



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
UNIDAD ZACATENCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA**

**“Acercamiento a ideas matemáticas en un entorno
no-escolar a través de una aplicación con formato
de exhibición interactiva”**

TESIS

Que presenta

KARINA OCAÑA IZQUIERDO

**Para obtener el grado de
DOCTORA EN CIENCIAS**

**EN LA ESPECIALIDAD DE
MATEMÁTICA EDUCATIVA**

Directora de la Tesis: DRA. MARÍA TERESA ROJANO CEBALLOS

Ciudad de México

mayo de 2022

RESUMEN

El estudio de las matemáticas dentro de un salón de clases no siempre resulta una situación cómoda y amigable para todos los alumnos. Estudios realizados en diferentes áreas del conocimiento han demostrado que el acercamiento a varias materias y disciplinas, incluidas las matemáticas, se facilita dentro de un entorno lúdico que rompa con la formalidad y el rigor de la escuela. Las aportaciones que ofrecen los museos y centros de ciencias con sus exhibiciones interactivas son un importante recurso para la comunicación de ideas matemáticas.

En esta investigación, se desarrolló una herramienta digital (aplicación de software), con las características propias de una exhibición interactiva y aprovechando las propiedades de la saliencia visual de las representaciones de los objetos matemáticos. El objetivo de desarrollar esta herramienta es el de acercar a los usuarios a tres ideas poderosas en matemáticas (variación, generalización y procesos infinitos). Para el análisis de los datos obtenidos, se adoptó la perspectiva teórica de J. Kaput sobre el uso de tecnologías digitales (Kaput et al., 2007) y representaciones gráficas para el aprendizaje de ideas matemáticas (Kaput & Roschelle, 2013). En cuanto al análisis relacionado con los conceptos de ideas poderosas en matemáticas se utiliza el enfoque teórico de Skovsmose & Valero (2002).

Para este estudio cualitativo, la obtención de datos se llevó a cabo de forma automatizada mediante la herramienta, por observación directa y a través de un protocolo de entrevista aplicado a cada usuario participante en la sesión principal de pruebas. Las pruebas se llevaron a cabo de forma individual y vía internet, debido a la situación derivada del COVID-19. El grupo de participantes en la toma definitiva de datos estuvo conformado por cinco estudiantes de bachillerato y uno de licenciatura. Las aportaciones durante su interacción con la herramienta y durante las entrevistas se analizan en el capítulo 7 de forma general y a detalle se presentan tres casos significativos.

Gracias a los resultados obtenidos en el análisis de datos, se pudo observar el grado de acercamiento presentado por los usuarios a los temas expuestos por la herramienta y con ello corroborar las posibilidades que ofrece la aplicación desarrollada para aproximar a los visitantes de un museo a ideas matemáticas, en un periodo corto de tiempo.

ABSTRACT

Studying mathematics in a classroom, is not always a friendly and comfortable experience for students. Studies conducted in different areas of knowledge have shown that the approach to various subjects, including math, is facilitated when it takes place within a playful environment that breaks the formality and strictness required by schools. Science centers and museums can contribute with interactive exhibits as an important resource to communicate mathematical ideas.

In this research, a digital tool (software application) was developed, with all the features of an interactive exhibit, and taking advantage of the properties of visual salience of the mathematical object representations. The aim of developing this tool, is to help visitors approach three mathematical powerful ideas (variation, generalization, and infinite processes). In order to analyze the collected data, we used the theoretical perspective of J. Kaput about the use of digital technologies (Kaput et al., 2007) and graphical representations assisting the learning process of mathematical ideas (Kaput & Roschelle, 2013). For the analysis related to the concept of powerful mathematical ideas, the theoretical context of Skovsmose and Valero (2002) is used.

In this qualitative study, data was collected automatically with the developed application, by direct observation and through a semi structured interview with each participant during the main test sessions. The test took place individually online, due to the COVID-19 lockdown.

The main test partakers were five high school, and one undergraduate, students. Their contributions made while interacting with the application and during the interviews are broadly analyzed in chapter 6, additionally three significant cases are examined deeply.

As a result of the data analysis, we were able to observe users' approach to the topics included in the tool and we also confirmed the possibilities offered by the application to engage museum visitors with mathematical ideas in a short amount of time.

ÍNDICE

Resumen	iii
Abstract	iv
Índice	v
Lista de Figuras	viii
Lista de Tablas.....	ix
Agradecimiento a Conacyt	x
1. Introducción.....	1
2. OBJETIVOS	3
3. ANTECEDENTES. Aprendizaje matemático, tecnologías digitales y ambientes <i>Out-of-school</i>.....	4
3.1. Aprendizaje, tecnologías digitales y matemáticas fuera de la escuela	5
3.1.1. Teorías educativas o del aprendizaje	5
3.1.2. Entornos tecnológicos de aprendizaje.....	8
3.2. Aprendizaje matemático <i>Out-of-School</i>	10
3.2.1. Matemáticas no escolares	11
3.2.2. Hogar	12
3.2.3. Videojuegos	13
3.2.4. Museos interactivos	14
3.3. Variación, generalización y procesos infinitos	16
3.3.1. Variación.....	16
3.3.2. Generalización	18
3.3.3. Procesos Infinitos.....	20
4. PERSPECTIVA TEÓRICA. Ideas poderosas en matemáticas, tecnología y saliencia visual	21
4.1. Perspectivas teóricas. Tecnología y enseñanza de las matemáticas	21

4.2. Ideas poderosas y el papel de la tecnología.....	24
4.2.1. Las ideas poderosas en el trabajo de Papert	24
4.2.2. La perspectiva de Skovsmose y Valero.....	25
4.2.3. La visión de James Kaput.....	25
4.3. Atención y saliencia visual.....	26
4.4. Concepción/definición del IIPM (Interactivo Ideas Poderosas en Matemáticas)	28
4.5. Preguntas de investigación	31
5. METODOLOGÍA	32
5.1. Consideraciones sobre saliencia visual	34
5.2. Consideraciones sobre la exhibición interactiva	37
5.3. Pruebas	37
5.3.1. Pruebas preliminares (exploratorias y piloto)	39
5.3.2. Prueba principal.....	43
6. DISEÑO Y OPERACIÓN IIPM (Interactivo Ideas Poderosas en Matemáticas)	45
6.1. Descripción de la herramienta.....	45
6.2. Diseño, estructura y construcción	49
6.3. Operación	52
7. ANÁLISIS Y RESULTADOS. PRUEBA PRINCIPAL y casos seleccionados. 62	
7.1. Análisis por contraste de tres fuentes independientes	63
7.2. Momentos significativos durante la participación de los usuarios.....	76
7.2.1. VARIACIÓN 1 / VARIACIÓN 2 / VARIACIÓN 3	76
7.2.2. GENERALIZACIÓN 1 / GENERALIZACIÓN 2 / GENERALIZACIÓN 3	80
7.2.3. Procesos infinitos	84
7.3. Casos seleccionados	86
7.3.1. Caso: Antonio.....	86
7.3.2. Caso: Nancy	100
7.3.3. Caso: José.....	109
7.4. Observaciones a resultados obtenidos.....	123
8. DISCUSIÓN DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES.....	126

8.1. Discusión de resultados	126
8.2. Conclusiones	128
8.3. Trabajos a futuro	134
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	136
Apéndice A. Protocolo de entrevista aplicado	147
Apéndice B. Entrevistas	151
B.1. Transcripción Caso Antonio	151
B.2. Transcripción Caso Nancy	157
B.3. Transcripción Caso José	164

LISTA DE FIGURAS

Figura 4.1 Modelo adaptado de Rotman, propuesto por Meagher (2006)	23
Figura 4.2 Modelo de aprendizaje y desarrollo en museos y centros de ciencia y tecnología, “ <i>Model of learning and development at STCs and museums</i> (Jakobsson et al., 2012)	29
Figura 5.1 Diagrama metodológico.....	33
Figura 5.2 Ejemplo de pantalla original y de mapas de saliencia visual obtenidos	35
Figura 6.1 Propuesta del modelo de enseñanza de la herramienta IIPM.	48
Figura 6.2 Pantalla del experimento 1 de variación y su tabla de la base de datos.....	49
Figura 6.3 Secuencia de pantallas. Versión final de la herramienta.	50
Figura 6.4 Diagrama de la base de datos operando en la versión final	51
Figura 6.5 Diagrama de operación e interactividad de la herramienta, versión final.	53
Figura 6.6 Tres primeras pantallas de la aplicación	54
Figura 6.7 Pantallas del experimento 1 sobre variación. Inicio y fin del experimento.	55
Figura 6.8 Pantallas del experimento 2 sobre variación. Inicio y fin del experimento	56
Figura 6.9 Pantallas del experimento 3 sobre variación. Desarrollo y fin del experimento	56
Figura 6.10 Pantallas del experimento 1 sobre generalización. Desarrollo y fin del experimento.	57
Figura 6.11 Pantallas del experimento 2 sobre generalización. Desarrollo y fin del experimento.	58
Figura 6.12 Pantallas del experimento 3 sobre generalización. Desarrollo y fin del experimento.	58
Figura 6.13 Pantallas del experimento sobre procesos infinitos. Desarrollo y fin del experimento.	59
Figura 6.14 Propuesta de la exhibición interactiva para museo.	61

LISTA DE TABLAS

Tabla 5.1 Resumen de pruebas realizadas	38
Tabla 5.2 Participantes en la Prueba 4.....	43
Tabla 7.1 Datos y Análisis, usuario: Óscar.....	63
Tabla 7.2 Datos y Análisis, usuario: Antonio.....	65
Tabla 7.3 Datos y Análisis, usuaria: Vicky	68
Tabla 7.4 Datos y Análisis, usuaria: Nancy.....	70
Tabla 7.5 Datos y Análisis, usuario: José	72
Tabla 7.6 Datos y Análisis, usuario: Alex	74
Tabla 7.7 Grandes Momentos. Tema: Variación.....	77
Tabla 7.8 Grandes Momentos. Tema: Generalización	82
Tabla 7.9 Grandes Momentos. Tema: Procesos Infinitos.....	85
Tabla 7.10 Datos y análisis por contraste de tres fuentes independientes. Caso Antonio	89
Tabla 7.11 Grandes Momentos (Variación). Caso Antonio	92
Tabla 7.12 Grandes Momentos (Generalización). Caso Antonio.....	94
Tabla 7.13 Grandes Momentos (Procesos Infinitos). Caso Antonio	95
Tabla 7.14 Datos y análisis por contraste de tres fuentes independientes. Caso Nancy.....	101
Tabla 7.15 Grandes Momentos (Variación). Caso Nancy.....	104
Tabla 7.16 Grandes Momentos (Generalización). Caso Nancy.....	105
Tabla 7.17 Grandes Momentos (Procesos Infinitos). Caso Nancy	106
Tabla 7.18 Datos y análisis por contrastación de tres fuentes independientes. Caso José	110
Tabla 7.19 Grandes Momentos (Variación). Caso José.....	114
Tabla 7.20 Grandes Momentos (Generalización). Caso José	116
Tabla 7.21 Grandes Momentos (Procesos Infinitos). Caso José.....	117

AGRADECIMIENTO A CONACYT

Se agradece al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por su apoyo para la realización de este trabajo, mediante la Beca Número **638514**.

1. INTRODUCCIÓN

Acercar a la población en general a temas de ciencia, tecnología e ingeniería siempre ha sido un reto importante, más aún cuando se trata de matemáticas. Bajo este esquema, los museos y centros de ciencia juegan un rol relevante, puesto que tienen la capacidad de ofrecer recursos que permiten dicho acercamiento en un contexto *out-of-school*. Se utilizará el término *out-of-school* (en inglés), para toda aquella actividad educativa que se realiza fuera de la escuela, en contextos como: hogar, comercio, museos y cualquier otro entorno en el que se pueda producir conocimiento, fuera del rigor escolar.

En esta investigación doctoral se investigaron los procesos de acercamiento y apropiación de ideas poderosas en matemáticas en ambientes *out-of-school*, a través de la interacción de los sujetos con una herramienta digital. La cual cuenta con las características necesarias para ser considerada una exhibición interactiva como las que ofrecen los museos y centros de ciencias.

Desde el ámbito de la saliencia perceptual se desarrolló una herramienta tecnológica diseñada bajo los principios de la educación no formal y con el formato de una exhibición interactiva. Esto permite acercar a los usuarios de una manera lúdica y sin el rigor escolar a ideas poderosas en matemáticas. Los tres temas seleccionados e integrados a la aplicación son: variación, generalización y procesos infinitos.

Como parte del proceso de diseño e implementación de la herramienta, se consideró realizar las modificaciones y ajustes necesarios, que permitieran llegar a una versión adecuada para llevar a cabo la toma principal de datos. Se hace especial énfasis en este punto, dado que la aplicación se desarrolló especialmente para poder efectuar esta investigación. Para su diseño se tomaron en cuenta elementos de saliencia visual de los experimentos planteados y se incorporó la función de toma automatizada de datos mientras el usuario interactúa con ella.

Esta tesis se encuentra estructurada de la siguiente manera: En el capítulo 2 se presentan los objetivos de este trabajo doctoral. En el capítulo 3 se presenta una revisión de la

literatura, que aborda los entornos no escolares, los ambientes tecnológicos utilizados para la enseñanza de las matemáticas, así como la presencia de estas en la vida cotidiana. En el capítulo 4 se expone el sustento teórico para esta investigación, considerando la perspectiva de Skovsmose y Valero (2002) y J. Kaput et al (2007; 2013) sobre las ideas poderosas en matemáticas y el papel de la tecnología, respectivamente. También se incluyen consideraciones sobre cognición y saliencia visual, así como una sección en donde se describe la concepción y definición de la herramienta desarrollada.

En el capítulo 5 se plantea la metodología utilizada para llevar a cabo esta investigación, desde el diseño y desarrollo de la herramienta hasta la toma de datos y su respectivo análisis. Posteriormente, en el capítulo 6 se explica el diseño, la construcción y la operación de la aplicación desarrollada (Interactivo Ideas Poderosas en Matemáticas), así como una sección destinada a todas las pruebas realizadas.

Los datos recabados en la prueba principal se analizan en el capítulo 7. En él, también se presenta una selección de tres casos significativos, los cuales se examinan a detalle. El formato del protocolo de entrevista aplicado en la prueba principal se anexa en el apéndice A, mientras que las transcripciones de las entrevistas de los casos seleccionados se encuentran en el apéndice B.

Finalmente, en el capítulo 8 se presentan la discusión de resultados, las conclusiones y los trabajos a futuro que pueden derivar de esta investigación.

2. OBJETIVOS

General:

Investigar de qué manera, la interacción de los sujetos con entornos tecnológicos de aprendizaje propicia procesos de acercamiento a ideas poderosas en matemáticas, fuera del ambiente escolar.

Específicos:

1. Estudiar el caso en el que los ambientes tecnológicos están representados por una exhibición interactiva, como las expuestas en museos y centros de ciencia y tecnología.

2. Desarrollar y probar una aplicación diseñada desde una perspectiva de la educación no formal, en la cual se utilicen elementos de saliencia visual, y desarrollada con formato de exhibición interactiva, que presente experimentos relacionados con variación, generalización y procesos infinitos.

3. Verificar el desempeño de la aplicación desarrollada, a través del análisis de datos obtenidos en la etapa experimental.

3. ANTECEDENTES. APRENDIZAJE MATEMÁTICO, TECNOLOGÍAS DIGITALES Y AMBIENTES *OUT-OF- SCHOOL*

En este capítulo se presenta una revisión de la literatura sobre la problemática del rechazo a las matemáticas, del uso de entornos no escolares de aprendizaje, sobre teorías del aprendizaje, ambientes tecnológicos y la presencia de las matemáticas en ambientes de la vida cotidiana. Esta revisión tiene la finalidad de mostrar un panorama sobre las posibilidades de entornos *out-of-school* que pueden apoyar el acceso a ideas matemáticas.

Tal y como lo refiere Tracey Wright, cualquier cosa puede ser “matematizada” (Nielsen, 2015), pero en la mayoría de los casos se utilizan temas de álgebra, datos (obtención y manipulación) y mediciones, además, los profesores pueden dedicar poco tiempo para profundizar en estas actividades. Wright manifiesta (Nielsen, 2015) que dichas actividades, representan una gran dificultad en su comprensión por parte de los alumnos, sin embargo, puede decirse que casi cualquier tema relacionado con las matemáticas puede resultar problemático para una parte importante de la población, sean estudiantes o no.

Dada esta problemática, educadores, investigadores y estudiosos de diversas áreas se han dedicado a buscar formas innovadoras de enseñar ciencias y matemáticas al público en general. De acuerdo con Sutherland et al. (2009), el aprendizaje se localiza en múltiples sitios o localidades y se compone de diversos elementos, no sólo tiene lugar en las escuelas, a esto se le considera “ensamblaje”. Entender la relación que existe entre el aprendizaje en casa y el aprendizaje en la escuela, requiere involucrarse con preguntas, conocimiento, y la exploración de formas en que las diferentes prácticas y conceptos son permitidos, negociados y transformados, conforme se van moviendo de una parte a otra.

Dentro de la idea de ensamblaje, a un museo también se le está considerando como sitio que propicia el aprendizaje, la definición vigente del *ICOM (International Council of Museums)* señala que:

“un museo es una institución sin fines lucrativos, permanente, al servicio de la sociedad y de su desarrollo, abierta al público, que adquiere, conserva, investiga, comunica y expone el patrimonio material e inmaterial de la humanidad y su medio ambiente con fines de educación, estudio y recreo” (*Definición de museo - ICOM, 2019*).

Los ambientes diseñados para el aprendizaje fuera del entorno escolar, tales como las exhibiciones de matemáticas en los museos, son un recurso en el que puede generarse un pensamiento rico y un razonamiento matemático. A diferencia de las escuelas, este tipo de instalaciones ofrece a los individuos la oportunidad de escoger libremente cómo, cuándo, dónde y con quién aprender. De igual manera, estos recintos pueden ofrecer alternativas que en un salón de clases no podrían estar disponibles fácilmente, como son experiencias matemáticas producidas de manera kinestésica y social (Pattison et al., 2017).

A continuación, se revisarán algunos conceptos relacionados con teorías del aprendizaje, herramientas tecnológicas de software que se han venido utilizando a lo largo de ya varios años y se presentan cuatro distintos escenarios fuera del entorno escolar en donde puede darse el aprendizaje de las matemáticas.

3.1. APRENDIZAJE, TECNOLOGÍAS DIGITALES Y MATEMÁTICAS FUERA DE LA ESCUELA

3.1.1. Teorías educativas o del aprendizaje

Las teorías del aprendizaje son marcos conceptuales que describen cómo el conocimiento se construye, se procesa y se mantiene durante el aprendizaje. Las teorías sobre el aprendizaje que resultan de interés para esta investigación son las siguientes: Constructivista, Construccinista, Teoría de John Dewey, Sociocultural del Aprendizaje y Desarrollo Cognitivo. Fueron seleccionadas dadas sus características y que proveen visiones prácticas sobre el aprendizaje y presentan aplicaciones directas en el diseño de exhibiciones interactivas (Russell, 1999).

Jean Piaget, fundador de la perspectiva constructivista, demostró que los niños generalmente entienden los conceptos matemáticos en forma muy diferente a como lo hacen los adultos. De acuerdo con esta perspectiva, el conocimiento de los niños no sólo es cuantitativamente diferente, sino también cualitativamente diferente del de un adulto; esa misma teoría señala que el conocimiento matemático involucra una forma distinta de interacción a la del conocimiento físico (Ginsburg & Opper, 1988). El constructivismo se centra en caracterizar el crecimiento cognitivo de los niños, especialmente en el crecimiento de su entendimiento conceptual. Una suposición básica es que el conocimiento no se comunica, sino que se construye y reconstruye por individuos únicos; esto es, que el conocimiento se obtiene por un proceso activo de construcción, más que por una pasiva asimilación de información o memorización. El aprendizaje se entiende como un proceso de crecimiento conceptual que generalmente involucra la reorganización de conceptos en la mente del educando y un crecimiento general en las habilidades cognitivas, tales como estrategias en la solución de problemas y mecanismos en los que los sujetos reflexionen sobre sus procesos de pensamiento y la propia forma de aprender (Even & Tirosh, 2002).

En ambientes no formales de aprendizaje, esta teoría es particularmente tomada como referencia, ya que los entornos de aprendizaje constructivistas son diseñados para proveer a los estudiantes con oportunidades para construir el entendimiento conceptual y para fomentar la resolución de problemas y habilidades de razonamiento (Even & Tirosh, 2002).

El construccionismo, de acuerdo a Papert (Sacristán, 2018) comparte el concepto de aprendizaje del constructivismo, sin embargo, agrega la idea de que este procedimiento de aprendizaje se lleva a cabo de manera más oportuna en un contexto en el que el aprendiz se involucra de manera consciente en construir una entidad pública. A través de medios digitales e interactivos, es posible llevar a cabo exploraciones, modelizaciones y colaboraciones que permitan abordar problemas matemáticos (Sacristán, 2018).

La siguiente teoría por considerar, es la desarrollada por John Dewey sobre experiencia, reflexión y aprendizaje, la cual enfatiza los aspectos experimentales del aprendizaje. En esta perspectiva se considera que el aprendizaje es el resultado de la reflexión sobre nuestras experiencias, a medida que nos esforzamos por darles sentido (Dewey, 1997).

De acuerdo con Dewey (1997) y Russell (1999), los educadores deben estructurar los ambientes de aprendizaje de tal manera que logren atrapar al alumno en cuestionamientos

que los guíen hacia un mayor conocimiento, punto que también resulta importante tomarlo en cuenta para ambientes no escolarizados.

Lev Vygotsky, según Russell (1999), elaboró una teoría sociocultural del desarrollo cognitivo, que se reconoce como una teoría práctica de enseñanza y aprendizaje en literatura de tecnologías educativas y de información, y que también es denominada Teoría Sociocultural del Aprendizaje. Vygotsky señalaba que el desarrollo del pensamiento es determinado por las herramientas lingüísticas y la experiencia sociocultural del niño (Vygotsky & Kozulin, 1986). Además, dentro de esta misma perspectiva teórica, Vygotsky y Kozulin (1986) afirman que el desarrollo de la inteligencia depende de la estructura del pensamiento y argumentan que el aprendizaje humano depende del desarrollo. Por otra parte, Vygotsky y Cole (1978) proponen que el desarrollo presupone una naturaleza social en específico y un proceso en el que los niños crecen intelectualmente gracias a lo que los rodea.

Fuera del ambiente escolarizado esta teoría resulta también de una importante influencia, ya que el desarrollo social y cognitivo del estudiante se lleva a cabo a través de un desdoblamiento de capacidades, mediante influencias recíprocas del educando y el entorno social. Por medio de la intervención guiada, las funciones mentales superiores que son parte de la herencia social y cultural del alumno, que cambian de ser reguladas por la sociedad a ser auto-reguladas (Russell, 1999).

La Teoría de Bruner o del Desarrollo Cognitivo, sostiene que el desarrollo mental del niño implica que este genera una construcción de un modelo del mundo que le rodea. Este investigador establece que hay dos modos de pensamiento, uno de ellos es el lógico-científico, el cual emplea la conceptualización o categorización, así como los procedimientos mediante los cuales se generan y relacionan las categorías; esto es realizado por el mismo educando (Bruner, 1960).

Al momento de mencionar “el mundo”, Bruner, según explica Russell (1999), no sólo se refiere a ambientes formales y escolarizados, sino que también a todo ese entorno *out-of-school*. Lo anterior se enfatiza en los sistemas de codificación, pues Bruner asume que estos facilitan la transferencia, realzan la retención e incrementan la motivación y solución de problemas.

Las teorías anteriormente expuestas permiten explicar las distintas formas en que cada individuo puede acercarse, a construir y procesar cualquier clase de conocimiento (Russell, 1999). Cabría señalar que estas formas de construcción y procesamiento de conocimiento, hoy en día se complementan de manera importante con el uso de nuevas tecnologías.

Algunos elementos de las teorías consideradas en esta sección se han tomado como referencia para el desarrollo de la presente investigación.

3.1.2. Entornos tecnológicos de aprendizaje

Mariotti (2002) señala que el impacto que han tenido las nuevas tecnologías permitirá que estas sigan siendo parte del ámbito escolar y por consiguiente continuarán influenciando la educación matemática. La utilización de artefactos y opciones tecnológicas ha permitido cambiar los enfoques en cuanto a la presentación, planteamiento y resolución de ejercicios matemáticos, y por consiguiente incidir en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

La utilización de equipos de cómputo y el software utilizado por los mismos proveen formas de experimentar modelos matemáticos que hace algunos años no era posible, ni siquiera ser imaginados. El efecto es tan fuerte que nos lleva a hablar de un realismo matemático experimental nuevo. Las concepciones abstractas y formales se vuelven enormemente accesibles cuando se presentan con una computadora, proporcionando una correcta impresión por la directa manipulación de objetos y relaciones matemáticas. La extensión y versatilidad de los nuevos métodos ha cambiado la relación tradicional entre los procesos cognitivos y las representaciones matemáticas (Mariotti, 2002).

Muchos han sido los programas de cómputo, aplicaciones e incluso videojuegos que se han venido desarrollando a lo largo de los años, para la enseñanza de las matemáticas, que van desde niveles básicos hasta muy avanzados. Dentro de toda esta gama, se seleccionaron cuatro ejemplos, por el impacto que han tenido y que en los siguientes párrafos se da una breve descripción de cada uno de ellos, y son: *GeoGebra*, *SimCalc*, las hojas de cálculo y *Logo*.

Tal y como se señala en el sitio web de GeoGebra, este “es un software de matemáticas dinámicas para todos los niveles educativos que reúne geometría, álgebra, hoja de cálculo, gráficos,

estadística y cálculo en un solo programa” (*Acerca de GeoGebra*, 2019). Entre las ventajas que ofrece este programa se encuentran:

- Permite la creación de materiales interactivos para apoyar el aprendizaje matemático.
- Dado que es una herramienta utilizada en muchas partes del mundo, se encuentra disponible en varios idiomas.
- Es un software de código abierto.

El proyecto *SimCalc* fue lanzado en 1994 con el objetivo principal de ayudar a los estudiantes a avanzar en álgebra y en cálculo. El núcleo del proyecto se basa en la idea de James Kaput de permitir que la educación matemática surja de los conceptos de cambio y variación, temas que él conceptualizó como uno de los caminos principales del desarrollo matemático, que conduce a través del álgebra y llega más allá del cálculo. La idea fundamental es enriquecer las matemáticas en cada grado escolar y simultáneamente darles acceso temprano a los estudiantes, a conceptos matemáticos de importancia crítica (D’Ambrosio, 2013).

Las hojas de cálculo, por el formato que manejan de celdas distribuidas en filas y columnas, han sido una poderosa herramienta para la enseñanza de las matemáticas. Desde principio de la década de los años 90 se han utilizado para la resolución de problemas algebraicos, pues han resultado ser un mediador importante en esos procesos, dado que una celda de la hoja de cálculo puede representar la incógnita y así los estudiantes al cambiar las reglas que definen el valor de dicha celda pueden ir transitando de lo desconocido hacia lo conocido, sistema que se comparte con el método de prueba y error (Rojano & Sutherland, 1993).

Las hojas de cálculo resultan de gran utilidad para la representación de sistemas matemáticos, pues permiten la utilización de fórmulas, tablas y gráficas, así como también permiten tener acercamiento a la modelización algebraica y realizar manipulaciones matemáticas que permiten la resolución de problemas de enunciado. Lo anterior puede dar pie a realizar un análisis completo de diferentes aspectos de fenómenos científicos (Molyneux-Hodgson et al., 1999).

Por otra parte, *Logo* es un lenguaje de programación diseñado como herramienta de aprendizaje, co-creado por Seymour Papert y lanzado en su primera versión en 1967. Es un “dialecto de LISP” que cuenta con las siguientes características: modularidad,

extensibilidad, interactividad y flexibilidad. Tiene aplicaciones en matemáticas, lenguaje, música, robótica, telecomunicaciones y ciencias (*Logo History*, 2019). *Logo* ha sido un importante punto de partida para desarrollar otras versiones y propuestas tan poderosas como *NetLogo*.

Para el caso particular de *Logo*, en 1983 se inició el proyecto denominado *Logo Maths Project* en el que participaron dos escuelas secundarias de Londres con niños de 11 y 12 años. En este proyecto se encontró que, al utilizar *Logo* dentro de la clase de matemáticas, este ambiente proporcionó un rico contexto para el uso de ideas y procesos matemáticos, puesto que permitió trabajar con conceptos abstractos, con patrones, crear y comprobar hipótesis propias y manipular incógnitas. Todo esto demostró que los alumnos altamente motivados pueden alcanzar metas complejas trabajando con ideas matemáticas (Hoyles et al., 1986).

La utilización de software como herramienta en la enseñanza de las matemáticas permite que el proceso se pueda extender fuera del ambiente escolar, incluso llevarlo al hogar, resultando ser una herramienta poderosa. Fuera del ambiente escolar también existen otros procesos de aprendizaje que se abordan en la siguiente sección.

3.2. APRENDIZAJE MATEMÁTICO *OUT-OF-SCHOOL*

Como anteriormente se mencionó, los ambientes no escolarizados pueden tener varias modalidades, pues prácticamente abarcan cualquier situación fuera de la formalidad escolar, como lo pueden ser desde una repartición de canicas en un juego de niños hasta la distribución de presupuesto que debe realizar una persona para las compras de la despensa. A continuación, se tratarán cuatro entornos *out-of-school*. A diferencia del primero, los otros tres muestran claras coincidencias en la utilización de herramientas y apoyos tecnológicos, los cuales prácticamente hoy en día están plenamente incorporados en nuestra vida cotidiana, como es el teléfono celular, la computadora, consolas de videojuegos, tablets. Cabe señalar que el uso de estos dispositivos puede facilitar el acercamiento a ideas matemáticas dentro y fuera de la escuela.

3.2.1. Matemáticas no escolares

Dentro de este rubro, estamos considerando tres estudios a manera de ejemplos, que se han llevado a cabo en tres ubicaciones geográficas distintas: Estados Unidos, Nueva Guinea y Brasil.

En su proyecto *AMP (Adult Math Project)*, Lave (1988) investigó prácticas aritméticas llevadas a cabo en una variedad de escenarios, para poder tener una perspectiva diferente en la resolución de problemas a las encontradas en la escuela o en el laboratorio. Los participantes en su estudio fueron 35 sujetos con amplias diferencias en escolaridad, edad, tiempo de haber dejado la escuela y nivel de ingresos. El proyecto consistió en observarlos mientras iban de compras para surtir su despensa. Los observadores los acompañaban durante la compra de víveres, los traslados y mientras acomodaban en sus casas los productos adquiridos. El estudio incluyó una sesión para explorar procedimientos matemáticos enseñados en la escuela: pruebas de opción múltiple, problemas matemáticos para ser resueltos con lápiz y papel, números y mediciones, cálculo mental y uso de la calculadora. En el estudio se observa que las mismas personas difieren en sus actividades aritméticas cuando se encuentran en diferentes escenarios (Lave, 1988).

Lave (1988) señala que la transferencia del aprendizaje (*learning transfer*) se asume como el mecanismo central para llevar el conocimiento adquirido en la escuela a dar soporte en la vida después de la escuela. Sin embargo, al igual que otros estudios, se confirma la discontinuidad del desempeño matemático en distintos entornos y las diferencias de precisión entre pruebas tipo escuela y en la compra de víveres.

Un segundo caso dentro de este tema es la serie de experimentos que realizó Geoffrey B. Saxe (2014) en Papúa, Nueva Guinea, dentro de la región Oksapmin. Los sujetos de su estudio fueron los mismos miembros de la comunidad, entre los que destacan los tenderos, pues son quienes muestran mayor competencia. Como parte de la investigación está el estudio de representaciones numéricas, poniendo especial atención en el sistema tradicional de conteo que hace uso de 27 partes del cuerpo, y de cómo niños y adultos reproducen y alteran dicho sistema para resolver nuevos tipos de problemas numéricos y aritméticos, tanto para prácticas económicas como escolares (Saxe, 2014).

Como tercer caso en el ámbito de las matemáticas no escolares, están las matemáticas de la calle (*Street Mathematics*), investigadas y analizadas por Carraher et al. (2002), quienes

se basan en la idea de que los estudiantes no sólo aprenden matemáticas dentro de un ambiente escolarizado y este no es el único “responsable de su desarrollo intelectual”. La investigación mencionada está centrada en estudiar y contrastar el desempeño de algunos estudiantes dentro de un ambiente escolarizado y fuera de él, realizando sus labores cotidianas en el comercio informal, fabricación de muebles, participando como cambistas, o bien en otros sectores.

Durante los estudios, estos investigadores lograron constatar que mientras el papel de la escuela es enseñar las operaciones básicas (sumas, restas, multiplicaciones y divisiones), así como los procedimientos correctos y formales para la resolución de problemas planteados dentro del aula, los niños que tienen la necesidad de trabajar en el comercio informal, utilizan otros métodos que funcionan perfectamente para resolver problemas de la vida laboral. Sin embargo, no los utilizan en la escuela para resolver los problemas matemáticos, ni la escuela aprovecha las habilidades desarrolladas por esos chicos.

Una importante coincidencia en los estudios realizados es que los estudiantes en cuestión resuelven los problemas de manera mental, es decir, sin plantearlos utilizando lápiz y papel, y tampoco utilizan un método uniforme para resolverlos.

Otra observación relevante, es que la educación informal (en este caso adquirida a través de los empleos informales que desempeñan los chicos) resulta tener mayor impacto y ser más eficiente que la educación formal impartida en las aulas, para la resolución de problemas matemáticos.

Los casos presentados muestran que los problemas matemáticos que les sean planteados a los estudiantes dentro del ambiente escolar o fuera de él y que buscan acercarlos a la materia, estén relacionados con casos prácticos de la vida real, pues eso aumenta las posibilidades de generar un mayor significado para ellos.

3.2.2. Hogar

Por su parte, Sutherland et al. (2009) sugieren que, si podemos encontrar vías para hacer uso del conocimiento “oficial” y “no oficial”, construyendo nexos entre ellos, podemos crear experiencias de aprendizaje de muy alto valor. Estos autores afirman que la utilización de las tecnologías digitales en actividades fuera del entorno escolar, sugiere la

potencialidad de un acercamiento híbrido: la movilización de todos los elementos en el ensamblaje para que se lleve a cabo el proceso de aprendizaje.

A pesar de que al ir aumentando la edad del sujeto, existe una tendencia generalizada a dejar de utilizar la computadora como forma de entretenimiento (en particular para juegos y otras aplicaciones que obedecen a intereses personales), e incrementar su utilización para fines escolares y académicos, para los estudiantes, el mostrarles una actividad a manera de juego, moviliza en ellos un conjunto de expectativas y prácticas culturales íntimamente asociadas con su hogar y experiencias lúdicas (Sutherland et al., 2009)

El enfoque más exitoso para representar las experiencias de los niños fuera del entorno escolar no es precisamente la suposición de que a todos los niños les gustan los juegos, sino el desarrollo de la atención hacia recursos diversos y sorprendentes y el conocimiento previo que los niños puedan llevar al salón de clases (Sutherland et al., 2009).

Considerando lo reportado por las investigaciones realizadas por Sutherland y co-autores y las potencialidades de las tecnologías digitales para recurrir, entre otras propiedades, a la saliencia visual de algunos objetos matemáticos, en la presente investigación se planteó analizar el papel que juega un recurso desarrollado con dichas tecnologías al propiciar un acercamiento inmediato, no traumático, a ideas poderosas en matemáticas, en un entorno *out-of-school*.

3.2.3. Videojuegos

Los juegos han sido una fuente de inspiración para la interacción humano-computadora (*HCI – Human Computer Interaction*). El estudio de la influencia de los videojuegos en cuestiones más formales es relativamente nuevo. La meta es entender los procesos de influencia mutua entre juego y trabajo. Algunos ambientes de juego facilitan la transferencia de aprendizaje de los videojuegos al mundo profesional.

La gamificación consiste en crear un universo interactivo que sea simple, atractivo y apasionante (Marache-Francisco & Brangier, 2013), y se define como la utilización de mecánicas de juego en entornos no lúdicos, tales como sitios web, educación y redes sociales (Webb, 2013). La meta principal es motivar y atrapar a los usuarios, por ello se dice que el mencionado proceso permite transformar el trabajo o tarea en algo más interesante y motivante. Esto se logra al crear un nexo entre el usuario y los sistemas, que

va más allá del criterio tradicional, generando interacciones atractivas y persuasivas (Marache-Francisco & Brangier, 2013).

A pesar de que los juegos son un medio popular, como en cualquier software que se desarrolle, se requiere un buen conocimiento del público objetivo para crear juegos que promuevan la fluidez matemática (Eugene et al., 2013).

De acuerdo con Eugene et al (2013) hay dos niveles de manejo del conocimiento matemático: la alfabetización matemática y la fluidez matemática. Define a la primera como la condición en las que las personas tienen ciertas competencias técnicas en matemáticas, mientras que la fluidez matemática la considera como la condición de llevar a cabo determinada acción matemática de una manera correcta, rápida y con un esfuerzo mínimo. Estos autores señalan que los videojuegos pueden ser una herramienta importante para promover ambas categorías de manejo de conocimiento matemático.

3.2.4. Museos interactivos

La aparición de los museos interactivos en suelo americano data de la década de 1960, con la creación del *Exploratorium* de San Francisco y casi paralelamente el *Ontario Science Centre*. El primero surge gracias a Frank Oppenheimer, quien después de haber estudiado detenidamente tres de los principales museos de ciencias europeos (*Science Museum* en Londres, el *Palais de la Découverte* en París y el *Deutsches Museum* en Munich) decide regresar a su patria y fundar un museo en el que las personas pudieran asistir solas, acompañadas o en grupo, con la posibilidad de investigar por sí mismas a través de sus sentidos el mundo de la naturaleza y poder compartir sus hallazgos con otros (Amodio, 2013).

Tal y como señala Jorge Wagensberg (2007) lo propio del museo es generar el estímulo, crear una diferencia entre el antes y el después de la visita, para lograr pasar de la indiferencia al querer aprender. Para ello se requiere que los objetos expuestos (exhibiciones) sean triplemente interactivos: físicamente (*hands-on*), mentalmente (*minds-on*) y emocionalmente (*hearts-on*).

Hands-on: sugiere una manipulación.

Minds-on: es alejarse de una exhibición asociando ideas con la vida cotidiana, en otros casos que puedan responder a la misma esencia.

Hearts-on: considerada como el conjunto de emociones, resultado de las dos interacciones anteriores.

De acuerdo con McLean (1993) los visitantes son el ingrediente principal de la experiencia de visitar el museo, ellos vienen en toda clase de formas y tamaños, pueden venir solos o acompañados, visitan el museo por hacer algo útil o simplemente para matar el tiempo, y una vez dentro del museo, cada uno interactúa con las exhibiciones de forma distinta. Cada visitante asiste por distinta razón: para recabar información, por buscar algún tipo de interacción social, por entretenimiento, para relajarse o bien para sólo adquirir su boleto que acredite que asistió y cumplir con la tarea encomendada por el profesor. Dada toda esta variedad de opciones y propósitos, se hace referencia al modelo de formas de aprendizaje llamado *4MAT*, propuesto por Bernice McCarthy (McLean, 1993):

1. Aprendizaje imaginativo, se pregunta “¿Por qué?” Aprende escuchando y compartiendo ideas.
2. Aprendizaje analítico, se pregunta “¿Qué?” Aprende buscando información y hechos.
3. Aprendizaje por sentido común, se pregunta “¿Cómo funciona?” Aprende resolviendo problemas e integrando información.
4. Aprendizaje dinámico, se pregunta “¿Y si...?” Aprende a prueba y error, empieza a interactuar sin leer las instrucciones.

Con base en mi experiencia y observaciones personales, dentro de un museo interactivo, el aprendizaje dinámico es el más común de todos, sin importar la edad de los visitantes. Por este motivo es fundamental el buen diseño de una exhibición interactiva, para que ella misma guíe al usuario a través de la experiencia para la cual fue concebida, es decir, que el usuario pueda interactuar con la exhibición conforme a lo considerado en el diseño.

Utilizando el modelo de McCarthy, una exposición puede ofrecerle algo a cada uno de los cuatro tipos de formas de aprender, al acercarse a un tema desde diferentes ángulos, utilizando una variedad de técnicas interpretativas, incluyendo cédulas con información precisa y concisa, oportunidades para resolver problemas, elementos interactivos, organizadores de conceptos y explicaciones en vivo. Puede haber una exhibición diseñada para cumplir con las necesidades de los cuatro tipos de aprendizaje, para hacer posible que los visitantes puedan desplazarse del significado a los hechos, de ahí a la interacción y finalmente al descubrimiento por sí mismos (McLean, 1993).

Las exposiciones son un medio de comunicación (de ideas, información, emociones y valores) entre los organizadores y los visitantes del museo. Para que la comunicación se

lleve a cabo, las exposiciones deben proporcionar mensajes concisos. El principio más crítico en la comunicación es que, sin importar lo que se quiere transmitir, esto debe ser recibido y entendido, por lo que resulta fundamental el conocer a la audiencia a quien está dirigida la exposición. El aspecto más importante de una exhibición interactiva es la retroalimentación que el visitante reciba (McLean, 1993).

3.3. VARIACIÓN, GENERALIZACIÓN Y PROCESOS INFINITOS

Como se señala en los objetivos de esta tesis, los tres temas seleccionados para ser abordados por la exhibición interactiva son: variación, generalización y procesos infinitos. Se eligieron por ser temas que se pueden ejemplificar gráficamente y manejarse a través de un desarrollo de software, para un público objetivo de segundo grado de secundaria en adelante.

A continuación, se presentan algunos antecedentes relacionados con los temas escogidos, así como algunos ejemplos de la didáctica de cada uno, a partir de la literatura en educación matemática.

3.3.1. Variación

Al igual que los procesos de generalización, a partir de trabajos de investigación en educación matemática, el razonamiento variacional ha pasado, como tal, a formar parte de la matemática escolar. Antes de convertirse en contenidos de enseñanza, uno de los temas con el que los alumnos de primaria se iniciaban en el razonamiento variacional era el de la variación proporcional, en el contexto de la aritmética, y era hasta la secundaria cuando se les introducía a nociones relacionadas con el concepto de función, en el contexto del álgebra. Sin embargo, acercamientos más modernos reconocen a la matemática de la variación como un eje que recorre el currículo a lo largo de varios grados escolares, por ejemplo, el estándar de contenido *Algebra*, de los Estándares para la Matemática Escolar de los Estados Unidos, contiene temas de relaciones, funciones y sus distintas representaciones desde el grado 3 hasta el grado 12 (National Council of Teachers of Mathematics, 2000)., Más recientemente, el enfoque de enseñanza de las matemáticas a través de la variación se ha extendido a sistemas educativos de varios países (Huang & Li, 2017).

En el terreno de la investigación educativa, la co-variación es un constructo fundamental del razonamiento variacional y es descrito de distintas maneras por diferentes autores. Por ejemplo, Confrey caracteriza la co-variación como la coordinación de los valores de dos variables conforme éstos cambian y distingue esta concepción de la concepción moderna de función como correspondencia (Confrey & Smith, 1994). Por otra parte, la caracterización de Thompson es en términos de conceptualizar los valores de cantidades individuales conforme éstos cambian, esta caracterización involucra dos o más cantidades que varían simultáneamente (Thompson & Carlson, 2017). Thompson, además, distingue número de cantidad y define esta última como lo que alguien concibe como un objeto que posee un atributo que puede ser medido (Thompson, 1993). Bajo cualquiera de estas concepciones, la co-variación puede ser continua o discreta y su representación matemática puede ser por medio de una tabla de variación, una gráfica o una fórmula algebraica.

Estudios llevados a cabo en diferentes niveles educativos han revelado dificultades que enfrentan los alumnos al resolver tareas cuya solución involucra razonamiento variacional. Por ejemplo, en una investigación con estudiantes universitarios, (Carlson, 1998) reportó que su visión estática de situaciones dinámicas les impedía construir fórmulas con sentido, que representaran una cantidad como función de otra. Por otro lado, hay investigaciones que muestran que cuando los estudiantes trabajan con tareas y situaciones de variación, en contexto y utilizando diferentes tipos de representaciones (como la tabular, la gráfica y la simbólica) llegan a comprender aspectos fundamentales de la variación (Brizuela et al., 2015; Wilkie, 2016).

Con relación a la enseñanza y el aprendizaje de la variación, la posición de Kaput (1994) es la de poner una mayor atención en procurar que los estudiantes piensen que los valores de las variables *varían* en lugar de enfocarse en trabajar con variables estáticas. Esta posición sirve de base para el diseño del software *SimCalc*, desarrollado por este autor, en el cual es posible interactuar con la representación dinámica de situaciones de movimiento (que involucran las variables de tiempo, posición, velocidad y aceleración) ligada a las representaciones tabular y gráfica correspondientes (<http://kaputcenter.org/products/software/simcalc-mathworlds-software/>). Es decir, es posible manipular la variable tiempo, correr la acción del fenómeno de movimiento y observar la co-variación, simultáneamente, en las otras representaciones. Estas

características del software facilitan a grupos de estudiantes de un amplio rango de edades el acercamiento a las nociones de velocidad y aceleración, sin enfrentar las dificultades que usualmente les ocasiona la interpretación y manipulación de la representación algebraica. Con un enfoque diferente (*embodied cognition*), Nemirovsky et al. (1998) investigaron la comprensión, por parte de los estudiantes, de las funciones y sus gráficas, por medio de actividades con sensores de movimiento.

Además de las anteriores, se han llevado a cabo investigaciones con tecnologías digitales como GeoGebra, Logo, CAS y Hojas de Cálculo, entre otras, las cuales han contribuido al acceso a propiedades y aspectos fundamentales de la variación, de forma exploratoria y experimental. La herramienta desarrollada como parte de esta tesis fue diseñada con una intención similar, es decir, propiciar el acercamiento de un universo amplio y heterogéneo de sujetos a la noción de variación, en un tiempo muy acotado, de tan solo unos minutos.

3.3.2. Generalización

De acuerdo con Kaput (1999, p. 137) la generalización en matemáticas, considerada en esta tesis como una de las ideas matemáticas poderosas, consiste en no fijar necesariamente la atención en las situaciones mismas, sino en los patrones, procedimientos, estructuras y las relaciones entre todos ellos. Por su parte, Kieran (2004, pp. 22-23) se refiere a las actividades de generalización, específicamente en álgebra, como aquellas que involucran problemas de enunciado que llevan al planteamiento y resolución de una ecuación, o bien, que involucran relaciones numéricas o patrones geométricos o figurativos que conducen a una expresión algebraica. Entre estos tipos de actividades, es notable la abundante literatura de investigación sobre el reconocimiento de patrones y procesos de generalización en la enseñanza y aprendizaje del álgebra, lo cual muestra el gran interés en el tema por parte de investigadores, educadores y diseñadores de currículo. A este respecto, las actividades y tareas con patrones han sido ampliamente utilizadas en estudios llevados a cabo en distintos niveles escolares, en los cuales se reporta de maneja recurrente la gran dificultad que representa para los alumnos producir una expresión simbólica de la generalidad percibida, por ejemplo, en una secuencia numérica o figurativa. Ejemplos de estas investigaciones son las llevadas a cabo por Radford et al. (2007); Mason (1996); Lee (1996); Rivera (2010), entre otros.

No obstante la dificultad en la simbolización, estudios llevados a cabo a partir de finales de la década de los 90 han demostrado que estudiantes de educación primaria y secundaria son capaces de percibir la generalidad de un patrón, expresarla en palabras y encontrar la regla que la representa (Stacey, 1989; Fujii & Stephens, 2001). Estas etapas pre-simbólicas han sido investigadas recientemente en el área de álgebra temprana y son reconocidas por algunos autores como manifestaciones de pensamiento algebraico, aun cuando no se logre el paso a la simbolización (ver, por ejemplo, Warren & Cooper, 2008; Cooper & Warren, 2011). En particular, Radford se refiere a estos procesos como *pensamiento algebraico no-simbólico*, a raíz de haber observado en uno de sus estudios que, cuando los niños trataban de responder preguntas acerca de figuras ubicadas en una posición remota de una secuencia figurativa, más allá de su campo visual y sin posibilidad de usar el conteo, mostraban una tendencia a trabajar con cantidades desconocidas como si fueran conocidas (Radford, 2011). Este autor llama *analticidad* a esa manifestación de pensamiento algebraico.

Con la incorporación de los recursos tecnológicos a la enseñanza de las matemáticas, se han diseñado y desarrollado ambientes de aprendizaje para ayudar a los estudiantes en su tránsito hacia la simbolización algebraica de la generalización. *eXpresser* es uno de esos ambientes, el cual consta de un conjunto de herramientas para construir patrones con mosaicos y cuyo propósito es tender puentes entre identificar y expresar patrones, promoviendo en los estudiantes la identificación de la estructura de un patrón, por medio de construirlo (Geraniou et al., 2009). *eXpresser*, junto con otros desarrollos y diseños de actividades que utilizan distintos programas, como CAS, Logo y Hojas de Cálculo, son medios para acceder a y experimentar con procesos de generalización. La mayoría de estos desarrollos están pensados para su uso en el entorno escolar, con la intervención y participación del maestro y de los compañeros de clase. Cabe señalar que el desarrollo que se presenta en esta tesis fue diseñado también con la intención de acercar a los usuarios a esta idea poderosa, con la característica particular de que la interacción será breve, sin intervención de un instructor y fuera de la escuela, de hecho, será en un contexto de exhibición de museo.

3.3.3. Procesos Infinitos

El tercer tema seleccionado para abordarse en la herramienta desarrollada es Procesos Infinitos. Lakoff y Nuñez (2001) señalan que en un contexto fuera del área de las matemáticas, un proceso se considera infinito si itera o continua indefinidamente; también hacen referencia a dos tipos de infinito: el infinito potencial y el infinito actual, definiendo al primero como el representado por aquellos procesos o movimientos sin fin; mientras que al infinito actual lo conceptualiza como algo realizado.

Similar a lo señalado en el párrafo anterior, Monaghan (2001) concuerda en que el infinito puede ser visto como un proceso o bien como un objeto. El primero lo ejemplifica como los bucles sin fin utilizados en los lenguajes de cómputo; mientras que, en la modalidad de objeto, lo explica como un número muy grande o bien la cardinalidad de un conjunto.

Sacristán y Noss (2008) plantean que el concepto de infinito se considera como un constructo mental de una naturaleza abstracta significativa que depende del contexto y del punto de vista. Destacan que la literatura tiende a apoyar los hallazgos negativos en las áreas de las matemáticas en donde el infinito se da de manera natural, coincide con las que se les presenta a los estudiantes desde una perspectiva simbólica-algebraica. En este mismo trabajo, se destaca que dicho enfoque tiende a dificultar el proceso de vinculación entre el conocimiento formal y los conceptos intuitivos. Dado que la infraestructura algebraica crea un obstáculo adicional, se plantea el uso de un lenguaje de programación para facilitar las conexiones entre las diferentes representaciones (Sacristán & Noss, 2008). Considerando las dificultades anteriormente señaladas, se tomó la decisión de incluir el tema de procesos infinitos en una actividad lúdica en la herramienta desarrollada.

Semejante a lo planteado por Monaghan (2001), nuestro público objetivo también resultó ser preuniversitario (menores de 19 años), buscando que no tuvieran una instrucción previa en el tema de procesos infinitos, para buscar un acercamiento a este. Aunque en caso de esta investigación, dicho acercamiento se plantea llevar a cabo en pocos minutos de interacción entre el usuario y la herramienta desarrollada.

4. PERSPECTIVA TEÓRICA. IDEAS PODEROSAS EN MATEMÁTICAS, TECNOLOGÍA Y SALIENCIA VISUAL

Una vez presentados los antecedentes en el capítulo anterior y como sustento teórico de esta investigación, en el actual capítulo se presenta una compilación sobre las perspectivas teóricas en la enseñanza de las matemáticas, el acercamiento a ideas poderosas en matemáticas y el uso de la tecnología para estos fines, tomando en cuenta la atención y la saliencia visual. También se incluye una sección en la que se aborda la concepción y definición de la herramienta digital desarrollada como parte de esta investigación. Finalmente, en la última sección del presente capítulo se incorporan las preguntas de investigación.

4.1. PERSPECTIVAS TEÓRICAS. TECNOLOGÍA Y ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Entre las perspectivas teóricas en la enseñanza de las matemáticas se tiene una amplia gama de enfoques, y para esta investigación consideramos aquellas que tienen relación con herramientas tecnológicas y entornos *out-of-school*.

Desde hace ya varias décadas, se ha buscado integrar herramientas tecnológicas para apoyar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y al mismo tiempo darles un enfoque dinámico (Drijvers et al., 2010). Estos procesos de integración continúan vigentes, no sólo por la aparición de nuevas opciones tecnológicas, sino también por el reto que representa acercar temas matemáticos a estudiantes y público en general.

Las computadoras han jugado un papel importante como herramienta tecnológica, pues su uso para la generación de gráficos, tanto estáticos como dinámicos, para representar y

explorar conceptos matemáticos, han generado un impacto positivo en el proceso de aprendizaje (Howson & Kahane, 1986; Kaput & Roschelle, 2013).

Desde la década de los setenta, Papert (1972), influenciado por las ideas de Piaget, Dewey y Montessori, consideraba que los niños aprenden haciendo y que la computación es un elemento que puede mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje, pues abre un vasto universo de posibilidades, sobre todo si se combina con el poder de las ideas teóricas. Por ello, este autor plantea que con el uso de la computadora y programando con el lenguaje *Logo*, se facilita el aprendizaje de temas matemáticos por parte de los alumnos.

Con respecto a la interacción con las herramientas tecnológicas y dadas las características de la aplicación desarrollada en esta investigación, consideramos los enfoques teóricos siguientes:

- *Tutor, tool, tutee* (Tutor, herramienta, aprendiz)
- Amplificador-reorganizador
- Actividad percepto-motora en el aprendizaje matemático

TUTOR, TOOL, TUTEE (TUTOR, HERRAMIENTA, APRENDIZ)

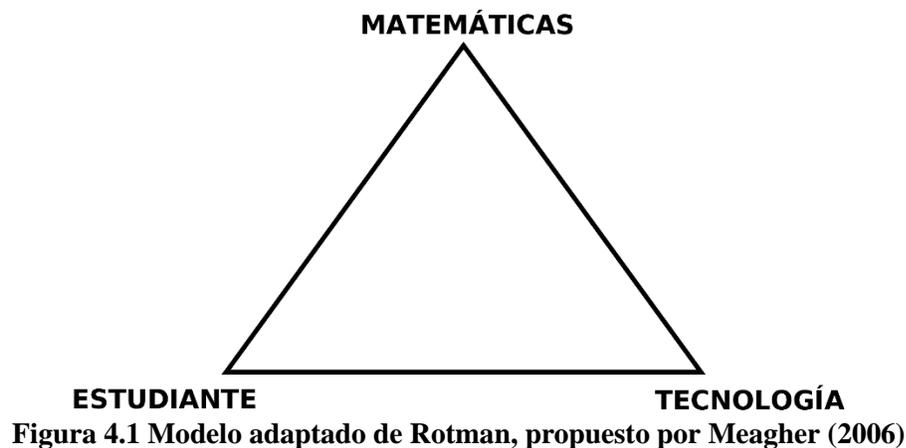
Bajo esta perspectiva, la computadora puede asumir tres roles: como tutor, como herramienta y como aprendiz. En el primero, la computadora debe ser programada por alguien capacitado, tanto en la materia como en la elaboración de software, para que posteriormente dicho software sea utilizado por el estudiante, la computadora pueda evaluar al alumno, y según sus respuestas, la computadora decide lo siguiente a presentarle, con la facilidad de poder guardar el registro del desempeño del estudiante. Para funcionar como herramienta, la computadora debe tener instalado el software necesario para que el estudiante lo utilice en la realización de alguna tarea bien definida. El tercer modo, aprendiz, permite que el alumno sea quien enseñe a la computadora lo que hay que hacer, para ello el estudiante debe aprender a programarla y ello conlleva a una parte importante de beneficios (Taylor, 1980).

AMPLIFICADOR-REORGANIZADOR

Pea (1987) señala que las computadoras pueden ser una herramienta fundamental para la mediación en la resolución de problemas matemáticos y que las tecnologías cognitivas

tienen mayor impacto como reorganizadoras que como amplificadoras de la mente. También menciona dos tipos de funciones: de propósito y de proceso. Las primeras pueden propiciar el pensamiento matemático en los estudiantes, mientras que las segundas dan soporte a las actividades de dicho pensamiento.

Como parte de esa función amplificadora y reorganizadora, las computadoras, desde su incorporación a los procesos de enseñanza y de aprendizaje, han mostrado dicha función en cuanto al pensamiento matemático. Dada esta capacidad, Meagher (2006) propuso una adaptación al modelo triangular de Rotman, en el que se muestra la relación existente entre el estudiante, la tecnología y las matemáticas. El modelo se muestra en la Figura 4.1.



ACTIVIDAD PERCEPTO-MOTORA EN EL APRENDIZAJE MATEMÁTICO

En este enfoque teórico, Nemirovsky (2003) plantea que la percepción está directamente ligada al entendimiento, mientras que este está entrelazado con la acción motora. Este autor, sostiene que estas afirmaciones pueden ser llevadas al terreno de las matemáticas, pues equipara patear una pelota (acción percepto-motora) con escribir una ecuación. También considera que la atención, emociones, conciencia, entendimiento y pensamiento son actividades perceptomotoras. Esta perspectiva puede aplicarse en actividades planeadas para llevarse a cabo dentro de un salón de clase y poderles brindar a los estudiantes la oportunidad de acercarse a temas matemáticos. Sin embargo, para el público en general (incluidos estudiantes de diferentes grados educativos) la alternativa es ofrecer artefactos y/o actividades con este perfil en ambientes *out-of-school*, tales como un museo de ciencias.

En la siguiente sección se continúa abordando el aspecto tecnológico, pero con un enfoque específico a ideas matemáticas.

4.2. IDEAS PODEROSAS Y EL PAPEL DE LA TECNOLOGÍA

En esta sección se presentan las perspectivas teóricas que en esta investigación se utilizan para analizar los datos obtenidos. Específicamente se utilizan: el enfoque teórico que proponen Skovsmose y Valero (2008) sobre ideas poderosas en matemáticas y los enfoques teóricos de James Kaput et al. (Kaput et al., 2007; Kaput & Roschelle, 2013), relacionados con el papel de la tecnología para la enseñanza de ideas poderosas en matemáticas, así como el uso de gráficos dinámicos (logrados gracias a las computadoras) para presentar a los estudiantes conceptos matemáticos de formas menos abstractas. Cabe señalarse que previo al trabajo de Skovsnosse y Valero (2008), Seymour Papert plantea su visión sobre el uso de las ideas poderosas, y se describe brevemente en la siguiente sección. El análisis de los datos obtenidos en esta investigación se presenta posteriormente en el capítulo 7.

4.2.1. Las ideas poderosas en el trabajo de Papert

Papert (1980) señala la importancia del uso de las computadoras para la enseñanza de conceptos matemáticos. Afirma que los niños al programar una computadora adquieren un sentido de dominio de una tecnología moderna y poderosa, además de que establecen un íntimo contacto con algunas ideas profundas de las ciencia, las matemáticas e incluso pueden incursionar en el arte de la construcción de modelos intelectuales.

En su obra, Papert (1980) también destaca la aversión que muchas personas, incluyendo niños en edad escolar, sienten por las matemáticas, le denomina *matemafobia*. Para combatir este fenómeno, propone el uso de computadoras, así como el entrenamiento adecuado de los estudiantes para su uso. Pues afirma que las computadoras pueden ser generadoras de ideas poderosas y semillas del cambio cultural. Dado que las ideas poderosas tienen la capacidad de ayudarnos a organizar nuestra forma de pensar sobre un tipo particular de problemas, por ejemplo, de física o matemáticas.

4.2.2. La perspectiva de Skovsmose y Valero

Skovsmose y Valero (2008), con un enfoque diferente a la visión de Papert, plantean cuatro formas en las que las ideas matemáticas adquieren la condición de “poderosas”, y son: lógica, psicológica, cultural y sociológica. La forma lógica se refiere a la condición que tienen algunas ideas que nos permiten establecer enlaces entre conceptos y/o teorías y darles un nuevo significado, poniendo en práctica la capacidad de abstracción. Desde el punto de vista psicológico, se hace énfasis en la experiencia de aprender las ideas matemáticas y se consideran significativas aquellas que los estudiantes logran asimilar y darle un significado al momento de desarrollar el pensamiento matemático. La forma cultural está relacionada con la experiencia sociocultural, estableciendo vínculos entre las ideas aprendidas y la participación de los estudiantes en sus comunidades. Finalmente, la sociológica, se refiere a cuando las ideas matemáticas pueden ser utilizadas activamente en la sociedad, pues el conocimiento matemático no es algo aislado.

4.2.3. La visión de James Kaput

Se adoptó la perspectiva teórica de J. Kaput sobre el uso de las tecnologías digitales, quien consideraba que la tecnología no sólo debe ser un soporte para las matemáticas, sino que también debe propiciar el desarrollo de nuevas formas de pensamiento matemático (Kaput et al., 2007). De esta manera se genera una democratización de las matemáticas e ideas poderosas a través de la tecnología, incluso en grupos escolares que se encuentren en algún tipo de situación de desventaja (Tall, 2008).

Para Kaput, las matemáticas consisten en un estudio compartido de lenguajes y patrones soportados por un sistema de razonamiento, y gracias a ellos podemos entender el mundo que nos rodea. De acuerdo con Kaput y Roschelle (2013), gracias a los medios computacionales, las matemáticas han tomado una nueva forma, tanto para los matemáticos como para los estudiantes, pues les ha permitido explorar nuevas conexiones con la vida diaria.

La tecnología también ha permitido ayudar a los estudiantes a experimentar con gráficos, expresiones numéricas y simbólicas en los temas de variación y movimiento, permitiendo ver sus acciones a través de la interacción con dichos recursos tecnológicos. Kaput desarrolló *SimCalc*, software que permite representar temas de variación y cambio, y

así dar paso a la democratización de ideas matemáticas profundas (Tall, 2013). *SimCalc* se enfoca en la manipulación directa del plano Cartesiano para controlar las animaciones y simulaciones presentadas al estudiante en pantalla, esto permite que las experiencias mostradas en el salón de clases las ligen a las experiencias propias en su vida cotidiana (Kaput & Roschelle, 2013).

El entorno *SimCalc* también permite que tanto la generalización como la simbolización sean utilizadas como parte del razonamiento matemático, pues permite que el usuario haga una sola declaración y que esta sea aplicada a varias instancias, y esto puede ser reforzado con la intervención y guía del profesor (Hegedus & Moreno-Armella, 2009).

Una vez planteados los enfoques de Skovsmose y Valero, así como la perspectiva de Kaput, presentamos en la siguiente sección, el soporte teórico relacionado con la atención y la saliencia visual.

4.3. ATENCIÓN Y SALIENCIA VISUAL

La atención visual es una capacidad del sistema de visión humano, perceptualmente remarcable y cognitivo que selecciona y discrimina información importante para después procesarla (Borji et al., 2013). Este tipo de atención ha sido considerada como un primer paso necesario para localizar elementos potencialmente interesantes en una escena o imagen. Para lograr captar el interés de un usuario a ciertas áreas de una imagen, se requiere un mapa de saliencia visual y poder darles el énfasis adecuado a tales áreas. Dicho mapa mostraría las áreas de una imagen, potencialmente interesantes, representadas por *hot-spots* (similar a una termografía) y es posible obtenerlo mediante un software especializado (Elazary & Itti, 2008).

La saliencia visual es el conjunto de características distintivas que permiten que algunos objetos en el mundo sobresalgan de sus vecinos y que inmediatamente tengan nuestra atención (Itti, 2007). Para facilitar el acercamiento de los usuarios a los procesos de comprensión y aprendizaje, en la herramienta desarrollada en esta investigación, se aprovecharon las propiedades de la saliencia visual de los elementos mostrados en pantalla, ya que el 80% de la información que a diario recibimos, es a través de nuestro sentido de la vista (Li & Gao, 2014). Tal y como lo señala Itti (2007), la herramienta se diseñó lo suficientemente diferente a otras opciones para lograr el cometido de atrapar la atención del

sujeto y así acercarlo a las ideas matemáticas, dado que la atención es un elemento básico en las funciones cognitivas y por lo general es precursora a todas las demás.

Kirshner en su estudio sobre sintaxis algebraica (Kirshner & Awtry, 2004), señala la existencia de “reglas erróneas” (*mal-rules*), que los estudiantes aplican para realizar transformaciones algebraicas y que esto se debe a la saliencia visual en las expresiones, las cuales evocan reglas que pueden ser válidas en un contexto, pero no en otros. Kirshner también considera que la saliencia visual es un “artefacto de posicionamiento y espaciado de símbolos en notación estándar”. El propósito de su estudio fue documentar el papel de la saliencia visual en las primeras fases del proceso de aprendizaje del álgebra (Kirshner & Awtry, 2004).

Li y Gao (2014) señalan que la saliencia visual es un punto clave en el mecanismo de atención, ya que asigna los recursos perceptivos y cognitivos a puntos específicos. En esta investigación se utilizó la saliencia visual de una manera diferente a la que utiliza Kirshner en su estudio, pues para el caso del diseño de la herramienta se utilizaron los elementos más salientes en cada pantalla para atrapar la atención de los usuarios y conducirlos por los experimentos planteados, y de esta forma acercarlos a los temas matemáticos relacionados.

Por otra parte, Wertsch (1998) señala que prácticamente cualquier actividad humana es una acción mediada entre agentes y herramientas culturales, ya que dicha acción por lo general se encuentra organizada alrededor de múltiples metas, que generalmente son consideradas conflictivas. Este autor, también afirma que cualquier ejercicio de análisis de la acción mediada debe permitir el examinar la interacción entre los agentes y las herramientas, sin eliminar a alguno de ellos, pues se correría el riesgo de destruir el fenómeno en observación. Además, Wertsch (1998) refiere que el progreso tecnológico ha provocado el auge de las herramientas culturales con características de interacción (*affordances*), que son claramente superiores a otras ofertas de herramientas culturales. Los *affordances* permiten atrapar la atención de los usuarios y contribuir a generar elementos visualmente salientes.

A lo anterior, de acuerdo con Dewey (1906), habría que agregar que un objeto o herramienta adquiere significado cuando se utiliza empíricamente en una forma determinada. La teoría experimental explica directa y simplemente la tendencia absoluta a

traducir las cosas concretas en una relación general, y luego relacionar esta abstracción en identidad con el ser real (Dewey, 1906).

Una vez presentados los elementos teóricos relevantes para esta investigación, se procede a exponer en la siguiente sección, la concepción y definición de la herramienta desarrollada.

4.4. CONCEPCIÓN/DEFINICIÓN DEL IIPM (INTERACTIVO IDEAS PODEROSAS EN MATEMÁTICAS)

Cabe señalar que no resulta trivial llevar a cabo el diseño, desarrollo y construcción de una herramienta que utilice tecnologías digitales, la cual permita acercar temas matemáticos a los usuarios y que tenga el formato de una exhibición interactiva.

Los artefactos o módulos interactivos han jugado un rol muy especial en el contexto expositivo dentro de los museos. Un artefacto y su usuario están conectados en una relación recíproca en donde el artefacto puede influenciar los pensamientos del usuario y en donde el usuario puede contribuir al desarrollo del artefacto adicionando nuevas características y/o funciones (Jakobsson et al., 2012).

Como parte del proceso de comunicación entre el usuario y el artefacto, se utilizan preguntas abiertas en numerosas exhibiciones interactivas. Está demostrado que estas incrementan la actividad entre los usuarios y la misma exhibición (Jakobsson et al., 2012). En la herramienta desarrollada en esta investigación se utilizan preguntas de opción múltiple, además de otros elementos, para propiciar la interacción usuario-herramienta, y de esta forma poder monitorear al usuario sin la mediación de ningún miembro del staff, profesor, tutor o guía. Además de que esto permite recabar información concreta de las actividades.

Las exhibiciones constituyen una importante fuente de recursos que contribuye a la apropiación sucesiva de conocimiento, de parte de los individuos, en un proceso de aprendizaje continuo (*life-long*). Y en este contexto se considera el concepto de apropiación como un estado en el que el individuo, consciente y deliberadamente, es capaz de utilizar el nuevo conocimiento o habilidad del que se haya apropiado (Jakobsson et al., 2012).

En el modelo de aprendizaje y desarrollo en los museos de ciencia y tecnología propuesto por Jakobsson et al. (2012) y que se muestra en la Figura 4.2, claramente puede observarse que una parte importante de él se basa en las distintas conversaciones que se generan entre los diferentes actores que intervienen durante la visita, y una parte importante del aprendizaje también se ve involucrada en esas conversaciones.

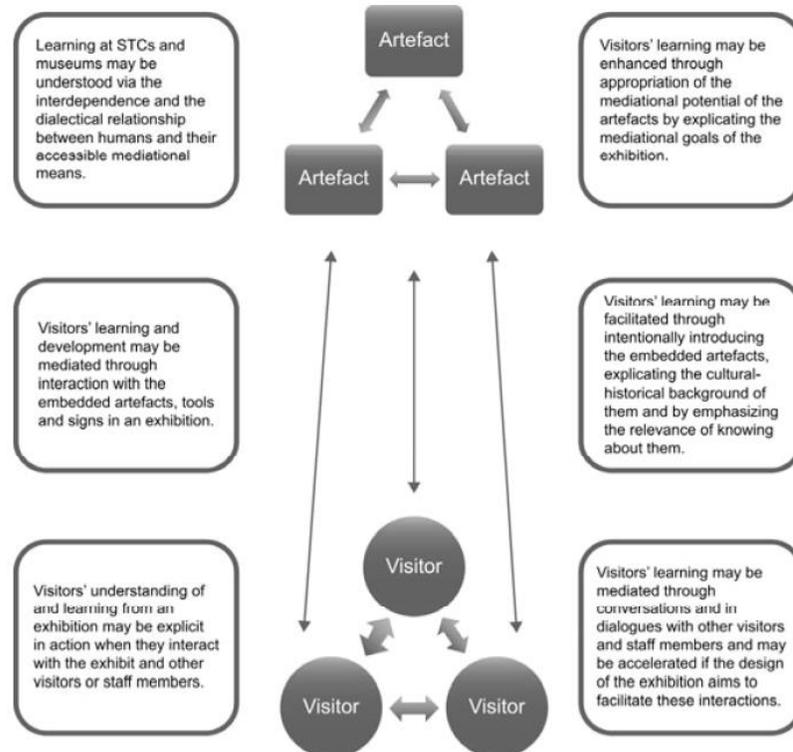


Figura 4.2 Modelo de aprendizaje y desarrollo en museos y centros de ciencia y tecnología, *“Model of learning and development at STCs and museums (Jakobsson et al., 2012)*

A diferencia de este modelo, en la presente investigación sólo nos basamos en la conversación-interacción que se da entre el usuario y la herramienta y en el capítulo 5 se propone un modelo adecuado (Figura 6.1) a la herramienta desarrollada.

Cuando se desarrolla una aplicación de software, se requiere de la construcción de un prototipo mucho antes de llegar a la versión definitiva para que esta sea utilizada para llevar a cabo las pruebas preliminares. El utilizar un prototipo completamente funcional es importante para crear experiencias e impacto, para sostener la iniciativa de diseño participativo por periodos prolongados. Este tipo de prototipos hace posible co-desarrollar

y re-desarrollar la tecnología en conjunto con los procesos de uso. Además, dichos prototipos hacen la apropiación posible y en ellos, los usuarios pueden generar cambios radicales llevados a cabo por los investigadores (Bødker & Kyng, 2018).

Todo este proceso de pruebas y reajustes en una exhibición puede mantenerse, aún y cuando ya se encuentra en piso siendo utilizada de manera habitual, pues como señalan Oppenheimer et al (1986), siempre hay forma y oportunidad de mejorarla. Esto coincide con lo que señala el diseño participativo (*PD - participatory design*), una de las primeras contribuciones de la investigación escandinava al *HCI*, en la que se muestra el énfasis de que la participación de los usuarios es benéfica para el diseño, pues ellos poseen habilidades relevantes que muestran al momento de utilizar la herramienta tecnológica y que pueden resultar de gran valía al implementar los ajustes a la herramienta (Bødker & Kyng, 2018).

Parte del diseño del artefacto de aprendizaje, consiste en entender cómo las experiencias previas de los usuarios pueden ser reutilizadas y traídas al juego cuando los usuarios se enfrentan a nuevos artefactos o problemas. Al mismo tiempo, los análisis generales anteriores del entrelazado entre la importancia de la usabilidad y el diseño, muestra cómo los aspectos relacionados con el aprendizaje debe ser consideradas en todas las etapas del diseño (Bødker & Petersen, 2000).

La herramienta desarrollada para esta investigación se basa en la Teorías Constructivistas y Construccionalista, dado que el usuario participa activamente en ella y poco a poco va avanzando en la solución de situaciones planteadas en los diferentes experimentos que se le van presentando; también posee elementos de la Teoría de John Dewey, pues durante el proceso de experimentación, el usuario es retado a resolver los diferentes episodios dentro de un ambiente no escolarizado.

La Teoría Sociocultural del Aprendizaje podrá corroborarse en cuanto la exhibición pueda ser instalada en piso (colocada en una de las salas del museo) y los visitantes puedan interactuar con ella de forma no individual.

Habiendo presentado una selección de la perspectiva teórica utilizada para esta investigación, se procede en la siguiente sección a enunciar las preguntas de investigación.

4.5. PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

- a) ¿Qué características de diseño de una aplicación digital (software), que posea el formato de exhibición interactiva (para un museo de ciencias, entorno no escolar), puede propiciar el acercamiento de un usuario a ideas matemáticas?
- b) ¿Cuál es la importancia de la saliencia visual en el proceso de diseño de exhibiciones interactivas digitales y cuyo contenido sean ideas poderosas en matemáticas?
- c) ¿Qué papel juega en el acercamiento a ideas matemáticas, en una exhibición interactiva, el contacto previo del usuario con dichas ideas?

5. METODOLOGÍA

En este cuarto capítulo se presenta a detalle el carácter de la investigación, así como la metodología que se utilizó tanto para generar la herramienta digital, como para analizar su funcionamiento y obtener los datos requeridos para alcanzar los propósitos de esta tesis.

Esta investigación es de carácter cualitativo y la obtención de datos en la prueba principal se llevó a cabo de forma automatizada a través de la misma herramienta, durante la interacción directa de los usuarios con ella. Los demás datos necesarios se obtuvieron por observación directa y aplicando una entrevista semiestructurada a cada participante.

Como ya se mencionó, las ideas matemáticas que fueron seleccionadas como temática para la herramienta son variación, generalización y procesos infinitos. Se eligió inicialmente para el estudio como público objetivo a alumnos de segundo y tercero de secundaria; sin embargo, debido al confinamiento derivado del COVID-19 se tuvieron que realizar las pruebas subsecuentes con un público heterogéneo.

Con la herramienta desarrollada, se busca acercar al usuario a ideas poderosas que representan los conceptos anteriores, mediante un proceso de experimentación virtual sin proporcionarle explícitamente una definición o sustento teórico e incrementando poco a poco la complejidad de los experimentos.

A partir de los propósitos de esta investigación, se procedió a:

1. Diseñar el software de interacción (herramienta) que permitiera presentar al usuario los temas matemáticos y recopilar los datos de interacción.
2. Diseñar de manera específica los instrumentos de recolección de datos.
3. Realizar pruebas con la herramienta para la obtención de datos.
4. Análisis de los datos.
5. Realizar ajustes a la herramienta.
6. Aplicación de pruebas, obtención de datos, después de los ajustes realizados.
7. Análisis de los datos.

8. Reporte de resultados.
9. Conclusiones.

Considerando el carácter cualitativo de esta investigación y que cuenta con un componente experimental, se requirió preservar el orden cronológico y tener un seguimiento detallado del público participante en las sesiones de toma de datos. Para ello se decidió trabajar con grupos pequeños en cada sesión, se condujeron las pruebas bajo un estrecho contacto con los usuarios seleccionados y con base en un marco conceptual iterativo (Miles & Huberman, 1994).

El diagrama metodológico para este proyecto se basa en los nueve puntos anteriores y se encuentra esquematizado en la Figura 5.1.

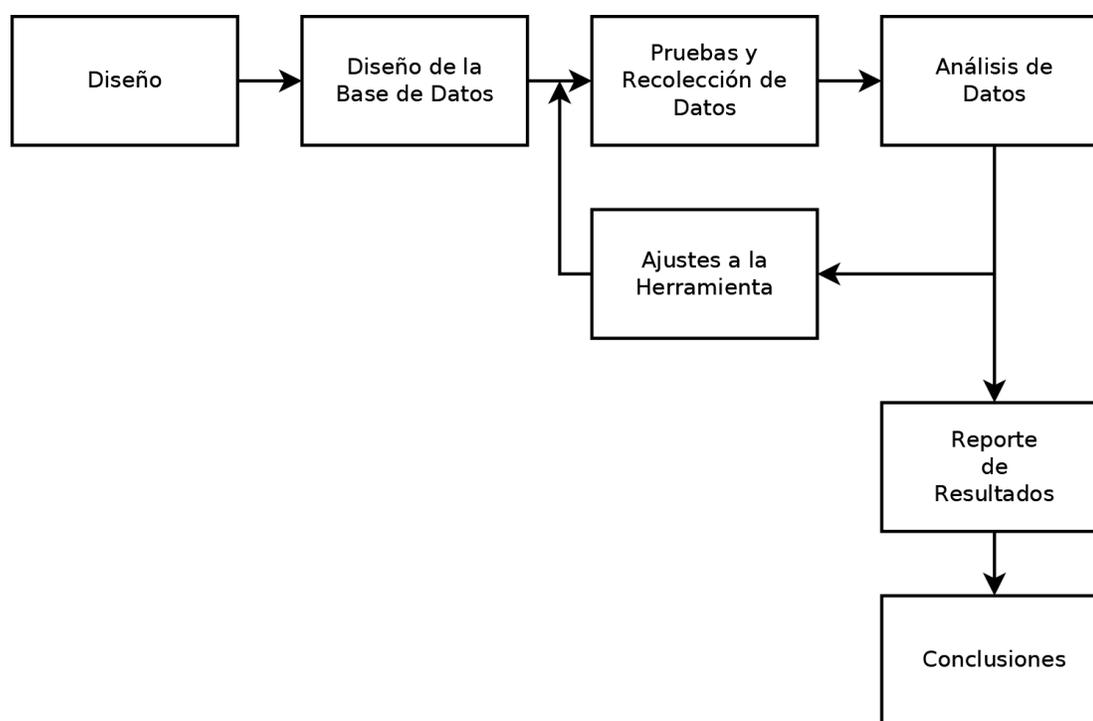


Figura 5.1 Diagrama metodológico

Como se aprecia en la Figura 5.1, el diagrama metodológico consta de siete fases, iniciando con el *Diseño*, que consiste en diseñar y construir el software con el que los usuarios van a interactuar y al mismo tiempo obtener los datos a analizar. El siguiente

bloque, *Diseño de la Base de Datos*, se refiere específicamente al instrumento para guardar los datos de análisis, tanto su estructura como las operaciones necesarias. El tercer bloque está dedicado a *Pruebas y Recolección de Datos*, que consiste en ir a una escuela secundaria y probar la herramienta fuera del salón de clases, de forma relajada, con un solo estudiante a la vez y mientras éste interactúa con la herramienta, se va guardando la información en la base de datos. Durante el confinamiento, esta etapa consistió en contactar participantes vía *WhatsApp*, concertar una cita para la toma de datos y llevar a cabo las sesiones de forma virtual. La siguiente etapa es el *Análisis de Datos*, la cual abarca desde verificar si la herramienta está siendo utilizada por los participantes conforme a lo esperado, hasta analizar el desempeño y comportamiento de los usuarios en cada uno de los temas. Después existen dos posibilidades: *Ajustes a la Herramienta* y *Reporte de Resultados*, la primera es el enlace que permite que el marco conceptual sea iterativo y consiste en tomar las decisiones necesarias sobre cambios a la herramienta (buscando un mejor diseño y funcionamiento de esta); la etapa de *Reporte de Resultados* consiste en reportar de forma ordenada y concisa los resultados de la investigación, se llega a esta etapa después de haber realizado las iteraciones necesarias y que el análisis de resultados muestre que ya no es requerido ningún ajuste significativo. Por último, las *Conclusiones*, derivadas de todo el proceso de investigación y basándose en los resultados finales obtenidos.

5.1. CONSIDERACIONES SOBRE SALIENCIA VISUAL

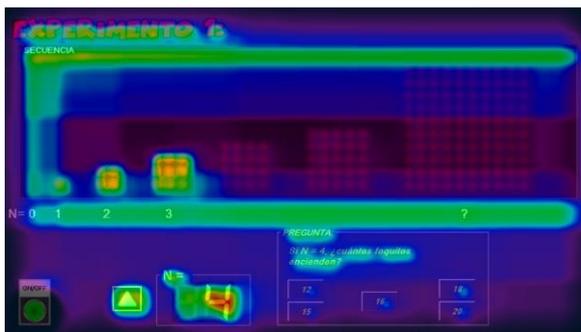
Uno de los ejes principales del presente estudio es la saliencia visual, como parte del diseño de la herramienta se explotan los estímulos visuales dentro de ella para atraer la atención de los usuarios, ya que ello presenta una opción a la inhabilidad de procesar en paralelo toda la información disponible (Itti, 2007).

Como parte de la metodología en el desarrollo de esta investigación, se realizaron los estudios necesarios sobre áreas importantes, áreas de interés y áreas resaltadas dentro de la herramienta, en cada una de las pantallas que se presentan al usuario. En estos estudios se obtuvieron mapas de saliencia visual (definición en la sección 4.3), se analizaron y se realizaron las adecuaciones correspondientes en el diseño de la herramienta, tanto en la

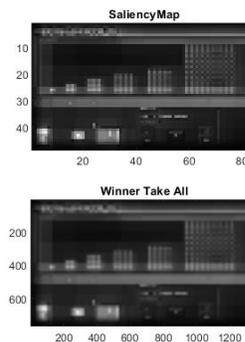
estética como en la estructura para la toma automatizada de datos. En la Figura 5.2 se muestra un ejemplo de los mapas de saliencia visual obtenidos.



Pantalla original *Gen1Frm*



Mapa de saliencia visual obtenido con *OGAMA*



Mapa de saliencia visual obtenido con *Saliency Toolbox*

Figura 5.2 Ejemplo de pantalla original y de mapas de saliencia visual obtenidos

Como puede apreciarse en la Figura 5.2, a partir de la pantalla original se obtuvieron dos mapas de saliencia visual, el primero con el software *OGAMA* (*Open Gaze and Mouse Analyzer* <http://www.ogama.net/>) y el segundo con el *Saliency Toolbox* de *MatLab* (<http://www.saliencytoolbox.net/>). El mapa que ofrece mejor calidad y visibilidad de las áreas salientes (áreas resaltadas) es el obtenido con *OGAMA*. Este procedimiento se realizó con todas y cada una de las pantallas de la aplicación. Esto permitió definir la ubicación de los gráficos y contenidos de cada pantalla de la aplicación desarrollada, y así obtener el máximo impacto en el usuario con los elementos presentados en cada experimento. *OGAMA* está desarrollado en *C#* (*C Sharp*) y contiene herramientas para la obtención y

análisis de: mapas de atención, áreas de interés, obtención de mapas de saliencia visual y registro de datos obtenidos con el mouse y posibilidad de integrar un *eye tracker* (Voßkühler, 2009; Voßkühler et al., 2008).

Al igual que *OGAMA*, se utilizó el lenguaje *C#* del *Microsoft Studio (Express Edition)* para el desarrollo de la herramienta. Los datos se guardan en una base de datos en *SQL Express Local DB*. En esta investigación se tuvo particular interés en registrar la forma de interactuar de los usuarios con la herramienta y la forma en cómo perciben los experimentos planteados en ella.

Reconsiderando lo expuesto en esta sección con relación a lo complicado que resulta realizar un estudio con los usuarios y conocer el impacto real que una exhibición ha tenido en ellos, es que se planteó hacer el seguimiento en tiempo real de la interacción entre el usuario y la herramienta.

Para corroborar el impacto de las áreas salientes y de interés en cada pantalla, así como para observar las áreas de cada pantalla en donde cada usuario fija su atención, se propuso inicialmente la utilización de un *eye tracker Tobii 4c* y acoplarlo al software desarrollado. Un *eye tracker* es un dispositivo que funciona con tecnología de sensores que puede detectar la presencia de una persona y da seguimiento a lo que está mirando, en tiempo real. La tecnología convierte los movimientos del ojo en un conjunto de datos, entre los cuales se incluye la posición de la pupila. Los datos obtenidos y decodificados, por la misma tecnología, pueden ser utilizados en un amplio rango de aplicaciones (*What is eye tracking? / How eye tracking works - Tobii, s/f*).

Sin embargo, este dispositivo requiere utilizarse en forma presencial y por consiguiente se tuvo que prescindir de él, dadas las condiciones de confinamiento derivadas de la pandemia por COVID-19. Y, por tanto, las sesiones de la prueba principal se realizaron en modo virtual (*online*), esto se presenta a detalle en la sección 5.3.

En el apartado siguiente se exponen las características con las que cuenta la herramienta desarrollada.

5.2. CONSIDERACIONES SOBRE LA EXHIBICIÓN INTERACTIVA

Como ya se ha mencionado, una parte fundamental de este trabajo de investigación ha sido el diseño y desarrollo de una aplicación en formato de exhibición interactiva. Para llevar a cabo el desarrollo de la aplicación con este formato, fue necesario hacer las pruebas y ajustes hasta llegar a la versión final. Aunque cabe señalar, que en este tipo de desarrollos, es imprescindible que desde la primera versión que se presenta a algún usuario, ésta sea totalmente operativa (Oppenheimer & Exploratorium (Organization), 1986; Bødker & Kyng, 2018). Es importante señalar que el ciclo de pruebas y ajustes no tiene un número definido de iteraciones. Las características principales de esta herramienta tecnológica son que:

- Funcione de manera autónoma, es decir, que no requiera de la intervención de ningún tutor, guía o maestro para ser operada.
- Brinde todas las indicaciones necesarias al usuario para su operación.
- Cuento con una base de datos para poder guardar toda la información obtenida durante la interacción usuario-herramienta.
- Tenga una estructura que permita que los usuarios recorran todas y cada una de las pantallas para tener un registro completo de los datos generados en la interacción con los experimentos.
- La versión final de la herramienta presente tres ideas matemáticas: variación (tres experimentos), generalización (tres experimentos) y procesos infinitos (un experimento).

Una vez teniendo en cuenta las consideraciones de la exhibición desarrollada, se describe en la siguiente sección una de las etapas fundamentales de esta investigación: las fases de prueba.

5.3. PRUEBAS

En esta sección se describen las diferentes etapas de pruebas que fueron requeridas para llevar a cabo esta investigación. Las sesiones iniciaron en 2018 con una prueba exploratoria y que se dio prácticamente de improviso, pero que resultó ser de considerable valor para todo este proceso. Las pruebas 2 y 3 se realizaron de forma concertada y con el público

objetivo (estudiantes de segundo y tercero de secundaria). Como se ha mencionado anteriormente, debido a la pandemia de COVID-19, la metodología para la toma de datos tuvo que ser replanteada, ya que el esquema de pruebas presenciales pasó a modalidad virtual (en línea) debido al confinamiento. Así que se requirió de otra prueba (prueba 4) para realizar los ajustes necesarios para esta nueva modalidad. Finalmente, se concretaron las pruebas finales para la toma de datos definitiva (pruebas 5 y 6). En la Tabla 5.1 se muestra un resumen de las pruebas efectuadas con sus principales características, entre las cuales está el tipo de participantes, fecha de participación, objetivo de la prueba y sus características.

Tabla 5.1 Resumen de pruebas realizadas

PRUEBA	FECHA	PÚBLICO	MODALIDAD	OBJETIVO	CARACTERÍSTICAS
1 Antonio <i>Prueba exploratoria</i>	Septiembre 15, 2018.	Antonio Tercero de secundaria	Presencial. Informal.	Conocer la reacción y comentarios espontáneos del usuario, además de observar su interacción con la herramienta, todo de forma libre y no formal.	Temas: variación y generalización. Sin base de datos
2 Secundaria <i>Prueba piloto</i>	Septiembre 26, 2018.	Estudiantes de secundaria. 2° → 4 (2♀, 2♂) 3° → 8 (4♀, 4♂)	Presencial. En las instalaciones del Colegio Gandhi Tultepec. Prueba individual, fuera del salón de clase.	Verificar el funcionamiento de la herramienta, desde el punto de vista técnico. Monitorear posibles problemas en la interacción y captura de datos.	Temas: variación y generalización. Primera versión de la base de datos.
3 Secundaria <i>Prueba piloto</i>	Octubre 24, 2018.	Estudiantes de secundaria. 2° → 5 (1♀, 4♂) 3° → 5 (0♀, 5♂)	Presencial. En las instalaciones del Colegio Gandhi Tultepec. Prueba individual, fuera del salón de clase.	Obtener datos de interacción con el público objetivo, utilizando los dos temas disponibles en la aplicación.	Temas: variación y generalización. Segunda versión de la base de datos, se agregaron campos para mejorar la captura de los datos de interacción.
4 Adultos <i>Prueba exploratoria</i>	Julio 20, 2020. Septiembre 7, 8 y 9,	Adultos entre 38 y 74 años. (2♀, 2♂)	Virtual. Usando plataforma <i>UseTogether</i> .	Hacer pruebas de conectividad con la plataforma	Temas: variación y generalización. Segunda versión de la base de datos.

PRUEBA	FECHA	PÚBLICO	MODALIDAD	OBJETIVO	CARACTERÍSTICAS
	2020.		Individual.	<i>UseTogether</i> en conjunto con la herramienta desarrollada. Monitorear la interacción de los usuarios con la aplicación, operada <i>online</i> .	Se escogió ese público para hacer la prueba, dadas las circunstancias de confinamiento y poder monitorear cualquier contratiempo en cuestiones técnicas. Se grabó toda la interacción de cada usuario.
5 Bloque1 <i>Prueba piloto</i>	Enero 22 y 23, 2021.	Tres estudiantes de primer semestre de Licenciatura en Fisioterapia. (3♀) y una de 4° semestre de bachillerato	Virtual. Usando plataforma <i>UseTogether</i> . Individual.	Recabar los datos de desempeño e interacción con la herramienta, con un grupo de edad menor al de la prueba anterior.	Temas: variación, generalización y procesos infinitos. Tercera versión de la base de datos. Entrevista informal y no estructurada con cada participante. Se grabó toda la interacción de cada usuaria.
6 Bloque2 <i>Prueba principal</i>	Febrero 17 al 21, 2021.	Cinco estudiantes de bachillerato y uno de licenciatura. (2♀, 4♂)	Virtual. Usando plataforma <i>UseTogether</i> . Individual.	Recabar los datos completos de interacción en la sesión de pruebas final, utilizando todos los elementos previstos para este fin.	Temas: variación, generalización y procesos infinitos. Tercera versión de la base de datos. Entrevista estructurada con cada participante. Se grabó toda la interacción de cada usuario.

Como se destaca en la tabla anterior, las seis pruebas tuvieron características y objetivos muy específicos, se profundizará en ellos en las dos secciones que a continuación se exponen.

5.3.1. Pruebas preliminares (exploratorias y piloto)

En el rubro de las pruebas preliminares se consideran las cinco primeras pruebas (dos pruebas exploratorias y tres pruebas piloto), la prueba 6 se considera como prueba principal y los datos adquiridos se utilizaron para el análisis detallado que se presenta en el capítulo 7.

PRUEBA 1

Esta prueba fue de carácter exploratorio y se llevó a cabo con un estudiante de tercero de secundaria. Dado que el desarrollo de la herramienta se encontraba en proceso, sólo estaban

disponibles los temas de variación y generalización. En esta etapa, la base de datos aún no estaba operando, por lo que se llevó a cabo el registro de su actuación y sus comentarios durante esta, mediante toma de notas por parte de la investigadora. No se presentó ninguna dificultad para interactuar con la herramienta de parte del participante, así como ningún obstáculo al resolver los experimentos; sus comentarios fueron muy favorables. El análisis de esta información recopilada se retoma en el capítulo 7.

PRUEBAS 2 y 3

Las pruebas 2 y 3 se llevaron a cabo en el Colegio Gandhi Tultepec, que posee los niveles educativos de preescolar, primaria y secundaria. Al momento de las pruebas, se contaba con una población mixta de 19 estudiantes de segundo grado y 17 de tercero.

Se solicitó que los estudiantes pasaran uno a uno a probar la aplicación. Todos los participantes, sin excepción, presentaron cierto grado de nerviosismo pues hasta que llegaron al salón se les iba a explicar en qué consistiría su participación: “Hola, esto no es una prueba de matemáticas, ni tampoco te vamos a calificar. Al contrario, necesitamos que tú nos ayudes a evaluar esta aplicación, que la utilices y si tienes algún comentario nos lo hagas saber. Esta aplicación va a ser una exhibición interactiva parecida a las que se encuentran en Universum o Papalote” (ambos museos de ciencia en la Ciudad de México). Al saber de qué se trataba la actividad, todos dijeron sentirse más tranquilos, pues supieron que no iban a ser evaluados.

De acuerdo con lo que señalan Bødker y Kyng (2018), desde la primera etapa de pruebas se contó con un prototipo completamente funcional, es decir, dicho prototipo debe tener operando todas las características y opciones necesarias para brindar una experiencia completa al usuario, sin ser la versión final. Gracias a esto se ha podido cumplir con el marco conceptual planteado en la metodología y llegar a la versión final de la aplicación.

La diferencia entre las pruebas 2 y 3 es una cuestión técnica, dado que la base de datos en donde se guarda toda la información de la interacción de los estudiantes con la aplicación, se modificó en su estructura. Se adicionaron más campos para poder registrar todas y cada una de las respuestas durante los diferentes experimentos, monitorear el tiempo que permanecen por pantalla y el tiempo total que les tomó llevar a cabo la experiencia completa. En la segunda versión de la base de datos (prueba 3), se suprimieron las tablas que corresponden a las dos primeras pantallas de la aplicación, debido a que en

ellas se registró una actividad completamente esperada (en cuanto a la navegación e interacción, en dichas pantallas) por parte de los usuarios y por ello se consideró que ya no era necesario seguir registrando esos datos.

Del mismo modo, en la prueba 2 se tuvo como objetivo principal el monitorear la operación de la herramienta desde el punto de vista técnico, es decir, que los usuarios fueran capaces de navegar en ella de forma autónoma sin contratiempos y que no quedara fuera de operación bajo circunstancias de interacción normal. Los datos recopilados fueron obtenidos con el fin de monitorear el funcionamiento de la aplicación. Entre los datos recabados en la prueba 2, se encuentran: clics en cada imagen de la pantalla, clics en cada control de la pantalla, clics en las animaciones y respuestas de los usuarios a las preguntas relacionadas con los experimentos (respuestas correctas o incorrectas).

Con los datos obtenidos en esta sesión, se pudo constatar que el diseño de la herramienta cumplía el objetivo de registrar cómo los usuarios interactuaban con ella y hacían el recorrido a través de todas las actividades (todas las pantallas).

En la prueba 3 se enfocó la atención en que los usuarios realizaran el recorrido por toda la aplicación, en la actuación de los usuarios durante los experimentos disponibles y en el registro de más información en la base de datos. Los datos recabados fueron analizados de forma descriptiva y contrastados con los obtenidos en la prueba 2. Se obtuvieron las siguientes observaciones:

- El usuario tiene el control del tiempo en cada pantalla, pues de momento no hay un tiempo límite para terminar cada experimento y con ello se produce un ambiente dinámico.
- Cada usuario puede ir a su propio ritmo, pues no todos interactúan a la misma velocidad.
- A pesar de que los experimentos son prácticamente iguales para todos los usuarios, cada uno traza su propia ruta a través de ellos, esto debido a su forma de interactuar y a sus respuestas a las preguntas planteadas en cada experimento.
- Aun cuando en la prueba 2 el objetivo fue verificar el funcionamiento de la herramienta, podemos afirmar que los usuarios se percatan de las características del fenómeno de variación y generalización, y los datos de la prueba 3 también lo confirman.
- Se corroboró que la representación física del fenómeno domina a las otras representaciones (gráficas, señaladores numéricos y medidores).
- La saliencia visual no sólo es un atributo que depende del objeto, sino que también está relacionada con la experiencia previa del usuario. Por este motivo, un mismo objeto puede resultar visualmente saliente para una persona y no para otra.

A continuación, se presentan algunos comentarios emitidos por parte de los alumnos después de su participación en las pruebas 2 y 3, se especifica el grado escolar y el género de los participantes:

Prueba 2:

- “Me gustó más variación” (3º, ♂)
- “No le entendí bien a variación” (3º, ♀)
- “Lo de generalización se me hizo confuso” (3º, ♀)
- “Agregaría operaciones contra tiempo” (3º, ♂)
- “Deberían meter otros temas como ecuaciones” (3º, ♀)

Prueba 3:

- “Hacer las secuencias más difíciles” (3º, ♂)
- “Me gustó, está entretenido” (3º, ♂)
- “Me gustó, la duración está muy bien” (2º, ♀)
- “¡La explicación es muy lenta!” (2º, ♂)
- “¡Es muy largo!” (2º, ♂)

PRUEBA 4

La prueba 4 está también considerada como piloto, pues a causa de la pandemia por COVID-19, la estrategia para las pruebas de esta investigación tuvo que modificarse y en lugar de hacerlas presenciales cambiaron a virtuales. Para ello, se utilizó un software llamado *UseTogether* (ahora *Drovia* <https://www.drovia.com/>), el cual permite hacer uso de una aplicación instalada en una computadora, a través de un navegador, y para usarla a distancia (*online*). Esta herramienta permite grabar la sesión en audio y toda la interacción del usuario con la aplicación en prueba, de tal manera que se genera un archivo de video, cabe señalar que en ningún momento se activa la cámara web del usuario, así que no queda grabada su imagen.

El objetivo de la prueba 4 fue evaluar cualquier problema con la conectividad al utilizar *UseTogether* y monitorear la actuación de cada usuario al interactuar con la herramienta, vía remota, y corregir cualquier falla técnica. En la Tabla 5.2 se incluyen las características del público que participó, así como problemas técnicos que se presentaron en la interacción y algunos comentarios de los usuarios.

Tabla 5.2 Participantes en la Prueba 4

Edad/Género	Escolaridad	Problemas técnicos	Comentarios significativos (GEN2)
73 ♀	Licenciatura	Ninguno	“Explicación muy rápida”
38 ♂	Maestría	Ninguno	“Explicación rápida”
62 ♂	Maestría	Ninguno	“Ejercicios confusos para los chavos”
60 ♀	Maestría	Ninguno	“¿Cómo empiezo?”

Algunos de los comentarios que cada usuario emitió durante el segundo experimento de generalización resultaron significativos. Es destacable el contraste que hay entre los comentarios de los estudiantes de nivel secundaria y los de los adultos de esta prueba, lo cual evidencia que el diseño de la aplicación es pertinente para el público objetivo, sin embargo, es accesible para otros públicos.

PRUEBA 5

Las participantes de esta prueba fueron tres estudiantes de primer semestre de Licenciatura en Fisioterapia y una de 4° semestre de bachillerato, y para fines de análisis se denominó a este grupo como Bloque1. Tal y como se presenta en la Tabla 5.1, el objetivo de esta prueba fue el recabar los datos de desempeño e interacción con la herramienta con un grupo de menor edad que los participantes de la prueba 4, esto derivado de los comentarios y desempeño del grupo de dicha prueba. También, en esta prueba, se utilizó la plataforma *UseTogether* dado que las sesiones se realizaron de forma virtual y quedaron grabadas. Se utilizó la cuarta versión de la herramienta, que incorpora los tres temas seleccionados (variación, generalización y procesos infinitos), una actualización en la base de datos (afinando el contenido de las tablas), una entrevista de formato libre con las participantes en las que manifestaron sus comentarios, impresiones y sugerencias con respecto a su interacción con la herramienta.

Los comentarios del Bloque1 derivaron en una actualización menor en la herramienta, que consistió en agregar un botón para poder repetir las instrucciones en las tres pantallas: *QueHacerVarFrm*, *QueHacerGenFrm* y *QueHacerProcInfFrm*.

5.3.2. Prueba principal

Una vez realizadas las pruebas anteriores y todos los ajustes necesarios a la herramienta, se llevó a cabo la prueba principal, así como la toma de datos que se utilizó para el análisis

de estos, el cual se presenta en el capítulo 7. Al grupo de participantes se le asignó el nombre de Bloque2, para fines prácticos, y estuvo conformado por cinco estudiantes de bachillerato y uno de licenciatura. Las sesiones se llevaron a cabo de forma virtual a través de la plataforma *UseTogether* y también fueron grabadas. En la herramienta se adicionó el botón para poder repetir las instrucciones (a elección del usuario), modificación derivada de la prueba anterior. En total, se probaron los tres temas con tres experimentos de variación, tres de generalización y uno de procesos infinitos. Se aplicó un modelo de entrevista a todos los participantes y también hubo oportunidad de que expresaran en forma libre sus comentarios, impresiones y sugerencias con respecto a su experiencia en el uso de la aplicación.

Con esta prueba, se obtuvieron los datos necesarios para el análisis principal de esta investigación, divididos en tres distintas fuentes: observación durante la actuación de los participantes, los datos de interacción registrados automáticamente en la base de datos de la aplicación y el protocolo de entrevista aplicado a cada uno de los participantes. El formato del protocolo de entrevista se encuentra en el Apéndice A.

Como ya se ha mencionado en este capítulo, el diseño de la herramienta estuvo basado en la metodología y perspectivas teóricas planteadas. Esto permitió la operación adecuada de la herramienta y con ello llevarse a cabo las pruebas anteriormente descritas. En el capítulo siguiente se presentan el diseño y operación de la herramienta.

6. DISEÑO Y OPERACIÓN IIPM (INTERACTIVO IDEAS PODEROSAS EN MATEMÁTICAS)

En este capítulo se describe el diseño y desarrollo del software interactivo utilizado como herramienta para llevar a cabo la obtención de datos automatizada para esta investigación. El diseño de la versión final de la herramienta se llevó a cabo tomando como base los puntos considerados en el capítulo anterior y tomando en cuenta que tiene el formato de una exhibición interactiva, que en algún momento pueda ser instalada en un museo de ciencias.

6.1. DESCRIPCIÓN DE LA HERRAMIENTA

La herramienta consiste en un desarrollo de software diseñado y programado especialmente para este proyecto de investigación, utilizando *Visual C#* de *Visual Studio Express 2015* y funciona para plataforma *Microsoft Windows 7* y posteriores; también se utilizó la gama de componentes *Advanced HMI free Community Edition* (<https://www.advancedhmi.com/>). El software *Advanced HMI* permite crear interfaces humano-máquina, está basado en el *.NET Framework* y se utiliza con el *Visual Studio* de *Microsoft*, lo que permite que la aplicación creada sea ejecutable en prácticamente cualquier computadora con sistema operativo *Windows* (*HMI Software by AdvancedHMI, Application Creation Framework*, 2019).

Consta de diez pantallas, que para la tercera versión del software se ajustaron de tal forma que el usuario debe recorrerlas todas y cada una de ellas hasta completar todas las actividades presentadas en la aplicación. Esto se realizó con el fin de obtener el registro de todos los datos de la interacción usuario-herramienta. Se diseñaron y desarrollaron tres experimentos para los temas de variación y generalización, y uno para procesos infinitos.

Dado que la herramienta está diseñada para un público objetivo de segundo y tercero de secundaria, se crearon dos personajes que tienen la función de “guías” durante la experiencia. Esto hace posible que, aunque la herramienta no se catalogue como un videojuego, sea lo suficientemente amigable con el usuario y propicia que este tenga una perspectiva diferente de la actividad (Calder, 2015). La facilidad de uso permite que el público en general pueda utilizarla sin contratiempos.

Como ya se ha mencionado anteriormente, los temas sobre ideas poderosas en matemáticas seleccionados son: variación, generalización y procesos infinitos. Los tres temas se tienen disponibles y operando satisfactoriamente en la última versión de la herramienta, la cual se utilizó para la toma definitiva de datos. Cuenta con una base de datos que tiene la finalidad de guardar la información recopilada cada vez que un usuario utiliza la aplicación en cada experimento. Entre los datos a recabar se encuentran: clics en cada imagen de la pantalla, clics en cada control de la pantalla, clics en las animaciones y respuestas de los usuarios a las preguntas planteadas en los experimentos.

Respecto a las características que debe tener una exhibición interactiva, con base en mi experiencia como diseñadora y desarrolladora de exhibiciones interactivas, definiría un módulo interactivo como aquel en el que se muestra algún principio científico, matemático o alguna demostración tecnológica, y en la que el visitante interviene y participa, y quien es el elemento final y esencial que complementa la exhibición. La temática básica de la exhibición debe poder ser mostrada en un tiempo de cinco minutos, ya que los visitantes normalmente llevan tiempo limitado para visitar el museo y el grueso de ellos acude en formato de visitas escolares, por consiguiente, con tiempo limitado para la visita. Debe ser de fácil manejo para minimizar el tiempo de familiarización, de fácil mantenimiento, y atractiva, además de ser robusta y segura para el visitante.

Considerando lo anterior, se llegó a la tercera versión de la herramienta y la propuesta del modelo de enseñanza que estamos utilizando en esta investigación busca incluir todos los elementos planteados en la metodología (ver Figura 6.1). El modelo está considerado para propiciar el aprendizaje de *Ideas Poderosas en Matemáticas* en un entorno no escolar (que puede ser un museo, centro comercial, hospital o incluso dentro de la escuela, pero sin el rigor y la formalidad marcados por una clase convencional). La interacción se da entre dos elementos: *Usuario* y *Artefacto*. El *Usuario* puede ser cualquier persona que utilice la

herramienta y que al estar fuera del rigor escolar se encuentra relajado (*Aprendiz relajado*) y el *Artefacto* es la computadora (exhibición para el caso de un museo) que contiene la *Aplicación dedicada* (software interactivo). El *Usuario*, al interactuar con el *Artefacto*, desencadena una conversación que le permite el aprendizaje de los temas planteados por la *Aplicación dedicada*:

- *Aprendizaje mediante interacción directa con la herramienta*: Aprenden a manipular los controles de la herramienta para llevar a cabo los experimentos.
- *Aprendizaje utilizando elementos de saliencia visual*: El diseño de la herramienta utiliza elementos de saliencia visual para comunicar determinados mensajes al usuario dentro de las explicaciones y en los mismos experimentos.
- *Aprendizaje mediante la “conversación” entre el usuario y la aplicación*: El *Usuario*, en función de la información proporcionada por el *Artefacto*, desencadena esta “conversación”, pues debe pensar cómo resolver el problema planteado en cada experimento y debe tomar las decisiones necesarias para resolverlo.



Figura 6.1 Propuesta del modelo de enseñanza de la herramienta IIPM.

Para definir cuáles datos se debían registrar en la base de datos, se obtuvieron los mapas de saliencia visual de cada una de las pantallas de la herramienta, para ello se utilizó el software denominado *OGAMA*, pues al comparar los resultados de este con el *Saliency Kit* de *MatLab* ofrece mayor calidad en las imágenes obtenidas. Una vez generados los mapas, se corroboraron las distintas áreas de interés y áreas salientes, con esta información se apuntaló el diseño de las tablas de la base de datos, considerando una para cada pantalla de la herramienta.

En la Figura 6.2 se presenta a manera de ejemplo la pantalla correspondiente al primer experimento de variación con su respectiva tabla de la base de datos.



Var1Frm, Experimento 1

Figura 6.2 Pantalla del experimento 1 de variación y su tabla de la base de datos

6.2. DISEÑO, ESTRUCTURA Y CONSTRUCCIÓN

El diseño final de la herramienta se basó en mi experiencia en cuanto a diseño y construcción de exhibiciones interactivas para museos de ciencias, en las consideraciones teóricas incluidas en esta investigación, en los puntos señalados en la metodología, en el modelo propuesto en la Figura 6.1 y en las pruebas preliminares que se llevaron a cabo en las etapas iniciales de desarrollo del software.

La versión final de la herramienta cuenta con la secuencia de pantallas mostrada en la Figura 6.3. El recorrido a través de todas las pantallas está asegurado gracias a la secuencia planteada, lo cual permite obtener todos los datos de los usuarios para posteriormente poder analizar su interacción con la herramienta. Cabe señalar que, a diferencia de la versión para investigación, en la versión para museo quedará a elección del usuario el experimentar con uno, dos o tres temas, incluso con la posibilidad de dejar inconclusa su participación.

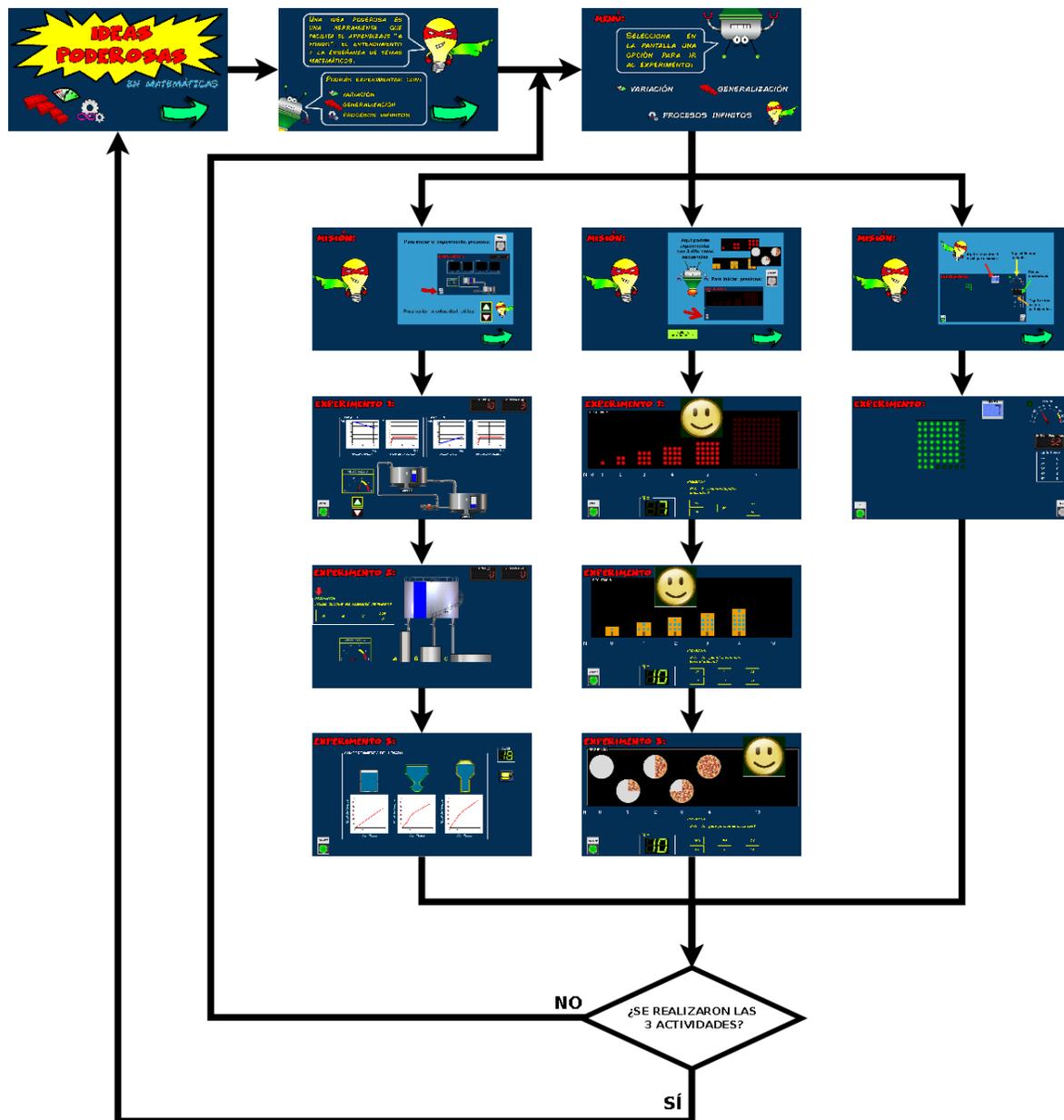


Figura 6.3 Secuencia de pantallas. Versión final de la herramienta.

La base de datos de la aplicación, que corresponde a la versión final y utilizada en la obtención de datos durante la prueba principal, se muestra en el diagrama presentado en la Figura 6.4. En cada tabla aparece el nombre de la pantalla que corresponde y posteriormente aparece la lista de campos que contienen la información registrada.

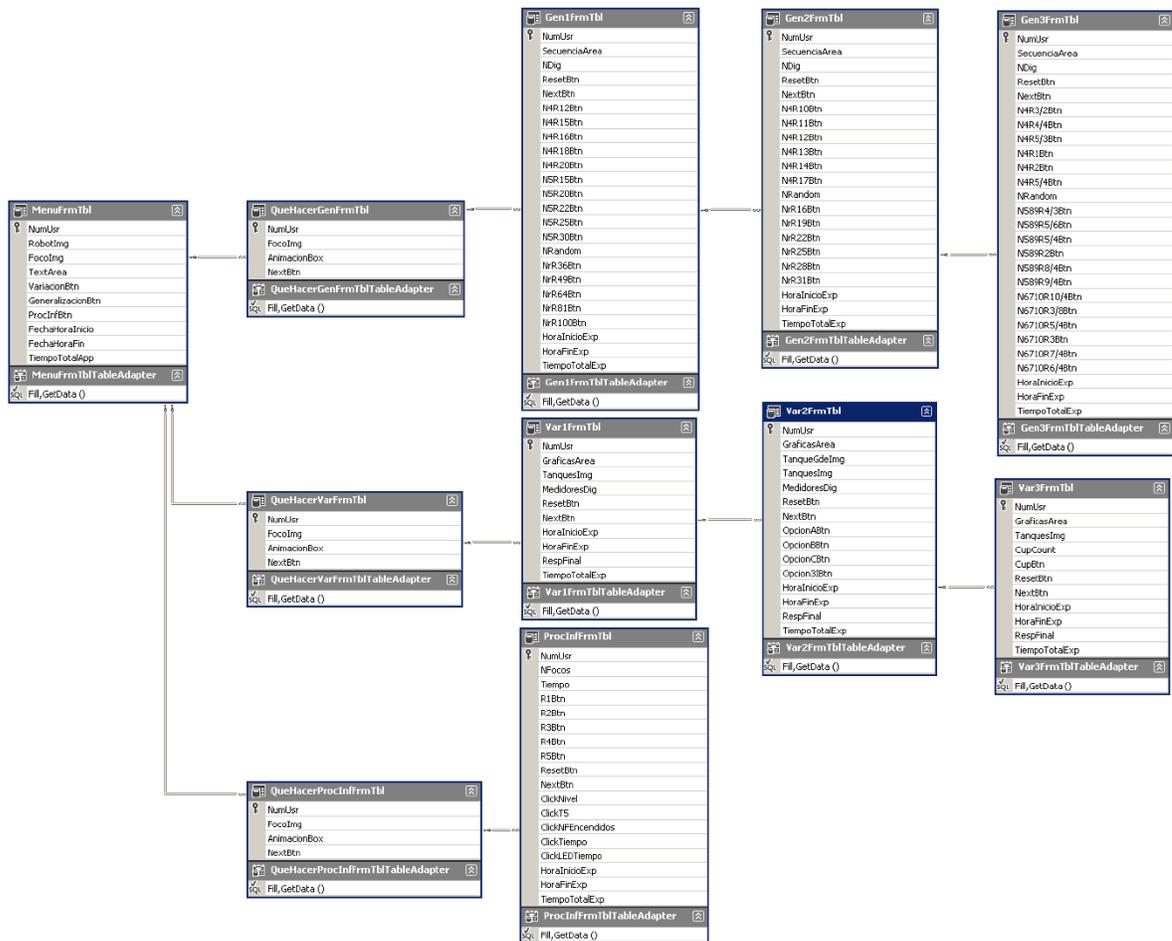


Figura 6.4 Diagrama de la base de datos operando en la versión final

Para la obtención de datos de cada una de las pantallas y poder diseñar las tablas de las bases de datos, se realizó un análisis de la saliencia visual de cada pantalla con las herramientas *OGAMA* y el *Saliency Toolbox* de *MatLab*. Con el propósito de definir cuáles serían las áreas de interés de cada pantalla y así llevar a cabo el registro de datos, se llevó a cabo el siguiente procedimiento:

- 1) Se descargó la versión *30 day trial* de *MatLab* para poder probar el módulo *Saliency Toolbox* y ver si los mapas de saliencia visual generados con *OGAMA* corresponden a los de dicho módulo. Así se tuvieron dos referencias, para poder hacer un comparativo y se utilizaron los datos de la que mejor resultado aportó.
- 2) Tanto el *Saliency Toolbox* como *OGAMA* son herramientas que han sido desarrolladas con base a las investigaciones del Dr. Laurent Itti (2007) sobre saliencia visual (en la *University of Southern California*) y en su software *INVNT*.

- 3) Cada captura de pantalla de la aplicación se sometió al análisis de saliencia visual, con ambas herramientas.
- 4) Se elaboró un cuadro comparativo básico para poder observar las diferencias entre ambos mapas (ver Figura 5.2).

Después de hacer los estudios de cada pantalla con las dos herramientas, se compararon y se concluyó que los mapas obtenidos con *OGAMA* ofrecen mayor nitidez en las áreas donde la saliencia visual es mayor, por lo tanto, son los que se utilizaron.

6.3. OPERACIÓN

La operación de la herramienta, así como la interactividad que es posible entre el usuario y la misma se presentan en la Figura 6.5.

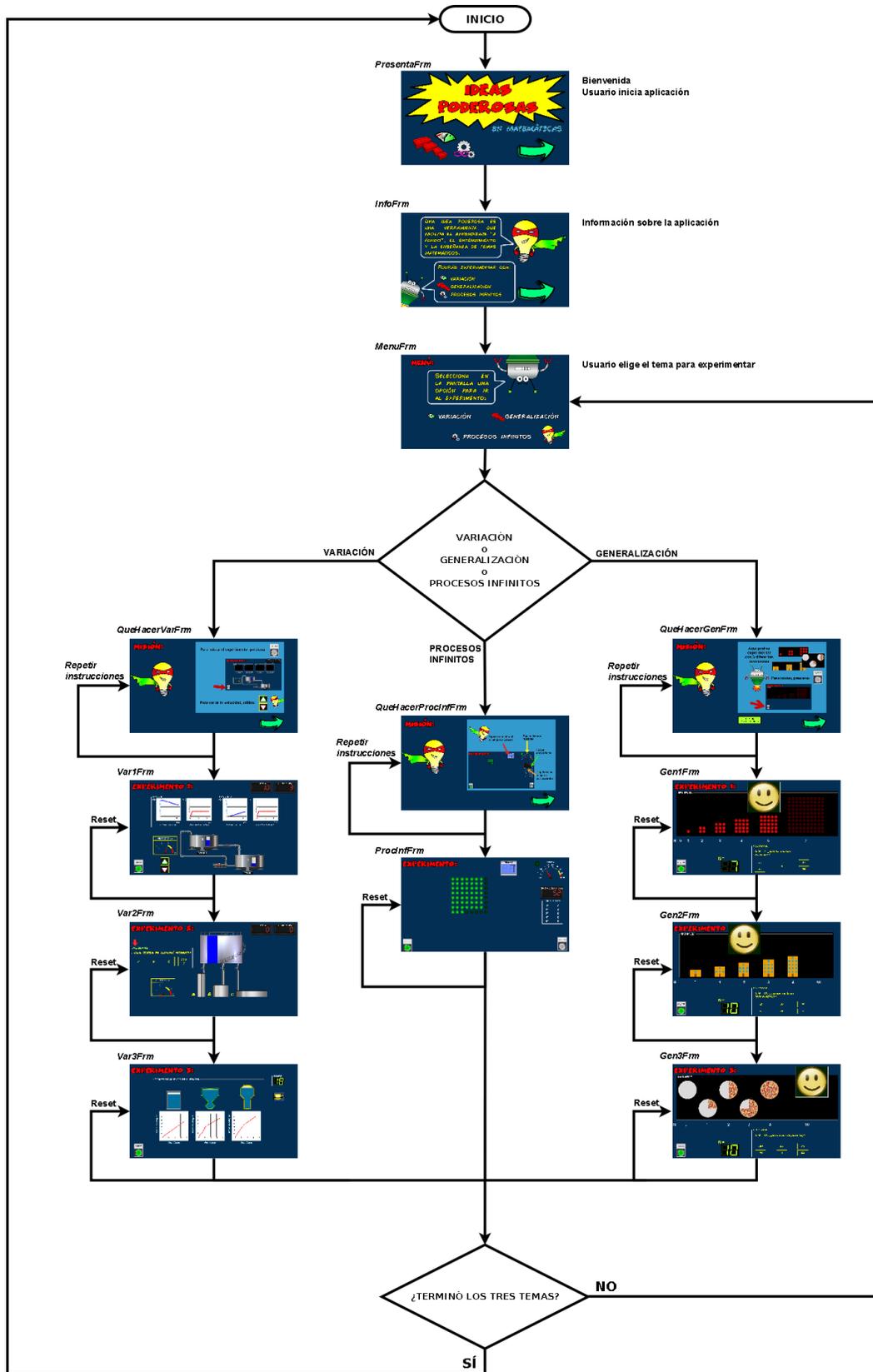


Figura 6.5 Diagrama de operación e interactividad de la herramienta, versión final.

A partir de la figura anterior, se describe la herramienta: al usuario se le presenta una pantalla principal de bienvenida (*PresentaFrm*), posteriormente pasa a una pantalla con una breve explicación de lo que son las ideas poderosas en matemáticas (*InfoFrm*), luego pasa a la pantalla de menú (*MenuFrm*), en la que se le invita a seleccionar con cual tema experimentará primero: variación, generalización o procesos infinitos. En la Figura 6.6 se muestran las mencionadas tres primeras pantallas de la aplicación.

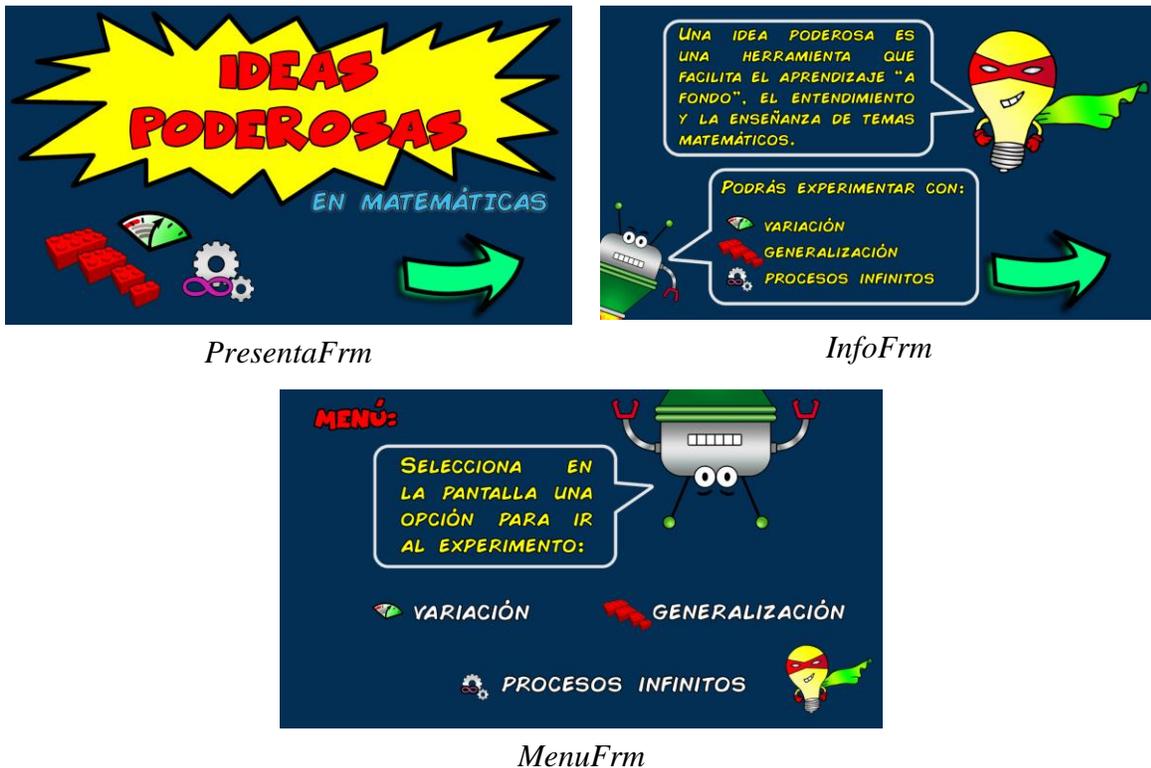


Figura 6.6 Tres primeras pantallas de la aplicación

Una vez seleccionado el tema, las instrucciones sobre los experimentos se dan a través de una animación que tiene una duración máxima de 55 segundos (*QueHacerVarFrm*, *QueHacerGenFrm* y *QueHacerProcInfFrm*). Cabe señalar que las imágenes correspondientes a cada experimento son versiones simplificadas y diagramáticas de los modelos, en especial en la sección correspondiente al tema de variación. A continuación, se presenta la descripción de los distintos experimentos:

Tema: Variación

Este tema se presenta con tres actividades de llenado de tanques de agua, inspiradas en las problemáticas señaladas en la sección 3.3.1 y tomando elementos que destacan en el software *SimCalc*, pero que pueden llevarse a cabo en pocos minutos.

Experimento 1 (*Var1Frm*)

Consiste en experimentar con la velocidad de vaciado-llenado de un par de tanques de agua, ambos con una capacidad de 100 litros. Se puede variar la velocidad (gasto) desde 0 l/s (litros/segundo) hasta 5 l/s a lo largo de todo el experimento. El usuario puede observar las variaciones de velocidad y volumen de los tanques a través de gráficas dinámicas, con valores numéricos y en una representación física de los mismos tanques. También, de forma dinámica por medio de indicadores se visualiza tanto la velocidad de vaciado-llenado como el tiempo transcurrido. Ver Figura 6.7.

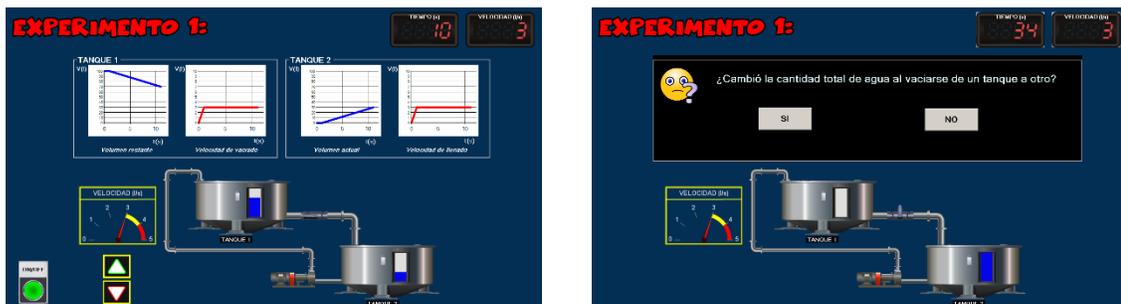


Figura 6.7 Pantallas del experimento 1 sobre variación. Inicio y fin del experimento.

Experimento 2 (*Var2Frm*)

Consiste en experimentar con el llenado de tres tanques de agua de 60 litros cada uno, pero con diferente forma (el tanque A es alto y delgado, el tanque B es igual de alto que ancho y el C es bajo y ancho), a partir de un tanque general (180 litros), al cual están conectados simultáneamente, por lo que la velocidad de llenado de los tres tanques pequeños es exactamente la misma. Antes de iniciar el experimento se le pregunta al usuario: “¿Cuál crees que se llenará primero?”. La respuesta que estamos considerando como correcta es “Los 3 igual”, aunque también se permite responder A, B o C. Una vez recabada la respuesta, puede variarse la velocidad (0 a 5 l/s) y esta se ve reflejada en un medidor numérico y el llenado se visualiza en gráficas dinámicas. Al término del

experimento queda demostrado que los tres tanques de menor capacidad (60 litros) se llenan al mismo tiempo. Con este experimento se pretende que se observe la relación entre dos variables: volumen y velocidad de llenado, así como también que los usuarios descubran, al interactuar con el experimento, que la velocidad de llenado de los tres es la misma. Ver Figura 6.8.



Figura 6.8 Pantallas del experimento 2 sobre variación. Inicio y fin del experimento

Experimento 3 (Var3Frm)

Aquí se cuenta con tres tanques de formas irregulares, aunque con la misma capacidad (20 tazas cada uno) y que deben irse llenando con una taza (botón). Conforme se van llenando los tanques se observa el comportamiento de llenado que cada uno refleja en su respectiva gráfica, pudiéndose observar que hay unas secciones de tanque que se llenan más rápido que otras, sin embargo, los tres se terminan de llenar al mismo tiempo. Ver Figura 6.9.

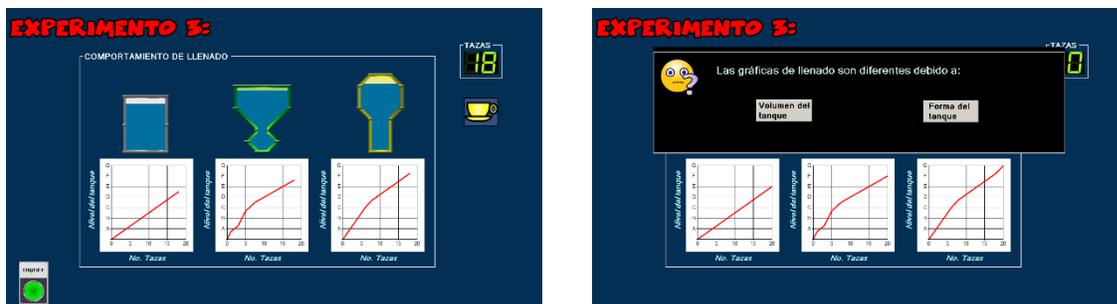


Figura 6.9 Pantallas del experimento 3 sobre variación. Desarrollo y fin del experimento

Al final de cada experimento relacionado con variación, se incorporó una pregunta con el propósito de verificar el grado de acercamiento por parte del participante al tema presentado.

Tema: Generalización

Esta idea matemática se presenta con tres actividades que utilizan secuencias figurativas, inspiradas en lo planteado en la sección 3.3.2, buscando acercar a los usuarios al tema en un tiempo breve.

Experimento 1 (*Gen1Frm*)

La secuencia obedece a la expresión N^2 , considerando N a partir de 0. Las secuencias se van presentando mediante el encendido de focos (tipo *LED*) en una misma pantalla cada vez que el usuario incrementa el valor de N . Para $N=4$ y $N=5$ se le pregunta por los focos que deben encender, la tercera pregunta se hace para un valor aleatorio de N , que puede ser desde 6 hasta 10. Todas las respuestas quedan registradas en la base de datos, ya sean correctas o incorrectas. Si la respuesta es correcta, el usuario puede continuar con el siguiente paso; si es incorrecta se le invita a intentar de nuevo. Este procedimiento es común para los experimentos 2 y 3 de este mismo tema. Ver Figura 6.10.

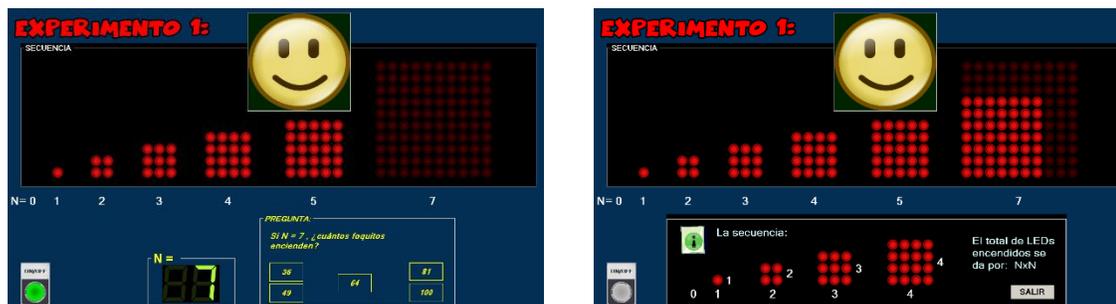


Figura 6.10 Pantallas del experimento 1 sobre generalización. Desarrollo y fin del experimento.

Experimento 2 (*Gen2Frm*).

La secuencia está representada por ventanas de edificios, la cantidad de ventanas está definida por la expresión $3N+1$, para $N \geq 0$. Los edificios con sus ventanas correspondientes van apareciendo conforme el usuario incrementa el valor de N . Al llegar a $N=4$ se le pregunta al usuario por la respuesta correcta, la siguiente pregunta se hace para un valor

aleatorio de N , que puede ser desde 5 hasta 10. Si la respuesta es incorrecta, tres ventanas empiezan a flashear en los edificios presentes en la pantalla, a manera de dar una pista al usuario y se le invita a intentar de nuevo. Ver Figura 6.11.



Figura 6.11 Pantallas del experimento 2 sobre generalización. Desarrollo y fin del experimento.

Experimento 3 (Gen3Frm)

En esta secuencia se utilizó como ejemplo una pizza dividida en porciones (cuartos) y está dada por la expresión $N/4$. Al igual que el experimento anterior, las preguntas empiezan con $N=4$ y N es aleatorio para la segunda pregunta, pudiendo tomar su valor entre 5 y 10. En este experimento, las opciones de respuesta cambian según el valor de N . Si N es igual a 5, 8 ó 9 las opciones de respuesta son comunes, así como para N igual a 6, 7 ó 10, esto con el fin de hacer la prueba más versátil. Ver Figura 6.12.

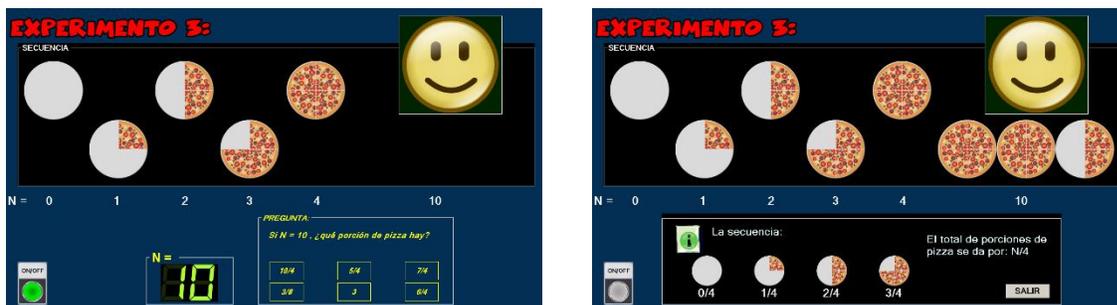


Figura 6.12 Pantallas del experimento 3 sobre generalización. Desarrollo y fin del experimento.

Con la finalidad de reforzar el acercamiento al tema, al final de cada experimento sobre generalización, se agregó una explicación dinámica sobre cómo se logra la secuencia en cada caso.

Tema: Procesos infinitos

Esta idea matemática se presenta con una actividad de corte lúdico, que tal y como se menciona en la sección 3.3.3, haga uso del concepto intuitivo que cada usuario tenga. La actividad es un ejemplo del infinito potencial ejemplificado con encendido de *LEDs* en un tablero.

Experimento (*ProclnFrm*)

Este experimento tiene el objetivo de involucrar al participante en un juego simple que consiste en encender *LEDs* que aparecen en un tablero en la pantalla. Conforme se van encendiendo al dar clic sobre ellos, se va llevando el puntaje (un punto por *LED* encendido), si el usuario da un clic sobre uno ya encendido, este se apaga y se decrementa el puntaje. Inicialmente aparecen cuatro *LEDs* apagados en el tablero, al sólo quedar uno sin encender, aparece otro bloque de *LEDs* apagados y esto continúa a lo largo de la actividad por los primeros 45 segundos. En este momento se realiza una pausa y se le pregunta al usuario si quiere disponer de otros 45 segundos para mejorar su puntaje, si la respuesta es negativa, en ese momento se termina el experimento, si la respuesta es afirmativa, el usuario puede continuar por otros 45 segundos más. Al terminar, se felicita al participante si es que logra tener un puntaje dentro del *top 5* y se le plantea lo siguiente: *Imagina que sigues encendiendo foquitos, sin límite de tiempo ni de pantalla. ¿Cuándo terminaría el experimento?* Y hay cinco opciones de respuesta: *En 1 hora, en 2 semanas, en 1 año, nunca y no tengo idea*; siendo estas dos últimas consideradas como las que muestran un acercamiento a la idea de proceso infinito. Ver Figura 6.13.



Figura 6.13 Pantallas del experimento sobre procesos infinitos. Desarrollo y fin del experimento.

Al terminar un tema, en automático se regresa a la pantalla de *MenuFrm* para que el usuario seleccione otro tema para experimentar y queda eliminado de la pantalla el tema recién completado. Cuando se concluye con los tres temas, el software regresa a la pantalla inicial (*PresentaFrm*) y queda disponible para el siguiente usuario. Cabe señalarse que cada experimento puede ser repetido cuantas veces se desee, pues al terminarse se le ofrece al usuario la función de *RESET* y así puede iniciarlo de nuevo. Si se utiliza esta función, se continúa la toma de datos en la pantalla, hasta que el usuario salga de ella.

Hasta ahora se han descrito las características de la versión desarrollada para esta investigación. Sin embargo, se tiene contemplado el diseño de una versión para museo, la cual se plantea que tenga el mismo contenido, pero con libre elección de terminar un solo tema, dos o bien los tres temas disponibles, es decir, no sería forzoso recorrer todas y cada una de las pantallas.

La versión para museo contaría con alguna pantalla adicional que, al terminar un tema, le invite al usuario a experimentar con alguno de los que no ha interactuado o bien terminar la actividad. Lo anterior, con el fin de permitir que terminen al menos un tema y si disponen de más tiempo o interés puedan continuar operando la exhibición y en caso contrario, pueden continuar con la visita. Esta libre elección también nos permitiría monitorear y registrar cual es el tema más utilizado, cuántos terminan los tres temas y cuántos no completan el tema elegido.

Las imágenes de la propuesta de la exhibición interactiva en su versión para museo pueden apreciarse en la Figura 6.14.



Figura 6.14 Propuesta de la exhibición interactiva para museo.

La propuesta de la exhibición interactiva para operar en piso de museo contempla utilizar una pantalla de 42 pulgadas *touch screen*, lo cual permitiría visualizar nítidamente los gráficos presentados en la aplicación, explotar las propiedades de saliencia visual y que varios usuarios puedan interactuar al mismo tiempo si así lo desean.

En el siguiente capítulo se presentan el análisis y los resultados correspondientes a la prueba principal, así como tres casos seleccionados por su relevancia.

7. ANÁLISIS Y RESULTADOS. PRUEBA PRINCIPAL Y CASOS SELECCIONADOS

En este capítulo se presenta el análisis de los datos adquiridos en la sesión definitiva de pruebas, así como los resultados obtenidos. Se encuentra dividido en cuatro secciones, la primera muestra un análisis general de los usuarios del Bloque2 de pruebas, considerando un análisis utilizando el contraste de tres fuentes de datos independientes: observación directa al momento de la prueba, información de la base de datos recabada durante cada sesión, por la misma aplicación en forma automática y la entrevista con el usuario. En la segunda sección se presenta un tipo de análisis en el que se consideran *grandes momentos*, que son los momentos más significativos en cuanto al acercamiento que muestra cada usuario, en cada tema. En la tercera sección se exponen tres casos relevantes de los usuarios con sus respectivos análisis (tres fuentes independientes, grandes momentos y episodios significativos en entrevista). Finalmente, en la cuarta sección se presentan las observaciones derivadas de los resultados obtenidos.

En las secciones que conforman este capítulo, se presentan muestras de los acercamientos a los tres temas (variación, generalización y procesos infinitos) por parte de los usuarios. Para esta investigación, se considera que un usuario tiene un acercamiento a un tema cuando:

- Completa el experimento con un mínimo de desaciertos.
- Responde a las preguntas planteadas con respuestas correctas que involucran las nociones matemáticas involucradas en los experimentos.
- El usuario se expresa positivamente sobre la actividad.

Cabe señalar que el acceso o acercamiento al tema puede ser parcial o completo, dependiendo de la actuación de cada usuario.

7.1. ANÁLISIS POR CONTRASTE DE TRES FUENTES INDEPENDIENTES

En esta sección se expone un análisis contrastando los datos obtenidos de tres fuentes independientes. Las tablas: Tabla 7.1, Tabla 7.2, Tabla 7.3, Tabla 7.4, Tabla 7.5 y Tabla 7.6 (una por usuario), contienen las evidencias recabadas durante la participación del usuario en cada experimento, utilizando la observación directa por parte de la investigadora complementado por lo que puede apreciarse en el video grabado durante toda la sesión de prueba, los datos recabados por la herramienta en la base de datos y la entrevista concedida por el usuario durante la sesión. Cabe señalar que a los participantes involucrados en la toma definitiva de datos se les nombra por su nombre real. En seguida se describe por columna el contenido de las tablas.

ACTIVIDAD: Nombre que identifica cada experimento por tema y su respectivo objetivo.

ACTUACIÓN POR ACTIVIDAD: Descripción elaborada por la investigadora, de la actuación de cada participante durante cada experimento.

DATOS CONCRETOS (BASE DE DATOS): Datos registrados de forma automática con la aplicación, conforme cada usuario realizó los diferentes experimentos.

ENTREVISTA: Descripción obtenida a partir de los diálogos del protocolo de entrevista.

ANÁLISIS Y REFLEXIONES: Generados a partir de los datos obtenidos a través de las distintas fuentes.

La Tabla 7.1 corresponde al participante Óscar, un chico de segundo semestre de bachillerato.

Tabla 7.1 Datos y Análisis, usuario: Óscar

ÓSCAR				
ACTIVIDAD	ACTUACIÓN POR ACTIVIDAD	DATOS CONCRETOS (BASE DE DATOS)	ENTREVISTA	ANÁLISIS Y REFLEXIONES
VAR1 Utilizar los controles en pantalla para llenar un tanque de agua a partir de otro, ambos de la misma capacidad.	No le queda claro el experimento, desde el inicio pregunta cómo empezar.	Pregunta final: <i>¿Cambió la cantidad total de agua al vaciarse de un tanque al otro?</i> Respuesta: <i>SI</i> Tiempo Total = 01:29	Califica con un 3 el tema y considera que sí le gustó. Considera VAR3 como el más fácil, porque le entendió. Considera VAR2 el más difícil, porque se le complicó	Se considera que hay coherencia entre sus respuestas, su actuación en la actividad y en los datos registrados en la base de datos. En VAR1 y VAR2 no tiene claro lo que
VAR2	No le queda claro	Pregunta inicial:		

ÓSCAR				
ACTIVIDAD	ACTUACIÓN POR ACTIVIDAD	DATOS CONCRETOS (BASE DE DATOS)	ENTREVISTA	ANÁLISIS Y REFLEXIONES
Llenar los tres tanques pequeños a partir de uno más grande. Comprobar que los tres tanques pequeños son de igual capacidad.	lo ocurrido en el experimento.	¿Cuál tanque se llenará primero? Respuesta: <i>Los 3 igual</i> Pregunta final: <i>Después de experimentar, la capacidad de los 3 tanques pequeños es:</i> Respuesta: <i>DIFERENTE</i> Tiempo Total = 04:31 Mayor tiempo registrado	entenderlo. La dificultad de los experimentos la considera adecuada, también le otorga un 3. Considera que es el tema más complicado. Ya conocía el tema (SECUNDARIA).	ocurre en el experimento, especialmente en VAR2, pues inicia respondiendo acertadamente y al final da una respuesta errónea. Sin embargo, en VAR3 tiene claro tanto el concepto como la respuesta final. Esto podría explicarse como en los dos primeros estuvo distraído o bien que en VAR3 logró tener acceso al tema.
VAR3 Llenar tres tanques de igual capacidad, pero de forma diferente, se espera que comprueben que la gráfica de llenado se genera por la forma de cada tanque.	Sin problema para realizarlo.	Pregunta final: <i>Las gráficas de llenado son diferentes debido a:</i> Respuesta: <i>Forma del tanque</i> Tiempo Total = 01:38		
GEN1 Resolver una secuencia generada por N^2 , representada por <i>LEDs</i> encendidos.	Sin problema lo resuelve y logra generalizar.	N=4, Errores=0 N=5, Errores=0 <i>NRandom</i> = 10, Errores=0 Tiempo Total = 01:33	Califica con un 3 el tema. Experimento más fácil: GEN1 y GEN3 Experimento más difícil: GEN2 La dificultad de los experimentos la considera adecuada, le otorga un 3.	Se considera que hay coherencia entre sus respuestas, su actuación en la actividad y los datos registrados en la base de datos. GEN1 y GEN3 los resuelve sin problema y por consiguiente alcanza los objetivos, generalizando adecuadamente para <i>NRandom</i> . En GEN2 tiene problemas al momento de generalizar para <i>NRandom</i> , en este caso no se alcanza el objetivo satisfactoriamente.
GEN2 Resolver una secuencia generada por $3N+1$, representada por ventanas de edificios.	Tuvo dificultades para resolverlo. Después de N=3, se queda observando detenidamente y logra resolver para N=4	N=4, Errores=0 <i>NRandom</i> =9, Errores=4 Tiempo Total = 02:35	Le resultan atractivas las secuencias. Es el tema que más le gustó. De toda la aplicación, GEN1 es el experimento que más le gustó.	
GEN3 Resolver una secuencia generada por $N/4$, representada por porciones de pizza.	No presenta problemas para resolverlo.	N=4, Errores=0 <i>NRandom</i> =8, Errores=0 Tiempo Total = 01:02	GEN2 es el experimento que considera más complejo de toda la aplicación. Ya conocía el tema	

ÓSCAR				
ACTIVIDAD	ACTUACIÓN POR ACTIVIDAD	DATOS CONCRETOS (BASE DE DATOS)	ENTREVISTA	ANÁLISIS Y REFLEXIONES
			(SECUNDARIA).	
PI Encender la mayor cantidad de LEDs en un tiempo determinado.	No tiene problema para resolver la actividad. No se involucra demasiado o bien, no presenta mucha destreza para realizarla.	NFocos=61 Tiempo=90seg Respuesta final = <i>NUNCA</i>	Califica con un 3 el tema y no le parece complicado. Considera a la actividad fácil de entender. Lo considera el tema menos complicado de toda la aplicación. Ya conocía el tema (SECUNDARIA).	Se considera que hay coherencia entre sus respuestas, su actuación en la actividad y los datos registrados en la base de datos. El experimento no capta por completo su atención o bien presentó algún tipo de complicación no reportada para realizarlo.

En el caso de Óscar, se considera que hay coherencia entre sus respuestas, su actuación en los experimentos y los datos registrados en la base de datos. En el tema de variación muestra un acercamiento al tema sólo en el tercer experimento (VAR3). En el tema de generalización muestra un acercamiento al tema en GEN1 y GEN3. En el tema de procesos infinitos no queda totalmente involucrado en la actividad o bien encontró algún tipo de complicación para realizarlo y no fue reportada por él, sin embargo, muestra tener claro el concepto.

A continuación, se presenta la Tabla 7.2, la cual corresponde al participante Antonio, estudiante de cuarto semestre de bachillerato.

Tabla 7.2 Datos y Análisis, usuario: Antonio

ANTONIO				
ACTIVIDAD	ACTUACIÓN POR ACTIVIDAD	DATOS CONCRETOS (BASE DE DATOS)	ENTREVISTA	ANÁLISIS Y REFLEXIONES
VAR1 Utilizar los controles en pantalla para llenar un tanque de agua a partir de otro, ambos de la misma capacidad.	Sin problema realizó el experimento. Al parecer, tiene claro lo que ocurre en él.	Pregunta final: <i>¿Cambió la cantidad total de agua al vaciarse de un tanque al otro?</i> Respuesta: <i>NO</i> Tiempo Total = 00:57	Califica con 2.8 el tema. Le gusta lo interactivo y cómo está explicado. Considera VAR3 como el experimento más fácil. Considera VAR2	Se considera que hay coherencia entre sus respuestas, su actuación en la actividad y los datos registrados en la base de datos. En los tres experimentos se

ANTONIO				
ACTIVIDAD	ACTUACIÓN POR ACTIVIDAD	DATOS CONCRETOS (BASE DE DATOS)	ENTREVISTA	ANÁLISIS Y REFLEXIONES
		Menor tiempo registrado	como el experimento más complejo.	alcanzan los objetivos sin mayor dificultad.
VAR2 Llenar los tres tanques pequeños a partir de uno más grande. Comprobar que los tres tanques pequeños son de igual capacidad.	Sin problema realizó el experimento y se observa que tiene claro el fenómeno.	Pregunta inicial: <i>¿Cuál tanque se llenará primero?</i> Respuesta: <i>Los 3 igual</i> Pregunta final: <i>Después de experimentar, la capacidad de los 3 tanques pequeños es:</i> Respuesta: <i>IGUAL</i> Tiempo Total = 01:09 Menor tiempo registrado	Considera adecuada la dificultad, le otorga un 3. Ya conocía el tema, su papá se lo explicó.	Con la respuesta final en VAR1, VAR2 y VAR3, nos permite corroborar que hay un pleno acercamiento al concepto de variación, pues, aunque se varíe la velocidad, los volúmenes no cambian. En VAR3 puede comprobarse el uso de las gráficas en el fenómeno presentado desde la perspectiva de Kaput y Roschelle (2013).
VAR3 Llenar tres tanques de igual capacidad, pero de forma diferente, se espera que comprueben que la gráfica de llenado se genera por la forma de cada tanque.	Sin problema realizó el experimento y tiene clara la relación entre la forma del tanque y la gráfica de llenado.	Pregunta final: <i>Las gráficas de llenado son diferentes debido a:</i> Respuesta: <i>Forma del tanque</i> Tiempo Total = 00:54		
GEN1 Resolver una secuencia generada por N^2 , representada por LEDs encendidos.	Inicialmente no sabe cómo iniciar, pero pregunta y después resuelve sin mayor problema.	N=4, Errores=0 N=5, Errores=0 $NRandom = 8$, Errores=0 Tiempo Total = 02:33	GEN1 inicialmente no le había entendido cómo iniciar el experimento. Califica con 2.9 el tema.	Se considera que hay coherencia entre sus respuestas, su actuación en la actividad y los datos registrados en la base de datos. Salvo en el comentario de que falta explicación al principio, pues seguramente se encontraba distraído mientras se dieron las instrucciones, además de que es el único de los participantes que ya había utilizado la aplicación en 2018 y esa duda no surgió en ese momento. En los dos primeros experimentos se
GEN2 Resolver una secuencia generada por $3N+1$, representada por ventanas de edificios.	Tiene una complicación mínima para resolverlo. Logra la generalización.	N=4, Errores=1 $NRandom=10$, Errores=0 Tiempo Total = 01:24 Menor tiempo registrado	Refiere que le falta un poco de explicación al tema. Considera GEN3 el experimento más fácil. Considera GEN2 el experimento más complejo.	
GEN3 Resolver una secuencia generada por $N/4$, representada por porciones de pizza.	Sin problema resuelve el experimento.	N=4, Errores=0 $NRandom=5$, Errores=0 Tiempo Total = 00:34 Menor tiempo registrado	Considera que no están muy difíciles, considera adecuada la dificultad, le otorga un 3. Considera que es el tema más complejo.	

ANTONIO				
ACTIVIDAD	ACTUACIÓN POR ACTIVIDAD	DATOS CONCRETOS (BASE DE DATOS)	ENTREVISTA	ANÁLISIS Y REFLEXIONES
			Ya conocía el tema (SECUNDARIA).	puede observar claramente el proceso de generalización que se lleva a cabo por los <i>NRandom</i> con los que tiene que resolver ambas secuencias.
PI Encender la mayor cantidad de <i>LEDs</i> en un tiempo determinado.	Se observa que la actividad le interesó bastante y que tiene claro el concepto.	NFocos=159 Tiempo=90seg Respuesta final = <i>NUNCA</i> Mayor cantidad de focos encendidos.	Califica con 3 el tema y es el que más le gustó. Le gustó la forma de explicar el tema, dado que se hace sin poner cosas complejas. Es el experimento que más le gustó. Es el tema que considera menos complicado. Ya conocía el tema (SECUNDARIA).	Se considera que hay coherencia entre sus respuestas, su actuación en la actividad y los datos registrados en la base de datos. Es el usuario que más entusiasmado se mostró con el tema y la propuesta del experimento. Aunque declara conocer el tema, por sus comentarios en la entrevista y su desempeño en la actividad se comprueba su acercamiento al tema.

Se considera que hay coherencia entre sus respuestas, su actuación en los experimentos y los datos registrados en la base de datos. En el tema de variación se alcanzan los objetivos en las tres actividades y por lo tanto se considera que hay un claro acercamiento al tema, por su desempeño en las actividades de generalización, también alcanza los objetivos, incluso en GEN2 y GEN3 es quien menor tiempo registra. En procesos infinitos se nota claramente cómo queda captada su atención y que hay un evidente acercamiento al tema.

La Tabla 7.3 corresponde a una chica de sexto semestre de bachillerato, Vicky, quien muestra poco interés en dos de los temas, sin embargo, su desempeño a lo largo de la prueba puede considerarse bueno.

Tabla 7.3 Datos y Análisis, usuaria: Vicky

VICKY				
ACTIVIDAD	ACTUACIÓN POR ACTIVIDAD	DATOS CONCRETOS (BASE DE DATOS)	ENTREVISTA	ANÁLISIS Y REFLEXIONES
VAR1 Utilizar los controles en pantalla para llenar un tanque de agua a partir de otro, ambos de la misma capacidad.	(Risas durante la ejecución del experimento, se percibe cierto grado de distracción). Realiza el experimento en un tiempo bajo, sin embargo, no le queda claro lo ocurrido en él.	Pregunta final: <i>¿Cambió la cantidad total de agua al vaciarse de un tanque al otro?</i> Respuesta: <i>SI</i> Tiempo Total = 01:03	Dice que la aplicación no da respuestas en esta sección. Califica con 3 el tema porque “le gusta mucho el tema del agua”. Dice que la aplicación sí le explicó. Considera que el experimento más fácil es VAR2.	Se considera que hay poca coherencia entre sus respuestas, su actuación en la actividad y los datos registrados en la base de datos. Hay poca atención e interés de su parte a la realización de los experimentos, lo cual queda evidenciado por las risas en la ejecución de VAR1 y VAR2. La respuesta es errónea en VAR1, mientras que en VAR2 inicia con una respuesta no acertada y al final del experimento acierta en la respuesta. En VAR3 no alcanza el objetivo al no poder relacionar las gráficas dinámicas generadas con la forma de los tanques.
VAR2 Llenar los tres tanques pequeños a partir de uno más grande. Comprobar que los tres tanques pequeños son de igual capacidad.	(Risas durante la ejecución del experimento, se percibe cierto grado de distracción). Tarda en dar respuesta a la pregunta inicial. Sube poco a poco la velocidad.	Pregunta inicial: <i>¿Cuál tanque se llenará primero?</i> Respuesta: <i>C</i> Pregunta final: <i>Después de experimentar, la capacidad de los 3 tanques pequeños es:</i> Respuesta: <i>IGUAL</i> Tiempo Total = 02:08	Considera que el experimento más difícil es VAR3. Considera adecuada la dificultad de los experimentos, le otorga un 3. Considera que es el tema que más le gustó. Considera que es el tema más complicado. Ya conocía el tema (SECUNDARIA).	
VAR3 Llenar tres tanques de igual capacidad, pero de forma diferente, se espera que comprueben que la gráfica de llenado se genera por la forma de cada tanque.	Poco a poco llena los tanques, pero no logra relacionar las gráficas de llenado con la forma de los tanques. Tarda mucho en dar respuesta a la pregunta final.	Pregunta final: <i>Las gráficas de llenado son diferentes debido a:</i> Respuesta: <i>Volumen del tanque</i> Tiempo Total = 01:44 Mayor tiempo registrado		
GEN1 Resolver una secuencia generada por N^2 , representada por LEDs encendidos.	Lo resuelve sin problema.	N=4, Errores=0 N=5, Errores=0 NRandom = 6, Errores=0 Tiempo Total = 01:00 Menor tiempo registrado	Otorga un 3 al tema. Considera que el experimento más fácil es GEN1. Considera que el experimento más difícil es GEN2. La dificultad la considera adecuada, le asigna un 3. El experimento que más le gustó es GEN3.	Se considera que hay coherencia entre sus respuestas, su actuación en la actividad y los datos registrados en la base de datos. Alcanza bien los objetivos y prácticamente sin errores. Concreta los tres procesos de generalización.
GEN2 Resolver una secuencia generada por $3N+1$,	Lo resuelve bastante bien, se percibe que sí presta atención a	N=4, Errores=0 NRandom=6, Errores=1 Tiempo Total =		

VICKY				
ACTIVIDAD	ACTUACIÓN POR ACTIVIDAD	DATOS CONCRETOS (BASE DE DATOS)	ENTREVISTA	ANÁLISIS Y REFLEXIONES
representada por ventanas de edificios.	la actividad.	02:03	Ya conocía el tema (SECUNDARIA).	
GEN3 Resolver una secuencia generada por N/4, representada por porciones de pizza.	(Risas durante la actividad). Sin problema resuelve el experimento.	N=4, Errores=0 NRandom=5, Errores=0 Tiempo Total = 01:50		
PI Encender la mayor cantidad de LEDs en un tiempo determinado.	Se tarda en iniciar la interacción con la actividad, apenas enciende 3 LEDs en los primeros 45 segundos. No muestra interés en el experimento. Se percibe que no atrapó su atención.	NFocos=20 Tiempo=90seg Respuesta final = <i>NUNCA</i> Menor cantidad de focos encendidos.	Dice no conocer el tema. Califica con 2 el tema. Menciona que el experimento de los foquitos la hizo reaccionar. Le da un 3 al experimento. A la dificultad le otorga un 2. Es el experimento que menos le gustó. Es el tema que menos le gustó. Considera que es el tema menos complicado.	Se considera que hay coherencia entre sus respuestas, su actuación en la actividad y los datos registrados en la base de datos. Hay muy poco interés de su parte a la realización del experimento, aunque queda patente que tiene claro el concepto, y que efectivamente no fue de su agrado, tal y como lo declara en la entrevista.

En el caso de Vicky, se considera que en el tema de variación hay poca coherencia entre sus respuestas, su actuación en los tres experimentos y los datos registrados en la base de datos, en cambio, en los otros dos temas (generalización y procesos infinitos) sí se observa coherencia. Es la única participante que muestra muy poco interés y atención en la sección de variación, aunque se percibe cierto acercamiento al tema en el experimento de VAR2. En el tema de generalización se observa un claro acercamiento al tema, uno de los signos de acercamiento es que en GEN1 es la participante que menor tiempo registra en completar exitosamente el experimento. Tampoco muestra interés en el experimento de procesos infinitos, sin embargo, se observa que tiene claridad en el concepto que se trata de comunicar, demostrado en su respuesta a la pregunta final.

A continuación, se muestra la Tabla 7.4, la cual corresponde a los datos de la participante Nancy, alumna de cuarto semestre de bachillerato.

Tabla 7.4 Datos y Análisis, usuaria: Nancy

NANCY				
ACTIVIDAD	ACTUACIÓN POR ACTIVIDAD	DATOS CONCRETOS (BASE DE DATOS)	ENTREVISTA	ANÁLISIS Y REFLEXIONES
VAR1 Utilizar los controles en pantalla para llenar un tanque de agua a partir de otro, ambos de la misma capacidad.	Sin problema realiza el experimento. Poco a poco aumenta la velocidad y se percibe que observa lo que ocurre.	Pregunta final: <i>¿Cambió la cantidad total de agua al vaciarse de un tanque al otro?</i> Respuesta: <i>NO</i> Tiempo Total = 01:12	Califica con 3 el tema. Considera a VAR1 el experimento más fácil. Considera a VAR3 el experimento más difícil. Considera que la dificultad es adecuada, le otorga un 3. Es el tema que menos le gustó. El experimento que menos le gustó es VAR2. Considera que es el tema más complicado. Ya conocía el tema (SECUNDARIA). No le entendió mucho al tema.	Se considera que hay coherencia entre sus respuestas, su actuación en la actividad y los datos registrados en la base de datos. En los dos primeros experimentos se alcanzan los objetivos, el primero (VAR1) sin mayor dificultad, mientras que en VAR2, gracias a la realización y observación del experimento logra alcanzar el objetivo (Kaput & Roschelle, 2013). Sin embargo, en VAR3 no logra establecer la relación tanque-gráfica, a pesar de contar con la gráfica dinámica. No logra alcanzar lo planteado por Kaput y Roschelle (2013).
VAR2 Llenar los tres tanques pequeños a partir de uno más grande. Comprobar que los tres tanques pequeños son de igual capacidad.	Se percibe que observa el esquema detenidamente, da su respuesta inicial y finalmente corrige en la respuesta final.	Pregunta inicial: <i>¿Cuál tanque se llenará primero?</i> Respuesta: <i>C</i> Pregunta final: <i>Después de experimentar, la capacidad de los 3 tanques pequeños es:</i> Respuesta: <i>IGUAL</i> Tiempo Total = 01:37		
VAR3 Llenar tres tanques de igual capacidad, pero de forma diferente, se espera que comprueben que la gráfica de llenado se genera por la forma de cada tanque.	Aunque llena poco a poco los tanques, no logra establecer la relación que hay entre la forma del tanque y la gráfica de llenado.	Pregunta final: <i>Las gráficas de llenado son diferentes debido a:</i> Respuesta: <i>Volumen del tanque</i> Tiempo Total = 01:10		
GEN1 Resolver una secuencia generada por N^2 , representada por <i>LEDs</i> encendidos.	Sin problema logra resolver el experimento para $N=4$ y $N=5$. Para $N=6$ le resulta muy complejo. Se percibe que contó varias veces los <i>LEDs</i> apagados.	$N=4$, Errores=0 $N=5$, Errores=0 $NRandom = 6$, Errores=8 Tiempo Total = 02:53	Califica con 3 el tema. Considera que GEN3 es el experimento más fácil. Considera que GEN2 es el experimento más difícil. Considera que la dificultad es adecuada, le otorga un 3.	Se considera que hay coherencia entre sus respuestas, su actuación en la actividad y los datos registrados en la base de datos. Por los resultados y desempeño registrados es claro que presenta dificultades para los procesos de generalización, y que
GEN2 Resolver una secuencia generada	Aunque se percibe que realiza el	$N=4$, Errores=0 $NRandom=10$, Errores=2		

NANCY				
ACTIVIDAD	ACTUACIÓN POR ACTIVIDAD	DATOS CONCRETOS (BASE DE DATOS)	ENTREVISTA	ANÁLISIS Y REFLEXIONES
por 3N+1, representada por ventanas de edificios.	experimento con atención, no logra generalizar para <i>NRandom</i> .	Tiempo Total = 02:51	Es el tema que más le gustó. GEN3 es el experimento que más le gustó de toda la aplicación.	a pesar de los recursos ofrecidos por la aplicación y de declarar conocer el tema desde secundaria, no logra tener un acercamiento inmediato al concepto.
GEN3 Resolver una secuencia generada por N/4, representada por porciones de pizza.	Vuelve a presentar dificultad para <i>NRandom</i> .	N=4, Errores=0 <i>NRandom</i> =6, Errores=1 Tiempo Total = 01:28	Ya conocía el tema (SECUNDARIA).	
PI Encender la mayor cantidad de <i>LEDs</i> en un tiempo determinado.	No se percibe mucho interés en la actividad. Se escucha que entran varios mensajes en su celular, así que podría haber estado distraída y eso mermó su actuación e interés.	NFocos=45 Tiempo=90seg Respuesta final = <i>NUNCA</i>	Califica con un 3 el tema. Califica con un 3 el experimento. Otorga un 2 a la dificultad. Considera que es el tema menos complicado. Ya conocía el tema (SECUNDARIA).	Se considera que hay coherencia entre sus respuestas, su actuación en la actividad y los datos registrados en la base de datos. Aunque su respuesta final es acertada y queda patente su acercamiento al tema, incluso ella declara conocerlo desde la secundaria, por su actuación durante el experimento se percibe que al menos en esta actividad, la aplicación no logra atrapar su atención de forma significativa.

En el caso de Nancy se observa coherencia entre sus respuestas, su actuación en los experimentos y los datos registrados en la base de datos de la aplicación. Sólo en VAR1 y VAR2 se alcanzan los objetivos, sin embargo, en VAR2 se observa que la participante logra el acercamiento al tema gracias a los recursos ofrecidos por la aplicación, en VAR3 no se consigue. En el tema de generalización son claras las dificultades que enfrenta, sólo en GEN3 alcanza el objetivo. En procesos infinitos queda patente su acercamiento al tema, pero sólo por su respuesta final, pues denota poco interés durante la ejecución del experimento.

A continuación, se presenta la Tabla 7.5 con los datos y análisis del participante José, estudiante de tercer semestre de ingeniería civil.

Tabla 7.5 Datos y Análisis, usuario: José

JOSÉ				
ACTIVIDAD	ACTUACIÓN POR ACTIVIDAD	DATOS CONCRETOS (BASE DE DATOS)	ENTREVISTA	ANÁLISIS Y REFLEXIONES
VAR1 Utilizar los controles en pantalla para llenar un tanque de agua a partir de otro, ambos de la misma capacidad.	Se percibe que realiza la actividad con bastante atención e interés. Es el único que repite el experimento, también mostrando mucha atención e interés.	Pregunta final: <i>¿Cambió la cantidad total de agua al vaciarse de un tanque al otro?</i> Respuesta: <i>NO</i> Tiempo Total = 01:59 Mayor tiempo registrado. Repitió el experimento (<i>RESET</i>)	Califica con 3 el tema. Considera que VAR2 es el experimento más fácil. Considera que VAR1 es el experimento más difícil. Considera la dificultad adecuada, le asigna un 3. Ya conocía el tema (<i>SECUNDARIA</i>).	Se considera que hay coherencia entre sus respuestas, su actuación en la actividad y los datos registrados en la base de datos. En VAR1 demuestra un genuino interés en la actividad, pues, aunque su respuesta final es correcta, decide repetir el experimento. En VAR2, gracias a la realización y observación del experimento logra alcanzar el objetivo (Kaput & Roschelle, 2013). En VAR3 alcanza el objetivo sin complicaciones y establece enseguida la relación entre el llenado de los tanques y las gráficas generadas (Kaput & Roschelle, 2013).
VAR2 Llenar los tres tanques pequeños a partir de uno más grande. Comprobar que los tres tanques pequeños son de igual capacidad.	Aunque su respuesta inicial es A, se percata que los tanques se llenan al mismo tiempo. Se percibe que realiza el experimento con bastante atención.	Pregunta inicial: <i>¿Cuál tanque se llenará primero?</i> Respuesta: <i>A</i> Pregunta final: <i>Después de experimentar, la capacidad de los 3 tanques pequeños es:</i> Respuesta: <i>IGUAL</i> Tiempo Total = 01:16		
VAR3 Llenar tres tanques de igual capacidad, pero de forma diferente, se espera que comprueben que la gráfica de llenado se genera por la forma de cada tanque.	Sin problema realiza el experimento y tiene clara la relación que hay entre las gráficas de llenado y la forma de los tanques.	Pregunta final: <i>Las gráficas de llenado son diferentes debido a:</i> Respuesta: <i>Forma del tanque</i> Tiempo Total = 00:50 Menor tiempo registrado		
GEN1 Resolver una secuencia generada por N^2 , representada por LEDs encendidos.	Sin problema logra resolver el experimento. Se percibe atención en el	$N=4$, Errores=0 $N=5$, Errores=0 $NRandom = 7$, Errores=0 Tiempo Total =	Califica con 3 el tema. Considera que GEN2 es el experimento más fácil. Considera que GEN3	Se considera que hay coherencia entre sus respuestas, su actuación en la actividad y los datos

JOSÉ				
ACTIVIDAD	ACTUACIÓN POR ACTIVIDAD	DATOS CONCRETOS (BASE DE DATOS)	ENTREVISTA	ANÁLISIS Y REFLEXIONES
	mismo. Toma su tiempo para iniciar. Toma su tiempo para dar las respuestas.	02:29	es el experimento más difícil. Considera que la dificultad es adecuada, le otorga un 3.	registrados en la base de datos. Tanto en GEN1 como en GEN2, aún y cuando recurre al conteo logra tener un indudable acercamiento al proceso de generalización, sin embargo, en GEN3 muestra complicaciones a pesar de que <i>NRandom</i> es consecutivo, por lo que se infiere que la dificultad se debe al ejemplo utilizado (números racionales) y no al proceso de generalización.
GEN2 Resolver una secuencia generada por $3N+1$, representada por ventanas de edificios.	Se percibe el conteo de ventanas. Toma su tiempo para dar las respuestas. Presenta algunas dificultades para dar con la secuencia. Recurre al conteo para dar cada respuesta.	N=4, Errores=1 <i>NRandom</i> =8, Errores=1 Tiempo Total = 02:26	Es el tema que más le gustó. GEN2 es el experimento que más le gustó de toda la aplicación. Considera que es el tema más complicado. Ya conocía el tema (PREPARATORIA).	
GEN3 Resolver una secuencia generada por $N/4$, representada por porciones de pizza.	Toma su tiempo para <i>NRandom</i> , presenta varios errores y le toma bastante llegar a la respuesta correcta.	N=4, Errores=0 <i>NRandom</i> =5, Errores=3 Tiempo Total = 02:22 Mayor tiempo registrado		
PI Encender la mayor cantidad de <i>LEDs</i> en un tiempo determinado.	Sin problema para realizar la actividad y se nota que es atrapado por esta. Se percibe el aumento en la velocidad de los clics.	NFocos=121 Tiempo=90seg Respuesta final = <i>NUNCA</i>	Califica con 3 el tema. Le asigna un 2 al experimento. A la dificultad le otorga un 1, por ser demasiado sencillo. Es el tema que menos le gustó. Es el tema que considera menos complicado. Ya conocía el tema (PREPARATORIA).	Se considera que hay coherencia entre sus respuestas, su actuación en la actividad y los datos registrados en la base de datos. Aunque es el tema que menos le gustó, demuestra gran interés por realizar la actividad y queda de manifiesto su acercamiento al tema.

En la participación de José se considera que hay coherencia entre sus respuestas, su actuación en los experimentos y los datos registrados en la base de datos. En el tema de variación se alcanzan los objetivos en los tres experimentos, aunque sobresale el interés que muestra en VAR1, pues con tal de que le quede claro el experimento, lo realiza dos veces. En el tema de generalización logra los objetivos en GEN1 y GEN2, sin embargo, en GEN3

muestra tener evidentes dificultades, se infiere que esto se debe al ejemplo utilizado (números racionales) y no al proceso de generalización. Procesos infinitos es el tema que menos le gustó por ser demasiado sencillo, sin embargo, demuestra gran interés por realizar la actividad y es patente su acercamiento al tema.

Finalmente, en la Tabla 7.6 se presentan los datos del sexto y último participante del Bloque2, Alex, alumno de cuarto semestre de bachillerato.

Tabla 7.6 Datos y Análisis, usuario: Alex

ALEX				
ACTIVIDAD	ACTUACIÓN POR ACTIVIDAD	DATOS CONCRETOS (BASE DE DATOS)	ENTREVISTA	ANÁLISIS Y REFLEXIONES
VAR1 Utilizar los controles en pantalla para llenar un tanque de agua a partir de otro, ambos de la misma capacidad.	Sin problema realiza el experimento y tiene claro lo que ocurre en él. Aumenta poco a poco la velocidad y se percibe la atención que pone a lo que va ocurriendo.	Pregunta final: <i>¿Cambió la cantidad total de agua al vaciarse de un tanque al otro?</i> Respuesta: <i>NO</i> Tiempo Total = 01:37	Califica con 3 el tema. Considera que VAR3 es el experimento más fácil. Considera que VAR2 es el experimento más difícil. La dificultad la considera adecuada, le asigna un 3. Lo considera el tema más complicado. Ya conocía el tema (SECUNDARIA).	Se considera que hay coherencia entre sus respuestas, su actuación en la actividad y los datos registrados en la base de datos. En VAR1 claramente se observa cómo se alcanza el objetivo. En VAR2 inicia con una respuesta errónea y gracias a la realización del experimento logra dar una respuesta acertada y alcanzar el objetivo de la actividad, sin embargo, en VAR3, a pesar de los recursos ofrecidos, como las gráficas dinámicas (Kaput & Roschelle, 2013), no logra establecer la relación entre la gráfica de llenado y la forma del tanque.
VAR2 Llenar los tres tanques pequeños a partir de uno más grande. Comprobar que los tres tanques pequeños son de igual capacidad.	Aunque la respuesta inicial no es correcta (B), lo verifica en la respuesta final. Toma su tiempo para responder la pregunta inicial. Se percibe que presta atención al experimento.	Pregunta inicial: <i>¿Cuál tanque se llenará primero?</i> Respuesta: <i>B</i> Pregunta final: <i>Después de experimentar, la capacidad de los 3 tanques pequeños es:</i> Respuesta: <i>IGUAL</i> Tiempo Total = 02:02		
VAR3 Llenar tres tanques de igual capacidad, pero de forma diferente, se espera que comprueben que la gráfica de llenado se genera por la forma de cada tanque.	Sin problema lleva a cabo el experimento, sin embargo, no tiene clara la relación entre la gráfica de llenado y la forma del tanque.	Pregunta final: <i>Las gráficas de llenado son diferentes debido a:</i> Respuesta: <i>Volumen del tanque</i> Tiempo Total = 00:56		
GEN1	Sin problemas lo	N=4, Errores=0	Califica con 3 el tema.	Se considera que hay

ALEX				
ACTIVIDAD	ACTUACIÓN POR ACTIVIDAD	DATOS CONCRETOS (BASE DE DATOS)	ENTREVISTA	ANÁLISIS Y REFLEXIONES
Resolver una secuencia generada por N^2 , representada por <i>LEDs</i> encendidos.	resuelve.	$N=5$, Errores=0 $NRandom = 10$, Errores=0 Tiempo Total = 01:11	Considera que el experimento más fácil en GEN3. Considera que el experimento más difícil es GEN2.	coherencia entre sus respuestas, su actuación en la actividad y los datos registrados en la base de datos. En GEN1 y GEN3 alcanza sin ninguna dificultad el objetivo. En GEN2 tiene complicaciones, sin embargo, logra generalizar para <i>NRandom</i> ya sin problema.
GEN2 Resolver una secuencia generada por $3N+1$, representada por ventanas de edificios.	No encuentra la secuencia de forma inmediata, sin embargo, lo logra para <i>NRandom</i> , sin errores. Le toma bastante tiempo para $N=4$.	$N=4$, Errores=4 $NRandom=7$, Errores=0 Tiempo Total = 04:49 Mayor tiempo registrado.	Considera la dificultad regular, pues debieran ser más difíciles, le otorga un 2. Es el tema que más le gustó. GEN3 es el experimento que más le gustó. Ya conocía el tema (SECUNDARIA).	
GEN3 Resolver una secuencia generada por $N/4$, representada por porciones de pizza.	Sin problema resuelve el experimento.	$N=4$, Errores=0 $NRandom=6$, Errores=0 Tiempo Total = 00:50		
PI Encender la mayor cantidad de <i>LEDs</i> en un tiempo determinado.	Sin problema resuelve la actividad y se observa que logra interesarle.	$NFocus=97$ Tiempo=90seg Respuesta final = <i>NO TENGO IDEA</i>	Califica con 2 el tema. Le asigna un 3 al experimento. Al rubro dificultad le otorga un 2. “Faltaron más experimentos”. “Está muy fácil”. Es el tema que menos le gustó, porque faltaron experimentos. Es el experimento que menos le gustó, por lo fácil. Considera que es el tema menos complicado. Ya conocía el tema (SECUNDARIA).	Se considera que hay coherencia entre sus respuestas, su actuación en la actividad y los datos registrados en la base de datos. La actividad logra atraparle y a pesar de no dar la respuesta <i>NUNCA</i> , da la otra respuesta válida a la pregunta final y queda registrado su acercamiento al concepto.

En la participación de Alex, se considera que hay coherencia entre sus respuestas, su actuación en los experimentos y los datos registrados en la base de datos de la aplicación. En el tema de variación se alcanzan los objetivos en VAR1 y VAR2, mientras que en VAR3 no lo consigue, aún y con los recursos ofrecidos por la aplicación. En el tema de generalización se alcanzan los objetivos en los experimentos GEN1 y GEN3. La actividad

de procesos infinitos logra atrapar su atención, aún y cuando dice no haberle gustado el tema por lo fácil. Es claro su acercamiento al tema.

En la siguiente sección se expone el análisis correspondiente a los momentos que resultaron relevantes durante la ejecución de los experimentos por parte de los usuarios.

7.2. MOMENTOS SIGNIFICATIVOS DURANTE LA PARTICIPACIÓN DE LOS USUARIOS

Para cada uno de los tres temas presentados en la aplicación (variación, generalización y procesos infinitos) se identificaron tres momentos, los llamamos *grandes momentos*, que durante la actuación de cada usuario es deseable que alcancen satisfactoriamente para lograr un acercamiento esperado al tema. Esta sección está dividida en tres partes, dedicada una para cada tema, y contienen los datos condensados de todos los participantes.

7.2.1. VARIACIÓN 1 / VARIACIÓN 2 / VARIACIÓN 3

En la Tabla 7.7 se presentan los grandes momentos que se identifican en el tema de variación, considerando los tres experimentos, lo cual implica desde entender la tarea a llevar a cabo, realizar el experimento con cierto grado de entendimiento, hasta dar una respuesta correcta a la pregunta final en cada experimento. En seguida se describe por columna el contenido de la Tabla 7.7.

Entender tarea: Consiste en haber entendido las instrucciones para manipular la aplicación durante este experimento y poder llevarlo a cabo.

Entender experimento y sus diferentes representaciones: Consiste en entender lo que ocurre a lo largo del experimento y cómo se manifiesta en las diferentes representaciones que se presentan (física, gráfica y numérica) y que estas sirven de apoyo para responder a las preguntas planteadas durante cada actividad.

Respuesta correcta a pregunta final: Es la respuesta a la pregunta que se plantea al final de cada experimento en el tema de variación, puede ser correcta o incorrecta y está relacionada con la ejecución del experimento, lo cual permite verificar si hubo un grado de comprensión de lo ocurrido durante el mismo y de la o las nociones matemáticas involucradas.

Análisis y reflexiones: Obtenidas a partir del análisis de los tres grandes momentos planteados para el tema de variación, para el caso de cada participante.

Código de colores para la tabla:

	No se alcanza el objetivo del experimento.
	Se alcanza el objetivo del experimento, sin complicación.
	Se alcanza el objetivo del experimento y se percibe un acercamiento al tema, pese a alguna dificultad presentada.

Tabla 7.7 Grandes Momentos. Tema: Variación

	VARIACIÓN 1 Utilizar los controles en pantalla para llenar un tanque de agua a partir de otro, ambos de la misma capacidad.			VARIACIÓN 2 Llenar los tres tanques pequeños a partir de uno más grande. Comprobar que los tres tanques pequeños son de igual capacidad.			VARIACIÓN 3 Llenar tres tanques de igual capacidad, pero de forma diferente, se espera que comprueben que la gráfica de llenado se genera por la forma de cada tanque.			ANÁLISIS Y REFLEXIONES
	Entender tarea	Entender experimento y sus diferentes representaciones	Respuesta correcta a pregunta final	Entender tarea	Entender experimento y sus diferentes representaciones	Respuesta correcta a pregunta final	Entender tarea	Entender experimento y sus diferentes representaciones	Respuesta correcta a pregunta final	
ÓSCAR	SI	NO	NO	SI	(3I) NO	NO	SI	SI	SI	Acceso al manejo de la aplicación, pero no hay acceso al concepto de variación (VAR1 Y VAR2), se presenta un acercamiento al fenómeno hasta VAR3 y es hasta esta actividad que realmente se logra alcanzar el objetivo.
ANTONIO	SI	SI	SI	SI	(3I) SI	SI	SI	SI	SI	Acceso al manejo de la aplicación y hay acceso al concepto de variación, lo maneja sin problema en los tres experimentos. Queda de manifiesto que sí hay un grado significativo de comprensión del concepto y que el objetivo se alcanza en los tres experimentos.

	VARIACIÓN 1 Utilizar los controles en pantalla para llenar un tanque de agua a partir de otro, ambos de la misma capacidad.			VARIACIÓN 2 Llenar los tres tanques pequeños a partir de uno más grande. Comprobar que los tres tanques pequeños son de igual capacidad.			VARIACIÓN 3 Llenar tres tanques de igual capacidad, pero de forma diferente, se espera que comprueben que la gráfica de llenado se genera por la forma de cada tanque.			ANÁLISIS Y REFLEXIONES
	Entender tarea	Entender experimento y sus diferentes representaciones	Respuesta correcta a pregunta final	Entender tarea	Entender experimento y sus diferentes representaciones	Respuesta correcta a pregunta final	Entender tarea	Entender experimento y sus diferentes representaciones	Respuesta correcta a pregunta final	
VICKY	SI	NO	NO	SI	(C) SI	SI	SI	NO	NO	Acceso al manejo de la aplicación, hay un ligero acercamiento al concepto en VAR2 pues da respuesta correcta al final, sin embargo, no lo logra en VAR1 y VAR3. El objetivo sólo se alcanza satisfactoriamente en VAR2, incluso puede percibirse que se cumple en este punto lo establecido por Kaput y Roschelle (2013) en cuanto al uso de representaciones gráficas para acercar un concepto matemático.
NANCY	SI	SI	SI	SI	(C) SI	SI	SI	NO	NO	Acceso al manejo de la aplicación, hay un acercamiento al concepto en VAR1 y VAR2, sin embargo, no lo logra en VAR3. En VAR1 y VAR2 se logran alcanzar los objetivos, sin embargo, en VAR2 se puede observar un mayor acercamiento al concepto pues gracias al uso de las representaciones gráficas se corrige la respuesta inicial (Kaput & Roschelle, 2013).

	VARIACIÓN 1 Utilizar los controles en pantalla para llenar un tanque de agua a partir de otro, ambos de la misma capacidad.			VARIACIÓN 2 Llenar los tres tanques pequeños a partir de uno más grande. Comprobar que los tres tanques pequeños son de igual capacidad.			VARIACIÓN 3 Llenar tres tanques de igual capacidad, pero de forma diferente, se espera que comprueben que la gráfica de llenado se genera por la forma de cada tanque.			ANÁLISIS Y REFLEXIONES		
	Entender tarea	Entender experimento y sus diferentes representaciones	Respuesta correcta a pregunta final	Entender tarea	Entender experimento y sus diferentes representaciones	Respuesta correcta a pregunta final	Entender tarea	Entender experimento y sus diferentes representaciones	Respuesta correcta a pregunta final			
	JOSÉ	SI	NO --> SI	SI	SI	(A) SI	SI	SI	SI		SI	<p>Acceso al manejo de la aplicación, hay un claro acercamiento al concepto en los tres experimentos. Es el único que repite VAR1 para comprobar lo ocurrido en el experimento. En los tres experimentos se alcanza el objetivo y a lo largo de la realización de los tres experimentos se presenta un fenómeno muy interesante, pues VAR1 lo repite dado que no le queda claro lo ocurrido en la primera vez que lo lleva a cabo, en VAR2 inicia con una respuesta no acertada, pero gracias a la realización del experimento corrige su respuesta al final de este (Kaput & Roschelle, 2013) y en VAR3 presenta un acercamiento completo al concepto.</p>

	VARIACIÓN 1 Utilizar los controles en pantalla para llenar un tanque de agua a partir de otro, ambos de la misma capacidad.			VARIACIÓN 2 Llenar los tres tanques pequeños a partir de uno más grande. Comprobar que los tres tanques pequeños son de igual capacidad.			VARIACIÓN 3 Llenar tres tanques de igual capacidad, pero de forma diferente, se espera que comprueben que la gráfica de llenado se genera por la forma de cada tanque.			ANÁLISIS Y REFLEXIONES
	Entender tarea	Entender experimento y sus diferentes representaciones	Respuesta correcta a pregunta final	Entender tarea	Entender experimento y sus diferentes representaciones	Respuesta correcta a pregunta final	Entender tarea	Entender experimento y sus diferentes representaciones	Respuesta correcta a pregunta final	
ALEX	SI	SI	SI	SI	(B) SI	SI	SI	NO	NO	Acceso al manejo de la aplicación, hay un acercamiento al concepto en VAR1 y VAR2, sin embargo, no lo consigue en VAR3. El objetivo se alcanza sin dificultad en VAR1, en VAR2 al realizar el experimento corrige su inferencia inicial (Kaput & Roschelle, 2013), mientras que en VAR3 no alcanza a relacionar las gráficas generadas con la forma de los tanques.

Prácticamente para este tema todos los usuarios demuestran tener acceso al manejo de la aplicación. Sólo dos usuarios, Antonio y José, presentan un claro acercamiento al tema, mientras que los otros cuatro participantes muestran indicios de acercamiento más no en todos los experimentos, el único gran momento que todos alcanzan es el *entender la tarea* en los tres experimentos. Para los casos de Nancy y Alex, lo logran para los dos primeros experimentos, sin embargo, para el tercero (VAR3) no logran conseguirlo.

7.2.2. GENERALIZACIÓN 1 / GENERALIZACIÓN 2 / GENERALIZACIÓN 3

En la Tabla 7.8 se presentan los grandes momentos identificados en el tema de generalización dentro de cada uno de los tres experimentos, implican entender la tarea a realizar, entender el patrón que se genera en cada secuencia para ir respondiendo a los

cuestionamientos en cada actividad y lograr encontrar la fórmula que genera la secuencia en cada experimento. En seguida se describe por columna el contenido de la Tabla 7.8.

Entender tarea: Consiste en haber entendido las instrucciones para manipular la aplicación durante este experimento y poder llevarlo a cabo.

Entender patrón: Es la etapa que los usuarios logran concretar en las primeras iteraciones planteadas (GEN1: N=4 y N=5, GEN2 Y GEN3: N=4) con máximo un fallo.

Lograr fórmula: Es el paso que los usuarios logran concretar cuando generalizan con máximo un desacierto para *NRandom*.

Análisis y reflexiones: Obtenidas a partir del análisis de los tres grandes momentos planteados para el tema de generalización, para el caso de cada participante.

Código de colores para la tabla:

	No se alcanza el objetivo del experimento.
	Se alcanza el objetivo del experimento, sin complicación
	Se alcanza el objetivo del experimento y se percibe un acercamiento al tema, pese a alguna dificultad presentada.

Tabla 7.8 Grandes Momentos. Tema: Generalización

	GENERALIZACIÓN 1 Resolver una secuencia generada por N^2 , representada por <i>LEDs</i> encendidos.			GENERALIZACIÓN 2 Resolver una secuencia generada por $3N+1$, representada por ventanas de edificios.			GENERALIZACIÓN 3 Resolver una secuencia generada por $N/4$, representada por porciones de pizza.			ANÁLISIS Y REFLEXIONES
	Entender tarea	Entender patrón	Lograr fórmula	Entender tarea	Entender patrón	Lograr fórmula	Entender tarea	Entender patrón	Lograr fórmula	
ÓSCAR	SI	SI	SI	SI	SI	NO	SI	SI	SI	Acceso al manejo de la aplicación, hay un acercamiento al concepto en GEN1 y GEN3, sin embargo, no lo consigue en GEN2. se considera que logró entender el patrón en GEN2 porque logra dar el resultado para $N=4$ sin dificultades cosa que no sucede para <i>NRandom</i> , por lo tanto, se considera que no logra obtener la fórmula de la secuencia.
ANTONIO	NO→SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	Acceso al manejo de la aplicación, hay un acercamiento al concepto en los tres experimentos. En GEN1 inicialmente no logra entender la tarea, pregunta al respecto y lo consigue. Por su desempeño en los tres experimentos se ve claramente que en todos ellos alcanza el objetivo, a pesar de la leve dificultad que presenta en GEN1.
VICKY	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	Acceso al manejo de la aplicación, hay un acercamiento al concepto en los tres experimentos. Por su desempeño en los tres experimentos se ve claramente que en todos ellos alcanza el objetivo.

	GENERALIZACIÓN 1 Resolver una secuencia generada por N^2 , representada por <i>LEDs</i> encendidos.			GENERALIZACIÓN 2 Resolver una secuencia generada por $3N+1$, representada por ventanas de edificios.			GENERALIZACIÓN 3 Resolver una secuencia generada por $N/4$, representada por porciones de pizza.			ANÁLISIS Y REFLEXIONES
	Entender tarea	Entender patrón	Lograr fórmula	Entender tarea	Entender patrón	Lograr fórmula	Entender tarea	Entender patrón	Lograr fórmula	
NANCY	SI	SI	NO	SI	SI	NO	SI	SI	SI	Acceso al manejo de la aplicación, hay un acercamiento al concepto sólo en GEN3. En GEN1 y GEN2 se presenta una situación muy similar, en ambos logra entender el patrón, sin embargo, la fórmula no la logra obtener. En GEN3 sí logra satisfactoriamente alcanzar el objetivo a través de los tres grandes momentos y por lo tanto se concluye que hubo una evolución favorable en este tema.
JOSÉ	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	NO	Acceso al manejo de la aplicación, hay un acercamiento al concepto en GEN1 y con un poco más de dificultad en GEN2, sin embargo, no lo consigue en GEN3. Se infiere que en GEN3 el problema de no alcanzar el objetivo se debe al ejemplo utilizado (números racionales) más que al proceso de generalización.
ALEX	SI	SI	SI	SI	NO	SI	SI	SI	SI	Acceso al manejo de la aplicación, hay un acercamiento al concepto en los tres experimentos. En GEN2 tiene dificultad para entender el patrón, sin embargo, logra generalizar adecuadamente para <i>NRandom</i> y obtiene la fórmula.

Todos los participantes presentan acceso al manejo de la aplicación, al menos en un experimento todos logran alcanzar los objetivos y mostrar un acercamiento al tema. En este análisis se observa que prácticamente todos concretan dos grandes momentos (entender la tarea y entender el patrón) en todos los experimentos, el único que en GEN2 no logra entender el patrón es Alex. Hay dos participantes, Antonio y Vicky, que logran alcanzar los tres grandes momentos en los tres experimentos y por consiguiente se infiere que presentan un claro acercamiento al tema. La única que no logra alcanzar los objetivos en dos experimentos (GEN1 y GEN2) es Nancy, sin embargo, lo consigue para GEN3, lo cual denota una evolución favorable en su acercamiento al tema con la utilización de la herramienta.

7.2.3. Procesos infinitos

En la Tabla 7.9 se presentan los grandes momentos considerados en el tema de procesos infinitos y son: entender la tarea a realizar durante el experimento, seguido por el momento de ser atrapado por la actividad (si se logra despertar un importante interés en el experimento, por parte del usuario) y si a la interrogante final se logra dar una respuesta acertada. En seguida se describe por columna el contenido de la Tabla 7.9.

Entender tarea: Consiste en haber entendido las instrucciones para manipular la aplicación durante este experimento y poder llevarlo a cabo.

Atrapados por la actividad: Es el momento en el que los usuarios reflejan un mostrado interés en concretar la actividad buscando la mayor cantidad de *LEDs* encendidos.

Respuesta correcta a pregunta final: Es la respuesta a la pregunta que se plantea al final del experimento, hay dos respuestas consideradas como correctas (*NUNCA* y *NO TENGO IDEA*), lo que indica que el usuario tiene claro el concepto de procesos infinitos.

Análisis y reflexiones: Obtenidas a partir del análisis de los tres grandes momentos planteados para el tema de procesos infinitos, para el caso de cada participante.

Código de colores para la tabla:

	No se alcanza el objetivo del experimento.
	Se alcanza el objetivo del experimento, sin complicación.
	Se alcanza el objetivo del experimento y se percibe un acercamiento al tema, con un interés notorio.

Tabla 7.9 Grandes Momentos. Tema: Procesos Infinitos

USUARIO	PROCESOS INFINITOS Encender la mayor cantidad de <i>LEDs</i> en un tiempo determinado.			ANÁLISIS Y REFLEXIONES
	Entender tarea	Atrapados por la actividad	Respuesta correcta a pregunta final	
ÓSCAR	SI	SI	SI	Acceso al manejo de la aplicación, hay un acercamiento al concepto. No se logra percibir un notable interés en la actividad, pero podría deberse a algún tipo de percance en el manejo de la aplicación y que no haya sido reportado.
ANTONIO	SI	SI	SI	Acceso al manejo de la aplicación, hay un acercamiento al concepto. Claramente se involucra en la actividad.
VICKY	NO	NO	SI	No se concreta por completo el acceso al manejo de la aplicación, no se involucra con la actividad, sin embargo, hay claridad en el concepto.
NANCY	SI	NO	SI	Acceso al manejo de la aplicación, no se involucra con la actividad, sin embargo, hay claridad en el concepto.
JOSÉ	SI	SI	SI	Acceso al manejo de la aplicación, hay un acercamiento al concepto. Claramente se involucra en la actividad
ALEX	SI	SI	SI	Acceso al manejo de la aplicación, hay un acercamiento al concepto. Claramente se involucra en la actividad

Todos los participantes presentan acceso al manejo de la aplicación, de igual manera todos presentan un claro acercamiento a la noción de procesos infinitos, dando una respuesta acertada a la pregunta final (tercer gran momento). El primer gran momento (Entender la tarea) todos lo alcanzan, menos Vicky; mientras que el segundo gran momento (Atrapados por la actividad), ni Vicky ni Nancy logran conseguirlo, en este punto Óscar parece no mostrar mucho interés, pero podría deberse a algún tipo de percance técnico que decidió no reportar.

La siguiente sección está dedicada al análisis de los datos obtenidos durante las sesiones de tres participantes, que de una u otra forma fueron destacados en sus actuaciones.

7.3. CASOS SELECCIONADOS

A continuación, se presenta una selección de tres casos significativos, los cuales fueron elegidos en función de la actuación presentada por los usuarios durante la prueba y los datos registrados. Como se mencionó anteriormente, los participantes son nombrados con su nombre real, y en los fragmentos de entrevista el nombre *KARINA* corresponde a la entrevistadora (investigadora). Dichos casos corresponden a: Antonio, Nancy y José, y son presentados en ese orden.

7.3.1. Caso: Antonio

Este caso fue escogido dado que es el único de los usuarios que ha utilizado la herramienta en dos ocasiones: la primera en 2018 cuando recién se iban a iniciar las primeras pruebas y se estaba terminando la primera etapa de implementación de la herramienta (sólo estaban disponibles los temas de variación y generalización, y al momento de la prueba aún no estaba disponible la base de datos); la segunda en 2021 en la sesión de pruebas finales, con la herramienta totalmente terminada y funcional. Cabe señalar que la primera fue de forma presencial, mientras que la segunda tuvo que ser realizada vía internet.

El análisis que se presenta incluye las observaciones de la prueba realizada en 2018, un análisis por contraste de tres fuentes independientes, grandes momentos detectados durante el uso de la herramienta y el análisis teórico relacionado con las posiciones de Skovsmose y Valero (2008) y Kaput et al (2007) (2013) relacionadas con las ideas poderosas en matemáticas y el uso de la tecnología en cuanto a su uso infraestructural y el impacto de las representaciones gráficas.

2018: Septiembre 15. (Grado escolar: Tercero de secundaria)

Se le explicó a Antonio que la exhibición a probar era sobre unos temas de matemáticas de nivel secundaria y que al final y/o durante el transcurso de la prueba podía externar su opinión acerca de la aplicación y su uso. Comenzó a navegar a través de ella con el uso del *mouse* sin mayor complicación, pasando rápidamente por las dos primeras pantallas (presentación e introducción), hasta llegar a la tercera (menú), en ésta decidió iniciar por el

tema de variación. Observó detenidamente el video y procedió a realizar los tres experimentos del tema, sin mayor complicación. Sus únicos comentarios durante esta etapa fueron: “tiene la apariencia de un juego de video, ¡está bien chido!”. Ninguno de los experimentos decidió repetirlo. En el segundo experimento de variación, al responder la pregunta: ¿cuál tanque se llenaría primero? Seleccionó la opción *B*, realizó el experimento y al final sólo comentó: “Ah, se llenaron igual”. Luego probó la parte de generalización, la primera secuencia (*LEDs*, N^2) la pudo resolver sin mayor problema y sin ningún error. El segundo experimento (edificios, $3N+1$) le resultó más complejo, pues la primera pregunta logró resolverla en el tercer intento su comentario fue: “se me estaba escapando la ventanita que está sola, arriba”. Con el segundo ejercicio (*NRandom*) no tuvo mayor complicación. El tercer experimento (pizzas, $N/4$) lo resolvió mucho más rápido que los anteriores y sin presentar complicaciones. Las dos pantallas de resultados, que aparecían en esta versión de la herramienta (ambos temas), las observó, aunque no se tiene la certeza de que las haya leído completamente. Volvió a comentar: “tiene la apariencia de un juego de video, está bien chido!”. Y dijo: “lo único que creo que está muy fácil es lo de las pizzas, yo pondría algo más complicado. El de los edificios está bueno, ese me confundió un poco”.

En esta sesión de pruebas, se pudieron identificar los siguientes episodios significativos con relación al enfoque de Skovsmose y Valero y J. Kaput (2008) respecto a las ideas poderosas en matemáticas y el papel de la tecnología, respectivamente.

Retomando de la sección 4.2.2: La forma cultural está relacionada con la experiencia sociocultural, estableciendo vínculos entre las ideas aprendidas y la participación de los estudiantes en sus comunidades (Skovsmose & Valero, 2008). En función de este enfoque se detectaron los dos siguientes episodios:

- (VARIACIÓN) Sus únicos comentarios durante esta etapa fueron: “tiene la apariencia de un juego de video, está bien chido!”
- (APLICACIÓN) Volvió a comentar: “tiene la apariencia de un juego de video, está bien chido!”. Y dijo: “lo único que creo que está muy fácil es lo de las pizzas, yo pondría algo más complicado. El de los edificios está bueno, ese me confundió un poco”.

Ambos episodios se relacionan con el enfoque sociocultural, dado que Antonio muestra la familiaridad que tiene con aplicaciones de la categoría de videojuegos.

Retomando de la sección 4.2.2. La forma lógica se refiere a la condición que tienen algunas ideas que nos permiten establecer enlaces entre conceptos y/o teorías y darles un nuevo significado, poniendo en práctica la capacidad de abstracción (Skovsmose & Valero, 2008). Con base en este enfoque, se ha reconocido el episodio siguiente:

- (GENERALIZACIÓN) Luego probó la parte de generalización, la primera secuencia la pudo resolver sin mayor problema y sin ningún error. El segundo experimento (edificios) le resultó más complejo, pues la primera pregunta (N=4) logró resolverla.

En cuanto a las representaciones gráficas dinámicas, Kaput y Roschelle (2013) evidencian la utilidad de las nuevas tecnologías para crear la posibilidad de reconectar representaciones matemáticas y conceptos a fenómenos directamente percibidos, así como el uso de gráficas para explicar conceptos matemáticos. En este rubro se observaron las siguientes situaciones:

- (Observación de representaciones gráficas en pantalla, VARIACIÓN) En ninguno de los experimentos decidió repetirlo. En el segundo experimento de variación, al responder la pregunta: ¿cuál tanque se llenaría primero? Seleccionó la opción *B*, realizó el experimento y al final sólo comentó: “Ah, se llenaron igual”.
- (GENERALIZACIÓN, GEN2 y GEN3) En el tercer intento (dos desaciertos) su comentario fue: “se me estaba escapando la ventanita que está sola, arriba”. Con *NRandom* no tuvo mayor complicación. El tercer experimento (pizzas) lo resolvió mucho más rápido que los anteriores.

2021: Sesión de pruebas finales. (Grado Escolar: Cuarto semestre de bachillerato)

Análisis por contraste de tres fuentes independientes

La Tabla 7.10 contiene las evidencias recabadas durante la participación del usuario en cada experimento, utilizando la observación directa por parte de la investigadora y lo que puede apreciarse en el video grabado durante toda la sesión de prueba, la información

recabada por la herramienta en la base de datos y la entrevista concedida por el usuario. En seguida se describe por columna el contenido de la Tabla 7.10.

ACTIVIDAD: Nombre que identifica cada experimento por tema y su respectivo objetivo.

ACTUACIÓN POR ACTIVIDAD: Descripción elaborada por la investigadora, de la actuación del participante durante cada experimento.

DATOS CONCRETOS (BASE DE DATOS): Datos registrados de forma automática con la aplicación, conforme el usuario realizó los diferentes experimentos.

ENTREVISTA: Descripción a partir de los diálogos del protocolo de entrevista.

ANÁLISIS Y REFLEXIONES: Generadas a partir de los datos obtenidos a través de las distintas fuentes.

Tabla 7.10 Datos y análisis por contraste de tres fuentes independientes. Caso Antonio

ANTONIO				
ACTIVIDAD	ACTUACIÓN POR ACTIVIDAD	DATOS CONCRETOS (BASE DE DATOS)	ENTREVISTA	ANÁLISIS Y REFLEXIONES
VAR1 Utilizar los controles en pantalla para llenar un tanque de agua a partir de otro, ambos de la misma capacidad.	Sin problema realizó el experimento. Al parecer, tiene claro lo que ocurre en él.	Pregunta final: <i>¿Cambió la cantidad total de agua al vaciarse de un tanque al otro?</i> Respuesta: <i>NO</i> Tiempo Total = 00:57 Menor tiempo registrado	Califica con 2.8 el tema. Le gusta lo interactivo y cómo está explicado. Considera VAR3 como el experimento más fácil. Considera VAR2 como el experimento más complejo.	Se considera que hay coherencia entre sus respuestas, su actuación en la actividad y los datos registrados en la base de datos. En los tres experimentos se alcanzan los objetivos sin mayor dificultad. Con la respuesta final en VAR1, VAR2 y VAR3, nos permite corroborar que hay un pleno acercamiento a la noción de variación implicada en el experimento, pues, aunque se varíe la velocidad, los volúmenes no cambian. En VAR3 puede comprobarse el uso de las gráficas en el fenómeno presentado desde la perspectiva de Kaput y Roschelle (2013).
VAR2 Llenar los tres tanques pequeños a partir de uno más grande. Comprobar que los tres tanques pequeños son de igual capacidad.	Sin problema realizó el experimento y se observa que tiene claro el fenómeno.	Pregunta inicial: <i>¿Cuál tanque se llenará primero?</i> Respuesta: <i>Los 3 igual</i> Pregunta final: <i>Después de experimentar, la capacidad de los 3 tanques pequeños es:</i> Respuesta: <i>IGUAL</i> Tiempo Total = 01:09 Menor tiempo	Considera adecuada la dificultad, le otorga un 3. Ya conocía el tema, su papá se lo explicó.	

ANTONIO				
ACTIVIDAD	ACTUACIÓN POR ACTIVIDAD	DATOS CONCRETOS (BASE DE DATOS)	ENTREVISTA	ANÁLISIS Y REFLEXIONES
		registrado		
VAR3 Llenar tres tanques de igual capacidad, pero de forma diferente, se espera que comprueben que la gráfica de llenado se genera por la forma de cada tanque.	Sin problema realizó el experimento y tiene clara la relación entre la forma del tanque y la gráfica de llenado.	Pregunta final: <i>Las gráficas de llenado son diferentes debido a:</i> Respuesta: <i>Forma del tanque</i> Tiempo Total = 00:54		
GEN1 Resolver una secuencia generada por N^2 , representada por <i>LEDs</i> encendidos.	Inicialmente no sabe cómo iniciar, pero pregunta y después resuelve sin mayor problema.	N=4, Errores=0 N=5, Errores=0 <i>NRandom</i> = 8, Errores=0 Tiempo Total = 02:33	GEN1 inicialmente no le había entendido cómo iniciar el experimento. Le otorga 2.9 al tema.	Se considera que hay coherencia entre sus respuestas, su actuación en la actividad y los datos registrados en la base de datos. Salvo en el comentario de que falta explicación al principio, pues seguramente se encontraba distraído mientras se dieron las instrucciones, además de que es el único de los participantes que ya había utilizado la aplicación en 2018 y esa duda no surgió en ese momento. En los dos primeros experimentos se puede observar claramente el proceso de generalización que se lleva a cabo por los <i>NRandom</i> con los que tiene que resolver ambas secuencias.
GEN2 Resolver una secuencia generada por $3N+1$, representada por ventanas de edificios.	Tiene una complicación mínima para resolverlo. Logra la generalización.	N=4, Errores=1 <i>NRandom</i> =10, Errores=0 Tiempo Total = 01:24 Menor tiempo registrado	Refiere que le falta un poco de explicación al tema. Considera GEN3 el experimento más fácil.	
GEN3 Resolver una secuencia generada por $N/4$, representada por porciones de pizza.	Sin problema resuelve el experimento.	N=4, Errores=0 <i>NRandom</i> =5, Errores=0 Tiempo Total = 00:34 Menor tiempo registrado	Considera GEN2 el experimento más complejo. Considera que no están muy difíciles, considera adecuada la dificultad, le asigna un 3. Considera que es el tema más complejo. Ya conocía el tema (SECUNDARIA).	
PI Encender la mayor cantidad de <i>LEDs</i> en un tiempo determinado.	Se observa que la actividad le interesó bastante y que tiene claro el concepto.	NFocos=159 Tiempo=90seg Respuesta final = <i>NUNCA</i> Mayor cantidad de focos encendidos.	Califica con 3 el tema y es el que más le gustó. Le gustó la forma de explicar el tema, dado que se hace sin poner cosas complejas. Es el experimento que más le gustó. Es el tema que	Se considera que hay coherencia entre sus respuestas, su actuación en la actividad y los datos registrados en la base de datos. Es el usuario que más entusiasmado se mostró con el tema y la propuesta del

ANTONIO				
ACTIVIDAD	ACTUACIÓN POR ACTIVIDAD	DATOS CONCRETOS (BASE DE DATOS)	ENTREVISTA	ANÁLISIS Y REFLEXIONES
			considera menos complicado. Ya conocía el tema (SECUNDARIA).	experimento. Aunque declara conocer el tema, por sus comentarios en la entrevista y su desempeño en la actividad se comprueba su acercamiento al tema.

En los tres temas, el caso de Antonio presenta coherencia entre sus respuestas, su actuación en las actividades y los datos registrados. Su acercamiento a los temas queda demostrado a lo largo de toda la sesión, en algunos puntos hace uso de los recursos ofrecidos por la aplicación para lograrlo. Resalta que en cuatro experimentos es quien registra el menor tiempo con respecto a los demás participantes del Bloque2 y en la actividad de procesos infinitos es quien registra el mayor puntaje.

Grandes Momentos.

VARIACIÓN 1 / VARIACIÓN 2 / VARIACIÓN 3

En la Tabla 7.11 se presentan los grandes momentos que se identificaron en el tema de variación, considerando los tres experimentos, lo cual implica desde entender la tarea a llevar a cabo, realizar el experimento con cierto grado de entendimiento, hasta dar una respuesta correcta a la pregunta final en cada experimento.

En el caso particular de Antonio se observa que el tema no le representa mayor problema, pues en los tres experimentos entiende lo que hay que realizar, lo lleva a cabo sin mayor complicación, también en los tres experimentos da la respuesta correcta en la pregunta final. Inclusive, en VAR2 desde la pregunta inicial, tiene claro que los tres tanques pequeños se llenarán al mismo tiempo. Con este desempeño a lo largo de las tres actividades del tema, podemos observar claramente que hay un manejo de este y que el usuario tiene un buen dominio de las diferentes representaciones disponibles: física, gráfica y numérica. En seguida se describe por columna el contenido de la Tabla 7.11.

Entender tarea: Consiste en haber entendido las instrucciones para manipular la aplicación durante este experimento y poder llevarlo a cabo.

Entender experimento y sus diferentes representaciones: Consiste en entender lo que ocurre a lo largo del experimento y cómo se manifiesta en las diferentes representaciones que se presentan (física, gráfica y numérica) y que estas sirven de apoyo para responder a las preguntas planteadas durante cada actividad.

Respuesta correcta a pregunta final: Es la respuesta a la pregunta que se plantea al final de cada experimento en el tema de variación, puede ser correcta o incorrecta y está relacionada con la ejecución del experimento, lo cual permite evaluar si hubo un grado de comprensión de lo ocurrido durante el mismo.

Análisis y reflexiones: Generadas a partir del alcance o no de los distintos momentos significativos de cada experimento.

Tabla 7.11 Grandes Momentos (Variación). Caso Antonio

	VARIACIÓN 1 Utilizar los controles en pantalla para llenar un tanque de agua a partir de otro, ambos de la misma capacidad.			VARIACIÓN 2 Llenar los tres tanques pequeños a partir de uno más grande. Comprobar que los tres tanques pequeños son de igual capacidad.			VARIACIÓN 3 Llenar tres tanques de igual capacidad, pero de forma diferente, se espera que comprueben que la gráfica de llenado se genera por la forma de cada tanque.			ANÁLISIS Y REFLEXIONES
	Entender tarea	Entender experimento y sus diferentes representaciones	Respuesta correcta a pregunta final	Entender tarea	Entender experimento y sus diferentes representaciones	Respuesta correcta a pregunta final	Entender tarea	Entender experimento y sus diferentes representaciones	Respuesta correcta a pregunta final	
ANTONIO	SI	SI	SI	SI	(SI) SI	SI	SI	SI	SI	Acceso al manejo de la aplicación y hay acceso al concepto de variación, lo maneja sin problema en los tres experimentos. Queda de manifiesto que sí hay un grado significativo de comprensión del concepto y que el objetivo se alcanza en los tres experimentos.

GENERALIZACIÓN 1 / GENERALIZACIÓN 2 / GENERALIZACIÓN 3

En la Tabla 7.12 se presentan los grandes momentos que se manifiestan en el tema de generalización dentro de cada uno de los tres experimentos, implican entender la tarea a realizar, entender el patrón que se genera en cada secuencia para ir respondiendo a los cuestionamientos en cada actividad y lograr encontrar la fórmula que genera la secuencia en cada experimento.

En GEN1, Antonio dice no entender bien la tarea, sin embargo, después de hacer algunas preguntas sobre cómo llevar a cabo el primer experimento, lo realiza sin problema. Los otros dos experimentos (GEN2 y GEN3) los realiza sin complicaciones, consiguiendo transitar por los tres grandes momentos en cada una de las actividades, lo cual demuestra un claro acercamiento al manejo de la aplicación, así como a la noción de generalización, entendiendo el patrón generado por la secuencia y finalmente la fórmula. En seguida se describe por columna el contenido de la Tabla 7.12.

Entender tarea: Consiste en haber entendido las instrucciones para manipular la aplicación durante este experimento y poder llevarlo a cabo.

Entender patrón: Es la etapa que los usuarios logran concretar en las primeras iteraciones planteadas (GEN1: N=4 y N=5, GEN2 Y GEN3: N=4) con máximo un desacierto.

Lograr fórmula: Es el paso que el usuario logra concretar cuando generaliza con máximo un desacierto para *NRandom*.

Análisis y reflexiones: Generadas a partir del alcance o no de los distintos momentos significativos de cada experimento.

Tabla 7.12 Grandes Momentos (Generalización). Caso Antonio

	GENERALIZACIÓN 1 Resolver una secuencia generada por N^2 , representada por <i>LEDs</i> encendidos.			GENERALIZACIÓN 2 Resolver una secuencia generada por $3N+1$, representada por ventanas de edificios.			GENERALIZACIÓN 3 Resolver una secuencia generada por $N/4$, representada por porciones de pizza.			ANÁLISIS Y REFLEXIONES
	Entender tarea	Entender patrón	Lograr fórmula	Entender tarea	Entender patrón	Lograr fórmula	Entender tarea	Entender patrón	Lograr fórmula	
ANTONIO	NO → SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	Acceso al manejo de la aplicación, hay un acercamiento al concepto en los tres experimentos. En GEN1 inicialmente no logra entender la tarea, pregunta al respecto y lo consigue. Por su desempeño en los tres experimentos se ve claramente que en todos ellos alcanza el objetivo, a pesar de la leve dificultad que presenta en GEN1.

PROCESOS INFINITOS

En la Tabla 7.13 se presentan los grandes momentos para el tema de procesos infinitos, los cuales son: entender la tarea a realizar durante el experimento, seguido por el momento de ser atrapado por la actividad (si se logra despertar un importante interés en el experimento, por parte del usuario) y si a la interrogante final se logra dar una respuesta acertada.

En este tema, Antonio entiende la tarea sin mostrar tener ningún tipo de complicación, queda totalmente atrapado por la actividad pues muestra un genuino interés para llevarla a cabo buscando un alto puntaje y finalmente da una respuesta acertada a la pregunta al término del experimento. Con este desempeño, queda demostrado que Antonio muestra tener un manejo de la aplicación de manera intuitiva y fluida, así como un evidente acercamiento a las ideas matemáticas y que la actividad le atrapa de forma significativa. En seguida se describe por columna el contenido de la Tabla 7.13.

Entender tarea: Consiste en haber entendido las instrucciones para manipular la aplicación durante este experimento y poder llevarlo a cabo.

Atrapados por la actividad: Es el momento en el que el usuario refleja un mostrado interés en concretar la actividad buscando la mayor cantidad de *LEDs* encendidos.

Respuesta correcta a pregunta final: Es la respuesta a la pregunta que se plantea al final del experimento, hay dos respuestas consideradas como correctas, lo que indica que el usuario tiene claro el concepto de procesos infinitos.

Análisis y reflexiones: Generadas a partir del alcance o no de los tres momentos significativos del experimento.

Tabla 7.13 Grandes Momentos (Procesos Infinitos). Caso Antonio

PROCESOS INFINITOS				ANÁLISIS Y REFLEXIONES
Encender la mayor cantidad de <i>LEDs</i> en un tiempo determinado.				
	Entender tarea	Atrapados por la actividad	Respuesta correcta a pregunta final	
ANTONIO	SI	SI	SI	Acceso al manejo de la aplicación, hay un acercamiento al concepto. Claramente se involucra en la actividad.

Momentos significativos con relación a las teorías de Skovsmose y Valero y J. Kaput

En esta última etapa, que incluye el protocolo de entrevista, se señalan los episodios más significativos en relación con la perspectiva teórica sobre Ideas Poderosas en Matemáticas, planteadas por Skovsmose y Valero (2008). Además, se consideran las ideas de Kaput et al. (2007; 2013) para el uso de la tecnología como parte de la infraestructura para la enseñanza de las matemáticas y las representaciones gráficas como medio para acercar conceptos matemáticos a los usuarios.

Retomando de la sección 4.2.2: La forma lógica se refiere a la condición que tienen algunas ideas que nos permiten establecer enlaces entre conceptos y/o teorías y darles un nuevo significado, poniendo en práctica la capacidad de abstracción (Skovsmose & Valero,

2008). A continuación, se presentan los dos episodios de la entrevista con Antonio para los cuales dicho enfoque resulta pertinente.

(GENERALIZACIÓN)

13:36 - KARINA: y del de los edificios que, ¿qué es lo que más te gustó de ese?

13:43 - ANTONIO: eh... que además de que “N” no sólo era multiplicar por algo, sino también se le agregaba uno.

- Antonio menciona parte del proceso para resolver el experimento GEN2, el cual involucra cierto grado de abstracción.

(PROCESOS INFINITOS)

17:42 - KARINA: ¿Y ese? ¿Qué te pareció el tema?

17:44 - ANTONIO: Este fue el que más me gustó de todos, porque te enseña como... Te enseña las exponenciales sin ponerte cosas complejas y está como que muy bonito.

- Antonio hace referencia al tema de procesos infinitos y lo conecta con el tema de exponenciales, previamente conocido. Lo anterior evidencia la capacidad de Antonio de visualizar como concepto abstracto los procesos infinitos, del cual forman parte los procesos exponenciales.

Retomando de la sección 4.2.2: Desde el punto de vista psicológico, se hace énfasis en la experiencia de aprender las ideas matemáticas y se consideran significativas aquellas que los estudiantes logran asimilar y darle un significado al momento de desarrollar el pensamiento matemático (Skovsmose & Valero, 2008). A continuación, se presenta el episodio en el que la entrevista con Antonio empalma con esta perspectiva:

(GENERALIZACIÓN)

08:46 - ANTONIO: Una pregunta, ¿“N” cuenta como un valor al cuadrado?

08:52 - KARINA: Pues sí, el chiste es... ahí puedes ir incrementando el número, y va poniendo el ejemplo y después te pregunta.

09:08 - ANTONIO: Sí, sí, sí. Pero me refiero a que si pongo “N” como el valor al cuadrado

09:16 - KARINA: Sí. Bueno, al final de cuentas, esa es la secuencia que se genera. Entonces, eh... Por ejemplo, si ahí incrementas el valor de

“N”. Bueno, ahí te muestra, eh, “N” igual a cero. Pues sí, efectivamente ahí no hay ningún foquito. Sí, lo incrementas. Te va mostrando la secuencia que se genera.

- En este diálogo, Antonio pregunta sobre cómo proceder para empezar a resolver el experimento GEN1, menciona la noción matemática de elevar al cuadrado y el uso de la simbología para hacerlo. Esto muestra el reconocimiento, por parte de Antonio, de un comportamiento variacional cuadrático y la necesidad de relacionarlo con la simbología proporcionada en el experimento.

Retomando de la sección 4.2.2: La forma cultural está relacionada con la experiencia sociocultural, estableciendo vínculos entre las ideas aprendidas y la participación de los estudiantes en sus comunidades (Skovsmose & Valero, 2008). A continuación, se cita una parte de la entrevista con Antonio que resulta significativa con relación a una parte de la perspectiva de estos autores:

(APLICACIÓN)

25:25 - KARINA: ¡Ya! Oye, y bueno, ¿cambió en algo tu percepción de los temas después de jugar con la aplicación?

25:39 - ANTONIO: eh...

25:47 - ANTONIO: No creo. Pero tal vez a muchos niños les... les cambia la perspectiva de la típica pregunta de ¿Y para qué sirve esto, profe?

26:00 - KARINA: Entonces, ¿crees que tenga algún efecto positivo?

26:04 - ANTONIO: Yo creo que sí. Porque pues, en la escuela te ponen, pues más a aprender. Y la pregunta de ¿Y esto para que sirve? Pues siempre sigue ahí.

- Antonio no considera haber tenido un cambio de percepción en los temas de los experimentos, después de haber utilizado la aplicación. Sin embargo, considera que puede tener un efecto positivo en los niños que la utilicen, incluso asocia este efecto para cuestiones futuras. La inquietud manifiesta de Antonio sobre la aplicación de las matemáticas muestra un rasgo de naturaleza sociocultural, probablemente proveniente de ideas sobre la disciplina en la comunidad en donde se desarrolla.

Kaput et al (2007) señalan la capacidad que tiene el uso de la tecnología para propiciar nuevas formas de pensar acerca de conceptos tradicionales y por consiguiente crear formas menos abstractas de mostrar las matemáticas, en este sentido empalman los siguientes segmentos de entrevista:

(VARIACIÓN)

04:46 - ANTONIO: Está, está muy bonito explicado. ¿Para para qué edad es?

04:52 - KARINA: Pues de segundo de secundaria en adelante.

04:57 - ANTONIO: Ok. Está, está muy bonito, como, como se explica, me gusta, está muy interactivo.

- Antonio se refiere al tema de variación y hace alusión de cómo está explicado, menciona que le gusta la forma en que está planteado, lo cual hace notar que el tema se presenta de una forma menos abstracta.

(PROCESOS INFINITOS)

17:42 - KARINA: ¿Y ese? ¿Qué te pareció el tema?

17:44 - ANTONIO: Este fue el que más me gustó de todos, porque te enseña como... Te enseña las exponenciales sin ponerte cosas complejas y está como que muy bonito.

- En el tema de procesos infinitos, Antonio también menciona lo “bonito” que le parece la propuesta de presentación del experimento y hace énfasis en que se explica el tema sin recurrir a “cosas complejas”, por lo tanto, resulta más accesible y menos abstracto. Lo anterior muestra que en este caso se logró el acceso a ideas matemáticas por un medio lúdico.

(APLICACIÓN)

18:54 - KARINA: y de toda la aplicación, ¿qué es lo que más te gustó? En cuanto a la aplicación.

19:00 - ANTONIO: eh... Yo creo que la forma interactiva de la aplicación, o sea, que no te ponen párrafos y párrafos y párrafos y ya te hace como, o sea, lo de los experimentos están muy bonito porque es la manera interactiva, siento que importa mucho a la hora de aprender.

- En este episodio, Antonio menciona las características interactivas de la aplicación y que de una forma no tradicional se busca explicar los conceptos, también señala lo importante que esto resulta a la hora de aprender, lo cual empata con la propuesta de Kaput et al. (2007) en cuanto a que la tecnología funcione como infraestructura para enseñar matemáticas.

En cuanto a las representaciones gráficas dinámicas, Kaput y Roschelle (2013) evidencian la utilidad de las nuevas tecnologías para crear la posibilidad de reconectar representaciones matemáticas y conceptos a fenómenos directamente percibidos, así como el uso de gráficas para explicar conceptos matemáticos. Bajo este esquema se localizaron los siguientes tres episodios en la entrevista:

(VARIACIÓN)

04:46 - ANTONIO: Está, está muy bonito explicado. ¿Para para qué edad es?

04:52 - KARINA: Pues de segundo de secundaria en adelante.

04:57 - ANTONIO: Ok. Está, está muy bonito, como, como se explica, me gusta, está muy interactivo.

- Antonio en el tema de variación, menciona lo “interactivo” y esto empata con la forma dinámica de presentar los experimentos en la aplicación, lo cual, a su vez empalma con lo que Kaput y Roschelle (2013) propone en cuanto a utilizar las nuevas tecnologías para reconectar representaciones dinámicas con los fenómenos percibidos.

(PROCESOS INFINITOS)

18:12 - KARINA: y entonces, ¿te pareció bien la dificultad del experimento?

18:17 - ANTONIO: Sí, más que dificultad, es como para que mientras vas prendiendo foquitos entiendas cómo funcionan como las exponenciales.

- En el experimento de procesos infinitos, Antonio hace referencia al encendido de foquitos y lo asocia al concepto de exponenciales, por lo cual puede afirmarse que la representación dinámica del experimento le evoca un concepto matemático y por consiguiente lo reconecta con el experimento.

(APLICACIÓN)

18:54 - KARINA: y de toda la aplicación, ¿qué es lo que más te gustó? En cuanto a la aplicación.

19:00 - ANTONIO: eh... Yo creo que la forma interactiva de la aplicación, o sea, que no te ponen párrafos y párrafos y párrafos y ya te hace como, o sea, lo de los experimentos están muy bonitos porque es la manera interactiva, siento que importa mucho a la hora de aprender.

- Nuevamente, en este punto Antonio menciona lo interactivo y la forma en la que se presentan los temas, además de puntualizar lo relevante que esto puede resultar a la hora de aprender.

7.3.2. Caso: Nancy

Se seleccionó este caso dado el desempeño que presenta durante los tres temas. Presenta etapas como: alcanzar sin problema los objetivos, acercarse al tema gracias al uso de la herramienta, no lograr el acercamiento deseado, entre otras.

El análisis que se presenta incluye un análisis por contraste de tres fuentes independientes, grandes momentos detectados durante el uso de la herramienta y el análisis teórico relacionado con las posiciones de Skovsmose y Valero (2008) y Kaput (2007; 2013) relacionadas con las ideas poderosas en matemáticas y el uso de la tecnología en cuanto a su uso como infraestructura y el impacto de las representaciones gráficas.

2021: Sesión de pruebas finales. (Grado Escolar: Cuarto semestre de bachillerato)

Análisis por contraste de tres fuentes independientes

La Tabla 7.14 contiene las evidencias recabadas durante la actuación de la participante en cada experimento, utilizando la observación directa por parte de la investigadora y lo que puede apreciarse en el video grabado durante toda la sesión de prueba, los datos recabados por la herramienta en la base de datos y la entrevista concedida por el usuario. En seguida se describe por columna el contenido de la Tabla 7.14.

ACTIVIDAD: Nombre que identifica cada experimento por tema y su respectivo objetivo.

ACTUACIÓN POR ACTIVIDAD: Descripción elaborada por la investigadora, de la actuación de la participante durante cada experimento.

DATOS CONCRETOS (BASE DE DATOS): Datos registrados de forma automática con la aplicación, conforme la participante realizó los diferentes experimentos.

ENTREVISTA: Descripción a partir de los diálogos del protocolo de entrevista.

ANÁLISIS Y REFLEXIONES: Generadas a partir de los datos obtenidos a través de las distintas fuentes.

Tabla 7.14 Datos y análisis por contraste de tres fuentes independientes. Caso Nancy

NANCY				
ACTIVIDAD	ACTUACIÓN POR ACTIVIDAD	DATOS CONCRETOS (BASE DE DATOS)	ENTREVISTA	ANÁLISIS Y REFLEXIONES
VAR1 Utilizar los controles en pantalla para llenar un tanque de agua a partir de otro, ambos de la misma capacidad.	Sin problema realiza el experimento. Poco a poco aumenta la velocidad y se percibe que observa lo que ocurre.	Pregunta final: <i>¿Cambió la cantidad total de agua al vaciarse de un tanque al otro?</i> Respuesta: <i>NO</i> Tiempo Total = 01:12	Califica con 3 el tema. Considera a VAR1 el experimento más fácil. Considera a VAR3 el experimento más difícil. Considera que la dificultad es adecuada, le otorga un 3. Es el tema que menos le gustó. El experimento que menos le gustó es VAR2. Considera que es el tema más complicado. Ya conocía el tema (SECUNDARIA). No le entendió mucho al tema.	Se considera que hay coherencia entre sus respuestas, su actuación en la actividad y los datos registrados en la base de datos. En los dos primeros experimentos se alcanzan los objetivos, el primero (VAR1) sin mayor dificultad, mientras que en VAR2, gracias a la realización y observación del experimento logra alcanzar el objetivo (Kaput & Roschelle, 2013). Sin embargo, en VAR3 no logra establecer la relación tanque-gráfica, a pesar de contar con la gráfica dinámica. No logra alcanzar lo planteado por Kaput y Roschelle (2013).
VAR2 Llenar los tres tanques pequeños a partir de uno más grande. Comprobar que los tres tanques pequeños son de igual capacidad.	Se percibe que observa el esquema detenidamente, da su respuesta inicial y finalmente corrige en la respuesta final.	Pregunta inicial: <i>¿Cuál tanque se llenará primero?</i> Respuesta: <i>C</i> Pregunta final: <i>Después de experimentar, la capacidad de los 3 tanques pequeños es:</i> Respuesta: <i>IGUAL</i> Tiempo Total = 01:37		
VAR3 Llenar tres tanques de igual capacidad, pero de forma diferente, se espera que comprueben que la gráfica de llenado se genera por la forma de cada tanque.	Aunque llena poco a poco los tanques, no logra establecer la relación que hay entre la forma del tanque y la gráfica de llenado.	Pregunta final: <i>Las gráficas de llenado son diferentes debido a:</i> Respuesta: <i>Volumen del tanque</i> Tiempo Total = 01:10		

NANCY				
ACTIVIDAD	ACTUACIÓN POR ACTIVIDAD	DATOS CONCRETOS (BASE DE DATOS)	ENTREVISTA	ANÁLISIS Y REFLEXIONES
GEN1 Resolver una secuencia generada por N^2 , representada por <i>LEDs</i> encendidos.	Sin problema logra resolver el experimento para $N=4$ y $N=5$. Para $N=6$ le resulta muy complejo. Se percibe que contó varias veces los <i>LEDs</i> apagados.	$N=4$, Errores=0 $N=5$, Errores=0 $NRandom = 6$, Errores=8 Tiempo Total = 02:53	Califica con 3 el tema. Considera que GEN3 es el experimento más fácil. Considera que GEN2 es el experimento más difícil. Considera que la dificultad es adecuada, le asigna un 3. Es el tema que más le gustó. GEN3 es el experimento que más le gustó de toda la aplicación. Ya conocía el tema (SECUNDARIA).	Se considera que hay coherencia entre sus respuestas, su actuación en la actividad y los datos registrados en la base de datos. Por los resultados y desempeño registrados es claro que presenta dificultades para los procesos de generalización, y que a pesar de los recursos ofrecidos por la aplicación y de declarar conocer el tema desde secundaria, no logra tener un acercamiento inmediato al concepto.
GEN2 Resolver una secuencia generada por $3N+1$, representada por ventanas de edificios.	Aunque se percibe que realiza el experimento con atención, no logra generalizar para $NRandom$.	$N=4$, Errores=0 $NRandom=10$, Errores=2 Tiempo Total = 02:51		
GEN3 Resolver una secuencia generada por $N/4$, representada por porciones de pizza.	Vuelve a presentar dificultad para $NRandom$.	$N=4$, Errores=0 $NRandom=6$, Errores=1 Tiempo Total = 01:28		
PI Encender la mayor cantidad de <i>LEDs</i> en un tiempo determinado.	No se percibe mucho interés en la actividad. Se escucha que entran varios mensajes en su celular, así que podría haber estado distraída y eso mermó su actuación e interés.	$NFocos=45$ Tiempo=90seg Respuesta final = <i>NUNCA</i>	Califica con 3 el tema. Califica con 3 el experimento. Asigna un 2 a la dificultad. Considera que es el tema menos complicado. Ya conocía el tema (SECUNDARIA).	Se considera que hay coherencia entre sus respuestas, su actuación en la actividad y los datos registrados en la base de datos. Aunque su respuesta final es acertada y queda patente su acercamiento al tema, incluso ella declara conocerlo desde la secundaria, por su actuación durante el experimento se percibe que al menos en esta actividad, la aplicación no logra atrapar su atención de forma significativa.

En el caso de Nancy, existe coherencia en los datos de las tres fuentes contrastadas. Su acercamiento al tema de variación se da con apoyo de los recursos de la aplicación en los dos primeros experimentos. El tema de generalización le resulta notablemente más

complicado, pues realiza varios intentos para terminar los experimentos. El tema de procesos infinitos le resulta familiar, sin embargo, no queda atrapada por la actividad.

Grandes Momentos.

VARIACIÓN 1 / VARIACIÓN 2 / VARIACIÓN 3

En la Tabla 7.15 se presentan los grandes momentos que se manifiestan en el tema de variación, considerando los tres experimentos, que implica desde entender la tarea a llevar a cabo, realizar el experimento con cierto grado de entendimiento, hasta dar una respuesta correcta a la pregunta final en cada experimento.

En el caso de Nancy pueden observarse tres situaciones diferentes para este tema, una por experimento. En VAR1 alcanza el objetivo sin dificultades y tiene claro el concepto. En VAR2 inicia con una respuesta no acertada y al realizar el experimento, con los recursos gráficos que este ofrece logra alcanzar el objetivo. En VAR3 no se alcanza el objetivo, pese al uso de gráficas dinámicas presentadas en el experimento, finalmente la respuesta no es acertada. En seguida se describe por columna el contenido de la Tabla 7.15.

Entender tarea: Consiste en haber entendido las instrucciones para manipular la aplicación durante este experimento y poder llevarlo a cabo.

Entender experimento y sus diferentes representaciones: Consiste en entender lo que ocurre a lo largo del experimento y cómo se manifiesta en las diferentes representaciones que se presentan (física, gráfica y numérica) y que estas sirven de apoyo para responder a las preguntas planteadas durante cada actividad.

Respuesta correcta a pregunta final: Es la respuesta a la pregunta que se plantea al final de cada experimento en el tema de variación, puede ser correcta o incorrecta y está relacionada con la ejecución del experimento, lo cual permite evaluar si hubo un grado de comprensión de lo ocurrido durante el mismo.

Análisis y reflexiones: Generadas a partir del alcance o no de los distintos momentos significativos de cada experimento.

Tabla 7.15 Grandes Momentos (Variación). Caso Nancy

	VARIACIÓN 1 Utilizar los controles en pantalla para llenar un tanque de agua a partir de otro, ambos de la misma capacidad.			VARIACIÓN 2 Llenar los tres tanques pequeños a partir de uno más grande. Comprobar que los tres tanques pequeños son de igual capacidad.			VARIACIÓN 3 Llenar tres tanques de igual capacidad pero de forma diferente, se espera que comprueben que la gráfica de llenado se genera por la forma de cada tanque.			ANÁLISIS Y REFLEXIONES
	Entender tarea	Entender experimento y sus diferentes representaciones	Respuesta correcta a pregunta final	Entender tarea	Entender experimento y sus diferentes representaciones	Respuesta correcta a pregunta final	Entender tarea	Entender experimento y sus diferentes representaciones	Respuesta correcta a pregunta final	
NANCY	SI	SI	SI	SI	(C) SI	SI	SI	NO	NO	Acceso al manejo de la aplicación, hay un acercamiento al concepto en VAR1 y VAR2, sin embargo, no lo logra en VAR3. En VAR1 y VAR2 se logran alcanzar los objetivos, sin embargo, en VAR2 se puede observar un mayor acercamiento al concepto pues gracias al uso de las representaciones gráficas se corrige la respuesta inicial (Kaput & Roschelle, 2013)

GENERALIZACIÓN 1 / GENERALIZACIÓN 2 / GENERALIZACIÓN 3

En la Tabla 7.16 se presentan los grandes momentos que se manifiestan en el tema de generalización dentro de cada uno de los tres experimentos, implican entender la tarea a realizar, entender el patrón que se genera en cada secuencia para ir respondiendo a los cuestionamientos en cada actividad y lograr encontrar la fórmula que genera la secuencia en cada experimento.

En este tema también se presentan tres situaciones que resultan significativas. En GEN1 no logra entender el patrón ni encuentra la fórmula que corresponde a la secuencia. En

GEN2 logra entender el patrón, sin embargo, no logra entender la fórmula. Finalmente, en GEN3 logra concretar los tres grandes momentos. Con el desempeño de Nancy en este tema queda demostrado que, aunque no presenta un acercamiento inmediato al tema, sí queda evidenciado que hay una evolución positiva del primer al tercer experimento. En seguida se describe por columna el contenido de la Tabla 7.16.

Entender tarea: Consiste en haber entendido las instrucciones para manipular la aplicación durante este experimento y poder llevarlo a cabo.

Entender patrón: Es la etapa que los usuarios logran concretar en las primeras iteraciones planteadas (GEN1: N=4 y N=5, GEN2 Y GEN3: N=4) con máximo un desacierto.

Lograr fórmula: Es el paso que la participante logra concretar cuando generaliza con máximo un desacierto para $NRandom$.

Análisis y reflexiones: Generadas a partir del alcance o no de los distintos momentos significativos de cada experimento.

Tabla 7.16 Grandes Momentos (Generalización). Caso Nancy

	GENERALIZACIÓN 1 Resolver una secuencia generada por N^2 , representada por <i>LEDs</i> encendidos.			GENERALIZACIÓN 2 Resolver una secuencia generada por $3N+1$, representada por ventanas de edificios.			GENERALIZACIÓN 3 Resolver una secuencia generada por $N/4$, representada por porciones de pizza.			ANÁLISIS Y REFLEXIONES
	Entender tarea	Entender patrón	Lograr fórmula	Entender tarea	Entender patrón	Lograr fórmula	Entender tarea	Entender patrón	Lograr fórmula	
NANCY	SI	NO	NO	SI	SI	NO	SI	SI	SI	Acceso al manejo de la aplicación, hay un acercamiento al concepto sólo en GEN3. En GEN1 y GEN2 se presenta una situación muy similar, en ambos logra entender el patrón, sin embargo, la fórmula no la logra. En GEN3 sí logra satisfactoriamente alcanzar el objetivo a través de los tres grandes momentos y por lo tanto se concluye que hubo una evolución favorable en este tema.

PROCESOS INFINITOS

En la Tabla 7.17 se presentan los grandes momentos del tema de procesos infinitos, los cuales son: entender la tarea a realizar durante el experimento, seguido por el momento de ser atrapado por la actividad (si se logra despertar un importante interés en el experimento, por parte del usuario) y si a la interrogante final se logra dar una respuesta acertada.

Nancy entiende la tarea a realizar sin mayor problema, sin embargo, no muestra interés en concretar la actividad buscando la mayor cantidad de *LEDs* encendidos, por lo que no concreta el segundo gran momento, aun así, demuestra un acercamiento al concepto de procesos infinitos, pues da una respuesta acertada a la pregunta final. En seguida se describe por columna el contenido de la Tabla 7.17.

Entender tarea: Consiste en haber entendido las instrucciones para manipular la aplicación durante este experimento y poder llevarlo a cabo.

Atrapados por la actividad: Es el momento en el que la participante refleja un mostrado interés en concretar la actividad buscando la mayor cantidad de *LEDs* encendidos.

Respuesta correcta a pregunta final: Es la respuesta a la pregunta que se plantea al final del experimento, hay dos respuestas consideradas como correctas, lo que indica que la participante tiene claro el concepto de procesos infinitos.

Análisis y reflexiones: Generadas a partir del alcance o no de los momentos significativos del experimento.

Tabla 7.17 Grandes Momentos (Procesos Infinitos). Caso Nancy

PROCESOS INFINITOS				ANÁLISIS Y REFLEXIONES
Encender la mayor cantidad de <i>LEDs</i> en un tiempo determinado.				
	Entender tarea	Atrapados por la actividad	Respuesta correcta a pregunta final	
NANCY	SI	NO	SI	Acceso al manejo de la aplicación, no se involucra con la actividad, sin embargo, hay claridad en el concepto.

Momentos significativos con relación a las teorías de Skovsmose y Valero y J. Kaput

En esta última etapa, que incluye el protocolo de entrevista, se señalan los episodios más significativos en relación con la perspectiva teórica sobre Ideas Poderosas en Matemáticas, planteadas por Skovsmose y Valero (2008). Además, se consideran las ideas de Kaput et al. (2007; 2013) para el uso de la tecnología como parte de la infraestructura para la enseñanza de las matemáticas y las representaciones gráficas como medio para acercar conceptos matemáticos a los usuarios.

Retomando de la sección 4.2.2: La forma lógica se refiere a la condición que tienen algunas ideas que nos permiten establecer enlaces entre conceptos y/o teorías y darles un nuevo significado, poniendo en práctica la capacidad de abstracción (Skovsmose & Valero, 2008). A continuación, se presenta el episodio de la entrevista con Nancy que concuerda con este enfoque:

(PROCESOS INFINITOS)

27:31 - KARINA: ¿Y la dificultad te parece adecuada?

27:38 - NANCY: mmm...

27:40 - KARINA: Le daríamos ¿un uno, dos, un tres?

27:44 - NANCY: Pues un dos en dificultad, porque nada más es prender los foquitos. La única que pregunta que te hacen es cuándo acabaría el experimento si no tuvieras límite de tiempo.

27:59 - KARINA: Ya. Bueno...

28:04 - NANCY: Ah, no, que entonces como más, este se me fue la palabra, pero más, como lógico, no?

- En este episodio, Nancy se refiere al experimento del tema de procesos infinitos y aunque lo considera muy sencillo en el procedimiento para realizarlo, hace mención de una cuestión lógica al dar respuesta a la pregunta final, lo cual implica una cuestión de abstracción.

Retomando de la sección 4.2.2: Desde el punto de vista psicológico, se hace énfasis en la experiencia de aprender las ideas matemáticas y se consideran significativas aquellas que los estudiantes logran asimilar y darle un significado al momento de desarrollar el pensamiento matemático (Skovsmose & Valero, 2008). A continuación, se presenta el episodio en el que la entrevista con Nancy se vincula con esta propuesta:

(APLICACIÓN)

37:06 - KARINA: Ya. Y después de que usaste la aplicación, ¿cambió tu percepción de esos temas o no cambió? ¿Se quedó igual?

37:18 - NANCY: No. Sí cambió.

37:21 - KARINA: ¿Y de qué forma cambió?

37:24 - NANCY: Pues me... Me refrescaron los temas porque, pues igual yo podía verlos y decir sí me lo sé, pero al momento de hacer los ejercicios, este... recuerdo mejor los temas.

- En este episodio de la entrevista, Nancy expone que con el uso de la aplicación se “refrescaron” los temas de variación, generalización y procesos infinitos, aprendidos anteriormente en la escuela. Esto muestra la recuperación de conocimiento matemático, por parte de Nancy, durante la interacción con la aplicación, lo cual da muestra de una resignificación de los conceptos en un nuevo contexto.

Retomando de la sección 4.2.2: La forma cultural está relacionada con la experiencia sociocultural, estableciendo vínculos entre las ideas aprendidas y la participación de los estudiantes en sus comunidades (Skovsmose & Valero, 2008). A continuación, se cita una parte de la entrevista con Nancy, que resulta significativa con relación a esta propuesta:

(GENERALIZACIÓN)

9:15 - KARINA: y de este, ¿qué es lo que te gustó?

19:19 - NANCY: ¡Ay! Pues... no sé, yo creo que las formas que utilizaron no siempre fueron las mismas. O sea, hubo circulitos, las pizzas y el de los, el edificio, bueno, le tome forma de edificio, yo no sé, era como variado y estaba con colorido.

- Nancy expresa sutilmente su entusiasmo por haber encontrado distintas figuras en los experimentos de generalización y se percibe que eso propició la conexión del tema con el mundo real y por consiguiente con la vida cotidiana.

Kaput et al. (2007) señalan la capacidad que tiene el uso de la tecnología para propiciar nuevas formas de pensar acerca de conceptos tradicionales y por consiguiente crear formas

nuevas de mostrar las matemáticas menos abstractas, en este sentido empalma el siguiente segmento de entrevista:

(GENERALIZACIÓN)

19:15 - KARINA: y de este, ¿qué es lo que te gustó?

19:19 - NANCY: ¡Ay! Pues... no sé, yo creo que las formas que utilizaron no siempre fueron las mismas. O sea, hubo circulitos, las pizzas y el de los, el edificio, bueno, le tome forma de edificio, yo no sé, era como variado y estaba con colorido.

- Nancy menciona que lo que más le gustó en el tema de generalización es el uso de los gráficos seleccionados y se percibe que lo toma como algo un tanto novedoso para el tema presentado.

7.3.3. Caso: José

Se eligió el caso de José, pues es el único participante de nivel superior y que además repitió uno de los experimentos. También presenta un desempeño muy particular en los temas de generalización y procesos infinitos que ha permitido realizar inferencias útiles para esta investigación.

El análisis que se presenta incluye un análisis por contraste de tres fuentes independientes, grandes momentos detectados durante el uso de la herramienta y el análisis teórico relacionado con las posiciones de Skovsmose y Valero (2008) y J. Kaput (2007; 2013) relacionadas con las ideas poderosas en matemáticas y el uso de la tecnología en cuanto a su uso como infraestructura y el impacto de las representaciones gráficas.

2021: Sesión de pruebas finales. (Grado Escolar: Tercer semestre de Ing. Civil)

Análisis por contraste de tres fuentes independientes

La Tabla 7.18 contiene las evidencias recabadas durante la participación del usuario en cada experimento, utilizando la observación directa por parte de la investigadora y lo que puede apreciarse en el video grabado durante toda la sesión de prueba, la información recabada por la herramienta en la base de datos y la entrevista concedida por el usuario. En seguida se describe por columna el contenido de la Tabla 7.18.

ACTIVIDAD: Nombre que identifica cada experimento por tema y su respectivo objetivo.

ACTUACIÓN POR ACTIVIDAD: Descripción elaborada por la investigadora, de la actuación del participante durante cada experimento.

DATOS CONCRETOS (BASE DE DATOS): Datos registrados de forma automática con la aplicación, conforme el usuario realizó los diferentes experimentos.

ENTREVISTA: Descripción a partir de los diálogos del protocolo de entrevista.

ANÁLISIS Y REFLEXIONES: Generadas a partir de los datos obtenidos a través de las distintas fuentes.

Tabla 7.18 Datos y análisis por contrastación de tres fuentes independientes. Caso José

JOSÉ				
ACTIVIDAD	ACTUACIÓN POR ACTIVIDAD	DATOS CONCRETOS (BASE DE DATOS)	ENTREVISTA	ANÁLISIS Y REFLEXIONES
VAR1 Utilizar los controles en pantalla para llenar un tanque de agua a partir de otro, ambos de la misma capacidad.	Se percibe que realiza la actividad con bastante atención e interés. Es el único que repite el experimento, también mostrando mucha atención e interés.	Pregunta final: <i>¿Cambió la cantidad total de agua al vaciarse de un tanque al otro?</i> Respuesta: <i>NO</i> Tiempo Total = 01:59 Mayor tiempo registrado. Repitió el experimento (<i>RESET</i>)	Califica con 3 el tema. Considera que VAR2 es el experimento más fácil. Considera que VAR1 es el experimento más difícil. Considera la dificultad adecuada, le asigna un 3. Ya conocía el tema (<i>SECUNDARIA</i>).	Se considera que hay coherencia entre sus respuestas, su actuación en la actividad y los datos registrados en la base de datos. En VAR1 demuestra un genuino interés en la actividad, pues aunque su respuesta final es correcta, decide repetir el experimento. En VAR2, gracias a la realización y observación del experimento logra alcanzar el objetivo (Kaput & Roschelle, 2013). En VAR3 alcanza el objetivo sin complicaciones y establece enseguida la relación entre el llenado de los tanques y las gráficas generadas (Kaput & Roschelle, 2013).
VAR2 Llenar los tres tanques pequeños a partir de uno más grande. Comprobar que los tres tanques pequeños son de igual capacidad.	Aunque su respuesta inicial es A, se percata que los tanques se llenan al mismo tiempo. Se percibe que realiza el experimento con bastante atención.	Pregunta inicial: <i>¿Cuál tanque se llenará primero?</i> Respuesta: <i>A</i> Pregunta final: <i>Después de experimentar, la capacidad de los 3 tanques pequeños es:</i> Respuesta: <i>IGUAL</i> Tiempo Total = 01:16		

JOSÉ				
ACTIVIDAD	ACTUACIÓN POR ACTIVIDAD	DATOS CONCRETOS (BASE DE DATOS)	ENTREVISTA	ANÁLISIS Y REFLEXIONES
VAR3 Llenar tres tanques de igual capacidad pero de forma diferente, se espera que comprueben que la gráfica de llenado se genera por la forma de cada tanque.	Sin problema realiza el experimento y tiene clara la relación que hay entre las gráficas de llenado y la forma de los tanques.	Pregunta final: <i>Las gráficas de llenado son diferentes debido a:</i> Respuesta: <i>Forma del tanque</i> Tiempo Total = 00:50 Menor tiempo registrado		
GEN1 Resolver una secuencia generada por N^2 , representada por <i>LEDs</i> encendidos.	Sin problema logra resolver el experimento. Se percibe atención en el mismo. Toma su tiempo para iniciar. Toma su tiempo para dar las respuestas.	N=4, Errores=0 N=5, Errores=0 <i>NRandom</i> = 7, Errores=0 Tiempo Total = 02:29	Califica con 3 el tema. Considera que GEN2 es el experimento más fácil. Considera que GEN3 es el experimento más difícil. Considera que la dificultad es adecuada, le otorga un 3. Es el tema que más le gustó.	Se considera que hay coherencia entre sus respuestas, su actuación en la actividad y los datos registrados en la base de datos. Tanto en GEN1 como en GEN2, aún y cuando recurre al conteo logra tener un indudable acercamiento al proceso de generalización, sin embargo, en GEN3 muestra complicaciones a pesar de que <i>NRandom</i> es consecutivo, por lo que se infiere que la dificultad se debe al ejemplo utilizado (números racionales) y no al proceso de generalización.
GEN2 Resolver una secuencia generada por $3N+1$, representada por ventanas de edificios.	Se percibe el conteo de ventanas. Toma su tiempo para dar las respuestas. Presenta algunas dificultades para dar con la secuencia. Recurre al conteo para dar cada respuesta.	N=4, Errores=1 <i>NRandom</i> =8, Errores=1 Tiempo Total = 02:26	GEN2 es el experimento que más le gustó de toda la aplicación. Considera que es el tema más complicado. Ya conocía el tema (PREPARATORIA).	
GEN3 Resolver una secuencia generada por $N/4$, representada por porciones de pizza.	Toma su tiempo para <i>NRandom</i> , presenta varios errores y le toma bastante llegar a la respuesta correcta.	N=4, Errores=0 <i>NRandom</i> =5, Errores=3 Tiempo Total = 02:22 Mayor tiempo registrado		
PI Encender la mayor cantidad de <i>LEDs</i> en un tiempo determinado.	Sin problema para realizar la actividad y se nota que es atrapado por esta. Se percibe el aumento en la	NFocos=121 Tiempo=90seg Respuesta final = <i>NUNCA</i>	Califica con 3 el tema. Califica con 2 el experimento. A la dificultad le asigna un 1. Es el tema que menos le gustó.	Se considera que hay coherencia entre sus respuestas, su actuación en la actividad y los datos registrados en la base de datos. Aunque es el tema que

JOSÉ				
ACTIVIDAD	ACTUACIÓN POR ACTIVIDAD	DATOS CONCRETOS (BASE DE DATOS)	ENTREVISTA	ANÁLISIS Y REFLEXIONES
	velocidad de los clics.		Es el tema que considera menos complicado. Ya conocía el tema (PREPARATORIA).	menos le gustó, demuestra gran interés por realizar la actividad y queda de manifiesto su acercamiento al tema.

En el caso de José, también se considera que hay coherencia en los datos contrastados y analizados de las tres fuentes independientes. Es el único participante que repite un experimento y que muestra un marcado interés durante su interacción a lo largo de toda la sesión. Su acercamiento a los tres temas queda demostrado durante los experimentos, el único en el que muestra tener dificultades para resolverlo es en GEN3 con el ejemplo que utiliza números racionales.

Grandes Momentos.

VARIACIÓN 1 / VARIACIÓN 2 / VARIACIÓN 3

En la Tabla 7.19 se presentan los grandes momentos que se manifiestan en el tema de variación, considerando los tres experimentos, que implica desde entender la tarea a llevar a cabo, realizar el experimento con cierto grado de entendimiento, hasta dar una respuesta correcta a la pregunta final en cada experimento.

En el caso de José se dan tres condiciones. En VAR1, él mismo considera tener ciertas complicaciones para entender el experimento, por ello repite una vez más la actividad y logra el total entendimiento de esta. En VAR2, gracias a que realiza el experimento y observa el desarrollo, alcanza el objetivo aún y cuando comenzó con un desacierto en la pregunta inicial. En VAR3, alcanza el objetivo sin problema pues tiene clara la relación entre las gráficas generadas durante el experimento y la forma de los tanques. En seguida se describe por columna el contenido de la Tabla 7.19.

Entender tarea: Consiste en haber entendido las instrucciones para manipular la aplicación durante este experimento y poder llevarlo a cabo.

Entender experimento y sus diferentes representaciones: Consiste en entender lo que ocurre a lo largo del experimento y cómo se manifiesta en las diferentes representaciones que se presentan (física, gráfica y numérica) y que estas sirven de apoyo para responder a las preguntas planteadas durante cada actividad.

Respuesta correcta a pregunta final: Es la respuesta a la pregunta que se plantea al final de cada experimento en el tema de variación, puede ser correcta o incorrecta y está relacionada con la ejecución del experimento, lo cual permite evaluar si hubo un grado de comprensión de lo ocurrido durante el mismo.

Análisis y reflexiones: Generadas a partir del alcance o no de los distintos momentos significativos de cada experimento.

Tabla 7.19 Grandes Momentos (Variación). Caso José

	VARIACIÓN 1 Utilizar los controles en pantalla para llenar un tanque de agua a partir de otro, ambos de la misma capacidad.			VARIACIÓN 2 Llenar los tres tanques pequeños a partir de uno más grande. Comprobar que los tres tanques pequeños son de igual capacidad.			VARIACIÓN 3 Llenar tres tanques de igual capacidad, pero de forma diferente, se espera que comprueben que la gráfica de llenado se genera por la forma de cada tanque.			ANÁLISIS Y REFLEXIONES
	Entender tarea	Entender experimento y sus diferentes representaciones	Respuesta correcta a pregunta final	Entender tarea	Entender experimento y sus diferentes representaciones	Respuesta correcta a pregunta final	Entender tarea	Entender experimento y sus diferentes representaciones	Respuesta correcta a pregunta final	
JOSÉ	SI	NO --> SI	SI	SI	(A) SI	SI	SI	SI	SI	Acceso al manejo de la aplicación, hay un claro acercamiento al concepto en los tres experimentos. Es el único que repite VAR1 para comprobar lo ocurrido en el experimento. En los tres experimentos se alcanza el objetivo y a lo largo de la realización de los tres experimentos se presenta un fenómeno muy interesante, pues VAR1 lo repite dado que no le queda claro lo ocurrido en la primera vez que lo lleva a cabo, en VAR2 inicia con una respuesta no acertada, pero gracias a la realización del experimento corrige su respuesta al final de este (Kaput & Roschelle, 2013) y en VAR3 presenta un acercamiento completo al concepto.

GENERALIZACIÓN 1 / GENERALIZACIÓN 2 / GENERALIZACIÓN 3

En la Tabla 7.20 se presentan los grandes momentos que se manifiestan en el tema de generalización dentro de cada uno de los tres experimentos, implican entender la tarea a realizar, entender el patrón que se genera en cada secuencia para ir respondiendo a los cuestionamientos en cada actividad y lograr encontrar la fórmula que genera la secuencia en cada experimento.

Aquí también podemos observar tres situaciones en la actuación de José. En GEN1 se alcanza el objetivo sin mayor complicación en los tres grandes momentos. En GEN2 se alcanza el objetivo, pero muestra tener un poco más de dificultad y en GEN3 logra terminar el experimento, pero con muchas más complicaciones, pues hay evidencia de no concretar satisfactoriamente uno de los grandes momentos (lograr fórmula) y se infiere que es debido al tema de números racionales que se utilizó para el ejemplo, más que el no dominio del proceso de generalización. En seguida se describe por columna el contenido de la Tabla 7.20.

Entender tarea: Consiste en haber entendido las instrucciones para manipular la aplicación durante este experimento y poder llevarlo a cabo.

Entender patrón: Es la etapa que el usuario logra concretar en las primeras iteraciones planteadas (GEN1: $N=4$ y $N=5$, GEN2 Y GEN3: $N=4$) con máximo un desacierto.

Lograr fórmula: Es el paso que el usuario logra concretar cuando generaliza con máximo un desacierto para N_{Random} .

Análisis y reflexiones: Generadas a partir del alcance o no de los distintos momentos significativos de cada experimento.

Tabla 7.20 Grandes Momentos (Generalización). Caso José

	GENERALIZACIÓN 1 Resolver una secuencia generada por N^2 , representada por <i>LEDs</i> encendidos.			GENERALIZACIÓN 2 Resolver una secuencia generada por $3N+1$, representada por ventanas de edificios.			GENERALIZACIÓN 3 Resolver una secuencia generada por $N/4$, representada por porciones de pizza.			ANÁLISIS Y REFLEXIONES
	Entender tarea	Entender patrón	Lograr fórmula	Entender tarea	Entender patrón	Lograr fórmula	Entender tarea	Entender patrón	Lograr fórmula	
JOSÉ	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	NO	Acceso al manejo de la aplicación, hay un acercamiento al concepto en GEN1 y con un poco más de dificultad en GEN2, sin embargo, no lo consigue en GEN3. Se infiere que en GEN3 el problema de no alcanzar el objetivo se debe al ejemplo utilizado (números racionales) más que al proceso de generalización.

PROCESOS INFINITOS

En la Tabla 7.21 se presentan los grandes momentos para el tema de procesos infinitos, los cuales son: entender la tarea a realizar durante el experimento, seguido por el momento de ser atrapado por la actividad (si se logra despertar un importante interés en el experimento, por parte del usuario) y si a la interrogante final se logra dar una respuesta acertada.

En este tema, José entiende la tarea sin presentar ningún tipo de dificultad, demuestra bastante interés por la actividad y queda atrapado por la misma, pues busca alcanzar en ella un puntaje alto y su respuesta es acertada al final de la actividad. Por la forma en cómo lleva a cabo la actividad queda evidenciado que José presenta un manejo fluido e intuitivo de la aplicación, así como un claro acercamiento al concepto y que la actividad logra atraparlo significativamente. En seguida se describe por columna el contenido de la Tabla 7.21.

Entender tarea: Consiste en haber entendido las instrucciones para manipular la aplicación durante este experimento y poder llevarlo a cabo.

Atrapados por la actividad: Es el momento en el que el usuario refleja un mostrado interés en concretar la actividad buscando la mayor cantidad de *LEDs* encendidos.

Respuesta correcta a pregunta final: Es la respuesta a la pregunta que se plantea al final del experimento, hay dos respuestas consideradas como correctas, lo que indica que el usuario tiene claro el concepto de procesos infinitos.

Análisis y reflexiones: Generadas a partir del alcance o no de los momentos significativos del experimento.

Tabla 7.21 Grandes Momentos (Procesos Infinitos). Caso José

PROCESOS INFINITOS			ANÁLISIS Y REFLEXIONES	
Encender la mayor cantidad de <i>LEDs</i> en un tiempo determinado.				
	Entender tarea	Atrapados por la actividad	Respuesta correcta a pregunta final	
JOSÉ	SI	SI	SI	Acceso al manejo de la aplicación, hay un acercamiento al concepto. Claramente se involucra en la actividad

Momentos significativos con relación a las teorías de Skovsmose y Valero y J. Kaput

En esta última etapa, que incluye el protocolo de entrevista, se señalan los episodios más significativos en relación con la perspectiva teórica sobre Ideas Poderosas en Matemáticas, planteadas por Skovsmose y Valero (2008). Además, se consideran las ideas de Kaput et al. (2007; 2013) para el uso de la tecnología como parte de la infraestructura para la enseñanza de las matemáticas y las representaciones gráficas como medio para acercar conceptos matemáticos a los usuarios.

Retomando de la sección 4.2.2: La forma lógica se refiere a la condición que tienen algunas ideas que nos permiten establecer enlaces entre conceptos y/o teorías y darles un nuevo significado, poniendo en práctica la capacidad de abstracción (Skovsmose & Valero, 2008). A continuación, se presentan los diferentes episodios de la entrevista con José que concuerdan con este enfoque:

(GENERALIZACIÓN)

17:15 - KARINA: ¿Y por qué el dos sería el más fácil y el tres más difícil?

17:18 - JOSÉ: ah...

17:21 - JOSÉ: El dos se me hizo más fácil porque nada más era ir contando el número de ventanitas. Bueno, el número de ventanitas que teníamos por cada edificio. Pues ahí aumentarle uno, o sea, multiplicar lo que las ventanas que nos iban a dar o que teníamos como tal y multiplicarlas por el número de N. Pues, a mí en lo particular, visualmente se me hizo el más fácil, como que le agarré más la onda. El tres fue más difícil, bueno, porque ya tenía un rato que no. No sé cuándo son temas que luego damos por obvios y, y pues creo que me confío. Si me, me confié, pues no sabía bien como, cómo hacerlo hasta que ya al final, me dio la explicación, como que ah... y era el número total dividido entre cuatro. No se me hizo más..., se me hizo más, se me hizo como que un poquito más complejo esa parte, pero le, le agarré ya la onda. Estuvo interesante.

- José menciona el proceso al que recurrió para resolver los experimentos GEN2 y GEN3, y aunque hace referencia al conteo inicial con el que intenta resolver, finalmente recurre a la lógica y abstracción para llegar a la solución.

(PROCESOS INFINITOS)

22:33 - KARINA: A ver, y de este, ¿qué te pareció el tema?

22:36 - JOSÉ: Me gustó. Bueno, se me hizo muy interactivo, como tal me gustó, pero pues, no sé, creo que el final fue bastante sencillo. O sea, como deducir de que iba a ser una idea infinita, entonces, pues por dificultad yo le pondría fácil, fácil. Y nada, en general, te digo me, me gustó, como que fue más... divertido el estar cliqueando en cada, en cada momento. Pues cada una de las bolitas y ahí jugando con él, con el tiempo.

- En este episodio de procesos infinitos, José también hace una mínima referencia a un proceso de deducción y por lo tanto de abstracción, por lo que permite asociar esta etapa a la clasificación de Skovsmose & Valero (2008).

(GENERALIZACIÓN)

28:25 - KARINA: El de las secuencias, ¿ése por qué te gustó más?

28:27 - JOSÉ: Eh... Siento que me retó un poquito más mentalmente y pues estuvo más divertido. O sea, fue como que, ¡ay! Cómo, cómo se hacía esto entonces, pues no sé, como que en lo particular, me, me gustó más esta parte.

- En este comentario sobre generalización, José también refiere un evento de reto mental que podemos asociar con una fase de abstracción.

(GENERALIZACIÓN)

31:29 - KARINA: Y de los tres temas que se presentan, tú ¿cuál consideras que sería complicado de los tres?

31:37 - JOSÉ: La generalización.

31:43 - KARINA: Y ese ¿por qué consideras que es el, que es más complicado a pesar de que es el que te gustó más?

31:52 - JOSÉ: Pues... porque tienes que, bueno, no sé, como que tienes que pensar un poquito más. Y con respecto al, con respecto al, al ejercicio, a los ejercicios, no, o sea, tienes que ver, analizar. No sé, en lo particular. A mí me, me gustó mucho eso me, me llamó, me gusta, me llama la atención, más bien perdón, el ese, ese tipo de aspectos, pero en lo particular, bueno pero, pues es un poquito más complicado. El de variación. El de variación se me hizo sencillo... Eh... Pero el de generalización sí fue como que más complicadito, pero me gustó. Me gustó mucho más.

- Nuevamente José se refiere al tema de generalización y menciona actividades como “pensar” y “analizar” como parte del proceso para resolver los experimentos, situación que permite ver el proceso de abstracción que lleva a cabo.

Retomando de la sección 4.2.2: Desde el punto de vista psicológico, se hace énfasis en la experiencia de aprender las ideas matemáticas y se consideran significativas aquellas que los estudiantes logran asimilar y darle un significado al momento de desarrollar el pensamiento matemático (Skovsmose & Valero, 2008). A continuación, se presentan los dos episodios en el que la entrevista con José se identifica con esta propuesta:

(GENERALIZACIÓN)

16:10 - KARINA: Este tema, ¿qué te pareció?

16:19 - JOSÉ: está bien interesante, está muy interesante, pero yo no me acordaba muy bien de fracciones... pero me gustó, me gustó.

- José considera que el tema de generalización le resulta muy interesante y que en el ejemplo donde se utilizan fracciones (números racionales) requiere de traer a memoria ese concepto anteriormente adquirido.

(GENERALIZACIÓN)

17:15 - KARINA: ¿Y por qué el dos sería el más fácil y el tres más difícil?

17:18 - JOSÉ: ah...

17:21 - JOSÉ: El dos se me hizo más fácil porque nada más era ir contando el número de ventanitas. Bueno, el número de ventanitas que teníamos por cada edificio. Pues ahí aumentarle uno, o sea, multiplicar lo que las ventanas que nos iban a dar o que teníamos como tal y multiplicarlas por el número de N. Pues, a mí en lo particular, visualmente se me hizo el más fácil, como que le agarré más la onda. El tres fue más difícil, bueno, porque ya tenía un rato que no. No sé cuándo son temas que luego damos por obvios y, y pues creo que me confío. Si me, me confíe, pues no sabía bien como, cómo hacerlo hasta que ya al final, me dio la explicación, como que ah... y era el número total dividido entre cuatro. No se me hizo más..., se me hizo más, se me hizo como que un poquito más complejo esa parte, pero le, le agarré ya la onda. Estuvo interesante.

- José, referente al tema de generalización, describe con más detalle lo ocurrido en los experimentos y nuevamente menciona lo del concepto de las fracciones y lo complejo que le resultó, así como la necesidad de recordar el concepto previamente adquirido.

Retomando de la sección 4.2.2: La forma cultural está relacionada con la experiencia sociocultural, estableciendo vínculos entre las ideas aprendidas y la participación de los estudiantes en sus comunidades (Skovsmose & Valero, 2008). A continuación, se cita una parte de la entrevista con José que resulta significativa con relación a esta propuesta:

(APLICACIÓN)

27:03 - KARINA: ahora, de la aplicación, ya me dijiste que es lo que menos te gustó, ¿y qué sería lo que más te gustó?

27:11 - JOSÉ: Pues que... te pasa, que como que te... A mí me gustó el reto, si los retos pequeños, o sea, estuvieron interesantes los ejercicios. Como cositas cotidianas. Son cosas cotidianas regularmente, pero que muy rara vez les prestas atención, ¿no? O sea, que ya la tienes, tan mecanizadas, que ni siquiera, pues en mi caso, a mí me pasó ahorita que ya ni me acordaba de cómo hacer varias de estas cosas, pero me gustó mucho. Creo que pues eran bastante interesantes desde cómo es que las, los volúmenes, este... cómo es que los volúmenes o las cantidades de agua cambian dependiendo del, de la forma de, del recipiente, todo, todo me llamó la atención. Estuvo muy padre, estuvo muy padre los ejercicios.

- Al hablar de la aplicación en general, José hace mención de las “cositas cotidianas” que se utilizan a lo largo de los experimentos para ejemplificar los tres temas y que justamente esas “cositas cotidianas” pueden empatar con conceptos matemáticos poderosos.

Kaput et al. (2007) señalan la capacidad que tiene el uso de la tecnología para propiciar nuevas formas de pensar acerca de conceptos tradicionales y por consiguiente crear formas nuevas de mostrar las matemáticas menos abstractas, en este sentido empalman los siguientes segmentos de entrevista:

(VARIACIÓN)

05:48 - KARINA: Y a ver aquí, ¿qué te pareció el tema, en la escala del uno al tres, te gustó? ¿No te gustó?

05:58 - JOSÉ: Estuvo interesante. Sí, sí me gustó. El primero no le entendí tanto. El del llenado de los, el de llenado de los tanques, no le entendí, o sea el primerito, el primerito, no, no le entendí como qué tanto, pero ya luego cuando lo volví a repetir fue cuando ahora sí le agarré bien la onda. Me gustó, están en general interesantes los temas.

- José en el tema de variación hace referencia a tener que repetir el experimento (VAR1) y ya la segunda vez consigue entenderle. Cabe mencionarse que en este

tema se presentan diferentes representaciones del fenómeno de llenado de tanques de agua (física, gráfica y numérica) y que esto debió servir de apoyo para la comprensión del experimento.

(GENERALIZACIÓN)

17:15 - KARINA: ¿Y por qué el dos sería el más fácil y el tres más difícil?

17:18 - JOSÉ: ah...

17:21 - JOSÉ: El dos se me hizo más fácil porque nada más era ir contando el número de ventanitas. Bueno, el número de ventanitas que teníamos por cada edificio. Pues ahí aumentarle uno, o sea, multiplicar lo que las ventanas que nos iban a dar o que teníamos como tal y multiplicarlas por el número de N. Pues, a mí en lo particular, visualmente se me hizo el más fácil, como que le agarré más la onda. El tres fue más difícil, bueno, porque ya tenía un rato que no. No sé, cuándo son temas que luego damos por obvios y, y pues creo que me confío. Si me, me confíe, pues no sabía bien como, cómo hacerlo hasta que ya al final, me dio la explicación, como que ah... y era el número total dividido entre cuatro. No se me hizo más..., se me hizo más, se me hizo como que un poquito más complejo esa parte, pero le, le agarré ya la onda. Estuvo interesante.

- En el tema de generalización, José señala la facilidad que le brindaron las representaciones gráficas, en especial para resolver GEN2. Finalmente, pese a las dificultades, también resuelve GEN3 y en este punto hace mención sobre la explicación que la aplicación le brinda sobre la resolución de dicho experimento y que gracias a esto termina de quedarle claro. Cabe señalarse que la explicación se da de forma gráfica y dinámica.

(APLICACIÓN)

34:37 - KARINA: ya, y cuando tú viste esos temas, ¿cómo fue tu experiencia?

¿Les agarraste la onda?

34:43 - JOSÉ: No, no, nada. Nada, no les entendía mucho.

34:54 - KARINA: Y ahora, bueno, lo que pasa que tú ya estás en superior, ya tienes más trayecto andado, pero, ¿cambió tu percepción de los temas al usar la aplicación o se quedó igual?

35:08 - JOSÉ: No, Sí, bueno. Sí, sí. Cambió bastante. Eh... como que agarrar, bueno, no sé, es que yo, yo los hacía, de manera diferente. Por ejemplo, el de generalización. Bueno, lo de las secuencias. Pues yo lo iba viendo nada más con números, no? Y pues ahí tenía que sacar este, bueno, tenía que ir viendo por de cuantos en cuantos iban aumentando, o como, que ibas, cómo es que iba siendo su, su... cómo se llama... su... ay! Se me fue la onda... su... Exactamente. Y pues aquí gráficamente fue más, fue más interesante. Al final, como los tips me, me gustaron, pues sí.

- En este episodio sobre la aplicación, José menciona que su percepción de los temas cambió y que el tema de generalización lo había visto solo con números y señala que “gráficamente” se le hizo más interesante, lo cual empalma con la propuesta de Kaput y Roschelle (2013) respecto al uso de gráficas dinámicas para presentar temas matemáticos.

La siguiente y última sección de este capítulo se centra en presentar las observaciones vinculadas al escrutinio de los datos obtenidos en la etapa experimental de esta investigación.

7.4. OBSERVACIONES A RESULTADOS OBTENIDOS

En esta sección se plantean las observaciones derivadas de los diferentes escenarios de los análisis presentados en las primeras tres secciones de este capítulo. A partir del análisis por contraste de los datos obtenidos durante la actuación de los participantes, de las observaciones de la investigadora durante dicha actuación y del protocolo de entrevista, se pudo observar que de los seis participantes del Bloque2, sólo una de ellos no muestra coherencia entre sus respuestas, actuación y su desempeño en sólo uno de los temas, variación. En este mismo tema, dos participantes logran un cabal acercamiento al tema en los tres experimentos, dos lo logran sólo en dos actividades y un usuario tan sólo lo logra en un experimento.

En el tema de generalización, dos participantes muestran un claro acercamiento en los tres experimentos, tres usuarios logran el entendimiento en dos experimentos y un participante sólo lo logra en una de las actividades del tema.

En cuanto al experimento de procesos infinitos, queda de manifiesto con los datos obtenidos de las tres fuentes, que todos los usuarios presentan un evidente acercamiento al tema, como está demostrado por la respuesta a la pregunta final. Sin embargo, sólo tres demuestran quedar plenamente involucrados con la actividad; esto se corrobora por su actuación, los puntajes obtenidos y sus comentarios en la entrevista, aún y cuando dos de ellos manifiestan que no les gustó la sencillez del experimento.

Derivado de este análisis podemos observar tres casos significativos:

- 1) Antonio: demuestra un claro acercamiento a los conceptos expuestos en los tres temas que se presentan en la aplicación, a lo largo de todos los experimentos.
- 2) Nancy: demuestra acercamientos a los tres temas, más no en todos los experimentos. En el tema de variación lo logra en los dos primeros, aunque no para el tercero; en generalización no lo alcanza para los dos primeros, pero sí para el tercero; y en procesos infinitos tiene claridad en el concepto mas no se involucra por completo en la actividad.
- 3) José: prácticamente tiene un acercamiento patente a los conceptos planteados en los tres temas y en seis de los siete experimentos, el único que no logra concretar es el tercero de generalización. Repite el primer experimento de variación y tiene una destacada actuación en procesos infinitos.

Derivado del análisis de los momentos significativos, los cuales revelan el tipo de acercamiento que cada usuario tiene con las ideas matemáticas, así como el nivel de acercamiento, definidos para cada uno de los temas, resulta relevante que para el tema de variación sólo un participante alcanza el objetivo de cada experimento sin complicaciones, a través de lograr los tres momentos significativos. Otro participante alcanza también el objetivo de cada experimento, enfrentando ciertas dificultades en dos de ellos, en ambos se manifiesta en el segundo gran momento.

En los experimentos de generalización, se observa que tres usuarios acceden a los tres momentos sustanciales con un mínimo de dificultades, lo cual demuestra que no hay azar en sus respuestas y que su acercamiento al tema resulta genuino. Dos participantes que lo logran en dos experimentos y uno sólo alcanza los tres momentos significativos en un solo experimento. En la actividad de procesos infinitos, cuatro usuarios completan los tres

momentos y en tres de ellos se considera que el acercamiento al tema es completo por alcanzar los momentos con un interés notorio. Otras dos participantes no completan todos los momentos, aún y cuando su acercamiento al tema queda demostrado por la respuesta correcta a la pregunta final.

Como resultante de este análisis, los casos relevantes de los usuarios son también:

- 1) Antonio: alcanza todos los momentos significativos para todos los experimentos en los tres temas.
- 2) Nancy: aunque hay varios momentos que no logra concretar en las distintas actividades, es peculiar su actuación.
- 3) José: durante su actuación, prácticamente alcanza todos los momentos importantes, sin embargo, resulta interesante su actuación en el tercer experimento de generalización y en procesos infinitos.

Tanto en el análisis por triangulación como la identificación de momentos significativos, contribuyeron a la elección de los tres casos que se analizaron de forma particular, por usuario, utilizando el protocolo de entrevista y relacionando episodios de ésta con las propuestas teóricas de Skovsmose y Valero (2008) y Kaput et al. (2007; 2013).

En este capítulo se han presentado los datos recabados durante las pruebas definitivas con los participantes del Bloque2, así como el análisis detallado de los mismos. Se seleccionaron los casos de tres de los participantes de este bloque, debido a la relevancia de sus actuaciones durante las sesiones, y se expuso un análisis detallado de la información recabada. Gracias a los análisis realizados y expuestos se aportó una sección con los resultados preliminares y sus observaciones respectivas. Todo esto da paso al último capítulo en el que se presentan la discusión de resultados y conclusiones.

8. DISCUSIÓN DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Este último capítulo se divide en tres secciones. En la primera se expone la discusión de resultados obtenidos en esta investigación. En la segunda se da respuesta a las tres preguntas de investigación, planteadas al inicio del trabajo doctoral. Y en la tercera sección se plantean las posibilidades del trabajo a futuro a las que el presente estudio puede dar lugar.

8.1. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

En el capítulo anterior se expuso el análisis de datos, de los cuales se derivaron los resultados que se abordan en la presente sección.

Como se mencionó al inicio de este documento, el propósito de este trabajo doctoral es estudiar el acercamiento de usuarios (público en general), en un ambiente *out-of-school*, a ideas poderosas en matemáticas, concebido a partir de las perspectivas de Skovsmose y Valero (2008) y de Kaput et al. (2007; 2013), con una metodología de corte cualitativo. Para lograr tal propósito, se desarrolló una herramienta digital (aplicación de software) con formato de exhibición interactiva, en la cual se pueden experimentar a través de siete actividades, los temas de variación, generalización y procesos infinitos y además se llevó a cabo una fase experimental que constó de seis etapas.

En cuanto a los resultados obtenidos en las seis sesiones de prueba llevadas a cabo durante esta investigación, se observó que la utilización de la herramienta se dio de forma fluida y con un mínimo de dudas, tanto en las sesiones presenciales como en las *online*. Desafortunadamente, en esta última modalidad, los usuarios son propensos a distractores (como chatear por celular) y a tener limitaciones técnicas (en el equipo de cómputo, la conexión a internet con que cuentan y el entorno donde se encuentran), que representan factores no controlables y que en algunos casos impactaron el desempeño de los usuarios.

Con respecto a la utilización y efecto cognitivo de diferentes representaciones de un mismo fenómeno, en varias ocasiones se pudo confirmar el planteamiento de Kaput y Roschelle (2013) a este respecto. Así, en el tema de variación, el uso de las representaciones disponibles (física, numérica y gráfica), permitieron a los usuarios concretar los experimentos de forma satisfactoria. Este suceso también se presentó en los experimentos del tema de generalización.

Conforme se fue avanzando en la investigación, al momento de cada sesión de pruebas (cada sesión representa una iteración de la metodología) se realizaron los ajustes necesarios en la herramienta. Debido a la pandemia de COVID-19, la metodología no pudo ser conservada conforme a lo planeado inicialmente y esto coincidió con la iteración cuatro. A pesar de ello, a posteriori, esta limitante se considera una ventaja, pues el rediseño metodológico también puede representar una aportación para este tipo de estudios, con experimentación y toma de datos de forma remota y en línea.

La metodología inicial tuvo por objetivo el diseñar, construir y probar una herramienta digital con formato de exhibición interactiva. Aún y con el rediseño metodológico mencionado anteriormente, la investigación logró llevarse a cabo de forma satisfactoria, pues si bien no se pudo replicar una auténtica visita de museo (prácticamente imposible con el distanciamiento social), la modalidad *online*, las herramientas empleadas para lograr la conectividad adecuada y los resultados obtenidos fueron determinantes para el desarrollo final.

En cuanto a los casos estudiados, el caso longitudinal de Antonio nos dio oportunidad de llevar a cabo dos sesiones de prueba con el mismo usuario en dos momentos distintos y distantes uno del otro (2018 y 2021), dentro de la investigación. Resulta evidente que la madurez del usuario cambia y se refleja en su acercamiento a ideas matemáticas, sin embargo, su interés y atención en la realización de los experimentos se mantuvo en ambas etapas.

El caso de Nancy nos permitió observar una importante gama de resultados. Uno de los experimentos lo logra concretar sin mayores complicaciones (VAR1), en otros se observa un acercamiento a las ideas matemáticas, gracias a que realiza la actividad, haciendo uso de los elementos que se le ofrecen durante esta (VAR2 y GEN3). También hubo experimentos en los que no se observa un completo acceso a los temas (VAR3, GEN1 y GEN2). Incluso,

se presenta la situación en la que el tema del experimento le es familiar y comprensible, sin embargo, no manifiesta gran interés por él (ProcInf).

El caso de José aportó elementos sustanciales a esta investigación, dado que este participante muestra mayor madurez (académicamente hablando) que los demás, lo cual se reflejó en la mayor parte de su actuación durante los experimentos, así como en sus comentarios durante la entrevista.

En los tres casos seleccionados, una cuestión en común fue que la producción de comentarios de los usuarios, resultó material propicio para un análisis desde las perspectivas teóricas de Skovsmose y Valero (2008) y de Kaput et al. (2007; 2013). Kaput et al (2007) señalan la importancia del uso de la tecnología como infraestructura para la enseñanza de las matemáticas en ambientes escolares, sin embargo, en esta investigación se ha presentado una alternativa para el uso en ambientes *out-of-school*. Los autores elegidos para sustentar teóricamente esta investigación, también aportan elementos en cuanto a la democratización de ideas matemáticas (Skovsmose & Valero, 2008) (Kaput & Roschelle, 2013), y aunque no es el eje principal de estudio de este trabajo doctoral, se concluye que estos enfoques empatan plenamente con la vocación democratizadora del museo de ciencias, la cual permite acercar el conocimiento científico y tecnológico a cualquier persona (Fernández, 2018).

8.2. CONCLUSIONES

A continuación, se especifican los resultados, los cuales dan respuesta a las preguntas de investigación.

a) ¿Qué características de diseño de una aplicación digital (software), que posea el formato de exhibición interactiva (para un museo de ciencias, entorno no escolar), puede propiciar el acercamiento de un usuario a ideas matemáticas?

Para esta pregunta, a partir del estudio, se concluye que las características de diseño requieren:

- Identificar ideas matemáticas cuyo contenido y su tratamiento didáctico en la literatura de investigación puedan llevarse al formato de exhibición interactiva;

que sean susceptibles de las representaciones múltiples, tomando en cuenta las dificultades que los estudiantes pueden enfrentar con estos temas.

- Lograr la interactividad en los niveles que señala Wagensberg (2007): física, mental y emocionalmente.
- Contar con preguntas que se le plantean al usuario, adecuadas a las actividades y a la temática presentada, para poder recabar información concreta y de esta forma dar seguimiento al desempeño de los usuarios.
- Incluir elementos de reto que permitan atrapar la atención del usuario e involucrarlo en la realización de los distintos experimentos presentados en la herramienta.
- Lograr un diseño flexible que permita reajustes y que en casos excepcionales pueda probarse *online*.
- Contar con una base de datos para guardar la información de la interactividad y dar seguimiento a la actuación de los usuarios en tiempo real.
- Funcionar de manera autónoma, es decir, que no requiera de la intervención de ningún tutor, guía o maestro para ser operada.

Adicionalmente a lo anterior, cabe señalar que la versión para museo contaría con alguna pantalla adicional que, al terminar un tema, le invite al usuario a experimentar con alguno de los que no ha interactuado o bien terminar la actividad. Lo anterior, con el fin de permitir que terminen al menos un tema y si disponen de más tiempo o interés puedan continuar operando la exhibición y en caso contrario, pueden continuar con la visita.

Por otro lado, se ha desarrollado un artefacto que permite la experimentación y la formulación de preguntas, además de que podría considerarse como un instrumento que facilita el aprendizaje y motiva la curiosidad. Bajo el esquema de *tool-tutor-tutee* (Taylor, 1980), la aplicación desarrollada cae dentro de las dos primeras posiciones, la limitante del tiempo de visita de los usuarios en el museo, no permite que entre en la tercera categoría. Cumple también con el modelo adaptado de Rotman (ver Figura 4.1), sin embargo, habría que cambiar “estudiante” por “usuario”.

b) ¿Cuál es la importancia de la saliencia visual para el diseño de exhibiciones interactivas digitales y cuyo contenido sean ideas poderosas en matemáticas?

Esta característica es indispensable por el tiempo de exposición que el usuario tiene en el museo a las ideas que se presentan en cada exhibición interactiva, en este caso, ideas matemáticas. Esto debe ser parte del diseño para poder atraer la atención con estímulos visuales y acortar los tiempos para lograr el acercamiento a los temas.

Durante la actuación de todos y cada uno de los usuarios, se denotan episodios en los que es notoria la observación detenida de los gráficos presentados en los distintos experimentos. Aún y cuando no se tuvo oportunidad de hacer toma de datos con la herramienta *eye tracker*.

En el experimento VAR2, en el que se tienen tres tanques pequeños (60 litros cada uno) que se llenan simultáneamente a partir de uno más grande (180 litros), puede observarse claramente el impacto de la saliencia visual. Pues con la pregunta inicial (*¿Cuál tanque se llenará primero?*) se propicia que el usuario haga uso de la atención visual sobre los gráficos presentados para dar su respuesta. Esto se refuerza aun más con el desarrollo del experimento y la pregunta final de este experimento (*Después de experimentar, la capacidad de los 3 tanques pequeños es:*).

En los tres casos seleccionados (Antonio, Nancy y José), durante la entrevista hacen énfasis en las cuestiones gráficas y visuales que se presentan en la aplicación:

Caso Antonio:

17:42 - KARINA: ¿Y ese? ¿Qué te pareció el tema?

17:44 - ANTONIO: Este fue el que más me gustó de todos, porque te enseña como... Te enseña las exponenciales sin ponerte cosas complejas y está como que muy bonito.

18:54 - KARINA: ¿y de toda la aplicación, ¿qué es lo que más te gustó? En cuanto a la aplicación.

19:00 - ANTONIO: eh... Yo creo que la forma interactiva de la aplicación, o sea, que no te ponen párrafos y párrafos y párrafos y ya te hace como, o sea, lo de los experimentos están muy bonitos porque es la manera interactiva, siento que importa mucho a la hora de aprender.

Caso Nancy:

- 18:59 - KARINA: A ver, ahí se acabó el tema de generalización. Bueno, el tercero, ¿el segundo tema qué te pareció?
- 19:04 - NANCY: Ah, ese, ese me gustó mucho!
- 19:10 - KARINA: en la escala del uno al tres, ¿qué le darías?
- 19:13 - NANCY: ¡Un tres!
- 19:15 - KARINA: y de este, ¿qué es lo que te gustó? (generalización)
- 19:19 - NANCY: ¡Ay! Pues... no sé, yo creo que las formas que utilizaron no siempre fueron las mismas. O sea, hubo circulitos, las pizzas y el de los, el edificio, bueno, le tome forma de edificio, yo no sé, era como variado y estaba con colorido.

Caso José

- 17:15 - KARINA: ¿Y porque el dos sería el más fácil y el tres más difícil? (generalización)
- 17:18 - JOSÉ: ah...
- 17:21 - JOSÉ: El dos se me hizo más fácil porque nada más era ir contando el número de ventanitas. Bueno, el número de ventanitas que teníamos por cada edificio. Pues ahí aumentarle uno, o sea, multiplicar lo que las ventanas que nos iban a dar o que teníamos como tal y multiplicarlas por el número de N. Pues, a mí en lo particular, visualmente se me hizo el más fácil, como que le agarré más la onda. El tres fue más difícil, bueno, porque ya tenía un rato que no. No sé, cuándo son temas que luego damos por obvios y, y pues creo que me confío. Si me, me confíe, pues no sabía bien como, cómo hacerlo hasta que ya al final, me dio la explicación, como que ah... y era el número total dividido entre cuatro. No se me hizo más..., se me hizo más, se me hizo como que un poquito más complejo esa parte, pero le, le agarré ya la onda. Estuvo interesante.

c) ¿Qué papel juega en el acercamiento a ideas matemáticas, en una exhibición interactiva, el contacto previo del usuario con las mismas?

La experiencia previa de los usuarios sí se reflejó en el manejo de la herramienta y su forma de percibir las ideas matemáticas. Por ejemplo, en el caso de Antonio (caso de estudio longitudinal), en dos momentos de su vida escolar utiliza la herramienta, y cambia su percepción con respecto a los conceptos. Por ejemplo, en el tema de variación, manifiesta que este tema no lo vio en la escuela, sino que fue su papá quien se lo explicó.

Esto denota que tiene muy presente su experiencia previa en este tema y resulta patente en su desempeño.

En contraste con el caso anterior, en el caso de José, durante el experimento GEN3 (ejemplificado con porciones de pizza), se presentó la situación de que el participante no recordaba con claridad el tema de fracciones; sin embargo, no mostró tener complicaciones en el proceso de generalización en los experimentos GEN1 y GEN2. Por lo que esto permite constatar, que, aunque tuvo contacto previo con ambos temas, uno de ellos no lo tenía tan presente y esto provocó un mayor tiempo invertido en el experimento, así como algunas dificultades.

De este estudio se puede concluir que a través de la herramienta y con un breve tiempo de interacción hay un acercamiento a ideas poderosas en matemáticas. Aunque no todos los individuos tuvieron el mismo grado de acercamiento a todas las ideas.

En cuanto a conclusiones generales, podemos señalar las siguientes:

En el diseño de exhibiciones interactivas para el caso de los museos y centros de ciencias, se requiere tener la selección de temas matemáticos para un breve tiempo de interacción.

De acuerdo con el punto de vista de Wertsch (1998) en cuanto al análisis de la acción entre usuario y herramienta, sin eliminar a alguno de ellos para no destruir el fenómeno en observación; en la herramienta desarrollada, gracias a la toma automatizada de datos, es posible examinar la interacción entre los usuarios y la aplicación, sin alterar el caso en estudio.

Este trabajo se sitúa en un contexto *mathematics out-of-school*, específicamente en el ámbito de los museos, buscando el acercamiento a ideas poderosas en matemáticas a través de una exhibición interactiva. En cuanto a los trabajos realizados por Lave (1988), Saxe (2014) y Carraher et al. (2002), los cuales forman parte de los antecedentes de esta investigación, se diferencian de esta investigación en la metodología y el propósito. Los tres trabajos mencionados se ubican en entornos *out-of-school* en diferentes localizaciones geográficas, con públicos heterogéneos y disponiendo de lapsos de tiempo un tanto largos para observar las actividades de los sujetos durante la recolección de datos.

En cuanto al trabajo de Sutherland et al. (2009), la investigación de esta tesis difiere también en el tipo de espacio y contexto, dado que el primero se enfoca en el uso de la tecnología en el hogar, mientras que el segundo es desarrollado para un ambiente de museo. Sin embargo, ambas propuestas coinciden en recurrir a la saliencia visual de algunos objetos matemáticos para lograr el proceso de ensamblaje y acercar a los usuarios a ideas matemáticas.

Con respecto a los propósitos de esta investigación, es fundamental tomar en cuenta que la interacción con el usuario está muy acotada por el tiempo y el contexto del museo, a diferencia de los trabajos mencionados en los párrafos anteriores. En función de esto, los resultados han sido discutidos bajo esta óptica.

Por lo que se refiere a la perspectiva de Nemirovsky (2003), en la que relaciona la percepción con el entendimiento y la acción motora para acercar a los alumnos a temas matemáticos, esta investigación coincide con dicho acercamiento a través de experimentos que involucran atención, emociones, entendimiento y pensamiento por parte de los usuarios. Estos elementos se conjugan en una exhibición interactiva en lugar de actividades para salón de clase, permitiendo al público en general acercarse a ideas matemáticas.

Al haber diseñado una exhibición interactiva utilizando un formato completamente digital, permitió completar la investigación a pesar del confinamiento derivado del COVID-19, pues las pruebas lograron concretarse satisfactoriamente en modalidad *online*. Aunque debe reconocerse que la experiencia museística difícilmente podrá ser superada o sustituida por una actividad vía internet.

Se ha logrado un equilibrio entre el componente lúdico, el reto y el contenido matemático, para lograr una experiencia intelectual para comunicar ideas poderosas en matemáticas a través de esta exhibición interactiva.

Este estudio revela la importancia que tiene el recurrir a resultados de investigación educativa y de otros tipos, para la construcción de material expositivo para museos y centros de ciencia. En particular, en esta tesis, las ideas de J. Kaput sobre la importancia de trabajar con fenómenos que son versiones dinámicas de la variación (Kaput, 1994), utilizando distintas representaciones de los mismos, sirvieron de inspiración y fundamento para el diseño de los experimentos de la sección de Variación.

Por su parte, en los experimentos de la sección de Generalización, cuyo diseño está basado en actividades con patrones, pudieron confirmarse resultados ampliamente reportados por estudios anteriores, como por ejemplo, que la mayoría de los participantes pudieron avanzar hacia el reconocimiento y expresión de la generalidad, respondiendo, sin recurrir al conteo, a preguntas sobre figuras remotas y fuera del alcance visual, de las secuencias figurativas. Esto pudo constatarse debido al breve tiempo de la interacción, durante el cual no era posible utilizar el conteo. Además, se constató que, solo en muy pocos casos, los usuarios lograron reconocer la expresión simbólica correcta del patrón, lo cual confirma la presencia de dificultades para expresar algebraicamente la generalidad, dificultad registrada en la literatura de investigación sobre patrones y generalización.

En cuanto al experimento relacionado con Procesos Infinitos, pudo corroborarse que la interacción de pocos minutos, llevada a cabo durante una actividad lúdica, ejemplificada fuera del área de las matemáticas y dentro del ámbito del infinito potencial, permitió que los usuarios pudieran mostrar un acercamiento al concepto de Procesos Infinitos. Cabe señalarse que esto se logró, aun y cuando los usuarios no contaban con una preparación académica formal en el tema y lograron dicho acercamiento gracias al uso de sus nociones intuitivas.

8.3. TRABAJOS A FUTURO

Los trabajos a futuro que pueden derivar de esta investigación doctoral son los siguientes:

- A partir de los comentarios de los usuarios que participaron en la prueba principal, se estaría contemplando incluir dos experimentos más en el tema de procesos infinitos, para así poder ofrecer tres experimentos de cada tema.
- Podría considerarse la inclusión de otro tipo de ideas matemáticas al contenido de esta aplicación, de esta manera se le brinda al usuario una gama más amplia de temas para experimentar y acercarse a ellos.
- La incorporación de la herramienta *eye tracker* para el levantamiento de nuevos datos que permitan corroborar las áreas de la aplicación en dónde los usuarios

fijan su atención visual y con ello buscar indicios de posible comprensión súbita de los temas presentados en la herramienta.

- Los datos recabados a lo largo de esta investigación pueden tomarse como base para el diseño de nuevas exhibiciones interactivas en formatos no digitales y que permitan a los usuarios experimentar de otras formas con ideas matemáticas.
- Realizar estudios de corte cuantitativo y con público real, una vez puesta la exhibición en piso. Gracias a la base de datos incorporada a la herramienta, permitiría ver el grado de acercamiento con distintos rangos de edades y formaciones académicas, así como formas de interacción, lo cual aportaría datos muy valiosos para el desarrollo de futuras exhibiciones.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Acerca de GeoGebra*. (2019, enero 17). GeoGebra. <https://www.geogebra.org/about>
- Amodio, L. (2013). Science Communication at Glance. En A.-M. Bruyas & M. Riccio (Eds.), *Science Centres and Science Events: A Science Communication Handbook* (pp. 27–46). Springer Milan. https://doi.org/10.1007/978-88-470-2556-1_4
- Bødker, S., & Kyng, M. (2018). Participatory Design that Matters—Facing the Big Issues. *ACM Transactions on Computer-Human Interaction*, 25(1), 1–31. <https://doi.org/10.1145/3152421>
- Bødker, S., & Petersen, M. G. (2000). DESIGN FOR LEARNING IN USE. *Scandinavian Journal of Information Systems*, 12(1), 21.
- Borji, A., Sihite, D. N., & Itti, L. (2013). What stands out in a scene? A study of human explicit saliency judgment. *Vision Research*, 91, 62–77. <https://doi.org/10.1016/j.visres.2013.07.016>
- Brizuela, B. M., Blanton, M., Sawrey, K., Newman-Owens, A., & Murphy Gardiner, A. (2015). Children’s Use of Variables and Variable Notation to Represent Their Algebraic Ideas. *Mathematical Thinking and Learning*, 17(1), 34–63. <https://doi.org/10.1080/10986065.2015.981939>
- Bruner, J. S. (1960). On learning mathematics. *The Mathematics Teacher*, 53(8), 610–619. JSTOR.
- Calder, N. (2015). Apps: Appropriate, Applicable, and Appealing? En T. Lowrie & R. Jorgensen (Eds.), *Digital Games and Mathematics Learning* (Vol. 4, pp. 233–250). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9517-3_12

- Carlson, M. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept /. *Research in Collegiate Mathematics Education*, 7.
<https://doi.org/10.1090/cbmath/007/04>
- Carraher, T., Carraher, D., & Schielmann, A. (2002). *En la vida diez, en la escuela cero*. Siglo Veintiuno Editores.
- Confrey, J., & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics*, 26(2–3), 135–164.
<https://doi.org/10.1007/BF01273661>
- Cooper, T. J., & Warren, E. (2011). Years 2 to 6 Students' Ability to Generalise: Models, Representations and Theory for Teaching and Learning. En J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization* (pp. 187–214). Springer Berlin Heidelberg.
https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_12
- D'Ambrosio, U. (2013). Philosophy & Background. En S. J. Hegedus & J. Roschelle (Eds.), *The SimCalc Vision and Contributions* (pp. 1–3). Springer.
<https://doi.org/10.1007/978-94-007-5696-0>
- Definición de museo—ICOM*. (2019, enero 17).
<https://icom.museum/es/actividades/normas-y-directrices/definicion-del-museo/>
- Dewey, J. (1906). The Experimental Theory of Knowledge. *Mind*, 15(59), 293–307.
JSTOR.
- Dewey, J. (1997). *Experience and education* (1. ed). Simon & Schuster.
- Drijvers, P., Kieran, C., Mariotti, M.-A., Ainley, J., Andresen, M., Chan, Y. C., Dana-Picard, T., Gueudet, G., Kidron, I., Leung, A., & Meagher, M. (2010). Integrating Technology into Mathematics Education: Theoretical Perspectives. En C. Hoyles & J.-B. Lagrange (Eds.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the*

- Terrain: The 17th ICMI Study* (pp. 89–132). Springer US.
https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0_7
- Elazary, L., & Itti, L. (2008). Interesting objects are visually salient. *Journal of Vision*, 8(3), 3. <https://doi.org/10.1167/8.3.3>
- Eugene, W., Barnes, T., & Wilson, J. (2013). Math Fluency through Game Design. En A. Marcus (Ed.), *Design, User Experience, and Usability. Health, Learning, Playing, Cultural, and Cross-Cultural User Experience* (pp. 189–198). Springer Berlin Heidelberg.
- Even, R., & Tirosh, D. (2002). Chapter 10. Teacher Knowledge and Understanding of Students' Mathematical Learning. En L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (2nd ed, pp. 219–240). Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Fernández, G. (2018). *El Museo de ciencia transformador: Un ensayo a favor de la relevancia social del uso de ciencia contemporáneo*.
- Fujii, T., & Stephens, M. (2001). Fostering an understanding of algebraic generalisation through numerical expressions: The role of quasi-variables. *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: The Future of the teaching and learning of algebra, 1*, 258–264.
- Geraniou, E., Mavrikis, M., Kahn, K., Hoyles, C., & Noss, R. (2009). Developing a microworld to support mathematical generalisation. *PME 33: International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 49–56.
- Ginsburg, H., & Opper, S. (1988). *Piaget's theory of intellectual development* (3rd ed). Prentice-Hall.

- Hegedus, S. J., & Moreno-Armella, L. (2009). Intersecting representation and communication infrastructures. *ZDM*, *41*(4), 399–412.
<https://doi.org/10.1007/s11858-009-0191-7>
- HMI Software by AdvancedHMI, Application Creation Framework*. (2019, enero 24).
<https://www.advancedhmi.com/>
- Howson, A. G., & Kahane, J.-P. (1986). Foreword. En R. F. Churchhouse, B. Cornu, A. G. Howson, J.-P. Kahane, J. H. van Lint, F. Pluvinage, A. Ralston, & M. Yamaguti (Eds.), *The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching* (pp. iv–iv). Cambridge University Press.
<https://doi.org/10.1017/CBO9781139013482.001>
- Hoyles, C., Sutherland, R., & Evans, J. (1986). Using logo in the mathematics classroom. What are the implications of pupil devised goals? *Computers & Education*, *10*(1), 61–71. [https://doi.org/10.1016/0360-1315\(86\)90053-9](https://doi.org/10.1016/0360-1315(86)90053-9)
- Huang, R., & Li, Y. (Eds.). (2017). *Teaching and Learning Mathematics through Variation*. SensePublishers. <https://doi.org/10.1007/978-94-6300-782-5>
- Itti, L. (2007). *Visual Saliency*. http://www.scholarpedia.org/article/Visual_saliency
- Jakobsson, A., Jakobsson, A., Davidsson, E., & Davidsson, E. (2012). Using Sociocultural Frameworks to Understand the Significance of Interactions at Science and Technology Centers and Museums. En E. Davidsson & A. Jakobsson (Eds.), *Understanding Interactions at Science Centers and Museums: Approaching Sociocultural Perspectives* (pp. 3–21). SensePublishers.
https://doi.org/10.1007/978-94-6091-725-7_2
- Kaput, J. (1994). Democratizing access to calculus: New routes to old roots. *Mathematical thinking and problem solving*, 77–156.

- Kaput, J., Hegedus, S., & Lesh, R. (2007). Technology becoming infrastructural in mathematics education. En *Foundations for the future in mathematics education* (pp. 173–192).
- Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 145–168). Routledge.
- Kaput, J., & Roschelle, J. (2013). The Mathematics of Change and Variation from a Millennial Perspective: New Content, New Context. En S. J. Hegedus & J. Roschelle (Eds.), *The SimCalc Vision and Contributions* (pp. 13–26). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-5696-0_2
- Kieran, C. (2004). The Core of Algebra: Reflections on its Main Activities. En K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra The 12th ICMI Study* (Vol. 8, pp. 21–33). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/1-4020-8131-6_2
- Kirshner, D., & Awtry, T. (2004). Visual Saliency of Algebraic Transformations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(4), 224–257. <https://doi.org/10.2307/30034809>
- Lakoff, G., & Núñez, R. E. (2001). *Where mathematics come from: How the embodied mind brings mathematics into being*. Basic Books.
- Lave, J. (1988). *Cognition in practice: Mind, mathematics, and culture in everyday life*. Cambridge University Press.
- Lee, L. (1996). An Initiation into Algebraic Culture through Generalization Activities. En N. Bernarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra* (pp. 87–106). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3_6

Li, J., & Gao, W. (2014). *Visual Saliency Computation: A Machine Learning Perspective*.

Springer.

Logo History. (2019, febrero 28). [http://el.media.mit.edu/logo-](http://el.media.mit.edu/logo-foundation/what_is_logo/history.html)

[foundation/what_is_logo/history.html](http://el.media.mit.edu/logo-foundation/what_is_logo/history.html)

Marache-Francisco, C., & Brangier, E. (2013). Perception of Gamification: Between

Graphical Design and Persuasive Design. En A. Marcus (Ed.), *Design, User*

Experience, and Usability. Health, Learning, Playing, Cultural, and Cross-Cultural

User Experience (pp. 558–567). Springer Berlin Heidelberg.

Mariotti, M. A. (2002). Chapter 27. The Influence of Technological Advances on Students’

Mathematics Learning. En L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research*

in Mathematics Education (2nd ed, pp. 695–723). Lawrence Erlbaum Associates,

Publishers.

Mason, J. (1996). Expressing Generality and Roots of Algebra. En N. Bernarz, C. Kieran,

& L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra* (pp. 65–86). Springer Netherlands.

https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3_5

McLean, K. (1993). *Planning for People in Museum Exhibitions*. Association of Science-

Technology Centers.

Meagher, M. (2006). Theoretical approaches to learning with digital technologies. En C.

Hoyles, J.-B. Lagrange, L. H. Son, & N. Sinclair (Eds.), *Proceedings of the*

Seventeenth Study Conference of the International Commission on Mathematical

Instruction (pp. 386–393). Hanoi Institute of Technology and Didirem Université

Paris 7.

Miles, M. B., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded*

sourcebook (2nd ed). Sage Publications.

- Molyneux-Hodgson, S., Rojano, T., Sutherland, R., & Ursini, S. (1999). Mathematical Modelling: The Interaction of Culture and Practice. *Educational Studies in Mathematics*, 39(1), 167–183. <https://doi.org/10.1023/A:1003758310286>
- Monaghan, J. (2001). Young Peoples' Ideas of Infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 48(2), 239–257. <https://doi.org/10.1023/A:1016090925967>
- National Council of Teachers of Mathematics (Ed.). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Nemirovsky, R. (2003). Three conjectures concerning the relationship between body activity and understanding mathematics. *Proceedings of the PME27-PMENA25 Conference*.
- Nemirovsky, R., Tierney, C., & Wright, T. (1998). Body Motion and Graphing. *Cognition and Instruction*, 16(2), 119–172. https://doi.org/10.1207/s1532690xci1602_1
- Nielsen, J. (2015). *Engaging Math in Informal Learning Environments: Q&A with Tracey Wright*. <http://www.informalscience.org/news-views/engaging-math-informal-learning-environments-qa-tracey-wright>
- Oppenheimer, F., & Exploratorium (Organization). (1986). *Working Prototypes: Exhibit Design at the Exploratorium*. Exploratorium.
<https://books.google.com.mx/books?id=s8I4AAAACAAJ>
- Papert, S. (1972). Teaching Children Thinking. *Programmed Learning and Educational Technology*, 9(5), 245–255. <https://doi.org/10.1080/1355800720090503>
- Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, computers, and powerful ideas*. Basic Books.
- Pattison, S., Rubin, A., & Wright, T. (2017). *MATHEMATICS IN INFORMAL LEARNING ENVIRONMENTS: A SUMMARY OF THE LITERATURE*.

<http://www.informalscience.org/mathematics-informal-learning-environments-summary-literature>

- Pea, R. D. (1987). Cognitive Technologies for Mathematics Education. En A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 89–122).
- Radford, L. (2011). Grade 2 Students' Non-Symbolic Algebraic Thinking. En J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization* (pp. 303–322). Springer Berlin Heidelberg.
https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_17
- Radford, L., Bardini, C., & Sabena, C. (2007). Perceiving the General: The Multisemiotic Dimension of Students' Algebraic Activity. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38. <https://doi.org/10.2307/30034963>
- Rivera, F. D. (2010). Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies in Mathematics*, 73(3), 297–328. <https://doi.org/10.1007/s10649-009-9222-0>
- Rojano, T., & Sutherland, R. (1993). Towards an algebraic approach: The role of spreadsheets. *Proceedings of the 17th Psychology of Mathematics Education Conference*, 1, 189–196.
- Russell, B. (1999). *Experience-Based Learning Theories*.
<http://www.informallearning.com/archive/1999-0304-a.htm>
- Sacristán, A. I. (2018). Constructionist Experiences for Mathematics Across Educational Levels. En V. Dagiene (Ed.), *Constructionism 2018 constructionism, computational thinking and educational innovation: Conference proceedings* (pp. 83–93). s. n.
<http://www.constructionism2018.fsf.vu.lt/>

- Sacristán, A. I., & Noss, R. (2008). Computational Construction as a Means to Coordinate Representations of Infinity. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 13(1), 47–70. <https://doi.org/10.1007/s10758-008-9127-5>
- Saxe, G. B. (2014). *Cultural Development of Mathematical Ideas Papua New Guinea Studies*. Cambridge University Press.
- Skovsmose, O., & Valero, P. (2002). Democratic access to powerful mathematical ideas. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education. Directions for the 21st Century*, 383–407.
- Skovsmose, O., & Valero, P. (2008). Democratic access to powerful mathematical ideas. En *Handbook of International Research in Mathematics Education*. Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780203930236.ch17>
- Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, 20(2), 147–164.
- Sutherland, R., Robertson, S., & John, P. (2009). *Improving Classroom Learning with ICT* (1st ed.). Routledge.
- Tall, D. (2008). James J. Kaput (1942-2005) Imagineer and Futurologist of Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics*, 68(2), 185–193.
- Tall, D. (2013). The Evolution of Technology and the Mathematics of Change and Variation: Using Human Perceptions and Emotions to Make Sense of Powerful Ideas. En S. J. Hegedus & J. Roschelle (Eds.), *The SimCalc Vision and Contributions* (pp. 449–461). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-5696-0_25
- Taylor, R. (Ed.). (1980). *The Computer in the school: Tutor, tool, tutee*. Teachers College Press.

- Thompson, P., & Carlson, M. (2017). *Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically* (pp. 421–456).
- Thompson, P. W. (1993). Quantitative reasoning, complexity, and additive structures. *Educational Studies in Mathematics*, 25(3), 165–208.
<https://doi.org/10.1007/BF01273861>
- Voßkühler, A. (2009). OGAMA description (for Version 2.5). *Berlin: Freie Universität Berlin, Germany. Fachbereich Physik*.
- Voßkühler, A., Nordmeier, V., Kuchinke, L., & Jacobs, A. M. (2008). OGAMA (Open Gaze and Mouse Analyzer): Open-source software designed to analyze eye and mouse movements in slideshow study designs. *Behavior research methods*, 40(4), 1150–1162.
- Vygotsky, L. S., & Cole, M. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Harvard University Press.
- Vygotsky, L. S., & Kozulin, A. (1986). *Thought and language* (Translation newly rev. and edited). MIT Press.
- Wagensberg, J. (2007). El Museo “Total”, Una Herramienta de Cambio Social. En J. Wagensberg (Ed.), *Hacia una Museología Total. Resúmenes. Los Cursos del Museo 2007*. CosmoCaixa.
- Warren, E., & Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds’ thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 67(2), 171–185. <https://doi.org/10.1007/s10649-007-9092-2>
- Webb, E. N. (2013). Gamification: When It Works, When It Doesn’t. En A. Marcus (Ed.), *Design, User Experience, and Usability. Health, Learning, Playing, Cultural, and Cross-Cultural User Experience* (pp. 608–614). Springer Berlin Heidelberg.

Wertsch, J. V. (1998). *Mind as action*. Oxford university press.

What is eye tracking? | How eye tracking works—Tobii. (s/f). Recuperado el 3 de mayo de 2022, de <https://www.tobii.com/group/about/this-is-eye-tracking/>

Wilkie, K. J. (2016). Students' use of variables and multiple representations in generalizing functional relationships prior to secondary school. *Educational Studies in Mathematics*, 93(3), 333–361. <https://doi.org/10.1007/s10649-016-9703-x>

APÉNDICE A. PROTOCOLO DE ENTREVISTA APLICADO

A continuación, se presenta el protocolo de entrevista aplicado al Bloque2.

VARIACIÓN			
¿Cómo te pareció el tema? ¿Te gustó? ¿Qué te gustó?			
¿Cuál experimento te resultó más fácil? ¿Por qué?	1	2	3
¿Cuál experimento te resultó más difícil?	1	2	3
¿Cómo te parece la dificultad de los experimentos?			

GENERALIZACIÓN			
¿Cómo te pareció el tema? ¿Te gustó? ¿Qué te gustó?			
¿Cuál experimento te resultó más fácil? ¿Por qué?	1	2	3
¿Cuál experimento te resultó más difícil?	1	2	3
¿Cómo te parece la dificultad de los experimentos?			

PROCESOS INFINITOS			
¿Cómo te pareció el tema? ¿Te gustó? ¿Qué te gustó?			
¿Cómo te pareció el experimento?			
¿Cómo te parece la dificultad del experimento?			

    **SABER SI A ALGO LE ENTENDIERON. BUSCAR SI HAY ALGÚN NIVEL DE ENTENDIMIENTO UNIDO O PROPICIADO POR LA MOTIVACIÓN.**

PREGUNTAS GENERALES			
¿Qué te parece la aplicación?			
¿Te gustó trabajar con ella?			
¿Te sentiste cómod@ usándola?			
¿Qué es lo que más te gustó?			
¿Qué es lo que menos te gustó?			
¿Cuál tema te gustó más? ¿Por qué?	VARIACIÓN	GENERALIZACIÓN	PROCESOS INF
¿Cuál tema te gustó menos? ¿Por qué?	VARIACIÓN	GENERALIZACIÓN	PROCESOS INF

¿Cuál experimento te gustó más? ¿Por qué?			
¿Cuál experimento te gustó menos? ¿Por qué?			
¿Qué te parece la duración de los experimentos			
¿Agregarías o cambiarías algún tema? ¿Cuál?	SI	NO	
¿Cuál tema te resultó más complicado? ¿Por qué?	VARIACIÓN	GENERALIZACIÓN	PROCESOS INF
¿Cuál tema te resultó menos complicado? ¿Por qué?	VARIACIÓN	GENERALIZACIÓN	PROCESOS INF

PREGUNTAS GENERALES			
¿Tuviste alguna dificultad para realizar la conexión? ¿Cuál?	SI	NO	
¿Tuviste alguna dificultad en el manejo de la aplicación? ¿Cuál?	SI	NO	
¿Le harías algún cambio para mejorar su uso? ¿Cuál?	SI	NO	

¿Ya conocías los 3 temas?	VARIACIÓN		GENERALIZACIÓN		PROCESOS INF							
	SI	NO	SI	NO	SI	NO						
¿Cuándo los viste? primaria, secundaria, PREPA, SUPERIOR	VARIACIÓN				GENERALIZACIÓN				PROCESOS INF			
	p	s	P	S	p	s	P	S	p	s	P	S
¿Cómo fue tu experiencia anterior con los temas?												
¿Cambió tu percepción de los temas después de usar la aplicación? ¿Cómo cambió?	SI	NO										
¿Has visto ejemplos de estos temas en otro lado? ¿Dónde?	SI	NO										

NOMBRE: _____



OCUPACIÓN: _____

NIVEL EDUCATIVO: _____

FECHA: _____

APÉNDICE B. ENTREVISTAS

En este anexo se presentan las transcripciones de las entrevistas de los tres casos seleccionados: Antonio, Nancy y José. Los usuarios entrevistados se nombran por su nombre real y el nombre *KARINA* corresponde a la entrevistadora (investigadora).

B.1. TRANSCRIPCIÓN CASO ANTONIO

- 00:00 - KARINA: Comparto, porque es este, yo creo que ya lo ves en pantalla, la pantalla azul.
- 00:06 - ANTONIO: Sí, sí. Ideas poderosas
- 00:09 - KARINA: Entonces, pues todo tuyo.
- 04:43 - KARINA: A ver, ¿qué te pareció este tema Antonio?
- 04:46 - ANTONIO: Está, está muy bonito explicado. ¿Para para qué edad es?
- 04:52 - KARINA: Pues de segundo de secundaria en adelante.
- 04:57 - ANTONIO: Ok. Está, está muy bonito, como, como se explica, me gusta, está muy interactivo.
- 05:03 - KARINA: Y en la escala del uno al tres. Así de que te haya gustado que le darías, siendo uno así como chafa, y pues tres me gustó?
- 05:12 - ANTONIO: Yo creo que un dos punto ocho.
- 05:13 - KARINA: Ah, bueno.
- 05:20 - ANTONIO: La verdad, la verdad, está bonito.
- 05:24 - KARINA: Y de los tres experimentos, ¿cuál crees que es el más fácil?
- 05:35 - ANTONIO: Tal vez el último, el de, el de la forma del tanque
- 05:42 - KARINA: y el más difícil?
- 05:46 - ANTONIO: No sé, ninguno estaba especialmente complicado, pero tal vez el del llenado de los tanques.
- 05:55 - KARINA: Ah, el segundo.
- 05:59 - ANTONIO: Ajá. No es como que esté muy difícil, pero tal vez alguien se puede confundir.
- 06:06 - KARINA: Ah, ok. Por Los dibujos?
- 06:12 - ANTONIO: eh? No por bueno.
- 06:18 - ANTONIO: No sé, es el más difícil que se me ocurre. Porque en sí, no están especialmente complejos.
- 06:25 - KARINA: Ya! Entonces te parece que la dificultad de los tres experimentos. Está bien, mal, más o menos?

- 06:34 - ANTONIO: Eh... Obviamente, si es para aplicar un examen, pues está demasiado fácil, pero para explicar un tema está bien, porque así entiende el concepto básico.
- 06:45 - KARINA: Si. Bueno, se trata de que esté en un museo, entonces no, nos interesa reprobar a nadie.
- 06:56 - KARINA: Bueno, bueno, ya no te interrumpo. Eso era importante para ese tema.
- 07:02 - ANTONIO: Ok.
- 08:46 - ANTONIO: Una pregunta, ¿“N” cuenta como un valor al cuadrado?
- 08:52 - KARINA: Pues sí, el chiste es... ahí puedes ir incrementando el número, y va poniendo el ejemplo y después te pregunta.
- 09:08 - ANTONIO: Sí, sí, sí. Pero me refiero que si pongo “N” como el valor al cuadrado
- 09:16 - KARINA: Sí. Bueno, al final de cuentas, esa es la secuencia que se genera. Entonces, eh... Por ejemplo, si ahí incrementas el valor de “N”. Bueno, ahí te muestra, eh, “N” igual a cero. Pues sí, efectivamente ahí no hay ningún foquito. Sí, lo incrementas. Te va mostrando la secuencia que se genera.
- 09:43 - ANTONIO: Ah, ok, ok, no había entendido el experimento.
- 12:35 - KARINA: Y este tema, ¿cómo lo viste?
- 12:37 - ANTONIO: También está sencillo. Pero bueno, yo me quedé con, con el pensamiento de, del primero y en el segundo no sé porque también pensé que era al cuadrado.
- 12:51 - KARINA: ¿y en la escala del uno al tres, como que le darías al tema? ¿De si te gustó, no te gustó o pues ahí más o menos?
- 13:03 - ANTONIO: Si, igual como un dos punto ocho, dos punto nueve. Creo que falta como un poquito de explicación al principio, como introducción al tema, pero de ahí en fuera me gustó bastante.
- 13:17 - KARINA: Ah, ok. Y de los tres experimentos, ¿cuál sería el que más te gustó?
- 13:25 - ANTONIO: El que más me gustó fue el de los edificios.
- 13:29 - KARINA: ¿y el que menos?
- 13:31 - ANTONIO: El de las pizzas estaba muy fácil.
- 13:36 - KARINA: y del de los edificios que, ¿qué es lo que más te gustó de ese?
- 13:43 - ANTONIO: eh... que además de que “N” no sólo era multiplicar por algo, sino también se le agregaba uno.
- 13:53 - KARINA: Muy bien. Y la dificultad de los experimentos en general, ¿te parece buena, mala o regular?

- 14:01 - ANTONIO: eh... Pues no están muy difíciles. Están... Pues buenos, supongo.
- 14:12 - KARINA: Ya! Listo, te dejo seguir.
- 14:15 - ANTONIO: Ok. Igual. Creo que si ya me lo habías enseñado una vez que fui a tu casa.
- 14:20 - KARINA: Sí, los dos primeros temas, sí, no, no cambiaron. Este es el nuevo.
- 17:42 - KARINA: ¿Y ese? ¿Qué te pareció el tema?
- 17:44 - ANTONIO: Este fue el que más me gustó a todos, porque te enseña como... Te enseña las exponenciales sin ponerte cosas complejas y está como que muy bonito.
- 18:02 - KARINA: Muy bien, ¿entonces en la escala del uno dos y tres?
- 18:06 - ANTONIO: Ese se llevaría un tres. Me, me gustó la idea de prender foquitos.
- 18:12 - KARINA: ¿y entonces te pareció bien la dificultad del experimento?
- 18:17 - ANTONIO: Sí, más que dificultad, es como para que mientras vas prendiendo foquitos entiendas cómo funcionan como las exponenciales.
- 18:30 - KARINA: Ya! Y en general, toda la aplicación, ¿Qué le darías uno, dos o tres?
- 18:38 - ANTONIO: Un tres.
- 18:41 - KARINA: ¿y te gusto trabajar con ella? ¿Te sentiste cómodo usándola?
- 18:48 - ANTONIO: Sí, como te digo, esto estuvo entretenido. Fue una manera muy divertida.
- 18:54 - KARINA: ¿y de toda la aplicación, ¿qué es lo que más te gustó? En cuanto a la aplicación.
- 19:00 - ANTONIO: eh... Yo creo que la forma interactiva de la aplicación, o sea, que no te ponen párrafos y párrafos y párrafos y ya te hace como, o sea, lo de los experimentos están muy bonito porque es la manera interactiva, siento que importa mucho a la hora de aprender.
- 19:26 - KARINA: ¿Y lo que menos te gustó?
- 19:29 - ANTONIO: Eh... Creo que los, los monigotes del foquito son como innecesarios. Creo que desvían un poco la atención del tema principal, igual sólo es mi opinión, así que no estoy seguro.
- 19:53 - KARINA: Ajá, y de los tres temas, ¿cuál es el que te gustó más? ¿Y cuál es el que te gustó menos?
- 20:01 - ANTONIO: No hubo uno que me gustará menos, pero el que me gustó más fue el tercero.

- 20:06 - KARINA: Ok, entonces de los experimentos, o sea, ya de todos, que en total son siete. A cual... Bueno, ya me dijiste que el tercero es el que te gustó, que te gustó más? El de los foquitos, ¿y de todos el que te gustó menos?
- 20:26 - ANTONIO: eh?
- 20:35 - ANTONIO: Pues ninguno me gustó menos. Los otros dos estaban bastante buenos. Sólo me gustó un poquito más el último.
- 20:45 - KARINA: Ya. ¿Y en cuanto a la duración, te parece que están bien?
- 20:50 - ANTONIO: Sí, no, no son especialmente largos. De, así que creo que está bien de duración.
- 20:57 - KARINA: Y de temas, ¿le cambiarías alguno o le agregarías algo más? algún otro tema que creas que debiera también de estar ahí.
- 21:08 - ANTONIO: ¿Cuál es el tema principal de esto? ¿de ideas poderosas?
- 21:13 - KARINA: Bueno, como decía al principio, una idea por poderosa es la que te permite después entender algo más, entonces... Pero bueno, pues algún tema que tú considerarías que podría también ir ahí. No sé, hay quien ha sugerido algo de álgebra o de ecuaciones, pero alguno que dijeras bueno, es que éste estaría padre clavarlo ahí. Para explicarlo de una forma interactiva.
- 21:48 - ANTONIO: Eh... Dame un momento, voy a pensar...
- 22:10 - ANTONIO: Tal vez, el tema de las poleas quedaría bien de una forma interactiva.
- 22:23 - KARINA: Ya, para estarlo jugando allí en pantalla...
- 22:28 - ANTONIO: Ajá, es que no se me ocurren muchos temas que sean como que queden bien de manera interactiva en matemáticas, pero...
- 22:38 - ANTONIO: El único que se me ocurre es el de las poleas.
- 22:44 - KARINA: Ya, y bueno, pues sí, ya me dijiste que ninguno se te hizo así y particularmente complicado, pero de los tres, ¿crees que alguno sea más complicado que el otro o alguno más fácil que los otros?
- 23:01 - ANTONIO: Sí, el de los foquitos es como demasiado, demasiado fácil. Sólo es prender foquitos, igual puedes no entender el tema y solo pasártelo, prendiendo foquitos, pero creo que ese sería como el más sencillo de todos. El de los foquitos.
- 23:21 - KARINA: Ajá, ¿y el más complicado?
- 23:30 - ANTONIO: tal vez depende de la persona, pero a mí se me hizo el segundo, el de...
- 23:39 - ANTONIO: El de...
- 23:41 - KARINA: Las secuencias.
- 23:42 - ANTONIO: Sí, el de las secuencias.

- 23:45 - KARINA: Ya! ¿Y te costó algún trabajo hacer la conexión o todo fue así como simple?
- 23:54 - ANTONIO: La... la conexión al programa?
- 23:59 - KARINA: Sí, o sea, para que tuviéramos la sesión. Si algo se dificultó...
- 24:04 - ANTONIO: Al principio me estuvo marcando un poquito error y ya luego cerré Chrome y lo volví a abrir. Y ya, no pasó nada.
- 24:12 - KARINA: Ah, ya.
- 24:16 - KARINA: Y para manejarla, ¿algún problema o algún cambio que le quisieras hacer para hacerlo más simple o ameno o menos complicado?
- 24:27 - ANTONIO: No. De hecho, está suficientemente poco complicado. Está, está muy bien.
- 24:35 - KARINA: De los tres temas. Bueno, ¿ya los conocías o hubo alguno que resultara así novedoso?
- 24:41 - ANTONIO: Y no, creo que los tres ya, ya los conocía.
- 24:46 - KARINA: Oye, ¿y eso, lo viste en voca o lo viste en secundaria?
- 24:52 - ANTONIO: eh... El de las secuencias, los... lo vi en secundaria. El de...
- 25:03 - ANTONIO: El primero, el del llenado de tanques. Ese no lo vi, pero recuerdo que mi papá me lo explicó varias veces.
- 25:11 - KARINA: Ajá.
- 25:12 - ANTONIO: El tercero también lo vi en secundaria. Creo que en segundo, o en primero... no en segundo, en segundo.
- 25:25 - KARINA: Ya! Oye, y bueno, ¿cambió en algo tu percepción de los temas después de jugar con la aplicación?
- 25:39 - ANTONIO: eh...
- 25:47 - ANTONIO: No creo. Pero tal vez a muchos niños les... les cambia la perspectiva de la típica pregunta de ¿Y para qué sirve esto, profe?
- 26:00 - KARINA: Entonces, ¿crees que tenga algún efecto positivo?
- 26:04 - ANTONIO: Yo creo que sí. Porque pues, en la escuela te ponen, pues más a aprender. Y la pregunta de Y esto para que sirve? Pues siempre sigue ahí.
- 26:19 - ANTONIO: No sé si me explico.
- 26:22 - KARINA: Sí, sí, bueno, eso... eso nos motiva a seguir con esto. Oye, y esta clase de ejemplos las habías visto en algún lado o...
- 26:33 - ANTONIO: No, no. Tal vez la de la pizza, la vi en algún lado, pero los otros no.
- 26:44 - KARINA: Ya. Y algo más que quisieras criticar o comentar o...

- 26:53 - ANTONIO: Eh...
- 27:01 - ANTONIO: sí es de secundaria en adelante, creo que los muñecos animados sobran un poco y desvían la atención del tema. Pero es todo.
- 27:14 - KARINA: O sea, ¿tú retirarías las animaciones?
- 27:19 - ANTONIO: Eh, igual. Y yo soy un... un chavo amargado, pero...
- 27:25 - KARINA: No pues, se vale de todo. Digo, es para que la use el público en general.
- 27:31 - ANTONIO: No sé si... pero te digo, yo soy, yo soy un amargado, así que no sé si todo el mundo piense como yo, pero yo, yo retirararía los muñecos animados. Porque... Tal vez a los niños pequeños les llame la atención los muñequitos, pero creo que de secundaria en adelante ya, ya no importa mucho eso.
- 27:52 - KARINA: ¿Tú darías las instrucciones así nada más escritas una tras otra?
- 27:58 - ANTONIO: No, no, no, las instrucciones están bien, pero como para rellenar pones como los muñequitos animados, abajo del cuadrado donde te explican las instrucciones. Yo creo que esos están como rellenando espacio y sobran un poco, lo de para explicar las instrucciones. Pues sí está, está padre.
- 28:23 - KARINA: O sea, nada más dejar las puras instrucciones sin los monos.
- 28:31 - ANTONIO: Si. Bueno, yo, yo haría eso.
- 28:36 - KARINA: Sí, vaya, cualquier opinión es válida porque, pues la gama de gustos es tremenda, entonces pues sí, yo en lo personal tampoco soy muy partidaria de eso, pero... pues es que luego a la gente le gusta.
- 29:02 - ANTONIO: Ok. Entiendo.
- 29:03 - KARINA: pero es bueno saber que hay otras personas a las que no les gusta.
- 29:10 - ANTONIO: O sea no, no, es que no me guste, creo que es innecesario.
- 29:16 - KARINA: Si. Bueno, a mi lo personal no, pues no me gusta, pero pues sí, cambia pues, cambia el público...
- 29:31 - KARINA: pero me parece muy bien tu comentario.
- 29:37 - ANTONIO: Pues espero que te haya servido de algo.
- 29:40 - KARINA: Pues la verdad es que un montón.
- 29:45 - KARINA: Es muy útil conocer la opinión de alguien que... que lo vio la primera vez y que lo vuelve a utilizar, pues creo que casi dos años después, más o menos.
- 30:01 - ANTONIO: ya.

- 30:06 - KARINA: Lo cual pues está muy bien.
30:07 - ANTONIO: Sí.
30:13 - KARINA: ¿Le agregarías algo más?
30:16 - ANTONIO: eh...
30:22 - ANTONIO: No, la verdad para un museo está, está muy excelente.
30:29 - KARINA: Bueno, pues muchísimas gracias, Antonio.

B.2. TRANSCRIPCIÓN CASO NANCY

- 00:00 - KARINA: La grabo y te comparto la pantalla. ¿Listo? Adelante.
05:23 - NANCY: Ay! No sé.
05:37 - KARINA: A ver. Bueno, ahí ese tema. ¿Qué te pareció? ¿Te gustó? ¿No te gustó? En la escala del uno al tres, donde uno es no te gustó y el tres, sí te gustó, ¿qué le darías?
05:52 - NANCY: ah, un tres.
05:55 - KARINA: ¿Y qué es lo que te gustó?
05:58 - NANCY: ah... las instrucciones fueron, pues precisas. Sólo que en el experimento número dos, no, no entendí muy bien. Este... el dibujito. O sea, no, no sabía si tenían como un tubo, compartían los tres este... recipientes de abajo o si cada uno tenía el suyo, no, no entendí muy bien esa parte.
06:40 - KARINA: Ah, ok. Y de los tres experimentos, ¿cuál es el que te resultó más fácil? ¿Y cuál el más difícil?
06:48 - NANCY: El primero resulta más fácil. ¿Y el segundo? El segundo, El tercero fue el que no, no entendí lo de forma y volumen.
07:01 - KARINA: Ya. Bueno, es que si te fijas los tres se van llenando al mismo tiempo. Aunque. El nivel del agua cambia en cada uno por la forma del recipiente, pero todos tienen el mismo número de tazas.
07:18 - NANCY: Ajá.
07:20 - KARINA: Entonces la forma del recipiente es la que hace que el nivel de llenado vaya cambiando distinto a cada uno de los tanques.
07:32 - NANCY: Ajá.
07:33 - KARINA: entonces la gráfica es distinta por la forma del recipiente.
07:37 - NANCY: La forma del recipiente...
07:39 - KARINA: Y todos tienen la misma cantidad de tazas, la misma capacidad.
07:44 - NANCY: Sí, sí, ya, ya.

- 07:50 - KARINA: Y, eh... el primero me dices que fue el más fácil, Ese en particular, ¿qué fue lo que se te hizo más fácil?
- 08:02 - NANCY: eh?
- 08:07 - NANCY: Pues, estaba más a la vista el botón de... para iniciar el juego, eh... estaba más a la vista porque en el experimento tres está como muy hacia la derecha. No, no, no se ve muy bien.
- 08:26 - KARINA: Ok, bueno, oye, y la dificultad de los experimentos del uno al tres, ¿Qué te parece? ¿Adecuada?
- 08:35 - NANCY: ¿Dificultad?
- 08:37 - KARINA: sí, o sea, si se te hacen más difíciles, más o menos, o...
- 08:42 - NANCY: No, no, no, no, no.
- 08:44 - KARINA: ¿qué es adecuada?
- 08:46 - NANCY: sí. No, no, no está tan difícil.
- 08:51 - KARINA: Crees que está bien. Ya. ¿no hay ni que hacerlo más fáciles? ¿Ni que hacerlos más difíciles?
- 08:58 - NANCY: ah, no, no, Si es para gente más o menos de mi edad, si es sencillo, pero yo creo que se va para niños más chiquitos. A lo mejor los botones más grandes o algo así para que los puedan ver más.
- 09:15 - KARINA: Bueno, está planeado para que lo puedan usar sin mucho problema, sin mucha complejidad, niños de segundo de secundaria en adelante.
- 09:27 - NANCY: Ah.
- 09:31 - KARINA: Eh... aquí. Bueno, te platico un poquito. El grave problema es que no lo podemos probar en un museo, como estaba contemplado en un principio, pues por la situación de la pandemia,
- 09:44 - NANCY: Ajá.
- 09:46 - KARINA: Y que lo que nos limita, pues son los tamaños de pantalla que cada quien tenemos en nuestras casas, entonces esto está planeado para una pantalla de cuarenta y dos pulgadas así tipo televisión grande. Y eso permite pues, que los botones y todo eso se vea, pues mejor porque quedan bastante más grandes.
- 10:12 - NANCY: Ah, ya!
- 10:13 - KARINA: Pero de momento estamos limitados a eso, porque no podemos probarlo de forma presencial, por eso es que pues la invitación es, pues de uno en uno y con conexión, y bueno, es un poco más complicado el asunto.
- 10:32 - NANCY: Si. Ah, bueno.

- 10:35 - KARINA: pero bueno, eso serían las preguntas del primer tema.
Muchas gracias. Y te dejo que sigas.
- 16:08 - NANCY: Ay! se trabó la computadora.
- 16:11 - KARINA: ¿Se trabó?
- 16:13 - NANCY: Sí, pero en la mía. A ver deme un momentito a ver si se me destraba rápido.
- 16:21 - KARINA: Sí, claro.
- 16:38 - NANCY: ¡ya!
- 16:39 - KARINA: ¡ah, perfecto!
- 18:59 - KARINA: A ver, ahí se acabó el tema de generalización. Bueno, el tercero, ¿el segundo tema qué te pareció?
- 19:04 - NANCY: Ah, ese, ese me gustó mucho!
- 19:10 - KARINA: en la escala del uno al tres, ¿qué le darías?
- 19:13 - NANCY: ¡Un tres!
- 19:15 - KARINA: y de este, ¿qué es lo que te gustó?
- 19:19 - NANCY: ¡Ay! Pues... no sé, yo creo que las formas que utilizaron no siempre fueron las mismas. O sea, hubo circulitos, las pizzas y el de los, el edificio, bueno, le tome forma de edificio, yo no sé, era como variado y estaba con colorido.
- 19:45 - KARINA: y de estos, ¿cuál fue el experimento que te resultó más fácil?
- 19:50 - NANCY: el tercero
- 19:53 - KARINA: ¿y el más difícil?
- 19:58 - NANCY: El segundo.
- 20:02 - KARINA: ¿y por qué el tercero te resultó más fácil, y el segundo, más difícil?
- 20:08 - NANCY: porque el tercero eran fracciones de cuartos, entonces ese, bueno para mí es como más sencillo.
- 20:20 - KARINA: Ajá, está bien. Y el que fue difícil, ¿qué es lo que le encontraste, que fuera difícil?
- 20:30 - NANCY: eh... sí que no habían, como enteros, porque siempre había como una ventanita más arriba. Ajá, esa.
- 20:46 - KARINA: Ah, ok. Y en cuanto a la dificultad de estos tres experimentos, ¿cómo te parece? ¿muy difícil, más o menos o que está bien?
- 20:58 - NANCY: Pues en general.
- 21:05 - NANCY: Pues está fácil, bueno, pues sí fácil. Yo creo que ya fue como cosa mía. El equivocarme en el segundo.

- 21:16 - KARINA: pero vaya, ¿tú crees que queda bien dejarlos así? ¿o que deberían de ser más fáciles, o que deberían de ser más complicados?
- 21:26 - NANCY: No, yo creo que esos así, podrían quedarse así, porque si son todos como de cuartos o quintos o que, vaya no tuviera el como más uno, sí sería como muy, muy sencillo.
- 21:45 - KARINA: Entonces, ¿crees que podrían quedarse así?
- 21:46 - NANCY: Sí.
- 21:47 - NANCY: Muchas gracias. Bueno, te dejo.
- 26:02 - KARINA: bueno, pues esos fueron los tres temas. ¿Este qué te pareció?
- 26:07 - NANCY: Este me gustó también, sólo que al momento de dar las instrucciones... bueno, la instrucción que dice prende tantos foquitos, como ahí, como que se cambia muy rápido porque no, no alcancé a leer bien a la primera. Entonces tuve que... volver a darle clic para que iniciará otra vez las instrucciones. Ese es el único enunciado. Yo creo que pasa un poco rápido.
- 26:46 - KARINA: ah, bueno. Pero, ¿fue suficiente con que pudieras repetir las?
- 26:49 - NANCY: sí.
- 26:50 - KARINA: Muy bien. ¿Y del uno al tres, a este tema qué le darías?
- 26:59 - NANCY: Tres.
- 27:04 - KARINA: ¿Y cómo te pareció el experimento? ¿Bueno, malo, más o menos? ¿Fácil? ¿Difícil?
- 27:12 - NANCY: Pues está fácil. Nada más es prendiendo los foquitos.
- 27:21 - KARINA: Entonces, en el... del uno al tres ¿qué le darías de calificación al experimento?
- 27:28 - NANCY: tres.
- 27:31 - KARINA: ¿Y la dificultad te parece adecuada?
- 27:38 - NANCY: mmm...
- 27:40 - KARINA: ¿Le daríamos un uno, dos, un tres?
- 27:44 - NANCY: Pues un dos en dificultad, porque nada más es prender los foquitos. La única que pregunta que te hacen es cuándo acabaría el experimento si no tuvieras límite de tiempo.
- 27:59 - KARINA: Ya. Bueno...
- 28:04 - NANCY: Ah, no, que entonces como más, este se me fue la palabra, pero más, como lógico, no?
- 28:18 - KARINA: Ajá, y de toda la aplicación ¿qué le darías un uno, un dos o un tres?
- 28:26 - NANCY: Un tres.
- 28:29 - KARINA: ¿Y te gustó trabajar con ella? ¿Te sentiste cómoda usándola?

- 28:35 - NANCY: Este... si los temas no son complicados.
- 28:40 - KARINA: y de la aplicación en sí, ¿qué es lo que más te gustó?
- 28:50 - NANCY: de la aplicación, que... que eh... que puede volver a reproducir las instrucciones cuando no me queda algo claro, o cuando no alcanzaba a leer, cuando se cambiaba, que las... las formas me llaman la atención los colores, las formas.
- 29:17 - KARINA: Ah, muy bien ¿y lo que menos te haya gustado?
- 29:31 - NANCY: Pues. No, nada. Creo que está muy bien.
- 29:37 - KARINA: Y bueno, ya, después de que tuviste oportunidad de ver los tres temas, ¿cuál es el que te gustó más, el de los tanques de agua? Bueno, ¿todo el tema o el de las secuencias o el último de los foquitos?
- 29:54 - NANCY: El de las secuencias.
- 29:57 - KARINA: ¿y el que menos te gustó?
- 30:01 - NANCY: El de los tanques de agua.
- 30:06 - KARINA: Y bueno, de las secuencias, ¿qué es lo que te gustó?
- 30:17 - NANCY: pues... Las instrucciones son... bueno para mí eran como más, más claras y más directas, eh... Pues es un tema que a mí me gustaba cuando iba en la secundaria y las formas. No se quedaron nada más, como, como con... Pues sí eran las formas, más colores. Me llama la atención más.
- 30:52 - KARINA: Ya. La de los tanques de agua, ¿qué es lo que menos te gustó?
- 31:03 - NANCY: eh... Pues no, no entendía muy bien el dibujito. El tanque de agua más grande que tenía que llenar los tres más chiquitos. No... No sé si no puse mucha atención en el dibujo o no. No entendí mucho.
- 31:29 - KARINA: Ya. Y de todos los experimentos que hiciste, ¿Cuál es el que te gustó más?
- 31:36 - NANCY: De los nueve experimentos de los...
- 31:37 - KARINA: siete.
- 31:38 - NANCY: Ah, sí! Siete, el último nomás traía uno. El de la secuencia de las pizzas.
- 31:52 - KARINA: ¿y el que menos?
- 32:00 - NANCY: El del tanque grande de agua.
- 32:02 - KARINA: ¿El que me dices de que se crea confusión con los tres chicos?
- 32:04 - NANCY: Sí

- 32:10 - KARINA: muy bien. Oye, Y en cuanto al tiempo que le inviertes a cada experimento, ¿la duración te parece buena, mala, adecuada, que es suficiente tiempo o que deberían de ser más cortos?
- 32:28 - NANCY: No, yo pienso que, que está, están bien los tiempos.
- 32:38 - KARINA: Y tú a la aplicación ¿le agregarías o le cambiarías algún tema?
- 32:48 - NANCY: No. No, no le cambiaría nada.
- 32:56 - KARINA: Oye, y de los temas, de los tres en general, eh... ¿Cuál sería el complicado?
- 33:04 - NANCY: El de los tanques.
- 33:07 - KARINA: El de los tanques, ¿y el menos complicado?
- 33:12 - NANCY: El de los botones, en el de las tropas.
- 33:16 - KARINA: El de qué? perdón.
- 33:17 - NANCY: Los foquitos, el último.
- 33:23 - KARINA: Ya! Y bueno, te preguntaría que, ¿si hubo alguna otra dificultad para realizar la conexión, aparte de que no te llegó el mail?
- 33:33 - NANCY: Este... sí, no, no, la que se trababa era pero mi computadora, la aplicación estaba bien.
- 33:43 - KARINA: eh... Pero bueno, es que ya ves que intentamos dos veces con un mail que no te llegó el que ya te llegó para hacer la conexión. ¿Tuviste algún problema o ese sí entró bien a la primera?
- 33:56 - NANCY: no, entró bien a la primera.
- 33:58 - KARINA: Muy bien.
- 34:00 - NANCY: eh... Si. No, no, ni que se trababa ni nada.
- 34:07 - KARINA: Y le encontraste alguna dificultad de manejo a la aplicación que dijeras... Bueno, bueno, me mencionaste lo del tamaño de los botones, que fuera un poquito más grande, no? Pero algo, un poco, ¿o algo más, que le encontraras que creas que se tenga que cambiar o que mejorar o que quitar?
- 34:30 - NANCY: eh... No. Pues bueno, al momento de dar las instrucciones, eh... De unas instrucciones a otras, dentro del mismo tema. Bueno, no, la única que cambio rápido fue esa la que comenté hace rato, pero luego como que tardan en cambiarse, entonces, como que no sabe si ya es momento de darle a la flechita para que siga o si va a seguir dando instrucciones.
- 35:06 - KARINA: Si. Bueno, vamos a revisar, porque bueno no sé si sea la animación. O sea, la, pues las conexiones que de repente se satura la red y que se pudiera trabar, pero lo vamos a checar.

- 35:21 - NANCY: sí, o qué... No sé, cuando terminen de dar la instrucción, como que de un salto la flechita o brille o parpadeé, como que haga algo, no? para que ya sepamos que ya terminó de darla.
- 35:37 - KARINA: Sí. De los tres, ¿ya conocías los tres?
- 35:47 - NANCY: Sí.
- 35:50 - KARINA: Y esos eh... en qué, bueno, ¿cuándo los viste? me dijiste creo que el de las secuencias que en secundaria...
- 36:00 - NANCY: Sí. Bueno, todo en secundaria. Las... este... las secuencias en primero, la de los este... tanques de agua, en segundo y la última no recuerdo exactamente cuándo, pero sí, si la había visto también.
- 36:24 - KARINA: Y cuando tú los viste, ¿cómo fue tu experiencia con esos temas? ¿te resultaron fáciles, difíciles o no les entendiste? o fue fácil entenderlos?
- 36:36 - NANCY: Eh... Es fácil entender el de la secuencia. Y el, el último que dice el de los focos, El de los tanques de agua.
- 36:47 - KARINA: Pero cuando tú los viste la escuela, ¿cómo se te hicieron?
- 36:52 - NANCY: Ah, en la escuela. Eh... no, pues igual, los temas. El segundo y tercero, muy fáciles, pero el primero no tanto.
- 37:06 - KARINA: Ya. Y después de que usaste la aplicación, ¿cambio tu percepción de esos temas o no cambió? ¿Se quedó igual?
- 37:18 - NANCY: No. Sí cambió.
- 37:21 - KARINA: ¿Y de qué forma cambió?
- 37:24 - NANCY: Pues me... Me refrescaron los temas porque, pues igual yo podía verlos y decir sí me lo sé, pero al momento de hacer los ejercicios, este... recuerdo mejor los temas.
- 37:43 - KARINA: Ah, bueno. Entonces, ¿crees que podría ser útil la aplicación?
- 37:44 - NANCY: Sí.
- 37:45 - KARINA: Ya. ¿Y esta clase de ejemplos los habías visto en otros lados?
- 37:55 - NANCY: Eh... Pues... En laboratorio, el de los tanques de agua, en matemáticas las secuencias. Pero en la escuela solamente.
- 38:12 - KARINA: Eso no lo has visto, por ejemplo, en la vida cotidiana, ¿y eso que lo pudieras relacionar con los temas?
- 38:24 - NANCY: Pues... quizás lo del agua en la cocina, al momento de verter un recipiente, el contenido de un recipiente en otro. El de las secuencias... Bueno, ahorita no, no recuerdo haberlo utilizada en la vida cotidiana, pero... bueno, si no, no recuerdo. En la escuela solamente. Y la última, pues es lógica.
- 39:09 - KARINA: Sí, es difícil verlo en la vida cotidiana.
- 39:11 - NANCY: Sí.

- 39:12 - KARINA: Oye, pues si tienes algún comentario, sugerencia, pregunta... que quieras agregar.
- 39:21 - NANCY: No nada más eso de las instrucciones de que cuando acaben como que no se la flechita, cambia de color o brinque tantito. No sé si puede ponerle algún tipo de animación para que se dé a entender que las instrucciones ya fueron dadas.
- 39:40 - KARINA: Bueno, si eso sí lo vamos a considerar, yo creo que resultaría muy útil.
- 39:48 - NANCY: Sí.
- 39:51 - NANCY: pero, fuera de ahí, yo creo que está muy bien todo.
- 39:54 - KARINA: Muchas gracias. Y pues bueno, eso, eso de mi parte sería todo. Y puedes agradecerte tus comentarios y tu tiempo para hacer, pues la prueba de, de la aplicación.
- 40:11 - NANCY: Sí, no fue nada. Me gusta, Me gusta.
- 40:15 - KARINA: Pues muchas gracias. Y un gusto en conocerte por este medio.
- 40:21 - NANCY: Ay! igualmente.
- 40:24 - KARINA: Bueno, pues que estés muy bien.

B.3. TRANSCRIPCIÓN CASO JOSÉ

- 00:02 - KARINA: Te comparto la pantalla y todo tuyo.
- 00:07 - KARINA: Al final de cada tema, que son tres, te interrumpo tantito para que me des tus comentarios del tema, ¿sale?
- 00:18 - JOSÉ: ok.
- 00:18 - KARINA: Listo.
- 05:48 - KARINA: Y a ver aquí, ¿qué te pareció el tema, en la escala del uno al tres? ¿te gustó? ¿No te gustó?
- 05:58 - JOSÉ: Estuvo interesante. Sí, sí me gustó. El primero no le entendí tanto. El del llenado de los, el de llenado de los tanques, no le entendí, o sea el primerito, el primerito, no, no le entendí como que tanto, pero ya luego cuando lo volví a repetir fue cuando ahora sí le agarré bien la onda. Me gustó, está en general interesantes los temas.
- 06:22 - KARINA: Y del uno al tres, donde uno no te gusto, y tres sí te gustó, ¿qué le darías al tema? O sea, los tres experimentos, en general.
- 06:33 - JOSÉ: a los tres experimentos, tres.

- 06:37 - KARINA: y de los tres experimentos, ¿cuál es el que te resultó más fácil? ¿Y cuál sería el más difícil?
- 06:47 - JOSÉ: El dos fue el más fácil. Y que me resultó difícil, fue el uno, pero yo creo que más que nada sería por el tiempo de las, las instrucciones, como que no me dio tiempo de analizarlo bien, bien, bien, bien.
- 07:08 - JOSÉ: Más la última parte, cuando andaban en la parte que decían lo de la tacita, en el experimento tres ocupa la taza, eh... hubo una instrucción todavía en la parte de abajo, que es fue rapidísimo entonces ya no lo alcancé a leer.
- 07:25 - KARINA: Ok. Y la dificultad de los experimentos, ¿qué le darías, uno, dos o tres, donde uno es muy complejo, dos más o menos o tres adecuada?
- 07:42 - JOSÉ: Tres
- 07:50 - KARINA: Ok, pues adelante con el que sigue.
- 15:35 - JOSÉ: Ay! En la madre!
- 16:10 - KARINA: Este tema, ¿qué te pareció?
- 16:19 - JOSÉ: está bien interesante, está muy interesante, pero yo no me acordaba muy bien de fracciones... pero me gustó, me gustó.
- 16:29 - KARINA: Entonces, ¿le daríamos un tres?
- 16:32 - JOSÉ: Sí. Un tres.
- 16:35 - KARINA: Y de los tres experimentos, ¿cuál fue el que te resultó más fácil?
- 16:40 - JOSÉ: el que me resultó más fácil... Yo creo que el dos.
- 16:49 - KARINA: Ajá, ¿el de las ventanitas?
- 16:51 - JOSÉ: El de las ventanitas del edificio. Sí. Sólo que al final no vi el ocho. Entonces me confundí, pero el dos estaba, estaba fácil.
- 17:01 - KARINA: ¿Y el que te haya resultado más difícil?
- 17:04 - JOSÉ: El que me haya resultado más difícil... el tres. Yo creo.
- 17:15 - KARINA: ¿Y porque el dos sería el más fácil y el tres más difícil?
- 17:18 - JOSÉ: ah...
- 17:21 - JOSÉ: El dos se me hizo más fácil porque nada más era ir contando el número de ventanitas. Bueno, el número de ventanitas que teníamos por cada edificio. Pues ahí aumentarle uno, o sea, multiplicar lo que las ventanas que nos iban a dar o que teníamos como tal y multiplicarlas por el número de N. Pues, a mí en lo particular, visualmente se me hizo el más fácil, como que le agarré más la onda. El tres fue más difícil, bueno, porque ya tenía un rato que no. No sé cuándo son temas que luego damos por obvios y, y pues creo

que me confío. Si me, me confíe, pues no sabía bien como, cómo hacerlo hasta que ya al final, me dio la explicación, como que ah... y era el número total dividido entre cuatro. No se me hizo más..., se me hizo más, se me hizo como que un poquito más complejo esa parte, pero le, le agarré ya la onda. Estuvo interesante.

- 18:37 - KARINA: Y la dificultad de los experimentos, ¿qué te parece? ¿Bien, mal, regular?
- 18:45 - JOSÉ: Yo creo que está bien. Yo creo que está bien como tal.
- 18:49 - KARINA: Ok, listo. Adelante.
- 22:33 - KARINA: A ver, y de este, ¿qué te pareció el tema?
- 22:36 - JOSÉ: Me gustó. Bueno, se me hizo muy interactivo, como tal me gustó, pero pues, no sé, creo que el final fue bastante sencillo. O sea, como deducir de que iba a ser una idea finita, entonces, pues por dificultad yo le pondría fácil, fácil. Y nada, en general, te digo me, me gustó, como que fue mas... divertido el estar cliqueando en cada, en cada momento. Pues cada una de las bolitas y ahí jugando con el, con el tiempo.
- 23:30 - KARINA: Pero al tema, ¿le darías un uno, un dos o un tres?
- 23:35 - JOSÉ: Un tres.
- 23:37 - KARINA: ¿Y el experimento te pareció? Bueno, ya me dijiste que muy fácil, pero ¿te parece bien? ¿Bueno, adecuado, inadecuado, más o menos?
- 23:49 - JOSÉ: Más o menos. Ese sí, yo la pondría con lo que más o menos.
- 23:54 - KARINA: ¿Crees que se podría abordar el tema de otra forma?
- 24:08 - JOSÉ: sí, pero honestamente, no sé cómo.
- 24:12 - KARINA: pero si te dijeran bueno, dejamos esta o buscamos otra forma de abordar el tema. ¿Tú que sugerirías? ¿Dejarlo o buscar otra forma?
- 24:28 - JOSÉ: Ah, buscar otra forma.
- 24:39 - KARINA: Ok, ya. Y en cuanto a la aplicación en general, de cómo la viste, te gustó en la escala del uno al tres. ¿Tú que le darías?
- 24:58 - JOSÉ: Pues yo le daría un dos. Yo le daría un dos como tal. Me gustó, como tal, la parte de los experimentos, pero siento, bueno siento que las imágenes ya son como que muy viejitas, me da a mí esa impresión, eh... No sé si me doy a entender, eh... Me gustaría como que fuera un poquito más visual a mí en lo particular.
- 25:32 - KARINA: Eh... ¿más visual, en cuanto a qué? en cuanto a quitarle a los personajes? O... ¿cambiar la estética de los botones? O...

- 25:47 - JOSÉ: Cambiar la estética de los botones. Yo creo, yo creo cambiar la estética de los botones como tal.
- 25:57 - KARINA: Ok. O sea, cambiar la presentación de toda la, de la aplicación.
- 26:08 - JOSÉ: Si es que, bueno como te digo, pues a mí en lo particular se me hace como que... está bonito, pero se me hace como que muy ochentero. La idea, muy, muy setentero, o sea, tiene como que esa impresión de cómic viejito. Entonces, no sé, a mí en lo particular me gustaría como que se viera un poco más vivaz. Este algo, no sé algo un poquito más, más actual se me haría más presentable. No sé, cómo darle un poquito más de detalle a los personajes, incluso inclusive a estos. No por, a estos pequeños dibujitos.
- 26:51 - KARINA: ok ¿Y te gusto trabajar con ella? ¿Te sentiste cómodo?
- 26:58 - JOSÉ: Sí, esa parte sí. Me, me gustó bastante.
- 27:03 - KARINA: ahora, de la aplicación, ya me dijiste que es lo que menos te gustó, y ¿qué sería lo que más te gustó?
- 27:11 - JOSÉ: Pues que... te pasa, que como que te... A mí me gustó el reto, si los retos pequeños, o sea, estuvieron interesantes los ejercicios. Como cositas cotidianas. Son cosas cotidianas regularmente, pero que muy rara vez les prestas atención, no? O sea, que ya la tienes, tan mecanizadas, que ni siquiera, pues en mi caso, a mí me pasó ahorita que ya ni me acordaba de cómo hacer varias de estas cosas, pero me gustó mucho. Creo que pues eran bastante interesantes desde cómo es que las, los volúmenes, este... cómo es que los volúmenes o las cantidades de agua cambian dependiendo del, de la forma de, del recipiente, todo, todo me llamó la atención. Estuvo muy padre, estuvo muy padre los ejercicios.
- 28:13 - KARINA: y de los temas, ¿Cuál es el que te gustó más?
- 28:20 - JOSÉ: El dos.
- 28:25 - KARINA: El de las secuencias, ¿ése por qué te gustó más?
- 28:27 - JOSÉ: Eh... Siento que me retó un poquito más mentalmente y pues estuvo más divertido. O sea, fue como que, ay! Cómo, cómo se hacía esto entonces, pues no sé, como que en lo particular, me, me gustó más esta parte.
- 28:45 - KARINA: ¿y el que menos te haya gustado?
- 28:48 - JOSÉ: El que menos me ha gustado, el tres.
- 28:54 - KARINA: El tres. ¿Por qué?
- 28:57 - JOSÉ: Pues yo creo que por lo que no me gustó tanto, fue por la facilidad.

- 29:12 - KARINA: Ok, y de todos los experimentos que hiciste, que en total fueron siete. ¿Cuál sería el que más te gustó?
- 29:22 - JOSÉ: El que más me gustó, eh... El cinco, el de los, el de las secuencias de los edificios.
- 29:35 - KARINA: Ok, bueno. ¿Y tú le agregarías o le cambiarías algún tema?
- 29:44 - JOSÉ: Yo creo que... Ay! No sé, yo le cambiaría el de procesos infinitos.
- 30:05 - KARINA: Ok.
- 30:09 - KARINA: o sea, ¿le quitarías ese y le pondrías otro?
- 30:10 - JOSÉ: Sí.
- 30:11 - KARINA: En lugar de ese, ¿qué te gustaría poner?
- 30:20 - JOSÉ: No sé, eh...
- 30:28 - JOSÉ: algo, bueno, fracciones o fracciones como tal, creo que sería bastante interesante. O al...
- 30:32 - KARINA: Ya.
- 30:39 - JOSÉ: O algún tipo de... cómo se llama... Sí, no, como tal fracciones, creo que sería interesante de ver.
- 30:48 - KARINA: O sea, ¿dedicarlo a las fracciones, no sé, otros tres experimentos?
- 30:51 - JOSÉ: Ajá.
- 30:52 - KARINA: Ya. ¿Y la duración de los experimentos te parece buena? ¿Más o menos? ¿o mala? ¿cómo la ves?
- 31:04 - JOSÉ: me parece muy buena. No lo sé. De hecho, ni sentí en qué momento pasaron los treinta y cuatro minutos.
- 31:11 - KARINA: Bueno, es que creo que, que te estoy entreteniéndome más con las preguntas que con los experimentos.
- 31:18 - JOSÉ: No, sí, pero se me hicieron buenas. O sea, en lo particular, el tiempo estuvo bien, no me sentía ni presionado ni nada. Entonces pues en lo particular, creo que estaba divertido.
- 31:29 - KARINA: Y de los tres, tres temas que se presentan, ¿tú cuál consideras que sería el más complicado de los tres?
- 31:37 - JOSÉ: La generalización.
- 31:43 - KARINA: ¿Y ese porque consideras que es el, que es más complicado a pesar de que es el que te gustó más?
- 31:52 - JOSÉ: Pues... porque tienes que, bueno, no sé, como que tienes que pensar un poquito más. Y con respecto al, con respecto al, al ejercicio, a los ejercicios, no, o sea, tienes que ver, analizar. No sé, en lo particular. A mí me, me gustó mucho eso me, me llamó, me gusta, me llama la atención, más bien perdón, el ese, ese tipo de

- aspectos, pero en lo particular, bueno pero, pues es un poquito más complicado. El de variación. El de variación se me hizo sencillo... Eh... Pero el de generalización sí fue como que más complicadito, pero me gustó. Me gustó mucho más.
- 32:41 - KARINA: Ok, para hacer la conexión, ¿tuviste alguna dificultad para encontrar el mail o que no llegara? ¿O que se tardara?
- 32:52 - JOSÉ: No. Pues fue como me dijiste, nada más tuve que meterme a, ay!... cómo se llama... a promociones, y ahí me aparecieron. No tuve ningún problema. Me metí sin broncas a la página y todo listo.
- 33:08 - KARINA: Ok. ¿Y para manejar la aplicación, tuviste alguna dificultad en algún momento?
- 33:12 - JOSÉ: No.
- 33:15 - KARINA: Ok. Bueno, por lo que me dices, tú ya conocías los tres temas.
- 33:23 - JOSÉ: Más o me... Bueno, sí.
- 33:30 - KARINA: Y tú te acuerdas eso en la escuela, ¿cuándo lo viste?
- 33:32 - JOSÉ: Ay! El de varia... varias. Bueno, el de variación en secundaria, creo. Bueno, no creo, estoy seguro de que fue en secundaria... Eh... cómo se llama... El de...
- 33:55 - KARINA: ¿El de las secuencias?
- 33:58 - JOSÉ: Ah, perdón, el de las secuencias en secundaria, el de variación... no es cierto el de, el de las secuencias fue en prepa, variación en primaria y procesos infinitos, me pareció que, perdón, variación en secundaria, perdón, y procesos infinitos en prepa. Que fue ya cuando empezamos a ver la parte de límites y todo y todo. Y...
- 34:29 - KARINA: entonces lo de generalización, lo de las secuencias ¿lo viste en prepa o en secundaria?
- 34:35 - JOSÉ: en prepa.
- 34:37 - KARINA: ya, y cuando tú viste esos temas, ¿cómo fue tu experiencia? ¿Les agarraste la onda?
- 34:43 - JOSÉ: No, no, nada. Nada, no les entendía mucho.
- 34:54 - KARINA: Y ahora, bueno, lo que pasa que tú ya estás en superior, ya tienes más trayecto andado, pero, ¿cambió tu percepción de los temas al usar la aplicación o se quedó igual?
- 35:08 - JOSÉ: No, Sí, bueno. Sí, sí. Cambió bastante. Eh... como que agarrar, bueno, no sé, es que yo, yo los hacía, de manera diferente. Por ejemplo, el de generalización. Bueno, lo de las secuencias. Pues yo lo iba viendo nada más con números, no? Y pues ahí tenía que sacar este, bueno, tenía que ir viendo por de cuantos en cuantos iban

aumentando, o como, que ibas, cómo es que iba siendo su, su... cómo se llama... su... ay! Se me fue la onda... su... Exactamente. Y pues aquí gráficamente fue más, fue más interesante. Al final, como los tips me, me gustaron, pues sí.

36:05 - JOSÉ: Pues como que así también se podía hacer, porque yo los estaba sacando de una manera diferente, pero igual me gustaron los tips como tal, que al final me dieron y siento que fueron más sencillos, eran más sencillos, como los planteaban. Ahí que como yo estaba haciendo.

36:22 - KARINA: Ah, ok. ¿Y tú habías visto ejemplos de estos temas en algún otro lado fuera, fuera de la escuela?

36:33 - JOSÉ: Eh... El de variación, cuando trabajaba en un zoológico. Luego, pues hacíamos bueno, hacíamos jugueteo con los tanques de, de agua de los animales. Entonces, pues ahí, hacíamos apuestas de quien, qué tanque iba a ganar o cositas así.

37:01 - JOSÉ: Entonces pues sí, como tal. Sí, he visto, por ejemplo, el de generalización. Yo creo que más que nada en el tema de la pizza fue así. Aunque, pues, de cuantas, cuántas rebanadas nos va a tocar a cada uno. Son como que cosas, pues cotidianas. Entonces sí sí, sí, los he visto bastante.

37:29 - KARINA: Bueno, ¿y tú en qué semestre estás?

37:33 - JOSÉ: ahorita en tercer semestre.

37:38 - KARINA: Ah, ok, ¿de ingeniería civil?

37:40 - JOSÉ: Sí.

37:42 - KARINA: Muy bien. Y bueno, ¿algo más que quisieras agregar de críticas, sugerencias, algún cambio? ¿Pregunta?

37:53 - JOSÉ: No. De hecho, pues no, bueno, sólo lo de procesos, lo de procesos infinitos, infinitos. Pues, pues sí. Me gustó como tal la actividad. Se me hizo entretenido estarle pushan, pushando este los botones, pero bueno, darle, andarle clicando al botón, pero, pues ya después fue así, como que me hubiese gustado como que ver más, en procesos infinitos.

38:27 - KARINA: y por ejemplo, si esto se lo presentaras a un chico de secundaria, ¿crees que sería adecuado?

38:36 - JOSÉ: sí.

38:39 - KARINA: ¿Crees que tiene el nivel como para un chavito de secundaria entonces?

38:42 - JOSÉ: Mjmmm (asintiendo).

- 38:46 - KARINA: para un chavito de esa edad, ¿tú le harías algún cambio adicional aparte de la estética?
- 38:54 - JOSÉ: No. No, aparte de la estética, no.
- 39:01 - KARINA: Crees que tiene la dificultad adecuada como para un segundo de secundaria, tercero.
- 39:04 - JOSÉ: Sí.
- 39:05 - KARINA: bueno, ¿algo más que quieras agregar?
- 39:07 - JOSÉ: No.
- 39:08 - KARINA: Bueno, pues entonces de mi parte eso sería todo. Muchísimas gracias por tu tiempo y tus comentarios.
- 39:26 - JOSÉ: No, muchas gracias a ti. Y pues bueno, pues hasta luego, entonces
- 39:32 - KARINA: Hasta, luego que estés muy bien.
- 39:35 - JOSÉ: Gracias. Igualmente. Bonito día.
- 39:37 - KARINA: Gracias, igual.