Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del
Instituto Politécnico Nacional

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemática Educativa

Razonamientos relacionados con el concepto de límite de una función de estudiantes de ingeniería

TESIS

Que presenta

Francisco Javier Nava Cuellar

Para obtener el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS

EN LA ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

Directores de la tesis:

Dr. Ernesto Alonso Sánchez Sánchez

Dr. Mario Sánchez Aguilar

Ciudad de México Mayo 2021

Resumen

De acuerdo con Sofronas et al. (2011), el objetivo de un primer curso de cálculo es el dominio de conceptos y habilidades fundamentales del cálculo; construcción de conexiones y relaciones entre conceptos y habilidades. No obstante, el límite es un concepto central del cálculo y está documentado que dicho concepto provoca gran cantidad de problemas en los estudiantes. Por consiguiente, se realiza la presente investigación que tiene como propósito categorizar y caracterizar el razonamiento de estudiantes de ingeniería cuando calculan y describen el concepto de límite de una función; e identificar, si existe, una relación entre estos razonamientos. Para este estudio participaron 21 estudiantes de ingeniería de la Ciudad de México quienes respondieron a un cuestionario de diez problemas. Este es un estudio de caso, donde el análisis de los datos se basó en los procedimientos de codificación y categorización (pertenecientes a los primeros pasos de la teoría fundamentada). El método de análisis consiste en codificar las respuestas de cada estudiante y agrupar estos códigos en categorías de acuerdo con sus similitudes. Para calcular el límite de una función los estudiantes recurrieron a un razonamiento algorítmico y/o covariacional; cuando describieron el concepto de límite se inclinan por un razonamiento dinámico y/o estático.

Palabras clave: límite de una función, razonamiento

Abstract

According to Sofronas et al. (2011) the end goals of a first-year calculus course are mastery of the fundamental concepts and skills of calculus; construction of connections and relationships between and among concepts and skills. Nonetheless, the concept of limit is central in calculus and it is documented that this concept causes a lot of problems in students. Consequently, the present investigation is carried out with the purpose of categorizing and characterizing the reasoning of engineering students when they calculate and describe the concept of the limit of a function; and identify, if there is, a relationship between these reasonings. Twenty-one engineering students from Mexico City participated in this study, answering a ten-problem questionnaire. This is a case study, where the data analysis was based on the coding and categorization procedures (belonging to the first steps of grounded theory). The analysis method consists of coding the responses of each student and grouping these codes into categories according to their similarities. To calculate the limit of a function, students resorted to algorithmic and/or covariational reasoning; when describing the concept of limit, they inclined towards a dynamic and/or static reasoning.

Keywords: limit of a function, reasoning

Agradecimientos

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico brindado durante los estudios en el posgrado y para la realización de este trabajo de investigación.

Agradezco a mis directores de tesis, el Dr. Ernesto Sánchez Sánchez y el Dr. Mario Sánchez Aguilar por compartir sus conocimientos y experiencia, por su asesoría siempre constructiva y, sobre todo, por su impulso para terminar este trabajo.

También quiero agradecer al Dr. Hugo Mejía y al Dr. Apolo Castañeda por participar como sinodales y por sus comentarios y sugerencias para mejorar este documento.

Dedicatoria

Dedico este logro a mi madre Luz Gabriela y a mi padre Francisco por su apoyo y amor incondicional. Gracias por brindarme todo lo necesario para yo poder enfocarme y concluir estos estudios de maestría. Este logro se lo dedo a ustedes. Gracias, mamá y papá.

Gracias a mi pareja Aleydis por siempre creer en mí, por impulsarme a diario, por tus consejos y por tu amor infinito. Agradezco que estuvieras conmigo a lo largo de esta etapa, tu ayuda ha sido fundamental para la finalización de este trabajo.

Una dedicatoria especial a mis hermanos Heidy y Edgar quienes siempre han estado presentes y apoyándome a lo largo de mis estudios.

Tabla de contenido

Índice de tablas

Introducción

El estudio sobre el aprendizaje y la enseñanza del Cálculo es un área de gran interés tanto para matemáticos como para los dedicados a la matemática educativa, en particular el estudio sobre cómo los estudiantes llegan a razonar con y acerca del concepto de límite es de suma importancia. Este concepto tiene una posición central dentro del cálculo y, por tanto, permea todo el análisis matemático, en particular, es un concepto básico para las teorías de aproximación, de la continuidad, y del cálculo diferencial e integral (Cornu, 1991). De acuerdo con Spivak (1996), Thomas (2006), Stewart (2012) y Larson (2006) entre todos los conceptos del cálculo, el de límite es uno de los más importantes, y a su vez puede llegar a ser el más difícil. Investigadores como Cottrill, et. al. (1996), Cornu (1991), Davis & Vinner (1986) y Williams (1991) del área de matemática educativa coinciden que el concepto de límite está entre las nociones matemáticas más difíciles de comprender para los estudiantes.

Sofronas et al. (2011) encuestó a 24 expertos reconocidos en el área del cálculo y encontró que el 71% coincide con la idea de que un estudiante debe considerar al concepto de límite como central en su aprendizaje y/o como una habilidad la cual es crítica para el desarrollo del razonamiento con los conceptos del cálculo. La NCTM (1989) dice que este concepto es uno de los temas más importantes que se estudia a lo largo de la educación media superior. Sin embargo, la habilidad para razonar con este concepto difícilmente se logra, por ejemplo, Cornu (1991) afirma que una de las más grandes dificultades de la enseñanza y aprendizaje del concepto de límite no solamente recae en su riqueza y complejidad, sino también en la extensión a la cual aspectos cognitivos no se pueden generar únicamente de la definición matemática. Cottrill et al. (1996) concuerda con que el límite presenta grandes dificultades para la mayoría de los estudiantes y agrega que muy pocos tienen éxito en llevar a cabo razonamientos que involucran dicho concepto Cornu (1991); Tall y Vinner (1981); y Davis y Vinner (1986) observan que los estudiantes tienen problemas con los límites debido a la naturaleza del concepto, con frecuencia confunden el límite con el valor de una función, no logran integrar la noción del infinito a sus razonamientos sobre límite, no suelen sacar consecuencias de la definición de límite para solucionar problemas, ni ven cómo esta formulación aparentemente estática se relaciona con su concepción dinámica.

Estas formulaciones se enfocan en lo que no pueden hacer los estudiantes con el concepto de límite y descuidan lo que sí pueden hacer. Como este concepto es muy complejo su aprendizaje debe pasar por fases que van capturando algunos rasgos pertinentes, mientras que otros tardan más en ser captados. En particular, Skemp (1976) distinguió dos tipos de comprensión: procedimental y relacional. En el caso del límite, una comprensión procedimental ocurre cuando los estudiantes son capaces de sacar límites de funciones mediante las técnicas apropiadas. En cambio, su comprensión relacional se manifestaría cuando pueden establecer relaciones entre la definición, las propiedades de los límites y las técnicas para obtenerlos. El primer tipo de comprensión se puede revelar en la manera en que los estudiantes razonan con problemas de cálculo de límites, mientras el segundo cuando a partir de la definición que ellos conocen derivan consecuencias. Un problema es saber en qué medida los estudiantes de un primer curso de cálculo razonan de manera procedimental y en qué medida de manera relacional. Para avanzar en este problema se formulan el siguiente objetivo y las preguntas de esta investigación.

Objetivo y preguntas de investigación

Con base en la importancia tanto matemática como educativa del concepto de límite el presente estudio tiene como objetivo caracterizar y categorizar los distintos tipos de razonamientos que exhiben estudiantes de ingeniería al enfrentarlos con tareas sobre el límite de una función. Específicamente se formulan las siguientes preguntas:

- ¿Qué tipos de razonamiento muestran estudiantes de ingeniería al calcular el límite de una función?
- ¿Qué tipos de razonamiento muestran los estudiantes de ingeniería para describir el límite de una función?
- ¿Qué relación hay entre el razonamiento aplicado por lo estudiantes de ingeniería cuando calculan el límite de una función y el razonamiento que utilizan para describirlo?

El objetivo del estudio es documentar los razonamientos de los estudiantes cuando calculan y describen el límite de una función. A partir de analizar y caracterizar los razonamientos de los estudiantes nos ponemos como meta mostrar, si es que existe, una relación entre la parte algebraica y la conceptual de límite de una función.

Capítulo 1. Antecedentes

Relevante investigación se ha hecho alrededor del concepto de límite, en este capítulo se muestra la revisión literaria llevada a cabo. La investigación se analizó desde dos perspectivas: la primera considera el desarrollo histórico del concepto de límite y, la segunda, los resultados de las investigaciones en torno a la comprensión del límite de una función, algunos problemas con el proceso de su enseñanza-aprendizaje, y de propuestas respecto a su enseñanza. De acuerdo con estas perspectivas dividimos los antecedentes en dos grandes secciones, la primera parte son notas con respecto al desarrollo histórico del concepto y la segunda concierne al aspecto educativo del concepto de límite.

Notas sobre el desarrollo histórico del concepto de límite

El concepto de límite es un producto de un extenso desarrollo histórico el cual duró un par de milenios, comenzando en la matemática griega y concluyendo en los inicios del siglo XIX. En el desarrollo de este concepto participaron grandes matemáticos cómo Wallis (1616-1703), Mengoli (1635-1686), Newton (1642-1727), Leibniz (1646-1716), Cauchy (1789-1857), Bolzano (1781-1848) y Weierstrass (1815-1897) entre otros. Este concepto ha evolucionado y se ha transformado a través de la historia, por lo que es importante conocer sus antecedentes. A lo largo de varios siglos, las ideas relacionadas con el límite eran confundidas con ideas vagas y a veces filosóficas acerca del infinito (infinitamente pequeño e infinitamente grande). Por otro lado, también el límite era confundido con intuiciones geométricas. Boyer (1959) describe el desarrollo de la evolución histórica del Cálculo en estos pasos: concepciones en la antigüedad, contribuciones medievales, un siglo de anticipación, Newton y Leibniz, el periodo de indecisión y la formulación rigurosa. Desde otra perspectiva, Kleiner (2001) citando a Hilbert indica que el desarrollo de la teoría matemática pasa por tres periodos: el ingenuo, el formal, y el crítico, estas etapas en el cálculo corresponden al siglo XVII, periodo ingenuo; siglo XVIII, período formal y siglo XIX, periodo crítico.

La historia de límite se dice que comienza de manera implícita con la civilización griega, más en ese periodo no se define esta noción de manera clara. Los griegos desarrollan el método de exhaución, atribuido a Eudoxo de Cnido (360 a.C.), el cual era utilizado para calcular áreas de círculos, volúmenes de esferas y cilindros entres otras figuras geométricas. Arquímedes (287-212 a.C.) apoyado en el método de exhaución demuestra la fórmula para calcular el área de un segmento parabólico. Kline (1992) señala que Arquímedes fue entre los de su época quien más se acercó a una noción de límite.

A lo largo del siglo XVII matemáticos como Kepler (1571-1630), Cavalieri (1598-1647) y Fermat (1601-1665) se interesaron por problemas de áreas y volúmenes de figuras geométricas, longitudes de curvas y tangentes a curvas.

- Kepler desarrolla un método llamado infinitésimos el cual consiste en descomponer cuerpos en áreas y volúmenes “infinitamente pequeños” los cuales se podían calcular con facilidad.
- Cavalieri crea el método de indivisibles para determinar áreas de figuras planas y volúmenes de cuerpos
- Fermat desarrolló un método para calcular extremos. Este método consiste en considerar que, en una cumbre o valle de una curva, cuando se tiene un E pequeño, los valores de la función $f(x) + f(x + E)$ están tan próximos que se puede tomar como iguales.

Si bien estos métodos no hablan explícitamente del límite, dieron progreso al desarrollo del concepto. Basados en las aportaciones de todos estos grandes personajes, Newton y Leibniz, desarrollan lo que hoy conocemos como el cálculo y a partir de métodos y algoritmos crean herramientas con las cuales se pueden resolver importantes problemas.

Bagni (2005) dice que Wallis introdujo en su libro de *Arihtmetica Infinitorum* un concepto aritmético de límite de una función: el número cuya diferencia con la función puede ser menor que cualquier cantidad dada. Kline (1972) comenta que esta formulación a pesar de ser vaga, de cierta manera tiene la idea correcta. Newton retoma los resultados de los trabajos de Wallis y los reformuló para su investigación de series infinitas de potencias de una variable, apoyado en los infinitesimales. Newton se apoya en argumentos basados en el movimiento y la dinámica de los cuerpos. En el libro *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, Newton introduce un nuevo concepto al cual lo llama ¨igualdad máxima¨, de acuerdo con Boyer (1959) este es un intento de Newton de definir un límite.

> Cantidades, y la razón de cantidades, que en cualquier intervalo finito de tiempo convergen continuamente a la igualdad, y que antes del final de dicho tiempo se aproximan una a la otra más que cualquier diferencia dada, se hacen finalmente iguales.

Leibniz, por su parte, contribuye al nacimiento del análisis funcional con su teoría de diferenciales. Por otro lado, hace un gran aporte a las matemáticas dando conceptos más claros y de notación y terminología, que perdura actualmente, la cual permite una lectura factible para la manipulación de problemas. Para Newton y Leibniz el límite era descrito como una cantidad a la cual una variable se aproxima, pero nunca la excede. Gracias a sus trabajos la noción de límite comienza a superar su etapa intuitiva.

Boyer (1959) señala que D´Alembert (1717-1783) crea la teoría de los límites, en el libro *L´Enciclopédie* (1766) en el cual escribe la siguiente definición de límite:

> Se dice que una cantidad es el límite de otra cantidad, cuando la segunda puede aproximarse más a la primera que cualquier otra cantidad dada, de manera que la diferencia entre una tal cantidad y su límite sea absolutamente inasignable. (Boyer, 1959, p.247)

En esta época aún el límite es referido a magnitudes o cantidades y no a funciones.

A comienzos del siglo XIX y finales del XVIII las obras de gran cantidad de matemáticos reflejaba la necesidad de construir la teoría de límites. Los matemáticos que se encargan de esto son Cauchy y Weierstrass. Bagni (2005) señala que de acuerdo con la visión tradicional Cauchy fue el primer matemático en hacer un estudio riguroso del cálculo. En el libro *Cours d´Analyse algébrique* (1821) Cauchy desarrolló muchos teoremas analíticos básicos con el mayor rigor posible y estableció el concepto de límite como la base de conceptos como continuidad, convergencia, derivadas e integrales. Cauchy propone la siguiente definición de límite:

> Cuando los sucesivos valores que toma una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que terminan por diferir de él en tan poco como queramos, este último valor se llama el límite de todos los demás. (Boyer, 1959, p.272)

Cornu (1991) afirma que Cauchy tenía una concepción dinámica del límite puesto que parece tener una idea del límite basada en el movimiento y utiliza la palabra “aproximan” la cual se relaciona frecuentemente con el movimiento. Este sentido moderno del límite fue desarrollado como un medio para poner el cálculo sobre una base matemática rigurosa.

El matemático Weierstrass contribuye a la aritmetización del análisis, dando una definición de número real y otra del concepto de límite. Weierstrass fue quien dio la definición moderna de límite que utilizamos actualmente. Kline (1972) señala que Weierstrass mejoró los trabajos anteriores de Bolzano, Abel y Cauchy, esto al evitar la intuición y evadiendo la frase, una variable se acerca a un límite, puesto que esto sugeriría ideas de tiempo y movimiento. Según Boester (2010), Weierstrass tendría una concepción estática del límite la cual es una idea del límite basada en una función en la cual se coordinan intervalos estáticos. Bagni (2005) resalta que esta definición incluye el uso de cuantificadores y símbolos como $\forall, \exists$ que permite una representación puramente simbólica del concepto. Cornu (1991) subraya que esta definición depende solamente de definiciones lógicas de conceptos numéricos; con esta se evita el sentido de movimiento y se enfoca en la idea de proximidad.

Después de un largo desarrollo histórico que se extiende a lo largo de dos milenos, gracias a los trabajos de estos grandes matemáticos, la noción de límite sirve como soporte a otros conceptos importantes del cálculo como la continuidad, la derivada y la integral.

Cornu (1991) identifica cuatro mayores obstáculos epistemológicos en la historia del concepto de límite y se pueden resumir de la siguiente manera:

1. El fracaso de ligar la geometría con los números: método de exhausión acreditado a Eudoxus de Cnidos (408-255 BC) a pesar de que este método parece extremadamente cercano a la noción de límite, no se puede afirman que los griegos poseían el concepto de limite moderno.

2. La noción de infinitamente grande e infinitamente pequeño: ¿es posible tener cantidades que sean tan pequeñas que sean casi cero y que, sin embargo, no tengan un tamaño "asignable" específico? ¿Qué sucede en el instante en que una de estas cantidades se convierte en cero? Tales problemas filosóficos han ocupado la atención de numerosos matemáticos.

3. El aspecto metafísico de la noción de límite: es uno de los principales obstáculos para los estudiantes de hoy. En una entrevista, un matemático dijo: "No es realmente matemática", porque las etapas iniciales del cálculo ya no dependen únicamente de la aritmética y el álgebra. Los estudiantes pueden tener dificultades para manejar el concepto de infinito, "No es riguroso, pero funciona"; "No existe", "es muy abstracto", "el método está bien, siempre que esté satisfecho con un valor aproximado". Este

obstáculo hace que la comprensión del concepto de límite sea extremadamente difícil, particularmente porque un límite no puede calcularse directamente usando métodos familiares de álgebra y aritmética.

4. ¿Se alcanza o no el límite?: es un debate que se ha tenido a lo largo de la historia del concepto. Los matemáticos como Robin (1967-1751) y Jurin (1685-1750), de acuerdo con Cornu (1991), dicen lo siguiente con respecto al límite.
    a. Robin: Le damos el nombre de magnitud máxima al límite al que una cantidad variable puede acercarse tanto como quisiéramos, pero al que no puede ser absolutamente igual.
    b. Jurin: La relación final entre dos cantidades es la relación alcanzada en el instante en que las cantidades se cancelan.

Cornu menciona que estos pueden no ser los únicos obstáculos relacionados con el límite. Por otro lado, agrega que al construir estrategias pedagógicas para enseñar este concepto se deben tomar en cuenta los obstáculos y se le deberá de enfrentar a los estudiantes a ellos para que logren sobrepasarlos.

Esta sección nos pinta un camino de cómo fue evolucionando el concepto del límite a lo largo de la historia. Podemos observar que no fue nada sencillo para los matemáticos poder llegar a la noción de límite que usamos actualmente, entonces es de esperar, y así lo constata cualquier profesor, que la comprensión de este concepto sea difícil para los estudiantes.

Investigación enfocada al concepto de límite

Por décadas ha despertado gran interés de muchos investigadores en educación matemática saber cómo hacer para mejorar la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite. Existen distintas maneras de categorizar las investigaciones realizadas al respecto, nosotros tomamos la idea de Swinyard y Lockwood (2007) y dividimos la literatura revisada en dos grandes categorías, informal y formal. La primera explora un acercamiento informal al límite y la segunda un enfoque formal. Swinyard y Lockwood (2007) definen la primera como investigación que no tiene, como enfoque, las formas en que los estudiantes razonan sobre la definición formal de límite. Por otro lado, la formal es la que tienen como objetivo comprender como razonan los estudiantes acerca de la definición actual (épsilon-delta) de límite.

Informal. Esta primera categoría de investigación la partiremos en dos partes, estas correspondientes a dos tipos de estudio que existen con respecto a este concepto. Por un lado, los estudios de Davis y Vinner (1986), Williams (1991) y Cotrill et. al (1996) han puesto atención en comprender las falsas concepciones de los estudiantes respecto al límite, por otro lado, las investigaciones Tall y Vinner (1981), Williams (1991) y Cornu (1991) se enfocan en los modelos del límite de los estudiantes.

Falsas concepciones. Se pueden encontrar en las investigaciones hechas por Williams (1991) y Cotrill et al. (1996), las siguientes falsas concepciones relacionadas con el límite:

- si una sucesión o función puede alcanzar su límite y
- si un límite es un proceso dinámico o uno estático.

Estas concepciones dan a lugar a concepciones de límite incompletas o alternativas según estos autores. Williams menciona que estas concepciones alternativas de límite se relacionan estrechamente con la visión de límite sostenida por la comunidad matemática antes de la definición épsilon-delta. Williams (1991) y Cotrill et al. (1996) coinciden con la idea de que pocos estudiantes logran una comprensión de esta importante idea matemática.

Davis y Vinner (1986) sugieren que existen concepciones falsas las cuales no se pueden evitar cuando se enfrenta uno con la noción de límite. Por un lado, la influencia del lenguaje en el cual palabras cómo límite tienen una serie de connotaciones en la vida cotidiana y después es introducida a las matemáticas. Por ejemplo, dicen estos autores que cuando las frases como ¨tiende a¨ o ¨se acerca¨ se utilizan con relación a una sucesión aproximándose a su límite, estas pueden llegar a implicar que los términos no pueden ser iguales al límite. Este tipo de connotaciones de la vida diaria puede influir en la comprensión de esta noción de límite. Por otro lado, agregan, otra fuente de falsas concepciones es la gran complejidad de esta idea donde es probable que ejemplos específicos de límites dominen su aprendizaje. A menudo el límite es introducido con ejemplos que crean conflictos con una representación correcta del concepto. Davis y Vinner ejemplifican esto con la sucesión $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ cuyo límite se expresa así: $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$, conviene observar que cualquier término de esta sucesión es diferente de cero. Si se introduce el tema de límites sólo utilizando ejemplos de este tipo puede llevar a los estudiantes a no tener una representación completa del concepto matemático de límite.

Modelos del límite. Tall y Vinner (1981) dicen que gran cantidad de conceptos matemáticos a los que nos enfrentamos no los hemos definido formalmente, produciendo una variedad de imágenes mentales personales cuando los usamos. Estos investigadores definen los términos imagen y definición conceptual en matemáticas los cuales son utilizados para analizar el fenómeno de las imágenes mentales producidas en los estudiantes al enfrentarlos con los conceptos de límite y continuidad. El termino imagen conceptual lo utilizan para describir la estructura cognitiva asociada con este concepto, que incluye todas las imágenes mentales ligadas con propiedades y procesos del concepto. La definición conceptual es el conjunto de palabras utilizadas para especificar un concepto, puede ser la reconstrucción de la definición por parte de un estudiante esta puede diferir con la definición formal del concepto.

Tall y Vinner indican que los límites de funciones de la forma $\lim_{x \to a} f(x) = c$ por lo general son presentados a los estudiantes de manera intuitiva, por medio de una explicación informal, y posteriormente se les presenta una definición más formal. A menudo el proceso de límite es introducido inicialmente con el tema de diferenciación, o con ejemplos de velocidad instantánea o considerado como un proceso dinámico donde x se acerca a a, causando que $f(x)$ se acerque a c. Estos autores conjeturaron que el acercamiento intuitivo previo a la definición de límite, con frecuencia es tan fuerte que su imagen conceptual es la dinámica con una cierta noción de movimiento. En su investigación aplican un cuestionario a 70 estudiantes universitarios, uno de los problemas es resolver el límite $\lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x-1}$ y otro es escribir la definición de $\lim_{x \to a} f(x) = c$. Documentan que la definición a la cual más estudiantes recurrieron, con casi la mitad de los estudiantes, es la dinámica. A pesar de que únicamente 31 de los estudiantes pudo dar una definición correcta del límite, gran parte del grupo pudo hacer un intento de resolver el límite mencionado anteriormente.

Cornu (1991) afirma que el concepto matemático de límite es una noción particularmente difícil, como muchas que se enseñan y que se requieren en matemáticas avanzadas. Según Cornu, una de las más grandes dificultades de la enseñanza-aprendizaje de este concepto no solamente radica en su riqueza y complejidad, sino también en la medida en que los aspectos cognitivos no pueden generarse puramente a partir de la definición matemática. Este investigador estudia aspectos didácticos del concepto de límite: conceptos ligados a esta noción, obstáculos a los cuales se enfrentan los estudiantes al aprender sobre este concepto, y discute varias estrategias para enseñar el concepto de límite. En este caso nos enfocaremos en la primera sección del trabajo de Cornu en donde habla sobre los distintos modelos mentales y concepciones espontáneas de los estudiantes. Cornu (1991) define concepción espontánea como las ideas, intuiciones, imágenes, conocimientos, que vienen de la experiencia diaria, que ocurren antes de la enseñanza formal. Agrega que estas ideas espontáneas se mezclan con el nuevo conocimiento adquirido a través de la enseñanza, y estas se modifican y adaptan a las concepciones personales de los estudiantes. En el caso del concepto de límite se puede observar este fenómeno, puesto que las palabras ¨tiende a¨ y ¨límite¨ ya tienen un significado para los estudiantes antes de estudiar este concepto. Según Cornu distintas investigaciones han revelado que la expresión ¨tiende a¨ puede llegar a producir distintos significados: aproximarse (sin alcanzarlo), aproximarse (apenas alcanzándolo). Cornu (1983) agrega que la palabra límite puede llegar a producir distintos significados como: que es alcanzable; que es imposible de alcanzar; un punto al que uno se acerca, sin llegar a él; un punto al que se acerca y alcanza.

Cornu (1991) cita a Aline Robert (1982) quien estudió cómo perciben el límite de una sucesión 1380 estudiantes de distintos niveles educativos. Robert pregunta a los estudiantes cómo le explicarían la noción se sucesión convergente a un estudiante de 14 o 15 años esto con el objetivo que esto les provocara utilizar su imagen conceptual y no la definición formal. Los modelos de límite de los estudiantes son divididos en cuatro categorías:

- Monotónico y dinámico-monotónico (12%): una sucesión convergente es una sucesión creciente que esta acotada superiormente (o decreciente y acotada inferiormente); una sucesión convergente es una sucesión creciente (o decreciente) la cual se aproxima a un límite.
- Dinámico (35%): U_n tiende a l; U_n se aproxima a l; la distancia entre U_n y l es cada vez más pequeña.

- Estático (13%): Los U_n están en un intervalo cercano a l; los U_n están agrupados alrededor de l; Los elementos de la sucesión están en una vecindad de l.
- Mixtos (14%): una mezcla de los modelos anteriores.

Cornu (1991) estudiando a Robert observa que no hay un único modelo en la mente de los estudiantes al enfrentarlos con el concepto de límite. Dice que es evidente que los estudiantes tienen una variedad de imágenes conceptuales acerca del límite. Por otro lado, observa que inicialmente la enseñanza enfatiza en el proceso de aproximarse a un límite, en lugar del concepto de límite en sí. Cornu señala que asociar el concepto con el proceso, contiene gran cantidad de factores que hacen que los estudiantes entren en un conflicto con la definición formal.

Williams (1991) documenta acerca de cómo 10 estudiantes universitarios comprenden el concepto de límite y los distintos factores que afectan su comprensión. El experimento se lleva a cabo en 5 sesiones en un periodo de 7 semanas. En estas sesiones se pretende identificar a los participantes con algún modelo del límite, para esto se les enfrenta con distintas descripciones del límite con el objetivo de que expliquen si hay algo mal con alguna de ellas y, para finalizar el experimento, se les pregunta si su modelo del límite se ha modificado o no, a lo largo de las sesiones. Entre sus participantes logra identificar seis modelos del límite, los primeros dos son los más comunes. Nombra los 6 modelos como se indica en seguida: dinámico-teórico, inalcanzable, formal, frontera, aproximación y dinámico-práctico. Williams dice que con frecuencia los estudiantes llegan a describir el límite en términos de dos o más de estos modelos.

- *Inalcanzable*. Nueve de los diez participantes en el cuestionario inicial indicaron que era verdad que el límite era un punto o número al cual una función se acerca, pero nunca alcanza. A menudo los participantes utilizaban frases del tipo ¨se acerca, pero nunca llega¨.
- *Dinámico-teórico*. Siete de los participantes indicaron en el cuestionario inicial que el límite describe cómo una función se mueve mientras x tiende a un cierto punto. Constantemente los estudiantes recurren a frases con un sentido dinámico como ¨un punto al cual la función se acerca mientras x aumenta¨ o ¨el límite de $f(x)$ cuando x

se aproxima a a significa que si insertas valores x cada vez más cercanos a a, finalmente obtendrás el límite L mientras x se aproxima a a¨. Williams interpreta las palabras aproximarse y acercarse de las siguientes maneras: descripciones de un proceso de evaluar la función en distintos números, los cuales cada vez se van acercando más a a, o como el proceso de imaginarse los puntos moviéndose en una gráfica cada vez más y más próxima al punto límite.

Williams comenta que después de las cinco sesiones no logró un verdadero cambio en el modelo de límite de los estudiantes. A pesar de que los investigadores intentaron propiciar un cambio cognitivo a través de distintos problemas lo único que lograron fue producir un conflicto cognitivo en los participantes, pero de ahí no pasó. Williams notó que en general los alumnos consideran la facilidad y practicidad de un modelo más importante que el aspecto matemático formal. Puesto que los modelos les permiten lidiar con problemas en el salón de clase y exámenes para muchos alumnos creen que les es suficiente. Además, nota que en varios estudiantes el conocimiento procedimental (sustituir valores, factorizar y cancelar, conjugados, aplicar regla de L´Hôpital) está ampliamente separado de su conocimiento conceptual.

Formal. Otra rama de la investigación del concepto del límite es la que tiene como enfoque principal comprender como los estudiantes razonan con respecto a la definición formal del límite. Los estudios de Cottrill et al. (1996) y Swinyard y Larsen (2012) prestan atención en cómo comprenden los estudiantes, y en cómo ayudarles a avanzar en la comprensión de este concepto.

Cottrill et al. (1996) intentan contribuir al conocimiento de cómo el concepto de límite puede ser aprendido a través de lo que llaman una descomposición genética del concepto del límite. Esta descomposición está formada por 6 pasos y su intención es que el estudiante construya el concepto de límite:

1. La acción de evaluar la función f en unos cuantos puntos, cada punto sucesivamente más cercano a ´a´ que el punto anterior.

2. Interiorizar la acción del paso 1 a un solo proceso en el cual $f(x)$ se aproxima a L mientras x se aproxima a ´a´.

3. Encapsular el proceso del paso 2 a modo que, por ejemplo, cuando se habla sobre combinación de propiedades de los límites, el proceso del límite se convierte en un objeto en el cual acciones se pueden aplicar.

4. Reconstruir el proceso del paso 2 en términos de intervalos y desigualdades. Esto introduciendo estimados numéricos de proximidad, en símbolos, $0 < |x - a| < \delta$ y $|f(x) - L| < \varepsilon$.

5. Aplicar el esquema de cuantificación para conectar el proceso reconstruido en el paso anterior para así obtener la definición formal de límite.

6. Una completa concepción $\varepsilon - \delta$ aplicada a situaciones específicas.

Estos investigadores creen que una concepción dinámica del límite puede ayudar a desarrollar la comprensión formal de este concepto. Consideran que el concepto formal del límite no es solo estático, sino un complejo esquema con aspectos dinámicos importantes y que requiere que los estudiantes tengan una concepción solida de cuantificación.

Swinyard C y Larsen S. (2012) se proponen obtener conocimientos acerca de la definición formal del límite refinando la descomposición genética del límite hecha por Cottrill et al. (1996). En su experimento se enfrentan con dos grandes retos:

- los estudiantes recurren a una perspectiva de x primero y estaban renuentes a una perspectiva de y primero,
- los estudiantes entran en conflicto al operacionalizar que significa estar infinitamente cerca de un punto.

Basados en su experimento modifican los 3 últimos pasos del esquema de Cottrill para resolver estos conflictos a los cuales se enfrentaron. Estos son las modificaciones que hicieron Swinyard y Larsen:

4. Construir un proceso mental en el cual uno pruebe si un candidato es un límite por medio de:
    a. Escoger una distancia de cercanía al valor del límite L en el eje y;
    b. Determinando si hay un intervalo alrededor del punto en el cual esta uno tomando el límite (por ejemplo, a) para el cual cada valor de la función cercano a este punto este lo suficientemente cerca de L.

5. Asociando la existencia del límite con la habilidad de poder continuar este proceso indefinidamente (teóricamente) sin dejar de producir el intervalo deseado alrededor de a, o equivalentemente con la observación de que no hay punto en el cual sea imposible encontrar dicho intervalo.
6. Encapsular este proceso por medio del concepto de arbitrariamente cercano. Esto incluye realizar que uno siempre puede establecer el proceso descrito en el paso 4 para cualquier distancia de cercanía probando que funciona para cualquier distancia arbitraria de cercanía.

La intención del paso 4 es para pasar de una perspectiva eje x primero a una de eje y primero. El paso 5 lo que pretende es enfatizar la acción mental de asociar el proceso del paso 4 con el criterio de validación de un candidato al límite. El último paso presenta una encapsulación de la validación de este proceso.

Este capítulo mostro una visión general tanto del desarrollo histórico del concepto de límite y cómo ha evolucionado la investigación educativa relacionada al límite. En el cual se expone evidencia de la complejidad de su aprendizaje, esto con la intención de observar desde distintos puntos de vista los problemas a los cuales se enfrentan estudiantes de cálculo al encontrarse con el concepto de límite.

Capítulo 2. Marco conceptual

En este capítulo se desarrolla el marco conceptual cuya finalidad es proporcionar los principales conceptos que pueden permitir encuadrar nuestra investigación. El capítulo se desarrollará en tres apartados, el primero está relacionado con el concepto matemático central de nuestro estudio: el concepto de límite de una función. El segundo apartado expone distintas técnicas, comunes en un primer curso de cálculo, para calcular distintos límites de funciones. El tercero, muestra los conceptos relacionados con la educación matemática.

Límite de una función

En los siguientes párrafos se presenta tanto una definición informal de límite, la cual es central en nuestro trabajo, como la definición formal. A lo largo de esta tesis cuando se mencione a la definición informal de límite nos referimos a la que no involucra los cuantificadores épsilon-delta. Se muestra la formal con el objetivo de contrastarla con la informal y argumentar por qué esta noción informal del límite es un buen punto de partida para estudiantes que recién se están enfrentando a este concepto.

Antes de pasar a las definiciones conviene destacar las siguientes observaciones sobre el concepto de límite:

- Su inclusión en las matemáticas marca la diferencia entre matemáticas básicas (sobre todo álgebra, geometría y trigonometría) con matemáticas intermedias (cálculo diferencial e integral) (Thomas, 2006).
- Los procedimientos para encontrar y aplicar límites requieren de métodos variados e indirectos, muy diferentes a los métodos y algoritmos aritméticos, algebraicos y trigonométricos (Cornu, 1991)
- El concepto de límite implica el manejo de procesos infinitos cuyas propiedades son contrarias a la intuición (Fischbein, 1977)

Por otro lado, Larson (2006) enfatiza que existe una diferencia fundamental entre las matemáticas previas al cálculo (por ejemplo, el algebra y la geometría) y el cálculo, entre las diferencias destaca el aspecto dinámico de este último; el concepto de límite se liga estrechamente con este aspecto dinámico. En efecto, la diferencia -dice Larson- recae en que las primeras [áreas de la matemática] son estáticas y el cálculo es dinámico. Para ejemplificar algunas de las diferencias presenta una serie de situaciones:

- Las matemáticas previas al cálculo permiten analizar un objeto que se mueve con velocidad constante. Sin embargo, para analizar la velocidad de un objeto sometido a aceleración es necesario recurrir al cálculo.
- Las matemáticas previas al cálculo permiten analizar la pendiente de una recta, pero para analizar la pendiente de una curva es necesario el cálculo.
- Las matemáticas previas al cálculo permiten analizar una recta tangente a un círculo, pero para analizar una recta tangente a una curva en general es necesario el cálculo.
- Las matemáticas previas al cálculo permiten analizar el área de un rectángulo, pero para analizar el área bajo una curva cualquiera es necesario el cálculo. (Larson, 2006, p.42)

Por lo anterior y por múltiples experiencias hay consenso en que el concepto matemático de límite es una noción particularmente difícil, típica de la clase de pensamiento requerido en matemáticas avanzadas. Ocupa una posición central en las matemáticas –como dice Cornu (1991)– e impregna todo el análisis matemático, como fundamento de la teoría de la aproximación, de la continuidad y del cálculo diferencial e integral.

Los límites se presentan en distintos contextos matemáticos, incluyendo el límite de una sucesión, de una serie, de una función, en la noción de continuidad, de derivación e integración (Tall, 1992). Existen límites tanto discretos como continuos, por ejemplo, el límite discreto de una sucesión a_n cuando $n \to \infty$ y el límite continuo de una función $f(x)$ cuando $x \to a$. El enfoque de nuestro estudio recae en el segundo, es decir, en el límite de una función ya sea cuando $x \to a$ o $x \to \infty$. A continuación, un par de ejemplos de la notación que se utiliza para indicar límites de funciones que deben determinarse:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = ,$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\cos(x)}{x} = .$$

Este concepto tiene una definición informal (intuitiva, dinámica) y una formal (épsilon-delta, estática, rigurosa). La definición matemática de límite ha pasado por varios refinamientos a lo largo de la historia (Kleiner, 2001). A continuación, se muestra la definición formal épsilon-delta y después se muestra la informal, ambas obtenidas del libro de cálculo de Stewart (2012).

Concepto formal del límite. La definición formal define al límite como sigue:

> Sea f definida sobre algún intervalo abierto que contiene el número a, excepto posiblemente en a misma. Entonces, decimos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es L, y lo expresamos como
>
> $$\lim_{x \to a} f(x) = L$$
>
> si para cada número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$. (Stewart, 2012, pg.110)

Usualmente los estudiantes interpretan esta definición como la coordinación de dos intervalos (Boester, 2010). Esta concepción coincide con la definición formal ideada por Cauchy y Weierstrass (Kleiner, 2001).

Concepto informal de límite. Stewart define al límite de manera informal como se muestra a continuación:

> Supongamos que $f(x)$ está definida cuando x está cerca del número a (esto significa que f está definida en algún intervalo abierto que contiene a a, excepto, posiblemente en a misma). Entonces escribimos
>
> $$\lim_{x \to a} f(x) = L$$
>
> y decimos que “el límite de $f(x)$, cuando x tienda a a, es igual a L” si podemos hacer que los valores de $f(x)$ estén arbitrariamente cercanos a L (tan cercanos a L como queramos), tomando valores suficientemente cerca de a, pero no iguales a a. (Stewart, 2012, p.87)

Thomas (2006) interpreta la definición informal de la siguiente manera ¨en esencia, la definición afirma que los valores de $f(x)$ se encuentran cerca del número L siempre que x esté cerca de a (por cualesquiera de los dos lados de a¨ (p.77). Al calcular $\lim_{x \to a} f(x)$ lo que interesa es lo que sucede con $f(x)$ para valores de x cercanos a a y no lo que sucede en a mismo. En otras palabras, no importa si existe o no $f(a)$, el límite tiene que ver con los valores de $f(x)$ para x cercano a a.

Para el caso cuando $x \to \infty$, Stewart lo define de la siguiente manera:

> Sea f una función definida sobre algún intervalo (a, ∞). Entonces
>
> $$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$
>
> significa que los valores de $f(x)$ pueden aproximarse arbitrariamente a L tanto como desee, eligiendo a x suficientemente grande. (Stewart, 2012, pg.130)

A este par de definiciones se les considera informales puesto que se utilizan expresiones como *arbitrariamente cercanos o suficientemente cerca* las cuales son imprecisas en el sentido de que estas frases dependen del contexto; para un ciclista que pedalea a lo largo de una carretera, cerca significa algunos metros. Para una automovilista que viaja sobre la misma carretera, cerca significa unos kilómetros. En cálculo los estudiantes deben desarrollar un sentido de aproximación como se concibe en la matemática y dicha definición informal sirve para tal propósito. Según Boester (2010) la concepción dinámica del límite debe preceder a la concepción estática. Lakoff y Núñez (2001) creen que la concepción dinámica es la concepción más natural y debería introducirse como tal, utilizando la metáfora del "acercamiento". Boester (2010) dice que una vez que los estudiantes están familiarizados con la concepción dinámica, se les debe presentar la concepción estática para motivar la definición formal. Esto debe ir acompañado de algún tipo de motivación para ir más allá de la concepción dinámica. Cottrill et al. (1996) consideran que el concepto formal del límite no es solo estático, sino un complejo esquema con aspectos dinámicos importantes. En resumen, la concepción dinámica enfatiza el movimiento al describir los límites, mientras que la concepción estática carece de movimiento y, en cambio, enfatiza la cercanía. En la definición informal, el objetivo generalmente es encontrar un candidato para el límite. La definición formal, por otro lado, generalmente aborda cómo se podría validar un candidato elegido.

Técnicas para calcular límites

En este segundo apartado se exponen las distintas técnicas algebraicas con las que se pueden calcular los límites del cuestionario implementado. Las técnicas son: *factorización, racionalización, términos de mayor grado del numerador y denominador, desigualdades y regla de L´Hôpital*. En este momento se desarrollarán estas técnicas basadas en libros de cálculo de autores como Stewart (2012), Larson (2006) y Thomas (2006).

Factorización. La técnica de factorización a la que nos referimos consiste en que si el denominador es igual a cero en a entonces, por medio de un proceso algebraico, se deben eliminar factores comunes en el numerador y el denominador de tal forma que el denominador de la fracción reducida ya no sea igual a cero en a. Si esto ocurre, es posible calcular el límite por medio de una sustitución en la fracción simplificada. A continuación, un ejemplo tomado del libro de Stewart para ejemplificar esta técnica:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1}(x + 1) = 1 + 1 = 2.$$

Racionalización. Cuando hablamos de racionalización nos basamos en la técnica que consiste en crear un factor tal que, al multiplicarlo por ambos, numerador y denominador, permita eliminar una indeterminación que se produce al intentar sustituir directamente en la función el valor al cual x tiende. Eliminando la indeterminación, se podrá encontrar el valor del límite por medio de una sustitución. Se presenta un ejemplo para mostrar esta técnica:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}\times\frac{\sqrt{x^2+100}+10}{\sqrt{x^2+100}+10}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+100-100}{x^2(\sqrt{x^2+100}+10)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+100}+10)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+100}+10}=\frac{1}{\sqrt{0+100}+10}=\frac{1}{20}$$

Cuando una técnica de factorización o racionalización permite determinar un límite, se dice que la función original dada por un cociente de funciones tiene una singularidad removible.

Términos de mayor grado del numerador y denominador. Cuando se enfrenta a un límite en el infinito de función racional

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a(x)}{b(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_n x^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0},$$

se puede caer en los siguientes tres casos: el grado del numerador es menor que el del denominador; los grados del numerador y denominador son iguales; el grado del numerador es mayor que el del denominador. Para encontrar el resultado de este tipo de límite se debe prestar atención al cociente entre los términos de mayor grado del numerador y denominador. Para el primer caso, si el grado del numerador es menor que el del denominador ($m<n$), hay una asíntota horizontal en $y=0$ y el límite es 0. Si el grado del numerador y denominador son iguales ($m=n$), hay una asíntota horizontal nuevamente pero ahora en $y=\frac{a_m}{b_n}$, y el límite es igual al cociente de los coeficientes a_m y b_n. En el último caso, si el grado del numerador es una unidad mayor que la del denominador ($m>n$), la función tendrá asíntota oblicua y, por lo tanto, la función tenderá a más infinito o menos infinito.

Desigualdades. Al hablar de desigualdades nos estamos refiriendo al siguiente método que Stewart (2012) define por medio de un teorema, el cual llama, el *teorema de la compresión*, también conocido como teorema del sándwich por Thomas (2006) o teorema del emparedado por Larson (2006). Esta técnica consiste en encontrar un par de funciones con las cuales puedas encerrar a la función a la cual deseas encontrar el límite. El teorema Stewart lo define como sigue

> Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ cuando x tiende a a (excepto posiblemente en a) y $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$ entonces $\lim_{x \to a} g(x) = L$. (Stewart, 2012, pg.105)

Con el objetivo de ilustrar esta técnica muestra el siguiente límite

$$\lim_{x \to 0} x^2 sen\frac{1}{x},$$

como el seno está entre -1 y 1 podemos afirmar

$$-1 \leq sen\frac{1}{x} \leq 1$$

$$-x^2 \leq x^2 sen\frac{1}{x} \leq x^2.$$

Ahora tomando el límite cuando x tiende a cero

$$\lim_{x \to 0}(-x^2) \leq \lim_{x \to 0} x^2 sen\frac{1}{x} \leq \lim_{x \to 0} x^2$$

$$0 \leq \lim_{x \to 0} x^2 sen\frac{1}{x} \leq 0.$$

Por lo tanto

$$\lim_{x \to 0} x^2 sen\frac{1}{x} = 0.$$

Regla de L´Hôpital. Esta regla es de utilidad cuando al calcular un límite se obtiene una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. Stewart la define la regla de L´Hôpital como sigue:

> Suponga que f y g son derivables y $g'(x) \neq 0$ sobre un intervalo abierto I que contiene a a (excepto posiblemente en a). Suponga que
>
> $$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \ y \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

ó

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \ y \ \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$$

(En otras palabras, tenemos una forma indeterminada de tipo $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$). Entonces $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ si existe el límite del lado derecho (o es ∞ o $-\infty$). (Stewart, 2012, pg.302)

A continuación, un ejemplo que ilustre la utilidad de la regla para el primer tipo de indeterminación $(\frac{0}{0})$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(\ln(x))'}{(x-1)'} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x} = 1.$$

Conceptos didácticos importantes

En este apartado se exhiben algunos conceptos relacionados con la educación matemática en los cuales nos apoyamos para esta investigación. Los principales conceptos que se utilizarán a lo largo de la tesis son: *razonamiento matemático* y *producción de sentido*. Al mismo tiempo es conveniente agregar los términos razonamiento *dinámico* y *covaracional*, estos sirven para describir cómo los estudiantes razonan cuando calculan e interpretan situaciones relacionadas con el concepto de límite de una función.

Razonamiento matemático y producción de sentido. El término razonamiento generalmente se define como el proceso de generar conclusiones con base en evidencia o suposiciones declaradas. En el documento NCTM (2009) los autores se refieren más precisamente al razonamiento matemático y hacen las siguientes afirmaciones con respecto a este. Por un lado, comentan que el razonamiento matemático comúnmente es entendido como razonamiento formal, en el cual las conclusiones son deducidas lógicamente de suposiciones y definiciones. Sin embargo, agregan que el razonamiento matemático puede tomar distintas formas, desde explicaciones y justificaciones informales hasta una deducción formal, como también observaciones inductivas. Para concluir hacen las siguientes observaciones: usualmente el razonamiento comienza con exploraciones, conjeturas en una variedad de niveles, comienzos falsos y explicaciones parciales antes de obtener un resultado.

También, en dicho documento se define la producción de sentido, como el proceso por el cual se llega a tener la sensación de comprensión de una situación, contexto o concepto al conectarlo con un conocimiento previo que ya tiene el sujeto. Además, afirman que el razonamiento y la producción de sentido están entrelazados en la práctica, van en un continuo desde observaciones informales hasta deducciones formales. La figura 1 ilustra la manera en que se relaciona el razonamiento y la producción de sentido.

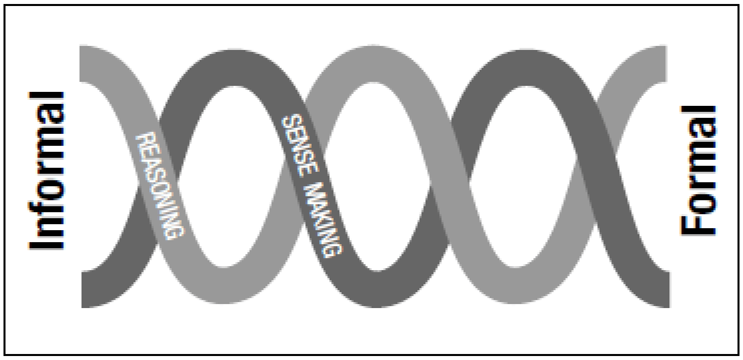


Figura 1: Relación entre razonamiento y producción de sentido (NCTM, 2009, p.3)

Por otro lado, en dicho documento los autores afirman que el razonamiento y la producción de sentido son los pilares de las matemáticas y que, si los programas de matemáticas se enfocaran en ellos, esto permitiría un desarrollo exitoso en el conocimiento del estudiante tanto del contenido como de los procesos, lo cual les permitiría continuar sus estudios en matemáticas de manera exitosa.

Cuando se utilicen los términos razonamiento y producción de sentido en esta tesis nos estaremos basando en lo descrito en documento de la NCTM donde abordan los términos razonamiento matemático y la producción de sentido. El razonamiento lo entendemos como un proceso donde existen explicaciones y justificaciones para obtener un resultado, este puede incluir comienzos falsos, exploraciones y suposiciones de distintos niveles. La producción de sentido la entendemos como el proceso por el cual se tiene la impresión de comprensión de una situación, contexto o concepto al conectarlo con un conocimiento previo. Estos conceptos son clave en nuestro estudio puesto que se pretende analizar el razonamiento de los estudiantes relacionado con el concepto de límite de una función y evocado por las preguntas del cuestionario aplicado. Por lo mencionado, se estará haciendo uso de las expresiones *razonamiento* y *producción de sentido* constantemente a lo largo de los siguientes capítulos.

Razonamiento dinámico. Boester (2010) usa la expresión *razonamiento dinámico* para referirse a una idea de límite basada en el movimiento, frecuentemente expresada en frases que utilizan la palabra ´acercarse a´ (o palabras similares que denotan movimiento). Esta fue también la primera forma en que los límites fueron concebidos históricamente por Newton y Leibniz (Kleiner, 2001).

Este terminó es de utilidad para la describir como los estudiantes razonan con este concepto. Si en la respuesta de un estudiante se muestra que hay un énfasis en las salidas $f(x)$ que se aproximan a un valor L a medida que las entradas x se aproximan a un valor a, a esto lo consideramos como un razonamiento dinámico del límite. Desde nuestro punto de vista, ver el límite como un proceso dinámico es un buen punto de partida para darle sentido al concepto. Esto coincide con Cottrill et al. (1996) quienes argumentan que una comprensión formal del concepto del límite se construye a través de un proceso coordinado del límite informal.

Razonamiento covariacional. El termino razonamiento covariacional nos permite describir un tipo de respuesta que aparece en el cuestionario. Utilizamos la noción de covariación en el sentido de Carlson et al. (2002) quienes lo definen como la actividad cognitiva que involucra la coordinación de dos cantidades que varían mientras se presta atención a la manera en que éstas cambian en relación una de la otra.

Carlson et al. (2010) crean un marco con cinco niveles los cuales describen tipos de razonamiento covariacional involucrados en la interpretación y representación de funciones: uno, la coordinación de la dependencia de una variable con respecto de otra variable; dos, la coordinación de la dirección de cambio de una variable con los cambios de otra variable; tres, coordinar el cambio de una variable con respecto a los cambios de otra variable; cuatro, coordinar la tasa promedio de cambio de una función con un incremento uniforme de cambio en la variable de entrada; cinco, coordinar la tasa instantánea de cambio de una función con cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función. El concepto de límite requiere de los tres primeros niveles de razonamiento covariacional; en efecto, se requiere coordinar la dependencia de la variable dependiente con la independiente y coordinar la dirección y el cambio de una variable con respecto a la otra.

Recapitulando en este capítulo se expusieron los conceptos que permiten encuadrar este estudio: la definición formal e informal de límite de una función; distintas técnicas para el cálculo de límites de funciones; términos pertenecientes a la matemática educativa que nos permiten analizar el razonamiento de los estudiantes al enfrentarlos con el límite de una función.

Capítulo 3. Método

La presente investigación tiene como objetivo explorar el razonamiento de los estudiantes con y acerca del concepto de límite. Se ha elaborado y aplicado una secuencia de situaciones de respuesta abierta como instrumento para recoger datos sobre nuestro objeto de estudio. De ahora en adelante para referirnos a la secuencia de situaciones usaremos los términos secuencia o cuestionario. En la medida en que los datos que se obtienen mediante dicho procedimiento son textos escritos de los estudiantes en los que ellos tratan de comunicar un significado, por lo que el estudio se ubica dentro de los métodos cualitativos (Denzin y Lincoln, 1994). De manera más precisa adoptamos un enfoque de estudio de caso (Stake, 1994), donde el caso es el conjunto de respuestas del cuestionario de un grupo particular de estudiantes en un contexto específico. El hecho de concentrarse en el caso permite analizar las respuestas con detalle y buscar en ellos pautas que permitan reconstruir partes de los razonamientos de los estudiantes, así como percibir sus aciertos y dificultades en los procedimientos y nociones relacionadas con el concepto de límite y evocados por las preguntas del cuestionario. El análisis que se llevará a cabo está inspirado en los procedimientos de codificación y categorización que se recomiendan en los primeros pasos de estudios de Teoría Fundamentada (Birks y Mills, 2015), pero cabe aclarar que el objetivo del presente estudio no es producir una teoría como lo recomienda esta metodología general, sobre todo porque hacerlo requiere procedimientos que consumen periodos de tiempo más largos que los que es adecuado dedicar a una tesis de maestría; en su lugar, nos limitamos a hacer descripciones de la manera en que los estudiantes resuelven los problemas y a formular algunas hipótesis e interpretaciones de los razonamientos que subyacen a dichas descripciones.

A continuación, se informa sobre las características de los participantes, las condiciones en las que se aplicó el cuestionario, las ideas que motivaron la elección de los problemas del cuestionario, así como los tipos de respuesta que se esperan. Por otro lado, se mencionan los métodos utilizados para la organización y análisis de los datos.

Características de la población participante

La investigación se realizó con 21 estudiantes universitarios (18 a 21 años) pertenecientes al primer semestre de la carrera de ingeniería en una universidad privada ubicada en la Ciudad de México, quienes cursaban la asignatura de Cálculo Diferencial en el 2019. En general el curso estaba enfocado al estudio de funciones, límites y continuidad, y derivadas (ver Anexo B). Recientemente los participantes habían estudiado el concepto de límite, así como distintas técnicas para calcularlos. Habían estado expuestos tanto a límites finitos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ como infinitos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ y a límites en el infinito $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = L$ o $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

Aplicación del cuestionario

Se aplicó un cuestionario conformado por diez problemas el día 8 de noviembre del 2019 dentro de uno de los salones de la facultad de ingeniería de dicha universidad. A los participantes se les pidió trabajar con lápiz y papel, y de manera individual. También, se les dieron indicaciones para contestarlo (algunas de ellas vienen en el encabezado del cuestionario ver Anexo 1), en particular, se les pidió que respondieran en las hojas del cuestionario. Al inicio de la aplicación se les comentó que tenían un tiempo máximo de 50 minutos para contestarlo. Los sujetos no hicieron preguntas o formularon dudas al resolver el cuestionario. El primer participante en entregar el instrumento resuelto tardó aproximadamente 20 minutos, y el último cerca de 35 minutos.

Diseño del cuestionario

Se diseñó un cuestionario como instrumento único de recogida de información para la obtención de datos. La finalidad de este es de carácter diagnóstico, en particular, su objetivo es obtener información acerca del razonamiento de los estudiantes acerca de ciertos aspectos del concepto de límite.

El cuestionario enfrenta a los estudiantes a un conjunto de problemas típicos de un primer curso de cálculo. Se divide en dos partes, siguiendo una división muy común en el estudio del cálculo, a saber, una parte técnica (operacional) y la otra teórica (definiciones/teoremas): la primera enfrenta a los estudiantes con distintas situaciones donde se debe hallar un límite; con estos se busca identificar las técnicas (factorización, racionalización, termino de mayor grado, regla de L'Hôpital, desigualdades) a las que recurren para su resolución; la segunda parte contiene tareas cuyo objetivo es evidenciar cómo caracterizan los estudiantes el concepto de límite y otras nociones relacionadas. El cuestionario consta de diez situaciones, algunas adaptadas de otras investigaciones entre las cuales destacan las de Oehertman (2003) y Jones (2015), además de libros de cálculo como el de Stewart (2012), el de Larson (2006) y el de Thomas (2006). En conjunto el cuestionario abarca tanto la parte algebraica de los límites como su parte conceptual basado en situaciones comunes de un curso inicial de cálculo.

Las primeras siete situaciones pertenecen a la primera parte, aquí se les pide hallar el límite de distintas funciones. El propósito de esta parte es que los estudiantes apliquen distintas técnicas (como las expuestas en el capítulo 2) para resolver límites donde x tiende a una constante y x tiende a infinito:

- $\lim\limits_{x \to a} f(x)$
- $\lim\limits_{x \to a} \frac{p(x)}{g(x)}$
- $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{p(x)}{g(x)}$

en donde $f(x), p(x)$ y $g(x)$ son funciones polinomiales o trigonométricas.

Los límites que se propusieron no se pueden resolver por medio de una sustitución directa. La razón es porque estamos explorando cómo los estudiantes encuentran límites de funciones con discontinuidades evitables y asíntotas, pues estos requieren que tomen decisiones en la elección del procedimiento a seguir dependiendo de las características de la función y el límite solicitado.

Conforme se va avanzando en la secuencia las situaciones se van complicando. Comenzamos con cuatro situaciones de límites que se pueden resolver mediante técnicas clásicas como factorización, racionalización o regla de L´Hôpital, estos límites sólo incluyen funciones polinomiales. La intención de las siguientes tres situaciones es enfrentar a los estudiantes con límites donde las técnicas clásicas no son suficientes y deberán recurrir a técnicas poco menos comunes como las desigualdades. Además, estos límites están conformados tanto por funciones trigonométricas como polinomiales.

Para las tres últimas situaciones, correspondientes a la segunda parte, se les pide a los estudiantes que en sus palabras expliquen algunas definiciones, propiedades y resultados pertenecientes al concepto de límite. Estas preguntas vienen acompañadas de la instrucción “Explique en sus palabras” para motivar al estudiante a razonar sobre el concepto y evitar que hagan uso de definiciones o reglas comunes de libros de texto que tengan memorizadas. Las primeras dos situaciones de la segunda parte son de tipo abstracto, en una se pide explicar la expresión $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ y en la otra se pide el significado de que un límite no exista. En la última se pretende que el estudiante razone y explique el resultado siguiente: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$.

Resumiendo, la secuencia está conformada por dos partes la primera enfocada a técnicas para calcular límites y la segunda pretende obtener información con respecto al razonamiento del estudiante sobre el concepto de límite. Lo anterior muestra una perspectiva general del cuestionario diseñado. En los siguientes apartados, se hace un análisis del instrumento, revisando y comentando cada una de las diez situaciones planteadas.

Instrumento (Cuestionario)

Esta sección se divide en dos partes: Parte I y Parte II, las cuales se corresponden con la división del cuestionario. En los apartados que se presentan a continuación se muestra un análisis de las situaciones planteadas, se exponen las técnicas que a nuestro parecer son las más adecuadas para calcular los límites propuestos para la primera parte y las propiedades/definiciones apropiadas para la segunda parte, así como el origen de cada uno de los problemas del cuestionario.

Parte I. La primera parte consiste en siete límites que se pueden resolver por medio de técnicas muy conocidas en un primer curso de cálculo: factorización, racionalización, división por exponente mayor, desigualdades y regla de L´Hôpital. Las técnicas mencionadas anteriormente se expusieron en el capítulo 2 en la sección de técnicas para calcular límites. Los problemas de límite de esta primera parte tienen en común que no se pueden resolver mediante una sustitución directa, pues en la mayoría de los casos la sustitución llevaría a una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

Dependiendo de la naturaleza de la expresión indeterminada, existirá uno o varios procedimientos aptos para eliminar la indeterminación, es decir, para manipular la expresión algebraicamente, de modo que la indeterminación sea removida.

Con las situaciones planteadas se busca generar datos que muestren los tipos de técnicas que usan los estudiantes para calcular límites de funciones, además de detectar los que utilizan con mayor frecuencia. Se busca también, analizando sus respuestas, inferir acerca de sus razonamientos al respecto.

Situación uno. Resolver el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$$

El límite de esta situación tiene la forma $\lim\limits_{x\to a}\frac{p(x)}{q(x)}$ donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios y x tiende a un valor fijo. Si se intenta resolver este límite por medio de una sustitución directa se obtendrá una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Consecuentemente, es necesario recurrir a algún método distinto para hallar el valor deseado. Las técnicas más adecuadas para la resolución serian factorización o la regla de L´Hôpital, la Tabla 1 muestra estas soluciones.

Para cada situación de la primera parte del cuestionario se presentará una tabla formada por dos columnas: la izquierda muestra el nombre de la estrategia; mientras que del lado derecho se expone la solución esperada. Estas soluciones son las que desde nuestro punto de vista son adecuadas para encontrar el valor de este límite.

Tabla 1

Soluciones esperadas a la situación uno

Técnica	Solución esperada
Factorización	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{(x-1)}}$ $=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{1}=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+1)=3$
Regla de L´Hôpital	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2}{1}=\lim\limits_{x\to 1}3x^2=3$

Por otra parte, este límite se tomó de la investigación de Oehertman (2002) donde él a su vez es influenciado por la investigación de Tall y Vinner (1981). Tall y Vinner analizan en su estudio las analizan las imágenes conceptuales y Oehertman, por otro lado, identifica el tipo de metáforas utilizadas por estudiantes cuando explican el resultado de este límite. El diseño de la situación en nuestro caso es diferente, pues nosotros pedimos calcular el valor del límite a diferencia de los estudios mencionados anteriormente, en donde se da el valor del límite y se le pide al estudiante que explique el significado del resultado. Nuestro enfoque va más orientado al procedimiento algebraico que siguen los estudiantes al resolver este límite y no a cómo explican el resultado.

Situación dos. Resolver el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$$

Nuevamente se optó por un límite del tipo $\lim_{x \to a} \frac{p(x)}{q(x)}$ donde $p(x)$ contiene un radical, $q(x)$ es un polinomio y x tiende a un valor determinado. No es posible encontrar el valor de este límite por medio de sustitución directa, si se evalúa la función en $x = 0$ se obtendrá la indeterminación $\frac{0}{0}$. Por lo tanto, será necesario acudir a alguna otra técnica para encontrar el valor. La Tabla 2 muestra cómo esta situación se puede resolver ya sea racionalizando la función o usando la regla de L´Hôpital.

Tabla 2

Soluciones esperadas a la situación dos

Técnica	Soluciones esperadas
Racionalización	$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\left(\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}\right)$ $= \lim_{x \to 0} \frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{1+x}+1)}$ $= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{2}$

Regla de L´Hôpital	$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\sqrt{1+x}}=\frac{1}{2}$

Esta situación está inspirada en el ejemplo seis (encuentre $\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$) del capítulo de límites y derivadas del libro de Stewart. Este ejemplo lo utiliza para ilustrar e introducir el método de racionalización para encontrar el valor de un límite que no se puede encontrar por sustitución directa. Como el objetivo de esta parte del cuestionario es observar distintas estrategias para calcular límites, se decidió tomar como inspiración la estructura del ejemplo de Stewart. Con estructura nos referimos a la forma de la fracción, el numerador está conformado por una raíz cuadrada menos una constante y el denominador es un monomio.

Situación tres. Resolver el siguiente límite:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+3x+2}{6x^3-2x^2-1}$$

La situación tres es un límite del tipo $\lim_{x\to\infty}\frac{p(x)}{q(x)}$ donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios y a diferencia de las situaciones anteriores x tiende a infinito. Este no se puede hallar por sustitución directa, pues el infinito no puede manejarse como cualquier número. Si se intenta deducir a que tiende el cociente cuando cada sumando x tiende a infinito, se obtendría la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$. Para calcular el límite de esta función racional en donde x tiende a infinito se puede recurrir a la siguiente regla: si el grado del polinomio del numerador es igual al del denominador, el límite es igual al cociente de los coeficientes de los términos de mayor grado. Otra posible solución es por medio de la regla de L´Hôpital, en la Tabla 3 se exhiben estos dos caminos a la solución.

Tabla 3

Soluciones esperadas a la situación tres

Técnica	Soluciones esperadas
Regla de cocientes de polinomios cuando $x \to \infty$	$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3+3x+2}{6x^3-2x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5x^3}{x^3}+\frac{3x}{x^3}+\frac{2}{x^3}}{\frac{6x^3}{x^3}-\frac{2x^2}{x^3}-\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}}+\frac{3\cancel{x}}{x^{\cancel{3}}}+\frac{2}{x^3}}{\frac{6\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}}-\frac{2\cancel{x^2}}{x^{\cancel{3}}}-\frac{1}{x^3}} =$ $\frac{\lim_{x\to\infty} 5 + \lim_{x\to\infty}\frac{3}{x^2} + \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^3}}{\lim_{x\to\infty} 6 - \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x} - \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}} = \frac{\lim_{x\to\infty} 5+0+0}{\lim_{x\to\infty} 6-0-0} = \frac{5}{6}$
Regla de L´Hôpital	$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3+3x+2}{6x^3-2x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{15x^2+3}{18x^2-4x} = \lim_{x\to\infty} \frac{30x}{36x-4} = \lim_{x\to\infty} \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$

Acerca de la elección de este ejercicio, la intención era involucrar límites al infinito donde el resultado sea un valor constante. Esto con el fin de poder contrastar con la siguiente situación donde es un límite similar, sin embargo, el límite no es constante. En contraste con las situaciones previas, esta no se tomó de la literatura de investigación sobre el tema, sino como una variación de ejercicios comunes en libros de cálculo, como los mencionados arriba, de sus secciones de límites al infinito.

Situación cuatro. Resolver el siguiente límite:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x+2}$$

La situación cuatro nuevamente es un límite del tipo $\lim_{x\to\infty}\frac{p(x)}{q(x)}$ donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios y x tiende a infinito. Esta situación es similar a la situación tres en el sentido de que en ambas la variable x tiende a infinito y se pueden resolver por medio de reglas similares, sin embargo, difieren en que el límite en este caso es infinito. Si se intenta resolver prestando atención hacia donde tiende cada polinomio se encontrarán con la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$. La técnica para encontrar el valor del límite para esta situación consiste en comparar los grados del numerador y denominador. Cuando el grado del numerador es mayor, el resultado siempre será infinito (∞ o $-\infty$) dependiendo del coeficiente del término de mayor grado. Por otro lado, también se puede resolver usando la regla de L´Hôpital. La Tabla 4 presenta explícitamente las soluciones mencionadas anteriormente.

Tabla 4

Soluciones esperadas a la situación cuatro

Técnica	Soluciones esperadas
Regla de cocientes de polinomios cuando $x \to \infty$	$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{2}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}+\frac{1}{x}}{\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}+\frac{2}{x}} = \frac{\lim_{x\to\infty} x + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}}{\lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x}} = \frac{\lim_{x\to\infty} x + 0}{\lim_{x\to\infty} 1 + 0} = \frac{\infty}{1} = \infty$
Regla de L´Hôpital	$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1} = \lim_{x\to\infty} 2x = \infty$

Con respecto a la elección de esta situación se buscó un límite que tendiera al infinito, cuando la variable también tiende al infinito. Se eligió así para hacer una comparación con la situación anterior y ver cómo el estudiante reaccionaba frente a un límite que no tiende a un valor constante. Como en el caso anterior este límite se creó inspirado por ejercicios de distintos libros de cálculo de una variable.

Situación cinco. Resolver el siguiente límite:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{cos(x)}{x}$$

En esta situación se tiene un límite del tipo $\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{q(x)}$ donde $p(x)$ es una función trigonométrica, $q(x)$ es un monomio y x tiende a infinito. Para encontrar la solución se esperaba que los alumnos utilizaran desigualdades como se muestra en la Tabla 5.

A diferencia de las situaciones anteriores esta enfrenta a los estudiantes con un límite que incluye la función trigonométrica coseno cuyos valores oscilan entre -1 y 1 conforme los valores de x recorren la recta numérica. A consecuencia de que la función oscila ya no se podrá recurrir a la regla de L´Hôpital como se podía hacer en las situaciones anteriores debido a que no cumple con las hipótesis necesarias para hacer uso de ella. Esto hará que los estudiantes busquen técnicas un poco menos comunes como son las desigualdades, las cuales sirven para acotar el límite entre dos valores.

Tabla 5

Soluciones esperadas a la situación cinco

Técnica	Soluciones esperadas
Desigualdades	$-1 \leq \cos(x) \leq 1$ $-\frac{1}{x} \leq \frac{\cos(x)}{x} \leq \frac{1}{x}$ $\lim_{x \to \infty} -\frac{1}{x} \leq \lim_{x \to \infty} \frac{\cos(x)}{x} \leq \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}$ $0 \leq \lim_{x \to \infty} \frac{\cos(x)}{x} \leq 0$ $\lim_{x \to \infty} \frac{\cos(x)}{x} = 0$

La elección de este límite surge de la revisión de la investigación de Jones (2015), quien examina el razonamiento de los estudiantes al enfrentarse con límites que involucran el infinito. Por otro lado, este límite es muy popular en los cursos y en los libros de cálculo de una variable. Este límite se eligió porque podría revelar una dimensión más compleja del razonamiento de los estudiantes.

Situación seis. Resolver el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

En esta situación se optó por un límite del tipo $\lim_{x \to a} p(x) \cdot q(x)$ donde $p(x)$ es un monomio, $q(x)$ es una función trigonométrica y x tiende a una constante. El límite no se puede resolver por sustitución directa, ya que si se evalúa la función trigonometría no se obtendría un valor especifico puesto que el coseno oscila entre -1 y 1 cuando x se aproxima a 0. Al igual que en la situación cinco, en ésta se esperaba que los estudiantes usaran el Teorema del emparedado para encontrar la solución a este límite como se muestra en la Tabla 6.

Tabla 6

Soluciones esperadas a la situación seis

Técnica	Soluciones esperadas
Desigualdad	$-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq 1$ $-x^2 \leq x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq x^2$ $-\lim_{x\to 0} x^2 \leq \lim_{x\to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq \lim_{x\to 0} x^2$ $0 \leq \lim_{x\to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq 0$ $\lim_{x\to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$

En cuanto a la elección de este límite, se busca ver las habilidades de los alumnos al enfrentarlos con límites que no se pueden calcular haciendo uso de técnicas algebraicas y deban recurrir a las desiguales. Este límite es una variación del siguiente ejemplo $\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ con el que Stewart (2012) introduce esta técnica de comprimir el límite entre dos valores.

Situación siete. Resolver el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{cos(x) - 1}{x}$$

Para la situación siete se eligió un límite del tipo $\lim_{x\to a} \frac{p(x)}{q(x)}$ donde x tiende a una constante, $p(x)$ es una función trigonométrica y $q(x)$ un monomio. Este límite no se puede resolver por sustitución directa puesto que se obtendría una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Las técnicas más adecuadas para encontrar el límite son racionalización y regla de L'Hôpital ver Tabla 7.

Tabla 7

Soluciones esperadas a la situación siete

Técnica	Soluciones esperadas
Racionalización	$\lim_{x\to 0}\frac{cos(x)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{cos(x)-1}{x}\frac{cos(x)+1}{(\cos(x)+1)}=$ $\lim_{x\to 0}\frac{cos^2(x)\cancel{+\cos(x)-\cos(x)}-1}{x(\cos(x)+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{cos^2(x)-1}{x(\cos(x)+1)}$ $=\lim_{x\to 0}\frac{sen^2(x)}{x(\cos(x)+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{\cos(x)+1}$ $=\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{\cos(x)+1}=\frac{0}{2}=0$
Regla de L´Hôpital	$\lim_{x\to 0}\frac{cos(x)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-sen(x)}{1}=-\lim_{x\to 0}sen(x)=-sen\,(0)=0$

Por otro lado, este límite es una variación del ejercicio $\lim_{x\to 0}\frac{1-cos(x)}{x}$ que Larson (2006) deja para el lector en la sección 1.3 de su libro de cálculo. Además, se eligió plantear esta situación puesto que es necesario obtener o conocer el famoso límite $\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}$ para poder calcular el límite propuesto. Al mismo tiempo, en la segunda parte del cuestionario se hace una pregunta con respecto a este famoso límite (ver situación 10).

Parte II. La segunda parte de la secuencia se enfoca, como se menciona en el apartado de diseño de actividades, en el razonamiento de los estudiantes con respecto al concepto de límite. Esta parte está formada por tres situaciones. En la primera, se pide al estudiante que en sus palabras explique el significado de la expresión $\lim_{x\to a}f(x)=L$. La segunda, la instrucción es que explique en sus palabras qué significa que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a no exista. Por último, se le solicita al estudiante que exponga qué significa el resultado de este límite: $\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$. Con esto se tiene una visión general de las situaciones que conforman esta segunda parte del cuestionario.

Enseguida, se hace un análisis en donde se detalla la razón por la cual cada situación se propuso, las posibles respuestas que se esperan por parte de los participantes y el origen de cada una. Como se mencionó en la sección de diseño de actividades la instrucción "en sus palabras" aparece en las tres situaciones, esto con el fin de motivar al estudiante a razonar sobre la situación y evitar que utilicen definiciones o explicaciones memorizadas de libros de texto.

Situación ocho. En tus palabras explica el significado de la expresión

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

La elección de esta situación es para poder observar las distintas expresiones o frases que utilizan los alumnos para razonar acerca del límite de una función $f(x)$ cuando $x \to a$. La Tabla 8 muestra las respuestas esperadas en relación con una interpretación dinámica de límite.

Tabla 8

Respuestas esperadas a la situación ocho

Respuestas esperadas
• La expresión $\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa que si x se acerca arbitrariamente a a, entonces $f(x)$ se acerca arbitrariamente a L. • La expresión $\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa que podemos acercar arbitrariamente los valores de $f(x)$ a L, si x se acerca arbitrariamente a a. • Cuando x se acerca/tiende a a, entonces $f(x)$ se acerca/tiende a L. • Si $f(x)$ se acerca/tiende a L, entonces x se acerca/tiende a a • Si x se acerca por la izquierda y por la derecha a a, $f(x)$ se acerca/tiende a L

Por otro lado, esta situación es tomada del estudio de Williams (1991) y se le hizo una adaptación para nuestro cuestionario. Williams plantea su situación en un cuestionario preliminar para clasificar a sus participantes en términos de cómo describen un límite para continuar en una siguiente fase con un experimento acera de modelos de límite sostenidos por estudiantes.

Situación nueve. En tus palabras explica lo siguiente: El límite de $f(x)$ cuando x tiende a a no existe.

Con esta situación nos interesa ver los razonamientos que producen los estudiantes con respecto a situaciones en las que un límite no existe. En la Tabla 9 se exhiben el tipo de explicaciones que se esperaría que den los alumnos para decir cuando un límite no existe.

Tabla 9

Respuestas esperadas a la situación nueve

Respuestas esperadas
• Los límites laterales no son iguales • La función no tiende a un valor especifico • La función oscila

Por otra parte, la elección para plantear esta situación es con la intención de observar si los estudiantes relacionan la existencia o inexistencia de $f(x)$ en $x = a$ con la existencia del límite de $f(x)$ en $x = a$. Esto debido a que se pretende comprar con las respuestas de las situaciones de la primera parte en donde los límites planteados no están definidos en $x = a$, sin embargo, si tienen límite.

Situación diez. En tus palabras qué significa el siguiente resultado

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$$

La elección para esta situación surge del interés de ver cómo los estudiantes interpretan el resultado de este famoso límite. Este límite es muy común en un primer curso de cálculo y en libros de texto. Los libros de Stewart, Thompson y Larson dedican un aparatado para mostrar este límite con su respectiva demostración. Además, en el temario del curso de cálculo de los participantes se plantea este límite explícitamente en la sección de límites y continuidad (revisar anexo B).

Las respuestas que se muestran a continuación en la Tabla 10 son el tipo de respuesta que se espera por parte de los estudiantes para argumentar por qué 1 es el valor a este límite. Nos imaginamos que podrían existir tres tipos de respuesta: por medio de la regla de L'Hôpital, a través de su grafica argumentando que los límites laterales son iguales o replicando la demostración que viene en los libros mencionados anteriormente.

Tabla 10

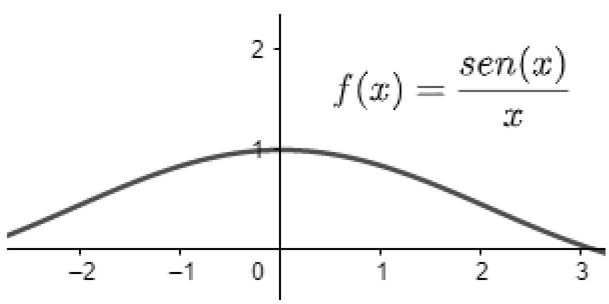
Respuestas esperadas a la situación diez

<table>
<tr><th>Respuestas esperadas</th></tr>
<tr><td>

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\big(sen(x)\big)}{\frac{d}{dx}(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{cos(x)}{1}\lim_{x\to 0}\cos(x)=\cos(0)=1$$

</td></tr>
<tr><td>

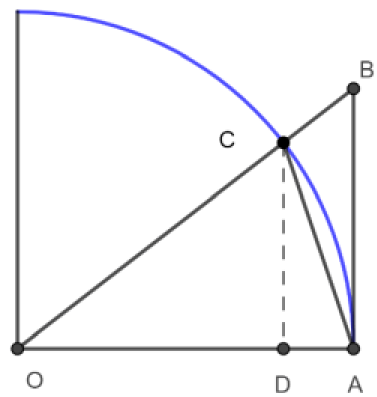


sí x se acerca a 0 por la izquierda y por la derecha, entonces $f(x)$ se acerca a 1

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{sen(x)}{x}=1=\lim_{x\to 0^+}\frac{sen(x)}{x}$$

$$\therefore\ \lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}=1$$

</td></tr>
</table>



$$\acute{A}rea\ \triangle OAC \leq \text{área} \sphericalangle OAC \leq \text{área}\ \triangle OAB$$

$$\frac{1}{2}sen(x) \leq \frac{1}{2}x \leq \frac{1}{2}\tan(x)$$

$$sen(x) \leq x \leq \tan(x)$$

$$sen(x) \leq x \leq \frac{sen(x)}{\cos(x)}$$

$$1 \leq \frac{x}{sen(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)}$$

$$cos(x) \leq \frac{sen(x)}{x} \leq 1$$

$$\lim_{x\to 0} \cos(x) \leq \lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} \leq \lim_{x\to 0} 1$$

$$1 \leq \lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} \leq 1$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$$

Por otro lado, nos interesa hacer una comparación con las respuestas de la situación siete en la cual deben utilizar el resultado de este famoso límite. Podremos observar cómo razonan este importante resultado los estudiantes y si como hacen uso de este razonamiento para hallar el límite de la función de la situación siete si solo hacen uso del resultado.

Este instrumento plantea una secuencia de situaciones las cuales fueron elegidas de cierta manera en que el nivel de complejidad fuera aumentando mientras se avanza en él. Se seleccionan estas situaciones con el objetivo de poder responder a las preguntas de investigación basados en de las respuestas que dan los estudiantes. Los límites propuestos se seleccionaron de tal manera que fueran representativos de los métodos de solución más comunes y nos permitirán ver el manejo que tienen los estudiantes sobre dichos métodos. Las preguntas abiertas de la segunda parte nos van a dar datos sobre como entienden el concepto de límite. Se hicieron dos secciones en el instrumento con la intención de encontrar una relación entre como definen y como calculan el límite de una función.

Método de análisis de los datos

En este apartado se describe la técnica de organización y análisis de la información recogida a través de los cuestionarios. El análisis de los datos se basó, por un lado, en los pasos iniciales de la teoría fundamentada (Birks y Mills, 2015) y, por otro lado, se apoyó en la taxonomía SOLO (Biggs y Collis, 1982). Esta sección se divide en dos partes, en una se describe a grandes rasgos como fue la codificación y categorización de los datos y en la segunda se habla sobre el uso de la taxonomía SOLO.

Codificación y categorización. La codificación y categorización se basa en el método de comparación constante, el cual es descrito en el siguiente apartado. A grandes rasgos el proceso de codificación y categorización realizado en esta investigación se puede dividir en cuatro pasos:

1) Vaciado de información en tablas que muestran las respuestas de los estudiantes con una descripción (ver Tabla 11), a cada situación le corresponde una tabla.
2) Codificación inicial, consistió en observar y encontrar los principales patrones emergentes de los datos. A partir de esta codificación inicial se agrupan las respuestas de cada situación basadas en sus similitudes (ver Tabla 12).
3) El análisis pasa a hacerse con respecto a las relaciones que existen dentro de un mismo código (ver Tabla 13), deja de enfocarse en el conjunto de respuestas de cada situación.
4) Cuando se corrobora que efectivamente existen relaciones entre las respuestas de un mismo código basados en la comparación constante a este se le asigna un nombre y pasa de ser un código a una categoría.

Este proceso permitió explorar el razonamiento de los estudiantes con respecto a ciertos aspectos del concepto de límite, principalmente con respecto a las técnicas para calcularlos y el manejo que tienen de la definición informal. Por otro lado, permitió hacer descripciones de la manera en que los estudiantes resuelven ciertos problemas y a formular algunas hipótesis e interpretaciones de los razonamientos que subyacen a dichas descripciones.

Método de comparación constante. Este método es comúnmente utilizado en investigaciones de tipo cualitativo y en la teoría fundamentada. Glaser (1965) separa el método en cuatro etapas, en los siguientes párrafos, se resumen los pasos a considerar.

Se comienza con el proceso de codificación, el cual consiste en describir los datos y hacer anotaciones que permiten al investigador identificar ciertos patrones. Dichos patrones pueden dar lugar a categorías de análisis (tantas como sean posibles). El proceso de codificación no termina una vez formadas las categorías. La regla básica de la comparación constante es que mientras se codifica un incidente para una categoría, se deberá comparar con los incidentes previamente codificados en la misma categoría. Después de un análisis repetitivo a cada categoría, se deja de codificar y se crea un memo. Los memos son notas donde se deben plasmar ideas, reflexiones o conclusiones relacionadas con la categoría. A partir de esto se tendrán ideas más claras y ordenadas de manera sistemática lo cual permite un mejor análisis de los datos. Glaser (2002) define una categoría como un patrón que se descubre cuidadosamente mediante la comparación constante de datos muestreados teóricamente hasta la saturación conceptual.

El segundo paso es integrar las categorías y sus propiedades, en este paso se debe seguir continuamente con la comparación constante. En este caso el enfoque ya no es comparar incidente con incidente, más bien, la comparación se centra en comparar las propiedades dentro de una misma categoría. Aquí se comenzará a notar que las diversas propiedades comienzan a integrarse.

A la tercera etapa, Glaser la llama delimitar la teoría y la divide en dos niveles: la teoría y la lista original de categorías propuestas a través de la codificación. La teoría se solidifica en el sentido de que cada vez se deben hacer menos cambios dentro de una categoría al estarse comparando las propiedades dentro de una misma. La lista original de categorías se limita y el análisis se vuelve más selectivo y enfocado.

El último paso, una vez terminado el proceso de análisis, es escribir la teoría. La teoría se deberá apoyar en los datos, el proceso de codificación, los memos y el análisis hecho.

El método de comparaciones constantes es fundamental en nuestro análisis puesto que éste cae en la creación de categorías que agrupan respuestas de estudiantes con razonamientos similares a ciertas situaciones.

Taxonomía SOLO. La taxonomía SOLO (Structure of the Observed Learning Outcomes) fue propuesta por Biggs y Collis en el año 1982. Es un método para clasificar los resultados del aprendizaje en términos de su complejidad y su calidad. El objetivo de SOLO es permitir hacer un análisis de la organización estructural del conocimiento con base en el tipo de respuesta que un estudiante responde a una cuestión planteada. Es importante destacar que SOLO estudia las respuestas o producciones de los estudiantes y no a los estudiantes. Biggs y Collis distinguen cinco niveles de complejidad: preestrucutral, uniestructural, multiestructural, relacional y abstracto extendido. Los primeros niveles corresponden al tratamiento de la información aislada y repetitiva. Inversamente, los niveles más altos pertenecen a un aprendizaje más profundo, a una interpretación personal del contenido, a relacionar la tarea con situaciones alejadas del contexto inmediato, que establece relaciones con otros conocimientos relevantes y con materiales procedentes de distintas fuentes de información.

A continuación, se muestran estos cinco niveles básicos de respuestas en orden de complejidad creciente:

a) Nivel Prestructural: los estudiantes no muestran ningún tipo de comprensión y/o utilizan información de forma irrelevante.
b) Nivel Uniestructural: Los estudiantes sólo usan un aspecto relevante y hacen conexiones obvias. Pueden utilizar terminología relacionada, memorizar cosas, aplicar algoritmos, parafrasear, identificar o nombrar.
c) Nivel Multiestructural: Los estudiantes procesan diferentes aspectos disjuntos del modo de funcionar, normalmente en una secuencia. Pueden describir, clasificar, combinar, aplicar métodos, estructura y ejecutar procedimientos.
d) Nivel Relacional: El estudiante puede comprender relaciones entre distintos aspectos y cómo estos aspectos en conjunto forman un todo. La comprensión forma una estructura y, por lo tanto, puede tener la competencia para comparar, relacionar, analizar, aplicar la teoría y explicar en términos de causa y efecto.
e) Nivel Abstracto-extendido: El estudiante puede generalizar la estructura más allá de lo que se le dio, puede percibir la estructura desde muchas perspectivas diferentes y transferir ideas a nuevas áreas. Puede tener la competencia para generalizar, formular hipótesis, criticar o teorizar.

En resumen, la taxonomía SOLO jerarquiza cinco niveles de complejidad de manera ascendente desde un nivel insuficiente hacia un nivel experto y la jerarquía resultante describe los rasgos fundamentales de los distintos niveles de modo que proporcionan una guía de cómo los estudiantes progresivamente seleccionan, procesan y comunican la información. La taxonomía SOLO es un medio apropiado para clasificar y jerarquizar las respuestas de los estudiantes. Para la presente investigación, la consideramos especialmente útil para la segunda parte del cuestionario (ver situaciones ocho a diez en capítulo de análisis y resultados).

En el capítulo de análisis y resultados, que se presenta a continuación, se indica de manera concreta como fue que la codificación y categorización, y como se hizo uso de la taxonomía SOLO para clasificar las respuestas de los estudiantes de la segunda parte del cuestionario.

Capítulo 4. Análisis y resultados

Este capítulo se divide en dos partes, una se enfoca en el proceso de análisis y, la otra, en el análisis de los datos (respuestas de los estudiantes) obtenidos del cuestionario. La primera parte, da una visión a grandes rasgos de cómo fue el proceso de ordenamiento y análisis de las respuestas al cuestionario. La segunda, muestra de manera concreta la categorización de las respuestas y su respectivo análisis.

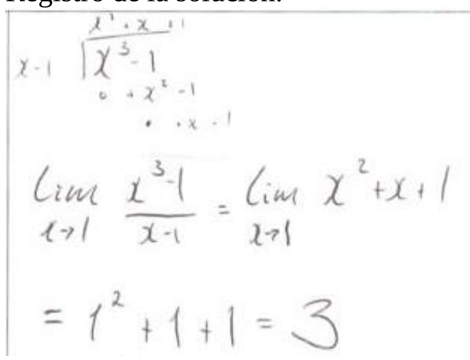
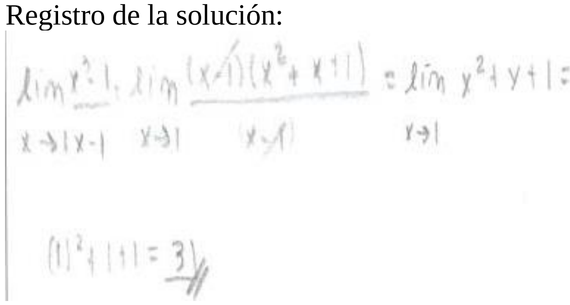
Proceso de análisis del cuestionario

El proceso de análisis de los datos consiste en la codificación y categorización de las respuestas de los cuestionarios. A las respuestas de cada situación le corresponderán un conjunto de códigos, estos reflejan los diversos razonamientos que los estudiantes llevaron a cabo para resolver la situación planteada. En los siguientes párrafos se muestra el proceso llevado a cabo, este se divide en cuatro partes.

El primer paso fue un escaneo de todos los cuestionarios, 21 cuestionarios y 3 hojas por cuestionario resultando en un total de 63 hojas escaneadas. Los datos se agrupan por situación en una tabla que consiste en tres columnas y 21 renglones (ver Tabla 11). La columna de la izquierda es para identificar al estudiante; cabe destacar que, en estos primeros pasos a los participantes, para distinguirlos, se les identificaba con una letra del alfabeto; más adelante esto se modifica y se utilizan los números del 1 al 21. La columna central muestra la situación con la respuesta de los estudiantes y la columna derecha muestra una descripción de la respuesta. La Tabla 11 ejemplifica con tres respuestas la manera en que se llevó a cabo este primer paso para la situación uno. Para las diez situaciones del cuestionario se hizo una tabla de este estilo.

Tabla 11

Descripciones de tres respuestas a la situación uno

Estudiantes	$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$	Descripción
A	Registro de la solución:  Transcripción: $x - 1 \ \overline{\big)\, x^3 - 1}$ con cociente $x^2 + x + 1$; $x^2 - 1$ $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} x^2 + x + 1$ $= 1^2 + 1 + 1 = 3$	Identifica que el numerador se puede dividir entre el denominador y procede a dividir usando la división larga. Aplica el límite al cociente y obtiene el resultado correcto.
B	Registro de la solución:  Transcripción: $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x - 1)}(x^2 + x + 1)}{\cancel{(x - 1)}}$ $= \lim_{x \to 1} (x^2 + x + 1) = (1)^2 + 1 + 1 = 3$	Identifica que el numerador es una diferencia de cubos y procede a hacer la factorización. Una vez factorizado el numerador identifica que existe el mismo factor en el numerador y denominador y procede a eliminarlos. Una vez eliminada la indeterminación al resultado le aplica el límite, sustituyendo

		$x = 1$ en la función y obtiene el resultado deseado.
C	Registro de la solución: $\lim_{x \to 1} \frac{3x^2}{1} = 3$ Transcripción: $\lim_{x\to 1} \frac{3x^2}{1} = 3$	Aplica la regla de L'Hôpital de manera correcta. Después, aplica el límite a la derivada del numerador y denominador llegando al resultado correcto.

La intención de estas tablas es mostrar para las respuestas a cada situación una descripción detallada del procedimiento. Estas descripciones serán de utilidad para el siguiente paso, que es la agrupación de datos basado en patrones.

El segundo paso es la codificación, la cual consiste en observar las respuestas de una misma situación y asignarle una descripción (código) de acuerdo con ciertos rasgos observados: esto permite la agrupación de las respuestas con un mismo código y la identificación de patrones de respuesta. El análisis de la parte I del cuestionario se centró en el tipo de técnica utilizada para resolver la situación planteada, ver la Tabla 12. Para la Parte II el enfoque se centró en las frases usadas para responder a las situaciones. La Tabla 12 ejemplifica lo que sucedió para la situación dos; en ésta surgen tres grupos de respuestas que representan las distintas técnicas a las cuales recurrieron los participantes. La primera columna representa la técnica de resolución, la segunda a los estudiantes que hicieron uso de esa técnica y la tercera muestra el ejemplo de solución, dada por algún estudiante, que mejor representa a este grupo de respuesta.

Tabla 12

Agrupación por técnicas de resolución para la situación dos

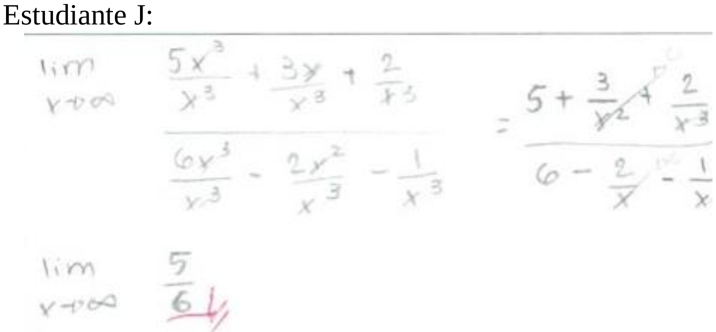
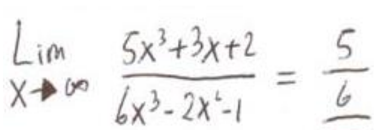
Técnica de resolución	Estudiantes	$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} =$
Multiplica por el conjugado del numerador	A, B, D, E, F, G, H, I, K, M, N, O, P, Q, R, S, T, U	Registro de una solución: $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\left(\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}\right)$ $\lim_{x \to 0} \frac{1+x-1}{x\sqrt{1+x}+x} = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{1+x}+1}$ $\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}$
L'Hôpital	C	Registro de una solución: $\lim_{x \to 0} \frac{\left[(1+x)^{1/2}-1\right]'}{(x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x}}}{1} = 1$
Sustitución directa	J, L	Registro de una solución: $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+(0)}-1}{(0)}$ $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1}-1}{0} = \frac{1-1}{0}$ $\lim_{x \to 0} \frac{0}{0}$ indeterminado no se puede racionalizar

Esta tabla permite observar y distinguir los distintos grupos de soluciones a la situación dos. Para cada situación se creó una tabla como la Tabla 12, estas permiten organizar los datos tanto por situación como por tipo de solución y esto es de gran importancia para el siguiente paso.

Una vez ordenados los datos, se destaca cada grupo y se analizan las relaciones que existen dentro del mismo grupo. En este momento el enfoque toma un giro, pues se deja de ver las respuestas a cada situación particular. Ahora, los grupos pasan a ser códigos donde el enfoque principal recae en las relaciones y patrones que hay dentro del mismo. Este paso nos permite verificar y asegurar que en efecto cada respuesta que esté dentro de un código en realidad sí pertenezca a él. La Tabla 13 expone un par de códigos que surgen de la situación tres. En esta tabla se muestra el nombre del código, una breve descripción y la cantidad de respuestas que fueron clasificadas con ese código.

Tabla 13

Descripción de códigos de la situación tres

Código	Descripción	Frecuencia de respuestas
Regla de cocientes de polinomios cuando $x \to \infty$	Aplicación de las reglas para encontrar el límite de un cociente ya sea mencionando la regla explícitamente o dividiendo/factorizando todos los factores entre la variable con exponente mayor Estudiante J: 	16
Sin argumentos	Solamente ponen el resultado Estudiante H: 	3

Estas tablas nos permiten ver los distintos códigos, con una descripción que abarca las respuestas de ese código y la frecuencia con la que surgió.

Después de confirmar, basados en la comparación constante, que cada respuesta pertenece a su código y que, en efecto, todas se relacionan entre sí, el código pasa a ser una categoría. A las categorías se les asigna un nombre de tal manera describa de mejor manera al conjunto de respuestas, por ejemplo, en la mayoría de las situaciones de la primera parte el nombre de la categoría se basa en la técnica utilizada para resolver un cierto límite.

Es importante recalcar que en cada paso hasta llegar a las categorías se mantuvo un diálogo constante con los directores de esta tesis, el cual permitió reforzar y darles validez a estas categorías formadas. Las categorías que surgen en cada situación se desarrollan en la siguiente sección de este capítulo.

La intención de este apartado ha sido mostrar cómo se llevó a cabo el proceso de análisis de los datos. Como se pudo apreciar se dividió, a grandes rasgos, en cuatro partes: descripción individual, agrupación, codificación y categorización. El análisis que se llevó a cabo, como se mencionó en el capítulo de método, está inspirado en los procedimientos de codificación y categorización que se recomiendan en los primeros pasos de estudios de la Teoría Fundamentada (Birks y Mills, 2015). Realizar este análisis permite formular hipótesis e interpretaciones sobre el razonamiento y como les produce sentido el concepto de límite a los estudiantes cuando se enfrentan a tareas que involucran dicho concepto. A continuación, se muestra el análisis de los datos de manera detallada.

Análisis de los datos

En este apartado se muestran los resultados obtenidos de la aplicación del cuestionario (ver Anexo 1) y un análisis de cada una de las situaciones. Para facilitar la lectura y distribución de los datos el apartado se divide en dos secciones: la primera y segunda corresponde a las partes uno y dos del cuestionario. Como se mencionó al inicio del capítulo a cada participante le correspondía una letra del alfabeto, en este momento es cuando se modifica esta manera de identificar a los participantes. Ahora se les asigna un número del 1 al 21, al alumno con mayor puntación de la primera parte del cuestionario se le asigno el número 1 y al de menor puntación se le asigno el 21, es decir van de mayor a menor desempeño.

Parte I. En esta primera parte se exponen tanto los resultados como el análisis correspondiente a las situaciones planteadas en la primera parte del cuestionario. Esta sección a su vez se divide en dos apartados: el primero muestra una visión amplia del cuestionario, y el segundo tiene como enfoque cada situación de manera individual.

Comenzamos con la visión general de las primeras siete situaciones. Dado que la cantidad de datos generados era muy amplia (siete situaciones por 21 sujetos dan como resultado 147 respuestas en total) se crearon una serie de tablas con el objetivo de facilitar la lectura de los datos y mostrarlos de manera compacta y precisa.

La Tabla 14 está ligada a las respuestas de la primera parte del cuestionario y ésta permite hacer observaciones tanto por sujeto como por situación. Las filas representan a los participantes y las columnas las situaciones, cada celda corresponde a la intersección de un estudiante con una situación. Cada celda está compuesta de los números 0, 1, 2, 3, 4 los cuales describen las respuestas de la siguiente manera: Cero: no responde; Uno: incorrectas; Dos: correctas con argumentos erróneos; Tres: correctas sin argumentación o argumentación incompleta; Cuatro: correcta y buen argumento. Las situaciones se abrevian con la letra S seguida de un número del 1 al 7 los cuales corresponden a las primeras siete situaciones del cuestionario, por ejemplo, la situación uno se representa por S1.

El diseño de esta tabla sigue la idea de las Escalas de Guttman (Resnick y Ford, 1990) en la que se cataloga a alumnos de mayor a menor desempeño de arriba hacia abajo y las columnas van de menor a mayor dificultad vistas de izquierda a derecha.

La Tabla 14 nos permite hacer un análisis cuantitativo del cuestionario. Se obtuvo un total de 52.38% de respuestas correctas (4), 24.49% de respuestas correctas sin o con argumentación incompleta (3), 5.44% de respuestas correctas con argumentos erróneos (2), 15.65% de respuestas incorrectas (1) y únicamente un 2.04% no se respondió (0).

Por otro lado, a partir de la tabla se puede observar cuál es el alumno con mejor y peor desempeño de calcular el límite de una serie de funciones. El que mejor desempeño mostró fue el participante correspondiente al número 1, pues resolvió todos los límites de forma correcta; únicamente no argumenta su respuesta en una ocasión. En contraste, el alumno 21 únicamente obtuvo dos respuestas correctas y en una de ellas no argumenta su respuesta. Por otra parte, permite observar que la situación uno y cinco fueron las situaciones que causaron, respectivamente, menor y mayor dificultad entre los estudiantes.

Tabla 14

Calificación de respuestas a la Parte I del cuestionario

Estudiantes	Situaciones						
	S1	S3	S7	S4	S2	S6	S5
1	4	4	4	4	4	4	3
2	4	3	4	3	4	4	4
3	4	4	3	4	4	3	4
4	4	4	4	4	4	3	3
5	4	4	1	4	4	4	4
6	4	4	4	4	4	2	3
7	4	4	4	4	4	3	2
8	4	4	4	4	4	2	3
9	4	4	3	4	4	3	2
10	4	4	3	3	4	1	3
11	4	4	1	4	1	3	4
12	4	3	4	3	4	2	1
13	4	4	4	1	1	3	3
14	4	4	4	1	1	3	3
15	4	4	3	3	1	3	2
16	4	3	1	4	1	3	3
17	4	4	3	1	1	3	3
18	4	4	2	1	4	3	0
19	4	1	1	3	4	3	2
20	4	4	4	1	1	0	3
21	1	4	3	1	1	1	0
Total	81	78	64	61	60	56	55

La situación uno tuvo un 96.43% de respuestas correctas en comparación con la cinco que alcanzó un 65.48%. Se puede concluir que en el grupo examinado hay variabilidad en los niveles de desempeño basados en las tareas suministradas. El hecho de que haya cuatro estudiantes (1, 2, 3, 4) que responden todas las preguntas correctamente (aunque algunas sin argumentar) indica que los problemas corresponden al nivel de desarrollo y escolaridad de los estudiantes.

La Tabla 15 tiene un diseño similar al anterior, en el sentido de que los renglones representan a los estudiantes y están de mayor a menor en cuestión de desempeño y las columnas son las situaciones con la diferencia que aquí el orden es como aparecen en el cuestionario. Sin embargo, la intención de ésta es mostrar las técnicas de solución y no describir si la respuesta fue correcta o no. Cada casilla contiene unas siglas las cuales corresponden al nombre de la técnica de solución empleada para resolver las situaciones planteadas en el cuestionario (las celdas de las tres más frecuentes se han pintado de diferentes tonalidades de gris, para facilitar su identificación). Las siglas corresponden a las siguientes técnicas: MA: manipulación algebraica; SA: sin argumentos; RC: regla de cocientes; LH: L´Hôpital; SD: sustitución directa; CV: covariación; CxA: cero por número acotado es cero; CxN: cero por cualquier número es cero. La elección para estos nombres se describe en la siguiente sección donde es analizada cada situación de manera individual.

Tabla 15

Técnicas empleadas para la solución de las primeras siete situaciones

Estudiantes	Técnicas de solución de Parte I						
	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7
1	LH	MA	RC	RC	SA	CxA	LH
2	MA	MA	SA	SA	CV	CxA	MA
3	MA	MA	RC	RC	CV	SA	SA
4	MA	MA	RC	RC	SA	SA	MA
5	MA	MA	RC	RC	CV	SA	MA
6	MA	MA	RC	RC	SA	SA	LH
7	MA	MA	RC	RC	MA	SD	LH
8	MA	MA	RC	RC	SA	SA	SA
9	MA	MA	RC	RC	MA	CxN	SD
10	MA	MA	RC	SA	SA	SA	SA
11	MA	MA	RC	SA	CV	SA	SA
12	MA	MA	SA	SA	MA	CxN	MA
13	MA	MA	RC	RC	SA	SD	MA
14	MA	MA	LH	SA	SA	SA	SA
15	MA	MA	RC	RC	CV	SA	SA
16	MA	MA	RC	RC	SA	SA	MA
17	LH	LH	SA	LH	SA	SA	SA
18	MA	MA	RC	RC	SR	SA	SA
19	LH	MA	LH	LH	LH	SA	MA
20	MA	SD	RC	RC	SA	SR	LH
21	MA	SD	RC	RC	SR	SD	SA

Las técnicas utilizadas a lo largo de la primera parte del cuestionario mostradas en la Tabla 15 se resumen en la Tabla 16. La Tabla 16 consiste en diez columnas: la primera contiene las iniciales de las categorías, la segunda el nombre de la categoría, la tercera la frecuencia y de la cuarta a la última columna se muestra la frecuencia con la que aparece por situación. Las filas están de mayor a menor cantidad de apariciones, esto con el objetivo de mostrar la categoría que más veces aparece a lo largo del cuestionario y, por otro lado, para evidenciar en qué situaciones fueron utilizadas para cada situación.

Tabla 16

Frecuencia de categorías

Iniciales	Categorías	Frecuencia	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7
MA	Manipulación Algebraica	44	18	18			3		7
SA	Sin argumentos	39			3	5	10	13	9
RC	Regla de cocientes	30			16	14			
LH	L´Hôpital	13	3	1	2	2	1		4
SD	Sustitución directa	6		2				3	1
CV	Covariación	8					5		
CxA	Cero por número acotado es cero	2						2	
CxN	Cero por cualquier número es cero	2						2	
SR	Sin respuesta	3					2	1	

La Tabla 16 muestra las técnicas de solución más empleadas en las primeras siete situaciones del cuestionario. Hay varias observaciones que conviene destacar a partir de esta tabla. En las primeras dos situaciones el código sin argumentos no aparece, sin embargo, a partir de la tercera situación se presentan por lo menos tres veces por situación lo que nos indica que los estudiantes pueden argumentar cuando el método de solución es algebraico (MA y RC), pero tienen poca habilidad para elaborar argumentos que incluyan funciones trigonométricas; por lo que es probable que sus respuestas sean memorizadas. También se puede apreciar en la tabla que en las últimas tres situaciones el tipo de técnica utilizada por los alumnos es más variada, es decir, hay menos consenso en cuanto al método apropiado para resolver los problemas de esas. Por otro lado, se puede ver que, aunque en pequeñas cantidades, la regla de L´Hôpital aparece recurrentemente en las situaciones, incluso cuando la regla no es válida como en la situación seis.

En los siguientes apartados, se hace un desglose de manera individual de cada situación.

Situación uno. Resolver el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}.$$

Tras el análisis a las respuestas de la situación uno, identificamos dos categorías para representar las respuestas, las cuales llamamos *Manipulación algebraica* y *Regla de L´Hôpital*. En la Tabla 17 se muestra un ejemplo de cada una de las técnicas de las llevadas a cabo por los estudiantes para encontrar el valor del límite. Se describen estas categorías a continuación.

Manipulación algebraica (MA). Esta categoría representa a las respuestas que muestran un manejo algebraico para encontrar la solución, en este caso fueron 18 de 21 estudiantes los que optan por un camino de este tipo. Las técnicas que forman esta categoría corresponden a los estudiantes que solucionan mediante un método de factorización, división sintética o usando división larga para eliminar la indeterminación $\frac{0}{0}$. Estas técnicas se agrupan en una misma categoría puesto que las tres soluciones son muy parecidas, en el sentido de que al aplicar una serie de pasos algebraicos pasan de tener una función racional a una polinomial en donde ahora sí pueden aplicar la sustitución. Se muestran indicios de que los estudiantes que optan por esta estrategia perciben cuándo una función es indefinida en un cierto valor $x = a$, dado que todos buscan eliminar la indeterminación directamente, sin que alguno pretenda sustituir $x = 1$ en la función. Una vez eliminada la indeterminación por alguna de las técnicas mencionadas anteriormente sustituyen el valor de x, para así obtener el límite; ver categoría MA en Tabla 17. El 94.4 % de los que eligen por una solución de este tipo logran obtener la respuesta correcta, el único error que hubo en esta situación fue debido a un signo que ocasionó que al momento de evaluar en $x = 1$ se obtuviera un resultado erróneo.

Regla de L´Hôpital (LH). En esta categoría se clasifican tres respuestas, en las cuales se resuelve el límite por medio de la regla de L´Hôpital (ver Capítulo 2). A diferencia de los de la primera categoría aquí dos de los tres que toman este camino sustituyen $x = 1$ en la función, ver categoría LH en Tabla 17. Sin embargo, esto no quiere decir que no perciban que el límite es indeterminado, como las respuestas pertenecientes a la categoría anterior, lo que esto nos muestra es que están conscientes de que primero es necesario verificar que se cumplan las hipótesis necesarias para poder utilizar la regla. Los tres que optan por esta técnica llegan al resultado correcto.

Como esta categoría reaparece constantemente a lo largo de las situaciones del cuestionario como se menciona anteriormente, para evitar repetir la misma explicación cuando se haga referencia a la categoría regla de L´Hôpital nos referimos a las respuestas donde al encontrarse con una indeterminación $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ recurren a esta regla, derivando el numerador y denominador para después aplicarle el límite a cada uno de ellos. Se añadirá algún comentario únicamente si hay algo nuevo que destacar.

La Tabla 17 está compuesta de tres columnas; la primera, contiene el nombre de la categoría; la segunda, tiene la descripción y una imagen (y su respectiva transcripción) con la respuesta que mejor la represente; la tercera, muestra la frecuencia de respuestas correctas e incorrectas. Los renglones están acomodados de mayor a menor en cuestión al número de incidencias. El formato de esta tabla será utilizado para todas las situaciones de la primera y segunda parte del cuestionario.

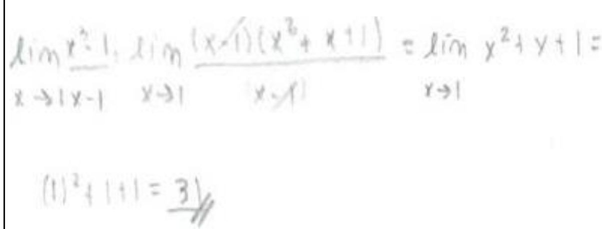
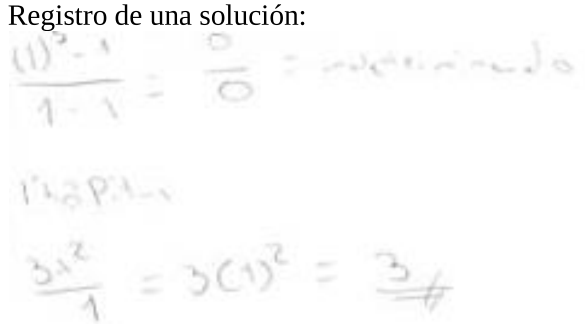
Por otro lado, al igual que en el estudio de Tall y Vinner (1981), nuestros participantes al enfrentarse con el límite de la situación 1, optan por encontrar su valor ya sea dividiendo $x^3 - 1$ entre $x - 1$ para después evaluar el límite o por medio de la regla de L´Hôpital. La situación posee el mayor índice de respuestas correctas del cuestionario, se le atribuye el alto nivel de aciertos al hecho de que solamente requiere de factorizar y eliminar términos comunes lo cual es una técnica común para solucionar este tipo de límites. En consecuencia, los estudiantes no presentan problemas para encontrar la solución.

Tabla 17

Categorías de la situación uno

Resolver el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

Categorías	Descripción	Ejemplo	Número de respuestas
MA	Eliminan la indeterminación por medio de factorización por diferencia de cubos, división sintética o división larga. Una vez eliminada la indeterminación evalúan la función.	Registro de una solución:  Transcripción: $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2 + x + 1)}{\cancel{(x-1)}}$ $= \lim_{x \to 1} x^2 + x + 1 = 3$	correctas 17 incorrectas 1
LH	Al encontrase con la indeterminación cero entre cero recurren a la regla de L´Hôpital, derivando el numerador y denominador	Registro de una solución:  Transcripción $\frac{(1)^3 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0} = indeterminado$ $l´hôpital$ $\frac{3x^2}{1} = 3(1)^2 = 3$	correctas 3 incorrectas 0

Situación dos. Resolver el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}.$$

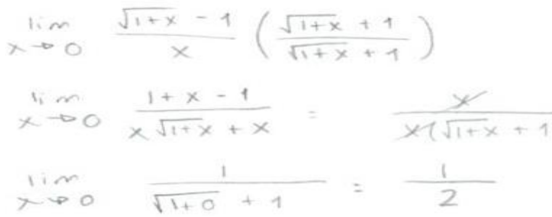
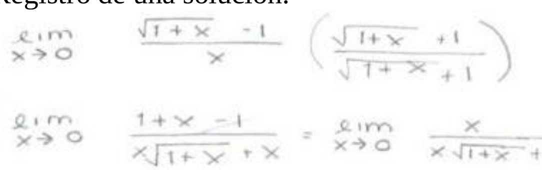
Tras codificar y comparar las respuestas a la situación dos, surgen tres categorías a las cuales nombramos de la siguiente manera: *Manipulación algebraica*, *Sustitución directa* y *Regla de L´Hôpital*. Se muestran ejemplos en la Tabla 18 donde los estudiantes ejecutan cada una de estas categorías para encontrar el valor del límite. A continuación, se describen con más detalles estas estrategias.

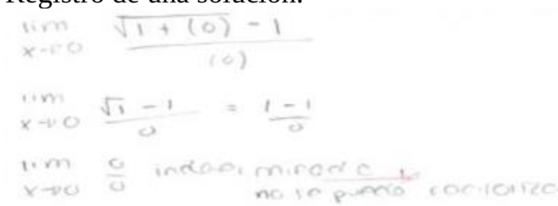
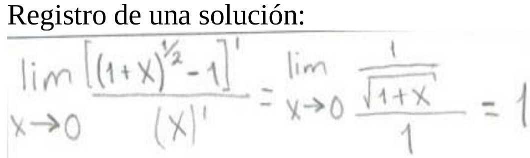
Manipulación algebraica (MA). Nuevamente se hace uso de este nombre, en este caso es para las respuestas donde se multiplica el numerador y denominador por el conjugado del numerador, ver categoría MA en la Tabla 18. Se utiliza este nombre ya que la técnica se basa en una cadena de pasos algebraicos. Una vez que se multiplica por el conjugado se elimina la indeterminación $\frac{0}{0}$, después se sustituye $x = 0$ en la función obteniendo el límite de la función. Nuevamente los que optan por este camino muestran indicios de que perciben cuando una función es indefinida en un cierto valor x, esto al notar que lo primero que hacen es eliminar la indeterminación sin que alguno procure sustituir $x = 0$ en la función. Este tipo de solución fue la que más se hizo presente en la situación dos, con 18 apariciones.

Sustitución directa (SD). Esta segunda estrategia surge en dos ocasiones, aquí los participantes sustituyen el valor al que tiende x en la función. Esta estrategia no resulta beneficiosa, puesto que los dos alumnos que toman este camino al evaluar la función obtienen la indeterminación $\frac{0}{0}$ y esto les impide hallar el valor del límite.

Tabla 18

Categorías de la situación dos

<table>
<tr><td colspan="4">Resolver el siguiente límite:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$$</td></tr>
<tr><td>Categorías</td><td>Descripción</td><td>Ejemplo</td><td>Número de respuestas</td></tr>
<tr><td rowspan="4">MA</td><td rowspan="4">Los estudiantes identifican que no se puede obtener el límite sustituyendo directamente en la función por lo cual multiplican por el conjugado del numerador.</td><td rowspan="2">Registro de una solución:

Transcripción:
$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\left(\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}\right)$
$\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{x\sqrt{1+x}+x}=\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+x}+1\right)}$
$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{1}{2}$</td><td>correctas</td></tr>
<tr><td>13</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Registro de una solución:

Transicripción:
$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\left(\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}\right)$
$\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{x\sqrt{1+x}+x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\sqrt{1+x}+x}$</td><td>incorrectas</td></tr>
<tr><td>5</td></tr>
<tr><td rowspan="3">SD</td><td rowspan="3">Sustituyen directamente $x=0$ en la función.</td><td rowspan="3"></td><td>correctas</td></tr>
<tr><td>0</td></tr>
<tr><td>incorrectas</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="4">Resolver el siguiente límite:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$$</td></tr>
<tr><td>Categorías</td><td>Descripción</td><td>Ejemplo</td><td>Número de respuestas</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Registro de una solución:

Transcripción:
$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+0}-1}{0}$
$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1}-1}{0}=\frac{1-1}{0}$
$\lim_{x\to 0}\frac{0}{0}$, ¨$indeterminado, no\ se\ puede\ factoriz$</td><td>2</td></tr>
<tr><td>LH</td><td>Recurren a la regla de L´Hôpital, derivando el numerador y denominador.</td><td>Registro de una solución:

Transcripción:
$\lim_{x\to 0}\frac{\left[(1+x)^{\frac{1}{2}}-1\right]^{\prime}}{(x)^{\prime}}=\lim_{x\to 0}\frac{\left[\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right]^{\prime}}{1}=1$</td><td>correctas
0
incorrectas
1</td></tr>
</table>

Los estudiantes de nuevo detectan que existe una indeterminación como en la situación uno y recurren a la técnica adecuada para su resolución, en este caso multiplicar por el conjugado del numerador o aplicando la regla de L´Hôpital. Existen problemas para encontrar la solución correcta a esta situación debido a errores con la manipulación algebraica de las raíces cuadradas, tanto al momento de multiplicar por el conjugado (ver segundo ejemplo de la categoría MA), como al aplicar L´Hôpital (ver ejemplo de la categoría LH). Por lo tanto, deducimos que la dificultad de la situación dos no es la falta del conocimiento del procedimiento para obtener el límite sino las dificultades operacionales de las raíces cuadradas.

Situación tres. Resolver el siguiente límite:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3+3x+2}{6x^3-2x^2-1}.$$

Después de realizar el análisis de las respuestas a la situación tres, brotan tres categorías para clasificar las estrategias de solución utilizadas. Éstas llevan los siguientes nombres: *Regla de cocientes de polinomios cuando* $x \to \infty$*, Sin argumentos* y *Regla de L´Hôpital.* En la Tabla 19 se muestran imágenes escaneadas de las respuestas que mejor representan la categoría. A continuación, se hace una descripción de estas categorías.

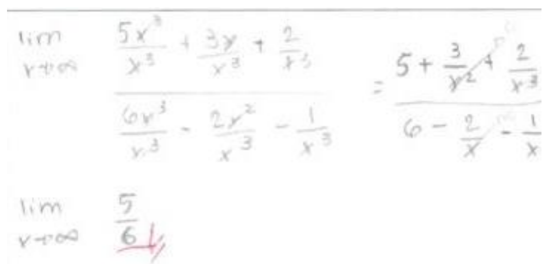
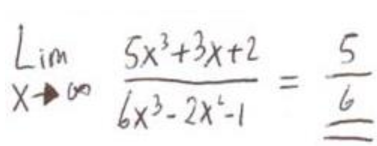
Regla de cocientes de polinomios cuando $x \to \infty$ *(RC).* Esta categoría representa a los alumnos que hicieron uso de la regla de términos de mayor grado del numerador y denominador mencionada en el marco conceptual o de manera algebraica dividiendo o factorizando todos los factores del cociente entre la variable con exponente mayor. Una vez realizada la división recurren al resultado $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ para eliminar factores del numerador y denominador. Todos los que recurren a esta estrategia logran obtener el valor del límite sin problema alguno.

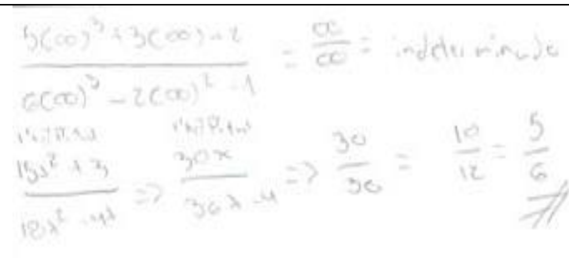
Sin argumentos (SA). La segunda categoría fue creada a partir de que tres participantes obtienen el valor del límite de la función, sin embargo, no argumentan su respuesta. Estos participantes a pesar de no argumentar su resultado obtienen el valor correcto. Lo anterior nos puede llevar a creer que estos participantes conocen las reglas para encontrar este tipo de límite, pero, no muestran evidencia de ello. Aunque los estudiantes no presentan un procedimiento específico, es probable que tengan una serie de argumentaciones específicas

Esta categoría aparece constantemente a partir de esta situación por lo cual volvemos a tomar la decisión de solo mencionarla si es necesario hacer alguna aclaración u observación relevante.

Tabla 19

Categorías de la situación tres

Resolver el siguiente límite: $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3+3x+2}{6x^3-2x^2-1}$			
Categorías	Descripción	Ejemplo	Número de respuestas
RC	Los estudiantes aplican correctamente las reglas para encontrar el límite del cociente ya sea que mencionan la regla explícitamente o dividiendo/factorizando todos los factores entre la variable con exponente mayor.	Registro de una solución:  Transcripción: $\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5x^3}{x^3}+\frac{3x}{x^3}+\frac{2}{x^3}}{\frac{6x^3}{x^3}-\frac{2x^2}{x^3}-\frac{1}{x^3}} = \frac{5+\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{6-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^3}}$ $\lim_{x\to\infty} \frac{5}{6}$	correctas 16 incorrectas 0
SA	Solamente ponen el resultado.	Registro de una solución:  Transcripción: $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3+3x+2}{6x^3-2x^2-1} = \frac{5}{6}$	correctas 3 incorrectas 0
LH	Al encontrarse con la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ recurren a la	Registro de una solución:	correctas 1 incorrectas

	regla de L´Hôpital derivando el numerador y denominador.	 Transcripción: $\frac{5(\infty)^3+3(\infty)+2}{6(\infty)^3-2(\infty)^2-1}=\frac{\infty}{\infty}\ ,indeterminado$ $l´hôpital \quad l´hôpital$ $\frac{15x^2+3}{18x^2-4}=\frac{30x}{36x}=\frac{30}{36}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$	1

La situación tres cuenta con un alto porcentaje de aciertos quedando como la segunda situación mejor contestada. Los estudiantes no muestran problemas para encontrar la solución puesto que manifiestan conocer y tener buen manejo de las técnicas de resolución para límites finitos a pesar de que x tienda a infinito. Por otra parte, hay evidencias que revelan que la mayoría están familiarizados con el resultado $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ pues gran parte elimina los factores del cociente con exponente menor haciendo uso de este resultado.

Situación cuatro. Resolver el siguiente límite:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x+2}.$$

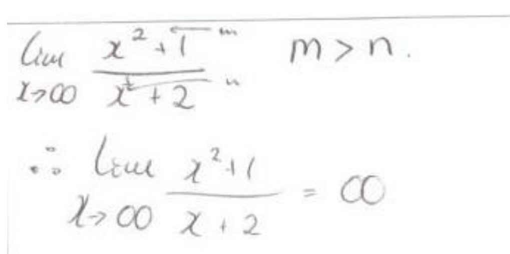
Después de la codificación y comparación de soluciones de la situación cuatro surgen nuevamente las mismas categorías que en la situación tres, esto era de esperarse ya que en ambas se utilizan las mismas reglas para obtener el valor del límite. En la Tabla 20 se resumen las categorías con la respuesta que mejor la representa.

Regla de cocientes de polinomios cuando $x \to \infty$ (RC). Esta primera categoría representa a los alumnos que hicieron uso de esta regla de términos de mayor grado del numerador y denominador nombrándola explícitamente o ya sea de manera algebraica dividiendo o factorizando todos los factores del cociente entre la variable con exponente mayor. A diferencia de la situación anterior aquí no todos los estudiantes logran obtener el valor del límite al usar esta estrategia. El 64.26% de los que recurren a esta estrategia obtiene el resultado correcto.

Sin argumentos. Vale la pena destacar que el número de casos donde no se argumenta la respuesta en comparación con la situación cuatro se duplica, a pesar de que el límite se puede resolver mediante las mismas reglas.

Tabla 20

Categorías de la situación cuatro

Resolver el siguiente límite: $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x+2}$			
Categorías	Categorías	Categorías	Categorías
RC	Los estudiantes aplican correctamente las reglas para encontrar el límite del cociente ya sea que mencionan la regla explícitamente o dividiendo/factorizando todos los factores entre la variable con exponente mayor.	Registro de una solución:  Transcripción $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{2\leftarrow m}+1}{x^{1\leftarrow m}+2}, m > n$ $\therefore \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^1+2} = \infty$	correctas 9 incorrectas 5
SA	Solamente ponen el resultado.	Registro de una solución:	correctas 5 incorrectas 0

		$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{x+2} = \infty$ Transcripción: $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{x^1+2} = \infty$	
LH	Recurren a la regla de L´Hôpital, derivando el numerador y denominador.	Registro de una solución: $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{x+2} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{1} = \infty$ Transcripción: $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{x^1+2} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{1} = \infty$	correctas 1 incorrectas 1

Esta situación se puede resolver usando las mismas reglas que en la situación tres, sin embargo, en este caso el límite tiende a infinito. Vale la pena destacar que el número de casos donde no se argumenta la respuesta en comparación con la situación cuatro se duplica. A pesar de resolverse con la misma técnica, la cantidad de respuestas correctas decayó un 33.33% en comparación a la situación tres, esta diferencia sugiere que los estudiantes tienen problemas cuando el límite de una función no tiende a un valor fijo. A pesar de conocer las técnicas para encontrar límites de cocientes de polinomios basado en la cantidad de respuestas correctas de la situación anterior, se concluye que el problema de los estudiantes está relacionado con la noción del infinito.

Situación cinco. Resolver el siguiente límite:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{cos(x)}{x}.$$

Una vez llevado a cabo el análisis de la situación cinco, se decide agrupar las respuestas en cuatro categorías, ver Tabla 21. Se les dieron los siguientes nombres a las categorías: *Sin argumentos, Covariación, Regla de L´Hôpital* y *Manipulación algebraica*.

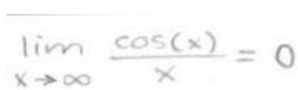
Covariación (CV). Al conjunto de respuestas donde los alumnos están atentos a la variación de dos objetos de manera simultánea se le nombro covariación. Con objetos nos referimos al numerador y denominador del cociente. Las observaciones hechas van dirigidas a cómo varia $cos(x)$ y x mientras x tiende a infinito. Este tipo de solución apareció en siete ocasiones, y el 71.43% que recurre a este tipo de razonamiento obtiene la respuesta correcta.

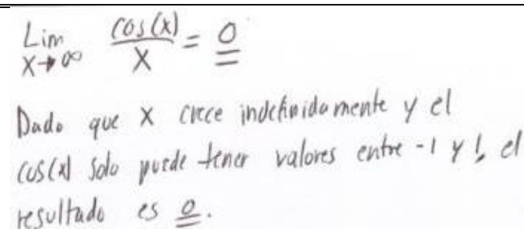
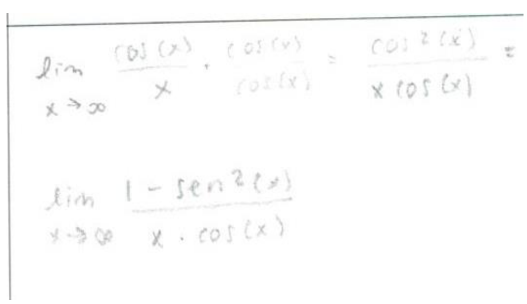
Manipulación algebraica (MA). Esta categoría representa a tres alumnos que intentan resolver el límite por medio de manipulaciones algebraicas ya sea aplicando identidades trigonométricas o separando el límite en dos partes; a pesar de ello, ninguno logra obtener un resultado correcto por medio de argumentos válidos.

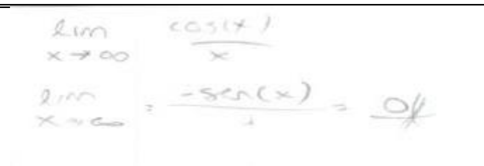
Regla de L´Hôpital (LH). En este caso únicamente un participante pretender utilizar esta regla para obtener el valor del límite, sin embargo, no es válida puesto que no cumple las hipótesis necesarias para poder aplicar dicha regla.

Tabla 21

Categorías de la situación cinco

<table>
<tr><td colspan="4">Resolver el siguiente límite:
$$\lim_{x\to\infty} \frac{cos(x)}{x}$$</td></tr>
<tr><td>Categorías</td><td>Descripción</td><td>Ejemplos</td><td>Número de respuestas</td></tr>
<tr><td>SA</td><td>Los estudiantes no argumentan su respuesta, solamente escriben el resultado.</td><td>Registro de una solución:

Transcripción:
$\lim_{x\to\infty} \frac{cos(x)}{x} = 0$</td><td>correctas
10
incorrectas
0</td></tr>
<tr><td>CV</td><td>Indican que cuando $x \to \infty$ el numerador $cos(x)$ está acotado entre</td><td>Registro de una solución:</td><td>correctas
4
correctas con argumentación errónea</td></tr>
</table>

Resolver el siguiente límite: $$\lim_{x\to\infty}\frac{cos(x)}{x}$$			
Categorías	Descripción	Ejemplos	Número de respuestas
	los valores -1 y 1. Por otro lado, el denominador x va aumentando indefinidamente. Con base en lo anterior, concluyen que el límite es cero porque hay un valor acotado entre un número que crece indefinidamente.	 Transcripción: $\lim_{x\to\infty}\frac{cos(x)}{x}=0$ *¨Dado que x crece indefinidamente y el $cos\ (x)$ solo puede tener valores entre -1 y 1, el resultado es cero¨*	1 incorrectas 0
MA	Intentan hacer manipulaciones algebraicas ya sea multiplicando un uno o sumando un cero conveniente y hacer uso de identidades trigonométricas.	Registro de una solución:  Transcripción: $\lim_{x\to\infty}\frac{cos(x)}{x}\frac{\cos(x)}{\cos\ (x)}=\frac{\cos^2(x)}{xcos(x)}$ $\lim_{x\to\infty}\frac{1-sen^2(x)}{xcos(x)}$	correctas 0 Correctas con argumentación incorrecta 2 incorrectas 1
LH	Recurren a la regla de L´Hôpital, derivando el	Registro de una solución:	correctas 0 correctas con argumentación errónea

Resolver el siguiente límite: $\lim_{x \to \infty} \frac{cos(x)}{x}$			
Categorías	Descripción	Ejemplos	Número de respuestas
	numerador y denominador.	 Transcripción: $\lim_{x \to \infty} \frac{cos(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{-sen(x)}{1} = 0$	1 incorrectas 0

De la Tabla 21 se puede apreciar que la categoría que más se hace presente es la de sin argumentos. A pesar de no mostrar evidencia de saber cómo obtener el valor de este límite los diez participantes que optan por solo poner el resultado obtienen el valor correcto.

De las respuestas se observa que en general los participantes conocen la solución a este límite, sin embargo, no exponen evidencia de conocer las estrategias para obtener la solución (ver ejemplo de categoría sin argumentos). Se concluye lo anterior al ver de los estudiantes que obtiene el resultado correcto, únicamente el 22.2% argumenta su solución de forma aceptable. En este límite se esperaba que hicieran uso del teorema del emparedado, pero no fue así, ninguno utilizó desigualdades para acotar el límite (al menos no de forma explícita).

En contraste con las situaciones anteriores, ésta ya no sólo involucra funciones polinomiales, y debido a la cantidad de respuestas correctas sin argumentos se percibe que existen problemas con las propiedades de las funciones trigonométricas; en este caso específicamente con la función $cos(x)$. Pocos manifiestan una comprensión aceptable (ver ejemplo de categoría covariación) donde muestren que conocen que la función $cos(x)$ oscila entre -1 y 1. Las dificultades para ofrecer una explicación viable a la respuesta por parte de los estudiantes van más allá del simple hecho de que $cos(x)$ no es una función monótona.

Pareciera que el uso del infinito les impedía razonar qué sucede con los valores de la función $cos(x)$.

Situación seis. Resolver el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

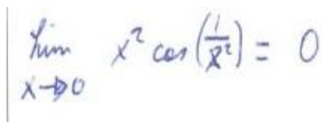
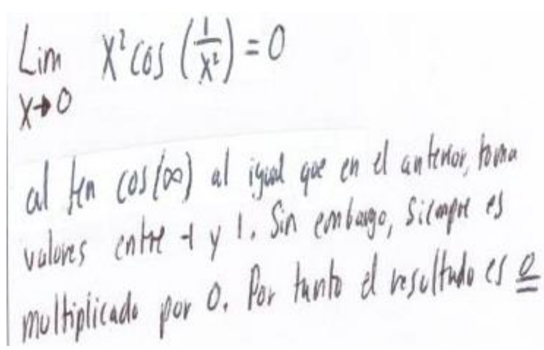
Tras un análisis a las soluciones de la situación seis, se establecieron tres categorías llamadas: *Sin argumentos, Cero por cualquier cosa acotada es cero* y *Cero por cualquier cosa es cero,* y *por último sustitución directa*. En los siguientes párrafos se describen estas categorías y se resumen en la Tabla 22.

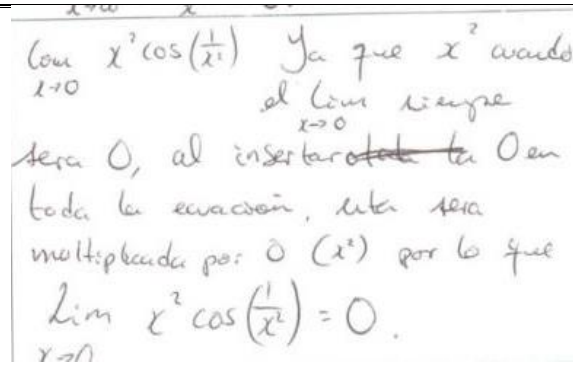
Cero por cualquier cosa acotada es cero y cero por cualquier cosa es cero. Esta segunda categoría se crea para agrupar a cuatro participantes que argumentan que el límite es cero debido que un número multiplicado por cero es cero. Se decide dividir en dos partes esta categoría a) cero por cualquier cosa acotada es cero y b) cero por cualquier cosa es cero. La razón para hacer esta división dentro de la misma categoría es para distinguir entre los participantes 1,2 y 9,12 (ver ejemplos de categorías CxA y CxN) porque uno está tomando en cuenta que $\lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$ no existe, pero sí que está acotado entre -1 y1 mientras que el otro no muestra importancia a lo que sucede con $\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$ cuando $x \to 0$.

Sustitución directa (SD). Esta tercera categoría se conforma por las respuestas de cuatro participantes en el cual sustituyen la variable x en la función como estrategia de resolución. Esta estrategia resulta no ser muy efectiva, ya que únicamente uno de ellos llega al resultado correcto.

Tabla 22

Categorías de la situación seis

Resolver el siguiente límite: $$\lim_{x\to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$$			
Categorías	Descripción	Ejemplo	Número de respuestas
SA	Los estudiantes no argumentan su respuesta, solamente escriben el resultado.	Registro de una solución:  Transcripción: $\lim_{x\to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$	correctas 11 incorrectas 0
a) CxA b) CxN	a) Separan en dos $\lim_{x\to 0} x^2$ y $\lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$, y encuentran el límite de cada uno de ellos, argumentan que el resultado es 0 puesto que cero multiplicando a un valor acotado	Registro de una solución:  Transcripción: $\lim_{x\to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$ ¨$\cos(\infty)$ *al igual que en el anterior tiene valores entre* -1 *y* 1. *Sin embargo, siempre es multiplicado por* 0. *Por tanto el resultado es* 0¨ Registro de una solución:	correctas 2 incorrectas 0 correctas 1 incorrectas 1

Resolver el siguiente límite: $$\lim_{x\to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$$			
Categorías	Descripción	Ejemplo	Número de respuestas
	siempre resulta 0. b) Prestan atención únicamente al x^2, obtienen su límite y argumentan que el resultado es cero porque cero multiplicado por cualquier cosa es cero	 Transcripción: $\lim_{x\to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$ ¨*ya que* x^2 *cuando el* $\lim_{x\to 0}$ *siempre sera* 0, *al insertar* 0 *en toda la ecuación ésta será multiplicada por* 0 (x^2) *por lo que* $\lim_{x\to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$	
SD	Sustituyen directamente $x = 0$ en la función	Registro de una solución:  Transcripción: $0^2 \cos\left(\frac{1}{0^2}\right) = 0$	correctas 1 correctas con argumentación errónea 2 incorrecta 1

Como en la situación cinco este límite involucra la función trigonométrica $coseno$ y otra vez se presenta el caso de que los estudiantes obtienen el resultado, pero no argumentan su respuesta (ver ejemplo de la categoría SA). De los que responden con un correctamente únicamente un 14.29% argumenta su respuesta mostrando un razonamiento adecuado. Se pretendía que para resolver este límite acudieran al uso del teorema del emparedado, como en la situación anterior, pero no fue así, nadie recurrió a las desigualdades para acotar el límite. Una posible razón por la cual ninguno utiliza esta técnica puede ser que al ver que la variable x tiende a cero, el límite de x^2 es cero, y cero por cualquier número finito es cero, por lo tanto, no le toman importancia al $coseno$.

Situación siete. Resolver el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{cos(x) - 1}{x}$$

Para la situación siete después de la codificación se agrupan las respuestas en cuatro categorías (ver Tabla 23). Las categorías creadas se denominaron de la siguiente forma*: Sin argumentos, Manipulación algebraica, Regla de L´Hôpital* y *sustitución directa.*

Manipulación algebraica (MA). Otra vez usamos el nombre manipulación algebraica, en este caso es para representar a los que hacen operaciones algebraicas como las que se describen en seguida. Son siete los participantes que emplean esta estrategia y los pasos que siguen son: multiplicar el cociente por el conjugado del numerador, después utilizan la identidad trigonométrica $1 - \cos^2(x) = sen^2(x)$ en el numerador para pasar a separar el límite en dos partes y por último evaluar en $x = 0$ la función. De los que optan por esta estrategia el 71.43% obtiene una respuesta correcta.

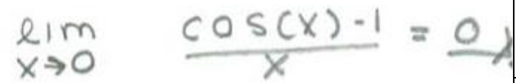
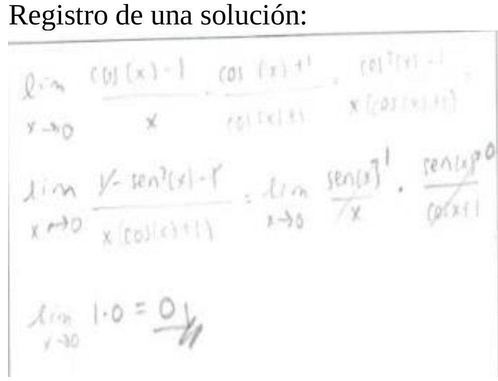
Sustitución directa (SD). Esta última representa a un solo participante que intenta encontrar el valor del límite sustituyendo $x = 0$ en la función. Esta técnica lo lleva a una idea falsa creer que $\frac{0}{0} = 1$, es decir que todo número entre si mismo es igual a uno.

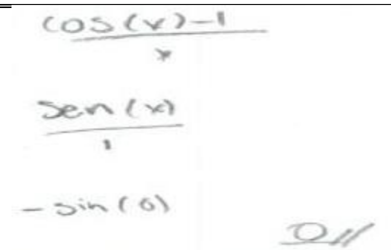
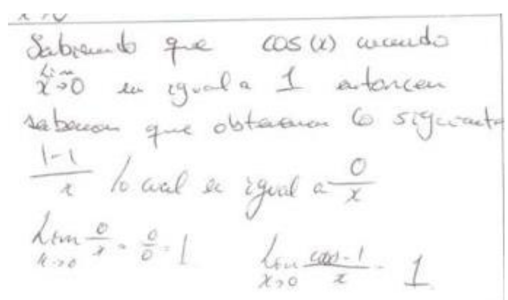
Tabla 23

Categorías de la situación siete

Resolver el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{cos(x)-1}{x}$$

Categorías	Descripción	Ejemplo	Número de respuestas
SA	Solamente ponen el resultado	Registro de una solución:  Transcripción: $\lim_{x\to 0}\frac{cos(x)-1}{x}=0$	correctas 6 incorrectas 3
MA	Los estudiantes multiplican por el conjugado del numerador, después separan el límite en dos partes y utilizan $\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}=1$.	Registro de una solución:  Transcripción: $\lim_{x\to 0}\frac{cos(x)-1}{x}\frac{cos(x)+1}{cos(x)+1}$ $=\frac{\cos^2(x)-1}{x(cos(x)+1)}$ $\lim_{x\to 0}\frac{1-sen^2(x)-1}{x(cos(x)+1)}$ $=\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}\frac{sen(x)}{\cos(x)+1}$ $\lim_{x\to 0}1*0=0$	Correctas 5 incorrectas 2
LH	Al encontrarse con la indeterminación $\frac{0}{0}$ recurren a la regla de L´Hôpital derivando el	Registro de una solución:	correctas 4 incorrectas

Resolver el siguiente límite: $$\lim_{x\to 0}\frac{cos(x)-1}{x}$$			
Categorías	Descripción	Ejemplo	Número de respuestas
	numerador y denominador.	 Transcripción: $\frac{cos(x)-1}{x}$ $\frac{sen(x)}{1}$ $-sen(0)=0$	0
SD	Sustituye directamente $x=0$ en la función.	Registro de una solución:  Transcripción: ¨$sabiendo\ que\ \cos(x)\ cuando\ \lim_{x\to 0} es\ igual\ a\ 1, entonces\ sabemos\ que\ obtendremos\ lo\ siguiente\ \frac{1-1}{x}\ lo\ cual\ es\ igual\ a\ \frac{0}{x}$¨ $\lim_{x\to 0}\frac{0}{x}=\frac{0}{0}=1$ $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x}=1$	correctas 0 incorrectas 1

No se presentaron muchos problemas para resolver la situación siete, se obtuvieron un total de 76.19% respuestas correctas quedando como la tercera situación mejor respondida. Por otro lado, es interesante que en las situaciones tres, cuatro, cinco y seis donde aparece este código de sin argumentos todos los que toman este camino tienen la respuesta correcta, a diferencia de esta situación donde bajó a un 66.6% la cantidad de respuestas correctas.

Parte II. Esta parte del capítulo corresponde a la categorización de las respuestas de las situaciones de la segunda parte del cuestionario. Además, se hace una clasificación de las respuestas basados en los primeros tres niveles de la taxonomía SOLO (preestructural, uniestructural, multiestructural) y se argumentará por qué pertenece a un cierto nivel.

Situación ocho. En tus palabras explica el significado de la siguiente expresión:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Después del proceso de codificación de las respuestas a la situación ocho, se crean cuatro categorías las cuales representan como definen los estudiantes el límite de una función cuando $x \to a$. Las categorías que surge de la comparación constante de los datos se les nombra: *Lectura de símbolos, Función evaluada, Dinámico* y *Otros.*

Las tablas (tablas 24, 26, 28) que se mostraran al inicio de cada una de las siguientes tres situaciones siguen el mismo formato que las tablas pasadas (tablas 17-23), la única diferencia recae en la última columna la cual ya no incluye la cantidad de respuestas correctas o incorrectas sino la frecuencia con la que aparece ese tipo de respuesta. La Tabla 24 contiene la situación planteada, las filas representan las categorías las cuales incluyen una descripción y una imagen de la respuesta que mejor la representa con su respectiva transcripción, por último, la frecuencia. A continuación, se describen las categorías creadas a partir de los datos.

Lectura de símbolos. Esta categoría contiene al conjunto de respuestas que describen el límite de una función por medio de lo que podríamos llamar una lectura de símbolos. Básicamente lo que hacen es pasar de símbolos matemáticos a lenguaje común, ver el ejemplo de esta categoría en la Tabla 24. Las respuestas de esta categoría muestran que algunos participantes al menos tienen la habilidad de leer expresiones matemáticas. Este tipo de respuesta es la que aparece con más frecuencia para esta situación con un tercio de la población respondiendo de esta forma.

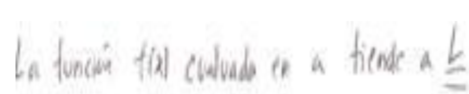
Función evaluada. Esta categoría simboliza a las respuestas que asocian el concepto de límite con el simple hecho de evaluar la función en el punto al que tiende x, ver imagen correspondiente a la categoría en la Tabla 24. Las respuestas de esta categoría muestran un manejo conceptual del límite bajo. La quinta parte de la población participante recurre a una explicación con un razonamiento de este estilo.

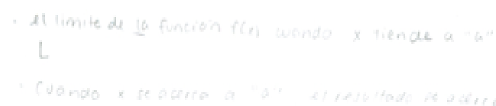
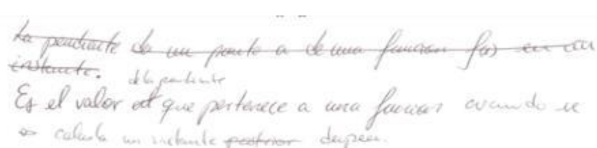
Dinámica. Esta categoría es la que menos incidencias tiene, sin embargo, es la que representa a las mejores respuestas. Mejores en el sentido de que la respuesta muestra un nivel de razonamiento poco más desarrollado pasa de ver el límite de una función como estático a un proceso dinámico. Se le nombra de esta forma ya que las dos respuestas consideran el límite como un proceso dinámico, donde x se aproxima a a causando que $f(x)$ se acerca a L. Basan el concepto de límite en el movimiento, usando la palabra ¨acercar¨, ver ejemplo de esta categoría en la Tabla 24.

Otros. Corresponde a las respuestas que no se pueden asociar con ninguna de las categorías anteriores. En esta recaen cuatro respuestas que son muy distintas a las demás.

Tabla 24

Categorías de la situación ocho

En tus palabras explica el significado de la siguiente expresión: $\lim_{x \to a} f(x) = L$			
Categorías	Descripción	Ejemplo	Frecuencia
Lectura de símbolos	Los estudiantes traducen los símbolos matemáticos en lenguaje común.	Registro de una solución: Transcripción: *El límite de $f(x)$ cuando x tiende a α es igual a L.*	7
Función evaluada	Los estudiantes asocian el límite con evaluar la	Registro de una solución:  Transcripción: *La función $f(x)$ evaluada en ¨ a¨ tienda a L.*	4

En tus palabras explica el significado de la siguiente expresión: $\lim_{x \to a} f(x) = L$			
Categorías	Descripción	Ejemplo	Frecuencia
	función en el punto a.		
Dinámico	Consideran el límite como un proceso dinámico, donde x se aproxima a a causando que $f(x)$ se acerca a L.	Registro de una solución:  Transcripción: *El límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a ¨a¨ es L.* *Cuando x se acerca a ¨a¨ el resultado se acerca a L.*	2
otros	Cada respuesta es distinta y no tiene similitudes con las de otras categorías	Registro de una solución:  Transcripción: *Ej. el valor de la pendiente que pertenece a una función cuando se calcula un instante después.*	4

Por otro lado, las respuestas de los estudiantes fueron clasificadas en distintos niveles de la taxonomía SOLO. Se clasifica basados en el nivel de razonamiento mostrado cuando describen el límite de una función. Si dieron una respuesta errónea (categoría: Otros) o no respondieron a la pregunta (categoría: Sin respuesta), entonces se clasificó en el nivel preestructural pues no muestran manejo alguno del concepto. Si la respuesta solo explica el límite como definición de libro de texto (categoría: Lectura de símbolos) o como evaluar la función en el valor $x = a$ (categoría: Función evaluada) se clasificó en uniestructural, puesto que parecen solo usar la terminología asociada, tener memorizada alguna definición de libro o solo conocer algún aspecto del concepto de límite de una función. Las respuestas que caen en el nivel multiestructural son las que muestran un manejo de distintas propiedades relacionadas con el concepto de límite (categoría: Dinámica), estos muestran tener un razonamiento más allá de una simple memorización o aplicación de un algoritmo. La Tabla 25 expone esta clasificación de manera resumida, los renglones están de menor a mayor en cuestión del nivel de razonamiento asociado al límite de una función. Los renglones contienen el nivel, el nombre de la categoría con su respectiva frecuencia y porcentaje de apariciones en el cuestionario. La estructura de esta tabla será utilizada nuevamente para las siguientes situaciones.

Tabla 25

Clasificación de respuestas de la situación ocho

En tus palabras explica el significado de la siguiente expresión: $$\lim_{x \to a} f(x) = L$$			
Clasificación	Categorías	Frecuencia	Porcentaje
Preestrucutral	Otros, Sin respuesta	8	38.10%
Uniestrucutral	Lectura de símbolos, Función evaluada	11	52.37%
Multiestrucutral	Dinámico	2	9.53%

Para la situación ocho la mayoría de las respuestas caen en el nivel uniestructural es decir que la mayoría únicamente utiliza un aspecto relevante con respecto al concepto de límite. La mayoría de los estudiantes aún no logra darle una interpretación propia al límite de una función.

Situación nueve. En tus palabras explica lo siguiente: El límite de $f(x)$ cuando x tiende a a no existe.

Al categorizar las respuestas a la situación nueve, identificamos cuatro categorías para representar el razonamiento de la población con respecto a la no existencia de un límite, nombrados de la siguiente manera: *Límites laterales, Indeterminación, Continuidad* e *Igual al conjunto vacío.* En la Tabla 26 se muestran las categorías con una breve descripción y una imagen escaneada de la respuesta que mejor la simboliza y la cantidad de veces que surge este tipo de respuesta. A continuación, se desarrollan cada una de las categorías para esta situación.

Límites laterales. En esta categoría caen las respuestas que relacionan la no existencia de un límite con la desigualdad de sus límites laterales, ver el ejemplo de esta categoría en Tabla 26. Es decir, los comentarios se centran en decir que el límite de una función no existe puesto los límites izquierdo y derecho son distintos. Más de la mitad de los estudiantes hacen referencia a esta propiedad de existencia del límite de una función para responder a la situación planteada.

Indeterminación. Esta categoría representa a las respuestas de los participantes que relacionan algún tipo de indeterminación en la función con la existencia del límite en el punto donde se indetermina. Las tres respuestas que caen en esta categoría se caracterizan por usar la palabra indeterminación, ver ejemplo en la Tabla 26. En las respuestas el principal argumento es que el límite no existe ya que existe una indeterminación debido a que x no puede ser igual a a, lo cual les impediría encontrar $f(a)$.

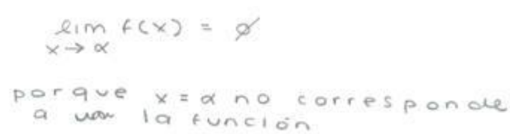
Continuidad. Esta tercera categoría representa a las respuestas ligan el concepto de continuidad en un punto con la existencia de un límite de una función en dicho punto. A pesar de que la continuidad se define a partir de un límite, las respuestas de esta categoría definen al límite por medio de la continuidad. Una respuesta explica que el límite no existe debido a que no la función no es continua en $x = a$ y la otra intenta reproducir la definición de continuidad en $x = a$, ver ejemplo en la Tabla 26.

Igual al conjunto vació. Esta última categoría surge al agrupar las respuestas que ligan la no existencia del límite de una función en un punto con el conjunto vacío. Las respuestas de esta categoría igualan el límite al conjunto vacío y uno usa el argumento que el límite no existe debido a que $x = a$ no pertenece a la función.

Tabla 26

Categorías de la situación nueve

En tus palabras explica lo siguiente: El límite de $f(x)$ cuando x tiende a a no existe			
Categorías	Descripción	Ejemplo	Frecuencia
Límites laterales	Las respuestas hacen referencia al análisis de los límites laterales para decidir sobre la existencia del límite.	Registro de una solución: Transcripción: *Cuando los límites unilaterales no son iguales, no existe el límite.*	11
Indeterminación	Los argumentos se caracterizan por relacionar la existencia de límite con una función indeterminada en el punto a.	Registro de una solución: Transcripción: *Esta indeterminado/ no (existen) porque no hay x´s en el límite y por eso el resultado es L / no es un es valor especifico.*	3
Continuidad	Justifican la no existencia del límite con la continuidad de la función en $x = a$.	Registro de una solución: Transcripción: *El límite no existe, esto se debe a que para que el límite exista es necesario cumplir 3*	2

En tus palabras explica lo siguiente: El límite de $f(x)$ cuando x tiende a a no existe			
Categorías	Descripción	Ejemplo	Frecuencia
		condiciones; la primera es que $f(a)$ exista, la segunda es que $f(x) = f(a)$ ...	
Igual al conjunto vacío	Igualan el límite al conjunto vacío.	Registro de una solución:  Transcripción: $\lim_{x \to a} f(x) = \phi$ *porque* $x = a$ *no corresponde a la función.*	2

Además, se clasifican las respuestas en función del nivel de razonamiento plasmado en sus respuestas con respecto a cómo explican que el límite de una función no exista en un cierto valor a. La clasificación se basa en la taxonomía SOLO y llevó a cabo del siguiente modo: las categorías sin respuesta, continuidad e igual al conjunto vacío se clasifican como preestructurales puesto que no manejan aspectos relevantes con respecto a la existencia del límite de una función. En un segundo nivel esta la categoría indeterminación, las respuestas de esta categoría únicamente exhiben conocer una propiedad que está asociada a que el límite de una función pueda no existir. Por último, la categoría límites laterales la situamos en el nivel multiestructural puesto que las respuestas, a pesar de que en la mayoría nomas muestran una propiedad, esta resulta ser esencial para que el límite no exista. La Tabla 27 expone esta clasificación de manera ordenada.

En esta situación la mayoría cae en un nivel multiestructural, parece ser que es más fácil decir que no es un límite que definir que si es un límite, esto al comparar con la situación ocho donde la mayor parte de las respuestas están en un nivel uniestructural.

Tabla 27

Clasificación de respuestas de la situación nueve

En tus palabras explica lo siguiente: El límite de $f(x)$ cuando x tienda a a no existe			
Clasificación	Códigos	Frecuencia	Porcentaje
Preestrucutral	Sin respuesta, Continuidad, Igual al conjunto vacío	7	33.33%
Uniestrucutral	Indeterminación	3	14.29%
Multiestrucutral	Límites laterales	11	52.37%

Situación diez. En tus palabras explica lo siguiente:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$$

Tras el análisis y categorización de las respuestas de la última situación, se crean tres categorías para agrupar las respuestas con distintos razonamientos de los estudiantes con respecto al resultado de un límite muy común en un curso y libro de cálculo. Se les asignaron las siguientes etiquetas a las categorías: *Dan por conocido*, *Regla de L´Hôpital* y *Dinámico.* En la Tabla 28 se resumen estas categorías a continuación se desarrollan las categorías mencionadas anteriormente de forma individual.

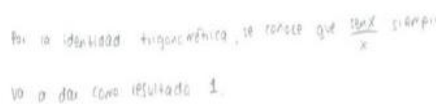
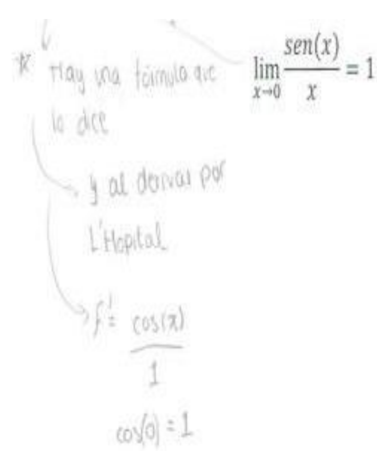
Dan por conocido. En esta categoría se ubican las respuestas que argumentan que el resultado del límite es uno debido a una identidad trigonométrica o una regla ya establecida, en otras palabras, creen que este límite es un tipo de axioma. Debido a que casi la mitad de los participantes utiliza una respuesta de este tipo nos hace creer que gran parte de la población no sabe cómo obtener este límite, sin embargo, lo conocen y lo dan como un hecho conocido o establecido.

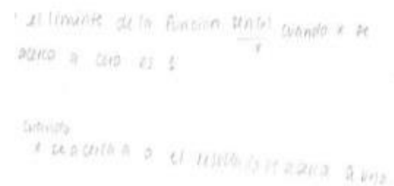
Regla de L´Hôpital. El nombre de esta categoría vuelve a resurgir en esta segunda parte del cuestionario, en este caso es para las respuestas que basan el resultado de este límite en la regla de L'Hôpital. Las respuestas argumentan que el resultado es uno ya mencionando explícitamente la regla o derivan la función y después aplicando el límite, ver ejemplo de esta categoría en la Tabla 28.

Dinámica. Como en la situación ocho, aparece nuevamente esta categoría. Aquí caen las respuestas que muestran que razonan el límite como un proceso dinámico. Con dinámico nos referimos a que existe un tipo de sentido del movimiento en sus respuestas: cuando los valores de x se acerca a 0 , el valor de la función se acerca a 1. Las respuestas de esta categoría se distinguen por utilizar la palabra acercar.

Tabla 28

Categorías de la situación diez

En tus palabras explica lo siguiente: $\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$			
Categoría	Descripción	Ejemplo	Número de respuestas
Dan por conocido	Los estudiantes están familiarizados con el resultado, pero no muestran saber cómo obtenerlo.	Registro de una solución:  Transcripción: *Por la identidad trigonométrica se conoce $\frac{sen(x)}{x}$ siempre va a dar como resultado 1.*	10
Regla de L´Hôpital	Argumentan que el resultado del límite es uno debido a la regla de L´Hôpital.	Registro de una solución:  Hay una fórmula que lo dice $\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x} = 1$ y al derivar por L'Hopital $f' = \frac{\cos(x)}{1}$ $\cos(0) = 1$	5

		Transcripción: *Hay una fórmula que lo dice y al derivar por L´Hôpital* $f' = \frac{cos(x)}{1}$ $cos(0) = 1.$	
Dinámico	Los estudiantes argumentan que cuando x se acerca a 0 la función se acerca a 1	Registro de una solución:  Transcripción: *El límite de la función* $\frac{sen(x)}{x}$ *cuando* x *se acerca a 0 es 1.* *Cuando* x *se acerca a ¨a¨ el resultado se acerca a uno.*	2

Por otra parte, la clasificación en niveles de respuestas a esta situación se llevó a cabo de la siguiente manera: las respuestas donde no se responde se clasifican como preeestrucutruales, pues no exteriorizan conocimiento alguno relacionado a este resultado; La clasificación uniestructural es para las respuestas que creen que este resultado es debido a una identidad trigonométrica es decir para las que caen en la categoría de dan por conocido ya que solo hacen mención de un aspecto relacionado al resultado; Por último las categorías dinámico y regla de L´Hôpital las clasificamos como multiestructural, por que muestran un razonamiento más desarrollado y basan su argumentación en propiedades relevantes del concepto del límite.

Tabla 29

Clasificación de respuestas de la situación diez

En tus palabras explica el significado de la siguiente expresión: $$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}=1$$			
Clasificación	Códigos	Total	Porcentaje
Preestrucutral	Sin respuesta	4	19.05%
Uniestrucutral	Dan por conocido	10	47.62%
Multiestrucutral	L´Hôpital, Dinámico	7	33.33%

Más del ochenta porciento de la población tiene una noción o reconoce el valor de este famoso límite de $\frac{sen(x)}{x}$, sin embargo, la mayoría cae un nivel uniestructural. Es decir, conocen el resultado y lo saben usar (basados en la situación 7) pero aún muestran saber cómo o de dónde proviene el resultado.

En la Tabla 30 se sintetizan las respuestas de las situaciones ocho a diez de la segunda parte del cuestionario. En esta tabla se muestran la categoría a la cual pertenece la respuesta que dio a cada situación cada uno de los participantes. Es importante destacar que no todas las categorías son susceptibles de usarse en todas las situaciones. La Tabla 30 lleva el siguiente formato: las filas representan a los estudiantes y las columnas las situaciones. Cada casilla tiene unas siglas las cuales representa a la categoría a cuál pertenece la respuesta. Las siglas representan los siguientes nombres: LL: límites laterales; DxC: dan por conocido; LS: lectura de símbolos; LH: L'Hôpital; D: dinámico; I: indeterminación; FE: Función evaluada; C: continuidad; ICV: igual al conjunto vacío; O: otros; SR: sin respuesta.

Tabla 30

Categorías de las situaciones ocho a diez

Estudiantes	**Situaciones**		
	S8	S9	S10
1	LS	I	LH
2	FE	LL	D
3	LS	LL	DxC
4	FE	LL	SR

Estudiantes	Situaciones		
	S8	S9	S10
5	O	LL	SR
6	FE	LL	DxC
7	SR	SR	LH
8	O	LL	LH
9	D	LL	LH
10	FE	SR	DxC
11	O	LL	DxC
15	O	LL	DxC
12	D	LL	D
13	SR	I	DxC
14	LS	ICV	DxC
15	O	LL	DxC
16	LS	LL	LH
17	LS	ICV	DxC
18	LS	C	DxC
19	SR	SR	SR
20	LS	C	SR
21	SR	I	DxC

La Tabla 31 presenta un resumen de la frecuencia de apariciones de las categorías de la Tabla 30. En esta tabla se pueden apreciar tanto el total de apariciones como la cantidad de apariciones por situación. Cada fila representa una categoría y las columnas las frecuencias totales por situación.

Tabla 31

Frecuencia de las categorías de las situaciones ocho a diez

Código	Frecuencia total	S8	S9	S10
LL: Límites laterales	11		11	
SR: Sin respuesta	11	4	3	4
DxC: Dan por conocido	10			10
LS: Lectura de símbolos	7	7		
LH: L´Hôpital	5			5
D: Dinámico	4	2		2
FE: Función evaluada	4	4		
O: Otros	4	4		

I: Indeterminación	3		3	
C: Continuidad	2		2	
ICV: Igual al conjunto vacío	2		2	
Total	63	21	21	21

La Tabla 32 presenta la clasificación, basada en la taxonomía SOLO, de las categorías de las situaciones ocho, nueve y diez. Esta nos permite observar de manera global en que clasificación se encuentra la mayor parte de las respuestas de la segunda parte del cuestionario. La distribución de respuestas en los niveles preestructural, uniestructural y multiestructural es muy pareja, la que destaca un poco mas es la segunda. La mayoría de las respuestas corresponde a un nivel uniestructural, el razonamiento y la producción de sentido del concepto de límite aún es bajo por parte de los estudiantes. Usualmente responden describiendo uno o un par de aspectos relevantes del límite de una función.

Tabla 32

Clasificación de las categorías de las situaciones ocho a diez

Clasificación	Códigos	Total	S8	S9	S10	Porcentaje
Preestrucutral	Continuidad, igual al conjunto vacío, otros y sin respuesta	19	8	7	4	30.15%
Uniestrucutral	Lectura de símbolos, función evaluada, indeterminación y dan por conocido	24	11	3	10	38.1%
Multiestrucutral	Dinámico, límites laterales, L´Hôpital	20	2	11	7	31.75%

Después de un trabajo de codificación y categorización basados en el método de comparación constante se categorizaron las respuestas a cada una de las situaciones planteadas. Basados en el análisis hecho a lo largo de este capítulo pasamos a las conclusiones de este trabajo de investigación.

Capítulo 5. Conclusiones

El concepto del límite es visto por muchos investigadores de educación y matemáticos como un concepto fundamental del cálculo. Lo anterior puede deberse a que otros conceptos como la derivada, la continuidad, la integral, la convergencia o la divergencia, considerados como conceptos importantes y principales en el cálculo, están definidos en términos del límite. El límite es, por tanto, un concepto pilar, pero que difícilmente produce sentido en los estudiantes. El límite tiene una historia muy larga y rica la cual refleja su complejidad. A los matemáticos les tomó siglos desarrollar la idea de límite y la definición que utilizamos en la actualidad tiene menos de dos siglos.

A través de distintas investigaciones hechas sobre límites se ha demostrado que la mayoría de los estudiantes no logra comprender en su totalidad este concepto (Cornu, 1991; Davis y Vinner, 1986; Tall y Vinner, 1981; Williams, 1991). Sin embargo, esto no les impide resolver ejercicios, resolver problemas y pasar sus exámenes. Gran parte de los libros y las estrategias de enseñanza del cálculo se enfocan en el aspecto manipulativo (algebraico) de los límites y no en producirle un sentido al estudiante. Esto puede generar que los estudiantes no entiendan la importancia de este concepto dentro del cálculo e impedirles que lo relacionen con otros conceptos.

Resumen del método de investigación

Este proyecto de investigación se llevó a cabo con estudiantes de ingeniería con los siguientes objetivos: observar y evaluar el desempeño de los estudiantes cuando calculan límites; caracterizar y analizar el razonamiento de los estudiantes con respecto a la definición informal del límite y algunas de sus propiedades; explorar cómo relacionan los estudiantes la definición informal con las propiedades del límite al momento de calcularlo.

Este es un estudio de tipo cualitativo (Denzin y Lincoln, 1994) y de manera precisa se toma un enfoque de estudio de caso (Stake, 1994). El caso estudiado es un conjunto de respuestas de un cuestionario (Anexo A) aplicado a un grupo de estudiantes de primer año de ingeniería en la Ciudad de México. El cuestionario estaba enfocado tanto a identificar cuál es la definición informal de límite que conocen los estudiantes, así como ciertas de sus propiedades, como a observar la manera en que lo calculan. El análisis hecho a las respuestas del cuestionario se basa en los procedimientos de codificación y categorización los cuales son recomendados en los pasos iniciales de la Teoría Fundamentada de Birks y Mills (2015). En nuestra investigación nos restringimos a describir la manera en la que los estudiantes resuelven problemas y a formular hipótesis e interpretaciones acerca de los razonamientos que subyacen a las descripciones.

Principales hallazgos de la investigación

Los hallazgos de nuestra investigación con respecto a cómo los estudiantes razonan y cómo el concepto de límite les produce sentido son similares a las descripciones que se encuentran en la literatura enfocada al límite. A continuación, se presentan dichos hallazgos:

Razonamiento dinámico. Varias respuestas de los estudiantes muestran que manejan un razonamiento dinámico del límite, cuando $x \to a$ la función $f(x) \to L$. Aquí un par de ejemplos de las respuestas de un estudiante que razona el límite como un proceso dinámico.

Respuesta a la situación ocho del estudiante 12:

- *Cuando x se acerca a ¨a¨ el resultado se acerca a L.*

Respuesta a la situación diez del estudiante 12:

- *El límite de la función $\frac{sen(x)}{x}$ cuando x se acerca a 0 es 1, cuando x se acerca a ¨a¨ el resultado se acerca a uno.*

Cottrill et al. (1996), apoyados en la teoría APOS, crean un esquema de seis pasos con el objetivo de que los alumnos construyan la definición formal de límite. A través de su investigación concluyen que para pasar a una concepción formal del límite es, al menos en parte, necesario el desarrollo de una concepción dinámica fuerte. Por otra parte, Jones (2015) dice que los estudiantes que adoptaron un enfoque dinámico para dar sentido a los problemas de límites en su estudio obtuvieron buenos resultados al proporcionar respuestas correctas y justificaciones adecuadas, así como al interpretar sus respuestas. Compartimos este punto de vista, y creemos que partir de un enfoque dinámico es necesario para avanzar en el estudio de este concepto. Por lo tanto, este par de respuestas muestran un nivel de razonamiento pertinente para un alumno de ingeniería que cursa su primer semestre de cálculo. A partir de este razonamiento dinámico las producciones de los estudiantes podrían llegar a un nivel relacional o abstracto extendido pertenecientes a los niveles más altos de la taxonomía SOLO de Biggs y Collis (1982).

Razonamiento covariacional. Se presentó un razonamiento covariacional por parte de los estudiantes al enfrentarse a un límite que no se puede resolver por medio de una manipulación algebraica. Las observaciones hechas por los estudiantes van en el sentido de cómo varía el numerador y denominador de la función $\frac{cos(x)}{x}$ mientras x tiende a infinito y a partir de dichas observaciones obtienen el valor del límite. A continuación, un par de respuestas de los estudiantes que ejemplifican este tipo de razonamiento.

Respuestas a la situación cinco por parte de los estudiantes 2 y 5, respectivamente:

- $\lim_{x\to\infty} \frac{cos(x)}{x} = 0$, *dado que* x *crece indefinidamente y el* $cos\ (x)$ *solo puede tener valores entre -1 y 1, el resultado es cero;*
- *Debido a que x tiende a ∞ y este cada vez aumenta su valor mientras que cos(x) dentro del 0 y 1,* $\frac{cos(x)}{x}$ *cada vez reduce su valor ya que x aumenta progresivamente* $\lim_{x\to\infty} \frac{cos(x)}{x} = 0$.

Los participantes que recurren a este tipo razonamiento, en gran parte, les permitió obtener un resultado correcto. Al igual que en Jones (2015), donde se trabaja este mismo límite, cuando uno de sus estudiantes (Gary) presta atención en cómo el numerador se mantiene entre menos uno y uno, y el denominador crece sin parar, deduce que la fracción estará limitada por números cada vez más pequeños y finaliza diciendo que el límite es cero. Jones (2015) concluye que este tipo de pensamiento permite aumentar la habilidad de pensar este tipo de límites.

Falsa concepción. Otro grupo de estudiantes creen que el valor del límite de una función en un valor determinado se calcula remplazando dicho valor en la función, es decir, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. En particular, en la situación cinco y ocho respondieron de la siguiente forma.

Respuestas a la situación cinco de los estudiantes 8 y 11, respectivamente:

- $\lim_{x\to 0} 0(\cos\left(\frac{1}{0}\right)) = 0$*;*

- $0^2(\cos\left(\frac{1}{0^2}\right)) = 0$.

Respuestas a la situación ocho de los estudiantes 4 y 12, respectivamente:

- *Límite de una función cuando x tiende a ¨a¨ es igual a el resultado de la función evaluada en ¨a¨;*

- *La función $f(x)$ evaluada en ¨a¨ tienda a L.*

Es importante retomar este tipo de respuesta, ya que es conveniente destacar la inconsistencia de las respuestas entre la primera parte y la segunda parte del cuestionario. La contradicción esta entre lo que hacen (técnicas) y lo que dicen (definiciones) los estudiantes. La primera parte que está enfocada en las técnicas para calcular límites, los límites que se propusieron no se pueden resolver por medio de una evaluación directa, a pesar de esto, la mayor parte de los estudiantes logran calcularlos sin problema alguno. En la segunda parte donde se les pide definir el significado del límite de una función y mencionan que un límite es igual a evaluar la función en el punto al cual la tienda a.

El límite depende de la continuidad. Al mismo tiempo, hay estudiantes que ligan el concepto del límite con el de continuidad. Este grupo de estudiantes tienen la idea de que una función debe de ser continua en un valor determinado para que pueda tener límite en ese punto. Se aprecia este tipo de razonamiento, en específico, en la situación nueve donde se les pide explicar que significa que una función no tenga límite en un cierto valor a. Se muestran a continuación partes de las respuestas donde estudiantes argumentan que el límite no existe debido a la continuidad de la función en dicho valor.

Respuestas de la situación nueve del estudiante 9 y18, respectivamente:

- *En el punto ¨a¨ de la recta existe una discontinuidad (asíntota);*

- *El límite no existe, esto se debe a que para que el límite exista es necesario cumplir 3 condiciones; la primera es que $f(a)$ exista, la segunda es que $f(x) = f(a)$.*

El primer estudiante dice que no existe el límite de una función en a debido a que hay una discontinuidad en el eje x. El segundo estudiante pretende argumentar que un límite no existe debido a que no cumple tres condiciones, estas condiciones que intenta replicar parecen ser las condiciones para que una función sea continua en un punto. A pesar de que la continuidad se define basada en el concepto del límite, estos estudiantes lo razonan de manera contraria, intenta definir la existencia del límite basado en el concepto de continuidad.

El límite en a implica que la función está definida en a. También, algunos estudiantes tienen la idea de que una función que está indefinida en un cierto valor determinado no puede tener límite. A continuación, dos extractos de lo que respondieron unos estudiantes a la situación nueve en donde se les pregunta cuándo un límite no existe.

Respuestas a la situación nueve de los estudiantes 9 y 17, respectivamente:

- *… en donde a no esta en el dominio de $f(x)$;*
- *… porque $x = a$ no corresponde a la función.*

Nuevamente existe una inconsistencia entre lo que hacen, aplicar técnicas algebraicas para encontrar un valor, y lo que dicen, cómo explican o definen ciertas propiedades del límite. En la primera parte del cuestionario la mayoría de los límites el valor al cual x tendía no pertenecía al dominio de la función y aun así los estudiantes lograban obtener el valor del límite. A pesar de esto, cuando se les pide explicar cuando un límite no existe, en la segunda parte del cuestionario, los participantes comentan que es debido a que el valor al cual x tiende no es parte del dominio.

Conflictos con el infinito. Por otro lado, se puede observar que el infinito crea conflictos en los estudiantes con base en la comparación de respuestas de las situaciones tres y cuatro, las cuales involucran el infinito. Es pertinente comparar estas dos situaciones, puesto que ambas tienen la misma estructura en el sentido de que se les pide hallar el límite de una función racional en donde x tiende a ∞. Al mismo tiempo, se pueden resolver por medio de las mismas técnicas algebraicas. Aun así, la cantidad de respuestas correctas entre estas situaciones disminuyó en un 23.8%. Llegamos a la conclusión que la diferencia se debe a que los estudiantes tienen problemas cuando el límite de una función no es un valor finito, es decir se va al infinito.

En general basados en las respuestas los estudiantes pueden calcular límites de funciones por medio de distintas técnicas, sin embargo, difícilmente les produce sentido este concepto.

Respuestas a preguntas de investigación

Con base en lo presentado en el capítulo de análisis y resultados, y los hallazgos mostrados anteriormente se responden a las preguntas de investigación planteada. Las preguntas de investigación son las siguientes:

- ¿Qué tipos de razonamientos muestran en sus respuestas estudiantes de ingeniería al calcular el límite de una función?
- ¿Qué tipos de razonamientos muestran los estudiantes de ingeniería para describir el concepto de límite de una función?
- ¿Qué relación hay entre las técnicas con las cuales los estudiantes de ingeniería calculan el límite de una función y el razonamiento que utilizan para describir el límite?

Para responder dichas preguntas recordamos que el razonamiento es un proceso, esto de acuerdo con la NCTM (2009) y lo presentado en marco conceptual de este trabajo. Teniendo esta definición en cuenta las respuestas de los estudiantes son el resultado de dicho proceso y por ello se infiere que las categorías creadas para cada situación es el producto de un tipo de razonamiento.

¿Qué tipos de razonamientos muestran en sus respuestas estudiantes de ingeniería al calcular el límite de una función? Para responder a esta pregunta hemos decido dividir los tipos de razonamientos exhibidos en las respuestas de los estudiantes en dos grupos lo cuales designamos los siguientes nombres: razonamiento algorítmico y razonamiento covariacional.

Razonamiento algorítmico. Consiste en el proceso en el cual el estudiante al enfrentarse con una situación rutinaria donde se le pide resolver el límite de una función implementa una serie de pasos algebraicos o algoritmos los cuales les permiten obtener el valor del límite. Los algoritmos son las técnicas algebraicas que se expusieron en el marco conceptual, y el capítulo de análisis y resultados (factorización, racionalización, términos de mayor grado del numerador y denominador, desigualdades y regla de L´Hôpital).

Este tipo de razonamiento fue el más frecuente entre los estudiantes al momento de calcular límites. En la mayoría de los casos este tipo de razonamiento basado en técnicas algebraicas parece funcionarles hasta cierto punto. Les permite resolver ejercicios típicos de un libro de cálculo como Stewart (2012), Thomas (2006) y Larson (2006) o un examen típico de un primer curso de cálculo.

Razonamiento covariacional. Este tipo de razonamiento surge cuando el razonamiento algorítmico no le es suficiente al estudiante para encontrar el límite de una función. Puesto que un algoritmo no es suficiente, lo siguiente que hacen es prestar atención a las distintas partes del límite, su atención se dirige a la función $f(x)$ y al valor al cual x tiende a. El proceso que llevan a cabo los estudiantes es poner su enfoque en dos cantidades de manera simultánea: observar la función y ver cómo sus valores se van modificando mientras x se acerca a un cierto valor.

¿Qué tipos de razonamientos muestran los estudiantes de ingeniería para describir el concepto de límite de una función? Se presentaron dos tipos de razonamientos por parte de los participantes para describir el límite de una función: razonamiento dinámico y razonamiento estático.

Razonamiento dinámico. Hay estudiantes que describen el límite como un proceso dinámico. Dinámico en el sentido que de Boester (2010) como una idea de límite basada en el movimiento. El razonamiento se centra en observar el resultado del proceso de acercar la variable x a un valor determinado a implicando que la función $f(x)$ se acerque a L. Podemos inferir que los que recurren a este tipo de razonamiento están conscientes al menos a un cierto nivel de que el límite es más que un simple cálculo algebraico.

Razonamiento estático. Los estudiantes ven el límite cómo algo estático, estático en el sentido de que no relacionan el concepto con un tipo de movimiento. En otras palabras, no hacen mención de que la función $f(x)$ o que la variable x se mueva, tienda o se acerque a un valor. El enfoque está centrado en el valor de la función en el valor al cual x tiende a, es decir $f(a)$. Solo presentan atención al valor final $f(a)$ y no lo que pasa con la función mientras x tiende a a. Pareciera que los alumnos perciben el concepto de límite como un conjunto de pasos o reglas algebraicas que les sirven para resolver una serie de ejercicios.

Este tipo de razonamiento parece estar relacionado a las falsas concepciones encontradas en los estudios de Williams (1991) y Cotrill et. al (1996) quienes se dan cuenta que existe la duda sobre si un límite se puede alcanzar o no. Los estudiantes que razonan el límite de manera estática pareciera que tiene la concepción de que un límite se debe alcanzar puesto que su atención está puesta en el valor final de la función.

Es importante resaltar que no necesariamente se identificó a un estudiante con un solo tipo de razonamiento, en muchos casos a lo largo del cuestionario presentaron dos o más tipos de razonamiento. Para lograr responder al cuestionario tuvieron que recurrir a distintos tipos de razonamientos lo que esto nos muestra en efecto este es un concepto difícil de comprender. Como dice Cornu (1992) el concepto de límite en particular es una noción difícil, típica del tipo de pensamiento requerido en las matemáticas avanzadas.

¿Qué relación hay entre las técnicas con las cuales los estudiantes de ingeniería calculan el límite de una función y el razonamiento que utilizan para describir el límite? Con base a la comparación de las respuestas de la primera y segunda parte del cuestionario concluimos que existe una ruptura muy notoria entre las técnicas y como los estudiantes definen y describen ciertas propiedades del límite. Se encontraron una serie de inconsistencia en las respuestas de los estudiantes entre como calculan el límite de una función y como la describen:

- Aseguran que el límite de una función en punto es igual a evaluar la función en dicho punto, a pesar de que en los límites que calcularon si se evaluaba la función en el punto se obtenía una indeterminación.
- Afirman que una función tiene límite en un punto solo si es continua en ese punto, sin embargo, a las funciones que se les pidió calcular su límite no eran continuas en esos puntos.
- Sostienen que una función debe estar definida en un cierto valor para que esta misma tenga límite, pese a que las funciones a las cuales les calcularon el límite no estaban definidas en dichos valores.

Limitaciones de la investigación

Originalmente el objetivo del proyecto de investigación era aplicar el cuestionario para observar e identificar dificultades alrededor del concepto de límite. Una vez identificadas estas dificultades el plan era desarrollar una serie de actividades para trabajar de manera individual y en grupo, y en donde ciertas tareas están apoyadas en la tecnología con herramientas cómo GeoGebra, las cuales permitirían reforzar y robustecer el razonamiento del estudiante permitiéndoles superar las dificultades. No obstante, la problemática de detectar y describir los razonamientos de los estudiantes fue suficiente para integrar el trabajo de tesis.

Por otro lado, una limitación del cuestionario fue que las situaciones elegidas son de tipo tradicional. Tradicionales en el sentido de que son problemas típicos de un primer curso de cálculo que se resuelven a lápiz y papel. También, hubiera sido interesante agregar el aspecto grafico del límite, esto podría haber permitido observar desde más ángulos cómo razonan los estudiantes alrededor de este concepto. Se podría haber comparado la parte algebraica, gráfica y su definición. Al mismo tiempo, hizo falta uso de la tecnología para redondear la investigación.

Recomendaciones para futuras investigaciones

A continuación, un par de recomendaciones para considerar si se pretende continuar con un estudio alrededor de este concepto del límite. Las siguientes recomendaciones nacen tras reflexionar sobre lo observado a lo largo de la investigación:

- Investigar cómo el razonamiento dinámico y covariacional del límite es utilizado por estudiantes cuando razonan, calculan e interpretan límites en el infinito o límites infinitos;
- Investigar el efecto que tiene el uso de la tecnología, por ejemplo, calculadoras gráficas como GeoGebra, podrían tener en la comprensión del concepto de límite por parte de los estudiantes.

Son dos las razones para la primera recomendación: por un lado, después de observar que las respuestas donde los estudiantes mostraban un razonamiento dinámico o covariacional, la mayoría del tiempo respondían de manera correcta; Por otro lado, el interés por el infinito surge tras ver una disminución de respuestas correctas y bien argumentadas entre los límites donde x tendía a un valor específico y donde x tendía a infinito. Por este par de razones, creo que sería de gran interés explorar cómo influye este tipo de razonamientos cuando se enfrentan a límites donde está involucra el infinito.

La segunda recomendación es por un par de motivos: de un lado la importancia del uso de la tecnología en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas; Por otra parte, en esta nueva época donde gran parte de las clases son en línea, es de gran importancia implementar aspectos tecnológicos en clase con herramientas como GeoGebra con el fin de que esta herramienta les ayude a los estudiantes a que este concepto les produzca sentido. Este tipo de herramientas son de gran utilidad y más hoy donde los estudiantes están estudiando de manera independiente y su herramienta más utilizada es una computadora.

Bibliografía

Bagni, G. (2005). The historical roots of the limit notion: Cognitive development and the development of representation registers. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *5*(4), 453-468. http://doi.org/10.1080/14926150509556675

Biggs, J. B. & Collis, K. F. (1982). *Evaluating de quality of learning. The SOLO taxonomy* (Structure of the Observed Learning Outcome). New York: Academic Press.

Birks, M. y Mills, J. (2015). *Grounded Theory. A practical guide.* London: Sage Publication, Inc.

Boester, T. (2010). Testing Conceptual Frameworks of Limit: A Classroom-Based Case Study. Proceedings of the 13th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education. Recuperado de http://sigmaa.maa.org/rume/crume2010/Archive/Boester.pdf

Boyer, C. B. (1959). *The history of the calculus and its conceptual development. New York: Dover.*

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*, 352–378.

Cornu, B. (1991). Limits. En J. Bishop & D. Tall (Eds.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-166). New York: Kluwer Academic Publishers.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols. D., Schwingendorf, K., Thomas, K. & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *Journal of Mathematical Behavior*, *15*, 167–192.

Davis, R. & Vinner, S. (1986). The notion of limit: Some seemingly unavoidable misconception stages. *Journal of Mathematical Behavior, 5*, 281–303.

Denzin, N. K., Lincoln, Y. S. (1994). Introduction. Entering the field of qualitative research. In N. K. Denzin, Y. S. Lincoln (eds.), *Handbook of Qualitative Research (1-17).* Thousand Oaks, CA: Sage Publication, Inc.

Fischbein, E. (1977). Image and concept in learning mathematics. Educational studies in mathematics, 8(1977), 153-165.

Glaser, B. G. (1965). The constant comparative method of qualitive analysis. *Social Problems*, *12*(4),436-445.

Glaser, B.G. (2002). Conceptualization: On theory and theorizing using grounder theory. *International Journal of Qualitive Methods, 1*(2), 23-38.

Jones, S. R. (2015) Calculus limits involving infinity: the role of students' informal dynamic reasoning, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 46:1, 105-126. http://doi.org/10.1080/0020739X.2014.941427

Kleiner, I. (2001). The Infinitely small and the infinitely large in calculus. *Educational Studies in Mathematics 48*(2-3), 137-174.

Kline, M. (1972). *Mathematical thought form ancient to modern times.* New York: Oxford University Press.

Larson, R. (2006). *Cálculo con geometría analítica*. México, D.F.: McGraw-Hill Interamericana Editores, S.A. de C.V.

NCTM. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM (2009). Reasoning and Sense Making. En (Eds.), *Focus in high school mathematics reasoning and sense making high school* (pp.3-7). Reston, Va: National Commission of Teachers of Mathematics.

Oehertman, M. (2003) Strong and weak metaphors for limits. En Pateman, N. A., Dougherty, B.J., & Zilliox, J. (Eds.) Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PMENA, 3, 397-404. Honolulu, HI: University of Hawaii.

Oehrtman, M. (2009). Collapsing dimensions, physical limitation, and other student metaphors for limit concepts. *Journal for Research in Mathematics Education*, *40*(4), 396-426.

Resnick, L. B., y Ford, W. W. (1991). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Barcelona: Paidós.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20-26.

Sofronas, K. S., DeFranco, T. C., Vinsonhaler, C., Gorgievski, N., Schroeder, L., & Hamelin, C. (2011). What does it mean for a student to understand the first-year calculus? Perspectives of 24 experts. *The Journal of Mathematical Behavior*, *30*(2), 131–148.

Spivak, M. (1996). *Cálculo infinitesimal.* México, D.F.: Reverté Ediciones, S.A. de C.V.

Stake, R. E. (1994). *Case studies*. En N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (p. 236–247). Sage Publications, Inc.

Stewart, J. (2012). *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas.* México, D.F.: Cengage Learning Editores, S.A. de C.V.

Swinyard, C. & Larsen, S. (2012). Coming to understand the formal definition of limit: insights gained from engaging students in reinvention. *Journal for Research in Mathematics Education*, *43*(4), 465-493.

Swinyard, C. A. & Lockwood, E. (2007). Research on students' reasoning about the formal definition of limit: An evolving conceptual analysis. *Proceedings for the Tenth Special Interest Group of the Mathematics Association of America on Research in Undergraduate Mathematics Education Conference.* Recuperado de http://sigmaa.maa.org/rume/crume2007/papers/lockwood-swinyard.pdf

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: functions, limits, infinity, and proof. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 495-511). New York: Macmillan.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.

Thomas G. (2006). *Cálculo de una variable*. Naucalpan de Juárez, Edo. de México: Pearson Educación de México, S.A. de C.V.

Williams, S. (1991). Models of limit held by college calculus students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*(3), 219–236.

Williams, S. (2001). Predications of the limit concept: An application of repertory grids. *Journal for Research in Mathematics Education*, *32*(4), 343–367.

Anexo 1. Cuestionario

Nombre: ____ Edad: _____

Responda estas preguntas lo mejor que pueda, no omitir pasos. Los resultados se utilizarán en un proyecto de investigación. Permanecerá anónimo durante toda la investigación. Gracias por su cooperación.

Resolver los siguientes límites:	
1. $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$	
2. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$	
3. $\lim_{x \to \infty} \frac{5x^3 + 3x + 2}{6x^3 - 2x^2 - 1}$	

4. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x+2}$	
5. $\lim_{x\to\infty} \frac{\cos(x)}{x}$	
6. $\lim_{x\to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$	
7. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x}$	

En tus palabras explica el significado de la expresión

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

En tus palabras explica lo siguiente: El límite de $f(x)$ cuando x tiende a a no existe.

En tus palabras que significa el siguiente resultado

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$$

Anexo 2. Temario

FUNCIONES

1. Definición. Dominio y Rango. Igualdad de funciones
2. Gráficas de funciones. Operaciones con funciones: suma, producto y cociente
3. Composición de funciones
4. Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas. Funciones pares e impares
5. Función signo, valor absoluto y mayor entero. Funciones lineales y cuadráticas
6. Algunas funciones racionales. Funciones paramétricas
7. Funciones trascendentes: trigonométricas, logarítmicas, exponenciales e hiperbólicas
8. Funciones implícitas. Funciones inversas

LÍMITES Y CONTINUIDAD

9. Definición y teoremas sobre límites
10. Límites de funciones racionales. Formas indeterminadas $\frac{0}{0}$
11. Funciones algebraicas y límites unilaterales
12. Límites al infinito y límites infinitos
13. Formas indeterminadas $\frac{0}{0}$ (funciones trigonométricas). El límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}$$

14. Continuidad de una función en un punto. Continuidad de una función en un intervalo. El teorema del valor intermediario

DERIVADAS

15. Definición de derivada. Derivabilidad y continuidad
16. Derivada de una función constante. Derivada de la función $f(x) = x^n$ (con n entero positivo)
17. Derivada de una suma de funciones. Derivada de un producto y de un cociente de funciones

18. Derivadas de las funciones trascendentes: trigonométricas, logarítmicas y exponenciales
19. Derivadas de funciones compuestas (Regla de la Cadena)
20. Derivadas de las funciones hiperbólicas. Derivadas de órdenes superiores
21. Derivadas de funciones implícitas. Derivada de la función $f(x) = x^n$ (con n real)
22. Derivadas de funciones inversas. Derivadas de funciones dadas en forma paramétrica

APLICACIONES GEOMÉTRIAS DE LA DERIVADA

23. Rectas tangente y normal a la gráfica de una función en un punto
24. Ángulo entre dos curvas. Teorema de Rolle
25. Teorema de Lagrange. Teorema de Cauchy
26. Regla de L'Hôpital. Funciones crecientes y decrecientes
27. Puntos críticos. Extremos absolutos de una función en un intervalo compacto. Extremos locales. Criterio de la primera derivada
28. Problemas de aplicaciones de máximos y mínimos. Sentido de concavidad de una curva
29. Puntos de inflexión. Asíntotas
30. Análisis general de las funciones y sus gráficas
31. La diferencial de una función. Interpretación geométrica y aplicaciones de la diferencial a cálculos aproximados
32. Velocidad y aceleración en el movimiento rectilíneo. La derivada como razón de cambio