Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemática Educativa

Interpretación semiótica de desigualdades e inecuaciones en la recta numérica

TESIS

Que presenta:

Sharon Samantha Membreño Estrada

para obtener el Grado de

Maestro en Ciencias

en la especialidad de

Matemática Educativa

Directora de la Tesis:

Dra. Claudia Margarita Acuña Soto

Ciudad de México agosto, 2021

Agradezco al **Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología** (Conacyt) por brindarme el apoyo económico para realizar mis estudios de maestría.

Sharon Samantha Membreño Estrada

Becaria No. 1018716

AGRADECIMIENTOS

A Dios, por guiarme por el mejor camino, por darme la sabiduría necesaria para afrontar cada situación, por llevarme a un país muy hermoso para cumplir uno de mis principales sueños y nunca abandonarme en cada paso dado.

… a mi familia: en especial a mi madre, María Felícita Estrada, mi padre, Wilfredo Membreño, mi hermana, Karen y mi sobrino, Diego, que a pesar de la distancia y desde el primer día siempre me brindaron su apoyo y cariño. Gracias por confiar en cada una de mis decisiones y ayudarme a nunca darme por vencida, por siempre estar ahí en los momentos más especiales

… a la Dra. Claudia, por la confianza brindada al aceptarme para estudiar en el Cinvestav, por todo el apoyo brindado a lo largo de toda la maestría, por cada momento de discusión, cada consejo y cada enseñanza en todo el proceso, para benificio personal y académico

… a mis profesores, Gisela Montiel, Rosa María Farfán, Ricardo Cantoral, Francisco Cordero, quienes nos motivaron desde el día uno compartiendo su conocimiento con nosotros, por generar discusiones y aprendizaje necesarios para mi formación y encontrar el gusto en cada uno de ustedes por la investigación, por darnos a conocer las diferentes perspectivas que hay sobre matemáticas educativas

… a mis compañeros de generación, por cada uno de los momentos compartidos, cumpleaños, reuniones grupales y discusiones en cada uno de los seminarios.1 El mejor de los éxitos en cada proyecto que realicen

… a mis compañeros académicos, Jimy, Enrique, Fabiola, Verónica, Noé por las experiencias compartidas en los seminarios de doctorado, por las discusiones todos los domingos, por su apoyo y amistad incondicional, por estar presentes en cada situación para mejorar personal y académicamente

… a todos mis colegas hondureños, quienes estamos juntos en un país distinto al nuestro, persiguiendo nuestros sueños, por cada momento compartido, por los viajes y visitas a muchos lugares hermosos, por motivarme día a día a mejorar para ayudar a mejorar el futuro del país, por su amistad y cada momentos de discusión

… por último y no menos importantes a todos los amigos de distintos paises, Honduras, México, Cuba, Costa Rica, Colombia, por su apoyo incondicional y siempre confiar en

cada paso que doy, que algunos a pesar de la distancia no hemos compartido momentos hermosos, pero el cariño y la amistad siempre está presente en cada mensaje

A todos muchas gracias

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE IMÁGENES

RESUMEN

Investigamos el desempeño de una estudiante de secundaria de Honduras, en tareas de desigualdades numéricas e inecuaciones lineales de la forma $x < a$, $x > a$ con a entero, usando el modelo de la recta numérica, con el objetivo de indagar lo relativo al uso de los signos para establecer el orden y la ubicación de marcas y números con motivo de las tareas propuestas. La estudiante respondió un cuestionario en línea, dividido en dos actividades, y una entrevista intervención, que incluía la ubicación de números simétricos asociados a la multiplicación por negativos (-1). Encontramos que el desempeño de la estudiante mostró que, la ordenación y la ubicación espacial de signos (marcas, números e intervalos) no fueron suficientes para establecer el conjunto solución de dos condiciones simultáneas en el tratamiento de las desigualdades, lo que nos dejó ver que esta tarea presenta distintos tipos de complejidades: 1. Los intervalos pueden interpretarse como índices en lugar de símbolos, la complejidad se sitúa en un nivel del desconocimiento de su uso; 2. La interpretación lógica de dos condiciones simultáneas que lo sitúa en un nivel lógico y 3. La combinación de las complejidades anteriores, aumentando la combinación de números enteros positivos y negativos, los dos tipos de desigualdades para marcar la zona solución. Al mismo tiempo, indagamos la posibilidad de usar la idea de las posiciones simétricas de los números, para introducir el fenómeno del cambio de signos cuando multiplicamos por un número negativo. Consideramos en este trabajo que, la recta numérica admitió tres usos del modelo: 1. Como conjunto de índices que sugieren posiciones relativas y globales, 2. Como medio para verificar las soluciones y 3. Como artefacto para organizar y dar cuerpo a los múltiples signos asociados a las desigualdades numéricas y las inecuaciones lineales, este último tratamiento fue el que permitió a la estudiante desarrollar una praxis reflexiva y lograr la objetivación de la tarea.

ABSTRACT

We investigate the performance of a high school student from Honduras in tasks of inequalities with numbers and linear inequalities of the form $x < a$, $x > a$ with a integer, using the model of the number line, with the objective of investigating the use of signs to establish the order and location of marks and numbers in the proposed tasks. The student answered an online questionnaire (divided into two activities) and an intervention interview, which included the location of symmetrical numbers associated with multiplication by negatives (-1). We found that the student's performance showed that the ordering and spatial location of signs (marks, numbers and intervals) were not sufficient to establish the solution set of two simultaneous conditions in the treatment of inequalities, which let us see that this task presents different types of complexities: 1. Intervals can be interpreted as indexes instead of symbols, the complexity is at a level of ignorance of their use; 2. The logical interpretation of two simultaneous conditions that places it at a logical level and 3. The combination of the previous complexities, increasing the combination of positive and negative integers; the two types of inequalities to mark the solution zone. At the same time, we investigate the possibility of using the idea of symmetric positions of numbers to introduce the phenomenon of change of signs when we multiply by a negative number. We consider in this work, that the number line admitted three uses of the model: 1. as a set of indices suggesting relative and global positions, 2. to verify solutions, and 3. as an artifact to organize and give body to the multiple signs associated with inequality and linear inequalities, this last treatment was the one that allowed the student to develop a praxis reflective and achieve the objectification of the task.

INTRODUCCIÓN GENERAL

El presente trabajo tiene por objetivo investigar el uso de los signos asociados al modelo didáctico y matemático de la recta numérica, para interpretar: el orden, la ubicación espacial y la posición relativa de los números, particularmente en lo que se refiere a los enteros positivos y negativos.

Abordaremos las desigualdades numéricas e inecuaciones lineales, con una población que tiene como antecedentes académicos el manejo del orden y la ubicación de números dependiendo su valor, así como su comparación de valores haciendo uso del signo de desigualdad.

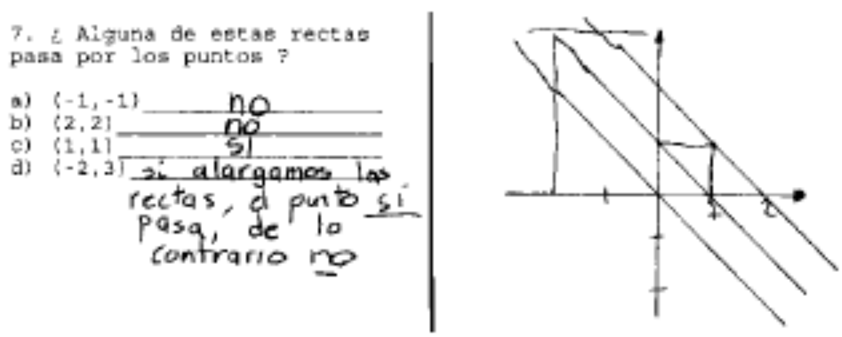
El modelo de la recta numérica ha sido utilizado para enseñar a los estudiantes la numeración, aprovechando la posición relativa de los números en la recta numérica. Distintos investigadores ofrecen propuestas para llevar a cabo, no sólo tareas de ordenación, sino para operar o incluso para averiguar la psicología del sentido positivo versus negativo.

En nuestro caso, consideramos que las tareas de ordenación, ubicación espacial y posición relativa se apoyan en un uso adecuado de los signos involucrados como son los números, pero también las marcas y hasta los segmentos unitarios, signos que pueden ser considerados como artefactos que serán base de las tareas que se proponen, actividad que se apoya en el conocimiento anterior, todo ello en el ámbito de una participación conjunta entre el investigador y la estudiante con quien trabajamos en esta investigación.

Los problemas de interpretación simbólica de las representaciones gráficas, como la recta numérica, han sido ampliamente estudiados y en muchos casos encontramos que se hace diferencias atendiendo al concepto y al objeto de conocimiento, es decir, entre los conceptos matemáticos y sus propiedades figurales, Fischbein (1993); entre la representación y lo representado, Duval (2006); sobre sus propiedades ostensivas y no ostensivas, Godino (2012), y qué, de manera general apuntan a la inclinación de los estudiantes a hacer un tratamiento de las representaciones gráficas más por su apariencia que por las propiedades que les dan sentido matemático.

Es importante que se considere a las representaciones gráficas como vehículos que permiten dar cuerpo a los conceptos matemáticos, como en el siguiente caso donde la interpretación de un estudiante de secundaria da sentido a los símbolos gráficos que mostramos enseguida:

Imagen 1: ¿Algunas de estas rectas pasan por los puntos?



Tomado de: Acuña (2009)

Para este estudiante, la recta es un objeto con cierta dimensión y se pone en duda la posibilidad de modificarla o no, en independencia de la definición para las rectas sobre su extensión, por interpretaciones como éstas es que nos interesa detectar hasta donde este efecto se presenta en el tratamiento del modelo de la recta numérica y cuáles son los obstáculos para su correcta interpretación, desde el punto de vista simbólico.

Particularmente, en lo que se refiere a lo que hemos llamado una *ordenación profunda,* que no sólo requiere de colocar los números en sus respectivos lugares y compararlos, sino de la consideración de los signos como los intervalos unitarios entre los enteros o la de considerar obligadamente a números faltantes que no son sugeridos en una secuencia desordenada de números cualesquiera.

Para llevar a cabo esta investigación, desarrollamos un estudio de caso con una estudiante de octavo grado de secundaria de Honduras con una edad de 14 años, quien fue encuestada a través de un cuestionario en línea, luego del cuál se llevó a cabo una entrevista tipo intervención para tener evidencias más profundas del proceso de desarrollo de las tareas.

Encontramos que, aunque la estudiante tiene un buen manejo en las tareas de ordenación, ubicación y comparación, estos conocimientos no fueron suficientes para resolver las tareas posteriores que requerían de la aplicación de varias condiciones simultáneas de la misma manera que cuando se incluían varios signos de distinta índole (+ ; - ; < ; >).

La entrevista - intervención provocó la aparente superación de estos obstáculos, sin embargo, éstos se manifestaban ocasionalmente para localizar la zona solución de las inecuaciones que incluían números negativos y positivos, al mismo tiempo que variaciones en los signos de desigualdad, obstáculos que superó al recurrir al modelo de la recta numérica que funcionó como instrumento de mediación semiótica para darle sentido a esas tareas.

Respecto a la *ordenación profunda,* que incluye los segmentos unitarios y los números faltantes en secuencias numéricas, la estudiante utilizó los segmentos unitarios en todo momento, en particular en las tareas donde se presentan secuencias desordenadas o aquellas que no conservan sus espacios homogéneos.

Esta investigación nos ha permitido observar que el conocimiento del orden, la ubicación y posición relativa, que se requiere para usar el modelo de la recta numérica, más allá de sus funciones de ilustración, debe atender el papel de los signos que no se detectan a primera vista, como los segmentos unitarios o números faltantes como condición obligada para una *ordenación profunda* que permita incorporar las propiedades de orden y proporcionalidad de la disposición de los números y marcas de la recta numérica para el adecuado uso del modelo que requiere de la participación de todos los signos involucrados.

A continuación, se presentan los antecedentes de la investigación, basados en los libros de texto de Honduras y resultados relevantes de investigaciones sobre desigualdades numéricas e inecuaciones lineales en la enseñanza.

1. ANTECEDENTES

1.1. INTRODUCCIÓN

El entorno educativo de interés se concentra en las condiciones de la República de Honduras, debido a que es la intención de la autora prepararse para desarrollar su labor en ese país, además, de que el tratamiento de las desigualdades y la inecuaciones no se abordan en todos los países como lo abordan en Honduras, lo que hace diferencia para los antecedentes requeridos en esta investigación.

Para el desarrollo de la siguiente investigación tendremos en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes, por ello, se hizo una inspección de la enseñanza de las desigualdades abordadas desde la escuela primaria en Honduras donde, inicialmente se introduce la idea de comparación de tamaños y lo que luego, será auxiliado por el signo de desigualdad para el orden entre cantidades. Después, durante la secundaria, este tema suele aparecer cuando se introducen los intervalos asociados a una función, en ese caso, el signo de la desigualdad adquiere un nuevo significado: el de descripción de un conjunto de números además de la idea de variable que se asocia a esa relación, como en el caso en que $m < x < n$ donde m y n son números reales y x es una variable entre ellos.

También se adopta en estos textos el modelo de la recta numérica para dar sentido a la relación de desigualdad, pero aquí se destaca la posición relativa entre las cantidades, tratamiento que con frecuencia incorpora también el uso de tablas de valores que podrían dar la idea de variabilidad.

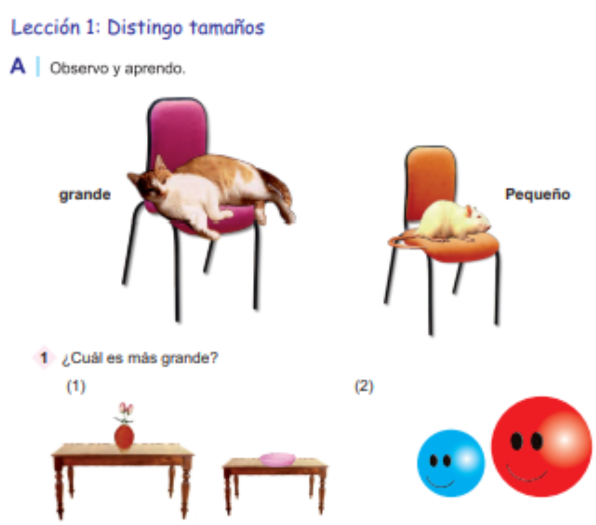
El contexto educativo de este trabajo se refiere a la República de Honduras, por lo que pasaremos a mencionar los contenidos escolares asociados con el tema de investigación. También mostraremos resultados relevantes de investigación sobre las desigualdades y/o las inecuaciones como parte de estos antecedentes.

1.2. EL ORDEN Y LAS DESIGUALDADES EN LOS LIBROS DE EDUCACIÓN BÁSICA EN HONDURAS

En esta investigación se tomaron en cuenta los libros de textos de Educación Básica en la República de Honduras, los cuáles, son utilizados en todas las escuelas públicas del país y como lo menciona Ramos (2018) tienen un enfoque de la postura conocida como Resolución de Problemas, basándose en el Currículo Nacional de Educación Básica (CNEB) en ese país.

Con el objeto de conocer los antecedentes con los que cuentan los estudiantes de secundaria, se analizaron los libros de texto de primaria. En estos libros se hace un tratamiento de las desigualdades tempranamente, iniciando con la idea de comparación de tamaños entre objetos, en el primer año de la escuela primaria (Ver imagen 2).

Imagen 2: Unidad 1 Lección 1 Distingo tamaños



Tomado de: PROMETAM Cuaderno de Trabajo 1° grado Honduras, p. 4

A través de imágenes como las presentadas, se pretende que el estudiante adquiera la idea de comparación como algo que permite determinar la diferencia entre dos objetos cuando se pone de relieve su tamaño.

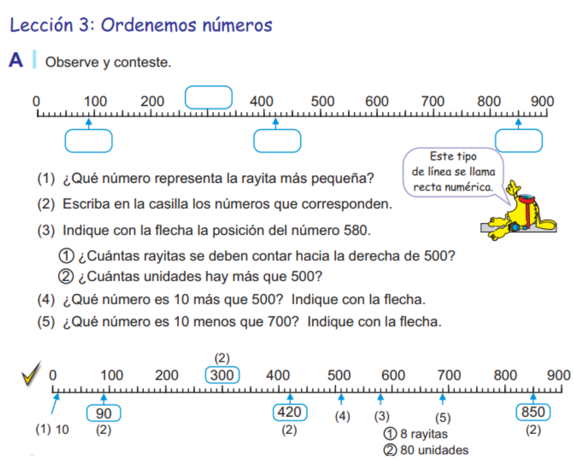
En el terreno numérico y para continuar desarrollando la idea de desigualdad, se inicia con dos tipos de actividades genéricas que son: la comparación y la ordenación (Ver Imagen 3 y 4).

En estos casos no se hace uso del signo de desigualdad, pero se verbaliza la relación para representar las comparaciones y las ordenaciones numéricas o como en el segundo caso haciendo uso de la recta numérica, como vemos a continuación.

Imagen 3: Unidad 13 Lección 2 Orden de los números

Tomado de: PROMETAM Cuaderno de Trabajo 1° grado Honduras, p. 119

Imagen 4: Unidad 1 Lección 3 Ordenemos números



Tomado de: PROMETAM Cuaderno de Trabajo 2° grado Honduras p. 12

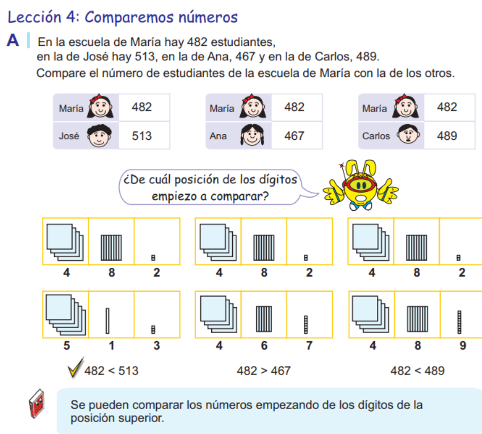
Consideramos, que las comparaciones numéricas mostradas anteriormente son distintas por el tipo de requisitos cognitivos que deben ser puestos en funcionamiento para resolverlas, aún cuando se hacen comparaciones.

En la Imagen 3, la ordenación de los números será hecha teniendo en cuenta la secuencia numérica de los números naturales, de manera que se requiere conocer el orden de la numeración, también la tarea hace énfasis en la ordenación de las decenas de manera que hay un efecto de repetición y coincidencia entre los números anteriores y posteriores, lo que puede incorporar información sobre la respuesta adecuada.

En cambio, en la Imagen 4 que incluye la recta numérica, no sólo hay que conocer la numeración, sino la posición relativa de los números para colocar los faltantes, lo que aumenta los requisitos que deben ser considerados para su solución haciendo diferencia con la tarea anterior. Observamos, que se hace uso de dos modelos distintos para abordar la ordenación que requieren de aproximaciones cognitivas distintas con motivo de la ordenación numérica.

Es en segundo grado de primaria, que aparece el signo de desigualdad (Ver Imagen 5) que encontramos en la lección siguiente, en ésta se pide ordenar números y representarlos en una recta numérica y se introduce el tema mediante un problema que usa dos tipos de representaciones: la numérica y la icónica. Los distintos conjuntos sugieren que los números se forman con unidades, decenas y centenas que están representados por puntos rectas y planos; lo que hace que estén presentes dos formas de representar y asociar el orden mediante la misma comparación que requiere de una interpretación adicional a la numérica.

Imagen 5: Unidad 1 Lección 4 Comparemos números



Tomado de: PROMETAM Cuaderno de Trabajo 2° grado Honduras, p. 14

Esto implica que los estudiantes deben tener más información que apoye la comparación por tipo de unidades como base para la aplicación de la desigualdad, siendo ésta la estrategia la sugerida por esta tarea. Esas representaciones, servirán como punto de partida para comparar casi directamente las cantidades con ayuda de los significados diferenciados mediante los íconos; luego se introduce la notación del símbolo de desigualdad colocando las cantidades numéricas específicas asociadas a los íconos respectivos.

En esta tarea, el uso del signo de desigualdad está asociado con la comparación numérica de las cantidades propuestas, sin embargo, la estrategia usada se basa en la comparación de tipos de unidades para resolver la posición de las cantidades comparadas.

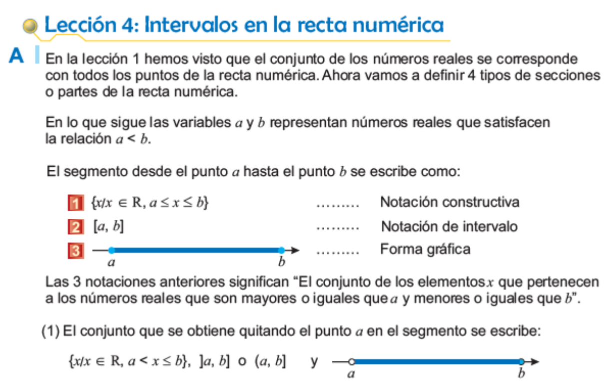
Desde nuestro punto de vista, la comparación que se hace en la desigualdad numérica requiere como antecedente el aprendizaje del orden de los números para poder tomar una decisión sobre la posición del signo de desigualdad, aspecto relevante para el correcto uso de la recta numérica que es el modelo considerado en este trabajo. En el caso comentado cuando los números no son comparables directamente y no se puede hacer uso de la estrategia de establecer el orden con números enteros cercanos al cero, entonces se introduce un análisis basado en distintos tipos de unidad para aplicar esta estrategia de comparación individualmente.

Cuando los estudiantes inician el estudio del álgebra en el nivel secundario en Honduras y aparece la idea de variable, el tratamiento del signo de desigualdad cambia, ya no se llevan a cabo comparaciones exclusivamente numéricas y la variable suele presentarse de dos maneras dependiendo su función, en un caso como indicador de números arbitrarios que pueden resolver la desigualdad como en $x < n$ donde n es un número constante y x una variable o como valor no conocido en las llamadas inecuaciones de la forma

$2x + 3 > 5x - 8$.

En el caso de la enseñanza en Honduras, las inecuaciones lineales se trabajan con estudiantes en las edades de 14 años (octavo grado), en la modalidad de intervalos como lo podemos ver a continuación (Ver Imagen 6).

Imagen 6: Unidad 1 Lección 4 Intervalos en la recta numérica



Lección 4: Intervalos en la recta numérica

A En la lección 1 hemos visto que el conjunto de los números reales se corresponde con todos los puntos de la recta numérica. Ahora vamos a definir 4 tipos de secciones o partes de la recta numérica.

En lo que sigue las variables a y b representan números reales que satisfacen la relación $a < b$.

El segmento desde el punto a hasta el punto b se escribe como:

1. $\{x/x \in \mathrm{R}, a \leq x \leq b\}$ .... Notación constructiva
2. $[a, b]$ .... Notación de intervalo
3. .... Forma gráfica

Las 3 notaciones anteriores significan "El conjunto de los elementos x que pertenecen a los números reales que son mayores o iguales que a y menores o iguales que b".

(1) El conjunto que se obtiene quitando el punto a en el segmento se escribe:

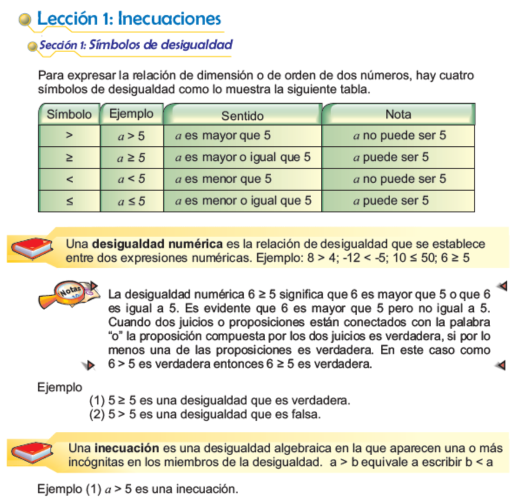
$\{x/x \in \mathrm{R}, a < x \leq b\}$, $]a, b]$ o $(a, b]$ y

Tomado de: PROMETAM Cuaderno de Trabajo 8° grado Honduras, p. 19

Las inecuaciones no se plantean para ser resueltas, sino para ser interpretadas como una relación entre un número y una variable considerada como número generalizado, de esta manera se introduce la idea de variabilidad y la notación algebraica con una formulación muy cercana con las desigualdades numéricas, pero ampliando la posibilidad de diversas soluciones.

Para abordar las inecuaciones, a los estudiantes de 15 años (noveno grado) se les recuerdan las desigualdades numéricas mostrando los cuatro símbolos diferentes de desigualdad que incluyen a la igualdad (<, >, ≤, ≥) para expresar la relación de orden entre dos números (Ver Imagen 7), y luego proceder a mostrar una inecuación como una desigualdad algebraica en la que podrían aparecer una o más incógnitas que se deben resolver numéricamente.

Imagen 7: Unidad 2 Lección 1 Inecuaciones



Lección 1: Inecuaciones

Sección 1: Símbolos de desigualdad

Para expresar la relación de dimensión o de orden de dos números, hay cuatro símbolos de desigualdad como lo muestra la siguiente tabla.

Símbolo	Ejemplo	Sentido	Nota
$>$	$a > 5$	a es mayor que 5	a no puede ser 5
$\geq$	$a \geq 5$	a es mayor o igual que 5	a puede ser 5
$<$	$a < 5$	a es menor que 5	a no puede ser 5
$\leq$	$a \leq 5$	a es menor o igual que 5	a puede ser 5

Una **desigualdad numérica** es la relación de desigualdad que se establece entre dos expresiones numéricas. Ejemplo: $8 > 4$; $-12 < -5$; $10 \leq 50$; $6 \geq 5$

Notas

La desigualdad numérica $6 \geq 5$ significa que 6 es mayor que 5 o que 6 es igual a 5. Es evidente que 6 es mayor que 5 pero no igual a 5. Cuando dos juicios o proposiciones están conectados con la palabra "o" la proposición compuesta por los dos juicios es verdadera, si por lo menos una de las proposiciones es verdadera. En este caso como $6 > 5$ es verdadera entonces $6 \geq 5$ es verdadera.

Ejemplo

(1) $5 \geq 5$ es una desigualdad que es verdadera.
(2) $5 > 5$ es una desigualdad que es falsa.

Una **inecuación** es una desigualdad algebraica en la que aparecen una o más incógnitas en los miembros de la desigualdad. $a > b$ equivale a escribir $b < a$

Ejemplo (1) $a > 5$ es una inecuación.

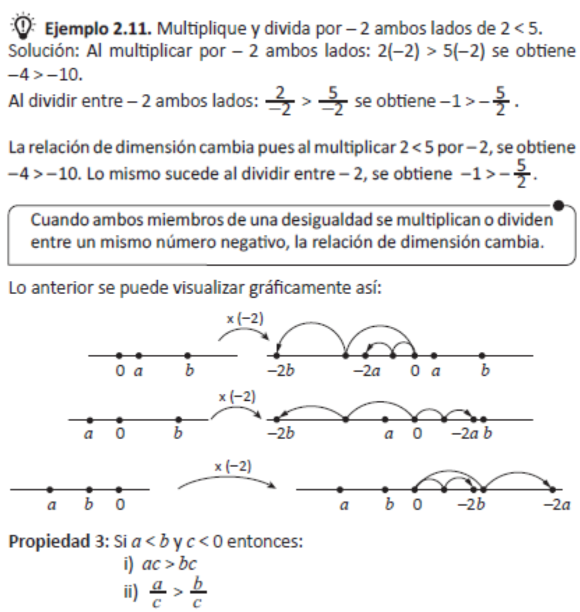
Tomado de: PROMETAM Cuaderno de Trabajo 9° grado Honduras, p. 6

En lo que respecta a la presentación de modelos con el objetivo de comparar cantidades, se recurre a la recta numérica, pero en este caso ya se hacen operaciones representadas en ella (Ver Imagen 8), mostrando qué sucede cuando se multiplica o divide por un número negativo, pero no se atienden los aspectos de la posición relativa entre los conjuntos de puntos que representan la solución, por lo que la participación de la recta numérica como modelo es utilizado aquí para dar cuerpo a los casos distintos dependiendo del valor de las variables.

Aunque en este caso, la posición de los números es muy importante debido a que el criterio para decidir la desigualdad se asocia con la posición relativa de los números comparados, esto es, el valor de un número que esté a la derecha de otro significa que es mayor que el primero, en este caso la recta numérica es usada para explicar las operaciones ligadas a cierto tipo de desplazamientos que se analizan por casos, además del uso del orden sobre la recta numérica como referencia. Las operaciones son interpretadas como desplazamiento dependiendo de la operación y los tipos de números involucrados.

En el libro de texto se menciona que la *relación de dimensión* cambia al multiplicar por un número negativo, refiriéndose a la relación de desigualdad que tiene como consecuencia el cambio de signo en cuestión.

Imagen 8: Unidad 1 Lección 2 Clase 4 Ecuaciones e inecuaciones



Ejemplo 2.11. Multiplique y divida por -2 ambos lados de $2 < 5$.
Solución: Al multiplicar por -2 ambos lados: $2(-2) > 5(-2)$ se obtiene $-4 > -10$.
Al dividir entre -2 ambos lados: $\frac{2}{-2} > \frac{5}{-2}$ se obtiene $-1 > -\frac{5}{2}$.

La relación de dimensión cambia pues al multiplicar $2 < 5$ por -2, se obtiene $-4 > -10$. Lo mismo sucede al dividir entre -2, se obtiene $-1 > -\frac{5}{2}$.

Cuando ambos miembros de una desigualdad se multiplican o dividen entre un mismo número negativo, la relación de dimensión cambia.

Lo anterior se puede visualizar gráficamente así:

Propiedad 3: Si $a < b$ y $c < 0$ entonces:
i) $ac > bc$
ii) $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

Tomado de: PROMETAM Cuaderno de Trabajo 10° grado (Matemática 1) Honduras, p. 25

Este recurso hace énfasis en el cambio del sentido del signo de la desigualdad, pero no insiste en el cambio de valores que se transforma en un cambio de signos que son comparados al mismo tiempo y como consecuencia en su cambio de signo respectivo, procedimiento necesario para abordar la solución de las inecuaciones así como la adopción del cambio de todo el sentido de la desigualdad, esto es, en términos de los signos, los valores de los números y de los zonas asociadas a éstos sobre la recta numérica.

Aunque el procedimiento mencionado aquí es completamente operacional, consideramos que es importante que los estudiantes puedan dar sentido a todos esos cambios comparando los valores antes y después del producto por números negativos sobre la recta con propuestas que enfaticen la posición relativa.

Otro aspecto que es tratado en el libro mencionado es, la tarea relativa a una inspección sobre los valores posibles para una inecuación en la que se piden completar tablas de valores. Cuando el estudiante ensaya, con el uso de tablas de valores distintos y los compara se acerca a la idea de variación, que es introducida para reemplazar el valor de la variable continuamente y comprobar numéricamente ésta relación, de manera que comienza a formarse la idea de posibles soluciones para la inecuación planteada, por la vía de encontrar números particulares, esto es, la variable funciona como número generalizado (Ver Imagen 9); esto daría paso a definir la solución como el valor o los valores de la variable que satisfacen la inecuación y que aparecen en la tabla.

Imagen 9: Unidad 1 Lección 2 Clase 5 y 6 Ecuaciones e inecuaciones

Clase 5 y 6. Solución de inecuaciones lineales

Ejemplo 2.12. Complete la tabla de la izquierda que muestra los valores de x en la inecuación $x + 2 < 5$. ¿Qué valores satisfacen la inecuación?

Valor de x	Valor de $x + 2$	¿$x + 2 < 5$?
0	2	Sí
1		
2		
3		
4		
5		

Solución:

Valor de x	Valor de $x + 2$	¿$x + 2 < 5$?
0	2	Sí
1	3	Sí
2	4	Sí
3	5	No
4	6	No
5	7	No

R: Los números 0, 1 y 2.

De la información de la tabla se deduce que los valores de x que satisfacen la inecuación son todos aquellos que son menores de 3.

La solución de una inecuación es el valor o valores de la variable que satisfacen la inecuación.
Resolver una inecuación consiste en encontrar su solución.

Ejercicio 2.5. Resuelva usando tablas.

a) $x + 2 \leq 4$ b) $2x - 1 \geq x + 4$ c) $3x \leq 2x + 3$ d) $x - 2 > -5$

Tomado de: PROMETAM Cuaderno de Trabajo 10° grado (Matemática 1) Honduras, p. 27

Establecer la forma que toma la solución de una inecuación, permite adquirir un más amplio sentido sobre las diversas soluciones, ya que el estudiante, además de resolver las inecuaciones y encontrar la solución, debe analizar detenidamente cuál será la más adecuada para el problema presentado, por ejemplo, si se habla de cantidades como los pesos en el problema, éstos no pueden ser negativos (Ver Imagen 10), por ello se debe delimitar el rango de validez de la solución para que sea adecuada.

Imagen 10: Unidad 1 Lección 2 Clase 7 y 8 Ecuaciones e inecuaciones

Clase 7 y 8. Resolver problemas usando inecuaciones lineales

Ejemplo 2.17. Un camión puede llevar hasta 1000 kg. Si tiene una carga que pesa 200 kg, ¿Cuántas cajas podrá llevar si éstas pesan 30 kg cada una?

Solución: x: Cantidad de cajas; Inecuación: $30x + 200 \leq 1000$

$$30x + 200 \leq 1000$$
$$30x \leq 1000 - 200$$
$$x \leq \frac{800}{30}$$
$$x \leq 26.66\ldots$$

R: Podrá llevar hasta 26 cajas.

Tomado de: PROMETAM Cuaderno de Trabajo 10° grado (Matemática 1) Honduras, p. 29

En los niveles educativos posteriores, se trabaja con sistemas de inecuaciones, inecuaciones de grado mayor que dos e incluso con inecuaciones con valor absoluto, las cuáles abandonan el modelo de la recta numérica y la elaboración de tablas de valores, ya que se supone que el estudiante interpreta correctamente los procedimientos necesarios para dar solución a éstas.

En este estudio, el análisis de los libros de texto fue importante para detectar el uso que hacian los estudiantes hondureños del signo desigual y del reconocimiento de las cantidades desiguales. Las ventajas de realizar este estudio en Honduras, es que los estudiantes cuentan, en principio, con estos conocimientos previos, en particular el uso del signo de desigualdad y estamos conscientes de que éste es un requisito para el desarrollo de las tareas propuestas aquí, en particular, porque en otros países no se hace este tratamiento desde la primaria.

En esta investigación se observa el tratamiento simbólico de los signos de la recta numérica, para lo cuál es necesario que el estudiante conozca el signo de desigualdad y lo asocie a la comparación entre cantidades apoyado en el valor de éstas.

De manera general, observamos que los libros se apoyan en la idea de orden para dar sentido a la desigualdad. La variabilidad se aborda a partir de la idea de variable dentro de un intervalo y la posición relativa entre valores, que será la clave para resolver las desigualdades cuando se usa el modelo de la recta numérica, sin embargo, el modelo sólo es usado después para dar cuerpo a interpretaciones de la multiplicación y división por negativos, considerando el orden de manera esquemática y se abandona la noción de ubicación relativa entre números o variables, aspecto que desde nuestro punto de vista contribuye a dar sentido a la desigualdad y a la inecuación. Respecto a las soluciones de las inecuaciones, se hace énfasis en la diferencia entre solución y solución adecuada, lo que hace que el estudiante tenga precaución con su respuesta.

A continuación, pasaremos a mencionar algunos resultados relevantes de investigación sobre este tema.

1.3. INECUACIONES Y RESULTADOS DE INVESTIGACIÓN

Algunos investigadores comentan que, el aprendizaje de las desigualdades es un tema complejo, por ejemplo, las principales dificultades encontradas por Heredia y Palacios (2014) son: pasar del enunciado verbal a la expresión matemática; algunos procedimientos como la multiplicación por negativos; diferenciar entre una ecuación y una inecuación y la forma cómo se debe operar cada una de éstas dos expresiones y la confusión hace que el estudiante no logre un manejo satisfactorio de las inecuaciones. Los autores también comentan que los saberes previos que no se interiorizaron correctamente son los que dificultan el aprendizaje del nuevo saber, en esta investigación observamos que los aspectos relevantes del aprendizaje se centran en lo que llaman un manejo satisfactorio de las inecuaciones que incluye los procedimientos para obtener la solución y la aplicación en problemas que las incluyan.

En el reporte de investigación de Blanco y Garrote (2007) se menciona que hay una importante diferencia en el papel jugado por las literales en la ecuación, en donde el objetivo es encontrar el valor que justifica la igualdad, a diferencia de la inecuación, que es asociada a los múltiples valores que la satisfacen, a final de cuentas, una solución a diferencia de un conjunto de ellas.

Tomando en cuenta esta dificultad Blanco y Garrote (2007) mencionan que:

"al tratar con una expresión de la forma $-7x < 5$, su objetivo es dejar solo lo desconocido en un lado de la relación y para este fin pasan el -7 al otro lado de la desigualdad como divisor como si la relación fuera una ecuación. El objetivo de encontrar valores de lo desconocido que hagan que la desigualdad sea verdadera se pasa a segundo plano" (p. 226)

En esta investigación se evidencia que, los estudiantes tienen dificultades para manejar aquellas inecuaciones que no se ajusten al esquema aprendido y que es similar a la solución de ecuaciones, donde las transformaciones no necesitan tener en cuenta las restricciones para distintos signos > o < , las que no se comportan como cuando se trata del signo igual, en este caso, domina la regla del despeje por encima de la regla de cambio del signo aún cuando se multiplica por un negativo, cosa que pasa desapercibida para el estudiante.

En el caso de esta investigación, no nos queda claro si el estudiante ignora la regla de la multiplicación por un número negativo en el caso de una inecuación y por eso no la usa o no se da cuenta de que en el fondo está multiplicando por una fracción $-\frac{1}{7}$ de ambos lados de la inecuación, que es el procedimiento que permite "despejar" o aislar a la variable, que con frecuencia no es explícita y podría ser el motivo para no darse cuenta de que se multiplica con un número negativo y que entonces debe aplicarse la regla que cambia los tres signos asociados a la inecuación (si n < m los signos n, < / >, m) y las zonas de referencia.

La igualdad asociada a la ecuación puede distraer a los estudiantes y sugerir que el tratamiento es el mismo que en las inecuaciones con resultados con frecuencia equivocados, en particular, cuando deben multiplicar la inecuación por números negativos.

Además, en la investigación de Garrote, Hidalgo y Blanco (2004) señalan que los estudiantes suelen pensar que cuando tenemos una literal como *a*, siempre se asocia con valores positivos y en el caso de tener -*a* por consecuencia tendremos valores negativos; siendo éste un motivo de conflicto para comparar números con respecto a su posición y la interpretación de su valor.

A este respecto podría ser conveniente hacer de que los estudiantes interactúen con anterioridad con la variable correspondiente, dándole valores para que observen lo que sucede si se le asigna un valor negativo a esa variable *a* y compararlo con otro valor que también podría ser negativo tomando la misma variable *a* lo mismo podría pasar con -*a*.

Desde nuestro punto de vista con respecto a esta situación, en la localización de la recta numérica consideramos que se debería apoyar la actividad de comparación implicando la posición relativa de los números que se están comparando para poder establecer la relación de orden entre ellos con apoyo en el orden de los números. Es posible enfatizar así, la idea de la posición relativa sobre el valor numérico de los ejemplos particulares, lo que profundiza la numerabilidad respecto al orden. Otro aspecto que se podría analizar para evitar esta mala interpretación es, cuando *a* toma cierto valor (tanto positivo como negativo y ver que sucede con -*a* y establecer la relación de orden entre ellos.

Otra dificultad que mencionan Garrote, et al. (2004) se refiere a que cuando se trabaja con el siguiente enunciado: "n es menor que –2 y mayor o igual que –11" (p. 43); y el estudiante debe pasar del enunciado verbal a la expresión algebraica, éste omite referencias lingüísticas importantes en el enunciado ya que los estudiantes traducen literalmente lo planteado y que, en términos del álgebra no tiene sentido como en el caso de "$n < -2 > -11$" para desarrollar adecuadamente la expresión hace falta establecer las reglas de uso ligado a la expresión del lenguaje para evitar tales expresiones que inducen a una desconexión de la transitividad de la relación de desigualdad.

En lo que respecta al conjunto solución tenemos que, en una ecuación lineal se requiere de un sólo valor para resolverla, mientras que una inecuación puede ser resuelta con una multitud de valores, de manera que es posible que el estudiante confunda encontrar los valores para la inecuación con encontrar su solución, por lo que creemos que uno de los problemas de interpretación de las inecuaciones se asocia con establecer una adecuada idea de su solución para las inecuaciones.

En el trabajo de Kieran (2004) se menciona que el desafío didáctico para el desarrollo de este tema es encontrar formas de ayudar a los estudiantes a cuidarse de las trampas de la conexión entre igualdad y desigualdad desde el punto de vista del tratamiento de los símbolos, pero disfrutando de los beneficios que les proporcionan la actividad algebraica ya conocida, de manera que puedan colocarse en un meta-nivel generativo y global.

En lo que respecta al reporte de investigación de Boero y Bazzini (2004) los autores sugieren un enfoque funcional que consiste en abordar las inecuaciones como una comparación entre funciones asociadas a sus dominios de definición, los que si son gestionadas adecuadamente por el profesor, pueden explotar el potencial de los estudiantes que va mucho más allá de los contenidos explorados.

Una aproximación funcional podría ser una manera para darles sentido a las inecuaciones, en particular por la necesidad de observar la variabilidad en los dominios de definición donde estas variables están contenidas en los intervalos, lo que los acerca a la idea de soluciones múltiples.

En las investigaciones de Tsamir y Bazzini (2001, 2002, 2004) relativas a la interpretación de las soluciones aceptables de las ecuaciones e inecuaciones planteadas, las autoras presentan una serie de tareas con la intención de hacer diferencia entre las soluciones de las ecuaciones y las inecuaciones, la primera de ellas dice: *"¿si $x = 3$ es o no solución de alguna ecuación? y al mismo tiempo de alguna inecuación"*, a lo que los estudiantes contestaban fácilmente en el primer caso, en cambio se les dificultaba decidir si podía ser solución para alguna inecuación. Las autoras no exploran las razones de este hecho, pero sugieren que debería revisarse la forma cómo se introducen las inecuaciones diferenciándolas de las ecuaciones.

Podemos ver, qué pese a que los procedimientos algebraicos son casi los mismos, menos la multiplicación y división por negativos, cuando se interpretan la soluciones no hay claridad sobre lo que significa una solución en una inecuación en contraste con el caso de la ecuación.

Otra tarea planteada por las autoras consistía en *identificar el conjunto solución de* $5x^4 \leq 0$, en esta tarea los estudiantes consideraban a $x = 0$ como la solución de esta inecuación, pero tenían dificultades para encontrar una solución $x = c$, con $c \neq 0$.

Es posible que los estudiantes hagan interpretaciones semejantes entre ecuación e inecuación, hasta cierto punto siguiendo lo aprendido, pero en lo relativo a interpretar las soluciones en uno u otro caso es un terreno difícil de abordar, porque también se tiene que tomar en cuenta la idea de solución que se maneje, esto es, si se busca un número que haga cierta la expresión o si se deben exhibir todos los números necesarios para lo mismo.

La investigación de Tsamir y Bazzini (2002) destaca que, los estudiantes piensan que operar de la misma manera en ambos lados de la igualdad en una ecuación, conduce a obtener una ecuación equivalente y por consiguiente a la solución deseada, aunque este supuesto no siempre nos resuelva el problema, como en el caso de las soluciones que también cuentan con restricciones adicionales para los problemas expresados mediante esas ecuaciones, asunto que surge cuando las ecuaciones son referidas a situaciones concretas como las que se presentan en los problemas contextuales.

Respecto a los factores que podrían obstaculizar el aprendizaje de las inecuaciones entre los estudiantes encontramos los relacionados con algunos errores de concepción, de entendimiento y de empleo de las propiedades de los números reales, Alvarenga (2006), además, este autor comenta que estos factores pueden estar relacionados con los saberes previos de los estudiantes; el tratamiento que se le da con anterioridad a las propiedades de los números podría dificultar después operar con ellos y compararlos.

Otros aspectos importantes en esta dirección se refieren a que cuando los estudiantes trabajan con números enteros positivos, en general tienen un buen desempeño en las inecuaciones, sin embargo, algunos presentan dificultades cuando se les proponen enteros negativos y algunos de ellos no tienen presente la diferencia entre el orden de los positivos y los negativos que requieren de una lógica distinta, asumiendo en los hechos que todos los números son enteros positivos y consideran que el número con mayor valor absoluto es el mayor, Bohórquez (2015)

Finalmente en este apartado hemos comentado la forma cómo se presentan las desigualdades en los libros de texto de matemáticas en Honduras, donde nos percatamos de que se introducen las desigualdades numéricas tempranamente, para luego presentar un tratamiento sobre intervalos y posteriormente se hace mención de las inecuaciones en donde se menciona la idea de variable, aunque no se hace mucha diferencia con el tratamiento de las ecuaciones lineales por lo que desatiende la diferencia entre ellos cuando de trata de multiplicar por números negativos; en este tratamiento observamos que los conocimientos previos de las desigualdades e intervalos no se utilizan para vincularlos con las inecuaciones como nuevos contenidos lo que no permite explotar la idea de cambio que se produce en todos los signos involucrados y las zonas de referencia en el caso del producto por negativos, por lo que parece que los temas entre ecuaciones e inecuaciones están tratados sin conexión, aunque para los estudiantes si la hay.

Además, encontramos un tratamiento para la interpretación de operaciones aritméticas de las desigualdades numéricas, usando el modelo de la recta numérica, para que el estudiante observe lo que sucede en la relación de desigualdad, en la que se comparan sus posiciones relativas, por lo que este modelo nos parece prometedor debido a que consideramos que la recta numérica no sólo pone en funcionamiento al orden de los números, sino a sus valores relativos y a su posición respectiva en donde el valor y la posición relativa están relacionados.

Por otro lado, las investigaciones comentadas nos dan un panorama general de las dificultades que presentan algunos estudiantes al trabajar con las inecuaciones y/o desigualdades, entre las que destacan la confusión entre ecuación e inecuación, el tipo de solución asociado a cada uno, que va de la solución única a una multitud de ellas, las operaciones con números negativos (especialmente la multiplicación) y pasar de un enunciado verbal a uno algebraico sin contar con el papel de cada elemento del enunciado para ello.

En este trabajo tomamos en cuenta, que el álgebra de las inecuaciones debe considerar el producto por negativos, siendo uno de los motivos de malentendidos y que, el posible origen de éstos puede tener por lo menos dos fuentes:

La primera es la ignorancia de la regla del producto de negativos en una inecuación y no tener en cuenta que cuando se despeja algebraicamente, en realidad se opera con el mismo número al mismo tiempo en los dos lados de la desigualdad, que en el caso de los negativos provoca un cambio en los tres signos implicados. En particular, es frecuente que el estudiante piense que “se pasa al otro lado” y puede no ser claro que en realidad se multiplica la inecuación en ambos miembros.

La segunda es que, resolver una ecuación significa encontrar una solución que puede tener un solo valor numérico, en cambio resolver una inecuación se asocia a un conjunto de soluciones posibles.

Uno de los recursos que sería posible usar para poner de relieve la posición relativa para explicar el producto por negativos, es trabajar usando el modelo de la recta numérica ampliando sus posibilidades, en particular dar sentido a ubicación de los números y sus posiciones relativas de magnitud en el caso de la multiplicación por negativos con apoyo en el orden, mostrando el cambio tanto de los signos involucrados como de las zonas de referencia.

Pretendemos poner en funcionamiento, para enfatizar el proceso de multiplicación por negativos, el hecho de los números involucrados cambian su posición simétricamente sobre la recta numérica al igual que las zonas asociadas a éstos, lo que se refleja en el cambio de todos signos en la nueva expresión asociada, esto permitiría proporcionar al estudiante un recurso convincente para adoptar un diferente orden entre los valores comparados, una vez que han sido multiplicados por un número negativo.

La introducción de este mismo mecanismo en el caso de las inecuaciones debe pasar por la interpretación de la posición de las variables negativas, que no lo son por el signo asociado, lo que requiere de una interpretación que separe la representación de lo representado, es decir, establecer por ejemplo que $-x$ puede ser un valor positivo o x uno negativo dependiendo de las condiciones.

Después, estaríamos abordando la idea de la multiplicidad de las soluciones y la variable como número generalizado; y finalmente podríamos abordar las inecuaciones de la forma "$x < c$", "$x > c$", para c constante y x variable, para encontrar soluciones a través del tratamiento algebraico para darle sentido sobre este modelo.

En adelante vamos a proponer el marco teórico que apoyará esta investigación.

2. MARCO REFERENCIAL

2.1. INTRODUCCIÓN

En este apartado vamos a mostrar el sustento teórico que estará apoyando la investigación, en particular, mencionaremos la teoría de la Objetivación desde un punto de vista de la semiótica para retomar de manera general las ideas de instrumento, mediación semiótica y la de co-producción de saberes que estaremos utilizando para el análisis de nuestra investigación.

Para sustentar el tratamiento de los signos asociados a las desigualdades e inecuaciones tomaremos en consideración elementos de la semiótica particularmente la postura de C. Pierce asociada a la recta numérica y al uso que se hace de los diferentes tipos de signos en ella, así como de las actividades cognitivas puestas en juego para su interpretación del orden, la posición relativa entre números y la ubicación espacial de los mismos.

2.2. LA TEORÍA DE LA OBJETIVACIÓN (TO), EL SIGNIFICADO, EL SIGNO Y EL INSTRUMENTO

Desde el punto de vista de Radford (2006a) "La teoría de la objetivación parte de una posición no mentalista del pensamiento y de la actividad mental" (p. 107) además aboga por "una idea de aprendizaje tematizado como adquisición comunitaria de formas de reflexión del mundo guiadas por modos epistémico-culturales históricamente formados" (Radford, 2006a, p. 105).

En esta postura se hace referencia a que el objetivo de la educación matemática reside en un esfuerzo político, social, histórico y cultural y es una creación dialéctica de sujetos reflexivos y éticos en el cuál están involucrados, el saber y el aprendizaje.

El saber, según este punto de vista, se concibe cómo el potencial disponible para hacer algo, en el cual está implicado lo corpóreo, lo sensible, lo histórico cultural, etc.; es estar en contacto con lo material, los objetos, los artefactos y los instrumentos para encontrarnos con los sistemas de pensamiento presentes en nuestra cultura. En este sentido la TO, no solamente se refiere a percibir las cosas o los objetos, sino a que el individuo está sujeto a la sensibilidad a través de formas de reflexión sobre lo que se hace.

Como define la TO, el saber, el conocimiento, el aprendizaje y la mediación semiótica son elementos claves para que el estudiante se apropie del saber, en nuestro caso, el uso del modelo de la recta numérica para resolver desigualdades e inecuaciones lineales puede dar paso a la llamada praxis reflexiva, en la cual, el estudiante tendrá que hacer una serie de interpretaciones y acciones que lo lleven a co-producir este conocimiento en un entorno socialmente determinado.

Los ejes que determinan toda actividad humana, desde el punto de vista de Radford (2020), son los siguientes: El eje de las formas de producción de saberes y el eje de las formas de colaboración humana. El saber para encontrarlo debe aparecer y luego ser puesto en movimiento por parte de los profesores y estudiantes; esto se llevará a cabo a través de una labor conjunta, en la cual "el saber se materializa, se re-produce, se transforma en algo tangible, susceptible de ser pensado, es decir, se transforma en objeto de conciencia" (Radford, 2020, p. 26). Además, "El carácter mediatizado del saber se refiere al papel que desempeñan los objetos, instrumentos y signos en la realización de la praxis cognitiva." (Radford, 2004, p. 13)

Además, esta postura considera un sistema de pensamiento y acción cultural e históricamente constituidos. (Radford 2006a; Radford, 2020). El saber no puede ser algo de lo que podamos apropiarnos o que podamos poseer, sino que "es un proceso de elaboración activa de significados" (Radford 2006a, p. 116)

A diferencia de la perspectiva constructivista donde el conocimiento es algo que depende solamente del estudiante, y la actividad constructiva, que es la razón de aprender el concepto, y en donde la influencia del contexto es fundamental; en cambio en la TO, Radford (2006a) postula que, para la teoría de la objetivación, esta “no consiste en construir o reconstruir un conocimiento. Se trata de dotar de sentido a los objetos conceptuales que encuentra el alumno en su cultura” (p. 113).

A partir de esto Radford menciona que una de las intenciones iniciales en la elaboración de la TO fue precisamente ir más allá de la postura individualista y ofrecer una perspectiva en la que el saber y el aprendizaje se concibieran de manera coherente con los principios de la escuela histórico-cultural. El aprendizaje será definido, entonces como procesos de objetivación siendo un fenómeno de continuo cambio (Radford, 2020).

Los seres humanos se exponen para producirse y convertirse a través de un proceso social y al mismo tiempo producen su propia experiencia. “La labor conjunta sensual y material se considera el campo último de la experiencia estética, de la subjetividad y de la cognición.” (Radford. 2020, p. 24). En este proceso intervienen múltiples expresiones como los gestos, las acciones, los signos, los artefactos, etc., que están presentes en el proceso de acción reflexiva del estudiante y que da paso a los saberes.

La objetivación está entonces ligada al uso de instrumentos, signos o artefactos que no son ayudas para el aprendizaje, sino medios cuya presencia y uso imprimen un sello distintivo sobre lo construido, llega ser parte de éste a través de una *mediación semiótica* desarrollada mediante una *praxis reflexiva*. Entendiendo como praxis reflexiva aquello “que conocemos y la manera en que llegamos a conocerlo esta circunscrito por posiciones ontológicas y procesos de producción de significados que dan forma a cierta clase de racionalidad que permite plantear ciertos problemas” (Radford, 2004, p. 13)

Este marco teórico considera la actividad del aula como la *unidad de análisis*, en donde el lenguaje, los signos, los artefactos y el cuerpo posibilitan una coordinación de saberes, que se manifiesta en una interrelación entre el profesor y el estudiante, llamada coproducción (co-producción).

Para los fines de esta investigación la TO nos proporciona constructos ligados con la actividad reflexiva de situaciones escolares en donde los instrumentos y artefactos están mediando semióticamente al conocimiento, por tanto, estaremos tomando en cuenta este tipo de consideraciones para el estudio de la desigualdad numérica e inecuaciones lineales usando el modelo de la *recta numérica* como un artefacto donde se interpretan los números, las marcas y los segmentos unitarios para dar sentido a la desigualdad numérica y a las inecuaciones lineales.

A continuación, mencionaremos aspectos relevantes para nuestra investigación sobre algunas referencias históricas la recta numérica, su ontología con base en su uso a partir de lo cual vamos a mostrar diferentes tipos de rectas numéricas y mencionaremos algunos resultados relevantes de investigación.

2.3. SOBRE LA RECTA NUMÉRICA

2.3.1. Introducción

La recta numérica es un modelo matemático que históricamente ha apoyado la interpretación de propiedades como la continuidad/discontinuidad de conjuntos de números o distintos conceptos matemáticos, como la compacidad, la idea de medida, entre otros muchos. Por otro lado, se ha convertido en un modelo didáctico del que se quiere aprovechar la numerabilidad o capacidad de conteo y el orden de los números para el aprendizaje de ellos, de ahí que sea usado para ordenar, numerar y operar aritméticamente distintos conjuntos de números en los niveles básicos.

En este apartado estaremos mencionando aspectos relacionados con su proceso histórico, su ontología, los tipos de rectas numéricas sugeridas por algunos autores y algunos resultados de investigación sobre su uso escolar, en particular, haremos diferencia en la forma de considerar a la recta numérica según sus usos mediante la llamada recta estructurada frente a la establecida como vacía que mencionamos en adelante.

2.3.2. Referencias históricas de la recta numérica

A lo largo de la historia de la matemática podemos encontrar que se le considera a René Descartes como el inventor del plano cartesiano, esta idea terminará siendo el marco de referencia de la geometría analítica el plano concebido como referencia matemática está compuesto por dos rectas numéricas que permiten localizar puntos de manera que están relacionados con expresiones algebraicas.

Las rectas que son la base de ese plano fueron progresivamente estructuradas cuyo objetivo fue contar con una referencia. Encontramos que los primeros pasos para lograr una referencia, aparece en nociones usadas por Wallis y Fermat, Pinto (2016). En el caso de Fermat, según algunos estudios la idea nace como un sistema de referencia que sirve para el estudio de las cónicas, en uno de sus documentos se encontró que utiliza expresiones como $y = mx$ o $y = x^2$, que están relacionadas con rectas y cónicas que deben contar con un sistema para su referencia que aparece como una recta horizontal apoyada con una perpendicular para establecer una posición.

A Wallis se le atribuyen varios estudios relacionados con el infinito y además se le conoce como el pionero en el uso de la recta numérica, la cual solamente representaba los números enteros, los positivos estaban colocados hacia la derecha y los negativos hacia la izquierda, sin embargo, Pluvinage y Flores (2016) afirman en un artículo sobre la "Génesis Semiótica De Los Enteros" que en la literatura científica si le atribuyen a Wallis la idea de relacionar los negativos y la dirección, además de introducir la idea de recta numérica, pero también se encuentran escritos de Stevin en la cual se muestran semirectas con representación de los números positivos Pluvinage y Flores (2016).

Con estas contribuciones nos parece que se repite uno de los fenómenos frecuentes en la matemática en donde se proponen resultados semejantes por dos o más matemáticos casi al mismo tiempo, lo que es importante, sin lugar a duda, es que en aquella época se propusieron sistemas de referencia que permitieron dar cuerpo a las expresiones algebraicas con propiedades geométricas o a la geometría se le dotó de expresiones algebraicas.

El sistema de referencia que actualmente conocemos como plano cartesiano es el resultado más conocido en la actualidad de un sistema de referencia matemático, debido a la facilidad de la nomenclatura utilizada, además de que esta representación permite considerar gran cantidad de propiedades de los números estudiadas por el cálculo y el análisis.

El modelo de la recta numérica, desde el punto de vista matemático, funciona como un espacio de representación homogéneo de manera que la única propiedad que tienen los objetos representados es su ubicación respecto a la referencia establecida, Nemirorvsky (2003) este modelo relaciona marcas o puntos con los números dependiendo de convenciones exprofeso. Matemáticamente la relación entre los números y su ubicación será lo que apoye la pertinencia de este para ser usado como un modelo didáctico.

El sistema formado por rectas numéricas llega a nosotros como un modelo que es un producto cultural que permite, en particular, el tratamiento de las representaciones numéricas por lo que la *recta numérica* proporciona una referencia que mantiene el orden numérico y que también nos permite medir y hasta operar por lo que en la actualidad es utilizado como un modelo para la enseñanza.

Cuando la recta numérica es usada pedagógicamente para el aprendizaje de los números, entonces se despliegan más posibilidades de uso que la sola referencia o las características numéricas en este modelo ya que este puede llegar a ser un artefacto que apoye el aprendizaje del orden, la posición relativa y la ubicación espacial que son necesarias para contar con un entorno que utilice no sólo la numeración y la posición relativa, sino la proporcionalidad que asocia los números a su posición respectiva y que posee efectos de convicción para el estudiante.

2.3.3. Ontología de la recta numérica

La recta numérica es una herramienta capaz de apoyar el desarrollo de la comprensión conceptual de la numerabilidad y que puede ser utilizada para medir, contar y ordenar. Los estudios de Diezmann, et al; (2006) y Teppo, et al; (2013) ponen de relieve la naturaleza de la recta numérica, en lo que se refiere al modelo que tiene diversos usos y alcances y el resultado de su aplicación depende en gran medida de los recursos y propósitos de la enseñanza.

Según Diezmann, et al. (2006) el modelo de la recta numérica tiene ventajas cognitivas potenciales dependiendo del tipo de recta numérica que se use, modelos como este sirven para organizar actividades que puedan apoyar el aprendizaje de conceptos matemáticos, en particular "las rectas numéricas son una herramienta para la transferencia representacional" (Diezmann, et al. 2006, p. 171) con la idea de transferencia representacional quieren decir que la recta numérica es un instrumento que admite diversas representaciones comunes, por lo que no es raro que estas estén presenten al mismo tiempo.

Desde nuestro punto de vista, las rectas numéricas pueden tener o no explícitamente los signos asociados a los números, las marcas o los segmentos unitarios que finalmente la organizan, pero en el momento en que se coloque un signo numérico que establezca un valor sobre ella, toda la recta adquiere orden y progresivamente se incorporan la distancia y la posición relativa que la va a caracterizar. Por tanto, la diferencia de los tipos de rectas desde el punto de vista didáctico radica en el uso que se haga de ellas.

Por su parte Teppo, et al. (2013) comentan que "Una recta numérica es un dispositivo figural, que representa abstracciones matemáticas particulares que permiten pensar y operar con diferentes tipos de números" (p. 2) lo que abre la posibilidad de usar rectas numéricas específicas dependiendo de los objetivos a lograr.

Lo anterior nos lleva a considerar que las rectas numéricas adquieren distinta naturaleza cuando son usadas didácticamente dependiendo de los objetivos a lograr, al parecer ésta depende por lo menos de dos elementos determinantes, los signos involucrados y el tratamiento que se les da, lo que mencionaremos enseguida.

2.3.4. Tipos de rectas numéricas

Introducción

Sobre los tipos de rectas numéricas Diezmann, et al. (2006, 2010) sugieren que hay distintos tipos de rectas numéricas para su uso didáctico y mencionan dos en particular y de las cuales establecen requisitos para su buen manejo, por otro lado, Teppo, et al. (2013) consideran cinco tipos distintos de rectas numéricas en donde unas son usadas para fines de aprendizaje numérico en tanto que en otras se usan para operar, por ello vamos a mostrar sus posturas para luego comentar las propiedades y tipos de rectas así como los objetivos de aquellas que vamos a usar en esta investigación.

Tipos de rectas según Diezmann, et al.

Según Diezmann, et al. (2006, 2010) pueden existir distintos tipos de rectas numéricas, de las cuáles solamente dos son de su interés, la recta numérica estructurada y la recta numérica vacía.

Las rectas numéricas estructuradas son aquellas que se utilizan comúnmente para ayudar al estudiante a comprender más fácilmente los conceptos matemáticos, teniendo algunas marcas que pueden servirle como guía, sin embargo “El espaciado entre las marcas de los segmentos de línea puede ser variable en rectas numéricas estructuradas con sólo algunos de los segmentos de línea marcados” (Diezmann, et al., 2010, p. 26). La idea de estructuración se debe atender mediante referencias generales para la orientación, aunque no exacta, de la posición de los números involucrados.

Las rectas numéricas vacías según Diezmann, et al. (2010) son rectas que no tienen marcas, es decir, no tienen representaciones de las unidades ni el punto equivalente al cero, comúnmente éstas se utilizan para que los estudiantes realicen operaciones aritméticas como sumas o restas, de manera que el estudiante haga uso de la posición relativa entre los números, lo que hace que la orientación sea la que indique los movimientos necesarios para hacer las operaciones propuestas. Una recta numérica vacía es un espacio disponible para darle cuerpo a las ideas que incluyen operaciones espacialmente dirigidas.

De manera general respecto a esta postura, consideramos que es importante tomar en cuenta en la recta vacía la posición relativa de mayor o menor, en el caso de los números, ya que sin ésta no se podría dar sentido a las operaciones en ese tipo de recta numérica porque en realidad no hay marcas, pero si una relación de orden que una vez que haz colocado una marca estableces una orientación y un orden que se impone a la propia recta numérica; aunque ésta aparezca sin las marcas ni los números, es ella misma la que da cuerpo al orden de los números si hay un convenio de que esa representación es ciertamente una recta numérica.

Cuando el autor se refiere a las rectas numéricas estructuradas, sugiere que los espacios unitarios no son relevantes debido a que son usadas para operar y en ese caso sólo se requiere la posición relativa, sin embargo, creemos que si bien pueden apoyar la operatividad no estarían en posibilidad de hacer comparaciones con el resultados de estas operaciones para trabajar con las medidas asociadas a las marcas y los números si se necesitaría considerar los segmentos unitarios como en el caso que nos ocupa que se refiere al tratamiento de las desigualdades.

Las rectas numéricas con unidades homogéneas y números asociados a marcas que corresponden al valor asignado por esos números que son distintas de las que menciona Diezmann, et al. por las características de los signos involucrados y sus respectivos tratamientos. Esto se debe a que en nuestro caso haremos uso de recta numérica homogénea donde el estudiante debe interpretar el valor numérico que se le asigna a la unidad y son las unidades las que apoyan el orden y la proporcionalidad de disposición de los números sobre la recta según sus valores.

De manera que las unidades asociadas a segmentos unitarios dominan la representación en la recta numérica homogénea y son ellas las que le dan significado espacial al orden y a la orientación, incluso a la medida aunque ésta no se use en las actividades, entonces, las tareas desarrolladas con este tipo de modelo, dirigen al estudiante al reconocimiento de tales unidades (a partir de los segmentos unitarios) aunque con frecuencia la numerabilidad y el orden parecen estar resueltos en la enseñanza debido a que las rectas numéricas con las que se trabaja, con frecuencia ya tiene incorporada esta información y no es una tarea que el estudiante deba enfrentar.

En este trabajo estaremos haciendo uso de la recta numérica homogénea para la interpretación de las desigualdades numéricas y las inecuaciones lineales donde se requiere de establecer el orden, la posición relativa y la ubicación espacial de marcas y números.

Tipos de recta según Teppo y Van den Heuvel-Panhuizen

Teppo, et al. (2013) hacen referencia a una amplia gama de rectas numéricas, las cuales tienen diversos usos, dependiendo de la actividad a la que se exponga al estudiante, y las tipifican como: las rectas numéricas rellenas, las vacías, las de longitud dirigida, las proporcionales que también son dobles y las racionales.

Según Teppo, et al. (2013) las rectas numéricas rellenas son aquellas que está formados por segmentos que se encuentran a la misma distancia uno de otro, los cuales suelen representar las unidades correspondientes a los números enteros; las rectas numéricas vacías centran su atención solamente en el orden de los números, sin prestar atención a la distancia entre ellos (segmento unitario), siendo una buena estrategia utilizarlas para hacer cálculos aritméticos; las rectas de longitud dirigida “utilizan una noción de medida de número, donde los enteros están representados por longitudes dirigidas, líneas especificadas por magnitud y dirección” (Teppo, et al. 2013, p. 4), de igual forma son útiles para resolver operaciones aritméticas; las rectas racionales sirven para representar los decimales o fracciones, dividiendo el segmento en partes iguales tantas como se necesiten (por lo que también se requiere de segmentos unitarios); y las rectas proporcionales y dobles utilizadas comúnmente para ubicar puntos en un segmento cuyos valores extremos si se conocen, sin embargo, solamente se podría estimar su ubicación.

Finalmente, podemos ver que la recta numérica cumple distintas funciones como modelo didáctico que es determinado por las intenciones de quien lo propone, pero en todos los casos se requieren de la posición relativa entre las marcas o números, de la orientación de éstas a partir de una marca que hace las veces de referencia con el objeto de establecer el orden entre números o de referencia general, para este fin casi siempre se usa al cero que divide a los positivos de los negativos y ordena la dirección en ambos sentidos.

En las posturas de los autores mencionados, observamos que consideran las diferencias didácticas para asociarlas a el tipo de recta numérica, y con base en el uso que se pretende hacer de ellas, sin embargo, no se considera explícitamente el papel de los signos en cada una, en particular, no se aprecia el papel de los segmentos unitarios como base de la representación de la recta estructurada en Diezmann, et al., o en al caso de las rectas numéricas racionales de Teppo, et al. En donde no se enfatiza la importancia de detectar la unidad, aunque ésta es relevante para la solución de la tarea debido a que la proporcionalidad de la posición de las marcas y números aparece tomando como base los espacios asociados.

Desde nuestro punto de vista, el papel de los segmentos unitarios debería ser considerado como fundamento básico en las tareas de orden y numerabilidad porque su ausencia puede provocar equivocaciones sobre la posición relativa entre marcas y números, así como la imposibilidad de asociarlos a sus medidas con fines de comparación, además del efecto que tienen sobre la credibilidad de los estudiantes que se ve afectada cuando trabajan con representaciones que admiten números que no se sitúan según su valor.

2.3.5. Investigaciones sobre la recta numérica y habilidades desarrolladas

El estudiante, según lo menciona Diezmann, et al. (2006), debe desarrollar dos conceptos claves para un uso eficaz de las rectas numéricas: el primero se basa en entender que la recta numérica es un gráfico, en el cual los estudiantes necesitan comprender las convenciones utilizadas para interpretar y crear rectas numéricas estructuradas; el segundo, se basa en que afirma que la recta numérica es un modelo de medición: los números de las rectas guían al estudiante en la dirección de observar la representación de la longitud en lugar de solamente puntos etiquetados con números, en este caso los estudiantes deben tener en cuenta la distancia entre los segmentos cuando identifican los números que, por ejemplo, hacen falta, sin embargo hay que considerar las distancias negativas y dotar a éstas de significados que orienten a los estudiantes en tareas que los incluyan.

Uno de los mayores problemas al utilizar la recta numérica, según Diezmann, et al. (2006), es que una vez que, tanto estudiantes como profesores, observan que la recta numérica tiene marcas, se quitan de encima pensar en las distancias para pasar a enfocarse en los números y al orden de estos, pero no el del espacio con el que se trabaja.

Diezmann, et al. consideran que con la recta numérica se desarrollan actividades de medida más que de numeración, por los argumentos mencionados anteriormente. En el caso de Teppo et al. comentan que las rectas racionales servirían para localizar decimales o fracciones, pero no se considera la importancia de contar con segmentos unitarios homogéneos, lo cual es un requisito para esta tarea como ya hemos dicho.

Actualmente hay una polémica sobre cuáles de las habilidades son las que puede ser desarrolladas con el uso de la recta numérica y sus diferentes tipos. Cohen y Sarnecka (2014) afirman que el desempeño de los estudiantes es un factor que depende del tipo de tarea que se enfrente y va cambiando a medida que los niños van creciendo; además de que la habilidad específica, puesta en juego, puede tomar diferentes formas como medir o como operar aritméticamente, dependiendo de la forma cómo se les presenta, en particular: 1. Como una recta ilimitada , es decir, como una recta que tiene una marca de inicio pero no una final o 2. Como una recta limitada, que tiene marca de inicio y de final.

Además, los autores mencionan que estas dos formas de presentar a la recta numérica pueden ser equivalentes para el estudiante; sin embargo, nosotros consideramos que hay varias cosas que quizás no se están tomando en cuenta en esta posible equivalencia, como el papel y utilidad de los segmentos unitarios, no sólo por el papel que juegan en el ordenamiento de marcas y números, sino en la ubicación adecuada de éstos, además del efecto que provoca la posible incertidumbre cuando no hay cerradura en la recta ilimitada aunque en este caso, los estudiantes no necesariamente se percatan de la ausencia de una cota debido a que es costumbre representar a las rectas como segmentos de rectas aún cuando se pueda advertir de que ésta puede ser alargada en ambos lados y que por otra parte no se puedan desarrollar las habilidades de medición porque no aparecen ni marcas ni números que la orienten o delimiten. Como antes hemos dicho, el trabajo con la recta numérica requiere de la proporcionalidad de las posiciones, aunque la tarea no incluya la medición.

En otra dirección, Schneider, Paetsch y Grabner (2009) exponen la idea de que existe una recta numérica mental que el estudiante ya posee y que no se trata de que ésta se asocie a la representación física, sino de actividades sicológicas que desarrollan los estudiantes frente a la recta física y que ésta será la base para tener *sentido numérico*, adquiriendo competencias matemáticas mucho más avanzadas. En los ejemplos que ellos proponen se pretende que los estudiantes ubiquen fracciones en la recta numérica para ver si esto influye en sus resultados de estimación en la recta numérica llamada interna o mental.

Apoyando esta idea de recta numérica mental, Schwarz y Eiselt (2009) argumentan desde la sicología que los estudiantes realizan una asociación corpórea de los números pequeños con movimiento del lado izquierdo del cuerpo y de los números grandes con el lado derecho, esta idea nace de las respuestas de los estudiantes que comúnmente son mostradas más rápido si se usan números pequeños, moviendo una de sus extremidades del lado izquierdo como respuesta al identificarlas. Sin embargo, respecto a la rapidez de respuestas asociadas al orden, los estudiantes eran más rápidos para responder a tareas con dígitos en orden ascendente que en orden descendente, mostrando que los dígitos grandes desplazan la visión al lado derecho y los pequeños al lado izquierdo del cuerpo.

Con estos resultados, Schwarz y Eiselt (2009) logran hacer una tipificación de asociación de congruencias numéricas de dos tipos: 1. Numérico-temporal, refiriéndose a la relación en el tiempo, es decir, el primero siempre es menor que el siguiente. 2. Numérico-espacial, relacionado con la ubicación espacial, el menor a la izquierda y el mayor a la derecha. Siendo esta consideración de tipo psicológico sobre la identificación de la preferencia automática de los estudiantes sobre el sentido de los números.

Las consideraciones de tipo psicológico a las que hacen referencia los autores y que se apoyan en la recta numérica mental, no están al alcance de nuestra investigación, debido a que estamos interesados en la interpretación de los signos que participan de la representación ostensiva de la recta numérica para fines de interpretación de desigualdades e inecuaciones lineales.

Por otro lado, podemos mencionar a Wall, et al. (2016) quienes se refieren a que la habilidad que les permite a los niños desarrollar su rendimiento en la estimación de la recta numérica, es la de la capacidad de evaluar, cosa que hace continuamente, es decir una actividad considerada de tipo metamatemático y que ayuda a controlar la precisión y rendimiento de la estimación continuamente para poder desarrollar tareas mucho más complicadas, además afirman, que los estudiantes tienen más confianza cuando trabajan con rectas numéricas cortas y números pequeños, que con grandes y números mayores, lo que le asignaría un componente idiosincrático a esta actividad. Su estudio se orienta a considerar la confianza de los estudiantes en dependencia del tipo de modelo usado.

En este sentido, nosotros consideramos que el uso del modelo de la recta numérica está vinculado en principio a signos asociados a ella que van desde la propia recta sin marcas, a la consideración de las marcas, los números y a los segmentos pasando por los espacios asociados a las unidades homogéneas, incluso cuando no aparecen en la recta, como en el caso en que ésta se presenta vacía. Estos signos serán usados dependiendo del orden numérico en primera instancia, después por las posiciones relativas entre las marcas y también por los espacios de los segmentos unitarios que la pueden convertir en una representación homogénea o no, dependiendo del uso que se le quiera dar, este es el punto de vista que estamos sosteniendo en el presente trabajo.

Respecto a las habilidades observadas en estas investigaciones queremos enfatizar aquellas que deben ser puestas en funcionamiento cuando la tarea se refiere a la interpretación de las desigualdades y las inecuaciones de una variable cuyas soluciones se encuentran como conjunto de puntos que toman cuerpo con base en los segmentos ya sea que estos sirvan para la ubicación de marcas y números, como para representar espacios o dominios de solución.

Desde nuestro punto de vista, este aspecto debe estar presente para la correcta interpretación no sólo del orden, sino también para las soluciones asociadas a los números y a la ubicación del espacio solución de desigualdades e inecuaciones.

A continuación, estaremos haciendo algunas acotaciones sobre los distintos tipos de signos que intervienen en tratamiento de la recta numérica como modelo didáctico y sus propiedades de orden y estimación, lo que comentaremos en adelante.

2.4. TIPOS DE SIGNOS EN LA RECTA NUMÉRICA

Si la matemática es esencialmente simbólica, es importante observar el papel de los signos que permiten al individuo mediar el conocimiento, es a través de ellos que se orientan las acciones y reflexiones de este, logrando una reconstrucción interna de la acción llamada internalización (Radford, 2006b; Presmeg, Radford, Roth y Kadunz, 2016,). En particular, Radford afirma que "El signo tiene significado cuando está relacionado con otros signos" (Radford 2006b, p. 8), por ello se ha de desarrollar una actividad adecuada para su coordinación, reflexión y finalmente coproducción o producción conjunta.

Desde el punto de vista de Vygotsky, los signos pueden llegar a ser instrumentos psicológicos a partir de su uso y que son "creaciones artificiales; estructuralmente son dispositivos sociales y no orgánicos o individuales; están dirigidos al dominio de los procesos propios o ajenos, lo mismo que la técnica lo está al dominio de los procesos de la naturaleza." (Vygotsky, 1991, p. 65).

Tanto signos como artefactos, tal como lo afirma Radford (2006b), son elementos claves en la adquisición del saber o aprendizaje a través de la mediación semiótica que el individuo puede hacer de estos, y participan en las reflexiones que surgen en la actividad alrededor de ellos, "son portadores de convenciones y formas culturales de significación que hacen a la semiótica un campo muy bien situado para entender las relaciones entre los signos a través de los cuales piensan los individuos y el contexto cultural" (Radford, 2006b, p. 7).

Como nuestro interés en esta investigación se refiere a la interpretación de las desigualdades numéricas e inecuaciones lineales, que hacen uso de las propiedades ostensivas de los signos sobre la *recta numérica,* es que vamos a hacer diferencia entre el tratamiento de los distintos tipos de signos que están presentes en este modelo. Por ello vamos a considerar la postura de C. Pierce, quien hace diferencia entre los signos dependiendo de sus usos.

Sobre las diferencias entre los tipos de signos Radford (2006, p. 9) comenta que "Pierce definió el signo como algo que, para alguien, toma el lugar de otra cosa (objeto del signo), no en todos los aspectos, sino solamente de acuerdo con cierta forma o capacidad (CP 2.228)" por ello es el uso que se hace de ellos lo que hace la diferencia en algunos aspectos del significado asociado a esos signos.

Como resultado de esta postura, Pierce (2005) sugiere que hay tres tipos de signos: los íconos, los índices y los símbolos y esta diferencia, radica en el uso que se hace del signo. Desde este punto de vista se tiene que: 1. Un ícono es una cualidad que poseen los signos, de manera que cualquier cosa se puede sustituir por algo a lo que se le parece, por ejemplo, una imagen sugerente. 2. Un índice es cualquier cosa en la que se puede centrar la atención, que sobresalga sobre lo demás y que podría representar la unión entre dos porciones de la realidad, un ejemplo mencionado por Pierce (2005) es el que dice que: "si veo a un hombre balanceándose. Es una indicación probable de que es un marinero" (p. 4). Y 3. Un símbolo por otro lado "es un signo que sirve para distinguir algo, conectando la idea con la palabra, por ejemplo: expresiones de sentimientos, entradas de teatro, una bandera, un santo, etc." (Pierce, 2005, p. 5)

Hasta aquí, hemos comentado la existencia de distintos tipos de signos a los que haremos referencia luego de establecer las distintas modalidades de rectas numéricas que estaremos usando en esta investigación.

En los resultados de investigación consultados, encontramos que la atención se dirige al tipo de actividades que pueden ser llevadas a cabo con apoyo de la recta numérica, en particular las que se refieren a ordenar, medir y resolver las inecuaciones para encontrar sus soluciones, sin embargo no hay trabajos que indaguen los antecedentes necesarios para una interpretación correcta del papel de los signos en la recta numérica como un antecedente necesario para el buen desempeño de esas actividades.

En la dirección de establecer el papel de los signos en la recta numérica, consideramos que éste es un recurso que además es susceptible de ser verificado empíricamente, al mismo tiempo que es regulado por las propiedades de orden y posición relativa entre números o marcas. La recta numérica puede ser una herramienta para la transferencia entre las representaciones numéricas y sus propiedades y podría contribuir a dar forma a actividades de ubicación, anticipación y verificación de la estimación sobre la posición de marcas y números dependiendo del valor asignado, a la medición y el conteo sobre el modelo lo que la hace un buen candidato para ser considerado un artefacto semiótico que posibilite una praxis reflexiva.

En nuestro caso, consideramos que esta posibilidad depende del uso que se les dé a:

1. Los recursos semióticos en la enseñanza (manejo sobre marcas como indicadores, números con orden intrínseco, ubicación espacial de signos, segmentos como índices, números y marcas como símbolos y la recta ordenada)
2. Las tareas requeridas (localizar, comparar, operar, estimar, anticipar) y
3. El tipo de representación (rectas numéricas estructuradas con marcas, con marcas y números y las rectas numéricas vacías).

Además, de que la actividad relacionada a la medida puede ser vista como dos actividades conjuntas 1. La estimación, (que no requiere de números y se puede aplicar a ojo) y 2. La apreciación de la proporcionalidad, cuando contamos con números o marcas colocadas considerando los intervalos iguales como base.

En este caso, podemos considerar que el uso de las marcas y los números como índices van a proporcionar una aproximación a la representación para establecer una posición relativa, en cambio cuando la posición de los números y las marcas se corresponden, el estudiante debe hacer una interpretación de éstos, considerando las posiciones relativas y las relaciones de proporcionalidad determinadas por los segmentos unitarios para llevar a cabo tareas de orden y terminar por usarlos como símbolos a partir de una actividad reflexiva que se apoya en las propiedades numéricas y espaciales de la representación.

Por esta razón estamos indagando la correspondencia entre un adecuado ordenamiento de números y marcas en la recta numérica y la interpretación de las zonas de solución en el caso de desigualdades numéricas como de inecuaciones lineales de la forma $a > x$ o $a < x$, para a constante y x variable. Esto considerando que la comparación que se hace en la desigualdad numérica tiene como antecedente el aprendizaje del orden de los números para entonces poder tomar una decisión sobre la posición del número y las marcas atendiendo a las restricciones numéricas y espaciales.

Bajo es supuesto de que llevamos a cabo un estudio de caso vamos a exponer nuestras hipótesis y preguntas de investigación enseguida

2.5. HIPÓTESIS DE TRABAJO

1. La recta numérica proporciona un modelo que puede apoyar tanto la numerabilidad a través del conteo, como el de la medición a través de la comparación de longitudes y de la estimación.
2. Se requiere de instrucción intencional para que el estudiante considere el modelo en términos de sus características simbólicas, en particular las numéricas (orden) o las de medición y estimación (longitudes) las que es posible desarrollar mediante una práctica adecuada.

2.6. CONDICIONES INICIALES

1. El correcto conocimiento del orden numérico es un antecedente necesario para la adecuada interpretación de las desigualdades e inecuaciones en la recta numérica.

2. Hay distintos niveles de complejidad en la interpretación y uso de los signos en la recta numérica, lo que requiere de un trabajo intencional para que los estudiantes logren interpretar los signos presentes como símbolos matemáticos.
3. El modelo de recta numérica puede jugar el papel de instrumento en prácticas reflexivas para una co-producción del saber asociado al manejo de la desigualdad y las inecuaciones lineales.

2.7. PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

1. ¿Hasta dónde el orden numérico es suficiente para la correcta interpretación de las desigualdades y las inecuaciones en la recta numérica?
2. ¿Qué complejidades aparecen en la interpretación de las desigualdades numéricas e inecuaciones lineales en nuestro estudio de caso?
3. ¿Cuáles fueron los distintos usos que se le dio a la recta numérica para tratar al orden, las desigualdades numéricas y las inecuaciones lineales en nuestro estudio de caso?

En el siguiente capítulo estaremos planteando la metodología utilizada para llevar a cabo la presente investigación.

3. METODOLOGÍA

3.1. TIPO DE INVESTIGACIÓN

Nuestra investigación se desarrolló a través de un enfoque cualitativo que según Quecedo y Castaño (2002) se refiere a "la investigación que produce datos descriptivos: las propias palabras de las personas, habladas o escritas, y la conducta observable" (p. 7). Además, es un enfoque de tipo interpretativo que "por un lado, implica a la manera en que los sujetos humanos interpretan la realidad que ellos construyen socialmente. Por otro, refiere al modo en que los científicos sociales intentamos comprender cómo los sujetos humanos construyen socialmente esas realidades." (Vain, 2012); que se apoyó en un estudio de caso, que según Martínez (2006) se refiere a: "a través del mismo se mide y registra la conducta de las personas involucradas en el fenómeno estudiado" (p. 167), cuyos instrumentos fueron un cuestionario en línea a través de la plataforma de GeoGebra y de una entrevista-intervención vía Zoom que complementó la observación del caso presentado.

3.2. OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN

Indagar si un adecuado ordenamiento de números y marcas en la recta numérica y la interpretación de los signos que intervienen en este modelo es suficiente para el desarrollo de tareas de que incluyen establecer los espacios o dominios de solución tanto de desigualdades numéricas como de inecuaciones lineales de la forma $x < a$ y $x > a$ con a constante y x variable.

3.3. MÉTODO DE LA INVESTIGACIÓN

La participante es una estudiante de octavo grado del sistema educativo hondureño quien tiene 14 años, asiste a una escuela pública y ha desarrollado sus actividades escolares adecuadamente.

Este estudio se enfoca en el contexto de Honduras debido a los intereses de la investigadora y la necesidad de los antecedentes del conocimiento y uso del signo desigual, como antes hemos mencionado.

El estudio se llevó a cabo en condiciones de cuarentena durante el año 2020 para lo que se usó un cuestionario y una posterior entrevista con carácter de intervención, ambos en línea.

Previo al desarrollo de las actividades y considerando los intereses de la participación consentida y atendiendo a la importancia de la participación informada procedimos a comunicar sobre el destino de los datos proporcionados bajo la siguiente advertencia: **"Te recordamos que toda la información que proporciones será utilizada únicamente para fines de la investigación"** (Anexo 1, p. XI). De la misma manera, previo a la entrevista durante la intervención se solicitó el permiso expreso de la estudiante para grabar la pantalla y consecuentemente todas las actividades y nuevamente, se le recordó que los datos serían usados únicamente para la presente investigación.

El desarrollo de esta investigación se apoyó en un cuestionario en línea mediante un software de geometría dinámica, específicamente GeoGebra, el cuál fue contestado individualmente por la estudiante; luego se complementó con una entrevista-intervención a través de la plataforma de Zoom.

El cuestionario fue aplicado en dos partes correspondientes a los dos contenidos de la investigación, que fue presentado mediante dos direcciones electrónicas, en la primera se trataron tareas relacionadas con las desigualdades numéricas https://www.geogebra.org/m/cqqjcpq2 y en la segunda el tema general fue el tratamiento de las inecuaciones lineales https://www.geogebra.org/m/aq7vhvjw; en ambas aproximaciones la recta numérica fue el modelo de referencia. Cada una de las partes se desarrolló a lo largo de 30 minutos.

El cuestionario requería de respuestas directas, pero también de un uso elemental del software, marcando zonas para el cumplimiento de las restricciones de las desigualdades y las inecuaciones dependiendo de las preguntas. Al mismo tiempo la estudiante tenía oportunidad de expresar sus opiniones e interpretaciones a las preguntas abiertas planteadas en el cuestionario.

Es importante aclarar que la estudiante tenía un conocimiento adecuado del orden de los números enteros y decimales, también mostraba buen desempeño para establecer las posiciones relativas de la relación mayor-menor entre números y la ubicación espacial de los números y marcas con un manejo elemental del modelo de la recta numérica.

Uno de los recursos de análisis usados para la recopilación de datos, en este caso, fue el que permitía el software para guardar de manera automática las respuestas de la estudiante, lo que nos sirvió para luego revisarlas y diseñar las preguntas adecuadas para la entrevista-intervención que haríamos y para investigar nuestras hipótesis y profundizar las respuestas obtenidas.

La entrevista-intervención fue desarrollada a los dos días de que la estudiante respondió el cuestionario con el objeto de que tuviese tiempo para pensar sus respuestas, al mismo tiempo para que esta actividad estuviera aún presente. Teníamos especial interés en algunas respuestas del cuestionario elegidas previamente y esta entrevista duró aproximadamente 30 minutos.

Los datos se tomaron a partir de las respuestas del cuestionario guardadas en el software GeoGebra, también de los audios y videos que fueron transcritos de la entrevista-intervención que fueron obtenidos mediante la plataforma Zoom, que giró alrededor de las respuestas de la estudiante a las tareas del cuestionario.

El cuestionario, los datos obtenidos de éste y la entrevista aparecen en el Anexo 1, 2 y 3 respectivamente.

A continuación, se describe el material de apoyo y las actividades del cuestionario en línea aplicado a la estudiante, así como los objetivos particulares de cada actividad.

3.4. DESCRIPCIÓN DE LAS ACTIVIDADES Y SUS OBJETIVOS

3.4.1. Cuestionarios

La primera parte del cuestionario aplicado a la estudiante o Actividad # 1 estaba formada de 24 tareas; la segunda parte o Actividad # 2 contaba con de 26 tareas.

En todos los casos la estudiante tuvo oportunidad de usar una recta numérica para marcar sobre la pantalla aquello que se le pedía, así como para verificar y organizar la información solicitada, haciendo de la recta ostensiva un instrumento de verificación y de mediación semiótica como luego veremos en los resultados.

Como los objetivos de esta investigación se refieren al uso de los signos de la recta numérica en tareas de desigualdades e inecuaciones, decidimos trabajar esencialmente con números enteros para evitar la distracción que representaría incorporar otro tipo de números, igualmente mencionaremos el producto por menos uno como un antecedente de la multiplicación por negativos y no la abordaremos para otros números porque deseamos plantear, en primer lugar, el efecto que este hecho tiene en los signos, las posiciones de los números y del conjunto solución. Cabe aclarar que no extendimos este procedimiento a las inecuaciones, debido a que la interpretación de los valores tanto positivos como negativos, deben independizarse del formato algebraico correspondiente, por ejemplo, expresiones con $-x$ pueden ser legítimamente positivas o x igualmente negativas.

Actividad # 1

El objetivo general de la Actividad # 1 fue abordar el caso de las desigualdades numéricas, por ello iniciamos con tareas de orden y comparación de números enteros utilizando la recta numérica, en especial, prestamos atención a los recursos que se usan en esta tarea, específicamente lo relativo tanto al uso de signos como de marcas, los números y los espacios que son identificados como segmentos unitarios, en particular, cuando están asociados a tareas de *estimación*, la que consideramos se pone en funcionamiento cuando hay que asignar un número a un espacio particular; la tarea 1 y 2 de esta actividad están relacionadas con el orden de los números sin el uso de la recta numérica, lo que nos indica si la estudiante no presenta problemas con el orden numérico e identifica y usa los símbolos de los números adecuadamente.

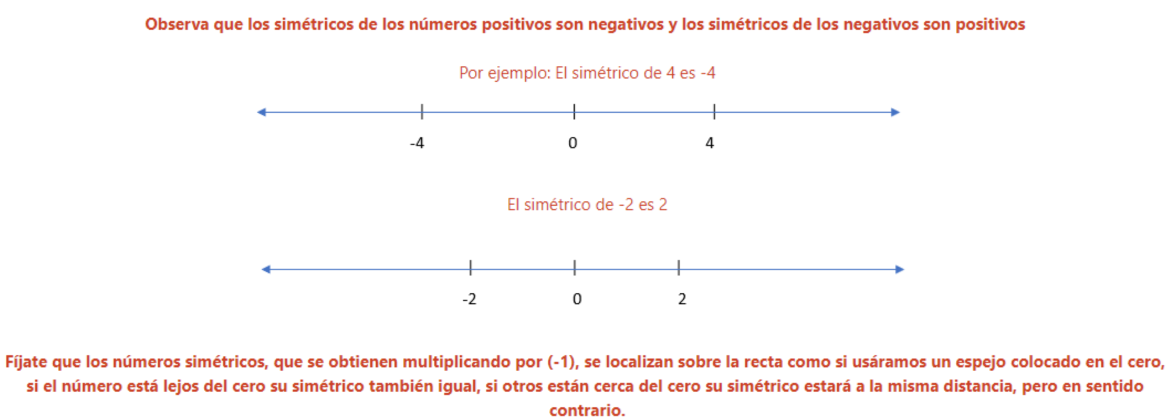
Las tareas de la 3 a la 6 están centradas en la ubicación de dos números sobre la recta numérica y su comparación, teniendo en cuenta las posiciones relativas de los números y las marcas asociadas, así como sus referencias espaciales, es decir, si la posición relativa entre los números estaba localizada a la izquierda o a la derecha dependiendo de su orden y su valor.

En la tarea número 7 se exploran dos ideas: la multiplicación por menos uno asociado al número simétrico respectivo y por otro lado la localización de ese simétrico de manera que se establezca una asociación entre los dos hechos. El énfasis en este caso estaba puesto en la ubicación de las marcas correspondientes a las posiciones de los números simétricos de los presentados en la tarea 3, con el fin de que la estudiante interprete la posición de algún número con respecto a su simétrico como resultado de la multiplicación por menos uno, considerando no sólo la relación simétrica, sino el cambio de los signos en la desigualdad por efecto de la multiplicación por menos uno.

Para ello se dio una breve explicación sobre la relación entre un número y su simétrico, antes de asociarlo al producto por un número negativo, así como algunos ejemplos que le pudieran servir como guía a la estudiante. El tratamiento e introducción de un número y su simétrico responde a la necesidad de indicar al estudiante las reglas del producto por negativos cuando se trata de valores numéricos, bajo el supuesto de que este planteamiento posiblemente no le sea conocido.

En la siguiente imagen se ve cómo se hace la aclaración sobre el simétrico mostrada en el propio cuestionario.

Imagen 11: Explicación sobre el simétrico mostrada en el cuestionario.



Fuente propia

Considerando la advertencia anterior, las tareas 8, 9 y 10 están centradas en la ubicación y la posición relativa de las marcas y números de la tarea 7.

Después de la tarea 10, se hace un breve resumen que insiste en el cambio de todos los signos incluyendo el de la desigualdad, cuando comparamos una pareja de números positivos y los respectivos simétricos, dando pie, no sólo a la comparación simétrica, sino aquella que se establece entre ellos, consideramos que este acercamiento va más allá de lo propuesto en los libros de textos, sin embargo creemos que la dificultad del producto por negativos puede ser sobrepasada con la idea de la relación de los números y sus simétricos y su posición relativa en la propia recta como aquí proponemos, dando una posibilidad de interpretación accesible a los estudiantes de esta operación. En la tarea 11 se quiere comprobar la claridad de la idea de la comparación de los simétricos asociados al producto por menos uno.

Las tareas de la 12 a la 14 están basadas en la interpretación de la estudiante de todas esas reglas que se deben cumplir, para reflexionar sobre la comparación de dos números y su relación que toma la forma de la desigualdad, con el fin de comentárselo a sus compañeros o a ella misma.

De la tarea 15 a la tarea 22, tratan aspectos relacionados con todos los incisos anteriores, además se hace una combinación de números positivos y negativos y luego se hace referencia al producto de ellos para abordar los simétricos, siempre haciendo uso de la ubicación y de la posición relativa de los números, para poder relacionarlos y compararlos sobre la recta numérica ampliando el espectro de números considerados.

Por último, en las tareas 23 y 24 de la primera actividad nos enfocamos en tareas que requieren de marcar zonas de acuerdo con ciertas condiciones, para identificar si éstas interpretan adecuadamente la zona solución correcta mediante indicaciones verbales, en este caso la estudiante pudo usar el recurso de marcación que le proporciona la computadora para establecer la zona solución.

De manera general, en la Actividad 1 se cuestiona sobre el orden entre los números, el uso de las marcas respecto a sus posiciones espaciales relativas y la conservación de los intervalos para dar sentido a esta posición. También incluimos la posición que guardan los enteros y sus simétricos cuando han sido multiplicados por menos uno y particularmente los cambios que los signos deben sufrir con esta operación.

Actividad #2

La Actividad #2 se relaciona, de manera general, con las inecuaciones lineales como una extensión del tratamiento de las desigualdades, en donde aparece la variable que será interpretada como un número general y que tienen la forma $ax\ (>, <)\ b$, de manera que las soluciones, están dadas por un conjunto de soluciones del que podemos tomar cualquiera de sus elementos, que en la recta numérica son representados a través de una zona que toma la forma de un intervalo que en el caso del punto de vista de la semiótica del modelo debe ser interpretado como un símbolo con propiedades numéricas y espaciales en el sentido que pasaremos a describir.

Las tareas de la 1 a la 5 pretenden abrir la posibilidad de que varios valores sean solución de la desigualdad numérica, la indicación se hizo de manera verbal donde se pedía marcar la zona adecuada de acuerdo con la condición dada. En este caso 5 tareas están relacionadas con la relación *mayor que*, para que la estudiante logre interpretar la posición relativa adecuada entre números y sus múltiples soluciones, al mismo tiempo que centre su atención en la idea asociada a una inecuación.

Luego de estas tareas se hace una aclaración sobre como de una expresión escrita en el lenguaje común la podemos pasar a un lenguaje algebraico incorporando el signo de desigualdad y dando a la incógnita un estatus de número generalizado. (Ver Imagen 12)

Imagen 12: Explicación para resolver las actividades mostrada en el cuestionario.

Nota que la expresión "todos los valores mayores que 2" se puede escribir como una desigualdad de la siguiente forma x > 2 donde x representa todos los posibles valores que cumplan la desigualdad, como podemos ver en la siguiente tabla:

Si tenemos una relación de desigualdad que se repite para muchos valores como los siguientes ejemplos:	Para ahorrar espacio usamos la siguiente expresión
3 > 2 2.5 > 2 5 > 2 10 > 2 100 > 2 ...	**x > 2** Donde x es cualquier número que cumpla la desigualdad Cuando usamos x es importante aclarar qué valores puede tomar

Cabe aclarar qué a pesar que 2.5 no es un número entero, sino que un número decimal también cumple con la condición de que es mayor que 2, es decir, los decimales los podemos trabajar de igual forma que como comparamos los enteros.

Fuente propia

Las tareas de la 6 a la 10 son similares a las anteriores, sin embargo, éstas se basan en la relación *menor que*, de igual forma se da una explicación de cómo pasar del lenguaje común al lenguaje algebraico con el formato de la Imagen 12.

Las tareas de la 11 a la 14 solicitan zonas establecidas por las inecuaciones sujetas a dos condiciones al mismo tiempo usando el signo de desigualdad. El objetivo es que el estudiante logre interpretar la zona adecuada. Los signos en estas tareas es el mismo (>).

En las tareas de la 15 a la 18 las dos condiciones simultáneas se presentan con el mismo signo de desigualdad (<) con el mismo tratamiento de las tareas anteriores, pero, con respecto a la combinación de positivos y negativos.

De la tarea 19 a la 22 las dos condiciones incluyen signos de desigualdad diferentes (< , >) para encontrar la zona solución que se presenta como un intervalo con enteros positivos.

Por último, de la tarea 23 a la 26 se proporcionan listas de números en desorden sobre la recta numérica a intervalos iguales, lo que enfrentaba a la estudiante con la tarea de recolocarlos para ver si se respetaba el orden al mismo tiempo que los segmentos asignados a cada número.

Enseguida comentaremos el procedimiento llevado a cabo durante la entrevista.

3.4.2. Entrevista

A continuación, mencionaremos el desarrollo de la entrevista-intervención que llevamos a cabo en este trabajo. El objetivo de ésta fue indagar sobre las respuestas incorrectas o dudosas de la estudiante para entender a profundidad los motivos de estos errores además de tener oportunidad de llevar a cabo una coproducción, en el sentido de Radford (2006 b) mediante la intervención de los contenidos trabajados para ver hasta donde era posible desarrollar el proceso de mediación semiótica para lograr la objetivación respecto a la idea de desigualdad numérica e inecuación lineal, con apoyo en el artefacto del modelo de la recta numérica.

Antes de la entrevista, se hizo una breve clasificación de las respuestas de la estudiante que nos parecieron de interés, éstas incluían aquellas que tenían algunos errores o que no fueron completadas por la estudiante.

Luego de esa clasificación, nos apoyamos en imágenes de las preguntas y respuestas que deseamos comentar con la estudiante usando la plataforma de GeoGebra y con este material se desarrolló la entrevista en una sesión de Zoom.

La entrevista-intervención aprovechó las características que ofrece el software Zoom, que éste le permite a la estudiante escribir sobre la pantalla que se está compartiendo, así como el uso de sus diferentes herramientas como el dibujo de marcas y números y de la elaboración de esquemas dibujados. Lo que permitió tener datos de primera mano durante la entrevista, sobre todo en el caso de comentar nuevamente las tareas que se le habían presentado en el cuestionario, las cuales puedes ser sobrescritas o modificadas.

En la entrevista-intervención se compartió en la pantalla un documento de Word con las respuestas previamente seleccionadas, interviniendo en cada tarea detenidamente, llevando a cabo preguntas que le hacen ver que las respuestas no eran adecuadas y promoviendo la reflexión sobre las consecuencias de estas, para provocar una reflexión sobre lo que vendría a ser la respuesta correcta.

Los datos de esta investigación se obtuvieron del cuestionario y de la entrevista que fueron grabadas a través de la misma plataforma y transcrita esta última; también contamos con la grabación de todas las acciones de la estudiante con el software. Todo lo anterior fue la base del análisis de los resultados que se presentan a continuación.

4. RESULTADOS Y ANÁLISIS

4.1. INTRODUCCIÓN

Para presentar los datos de la investigación hemos organizado las preguntas por tema tratado y estaremos haciendo comentarios parciales respecto a el desarrollo de esas actividades de conjunto para finalmente hacer observaciones generales.

Respecto a la entrevista-intervención, se transcribió la grabación completa con una duración de alrededor de 30 minutos, la cuál presentamos completa en el anexo 3, en esta sección hemos hecho una selección de algunos fragmentos de las actividades con el objeto de mostrar el uso de los signos y elementos de análisis de la teoría de la objetivación en la que nos apoyamos para interpretar sus respuestas las que presentamos acompañadas de comentarios.

Enseguida mostramos las actividades que la estudiante desarrolla adecuadamente como el fundamento que le permitió llevar a cabo la actividad propuesta, para posteriormente centrarnos en las tareas que fueron revisadas con ella en la entrevista-intervención.

4.2. ACTIVIDADES DESARROLLADAS ADECUADAMENTE POR LA ESTUDIANTE

La estudiante no tuvo ningún problema en las siguientes tareas como se puede ver en las respuestas de la estudiante al cuestionario en el Anexo 2:

1. Colocar los números dados en determinado orden, de mayor a menor o viceversa. **(Tareas 1 y 2 de la actividad 1 y 23-26 de la actividad 2)**
2. Colocar las marcas correspondientes para algunos números según el orden para luego decidir quién es el mayor o quién el menor. **(Tareas 3, 7, 15 y 19 de la actividad 1)**

3. Preguntas sobre dos valores comparados mediante el signo de desigualdad en los casos de enteros positivos, positivos y negativos y negativos respectivamente. **(Tareas 4-6, 8-11, 16-18 y 20-22 de la actividad 1)**
4. Preguntas sobre la posibilidad de encontrar números distintos de los esteros dando por respuesta ejemplos de decimales **(Tareas 1-3 y 6-8 de la actividad 2)**
5. La interpretación de la multiplicación de una desigualdad por menos uno mediante la obtención de una relación simétrica entre números que fueron correctamente localizados y relacionados **(Tareas 7-14 y 19-22 de la actividad 1)**
6. La representación de las zonas establecidas por las desigualdades numéricas, es decir identifica correctamente la zona de los números que cumplen con la condición de desigualdad dada **(Tareas 4, 5, 9 y 10 de la actividad 2)**
7. La interpretación de la variable en la inecuación de la forma $x < n$ o $x > n$ es entendida correctamente como número generalizado, esto es como un signo que requiere un número específico **(Tareas 1-10 de la actividad 2)**

Por lo anterior consideramos que, la estudiante tiene un buen manejo del orden de los números tanto enteros, así como de los decimales, también ubica adecuadamente su posición en la recta, considerando el espacio global y las relaciones relativas entre ellos, resultados que pueden verse en el anexo 2. Este comportamiento se extendió al uso de la variable como número general en el caso de las inecuaciones. Por lo que consideramos que la estudiante, tiene un manejo en estas actividades.

A continuación, vamos a mostrar las respuestas en donde la estudiante tuvo dificultades y complicaciones, las que acompañaremos con comentarios.

4.3. ACTIVIDADES COMENTADAS EN LA ENTREVISTA. LAS DESIGUALDADES NUMÉRICAS.

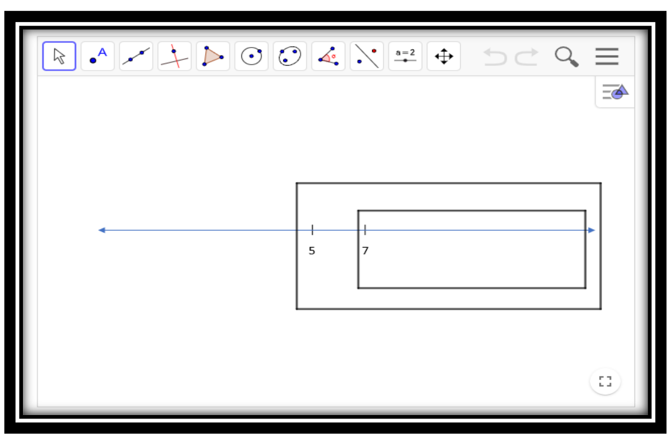
Luego de revisar las tareas comentadas y donde la estudiante resolvió adecuadamente, analizaremos ahora aquellas donde la estudiante tuvo dificultades y que fueron la base de la entrevista. Describiremos brevemente cada una de las preguntas que se le formularon con base en sus anteriores respuestas. así como el diálogo que se llevó a cabo.

En los siguientes diálogos estaremos indicando la intervención de la estudiante con una E y la de la investigadora con una I, la numeración corresponde a la secuencia de frases en el diálogo sostenido en la entrevista.

En la **Tarea 23** se pedía:

Marca la zona de los números mayores que 5 y luego la zona de los números mayores que 7 ¿algún entero cumple las dos condiciones? Si hay uno que cumpla ¡márcalo en la recta!

Imagen 13: Respuesta de la estudiante a la tarea 23



Tomada de las respuestas en GeoGebra

Luego de ver la respuesta de la estudiante (Ver Imagen 13), se le preguntó por qué las marcas de la zona están antes del 5 y antes del 7 y se desarrolló el siguiente diálogo.

Fragmento 1

10. I: El enunciado mencionaba que tenía que colocar la zona de los números mayores que 5 y luego la zona de los números mayores que 7. Veo que, si marcó dos zonas, la primera pregunta ¿Por qué hace la marca un poco antes del 5 y un poco antes del 7?
11. E: Ahhhh … pues. Como decía mayor que 5 yo tomé del número 5 hacia adelante, los números que seguían del 5 y del número 7 hacia adelante, los que seguían después del 7
12. I: Ahhhh ok, pero por ejemplo aquí en esta marca la hizo antes del cinco, yo le puedo decir que ahí está el punto o la marca 4.9, ¿estaría dentro de los números mayores que 5?
13. E: No
14. I: Ah ok, si yo le vuelvo a hacer otra pregunta el 6.9, porque aquí yo veo la marca que está antes del 7, podría ser 6.9, ¿6.9 es mayor que 7?
15. E: No

Las preguntas sobre la solución incorrecta de las zonas marcadas hacían ver que, así como estaban, ésta no eran una buena respuesta y se dieron razones para ello, lo que hizo que la estudiante se diera cuenta de la importancia de la posición de la marca en la zona, lo que corrigió haciendo luego una correcta interpretación Consideramos que la estudiante, aunque no tiene conflicto con el orden de los números, esta haciendo uso de las marcas que establecen las solución como si éste fuese un índice que indica una dirección sin considerar el estatus de la marca como contenedor de las soluciones, es decir como un símbolo.

Siguiendo con el diálogo, se le preguntó si en la zona había un número que fuera un límite o final que cumpliera con las condiciones (Ver Fragmento 2)

Fragmento 2

24. I: Ok ahora observemos algo, en la parte final, ¿siempre está cerrado verdad?, si se fija. ¿Eso que quiere decir? ¿Quiere decir que hay hasta un número final o hay muchos números a partir de ahí?

25. E: No, todos los números que le siguen son mayores y todos los números que siguen ahí pueden estar en la recta.

Esta respuesta de la *línea 25*, nos muestra que no tiene problemas con la existencia de números más allá de la marca. En esta tarea, aunque respondió marcando las zonas con índices aproximados, no completó la tarea que pedía sugerir números que cumplieran con las dos condiciones simultáneamente, lo que nos advierte sobre la posibilidad de que hubiera un problema de otra índole, que de hecho no está asociado con el orden de los números, sino con otro tipo de actividad cognitiva que sugiere otro tipo de complejidad en la solución de la tarea, por ello se hicieron las siguientes preguntas (Ver Fragmento 3).

Fragmento 3

28. Entonces si ya me queda un poco más claro. Ok en esta parte no terminaba ahí la pregunta porque les preguntaban ¿Algún entero cumplen las dos condiciones?
29. E: mmm… (Silencio)
30. I:¿Algún entero cumple que es mayor que 5 y es mayor que 7?
31. E: si
32. I: ¿Cuáles?
33. E: Todos los que siguen después del 5 y después del 7
34. I: pero ¿6 cumple esa condición?, ¿cumple las dos condiciones al mismo tiempo?
35. E: Ahhh … no.
36. I: Ah ok, entonces solo cumple una

En este momento nos percatamos de que había ciertamente un conflicto para la interpretación de las dos condiciones al mismo tiempo, pareciera que no se debía a un error de lectura de las indicaciones, sino a la complejidad de interpretar lógicamente la doble indicación y es hasta este momento que ella misma acepta que zona mencionada es la que cumplía las dos condiciones al mismo tiempo, supusimos en este momento que considerar las dos condiciones simultáneas ya no iba a ser problema en adelante (Ver Fragmento 4).

Además, notamos que usar ejemplos particulares para corroborar lo adecuado de sus respuestas no ha sido una práctica de la estudiante en sus respuestas y es cuando se le indican las consecuencias de sus éstas que hace conciencia de ellos y acepta el error y empieza a ensayar con ejemplos particulares.

Fragmento 4

40. I: Para que me cumpla las dos condiciones ¿qué número tiene que ser?
41. E: Tiene que ser un número que sea mayor que 7

En los fragmentos anteriores observamos que: la estudiante tiene claridad sobre el orden de los números y la posición de éstos en la recta numérica y es el recurso que le permite darse cuenta de sus errores cuando no considera las dos indicaciones, pero el cumplimiento de las dos condiciones al mismo tiempo no está todavía disponible entre sus recursos, lo que muestra un nivel distinto de complejidad en el tratamiento del orden y por tanto de la desigualdad con el uso de la recta numérica. También notamos un uso de las marcas que están disponibles en la computadora como si éstas fueran un índice, es decir, que tienen la función de indicar la dirección de la zona adecuada sin que la exactitud de la marca de inicio fuese importante lo que en términos del uso del modelo es fundamental.

Luego de esta conversación, cuando se le solicitó dar otros ejemplos con números específicos que se relacionaban con el cumplimiento de las dos indicaciones simultáneas, notamos que su conocimiento y sentido del orden la respaldó continuamente, pero seguir la doble indicación aún carece de sentido en este momento.

A continuación, mostraremos los resultados que se obtuvieron en la **tarea 24** de la actividad 1 en la que se le pedía marcar la zona determinada por dos desigualdades con la relación de menor que incluyendo números positivos y negativos, lo que aumenta la cantidad de información que debe ser interpretada y por tanto la complejidad de coordinarla de manera simultanea , en el siguiente fragmento (Ver fragmento 5) se le hace ver que hay números que no considera y que cumplen las condiciones en particular los enteros negativos menores que -1, lo que alerta sobre la insuficiencia de sólo contar con habilidades para el orden. La respuesta correcta es lograda hasta que se incluyen ejemplos particulares.

Fragmento 5

52. I: … Vuelvo aquí otra vez, ¿Había otra pregunta en esta parte que decía que algún entero cumple las dos condiciones al mismo tiempo?
53. E: No
54. I: Segura
55. E: Si
56. I: Recuerde que las zonas que se marcaron fueron los números menores que 3 y menores que -1, entonces, los enteros son tanto negativos como positivos, ¿Qué número entero cumple las dos condiciones al mismo tiempo?
57. E: No, ninguno cumple las dos condiciones
58. I: Si tenemos por ejemplo el cero, ¿cumple las dos condiciones al mismo tiempo?
59. E: No
60. I: No, porque el cero esta en esta zona, ¿verdad?
61. E: Si
62. I: Pero por ejemplo si nos ubicamos en algún número en esta zona, en esta zona si se fija, están todos los menores que 3, porque está el cuadrado acá grande
63. E: Aja
64. I: y están todos los menores que
65. E: negativo 1
66. I: por ejemplo, si ubicamos el -2, ¿será?, ¿estará en esa zona?
67. E: Si
68. I: Entonces, ¿es o no es?, ¿cumple o no cumple las dos condiciones?
69. E: Si, si cumple las dos condiciones.
70. I: Ah ok, ¿me puede dar otros ejemplos?

71. E: Ehhh el -27, -4, -15

En este fragmento podemos ver que considerar las dos desigualdades y que por tanto debe cumplir ambas condiciones, es un problema todavía para ella y que hasta este momento la idea no ha sido adoptada por completo, además de que el reto es mayor por combinación de números positivos y negativos que es la que produce el conflicto o posiblemente se deba a la interpretación dada a la relación de desigualdad *menor que*.

Desde nuestro punto de vista, el hecho de que haya entendido que se deben cumplir las dos condiciones simultáneamente no evita la confusión cuando los números están combinados, pareciera que en estos casos el orden no es necesariamente un conocimiento que le ayude a orientar sus respuestas, ya que intervienen nuevamente aspectos lógicos, así como la falta de un examen numérico puntual.

En este tipo de tareas la estudiante entendía perfectamente como marcar dos zonas separadas, que después de la intervención fueron marcadas como símbolos que contenían a la solución. También podía marcar una sola zona determinada por dos condiciones cuyos números eran positivos, sin embargo, al mostrar una mezcla en los dos tipos de números y las dos condiciones nuevamente aparece un nuevo conflicto de interpretación, aunque la sugerencia sobre el efecto de multiplicar por uno negativo ha sido aceptada sin problema aparente.

4.4. ACTIVIDADES COMENTADAS EN LA ENTREVISTA. EL CASO DE LAS INECUACIONES

A continuación, se mencionarán aquellas actividades relacionadas con las inecuaciones que tienen un formato parecido al de las desigualdades numéricas, pero en donde aparece una variable lineal "x" tratada como número general, es decir que es un indicador para aceptar, incluir o considerar distintos números. En estas tareas se solicita primero que den valores enteros específicos y luego decimales, aunque el uso de decimales no se profundizó, para después marcar la zona solución bajo las dos condiciones que se deben cumplir al mismo tiempo.

En la **tarea 11** de la actividad 2 se pide lo siguiente:

Da un valor entero para x que cumpla con las siguientes condiciones $x > 5$ *, pero también* $x > 7$

Imagen 14: Respuesta de la estudiante a la tarea 11

Tomada de las respuestas en GeoGebra

Al dialogar con la estudiante sobre esta pregunta y mostrarle la respuesta que había dado en el cuestionario, se volvió a poner en discusión la interpretación de las dos condiciones simultáneas, tal como se muestra a continuación (Ver fragmento 6):

Fragmento 6

84. I: eh ok, acá está esta otra pregunta también, que está bastante relacionada con las dos anteriores que me respondió que le pedían da un valor entero para x que cumpla con las siguientes condiciones $x > 5$, pero también que cumpla esta condición $x > 7$. ¿Cambiaría su respuesta o no la cambiaría?
85. E: Ummm, ahhh ¿o sea que tenía que poner un mismo número que cumpliera las dos condiciones?
86. I: Exactamente
87. E: Ah, que ….
88. I: Si porque ahí le dicen que, da un valor
89. E: Ah si …
90. I: Que cumplan las siguientes, entonces ahora ya pensándolo así, ¿qué valor me daría?
91. E: Uhhh, eh pondría en el primero… pondría el 15

Luego de la discusión, la estudiante puedo dar un ejemplo inmediato de un número que cumple dos condiciones, mostrando en la *línea 85* que aún existe cierta inseguridad en la interpretación del cumplimiento de ellas. Esto nos llevó a hacer algunas otras preguntas (Ver Fragmento 7) relacionadas de igual forma, con los números que pertenecen o no a la zona solicitada para ver si está instalado en ella la interpretación del cumplimiento de las dos condiciones simultáneamente.

Fragmento 7

104. I: Correcto, el seis ¿lo cumpliría?
105. E: No
106. I: ¿Por qué?
107. E: Porque si es mayor que 5, pero no es mayor que el número 7

Cuando se le preguntó si un número que no estaba en esa zona podía o no pertenecer a ésta, contestó de manera correcta dando razones suficientes sobre los números pertenecientes a la zona solicitada.

Hasta aquí, consideramos que la estudiante tiene un adecuado manejo del orden de los números, como mostró desde el principio, sin embargo, parece que hay dos obstáculos que continúan estando presentes: el primero es el del cumplimiento de las dos condiciones como regla para encontrar la zona solicitada y el segundo pareciera ser la interpretación de la combinación de números positivos y negativos. Este comportamiento no es alterado por la aparición de la incógnita, la que al parecer interpreta adecuadamente como un número generalizado.

Continuando con la **Tarea 12** que está relacionada con la anterior, pero donde se enfatizan las dos condiciones, lo que se asocia naturalmente a la idea de muchos, infinitos, no hay límite, por ello se hace la siguiente pregunta y que en el cuestionario respondió como sigue :

¿Cuántos enteros cumplen las dos condiciones al mismo tiempo?

Imagen 15: Respuesta de la estudiante a la tarea 12

Tomada de las respuestas en GeoGebra

Al comentar la tarea 12, la estudiante se percató de forma inmediata que la respuesta no era correcta, mostrando cara de sorpresa al leer lo que había escrito (Ver Fragmento 8)

Fragmento 8

110. I: ¿Los cumplen todos los enteros?, le vuelvo a preguntar
111. E: No
112. I: Ok, ¿por qué?
113. E: Porque si los cumplieran todos los enteros entonces pudiera poner el 3, pero el número 3 es menor que el número 5 y es menor que el número 7; y también el número 6, pero el número 6 si es mayor que el número 5, pero es menor que el número 7
114. I: Correcto, entonces siempre queda la duda, ¿son todos o no son todos? Usted ya me dijo que no son todos, pero ¿Cuántos son?
115. E: Son los que están después del número 7
116. I: ¿y cuántos? Jeje, cantidad, cuantos
117. E: todos, infinitos

En este momento la estudiante mostró elementos de llevar a cabo una praxis reflexiva, como vemos en la *línea 113*, en la que dialoga con ella misma a partir del uso de ejemplos concretos, con apoyo en su conocimiento actual cuando es confrontada, por un lado, con la consideración de las dos indicaciones por otro con la respuesta que ella había dado.

Producto de esta reflexión, mostró mucha seguridad al responder la zona correcta que cumpliera las dos condiciones, sabiendo muy claramente qué números debían pertenecer a la zona de la solución, idea que ya adoptó, sin la necesidad de una intervención de la investigadora para encontrar las respuestas adecuadas.

En la **Tarea 13** enfrenta a los números decimales asociados como se muestra enseguida :

¿Hay otros números que cumplen las dos condiciones, aunque no sean enteros? da algunos ejemplos si los hay.

Imagen 16: Respuesta de la estudiante a la tarea 13

Tomada de las respuestas en GeoGebra

Como observamos en la siguiente conversación (Ver Fragmento 9) la estudiante se apropia de la reflexión sobre la tarea, en este momento el caso de los números decimales, teniendo incluso momentos de confrontación con sus propias respuestas que le dan risa.

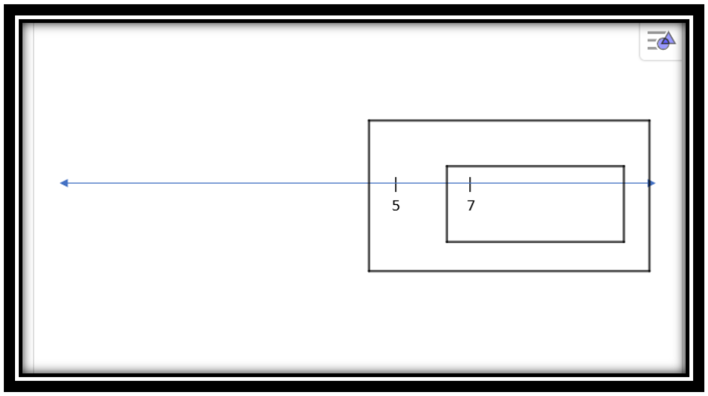
Fragmento 9

121. E: (se ríe un poco de su respuesta)
122. I: ¿Cuál de esos números si cumplen las dos condiciones? ¿O todos los cumplen?
123. E: Emm … no, sólo el 13.18
124. I: Ok sólo el 13.8, entonces ¿me podría dar algún otro ejemplo que cumpla las dos condiciones pero que no sea entero?
125. E: el 23.5, el 18.3, el 13.4.

Sin embargo, cuando la estudiante pasa a la tarea en la que se muestra la representación gráfica de la zona solución, surgen de nuevo algunas dudas sobre el uso del signo para establecer la zona, como vemos en la **tarea 14** que pedía:

Representa en la siguiente recta numérica la solución, esto es, marca la zona de los números que, no importa si son enteros o no, cumplen las condiciones x > 5 pero también x > 7.

Imagen 17: Respuesta de la estudiante a la tarea 14



Tomada de las respuestas en GeoGebra

En la respuesta que la estudiante dio al cuestionario, se muestra que marca las dos zonas por separadas que fueron hechas como si tratara de un índice, por lo que se le insiste en la representación de la zona que cumpla las dos condiciones, la estudiante vuelve a preguntar si sólo una zona es la que hay que marcar, llevando al diálogo siguiente (Ver Fragmento 10)

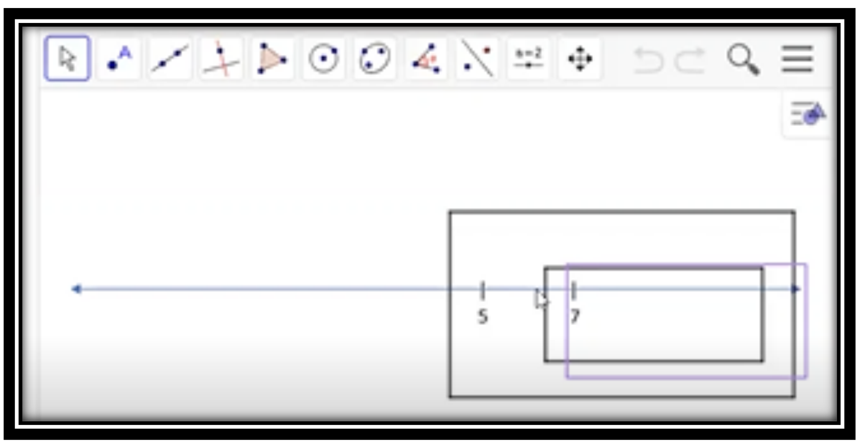
Fragmento 10

129. I: ok aquí vuelvo a ver la misma zona, ¿Qué le pedían en esta tarea? En esta tarea se le pedía que representara en la siguiente recta numérica la solución. Esto es, marca la zona de los números si son enteros o no y cumplen las dos condiciones x > 5 pero también x > 7. ¿Cuál sería esa zona? ¿Es una zona o son dos zonas?
130. E: ¿Es UNA zona que cumple las dos condiciones?
131. I: Correcto
132. E: Ahhh … entonces sería la zona después del 7, a partir del número 7 hacia después
133. I: Ah perfecto. ¿La puede dibujar?
134. E: ahí está (La dibujó inmediatamente)

Teniendo como antecedente la reflexión sobre considerar las dos indicaciones en el caso numérico dedujo que ambas se resumían en la zona a partir de 7 (*ver línea 132*) que es acompañada de un momento de *objetivación,* desde el punto de vista de Radford (2006), en donde aparece la expresión *Ahhh* mostrando que ahora si lo ha comprendido.

De esta manera logró establecer que las zonas que había marcado no eran las correctas y la dibujó nuevamente casi de inmediato con mucha seguridad sobre la solución (Ver Imagen 18). También observamos que la construcción del rectángulo fue más cuidadosa, aunque no tenemos evidencia de que ésta ya se use como símbolo, pero suponemos que por menos pone mas cuidado por las posibles implicaciones.

Imagen 18: Respuesta de la estudiante a la tarea 14 en la entrevista.



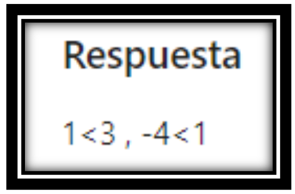
Tomada de las respuestas en GeoGebra

Hasta aquí la estudiante ha podido desarrollar una praxis reflexiva en torno al cumplimiento de las dos indicaciones, lo que ha permitido que estas sean agrupadas en una sola, también ha logrado tener claridad sobre la zona que se le está pidiendo, ya son cuidadosamente colocados en su lugar los signos de asociados a los segmentos, sin embargo, habría que profundizar más para saber si ya representa un símbolo para ella.

Ahora comentaremos las tareas 15 y 17 que están relacionadas entre sí y en donde aparecen la relación (<). La **tarea 15** pide lo siguiente:

Da un valor entero para x que cumpla con las siguientes condiciones $x < 3$*, pero también* $x < 1$

Imagen 19: Respuesta numérica de la estudiante a la tarea 15



Tomada de las respuestas en GeoGebra

En la respuesta dada al cuestionario la estudiante había considerado las dos condiciones por separado una vez más, luego del diálogo sostenido ella descarta la respuesta dada y da una correcta inmediatamente (Ver fragmento 11)

Fragmento 11

140. E: Emmm …
141. I: Da un valor entero para x que cumpla con las siguientes condiciones $x < 3$, pero también $x < 1$
142. E: el -1
143. I: Correcto
144. E: también puede ser el -7, -10
145. I: ok perfecto, ¿El cero cumple esa condición?
146. E: Si

Vemos que el cambio de la respuesta dada es producto de la discusión que se ha venido dando y el conocimiento que obtuvo la estudiante hasta este momento, podemos decir que es un cambio producido por la interrelación de la investigadora y la estudiante, debido a que en el diálogo ha sido posible participar de la experiencia de reflexión. A medida que se avanza en la entrevista la estudiante tiene oportunidad de contrastar sus respuestas y sugerir nuevos ejemplos para las tareas solicitadas.

Luego en la **tarea 17** se solicita lo siguiente:

¿Hay otros números que cumplen las dos condiciones, aunque no sean enteros? da algunos ejemplos si los hay

Imagen 20: Respuesta de la estudiante a la tarea 17

Tomada de las respuestas en GeoGebra

Después que la estudiante observó su respuesta dada en el cuestionario se desarrolló el siguiente diálogo (Ver Fragmento 12)

Fragmento 12

147. I: en la siguiente pregunta ¿Hay otros números que no sean enteros que cumplen las dos condiciones? De algunos ejemplos si los hay. ¿Qué me respondería?

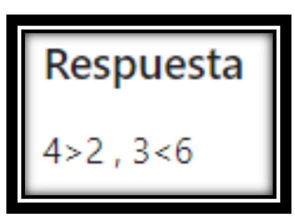
148. E: el -2.3, el 3.3, 5. 8, 14.13 eh -14.13

En la *línea 148* la estudiante corrigió rápidamente los ejemplos que estaba dando debido a que eran positivos y no cumplían las condiciones pedidas.

Por último, mostraremos los resultados obtenidos en las tareas 19, 20, 21 y 22 relacionadas entre sí y que presentan una combinación del signo de desigualdad con números positivos, en la **tarea 19** pedía lo siguiente:

Da un valor entero para x que cumpla con las siguientes condiciones: $x > 2$*, pero también* $x < 6$

Imagen 21: Respuesta de la estudiante a la tarea 19



Tomada de las respuestas en GeoGebra

Se llevó a cabo el siguiente diálogo para corregir la respuesta dada a la tarea en el cuestionario (Ver Fragmento 13)

Fragmento 13

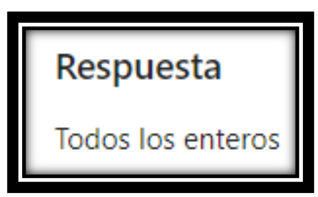
155. I: Ahora ésta otra, un valor entero para x que cumpla con las siguientes condiciones x > 2, pero también x < 6
156. E: el número 1, ehh … no. ¿Un sólo número para los dos verdad?
157. I: correcto
158. E: El número 3

La respuesta dada muestra un momento de duda en su interpretación (*línea 156)* con respecto al cumplimiento de las dos condiciones simultáneamente, pero la complejidad aumenta con los dos tipos de signos de desigualdad, lo que en apariencia es una de las razones por las que la estudiante muestra inseguridad.

Luego la **tarea 20** pedía:

¿Cuántos enteros cumplen las dos condiciones al mismo tiempo?

Imagen 22: Respuesta de la estudiante a la tarea 20.



Tomada de las respuestas en GeoGebra

Con base en esta respuesta de la estudiante en el cuestionario, se desarrolló el diálogo que mostramos a continuación (Ver Fragmento 14)

Fragmento 14

167. I: entonces cuando le preguntan acá, ¿cuántos enteros cumplen las dos condiciones al mismo tiempo? ¿Cuál fue su respuesta?

168. E: Todos

169. I: Entonces ahora ¿cuál es su respuesta?

170. E: eh sería, mmm … todos los números que son menores que 6

171. I: Menores que 6 ¿segura? Recuerde que la condición es que sea mayor que 2, pero también menor que 6 ¿Cuántos enteros hay que sean mayor que 2 y menor que 6?

172. E: que sean mayor que dos y menor que seis. Ah no… Eh (silencio largo)

173. I: Dejémoslo ahí, ahora vamos a pasar a su representación. Ahí está representando los números mayores que 2 y los números menores que 6 ¿Sí? ¿Cuál sería la zona?

En esta pregunta se incluyen los dos tipos de signos de desigualdad, lo que aparentemente provocó muchas dudas e inseguridades en la estudiante a lo largo del diálogo.

Luego de hacer algunas preguntas y detectar que marcaba las dos zonas por separado, nos dimos cuenta que tenía problemas para marcar una sola basándose en las dos condiciones cosa que habíamos visto aparecer en las desigualdades numéricas y que si bien fue rebasado en los diálogos sostenidos, ahora se renuevan la situación que incluían signos de desigualdad distintos (<, >), lo que provocó un largo silencio en el que reflexionó sobre la situación, lo que da cuenta de la actividad reflexiva como producto de la intervención para dar paso al siguiente diálogo que fue acompañado del uso de la representación gráfica que la orientó (Ver Fragmento 15):

Fragmento 15

179. I: ok, ahora que me cumpla las dos condiciones al mismo tiempo

180. E: Mayores que dos y menores que 6, ¿verdad? …

181. I: Marque la zona, ¿Cuántas zonas serian, una, dos o cuantas?

182. E: (repetía en voz baja varias veces: mayores que dos y menores que seis) Sólo sería la zona que está entre el número 2 y el número 6.

183. I: Correcto, ahora márquela

184. E: ¡Yuju!

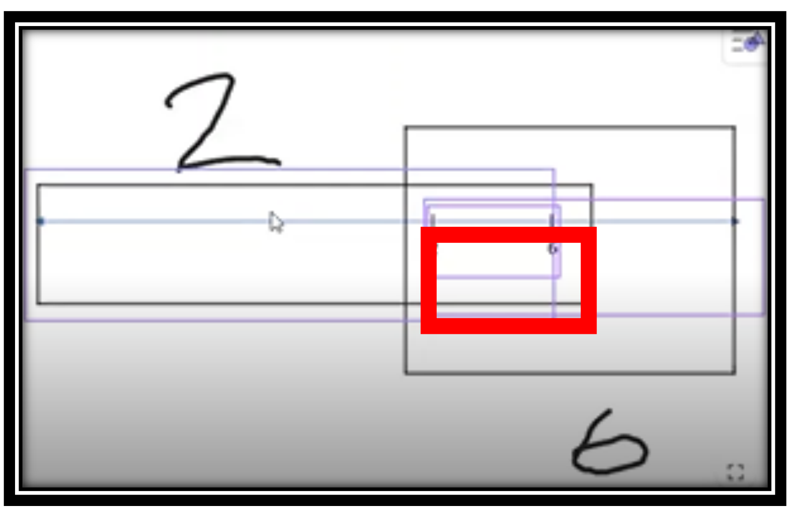
185. I: Marque la zona

186. E: (Guarda silencio y la marca) …

Como se observa en *línea 182,* la estudiante está nuevamente dialogando consigo misma la pregunta y ella misma también se responde, es en este momento en el que se logra la llamada objetivación como producto de la mediación semiótica de los signos y artefactos involucrados que han tenido efecto como producto del diálogo con la investigadora, más aún podemos ver en la *línea 184* cómo la estudiante se emocionó al comprender adecuadamente la zona solución mostrando los frutos de su praxis reflexiva. La estudiante logró marcar la zona correspondiente mostrando claramente que pudo construir un símbolo, restringido por las propiedades matemáticas, basado en la experiencia previa y del diálogo sostenido (Ver Imagen 23)

Esta praxis reflexiva se apoyo en el modelo de la recta numérica como artefacto semiótico y con la participación de la investigadora que produjo una coproducción del conocimiento, desde un conocimiento potencial de la estudiante hasta aquel que se desarrolla a través de la coproducción de los saberes, el proceso de diálogo interior que vemos en la *línea 182* y *184*, dando como resultado la respuesta de la Imagen 23.

Imagen 23: Respuesta de la estudiante a la tarea 22 en la entrevista



Tomada de las respuestas en GeoGebra

Al marcar la zona correspondiente a la tarea anterior ella ya tuvo los elementos necesarios para resolver las tareas 20 y 21 dando ejemplos como se observa en el siguiente diálogo (Ver Fragmento 16)

Fragmento 16

187. I: Correcto esa sería nuestra zona, ahora volvemos a la pregunta ¿Cuántos enteros cumplen las dos condiciones al mismo tiempo? ¿Cuántos enteros hay en esa zona? En esa última que dibujó
188. E: Hay 3
189. I: Correcto, ¿Cuáles son?
190. E: 3, 4 y 5
191. I: Correcto esos son ¿Hay otros valores, aunque no sean enteros?
192. E: Mayor que 6 ….
193. I: Mayor que 2 y menor que 6
194. E: Mayor que dos y menor que 6. Eh si
195. I: Deme un ejemplo
196. E: Mayor que dos y menor que 6. El 3.4, 5.6, 4.8
197. I: Correcto. ¿Podría ser 6 un valor?
198. E: (silencio) … No
199. I: ¿Por qué?
200. E: No se jejeje, no porque es el mismo número
201. I: Entonces 6 no cumpliría
202. E: No
203. I: ¿Y dos?
204. E: Tampoco

Ya en este momento la estudiante usaba la representación gráfica como un símbolo asociado a sus propiedades para la interpretación de la solución. En estas tareas la estudiante había usado los intervalos como índices cuando resolvió el cuestionario por su cuenta (ver las indicaciones escritas sobre los intervalos asociados a 2 y 6), pero en la intervención fueron reconsiderados y éstos ya tienen las características de símbolos que indican la respuesta correcta (ver marca roja) lo que nos indica el papel que juegan los intervalos para hacer un uso simbólico del modelo de la recta numérica. La estudiante ha logrado incorporar estas propiedades a sus respuestas.

Finalmente, si bien la estudiante tuvo un adecuado manejo del orden, la posición relativa y la ubicación espacial, tanto de las desigualdades numéricas como de las inecuaciones lineales, podemos decir que la actividad de investigación con la estudiante tuvo el siguiente proceso en el que se detectaron algunos momentos cruciales que podemos sugerir que representan distintos niveles de complejidad:

1. Uso de intervalos como índices en lugar de símbolos,
2. Interpreta la zona solución con dos indicaciones simultáneas con el signo de desigualdad mayor que
3. Interpreta la zona solución con el signo de desigualdad menor que y
4. La combinación de signos en los números y en los tipos de desigualdad

Encontramos que los antecedentes académicos como el orden, la ubicación y la posición relativa y del tratamiento de la recta numérica para la localización de los signos como números y marcas no fueron suficientes para resolver las tareas propuestas.

Es en este momento, que la estudiante recurre al modelo de la recta numérica para dar sentido a las inecuaciones, incluso en la tarea en la que se daba una numeración sobre la recta de forma desordenada, la estudiante pudo usar los segmentos unitarios como símbolos. Consideramos que la estudiante tenía incorporado un adecuado manejo de estos signos que comúnmente no son detectados por los estudiantes, lo que permitió que resolviera la tarea antes comentada.

4.5. DISCUSIÓN SOBRE LOS RESULTADOS

La estudiante lleva a cabo un proceso de actividad simbólica mediada por los signos de la recta numérica, que requirieron para su interpretación de un proceso de Semiosis Visual, la cual se desarrolló durante la entrevista intervención en la que la estudiante enfrentó el nuevo saber, en lo que Radford (2015) considera como la unidad de análisis de la Teoría de la Objetivación

Esta unidad de análisis consta de dos momentos sustanciales: en el primero la estudiante cuenta con un conocimiento potencial, que será activado mediante la praxis reflexiva y el uso de los símbolos para enfrentar el saber contenido en el problema, el cual se le opone, luego a través de la mediación semiótica, se transforma en un saber actual que reconoce al nuevo saber.

Las unidades de análisis detectadas son dos distintos momentos que mencionamos enseguida: 1. En el primero se refiere a aquel donde la estudiante hace uso de los signos que fueron tratados como índices para luego considerarlos como símbolos matemáticos y 2. En un segundo momento la praxis reflexiva le permite actualizar la interpretación visual y simbólica de dos indicaciones simultáneas, sobre desigualdades primero e inecuaciones después y pasar desde un conocimiento potencial a uno actual, en un proceso que podemos identificar como semiosis visual, como producto de la praxis reflexiva que dio como resultado una interpretación correcta de esta problemática.

En este último momento la interpretación correcta de la zona solución, dadas dos condiciones, representó una complejidad para la estudiante, sin embargo, aunque tuvo momentos de duda y reflexión consigo misma, logró hacerse del nuevo saber utilizando el modelo de la recta numérica y mediante una coproducción entre ella y la investigadora, llevando a cabo una labor conjunta.

5. CONCLUSIONES

5.1. CONCLUSIONES SOBRE LA INVESTIGACIÓN

En la presente investigación que estudia la adopción de los distintos signos presentes en tareas de desigualdades numéricas e inecuaciones lineales, con apoyo en el modelo de la recta numérica, encontramos que la estudiante con quién trabajamos tenía antecedentes de orden numérico y ubicación espacial adecuadas para interpretar las desigualdades numéricas y las inecuaciones con variables que se comportaban como números generalizados.

Sin embargo, observamos distintos niveles de complejidad en las tareas propuestas entre las que detectamos 1. Los intervalos pueden interpretarse como índices en lugar de símbolos lo que se sitúa en un nivel del desconocimiento de su uso; 2. La interpretación lógica de dos condiciones simultáneas que lo sitúa en un nivel lógico y 3. La combinación de las dos anteriores: aumentando la interpretación de los números enteros positivos y negativos: los dos tipos de desigualdades y dos indicaciones simultáneas para la zona solución.

Los conflictos fueron resueltos a través de una praxis reflexiva motiva por la intervención con la investigadora que dio lugar a una mediación semiótica de los signos asociados a la doble indicación en las desigualdades y las inecuaciones planteadas usando como artefacto a la recta numérica con apoyo en los signos que la conforman, que terminó siendo una herramienta psicológica.

La reflexión y la exhibición de ejemplos particulares le permitió usar la recta numérica como una referencia que asignaba validez a los signos asociados y sus relaciones y en particular a las soluciones en forma de intervalos los que finalmente fueron usados e interpretados como símbolos, aún cuando inicialmente les daba un carácter de índices, también pudo interpretar espacialmente las indicaciones y dar sentido de esta manera a las diferentes zonas de solución que fue motivo de una praxis reflexiva que derivó en una objetivación.

También detectamos tres posibles usos distintos del modelo de la recta numérica, 1. Como conjunto de índices que sugieren posiciones relativas y globales, 2. Como medio para verificar las soluciones en el caso de las inecuaciones y 3. Como artefacto para organizar y dar cuerpo a los múltiples signos asociados a la desigualdad y la inecuación lineal, este último tratamiento fue el que permitió a la estudiante desarrollar una praxis reflexiva y lograr la objetivación de la tarea.

Consideramos además que, dos aspectos de la investigación deben seguir siendo estudiados son:

1. Establecer si los niveles de complejidad detectados son estratos generales para el tratamiento semiótico de los signos del modelo de la recta numérica.
2. El papel que juegan algunos signos particulares como los segmentos unitarios homogéneos, que permiten que el modelo de recta numérica sea un espacio homogéneo de representación y que no son explícitamente usados por los estudiantes como parte del modelo y que tampoco son indicados institucionalmente
3. La potencialidad de uso del simétrico para la interpretación del producto por números negativos distintos de producto por uno donde la ubicación correcta será un requisito para la adquisición de sentido del procedimiento del producto por números negativos, que en general los estudiantes no consideran.

5.2. RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

5.2.1. Primera pregunta de investigación

¿Hasta dónde el orden numérico es suficiente para la correcta interpretación de las desigualdades y las inecuaciones en la recta numérica?

En esta investigación encontramos que, si bien es necesario manejar adecuadamente el orden numérico, la posición relativa y la ubicación espacial en la recta numérica para una interpretación adecuada de las desigualdades y las inecuaciones, no es suficiente ya que intervienen otros factores, como la interpretación lógica de la zona solución, el manejo simultáneo de la combinación de signos de desigualdad y de distintos tipos de números.

5.2.2. Segunda pregunta de investigación

¿Qué complejidades aparecen en la interpretación de las desigualdades numéricas e inecuaciones lineales en nuestro estudio de caso?

A lo largo de este estudio de caso pudimos detectar ***distintos tipos de complejidad***, como las siguientes:

1. De tipo lógico cuando debe atender dos indicaciones simultáneamente

2. De tipo semiótico relacionado con la combinación numérica y de interpretación de signos de desigualdad en relaciones mayor-menor y menor-mayor y a la unión de todos estos aspectos.

3. De tipo semiótico relacionado al uso de los segmentos como índices los que deben ser considerados en un sentido como símbolos matemáticos que indican zonas solución y no sólo una dirección.

5.2.3. Tercera pregunta de investigación

¿Cuáles fueron los distintos usos que se le dio a la recta numérica para tratar al orden, las desigualdades numéricas y las inecuaciones lineales en nuestro estudio de caso y cuáles fueron las ventajas que aportaron?

En esta investigación la recta numérica se usó, en un primer momento, como un modelo didáctico para dar cuerpo al orden conocido asociado a los números enteros, hacer hincapié en su posición relativa y ubicar la posición de los números con base en relaciones de desigualdad numérica e inecuaciones.

En un segundo momento para comparar números asociados al producto por negativos. Luego en el tratamiento de las inecuaciones, este modelo apoyó la interpretación de la zona solución dada una o dos condiciones por lo que fue usado por la estudiante como un artefacto que le orientó las tareas que requerían combinaciones de signos y más de una indicación.

En un tercer momento el modelo de la recta numérica terminó siendo un instrumento mediación semiótica de los signos involucrados de manera que el modelo terminó usándose como una herramienta psicológica que permitió organizar adecuadamente toda la información.

CAPÍTULO ADICIONAL PARA OPTAR POR EL INGRESO AL DOCTORADO

El siguiente capítulo tiene por objetivo general, incursionar en las posibles líneas de desarrollo de una investigación durante el doctorado, considerando diferentes prospectivas a partir de los resultados obtenidos en la tesis y de las actividades que hemos venido desarrollando.

En este apartado en particular, vamos a desarrollar más ampliamente el punto 1 de las conclusiones de la tesis, sobre las posibles líneas de investigación y que se refiere a la estructura de las distintas complejidades que detectamos en la investigación del estudio de caso antes mencionado. Para ello, hemos propuesto nuevamente el cuestionario, que utilizamos en el estudio de caso a través de internet, a cinco estudiantes de octavo grado de la escuela básica de la República de Honduras. Los datos obtenidos en esta puesta en marcha son analizados en este capítulo.

ANTECEDENTES

A través de la investigación con la estudiante mencionada en la presente tesis, corroboramos la necesidad, como conocimiento antecedente, del adecuado manejo de la ordenación y la ubicación espacial para el uso del modelo de la recta numérica, haciendo un especial énfasis en el uso de las marcas, los números y los intervalos, para que este modelo permita una aproximación semiótica para dar sentido a las desigualdades numéricas e inecuaciones lineales. Sin embargo, en esta investigación se observó que este en el caso estudiado durante el trabajo de tesis ese conocimiento no fue suficiente para encontrar la *zona solución* dadas dos condiciones simultáneas, debido a la complejidad que representaban las variaciones entre los tipos de números y a los distintos tipos de signos de desigualdad. Obstáculos que la estudiante superó posteriormente en la entrevista intervención, especialmente cuando desarrolló una praxis reflexiva y de diálogo consigo misma, que con apoyo en el modelo usado como un instrumento logró vincular toda la información.

Además, se detectaron usos de la recta numérica en dos terrenos: el didáctico y el cognitivo. Respecto a lo didáctico lo reconocemos como un modelo para la enseñanza que permite dar cuerpo a la numeración, al orden, la posición relativa y a la ubicación espacial, además, se caracteriza por dar sustento a procedimientos como la multiplicación de números negativos a través de sus simétricos.

Por otro lado, respecto a las actividades cognitivas, se manifestó como un modelo semiótico con requisitos implícitos y explícitos, los primeros se refieren al efecto que tienen los segmentos unitarios en la interpretación y los segundos al uso de las marcas y los números, los cuales se apoyan en las propiedades de orden, posición relativa y ubicación espacial y son necesarios para interpretar correctamente la zona solución dadas ciertas condiciones y para los fines del tratamiento de las desigualdades e inecuaciones, convirtiendo los signos involucrados de índices a símbolos. Además, puede servir como un modelo para organizar, verificar la información y desarrollar las actividades adecuadamente para dar paso a la *mediación semiótica* de los signos involucrados, contribuyendo a la toma de sentido de las desigualdades numéricas y de las inecuaciones lineales.

MARCO TEÓRICO

El marco teórico usado en este segundo momento de investigación se apoya en el descrito en el cuerpo de la tesis, del que podemos enfatizar la importancia de la actividad semiótica en la interpretación de los signos de la recta numérica (índices y símbolos) y en particular, asociada a esta, apoyar la llamada mediación semiótica de los signos involucrados para dar sentido a las desigualdades e inecuaciones en el modelo de la recta numérica así como al cambio de signos que se verifican en estas relaciones cuando son multiplicadas por menos uno.

Partimos en esta nueva puesta en marcha, del hecho de que es posible transitar de la idea de índice a símbolo para organizar, verificar la información y dar paso a través de la *mediación semiótica* entre los signos involucrados cuando trabajamos con desigualdades numéricas e inecuaciones lineales.

METODOLOGÍA

En esta etapa, pusimos nuevamente en funcionamiento el cuestionario que usamos en el trabajo de tesis (Ver anexo 1), como antes hemos mencionado, con cinco estudiantes de octavo grado del sistema educativo hondureño, los cuáles se encontraban en edades de 14 a 15 años; todos son de un mismo instituto privado y han desarrollado sus actividades escolares adecuadamente, aunque en esta puesta en marcha de los cuestionarios en línea, no tuvimos oportunidad de observar el desarrollo de la praxis reflexiva asociada a las diferentes tareas consideramos que el instrumento de investigación es valioso en una dirección distinta.

El objetivo de esta nueva puesta en marcha, fue indagar más sobre el uso de la recta numérica con una población más amplia y diversa, pero en particular, aunque no se realizó la entrevista intervención debido a las limitaciones escolares y de pandemia, nos parece que esta nueva experimentación nos permite observar resultados que puede ser considerados en la continuidad de esa investigación especialmente en lo relativo al tratamiento semiótico de los signos involucrados en las relaciones de desigualdad e inecuación.

Los contenidos analizados fueron establecidos en bloques por su particular objetivo, dependiendo de los aspectos que nos interesó observar y analizar en las respuestas de los estudiantes, estos se refieren a: 1) Orden y ubicación espacial (saberes de los estudiantes),

2) Uso de simétricos como tareas de ubicación, 3) Marcas, números e intervalos (Desigualdades e inecuaciones) y 4) El infinito como signo, aspecto que aparece claramente en esta nueva aproximación; todos ellos se sustentan en el tratamiento semiótico de la recta numérica como modelo didáctico y cognitivo.

A continuación, pasaremos a comentar los objetivos particulares de cada bloque con las condiciones específicas en las que trabajamos. Después comentaremos los resultados obtenidos para finalizar con algunas conclusiones provisionales.

Objetivos de cada bloque

Introducción

En la metodología de esta tesis planteamos ciertos objetivos que se pretendían lograr a través del cuestionario aplicado y los objetivos se centraron en indagar la forma cómo los estudiantes de esta segunda experiencia enfrentaban las actividades descritas en la tesis. En este nuevo momento, los objetivos han cambiado y pasaron de una exploración a una observación que se apoya en bloques de interés y contenido afín, debido a que se detectaron relaciones estrechas entre las actividades mencionadas. Esta información nos sugirió una secuencia explicativa para los conocimientos anteriores, que son requisitos para las tareas posteriores; de manera que vamos a plantear los objetivos de esta fase de la investigación, con base en los siguientes bloques de contenidos.

El bloque 1: Orden y ubicación espacial (saberes actuales de los estudiantes)

Las tareas referentes a este bloque tienen como objetivo observar el orden y ubicación de los números en la recta numérica. En estas tareas se detectaron los antecedentes (saberes) que tienen los estudiantes y que les servirán como base para resolver las tareas propuestas.

Con respecto a la ordenación, los estudiantes deben activar la numeración (numerabilidad), que es el recurso que ellos tienen para colocar los números adecuados, los que deben coincidir con las marcas de la recta numérica, si se quiere hacer un uso del modelo como una espacio homogéneo de representación. Además, hay tareas relacionadas con la comparación de dos números según su valor, en la cuál se solicita que el estudiante coloque el signo de desigualdad adecuado según la comparación, ya sea de los números propuestos o de sus simétricos.

Las últimas tareas que pertenece a la categoría de orden 2.23 a la 2.26, son las que se relacionan con secuencias desordenas y que no conservan un espacio unitario para cada número de una secuencia, de manera que la numeración que se debe completar requiere de modificar la representación gráfica para dar cabida al número faltante. En las tareas que no conservan un espacio unitario el estudiante puede optar por no modificar la representación, lo que nos diría que para él la conservación del segmento unitario no es relevante.

La consideración de los segmentos unitarios en la semiótica de la recta numérica, es una restricción de tipo matemático para hacer del modelo de la recta numérica un espacio de representación homogénea, Nemirovsky (2003) esta propiedad no es necesariamente percibida por los estudiantes, sin embargo, sin estos intervalos unitarios no hay una adecuada interpretación de la posición relativa y la ubicación espacial, además de que las representaciones que no cumplen estos requisitos de representación intrínsecamente matemática debido a que pierden su carácter espacial único, el uso que se puede hacer de ellas, si no se considera a los segmentos unitarios, se restringe a indicar números según su valor para llevar a cabo operaciones en donde sólo la posición relativa es relevante.

De acuerdo con la ubicación espacial, se pretende que el estudiante coloque sobre el , de manera correcta, las marcas y los números solicitados en las tareas considerando el espacio entre las marcas y la magnitud del número. La primera tarea solicita colocar las marcas correspondientes al número 3 y al 7. La segunda, pide colocar los números -2 y 5.

El bloque 2: Uso del simétricos en tareas de ubicación

Estas tareas están relacionadas con el uso del simétrico, para dar sentido al cambio de signos asociados a la multiplicación de una desigualdad por un número negativo, usamos el caso de multiplicar por menos uno (-1) para centrarnos en el uso del simétrico. Sin embargo, ampliar el procedimiento asociado al producto de una desigualdad, por números negativos cualesquiera, requiere de un diseño en esa dirección el que no estamos abordamos es esa investigación, lo que abre la posibilidad de profundizar este aspecto de la interpretación de las desigualdades e inecuaciones multiplicadas por cualquier número negativo .

Las tareas de la 7 a la 11 de la actividad 1 van desde la ubicación de los números simétricos hasta la comparación de éstos, utilizando el signo de desigualdad lo que provoca el cambio simultáneo de todos los signos asociados, fortaleciendo la idea del uso del simétrico.

En la tarea 12 se pretende que el estudiante atienda todas las indicaciones simultáneamente; sugerir dos números negativos y compararlos mediante el signo de desigualdad; luego proponer los simétricos de los negativos dados previamente y también compararlos.

El bloque 3: Marcas, números e intervalos (Desigualdades e inecuaciones)

Planteamos dos niveles de trabajo donde se atienden primero a las desigualdades y luego a las inecuaciones en las que se pueden observar el uso de las marcas, los números y los intervalos en el cuestionario.

En la primera actividad hay dos tareas pertenecientes a este bloque, las tareas 23 y 24, donde se les pide marcar las zonas dadas bajo dos condiciones y luego marcar los números en la recta que cumplan las condiciones simultáneamente.

Para resolver esas tareas se tienen que desarrollar los siguientes pasos:

1. Marcar las dos zonas
2. Elegir la zona adecuada
3. Marcar los enteros en esas zonas

En la segunda actividad hay cinco tareas relacionadas a este bloque, las tareas 2.5 y 2.10 que consisten en marcar la zona solución de una inecuación. En las tareas 2.14, 2.18 y 2.22 se debe marcar la zona solución dada dos condiciones y además los números enteros que pertenezcan a ella, incrementando la cantidad de acciones por coordinar.

El bloque 4: El infinito como signo

A este bloque se refieren las tareas 2.5, 2.10, 2.14, 2.18 y 2.22 en las cuales los estudiantes tenían que encontrar la zona solución dadas algunas condiciones, marcando la zona y los números enteros que perteneces a ella. Como se trata de inecuaciones en donde las soluciones son infinitas y nuestras preguntas han dado prioridad a los enteros en estas preguntas incluimos la opción de responder "si hay otros números que sin ser enteros también sean solución" lo que nos permite profundizar sobre la consideración de decimales o de la idea de infinito. En estas tareas esperábamos observar cómo hacen referencia a este hecho, en particular esperábamos que nos la describieran verbalmente o con signos que dan cuenta de la idea de muchos o incluso la del signo "∞" o "…" dado que coloquialmente los puntos suspensivos se usan como equivalente a la idea de continuidad.

RESULTADOS

Presentaremos los resultados atendiendo a los bloques mencionados que son:

1. Orden y ubicación espacial (saberes de los estudiantes),

2. Uso del simétrico en tareas de ubicación,

3. Marcas, números e intervalos y

4. El infinito como signo.

1. Orden, ubicación espacial (saberes de los estudiantes)

En general los 5 estudiantes (F, I, V, R y G) se manejan bien en estas tareas en las que numeran y hacen uso adecuado de la ubicación espacial de los números y la posición relativa, como vemos en la siguiente tabla, donde marcamos la pregunta con el número de la actividad seguido del de la tarea (1.1, 1.2…). Para los resultados correctos usamos 1 y 0 para los que no los son.

Orden (Numeración)

Tabla 1. Orden (numeración)

Tarea	F	I	V	R	G
1.1	0	1	1	1	1
1.2	1	1	1	1	1
1.3	0	1	1	1	1
1.4	1	1	1	1	1
1.5	1	1	0	0	0

Elaboración propia

De todas estas tareas hubo una pregunta donde los estudiantes no detectan adecuadamente la orientación del número menor (Tarea 1.5) 3 de 5 estudiantes tuvieron este tropiezo, por lo que inicialmente suponemos la posibilidad de que esta opción sea más compleja que la que se refiere a posición del número mayor.

Orden (Comparación, entre número y simétricos)

Tabla 2. Orden (Comparación, entre números y simétricos)

Tarea	F	I	V	R	G
1.6	1	1	1	1	1
1.10 Simétricos del anterior (1.6)	1	1	1	1	1
1.11	1	1	1	1	1
1.18	1	1	1	1	1
1.22 Simétricos del anterior (1.18)	1	1	1	1	1

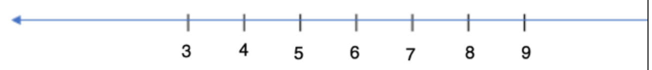
Elaboración propia

En estas tareas observamos que la comparación de números pequeños es correcta, incluso cuando se trata de sus simétricos.

Secuencias desordenadas y las que no conservan el espacio unitario

Por último, con respecto al orden encontramos las tareas relacionadas con secuencias desordenadas (Tareas 2.23, 2.24 y 2.25) y aquellas que no conservan un espacio unitario (Tarea 2.26), encontramos que todos los estudiantes los ordenaron correctamente, reacomodando los números en la recta numérica desordenada. Por ejemplo, la tarea 2.23 pedía ordenar la secuencia 3, 4, 5, 7, 6, 8, 9; dados en la recta como se observa a continuación.

Tabla 3. Ejemplos de secuencias desordenadas

Pregunta	**Respuesta: F, I, V, R y G**
2.23  	

Elaboración propia

Con esta pregunta podemos afirmar que tienen bien establecido el orden de los primeros números alrededor del cero.

Sin embargo, tenemos otro dato en una tarea que resultó revelador, no sólo respecto al orden, sino sobre la idea que se tienen los estudiantes encuestados sobre el cero y que consistía en ordenar números cercanos al cero, pero donde éste no aparecía entre ellos, lo que representa un reto, porque si la numeración y orden están bien instaladas en el estudiante, el cero debió haberse colocado, pero por otro lado no considerarlo puede deberse a una forma errónea de aplicar un aspecto de lo que podría ser el contracto didáctico, “como el número no me lo diste, entonces no lo pongo”.

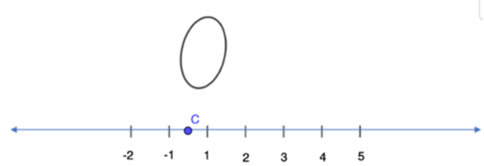
Así encontramos que 4 de 5 estudiantes organizaron los números correctamente, pero no incluyeron al cero en el lugar correspondiente, lo que nos lleva a detectar elementos para nuevas preguntas de investigación, en particular sobre el vínculo entre del orden y la ubicación espacial de los números en el modelo, entre los estudiantes debido a que incluir los números faltantes debía ser un acto que manifiesta la adopción del modelo como representación homogénea. Lo que nos llevaría más adelante a replantear el trabajo con otros números que no fuesen el cero o los ausentes fuesen mas de uno, para ver además si hay un tratamiento especial con él o son la otras las motivaciones de su presencia o ausencia en este tipo de tareas.

Incluso el estudiante que consideró al cero, no se tomó el trabajo de dejar un espacio unitario para colocarlo adecuadamente, lo que provocaría errores si operáramos o comparáramos número sobre ese modelo modificado.

También sería de interés proponer a los estudiantes actividades con las rectas numéricas que fueron reorganizadas por su cuenta, para confrontarlos con la importancia de las relaciones de unicidad en la representación que la mayoría de las veces es ignorada u obviada.

Esto apoya nuestra consideración sobre la importancia de que el estudiante, deba tener en cuenta el uso de los intervalos unitarios como parte fundamental de los signos implícitos que dan sentido al modelo de la recta numérica.

Tabla 4. Secuencias que no conservan un espacio unitario

Pregunta	Respuesta	Est.
2.26 		F, I, V y R
		G

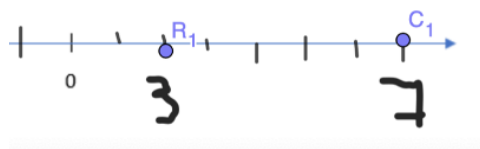
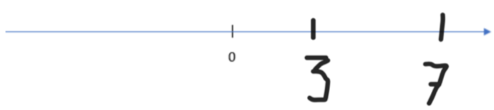
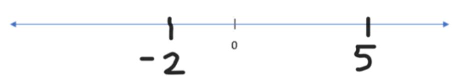
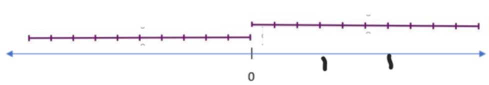
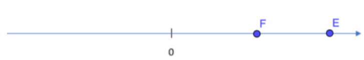
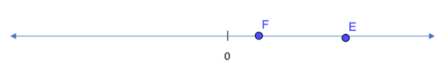
Elaboración propia

En general, los estudiantes se manejan adecuadamente en la ordenación que es considerada por nosotros, como una base para las posteriores tareas, sin embargo, tenemos observaciones sobre la *ordenación profunda* que incluye a los números ordenados, aún cuando éstos no estén disponibles. A continuación, mostraremos los resultados sobre ubicación espacial.

Ubicación espacial

La pregunta 1.3 solicita: “En la siguiente recta numérica coloca la marca donde creas que corresponde al número 7 y ponlo ahí y luego la marca correspondiente al número 3 y también ponlo ahí”, la pregunta 1.15 sólo cambia los números solicitados.

Tabla 5. Ubicación espacial

Estudiante	Respuesta 1.3	Respuesta 1.15
F		
I		
V		
R		
G		

Elaboración propia

En este caso se puede observar que los estudiantes utilizan marcas y números asociados a éstas de manera aproximada sobre la recta, esta marcación que sin ser rigurosa intenta una ubicación de manera proporcional en todos casos, sin embargo, no hay intención de usar los segmentos unitarios en ningún de ellos.

En el caso particular del estudiante (R), recurre a una regleta auxiliar que no es usada convenientemente, por lo que la regla no cumple el objetivo de ser una referencia numérica y espacial. La estudiante (F) también pretende usar segmentos unitarios al hacer las marcas con espacios homogéneos, pero se equivoca al ubicar el número 3. Además, encontramos que el uso de puntos en lugar de segmentos de rectas para las marcas fue un recurso frecuente utilizado por los estudiantes; (G) intenta indicar las marcas con letras, por lo que suponemos que posiblemente haya una idea de usar números cualesquiera.

En la tarea 1.15 sólo uno de los estudiantes logró colocar las marcas correctamente, los demás se equivocaron al poner (2 y 5) en lugar de (-2 y 5). La estudiante (G) mantiene las marcas solicitadas usando letras.

De manera general, la ubicación directa de números sugeridos fue respondida adecuadamente, con algunos errores en la colocación de los negativos que fue inconsistente, por lo cual, suponemos que la tarea con negativos requiere de más concentración para ser resuelta.

Enseguida vamos a mostrar los resultados sobre las respuestas relacionadas con los simétricos en tareas de ubicación.

2. Simétricos como tarea de ubicación

A continuación, presentamos los resultados de las tareas relacionadas con la simetría y su ubicación espacial.

Tabla 6. Simétricos como tareas de ubicación

Tarea	F	I	V	R	G
1.7	1	1	1	1	1
1.8	0	1	0	1	0
1.9	1	1	1	1	1
1.10	1	1	1	1	1
1.11	1	1	1	1	1
1.12	**0**	**0**	**0**	0	0
1.19	1	1	1	1	1
1.20	1	1	1	1	1
1.21	1	1	1	1	1
1.22	1	1	1	1	1

Elaboración propia

En general, los estudiantes tuvieron un buen desempeño en las tareas, sin embargo, podemos observar la tarea 1.12 que fue respondida equivocadamente por todos los estudiantes que solicitaba lo siguiente: 1. Sugerir dos números negativos 2. Compararlos con el signo de desigualdad 3. Sugerir sus simétricos y 4. Compararlos con el signo de desigualdad.

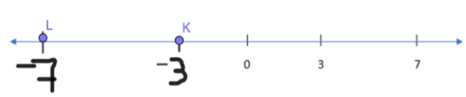
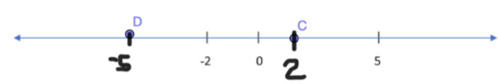
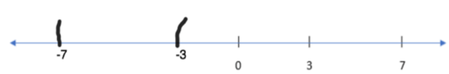
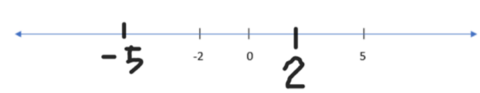
Las respuestas fueron dadas de dos maneras distintas. Los primeros 3 estudiantes (F, I y V) respondieron bien los pasos de 1 y 3 y omitieron el 2 y 4, esto es, no compararon. El resto de los estudiantes (R y G) respondieron los pasos 1 y 2 y obviaron el 3 y 4.

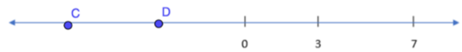
Estos resultados los consideramos en la misma línea que aquellos que encontramos en la investigación de esta tesis en la que sugerimos un tipo distinto de complejidad y donde las respuestas están influenciadas por la cantidad de indicaciones a considerar, lo que podría tener un rasgo lógico, pero también uno asociado a la diversidad de esquemas y signos establecidos para cumplir todas las indicaciones simultáneamente sin perder información.

También nos percatamos de qué, si bien los estudiantes se manejan adecuadamente con números pequeños en concordancia con tareas de ubicación de simétricos, podemos proponer otra posible pregunta de investigación a futuro, para ver qué sucede con números más grandes debido a que es frecuente que el orden de los pequeños esté más interiorizado que el de los números grandes incluso con varios dígitos.

A continuación, se presentan las tareas relacionadas con la ubicación de los números simétricos de los que previamente fueron colocados sobre la recta numérica.

Tabla 7. Simétricos como tareas de ubicación. Representación

Estudiante	**Respuesta 1.7**	**Respuesta 1.19**
F		
I		
V		
R		

G		

Elaboración propia

Observamos que en estas tareas los estudiantes hacen una colocación aproximada de los números, pero en un orden adecuado. Encontramos dos estudiantes de cinco que han venido manejando las marcas como segmentos de la línea (R) o las marcas como puntos (G) sin colocar el número correspondiente a dicha marca, por lo que pensamos que están representados números genéricos que tienen una representación ostensiva que significaría "algún número".

3. Marcas, números e intervalos

Desigualdades

En estas tareas los estudiantes tenían que desarrollar ciertos pasos que debían ser considerados simultáneamente, estos son: 1. Marcar las dos zonas, 2. Elegir la zona adecuada y 3. Marcar los enteros en esa zona. Por ello en la tabla se marcan los pasos que les faltó realizar a cada estudiante, colocando el número correspondiente del paso faltante. Además, le asignamos 1 a la tarea si los desarrollaron todos y cero si le faltó al menos un paso.

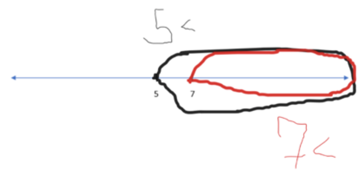
Tabla 8. Zona solución de desigualdades

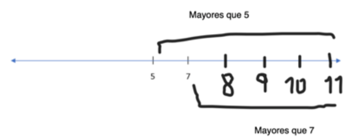
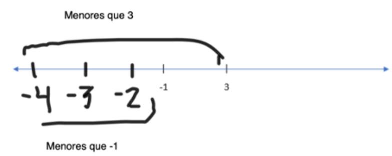
Estudiante	Respuesta 1.23	Respuesta 1.24
F **Faltan (1 – 3)** **0**		

<table>
<tr>
<td>I

Falta (3)

0

Utiliza el signo como un índice</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>V

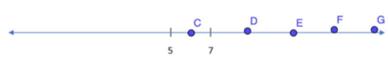
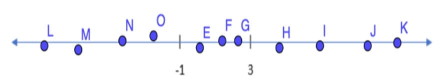
1</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>R

Falta (2 y 3)

0

Signo como índice</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>G

Faltan (1 – 3)

0</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Elaboración propia

Las estudiantes (F) y (G) resolvieron las tareas de forma similar, colocando marcas que no corresponden a la zona establecida y faltando todos los pasos por resolver. Por otro lado, la estudiante G, utiliza puntos para colocar las marcas y no coloca números, sino letras como ha venido haciendo.

Los estudiantes (I) y (R) utilizan un índice similar para marcar las zonas solicitadas, sin embargo, (R) no cumplió con dos de las indicaciones.

La estudiante (V) realizó todos los pasos correctamente, especificando qué zona cumple cada condición y colocando los números que satisfacen ambas condiciones.

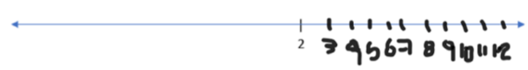
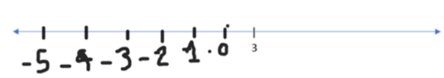
De manera general uno de cinco estudiantes realizó todos los pasos solicitados correctamente lo que nos permite sugerir un nivel distinto de complejidad en estas actividades en las que deberíamos indagar si el factor lógico es el que detona el conflicto o lo hace la multitud de indicaciones sugeridas por los distintos signos asunto que podría ser abordado en próximas investigaciones.

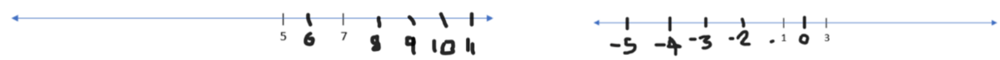
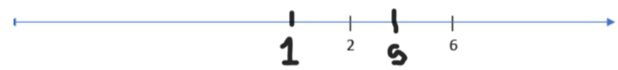
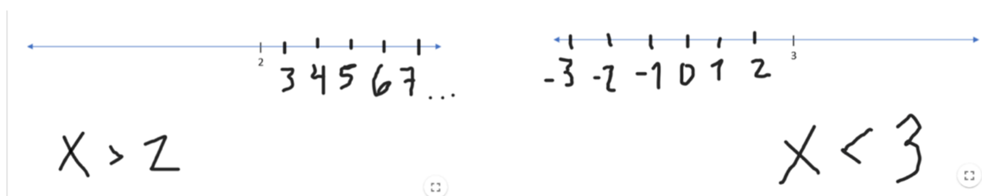
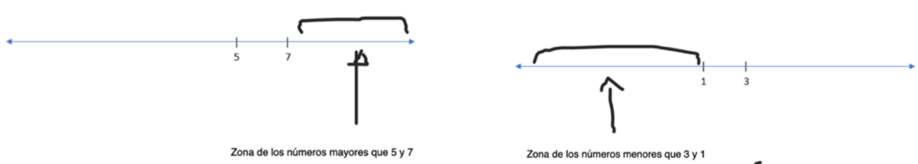
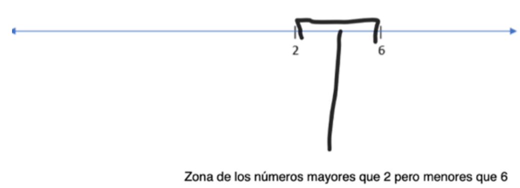
Además, respecto al uso de los signos, los estudiantes utilizan diferentes maneras de establecer las zonas de solución, asunto que puede ser abordado desde el punto de vista institucional para homogeneizar las indicaciones para proponer la solución. En general se usan signos como índices esto es, como indicadores de la zona (I, V y R) o a través de números o puntos que también hacen las veces de índices que los marcan. Esta actividad nos permite detectar si los estudiantes se dan cuenta de que la posición y forma (cerrada o abierta de los signos) del intervalo es relevante para establecer la zona solicitada, en particular cuando las tareas se refieren a las inecuaciones en donde aparecen variables y las soluciones se manifiestan como segmentos abiertos o cerrados.

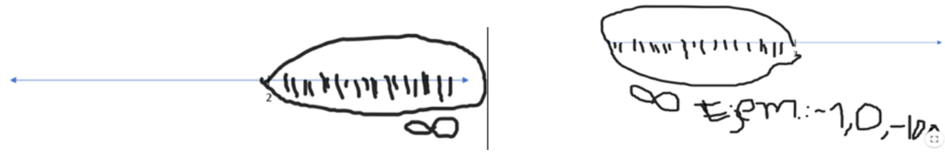
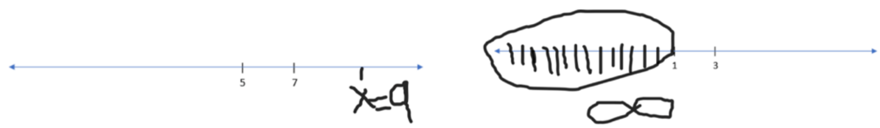
En adelante mencionaremos los resultados de la localización gráfica de la zona de solución para inecuaciones.

Inecuaciones

Tabla 9. Zona solución de inecuaciones

Est.	Tarea	Respuesta
F	2.5 y 2.10	 

	2.14 y 2. 18	
	2.22	
I	**2.5 y 2.10**	
	2.14 y 2. 18	
	2.22	
V	**2.5 y 2.10**	
	2.14 y 2. 18	
	2.22	

R	**2.5 y 2.10**	
	2.14 y 2. 18	
	2.22	
G	**2.5 y 2.10**	
	2.14 y 2. 18	
	2.22	

Elaboración propia

Encontramos que los signos usados para establecer la zona solución para los números, van desde marcas con y sin números, hasta contenedores circulares o de corchete, también encontramos un estudiante que usa una combinación de signos, lo que puede ser resuelto desde la introducción de los signos con los que se va a trabajar.

Sobre la tarea que solicita atender las dos indicaciones, tenemos una consistencia en la atención a una sola de ellas (F, G) los que consideran las dos (V, I). En el caso de (R) parece que se maneja bien cuando hay una condición, pero no hay respuestas definitivas cuando hay dos condiciones, lo que profundiza la idea de que se trata de un tipo distinto de complejidad que los que se refieren a el desconocimiento del uso de los signos para los segmentos y la relación lógica en el caso de dos indicaciones simultáneas.

De manera general 2 de 5 logran trabajar con las dos indicaciones y 3 de 5 no logran hacerlo, lo que fortalece nuestra sugerencia de que la cantidad de indicaciones es relevante para la interpretación de la tarea y que posiblemente esto represente un tipo de complejidad en la interpretación de las inecuaciones.

Nuevamente los estudiantes muestran dificultades para organizar paulatinamente todas las indicaciones, posiblemente por el número de signos involucrados además de las indicaciones, como habíamos comentado antes, lo que nos sugiere la necesidad de una actividad que promueva la automatización tanto del uso de los signos como indicadores de orientación así como de la regla de procedimiento que permite resolver más de una indicación directamente, pareciera que los estudiantes dedican mucho tiempo a la interpretación de la posición lo que genera incertidumbre.

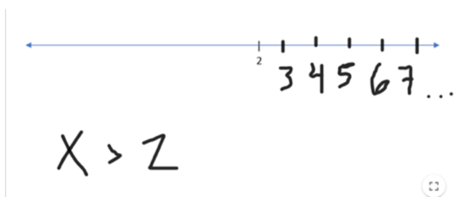
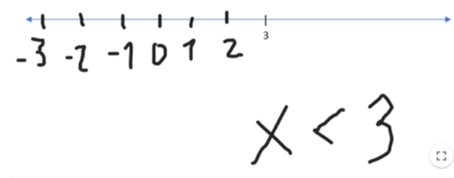
4. El infinito como signo

Las respuestas esperadas en este apartado se relacionan con la indicación general de marcas asociadas a "muchos" números enteros, no esperamos que los decimales u otros tipos de números sean considerados por nuestros estudiantes, pero si que logren establecer la generalidad de las marcas asociadas a los enteros, lo que representa, desde nuestro punto de vista, la aceptación de que la soluciones no son una, sino varias.

Encontramos que 3 de 5 estudiantes consideraron que hacer marcas, pequeñas rayas que simulan posiciones para los números, era suficiente para establecer las soluciones, de manera que como esperábamos, sólo marcan los enteros. Los otros estudiantes no hicieron uso de tales marcas.

Por otro lado, dos de los cinco estudiantes encuestados utilizaron un signo que fue asociado con la multiplicidad de las soluciones, apoyado posiblemente en la idea de variable. Como vemos en la siguiente figura la estudiante V, en la tarea 2.5 y 2.10 además de usar marcas con números enteros, colocó "…" indicando continuidad, lo que nos hace pensar que tiene, no sólo la idea de la multiplicidad de las soluciones, sino además hizo buen manejo de los signos de desigualdad asociados a la tarea.

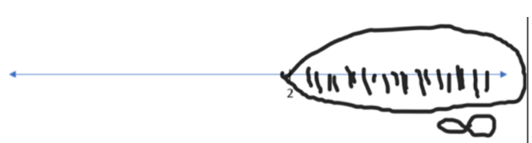
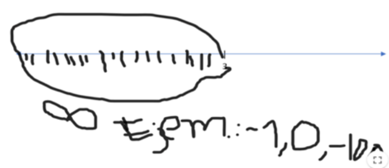
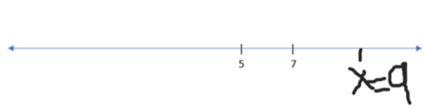
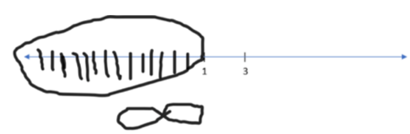
Tabla 10. Signo infinito asociado a "…"

V	**2.5 y 2.10**	 

Elaboración propia

El estudiante (R) utiliza el signo infinito "∞" de igual forma que (V) para dar a conocer que hay muchos más números que son solución, en este caso (R) tiene una forma distintiva de expresarlo ya que coloca muchas marcas dentro de la zona elegida, pero sin números indicando posiblemente que a esa zona pueden pertenecer muchos de números. Además de las múltiples marcas en sus intervalos, coloca el signo de infinito en las siguientes tareas, siempre con la intención de expresar que hay muchos números en la zona solución incluso sugiere ejemplos como -1, 0, -100

Tabla 11. Signo infinito

R	**2.5 y 2.10**	 
	2.14 y 2. 18	 

Elaboración propia

CONCLUSIONES DE ESTA PUESTA EN MARCHA

Esta puesta en marcha que contó con más estudiantes nos permitió observar una mayor diversidad de respuestas para las tareas que hemos propuesto, pese a no haber podido llevar a cabo la intervención.

La respuestas del cuestionario nos permite sugerir las siguientes conclusiones de esta etapa y estamos a la espera de tener oportunidad de profundizar en los aspectos de ordenación profunda (recta numérica completa), de interpretación visual (uso de simétricos para la multiplicación), semióticos (uso de índices vs símbolos y uso del signo de infinito) y lógicos (número de indicaciones simultáneas).

Las actividades desarrolladas perfilan bloques de contenidos en secuencia: El orden, los segmentos unitarios, los números simétricos, los signos para marcar la zona solución, el número de indicaciones y el uso del signo de infinito.

El orden numérico impuesto en la recta donde se han usado números pequeños y cercanos al cero fue resuelto por todos los estudiantes de manera correcta, en todas las tareas en las que se requirió. Desde el punto de vista semiótico, los números enteros y las marcas fueron adecuadamente asociados y la interpretación de la posición relativa y la ubicación espacial de los signos involucrados. El tratamiento del cero en secuencias desordenadas, incluso en tareas con más de un número ausente, nos abre la posibilidad de explorar la adopción de la *ordenación profunda* de carácter institucional, esto es como un espacio de representación homogénea para las tareas de interpretación de desigualdades e inecuaciones, lo que dota de credibilidad al modelo.

Respecto a la consideración de los segmentos unitarios, los estudiantes los consideran solo si son parte de la tarea propuesta, sin embargo, cuando deben ordenarlos por su cuenta, difícilmente se dan cuenta de su necesidad y no los toman en cuenta, lo que desde el punto de vista de la representación se está ignorando la pertinencia de estos signos y eso queda de manifiesto si se pretende operar con ella o interpretar la posición relativa entre los números. Este comportamiento, suponemos que tiene su raíz en la falta de experiencia por parte del estudiante en actividades en las que debe gestionar su propia representación, así como confrontar las consecuencias de esta, asunto que abre la posibilidad de una investigación que de cuenta de la forma cómo el estudiante podría adueñarse de la representación y los significados asociados al modelo de la recta numérica.

Encontramos que los estudiantes adoptan la idea del producto por menos uno y la del simétrico asociado con relativa facilidad, ésta se presenta como una idea accesible para interpretar los cambios de los signos, por lo que consideramos que este tratamiento para la multiplicación por negativos puede ser una manera para enfrentar el conflicto de interpretación del cambio de signo, quedando en suspenso la indagación sobre el producto con negativos distinto de menos uno, lo cual es un reto de otra índole y podría ser una línea de investigación a futuro.

Consideramos también que, si bien en esta investigación los estudiantes logran desarrollar una mediación con el uso del modelo como artefacto semiótico para interpretar la multiplicación por menos uno, en su ampliación será necesario el abandono progresivo de ideas como la del simétrico para enfrentar el procedimiento de la multiplicación por negativos sin recurrir a esta metáfora una vez que se acepte el procedimiento del cambio de todos los signos involucrados.

En todos los casos, los signos que marcan las zonas solución son usados como índices que marcan una tendencia o posición por lo que los podemos considerar en términos de indicadores espaciales, no de signos matemáticos propiamente, lo cuál debe ser atendido por la instrucción, en particular cuando hay consecuencias en el aprendizaje que se derivan de ello.

Además, parece que el número de indicaciones de tareas simultáneas a considerar es relevante para el desempeño completo y correcto de las actividades, por lo que consideramos que puede ser un problema de interpretación lógica de afirmaciones conjuntivas. Notamos que, al no ser un recurso automatizado sobre las posiciones de los números asociados a los valores, crea incertidumbre entre los estudiantes, en particular en lo relativo a los enteros negativos de los cuales se han reportado de difícil manipulación.

Finalmente, aunque no fue la intención de este trabajo que los estudiantes representaran el signo de infinito, es natural que cuando ellos describen las zonas solución con signos asociados a la idea de muchos o incluso una infinidad, usen el signo de infinito o incluso de los tres puntos indicando la multiplicidad, sin embargo, consideramos que en todos los casos se trata del infinito asociado a los números enteros llama la atención que cuenten con este recurso, lo que indica que anteriormente han estado en situaciones semejantes.

En los conflictos detectados a lo largo de la tesis y de la puesta en marcha posterior, encontramos que hay una falta de experiencia de los estudiantes en el uso directo de la representación y de las consecuencias de las consideraciones o la falta de ellas en esta como representación semiótica, lo que si bien se relaciona con su conocimiento numérico también es cierto que no hay ninguna consideración del modelo como una representación homogénea lo que hace pensar en la posibilidad de que ellos participen de la gestión del modelo para dar sentido y finalmente significado matemático a los signos participantes.

CONSIDERACIONES FINALES

En el trabajo doctoral, pretendemos considerar los resultados tanto de la tesis como de la anterior puesta en marcha, la que pretende atender desde el punto de vista de la semiótica la interpretación del orden, ubicación espacial y posición relativa para desigualdades numéricas e inecuaciones de la forma $a<x$ y $a>x$ con x variable *y* a constante, usando el modelo de la recta numérica. Por ello hemos propuesto las siguientes preguntas de investigación:

1) ¿De qué manera, la actividad semiótica de los signos que intervienen en indicaciones simultáneas puede proveer al estudiante experiencias que le permitan desarrollar una lógica adecuada para determinar la zona solución?
2) ¿Cuál puede ser el papel del uso del simétrico para tareas de multiplicación por un número negativo cualquiera en el caso de las desigualdades e inecuaciones como las mencionadas usando el modelo de la recta numérica?
3) ¿La gestión del estudiante de la representación de la recta numérica, permitirá el tránsito de los índices a los símbolos matemáticos en tareas de solución de desigualdades e inecuaciones?
4) ¿La gestión del estudiante del modelo de la recta numérica promoverá la interpretación de la ordenación profunda implícitos del modelo?
5) ¿Cómo se ven transformadas las prácticas de interpretación de las tareas propuestas cuando los números son grandes y no están alrededor del cero?

REFERENCIAS

Acuña, C. (2009). Gestalt configurations in geometry learning. In *Proceedings of the 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 706-716).

Alvarenga, K. (2006). Inecuaciones: Un análisis de las construcciones mentales de estudiantes universitarios. Tesis doctoral.

Blanco, L., & Garrote, M. (2007). Difficulties in learning inequalities in students of the first year of pre-university education in Spain. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, *3*, 221–229.

Boero, P., & L. Bazzini (2004), "Inequalities in mathematics education: the need for complementary perspectives", en M. Johnsen y A. Berit (eds.), Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology in Mathematics Education, Bergen, Noruega, vol. 1, pp. 139-143.

Bohórquez, L. (2015) Diseño de una propuesta para un proceso de enseñanza-aprendizaje de las inecuaciones lineales, con mediación de las TIC, para los estudiantes sordos. Facultad de Ciencias.

Cohen, D., & Sarnecka, B. (2014). Children's number-line estimation shows development of measurement skills (not number representations). Developmental Psychology, 50(6), 1640-1652.

Diezmann, C., & Lowrie, T. (2006). Primary students' knowledge and errors on number lines. In P. Grootenboer, R. Zevenbergen, & M. Chinnappan (Eds.), Proceedings of the 29th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (Vol. 1, pp. 171-178). Sydney, Australia: Mathematics Education Research Group of Australasia.

Diezmann, C., Lowrie, T., & Sugars, L. (2010). Primary students' success on the structured number line. Australian Primary Mathematics Classroom, 15(4), 24–28.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, *61*(1), 103-131.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational studies in mathematics*, *24*(2), 139-162.

Garrote, M., Hidalgo, M., & Blanco, L. (2004). Dificultades en el aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones. *Suma, 46*, 37-44.

Godino, J., Gonzato, M., Cajaraville, J., & Fernández, T. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 109-130.

Heredia, M., & Palacios, M. (2014). *Las inecuaciones lineales en la escuela: Algunas reflexiones sobre su enseñanza a partir de la identificación de dificultades y errores en su aprendizaje*. (Tesis de pregrado). Universidad del Valle, Santiago de Cali, Colombia.

Kieran, C. (2004). The equation / inequality connection in constructing meaning for inequality situations. Proceedings of the 28th Conference of the International Group of Psychology of Mathematics Education, Bergen, Norway, 1, 143-147.

Martínez, C., & Piedad, C. (2006). El método de estudio de caso: estrategia metodológica dela investigación científica. Pensamiento & Gestión, (20),165-193.

Nemirovsky, R. (2003). Three conjectures concerning the relationship between body activity and understanding mathematics. In N.A. Pateman, B.J. Dougherty & J.T. Zilliox (Eds.), Proc. 27th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 1, pp. 103-135). Honolulu, Hawai'I: PME.

Peirce, C. (2005). El ícono, el índice y el símbolo. Traducción castellana de Sara Barrena. Fuente textual en CP 2.274-308.

Pluvinage, F., & Flores, P. (2016). Génesis semiótica de los enteros. Bolema - Mathematics Education Bulletin. https://doi.org/10.1590/1980- 4415v30n54a06

Presmeg, N., Radford, L., Roth, W., & Kadunz, G. (2016). Semiotics in mathematics education. Switzerland: Springer.

Quecedo, R. & Castaño, C. (2002). Introducción a la metodología de investigación cualitativa. Revista de Psicodidáctica, 14, 5-39.

Radford, L. (2004). Semiótica cultural y cognición. Conferencia plenaria Décima octava Reunión latinoamericana de Matemática Educativa. Universidad Autónoma de Chiapas.

Radford, L. (2006a). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*. Número especial, 103–129.

Radford, L. (2006b). Introducción Semiótica y Educación Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa.* Número especial, 7–21.

Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática. 7*(2), 132–150.

Radford, L. (2015). Methodological aspects of the theory of objectification. Perspectivas Da Educação Matemática, 9(3), 129–141

Radford, L. (2020). Un recorrido a través de la teoría de la objetivación. In S. Takeco Gobara & L. Radford (Eds.), Teoría da Objetivação: Fundamentos e aplicações para o ensino e aprendizagem de ciências e matemática (pp. 15–42). São Paulo, Brazil: Livraria da Física.

Ramos, L. (2018). La enseñanza del Álgebra en la Educación Secundaria en Honduras: evaluación y concepciones docentes (tesis doctoral). Recuperado desde Repositorio Institucional Universidad de Extremadura.

Schneider, M., Grabner, R. H., & Paetsch, J. (2009). Mental number line, number line estimation, and mathematical achievement: Their interrelations in grades 5 and 6. Journal of Educational Psychology, 101(2), 359-372.

Schwarz, W., & Eiselt, A. (2009). The perception of temporal order along the mental number line. Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance 35, 989–1004.

Secretaría de Educación (S.E.). (2011a). Cuaderno de Trabajo 1º grado. Tegucigalpa: PROMETAM Fase II.

Secretaría de Educación (S.E.). (2011b). Cuaderno de Trabajo 2º grado. Tegucigalpa: PROMETAM Fase II.

Secretaría de Educación (S.E.). (2011c). Cuaderno de Trabajo 8º grado. Tegucigalpa: PROMETAM Fase II.

Secretaría de Educación (S.E.). (2011d). Cuaderno de Trabajo 9º grado. Tegucigalpa: PROMETAM Fase II.

Secretaría de Educación (S.E.). (2011e). Matemáticas 1, Cuaderno de Trabajo 10º grado. Tegucigalpa: PROMETAM Fase II.

Teppo, A., & van den Heuvel-Panhuizen, M. (2014). Visual representations as objects of analysis: the number line as an example. ZDM—The International Journal on Mathematics Education, 46(1), 45-58.

Tsamir, P., & Bazzini, L. (2001). Can x=3 be the solution of an inequality? A study of Italian and Israeli students. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th PME International Conference*, *4*, 303–310.

Tsamir, P., & Bazzini, L. (2002). Algorithmic models: Italian and Israeli students' solutions to algebraic inequalities. I A. Cockburn & E. Nardi (red.), *Proceedings of the 26th PME International Conference, Vol.4* (s. 289-296). Norwich: PME

Tsamir, P., & Bazzini, L. (2004). Consistencies and inconsistencies in students' solutions to algebraic "single-value" inequalities. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *35*(6), 793-812.

Vain, P. (2012). El enfoque interpretativo en la investigación educativa: algunas *consideraciones teórico-metodológicas. Revista de Educación, 4, 37-45.*

Vygotsky, L. S. (1991). Obras Escogidas, Vol. 1 (Segunda edición,1997). Madrid: Visor.

Wall, J., Thompson, C., Dunlosky, J., & Merriman, W. (2016). Children can accurately monitor and control their number-line estimation performance. *Developmental Psychology*, *52*(10), 1493–1502.

ANEXOS

Anexo 1: Cuestionario aplicado a través de la plataforma GeoGebra

Cuestionario sobre Desigualdades

Muchas gracias por tu ayuda al completar este cuestionario

Enseguida te presentaremos algunas actividades relacionadas con las desigualdades entre números utilizando la recta numérica y el orden

Te recordamos que toda la información que proporciones será utilizada únicamente para fines de la investigación

Nombre: ____ **Nivel Educativo:** ______

Institución: ____

Actividades #1

1. Ordena los siguientes números empezando por el mayor

-3 5 -7 2 4 0 -2

2. Ordena los siguientes números empezando por el menor

5 -6 8 - 4 0 -5 3

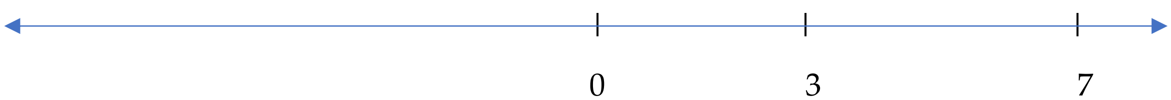
3. En la siguiente recta numérica coloca la marca donde creas que corresponde al número 7 y ponlo ahí y luego la marca correspondiente al número 3 y también ponlo ahí

4. De las marcas dibujadas ¿Dónde queda el número **mayor**?, marca la respuesta correcta
   - A la derecha
   - A la izquierda

5. De las marcas dibujadas ¿Dónde queda el número **menor**?, marca la respuesta correcta
   - A la derecha
   - A la izquierda

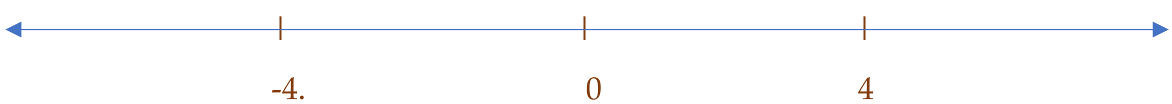
6. La relación que se establece para poder comparar los números 7 y 3 está determinada por un signo ¿Cuál de las siguientes respuestas es correcta?, márcala.
   - $7 > 3$
   - $7 = 3$
   - $7 < 3$

7. **Si te das cuenta, estos dos números son positivos y están a la derecha del cero, es decir son mayores a cero.** Ahora vamos a trabajar con sus simétricos, es decir, vamos a multiplicar 7 y 3 por **– 1**, eso nos da -7 y -3, coloca el número y la marca en la siguiente recta numérica.

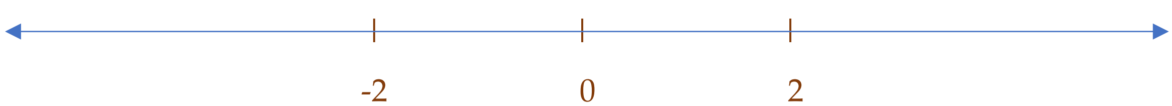


Observa que los simétricos de los números positivos son negativos y los simétricos de los negativos son positivos

Por ejemplo: El simétrico de 4 es -4



El simétrico de -2 es 2



Fíjate que los números simétricos, que se obtienen multiplicando por (-1), se localizan sobre la recta como si usáramos un espejo colocado en el cero, si el número está lejos del cero su simétrico también igual, si otros están cerca del cero su simétrico estará a la misma distancia, pero en sentido contrario.

8. De las marcas dibujadas en el ejercicio 7 ¿Dónde queda el número **mayor**?, marca la respuesta correcta
   - ◯ A la derecha
   - ◯ A la izquierda

9. De las marcas dibujadas en el ejercicio 7 ¿Dónde queda el número **menor**? marca la respuesta correcta
   - ◯ A la derecha
   - ◯ A la izquierda

10. La relación que se establece para poder comparar los números - 7 y - 3 está determinada por un signo ¿Cuál de las siguientes respuestas es correcta?, márcala.
    - ◯ -7 > -3
    - ◯ -7 = -3
    - ◯ -7 < -3

De lo anterior podemos observar que la relación de los números positivos cambia cuando pensamos en sus simétricos esto es así

Números positivos	**Simétricos de los positivos** **Cambian todos los signos**
7 > 3	**-7 < -3**
Números negativos	**Simétricos de los números negativos** **Cambian todos los signos**
-7 < -3	**7 > 3**

Recuerda que cuando un número no tiene signo, eso quiere decir que tiene uno positivo que no se muestra.

11. Tenemos los números - 4 y – 9, siendo sus simétricos los números 4 y 9
    En el primer caso el -4 es mayor que el -9 y se escribe así: **- 4 > - 9**, entonces ¿cuál es la relación entre los simétricos que son 4 y 9?, marca la respuesta correcta

- ○ 4 > 9
- ○ 4 = 9
- ○ 4 < 9

Nota que: **si tenemos dos números positivos que están en cierto orden, entonces sus simétricos serán negativos y están en el orden contrario.**
Igualmente, si tenemos dos números negativos que están en cierto orden, entonces sus simétricos positivos están en el orden contrario.

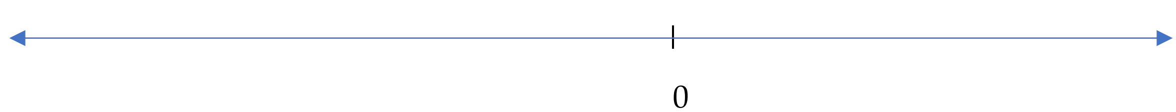
12. Da un ejemplo de dos números negativos y escríbelos en la primera casilla, **usa el signo para establecer el orden** y en la segunda casilla localiza sus simétricos y coloca el signo correspondiente para establecer el orden.

Números negativos
Simétricos de los números negativos elegidos antes

13. ¿Observas la relación de todos los signos? Coméntala enseguida

14. ¿Cómo se la platicarías a tus amigos estas relaciones entre números?

15. En la siguiente recta numérica coloca la marca donde creas que corresponde al número 5 y ponlo ahí y luego la marca correspondiente al número -2 y también ponlo ahí



16. De las marcas dibujadas ¿Dónde queda el número **mayor**?, marca la respuesta correcta
    - A la derecha
    - A la izquierda

17. De las marcas dibujadas ¿Dónde queda el número **menor**?, marca la respuesta correcta
    - A la derecha
    - A la izquierda

18. La relación que se establece para poder comparar los números 5 y - 2 está determinada por un signo ¿Cuál de las siguientes respuestas es correcta?, márcala.
    - 5 > -2
    - 5 = -2
    - 5 < -2

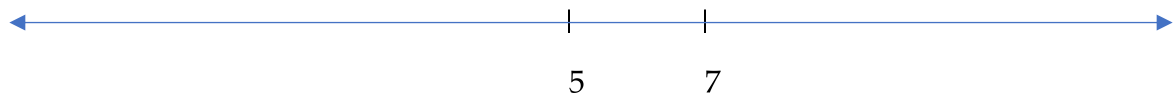
19. Coloca los números simétricos de -5 y 2 en la siguiente recta numérica donde ya aparecen los números -2 y 5

20. De las marcas dibujadas ¿Dónde queda el número **mayor**?, marca la respuesta correcta
    - A la derecha
    - A la izquierda

21. De las marcas dibujadas ¿Dónde queda el número **menor**?, marca la respuesta correcta
    - A la derecha
    - A la izquierda

22. La relación que se establece para poder comparar los números - 5 y 2 está determinada por un signo ¿Cuál de las siguientes respuestas es correcta?, márcala.
    - -5 > 2
    - -5 = 2
    - -5 < 2

23. Marca la zona de los números mayores que 5 y luego marca la zona de los números mayores que 7 ¿algún entero cumple las dos condiciones? Si hay alguno que cumpla ¡márcalo en la recta!



24. Marca la zona de los números menores que 3 y luego marca la zona de los números menores que -1 ¿algún entero cumple las dos condiciones? Si hay alguno que cumpla ¡márcalo en la recta!

Actividades #2

Ahora vamos a comparar números y variables, de las que podemos decir que son mayores o menores que otros números y otras variables

1. Escribe en el espacio en blanco 6 números mayores que 2 separados por comas

   ____

2. ¿Son éstos los únicos valores que cumplen la condición?

   ____

3. ¿Cuántos números mayores que 2 hay en la recta numérica?

   ____

4. Si tratamos de ubicar esos valores en una recta numérica ¿Hacia qué lado quedarían los números mayores que 2? Marca la respuesta correcta
   - ◯ A la derecha
   - ◯ A la izquierda

5. Representa en la siguiente recta numérica los números mayores que 2

Nota que la expresión "todos los valores mayores que 2" se puede escribir como una desigualdad de la siguiente forma $x > 2$ donde x representa todos los posibles valores que cumplan la desigualdad, como podemos ver en la siguiente tabla:

<table>
<tr><td>Si tenemos una relación de desigualdad que se repite para muchos valores como los siguientes ejemplos:</td><td>Para ahorrar espacio usamos la siguiente expresión</td></tr>
<tr><td>$3 > 2$
$2.5 > 2$
$5 > 2$
$10 > 2$
$100 > 2$ …</td><td>$x > 2$
Donde x es cualquier número que cumpla la desigualdad
Cuando usamos x es importante aclarar qué valores puede tomar</td></tr>
</table>

Cabe aclarar qué a pesar de que 2.5 no es un número entero, sino que un número decimal también cumple con la condición de que es mayor que 2, es decir, los decimales los podemos trabajar de igual forma que como comparamos los enteros.

6. Escribe en el espacio en blanco 6 números menores que 3 separados por comas

   ____

7. ¿Son estos los únicos valores que cumplen la condición?

   ____

8. ¿Cuántos números menores que 3 hay en la recta numérica?

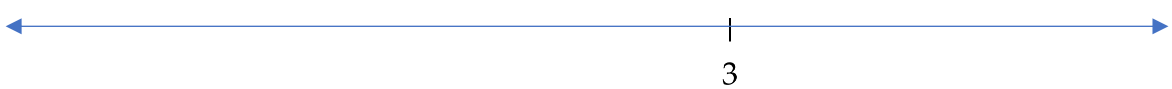
   ____

9. Si tratamos de ubicar esos valores en una recta numérica ¿Hacia qué lado quedarían los números menores que 3? Marca la respuesta correcta

   ○ A la derecha

   ○ A la izquierda

10. Representa en la siguiente recta numérica los números menores que 3



Nota que la expresión "todos los valores menores que 3" se puede escribir como una desigualdad de la siguiente forma x < 3 donde x representa todos los posibles valores que cumplan la desigualdad como podemos ver en la siguiente tabla

Si tenemos una relación de desigualdad que se repite para muchos valores como la siguiente	Para ahorrar espacio usamos la siguiente expresión
$1 < 3$ $-5 < 3$ $-1.5 < 3$ $0 < 3$ $-10 < 3 \ldots$	**$x < 3$** Donde x es cualquier número que cumpla la desigualdad Cuando usamos x es importante aclarar qué valores puede tomar

Cabe aclarar qué a pesar de que -1.5 no es un número entero, sino que un número decimal también cumple con la condición de que es menor que 3, es decir, los decimales los podemos trabajar de igual forma que como comparamos los enteros.

11. Da un valor entero para x que cumpla con las siguientes condiciones $x > 5$ pero también $x > 7$ ________________

12. ¿Cuántos enteros cumplen las dos condiciones al mismo tiempo? ______________

13. ¿Hay otros números que cumplen las dos condiciones, aunque no sean enteros? da algunos ejemplos si los hay ____________

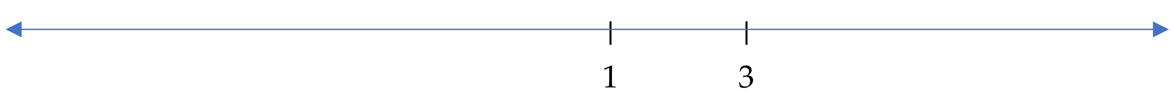
14. Representa en la siguiente recta numérica la solución, esto es, marca la zona de los números que, no importa si son enteros o no, cumplen las condiciones $x > 5$ pero también $x > 7$

15. Da un valor entero para x que cumpla con las siguientes condiciones: $x < 3$ pero también $x < 1$ ________________

16. ¿Cuántos enteros cumplen las dos condiciones al mismo tiempo? ______________

17. ¿Hay otros números que cumplen las dos condiciones, aunque no sean enteros? da algunos ejemplos si los hay____________

18. Marca en la siguiente recta numérica la solución, esto es, marca la zona de los números que, no importa si son enteros o no, cumplen las condiciones $x < 3$, pero también $x < 1$

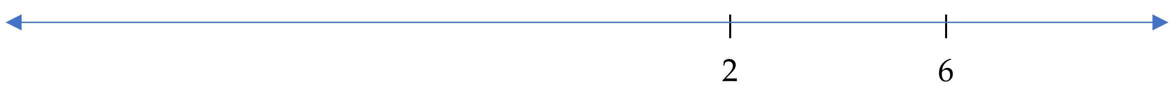


19. Da un valor entero para x que cumpla con las siguientes condiciones: $x > 2$ pero también $x < 6$ ________________

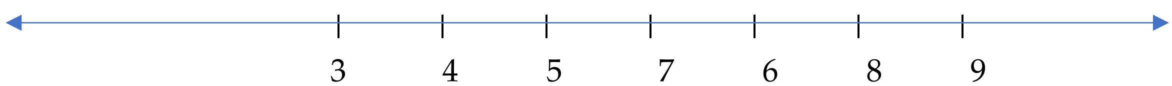
20. ¿Cuántos enteros cumplen las dos condiciones al mismo tiempo? _______________

21. ¿Hay otros números que cumplen las dos condiciones, aunque no sean enteros? da algunos ejemplos si los hay _____________

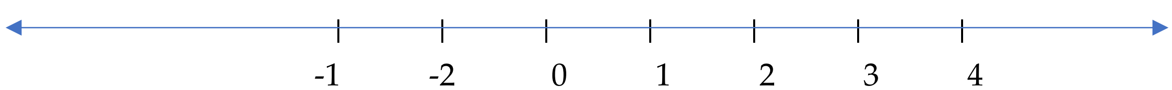
22. Si un número cualquiera cumple dos condiciones la primera es que $x > 2$ también que $x < 6$. Marca en la siguiente recta numérica la solución, ya sea un número o varios y no importa si son enteros o no



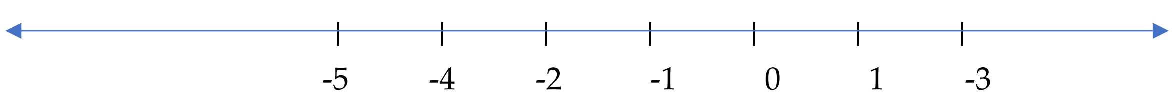
23. Observe detenidamente si la siguiente recta numérica está ordenada correctamente, en caso de que no esté ordenada cambia el orden para ordenarla



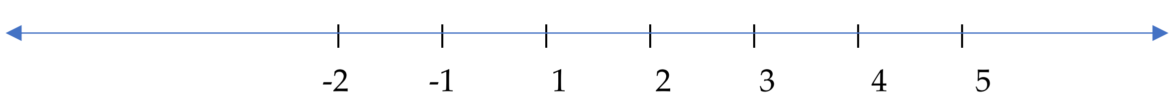
24. Observe detenidamente si la siguiente recta numérica está ordenada correctamente, en caso de que no esté ordenada cambie el orden



25. ¿La siguiente recta numérica está ordenada correctamente? Si no lo está corríjala para que los números de manera que queden ordenados



26. Ordena los números que aparecen enseguida



Anexo 2: Respuestas de la estudiante al cuestionario

Actividades #1

1- Ordena los siguientes números empezando por el mayor

-3 5 -7 2 4 0 -2

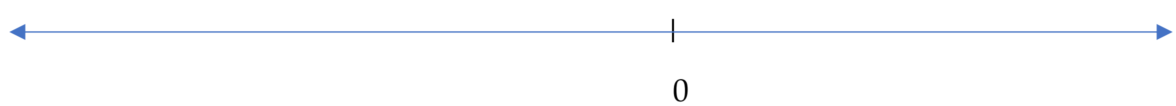
Respuesta
5 , 4 , 2 , 0 , -2 , -3 , -7

2- Ordena los siguientes números empezando por el menor

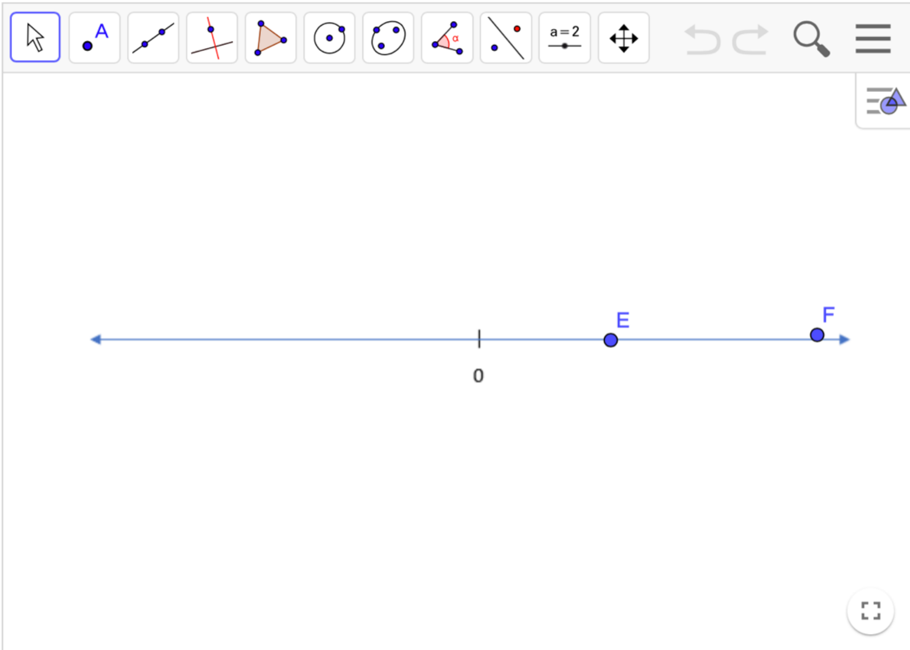
5 -6 8 - 4 0 -5 3

Respuesta
-6 , -4 , 0 , 3 , 5 , 5 , 8

3- En la siguiente recta numérica coloca la marca donde creas que corresponde al número 7 y ponlo ahí y luego la marca correspondiente al número 3 y también ponlo ahí



Respuesta

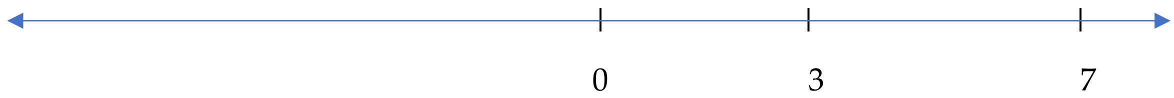


4- De las marcas dibujadas ¿Dónde queda el número **mayor**?, marca la respuesta correcta
- ● A la derecha
- ○ A la izquierda

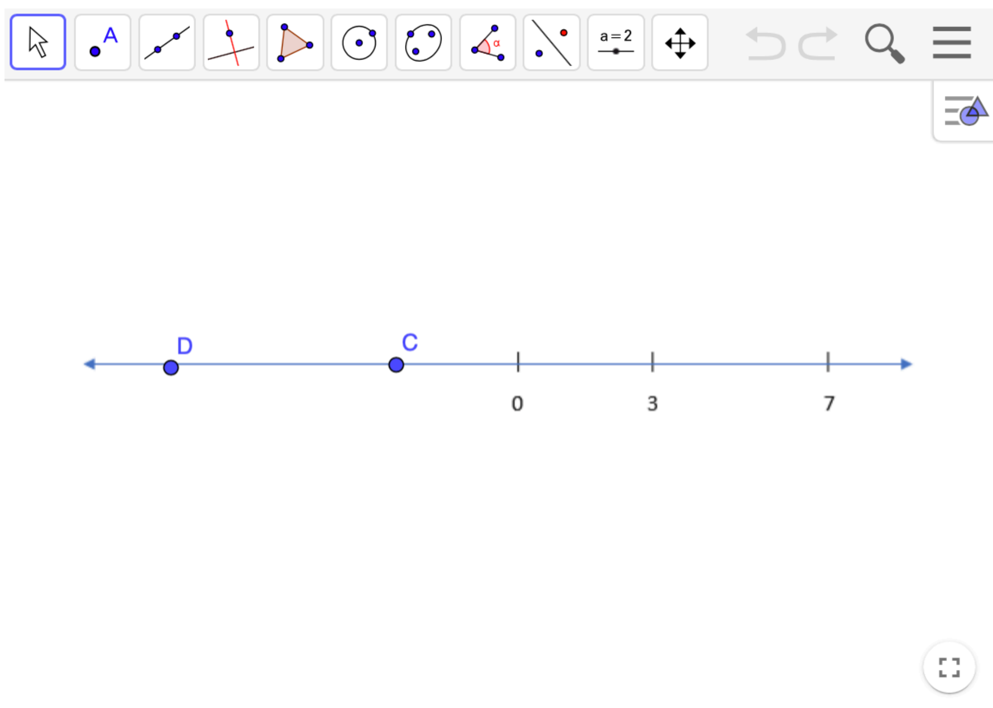
5- De las marcas dibujadas ¿Dónde queda el número **menor**?, marca la respuesta correcta
- ○ A la derecha
- ● A la izquierda

6- La relación que se establece para poder comparar los números 7 y 3 está determinada por un signo ¿Cuál de las siguientes respuestas es correcta?, márcala.
- ● $7 > 3$
- ○ $7 = 3$
- ○ $7 < 3$

7- **Si te das cuenta, estos dos números son positivos y están a la derecha del cero, es decir son mayores a cero.** Ahora vamos a trabajar con sus simétricos, es decir, vamos a multiplicar 7 y 3 por **– 1**, eso nos da -7 y -3, coloca el número y la marca en la siguiente recta numérica.

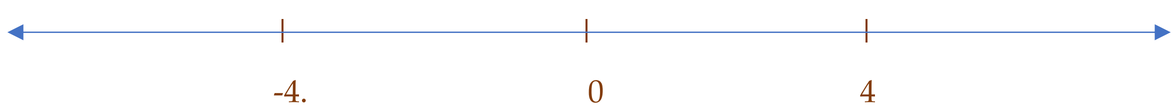


Respuesta

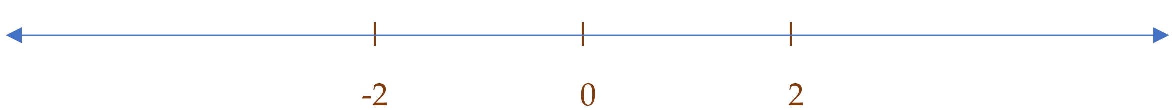


Observa que los simétricos de los números positivos son negativos y los simétricos de los negativos son positivos

Por ejemplo: El simétrico de 4 es -4



El simétrico de -2 es 2



Fíjate que los números simétricos, que se obtienen multiplicando por (-1), se localizan sobre la recta como si usáramos un espejo colocado en el cero, si el número está lejos del cero su simétrico también igual, si otros están cerca del cero su simétrico estará a la misma distancia, pero en sentido contrario.

8- De las marcas dibujadas en el ejercicio 7 ¿Dónde queda el número **mayor**?, marca la respuesta correcta

● A la derecha
○ A la izquierda

9- De las marcas dibujadas en el ejercicio 7 ¿Dónde queda el número **menor**? marca la respuesta correcta

○ A la derecha
● A la izquierda

10- La relación que se establece para poder comparar los números - 7 y - 3 está determinada por un signo ¿Cuál de las siguientes respuestas es correcta?, márcala.

○ -7 > -3
○ -7 = -3
● -7 < -3

De lo anterior podemos observar que la relación de los números positivos cambia cuando pensamos en sus simétricos esto es así

Números positivos	**Simétricos de los positivos** **Cambian todos los signos**
7 > 3	**-7 < -3**
Números negativos	**Simétricos de los números negativos** **Cambian todos los signos**
-7 < -3	**7 > 3**

Recuerda que cuando un número no tiene signo, eso quiere decir que tiene uno positivo que no se muestra.

11- Tenemos los números - 4 y – 9, siendo sus simétricos los números 4 y 9
En el primer caso el -4 es mayor que el -9 y se escribe así: **- 4 > - 9**, entonces ¿cuál es la relación entre los simétricos que son 4 y 9?, marca la respuesta correcta

- ○ 4 > 9
- ○ 4 = 9
- ● 4 < 9

Nota que: **si tenemos dos números positivos que están en cierto orden, entonces sus simétricos serán negativos y están en el orden contrario.**
Igualmente, si tenemos dos números negativos que están en cierto orden, entonces sus simétricos positivos están en el orden contrario.

12- Da un ejemplo de dos números negativos y escríbelos en la primera casilla, **usa el signo para establecer el orden** y en la segunda casilla localiza sus simétricos y coloca el signo correspondiente para establecer el orden.

Números negativos

Respuesta

-9 < -4

Simétricos de los números negativos elegidos antes

Respuesta

4 > 9

13- ¿Observas la relación de todos los signos? Coméntala enseguida

Respuesta

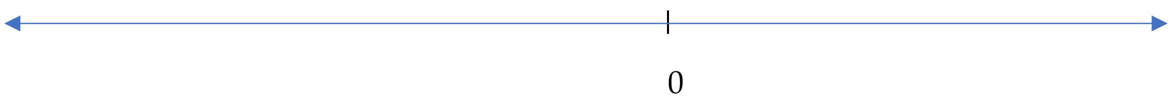
Los números negativos entre más cerca del cero tienen mayor valor y los positivos entre más lejos están son mayores

14- ¿Cómo se la platicarías a tus amigos estas relaciones entre números?

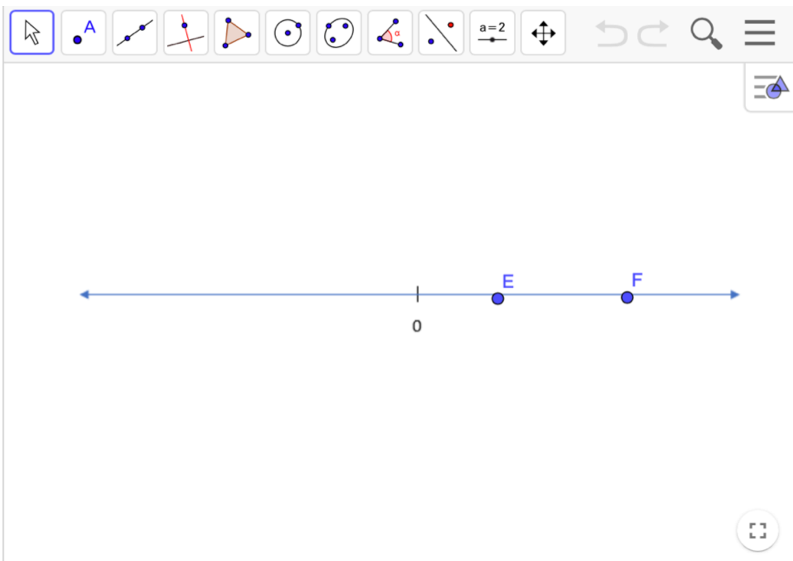
Respuesta

Los números negativos son menores que los positivos

15- En la siguiente recta numérica coloca la marca donde creas que corresponde al número 5 y ponlo ahí y luego la marca correspondiente al número -2 y también ponlo ahí



Respuesta



16- De las marcas dibujadas ¿Dónde queda el número **mayor**?, marca la respuesta correcta

● A la derecha
○ A la izquierda

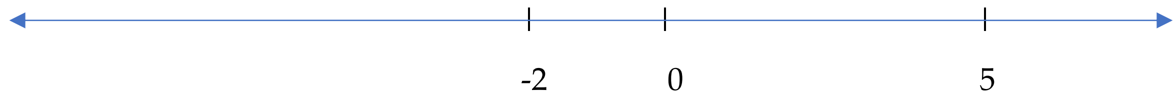
17- De las marcas dibujadas ¿Dónde queda el número **menor**?, marca la respuesta correcta

○ A la derecha
● A la izquierda

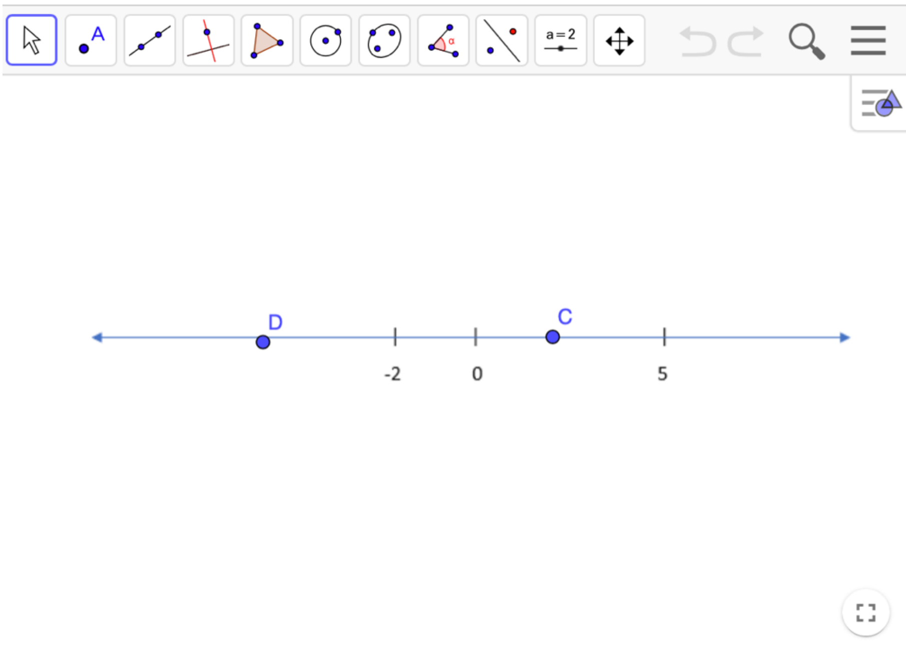
18- La relación que se establece para poder comparar los números 5 y - 2 está determinada por un signo ¿Cuál de las siguientes respuestas es correcta?, márcala.

● 5 > -2
○ 5 = -2
○ 5 < -2

19- Coloca los números simétricos de -5 y 2 en la siguiente recta numérica donde ya aparecen los números -2 y 5



Respuesta



20- De las marcas dibujadas ¿Dónde queda el número **mayor**?, marca la respuesta correcta

● A la derecha
○ A la izquierda

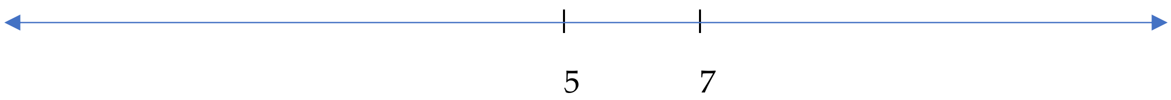
21- De las marcas dibujadas ¿Dónde queda el número **menor**?, marca la respuesta correcta

○ A la derecha
● A la izquierda

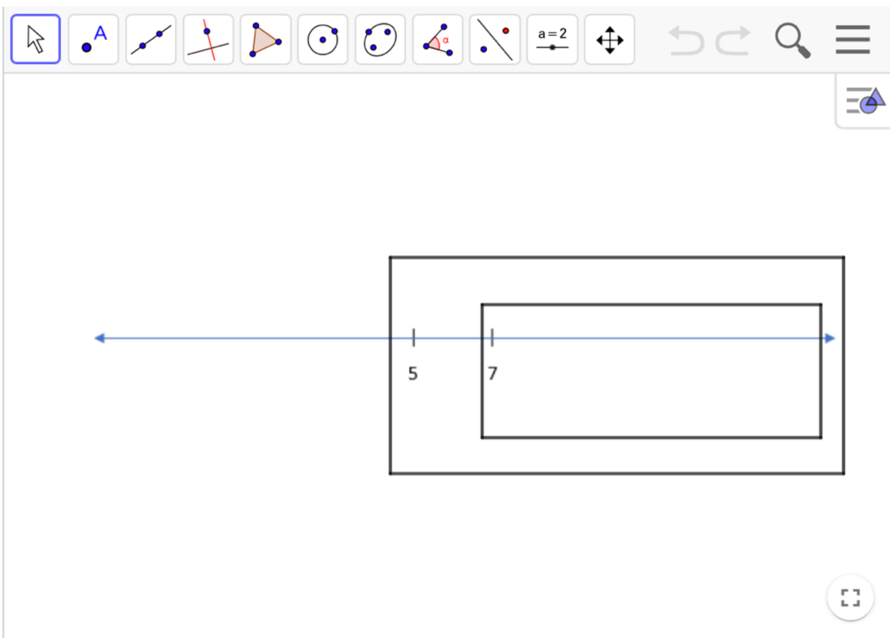
22- La relación que se establece para poder comparar los números - 5 y 2 está determinada por un signo ¿Cuál de las siguientes respuestas es correcta?, márcala.

○ $-5 > 2$
○ $-5 = 2$
● $-5 < 2$

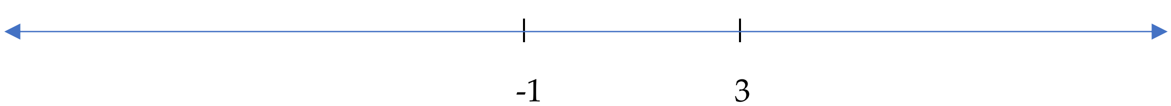
23- Marca la zona de los números mayores que 5 y luego marca la zona de los números mayores que 7 ¿algún entero cumple las dos condiciones? Si hay alguno que cumpla ¡márcalo en la recta!



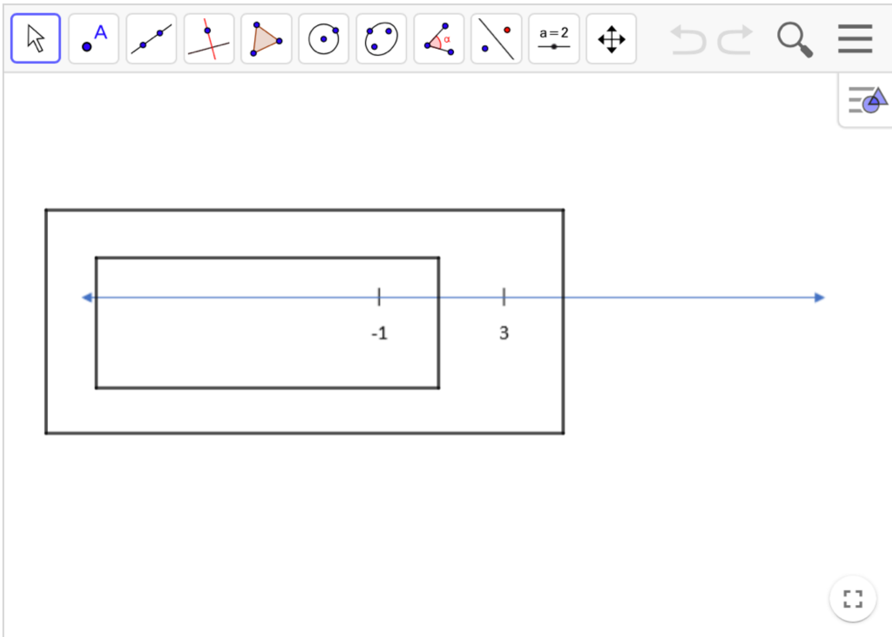
Respuesta



24- Marca la zona de los números menores que 3 y luego marca la zona de los números menores que -1 ¿algún entero cumple las dos condiciones? Si hay alguno que cumpla ¡márcalo en la recta!



Respuesta



Actividades #2

Ahora vamos a comparar números y variables, de las que podemos decir que son mayores o menores que otros números y otras variables

1. Escribe en el espacio en blanco 6 números mayores que 2 separados por comas

Respuesta
23 , 13 , 8 , 4 , 20

2. ¿Son éstos los únicos valores que cumplen la condición?

Respuesta
No

3. ¿Cuántos números mayores que 2 hay en la recta numérica?

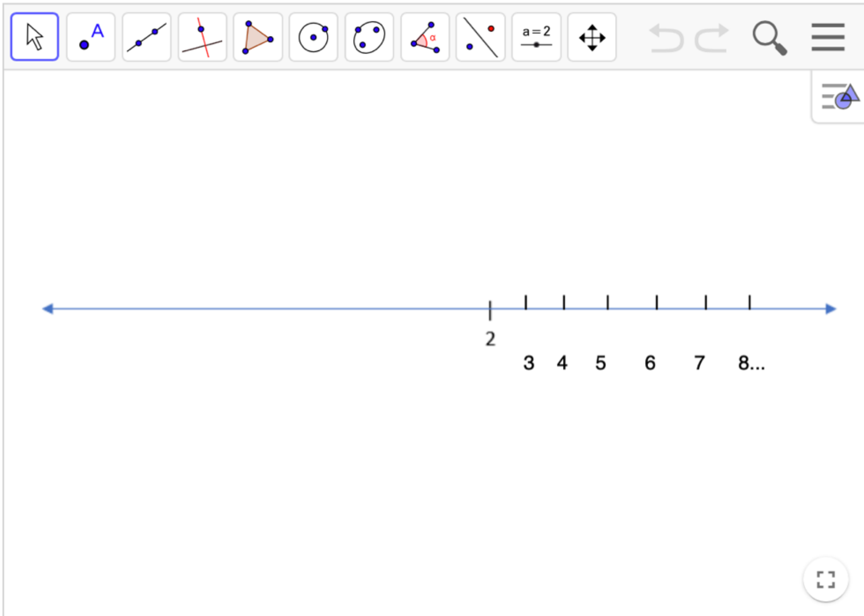
Respuesta
Todos los que le sigue despues del 2

4. Si tratamos de ubicar esos valores en una recta numérica ¿Hacia qué lado quedarían los números mayores que 2? Marca la respuesta correcta

● A la derecha
○ A la izquierda

5. Representa en la siguiente recta numérica los números mayores que 2

Respuesta



Nota que la expresión "todos los valores mayores que 2" se puede escribir como una desigualdad de la siguiente forma $x > 2$ donde x representa todos los posibles valores que cumplan la desigualdad, como podemos ver en la siguiente tabla:

Si tenemos una relación de desigualdad que se repite para muchos valores como los siguientes ejemplos:	Para ahorrar espacio usamos la siguiente expresión
$3 > 2$ $2.5 > 2$ $5 > 2$ $10 > 2$ $100 > 2$ …	**$x > 2$** Donde x es cualquier número que cumpla la desigualdad Cuando usamos x es importante aclarar qué valores puede tomar

Cabe aclarar qué a pesar de que 2.5 no es un número entero, sino que un número decimal también cumple con la condición de que es mayor que 2, es decir, los decimales los podemos trabajar de igual forma que como comparamos los enteros.

6. Escribe en el espacio en blanco 6 números menores que 3 separados por comas

Respuesta
-1 , -14 , -8 , -27 , 2 , 1

7. ¿Son estos los únicos valores que cumplen la condición?

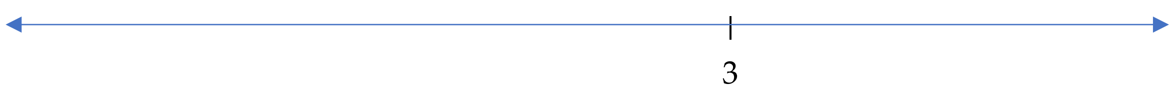
Respuesta
No

8. ¿Cuántos números menores que 3 hay en la recta numérica?

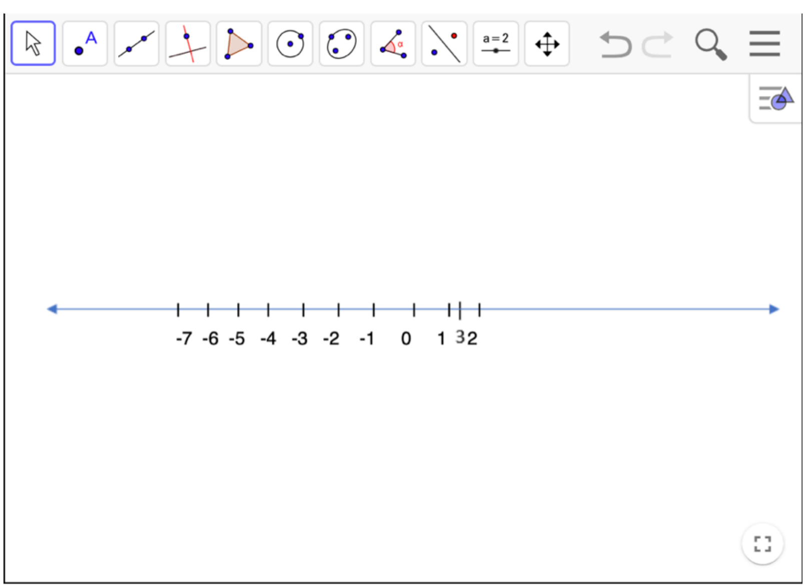
Respuesta
Todos los numeros que son menores que 3 pueden ir en la recta numerica

9. Si tratamos de ubicar esos valores en una recta numérica ¿Hacia qué lado quedarían los números menores que 3? Marca la respuesta correcta
   - [ ] A la derecha
   - [x] A la izquierda

10. Representa en la siguiente recta numérica los números menores que 3



Respuesta



Nota que la expresión "todos los valores menores que 3" se puede escribir como una desigualdad de la siguiente forma x < 3 donde x representa todos los posibles valores que cumplan la desigualdad como podemos ver en la siguiente tabla

Si tenemos una relación de desigualdad que se repite para muchos valores como la siguiente	Para ahorrar espacio usamos la siguiente expresión
1 < 3 -5 < 3 -1.5 < 3 0 < 3 -10 < 3 …	**x < 3** Donde x es cualquier número que cumpla la desigualdad Cuando usamos x es importante aclarar qué valores puede tomar

Cabe aclarar qué a pesar de que -1.5 no es un número entero, sino que un número decimal también cumple con la condición de que es menor que 3, es decir, los decimales los podemos trabajar de igual forma que como comparamos los enteros.

11. Da un valor entero para x que cumpla con las siguientes condiciones x > 5 pero también x > 7

Respuesta
8>5 , 19>7

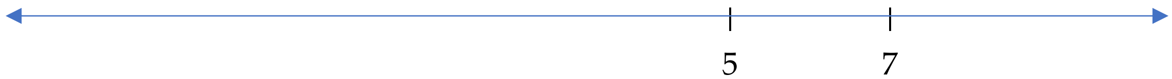
12. ¿Cuántos enteros cumplen las dos condiciones al mismo tiempo?

Respuesta
Todos los enteros

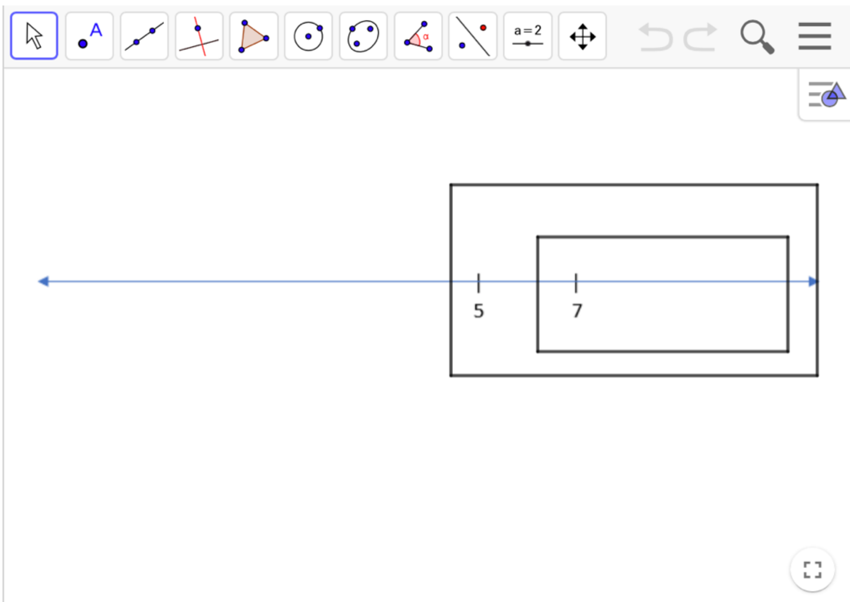
13. ¿Hay otros números que cumplen las dos condiciones, aunque no sean enteros? da algunos ejemplos si los hay

Respuesta
4.3 , 13.8 , 5.1 , 3.3

14. Representa en la siguiente recta numérica la solución, esto es, marca la zona de los números que, no importa si son enteros o no, cumplen las condiciones x > 5 pero también x > 7



Respuesta



15. Da un valor entero para x que cumpla con las siguientes condiciones: x < 3 pero también x < 1

Respuesta
1 < 3 , -4 < 1

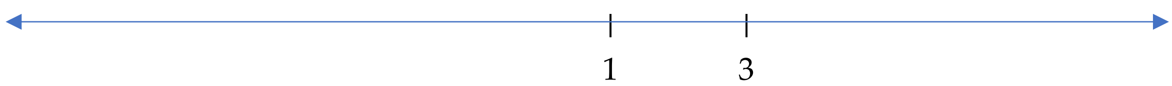
16. ¿Cuántos enteros cumplen las dos condiciones al mismo tiempo?

Respuesta
Los que son menores al numero que se indica

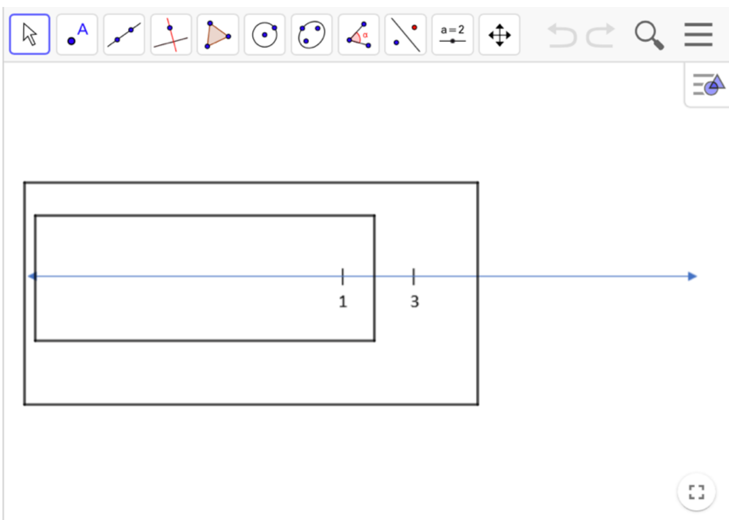
17. ¿Hay otros números que cumplen las dos condiciones, aunque no sean enteros? da algunos ejemplos si los hay

Respuesta
3.2 , 4.4

18. Marca en la siguiente recta numérica la solución, esto es, marca la zona de los números que, no importa si son enteros o no, cumplen las condiciones x < 3, pero también x < 1



Respuesta



19. Da un valor entero para x que cumpla con las siguientes condiciones: x > 2 pero también x < 6

Respuesta
4>2 , -5<6

20. ¿Cuántos enteros cumplen las dos condiciones al mismo tiempo?

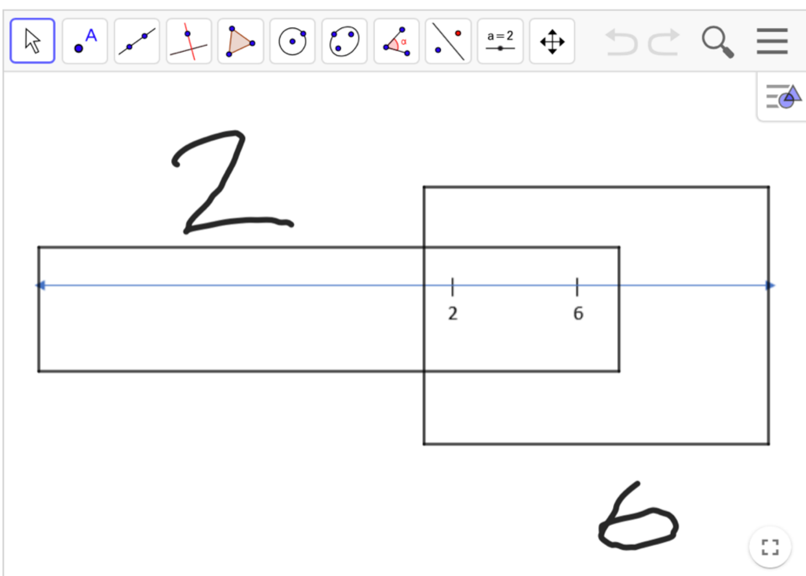
Respuesta
Todos los enteros

21. ¿Hay otros números que cumplen las dos condiciones, aunque no sean enteros? da algunos ejemplos si los hay

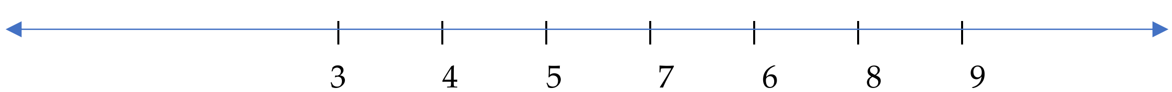
Respuesta
3.2 , 9.8 , 2.4

22. Si un número cualquiera cumple dos condiciones la primera es que $x > 2$ también que $x < 6$. Marca en la siguiente recta numérica la solución, ya sea un número o varios y no importa si son enteros o no

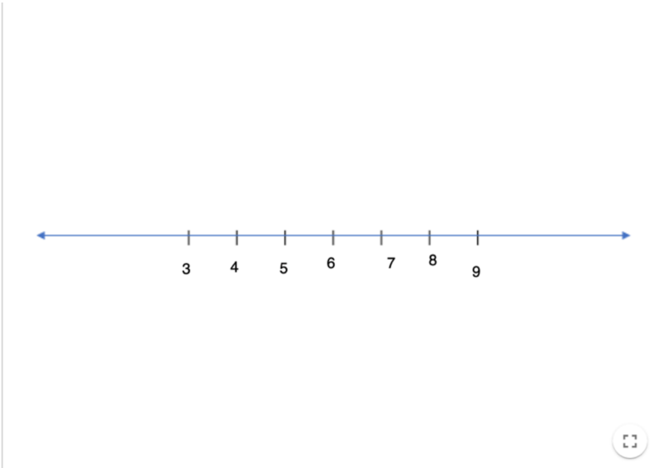
Respuesta



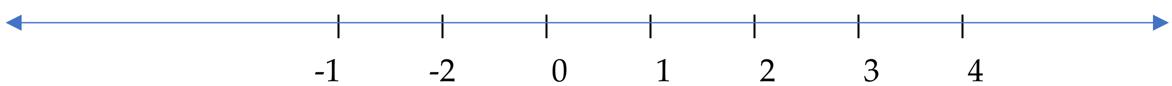
23. Observe detenidamente si la siguiente recta numérica está ordenada correctamente, en caso de que no esté ordenada cambia el orden para ordenarla



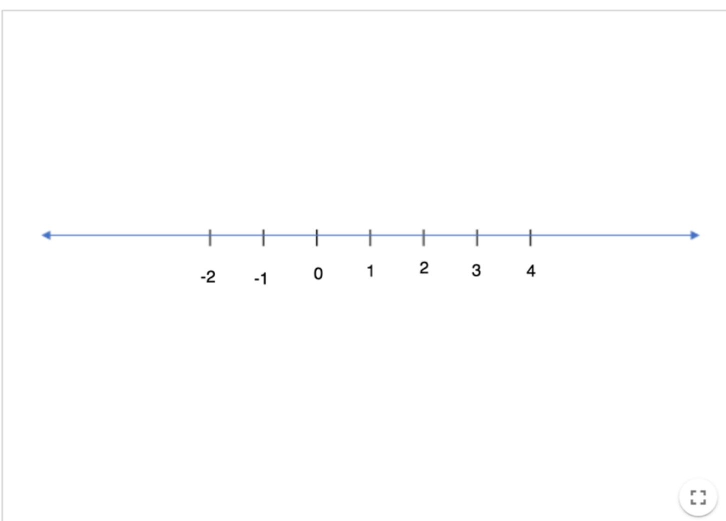
Respuesta



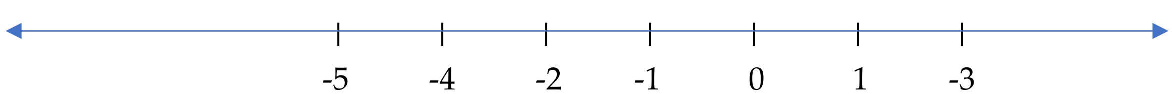
24. Observe detenidamente si la siguiente recta numérica está ordenada correctamente, en caso de que no esté ordenada cambie el orden



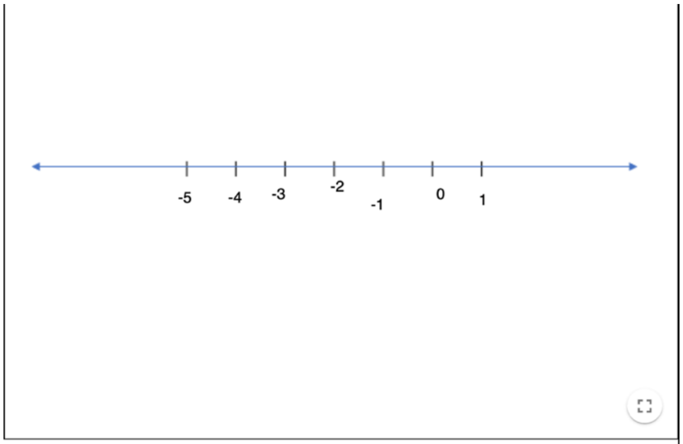
Respuesta



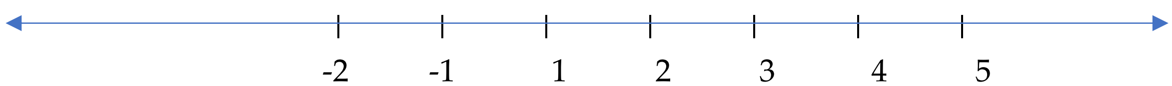
25. ¿La siguiente recta numérica está ordenada correctamente? Si no lo está corríjala para que los números de manera que queden ordenados



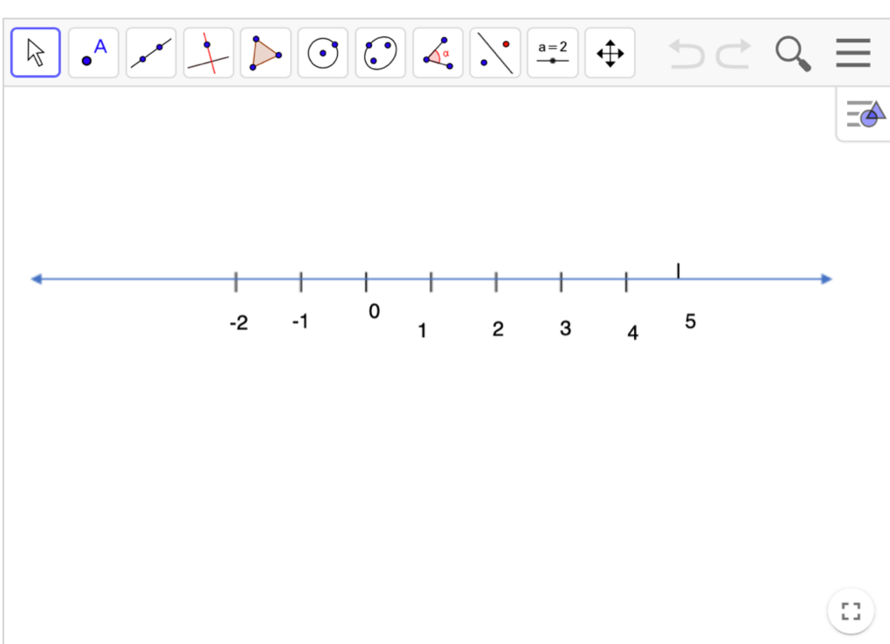
Respuesta



26. Ordena los números que aparecen enseguida



Respuesta



Anexo 3: Entrevista a través de la plataforma Zoom

1. I: Vamos a comenzar con algunas preguntas, igual recordarle que estos datos son solamente para la investigación, no van a salir para ningún otro lugar. Estuve revisando sus respuestas y me parecieron bastante interesantes, las estuvimos viendo y sí, tenemos algunas dudas respecto a sus respuestas, solamente es sobre esas que le voy a preguntar.

2. E: Ajá

3. I: Le voy a compartir pantalla sobre el documento donde clasificamos sus respuestas y con base a eso le voy a estar haciendo algunas preguntas

4. E: Está bien

5. I:¿Lo mira?

6. E: Sí

7. I: Aquí en esta parte de arriba es, por si hay alguna cosa que quiera anotar, o en algún momento yo le puedo pedir, entonces se va a la parte de arriba donde está la opción de anotar y luego va a elegir lo que desee, para anotar lo que yo le pida.

8. I: La primera consulta es con respecto a esta tarea, ¿se acuerda de esta tarea?

9. E: Si, más o menos

10. I: El enunciado mencionaba que tenía que colocar la zona de los números mayores que 5 y luego la zona de los números mayores que 7. Veo que, si marcó dos zonas, la primera pregunta ¿Por qué hace la marca un poco antes del 5 y un poco antes del 7?

11. E: Ahhhh … pues. Como decía mayor que 5 yo tomé del número 5 hacia adelante, los números que seguían del 5 y del número 7 hacia adelante, los que seguían después del 7

12. I: Ahhhh ok, pero por ejemplo aquí en esta marca la hizo antes del cinco, yo le puedo decir que ahí está el punto o la marca 4.9, ¿estaría dentro de los números mayores que 5?

13. E: No

14. I: Ah ok, si yo le vuelvo a hacer otra pregunta el 6.9, porque aquí yo veo la marca que está antes del 7, podría ser 6.9, ¿6.9 es mayor que 7?

15. E: No

16. I: Ok, entonces ¿podría volver a marcar esa zona? partiendo exactamente ¿de qué número?

17. E: Del 5 y del 7

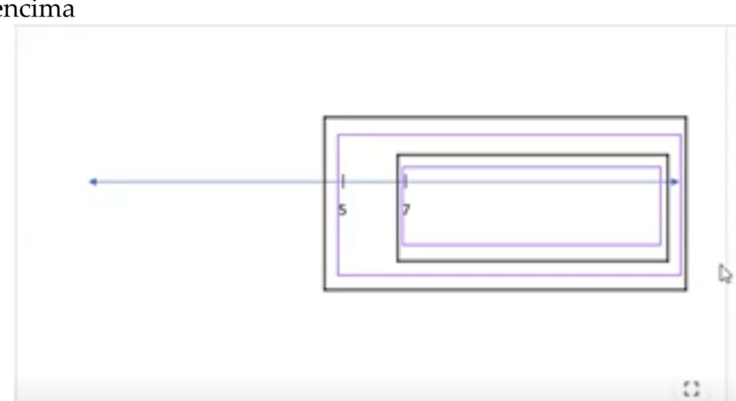
18. I: Ok, porque si usted lo marca así me está diciendo que todos esos números, esos poquitos números que hay antes del 5 también pueden estar incluidos en su zona. ¿Sí?

19. E: Ajá

20. I: Entonces será que puede volver a marcar la zona correcta.

21. E: Pero, puedo borrar esos cuadritos ahí o los hago encima de ellos

22. I: Hágalos encima



23. E: Ya

24. I: Ok ahora observemos algo, en la parte final, ¿siempre está cerrado verdad?, si se fija. ¿Eso que quiere decir? ¿Quiere decir que hay hasta un número final o hay muchos números a partir de ahí?

25. E: No, todos los números que le siguen son mayores y todos los números que siguen ahí pueden estar en la recta

26. I: Ah ok, entonces si, porque cuando me muestra esto, de que esta parte está cerrada es como que, pues hay más o se queda hasta ahí donde está esa parte cerrada, pero si, ya me comenta que si hay más números

27. E: Ujum

28. I: Entonces si ya me queda un poco más claro. Ok en esta parte no terminaba ahí la pregunta porque les preguntaban ¿Algún entero cumplen las dos condiciones?

29. E: mmm… (Silencio)

30. I:¿Algún entero cumple que es mayor que 5 y es mayor que 7?

31. E: si

32. I:¿Cuáles?

33. E: Todos los que siguen después del 5 y después del 7

34. I: pero ¿6 cumple esa condición?, ¿cumple las dos condiciones al mismo tiempo?

35. E: Ahhh … no.

36. I: Ah ok, entonces solo cumple una

37. E: Ah … aja

38. I: Y si solo cumple una, entonces no podemos marcar ese punto. Entonces, aquí la pregunta era más que todo para ver si ustedes identificaban si al momento de tener dos condiciones ¿cuál es la zona que me va a interesar? Por ejemplo, si yo tengo estas dos condiciones, las mayores que 5 y las mayores que 7, pero les piden que cumplan las dos condiciones al mismo tiempo, ¿entonces a mí me van a interesar los valores a partir de cual? ¿O los valores a partir de qué número?

39. E: (Silencio)

40. I: Para que me cumpla las dos condiciones ¿qué número tiene que ser?

41. E: Tiene que ser un número que sea mayor que 7

42. I: Correcto, entonces para que cumpla las dos condiciones tienen que ser valores que cumplan la última zona, la zona que está más largo.

43. E: Si

44. I: Algún ejemplo que me quiera dar

45. E: Eh, el número 20, el número 17, el número 13

46. I: Correcto, entonces si se fija, tiene que notar eso, cuando le dan dos condiciones que pasa

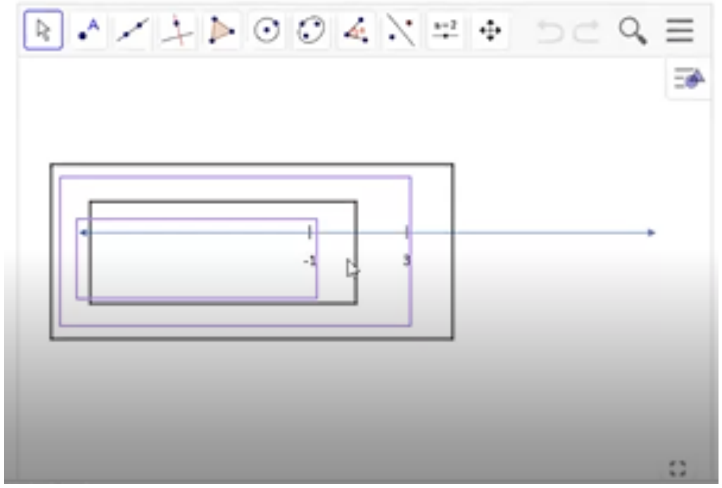
47. I: Entonces lo mismo ocurre en el siguiente ejercicio, que ahora lo vamos a ver. Vamos a pasar al siguiente que es prácticamente lo mismo

48. I: aquí iba volver a las mismas preguntas, porque al momento de marcar la zona lo marca tan antes, tan antes o bueno tan después del 3 o tan después del -1. Porque ahí yo puedo decir que ahí esta el cero, antes del -1 ahí está el cero en esa zona, entonces a veces como que tiende esa confusión si no se marca bien la zona, para el momento después de dar una respuesta. ¿Si o no?

49. E: Si

50. I: Si verdad, entonces le pediría que vuelva a marcar la zona, que serían las más adecuadas para que no se vea tanto espacio entre la zona ideal y el número que está marcado ahí

51. E: ujum



52. I: Ok, aquí vemos que ya están un poco más cerca, pero si vemos que el software no nos va a permitir hacerlo como que tan preciso, pero si ya no pueden surgir más errores que como la tenia antes. Vuelvo aquí otra vez, había otra pregunta en esta parte que decía que ¿algún entero cumple las dos condiciones al mismo tiempo?
53. E: No
54. I: Segura
55. E: Si
56. I: Recuerde que las zonas que se marcaron fueron los números menores que 3 y menores que -1, entonces, los enteros son tanto negativos como positivos, ¿Qué número entero cumple las dos condiciones al mismo tiempo?
57. E: No, ninguno cumple las dos condiciones
58. I: Si tenemos por ejemplo el cero, ¿cumple las dos condiciones al mismo tiempo?
59. E: No
60. I: No, porque el cero esta en esta zona, ¿verdad?
61. E: Si
62. I: Pero por ejemplo si nos ubicamos en algún número en esta zona, en esta zona si se fija, están todos los menores que 3, porque esta el cuadrado acá grande
63. E: Aja
64. I: y están todos los menores que
65. E: negativo 1
66. I: por ejemplo, si ubicamos el -2, ¿será?, ¿estará en esa zona?
67. E: Si
68. I: Entonces, ¿es o no es?, ¿cumple o no cumple las dos condiciones?
69. E: Si, si cumple las dos condiciones.
70. I: Ah ok, ¿me puede dar otros ejemplos?
71. E: Ehhh el -27, -4, -15
72. I: Entonces si se fija acá, entonces las dos son menores que 3 y menores que negativo 1, entonces al final cual es la zona que nos va a interesar, ¿los menores que quién?
73. E: Los menores que negativo 1
74. I: Ah correcto, entonces todos esos van a cumplir las dos condiciones al mismo tiempo, ya con eso ya podemos interpretar, que números están dentro de que zonas
75. E: ujum
76. I: ¿Está claro hasta ahí?
77. E: Si

78. I: ¿Está más claro hasta ahí de cuando lo estuvo respondiendo solita?
79. E: Si
80. I: Voy a borrar lo que hizo porque igual está quedando guardado y vamos a pasar al siguiente
81. I: ok, esta solo fue como más que duda, fue por problemas de software que fue que puso el 3 antes que el 2 o porque considera que el 3 es menor que el 2.
82. E: Fue un error, hasta ahorita me fije
83. I: Ah ok, eso me había quedado la duda de, porque si todos los demás números estaban ordenados tan bien porque me había dejado ese allí pero bueno, ese solo era para salir de la duda
84. I: eh ok, acá esta esta otra pregunta también que está bastante relacionada con las dos anteriores que me respondió que le pedían da un valor entero para x que cumpla con las siguientes condiciones $x > 5$ pero también que cumpla esta condición $x > 7$. ¿Cambiaría su respuesta o no la cambiaría?
85. E: Ummm, ahhh ¿o sea que tenía que poner un mismo número que cumpliera las dos condiciones?
86. I: Exactamente
87. E: Ah, que ….
88. I: Si porque ahí le dicen que, da un valor
89. E: Ah si …
90. I: Que cumpla las siguientes, entonces ahora ya pensándolo así, ¿qué valor me daría?
91. E: Uhhh, eh pondría en el primero … pondría el 15
92. I: Ok vamos a analizar el 15, ¿el 15 es mayor que 5?
93. E: Si
94. I: Y ¿el 15 es mayor que el 7?
95. E: Si
96. I: Entonces, esa era la única respuesta que me iba a poner, era la única respuesta que le estaba pidiendo.
97. E: Ah si
98. I: Entonces eso es lo que debe ir viendo, cuando le digan que cumpla las siguientes condiciones tiene que ver la primera condición y la segunda condición. Entonces íbamos como que porqué la importancia de la zona que usted marcaba o de las dos zonas que usted marcaba, porque esas son las condiciones que le van a permitir dar un valor ¿Si?
99. E: Aja
100. I:¿Algún otro valor? ¿Otro ejemplo que me dé para estas dos condiciones?
101. E: El número 15, 25, 40.
102. I: El más cercano a esos que los cumple ¿Cuál sería?
103. E: Eh, el número 8
104. I: Correcto, el seis ¿lo cumpliría?
105. E: No
106. I:¿Por qué?
107. E: Porque si es mayor que 5, pero no es mayor que el número 7
108. I: Perfecto, entonces eso era, ver las dos condiciones al mismo tiempo, entonces igual vamos a pasar al siguiente. Esta pregunta es bastante importante porque yo le pregunto, ¿Cuántos enteros cumplen las dos condiciones al mismo tiempo y usted que responde?
109. E: (se ríe) todos los enteros
110. I:¿Los cumplen todos los enteros?, le vuelvo a preguntar
111. E: No
112. I: Ok, ¿por qué?

113. E: Porque si los cumplieran todos los enteros entonces pudiera poner el 3, pero el número 3 es menor que el número 5 y es menor que el número 7; y también el número 6 pero el número 6 si es mayor que el número 5 pero es menor que el número 7

114. I: Correcto, entonces siempre queda la duda, ¿son todos o no son todos? Usted ya me dijo que no son todos, pero ¿Cuántos son?

115. E: Son los que están después del número 7

116. I:¿y cuántos? Jeje, cantidad, cuantos

117. E: todos, infinitos

118. I: no serian todos, sino que serían muchos o infinitos, ¿si?

119. E: Si

120. I: Entonces si ahí seria entender bien esto, pero esta respuesta había que verla bien con la respuesta que me dio anteriormente, entonces ya como que analizándolo bien ya. Ahora aquí es donde me surge la mayor duda. ¿Hay otros números que cumplen las dos condiciones, aunque no sean enteros? Da algunos ejemplos si los hay. Y usted coloco esos números ¿Si?

121. E: (se ríe un poco de su respuesta)

122. I:¿Cuál de esos números si cumplen las dos condiciones? ¿O todos los cumplen?

123. E: Emm … no, sólo el 13.18

124. I: Ok sólo el 13.8, entonces ¿me podría dar algún otro ejemplo que cumpla las dos condiciones pero que no sea entero?

125. E: el 23.5, el 18.3, el 13.4.

126. I: El 6.9 podría ser que cumple las dos condiciones?

127. E: No

128. I: ¿no verdad?, entonces si aquí ya vemos que sus respuestas si van a cambiar de acuerdo con lo que habíamos platicado anteriormente

129. I: ok aquí vuelvo a ver la misma zona, ¿Qué le pedían en esta tarea? En esta tarea se le pedía que representara en la siguiente recta numérica la solución. Esto es marca la zona de los números si son enteros o no cumplen las dos condiciones x > 5, pero también x > 7. ¿Cuál sería esa zona? ¿Es una zona o son dos zonas?

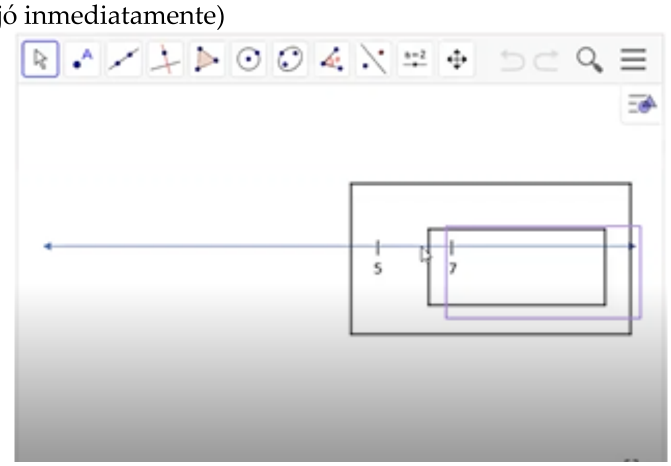
130. E: ¿Es UNA zona que cumple las dos condiciones?

131. I: Correcto

132. E: Ahhh … entonces sería la zona después del 7, a partir del número 7 hacia después

133. I: Ah perfecto. ¿La puede dibujar?

134. E: ahí está (La dibujó inmediatamente)



135. I: Entonces esa sería nuestra solución, o sea cualquier valor que este en esa zona, es un valor que cumple ¿qué?

136. E: Las dos condiciones

137. I: Ok, correcto. Las dos condiciones, o sea solo teniendo esa zona, la zona marcada ya podemos saber cualquier número para x, cualquier número que esté en esa zona es una solución de nuestras dos condiciones al mismo tiempo ¿Sí?, ¿estamos de acuerdo?

138. E: Ujum (asienta con la cabeza)

139. I: Ok ya vamos a terminar, entonces aquí con todo lo que hemos discutido ya me puede dar una respuesta para este número 15.

140. E: Emmm …

141. I: Da un valor entero para x que cumpla con las siguientes condiciones $x < 3$, pero también $x < 1$

142. E: el -1

143. I: Correcto

144. E: también puede ser el -7, -10

145. I: ok perfecto, ¿El cero cumple esa condición?

146. E: Si

147. I: en la siguiente pregunta ¿Hay otros números que no sean enteros que cumplen las dos condiciones? De algunos ejemplos si los hay. ¿Qué me respondería?

148. E: el -2.3, el 3.3, 5. 8, 14.13 eh -14.13

149. I: ah ok eso le iba a decir porque me estaba dando números positivos me dio 3.3, ¿3.3 se puede?

150. E: no, porque es positivo

151. I: Entonces sí, están bien esas respuestas, ¿cambiaría esas respuestas que me dio o las dejaría?

152. E: No, las cambiaría

153. I: Entonces ¿las cambiaría por los números que me dictó?

154. E: Si

155. I: Ahora ésta otra, un valor entero para x que cumpla con las siguientes condiciones $x > 2$, pero también $x < 6$

156. E: el número 1, ehh … no. ¿Un sólo número para los dos verdad?

157. I: correcto

158. E: El número 3

159. I: ¿Es mayor que 2?

160. E: Si

161. I: ¿Es menor que 6?

162. E: Si

163. I: Entonces si cumple, correcto. Ese pudo ser un ejemplo. Ahora el 4, es mayor que 2?

164. E: Si

165. I: y es menor que el 6?

166. E: Si

167. I: entonces cuando le preguntan acá, ¿cuántos enteros cumplen las dos condiciones al mismo tiempo? ¿Cuál fue su respuesta?

168. E: Todos

169. I: Entonces ahora ¿cuál es su respuesta?

170. E: eh sería, mmm … todos los números que son menores que 6

171. I: Menores que 6 ¿segura? Recuerde que la condición es que sea mayor que 2 pero también menor que 6 ¿Cuántos enteros hay que sean mayor que 2 y menor que 6?

172. E: que sean mayor que dos y menor que seis. Ah no… Eh (silencio)

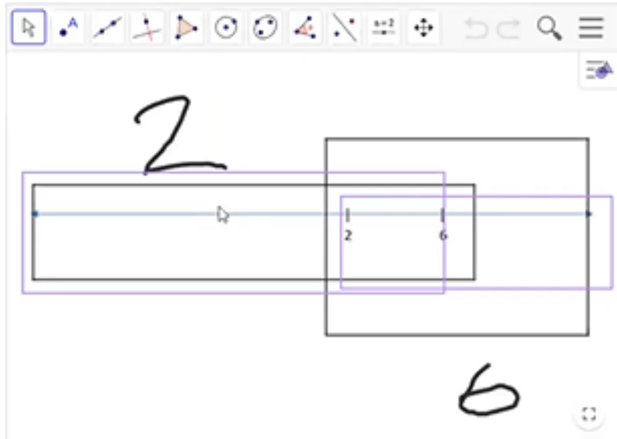
173. I: Dejémoslo ahí, ahora vamos a pasar a su representación. Ahí esta representando los números mayores que 2 y los números menores que 6 ¿Sí? ¿Cuál sería la zona?

174. E: ¿La tengo que marcar?

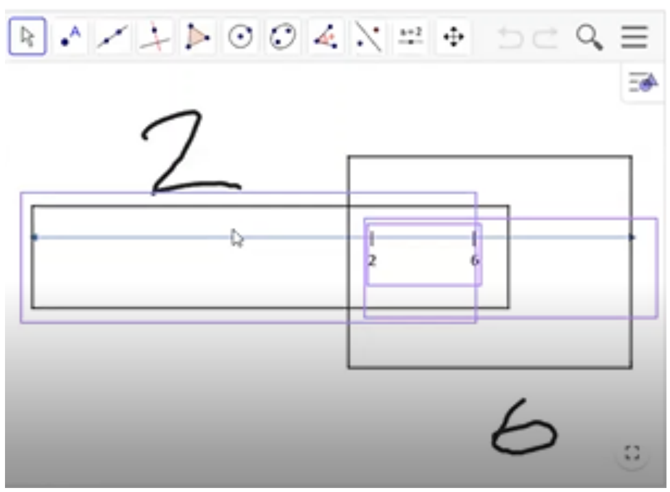
175. I: Si, por favor

176. E: Los números mayores que 6

177. I: Los números mayores que 2 y menores que 6
178. E: mayores que 2 y menores que 6



179. I: ok, ahora que me cumpla las dos condiciones al mismo tiempo
180. E: Mayores que dos y menores que 6 verdad
181. I: Marque la zona, ¿Cuántas zonas serian, una, dos o cuantas?
182. E: (repetía en voz baja: mayores que dos y menores que seis) Sólo sería la zona que está entre el número 2 y el número 6.
183. I: Correcto, ahora márquela
184. E: ¡Yuju!
185. I: Marque la zona
186. E: (Guarda silencio y la marca)…



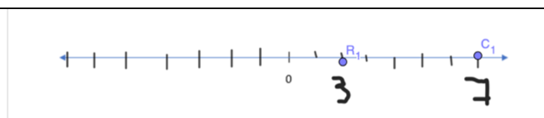
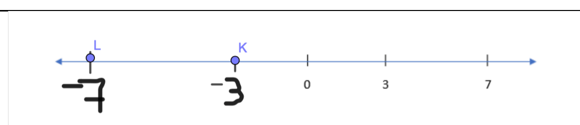
187. I: Correcto esa seria nuestra zona, ahora volvemos a la pregunta ¿Cuántos enteros cumplen las dos condiciones al mismo tiempo? ¿Cuántos enteros hay en esa zona? En esa última que dibujó
188. E: Hay 3
189. I: Correcto, ¿Cuáles son?
190. E: 3, 4 y 5
191. I: Correcto esos son ¿Hay otros valores aunque no sean enteros?
192. E: Mayor que 6 ….
193. I: Mayor 2 y menor que 6
194. E: Mayor que dos y menor que 6. Eh si

195. I: Deme un ejemplo
196. E: Mayor que dos y menor que 6. El 3.4, 5.6, 4.8
197. I: Correcto. ¿Podría ser 6 un valor?
198. E: (silencio) … No
199. I:¿Por qué?
200. E: No se jejeje, no porque es el mismo número
201. I: Entonces 6 no cumpliría
202. E: No
203. I: Y dos?
204. E: Tampoco
205. I: Ok, perfecto. Bueno eso seria todo. Muchas gracias

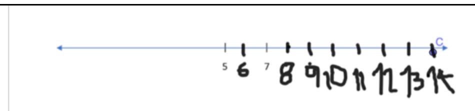
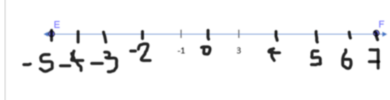
Anexo 4: Respuestas de 5 estudiantes de la segunda puesta en marcha

Respuestas de F

Actividad 1

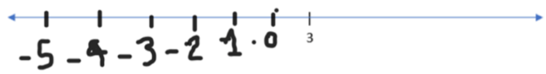
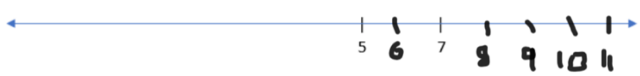
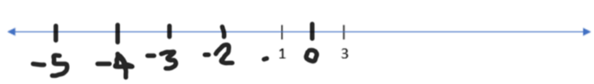
F1.1	**1.** Ordena los siguientes números empezando por el mayor -3 5 -7 2 4 0 -2 **Respuesta** 5,4,2,0-7,-3,-2
F1.2	**2.** Ordena los siguientes números empezando por el menor 5 -6 8 - 4 0 5 3 **Respuesta** -6,-4,0,3,5,8
F1.3	
F1.4	4. Respuesta Derecha
F1.5	5. Respuesta Izquierda
F1.6	6. Respuesta A
F1.7	
F1.8	8. Respuesta La izquierda
F1.9	9. Respuesta La izquierda
F1.10	10. Respuesta C

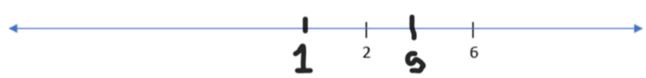
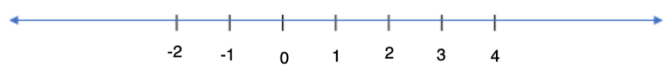
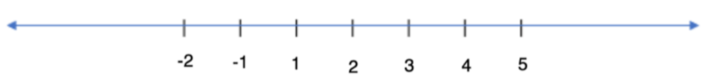
F1.11	11. Respuesta C
F1.12	**Respuesta** -8,-5 **Respuesta** 8,5
F1.13	**13.** ¿Observas la relación de todos los signos? Coméntala enseguida **Respuesta** los signos son muy importantes ya que nos ayudan a diferenciar a los numeros positivos de los negativos y poder colocarlos en la recta
F1.14	**14.** ¿Cómo se la platicarías a tus amigos estas relaciones entre números? **Respuesta** Dándoles ejemplos y explicadoles muy bien
F1.15	
F1.16	16. Respuesta La Derecha
F1.17	17. Respuesta La izquierda
F1.18	18. Respuesta 5 > - 2
F1.19	
F1.20	20. Respuesta La derecha
F1.21	21. Respuesta La izquierda
F1.22	22. Respuesta - 5 < 2

F1.23	
F1.24	

Actividad 2

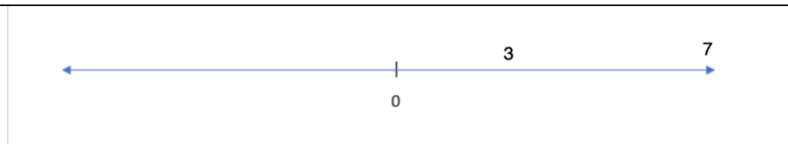
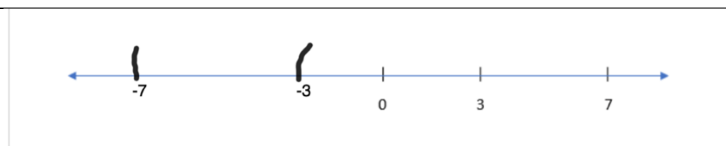
F2.1	**1.** Escribe en el espacio en blanco 6 números mayores que 2 separados por comas **Respuesta** 3,4,5,6,7,8
F2.2	**2.** ¿Son éstos los únicos valores que cumplen la condición? **Respuesta** nop hay mas valores
F2.3	**3.** ¿Cuántos números mayores que 2 hay en la recta numérica? **Respuesta** son infinitos
F2.4	4. Respuesta A la derecha
F2.5	
F2.6	**6.** Escribe en el espacio en blanco 6 números menores que 3 separados por comas **Respuesta** 2,1,0,-1,-2,-3
F2.7	**7.** ¿Son estos los únicos valores que cumplen la condición? **Respuesta** nop hay mas valores
F2.8	**8.** ¿Cuántos números menores que 3 hay en la recta numérica? **Respuesta** son infinitos

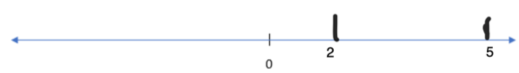
F2.9	9. Respuesta La izquierda
F2.10	
F2.11	**11.** Da un valor entero para x que cumpla con las siguientes condiciones x > 5 pero también x > 7 **Respuesta** 10
F2.12	**12.** ¿Cuántos enteros cumplen las dos condiciones al mismo tiempo? **Respuesta** los que sean mayor que los valores dados
F2.13	**13.** ¿Hay otros números que cumplen las dos condiciones, aunque no sean enteros? da algunos ejemplos si los hay **Respuesta** los decimales pueden cumplirse también
F2.14	
F2.15	**15.** Da un valor entero para x que cumpla con las siguientes condiciones: x < 3 pero también x < 1 **Respuesta** -2
F2.16	**16.** ¿Cuántos enteros cumplen las dos condiciones al mismo tiempo? **Respuesta** los que sean menor que los valores dados
F2.17	**17.** ¿Hay otros números que cumplen las dos condiciones, aunque no sean enteros? da algunos ejemplos si los hay **Respuesta** fracciones
F2.18	

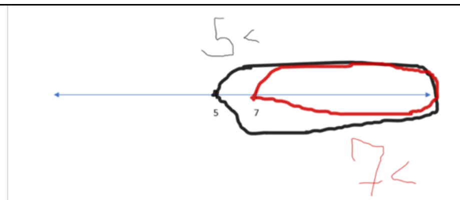
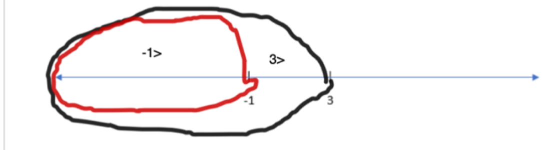
F2.19	**19.** Da un valor entero para x que cumpla con las siguientes condiciones: x > 2 pero también x < 6 **Respuesta** 3,4
F2.20	**20.** ¿Cuántos enteros cumplen las dos condiciones al mismo tiempo? **Respuesta** los numeros que cumplen las condiciones si son mayores o menores
F2.21	**21.** ¿Hay otros números que cumplen las dos condiciones, aunque no sean enteros? da algunos ejemplos ejemplos si los hay **Respuesta** los decimales y las fracciones
F2.22	
F2.23	
F2.24	
F2.25	
F2.26	

Respuestas de I

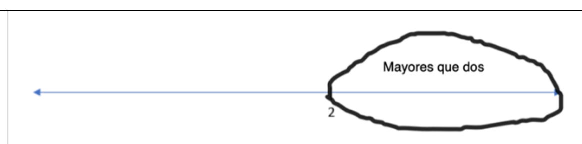
Actividad 1

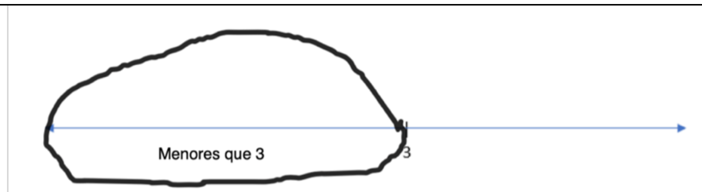
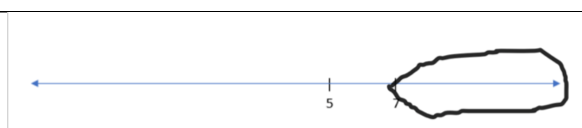
I1.1	**1.** Ordena los siguientes números empezando por el mayor -3 5 -7 2 4 0 -2 **Respuesta** 5,4,2,0,-2,-3,-7
I1.2	**2.** Ordena los siguientes números empezando por el menor 5 -6 8 - 4 0 5 3 **Respuesta** -6,-4,0,3,5,5,8
I1.3	
I1.4	4. Respuesta Derecha
I1.5	5. Respuesta Izquierda
I1.6	6. Respuesta A
I1.7	
I1.8	8. Respuesta La derecha
I1.9	9. Respuesta La izquierda
I1.10	10. Respuesta C

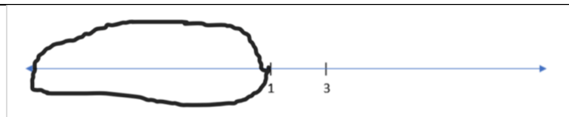
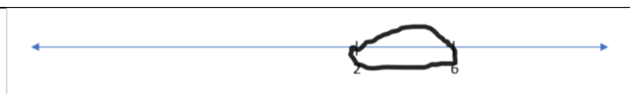
I1.11	11. Respuesta C
I1.12	**Respuesta** -8 y -3 **Respuesta** 8 y 3
I1.13	**13.** ¿Observas la relación de todos los signos? Coméntala enseguida **Respuesta** -8 es menor que -3, y 8 es mayor a 3
I1.14	**14.** ¿Cómo se la platicarías a tus amigos estas relaciones entre números? **Respuesta** Les explicaria que esto funciona como un espejo si es positivo de un lado y esta ubicado en un lado, su espejo seria un negativo y al otro lado de la recta
I1.15	
I1.16	16. Respuesta La Derecha
I1.17	17. Respuesta La izquierda
I1.18	18. Respuesta 5 > - 2
I1.19	
I1.20	20. Respuesta La derecha
I1.21	21. Respuesta La izquierda
I1.22	22. Respuesta - 5 < 2

I1.23	
I1.24	

Actividad 2

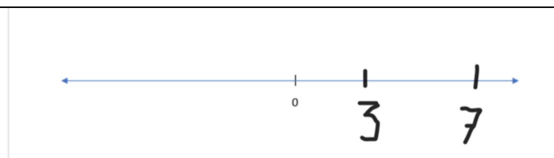
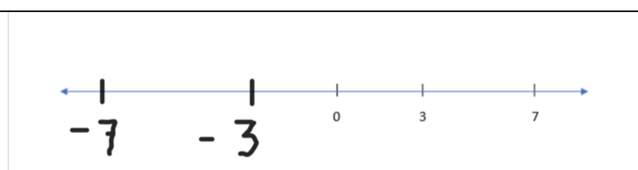
I2.1	**1.** Escribe en el espacio en blanco 6 números mayores que 2 separados por comas **Respuesta** 4,10,15,11,5,9
I2.2	**2.** ¿Son éstos los únicos valores que cumplen la condición? **Respuesta** No
I2.3	**3.** ¿Cuántos números mayores que 2 hay en la recta numérica? **Respuesta** Los numeros mayores que 2 son infitos siempre y cuando tengan mas valor que dos
I2.4	4. Respuesta A la derecha
I2.5	
I2.6	**6.** Escribe en el espacio en blanco 6 números menores que 3 separados por comas **Respuesta** -14,-6,-9,-22,-20,-51

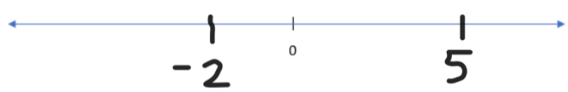
I2.7	**7.** ¿Son estos los únicos valores que cumplen la condición? **Respuesta** No
I2.8	**8.** ¿Cuántos números menores que 3 hay en la recta numérica? **Respuesta** Los numeros menores que 3 son infitos siempre y cuando tengan menos valor que 3
I2.9	9. Respuesta La izquierda
I2.10	
I2.11	**11.** Da un valor entero para x que cumpla con las siguientes condiciones x > 5 pero también x > 7 **Respuesta** 9
I2.12	**12.** ¿Cuántos enteros cumplen las dos condiciones al mismo tiempo? **Respuesta** Uno
I2.13	**13.** ¿Hay otros números que cumplen las dos condiciones, aunque no sean enteros? da algunos ejemplos si los hay **Respuesta** 12 18 25 29 38
I2.14	
I2.15	**15.** Da un valor entero para x que cumpla con las siguientes condiciones: x < 3 pero también x < 1 **Respuesta** -7

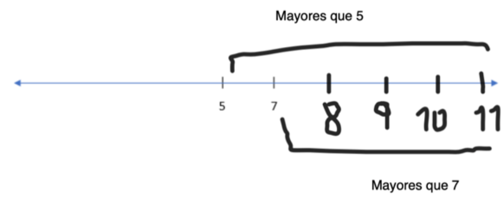
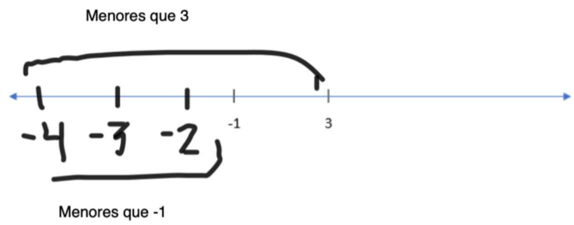
I2.16	**16.** ¿Cuántos enteros cumplen las dos condiciones al mismo tiempo? **Respuesta** Uno
I2.17	**17.** ¿Hay otros números que cumplen las dos condiciones, aunque no sean enteros? da algunos ejemplos si los hay **Respuesta** -12 -19 -35 -24 -44
I2.18	
I2.19	**19.** Da un valor entero para x que cumpla con las siguientes condiciones: x > 2 pero también x < 6 **Respuesta** 4
I2.20	**20.** ¿Cuántos enteros cumplen las dos condiciones al mismo tiempo? **Respuesta** Uno
I2.21	**21.** ¿Hay otros números que cumplen las dos condiciones, aunque no sean enteros? da algunos ejemplos ejemplos si los hay **Respuesta** 3 y 5
I2.22	
I2.23	
I2.24	
I2.25	
I2.26	

Respuestas de V

Actividad 1

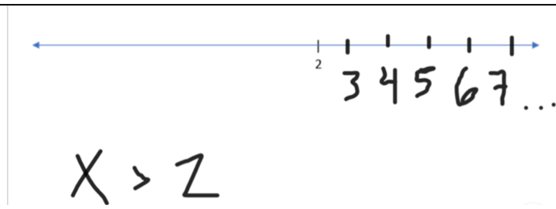
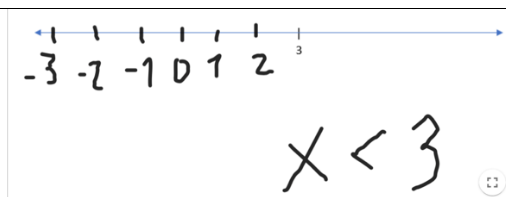
V1.1	**1.** Ordena los siguientes números empezando por el mayor -3 5 -7 2 4 0 -2 **Respuesta** 5 4 2 0 -2 -3 -5 -7
V1.2	**2.** Ordena los siguientes números empezando por el menor 5 -6 8 - 4 0 5 3 **Respuesta** -6 -4 0 3 5 8
V1.3	
V1.4	4. Respuesta Derecha
V1.5	5. Respuesta Derecha
V1.6	6. Respuesta A
V1.7	
V1.8	8. Respuesta A la izquierda
V1.9	9. Respuesta La izquierda
V1.10	10. Respuesta

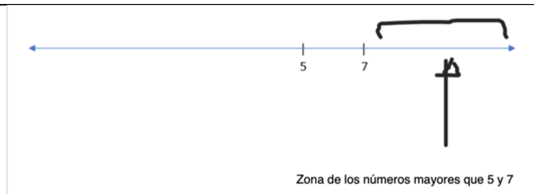
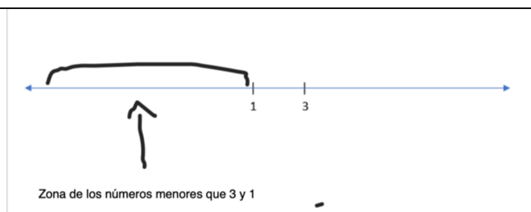
	C
V1.11	11. Respuesta C
V1.12	**Respuesta** -1 y -5 **Respuesta** 1 y 5
V1.13	**13.** ¿Observas la relación de todos los signos? Coméntala enseguida **Respuesta** Que cada uno tiene su simétrico u opuesto.
V1.14	**14.** ¿Cómo se la platicarías a tus amigos estas relaciones entre números? **Respuesta** En una pequeña charla, hablando sobre números. Introduciendo el tema general, que serían los números, y luego explicando las relaciones y cuáles son.
V1.15	
V1.16	16. Respuesta La Derecha
V1.17	17. Respuesta La izquierda
V1.18	18. Respuesta 5 > - 2
V1.19	
V1.20	20. Respuesta La derecha
V1.21	21. Respuesta La izquierda
V1.22	22. Respuesta

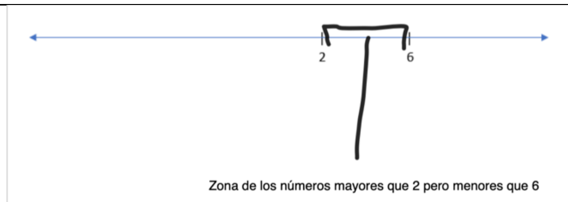
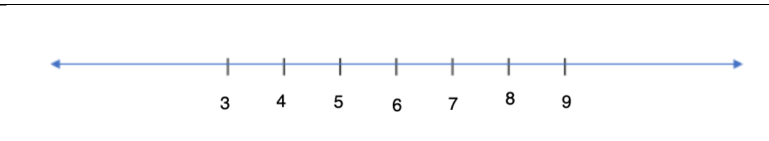
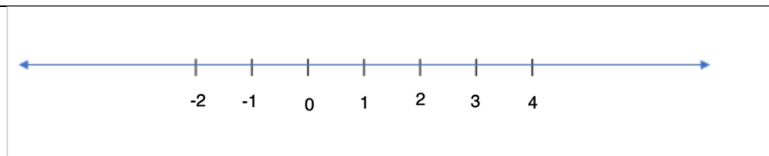
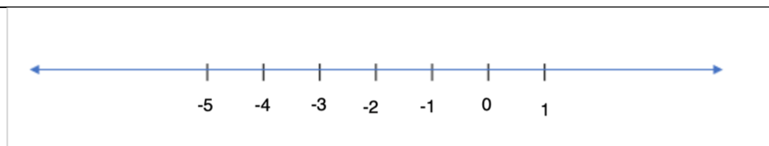
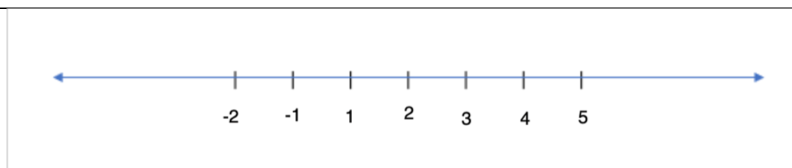
	- 5 < 2
V1.23	
V1.24	

Actividad 2

V2.1	**1.** Escribe en el espacio en blanco 6 números mayores que 2 separados por comas **Respuesta** 3, 4, 5, 6, 7, 8
V2.2	**2.** ¿Son éstos los únicos valores que cumplen la condición? **Respuesta** No
V2.3	**3.** ¿Cuántos números mayores que 2 hay en la recta numérica? **Respuesta** Infinitos. Todos los números al lado derecho después del 2.
V2.4	4. Respuesta A la derecha

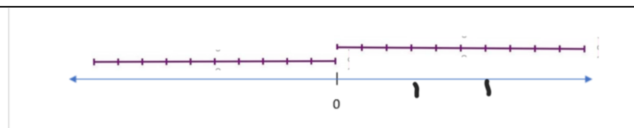
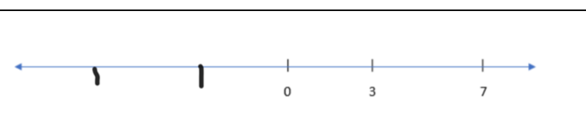
V2.5	
V2.6	**6.** Escribe en el espacio en blanco 6 números menores que 3 separados por comas **Respuesta** 2, 1, 0, -1, -2, -3
V2.7	**7.** ¿Son estos los únicos valores que cumplen la condición? **Respuesta** No
V2.8	**8.** ¿Cuántos números menores que 3 hay en la recta numérica? **Respuesta** Infinitos. Todos los números que van hacia el lado izquierdo antes del 3.
V2.9	9. Respuesta La izquierda
V2.10	
V2.11	**11.** Da un valor entero para x que cumpla con las siguientes condiciones x > 5 pero también x > 7 **Respuesta** 8
V2.12	**12.** ¿Cuántos enteros cumplen las dos condiciones al mismo tiempo? **Respuesta** Infinitos. Todos los enteros mayores que el 7. Ej: 8, 9, 10, 11...

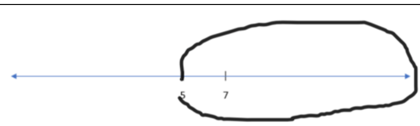
V2.13	**13.** ¿Hay otros números que cumplen las dos condiciones, aunque no sean enteros? da algunos ejemplos si los hay **Respuesta** Sí, 7.5, 8.1, 9.6, 10.2
V2.14	
V2.15	**15.** Da un valor entero para x que cumpla con las siguientes condiciones: x < 3 pero también x < 1 **Respuesta** -1
V2.16	**16.** ¿Cuántos enteros cumplen las dos condiciones al mismo tiempo? **Respuesta** Infinitos. Todos los que sean menores que 1. Ej: 0, -1, -2, -3, -4....
V2.17	**17.** ¿Hay otros números que cumplen las dos condiciones, aunque no sean enteros? da algunos ejemplos si los hay **Respuesta** Sí, 0.5, -1.6, -1.8, -2.3...
V2.18	
V2.19	**19.** Da un valor entero para x que cumpla con las siguientes condiciones: x > 2 pero también x < 6 **Respuesta** 4
V2.20	**20.** ¿Cuántos enteros cumplen las dos condiciones al mismo tiempo? **Respuesta** Tres enteros. 3, 4 y 5.

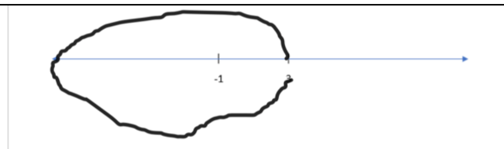
V2.21	**21.** ¿Hay otros números que cumplen las dos condiciones, aunque no sean enteros? da algunos ejemplos ejemplos si los hay **Respuesta** Sí, 2.6, 3.5, 3.9, 4.2, 5.7...
V2.22	
V2.23	
V2.24	
V2.25	
V2.26	

Respuestas de R

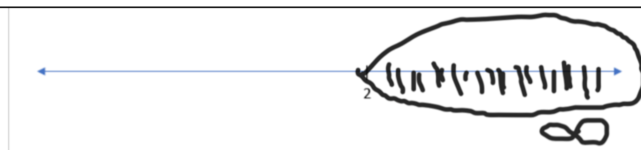
Actividad 1

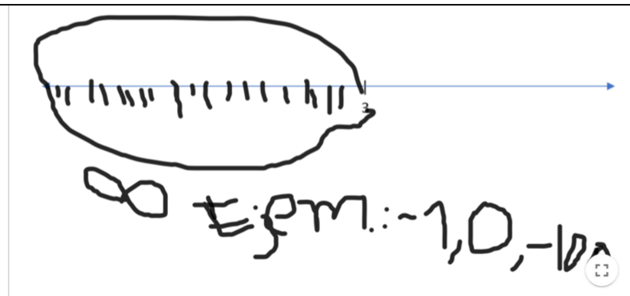
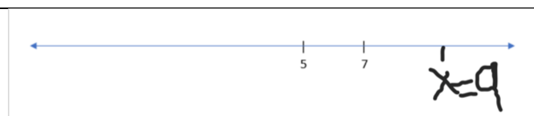
R1.1	**1.** Ordena los siguientes números empezando por el mayor -3 5 -7 2 4 0 -2 **Respuesta** 5,4, 2, 0, -2, -3,-7.
R1.2	**2.** Ordena los siguientes números empezando por el menor 5 -6 8 - 4 0 5 3 **Respuesta** -6,-4,0,3,5,5,8.
R1.3	
R1.4	4. Respuesta Derecha
R1.5	5. Respuesta Izquierda
R1.6	6. Respuesta A
R1.7	
R1.8	8. Respuesta La derecha
R1.9	9. Respuesta La izquierda
R1.10	10. Respuesta C
R1.11	11. Respuesta

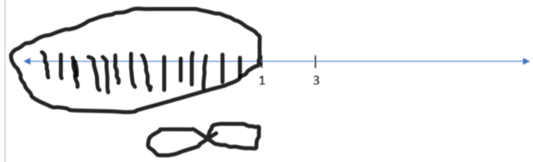
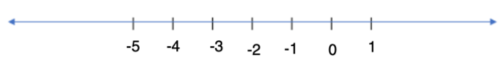
	C
R1.12	**Respuesta** -7<-3 **Respuesta** 3>2
R1.13	**13.** ¿Observas la relación de todos los signos? Coméntala enseguida **Respuesta** Si, se pueden notar mas si se colocan en una recta numerica.
R1.14	**14.** ¿Cómo se la platicarías a tus amigos estas relaciones entre números? **Respuesta** El signo que apunta a la izquierda es "menor que" debido a su ubicacion en una recta numerica, al igual que "mayor que" apunta a la derecha por la ubicacion de sus numeros.
R1.15	
R1.16	16. Respuesta La Derecha
R1.17	17. Respuesta La izquierda
R1.18	18. Respuesta 5 > - 2
R1.19	
R1.20	20. Respuesta La derecha
R1.21	21. Respuesta La izquierda
R1.22	22. Respuesta - 5 < 2
R1.23	

R1.24	

Actividad 2

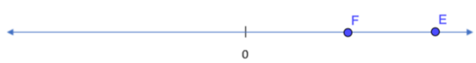
R2.1	**1.** Escribe en el espacio en blanco 6 números mayores que 2 separados por comas **Respuesta** 3,4,5,6,7,8.
R2.2	**2.** ¿Son éstos los únicos valores que cumplen la condición? **Respuesta** No.
R2.3	**3.** ¿Cuántos números mayores que 2 hay en la recta numérica? **Respuesta** Infinitos.
R2.4	4. Respuesta A la derecha
R2.5	
R2.6	**6.** Escribe en el espacio en blanco 6 números menores que 3 separados por comas **Respuesta** 1,2,0,-1,-2,-3.
R2.7	**7.** ¿Son estos los únicos valores que cumplen la condición? **Respuesta** No.
R2.8	**8.** ¿Cuántos números menores que 3 hay en la recta numérica? **Respuesta** Infinitos.

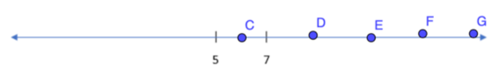
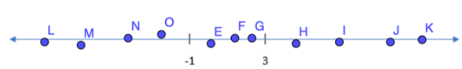
R2.9	9. Respuesta La izquierda
R2.10	
R2.11	**11.** Da un valor entero para x que cumpla con las siguientes condiciones x > 5 pero también x > 7 **Respuesta** x>9
R2.12	**12.** ¿Cuántos enteros cumplen las dos condiciones al mismo tiempo? **Respuesta** infinitos, excepto 6 ya que no es mayor que 7.
R2.13	**13.** ¿Hay otros números que cumplen las dos condiciones, aunque no sean enteros? da algunos ejemplos si los hay **Respuesta** 7.5 y 9.6.
R2.14	
R2.15	**15.** Da un valor entero para x que cumpla con las siguientes condiciones: x < 3 pero también x < 1 **Respuesta** 0.
R2.16	**16.** ¿Cuántos enteros cumplen las dos condiciones al mismo tiempo? **Respuesta** infinitos excepto 2, ya que es mayor que 1.
R2.17	**17.** ¿Hay otros números que cumplen las dos condiciones, aunque no sean enteros? da algunos ejemplos si los hay **Respuesta** 0.5 y -24.9.

R2.18	
R2.19	**19.** Da un valor entero para x que cumpla con las siguientes condiciones: $x > 2$ pero también $x < 6$ **Respuesta** 4.
R2.20	**20.** ¿Cuántos enteros cumplen las dos condiciones al mismo tiempo? **Respuesta** 3 enteros. (3,4 y 5.
R2.21	**21.** ¿Hay otros números que cumplen las dos condiciones, aunque no sean enteros? da algunos ejemplos ejemplos si los hay **Respuesta** 3.3, 4.7, 5.6, 3.99.
R2.22	
R2.23	
R2.24	
R2.25	
R2.26	

Respuestas de G

Actividad 1

G1.1	**1.** Ordena los siguientes números empezando por el mayor -3 5 -7 2 4 0 -2 **Respuesta** 5, 4, 2, 0, -2, -3, -7
G1.2	**2.** Ordena los siguientes números empezando por el menor 5 -6 8 - 4 0 5 3 **Respuesta** -6, -4, 0, 3, 5, 5, 8
G1.3	
G1.4	La derecha
G1.5	La derecha
G1.6	7 > 3
G1.7	
G1.8	A la izquierda
G1.9	La izquierda
G1.10	-7 < -3
G1.11	4 < 9
G1.12	**Números negativos** **Respuesta** -4 > -10 **Simétricos de los números negativos elegidos antes:** **Respuesta** 2, 1

G1.13	**13.** ¿Observas la relación de todos los signos? Coméntala enseguida **Respuesta** Sí. Creo que el signo cambia por completo el significado de el número en cuestión; también hay que saber muy bien donde tiene que señalar el signo de mayor o menor, y saber cuando establecer una igualdad.
G1.14	**14.** ¿Cómo se la platicarías a tus amigos estas relaciones entre números? **Respuesta** Tal vez explicándoles primero, para después poder tener una plática más amplia.
G1.15	
G1.16	La derecha
G1.17	La derecha
G1.18	5 > -2
G1.19	
G1.20	La derecha
G1.21	La izquierda
G1.22	-5 < 2
G1.23	
G1.24	

Actividad 2

G2.1	**1.** Escribe en el espacio en blanco 6 números mayores que 2 separados por comas **Respuesta** 3, 4, 5, 6, 7, 8

<table>
<tr><td>G2.2</td><td>

2. ¿Son éstos los únicos valores que cumplen la condición?

Respuesta

No.

</td></tr>
<tr><td>G2.3</td><td>

3. ¿Cuántos números mayores que 2 hay en la recta numérica?

Respuesta

Infinitos números.

</td></tr>
<tr><td>G2.4</td><td>La derecha</td></tr>
<tr><td>G2.5</td><td>

</td></tr>
<tr><td>G2.6</td><td>

6. Escribe en el espacio en blanco 6 números menores que 3 separados

por comas

Respuesta

2, 1, 0, -1, -2, -3

</td></tr>
<tr><td>G2.7</td><td>

7. ¿Son estos los únicos valores que cumplen la condición?

Respuesta

No.

</td></tr>
<tr><td>G2.8</td><td>

8. ¿Cuántos números menores que 3 hay en la recta numérica?

Respuesta

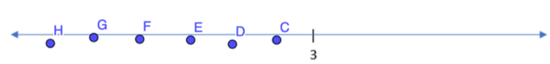
Infinitos números.

</td></tr>
<tr><td>G2.9</td><td>

9. Respuesta

La izquierda

</td></tr>
<tr><td>G2.10</td><td>



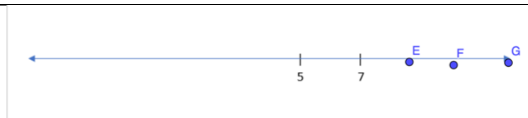
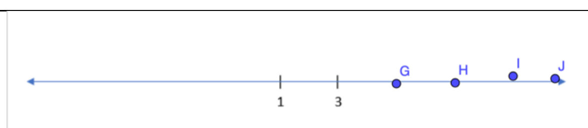
</td></tr>
<tr><td>G2.11</td><td>

11. Da un valor entero para x que cumpla con las siguientes condiciones x > 5 pero también x > 7

Respuesta

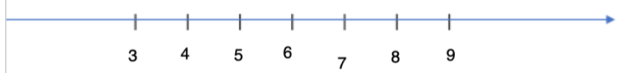
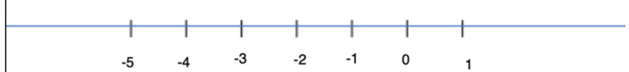
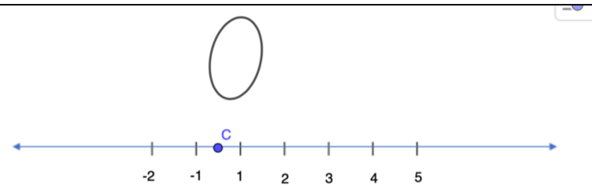
8.

</td></tr>
</table>

G2.12	**12.** ¿Cuántos enteros cumplen las dos condiciones al mismo tiempo? **Respuesta** Infinitos números.
G2.13	**13.** ¿Hay otros números que cumplen las dos condiciones, aunque no sean enteros? da algunos ejemplos si los hay **Respuesta** Sí hay, 8.5, 9.5, etc.
G2.14	
G2.15	**15.** Da un valor entero para x que cumpla con las siguientes condiciones: $x < 3$ pero también $x < 1$ **Respuesta** 4.
G2.16	**16.** ¿Cuántos enteros cumplen las dos condiciones al mismo tiempo? **Respuesta** Infinitos números.
G2.17	**17.** ¿Hay otros números que cumplen las dos condiciones, aunque no sean enteros? da algunos ejemplos si los hay **Respuesta** Sí hay; 4.5, 5.5.
G2.18	
G2.19	**19.** Da un valor entero para x que cumpla con las siguientes condiciones: $x > 2$ pero también $x < 6$ **Respuesta** 7.
G2.20	**20.** ¿Cuántos enteros cumplen las dos condiciones al mismo tiempo? **Respuesta** Infinitos números.

<table>
<tr><td>G2.21</td><td>21. ¿Hay otros números que cumplen las dos condiciones, aunque no sean enteros? da algunos ejemplos ejemplos si los hay

Respuesta

Sí hay; 7.5, 8, 8.5, etc.</td></tr>
<tr><td>G2.22</td><td>
</td></tr>
<tr><td>G2.23</td><td>
</td></tr>
<tr><td>G2.24</td><td>
</td></tr>
<tr><td>G2.25</td><td>
</td></tr>
<tr><td>G2.26</td><td>
</td></tr>
</table>