, los miembros de la CCM(EDM) proyectan la legitimidad de la matemática funcional y generan resistencia a lo hegemónico del discurso Matemático Escolar de la Integral Definida.

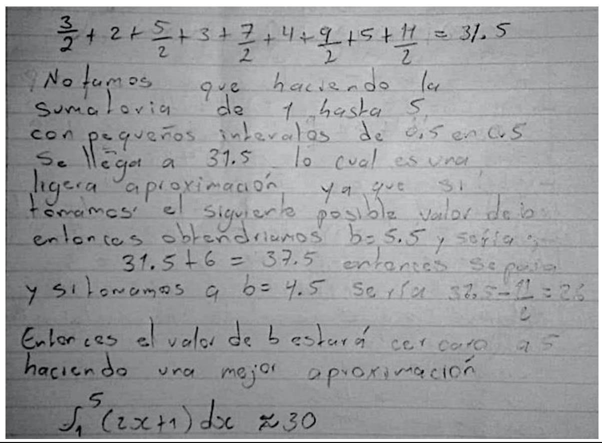
El argumento de la acumulación lo utilizan para encontrar nuevamente los valores de a y b que cumplan con la condición $F(b) - F(a) = 30$. La idea de *promediar* el valor de la gráfica en pequeños lapsos de tiempo junto con la suma de todos los rectángulos les permitió dar respuesta a la pregunta ¿cuáles podrían ser algunos valores para a y b?

La CCM (EDM) inició tomando un valor para a y el posible valor de b se elige cuando, al comparar el valor acumulado con el estado final al que se quiere llegar (30), se aproximan. Es decir, se utiliza la forma 2 del uso 4 de la Acumulación: Determinación del Valor Acumulado a partir de una Cantidad Inicial (Ver tabla 32). La CCM(EDM) reconoce que entre más pequeña sea esa partición más exacta será la aproximación. Esto se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 32.

Aspectos de proyección: Usos de la Acumulación

<table>
<tr><th>Aspectos</th><th>Evidencia</th></tr>
<tr><td>Usos de la acumulación en el retorno a la primera situación</td><td>


</td></tr>
</table>

Al retomar algunas de las preguntas que se plantearon en la entrevista de la primera situación, la CCM(EDM) fue capaz de dar respuestas que evidencian una articulación del significado de área bajo la curva con el *procedimiento para utilizar el TFC*. (Ver tabla 33).

Tabla 33.

Aspectos de proyección: significados y procedimientos

Aspectos	Evidencia
Manifestación sobre la articulación entre significados y procedimientos	EHN: Creo que los valores de a y b se mantendrían [refriéndose a las funciones $2x + 1$ y $x^2 + x$] y tendría que darme la igualdad resolviendo la integral. Bueno, en este caso con la primera gráfica [$2x + 1$] lo que hicimos fue sumar todo, prácticamente, como que estamos tomando las áreas de pequeños cuadraditos [rectángulos] y

	estamos sumando todas esas áreas y en el área bajo la curva [refiriéndose a $x^2 + x$] está prácticamente, toda la suma de todos los cuadritos [rectángulo] que había anteriormente en la primera gráfica.
	KHN: Por ejemplo, en ese punto [refiriéndose a $x = 6$] si evalúas en 6 en la gráfica de $x^2 + x$ le va a dar todo lo que el área hasta ese punto.
	AHN: el $F(b) - F(a)$ eso se refiere, creo que tiene una palabra, no sé si es como acotar o algo así, pero es como seleccionar, digamos como el ejemplo que hicimos, calculamos de 0 a 8 y le restamos de 0 a 6 entonces nos quedó sólo la parte de 6 a 8. Entonces eso es lo que representa, sólo la parte que necesitamos calcular.

Finalmente, se le preguntó a la CCM(EDM) sobre su parecer al resolver el DSES. En las respuestas se manifiestan afirmaciones que muestran elementos que están en el dME; principalmente la mecanización y la no comprensión de ideas importantes. Acerca de esto se muestra en la tabla 34.

Tabla 34.
Reconocimiento de una matemática escolar

Aspecto	Evidencia
Reconocimiento de una matemática escolar que los conduce a la mecanización	**EHN:** Prácticamente lo que se llegó a demostrar es que no necesariamente se pueden resolver los problemas con puros conceptos matemáticos, con puras fórmulas o algo así. Si no, que puede haber diferentes procedimientos para poderlo realizar.
	KHN: Esto nos ayuda como a la comprensión más que todo en sí, de lo que es un procedimiento no solo a mecanizarlo.
	AHN: Es interesante verlo de esta forma porque yo así nunca lo había visto, nunca nos habían explicado algo así. Al momento, un suponer, de resolver la integral —qué fue lo primero que hicimos— pues obviamente, nosotros la resolvimos como sabemos, o sea, de forma así, matemática [...] como mecánica, entonces, después vemos los siguientes [las siguientes situaciones] y uno ya va analizando la situación de la gráfica [...] después la misma situación, como dice ahí situación 2 y situación 3, lo llevan a uno a comprender este tipo de cosas así, digamos, como se relaciona una gráfica con otra, en esas cosas.

A manera de cierre: conclusiones específicas

Al confrontar la centración al objeto matemático con lo funcional de la Integral Definida, se evidencian elementos antagónicos de ambas epistemologías: mientras que desde la centración al objeto se genera una desarticulación entre significados y procedimientos que conlleva adoptarlos y utilizarlos de forma mecánica, desde la incorporación de su propio conocimiento matemático disciplinar (Identidad Disciplinar) se genera la emergencia de usos, forjando de esta manera la articulación entre procedimientos y significados.

Estos elementos de confrontación de la Integral Definida se presentan en la siguiente tabla:

Tabla 35.
Elementos de confrontación de la Integral Definida: centración al objeto matemático versus lo funcional

dME de la Integral Definida	Categoría de Acumulación en el DSES
Desarticulación de significados y procedimientos	Articulación de significados y procedimientos
Aplicación de procesos mecánicos	Emergencia de usos
Adopción de significados y procesos preexistentes	Elementos de Identidad Disciplinar

Con lo presentado en este capítulo, se reconoce lo propio de la CCM(EDM). Esto permitió caracterizar ciertos elementos de esta comunidad de conocimiento matemático (ver figura 25):

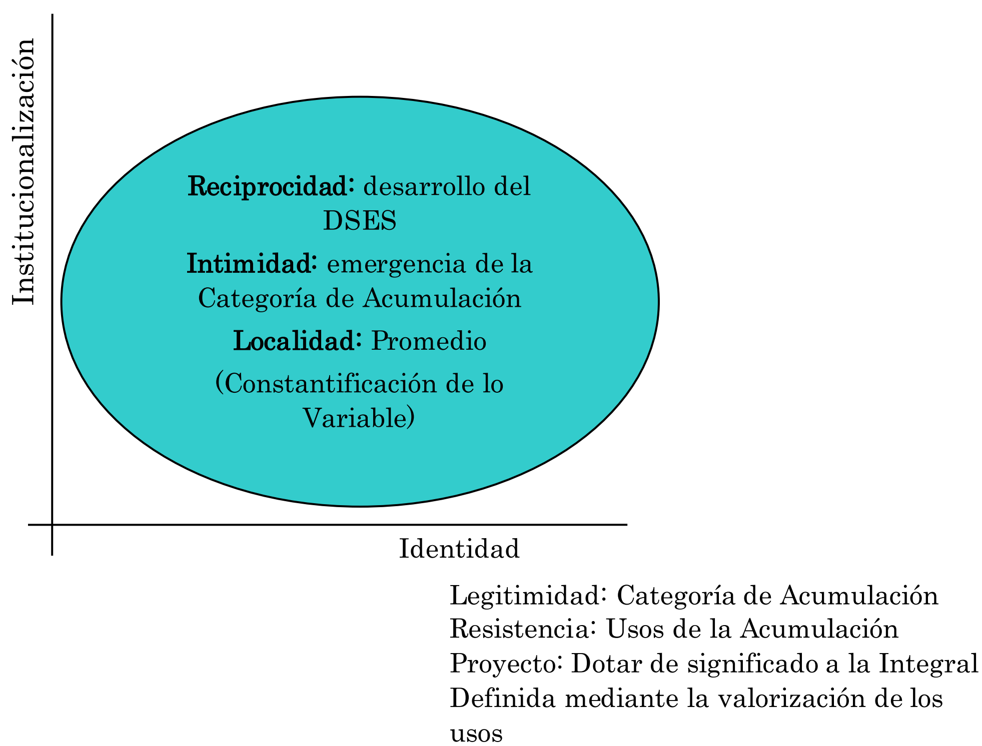
- El elemento de *reciprocidad* se da cuando se asume el compromiso de dar soluciones a las situaciones planteadas en el DSES.
- El conocimiento matemático que se construye en la *intimidad* de la comunidad refleja la Categoría de Acumulación.

- En la *localidad* —que se reconoce la jerga de la comunidad— se identifica al *promedio* como lo que expresaba el hacer constante un valor de la temperatura en un lapso pequeño.

El conocimiento matemático de la CCM(EDM) es un conocimiento disciplinar, que se ha construido en el seno de su formación y quehacer disciplinar; esto alude al eje de la Institucionalización de esta comunidad de conocimiento matemático.

Como otro eje de la CCM(EDM), la Identidad, distingue a esta comunidad de otras, permite reconocer que se legitimó el conocimiento funcional de la Integral Definida, se resistió al discurso Matemático Escolar con la emergencia de usos de la Acumulación y se proyectó el conocimiento funcional cuando al retornar a la primera situación se valorizó el uso de la acumulación. En la siguiente figura, se presenta el MCC(EDM) como la síntesis de lo propio de esta comunidad.

Figura 25.
Comunidad de Conocimiento Matemático Estudiantes de Docencia de la Matemática



Con la implementación del DSES se evidencia un desarrollo de usos del conocimiento matemático de la Integral Definida, en contraparte a las características que se generan con la centración al objeto matemático que se hace desde el discurso Matemático Escolar. También, manifiesta la transversalidad del conocimiento matemático funcional de la Integral Definida en distintos dominios: la categoría de acumulación se manifestó en la CCM(EDM), y los antecedentes muestran la emergencia en la obra matemática y en la comunidad de modeladores biomatemáticos.

Todos los resultados presentados en esta investigación son evidencias de la *Categoría de Modelación* ζ(Mod), la cual "es un proceso que acompaña a la pluralidad epistemológica y a la transversalidad de saberes que definen la funcionalidad matemática de las comunidades de conocimiento matemático que suceden en la escuela, en el trabajo y en la ciudad" (Cordero, 2017, p. 31). Esto se ejemplifica en el desarrollo del DSES, pues este permite la emergencia de argumentaciones autónomas que corresponden a una funcionalidad de la matemática. La CCM(EDM) modela la Acumulación, conocimiento funcional que resignifica a la Integral Definida.

Capítulo V: Conclusiones y Prospectivas

V.1 Conclusiones Generales

Lo que se ha reportado en la presente investigación, expresa una transversalidad de la Categoría de Acumulación en diferentes escenarios y comunidades de conocimiento matemático: la obra matemática, comunidad de modeladores biomatematicos y estudiantes de docencia de la matemática.

La emergencia de la Categoría de Acumulación en la CCM(EDM) reveló elementos que coadyuvan a resistir el dME de la Integral Definida. Estos elementos están en relación con el **cuestionamiento propio de la comunidad**, lo que generó distintas formas del Uso 2 de la Acumulación (determinación del valor acumulado o la acumulación) hasta llegar a la *Constantificación de la variable*. Además, **la incorporación de los usos** (principalmente del uso recién mencionado) cuando se retorna a la primera situación y, se da la relación horizontal y recíproca con el objeto matemático, evidencia la resistencia al discurso Matemático Escolar de la Integral Definida.

Los elementos anteriores, le permitieron a la CCM(EDM) confrontar al dME de la Integral Definida con la Categoría de Acumulación, mostrando cómo desde esta última se permite:

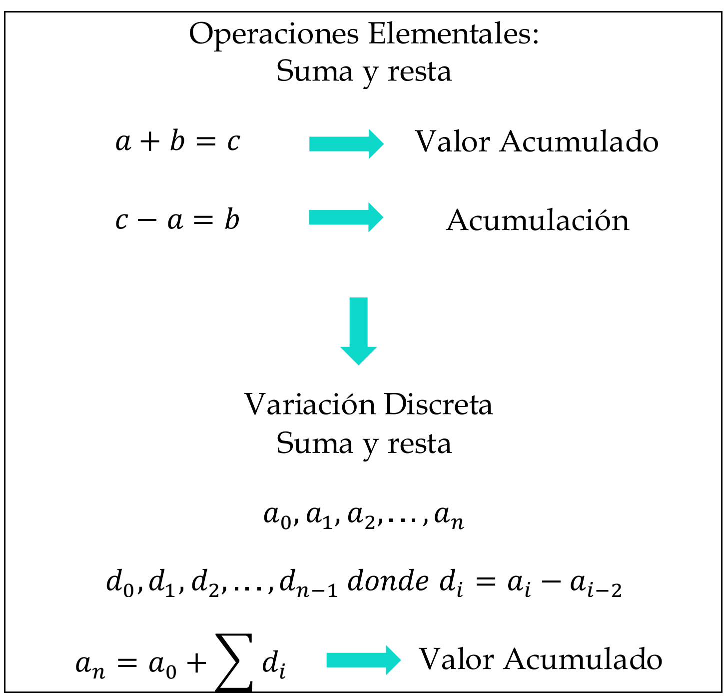
- Una articulación entre procedimientos y significados
- La emergencia de usos en contraparte a la aplicación de procesos mecánicos
- La evidencia del conocimiento disciplinar de la CCM(EDM) al incorporar su propio uso del conocimiento matemático —Identidad Disciplinar— frente a la adopción del dME de la Integral Definida.

V.2 Prospectivas

El DSES de esta investigación, se implementó en una comunidad que ya poseía conocimiento de la Integral Definida, por ende, una prospectiva estaría enmarcada en la construcción de un DSES para implementarse en una comunidad de conocimiento matemático que no hayan cursado la asignatura del Cálculo Integral.

Por otra parte, una de la hipótesis del Programa SOLTSA —en el que está inmersa la presente investigación— reconoce la Transversalidad de las Categorías de Conocimiento Matemático en los distintos niveles educativos. De manera particular, Cordero (2003) reconoce que la Categoría de Acumulación es un conocimiento matemático que responde a la transversalidad y resignificación del conocimiento matemático en distintos niveles educativos, pues esta noción está relacionada con las operaciones elementales de suma y resta, además de la noción de variación discreta, como se muestra en la siguiente figura.

Figura 26.
Operaciones elementales asociadas a la Categoría de Acumulación



$$a_n - a_0 = \sum d_i \longrightarrow \text{Acumulación}$$

Nota. Adaptada de Cordero, (2003)

Por tal razón, como una prospectiva, se considera que se podrían llevar a cabo investigaciones que den cuenta de la emergencia de la Categoría de Acumulación en el nivel primario, secundario y media superior.

Con respecto a la Identidad Disciplinar, en esta investigación permitió la valorización del uso de la acumulación. Esto, se considera ya que el DSES en su estructura está conformado por los tres elementos que la componen: legitimidad, resistencia y proyecto. Se plantea que se podrían desarrollar investigaciones donde con estos elementos se demarque la estructura del diseño de alguna asignatura que esté presente en la formación académica del estudiante de docencia de la matemática, de tal forma que permitan al estudiante incorporar su propio uso del conocimiento matemático y resistir al discurso Matemático Escolar.

Esta estructura estaría en dos momentos: Legitimidad-Resistencia y Proyecto-Legitimidad. En el primero, se debería cuestionar y reflexionar sobre la matemática escolar. Además, y, sobre todo, permitir la valoración de los usos del conocimiento matemático. En el segundo momento se debería generar espacios para que los estudiantes de docencia de la matemática proyecten el conocimiento funcional legitimado en el primer momento. Esto podría ser como lo reportado en Opazo-Arellano (2020), mediante la construcción de diseños —dado que es parte fundamental de su quehacer disciplinar— para luego ponerlos en escena en las prácticas de campo.

Referencias Bibliográficas

Alanís, J. A. y Soto, A.E. (2011). La Integral de funciones de una variable: Enseñanza Actual. *El Cálculo y su Enseñanza, 3* (1), 1-6.

Álvarez, C. (2008). La etnografía como modelo de investigación educativa. *Gazeta de Antropología, 24* (1), 1-15.

Balcázar, P., González-Arratia. N.I., Gurrola, G.M., y Moysén, A. (2013). *Investigación Cualitativa.* México: UAEM

Bartolomé, M. (1992). Investigación cualitativa: ¿Comprender o transformer? *Revista de Investigación Educativa, 20*(2), 7-36.

Borrón, M. (2020). La educación en línea: transiciones y disrupciones. En J. G. Palau, IISUE, *Educación y pandemia. Una visión académica*, (p. 66-74) México, UNAM. Recuperado de http://www.iisue.unam.mx/nosotros/covid/educacion-y-pandemia.

Bressoud, D. M., Ghedamsi, I., Martiniez-Luaces, V., y Törner, G. (Eds.). (2016). *Teaching and learning of calculus*. ICME-13 Topical Surveys. https://doi.org/10.1007/978-3-319-32975-8_1

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona, España: Gedisa

Cordero, F., Muñoz, G. y Solís, M. (2002). *La integral y la noción de variación.* Serie: Cuadernos de Didáctica. Grupo Editorial Iberoamérica, México

Cordero, F. (2003). *Reconstrucción de significados del Cálculo Integral. La noción de acumulación como una argumentación*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la Integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *8(3),* 256-286.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 10*(1), 7-38.

Cordero, F. (2011). La modelación y la graficación en la matemática escolar. En L. Rodríguez-Salazar, R. Quintero-Zazueta y A. Hernández (Eds.), *Razonamiento Matemático. Epistemología de la Imaginación. Repensando el papel de la Epistemología en la Matemática Educativa* (p. 377-399). España-México, Gedisa-Cinvestav.

Cordero, F. y Silva-Crocci, H. (2012). Matemática Educativa, Identidad y Latinoamérica: El quehacer y la usanza del conocimiento disciplinar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 15* (3), 295-318.

Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci, H., y Soto, D. (2015). *El Discurso Matemático Escolar: la Adherencia, la Exclusión y la Opacidad*. Barcelona, España: Gedisa.

Cordero, F. (2016b). La función social del docente de matemáticas: pluralidad, transversalidad y reciprocidad. En S. Estrella, M. Goizueta, C. Guerrero, A. Mena- Lorca, J. Mena-Lorca, E. Montoya, A. Morales, M. Parraguez, E. Ramos, P. Vásquez, P., y D. Zakaryan, (Eds.), *XX Actas de las Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (p. 23-30), ISSN 0719-8159. Valparaíso, Chile: SOCHIEM, Instituto de Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Recuperado de http://ima.ucv.cl/congreso/xxjnem/

Cordero, F. (2016a). Modelación, funcionalidad y multidisciplinariedad: El eslabón de la matemática y el cotidiano. En. J. Arrieta y L. Díaz (Eds.), *Investigaciones Latinoamericanas en Modelación: Matemática Educativa* (p. 59-88). Barcelona, Gedisa

Cordero, F. (2017). *La matemática y lo matemático. Transversalidad y modelación: un programa socioepistemológico*. Manuscrito en preparación.

Cordero, F., Villa-Ochoa, J., Rosa, M., Suárez, L., Carranza, P., y Mendoza-Higuera, J. (2019). La modelación en la matemática educativa: sus métodos de investigación y el impacto educativo en la formación y desarrollo de la docencia de la matemática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 32(1), 549-557.

Cordero, F., Del Valle, T., y Morales, A. (2019). Usos de la optimización de ingenieros en formación: el rol de la ingeniería mecatrónica y de la obra de Lagrange. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 22* (2), 185-212. https://doi.org/10.12802/relime.19.2223

Cordero, F., Henríquez, C., Solís, M., Méndez, C., Opazo, C. y De la Cruz, A. (2020). La modelación en la matemática educativa: sus programas de investigación y la docencia. El rol de la transversalidad de saberes matemáticos. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 33(3), 584-594.

Crisostomo, E. (2017) Idoneidad didáctica de procesos de estudio de la integral en la formación de profesores de matemática. *Acta Scientiae*, Canoas, *19*(2), 236-253.

Fothergill, L. (2011). Aspects of Calculus for Preservice Teachers. *The Mathematics Educator, 21* (1), 23–31.

Giacoleti-Castillo, F. (2020). *La temporalización y la tendencia en un rango como factores funcionales de la reproducción de comportamientos discontinuos: una resignificación de la Transformada de Laplace en un sistema de control*. (Tesis de maestría no publicada). Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav –IPN.

Gómez, K. y Cordero, F. (2010). Los procesos de difusión del conocimiento matemático en el cotidiano. Un estudio socioepistemológico. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 23*, 919-927.

Guber, R. (2011). *La etnografía. Método, Campo y Reflexividad*. Buenos Aires: Siglo Veintiuno Editores.

Haddad, S. (2013). Que retiennent les nouveaux bacheliers de la notion d'intégrale enseignée au lycée? *Petit x, 92*, 7–32.

Hoban, R. A. (2019) A resource for introducing students to the integral concept, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 50* (4), 603-616. DOI: 10.1080/0020739X.2018.1480809

Jácome, I. J., Fiallo, J. E., y Parada, S. E. (2018). Teorema Fundamental del Cálculo en el marco de la Educación Matemática Realista con el uso de Tecnologías Digitales. *RECME-Revista Colombiana de Matemática Educativa*, 3(2), 45-47.

Jones, S. R., Lim, Y., y Chandler, K. R. (2016). Teaching integration: How certain instructional moves may undermine the potential conceptual value of the Riemann sum and the Riemann integral. *International Journal of Science and Mathematics Education, 15*(6), 1075–1095.

Larson, R.; Hostetler, R. y Edwards, B. (2006). *CÁLCULO con geometría analítica.* (Octava Edición). México, Mc. Graw Hill.

Marcía-Rodríguez, S. y Cordero, F. (2020). La identidad disciplinar en un diseño de situación escolar de socialización: profesores de matemáticas en formación. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 33(3), 575-583.

Martínez, M., (2004). *Ciencia y arte en la metodología cualitativa*. México: Trillas.

Martínez, M., y García, D. (2016). Una situación didáctica para introducir la noción de la suma de Riemann. En S. Estrella, M. Goizueta, Guerrero, A. Mena, J. Mena, E. Montoya, ..., D. Zakaryan (Eds.), *XX Actas de las Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (p. 377-381), Valparaíso, Chile: SOCHIEM, IMA-PUCV.

Mendoza-Higuera, E.J. (2013). *Matemática funcional en una comunidad de conocimiento: el caso de las ecuaciones diferenciales lineales en la ingeniería*. (Tesis de Maestría no publicada) Departamento Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Mota, C. (2019) *La Matemática Escolar y la Modelación: De la Integral a una Categoría de Acumulación*. (Tesis de Maestría no publicada). Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México

Muñoz, G. (2000). Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo Integral. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 3*(2), 131-170.

Opazo-Arellano, C. (2020). *Identidad disciplinar en la formación inicial docente: una resistencia al discurso Matemático Escolar*. (Tesis de Doctorado no publicada). Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Opazo-Arellano, C., Cordero, F., y Silva-Crocci, H. (2018). ¿Por qué estudiar la identidad disciplinar en la formación inicial del docente de matemáticas? *Premisa, 20* (77), 5-20.

Opazo-Arellano, C., y Cordero, F. (2019), *Estudiante de pedagogía en matemáticas y la Construcción de la Identidad Disciplinar*. Artículo enviado para publicar.

Opazo-Arellano C., Marcía-Rodríguez, S. y Cordero, F. (2020). *Adherencia al discurso Matemático Escolar: el caso de la integral definida en la formación inicial docente.* Artículo enviado para publicar.

Parra, T. (2008). *El uso de las gráficas en la mecánica de fluidos. El caso de la derivada*. (Tesis de Maestría no publicada). Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav–IPN.

Portilla, M., Rojas, A., y Hernández, I., (2014). Investigación Cualitativa: Una Reflexión desde la Educación. *Docencia, Investigación e Innovación Universitaria, 3* (2), 86-100.

Rasmussen, C., Marrongelle, K., y Borba, M.C. (2014). Research on calculus: what do we know and where do we need to go? *ZDM Mathematics Education*, *46*, 507–515. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0615-x

Ruíz, E. (2020). La práctica docente universitaria en ambientes de educación a distancia. Tensiones y experiencias de cambio En J. G. Palau, IISUE, *Educación y pandemia. Una visión académica*, (p. 109-114) México, UNAM. Recuperado de http://www.iisue.unam.mx/nosotros/covid/educacion-y-pandemia.

Serhan, D. (2015). Students' understanding of the definite integral concept. *International Journal of Research in Education and Science (IJRES), 1*(1), 84-88.

Silva-Crocci, H. y Cordero, F. (2014). Matemática Educativa: Latinoamérica, Adherencia E Identidad. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 27,* 1449-1456. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Soto, D. (2010). *El Discurso Matemático Escolar y la Exclusión. Una Visión Socioepistemológica*. Tesis de maestría no publicada. Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav-IPN, México.

Soto, D. (2014). *La dialéctica Exclusión-Inclusión entre el discurso matemático escolar y la Construcción Social del Conocimiento Matemático*. (Tesis de Doctorado no publicada). Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Soto, D. y Cantoral, R. (2014). El discurso Matemático Escolar y la Exclusión. Una visión Socioepistemológica. *Bolema - Boletim de Educação matemática, 28*(50), 1525-1544. http://doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a25

Soto, D., Gómez, K., Silva-Crocci, H. y Cordero, F. (2012). Exclusión, Cotidiano e Identidad. Una problemática fundamental del aprendizaje de la matemática. En Flores, R. (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 25,* 1041-1048, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Thompson, P. W., y Silverman, J. (2008). The concept of accumulation in calculus. In M. P. Carlson y C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics* (p. 43-52). Washington, DC: Mathematical Association of America. http://pat-thompson.net/PDFversions/2008MAA Accum.pdf.

Valencia Álvarez, A. B., y Valenzuela González, J. R. (2017). ¿A qué tipo de problemas matemáticos están expuestos los estudiantes de Cálculo? Un análisis de libros de texto. *Educación matemática, 29* (3), 51-78.