Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemática Educativa

La naturaleza psicométrica de pruebas estandarizadas. Un análisis socioepistemológico sobre la proporcionalidad directa

Tesis

que presenta

Beatriz Elena Martínez Díaz

Para obtener el grado de

Maestra en Ciencias

en la especialidad de

Matemática Educativa

Director de la Tesis: **Dr. Ricardo Arnoldo Cantoral Uriza**

Ciudad de México Abril, 2021

Dedicatoria

A mis padres, Elda y Roberto, por nunca detener mi vuelo.

A mis hermanas, Mariana y Cristina, y a mi hermano, Sebastian, por ser ellos mismos.

A mi abuela, Carmelita, por siempre tenerme presente a pesar de la distancia.

Agradecimientos

El desarrollo de este proyecto de investigación no es solo obra mía, es la combinación de muchas discusiones, diálogos y charlas con una gran variedad de personas que siempre me apoyaron a lo largo de este recorrido. Por lo que me gustaría agradecer:

A **mi familia**, por apoyarme en cada una de mis decisiones, aunque eso signifique estar separados por una gran cantidad de kilómetros y tiempo, así como el sacrificar fechas y ocasiones especiales juntos. A mis padres, Elda y Roberto, y a mis hermanos, Mariana, Sebastian y Cristina. Gracias.

A **cuatro personas** que, por su apoyo, sus asesorías, sus discusiones y consejos permitieron que este trabajo sea lo que es hoy. A ustedes Dr. Javier, Dani, Luis Cabrera y Gera. Gracias.

A mis c**ompañeros y amigos**, porque nuestras discusiones en los seminarios, nuestras platicas a la hora del almuerzo o durante nuestras reuniones me ayudaron a reflexionar y contribuyeron a que este proyecto fuera posible. A ustedes, Luis Carlos, Carlitos, Antonio, Viri, Sofía, José Luis, Sindi, Jimy. Gracias.

A **mi asesor**, el Doc. Ricardo Cantoral, por animarse a dirigir esta investigación, por las sesiones y charlas para guiar y encaminar mi trabajo. Gracias.

A **dos trabajadoras excepcionales**, por su amabilidad y entrega en su trabajo y auxiliarme siempre que tenía alguna duda o dificultad con mi proceso de posgrado. A ustedes, Adriana Parra y Jaqueline Desfassiaux. Gracias.

Y, para aquellas personas que no menciono en estas líneas pero que en algún momento compartimos algún dialogo y contribuyeron en las reflexiones para mi trabajo. Gracias.

Beatriz Elena Martínez Díaz

Agradecimientos

Agradezco de manera especial al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt) por todo el apoyo brindado a la realización del presente estudio.
Beatriz Elena Martínez Díaz – CVU 927329

Agradezco al Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN) por permitirme ser parte del mejor centro de investigación del país.

Índice

RESUMEN **9**
ABSTRACT **10**
INTRODUCCIÓN **11**
CAPÍTULO 1: LA INVESTIGACIÓN **13**
1.1 Motivaciones 15
1.2 Revisión de literatura 16
La prueba estandarizada lo largo del tiempo: una historia *17*
La evaluación estandarizada desde la Matemática Educativa *23*
1.3 La problemática 28
1.4 Problema de investigación 32
1.5 Objetivos de investigación 34
1.6 Preguntas de investigación 34
CAPÍTULO 2: CONSIDERACIONES TEÓRICAS **35**
2.1 Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa 37
discurso Matemático Escolar (dME) *38*
Problematización del saber matemático *40*
Modelo de anidación de prácticas *40*
2.2 La evaluación estandarizada 41
Proceso de construcción de la prueba estandarizada *42*
Especificaciones *44*
Construcción de reactivos *45*
CAPÍTULO 3: METODOLOGÍA **49**
3.1 Los datos 51
3.2 Selección de reactivos 51
3.3 El análisis de reactivos 52
3.4 Fases del análisis 53
Fase 1: análisis de la actividad matemática *53*
Fase 2: análisis de los distractores *54*
Fase 3: análisis general de la fase 1 y 2 por subgrupos *60*
CAPÍTULO 4: RESULTADOS **63**
4.1 Fases 1 y 2: resultados del análisis individual de los reactivos de cada subgrupo. 65
Proporcionalidad directa *65*
Subgrupo 1: reactivos que evalúan específicamente a la proporcionalidad directa *67*
Subgrupo 2: reactivos relacionados al uso de la proporcionalidad directa *93*
Subgrupo 3: reactivos que evalúan algún concepto asociado *111*
4.2 Fase 3: resultados del análisis general de los grupos de reactivos 119
Subgrupo 1: Reactivos que evalúan específicamente a la proporcionalidad directa *119*
Subgrupo 2: reactivos relacionados al uso de la proporcionalidad directa *130*
Subgrupo 3: reactivos que ponen en juego conceptos asociados. *136*
4.3 Resultados generales 140
CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES **145**
CAPÍTULO 6: PROSPECTIVAS **149**
REFERENCIAS **153**
ANEXO **159**

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

ILUSTRACIÓN 1: MODELO DE ANIDACIÓN DE PRÁCTICAS. RETOMADO DE CANTORAL, MONTIEL Y REYES-GASPERINI (2015). 41
ILUSTRACIÓN 2: PROCESO DE EVALUACIÓN. RETOMADO DE NORTVERD Y BUCHHOLTZ (2018)........ 43
ILUSTRACIÓN 3: TABLA PARA EL ANÁLISIS DE LAS ACCIONES CONCRETAS. 54
ILUSTRACIÓN 4: TABLA PARA EL ANÁLISIS PSICOMÉTRICO DE LOS DISTRACTORES........ 58
ILUSTRACIÓN 5: TABLA PARA EL ANÁLISIS DE LOS DISTRACTORES DESDE LA MATEMÁTICA EDUCATIVA. 59
ILUSTRACIÓN 6: ANÁLISIS VERTICAL DE LAS ACCIONES CONCRETAS. 61
ILUSTRACIÓN 7: ANÁLISIS HORIZONTAL DE LOS DISTRACTORES. 62
ILUSTRACIÓN 8: ANIDACIÓN DE PRÁCTICAS, PRODUCTO DE LA PSM, RELATIVO A LO PROPORCIONAL DIRECTO (REYES-GASPERINI, 2016B). 66
ILUSTRACIÓN 9: REPRESENTACIÓN DE LOS VALORES REALES QUE CONFORMAN LOS TRIÁNGULOS SEMEJANTES DEL REACTIVO 7. 96

Índice de Tablas

TABLA 1: ESPECIFICACIÓN Y REACTIVO MUESTRA DEL REACTIVO 1: 68
TABLA 2: ANÁLISIS DE LAS ACCIONES CONCRETAS DEL REACTIVO 1....68
TABLA 3: ANÁLISIS DE LOS DISTRACTORES DEL REACTIVO 1....69
TABLA 4: ESPECIFICACIONES Y REACTIVO MUESTRA DEL REACTIVO 2.... 72
TABLA 5: ANÁLISIS DE LAS ACCIONES CONCRETAS DEL REACTIVO 2.... 73
TABLA 6: ANÁLISIS DE LOS DISTRACTORES DEL REACTIVO 2....74
TABLA 7: ESPECIFICACIÓN Y REACTIVO MUESTRA DEL REACTIVO 3. 76
TABLA 8: ANÁLISIS DE LAS ACCIONES CONCRETAS DEL REACTIVO 8. 77
TABLA 9: ANÁLISIS DE LOS DISTRACTORES DEL REACTIVO 3....78
TABLA 10: ESPECIFICACIÓN Y REACTIVO MUESTRA DEL REACTIVO 4. 80
TABLA 11: ANÁLISIS DE LAS ACCIONES CONCRETAS DEL REACTIVO 4. 81
TABLA 12: ANÁLISIS DE LOS DISTRACTORES DEL REACTIVO 4....82
TABLA 13: ESPECIFICACIÓN Y REACTIVO MUESTRA DEL REACTIVO 5....85
TABLA 14: ANÁLISIS DE LAS ACCIONES CONCRETAS DEL REACTIVO 5. 86
TABLA 15: ANÁLISIS DE LOS DISTRACTORES DEL REACTIVO 5....87
TABLA 16: ESPECIFICACIÓN Y REACTIVO MUESTRA DEL REACTIVO 6. 89
TABLA 17: ANÁLISIS DE LAS ACCIONES CONCRETAS DEL REACTIVO 6. 90
TABLA 18: ANÁLISIS DE LOS DISTRACTORES DEL REACTIVO 6. 91
TABLA 19: ESPECIFICACIÓN Y REACTIVO MUESTRA DEL REACTIVO 7....94
TABLA 20: ANÁLISIS DE LAS ACCIONES CONCRETAS DEL REACTIVO 7....94
TABLA 21: ANÁLISIS DE LOS DISTRACTORES DEL REACTIVO 7....95
TABLA 22: ESPECIFICACIÓN Y REACTIVO MUESTRA DEL REACTIVO 8. 98
TABLA 23: ANÁLISIS DE LAS ACCIONES CONCRETAS DEL REACTIVO 8....98
TABLA 24: ANÁLISIS DE LOS DISTRACTORES DEL REACTIVO 8....99
TABLA 25: ESPECIFICACIÓN Y REACTIVO MUESTRA DEL REACTIVO 9....102
TABLA 26: ANÁLISIS DE LAS ACCIONES CONCRETAS DEL REACTIVO 9.... 103
TABLA 27: ANÁLISIS DE LOS DISTRACTORES DEL REACTIVO 9.... 104
TABLA 28: ESPECIFICACIÓN Y REACTIVO MUESTRA DEL REACTIVO 10. 108
TABLA 29: ANÁLISIS DE LAS ACCIONES CONCRETAS DEL REACTIVO 10. 108
TABLA 30: ANÁLISIS DE LOS DISTRACTORES DEL REACTIVO 10. 109
TABLA 31: ESPECIFICACIÓN Y REACTIVO MUESTRA DEL REACTIVO 11.... 112
TABLA 32: ANÁLISIS DE LAS ACCIONES CONCRETAS DEL REACTIVO 11. 112
TABLA 33: ANÁLISIS DE LOS DISTRACTORES DEL REACTIVO 11. 113
TABLA 34: ESPECIFICACIÓN Y REACTIVO MUESTRA DEL REACTIVO 12....116
TABLA 35: ANÁLISIS DE LAS ACCIONES CONCRETAS DEL REACTIVO 12....116
TABLA 36: ANÁLISIS DE LOS DISTRACTORES DEL REACTIVO 12.... 117
TABLA 37: ANÁLISIS VERTICAL DE LAS ACCIONES CONCRETAS DE LOS REACTIVOS DEL SUBGRUPO 1 QUE EVALÚAN A LA PROPORCIONALIDAD DIRECTA....122
TABLA 38: ANÁLISIS HORIZONTAL DE LOS DISTRACTORES DE LOS REACTIVOS DEL SUBGRUPO 1 QUE EVALÚAN A LA PROPORCIONALIDAD DIRECTA. PARTE1. 125
TABLA 39: ANÁLISIS HORIZONTAL DE LOS DISTRACTORES DE LOS REACTIVOS DEL SUBGRUPO 1 QUE EVALÚAN A LA PROPORCIONALIDAD DIRECTA. PARTE2. 126

TABLA 40: ANÁLISIS HORIZONTAL DE LOS DISTRACTORES DE LOS REACTIVOS DEL SUBGRUPO 1 QUE EVALÚAN A LA PROPORCIONALIDAD DIRECTA. PARTE3. 127
TABLA 41: ANÁLISIS VERTICAL DE LAS ACCIONES CONCRETAS DE LOS REACTIVOS DEL SUBGRUPO 2 RELATIVOS A LA PROPORCIONALIDAD DIRECTA. 131
TABLA 42: ANÁLISIS HORIZONTAL DE LOS DISTRACTORES DE LOS REACTIVOS DEL SUBGRUPO 2 RELATIVOS A LO PROPORCIONAL DIRECTO. PARTE 1. 133
TABLA 43: ANÁLISIS HORIZONTAL DE LOS DISTRACTORES DE LOS REACTIVOS DEL SUBGRUPO 2 RELATIVOS A LO PROPORCIONAL DIRECTO. PARTE 2. 134
TABLA 44: ANÁLISIS VERTICAL DE LAS ACCIONES CONCRETAS DE LOS REACTIVOS DEL SUBGRUPO 3 QUE PONEN EN JUEGO CONCEPTOS ASOCIADOS. 136
TABLA 45: ANÁLISIS HORIZONTAL DE LOS DISTRACTORES DE LOS REACTIVOS DEL SUBGRUPO 3 QUE PONEN EN JUEGO CONCEPTOS ASOCIADOS. 138
TABLA 46: ANÁLISIS GRUPAL DE LOS DISTRACTORES DE LOS REACTIVOS DEL SUBGRUPO 1 QUE EVALÚAN ESPECIFICAMENTE A LA PROPORCIONALIDAD DIRECTA. 159
TABLA 47: ANÁLISIS GRUPAL DE LOS DISTRACTORES DE LOS REACTIVOS DEL SUBGRUPO 2 RELACIONADOS A LA PROPORCIONALIDAD DIRECTA. 160

Resumen

La presente investigación se enmarca en un estudio disciplinar desde la Matemática Educativa, específicamente tomando como referencia a la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, así como de la psicometría, al retomar las directrices básicas de diseño que deben tener las opciones de respuesta de un reactivo de opción múltiple. Estos con el objetivo de identificar qué aporta la Matemática Educativa, como disciplina de referencia, al análisis de reactivos y así, poder construir un instrumento que nos permita identificar la funcionalidad de los distractores de los reactivos que conformarán una prueba estandarizada.

Para ello, retomaremos los reactivos referentes a la proporcionalidad directa de cinco pruebas estandarizadas que pretenden evaluar el tercer parcial de matemáticas de los estudiantes de una institución de Educación Media Superior desde dos vías: desde la Matemática Educativa, específicamente la Teoría Socioepistemológica para analizar la actividad matemática puesta en juego en cada uno de los reactivos y desde la psicometría, para analizar la funcionalidad de los distractores.

Encontramos que la gran mayoría de los distractores contienen un distractor no viable y solo uno que cumple con todas las directrices de diseño. Por otro lado, identificamos que la evaluación estandarizada pone en juego la noción de calcular en el manejo de la proporcionalidad directa al centrar las opciones de respuesta en la identificación del procedimiento correcto, así como el acomodo correcto de las magnitudes en una igualdad de razones.

Nuestro estudio mostró que se debe prestar mayor atención a los distractores, dado que, el contenido que ponen en juego será fundamental para que no sea descartable fácilmente por los estudiantes. Además, logramos vislumbrar las nociones que la evaluación estandarizada pone en juego acerca de la proporcionalidad directa en los reactivos de opción múltiple.

Abstract

The present research is framed in a disciplinary study from Educational Mathematics, specifically taking as a reference the Socioepistemological Theory of Educational Mathematics, as well as psychometrics, by taking up the basic design guidelines that the answer options of a multiple-choice item should have.

With the objective of identifying what Educational Mathematics, as a discipline of reference, contributes to the analysis of items and thus, to be able to build an instrument that allows us to identify the functionality of the distractors of the items that will make up a standardized test.

For this purpose, we will take again the items referring to direct proportionality of five standardized tests that intend to evaluate the third partial of mathematics of the students of an institution of Higher Secondary Education from two ways: from Educational Mathematics, specifically the Socioepistemological Theory to analyze the mathematical activity put into play in each one of the items and from psychometrics, to analyze the functionality of the distractors.

We found that the vast majority of the distractors contain a non-viable distractor and only one that meets all the design guidelines. On the other hand, we identified that the standardized assessment brings into play the notion of calculating in the handling of direct proportionality by focusing the response options on the identification of the correct procedure, as well as the correct accommodation of magnitudes in an equality of ratios.

Our study showed that more attention should be paid to the distractors, given that the content they bring into play will be fundamental so that it is not easily discarded by the students. In addition, we were able to glimpse the notions that the standardized assessment brings into play about direct proportionality in the multiple-choice items.

Introducción

Es bien sabido que los profesores y estudiantes de diferentes niveles educativos se enfrentan periódicamente a la aplicación de una prueba estandarizada, y producto de la cultura de la rendición de cuentas que existe en el sistema educativo, las instituciones y profesores se han visto en la necesidad de preparar a sus estudiantes para salir mejor evaluados y tener mayores posibilidades de recibir una compensación monetaria para la escuela. No obstante, esto ha llevado a que la evaluación estandarizada sea mal vista y sean mal utilizados los resultados de estas.

En el Capítulo 1, denominado *La investigación*, hacemos un recuento de la historia de la evaluación estandarizada y de aquellas investigaciones que desde la Matemática Educativa nos permitieron bosquejar la problemática de nuestra investigación, así como el problema de estudio, nuestros objetivos y preguntas particulares para el estudio.

El Capítulo 2, nombrado *Consideraciones teóricas*, se encuentra dedicado exclusivamente a exponer los fundamentos teóricos de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa y de las nociones que retomaremos de la Psicometría, especificas para el diseño de los reactivos y sus opciones de respuesta, que nos permitirán abordar nuestras preguntas y objetivos de investigación.

El Capítulo 3, titulado *Metodología*, detallamos todas las decisiones metodológicas tomadas, así como los métodos con los que realizaremos cada uno de nuestros análisis y cómo ponemos en juego los aspectos teóricos que retomamos de cada una de las disciplinas.

Por su parte, el Capítulo 4, que lleva por nombre *Resultados*, contiene los principales aportes del análisis realizado a cada uno de los reactivos, a los análisis por grupo de reactivos, así como la mirada transversal de todos los ítems en general.

Y, por último, los Capítulo 5 y 6, denominado *Conclusiones y Prospectivas*, respectivamente, abordan las reflexiones finales de nuestra investigación que realizamos a partir de los resultados obtenidos y, por otro lado, se establecen algunas interrogantes que surgieron a lo largo del desarrollo del estudio que, si bien, no fueron abordadas en nuestro trabajo, consideramos son pertinentes para posteriores investigaciones dentro de la disciplina y la teoría.

Capítulo 1: La investigación

1.1 Motivaciones

La motivación para comenzar el presente proyecto de investigación, donde decido incursionar en un tema poco tratado desde la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME), al igual que desde la disciplina de la Matemática Educativa, en general, se remonta al momento que egresé de la Licenciatura en Docencia de la Matemática y comencé a incursionar en mi campo laboral.

En un primer momento, me sentía realizada puesto que, me encontraba ejerciendo —a mi parecer—, una de las mejores profesiones que puede haber, sin embargo, cuando llegó el momento en que tenía que evaluar a mis estudiantes, me di cuenta de que lo único que pensaba era en calificarlos, en realizarles un examen —que además era exigido por la institución donde laboraba— para que ellos demostraran cuánto habían "aprendido" en el transcurso del periodo.

Sin embargo, sentía que el proceso de *evaluación* que llevaba a cabo no era correcto o al menos, no era completo; pero no entendía el por qué me sentía así. Por lo que comencé a revisar mis apuntes y trabajos realizados durante mi curso de *evaluación del aprendizaje* —el cual cursé durante mi carrera— y me di cuenta de que había hecho cada una de las cosas que había aprendido en dicho curso. Había hecho una evaluación diagnóstica, había llevado un registro de todas las actividades realizadas en el transcurso del parcial y había realizado un examen en donde reunía todos los temas vistos.

Lo que observé es que, al realizar esas actividades, en lo que me había concentrado más, era en el diseño de las preguntas que conformarían cada uno de mis exámenes. Que estuvieran bien estructuradas, bien redactadas, que tuvieran palabras acordes al nivel donde enseñaba, que entre los distractores se encontraran los errores más comunes que utilizaban los alumnos al resolver ejercicios.

Por lo que comencé a reflexionar sobre mi propio actuar docente en el proceso de evaluación que estaba llevando a cabo con mis estudiantes y me di cuenta de que ese proceso se encontraba incompleto. No estaba desarrollando una evaluación *completa*, puesto que, lo único que hacía era darles una calificación. Lo que hacía era establecer un número respecto de qué tan bien o qué tan mal habían resuelto las diversas actividades mis antiguos estudiantes y había dejado de lado el verdadero juicio que debí haber hecho sobre cómo habían trabajado.

Por ello, es que comenzó a intrigarme el por qué a los futuros docentes se les enseñaba más a diseñar *buenos reactivos* en lugar de dar estrategias para que realicemos juicios de valor respecto al trabajo realizado por los alumnos, al igual que un juicio de valor respecto al trabajo hecho por uno mismo como docente; en qué momento fue que el examen se volvió parte fundamental de lo que denominamos evaluación, a tal grado de que con el simple hecho de que pensemos en evaluación pensemos al mismo tiempo en el diseño de un examen.

Lo anterior, combinado con mi carrera en docencia de la matemática, lo cual hace que me interese por la actividad matemática que desarrollo en clase, fue que me decidí por incursionarme en este proyecto de investigación en que trataremos de relacionar la evaluación con las Matemáticas.

1.2 Revisión de literatura

La evaluación estandarizada ha logrado, con el paso de los años, convertirse en una de las evaluaciones más utilizadas para conocer el estado general de un sistema educativo, así como para la rendición de cuentas. Sin embargo, ha sido esa misma proliferación de pruebas lo que ha hecho que no sea del todo aceptada por directivos y docentes de las instituciones educativas a lo largo y ancho del mundo (Shimizu, 2011).

Por lo que nos parece importante conocer cómo fue que este tipo de evaluación se desarrolló y comenzó a utilizarse, a tal grado de introducirse en el aula de clase, tanto para evaluar el aprendizaje de los estudiantes, como al mismo tiempo llevar a las y los profesores a diseñar sus clases con base en los contenidos a evaluar en pruebas externas a gran escala (Fernández, Alcaraz y Sola, 2017).

La prueba estandarizada lo largo del tiempo: una historia

Notas sobre el origen

Cuando se habla sobre el inicio de las pruebas o exámenes, incluso del inicio mismo de la evaluación, Martínez-Rizo (2012) menciona que el primer antecedente que se suele tener es en la antigua China. No existe un consenso sobre la fecha exacta, pero algunos ubican que fue en el período de la dinastía Chou (1122 a.n.e.–256 d.n.e.) y otros en la dinastía Han (206 a.n.e. – 220 d.n.e.) que se comenzaron a utilizar diversas pruebas de selección para elegir a los futuros funcionarios públicos, pues se tenía la intención de que sólo aquel que mereciera el puesto lo consiguiera, es decir, el mérito en lugar de la cuna (Stobart, 2010).

No obstante, al hacer referencia a la evaluación en el campo de la educación, el precedente del examen es mucho más moderno, actualmente la evaluación evoluciona a la par de la educación, sin embargo, los exámenes no comenzaron siendo parte de esta. En Martínez-Rizo (2012) se relata que la enseñanza de los sistemas educativos modernos, que surgieron alrededor del siglo XVII y XVIII, siendo de carácter público, universal, obligatorio, gratuito y en ocasiones laicos era destinada solo a las familias acomodadas las cuales tomaban sus clases en escuelas parroquiales o gremiales por lo que no se contaba con una gran cantidad de alumnos y no se conocía la noción de grado escolar.

Al ser tan diferente la manera de enseñanza de aquellos siglos, la evaluación del aprendizaje también lo era; en el sentido de que al ser tan pocos estudiantes no se requerían procedimientos formales, bastaba con el juicio del mismo profesor que a su vez, no hacía uso de ningún instrumento en específico, sino que era suficiente con realizar preguntas y su misma observación cotidiana para determinar el progreso de cada uno de sus estudiantes (Martínez-Rizo, 2009), además, al no dividir la educación por grados, tampoco era necesario decidir si anualmente un estudiante pasaba de curso o no; por lo que se infiere que el examen escrito no era la herramienta indispensable que es hoy en día para la evaluación y la educación (Salas, 2012).

Se dice que fue hasta inicios del siglo XVIII, específicamente en Francia, que se comenzaron a preocupar de que todos los niños y niñas tuvieran educación —en este caso una educación religiosa a través del catecismo—. Las maestras y maestros comenzaron a llegar a cada una de las parroquias en las que hacía falta un profesor para que enseñara a las niñas y niños a leer, e incluso a escribir a aquellos que lo necesitaban, siendo más similares a lo que hoy conocemos como escuelas multigrado (Martínez-Rizo,2012).

Después de que se estableciera que cada niña y niño debía recibir educación básica, se inicia un proceso de masificación de la educación que hizo necesario buscar nuevas formas de organización escolar que permitiera atender a una gran cantidad de estudiantes. Los primeros en desarrollar un sistema parecido al actual en el que los estudiantes se agrupan por la misma edad surgieron en Prusia —actualmente territorio dividido entre Polonia y Alemania—, durante el transcurso del siglo XVIII. Con el tiempo los demás países europeos fueron sumándose a esta misma forma de organización institucional adoptando, también, un sistema tutorial conocido actualmente como "lancasteriano", que se caracteriza porque el profesor selecciona a aquellos estudiantes dotados para que tomaran el rol de asesor o tutor con sus compañeros de clase (Thomas y Shaw, 1992, p. 1 citado en Martínez-Rizo, 2012, p. 29).

Este mismo modelo llegó a Estados Unidos a mediados del siglo XIX por Horace Mann al inaugurar la institución Grammar School de Quincy, Massachusetts. Esta se asemejó a las instalaciones que se manejan en la actualidad; contaba con diversas plantas, aulas separadas para cada maestro y un patio amplio para reuniones generales. Los alumnos al estar separados por edades, facilitaba el que los profesores se encargaran de un grupo, sin ocuparse de una gran diversidad de edades y niveles; y al final del curso se decidía si el estudiante pasaba de grado o no (Goodlad y Anderson, 1987, p. 45 citado en Martínez-Rizo, 2012, p. 29). Fue en este momento en que la evaluación comenzó a asemejarse a la que conocemos actualmente, pues al comenzar a determinar si un estudiante pasaba o no de curso, podría entenderse como aquella evaluación en la que su resultado tendrá consecuencias importantes para las y los alumnos.

No obstante, aunque la distribución de los estudiantes haya cambiado, eso no significó que la manera de enseñar lo hiciera. El sistema seguía teniendo "una forma de instrucción elemental que se desarrollaba oralmente, en forma de preguntas y respuestas" (Resnick, et al., 2010, p. 400), conocido como catecismo; lo que produjo una serie de dificultades a los docentes, como el idear nuevos sistemas pedagógicos, además de que se hizo necesaria la creación de instituciones especializadas en formar a los futuros profesores. Otra de las dificultades –importante y no tan notoria en su momento–, es que la evaluación del aprendizaje también tuvo que reinventarse, pues el profesor continuaba implementando un método, que consistía en hacer preguntas a sus estudiantes para corroborar si habían aprendido de memoria las oraciones encargadas, si las repetía se le encargan otras y sino, debía volver a repasar las mismas. Pero ahora que los grupos de estudiantes se habían vuelto tan numerosos, la heterogeneidad entre ellos comenzó a ser más latente, lo que derivó en que los métodos simples para evaluar existentes comenzaron a ser insuficientes y se volvió cada vez más difícil mantener estándares de calidad, por lo que se comenzaron a idear nuevas estrategias que contrarrestaran lo que estaba sucediendo en las escuelas (Martínez-Rizo, 2012).

En consecuencia, se crearon cuerpos especializados de inspectores o supervisores, que tenían la responsabilidad de corroborar que todos los planteles bajo su supervisión contaran con niveles mínimos de calidad (Martínez-Rizo, 2012).

Otra de las reacciones que se propiciaron dadas las limitaciones de las evaluaciones tradicionales realizadas por los profesores, consistió en buscar nuevas formas de evaluación más eficientes, las cuales consistieron en incorporar a las evaluaciones de las y los docentes con lo que hoy sería conocido como Psicometría, lo que dará a la postre el origen a las denominadas pruebas estandarizadas (Martínez-Rizo, 2009).

La prueba estandarizada a partir del siglo XX a la actualidad

El inicio del siglo XX se vio caracterizado por el desarrollo de dos acontecimientos de importancia mundial –las dos guerras mundiales desarrolladas principalmente en territorio europeo–. Dichos hechos influyeron en la manera en cómo y dónde se generó un mayor avance en educación y, por ende, de la evaluación.

Este período también se caracterizó, como lo menciona Martínez-Rizo (2012), por la segmentación, pues los sistemas educativos optaron por distinguir tres etapas durante el proceso formativo denominadas: educación primaria, secundaria y terciaria o bien, lo que actualmente conocemos como básica, media y superior. La segunda etapa se caracteriza por su subdivisión en dos etapas más: secundaria o media básica y media superior, a su vez que la etapa terciaria o superior se distingue por tener diversas variantes en duración y nivel, como los estudios de orientación técnica, profesiones liberales, de investigación o directivos de mayor jerarquía (p. 31). Esto permitió que fuera más sencilla la aceptación de los nuevos instrumentos de evaluación, puesto que los estudiantes que avanzarían a otro nivel deberían pasar sus exámenes.

Ahora bien, no podemos perder de vista que, para los EE. UU., el lograr un avance significativo en el rediseño de los juicios e instrumentos utilizados para evaluar a los estudiantes, fue un logro de vital importancia que condujo al surgimiento de los *tests de inteligencia* a inicios del siglo XX., diseñados inicialmente por Alfred Binet como una evaluación diagnóstica con la intención de identificar a aquellas personas que necesitarían de una educación especial. Con el paso de los años, los procesos técnicos de evaluación fueron desarrollándose a tal grado que su importancia creció hasta el punto de alcanzar el poder para determinar quién podría ser acreedor de formas privilegiadas de educación, ya que, en ese momento, se tenía la creencia de que la inteligencia era un proceso biológico innato en las personas y que difiere significativamente entre individuos y grupos según su clase social (Stobart, 2010).

Lo anterior coincidía con las perspectivas sociales de los principales representantes científicos británicos que fueron parte importante en la continuación y evolución del trabajo de Binet en Europa, entre los que se encontraban Francis Galton, Charles Spearman y Cyril Burt. El primero, era partidario de que la inteligencia se heredaba y que, según tu clase es que la descendencia de una persona sería inteligente o no. El segundo, estableció las bases teóricas sobre la inteligencia como una única escala —g de Spearman—, que podría representarse con un número; clasificando así a las personas en relación con la cantidad de inteligencia heredada. Y, el tercero, defendía la idea de que la inteligencia es hereditaria o que al menos es innata, es decir, que ni la práctica, ni la aplicación o el interés podrían aumentarla (Stobart, 2010).

El trabajo de Binet y su posterior desarrollo encontraron una zona muy favorable para que su trabajo se siguiera desarrollando en Estados Unidos; denominada psicometría. Por lo que, en 1916, Lewis Terman —psicólogo de la Universidad de Stanford—, adaptó los *tests de inteligencia* de Binet a un público más amplio y junto con Robert Yerkes combinaron estos tests con la última novedad en evaluación desarrollada: los tests de opción múltiple, facilitando así, la aplicación de exámenes a grandes masas (Stobart, 2010; Martínez-Rizo, 2012, p. 33).

Ahora bien, el aumento de aspirantes a entrar a la universidad —efecto ocasionado por la temprana inserción de EE. UU. a un sistema educativo con enfoque comprehensivo—, generó la apertura del College Board —originalmente llamado College Entrance Board— centro que se encargaba del diseño de las pruebas de admisión. Los primeros exámenes diseñados por esta institución eran de tipo ensayo, por lo que, con el aumento de estudiantes el proceso de calificación rápido y confiable comenzó a dificultarse (Martínez-Rizo, 2009). Por lo que fue necesario buscar nuevas alternativas para la revisión de exámenes y, fue así como en colaboración con Carl Brigham se desarrolló la prueba objetiva denominada *Scholastic Aptitude Test* (SAT) en 1925. Esta se caracterizaba por contener reactivos de respuesta abierta breve o de opción múltiple, es decir, con varias respuestas predefinidas y de las cuales se debe escoger la correcta (Stobart, 2010).

De manera paralela, en la década de 1920, la Universidad de Princeton era una de las principales universidades en la construcción de pruebas estandarizadas con Carl Brigham como personal académico, sin embargo, en el año de 1948 el departamento encargado en el diseño de pruebas se separó para volverse una entidad privada diferente: el *Educational Testing Service* (ETS), volviéndose el centro especializado en instrumentos psicométricos más importante del mundo (De Landsheere, 1986, p. 150 citado en Martínez-Rizo, 2012, p. 35).

Como se mencionó anteriormente, en consecuencia, de las difíciles circunstancias por las que pasaba el territorio europeo —incluso antes de la primera guerra mundial— era notorio que contaban con un menor avance en estos temas, sin embargo, fue en 1931 cuando esto se volvió más notorio. Narran los autores citados anteriormente que, en el transcurso de un congreso internacional, algunos participantes se referían a la psicometría como estadounidense, a lo que E. L. Thorndike protestó, al decir que "por el bien de la ciencia y por nuestro bienestar, sería preferible que las pruebas estandarizadas no fueran denominadas *exámenes estadounidenses*" (De Landsheere, 1986, p. 68 citado en Martínez-Rizo, 2012, p. 35). Pues, a pesar de que fue su obra la que terminó por fundar el nuevo campo teórico en el que se desarrollaba la teoría clásica de las pruebas, fueron ingleses como Binet y Spearman los que proporcionaron los fundamentos estadísticos de la teoría de la confiabilidad, el modelo estadístico de las puntuaciones, con las nociones de puntaje verdadero, error de medida y confiabilidad los que complementaron y dieron sustento a la psicometría (Martínez-Arias, 1995, p. 40 citado en Martínez-Rizo, 2012, p. 36).

Fue en este tiempo que las evaluaciones estandarizadas comenzaron a introducirse en las aulas de clase, dada la gran aceptación que estas pruebas habían tenido por su proceso de desarrollo sistémico y su facilidad para revisar y calificar una gran cantidad de exámenes. Los pioneros en el desarrollo de estas pruebas se encontraban convencidos de que las evaluaciones realizadas por maestros estadounidenses tenían grandes deficiencias y, por lo tanto, no eran buenas para ofrecer estrategias sólidas de mejoramiento (Martínez-Rizo, 2009, p. 3). Por ello, se comenzaron a desarrollar instrumentos que permitieran comparar el nivel de rendimiento de una gran cantidad de estudiantes, así como de diferentes escuelas, pues se tenía la fuerte convicción de que estas pruebas remediarían la gran falta de confiabilidad de los exámenes aplicados por las y los profesores de aquella época (Shepard, 2008).

Y fue así como las evaluaciones estandarizadas comenzaron a utilizarse cada vez más por organizaciones como la OCDE o por una gran cantidad de países, con la intención de seleccionar a los alumnos mejor calificados para acceder a una institución académica o monitorear a sus estudiantes y tratar de encontrar deficiencias en el sistema educativo. No obstante, dado el uso continuo de estas pruebas comenzaron a presentarse fenómenos que hicieron que fueran mal vistas.

La evaluación estandarizada desde la Matemática Educativa

A partir de una revisión de literatura realizada en diversas revistas en inglés y español, especificas de la disciplina y de educación en general, así como en bases de datos, identificamos algunas investigaciones que se relacionan con la línea de evaluación.

Uno de los aspectos de los que pudimos percatarnos es que la mayoría de los estudios se centra en la evaluación que se realiza en el aula más que la evaluación estandarizada, a pesar de que dichos estudios comenzaron hace décadas, fue en 2016 que un par de grupos de expertos en el tema –Grupos Temáticos de Estudio 39 y 40: evaluación y pruebas a gran escala en la enseñanza de las matemáticas y evaluación en el aula para el aprendizaje de las matemáticas, respectivamente–, se reunieron para discutir los avances que se han obtenido referente a la evaluación a gran escala y como esta puede beneficiar a la evaluación que realizan los docentes en el aula desde la Matemática Educativa, pues esta ha utilizado de diversas maneras los resultados de este tipo de evaluaciones. Por ejemplo, cuando se examina su impacto en la política educativa, el plan de estudios, la práctica en el aula y las carreras individuales de los estudiantes (Suurtamm, et al., 2016, traducción propia).

Se podría llegar a la conclusión de que este tipo de evaluaciones no tienen un impacto directo sobre los docentes y los estudiantes, al pensar que no ofrece resultados confiables sobre los individuos, sino solo en niveles más altos de agregación. Esto se debe a que la evaluación del logro educativo no tiene como eje central el generar explicaciones teóricas sobre el porqué de los resultados de este tipo de evaluaciones o diagnosticar los problemas de aprendizaje que los explican, sino que lo que se busca es valorar el grado en que se alcanzan dichos aprendizajes según las condiciones en las que se potenciaron (Cabrera, Valdés y Flores, 2018).

No obstante, en algunos países los estudiantes deben responder una prueba estandarizada para poder terminar sus estudios universitarios, tal es el caso de México, donde una de las maneras que tienen los alumnos para poder egresar es someterse a una prueba Ceneval (Centro Nacional para la Educación Superior) o bien, los estudiantes de Educación Media Superior se someten a una prueba similar para ingresar a la institución de su elección.

De igual forma, países como Francia, Bélgica, Países Bajos, Noruega, entre otros, incluyen en sus evaluaciones exámenes nacionales que todos los estudiantes deben realizar para poder avanzar a estudios superiores y no pueden abandonar la escuela secundaria –bachillerato para nosotros–, sin aprobar dichos exámenes (Suurtamm, et al., 2016, traducción propia).

No se puede negar el hecho de que la evaluación a gran escala tiene fuertes diferencias con la evaluación que se realiza en el aula tanto en sus tradiciones, como en sus prácticas y propósitos. No obstante, eso no ha sido impedimento para que desde la Matemática Educativa se de inicio a una línea que busca trabajar de manera equilibrada con estos dos tipos de evaluación y que en conjunto promuevan la mejora educativa logrando una más adecuada interacción entre ambas evaluaciones.

Si bien, no todos los ejemplos que mostraremos a continuación son antecedente directo para lo que se plantea hacer en el presente estudio, nos permitirán aún así tener una idea clara de lo que la disciplina ha contribuido alrededor de este campo de investigación y así, poder plantear nuestro problema de investigación.

Para comenzar, nos interesa retomar el trabajo realizado por Shimizu (2011), quien observa, en muchos países, tensiones entre las evaluaciones externas y las evaluaciones en el aula que él denomina reales, es lo que genera que los profesores japoneses se encuentren preocupados por la influencia que las evaluaciones externas tienen sobre sus prácticas de enseñanza y evaluación en el aula. En un intento por generar que los maestros puedan utilizar las evaluaciones a gran escala para informar su instrucción en el aula, el autor les proporciona reactivos muestra, las especificaciones y objetivos de su diseño, así como estadísticas de los estudiantes sobre el ítem, y posibles vías de acción que permitirían utilizar esos reactivos en el salón de clases. Concluye que, al utilizar reactivos de opción múltiple, se es posible recolectar información que sugiera los tipos de pensamiento que los estudiantes podrían estar utilizando basados en su elección de respuestas, auxiliando así a los profesores a comprender la naturaleza de las "concepciones erróneas" en el pensamiento de los estudiantes basados en el distractor seleccionado, generando oportunidades de aprendizaje para los alumnos.

Otro ejemplo de cómo la evaluación externa a gran escala puede ayudar a la instrucción y evaluación en el aula es el trabajo realizado por Paek (2012), quien sugiere que las trayectorias de aprendizaje son un medio que permite establecer una relación clara entre las normas de contenido de alto nivel, lo que se mide en las evaluaciones a gran escala y lo que ocurre en los salones de clase, pues para su diseño se necesita un profundo entendimiento del contenido, cómo aprenden los estudiantes y qué hacer cuando los alumnos se encuentran batallando con algún concepto (p. 6712). La autora menciona que el conocimiento de tales trayectorias puede ser utilizado en el desarrollo de los ítems de evaluación, así como ayudar a informar a los profesores sobre cómo aprenden los estudiantes conceptos particulares. Para demostrarlo, el mismo autor trabaja con investigadores, educadores de matemáticas y consultores nacionales con la intención de diseñar recursos para los maestros que conecten las grandes ideas dentro y de manera transversal entre los grados mediante una trayectoria de aprendizaje, con la intención de que al familiarizarse con ellas, los profesores puedan considerar la posibilidad de desarrollar elementos de evaluación en el aula que tomen en cuenta diferentes contenidos de aprendizaje o que permitan recolectar el trabajo de los estudiantes para monitorear su progreso a lo largo del parcial.

Shalem, Sapire y Huntley (2012) muestran cómo se podría establecer un vínculo entre la evaluación externa a gran escala y la práctica real en el aula que podría mejorar la calidad educativa al involucrar a los profesores sudafricanos en el mapeo curricular de una evaluación externa que se aplica en el continente. Dado que son los desarrolladores de la evaluación los que a menudo realizan el mapeo curricular, lo que se intento con esta investigación es mostrar lo que pasaba con los profesores al involucrarlos en este tipo de actividades. Para ello, se les presentaba un determinado ítem, con el que debían identificar el concepto que se encontraba evaluando y justificar la pertinencia de su evaluación y con ello, determinar si ese mismo concepto se encontraba siendo enseñado explícitamente y en qué grado académico. Al exponer a los profesores a un mapeo curricular, este les ayudó a observar las discrepancias entre el currículo previsto por los diseñadores de la prueba y el currículo que se aplica en el aula; específicamente en tres puntos importantes. El primero, es que desarrollaron una comprensión más avanzada sobre el contenido evaluado en un grado en particular y la demanda cognitiva que solicita; el segundo es que tuvieron la oportunidad de reflexionar sobre su propia práctica pues podían advertir si el contenido evaluado lo estaban abordando en clase y, por último, los maestros desarrollaron una comprensión más solida sobre el plan de estudios.

Otra de las maneras en que la evaluación a gran escala podría beneficiar la mejora educativa es a través del análisis de reactivos, como lo muestran Cabrera, Valdés y Flores (2018). Los autores establecen que no es suficiente identificar en qué contenidos los estudiantes tienen deficiencias, sino que, "es necesario investigar porqué se presentan esas dificultades, de modo que puedan establecerse sus causas y sobre ellas sustentar las acciones que contribuyan a superarlas" (p. 114). Para ello, es necesario que las inferencias realizadas a los resultados de una prueba estandarizada se realicen a través de una *disciplina de referencia* como la Matemática Educativa. De este modo, combinando el análisis de reactivos por medio de una correlación de punto biserial[1] –el cual permite un análisis de las anomalías o desfases de los resultados esperados para ciertos indicadores–, y la literatura reportada dentro de la disciplina se puede contribuir a la "construcción de reactivos que midan con mayor precisión el contenido a evaluar y, por otro, realizar inferencias más profundas sobre los resultados que se tienen de la evaluación" (p. 114).

[1] Correlación de punto biserial –$r_{pbis} > 0$–: Dado su poder predictivo, es una herramienta muy utilizada al permitir determinar si las personas "adecuadas" obtienen respuestas correctas. Si un reactivo o distractor obtienen un r_{pbis} negativo, quiere decir que las personas "adecuadas" no encuentran la respuesta correcta por lo que, el reactivo deberá ser revisado (Berezner y Adams, 2017).

Los trabajos anteriores nos ayudan a sentar una base sobre que el papel de las evaluaciones estandarizadas puede fungir como un apoyo positivo a la evaluación en el aula. Al observar la manera en cómo surgieron las evaluaciones estandarizadas, entendemos el por qué se han estado utilizando de la manera que se hace hasta el día de hoy, al entrenar a los estudiantes para que contesten mejor estas pruebas o tomando como referencia para la clase los contenidos de estas.

La intención con las secciones anteriores era dar un panorama general que permita entender la problemática que abordaremos a continuación. Pues dado el uso proliferado de las pruebas y sus resultados a generado que estas sean mal vistas y comprendidas entre las participantes del sistema educativo. Se ha perdido de vista que la información que proporcionan es diferente a la que un docente puede obtener dentro de un salón de clase, no obstante, eso no vuelve esta información menos importante.

Esto se demuestra con las investigaciones realizadas desde la disciplina de la Matemática Educativa que nos dejan ver como estas dos evaluaciones –evaluación en el aula y estandarizada–, siendo tan diferentes pueden apoyarse mutuamente para mejorar la calidad educativa.

1.3 La problemática

Las pruebas estandarizadas se introdujeron en las evaluaciones realizadas por los profesores en un intento por brindar un proceso sistemático y organizado, que permitiera ser replicado por cualquiera que enseñara en una escuela y así, tener una mayor certeza del por qué de los resultados de cada uno de los estudiantes. Sin embargo, estas pruebas comenzaron a utilizarse a tal grado que las evaluaciones del aula comenzaron a perder su esencia cualitativa y descriptiva por una más cuantitativa; lo cual no es para sorprenderse, pues desde el inicio de las pruebas estandarizadas ya se advertía que este tipo de evaluación "medía solo hechos aislados y piezas de información, en lugar de capacidad, razonamiento, habilidad organizadora, etc." (World, 1923, citado en Martínez-Rizo, 2012, p. 37).

Incluso, en la actualidad, no se ha dejado de poner en evidencia el papel negativo que podrían llegar a jugar las pruebas estandarizadas. V

No obstante, Martínez-Rizo (2008) señala que este tipo de evaluación puede ser un gran aliado en la mejora educativa, si y sólo si se le ve y entiende como un complemento de las evaluaciones realizadas por las y los maestros en el aula, no como el objetivo al que deben aspirar. De este último punto deriva la necesidad de que se conozcan y entiendan los alcances y limitaciones de este tipo de pruebas. No obstante, este mismo autor señala que la formación inicial que reciben los maestros en México, no los prepara bien para llevar a cabo una evaluación en el aula ni para entender la evaluación estandarizada (p. 7).

Un indicio de esto, como lo señala Martínez-Rizo (2008), es que en el ahora extinto Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE) solía recibir peticiones de escuelas normales para impartir talleres de elaboración de reactivos, específicamente de opción múltiple, con los que se esperaba que se mejorara la calidad de la evaluación realizada por los maestros. Además, otro hecho que podría relacionarse, aunque no tenemos evidencia suficiente para vincularlos, es que en México se permite que profesionales que no cuentan con estudios dentro de la educación o la docencia, es decir, ingenieros, arquitectos o profesionales afines, tienen permitido impartir clases de

Matemáticas en el nivel medio superior, lo cual, podría ser un resultado de que en el país existen pocas instituciones que forman a los futuros profesores para este nivel educativo.

En consecuencia, el que los futuros profesores no cuenten con una formación adecuada en el área de evaluación, como lo menciona Martínez-Rizo (2008), y que en la Educación Media Superior personas sin experiencia en el área de la docencia impartan clase y evalúen a los estudiantes, podría considerarse un ambiente que facilite la producción de ciertas consecuencias negativas pues, en las condiciones planteadas, es sencillo ignorar los riesgos que las pruebas estandarizadas pueden tener a la calidad educativa, al ser mal comprendidas y mal utilizadas.

Entre las consecuencias que surgieron, relacionadas a la aplicación y uso indebido de los resultados de la prueba estandarizada, se contempla el establecimiento de *rankings de centros*. Este se debe a la cultura de la rendición de cuentas que llevó a la asignación de estímulos económicos (Martínez-Rizo, 2008; Stobart, 2010) a aquellos profesores e instituciones que sobresalían en este tipo de evaluaciones, originando así una competencia entre estos. Se podría pensar que esta competencia entre las escuelas por salir mejor evaluados en este tipo de evaluaciones no es del todo negativa, lo cierto es que los diferentes centros han comenzado a compararse entre ellos sin tomar en cuenta el contexto en el que se encuentra cada uno.

Como resultado del intento por salir mejor evaluados según el *ranking* al que pertenecen, se ha generado una preocupación –incluso excesiva–, por los resultados de los estudiantes, lo que ha llevado al establecimiento de otro manejo inapropiado de los resultados de la prueba estandarizada, denominado *teaching to the test* (Stobart, 2010) o en castellano, enseñando para la prueba. Este refiere al hecho de que el profesor toma como referente para su actividad diaria el contenido que conforma a las pruebas y no el de los programas de estudio, generando con esto que los trabajos y tareas que aplica en clase se asemejen a los problemas y ejercicios de opción múltiple e incluso el examen que aplica para evaluar en el aula tiene una estructura similar al de este tipo de pruebas, con la intención de generar visibilidad a los resultados y brindar prestigio a su institución (Martínez-Rizo, 2008).

En otras palabras, las y los profesores, preocupados por el prestigio de su escuela y de ellos mismos, comienzan a *entrenar* a sus estudiantes para mejorar los resultados obtenidos en una evaluación a gran escala (Fernández, et al., 2017, p. 60); generando que estos últimos, en lugar de resolver ejercicios que los ayuden a desarrollar y a poner en juego sus habilidades, aprenden técnicas o *tips* para resolver en un menor tiempo los reactivos, provocando que las y los jóvenes pierdan el verdadero sentido de lo que están aprendiendo.

Ahora bien, Fernández et al. (2017) mencionan en su escrito que el uso político de los resultados de las pruebas no va con la filosofía de las mismas, debe ser un punto a considerar, pues en el afán de los países por basar sus reformar educativos en los resultados que arrojan las evaluaciones estandarizadas –como es el caso de España o Chile–, se pueden llegar a hacer simplificaciones de los resultados que pueden producir informes peligrosos al no comprender los procesos con los que llegaron a ellos, pues "los procesos que dan lugar a tales resultados no son importantes para comprender el cómo y el porqué de lo finalmente observable" (p. 54), en este caso, los procesos detrás de las respuestas del alumnado.

No obstante, no podemos perder de vista que entender los alcances y limitaciones de las evaluaciones estandarizadas, significa conocer que la mayoría de los estudios comparativos, ya sean nacionales o internacionales, son diseñados y controlados por psicómetras, investigadores empíricos en educación o expertos en procesamiento de datos (Keitel y Kilpatric, 1999, p. 245). Estos mismos autores mencionan que en pruebas como el Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias —TIMSS por sus siglas en inglés—, las cuestiones de contenido, en todos sus aspectos, han sido vistos generalmente como secundario, lo que apoya la idea de Alcaraz et al. (2013) de que "las pruebas estandarizadas no diagnostican procesos o identifican el desarrollo de las fortalezas o debilidades de los estudiantes" (p. 581).

Generalmente, las personas encargadas del diseño de estas pruebas se centran en que el conjunto de reactivos cumpla con las características estadísticas y probabilísticas incluidos en el diseño bajo la teoría clásica de las pruebas o el diseño bajo la teoría de pruebas modernas —como la teoría de respuesta al ítem—. Estas características, son, por ejemplo: el supuesto de unidimensionalidad, la independencia local y la curva característica del ítem (Osterlind, 1998). Por su parte, Clements y Ellerton (1996) señalan que la comunidad de educación matemática debe reivindicarse y aceptar su responsabilidad en el ámbito de la educación, puesto que, si el papel de la Matemática Educativa —como se denomina en América Latina—, es tener como objetivo a la Matemática, el problema de la evaluación debe hacerse visible en ese proceso.

No obstante, al conocer los procesos establecidos por los psicómetras y expertos en el análisis de datos para el desarrollo y establecimiento de los reactivos en las pruebas estandarizadas, podemos observar que existe una separación entre estas dos ramas, la psicometría y la Matemática Educativa. Al quedar relegado el análisis del contenido —en este caso matemático— se deja de lado la oportunidad de generar reactivos y distractores que sean psicométricamente aceptables y, que además, permitan tener un panorama más claro sobre la actividad matemática que se quiere poner en juego para ser evaluada, lo que produce una "interpretación de la realidad educativa que puede acabar provocando consecuencias importantes en las actitudes y comportamientos de los diferentes agentes del Sistema Educativo" (Fernández et al., 2017, p. 54)

En otra palabras, los resultados de las pruebas estandarizadas no cuentan con una influencia formativa sobre la evaluación en el aula, pues al diseñar la actividad matemática de los reactivos y los distractores desde la Matemática Educativa, además de cumplir con los parámetros psicométricos; se podría tener una explicación más detallada acerca de los resultados estadísticos, es decir, las inferencias realizadas podrían tener un sustento basado en la investigación, del avance o retroceso de los estudiantes sometidos al examen.

1.4 Problema de investigación

Como quedó expresado anteriormente, en México se han dado una serie de situaciones que han generado que las pruebas estandarizadas no sean del todo aceptadas entre la comunidad docente, pues al menos en la educación de nivel medio superior, las profesoras y profesores, además de enfrentarse a evaluaciones nacionales e internacionales –como PISA o PLANEA–, en algunas instituciones, deben evaluar a sus estudiantes por medio de una prueba estandarizada, generando conflictos internos, pues deben adaptar sus clases a lo que contendrá el examen.

En el marco de nuestra disciplina, la Matemática Educativa, observamos que, aunque pocos, ya se han desarrollado trabajos que tienen como objetivo reivindicar que la información que las evaluaciones a gran escala brindan, puede ser beneficiosa para la evaluación que se realiza en el aula y, por lo tanto, para la mejora educativa. Dentro de ellas destacamos la investigación realizada por Cabrera, Valdés y Flores (2018) a través de un análisis de los resultados estadísticos de reactivos de una prueba estandarizada. Ellos observaron algunas incongruencias en algunos distractores al presentar una correlación de punto biserial positiva, es decir, que los estudiantes considerados más aptos para responder correctamente toda la prueba estaban contestando incorrectamente y al utilizar a la Matemática Educativa como disciplina de referencia, les permitió más que solo desechar el ítem, identificar información relevante acerca de la posible causa que llevaban a seleccionar la respuesta incorrecta.

De igual forma, el escenario que diseñó Shimizu (2011) para llevar a cabo su estudio nos resulta de interés, dado que al proporcionar los reactivos muestra a los profesores junto con sus especificaciones de diseño, tuvieron la posibilidad de analizar y entender la razón de ser de cada uno de los distractores y el posible camino de resolución que llevó a los estudiantes a seleccionar esa opción de respuesta en lugar de la correcta. Esto permite generar mejores posibilidades de aprendizaje para sus alumnos basado en la información recolectada.

Si bien, nuestra población no es tan diferente, ya que se trata profesores en servicio, pero a diferencia de los anteriores, estos tienen acceso a las especificaciones de diseño y a los reactivos muestra al ser ellos mismos quienes los diseñaron. Por lo que, en nuestro caso particular, nos interesa analizar las nociones que ellos ponen en juego al diseñar ítems, pues se tiene claro que los docentes deben utilizar un enfoque psicométrico para diseñar una prueba, sin embargo, nos interesa ver qué es lo que podría aportar la Matemática Educativa al analizar los reactivos que servirán de muestra para el diseño de pruebas estandarizadas que tienen el objetivo de evaluar el tercer parcial de la clase de Matemáticas de los estudiantes de bachillerato.

Con todo esto en mente, en un intento por apoyar a la labor docente de aquellos profesores y profesoras ubicados en el nivel medio superior, nos planteamos un análisis disciplinar desde un enfoque teórico particular, el socioepistemológico, que se centra en analizar los reactivos –en especial sus distractores– referentes a la proporcionalidad directa de cinco pruebas estandarizadas que fueron diseñadas por profesores y profesoras en servicio para evaluar el tercer parcial de la clase de Matemáticas de cinco de los seis semestres que conforman el bachillerato; con la intención de identificar qué es lo que ponen en juego los reactivos y cada una de las opciones de respuesta incorrectas y si estas ayudan a cumplir con el sentido evaluativo del mismo.

Nuestro enfoque basado en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) se debe a tres consideraciones principales. La primera, es por la poca o nula investigación que se ha hecho alrededor del tema de evaluación. La segunda, es que la teoría parte de que existe un *discurso Matemático Escolar* (*dME*) que norma el sistema educativo, es decir, el currículo, los libros de texto, la manera en como se enseña un objeto matemático y, por ende, también la evaluación, en síntesis, las concepciones. No obstante, no se cuenta con evidencia empírica que sostenga este último aspecto.

Para finalizar, la TSME tiene como uno de sus objetivos la *democratización del aprendizaje* (Cantoral, 2013), el cual refiere a "la igualdad en la posibilidad de aprender que otorgará el *poder de saber*, es decir, usar el conocimiento. Para ello, se hará referencia a un aprendizaje basado en la significación de los conocimientos matemáticos mediante el uso" (Reyes-Gasperini, 2016a, p. 29). Para lograr esto, es necesaria la participación de todo el sistema educativo –político educativos, administrativos, docentes, estudiantes, libros de texto, entre muchos más– y, dado que, las evaluaciones estandarizadas forman parte de él, es importante que también se le tome en consideración como un instrumento que nos posicionará un paso más adelante en el cumplimiento del objetivo de nuestra teoría.

La selección de la proporcionalidad directa como tópico matemático se debe a su carácter central en las matemáticas, además de que la problematización del saber matemático referente a lo proporcional directo, es una de las más robustas que se ha desarrollado, además de que lo consideramos un contenido transversal que puede observarse en una gran variedad de temas y lecciones que se desarrollan en el plan de estudios del nivel medio superior.

Como consecuencia de lo anterior, nos proponemos atender las siguientes preguntas y los objetivos de investigación:

1.5 Objetivos de investigación

- Identificar qué aporta la Matemática Educativa, como disciplina de referencia, al análisis de reactivos.
- Indagar si la evaluación, en este caso estandarizada, de la proporcionalidad directa se encuentra normada por el *discurso Matemático Escolar*.
- Diseñar un instrumento para analizar desde las normas psicométricas y desde la Matemática Educativa, las opciones de respuesta a un reactivo de opción múltiple en una prueba estandarizada.

1.6 Preguntas de investigación

- ¿Los errores puestos en juego entre los distractores que forman parte de las opciones de respuesta influyen en el sentido evaluativo de los reactivos?
- ¿Qué nociones y herramientas ponen en juego los reactivos de cinco pruebas estandarizadas que buscan evaluar la proporcionalidad directa?
- ¿Qué directrices de la psicometría y de la Matemática Educativa deben tomarse en consideración para que una opción de respuesta pueda considerarse viable?

Capítulo 2: Consideraciones teóricas

2.1 Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa

La Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa plantea, en sí misma, una relación social al saber que la ubica como teoría que modela la construcción social del conocimiento matemático (Cantoral, 2013, p. 30), sin embargo, es importante aclarar que la noción de social que manejamos no es la misma a la que se refiere la idea vigotskiana en la que el conocimiento es producto de la interacción social y cultural de las personas, mejor conocido como zona de desarrollo próximo sino que, nuestra idea de social alude al propio conocimiento matemático (Reyes-Gasperini, 2016a, p. 31).

La TSME se basa en cuatro principios fundamentales: la racionalidad contextualizada, el relativismo epistemológico, la resignificación progresiva y la normatividad de la práctica social, no obstante, en el presente trabajo no se escribirá sobre este último, dado que no buscamos identificar una práctica social dentro de nuestro trabajo.

El principio de la racionalidad contextualizada hace referencia a que la relación del saber de la persona es una función del contexto, en otras palabras, la racionalidad con la que se actúa depende del contexto en el que el individuo se encuentre en un momento y lugar determinado (Espinoza-Ramírez, 2009). Se debe entender que la idea de este principio radica en que la construcción del conocimiento matemático es un producto sociocultural, "representativo de la sociedad en la que se gesta" (Crespo, 2007, p. 38).

El principio del relativismo epistemológico hace alusión al concepto mismo de relativismo. El cual, sostiene que no existe una validez absoluta en los puntos de vista, sino que poseen una validez subjetiva y relativa a los diferentes marcos de referencia, en otras palabras, como lo menciona Cantoral (2013) "la verdad o más bien el valor de verdad está con relación a quién y dónde lo experimente" (p. 163). Ahora bien, ubicándonos en el sector educativo, la TSME concibe que el saber es una multitud de saberes, con verdades relativas, pues acepta el saber popular, el saber técnico y el saber sabio; por lo que no se ve al error del estudiante como una falla o carencia, sino lo analiza desde el punto de vista de una racionalidad aun no develada por el investigador (Cantoral, 2013, p. 164).

Dado que los significados se derivan de la acción producida por el sujeto, individual o colectivo, sobre el objeto, el principio de resignificación progresiva plantea que el significado dependerá en gran medida del escenario contextual donde se produce la acción, del empleo de símbolos se personaliza y despersonaliza la apropiación, es decir, se significa al objeto (Cantoral, 2013). En otras palabras, es que un conocimiento matemático podría ponerse en juego en nuevas situaciones permitiendo así, nuevos significados (Cantoral, 2013).

discurso Matemático Escolar (dME)

Al posicionarnos bajo la Teoría Socioepistemológica, decimos que el "saber matemático se ha constituido socialmente en ámbitos no escolares" (Cantoral, 2013, p. 30), sin embargo, al introducirlo al sistema educativo, sufre una modificación que en palabras de Chevallard (1999) se denomina, transposición didáctica, es decir, "el saber de la obra matemática sufre modificaciones adaptativas progresivas con el fin de seleccionar, organizar y estructurar los conocimientos matemáticos que serán incluidos en las unidades temáticas de la escuela —matemática escolar—" citado en Reyes-Gasperini (2016b).

Al introducir la adaptación de la obra matemática en el salón de clase, se generan ciertos *discursos* que facilitan que el o la profesora comuniquen fácilmente conceptos y procedimientos matemáticos, lo que genera que en numerosas ocasiones se despersonalice y descontextualice el saber matemático, lo que produce un consenso sobre el qué y cómo enseñar, "que se alcanzan a costa de una pérdida en el sentido y el significado original del saber, reduciéndolo a temas aislados, cuidadosamente secuenciados, denominados «contenidos» o «unidades temáticas» de una asignatura" (Cantoral, 2013, p. 30).

En otras palabras, el proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas en los sistemas educativos centran su atención en la comunicación de los objetos matemáticos, es decir, en el caso que ocupa a la autora, en su aritmetización o memorización, más que en la construcción social del conocimiento matemático por parte del estudiante (Reyes-Gasperini, 2016b, p. 45).

Estos discursos que, al introducirse en el sistema educativo, legaliza un nuevo sistema de razón, es lo que se denomina *discurso Matemático Escolar y* se consideran como medio para lograr una participación consensuada en el ámbito escolar. Consenso que se logra acompañado de una forma de hegemonía que produce exclusión, pues la matemática escolar, considerada como una transposición didáctica de la obra matemática, es universal, es decir, los contextos en los que se creo el saber matemático y los contextos socioculturales en los que se desarrollan los estudiantes son excluidos (Reyes-Gasperini, 2016a).

Por su parte, Soto (2010) caracteriza en su trabajo al *dME* como "un sistema de razón, que excluye a los actores del sistema didáctico (estudiantes y docentes) de la construcción del conocimiento matemático a través de una violencia simbólica" (p. 91). Es decir, se "despersonifica el problema del proceso de enseñanza –donde los responsables eran los docentes– o del proceso de aprendizaje –responsabilizando a los estudiantes– para hablar de un problema focalizado en el propio conocimiento matemático escolar" (Reyes-Gasperini, 2016b).

De igual forma, Soto (2010) caracteriza y enuncia una serie de características del *dME* que dan forma a la matemática escolar actual:

- Atomización en los conceptos: hace referencia a que no considera los aspectos sociales, contextuales y culturales que permiten la constitución del conocimiento matemático.
- Carácter hegemónico: refiere a la supremacía de argumentaciones y significados frente a otros.
- Concepción de que la matemática escolar es un conocimiento acabado y continuo: se relaciona con que la enseñanza de la matemática se reduce a la mecanización de procesos o memorización de los conceptos.

- Carácter utilitario del conocimiento: refiere a que la organización de la matemática escolar ha antepuesto la utilidad del conocimiento a cualquiera de sus restantes cualidades.
- Falta de marcos de referencia para la resignificación de la matemática escolar: se hace hincapié en que se ha soslayado el hecho de que la matemática responde a otras prácticas de referencia, donde se encuentran las bases de significados naturales.

Problematización del saber matemático

En su estudio, Reyes (2016b) enuncia que la problematización del saber matemático es una metodología empleada por la TSME para estudiar la articulación de las dimensiones —didáctica, cognitiva, epistemológica y social— de un saber matemático específico mediante procesos como el análisis de obras originales de una pieza de conocimiento y libros de texto, los cuales permiten la interpretación de los procesos mentales involucrados y se comparan los usos del conocimiento matemático, en este sentido, se permite el tránsito «de los objetos a las prácticas», en otras palabras, «de la matemática escolar al saber matemático escolar» (P.53).

La *psm* "trata de una polifonía entre los procesos avanzados del pensamiento, la epistemología de las matemáticas y las prácticas humanas altamente especializadas" (Cantoral, 2013, p. 57) y, dado que, "el *saber matemático* [el *saber* **sobre** algo], no puede reducirse a una mera definición formal, declarativa o relacional, a un conocimiento matemático [el *conocimiento* **de** algo]" será necesario encargarse de su *historización* y su *dialectización* —mecanismos que conforman a la *psm* pero que no trataremos en este estudio— (Cantoral, 2013, p. 58)

Modelo de anidación de prácticas

Una vez que el *saber matemático* se problematizó por medio de una *historización* y una *dialectización*, es posible establecer un modelo dinámico que permita visualizar cómo es que se desarrolla un *saber matemático* en específico, el cual recibe el nombre de *anidación de prácticas*.

Es un modelo dinámico con una secuencia evolutiva, el cual articula cinco momentos: que van de la *acción* directa del sujeto ante el medio —intuitiva—, a su organización como una *actividad humana* situada socioculturalmente —intencionadas—, para después perfilar una *práctica socialmente compartida* —culturalmente normada—, que cae bajo la regulación de una o varias *prácticas de referencia* y que a la vez son normadas por la *práctica social* (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015, p. 13; Reyes, 2016, p. 33). Tomando en cuenta que dicha secuencia mantendrá una esencia diferente "según la *práctica de referencia* desde la cual sea analizada y profundiza en la especialidad de la evolución, a la vez que está regulada por una o varias prácticas sociales" (Reyes, 2016a, p. 34).

Ilustración 1: Modelo de anidación de prácticas. Retomado de Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini (2015).

2.2 La evaluación estandarizada

La evaluación externa a gran escala o estandarizada es aquella que se aplica a una gran cantidad de participantes (Martínez-Rizo, 2012) que pueden tomar la forma de evaluaciones internacionales, nacionales, estatales y provinciales con la intención de monitorear e informar a los sistemas o bien, para evaluar programas o hacer colocaciones de estudiantes (Suurtamm et al., 2016, traducción propia).

En los últimos años han tomado gran relevancia entre las autoridades educativas al fungir como medio para conocer el estado y los avances de los sistemas educativos en conjunto (Suurtamm, et al., 2016), al grado de que en algunos países se han vuelto la piedra angular sobre la que se sostiene la función política de las reformas educativa (Sola, 1999). Estas evaluaciones buscan constituir una base que permita la comparación de los resultados de los alumnos y las escuelas, en otras palabras, buscan informar sobre la situación promedio del aprendizaje de los estudiantes de cierto nivel, al comparar estos con los objetivos o estándares a alcanzar a nivel de sistema educativo (Martínez-Rizo, 2009; Martínez-Rizo, 2012).

Proceso de construcción de la prueba estandarizada

Para diseñar e implementar una prueba —en nuestro caso estandarizada—, existen diversos pasos que podrían seguirse, sin embargo, estos no son universales y podrían variar "en función del propósito del instrumento de medida, del modelo psicométrico utilizado, del tipo de respuesta exigida por los ítems, del formato de aplicación o del contexto de evaluación" (Muñiz y Fonseca-Pedrero, 2019, p. 7), por mencionar algunos ejemplos.

No obstante, a pesar del propósito de la prueba, el modelo psicométrico a utilizar o el formato de aplicación, el proceso de construcción siempre deberá desarrollarse de manera rigurosa y objetiva y estar sujetos a estándares de calidad, con el fin de garantizar la validez de las inferencias realizadas a partir de los resultados obtenidos de la prueba (Dorans y Cook, 2016).

Para nuestro caso particular retomaremos el modelo que proponen Nortverd y Buchholtz (2018) que establece cuatro etapas consecutivas para diseñar una evaluación estandarizada (Ver *Ilustración* 2).

Ilustración 2: Proceso de evaluación. Retomado de Nortverd y Buchholtz (2018).

En la primera etapa se establece la definición de un *marco de referencia*, es decir, una evaluación estandarizada solo puede evaluar una muestra de todos los contenidos que conforman el currículo, por lo que se deben seleccionar aquellos que serán considerados como relevantes. En otras palabras, es constituir el qué evaluar. La segunda etapa es la *operacionalización*. En esta en donde se habla sobre el cómo se evaluarán y el cómo se obtendrán evidencias de los contenidos seleccionados en la etapa anterior (Nortverd y Buchholtz, 2018, traducción propia).

Una vez establecidas las primeras dos etapas, relacionadas a la base teórica que sustenta a la evaluación, se transita a la etapa tres de *medición* –siendo esta en la que se ubicara el presente estudio–, referente a la construcción del instrumento, mejor conocido como prueba estandarizada. Es aquí donde entran en acción diversos comités, por ejemplo: el comité diseñador de especificaciones y el comité diseñador de reactivos. El primero, tiene como propósito el proporcionar al comité diseñador de reactivos el contenido especifico de los ítems, así como los detalles técnicos que serán necesarios para construir reactivos adecuados para evaluar el logro de los estudiantes. El segundo, tiene como meta principal el asegurar que cada ítem represente el contenido para el cual se especificó (INEE, 2005).

Una vez que estos dos comités desarrollaron sus actividades, es necesario realizar un piloteo de los reactivos con una muestra similar a la que se desea aplicar la evaluación, con la intención de “conocer el comportamiento psicométrico de los reactivos y detectar los problemas que enfrentan los alumnos al resolverlo" (INEE, 2005, p. 17; INEE, 2019) y, posteriormente, corregir aquellos ítems que no hayan evaluado lo que dicen evaluar o aquellos que produjeron algún sesgo en el pilotaje.

Por último, en la etapa de *validación* lo que se busca es interpretar los resultados de la aplicación de la evaluación y poder validar la información que arroja el instrumento para poder realizar inferencias que permitan la toma de decisiones (Nortverd y Buchholtz, 2018). Este último paso es de suma importancia, ya que si al realizar todas las etapas anteriores, no se puede garantizar que la información que se recolecto es válida o suficiente para corroborar las inferencias que se presenten realizar, esa información no podría tomarse en cuenta.

El proceso de construcción de este tipo de evaluaciones es tardado y riguroso con la intención de poder asegurar la objetividad de las inferencias que se pretendan realizar, pero también, para poder subsanar una debilidad de las evaluaciones realizadas en el aula: la comparabilidad (Suurtamm, et al., 2016). Mediante la evaluación que un profesor realiza en su día a día no es posible realizar comparaciones entre sus estudiantes o entre sus grupos, ya que ninguno tendría las mismas características que le permitirían lograr promediar el estado actual de todos sus estudiantes, sin embargo, la evaluación estandarizada logra en cierta medida subsanar este inconveniente.

Especificaciones

Dada la naturaleza de nuestro estudio que se centra en el análisis de la actividad matemática puesta en juego en cada uno de los ítems, las especificaciones de cada uno de ellos serán de vital importancia para nuestro trabajo, pues son las que nos permitirán verificar si el reactivo evalúa lo que dice estar evaluando, así como los lineamientos que se deben seguir para la construcción de cada uno de los reactivos que se encuentran especificados al momento de la construcción del reactivo.

Las especificaciones se diseñan una vez que el propósito de la prueba, así como su variable a evaluar se establecen. Estas tienen como objetivo principal proporcionar al comité que se encargará de la construcción de los reactivos los elementos esenciales y particulares que les permitirá elaborar ítems adecuados para evaluar el logro escolar de los estudiantes (INEE, 2005, p. 10).

Existen dos tipos de especificaciones. Las primeras, son las generales, aquellas que describen aspectos concernientes con la "aplicación del instrumento, el tipo, número, longitud, contenido y distribución de los ítems, especificaciones e instrucciones en la entrega del material y aspectos relacionados con la seguridad de este" (Muñiz y Fonseca-Pedrero, 2019, p. 9).

Las segundas, son las que se encuentran relacionadas con los reactivos. Las cuales son las que utilizaremos en nuestro trabajo. Puesto que, hacen referencia al tipo de ítem que se deberá diseñar, a la cantidad de reactivos que serán necesarios para evaluar un contenido, la extensión de palabras que el enunciado deberá contener, el contenido especifico que se debe evaluar, la manera en que los reactivos deberán ser distribuidos, así como un reactivo muestra que funja como ejemplo a las personas encargadas de diseñar los reactivos (Muñiz y Fonseca-Pedrero, 2019, p. 9; INEE, 2019, p. 34). En otras palabras, se debe seguir estrictamente lo establecido en estas especificaciones al momento de diseñar los ítems.

Construcción de reactivos

La construcción de reactivos es una de las partes más importantes en el proceso de construcción de una prueba, pues son estos los que conforman el instrumento de evaluación. Por lo que una construcción deficiente se reflejaría en las métricas finales del instrumento, así como en la validez de las inferencias realizadas de los resultados (Haladyna y Rodríguez, 2013).

Existen diversos formatos para construir un ítem como lo son, aquellos que solicitan la construcción de una respuesta como las *preguntas abiertas*, sin embargo, el formato más usual para una prueba es el de *opción múltiple*; el cual consiste en un enunciado o pregunta que se complementa con una serie de opciones de respuesta en las que el sujeto debe identificar la respuesta correcta (Moreno, Martínez y Muñiz, 2004, p. 491) y pueden ser utilizados en diversos contextos y con diferentes propósitos;

aunque en general son utilizados para evaluar conocimiento factual (memorístico), habilidades intelectuales de alto orden, incluso disposiciones actitudinales y valorativas (INEE, 2005). Para fines de nuestra investigación, este formato es el que analizaremos.

El reactivo de opción múltiple se encuentra conformado por varios componentes indispensables entre los que se encuentran: la base del reactivo, que es un estímulo en forma de pregunta o enunciado incompleto, al que debe responder es estudiante; las opciones de respuesta, que son aquellas opciones plausibles de las cuales se debe seleccionar la correcta; la respuesta correcta, es la opción que responde correctamente a la base del reactivo; los distractores, son aquellas opciones incorrectas pero plausibles que tienen la función de distraer al estudiante; las instrucciones, son indicaciones dirigidas a los textos o imágenes adicionales a la base del reactivo; y por último, las figuras y textos adicionales, son aquellos elementos gráficos y elementos que acompañan a las figuras adicionales (INEE, 2005, subrayado nuestro).

Respecto a su diseño, en años pasados no se le prestaba demasiada atención a su construcción, pues se dejaba a la intuición e imaginación de las personas encargadas de diseñarlos, no obstante, esa visión en el desarrollo de las pruebas ha ido evolucionando con el tiempo al grado de que se han comenzado a proponer ciertas directrices para acompañar el proceso de construcción de los ítems (Moreno, Martínez y Muñiz, 2004).

Para nuestro estudio, retomaremos las directrices propuestas por Moreno, Martínez y Muñiz (2004), en el que se establecen tres secciones principales. La primera, hace referencia a la elección del contenido que se desea evaluar; la segunda, a la expresión del contenido del ítem y, la tercera, a la construcción de las opciones de respuesta. En nuestra opinión, es importante que las directrices se tomen en cuenta cuando se está diseñando un banco de reactivos, esto con la intención de maximizar las propiedades métricas finales, así como la validez de las inferencias realizadas de estas (Muñiz y Fonseca-Pedrero, 2019, p. 9), sin embargo, dado que nuestro interés es el análisis de la actividad matemática de los reactivos y de los errores puestos en juego en cada uno de los distractores, solo retomaremos la tercera fase de construcción de las opciones de respuesta, las cuales detallaremos en el capítulo siguiente.

Para sintetizar, lo que se mostró en este capítulo son las disciplinas que tomaremos como referencia para el análisis de nuestros datos en diferentes fases y la construcción de los instrumentos con lo que se realizará dicho análisis.

Capítulo 3: Metodología

3.1 Los datos

Los instrumentos como las tablas de especificaciones de los reactivos y los mismos reactivos que se analizarán fueron retomados de la página web de una institución de educación media superior del Estado de Baja California que evalúa a sus estudiantes por medio de un examen estandarizado solamente en el tercer parcial de cada semestre. Dichos instrumentos son de acceso abierto, por lo que pueden ser descargados libremente.

A lo que no tuvimos acceso fueron a los reactivos finales que formaron parte de los exámenes aplicados a los estudiantes. Esto por motivos de seguridad del bando de reactivos de la institución. Por lo que nos vimos en la necesidad de utilizar los reactivos muestra que se encuentran en las especificaciones de cada uno de los ítems, pues estos son un ejemplo de cómo debe ser el reactivo final y, por lo tanto, deben cumplir con las mismas características que se establecen en las especificaciones de diseño.

3.2 Selección de reactivos

En virtud de que retomaremos la problematización realizada por Reyes-Gasperini (2016b) referente a la proporcionalidad directa, los reactivos que analizaremos son aquellos que se relacionan con dicho contenido matemático. Para su selección se establecieron tres criterios, los cuales permitieron subdividir en subconjuntos a los reactivos seleccionados. Estos son:

1. Que en la especificación del reactivo se mencione explícitamente que lo que se busca evaluar es la proporcionalidad directa o bien, la variación directa.
2. Dada la *psm* realizada por Reyes-Gasperini (2016b), se tomarán en cuenta los reactivos relacionados donde su principal objetivo a evaluar no es la proporcionalidad directa pero que es necesaria para hacer uso del contenido matemático para llegar a la respuesta correcta.
3. Del mismo modo que el criterio dos, se tomarán en cuenta los reactivos relacionados a los conceptos asociados a la noción de proporcionalidad directa, aquellos que, dentro de lo curricular son vistos como sinónimos.

La intención de los criterios anteriores es establecer un método de guía clara para seleccionar aquellos reactivos que nos permitan abarcar todos los aspectos relacionados a la proporcionalidad directa, es decir, aquellos reactivos que tienen la intención de evaluar la proporcionalidad directa, aquellos que no tienen intención de evaluarla pero que la deben usar para seleccionar la respuesta correcta y aquellos que ponen en juego conceptos asociados a la proporcionalidad directa.

3.3 El análisis de reactivos

El análisis de reactivos se encontrará divido en tres fases. La primera, será un análisis refinado de las acciones puestas en juego en la actividad matemática de cada uno de los ítems (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015).

La segunda se encontrará divida en dos secciones. Una será un análisis psicométrico de cada distractor de forma individual con la intención de determinar qué tan descartables son, es decir, que se puede realizar esto sin la necesidad de aplicar procedimientos matemáticos, y la otra será un análisis desde la matemática educativa, el cual se complementará con la sección anterior para identificar qué tan comunes son los errores puestos en juego en cada uno de los distractores.

La tercera fase será un análisis general de cada una de las dos fases anteriores, que nos permitirá visualizar las coincidencias y diferencias entre cada uno de los reactivos, así como identificar qué tan orientados se encuentran las opciones de respuesta hacia la psicometría como a la matemática educativa.

La información que se recolecte será vaciada en tablas que fueron diseñadas a partir de las consideraciones teóricas tomadas en cuenta para el análisis. Dicha tabla comenzará con la descripción general del reactivo; mostrará el semestre, bloque, tema y subtema al que pertenece el ítem; así como su indicador de desempeño, y un reactivo muestra con su respuesta correcta y sus tres distractores. Cada fase tendrá designada una tabla para vaciar la información recolectada de cada reactivo.

3.4 Fases del análisis

Fase 1: análisis de la actividad matemática

Para realizar esta primera fase retomaremos el análisis refinado de las acciones utilizado por Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini (2015) con la intención de identificar las acciones concretas y actividades puestas en juego en los reactivos de proporcionalidad directa y, así, verificar si lo que se pone en juego en la actividad se encuentra en concordancia con lo descrito en la tabla de especificación del reactivo.

El análisis consiste en realizar tres preguntas especificas a cada uno de los problemas o ejercicios planteados en la base del reactivo para identificar la actividad matemática puesta en juego. Estas deben entenderse como realizadas sobre el desempeño de los estudiantes.

Pregunta 1: *¿qué debe hacer*?

Con esta pregunta pretendemos explicitar la acción o acciones directas que debería poner en juego el estudiante sobre el objeto matemático para lograr identificar la respuesta correcta al reactivo.

1. **Pregunta 2:** *¿cómo lo debe hacer*?

Con esta segunda pregunta pretendemos determinar las herramientas que el estudiante deberá poner en juego para lograr identificar la respuesta correcta.

2. **Pregunta 3:** *¿para qué lo debe hacer*?

En este caso, se busca reconocer la intención didáctica de la tarea, la cual identificaremos a través de la especificación del reactivo en donde se indica de manera clara qué es lo que busca evaluar con el reactivo.

La información que cada una de las preguntas proporcione será colocada en una tabla (ver *Ilustración 3*), que al final nos permitirá realizar un análisis general con la intención de visualizar la actividad matemática de cada uno de los reactivos.

Análisis de las acciones concretas del enunciado o pregunta del reactivo	
¿Qué debe hacer?	
¿Cómo lo debe de hacer?	
¿Para qué lo debe hacer?	

Ilustración 3: Tabla para el análisis de las acciones concretas.

Fase 2: análisis de los distractores

En esta fase lo que pretendemos es analizar los distractores que forman parte de las opciones de respuesta desde dos perspectivas: la psicometría y la matemática educativa. Para la primera retomaremos las directrices especificas para la construcción de las opciones de respuesta para un reactivo de opción múltiple y para la segunda buscaremos corroborar qué tan comunes son los errores puestos en juego desde la Matemática Educativa.

Fase 2.1: análisis psicométrico

Esta primera fase del análisis se centrará en las características básicas de diseño, denominadas directrices, que se deben tomar en cuenta para cada uno de los distractores pertenecientes a las opciones de respuesta de los reactivos. Retomaremos las directrices propuestas por Moreno, Martínez y Múñiz (2004) acerca de la construcción de las opciones de respuesta de los ítems de opción múltiple, pues consideramos que agregan criterios que nos permiten un mejor análisis de los distractores. Las cuales son:

1. La opción correcta debe ser solo una, acompañada por distractores plausibles.
2. La opción correcta debe estar repartida entre las distintas ubicaciones.
3. Las opciones deben ser preferiblemente tres. Si se agrega una más debe cuidarse que sea plausible.
4. Las opciones deben presentarse usualmente en horizontal o vertical según sea necesario.

5. El conjunto de opciones de cada ítem debe aparecer estructurado, es decir, debe presentar un mecanismo de ordenamiento, ya sea que los resultados aparezcan de menos a mayor o viceversa.
6. Las opciones deben ser autónomas entre sí, sin solaparse ni referirse unas a otras. Por ello, deben evitarse las opciones "Todas las anteriores" y "Ninguna de las anteriores".
7. Ninguna opción debe destacar del resto ni en contenido ni en apariencia, en otras palabras, la longitud de las respuestas debe ser similar.

Sumado a las anteriores, se retomarán los criterios para la construcción de ítems que de la institución diseñadora utiliza para el diseño de las opciones de respuesta, las cuales son:

1. Los ítems deberán contener cuatro opciones de respuesta (A, B, C y D).
2. Cuidar que todas las opciones sean gramaticalmente consistentes.
3. Cada reactivo debe adoptar el esquema de respuesta correcta.
4. La clave de respuesta en el examen se deberá ubicar al azar.
5. Se deberán redactar distractores plausibles en cuanto a contenido, forma, valoración, personas, etc.
6. Los distractores deben incluir los errores que cometen comúnmente los estudiantes.
7. Los distractores deberán escribirse de modo horizontal o vertical según corresponda.

También agregaremos un par de directrices extras que consideramos pertinentes con la intención de complementar el análisis de los distractores:

1. Que el distractor no sea descartable sin realizar algún proceso matemático.
2. Que el distractor tenga sentido en el contexto del problema.

Ahora bien, las directrices anteriores abarcan en conjunto a las opciones de respuesta, sin embargo, lo que nos interesa en esta parte del análisis son los distractores, aquellas respuestas plausibles que pueden llegar a confundir a los estudiantes. Por ello, la tabla (ver *Ilustración 4*) que se utilizará para recolectar la información de esta fase del análisis no contará con la directriz de la respuesta correcta, pues damos por hecho de que al ser reactivos de opción múltiple de una prueba estandarizada cumplen con tener una sola respuesta correcta.

Respecto a la cantidad de opciones de respuesta, Moreno, Martínez y Muñiz (2004) recomiendan que solo sean tres, no obstante, la institución diseñadora establece que serán cuatro las opciones que conformen al reactivo, las que serán acomodadas en una dirección, ya sea horizontal o vertical según lo permita el diseño de la prueba.

Tomando en cuenta las directrices específicas de los distractores propuestas por Moreno, Martínez y Muñiz (2004) y la institución diseñadora, más las directrices de complementación, establecimos cinco preguntas que nos permitirán analizar los aspectos más esenciales de los errores plausibles, las cuales son:

- ¿El distractor se encuentra estructurado de manera coherente respecto a las demás opciones de respuesta?

Con esta primera pregunta lo que pretendemos observar es que las opciones de respuesta aparezcan con un mecanismo de ordenamiento, es decir, que los resultados se muestren de menor a mayor o viceversa.

- ¿El distractor es autónomo respecto a las demás opciones de respuesta?

Con esta pregunta pretendemos identificar si las opciones no se solapan entre sí, pues una respuesta no debe contener a otra indirectamente.

- ¿El distractor destaca sobre los demás en contenido, apariencia, estructura gramatical o en algún término que aporte información indebida?

Lo que nos interesa observar es que todas las opciones de respuesta sean similares en longitud y apariencia pues, si no es así un estudiante podría ser capaz de prescindir de un distractor con cierta facilidad.

- ¿El distractor es descartable sin la necesidad de procedimientos matemáticos relacionados al reactivo?

Lo que nos interesa observar es si un distractor no resalta en contenido matemático en ninguno de sus distractores, haciendo que el reactivo sea descartable sin la necesidad de hacer algún procedimiento matemático, ya que la información que el reactivo proporciona es suficiente para descartarlo.

- ¿El distractor tiene sentido en el contexto del problema?

Lo que nos interesa observar es si los resultados se encuentran en concordancia con los datos reflejados en la base del reactivo.

Nuestra intención al realizar las preguntas anteriores es corroborar si los distractores a analizar cuentan con las características de diseño básicas. Nos interesa reconocer si estos destacan de manera individual del resto de las opciones generando facilidades indebidas, así como verificar si cada uno cumple con su función de distraer a aquellos estudiantes que no son capaces de identificar la respuesta correcta, en otras palabras, que el distractor no sea descartable sin la necesidad de hacer algún procedimiento matemático y, por último, si el distractor tiene sentido en el contexto del problema pues, al presentar valores irreales se vuelve descartable.

A cada uno de los distractores que conforman las opciones de respuesta se le realizarán las preguntas anteriores, colocando las respuestas en una tabla como la que se muestra en la (ver *Ilustración 4*). En esta las respuestas que se espera colocar son "Sí", "No" o "No aplica", ya en la descripción de lo que se observa en la tabla se desarrollará el porqué de cada una de las respuestas.

		Distractor 1	Distractor 2	Distractor 3
Análisis psicométrico	1. ¿El distractor se encuentra estructurado de manera coherente respecto a las demás opciones de respuesta?			
	2. ¿El distractor es autónomo respecto a las demás opciones de respuesta?			
	3. ¿El distractor destaca sobre los demás en contenido, apariencia, estructura gramatical o en algún término que aporte información indebida?			
	4. ¿El distractor es descartable sin la necesidad de procedimientos matemáticos relacionados al reactivo?			
	5. ¿El distractor tiene sentido en el contexto del problema?			

Ilustración 4: Tabla para el análisis psicométrico de los distractores.

Fase 2.2: análisis desde la Matemática Educativa

En la segunda sección de la fase dos, nos interesa retomar la información recolectada en la sección uno, dado que, una de las indicaciones para el diseño de los distractores del reactivo consiste en utilizar *errores comunes* que los estudiantes cometen al tratar con ese tema en el curso del ciclo escolar; sin embargo, en ocasiones utilizar esos *errores* lleva a que el distractor se vuelva descartable, lo que deriva en que esa opción de respuesta o incluso el reactivo deba eliminarse de una prueba.

No obstante, posicionándonos desde nuestra disciplina, la Matemática Educativa, pensamos que eliminar ese distractor con un *error común* que se torna descartable, repercute en que las inferencias posibles que podrían realizarse de los resultados obtenidos con la aplicación de la prueba estandarizada, al perder información que podría ser valiosa para justificar los datos estadísticos presentados en el informe final. Por lo tanto, nuestra intención al retomar la información de la sección uno de la fase dos, es identificar aquellos *errores comunes* que vuelven al distractor descartable o incoherente en el contexto del problema, a partir de las preguntas:

- ¿Cuál es la naturaleza del error puesto en juego?
- ¿Es un error común respecto a lo reportado en la investigación?

Con las preguntas anteriores nos interesa analizar porque el contexto del problema no fue viable para el distractor y a partir de lo reportado desde la investigación disciplinar se identifica si existe un escenario posible que permita a dichos errores comunes seguir formando parte del reactivo. La respuesta que se obtenga para cada distractor se colocará en una tabla que se encontrará unida a la tabla de la fase anterior (ver *Ilustración* 5).

		Distractor 1	Distractor 2	Distractor 3
Análisis desde la Matemática Educativa	1. ¿Cuál es la naturaleza del error puesta en juego?			
	2. ¿Es un error común respecto a lo reportado en la investigación?			

Ilustración 5: Tabla para el análisis de los distractores desde la Matemática Educativa.

Con la intención de contestar la primera pregunta, los tipos de errores que se encuentren en cada uno de los distractores serán clasificados en uno de tres tipos: errores conceptuales, procedimentales o arbitrarios. Los primeros son aquellos en los que el estudiante presente un error relacionado al tópico matemático tratado en el reactivo –para nuestro caso la proporcionalidad directa–. Los segundos, son aquellos errores que se producen al no trabajar correctamente alguna operación matemática y, los terceros, son aquellos errores que se producen sin razón aparente. Esta clasificación se retomó de Orton (1983), pues al no disponer de una clasificación especifica para lo proporcional directo, decidimos utilizar una clasificación de errores que permitiera clasificar de manera general los errores puestos en juego en cada uno de los distractores.

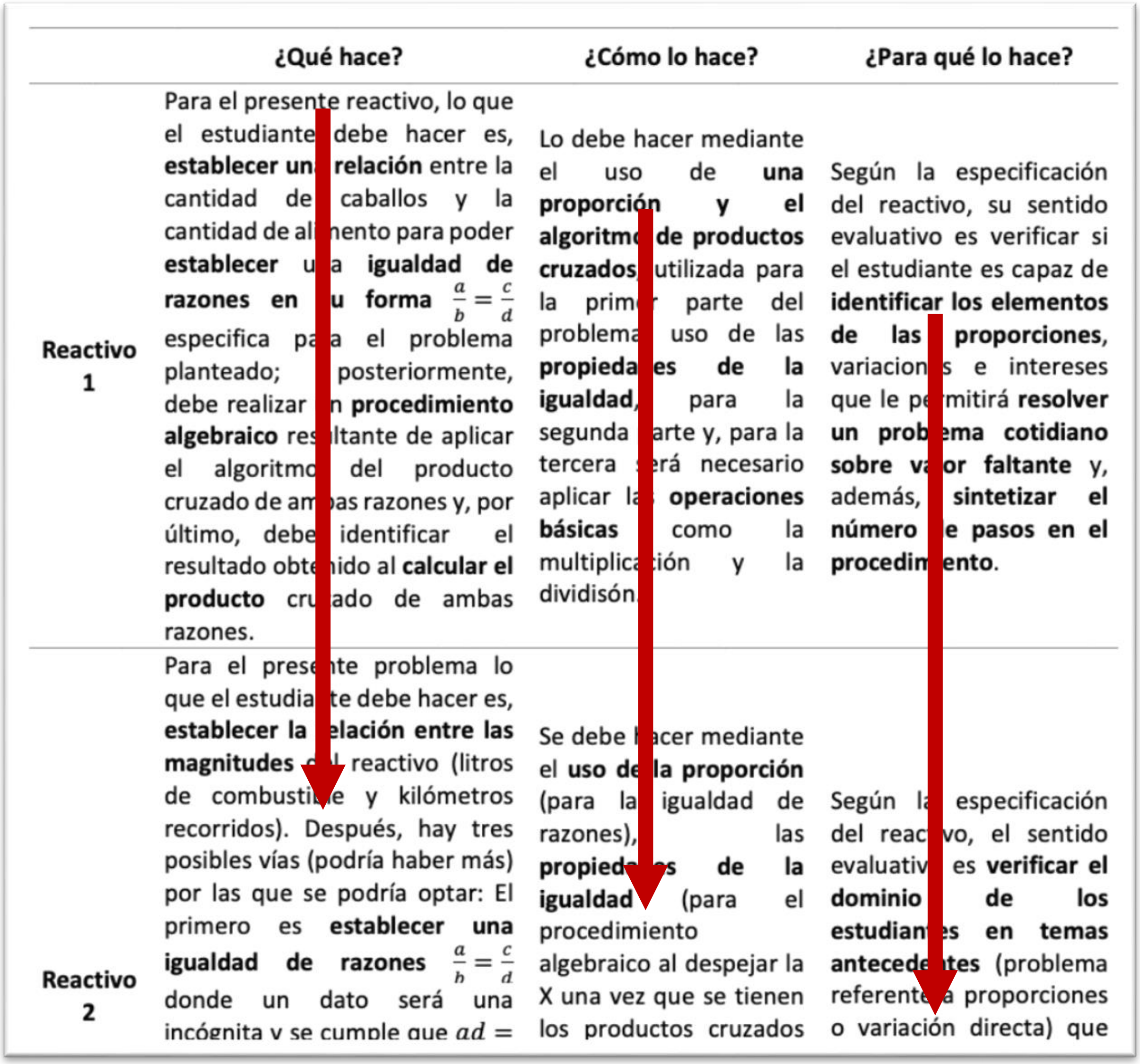
Aunque este es un criterio bastante general, se considera que, para lograr responder la segunda pregunta, lo que realizaremos será una búsqueda en bases de datos, buscadores y repositorios como lo son Google Scholar, Springer Link y Redalyc, partiremos del supuesto de que, si un error es considerado común dentro de la

Matemática Educativa, debería ser encontrado de manera *reiterada* mediante una búsqueda. Si en seis trabajos relativos a reportar problemas, dificultades o errores del contenido, no se reporta el error puesto en juego, será considerado no común.

Fase 3: análisis general de la fase 1 y 2 por subgrupos

Una vez que las dos fases anteriores hayan sido terminadas, los reactivos se agruparán según el subconjunto por el cual hayan sido seleccionados y se analizarán de manera general a cada uno de ellos. En el primero realizaremos una lectura vertical del análisis de la actividad matemática de cada uno de los reactivos y en el segundo, optaremos por una lectura horizontal acerca de la orientación psicométrica de los reactivos.

El análisis general para la primera fase consistirá en que una vez que se hayan realizado las cuatro preguntas que conforman el método de las acciones concretas, uniremos de manera vertical las tablas de cada uno de los subgrupos con la intención de recolectar la información de una manera que nos permita identificar las similitudes y diferencias entre cada uno de los ítems que lo conforman (ver *Ilustración* 6). Lo que nos interesará observar en esta sección es la intención que cada uno de los grupos de los reactivos tiene, cuáles son las rutas de resolución más usuales, así como las herramientas que más se ponen en juego.



	¿Qué hace?	¿Cómo lo hace?	¿Para qué lo hace?
Reactivo 1	Para el presente reactivo, lo que el estudiante debe hacer es, **establecer una relación** entre la cantidad de caballos y la cantidad de alimento para poder **establecer una igualdad de razones en su forma** $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ especifica para el problema planteado; posteriormente, debe realizar un **procedimiento algebraico** resultante de aplicar el algoritmo del producto cruzado de ambas razones y, por último, debe identificar el resultado obtenido al **calcular el producto cruzado de ambas razones**.	Lo debe hacer mediante el uso de **una proporción y el algoritmo de productos cruzados** utilizada para la primer parte del problema, uso de las **propiedades de la igualdad**, para la segunda parte y, para la tercera será necesario aplicar las **operaciones básicas** como la multiplicación y la dividisón.	Según la especificación del reactivo, su sentido evaluativo es verificar si el estudiante es capaz de **identificar los elementos de las proporciones**, variaciones e intereses que le permitirá **resolver un problema cotidiano sobre valor faltante** y, además, **sintetizar el número de pasos en el procedimiento**.
Reactivo 2	Para el presente problema lo que el estudiante debe hacer es, **establecer la relación entre las magnitudes** del reactivo (litros de combustible y kilómetros recorridos). Después, hay tres posibles vías (podría haber más) por las que se podría optar: El primero es **establecer una igualdad de razones** $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ donde un dato será una incógnita y se cumple que $ad =$	Se debe hacer mediante el **uso de la proporción** (para la igualdad de razones), las **propiedades de la igualdad** (para el procedimiento algebraico al despejar la X una vez que se tienen los productos cruzados	Según la especificación del reactivo, el sentido evaluativo es **verificar el dominio de los estudiantes en temas antecedentes** (problema referente a proporciones o variación directa) que

Ilustración 6: Análisis vertical de las acciones concretas.

De la misma forma, una vez terminado el análisis de los distractores de cada uno de los reactivos, las tablas individuales que conforman a cada uno de los subgrupos se unirán, lo que nos permitirá hacer una lectura horizontal del diseño de los distractores (ver *Ilustración 7*). En este apartado lo que nos interesará ver es qué tipo de reactivos podemos observar, es decir, nos preguntamos si hay reactivos donde sus opciones de respuesta no sean buenos según las directrices de su diseño o bien que las opciones de respuesta cumplan con sus directrices de diseñó, pero los errores puestos en juego no podrían ser considerados comunes desde lo reportado en la literatura.

		Reactivo 1			Reactivo 2		
		Distractor 1	Distractor 2	Distractor 3	Distractor 1	Distractor 2	Distractor 3
Análisis psicométrico	¿El distractor se encuentra estructurado de manera coherente respecto a las demás opciones de respuesta?	No	No	No	Sí	Sí	Sí
	¿El distractor es autónomo respecto a las demás opciones de respuesta?	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
	¿El distractor destaca sobre los demás en contenido, apariencia, estructura gramatical o en algún término que aporte información indebida?	No	Sí	No	No	No	No
	¿El distractor es descartable sin la necesidad de procedimientos matemáticos relacionados al reactivo?	No	Sí	No	No	No	No
	¿El distractor tiene sentido en el contexto del problema?	Sí	No	Sí	Sí	Sí	Sí
Análisis desde la Matemática Educativa	¿Cuál es la naturaleza del error puesta en juego?	Conceptual	Conceptual	Conceptual / Procedimental	Procedimental	Arbitrario	Arbitrario
	¿Es un error común respecto a lo reportado en la investigación?	Sí	Sí	Sí	Sí	No	No

Ilustración 7: Análisis horizontal de los distractores.

Capítulo 4: Resultados

4.1 Fases 1 y 2: resultados del análisis individual de los reactivos de cada subgrupo.

Proporcionalidad directa

Para precisar la noción matemática de proporcionalidad directa que tomaremos en cuenta para la selección de los reactivos, nos parece importante resaltar su relevancia dentro de la disciplina, al ser un tema que ha sido abordado por múltiples autores (Hart, 1988), (Adjiage y Pluvinage, 2007), (Piaget e Inhelder, 1977), entre muchos otros. No obstante, dado nuestro posicionamiento socioepistemológico, entenderemos por proporcionalidad directa lo que se establece en el estudio realizado en Reyes-Gasperini (2016b).

Por lo tanto, a partir de la problematización del saber matemático, que realizó dicha autora, estableció una unidad de análisis socioepistemológica que nos permite entender qué y cómo se desarrolla la proporcionalidad directa. En este punto, la noción de *medir* toma un papel importante pues, se entiende como "determinar por comparación una longitud –extensión, volumen o capacidad–, es decir, se compara una magnitud con un patrón de referencia" (Reyes-Gasperini, 2016b, p. 266). Cuando la comparación es determinada a través de procesos finitos la magnitud es conmensurable, sin embargo, cuando estas son inconmensurables se vuelve necesario establecer una nueva unidad de medida, siendo aquí donde las razones y proporciones aparecen.

Por tanto, lo proporcional será entendido como "la propiedad que caracteriza a una relación en la cual, para medir nuestra unidad de medida estará dada por una razón" (Reyes-Gasperini, 2016b, p. 266). Conforme a esto, la idea de que la relación proporcional existe cuando la razón es constante, refiere a que, en dicha relación, todos sus elementos pueden ser medidos a partir de la misma unidad de medida, es decir, la misma razón o conocida habitualmente como constante de proporcionalidad. De este modo, "la razón es una unidad de medida y lo proporcional es la característica de la relación de medición" (Reyes-Gasperni, 2016b, p. 267).

De este modo, Reyes-Gasperini (2016b) establece una anidación de prácticas, producto de la *problematización del saber matemático*, relativa a lo proporcional directo (*Ilustración #*).

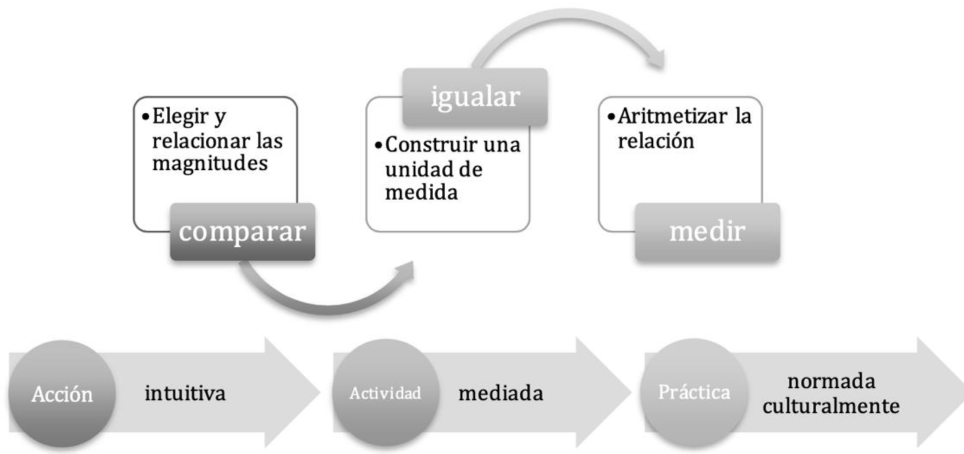


Ilustración 8: Anidación de prácticas, producto de la psm, relativo a lo proporcional directo (Reyes-Gasperini, 2016b).

En ella se parte de la relación como comparación entre magnitudes. Continuando después, con aquellos elementos que conservan esa misma relación mediante la igualdad de relaciones, para llegar a la construcción de una unidad de medida que aritmetice la relación y permita su medición, volviéndose así un concepto en sí mismo (Reyes, Gasperini, 2016b).

Por otro lado, al retomar los reactivos muestras de cinco pruebas estandarizadas entendemos que escolarmente la proporcionalidad directa se aborda mediante la resolución de problemas de cuarto valor faltante, donde es necesario aplicar el algoritmo de la regla de tres simple, por ello los ítems que seleccionamos fueron aquellos que presentaban una estructura que permitía el uso del algoritmo de la regla de tres, el encontrar el valor unitario dentro de la variación proporcional, o bien, una igualdad de razones $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, donde alguno de los números a, b, c o d es la incógnita del problema y es necesario encontrar ese cuarto valor faltante.

Subgrupo 1: reactivos que evalúan específicamente a la proporcionalidad directa

Reactivo 1

Datos de identificación del contenido a evaluar	
Curso:	Matemáticas I
Bloque:	Bloque 2: Utilizas magnitudes y número reales.
Tema:	2.2 Tasas, razones, proporciones y variaciones
Subtema:	2.2.1 Utiliza razones, tasas, proporciones y variaciones, modelos de variación proporcional directa e inversa.
Indicador de desempeño:	Utiliza razones, tasas, proporciones y variaciones, modelos de variación proporcional directa e inversa.
Comentario aclaratorio acerca del sentido evaluativo del contenido	
Es un contenido sintético que recibe un servicio de la traducción del lenguaje algebraico. Es un contenido esencial que le permite identificar los elementos de las proporciones, variaciones e intereses. Para evaluar este contenido se elaborarán dos especificaciones para cuatro ítems a nivel de comprensión; en la primera especificación se resolverán dos proporciones, la segunda para dos problemas cotidianos, uno de variación directa y otro de porcentajes.	
Especificación para la base del reactivo	Se presenta una situación (problema) sobre variación directa, relacionada con su entorno y se le pide que lo resuelva. El procedimiento de solución deberá presentarse con tres pasos como máximo. El texto tendrá las siguientes características: • Una extensión de diez a veinticinco palabras. • Se manejan valores numéricos hasta de tres dígitos. • Los números pueden ser enteros y decimales. • El procedimiento de solución se presenta con tres pasos como máximo.
Reactivo	
Los estudiantes de primer semestre tienen la oportunidad de visitar un rancho que se dedica a la cría de caballos finos. La maestra Ana, observando la motivación de los jóvenes, les hace la siguiente pregunta: ¿Cuántos Kg de alimento se necesitan para alimentar 15 caballos, si para alimentar 8 caballos se necesitan 74 Kg de alimento? Selecciona la opción que muestra el procedimiento correcto para resolver el problema planteado.	

Respuesta correcta	Distractor 1	Distractor 2	Distractor 3
$\frac{8}{74}=\frac{15}{x}$ $8x = 15(74)$ $x = 138.7$	$\frac{8}{74}=\frac{x}{15}$ $74x$ $= 15(8)$ $x = 162.2$	$\frac{15}{74}=\frac{8}{x}$ $15x$ $= 74(8)$ $x = 39.4$	$\frac{8}{74}=\frac{x}{15}$ $15x$ $= 74(8)$ $x = 394.1$

Tabla 1: Especificación y reactivo muestra del Reactivo 1:

- **Análisis de la actividad matemática**

Análisis de las acciones concretas del enunciado o pregunta del reactivo

¿Qué debe hacer?	Para el presente reactivo, lo que el estudiante debe hacer es establecer una relación entre la cantidad de caballos y la cantidad de alimento para identificar cuál es el planteamiento de la igualdad de razones en su forma $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, específica para el problema planteado; posteriormente, debe identificar el procedimiento algebraico resultante de aplicar el algoritmo del producto cruzado de ambas razones y, así, identificar el resultado obtenido al calcular el producto cruzado de ambas razones.
¿Cómo lo debe de hacer?	Lo debe hacer mediante el uso de una proporción y el algoritmo de productos cruzados, para la primera parte del problema; uso de las propiedades de la igualdad, para la segunda parte, y para la tercera será necesario aplicar las operaciones básicas como la multiplicación y la división.
¿Para qué lo debe hacer?	Según la especificación del reactivo, su sentido evaluativo es verificar si el estudiante es capaz de identificar los elementos de las proporciones, variaciones e intereses que le permitirán resolver un problema cotidiano sobre valor faltante y, además, reducirlo a un determinado número de pasos en el procedimiento.

Tabla 2: Análisis de las acciones concretas del Reactivo 1.

Para este reactivo lo que el estudiante debe realizar es resolver un problema relacionado con su entorno que ponga en juego a la variación directa, mediante la identificación de los elementos de las proporciones al seleccionar el procedimiento que lo lleve a la respuesta correcta.

El reactivo plantea un ejercicio de cuarto valor faltante donde el estudiante debe establecer una proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ para la relación que se muestra en la base del reactivo, la aplicación del algoritmo de productos cruzados, así como el uso de las propiedades de la igualdad y operaciones básicas para lograr encontrar el valor de la variable.

- **Análisis de los distractores**

		Distractor 1	**Distractor 2**	**Distractor 3**
Análisis psicométrico	4.2. ¿El distractor se encuentra estructurado de manera coherente respecto a las demás opciones de respuesta?	No	No	No
	4.2. ¿El distractor es autónomo respecto a las demás opciones de respuesta?	Sí	Sí	Sí
	4.2. ¿El distractor destaca sobre los demás en contenido, apariencia, estructura gramatical o en algún término que aporte información indebida?	No	Sí	No
	4.2. ¿El distractor es descartable sin la necesidad de procedimientos matemáticos relacionados al reactivo?	No	Sí	No
	4.2. ¿El distractor tiene sentido en el contexto del problema?	Sí	No	Sí
Análisis desde la Matemática Educativa	4.2. ¿Cuál es la naturaleza del error puesta en juego?	Conceptual	Conceptual	Conceptual Procedimental
	4.2. ¿Es un error común respecto a lo reportado en la investigación?	Sí	Sí	Sí

Tabla 3: Análisis de los distractores del Reactivo 1.

Respecto al análisis de los distractores del reactivo podemos observar, que los distractores 1 y 3 cumplen con cuatro de las cinco directrices psicométricas por lo que podría considerarse viable, ya que la primera directriz –que es la que no se cumple–, puede ser corregida de manera fácil al acomodar las opciones por resultado, apareciendo así de menor a mayor, es decir, primero el distractor 2, luego la respuesta correcta, seguido del distractor 1 y, por último, el distractor 3. Por el contrario, el distractor 2 no cumple con cuatro de las cinco directrices básicas, dado que la información que lo conforma lo vuelve descartable sin hacer procedimientos matemáticos, tanto en estructura como en contenido.

Si retomamos el problema que se plantea en la base del reactivo, se menciona que la maestra Ana pregunta la cantidad de alimento que se necesita para alimentar 15 caballos, si 8 caballos son alimentados con 74 kg de alimento, lo que significa que la cantidad de alimento que se esta buscando debe mayor a la ya proporcionada en el enunciado del problema y el resultado que se presenta en el distractor 3 muestra una cantidad menor a 74 kg, resultando inmediatamente inviable y fuera de contexto.

De igual forma, al prestar atención a los distractores 1 y 3, nos damos cuenta de que, la proporción planteada en ambas opciones de respuesta es la misma con la única diferencia de que el proceso algebraico que sigue a la proporción es incorrecto en el distractor 3, lo que podría originar que el estudiante les preste mayor atención al pensar que la respuesta correcta es una de ellas. No obstante, si un estudiante selecciona al distractor 1 como respuesta correcta significaría que tiene un entendimiento en el manejo de las propiedades de la igualdad para poder despejar a la variable, pero no es capaz de establecer una relación proporcional entre los valores propuestos en el problema.

Por otro lado, al observar los tres distractores, podemos inferir que se centran en el orden numérico que deben tener los valores proporcionados en el problema en la igualdad de razones, es decir, buscan verificar si el estudiante es capaz de establecer relaciones con los valores dados en el reactivo, lo que vuelve a los errores puestos en juego en cada uno de los distractores conceptuales, a excepción del distractor 3 que también presenta un error procedimental al desarrollar el problema de cuarto valor faltante.

Los errores puestos en juego en cada uno de los distractores son considerados dentro de la literatura de la Matemática Educativa como *errores comunes*, pues Aroza, Godino y Beltrán-Pellicer (2016), en el análisis de una intervención didáctica identificaron que en algunas de sus tareas planteadas entre los errores más comunes que cometían los estudiantes es el "no saber distinguir convenientemente del enunciado del problema las magnitudes que se relacionan, los datos que se presentan, el dato que se pide y las operaciones que hay que realizar" (s/n).

Por último, el hecho de que los tres distractores presenten un error conceptual nos indica que el reactivo se corresponde con su especificación de diseño, ya que lo que se pretende evaluar es si el estudiante es capaz de identificar todos los elementos de una proporción en una variación directa y si los estudiantes seleccionan cualquiera de los tres distractores podemos inferir que no son capaces de identificar esos elementos.

Reactivo 2

Datos de identificación del contenido a evaluar	
Curso:	Matemáticas V
Bloque:	Bloque 1: Enuncias, formulas y resuelves problemas de cantidad en una variedad de dominios y situaciones.
Tema:	Problemas de cantidad en una variedad de dominios y situaciones.
Subtema:	Resolución de problemas de operaciones y medidas cuantificables en una variedad de dominios y situaciones.
Indicador de desempeño:	• Usa estrategias simples de solución de problemas que incluyan el razonamiento en contextos de la vida cotidiana. • Usa habilidades de razonamiento en una variedad de contextos. • Interpreta diferentes representaciones (tablas, textos, diagramas) de una misma situación. • Usa diferentes habilidades de cálculo para la solución de problemas, incluyendo procesos secuenciales.
Comentario aclaratorio acerca del sentido evaluativo del contenido	
Es un contenido sintético al recibir tres servicios, se considera esencial porque demuestra el dominio de temas antecedentes que le permiten resolver adecuadamente problemas que implican razonamientos cuantificables. Para evaluar este contenido se elaborarán siete especificaciones para siete ítems a nivel de aplicación.	
Especificación para la base del reactivo	La base del cuarto reactivo es que el estudiante resuelva un problema que requiera calcular cantidades referentes a proporciones o variación directa. El enunciado del problema no debe elaborarse con más de tres renglones. El problema puede ser aplicado en cualquier ámbito escolar. Las posibles respuestas se deben presentar con dos dígitos después del punto.

Reactivo			
El automóvil de Jorge consume 12 L de gasolina en 132 km. Si en el tanque hay 5 L, ¿cuántos kilómetros puede recorrer su automóvil?			
Distractor 1	Distractor 2	Distractor 3	Respuesta correcta
26.4	45.83	50	55

Tabla 4: Especificaciones y reactivo muestra del Reactivo 2.

- **Análisis de los distractores**

Análisis de las acciones concretas del enunciado o pregunta del reactivo

¿Qué debe hacer?	Lo que el estudiante debe hacer para resolver el problema es, en primer lugar, comprender la relación entre las magnitudes del reactivo (litros de combustible y kilómetros recorridos). Después, hay tres posibles vías por las que se podría optar. El primero, es establecer una igualdad de razones de la forma $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ donde un dato será una incógnita y se cumple que $ad = bc$. Para obtener el valor desconocido de la igualdad, se deberá dividir el producto cruzado con dos valores conocidos entre el tercer valor conocido. El segundo es vincular los datos con el valor unitario. Calculando la cantidad de kilómetros que le corresponden a un solo litro de combustible, dividiendo 132 entre 12 y, posteriormente, multiplicándolo por 5. El tercero es aplicar directamente la regla de tres, donde el valor desconocido se encontrará al dividir el producto cruzado conocido entre el tercer valor conocido.
¿Cómo lo debe de hacer?	Se debe hacer mediante del uso de la proporción (para la igualdad de razones), las propiedades de la igualdad (para el procedimiento algebraico al despejar la *x* una vez que se tienen los productos cruzados $ad = bc$), las operaciones básicas como la multiplicación y la división, el algoritmo de la regla de tres.
¿Para qué lo debe hacer?	Según la especificación del reactivo, el sentido evaluativo es verificar el dominio de los estudiantes en temas antecedentes (problema referente a proporciones o variación directa) que les permitan resolver adecuadamente problemas que implican razonamientos cuantificables.

Tabla 5: Análisis de las acciones concretas del reactivo 2.

Para el presente reactivo hay tres vías por las que el estudiante podría optar para encontrar la respuesta correcta. La primera es aplicar una igualdad de razones $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, donde uno de los cuatro valores será una incógnita. La segunda es vincular los datos con su valor unitario, es decir, calcular cuántos kilómetros se pueden recorrer con un litro de combustible y, por último, es aplicar directamente el algoritmo de la regla de tres.

Entre las herramientas que se necesitarán para resolver el problema, a partir de las posibles vías de resolución, se encuentran: el algoritmo de productos cruzados, el uso de las propiedades de la igualdad para despejar a la variable, operaciones básicas –multiplicación y división–, y el algoritmo de la regla de tres.

El reactivo se encuentra ubicado en el quinto semestre, por lo que su intención evaluativa es verificar el dominio de los estudiantes en problemas que impliquen aplicar un razonamiento cuantificable, en este caso, por medio de un problema que implique el uso de la proporcionalidad directa.

- **Análisis de los distractores**

		Distractor 1	**Distractor 2**	**Distractor 3**
Análisis psicométrico	¿El distractor se encuentra estructurado de manera coherente respecto a las demás opciones de respuesta?	Sí	Sí	Sí
	¿El distractor es autónomo respecto a las demás opciones de respuesta?	Sí	Sí	Sí
	¿El distractor destaca sobre los demás en contenido, apariencia, estructura gramatical o en algún término que aporte información indebida?	No	No	No
	¿El distractor es descartable sin la necesidad de procedimientos matemáticos relacionados al reactivo?	No	No	No
	¿El distractor tiene sentido en el contexto del problema?	Sí	Sí	Sí
Análisis desde la Matemática Educativa	¿Cuál es la naturaleza del error puesta en juego?	Procedimental	Arbitrario	Arbitrario
	¿Es un error común respecto a lo reportado en la investigación?	Sí	No	No

Tabla 6: Análisis de los distractores del Reactivo 2.

Respecto a los distractores del reactivo, podemos observar que psicométricamente los tres son considerados viables. Todos presentan un mecanismo de ordenamiento en el que aparecen de menor a mayor, no se solapan las unas a las otras y presentan respuestas que podrían considerarse errores plausibles, es decir, no resaltan en contenido ni pueden ser descartables sin la necesidad de procedimientos matemáticos.

No obstante, a pesar de poder ser considerados viables desde las directrices psicométricas, los errores puestos en juego en los distractores no brindan mucha información acerca del por qué se encuentran siendo parte de las opciones de respuesta, pues los distractores 1 y 3 fueron considerado arbitrarios y el distractor 1 procedimental.

Los distractores 2 y 3 fueron denominados errores arbitrarios, dado que, no logramos identificar una manera en la que se pudiera llegar a los valores representados en cada una de esas opciones de respuesta. Y, por otro lado, el distractor 1 fue considerado procedimental, pues una manera en que un estudiante podría llegar a esa respuesta es que el sea capaz de distinguir las magnitudes que se relacionan para poder establecer una proporción o una la regla de tres. Sin embargo, el procedimiento que tuvo que haber desarrollado para encontrar el cuarto valor faltante quedó inconcluso, pues si se divide 132 km entre 5 L se obtiene 26.4. El procedimiento realizado es correcto, no obstante, no se dividió entre 12 al final.

Al hacer una búsqueda en la literatura dentro de la Matemática Educativa acerca de los errores puestos en juego en cada uno de los distractores, el error del distractor 1 podría relacionarse con lo que Mochón (2012) menciona acerca de que los estudiantes no siempre realizan a las operaciones correctas o cometen un error al realizar las operaciones –multiplicación y división–. Por otro lado, ya que no encontramos una manera en la que se pudiera llegar a la respuesta planteada en los distractores 2 y 3, y esto impidió saber si ha sido reportado en la literatura un error que nos lleve a encontrar esos resultados, no podemos inferir si se trata de un error conceptual o procedimental.

Dado lo anterior, podemos observar que el reactivo evalúa lo que dice evaluar, pues si se contesta correctamente estaría aplicando un razonamiento cuantificable, desde el punto de vista psicométrico, cumple con todas las directrices. No obstante, desde la matemática educativa no podemos asegurar el poder brindar información acerca de los errores cometidos por los estudiantes, dado que no se encontró una manera plausible de llegar a las respuestas propuestas por los diseñadores.

Reactivo 3

Datos de identificación del contenido a evaluar	
Curso:	Matemáticas I
Bloque:	Bloque II: Utilizas magnitudes y número reales.
Tema:	Tazas, razones, proporciones y variaciones.
Subtema:	Utiliza razones, tazas, proporciones y variaciones, modelos de variación proporcional directa e inversa.
Indicador de desempeño:	Utiliza razones, tazas, proporciones y variaciones, modelos de variación proporcional directa e inversa.
Comentario aclaratorio acerca del sentido evaluativo del contenido	
Es un contenido sintético que recibe un servicio de la traducción del lenguaje algebraico. Es un contenido esencial que le permite identificar los elementos de las proporciones, variaciones e intereses. Para evaluar este contenido se elaborarán dos especificaciones para cuatro ítems a nivel de comprensión; en la primera se resolverán dos proporciones, la segunda para dos problemas cotidianos, uno de variación directa y otro de porcentajes.	
Especificación para la base del reactivo	La base del reactivo presentará una proporción con la incógnita o variable en cualquiera de sus numeradores. Se utilizarán números enteros en numerador y denominador, el procedimiento se presentará como máximo en dos pasos.
Reactivo	

En un salón de clases se le sugiere al estudiante resuelva la siguiente proporción.

$$\frac{x}{13} = \frac{4}{12}$$

Elige la opción correcta para hallar el valor de la variable "X" indicada:

Distractor 1	Distractor 2	Distractor 3	Respuesta correcta
$12x = 52$ $x = \frac{12}{52}$	$12x = 52$ $x = (52)(12)$	$12x = 52$ $x = 52 - 12$	$12x = 52$ $x = \frac{52}{12}$

Tabla 7: Especificación y reactivo muestra del Reactivo 3.

- **Análisis de la actividad matemática**

Análisis de las acciones concretas del enunciado o pregunta del reactivo	
¿Qué debe hacer?	Para contestar correctamente al reactivo planteado, el estudiante debe, identificar los productos cruzados en la igualdad de razones ya proporcionada por el ejercicio (el producto que contiene dos valores conocidos y aquel que contiene una incógnita), dado que, al tener una igualdad de razones $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, se cumple que $ab = cd$, donde uno de los numeradores es una incógnita. Posteriormente, debe aplicar un procedimiento algebraico una vez establecidos los productos cruzados ad=bc para el despeje de la variable X; en este caso, el producto cruzado conocido pasará a ser dividido por el tercer valor conocido.
¿Cómo lo debe de hacer?	Empleando herramientas como el algoritmo de productos cruzados, las propiedades de la igualdad de razones y operaciones básicas como la multiplicación y la división.
¿Para qué lo debe hacer?	El reactivo tiene la intención de verificar si el estudiante es capaz de identificar los elementos de las proporciones, variaciones e intereses que le permitirán resolver ejercicios de valor faltante en uno de los numeradores.

Tabla 8: Análisis de las acciones concretas del Reactivo 8.

Para el presente reactivo, de cuarto valor faltante, lo que el estudiante debe hacer es aplicar el algoritmo de productos cruzados a la igualdad de razones ya proporcionada. Una vez que se obtiene $ad = cb$, se utilizan las propiedades de la igualdad y las operaciones básicas –multiplicación y división– para despejar y encontrar el valor de la incógnita.

Lo anterior se realiza con la intención de verificar si el estudiante es capaz de identificar los elementos de una proporción, en este caso centrándose en la parte procedimental de encontrar el cuarto valor faltante.

- **Análisis de los distractores**

		Distractor 1	Distractor 2	Distractor 3
Análisis psicométrico	¿El distractor se encuentra estructurado de manera coherente respecto a las demás opciones de respuesta?	No aplica	No aplica	No aplica
	¿El distractor es autónomo respecto a las demás opciones de respuesta?	Sí	Sí	Sí
	¿El distractor destaca sobre los demás en contenido, apariencia, estructura gramatical o en algún término que aporte información indebida?	No	No	No
	¿El distractor es descartable sin la necesidad de procedimientos matemáticos relacionados al reactivo?	No	No	No
	¿El distractor tiene sentido en el contexto del problema?	Sí	Sí	Sí
Análisis desde la Matemática Educativa	¿Cuál es la naturaleza del error puesta en juego?	Procedimental	Procedimental	Procedimental
	¿Es un error común respecto a lo reportado en la investigación?	Sí	Sí	Sí

Tabla 9: Análisis de los distractores del Reactivo 3.

Al observar los distractores que conforman al presente reactivo podemos observar que los tres son psicométricamente viables, dado que, a excepción de la primera directriz –que no se cumple ya que las opciones de respuesta no presentan una variable que se pueda ordenar– cumplen con el resto de ellas.

Acerca de los errores puestos en juego en cada uno de los distractores, podemos darnos cuenta de que se centran en aquellos que son procedimentales. Lo cual se puede confirmar al observar que el reactivo ya proporciona la igualdad de razones, así como el primer paso que deben seguir los estudiantes, que es el establecer los dos productos cruzados. Lo anterior nos indica que lo que se busca es verificar si el alumno es capaz de despejar la incógnita y encontrar el cuarto valor faltante, lo cual, como lo reportan Aroza, Godino y Beltrán-Pellicer (2016), es un error que los estudiantes pueden llegar a cometer al trabajar el tema de proporcionalidad directa.

Al retomar las dos tablas anteriores podemos comprobar que el reactivo cumple con todas las directrices psicométricas para su diseño y, que todos los errores puestos en juego se encuentran reportados dentro de la literatura referente a la Matemática Educativa. No obstante, no podemos asegurar que el ítem se corresponde con la especificación para su diseño, ya que este comparte la misma especificación que los reactivos 1, 4 y 6. En ella se establece que se busca evaluar si un estudiante es capaz de identificar los elementos que componen a una proporción por medio de cuatro reactivos –dos ejercicios de proporciones, un problema sobre proporcionalidad directa y otro problema sobre porcentajes–, siendo este uno de los ejercicios de proporciones y, dado que se centra en la parte procedimental del ejercicio, al proporcionar la proporción y parte del procedimiento correcto, no permite que el estudiante pueda identificar los elementos que conforman a la proporción, puesto que, ya se la están proporcionando.

Reactivo 4

Datos de identificación del contenido a evaluar	
Curso:	Matemáticas I
Bloque:	Bloque II; Utilizas magnitudes y número reales.
Tema:	Tazas, razones, proporciones y variaciones.
Subtema:	Utiliza razones, tazas, proporciones y variaciones, modelos de variación proporcional directa e inversa.
Indicador de desempeño:	Utiliza razones, tazas, proporciones y variaciones, modelos de variación proporcional directa e inversa.
Comentario aclaratorio acerca del sentido evaluativo del contenido	
Es un contenido sintético que recibe un servicio de la traducción del lenguaje algebraico. Es un contenido esencial que le permite identificar los elementos de las proporciones, variaciones e intereses. Para evaluar este contenido se elaborarán dos especificaciones para cuatro ítems a nivel de comprensión; en la primera se resolverán dos proporciones, la segunda para dos problemas cotidianos, uno de variación directa y otro de porcentajes.	
Especificación para la base del reactivo	La base del reactivo presentará una proporción con la incógnita o variable en cualquiera de sus denominadores. Se utilizarán números enteros y decimales en numerador y/o denominador, el resultado se presentará en número entero o decimal.
Reactivo	
Elige la opción correcta para hallar el valor de la variable indicada en la proporción: $$\frac{3}{4}=\frac{1.5}{x}$$	

Distractor 1	Distractor 2	Respuesta correcta	Distractor 3
1.12	0.5	2	0.8

Tabla 10: Especificación y reactivo muestra del Reactivo 4.

- **Análisis de la actividad matemática**

Análisis de las acciones concretas del enunciado o pregunta del reactivo

¿Qué debe hacer?	Para contestar correctamente al reactivo planteado, el estudiante debe, plantear los productos cruzados en la igualdad de razones ya proporcionada por el ejercicio (el producto que contiene dos valores conocidos y aquel que contiene una incógnita), dado que, al tener una igualdad de razones $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, se cumple que $ab = cd$, donde uno de los denominadores es una incógnita. Posteriormente, se debe identificar el procedimiento algebraico que debe aplicarse una vez establecidos los productos cruzados para despejar X; en este caso, el producto cruzado conocido pasará a ser dividido por el tercer valor conocido. Y, por último, debe calcular el valor resultante de la división.
¿Cómo lo debe de hacer?	Mediante el uso de herramientas como el algoritmo de la regla de tres, uso de las propiedades de la igualdad para despejar *x* y operaciones básicas como la multiplicación y la división.
¿Para qué lo debe hacer?	El reactivo tiene la intención de verificar si el estudiante es capaz de identificar los elementos de las proporciones, variaciones e intereses que le permitirán resolver ejercicios de valor faltante en uno de los denominadores.

Tabla 11: Análisis de las acciones concretas del reactivo 4.

Para el presente reactivo, el cuarto valor faltante, lo que el estudiante debe hacer es, dado que ya se le proporciona una igualdad de razones, aplicar el algoritmo de productos cruzados y, posteriormente, haciendo uso de las propiedades de la igualdad y operaciones básicas –multiplicación y división–, despejar y encontrar el valor de la incógnita.

Lo anterior se realiza con la intención de verificar si el estudiante es capaz de identificar los elementos de una proporción, y dado que, ya se proporciona una igualdad de razones podemos inferir que los errores puestos en juego se centraran en la parte procedimental del ejercicio.

- **Análisis de los distractores**

		Distractor 1	Distractor 2	Distractor 3
Análisis psicométrico	¿El distractor se encuentra estructurado de manera coherente respecto a las demás opciones de respuesta?	No	No	No
	¿El distractor es autónomo respecto a las demás opciones de respuesta?	Sí	Sí	Sí
	¿El distractor destaca sobre los demás en contenido, apariencia, estructura gramatical o en algún término que aporte información indebida?	No	No	No
	¿El distractor es descartable sin la necesidad de procedimientos matemáticos relacionados al reactivo?	No	No	No
	¿El distractor tiene sentido en el contexto del problema?	Sí	Sí	Sí
Análisis desde la Matemática Educativa	¿Cuál es la naturaleza del error puesta en juego?	Procedimental	Procedimental	Arbitrario
	¿Es un error común respecto a lo reportado en la investigación?	Sí	Sí	No

Tabla 12: Análisis de los distractores del Reactivo 4.

Respecto a los distractores del reactivo, podemos observar que pueden ser considerados psicométricamente viables los tres, a pesar de que no cumplen con una de las cinco directrices del análisis, la cual hace referencia a que las opciones de respuesta no se presentan en un mecanismo de ordenamiento de menor a mayor o viceversa. Sin embargo, es algo que puede ser corregido fácilmente.

Acerca de los errores que se ponen en juego en cada uno de los distractores, se dividen en dos tipos. En los distractores 1 y 2, el error puesto en juego es procedimental y, en el distractor 3, el error es arbitrario.

Una de las maneras en que se podría obtener el resultado del distractor 1, y considerarlo un error procedimental, es resolver la igualdad de razones como si se tratara de una multiplicación de fracciones obteniendo lo que se considerarían para este caso los productos cruzados $4x = (3)(15)$ y desarrollando un despeje de la incógnita correcto. Dicho error podría ser considerado como un *error común* dado lo reportado por Aroza, Godino y Beltrán-Pellicer (2016) y Mochón (2012) dentro de la categoría del uso indebido de las operaciones o, bien, que no se aplicaron de la forma correcta, ya que el procedimiento aplicado no lleva a la resolución del problema.

De igual forma, una de las maneras en que se podría obtener el resultado del distractor 2 es restar los valores de la primera razón – en este caso al 3 se le resta 4– y, posteriormente, al resultado de la resta se le suma el valor conocido de la segunda razón que es 1.5. Para este caso en particular, no se encontró reportado en la literatura dentro de la Matemática Educativa que los estudiantes cometieran específicamente este tipo de error.

Por otro lado, dado el planteamiento de la base del reactivo que ya proporciona la igualdad de razones, el distractor 3 debería poner un error procedimental. No obstante, no se encontró una manera en la que se pudiera llegar a la respuesta que se plantea en él, por ello lo consideramos un error arbitrario; el cual se relaciona con el tipo de error reportado por Misailidou y Williams (2002), el cual se relaciona con el uso de operaciones aleatorias no específicas, pues los procedimientos para llegar a la respuesta correcta no tienen lógica alguna.

Retomando las dos tablas anteriores, podemos comprobar que el reactivo cumple con casi todas las especificaciones psicométricas y, a excepción del distractor 3, los errores puestos en juego se encuentran reportados dentro de la investigación. Sin embargo, no podemos asegurar que cumpla con su sentido evaluativo. Su especificación establece que busca evaluar si un estudiante es capaz de identificar los elementos de la proporción, pero el problema ya la proporciona, centrando así, su atención en lo procedimental y no en el establecimiento de una relación.

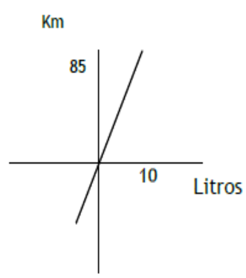
Reactivo 5

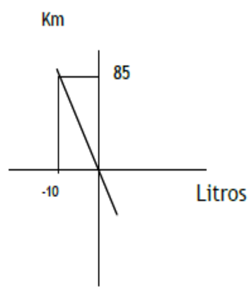
Datos de identificación del contenido a evaluar	
Curso:	Matemáticas V
Bloque:	Bloque III: Enuncias, formulas y resuelves problemas de cambio y relaciones, y probabilidad, en una variedad de dominios y situaciones.
Tema:	Problemas de cambios y relaciones en una variedad de dominios y situaciones.
Subtema:	Resolución de problemas de funciones lineales, cuadráticas, exponenciales, logarítmicas y periódicas.
Indicador de desempeño:	• Entiende, trabaja y resuelve problemas prácticos con representaciones múltiples, incluyendo modelos matemáticos explícitos de situaciones del mundo real. • Tiene flexibilidad en la interpretación y razonamiento en contextos familiares. • Comunica las explicaciones y argumentaciones resultantes. • Usa conceptos básicos de estadística y probabilidad combinados con razonamiento numérico en contextos menos familiares para la solución de problemas simples. • Usa y comunica argumentos basados en la interpretación de datos.

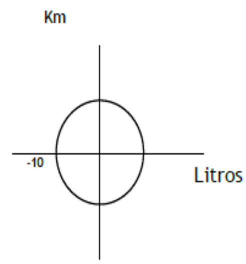
Comentario aclaratorio acerca del sentido evaluativo del contenido	
Contenido sintético, recibe tres servicios. Se considera esencial pues permite al alumno comprender el comportamiento gráfico de las funciones lineales, cuadráticas, exponenciales, logarítmicas y periódicas, así como la aplicación de las funciones en situaciones de la vida cotidiana. Para evaluar este contenido se elaborará una especificación para dos ítems a nivel de aplicación.	
Especificación para la base del reactivo	La base del primer reactivo atenderá a solicitar la identificación gráfica de la solución de un problema que genere una función lineal o cuadrática a partir de una tabla o su ecuación. El reactivo presentará cuatro graficas donde se indique en una de ellas la solución del problema.
Reactivo	
Un auto compacto usa gasolina que cuesta \$8.5 por litro, cada litro da un rendimiento de 10 kilómetros. De acuerdo con la siguiente tabla que representa la relación entre costo y rendimiento por litro, selecciona la gráfica que representa la solución del problema para el costo en un viaje de 100 kilómetros.	

Costo ($)	8.5	85	425	850
Kilómetros	1	10	50	100

Supuesta respuesta correcta	Distractor 1	Distractor 2	Distractor 3







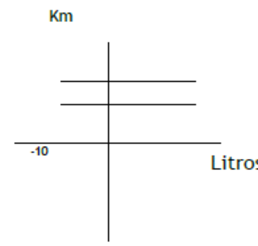


Tabla 13: Especificación y reactivo muestra del Reactivo 5.

- **Análisis de la actividad matemática**

Análisis de las acciones concretas del enunciado o pregunta del reactivo

¿Qué debe hacer?	Para resolver el reactivo el estudiante, primeramente, debe comprender la relación que existe entre el costo del combustible y su rendimiento por litro. Posteriormente, debe relacionar la representación de la variación proporcional en la tabla con su representación gráfica.
¿Cómo lo debe de hacer?	Empleando el uso de herramientas como la función lineal, el plano cartesiano y puntos coordenados.
¿Para qué lo debe hacer?	Según la especificación del reactivo, el sentido evaluativo del reactivo es verificar si el alumno es capaz de identificar la gráfica que le da solución a un problema que genere una función lineal a partir de que se les proporciona datos en una tabla, demostrando así que comprende el comportamiento gráfico de una función lineal.

Tabla 14: Análisis de las acciones concretas del Reactivo 5.

Para el presente reactivo, lo que el estudiante debe hacer es relacionar la representación tabular de la variación proporcional con su representación gráfica, mediante el uso de nociones como función lineal, pendiente, el plano cartesiano y la ubicación de un punto coordenado. Con la intención de verificar si un estudiante es capaz de identificar la representación gráfica que le dé solución a un problema que genera una función lineal, a partir de proporcionar la información en una tabla.

- **Análisis de los distractores**

		Distractor 1	Distractor 2	Distractor 3
Análisis psicométrico	¿El distractor se encuentra estructurado de manera coherente respecto a las demás opciones de respuesta?	No aplica	No aplica	No aplica
	¿El distractor es autónomo respecto a las demás opciones de respuesta?	Sí	Sí	Sí
	¿El distractor destaca sobre los demás en contenido, apariencia, estructura gramatical o en algún término que aporte información indebida?	No	Sí	Sí
	¿El distractor es descartable sin la necesidad de procedimientos matemáticos relacionados al reactivo?	No	Sí	Sí
	¿El distractor tiene sentido en el contexto del problema?	Sí	No	No
Análisis desde la Matemática Educativa	¿Cuál es la naturaleza del error puesta en juego?	Procedimental	Arbitrario	Arbitrario
	¿Es un error común respecto a lo reportado en la investigación?	No	No	No

Tabla 15: Análisis de los distractores del Reactivo 5.

Respecto a las opciones de respuesta, es importante señalar que tomando en cuenta su diseño y el contexto del problema, podemos decir que no se cuenta con una respuesta correcta. Esto se debe a que el problema plantea que un automóvil usa combustible que cuesta $8.5 pesos el litro y tiene un rendimiento de 10 km, por lo tanto, si nos planteamos que el tanque de combustible se queda vacío este no puede representarse por medio de valores negativos, lo que significa que la representación gráfica del fenómeno solo puede ser representado por el punto coordenado (0, 0) y los valores que se encuentren en el cuadrante 1 del plano cartesiano. Por lo que, la supuesta respuesta correcta que se espera se seleccione, no representa el fenómeno planteado en el ítem.

Además, en la tabla se observa que la relación que se hace es entre el costo del combustible y los kilómetros que el automóvil puede recorrer con ese combustible y en las representaciones gráficas de las opciones de respuesta se puede ver que la relación que se hace es entre la cantidad de litros y los kilómetros recorridos. De igual forma, si mantenemos que los kilómetros recorridos se encuentren representados en el eje de las ordenadas, el valor que debe encontrarse ahí son 10 km., y no los 85 que se puede observar.

En cuanto a los distractores del reactivo, sólo el distractor 1 podría ser considerado psicométricamente viable pues, consideramos que cumple con las directrices básicas de diseño. Sin embargo, no encontramos reportado qué tan común es que un estudiante confunda la inclinación que debe tener una función lineal positiva.

Por otro lado, los distractores 2 y 3 no son calificables como viables, dado que, consideramos que los errores puestos en juego en cada uno de ellos resaltan en contenido y podrían ser descartados de manera sencilla por los estudiantes, tomando en consideración que al tener una representación tabular de los datos se podrían tomar como guía para graficar puntos coordenados. De igual forma, no encontramos reportado dentro de la Matemática Educativa que los estudiantes con frecuencia confunden la representación gráfica de una función lineal con la representación gráfica de una circunferencia o una función constante.

Por lo anterior, podemos inferir que el sentido evaluativo del reactivo no se cumple, al tener dos opciones de respuesta que pierden su característica de distracción al ser descartables de manera sencilla.

Reactivo 6

Datos de identificación del contenido a evaluar	
Curso:	Matemáticas I
Bloque:	Bloque 2: Utilizas magnitudes y números reales.
Tema:	Tasas, razones, proporciones y variaciones
Subtema:	Utiliza razones, tasas, proporciones y variaciones, modelos de variación proporcional directa e inversa.
Indicador de desempeño:	Utiliza razones, tasas, proporciones y variaciones, modelos de variación proporcional directa e inversa.
Comentario aclaratorio acerca del sentido evaluativo del contenido	
Es un contenido sintético que recibe un servicio de la traducción del lenguaje algebraico. Es un contenido esencial que le permite identificar los elementos de las proporciones, variaciones e intereses. Para evaluar este contenido se elaborarán dos especificaciones para cuatro ítems a nivel de comprensión; en la primera especificación se resolverán dos proporciones, la segunda para dos problemas cotidianos, uno de variación directa y otro de porcentajes.	
Especificación para la base del reactivo	Se presenta un texto corto y sencillo, para calcular el porcentaje de una cantidad, utilizando razones y proporciones en situaciones de su entorno. • Una extensión de diez a veinticinco palabras. • Se manejan valores numéricos hasta de tres dígitos. • Los números pueden ser enteros y decimales. • El procedimiento de solución se presenta con tres pasos como máximo.
Reactivo	
En el grupo 101 del Cobach, el 30% de los alumnos reprobó el examen final de matemáticas. Si el grupo está compuesto por 50 alumnos, ¿qué cantidad representa a los alumnos reprobados?	

Respuesta correcta	Distractor 1	Distractor 2	Distractor 3
$\frac{50}{100}=\frac{x}{30}$ $x=15$	$\frac{50}{100}=\frac{x}{40}$ $x=35$	$\frac{50}{100}=\frac{30}{x}$ $x=6$	$\frac{50}{70}=\frac{100}{x}$ $x=14$

Tabla 16: Especificación y reactivo muestra del Reactivo 6.

- **Análisis de la actividad matemática**

Análisis de las acciones concretas del enunciado o pregunta del reactivo

¿Qué debe hacer?	Para contestar correctamente el reactivo, el estudiante debe establecer una igualdad de razones y ubicar el valor desconocido. Posteriormente, debe identificar el producto cruzado con dos valores conocidos y un segundo producto cruzado con una incógnita y así, realizar el procedimiento algebraico que hay que aplicar una vez identificados los dos productos cruzados para despejar la incógnita y, por último, debe calcular el valor resultante.
¿Cómo lo debe de hacer?	Mediante el uso de herramientas como el algoritmo de la regla de tres, las propiedades de la igualdad, una vez que se establezcan los productos cruzados para despejar la *x*, y las reglas básicas como la multiplicación y la división.
¿Para qué lo debe hacer?	Según la especificación del reactivo, su sentido evaluativo es verificar si el estudiante es capaz de identificar los elementos de las proporciones, variaciones e intereses que le permitirá resolver un problema cotidiano sobre valor faltante.

Tabla 17: Análisis de las acciones concretas del Reactivo 6.

Para el presente reactivo lo que el estudiante debe de hacer es establecer una relación entre la cantidad de alumnos reprobados y el total de estudiantes evaluados en un problema de cuarto valor faltante y plantear una igualdad de razones que le permita aplicar el algoritmo de productos cruzados y aplicar las propiedades de la igualdad para poder despejar la incógnita que dé solución al problema.

Dado que este ítem comparte especificación con los reactivos 1, 3 y 6, su intención evaluativa es verificar si el estudiante es capaz de identificar los elementos de las proporciones que le van a permitir resolver un problema cotidiano.

- **Análisis de los distractores**

		Distractor 1	Distractor 2	Distractor 3
Análisis psicométrico	¿El distractor se encuentra organizado de manera coherente respecto a las demás opciones de respuesta?	No	No	No
	¿El distractor es autónomo respecto a las demás opciones de respuesta?	Sí	Sí	Sí
	¿El distractor destaca sobre los demás en contenido, apariencia, estructura gramatical o en algún término que aporte información indebida?	Sí	No	No
	¿El distractor es descartable sin la necesidad de procedimientos matemáticos relacionados al reactivo?	Sí	No	Sí
	¿El distractor tiene sentido en el contexto del problema?	No	Sí	Sí
Análisis desde la Matemática Educativa	¿Cuál es la naturaleza del error puesta en juego?	Conceptual Arbitrario	Conceptual Procedimental	Conceptual
	¿Es un error común respecto a lo reportado en la investigación?	Sí	Sí	Sí

Tabla 18: Análisis de los distractores del Reactivo 6.

Respecto a los distractores del reactivo, podemos observar que el distractor 1 no podría ser considerado viable, dado que no se encuentra estructurado de manera coherente respecto a las demás opciones de respuesta y resalta en contenido al contener en la igualdad de razones el número 40, siendo que en el problema en ningún momento se menciona dicha cantidad. Lo anterior lo vuelve descartable, pues un estudiante podría darse cuenta de que ese número no tiene relación con los proporcionados en el contexto del reactivo. Además, el resultado que propone no coincide con lo planteado en el problema, en el cual se pide encontrar la cantidad de estudiantes que representa el 30%, pues 35 estudiantes representan más del 50%. Este es entonces un error conceptual-arbitrario, ya que el seleccionarlo significa que el estudiante no fue capaz de establecer una relación entre los valores proporcionados, además de que no se sabe de donde surgió el número 40.

El distractor 2 podría ser considerado psicométricamente viable, pues de las cinco directrices cumple con cuatro, siendo la primera sencilla de corregir. Se considera un error conceptual, por el hecho de que la igualdad de razones que se plantea es errónea, lo que significaría que el estudiante no fue capaz de relacionar los valores dados en el problema según lo establecido en las respuestas, y procedimental, pues el resultado de la variable que se plantea es 6 alumnos reprobados cuando deberían de ser 60 alumnos reprobados.

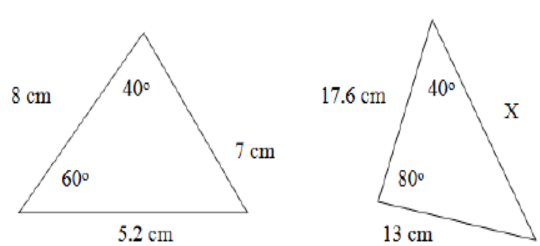
El distractor 3 es considerado un error conceptual, dado que lo que plantea encontrar es la cantidad de estudiantes aprobados y no los reprobados como se especifica en el reactivo. Sin embargo, a pesar de presentar un error que podría ser considerado *común*, dado lo que reporta Maz y Gutiérrez (2008), no podría ser considerado psicométricamente viable a pesar de cumplir con la mayoría de las directrices, pues podría ser descartado sin la necesidad de procedimientos matemáticos al poner en juego el número 70.

Por lo anterior, consideramos que los errores puestos en juego en cada uno de los distractores aportan son ideales para cumplir con el sentido evaluativo del reactivo, no obstante, dado el contexto en el que se plantea el problema, los distractores se vuelven descartables perdiendo así su validez.

Subgrupo 2: reactivos relacionados al uso de la proporcionalidad directa

Reactivo 7

<table>
<tr><th colspan="4">Datos de identificación del contenido a evaluar</th></tr>
<tr><td colspan="2">Curso:</td><td colspan="2">Matemáticas II</td></tr>
<tr><td colspan="2">Bloque:</td><td colspan="2">Bloque III: Resuelve problemas de semejanza de triángulos y teorema de Pitágoras.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tema:</td><td colspan="2">Criterios de semejanza.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Subtema:</td><td colspan="2">Criterios de semejanza - aplicación de los criterios de semejanza.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Indicador de desempeño:</td><td colspan="2">Aplica los criterios de semejanza de triángulos para la resolución de problemas.</td></tr>
<tr><th colspan="4">Comentario aclaratorio acerca del sentido evaluativo del contenido</th></tr>
<tr><td colspan="4">Es un contenido sintético por dar un servicio y recibir dos. Es esencial porque permite al alumno aplicar los criterios de semejanza en el teorema de Tales y en la resolución de problemas de su realidad inmediata. Se elaborará una especificación para un ítem a nivel de análisis. La especificación atenderá a que el estudiante identifique el procedimiento correcto para obtener la solución de un problema sencillo de semejanza de triángulos.</td></tr>
<tr><td>Especificación para la base del reactivo</td><td colspan="3">La base del reactivo presentará un problema escribiendo el enunciado en un lenguaje sencillo y claro, y un gráfico que lo represente, en el cual se describa una situación real, de preferencia de su entorno y se puedan identificar dos pares de datos/elementos correspondientes en dos triángulos semejantes, tres de ellos valores conocidos y una incógnita, con el objeto de que el alumno identifique el procedimiento que de la solución a uno de los lados faltantes del triángulo, aplicando los criterios de semejanza.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Reactivo</td></tr>
<tr><td colspan="4">Luis y su hijo hacen triángulos proporcionales a su edad. Como los dos conocen los criterios de semejanza, cada uno solo midió dos lados y dos ángulos para terminar sus triángulos. Si los dos triángulos son semejantes, encuentra el valor de X en la siguiente figura:


</td></tr>
<tr><td>Distractor 1</td><td>Supuesta respuesta correcta</td><td>Distractor 2</td><td>Supuesta respuesta correcta</td></tr>
</table>

$\frac{x}{17.6}=\frac{13}{8}$ $x=\frac{13}{3}(17.6)$ $x=28.6$	$\frac{x}{8}=\frac{17.6}{7}$ $x=\frac{17.6}{7}(8)$ $x=20.11$	$\frac{x}{5.2}=\frac{13}{7}$ $x=\frac{13}{7}(5.2)$ $x=9.65$	$\frac{x}{8}=\frac{13}{5.2}$ $x=\frac{13}{5.2}(8)$ $x=20$

Tabla 19: Especificación y reactivo muestra del Reactivo 7.

- **Análisis de la actividad matemática**

Análisis de las acciones concretas del enunciado o pregunta del reactivo

¿Qué debe hacer?	Lo primero que el estudiante debe realizar es identificar los lados de ambos triángulos que se relacionan entre sí, puesto que, uno de los triángulos se encuentra en una posición poco habitual; posteriormente, se debe establecer una igualdad de razones entre dos lados de un triángulo con sus dos lados correspondientes en el segundo triángulo. Después, se deben establecer los productos cruzados resultantes de la igualdad de razones para poder realizar el procedimiento algebraico que le permitirá despejar la variable X y, por último, debe calcular el resultado.
¿Cómo lo debe de hacer?	Mediante la aplicación de herramientas como los criterios de semejanza, la regla de tres, las propiedades de la igualdad y el uso de operaciones básicas.
¿Para qué lo debe hacer?	Según su especificación, el sentido evaluativo del reactivo es que el estudiante sea capaz de identificar dos pares de datos correspondientes a dos triángulos semejantes (tres valores conocidos y una incógnita), con la intención de que se logre identificar el procedimiento correcto que dé solución al lado faltante del triángulo, aplicando los criterios de semejanza que le permitirán avanzar al Teorema de Tales.

Tabla 20: Análisis de las acciones concretas del Reactivo 7.

Para el presente reactivo, lo que el estudiante debe de hacer, para resolver el problema de cuarto valor faltante en un contexto geométrico, es establecer una relación entre los lados correspondientes de cada uno de los triángulos para poder plantear una igualdad de razones y, posteriormente, aplicar el algoritmo de cuarto valor faltante y las propiedades de la igualdad para poder despejar y encontrar el valor de la variable *x*.

El ítem tiene la intención de verificar si el estudiante es capaz de identificar el procedimiento correcto que lleva a la solución del problema, es decir, encontrar el valor del lado faltante.

- **Análisis de los distractores**

		Distractor 1	Distractor 2	Distractor 3
Análisis psicométrico	¿El distractor se encuentra estructurado de manera coherente respecto a las demás opciones de respuesta?	No	No	No aplica
	¿El distractor es autónomo respecto a las demás opciones de respuesta?	Sí	Sí	No aplica
	¿El distractor destaca sobre los demás en contenido, apariencia, estructura gramatical o en algún término que aporte información indebida?	No	No	No aplica
	¿El distractor es descartable sin la necesidad de procedimientos matemáticos relacionados al reactivo?	No	No	No aplica
	¿El distractor tiene sentido en el contexto del problema?	Sí	Sí	No aplica
Análisis desde la Matemática Educativa	¿Cuál es la naturaleza del error puesta en juego?	Conceptual	Conceptual	No aplica
	¿Es un error común respecto a lo reportado en la investigación?	Sí	Sí	No aplica

Tabla 21: Análisis de los distractores del Reactivo 7.

Respecto a las opciones de respuesta, el presente reactivo cuenta con dos distractores, como se muestra en su análisis (ver *Tabla 21*), dado que cuenta con dos posibles respuestas correctas, consecuencia de los valores que conforman los lados de cada uno de los triángulos.

Sin embargo, al observar los valores con los que se conforman los triángulos semejantes nos damos cuenta de que la desigualdad triangular se cumple en ambos, pero los ángulos no se corresponden con la medida de sus lados, como podemos observar en la *Ilustración 8*, por lo que podemos inferir que los triángulos que se muestran en la imagen adicional del reactivo no son precisos al no poder construirse con los ángulos y longitudes planteadas y da como resultado el que pueda haber dos respuestas correctas.

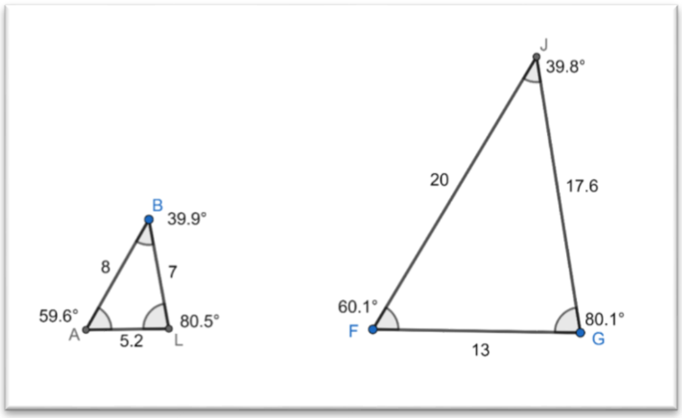


Ilustración 9: Representación de los valores reales que conforman los triángulos semejantes del Reactivo 7.

Por otro lado, los errores puestos en juego en cada uno de los distractores son conceptuales, al tratarse de un mal establecimiento de la proporción entre las magnitudes del problema. Por lo que los consideramos como un error común, según lo que reportan Aroza, Godino y Beltrán-Pellicer (2016), ya que si un estudiante selecciona alguna de las dos opciones de respuesta demostraría que no es capaz de distinguir de manera conveniente las magnitudes que se relacionan en el enunciado del reactivo.

Por lo anterior, podemos concluir que el reactivo no evalúa lo que se establece en su especificación de diseño, pues los triángulos que se presentan en la imagen adicional no son semejantes, lo que permite que haya dos supuestas respuestas correctas, creando así, confusión entre los estudiantes al momento de intentar resolver el reactivo.

Reactivo 8

Datos de identificación del contenido a evaluar	
Curso:	Matemáticas II
Bloque:	Bloque III: Resuelve problemas de semejanza de triángulos y teorema de Pitágoras.
Tema:	Teorema de Tales
Subtema:	Teorema de Tales
Indicador de desempeño:	Resuelve ejercicios o problemas de su entorno aplicando el teorema de Tales.
Comentario aclaratorio acerca del sentido evaluativo del contenido	
Es un contenido rama por dar un servicio y recibir uno. Es importante porque le permite al estudiante resolver problemas del entorno social que dé lugar a triángulos semejantes. Se elaborará una especificación que involucre un ítem, a nivel de aplicación. La especificación atenderá a que el estudiante identifique el procedimiento correcto para resolver un problema sencillo de su entorno social que dé lugar a triángulos semejantes aplicando el teorema de Tales.	
Especificación para la base del reactivo	3.1 Especificación de las instrucciones para responder este reactivo: En la base del ítem se solicitará que lea con atención el enunciado del problema y observe el gráfico para que seleccione la respuesta correcta. 3.2 Especificación de la base del reactivo: La base del reactivo presentará un problema escribiendo el enunciado en un lenguaje sencillo y claro, y un gráfico que lo represente, en el cual se describa una situación real, de preferencia de su entorno y se puedan identificar dos pares de datos semejantes, con el objeto de que el alumno identifique el procedimiento que da solución al problema, aplicando los criterios del Teorema de Tales. 3.3 Especificación del vocabulario o de la información textual, gráfica o tabular a emplear en este reactivo: Se presentará un enunciado con una extensión aproximada de 30 a 50 palabras y un gráfico que contenga los elementos mencionados.

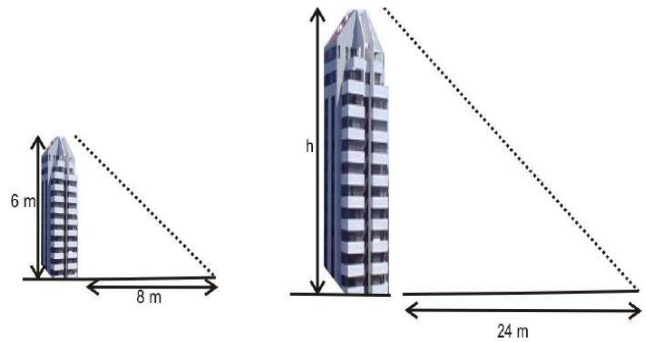
Reactivo			
El maestro de Lucas les proporciona a sus alumnos el siguiente esquema, y les pide que calculen la altura del edificio mayor, usando el teorema de Tales que acaban de ver en clase. Identifica el procedimiento correcto para obtener la altura.  			
Distractor 1	Distractor 2	Distractor 3	Respuesta correcta
$\frac{h}{6}=\frac{24}{8}$ $h=\frac{24-6}{8}$ $h=2.25$	$\frac{h}{8}=\frac{24}{6}$ $h=\frac{(24)(8)}{6}$ $h=32$	$\frac{h}{6}=\frac{8}{24}$ $h=\frac{(8)(6)}{24}$ $h=2$	$\frac{h}{6}=\frac{24}{8}$ $h=\frac{(24)(6)}{8}$ $h=18$

Tabla 22: Especificación y reactivo muestra del Reactivo 8.

- **Análisis de la actividad matemática**

Análisis de las acciones concretas del enunciado o pregunta del reactivo

¿Qué debe hacer?	Se debe establecer una relación entre la altura de los edificios y las sombras que proyectan planteando una igualdad de razones. Posteriormente, se deben identificar los productos cruzados para poder despejar el valor de *h*, para así calcular el resultado.
¿Cómo lo debe de hacer?	Mediante el uso de razones, la aplicación del algoritmo de productos cruzados y el uso de operaciones básicas como la multiplicación y la división.
¿Para qué lo debe hacer?	Para verificar si el estudiante es capaz de identificar el procedimiento correcto que da solución al problema aplicando los criterios del teorema de Tales.

Tabla 23: Análisis de las acciones concretas del Reactivo 8.

Para el presente reactivo, lo que el estudiante debe de hacer, para resolver un problema de cuarto valor faltante en un contexto geométrico, es establecer una relación entre las alturas de los edificios y las sombras proyectadas que le permita establecer una igualdad de razones y, posteriormente, aplicar el algoritmo de cuarto valor faltante y las propiedades de la igualdad para despejar y encontrar la variable solicitada.

El ítem tiene la intención de evaluar si el estudiante es capaz de identificar el procedimiento correcto que da solución a un problema aplicando los criterios del teorema de Tales.

- **Análisis de los distractores**

		Distractor 1	Distractor 2	Distractor 3
Análisis psicométrico	¿El distractor se encuentra estructurado de manera coherente respecto a las demás opciones de respuesta?	No	No	No
	¿El distractor es autónomo respecto a las demás opciones de respuesta?	Sí	Sí	Sí
	¿El distractor destaca sobre los demás en contenido, apariencia, estructura gramatical o en algún término que aporte información indebida?	Sí	No	No
	¿El distractor es descartable sin la necesidad de procedimientos matemáticos relacionados al reactivo?	Sí	No	Sí
	¿El distractor tiene sentido en el contexto del problema?	No	Sí	No
Análisis desde la Matemática Educativa	¿Cuál es la naturaleza del error puesta en juego?	Procedimental	Conceptual	Conceptual
	¿Es un error común respecto a lo reportado en la investigación?	Sí	Sí	Sí

Tabla 24: Análisis de los distractores del Reactivo 8.

Respecto a los tres distractores que forman a las opciones de respuesta, podemos observar que los distractores 1 y 3 no cumplen con gran parte de las directrices psicométricas, por lo que no podrían ser considerados viables.

El distractor 1 no cumple con cuatro de las cinco directrices, siendo estas que no cuenta con un mecanismo de ordenamiento, destaca en contenido, por lo que se vuelve descartable sin la necesidad de procedimientos matemáticos, además de que no tiene sentido en el contexto del problema. El distractor 3 no destaca en contenido, sin embargo, sí puede ser descartado sin la necesidad de procedimientos matemáticos al igual que el distractor 1, pues al analizar el problema nos damos cuenta de que este menciona que la altura de un edificio es de 6 *m*., y se busca la altura de un edificio más alto, por lo que los valores de los distractores 1 y 3 son descartables, ya que proponen valores que son menores a la altura del edificio pequeño.

Por otro lado, el distractor 2 puede ser considerado psicométricamente viable, dado que solo es necesario ordenar las opciones de respuesta mediante un mecanismo de ordenamiento.

En cuanto a los errores puestos en juego en cada uno de los distractores, observamos que el distractor 1 es un error procedimental, ya que presenta el planteamiento correcto de la relación entre las alturas y sombras de los edificios, pero el procedimiento para despejar la incógnita es incorrecto al presentar una resta entre las magnitudes, en lugar de una multiplicación. El distractor 2 es un error conceptual, dado que muestra como es que no se logra establecer una relación proporcional entre las magnitudes del problema, lo que se observa con los denominadores invertidos. Y, el distractor 3, al igual que el distractor 1, es un error conceptual, al mostrar como las alturas de los edificios presentan una relación diferente a la que tienen las sombras de estos.

Desde la Matemática Educativa no podemos decir que el error procedimental que se presenta en el distractor 1 es común, sin embargo, observamos que se relaciona con lo que mencionan Mochón (2012) y Aroza, Godino y Beltrán-Pellicer (2016) acerca del uso indebido de las operaciones o, bien, que estas no se aplican de la manera correcta. Sin embargo, los errores que presentan los distractores 2 y 3 podemos decir que son comunes, dado lo que mencionan sobre que los estudiantes pueden no distinguir convenientemente las magnitudes que se relacionan en el enunciado del problema.

Por lo anterior, podemos decir que el reactivo podría cumplir con su sentido evaluativo en un contexto o magnitudes diferentes a las que se plantean en el enunciado del problema. Los errores que se presentan en los distractores 1 y 3 podrían ser considerados errores plausibles si las magnitudes que se manejan no presentaran un resultado que, dado el contexto, no puede ser viable.

Reactivo 9

<table>
<tr><th colspan="2">Datos de identificación del contenido a evaluar</th></tr>
<tr><td>Curso:</td><td>Matemáticas V</td></tr>
<tr><td>Bloque:</td><td>Bloque III: Enuncias, formulas y resuelves problemas de cambio y relaciones, y probabilidad, en una variedad de dominios y situaciones.</td></tr>
<tr><td>Tema:</td><td>Problemas de cambios y relaciones en una variedad de dominios y situaciones.</td></tr>
<tr><td>Subtema:</td><td>Resolución de problemas de teorema de tales, teorema de Pitágoras, triángulos rectángulos y triángulos oblicuángulos.</td></tr>
<tr><td>Indicador de desempeño:</td><td>• Entiende, trabaja y resuelve problemas prácticos con representaciones múltiples, incluyendo modelos matemáticos explícitos de situaciones del mundo real.
• Tiene flexibilidad en la interpretación y razonamiento en contextos familiares.
• Comunica las explicaciones y argumentaciones resultantes.
• Usa conceptos básicos de estadística y probabilidad combinados con razonamiento numérico en contextos menos familiares para la solución de problemas simples.
• Usa y comunica argumentos basados en la interpretación de datos.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Comentario aclaratorio acerca del sentido evaluativo del contenido</th></tr>
<tr><td colspan="2">Contenido sintético, recibe tres servicios. Se considera esencial ya que reafirma los conocimientos antecedentes de matemáticas, desarrolla la habilidad en la solución en problemas que involucren, teorema de Tales y Pitágoras, triángulos rectángulos y oblicuángulos, de gran aplicabilidad en la vida cotidiana.
Para evaluar este contenido se elaborará una especificación para cinco ítems a nivel de comprensión.</td></tr>
<tr><td>Especificación para la base del reactivo</td><td>3.2 Especificación de la base del reactivo:
La base del primer reactivo atenderá a solicitar la resolución de un problema donde se aplique el teorema de Tales. Se presentará una figura donde se explicitó la incógnita a encontrar. 3.3 Especificación del vocabulario o de la información textual, gráfica o tabular a emplear en este reactivo:
Se presentará la gráfica que represente el problema para su mejor entendimiento o en su caso las gráficas a seleccionar de acuerdo con la ecuación dada.</td></tr>
</table>

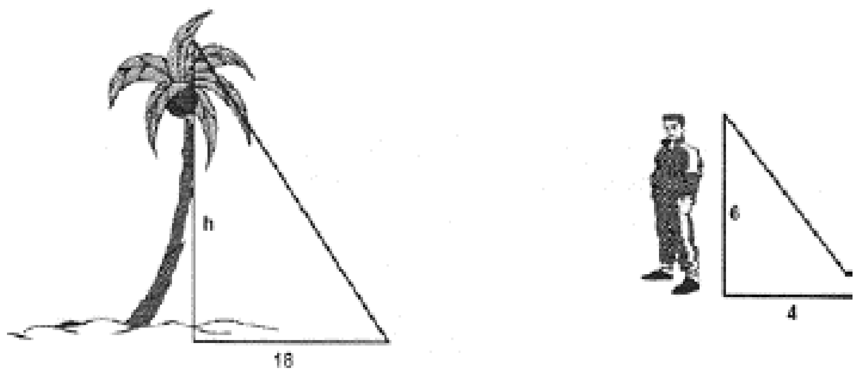
Reactivo			
Gabriel mide 6 pies de altura, en un momento dado proyecta una sombra de 4 pies de largo. En ese instante la palma del patio de su colegio proyecta una sombra de 18 pies. Seleccione la respuesta correcta para la altura de la palma. 			
Distractor 1	Distractor 2	Distractor 3	Respuesta correcta
20 pies	28 pies	108 pies	27 pies

Tabla 25: Especificación y reactivo muestra del Reactivo 9.

- **Análisis de la actividad matemática**

Análisis de las acciones concretas del enunciado o pregunta del reactivo

¿Qué debe hacer?	Para resolver el problema, se deben establecer las relaciones entre los lados correspondientes de los dos triángulos al plantear una igualdad de razones $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ con los datos proporcionados. Posteriormente, se debe identificar los prodcutos cruzados para poder despejar y encontrar el valor de la incógnita (altura de la palma).
¿Cómo lo debe de hacer?	Utilizando herramientas como el algoritmo de productos cruzados, las propiedades de la igualdad y operaciones básicas como multiplicación y división.
¿Para qué lo debe hacer?	Según el sentido evaluativo del reactivo, se busca reafirmar los conocimientos antecedentes de los estudiantes, especifico al teorema de Tales, al solicitar la resolución de un problema donde se aplique dicho teorema.

Tabla 26: Análisis de las acciones concretas del Reactivo 9.

Para el presente reactivo, lo que el estudiante debe realizar es encontrar el cuarto valor faltante en un problema que pone en juego al teorema de Tales, al necesitar plantear una igualdad de razones entre las magnitudes proporcionadas y aplicar el algoritmo de productos cruzados y las propiedades de la igualdad que le permitirán despejar y encontrar el valor de la incógnita.

Lo anterior se realiza con la intención de reafirmar los conocimientos relacionados al teorema de Tales; se verificará si el estudiante es capaz de resolver un problema donde se aplique dicho teorema.

- **Análisis de los distractores**

		Distractor 1	Distractor 2	Distractor 3
Análisis psicométrico	¿El distractor se encuentra estructurado de manera coherente respecto a las demás opciones de respuesta?	Sí	No	No
	¿El distractor es autónomo respecto a las demás opciones de respuesta?	Sí	Sí	Sí
	¿El distractor destaca sobre los demás en contenido, apariencia, estructura gramatical o en algún término que aporte información indebida?	No	No	Sí
	¿El distractor es descartable sin la necesidad de procedimientos matemáticos relacionados al reactivo?	No	No	Sí
	¿El distractor tiene sentido en el contexto del problema?	Sí	Sí	No
Análisis desde la Matemática Educativa	¿Cuál es la naturaleza del error puesta en juego?	Conceptual Procedimental	Conceptual Procedimental	Procedimental
	¿Es un error común respecto a lo reportado en la investigación?	Sí	Sí	Sí

Tabla 27: Análisis de los distractores del Reactivo 9.

Respecto a los distractores del reactivo, podemos observar que dos de los tres cumple con la mayoría de las directrices, solo el distractor 3 podría no ser considerado viable psicométricamente.

El distractor 1 es psicométricamente viable al cumplir con cada una de las cinco directrices. Al tomar en cuenta que los distractores deben aparecer organizados de manera coherente, mediante un mecanismo de ordenamiento que va de menor a mayor, esta opción de respuesta es la única que se encuentra en la posición que le corresponde según el resultado que propone. Por otra lado, pone en juego un error considerado conceptual-procedimental, ya que la manera en la que encontramos que un estudiante pudiera llegar al resultado que se plantea es que en lugar de buscar establecer una relación entre las magnitudes del problema que le permita aplicar el algoritmo de productos cruzados, se relacionan las cantidades con procesos aditivos, como lo menciona Mochón (2012), es decir, a la magnitud de la sombra que proyecta la palma se le resta la magnitud de la sombra que proyecta Gabriel y, posteriormente, se le suma la altura de Gabriel. Por lo anterior es que se considera un error conceptual-procedimental, pues no se tiene certeza de que el alumno haya sido capaz de establecer una relación adecuada entre las magnitudes, además de que las operaciones que realiza no son adecuadas.

El distractor 2 cumple con la mayoría de las directrices a excepción de la primera, referente a encontrarse organizado de manera coherente junto con las demás opciones de respuesta. Sin embargo, es algo que podría corregirse fácilmente, por lo que podría ser considerado psicométricamente viable. Por otro lado, el error que pone en juego es considerado conceptual-procedimental, dado que la manera en la que encontramos que un estudiante podría llegar a la respuesta que se plantea es si decidiera sumar los tres valores conocidos, no obstante, tampoco contamos con evidencia que nos permita identificar si el estudiante fue capaz o no de establecer una relación proporcional entre las magnitudes del enunciado.

Por último, el distractor 3 no podría ser considerado psicométricamente viable, ya que no cumple con cuatro de las cinco directrices. No cuenta con un mecanismo de ordenamiento, destaca en contenido al ser el único distractor en contener tres dígitos en su resultado, lo que podría volverlo descartable al ser la única respuesta diferente; además de que, una palma sí podría a llegar a alcanzar una altura de 108 pies de altura, sin embargo, dados los valores que el problema maneja esa altura no sería posible. Por otro lado, el error puesto en juego es procedimental, pues se trata de un procedimiento incompleto a partir del producto de (18×6) que surge de la igualdad de razones $\frac{h}{18} = \frac{6}{4}$.

A pesar de que los tres distractores tienen una orientación hacia los errores procedimentales, no podemos decir desde la Matemática Educativa, que esos errores en particular se encuentran reportados, sin embargo, podemos relacionarnos con lo que Mochón (2012) y Aroza, Godino y Beltrán-Pellicer (2016) reportan de sus intervenciones didácticas acerca de lo proporcional. Los autores y la autora señalan que entre los estudiantes que participaron algunos realizaban operaciones que no correspondían con el problema, o bien, que los aplicaban erróneamente.

En consecuencia, dado que el reactivo se centra en los errores procedimentales que los estudiantes podrían cometer al intentar resolver el problema y que busca observar si un estudiante resuelve un problema donde se aplica el Teorema de Tales, su sentido evaluativo puede cumplirse satisfactoriamente en caso de que el distractor 3 se utilizara mediante una relación errónea diferente a la utilizada.

Reactivo 10

Datos de identificación del contenido a evaluar	
Curso:	Matemáticas V
Bloque:	Bloque I: Enuncias, formulas y resuelves problemas de cantidad en una variedad de dominios y situaciones.
Tema:	Problemas de cantidad en una variedad de dominios y situaciones.
Subtema:	Resolución de problemas de operaciones y medidas cuantificables en una variedad de dominios y situaciones.
Indicador de desempeño:	• Usa estrategias simples de solución de problemas que incluyan el razonamiento en contextos de la vida cotidiana. • Usa habilidades de razonamiento en una variedad de contextos. • Interpreta diferentes representaciones (tablas, textos, diagramas) de una misma situación. • Usa diferentes habilidades de cálculo para la solución de problemas, incluyendo procesos secuenciales.
Comentario aclaratorio acerca del sentido evaluativo del contenido	
Es un contenido sintético, recibe tres servicios. Se considera esencial porque demuestra el dominio de temas antecedentes que le permiten resolver adecuadamente problemas que implican razonamientos cuantificables. Para evaluar este contenido se elaborará siete especificaciones para siete ítems a nivel de aplicación.	
Especificación para la base del reactivo	3.2 Especificación de la base del reactivo: La base del quinto reactivo es que el estudiante resuelva un problema del cálculo de porcentajes. 3.3 Especificación del vocabulario o de la información textual, gráfica o tabular a emplear en este reactivo: El enunciado no se debe desarrollar con más de tres renglones y con vocabulario claro y preciso. El cálculo de porcentajes no debe ser directo. Las posibles respuestas se deben presentar con dos dígitos después del punto.
Reactivo	

Jorge pagó $2,600.00 pesos por una televisión que tenía un descuento del 25%, ¿Cuánto costaba originalmente?			
Distractor 1	Respuesta correcta	Distractor 2	Distractor 3
$ 3250	$ 3466.67	$ 4550	$ 7800

Tabla 28: Especificación y reactivo muestra del Reactivo 10.

- **Análisis de la actividad matemática**

Análisis de las acciones concretas del enunciado o pregunta del reactivo	
¿Qué debe hacer?	Para resolver el problema, se debe establecer una relación entre el precio final del televisor con el porcentaje que representa del precio inicial para que, al aplicar el algoritmo de la regla de tres, se indique que el precio final representa un 75% del 100% inicial, y que al momento de aplicar las operaciones necesarias se encuentre el cuarto valor faltante.
¿Cómo lo debe de hacer?	Mediante el uso de herramientas como el algoritmo de la regla de tres y operaciones básicas como la multiplicación y la división.
¿Para qué lo debe hacer?	Según el sentido evaluativo del reactivo, se busca que el estudiante demuestre un dominio en temas antecedentes que le permita resolver problemas que implican razonamientos cuantificables. En este caso se busca que el estudiante resuelva un problema del cálculo de porcentajes.

Tabla 29: Análisis de las acciones concretas del Reactivo 10.

Para el presente reactivo, lo que el estudiante debe de hacer, para resolver un problema de cuarto valor faltante, es establecer una relación entre el valor final que se pagó por el televisor y el porcentaje que representa del 100% del precio inicial. Esto le permitirá hacer uso del algoritmo de la regla de tres y operaciones básicas como la multiplicación y la división.

El ítem tiene la intención de verificar el dominio del estudiante en problemas que impliquen un razonamiento cuantificable, siendo este caso un problema de cálculo de porcentajes.

- **Análisis de los distractores**

		Distractor 1	Distractor 2	Distractor 3
Análisis psicométrico	¿El distractor se encuentra estructurado de manera coherente respecto a las demás opciones de respuesta?	Sí	Sí	Sí
	¿El distractor es autónomo respecto a las demás opciones de respuesta?	Sí	Sí	Sí
	¿El distractor destaca sobre los demás en contenido, apariencia, estructura gramatical o en algún término que aporte información indebida?	No	No	Sí
	¿El distractor es descartable sin la necesidad de procedimientos matemáticos relacionados al reactivo?	No	No	Sí
	¿El distractor tiene sentido en el contexto del problema?	Sí	Sí	No
Análisis desde la Matemática Educativa	¿Cuál es la naturaleza del error puesta en juego?	Conceptual	Conceptual	Conceptual
	¿Es un error común respecto a lo reportado en la investigación?	Sí	Sí	Sí

Tabla 30: Análisis de los distractores del Reactivo 10.

Respecto a los distractores del reactivo, podemos observar que los distractores 1 y 2 cumplen con todas las directrices psicométricas de diseño, por lo que pueden ser considerados viables. Por otro lado, el distractor 3, no cumple con tres de las cinco directrices, lo que lo vuelve descartable por apariencia, incluso sin hacer procedimientos matemáticos.

El distractor 1 es psicométricamente viable al cumplir con las cinco directrices de diseño y no permitir que sea descartable de manera sencilla. Por otro lado, el error que pone en juego lo clasificamos como conceptual, ya que no logran relacionar convenientemente las magnitudes del enunciado, pues una de las maneras de llegar a este resultado es al obtener el 25% del precio con descuento y sumarlo al mismo.

El distractor 2 también es considerado psicométricamente viable, al cumplir con las cinco directrices, al igual que el distractor 1. El error que pone en juego lo clasificamos como conceptual, pues una de las maneras en la que se puede llegar al resultado propuesto es calcular el 75% del precio ya rebajado y sumarlo al mismo.

Los distractores 1 y 2, además de ser considerados psicométricamente viables, también son considerados viables desde la Matemática Educativa, pues los errores puestos en juego en cada uno de ellos se encuentran reportados por Contreras, Carrillo, Zakaryan, Muñoz-Catalán y Climent (2012) en su intento por identificar qué tan desarrollada se encontraba la competencia numérica en profesores en formación de la Universidad de Huelva.

Por otro lado, a pesar de que el error puesto en juego en el distractor 3, se encuentra reportado por Contreras, et al., (2012) dentro de la Matemática Educativa, no podemos considerarlo viable, pues al utilizar dicho error el resultado que se obtiene destaca en apariencia y en contenido haciendo que se vuelva fácilmente descartable.

En consecuencia, podemos inferir que los distractores contribuyen a que el sentido evaluativo del reactivo se cumpla, sin embargo, se debe considerar el modificar los valores que se manejan en el enunciado con la intención de lograr un equilibrio y que el distractor 3 no sea descartable de manera sencilla.

Subgrupo 3: reactivos que evalúan algún concepto asociado

Reactivo 11

Datos de identificación del contenido a evaluar	
Curso:	Matemáticas III
Bloque:	Bloque III: Aplicas los elementos de una Recta como Lugar Geométrico.
Tema:	Línea recta
Subtema:	Pendiente y Ángulo de inclinación de una recta.
Indicador de desempeño:	• Reconoce la recta como lugar geométrico. • Reconoce la relación entre el ángulo de inclinación y la pendiente de una recta. • Aplica los elementos de una recta como lugar geométrico en la solución de problemas y/o ejercicios.
Comentario aclaratorio acerca del sentido evaluativo del contenido	
Es un contenido fuente que recibe tres servicios y otorga cuatro. Se relaciona con las condiciones de paralelismo y perpendicularidad en las rectas, así como el ángulo formado entre ellas. Es esencial porque permite al alumno comprender el comportamiento gráfico de la recta o par de rectas, así como determinar su ecuación. Se elaborará una especificación para dos ítems a nivel de aplicación.	
Especificación para la base del reactivo	3.2 Especificación de la base del reactivo: Primer ítem: Se solicitará al estudiante obtener la pendiente o ángulo de inclinación de una recta a partir de dos puntos de coordenadas dadas. 3.3 Especificación del vocabulario o de la información textual, gráfica o tabular a emplear en este reactivo: El enunciado del problema se presentará en un lenguaje sencillo y claro, el cual no deberá exceder de 60 palabras.
Reactivo	
Selecciona el procedimiento correcto en el cálculo de la pendiente de la recta definida por los puntos: A(5, 4); B(-2, 6).	

Distractor 1	Distractor 2	Distractor 3	Respuesta correcta
$m = \frac{6+4}{-5-2}$ $m = -\frac{10}{7}$	$m = \frac{4-6}{-2-5}$ $m = \frac{2}{7}$	$m = \frac{-2-5}{6+4}$ $m = -\frac{7}{10}$	$m = \frac{6-4}{-2-5}$ $m = -\frac{2}{7}$

Tabla 31: Especificación y reactivo muestra del Reactivo 11.

- **Análisis de la actividad matemática**

Análisis de las acciones concretas del enunciado o pregunta del reactivo

¿Qué debe hacer?	Para resolver el reactivo, se necesitan identificar la coordenada 1 y la coordenada 2 para poder establecer x_1y y_1, así como x_2 y y_2 con la intención de sustituir las variables y_2y y_1 (en ese orden) en el numerador y las variables x_2 y x_1 (en ese orden) en el denominador. Posteriormente, se deben realizar las operaciones básicas necesarias para encontrar el resultado.
¿Cómo lo debe de hacer?	Haciendo uso de la fórmula $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ y operaciones básicas como la suma, resta y división.
¿Para qué lo debe hacer?	Según el sentido evaluativo del reactivo, se busca identificar si el estudiante es capaz de obtener la pendiente o ángulo de inclinación de una recta a partir de dos puntos coordenados dados.

Tabla 32: Análisis de las acciones concretas del Reactivo 11.

Para el presente reactivo, lo que el estudiante debe de hacer es establecer cuál será su coordenada (x_1, y_1) y $(x_2\ , y_2)$, para poder sustituir de manera correcta los valores en la fórmula $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ y, así, encontrar el valor de la pendiente a través de dos puntos coordenados, con la intención de demostrar su habilidad en el desarrollo procedimental de la fórmula de la pendiente, a través de dos puntos.

- **Análisis de los distractores**

		Distractor 1	Distractor 2	Distractor 3
Análisis psicométrico	¿El distractor se encuentra estructurado de manera coherente respecto a las demás opciones de respuesta?	No	No	No
	¿El distractor es autónomo respecto a las demás opciones de respuesta?	Sí	Sí	Sí
	¿El distractor destaca sobre los demás en contenido, apariencia, estructura gramatical o en algún término que aporte información indebida?	No	No	No
	¿El distractor es descartable sin la necesidad de procedimientos matemáticos relacionados al reactivo?	No	No	No
	¿El distractor tiene sentido en el contexto del problema?	Sí	Sí	Sí
Análisis desde la Matemática Educativa	¿Cuál es la naturaleza del error puesta en juego?	Procedimental	Procedimental	Procedimental
	¿Es un error común respecto a lo reportado en la investigación?	Sí	Sí	Sí

Tabla 33: Análisis de los distractores del Reactivo 11.

Respecto a los distractores del reactivo, observamos que los tres podrían ser considerados psicométricamente viables, pues cumplen con la mayoría de las directrices de diseño, a excepción de la primera, en la que se pregunta si se cuenta con un mecanismo de ordenamiento. No obstante, puede ser corregido de manera sencilla para ser considerado completamente viables. Además, las opciones de respuesta no permiten que un estudiante pueda descartarlas sin la necesidad de procedimientos matemáticos.

Por otro lado, observamos que la naturaleza de los errores puestos en juego en todas las opciones plausibles es procedimental, es decir, son errores aritméticos en el manejo de números y operaciones, los cuales se encuentran reportados dentro de la literatura. Respecto al distractor 3, Cho y Nagle (2017) reportan, por ejemplo, que los estudiantes suelen utilizar la relación recíproca $\left(\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}\right)$ al trabajar con la pendiente. Para los distractores 1 y 2 reportan que los alumnos no suelen coordinar correctamente las coordenadas x e y, lo que los lleva a utilizar relaciones como $\frac{y_2-y_1}{x_1-x_2}$ o $\frac{y_1-y_2}{x_2-x_1}$. De igual forma, estos mismos autores reportan un error similar en los tres distractores, el cual tiene que ver con la aritmética. Se menciona que los estudiantes suelen tener errores de signo al trabajar con la multiplicación y la división –como multiplicar dos números negativos y que el resultado sea negativo–, y durante la suma y la resta al cometer errores de cálculo básico o de signo.

Por lo anterior, consideramos que el reactivo cumple con su sentido evaluativo, pues al centrar los distractores en errores procedimentales se esta predominando el identificar si un estudiante es capaz de sustituir los valores de dos coordenadas en la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y encontrar el valor de la pendiente.

Reactivo 12

Datos de identificación del contenido a evaluar	
Curso:	Matemáticas III
Bloque:	Bloque III: Aplicas los elementos de una Recta como Lugar Geométrico.
Tema:	Línea recta
Subtema:	Pendiente y Ángulo de inclinación de una recta.
Indicador de desempeño:	• Reconoce la recta como lugar geométrico. • Reconoce la relación entre el ángulo de inclinación y la pendiente de una recta. • Aplica los elementos de una recta como lugar geométrico en la solución de problemas y/o ejercicios.
Comentario aclaratorio acerca del sentido evaluativo del contenido	
Es un contenido fuente que recibe tres servicios y otorga cuatro. Se relaciona con las condiciones de paralelismo y perpendicularidad en las rectas, así como el ángulo formado entre ellas. Es esencial porque permite al alumno comprender el comportamiento gráfico de la recta o par de rectas, así como determinar su ecuación. Se elaborará una especificación para dos ítems a nivel de aplicación.	
Especificación para la base del reactivo	3.2 Especificación de la base del reactivo: Segundo ítem: Se solicitará que a partir de una tabla de valores el alumno determine la variación lineal (pendiente). 3.3 Especificación del vocabulario o de la información textual, gráfica o tabular a emplear en este reactivo: El enunciado del problema se presentará en un lenguaje sencillo y claro, el cual no deberá exceder de 60 palabras.
Reactivo	

Selecciona la opción correcta que muestra el valor de la pendiente (incremento de calorías utilizadas por minuto) en la siguiente tabla de valores.

Minutos de ejercicio	20	25	30	35	40
Calorías utilizadas	120	150	180	210	240

Distractor 1	Respuesta correcta	Distractor 2	Distractor 3

$m = 5$	$m = 6$	$m = 0.5$	$m = 0.6$

Tabla 34: Especificación y reactivo muestra del Reactivo 12.

- **Análisis de la actividad matemática**

Análisis de las acciones concretas del enunciado o pregunta del reactivo

¿Qué debe hacer?	Determinar la pendiente a partir de la representación tabular del fenómeno del incremento de calorías utilizadas por minutos, a partir de identificar las variables que representan a las coordenadas.
¿Cómo lo debe de hacer?	Mediante el uso de la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y operaciones básicas como la suma, resta, división y multiplicación.
¿Para qué lo debe hacer?	Según el sentido evaluativo del reactivo, se busca identificar si el estudiante es capaz de determinar la pendiente de un fenómeno que se encuentra representado en una tabla de valores.

Tabla 35: Análisis de las acciones concretas del Reactivo 12.

Para el presente reactivo, lo que el estudiante debe de hacer es identificar, a partir de la representación tabular del fenómeno del incremento de calorías, el par coordenado que le permitirán determinar la pendiente al sustituir los valores en la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Esto con la intención de que el alumno demuestre su comprensión alrededor del comportamiento gráfico de la recta y su ecuación al poder calcular su pendiente.

- **Análisis de los distractores**

		Distractor 1	Distractor 2	Distractor 3
Análisis psicométrico	¿El distractor se encuentra estructurado de manera coherente respecto a las demás opciones de respuesta?	No	No	No
	¿El distractor es autónomo respecto a las demás opciones de respuesta?	Sí	Sí	Sí
	¿El distractor destaca sobre los demás en contenido, apariencia, estructura gramatical o en algún término que aporte información indebida?	No	No	No
	¿El distractor es descartable sin la necesidad de procedimientos matemáticos relacionados al reactivo?	No	No	No
	¿El distractor tiene sentido en el contexto del problema?	Sí	Sí	Sí
Análisis desde la Matemática Educativa	¿Cuál es la naturaleza del error puesta en juego?	Conceptual	Arbitrario	Arbitrario
	¿Es un error común respecto a lo reportado en la investigación?	No	No	No

Tabla 36: Análisis de los distractores del Reactivo 12.

Respecto a los distractores del reactivo observamos que los tres podrían ser considerados psicométricamente viables, pues cumplen con la mayoría de las directrices de diseño, a excepción de la primera, en la que se pregunta si se cuenta con un mecanismo de ordenamiento –que podría corregirse de manera sencilla–. No obstante, las opciones de respuesta no permiten que un estudiante pueda descartarlas sin la necesidad de procedimientos matemáticos, pues se encuentran equilibradas al tener pares de respuestas similares en formato, es decir, dos respuestas son números enteros y las otras dos son números decimales.

Por otro lado, observamos que la naturaleza de los errores puestos en juego en las opciones plausibles abarca aquellos que son conceptuales y arbitrarios. El distractor 1 decimos que es conceptual, dado que la manera en la que encontramos que un estudiante podría seleccionarlo como respuesta correcta es que piense que la variación entre los minutos de ejercicios sea la pendiente; por lo que no estaría considerando la variación de las calorías utilizadas por minuto para resolver el problema. Los distractores

2 y 3 los consideramos arbitrarios, ya que no encontramos una manera en la que el estudiante pueda llegar a seleccionarlos como la respuesta correcta.

De igual forma, no encontramos reportado desde la Matemática Educativa algún error que se adaptara a los que se ponen en juego en cada uno de los reactivos, por lo que no podrían brindar información pertinente a las y los profesores sobre las áreas de oportunidad a atender con sus estudiantes.

En consecuencia, podemos inferir que el reactivo, al cumplir con la mayoría de las directrices, permite cumplir con su sentido evaluativo, ya que los distractores cumplen su función de distraer. No obstante, desde la Matemática Educativa no se cumple que los errores puestos en juego sean comunes.

4.2 Fase 3: resultados del análisis general de los grupos de reactivos

En consecuencia, del análisis individual de la actividad matemática y de los distractores de cada reactivo, analizamos de manera grupal los resultados de cada uno de ellos.

Subgrupo 1: Reactivos que evalúan específicamente a la proporcionalidad directa

Análisis de la actividad matemática

	¿Qué hace?	¿Cómo lo hace?	¿Para qué lo hace?
Reactivo 1	Para el presente reactivo, lo que el estudiante debe hacer es, **establecer una relación** entre la cantidad de caballos y la cantidad de alimento para poder **establecer** una **igualdad de razones en su forma** $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ especifica para el problema planteado; posteriormente, debe realizar un **procedimiento algebraico** resultante de aplicar el algoritmo del producto cruzado de ambas razones y, por último, debe identificar el resultado obtenido al **calcular el producto** cruzado de ambas razones.	Lo debe hacer mediante el uso de **una proporción y el algoritmo de productos cruzados**, utilizada para la primera parte del problema; uso de las **propiedades de la igualdad**, para la segunda parte, y para la tercera será necesario aplicar las **operaciones básicas** como la multiplicación y la división.	Según la especificación del reactivo, su sentido evaluativo es verificar si el estudiante es capaz de **identificar los elementos de las proporciones**, variaciones e intereses que le permitirá **resolver un problema cotidiano sobre valor faltante** y, además, **sintetizar el número de pasos en el procedimiento**.
Reactivo 2	Para el presente problema lo que el estudiante debe hacer es **establecer la relación entre las magnitudes** del reactivo (litros de combustible y kilómetros recorridos). Después, hay tres posibles vías (podría haber más) por las que se podría optar: El primero es **establecer una igualdad de razones** $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ donde un dato será una incógnita y se cumple que $ad=bc$. Para	Se debe hacer mediante el **uso de la proporción** (para la igualdad de razones), las **propiedades de la igualdad** (para el procedimiento algebraico al despejar la *x* una vez que se tienen los productos cruzados $d=bc$), uso del **algoritmo de la**	Según la especificación del reactivo, el sentido evaluativo es **verificar el dominio de los estudiantes en temas antecedentes** (problema referente a proporciones o variación directa) que les permitan resolver adecuadamente **problemas que implican**

	obtener el valor desconocido de la igualdad, se deberá dividir el **producto cruzado** con dos valores conocidos entre el tercer valor conocido. El segundo es **calcular el valor unitario**. Calculando la cantidad de kilómetros que le corresponden a un solo litro de combustible, dividiendo 132 entre 12 y, posteriormente, multiplicándolo por 5. El tercero es, **aplicar directamente la regla de tres**, donde el valor desconocido se encontrará al dividir el producto cruzado conocido entre el tercer valor conocido. Y el cuarto, el estudiante podría pensar en **dividir entre dos ambas cantidades**, puesto que estaría encontrando la cantidad de kilómetros para 6 litros de combustible, lo que se acerca mucho a 5. En este caso el estudiante podría optar por seleccionar la opción más próxima por debajo que la cantidad de kilómetros que encontró para 6 litros.	**regla de tres**, las **operaciones básicas** como la multiplicación y la división, el algoritmo de la regla de tres.	**razonamientos cuantificables**.
Reactivo 3	Para contestar correctamente al reactivo planteado, el estudiante debe, **plantear los productos cruzados** en la **igualdad de razones** ya proporcionada por el ejercicio (el producto que contiene dos valores conocidos y aquel que contiene una incógnita), dado que, al tener una igualdad de razones $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, se cumple que $ad = bc$, donde uno de los numeradores es una incógnita. Posteriormente, debe **aplicar un procedimiento algebraico** una vez establecidos los productos cruzados $ad = bc$ para el **despeje de la variable X**; en este caso, el producto cruzado	Empleando herramientas como el **algoritmo del producto cruzado**, **las propiedades de la igualdad para despejar la incógnita** y **operaciones básicas** como la multiplicación y la división.	El reactivo tiene la intención de verificar si el estudiante es capaz de identificar los **elementos de las proporciones**, variaciones e intereses que le permitirán resolver ejercicios de valor faltante en uno de los numeradores.

	conocido pasará a ser dividido por el tercer valor conocido, y finalmente **calcular el resultado**.		
Reactivo 4	Para contestar correctamente al reactivo planteado, el estudiante debe, **plantear los productos cruzados** en la igualdad de razones ya proporcionada por el ejercicio (el producto que contiene dos valores conocidos y aquel que contiene una incógnita), dado que, al tener una igualdad de razones $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, se cumple que $ad = bc$, donde uno de los denominadores es una incógnita. Posteriormente, se debe **realizar el procedimiento algebraico** que debe aplicarse una vez establecidos los productos cruzados para **despejar *x***; en este caso, el producto cruzado conocido pasará a ser dividido por el tercer valor conocido. Y por último, debe **calcular el valor resultante** de la división.	Mediante el uso de herramientas como el **algoritmo de productos cruzados**, uso de las **propiedades de la igualdad** para despejar *x* y **operaciones básicas** como la multiplicación y la división.	El reactivo tiene la intención de verificar si el estudiante es capaz de **identificar los elementos de las proporciones**, variaciones e intereses que le permitirán **resolver ejercicios de valor faltante** en un de los denominadores.
Reactivo 5	**Relacionar la representación tabular** que representa un fenómeno de proporcionalidad directa con su **representación gráfica.**	Identificando sus elementos como **constante de proporcionalidad** positiva, que la **recta debe ser creciente** y pasar por el **origen del plano cartesiano**.	Según la especificación del reactivo, el sentido evaluativo del reactivo es verificar si el alumno es capaz de **identificar la gráfica** que le da solución a un problema que genere una función lineal a partir de que se les proporciona datos en una tabla, demostrando así que **comprende el comportamiento gráfico de una función lineal**.

Reactivo 6	Para contestar correctamente el reactivo, el estudiante debe **establecer una igualdad de razones** $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ y ubicar el valor desconocido. Posteriormente, debe **establecer el producto cruzado** con dos valores conocidos y un segundo producto cruzado con una incógnita y así, **realizar el procedimiento algebraico** que hay que aplicar una vez identificados los dos productos cruzados **para despejar la *x*** y, por último, debe **calcular el valor resultante**.	Mediante el uso de herramientas como el algoritmo de **productos cruzados**, las **propiedades de la igualdad** una vez que se establezcan los productos cruzados para despejar la *x*, y las **operaciones básicas** como la multiplicación y la división.	Según la especificación del reactivo, su sentido evaluativo es verificar si el estudiante es capaz de **identificar los elementos de las proporciones**, variaciones e intereses que le permitirá **resolver un problema cotidiano sobre valor faltante**.

Tabla 37: Análisis vertical de las acciones concretas de los reactivos del Subgrupo 1 que evalúan a la proporcionalidad directa.

En este primer grupo conformado por los reactivos 1, 2, 3, 4, 5 y 6 referentes a aquellos en los que su especificación se explicita que se pretende evaluar lo proporcional directo, identificamos ciertas características similares respecto al contenido matemático que ponen en juego los reactivos.

Respecto al ¿qué hace?

Al analizar de manera vertical el ¿qué hace?, de los primeros seis reactivos –pertenecientes al primer conjunto de reactivos–, observamos que la intención de tres de los seis reactivos es que el estudiante establecer una igualdad de razones entre las variables propuestas en el problema con la intención de encontrar el cuarto valor faltante en una igualdad de razones –reactivos 1 y 6– o bien, que encuentre la incógnita aplicando el procedimiento con el que más se identifique, que podría ser a través de una igualdad de razones y aplicar el algoritmo de productos cruzados, usar directamente el algoritmo de la regla de tres o identificar el valor unitario en la relación.

Por otro lado, identificamos que los reactivos 3 y 4 se centran en que el estudiante debe desarrollar el procedimiento algebraico para encontrar el valor de un ejercicio de cuarto valor faltante, pues al proporcionar ya las igualdades de razones, el alumno solo debe establecer los productos cruzados y despejar la incógnita.

El caso del reactivo 5 es diferente a los demás ítems, pues no busca la incógnita de un problema de cuarto valor faltante, sino que el estudiante debe relacionar la representación tabular de un fenómeno en una función lineal con su representación gráfica.

Respecto al ¿cómo lo hace?

Para cuatro de los seis reactivos –ítems 1, 3, 4 y 6– se encuentra explicito que el cómo se debe resolver el reactivo es mediante el uso de una proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, donde se cumple que $ad = bc$, es decir, el algoritmo de productos cruzados y, para encontrar el resultado, será necesario hacer uso de las propiedades de la igualdad con la intención de despejar la incógnita y encontrar su valor.

A diferencia de los reactivos anteriores, el diseño del reactivo 2 permite que el estudiante pueda poner en uso herramientas como el algoritmo de la regla de tres o valor unitario, pues en sus opciones de respuesta no proporciona procedimientos que establezcan a la igualdad de razones como único proceso de resolución, siendo así, el único de los problemas de cuarto valor faltante que permita al alumno utilizar una variedad de herramientas.

Por otro lado, dado que el reactivo 5 es el único ítem en el que no se pide encontrar el cuarto valor faltante, es necesario hacer uso de herramientas como la constante de proporcionalidad para entender el tipo de fenómeno que se representa; la pendiente, para identificar que se trata de una recta creciente; el origen en el plano cartesiano, pues cuando se trata de la representación gráfica de un fenómeno que representa una variación directa la recta debe pasar o partir del origen de un plano cartesiano.

Respecto al ¿para qué lo hace?

Dado que los reactivos 1, 3, 4 y 6, forman parte del mismo contenido, comparten un mismo sentido evaluativo acerca de identificar los elementos de las proporciones específicamente en problemas o ejercicios de cuarto valor faltante distribuido en dos aspectos. El primero, orientado a verificar si el estudiante relaciona correctamente las magnitudes que se presentan en el enunciado del problema y, el segundo, si realiza las operaciones algebraicas correspondientes para encontrar el cuarto valor.

El reactivo 2 busca evidenciar si el estudiante puede calcular cantidades referentes a proporciones o variación directa, pues se trata de una de las maneras en las que puede demostrar su dominio en problemas que implican razonamientos cuantificables.

Por otro lado, el reactivo 5, mediante la identificación de la gráfica de una función lineal, pretende evidenciar si el estudiante comprende el comportamiento gráfico de dicha función.

En consecuencia, de lo anterior, nos damos cuenta de la evolución en el tratamiento a lo proporcional directo, pues los reactivos 1, 3, 4 y 6, centrados en el acomodo correcto de las variables en la igualdad de razones y los procedimientos algebraicos correspondientes, se encuentran ubicados en el primer semestre de Educación Media superior y los reactivos 2 y 5, que se concentran más en problemas con más de una sola vía de resolución o, bien, de su comportamiento gráfico, se encuentran en el quinto semestre.

Análisis de los distractores

		Reactivo 1			Reactivo 2		
		Distractor 1	Distractor 2	Distractor 3	Distractor 1	Distractor 2	Distractor 3
Análisis psicométrico	¿El distractor se encuentra estructurado de manera coherente respecto a las demás opciones de respuesta?	No	No	No	Sí	Sí	Sí
	¿El distractor es autónomo respecto a las demás opciones de respuesta?	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
	¿El distractor destaca sobre los demás en contenido, apariencia, estructura gramatical o en algún término que aporte información indebida?	No	Sí	No	No	No	No
	¿El distractor es descartable sin la necesidad de procedimientos matemáticos relacionados al reactivo?	No	Sí	No	No	No	No
	¿El distractor tiene sentido en el contexto del problema?	Sí	No	Sí	Sí	Sí	Sí
Análisis desde la Matemática Educativa	¿Cuál es la naturaleza del error puesta en juego?	Conceptual	Conceptual	Conceptual Procedimental	Procedimental	Arbitrario	Arbitrario
	¿Es un error común respecto a lo reportado en la investigación?	Sí	Sí	Sí	Sí	No	No

Tabla 38: Análisis horizontal de los distractores de los reactivos del Subgrupo 1 que evalúan a la proporcionalidad directa. Parte1.

		Reactivo 3			Reactivo 4		
		Distractor 1	Distractor 2	Distractor 3	Distractor 1	Distractor 2	Distractor 3
Análisis psicométrico	¿El distractor se encuentra estructurado de manera coherente respecto a las demás opciones de respuesta?	No aplica	No aplica	No aplica	No	No	No
	¿El distractor es autónomo respecto a las demás opciones de respuesta?	Sí	Sí	Sí	Sí	Sï	Sí
	¿El distractor destaca sobre los demás en contenido, apariencia, estructura gramatical o en algún término que aporte información indebida?	No	No	No	No	No	No
	¿El distractor es descartable sin la necesidad de procedimientos matemáticos relacionados al reactivo?	No	No	No	No	No	No
	¿El distractor tiene sentido en el contexto del problema?	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
Análisis desde la Matemática Educativa	¿Cuál es la naturaleza del error puesta en juego?	Procedimental	Procedimental	Procedimental	Procedimental	Procedimental	Arbitrario
	¿Es un error común respecto a lo reportado en la investigación?	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	No

Tabla 39: Análisis horizontal de los distractores de los reactivos del Subgrupo 1 que evalúan a la proporcionalidad directa. Parte2.

		Reactivo 5			Reactivo 6		
		Distractor 1	Distractor 2	Distractor 3	Distractor 1	Distractor 2	Distractor 3
Análisis psicométrico	¿El distractor se encuentra estructurado de manera coherente respecto a las demás opciones de respuesta?	No aplica	No aplica	No aplica	No	No	No
	¿El distractor es autónomo respecto a las demás opciones de respuesta?	Sí	Sí	Sí	Sí	Sï	Sí
	¿El distractor destaca sobre los demás en contenido, apariencia, estructura gramatical o en algún término que aporte información indebida?	No	Sí	Sí	Sí	No	Sí
	¿El distractor es descartable sin la necesidad de procedimientos matemáticos relacionados al reactivo?	No	Sí	Sí	Sí	No	Sí
	¿El distractor tiene sentido en el contexto del problema?	Sí	No	No	No	Sí	Sí
Análisis desde la Matemática Educativa	¿Cuál es la naturaleza del error puesta en juego?	Procedimental	Arbitrario	Arbitrario	Conceptual Arbitrario	Conceptual Procedimental	Conceptual
	¿Es un error común respecto a lo reportado en la investigación?	No	No	No	Sí	Sí	Sí

Tabla 40: Análisis horizontal de los distractores de los reactivos del Subgrupo 1 que evalúan a la proporcionalidad directa. Parte3.

De manera general, podemos observar una orientación positiva respecto al cumplimiento de las directrices psicométricas con las que deben cumplir los distractores en cada uno de los reactivos –para mejor apreciación ver el Anexo 1– y, dada nuestra distribución de colores podemos identificar de manera sencilla que la directriz que se cumple por completo en cada una de las opciones de respuesta es la segunda, referente a que las respuestas no deben referirse ni solaparse la una a la otra. Mientras que la menos tomada en consideración para el diseño es la primera, que explicita que los resultados deben aparecer organizados de manera coherente, es decir, de menor a mayor según su valor.

De manera particular, podemos observar que el reactivo 3 es el único que podemos considerar viable desde la psicometría, así como desde la Matemática Educativa, pues a pesar de no cumplir con la primera directriz dado el diseño de sus respuestas, cumple con todas las demás, como también los errores procedimentales que se ponen en juego en cada uno de los distractores se encuentran reportados, lo que permitiría constatar que son errores comunes los que se están poniendo en juego.

Por otro lado, los reactivos 2 y 4 los consideramos viables psicométricamente al cumplir con todas las directrices, pues a pesar de que el ítem 4 no cumple con la primera directriz, esta puede ser corregida de manera sencilla por lo que lo colocamos en la categoría de viable. No obstante, aquellos distractores con la naturaleza de arbitrarios, como en el caso de los distractores 2 y 3 del reactivo 2 y el distractor 3 del reactivo 4, no encontramos una manera en la que un estudiante pudiera llegar a su resultado y tampoco lo encontramos reportado dentro de la literatura de la Matemática Educativa, lo que podría indicar que no son errores comunes y hace falta investigación al respecto.

Al contrario de los reactivos 2 y 4, en los reactivos 1 y 6 los errores conceptuales y procedimentales que se ponen en juego en cada uno de sus distractores se encuentran reportados dentro de la Matemática Educativa, lo que los hace viables para poder brindar información respecto a las dificultades de los estudiantes. Sin embargo, algunos de los distractores no cumplen con todas las directrices de diseño, por lo que se vuelven descartables.

Como es el caso del distractor 2 del reactivo 1, en el que observamos que destaca en apariencia y, dado su contenido matemático, se vuelve descartable sin hacer algún procedimiento, perdiendo así el sentido en el contexto en el que se plantea. No obstante, el error conceptual que pone en juego lo consideramos un error común según lo reportado en la investigación.

Al igual que el distractor anterior, los distractores 1 y 3 del reactivo 6, tampoco cumplen con la mayoría de las directrices. El distractor 1 no aparece organizado de manera coherente, destaca en apariencia y el contenido matemático que pone en juego lo vuelve descartable y perdiendo su sentido en el contexto del problema, dado que difiere de las variables que pone en juego el enunciado del problema. El distractor 3, de igual forma, no aparece organizado de manera coherente respecto a las demás opciones de respuesta y, a pesar de poner en juego un error conceptual considerado común, este destaca en apariencia, lo que lo vuelve descartable sin la necesidad de procedimientos matemáticos.

Por último, observamos que el reactivo 5 no puede ser considerado viable psicométricamente, pues sus distractores 2 y 3 destacan en apariencia y son descartables sin la necesidad de procedimientos algebraicos, lo que hace que pierdan su sentido en el contexto del problema planteado.

Subgrupo 2: reactivos relacionados al uso de la proporcionalidad directa

Análisis de la actividad matemática

	¿Qué hace?	¿Cómo lo hace?	¿Para qué lo hace?
Reactivo 7	Lo primero que el estudiante debe realizar es identificar los lados de ambos triángulos que se relacionan entre sí, puesto que, uno de los triángulos se encuentra en una posición poco habitual; posteriormente, se debe **establecer una igualdad de razones** entre dos pares de lados correspondientes de dos triángulos semejantes. Después, se deben **establecer los productos cruzados** resultantes de la igualdad de razones para poder realizar el **procedimiento algebraico** que le permitirá despejar la variable *x* y, por último, debe **calcular el resultado del cuarto valor faltante**.	Mediante la aplicación de herramientas como los **criterios de semejanza**, el **algoritmos de productos cruzados**, l**as propiedades de la igualdad** y el uso de **operaciones básicas**.	Según su especificación, el sentido evaluativo del reactivo es que el estudiante sea capaz de **identificar dos pares de datos** correspondientes a dos triángulos semejantes (tres valores conocidos y una incógnita), con la intención de que se logre **identificar el procedimiento correcto** que, de solución al lado faltante del triángulo, **aplicando los criterios de semejanza** que le permitirán avanzar al Teorema de Tales.
Reactivo 8	Se debe **establecer una relación** entre la altura de los edificios y las sombras que proyectan planteando **una igualdad de razones**. Posteriormente, se deben **identificar los productos cruzados** para poder despejar el valor de *h*, para así **calcular el cuarto valor faltante del problema**.	Mediante el uso de una **proporción**, la aplicación del **algoritmo de productos cruzados** y el uso de **operaciones básicas** como la multiplicación y la división y **calcular el resultado**.	Para verificar si el estudiante es capaz de **identificar el procedimiento correcto** que da solución al problema aplicando los criterios del teorema de Tales.

Reactivo 9	Para resolver el problema, se deben establecer una relación entre los lados correspondientes de los dos triángulos al plantear una igualdad de razones $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ con los datos proporcionados. Posteriormente, se debe **identificar los productos cruzados** para poder despejar la variable que se quiere encontrar (altura de la palma), y así **calcular el cuarto valor faltante**.	Utilizando herramientas como **la proporción**, el **algoritmo de productos cruzados**, las **propiedades de la igualdad** y **operaciones básicas** como multiplicación y división.	Según el sentido evaluativo del reactivo, se busca **reafirmar los conocimientos** antecedentes de los estudiantes, especifico al teorema de Tales, al solicitar la resolución de un problema donde se aplique dicho teorema.
Reactivo 10	Para resolver el problema, se debe **establecer una relación** entre el precio final del televisor con el porcentaje que representa del precio inicial, es decir, que el precio final es el 75% del precio inicial, para poder **encontrar el cuarto valor faltante** que sería el precio sin descuento del televisor.	Mediante el uso de herramientas como el **algoritmo de la regla de tres** y **operaciones básicas** como la multiplicación y la división.	Según el sentido evaluativo del reactivo, se busca que el estudiante demuestre un **dominio en temas antecedentes que le permita resolver problemas que implican razonamientos cuantificables**. En este caso se busca que el estudiante resuelva un problema del cálculo de porcentajes.

Tabla 41: Análisis vertical de las acciones concretas de los reactivos del Subgrupo 2 relativos a la proporcionalidad directa.

Respecto al ¿qué hace?

A pesar de que los cuatro reactivos que conforman el segundo subgrupo de análisis comparten situaciones diferentes como son la aplicación de los criterios de semejanza en triángulos, la aplicación del Teorema de Tales y el cálculo de porcentajes, comparten el que los estudiantes deben establecer una relación entre dos pares de datos proporcionados por problemas de cuarto valor faltante en el que uno es una incógnita y se tiene que encontrar su valor, a excepción del reactivo 10 en el que deben inferir el porcentaje que representa el precio final del televisor.

Respecto al ¿cómo lo hace?

Para establecer la relación entre dos pares de datos en los reactivos 7 y 8, se tiene que hacer uso explicito de herramientas como la proporción, para plantear la relación por medio de una igualdad de razones; y, por lo tanto, el algoritmo de productos cruzados, así como las propiedades de la igualdad que permitirán despejar la incógnita para que, por medio de operaciones básicas como la multiplicación y la división encontrar el valor faltante.

Por otro lado, los reactivos 9 y 10 permiten establecer una relación entre dos pares de datos, a partir de, no solo las herramientas de los reactivos 7 y 8, sino también mediante el algoritmo de la regla de tres y operaciones básicas como la multiplicación y la división.

Referente al ¿para qué lo hace?

Los reactivos 7 y 8, a pesar de poner en juego temas diferentes –semejanza de triángulos y teorema de Tales–, su sentido evaluativo busca identificar si el estudiante es capaz de reconocer el procedimiento correcto que lleva a la solución de un problema de cuarto valor faltante. Lo que nos muestra que, más que entender la relación que se puede establecer entre las magnitudes que se manejan en los problemas de los reactivos, los alumnos deben demostrar que son capaces de ordenar de manera correcta las variables del problema.

Al igual que los reactivos anteriores, los ítems 9 y 10 tienen un sentido evaluativo similar, a pesar de tratarse de temas diferentes como el teorema de Tales y el cálculo de porcentajes. Ambos buscan que el estudiante reafirme, o bien, que demuestre su dominio en resolver problemas en los que debe aplicar un razonamiento cuantificable, lo que permite, a diferencia de los otros dos reactivos, la aplicación de procesos diferentes a los que se establecen en las opciones de respuesta donde se muestra un procedimiento.

Análisis de los distractores

		Reactivo 7			Reactivo 8		
		Distractor 1	Distractor 2	Distractor 3	Distractor 1	Distractor 2	Distractor 3
Análisis psicométrico	¿El distractor se encuentra estructurado de manera coherente respecto a las demás opciones de respuesta?	No	No	No aplica	No	No	No
	¿El distractor es autónomo respecto a las demás opciones de respuesta?	Sí	Sí	No aplica	Sí	Sï	Sí
	¿El distractor destaca sobre los demás en contenido, apariencia, estructura gramatical o en algún término que aporte información indebida?	No	No	No aplica	Sí	No	No
	¿El distractor es descartable sin la necesidad de procedimientos matemáticos relacionados al reactivo?	No	No	No aplica	Sí	No	Sí
	¿El distractor tiene sentido en el contexto del problema?	Sí	Sí	No aplica	No	Sí	No
Análisis desde la Matemática Educativa	¿Cuál es la naturaleza del error puesta en juego?	Conceptual	Conceptual	No aplica	Procedimental	Conceptual	Conceptual
	¿Es un error común respecto a lo reportado en la investigación?	Sí	Sí	No aplica	Sí	Sí	Sí

Tabla 42: Análisis horizontal de los distractores de los reactivos del Subgrupo 2 relativos a lo proporcional directo. Parte 1.

		Reactivo 9			Reactivo 10		
		Distractor 1	Distractor 2	Distractor 3	Distractor 1	Distractor 2	Distractor 3
Análisis psicométrico	¿El distractor se encuentra estructurado de manera coherente respecto a las demás opciones de respuesta?	Sí	No	No	Sí	Sí	Sí
	¿El distractor es autónomo respecto a las demás opciones de respuesta?	Sí	Sí	Sí	Sí	Sï	Sí
	¿El distractor destaca sobre los demás en contenido, apariencia, estructura gramatical o en algún término que aporte información indebida?	No	No	Sí	No	No	Sí
	¿El distractor es descartable sin la necesidad de procedimientos matemáticos relacionados al reactivo?	No	No	Sí	No	No	Sí
	¿El distractor tiene sentido en el contexto del problema?	Sí	Sí	No	Sí	Sí	No
Análisis desde la Matemática Educativa	¿Cuál es la naturaleza del error puesta en juego?	Conceptual Procedimental	Conceptual Procedimental	Procedimental	Conceptual	Conceptual	Conceptual
	¿Es un error común respecto a lo reportado en la investigación?	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí

Tabla 43: Análisis horizontal de los distractores de los reactivos del Subgrupo 2 relativos a lo proporcional directo. Parte 2.

De manera general, observamos que la única directriz con la que todos los ítems cumplen es la segunda. La cual refiere a que ninguna opción de respuesta se sobrepone o solapa a otra. Sin embargo, ninguno de los cuatro reactivos cumple con todas las directrices psicométricas, ya que tres de ellos –reactivos 8, 9 y 10– contienen distractores que destacan en apariencia, que pueden ser descartados sin la necesidad de procedimientos matemáticos y que pierden su sentido en el contexto del problema. Además, a pesar de que el reactivo 7, cumple con la mayoría de las directrices, a excepción de que no se encuentra organizado de manera coherente, solo cuenta con dos distractores lo que tampoco es viable al tener cuatro opciones de respuesta.

No obstante, aunque psicométricamente hay distractores que deben corregirse, los errores conceptuales y procedimentales que se ponen en juego se encuentran reportados dentro de la literatura propia de la Matemática Educativa, como se mostró anteriormente en el análisis individual de cada uno de los reactivos. Por lo que consideramos conveniente que, para poder conservar dichos distractores en necesario modificar el contexto en el que se desarrolla el problema o bien, adaptar las magnitudes con las que se trabaja sin modificar por completo el contexto ya planteado.

Por último, observamos que la manera en cómo se presentan las opciones de respuesta, ayudan a cumplir con el sentido evaluativo del reactivo. Como observamos en el análisis individual, los reactivos 7 y 8 se diseñaron con la intención de que el estudiante identifique el procedimiento correcto que lleva a la solución de un problema de cuarto valor faltante por lo que, en las opciones de respuesta notamos que se plantean igualdades de razones y se muestran las posibles vías que llevan al resultado correcto, lo que permitiría visibilizar si el estudiante es capaz de ordenar correctamente las variables del problema. Por otro lado, las opciones de los reactivos 9 y 10, no muestran procedimientos, lo que va en concordancia con su sentido evaluativo, el cual es el estudiante demuestre su dominio en temas antecedentes como lo es el teorema de tales y el cálculo de porcentajes; por lo que el procedimiento deja de ser el centro para que este pueda hacer uso del razonamiento que le parezca correcto.

Subgrupo 3: reactivos que ponen en juego conceptos asociados.

Especificamos con anterioridad que los conceptos asociados que tomaríamos en consideración para su análisis son los que Reyes-Gasperini (2016b) establece, los cuales son: constante de proporcionalidad, pendiente o ángulo de inclinación, razón de cambio, sistema de referencia y fracción-razón. No obstante, después de revisar los 150 reactivos pertenecientes a las cinco pruebas estandarizadas seleccionadas, en busca de aquellos ítems en los que se especificara que tenían el objetivo de evaluar alguno de estos conceptos, solo encontramos dos reactivos pertenecientes al concepto de pendiente o ángulo de inclinación.

Análisis de la actividad matemática

	¿Qué hace?	¿Cómo lo hace?	¿Para qué lo hace?
Reactivo 11	Para resolver el reactivo, se necesitan identificar la coordenada 1 y la coordenada 2 para poder establecer x_1y y_1, así como x_2 y y_2 con la intención de sustituir las variables y_2y y_1 (en ese orden) en el numerador y las variables x_2 y x_1 (en ese orden) en el denominador. Posteriormente, se deben realizar las operaciones básicas necesarias para encontrar el resultado.	Haciendo uso de la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y operaciones básicas como la suma, resta y división.	Según el sentido evaluativo del reactivo, se busca identificar si el estudiante es capaz de obtener la pendiente o ángulo de inclinación de una recta a partir de dos puntos coordenados dados.
Reactivo 12	Determinar la pendiente a partir de la representación tabular del incremento de calorías utilizadas en el fenómeno por minutos, a partir de identificar las variables que representan a las coordenadas.	Mediante el uso de la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y operaciones básicas como la suma, resta, división y multiplicación.	Según el sentido evaluativo del reactivo, se busca identificar si el estudiante es capaz de determinar la pendiente de un fenómeno que se encuentra representado en una tabla de valores.

Tabla 44: Análisis vertical de las acciones concretas de los reactivos del Subgrupo 3 que ponen en juego conceptos asociados.

A Partir del análisis realizado de la actividad matemática de los reactivos en los que se especifica que se evaluara la pendiente o ángulo de inclinación, identificamos aspectos en común, a pesar de tratarse de reactivos en contextos diferentes.

Respecto al ¿qué hace?

En ambos problemas lo que el estudiante debe hacer es, a partir de identificar dos puntos coordenados, ya sea que se encuentren proporcionados en la base del reactivo o que deban retomarse de una tabla, sustituir los valores en la fórmula de la pendiente y realizar las operaciones necesarias.

Respecto al ¿cómo lo hace?

Para lograrlo será necesario el uso de herramientas como la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, ya que es la que permite sustituir los valores de dos puntos coordenados, operaciones básicas como la suma, resta y división, así como la ley de signos de números enteros.

Respecto al ¿para qué lo hace?

El sentido evaluativo que puede observarse en ambos reactivos es que el estudiante demuestre que es capaz de calcular la pendiente o ángulo de inclinación de una recta a partir de dos puntos coordenados, ya sea que estos sean proporcionados o bien, que el estudiante deba seleccionar de una serie de puntos el par de puntos que necesita para realizar su tarea.

		Reactivo 11			Reactivo 12		
		Distractor 1	Distractor 2	Distractor 3	Distractor 1	Distractor 2	Distractor 3
Análisis psicométrico	¿El distractor se encuentra estructurado de manera coherente respecto a las demás opciones de respuesta?	No	No	No	No	No	No
	¿El distractor es autónomo respecto a las demás opciones de respuesta?	Sí	Sí	Sí	Sí	Sï	Sí
	¿El distractor destaca sobre los demás en contenido, apariencia, estructura gramatical o en algún término que aporte información indebida?	No	No	No	No	No	No
	¿El distractor es descartable sin la necesidad de procedimientos matemáticos relacionados al reactivo?	No	No	No	No	No	No
	¿El distractor tiene sentido en el contexto del problema?	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
Análisis desde la Matemática Educativa	¿Cuál es la naturaleza del error puesta en juego?	Procedimental	Procedimental	Procedimental	Conceptual	Arbitrario	Arbitrario
	¿Es un error común respecto a lo reportado en la investigación?	Sí	Sí	Sí	No	No	No

Tabla 45: Análisis horizontal de los distractores de los reactivos del Subgrupo 3 que ponen en juego conceptos asociados.

A partir del análisis realizado a los distractores que conforman a las opciones de respuesta, podemos identificar que ambos reactivos podrían ser considerados viables desde la psicometría si cumplieran con la primera de las directrices, la cual señala que las opciones de respuesta deben encontrarse organizadas de manera coherente y como se observa en los reactivos 11 y 12 no es así.

Respecto a la naturaleza de los errores de los distractores, el más recurrente fue el procedimental, lo cual tiene sentido dado que ambos reactivos buscan que el estudiante pueda determinar la pendiente de una recta a partir de dos puntos coordenados y la manera de desarrollarlo es a través de sustituir los valores en la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, lo que lleva a que los errores se ubiquen en un acomodo incorrecto de las variables o bien el uso incorrecto de alguna operación. Cho y Nagle (2017) reportan que identificaron este tipo de errores en estudiantes universitarios que realizaron tareas rutinarias relacionadas con la pendiente, como lo son el uso de la relación reciproca, es decir, $\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$ que observamos en el distractor 3 del reactivo 11; el coordinar incorrectamente las coordenadas x e y, calculando $\frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}$ como se ve en el distractor 1 del reactivo 11, así como errores aritméticos en las sumas, restas, multiplicaciones y divisiones entre los números enteros. Por lo anterior, es que consideramos este tipo de errores comunes dentro de lo reportado en la literatura especializada.

Por otro lado, también observamos un error conceptual y dos arbitrarios, pertenecientes a los distractores del reactivo 12. Para este caso particular, consideramos al distractor 1 como conceptual, ya que una forma en la que encontramos que un estudiante podría llegar a la respuesta que se plantea es si considera a la variación que existe entre los minutos de ejercicio. Por otro lado, los distractores 2 y 3 los consideramos arbitrarios, dado que no encontramos una manera en la que se pudiera llegar a los resultados que plantean, así como tampoco encontramos reportado algún error que nos condujera a dichas respuestas.

Tomando en consideración que los reactivos buscan identificar que un estudiante domine el correcto acomodo que deben tener dos puntos coordenados para encontrar la pendiente de una recta, consideramos que sus diseños y los errores plausibles puestos en juego cumplen con su sentido evaluativo. No obstante, no encontramos pertinente a los dos errores arbitrarios, pues no permiten generar conclusiones pertinentes.

4.3 Resultados generales

A partir de los tres criterios establecidos en nuestro capítulo de metodología, fueron 12 de 150 reactivos con tres distractores cada uno, los que se seleccionaron para el análisis presentado. De los cuales seis pertenecen a aquellos en los que su especificación se establece que se evaluará la proporcionalidad o variación directa; cuatro los que no evalúan directamente lo proporcional directo, pero lo ponen en juego para resolver el reactivo y, del tercer criterio, acerca de seleccionar reactivos en los que se especifique que se evaluarán conceptos asociados a la variación directa –constante de proporcionalidad, pendiente o ángulo de inclinación, razón de cambio, sistema de referencia y fracción-razón–, solo obtuvimos dos, que pertenecen al concepto de pendiente o ángulo de inclinación.

Del análisis realizado de los distractores de cada uno de los reactivos, logramos ubicar ciertos resultados y aportes relevantes de nuestra investigación. El primero de ellos, es la clasificación de cuatro tipos diferentes de reactivos. Aquellos que cumplen con todas las directrices básicas de diseño y que ponen en juego errores reportados desde la investigación en Matemática Educativa o, bien, aquellos que no ponen en juego errores reportados. Finalmente, por el contrario, también se encuentran aquellos que no cumplen con todas las directrices psicométricas y que, además, no ponen en juego errores reportados o, de igual forma que los distractores anteriores, que sí disponen de un error reportado en la literatura de la disciplina.

De los 12 reactivos que se analizaron, solo uno cumplió con todas las directrices básicas de diseño –el reactivo 3– en cada uno de sus distractores, así como también puso en juego errores, en este caso procedimentales, reportados dentro de la disciplina. Por otro lado, fue solo uno de los reactivos –el reactivo 2–, que cumplió con todas las directrices psicométricas y que, sin embargo, no se utilizaron en todos sus distractores errores que encontráramos reportados dentro de la Matemática Educativa, siendo también clasificados como errores arbitrarios, pues de igual forma, no encontramos una manera plausible en la que se pudiera llegar al resultado planteado.

Por otro lado, son 3 los reactivos que no cumplen con todas las directrices básicas de diseño en sus distractores –reactivos 4, 5 y 12–, así como el no presentar un error reportado dentro de la disciplina, siendo la mayoría de ellos arbitrarios, es decir, que tampoco encontramos una manera en la que el estudiante pueda llegar al resultado que se plantea. Ahora bien, los siete reactivos restantes son aquellos que no cumplen con todas las directrices psicométricas, pero ponen en juego errores que consideramos comunes, dado que los encontramos reportados dentro de la literatura de la Matemática Educativa.

Este último grupo de reactivos los consideramos importantes, pues al llevar a cabo el pilotaje de los ítems que se plantea que conformen una prueba estandarizada, incluso después de analizar estadísticamente los resultados de la aplicación final de la prueba, si una respuesta no correcta llega a presentar incongruencias al no cumplir con alguna de las directrices, todo el reactivo es eliminado de las siguientes aplicaciones.

No obstante, cuando identificábamos los errores conceptuales y procedimentales puestos en juego en cada uno de los distractores de los reactivos, reportados dentro de la literatura de la disciplina por diferentes autores y autoras, justificaban también su aparición en la aplicación de diversas situaciones o experiencias didácticas, lo que nos lleva a considerar que, al observar que la mayoría de los reactivos presenta deficiencias en su diseño psicométrico, pero aún así, los errores que se ponen en juego en los distractores son considerados comunes por los diseñadores y la disciplina, nos lleva a considerar la posibilidad de idear o identificar un contexto diferente o, bien, utilizar variables diferentes en los problemas que lleven a los errores plausibles a no destacar en apariencia o ser descartables sin la necesidad de procedimientos matemáticos. En consecuencia, se muestra la importancia de introducir a la Matemática Educativa dentro del análisis de reactivos, pues es esta la que permitiría la búsqueda de contextos o situaciones viables.

Por otra parte, observamos que hay distractores que no cumplen con alguna de las directrices de diseño y no por ello el reactivo se volvía descartable. Destacando así, la importancia de algunas directrices sobre otras, siendo estas que el distractor no debe destacar en apariencia, contenido ni en estructura gramatical, que no debe ser descartable sin la necesidad de procedimiento matemáticos y que el resultado debe tener sentido en el contexto del problema.

Ejemplificando lo anterior, los distractores de los reactivos 4, 7, 11 y 12, no cumplen con la directriz de encontrarse organizados de manera coherente, no obstante, un estudiante no podría prescindir de esas respuestas. Por otro lado, los reactivos 5 y 10, tampoco cumplen con la primera directriz de diseño psicométrico, sin embargo, es porque destacan en apariencia y estructura, así como en contenido, lo que los vuelve descartables sin la necesidad de procedimientos matemáticos.

Respecto a la naturaleza de los errores puestos en juego en cada uno de los 35 distractores, los más utilizados son aquellos procedimentales y conceptuales, apareciendo un total de 12 y 11 veces, respectivamente. Le siguen los errores arbitrarios, aquellos en los que no encontramos una manera en que el estudiante pueda llegar a ese resultado y tampoco lo identificamos en la revisión realizada al aparecer un total de 7 veces y, por último, se presentan un total de 5 veces aquellos errores combinados, es decir, que un mismo distractor hacia uso de más de un error con diferente naturaleza.

La aparición de los errores arbitrarios, aquellos en los que no encontramos una manera en que el estudiante pueda llegar al resultado planteado y que tampoco lo identificamos en la revisión realizada, nos permite inferir que una de las posibilidades por la que surgieron es resultado de la cantidad de opciones de respuesta que conforman al reactivo. Esto se debe a lo que retomamos anteriormente en nuestro capítulo de metodología de los autores Moreno, Martínez y Muñiz (2004). En donde hacemos mención que el utilizar más de tres opciones –como en el caso de los reactivos analizados–, conlleva una mayor dificultad para diseñar errores plausibles que no den información indebida a los estudiantes, llevando en ocasiones, a utilizar errores que no permiten que el ítem cumpla con su sentido evaluativo.

Por otro lado, es necesario resaltar que, dada la manera en que se presentaban las opciones de respuesta en los datos analizados, observamos que aquellos en los que se presenta el procedimiento obligan al estudiante a utilizar un solo proceso de resolución y determinadas herramientas como el caso del reactivo 1, que en lugar de utilizar una igualdad de razones se podría optar por determinar el valor unitario de la cantidad de comida para un solo caballo y multiplicarlo por la cantidad de caballos a los que se busca alimentar, aplicar directamente el algoritmo de la regla de tres o aproximar el valor buscado, ya que se trata de poco menos del doble de la comida que se necesitan para 8 caballos.

En cambio, cuando las opciones no muestran procedimientos, sino que solo presentan el resultado, el alumno tiene la posibilidad de utilizar los procesos y herramientas que considere le permitirán encontrar o aproximar la respuesta correcta, aunque estos no sean tradicionales. En consecuencia, consideramos que este tipo de opciones son mejores, ya que no encasillan al estudiante a un único proceso de resolución y les permitiría hacer uso de herramientas que ellos consideren útiles.

Ahora bien, del análisis de la actividad matemática llevado a cabo a cada uno de los reactivos, nos permitió observar que la manera más común de poner en juego a la proporcionalidad directa es a través de un problema o ejercicio de cuarto valor faltante en diferentes contextos como lo son: el matemático, al mostrar una proporción sin contexto asociado; el geométrico, al solicitar calcular el valor de un lado desconocido, y lo que podríamos denominar un contexto social o cotidiano, al plantear situaciones a las que podrían enfrentarse en el día a día, como lo son el cálculo de porcentajes.

La acción directa que deben llevar a cabo los estudiantes para resolver los problemas de cuarto valor faltante es el establecer una relación entre las magnitudes del enunciado, a través de una igualdad de razones $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; estableciendo al algoritmo de productos cruzados $ad = bc$ –donde uno de los cuatro términos es una incógnita–, las propiedades de la igualdad para despejar la variable buscada y a las operaciones básicas como la multiplicación y la división, como herramientas predilectas para la resolución de este tipo de problemas, y por ende, para el tratamiento de lo proporcional.

En otro orden de ideas, dado el sentido evaluativo de la mayoría de los reactivos que evalúan y ponen en juego a la proporcionalidad directa, el cual se ubica en que el estudiante identifique los elementos de las proporciones mediante el establecimiento de una igualdad de razones y el procedimiento correcto, así como las opciones de respuesta que muestran una serie de pasos que llevan a la respuesta correcta o incorrecta, se muestra como en la matemática escolar lo proporcional se reduce a la noción de calcular, es decir, la proporcionalidad se establece como el determinar el correcto acomodo de las magnitudes en una proporción para, posteriormente, seguir una serie de operaciones o cálculos matemáticos.

Lo anterior, podemos corroborarlo a través de la cantidad de reactivos que buscaban evaluar a los conceptos asociados –aquellos conceptos tomados como sinónimos que son importantes dentro de la proporcionalidad directa–, pues, si bien, se observaron ítems en los que hacía falta utilizar una razón para resolver el problema, ninguno se centraba en evaluar el establecimiento o identificación de una razón o una constante de proporcionalidad. Y, dado el tratamiento que se le daba a las proporciones, la razón fue mayormente vista como una fracción, en lugar de una unidad de medida.

En este sentido, la noción de conmensurabilidad que se plantea en Reyes-Gasperini (2016b) queda relegada en los reactivos estandarizados referentes a la proporcionalidad directa, pues ninguno de ellos pone en juego que el estudiante logre percatarse de que, al plantear una relación entre dos magnitudes diferentes en una razón, lo que hace es algo más profundo, el de establecer una nueva unidad de medida que le permite medir aquello que no entra entre las medidas estándares.

En suma, como resultado principal de este análisis de la actividad matemática, observamos que la evaluación de la proporcionalidad directa se reduce a evaluar un algoritmo carente de funcionalidad, al centrar la atención en el cálculo del cuarto valor faltante o los cambios de registros (representación tabular a gráfica, por ejemplo), prestando más atención al aspecto numérico, cuánto varia, más que al cualitativo, al cómo varia, es decir, se soslaya la relación que existe entre la elección de magnitudes que permite la construcción de una unidad de medida con el fin de conmensurarlas.

Capítulo 5: Conclusiones

A manera de conclusión, y pretendiendo atender nuestras preguntas iniciales, el análisis de la actividad matemática muestra que la noción que más se puso en juego en los reactivos relacionados a la proporcionalidad directa es la de calcular, al centrar los reactivos en el correcto acomodo de las variables en una igualdad de razones y seguir una serie de pasos o hacer algún cálculo matemático, lo que nos permitió vislumbrar las primeras evidencias del *discurso Matemático Escolar*, como se reporta en Reyes-Gasperini (2016b).

Además, nos dejó identificar que los distractores pueden influir en el sentido evaluativo del reactivo si no se encuentran adecuadamente diseñados. Si estas opciones se vuelven descartables sin la necesidad de aplicar alguna noción, herramienta o procedimiento matemático, un estudiante que no conoce la respuesta correcta podría seleccionarla, a pesar de no entender lo que debe encontrar, ni la manera en que podría encontrarlo, por lo que el objetivo educativo final del ítem se perdería.

En suma, los aspectos que resultan de vital importancia para que un distractor sea considerado viable y no sea descartado por aquellos estudiantes que no conocen la respuesta correcta, son aquellos que no deben resaltar en apariencia –como longitud, algún dato obvio o la cantidad de dígitos que conforman a cada una de las respuestas–, el contenido matemático –como los valores muy dispersos de las demás opciones– y, por último, el sentido en el contexto del problema, es decir, que la respuesta no vaya en contra de lo que se esta solicitando o de las variables ya proporcionadas. Por lo que deben ser tomadas en consideración al momento de analizar la construcción de los reactivos. Además, de que también se debe considerar el que estas directrices deben cumplirse haciendo uso de *errores comunes*, pues en caso de no ser así, se hace necesario la reestructuración del contexto del problema o las variables que pone en juego.

Capítulo 6: Prospectivas

A pesar de los resultados y las conclusiones que obtuvimos a partir del análisis realizado, consideramos que aún quedan algunas interrogantes abiertas, sugerimos las siguientes:

En primer lugar, al considerar a la Matemática Educativa en el análisis de reactivos, se podrían proponer distractores más plausibles, fundamentadas a partir de las investigaciones y resultados reportados dentro de la disciplina que nos permitan proporcionar indicios del por qué se seleccionan esas opciones de respuesta y cómo se podrían abordar en el aula de clase. No obstante, para confirmar la validez de nuestra hipótesis, sería necesario someter los reactivos rediseñados a un pilotaje que nos permita estudiar en detalle su comportamiento, por lo que, la recolección de evidencia empírica podría considerarse en un futuro como un proyecto de investigación, dada la cantidad de tiempo y espacio que serían requeridos para la modificación de los distractores y contextos de los problemas, así como su análisis psicométrico.

Por otro lado, consideramos que el análisis de reactivos realizado podría proporcionar a estudiantes del profesorado, profesores en servicio e investigadores del campo, una herramienta que les permita diseñar reactivos de manera más fundamentada para una prueba estandarizada, así como generar opciones para la intervención educativa y no solamente analizarlos desde un punto de vista sintáctico o metodológico. Si bien esto exige de un estudio de campo aun más amplio que el realizado en esta investigación, pero puede muy bien, fundarse en ella.

Por último, tomando en cuenta nuestro posicionamiento teórico y lo que se establece acerca de la proporcionalidad directa en Reyes-Gasperini (2016b) es importante comenzar a pensar en reactivos que nos permitan analizar la conmensurabilidad y la inconmensurabilidad. Es decir, diseñar una conjunción de reactivos que nos permitan avanzar entre las fases comparar, equivaler y conmensurar, con la intención de pasar de evaluar un mecanismo de ordenamiento y procedimientos para prestar más atención a la relación proporcional entre las variables; al cuál y cómo es la relación entre ellas, que el estudiante sea capaz de vislumbrar a la razón como una unidad de medida que le permitirá medir aquello que no es conmensurable.

Referencias

Alcaraz, N., Caparrós, R., Soto, E., Beltrán, R., Rodríguez, A. y Sánchez, S. (2013). ¿Evalúa PISA la competencia lectora? *Revista de Educación, 360*, 577-599. Doi: 10.4438/1988-592X-RE-2011-360-130

Adjiage, R., y Pluvinage, F. (2007). An Experiment in Teaching Ratio and Proportion. *Educational Studies in Mathematics*, 65(2), 149–175. doi:10.1007/s10649-006-9049-x

Aroza, C., Godino, J., y Beltrán-Pellicer, P. (2016). Iniciación a la innovación e investigación educativa mediante el análisis de la idoneidad didáctica de una experiencia de enseñanza sobre proporcionalidad. *AIRES*, 6(1).

Berezner, A., y Adams, R. (2017). Why Large-Scale Assessments Use Scaling and Item Response Theory. En P. Lietz, J. Cresswell, K. Rust and R. Adams. *Implementation of Large-Scale Education Assessment* (pp.323-356). Reino Unido: John Wiley & Sons Ltd.

Cabrera, L., Valdés, M., y Flores, O. (2018). El análisis de los reactivos de Matemáticas y su interpretación con respecto al aprendizaje. En INEE. (Ed.). *Tendencias de Investigación e Innovación en Evaluación Educativa. Memoria del Simposio* (pp. 113-120). INEE: México.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. (2da. Edición). Editorial Gedisa: España.

Cantoral, R., Montiel, G., y Reyes-Gasperini, D. (2015). Análisis del Discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 8, 9-28.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico (trad. Ricardo Barroso Campos). *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(2), 221-266.

Cho, P., y Nagle, C. (2017). Procedural and conceptual difficulties with slope: An analysis of students‟ mistakes on routine tasks. *International Journal of Research in Education and Science*, *3*(1), 135-150.

Clements, M. A., & Ellerton, N. F. (1996). Mathematics education research: Past, present and future. Bangkok: UNESCO.

Contreras, L., Carrillo, J., Zakaryan, D., Muñoz-Catalán, M., y Climent, N. (2012). Un estudio exploratorio sobre las competencias numéricas de los estudiantes para maestro. Bolema, 26(42B), 433-457.

Crespo, C. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología*. (Tesis de doctorado). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. Ciudad de México, México.

Dorans N., y Cook, L. (2016). *Fairness in educational assessment and measurement*. Nueva York: Taylor & Francis.

Espinoza-Ramírez, L. (2009). *Una evolución de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio socioepistemológico*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Ciudad de México, México.

Fernández, M., Alcaraz, N. y Sola, M. (2017). Evaluación y pruebas estandarizadas: Una reflexión sobre el sentido, utilidad, y efectos de estas pruebas en el campo educativo. *Revista Iberoamericana de Evaluación Educativa, 10*(1), 51-67. Doi: 10.15366/riee2017.10.1.003

Haladyna, T., y Rodríguez, M. (2013). *Developing and validating test items*. Londres: Routledge.

Hart, K. (1988). Ratio and Proportion. En J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp.198-219). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. (2005). *Manual técnico para la construcción de reactivos.* México: INEE.

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (2019). Manual técnico del Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes PLANEA 2015. Educación media superior. México: autor.

Keitel, C., y Kilpatrick, J. (1999). The rationality and irrationality of international comparative studies. En G. Kaiser, E. Luna & I. Huntley (Eds.), *International comparisons in mathematics education* (pp. 241–256). Londres: Falmer Press.

Martínez-Rizo, F. (2008). Presentación. *Evaluación del aprendizaje*. INEE: México.

Martínez-Rizo, F. (2009). Evaluación formativa en el aula y evaluación a gran escala: hacia un sistema más equilibrado. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 11*(2). https://redie.uabc.mx/redie/article/view/231

Martínez-Rizo, F. (2012). *Evaluación en el aula: Retos y desafíos*. INEE: México.

Maz, A., y Gutiérrez, M. (2008). Errores de los estudiantes de magisterio frente a situaciones que implican porcentajes. *Investigación*, *17*(1), 59-69.

Misailidou, C., y Williams, J. (2002). "Ratio": raising teachers´ awareness of children´s thinking. En *Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level),* ICTM2.

Mochón, S. (2012). Enseñanza del razonamiento proporcional y alternativas para el manejo de la regla de tres. *Educación Matemática*, *24*(1), 133-157.

Moreno, R., Martínez, R., y Muñiz, J. (2004). Directrices para la construcción de ítems de elección múltiple. *Psicothema*, *16*(3), 490-497.

Muñiz, J., y Fonseca-Pedrero, E. (2019). Diez pasos para la construcción de un test. *Psicothema*, *31*(1), 7-16. Doi: 10.7334/psicothema2018.291

Nortvedt, G. y Buchholtz,N. (2018). Assessment in Mathematics Education: responding to issues regarding methodology, policy, and equity. *ZDM*, 50, 555-570. doi: 10.1007/s11858-018-0963-z

Osterlind, S. (2002). *Constructing test items: Multiple-choice, constructed-response, performance and other formats* (2da. Edición.). Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

Paek, P. (2012). Using learning trajectories in large-scale mathematics assessment. En *Procedings of the 12th International Congress on Mathematical Education: Topic Study Group 33* (pp. 6711-6720). Seoul, Korea.

Resnick, L., William, D., Apodaca, R. y Rangel, E. (2010). The relationship between assessment and the organization and practice of teaching (397-402). En Peterson, P., Baker, E. y McGaw, B. (3° ed.). Nueva York: Elsevier-Academic Press.

Reyes-Gasperini, D. (2016a). *Empoderamiento docente y socioepistemología. Un estudio sobre la transformación educativa en Matemáticas*. Editorial Gedisa: España.

Reyes-Gasperini, D. (2016b). *Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: una alternativa de intervención para la transformación y la mejora educativa.* (Tesis de doctorado). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. Ciudad de México, México.

Salas, E. (2012). Un estudio de las creencias e implicaciones de la evaluación educativa en matemáticas de secundaria. (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. Ciudad de México, México.

Shalem, Y., Sapire, I., y Huntley, B. (2012). How curriculum mapping of large-scale assessment can benefit mathematics teachers. En *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education: Topic Study Group 33* (pp. 6601-6610). Seoul, Korea.

Shepard, L. (2008). La evaluación en el aula. (Martha Domís, trad.). En Brennan, R (Ed.), *Educational Measurement* (623-646). México: INEE. (Obra original publicada en 2006).

Shimizu, Y. (2011). Building bridges between large-scale external assessment and mathematics classrooms: A japanese perspective. En B. Kaur y Y. Wong (Eds.), *Assessment in the mathematics classroom: 2011 Association of Mathematics Educators Yearbook* (pp. 217-235). Singapore: World Scientific Publishing.

Sola, M. (1999). El análisis de las creencias del profesorado como requisito de desarrollo profesional. En A. Pérez, J. Barquín y F. Angulo (Eds.), *Desarrollo profesional del docente. Política, investigación y práctica* (pp. 661-683). Madrid: Akal.

Soto. D. (2010). *El Discurso Matemático Escolar y la Exclusión. Una visión socioepistemológica.* (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. Ciudad de México, México.

Stobart, G. (2010). Tiempos de pruebas: Los usos y abusos de la evaluación. (Pablo Manzano Bernárdez, trad.). España: Ediciones MORATA, S. L. (Obra original publicada en 2008).

Suurtamm, C., Thompson, D., Young, R., Díaz, L., Sayac, N., Schukajlow, S., Silver, E., Ufer, S. y Vos, P. (2016). *Assessment in Mathematics Education. Large-Scale Assesment and Classromm Assesment*. ICME-13 Topical Surveys. Hamburg: ICME13-Springer Open.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Becker, J. (2003). Towards a didactic model for assessment design in mathematics education. In A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), *Second international handbook of mathematics education* (pp. 686–716). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publis

Anexo 1

		Reactivo 1			Reactivo 2			Reactivo 3			Reactivo 4			Reactivo 5			Reactivo 6		
		Distractor 1	Distractor 2	Distractor 3	Distractor 1	Distractor 2	Distractor 3	Distractor 1	Distractor 2	Distractor 3	Distractor 1	Distractor 2	Distractor 3	Distractor 1	Distractor 2	Distractor 3	Distractor 1	Distractor 2	Distractor 3
Análisis psicométrico	¿El distractor se encuentra estructurado de manera coherente respecto al contenido en estudio?	No	No	No	Sí	Sí	Sí	No aplica	No aplica	No aplica	No	No	No	No aplica.	No aplica.	No aplica.	No	No	No
	¿El distractor es autónomo respecto a las demás opciones de respuesta?	Sí	Sí	Sí	Sí	Sï	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
	¿El distractor destaca sobre los demás en contenido, apariencia, estructura gramatical o en algún término que aporte información indebida?	No	Sí	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	Sí	Sí	No	No	No
	¿El distractor es descartable sin la necesidad de procedimientos matemáticos relacionados al reactivo?	No	Sí	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	Sí	Sí	Sí	No	Sí
	¿El distractor tiene sentido en el contexto del problema?	Sí	No	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	No	No	No	Sí	Sí
Análisis desde la Matemática Educativa	¿Cuál es la naturaleza del error puesta en juego?	Conceptual	Conceptual	Conceptual / Procedimental	Procedimental	Arbitrario	Arbitrario	Procedimental	Procedimental	Procedimental	Procedimental	Procedimental	Arbitrario	Procedimental	Arbitrario	Arbitrario	Conceptual / Arbitrario	Conceptual / Procedimental	Conceptual
	¿Es un error común respecto a lo reportado en la investigación?	Sí	Sí	Sï	Sí	No	No	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	No	No	No	No	Sí	Sí	Sí

Tabla 46: Análisis grupal de los distractores de los reactivos del Subgrupo 1 que evalúan específicamente a la proporcionalidad directa.

Anexo 2

		Reactivo 7			Reactivo 8			Reactivo 9			Reactivo 10		
		Distractor 1	Distractor 2	Distractor 3	Distractor 1	Distractor 2	Distractor 3	Distractor 1	Distractor 2	Distractor 3	Distractor 1	Distractor 2	Distractor 3
Análisis psicométrico	¿El distractor se encuentra estructurado de manera coherente respecto al contenido en estudio?	No	No	No aplica	No	No	No	Sí	No	No	Sí	Sí	Sí
	¿El distractor es autónomo respecto a las demás opciones de respuesta?	Sí	Sí	No aplica	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
	¿El distractor destaca sobre los demás en contenido, apariencia, estructura gramatical o en algún término que aporte información indebida?	No	No	No aplica	Sí	No	No	No	No	Sí	No	No	Sí
	¿El distractor es descartable sin la necesidad de procedimientos matemáticos relacionados al reactivo?	No	No	No aplica	Sí	No	Sí	No	No	Sí	No	No	Sí
	¿El distractor tiene sentido en el contexto del problema?	Sí	Sí	No aplica	No	Sí	No	Sí	Sí	No	Sí	Sí	No
Análisis desde la Matemática Educativa	¿Cuál es la naturaleza del error puesta en juego?	Conceptual	Conceptual	No aplica	Procedimental	Conceptual	Conceptual	Conceptual Procedimental	Conceptual Procedimental	Procedimental	Conceptual	Conceptual	Conceptual
	¿Es un error común respecto a lo reportado en la investigación?	Sí	Sí	No aplica	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí

Tabla 47: Análisis grupal de los distractores de los reactivos del Subgrupo 2 relacionados a la proporcionalidad directa.