CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

Elementos del pensamiento y lenguaje variacional en la relación entre un modelo determinista y un fenómeno no-lineal

Tesis que presenta:

ELEANY BARRIOS BORGES

Para obtener el grado de:

MAESTRA EN CIENCIAS
EN LA ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

Directores de la tesis:

Dr. Ricardo Arnoldo Cantoral Uriza †
Dr. Francisco Cordero Osorio

Ciudad de México | Mayo, 2022

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo económico brindado para la realización de mis estudios de maestría.

Eleany Barrios Borges

Becaria No. 1017957

Agradecimientos

Agradezco a cada elemento que conforma mi sistema complejo circundante, llamado vida; a los de sangre, a los de paso y en especial a los de siempre; también a los que ya no están físicamente, pero su recuerdo vive en mí. Gracias, por tanto, gracias por ser y por estar.

Un agradecimiento especial a mis sinodales Luis Moreno Armella y Jesús Enrique Hernández Zavaleta. Muchas gracias también a Gisela y a Adriana por su colaboración durante todo el proceso formativo.

Agradezco con mucho cariño a Olguita por la motivación de venir a México a estudiar un posgrado.

Gratias agimus tibi Francisco Cordero.

In memoriam a Ricardo Arnoldo Cantoral Uriza.

ÍNDICE DE CONTENIDO

ÍNDICE DE FIGURAS

RESUMEN

Los fenómenos no lineales y sistemas complejos se reconocen fuera de la matemática escolar y las ecuaciones diferenciales son enseñadas de forma mecanicista, libres de significados.

La Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, plantea estudiar el conocimiento matemático puesto en uso en otras disciplinas, para así, dotarlos de significado. Los sistemas complejos se encuentran en diversas disciplinas y las ecuaciones diferenciales y la modelación basada en agentes son modeladoras de este tipo de fenómenos. Una propuesta para la incorporación de los sistemas complejos en el aula y dotar de significados las ecuaciones diferenciales es el estudio de las nociones de cambio y variación y la construcción social del conocimiento asociadas a la modelación los sistemas complejos mediante ecuaciones diferenciales.

En el caso particular de esta investigación, la modelación de la propagación de epidemias mediante el modelo de Susceptibles Infectados y Recuperados. El comportamiento se organiza de lo local a lo global. Es decir, a partir de la identificación y cuantificación del cambio en un mismo estado a partir de datos fácticos se encuentra una regularidad que permite anticipar comportamientos globales. A partir de la búsqueda de los patrones de interacción que se pueden describir diferentes comportamientos de la epidemia dependiendo de la variación de los parámetros. La predicción del comportamiento a largo plazo en los sistemas complejos no es posible con exactitud dado los comportamientos emergentes. El software NetLogo servirá para visualizar diferentes escenarios de propagación de la epidemia mediante la manipulación de los parámetros en un diseño exploratorio donde se pongan en juego los elementos epistemológicos antes mencionados.

ABSTRACT

Non-linear phenomena or complex systems are recognized outside school mathematics and differential equations are taught in a mechanistic way, free of meanings.

The Socioepistemological Theory of Educational Mathematics proposes to study the mathematical knowledge put into use in other disciplines, in order to endow them with meaning in school mathematics. Complex systems are found in various disciplines and differential equations and agent-based modeling are modelers of this type of phenomena. Therefore, a proposal for the incorporation of complex systems in the classroom and to endow differential equations with meaning is the study of the notions of change and variation and the social construction of knowledge associated with the modeling of complex systems by means of differential equations.

In the particular case of this research, the modeling of the spread of epidemics using the Infested and Recovered Susceptible model. The behavior is organized from the local to the global. That is, from the identification and quantification of the change in the same state from factual data, a regularity is found that allows anticipating global behaviors. From the search for patterns of interaction it is possible to describe different behaviors of the epidemic depending on the variation of the parameters. The prediction of long-term behavior in complex systems is not possible with accuracy given the emergent behaviors. The NetLogo software will be used to visualize different scenarios of epidemic propagation by manipulating the parameters in an exploratory design where the epistemological elements mentioned above are brought into play.

INTRODUCCIÓN

Los fenómenos no-lineales o sistemas complejos se reconocen fuera de la matemática escolar (Davis y Sengupta, 2020). En cambio, en la realidad, son estudiados por diversas disciplinas, la sociología, la economía, la epidemiología, entre otras. Estos fenómenos son modelados en muchas ocasiones, por esas disciplinas, mediante ecuaciones diferenciales. Empero las ecuaciones diferenciales en el ámbito escolar son enseñadas de forma mecanicista sin atribuirles significados. Una propuesta para dotarlas de significados es discutir sobre “el comportamiento a largo plazo de las soluciones, el número y la naturaleza de las soluciones de equilibrio y el efecto de la variación de los parámetros en el espacio de solución” (Kwon, 2020, p. 220)

La Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (Cantoral, 2013) plantea incorporar al aula fenómenos cercanos a la realidad del que aprende. Para ello, propone el estudio del conocimiento matemático puesto en uso en escenarios fuera del escolar, para luego difundirlos institucionalmente. En el caso particular de fenómenos de variación y cambio deben de incidir en el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional.

Este trabajo de investigación fue divido en 5 capítulos. En los primeros dos se enuncia la problemática de la investigación y una revisión bibliográfica sobre esta en la matemática educativa, así se configuran los objetivos y preguntas de investigación. En el tercer capítulo se esbozan los lentes teóricos-metódicos que regirán la investigación. El cuarto capítulo es un análisis de dimensión epistemológica, se estudia la modelación de epidemias, la construcción social de esta y las nociones asociadas al análisis de la variación y el cambio en la propagación de epidemias. Con esta epistemología se conforma un diseño exploratorio.

En el capítulo 1 se describe la falta de significado en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales y la ausencia de las matemáticas no lineales en la matemática escolar. Luego se relata un escenario actual, la propagación de epidemias. Dada la postura teórica de este trabajo, el estudio de la construcción social y las nociones de variación y cambio de este fenómeno no lineal y su modelación mediante un sistema de ecuaciones diferenciales puede constituir un marco de referencia para la incorporación en el aula de sistemas complejos o fenómenos no lineales y dotar de significados las ecuaciones diferenciales.

En el capítulo 2 se realiza una revisión bibliográfica en la disciplina sobre estos dos temas, la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y el estudio de fenómenos no lineales o sistemas complejos. En las investigaciones sobre ecuaciones diferenciales hay un punto de coincidencia, si bien los estudiantes son capaces de aplicar métodos analíticos para la solución no reconocen el significado de esta. Por otro lado, en los estudios sobre fenómenos no lineales y sistemas complejos, los autores coinciden que están ausentes de la matemática escolar y proponen actividades interdisciplinarias para su inserción y la simulación como una herramienta facilitadora de la visualización de dichos fenómenos.

En el capítulo 3 se elaboraron los fundamentos teóricos-metódicos de la investigación. La dinámica de la propagación de epidemia fue estudiada mediante el modelo socioepistemológico de análisis de la variación y la construcción social del conocimiento en la modelación de epidemias a través del análisis fino de la actividad (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasparini, 2015).

En el capítulo 4 se realiza el análisis y se plantean los resultados. A partir del análisis se elabora una epistemología. La dinámica de la propagación de epidemia está caracterizada por las relaciones particular entre la densidad de la población, las tasas de infecciosidad, recuperación y mortalidad. Un ligero aumento de la tasa de infecciosidad, puede hacer estallar una gran epidemia. Es a partir de la búsqueda de los patrones de interacción que se podrán describir diferentes comportamientos de la epidemia dependiendo de la variación de los parámetros. Para organizar el comportamiento se identifica y cuantificación el cambio en un mismo estado a partir de datos fácticos se encuentra una regularidad que permite anticipar comportamientos globales. Y estos comportamientos se clasifican según los patrones de interacción que describen las variaciones entre los estados. Con esta epistemología se elaboró un diseño exploratorio que está dividido en dos momentos. Un primer momento se confronta con el significado de las ecuaciones diferenciales. En un segundo momento se pretende dotar de significado la variación de parámetros, el sistema de ecuaciones diferenciales y las interacciones que describen diferentes escenarios. Para ello se visualiza en el interfaz de NetLogo que ocurre ante diferentes patrones de interacción y se realizan preguntas que aluden al análisis de la variación y el cambio para el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional.

El capítulo 5 muestra las conclusiones de este trabajo y las prospectivas en las que hace pensar. Este diseño constituye una propuesta para el tratamiento de sistemas complejos en el aula, a partir de la incorporación de fenómenos propios de otras disciplinas y dónde el foco para el desarrollo del pensamiento matemático sea la construcción social de ese conocimiento y las nociones de variación y cambio asociadas a la dinámica del fenómeno tratado, en lugar de la comprensión del objeto matemático sin significados. Para ello es necesario la conformación de marcos de referencias relacionados con fenómenos de la realidad en otras disciplinas, que propicien la elaboración de este tipo de diseños.

CAPÍTULO I. CONSIDERACIONES INICIALES

En este capítulo se esboza la problemática que se afronta en esta investigación. Se parte de la falta de significado en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales y la ausencia de las matemáticas no lineales en la matemática escolar. Luego se relata un escenario actual que sirvió de motivación y se dibuja a grandes rasgos la postura sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas[1]. Para finalmente realizar el planteamiento explícito de los objetivos y preguntas de investigación.

1.1 Problemática

Cuoco y otros autores (1996) plantean que debemos de desarrollar en los estudiantes hábitos útiles para hacer matemáticas: el reconocimiento de patrones, la experimentación, la formulación, la invención, la visualización y las conjeturas. En torno a esos hábitos, deben de diseñarse los planes de estudio, en lugar de preguntarnos ¿qué matemáticas enseñar?, ¿debería ser teoría de gráficos o geometría sólida?, ¿geometría analítica o geometría fractal?, ¿modelación con álgebra o modelación con hojas de cálculo?

La enseñanza de las matemáticas suele ocurrir de forma organizada esquemáticamente por contenidos temáticos secuenciados donde se prioriza la memorización y el desarrollo de métodos algorítmicos (Solís, 2012; Mendoza y Cordero, 2018). Las ecuaciones diferenciales, por ejemplo, son colocadas en el currículum, luego de que el estudiante ha cursado cálculo diferencial e integral. Se tipifican (homogéneas, no homogéneas, lineales, no lineales, de variables separables, etc.) y según

[1] Cai plantea que el marco teórico de la investigación debe de cumplir con los siguientes puntos: "a) justificar el propósito del estudio y orientar la revisión de la literatura; b) justificar el diseño y los métodos del estudio; y c) centrar y orientar la presentación de informes, la interpretación y discusión de los resultados y sus implicaciones" (Cai, 2019, p. 218, traducción propia). En la presente investigación se considera que la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa es la mediadora para tal fin.

el tipo se asocia un método algorítmico para su solución (Carranza-Rogerio, 2019). Este tipo de enseñanza, si bien predominante, no permite dar significado al objeto matemático (Mendoza y Cordero, 2018).

Las ecuaciones diferenciales, son usadas por profesionales de diversas especialidades para modelar fenómenos dinámicos de la realidad, donde la solución analítica no es simple y a veces no es posible por lo que:

> La interpretación y la caracterización del comportamiento y la estructura de las funciones solución son objetivos importantes, con ideas centrales que incluyen el comportamiento a largo plazo de las soluciones, el número y la naturaleza de las soluciones de equilibrio y el efecto de la variación de los parámetros en el espacio de solución (Kwon, 2020, p. 220, traducción propia) [2] .

Esos fenómenos de la realidad en muchos casos son sistemas complejos o no lineales (la propagación de epidemias, la interacción social, los ecosistemas, los seres vivos, el clima). Están compuestos por varias partes relacionadas entre sí. El estudio de estas interacciones revela información adicional, al estudio de cada una de las partes que interactúan. El desarrollo de las ciencias y el fortalecimiento de la investigación interdisciplinaria ha permitido estudiar el cambio en el tiempo de su dinámica, y con herramientas matemáticas y tecnológicas, cada vez más sofisticadas, lograr su representación. Davis y Sengupta (2020) expresan sobre la inserción de estos temas en el aula de clase:

> (…) las matemáticas lineales fueron primero defendidas y enseñadas por razones pragmáticas, no porque se considerará que ofrecían representaciones exactas de la realidad. Descartes, Newton y sus contemporáneos eran muy conscientes de los fenómenos no lineales. Sin embargo, debido a la intratabilidad de muchos cálculos no lineales, cuando surgieron fueron sustituidos

[2] Esta y todas las citas de documentos escritos en otro idioma diferente al español son traducciones propias

> rutinariamente por aproximaciones lineales. Como los libros de texto omitieron los relatos no lineales, generaciones de estudiantes fueron expuestas a versiones simplificadas y linealizadas de los fenómenos naturales (Davis y Sengupta, 2020, p. 115).

1.2 Contexto para la investigación

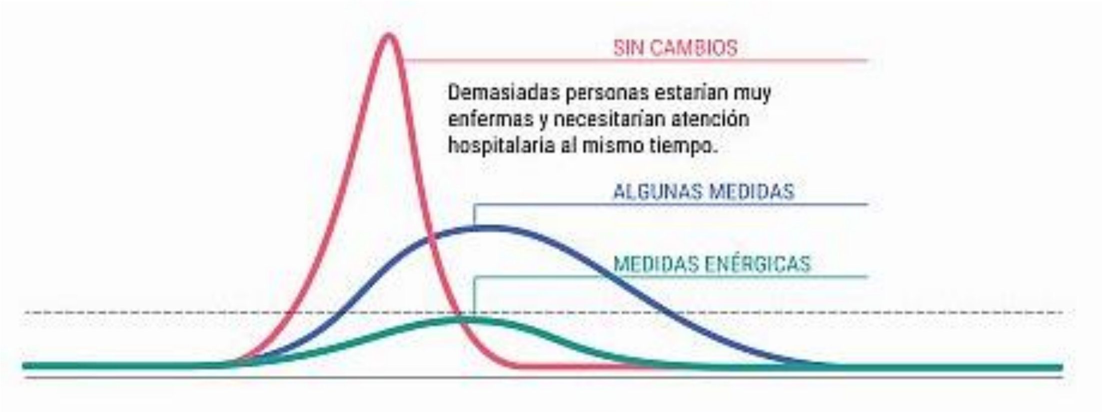
La modelación de la propagación de epidemias es principalmente requerida para la toma de decisiones. Necesitamos de la estimación de la cantidad de infectados para la preparación del sistema de salud para el enfrentamiento a la epidemia y tomar medidas para la disminución de la propagación de la misma. Este tipo de modelación para la toma de decisiones, pero en el ámbito de la Matemática Educativa, es retomado por Niss (2015).

Niss (2015) llama modelación prescriptiva al diseñar, prescribir, organizar o estructurar ciertos aspectos del mundo con el propósito de adoptar medidas basadas en decisiones derivadas de cierto tipo de consideraciones matemáticas. Una diferencia importante es el papel esencial de las *pruebas de sensibilidad* dentro de la evaluación de los modelos con fines prescriptivos. Este tipo de modelos, desarrollan el pensamiento matemático y crítico de los estudiantes, ya que, además de una matematización de la realidad requieren que se decida con base en el resultado de la exploración matemática.

El análisis de sensibilidad lo podemos asociar con el papel que juega determinada variable en el modelo, ¿cómo influye la variación de las variables en el modelo?, ¿cuánto influye la variación de las variables en el modelo? Estás preguntas permean el análisis de la variación y el cambio en la modelación de sistemas complejos.

En las noticias difundidas por diferentes medios de comunicación, en diversos países, a propósito de la pandemia COVID-19 podemos ver cómo se hace alusión a tres gráficas de estimación de infectados. Referentes a un escenario favorable, a uno óptimo y a otro crítico comparado con las posibilidades reales del sistema de salud del país (Ver figura 1.1).

Figura 1.1 Diferentes escenarios de una epidemia

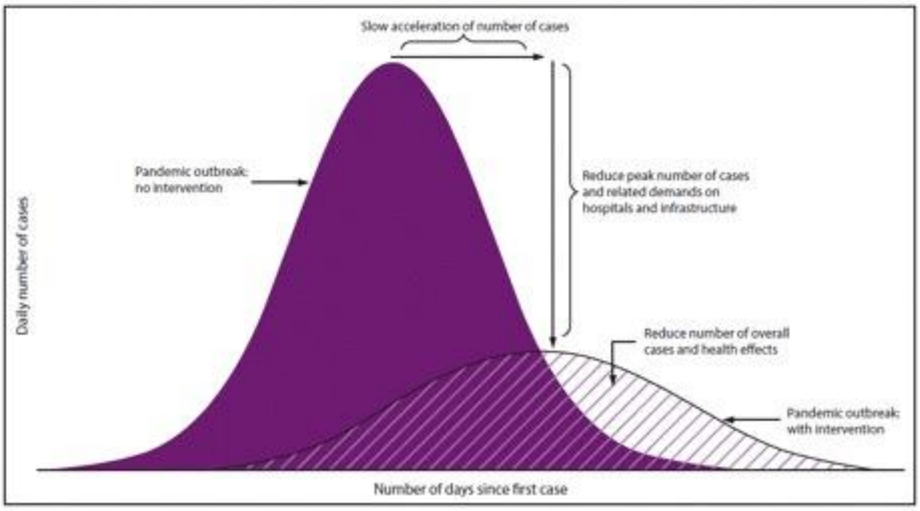


Fuente: Tomado de internet[3]

En dichas noticias la frase "aplanar la curva" - causante de varias polémicas en torno a su interpretación - la podemos asociar en una disminución de la cantidad de personas infectadas diariamente (ver figura 1.2). ¿Cuál es la dinámica subyacente al fenómeno? ¿Cómo se conforma un modelo? ¿Cuáles son los parámetros de un modelo epidemiológico?, ¿cómo influye cada uno de estos? y ¿cuánto influyen? fueron las preguntas que nos guiaron en el estudio de los modelos epidemiológicos.

[3]https://www.google.com/imgres?imgurl=https%3A%2F%2Fcontent.healthwise.net%2Fresources%2F12.7%2Fes-us%2Fmedia%2Fmedical%2Fhw%2Facl0573.jpg&imgrefurl=https%3A%2F%2Fwww.cigna.com%2Fes-us%2Findividuals-families%2Fhealth-wellness%2Fhw%2Ftemas-de-salud%2Freduccin-de-las-futuras-olas-de-covid-19-acl0046&tbnid=Uwt2MYIhFzexLM&vet=12ahUKEwiytIGQsazzAhUEf6wKHZVICyUQMygJegUIARCKAQ..i&docid=2Svr8VQz_9qYMM&w=460&h=300&q=curva%20de%20infeccion%20covid%20en%20una%20persona&ved=2ahUKEwiytIGQsazzAhUEf6wKHZVICyUQMygJegUIARCKAQ

Figura 1.2 Visualización de la idea de disminuir la propagación o aplanar la curva de una pandemia[4]



Nota: Tomado de https://es.wikipedia.org/wiki/Aplanar_la_curva

Vidal y otros (2020) en su búsqueda temática digital sobre modelos matemáticos epidemiológicos delinean a la modelación matemática en el estudio de epidemias como un “modelo conformado por un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas formales que representan una aproximación a las relaciones reales existentes en el objeto de estudio” (p. 2).

Estos modelos se pueden clasificar en varios grupos, por ejemplo, deterministas o estocásticos y estáticos o dinámicos. Los deterministas son aquellos que trabajan con condiciones y datos conocidos, y se pueden controlar los factores que intervienen en el estudio. A los estocásticos se le asocia la probabilidad de ocurrencia, existe incertidumbre en su comportamiento y no se conoce el resultado esperado. Estáticos o dinámicos se refieren a la forma en que se trata el tiempo. Los modelos estáticos dan un resultado para todo el período de tiempo considerado. Los modelos dinámicos devuelven las series temporales de las variables consideradas a lo largo del período de estudio. En el caso de las ecuaciones diferenciales y la modelación

[4] La curva morada oscura muestra una enfermedad que se está extendiendo rápidamente, mientras que la curva rayada muestra una propagación lenta.

basada en agentes son modelos dinámicos, dado que representan la evolucionan de lo que se modela. Por otro lado, las ecuaciones diferenciales son deterministas dado que la solución es una función que depende del tiempo y al sustituir podemos obtener la solución. Mientras que, la modelación basada en agentes tiene una naturaleza más cercana a lo estocástico.

Si bien con el decurso del tiempo se han generado modelos más específicos para la modelación de la difusión de enfermedades, el modelo Susceptibles, Infectados y Recuperados (SIR) de Kermack y McKendrick (1927) sigue constituyendo un mecanismo de análisis vigente para la toma de decisiones en las políticas públicas. Su uso resulta de particular interés dado el poco número de variables que lo describen, empero permite el análisis del comportamiento de la epidemia en estados futuros y para diferentes valores de las variables. Es decir, cómo se puede comportar la epidemia a largo plazo en diferentes escenarios de su propagación, dados por las medidas públicas que se apliquen y el comportamiento de la población.

Dado estas características del modelo SIR y la explicación que él supone en la difusión de una enfermedad esta investigación tiene la **hipótesis** de considerarlo propicio para ser estudiado con fines didácticos cómo un contexto para la incorporación de relatos no lineales en el aula, dotar de significado las ecuaciones diferenciales no lineales y propiciar escenarios para la emergencia y el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional[5].

[5] Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLVar) refiere a la línea de investigación desarrollada en el seno de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa y, pensamiento y lenguaje variacional a una forma particular de pensamiento matemático propia del humano al lidiar con fenómenos dinámicos (Cantoral, 2019).

1.3 Estudio del cambio y la variación. Pensamiento y lenguaje variacional

El cambio es posible de percibir a simple vista, se puede ver, por ejemplo, como un objeto en movimiento cambia de posición, aunque no podamos cuantificar cuánto cambio. En tanto la variación requiere de una construcción conceptual para explicar el cambio, ¿cuánto cambia?, ¿cómo cambia?, ¿por qué cambia de esa manera? (Caballero, 2018; Moreno-Durazo, 2018; Hernández-Zavaleta, 2019)

La variación constituye una noción central en diversas propuestas para la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo. Cómo se construye la variación en el pensamiento humano, en concreto por estudiantes de un bachillerato mexicano, alude Caballero (2018) en su investigación. El autor plantea que se exige de la temporización y la causalidad para la construcción de sistemas de referencias variacionales que evidencien un reconocimiento del cambio y la variación, lo organice y permita su comunicación. La construcción del sistema es orientada por un principio del pensamiento que denominó *p**, el cual se caracteriza por el estudio de la pequeña variación en situaciones de predicción, y se expresa mediante el reconocimiento de la variación sucesiva y de un razonamiento abductivo[6] que conduce a la generación de hipótesis.

Otro estudio sobre variación realizó Moreno-Durazo (2018) donde analiza las prácticas predictivas de los cardiólogos al tomar decisiones durante el tratamiento de enfermedades cardíacas. Ese escenario de investigación fue elegido considerando que, al ser dependiente de cada paciente, la respuesta a las enfermedades y a los medicamentos, las situaciones con las que tratan los médicos carecen de leyes de cambio. Una de las preguntas de fondo es qué sucede con el *p** al analizar la

[6] El razonamiento abductivo forma parte de las inferencias válidas, toma el rol de conjetura o plausible y se vincula a creatividad (Cantoral, 2019).

pequeña variación en un escenario de naturaleza no determinista[7]. Ese análisis se pone de manifiesto en el reconocimiento de los efectos que se tienen en la salud del paciente los ajustes en los medicamentos. Dado que mantener al paciente en los márgenes saludables no es una labor fácil de alcanzar o una vez alcanzada esta sea inamovible, constantemente se está tratando la salud del paciente con base en la pequeña variación y se expresa en la variación sucesiva y el razonamiento abductivo.

También sobre las nociones de cambio y variación versa la investigación de Hernández-Zavaleta (2019), su propuesta resulta de particular interés como base para esta investigación ya que propone la incorporación del estudio de fenómenos no lineales, reconocido en nuestra problemática ausentes del entorno escolar. En este caso se enfrentan estudiantes de bachillerato a una situación de caos determinista, el comportamiento del péndulo doble al modificar las longitudes de la barra inferior. Los eventos inesperados dados por la sensibilidad de las condiciones iniciales que acá aparecen hacen dificultoso la predicción, sin embargo, al hacer uso de la pequeña variación haciendo alguna variable o constante del sistema infinitamente pequeña permite la predicción. Una primera etapa de exploración libre de los estudiantes para la descripción del movimiento mediante argumentos relacionados con el cambio y la pequeña variación hacen que emerjan hipótesis abductivas sobre el movimiento de todo el sistema concernientes al largo del segundo péndulo y su relación con el orden.

Estos sistemas dinámicos y de movimiento, independientemente de su naturaleza determinista o no, usualmente son representados mediante ecuaciones diferenciales que al estudiarlas cualitativamente brindan información sobre el fenómeno en sí. A diferencia del uso de métodos cuantitativos, que usualmente son enseñados en las escuelas, donde se

[7] La autora distingue entre situaciones de naturaleza determinista que tiene la característica de identificar el estado que tendrá el fenómeno en todo momento (predecir) y las situaciones no deterministas en las que no se puede predecir, sino que se recurre a otro tipo de técnicas para establecer prácticas predictivas (estimar, inferir) (Moreno-Durazo, 2018).

trabaja en la solución algebraica alejada del contexto real del fenómeno que representa y por tanto inhiben de dotar de significado a las ecuaciones diferenciales.

Empero, qué sucede usualmente en las investigaciones de la Matemática Educativa en torno a las ecuaciones diferenciales, los sistemas dinámicos y los sistemas complejos o no lineales.

CAPÍTULO II. ANTECEDENTES

Para la revisión bibliográfica de investigaciones dentro de la Matemática Educativa se tomó como punto de partida las tesis de doctorado, dentro del grupo de investigación de *Pensamiento y Lenguaje Variacional*, de Caballero (2018), Moreno-Durazo (2018), Fallas-Soto (2019) y Hernández-Zavaleta (2019). Una etapa posterior estuvo dada por la búsqueda en bases de datos, índices y revistas de la disciplina empleando palabras claves como: *ecuaciones diferenciales*, *sistemas dinámicos*, *sistemas complejos* y sus respectivas traducciones al inglés (differential equations, *system dynamics*, *complex systems*). Además, se consultaron algunas referencias de los artículos, memorias, tesis, capítulos de libros y libros encontrados.

Dado que se encontró una alta correlación en los documentos encontrados con la investigación asociada a la modelación matemática en la práctica educativa se revisaron los libros de la serie ICTMA del 2015, 2017 y 2020 y en la monografía sobre el tema del ICME 13.

2.1 La enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales

Las ecuaciones diferenciales (EDs) se encuentran en varias disciplinas por tanto constituye tema de estudio en muchas carreras universitarias y en algunos cursos de bachillerato. En estos cursos usualmente se privilegia la clasificación de las ecuaciones diferenciales y la solución mediante métodos analíticos de acuerdo al tipo de ecuación, *ad hoc* al paradigma algebraico habitual de la matemática escolar.

Los métodos numéricos y gráficos, por otra parte, son aplicables a todas las ecuaciones diferenciales. Desde el punto de vista de los sistemas dinámicos, las EDs pueden ser tratadas como mecanismos que describen cómo las funciones evolucionan y cambian con el tiempo. La interpretación y la caracterización del comportamiento y la estructura de estas funciones de solución son objetivos importantes, con ideas centrales que incluyen el comportamiento a largo plazo de las soluciones, el número y la naturaleza de las soluciones de equilibrio y el efecto de la variación de los parámetros en el espacio de solución (Kwon, 2020).

Arslan (2010) plantea a estudiantes preguntas relacionadas con: las soluciones algebraicas de una ecuación diferencial (ED), con las curvas de soluciones particulares de una ED, con la interpretación gráfica de una ED y con la relación entre una ED y su solución particular; para contrastar estudiantes que tienen éxito al solucionar algebraicamente una ED con sus concepciones y comprensión, tanto de la ED como de su solución. Concluye que las soluciones algebraicas de las EDs se pueden encontrar incluso sin una comprensión y conceptualización profunda de las EDs, por lo que los estudiantes no sienten ninguna necesidad de comprender las EDs y los conceptos relacionados a tono con el paradigma habitual de la escuela (Blanchard, 1994; Boyce, 1994).

Varias investigaciones reclaman la necesidad de dar mayor protagonismo a los enfoques numéricos y cualitativos en la enseñanza y aprendizaje de las EDs (Arslan, 2010; Boyce, 1999)

Rodríguez (2015) en sus investigaciones sobre modelización desde la Teoría Antropológica de la Didáctica enfatiza que las matemáticas son una actividad humana que responde a problemas de diferente naturaleza, y a lo largo de esta actividad de resolución de problemas es probable que se produzca el surgimiento de conceptos, nociones y procedimientos matemáticos. Por ejemplo, en el contexto de los circuitos RC (Resistor-Capacitador) y RL (Resistor-Inductor) para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales mediante el uso de tecnología promueve el desarrollo de la modelación matemática en los estudiantes de ingeniería (Rodríguez y Quiroz, 2015).

Fallas (2015), quien propone abordar el teorema de existencia y unicidad a través de argumentos numéricos y visuales además de los analíticos para la comprensión de este conocimiento, partiendo de un análisis histórico de la construcción de dicho teorema en contraste con la costumbre didáctica alrededor de él. En particular, analiza dos métodos de aproximación: el de las quebradas (usado por Cauchy y Lipschitz) y el de cuadraturas (de Picard).

Mendoza y Cordero (2018) por su parte, revelan los usos de una comunidad de conocimiento matemático de ingenieros biónicos. Un resultado de esta investigación consistió en haber encontrado que los usos de la matemática propios de los ingenieros no están en relación con su matemática escolar. En el caso de las ecuaciones diferenciales: para los ingenieros es “una instrucción que organiza comportamientos” y en la matemática escolar es “hallar una solución que no se conoce”. Una coincidencia de este trabajo con el nuestro es revelar aspectos de funcionalidad de la matemática que coadyuven al diálogo recíproco entre el aula y la realidad.

2.2 El estudio de sistemas complejos en la Matemática Educativa

Para hablar de las consideraciones de los autores en torno al tópico de los sistemas complejos en la Matemática Educativa conviene, primero, caracterizar un sistema complejo. Esto debido a que no existe una definición consensuada, estas dependen del campo específico de la ciencia al que se aluda. “Los esfuerzos prominentes hacia una descripción coherente y unificada de la complejidad giran en torno a términos como emergente, no comprimible, multinivel, auto-organizada, sensible al contexto y adaptable” (Davis y Sengupta, 2019, p. 113).

Cilliers (2002) considera que un sistema complejo tiene 10 características esenciales:

(i) Los sistemas complejos están formados por un gran número de elementos.

(ii) Para constituir un sistema complejo, los elementos tienen que interactuar, y esta interacción debe ser dinámica. Un sistema complejo cambia con el tiempo. Las interacciones no tienen por qué ser físicas; también pueden considerarse como una transferencia de información.

(iii) La interacción es bastante rica, es decir, cualquier elemento del sistema influye en otros y es influido por ellos. Sin embargo, el comportamiento del sistema no está determinado por la cantidad exacta de interacciones asociadas a elementos concretos. Aunque existan suficientes elementos en el sistema (de los cuales algunos son redundantes), un número de elementos escasamente conectados pueden desempeñar la misma función que la de un elemento ricamente conectado.

(iv) Las propias interacciones tienen una serie de características importantes. En primer lugar, las interacciones no son lineales. Un gran sistema de elementos lineales se puede descomponer en un sistema equivalente que es mucho más pequeño. La no linealidad también garantiza que pequeñas causas pueden tener grandes resultados, y viceversa. Es una condición previa para la complejidad.

(v) Las interacciones suelen tener un alcance bastante corto, es decir, la información se recibe principalmente de los vecinos inmediatos. La interacción de largo alcance no es imposible, pero las limitaciones prácticas suelen forzar a tener en cuenta esto. Esto no excluye una influencia de gran alcance, ya que la interacción es rica, la ruta de un elemento a cualquier otro puede cubrirse en unos pocos pasos. Como resultado, la influencia es modulada a lo largo del camino. Puede potenciarse, suprimirse o alterarse de varias maneras.

(vi) Hay bucles en las interacciones. El efecto de cualquier actividad puede retroalimentarse a sí misma, a veces directamente, a veces tras una serie de etapas intermedias. Esta retroalimentación puede ser positiva (potenciadora, estimulante) o negativa (detractora, inhibidora). Ambos tipos son necesarias. El término técnico para este aspecto de un sistema complejo es recurrencia.

(vii) Los sistemas complejos suelen ser sistemas abiertos, es decir, que interactúan con su entorno. De hecho, a menudo es difícil definir la frontera de un sistema complejo. En lugar de ser una característica del sistema en sí, el ámbito del sistema suele estar determinado por el propósito de la descripción del sistema y, por tanto, suele estar influenciado por la posición del observador. Este proceso se denomina encuadre. Los sistemas cerrados suelen ser simplemente complicados.

(viii) Los sistemas complejos funcionan en condiciones alejadas del equilibrio. Tiene que haber un flujo constante de energía para mantener la organización del sistema y asegurar su supervivencia.

(ix) Los sistemas complejos tienen una historia. No sólo evolucionan en el tiempo, sino que su pasado es corresponsable de su comportamiento actual. Cualquier análisis de un sistema complejo que ignore la dimensión del tiempo es incompleto o, a lo sumo, una instantánea sincrónica de un proceso diacrónico.

(x) Cada elemento del sistema ignora el comportamiento del sistema en su conjunto, sólo responde a la información de la que dispone localmente. Este punto es de vital importancia. Si cada elemento "supiera" lo que le ocurre al sistema en su conjunto, toda la complejidad tendría que estar presente en ese elemento. Esto supondría una imposibilidad física en el sentido de que un solo elemento no tiene la capacidad necesaria, o bien constituiría un movimiento metafísico en el sentido de que la "conciencia" del todo está contenida en una unidad particular. La complejidad es el resultado de una rica interacción de elementos simples que sólo responden a la información limitada que cada de ellos se presenta. Cuando observamos el comportamiento de un sistema complejo en su conjunto, nuestra atención se desplaza del elemento individual del sistema a la estructura compleja del mismo. La complejidad surge como resultado de los patrones de interacción entre los elementos.

Dado el desarrollo de la Matemática Educativa como disciplina se han desarrollado teorías de la complejidad, es decir, contemplan el estudio sistémico de varios factores en los procesos de enseñanza y aprendizaje. El estudiante, el profesor, la institución, el plan de estudio, el contenido matemático, el libro de texto, el método de enseñanza, el desarrollo del pensamiento matemático de estudiante y profesores, entre otras variables. Además, a través de los estudios de interseccionalidad se reconoce el aula de clases como un espacio sociocultural permeado por la comunidad, la etnia, la raza, el género, y el nivel social y cultural de las familias de los y las estudiantes que influye en su actuar, su relación con el entorno y a la vez es influenciado por otros y por el entorno (Leyva, 2017).

Todo esto propone un escenario de construcción del conocimiento matemático que para ser investigado debe de contarse con teorías que contemplen todas esas relaciones con características de la complejidad.

El advenimiento de la informática y su rápido desarrollo ha permitido nuevas formas de hacer, pensar y aplicar las matemáticas.

Da Silva (2015) aborda el papel del software, Modellus, en el desarrollo de un enfoque de enseñanza basado en el Análisis de Modelos, que propone el análisis de un modelo matemático de un fenómeno para discutir los viejos y nuevos conceptos matemáticos con los estudiantes. El software dio acceso a representaciones gráficas y numéricas de las soluciones del modelo, que permitió a los estudiantes analizar el modelo, aunque implicaban conceptos matemáticos desconocidos para ellos. Con relación a investigaciones afines a esta investigación está la propuesta de varios autores (Fisher, 2021; Davis y Sengupta, 2020; Hernández-Zavaleta, 2019) de incluir contenidos de la matemática no lineal, los sistemas complejos, en el currículo de los diferentes niveles de enseñanza relacionados a fenómenos del mundo real.

Fisher (2021) aboga por la necesidad de enfoques de enseñanza para la construcción de modelos de análisis de problemas de sistemas complejos, en este caso con apoyo de la tecnología, con el fin de aumentar la comprensión de los innumerables sistemas de interacción no lineal que encontrarán como profesionales y ciudadanos. La interpretación del comportamiento del modelo se hace gráficamente y permite a las y los estudiantes anticipar comportamientos gráficamente, y luego explicar las diferencias entre su predicción y el resultado del modelo. Estos problemas usualmente están fuera del plan de estudio de secundaria, empero, la autora resalta que esta disquisición conectada con el mundo real constituye una preparación conceptual para los principios fundamentales del cálculo y el razonamiento covariacional.

Galbraith y Fisher (2021) muestran la importancia de la simulación en el trabajo con sistemas dinámicos mostrando problemas que pueden ser resueltos alternativamente mediante ecuaciones diferenciales y otros no lineales donde esta es la única forma de proceder.

2.3 Síntesis

Por un lado, Cantoral y otros (2020) plantean el papel que juega el *pensamiento matemático* en la comprensión de una epidemia, las medidas de carácter preventivo y los problemas que de estas se deriven; todo ello conlleva a la consideración de la noción de *aula extendida*. Esta noción de aula extendida asume la necesidad de incorporar en el aula otros saberes no contemplados en la matemática escolar, sea el saber popular, científico o técnico. Estos dos últimos distinguen la matemática que se desarrolla formalmente por matemáticos, de la que se usa al interior de las profesiones para los problemas propios de cada disciplina. Un hecho fundamental que caracteriza al sistema didáctico de la educación superior es que su matemática está al servicio de otros dominios científicos y de otras prácticas de referencia, de donde a su vez adquiere sentido y significación (Cantoral y Farfán, 2003; Cordero, 2001).

Al estudiar el modelo *SIR* no se propone la modelación del fenómeno sino explicar su la racionalidad a partir de la variación de parámetros y las nociones asociadas al cambio y la variación.

Con estos dos aspectos, en síntesis, se conforma un marco de referencia para formular nuestra investigación.

2.3.1 Objetivos de Investigación:

1. Conformar una epistemología de práctica a partir del análisis documental y el análisis variacional de un sistema complejo, en la dinámica en la propagación de una epidemia y las este caso, estudiar acciones, actividades y prácticas que se evidencian en su modelación mediante un modelo SIR.

2. Elaborar un diseño con fines didácticos, con base en la epistemología de prácticas conformada, para el análisis del procesamiento del cambio en sistemas complejos, y dotar de significados la variación de los parámetros en la ecuación diferencial.

2.3.2 Preguntas de Investigación:

Para conformar la epistemología:

1. ¿Cómo se caracteriza la dinámica de la propagación de una epidemia, a partir de un análisis documental y el modelo socioepistemológico de análisis de la variación y el cambio?
2. ¿Qué acciones, actividades y prácticas se evidencian en la modelación de la dinámica de la propagación de epidemias mediante un modelo SIR?

Para la elaboración del diseño didáctico:

3. ¿Cómo la epistemología rescatada conforma un diseño con fines didácticos para el análisis del procesamiento del cambio y la significación de la parametrización?

CAPÍTULO III. FUNDAMENTOS TEÓRICOS Y METÓDICOS

El presente capítulo pretende esclarecer los elementos teóricos y las decisiones metodológicas presentes en cada etapa de la investigación con la pretensión de responder al planteamiento de partida.

3.1 Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa

> La Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) modeliza la dinámica del saber o conocimiento puesto en uso. El saber se ubica en el tiempo y el espacio, se explora desde la óptica de quien aprende, de quien inventa, de quien lo usa, para que se rediseñe con fines didácticos. Esto es, el saber se problematiza (Cantoral, 2016, p.101).

Dada esta noción de conocimiento puesto en uso interesa situarse en una práctica de referencia, en este caso la modelación de epidemias permeada de contexto para, a partir de las herramientas metodológicas de la problematización del saber, posibilitar respuestas a las preguntas de investigación. La TSME centra la atención en las prácticas que acompañan y anteceden a los objetos matemáticos, es decir, lo que lo dota de significado.

No se trata de una negación del concepto objetivado o sintéticamente del objeto, sino de sustentarlo en prácticas que le dotaran de sentido y significado. “Esto es, los conceptos en su etapa inicial, durante su formación, aparecen ligados a las explicaciones causales derivadas de fenómenos particulares que se han construido como referentes transversales para el tratamiento de situaciones particulares de la vida real” (Cantoral, 2016, p. 118).

3.1.1 Principios de la teoría

La TSME descansa en cuatro principios fundamentales que trazan la visión epistemológica y ontológica de la investigación y por tanto del investigador. "Sin tener una secuencia lineal, sino formando una red nodal: el *principio de la racionalidad contextualizada*, el *principio del relativismo epistemológico*, el principio de la resignificación progresiva o de la *apropiación situada* y el *principio normativo de la práctica social*" (Cantoral, 2016, p. 156). Con base en Cantoral (2016) a continuación esbozamos cada uno de estos principios.

El principio de la *racionalidad contextualizada* alude a que la relación del sujeto al saber es una función del contexto. Por tanto, debemos entender los principios normativos del razonamiento dentro de los contextos específicos bajo los que realiza una inferencia el sujeto que pone su conocimiento en uso.

El principio del *relativismo epistemológico* sostiene que la validez del saber es relativa a la epistemología de partida, tanto del individuo como del grupo cultural y su contexto; no tiene una verdad absoluta. La veracidad de una interpretación o argumentación está dada por la coherencia con la racionalidad.

El principio de la *resignificación progresiva* o de la *apropiación situada* tiene sus bases en la epistemología genética. Plantea que construir los significados en torno a un objeto está mediado por la acción del sujeto sobre este, y la acción es dependiente en gran medida del escenario contextual. Por tanto, en la interacción del saber con otros escenarios se evidencian nuevos significados.

El *principio normativo de la práctica social* asume a la práctica social como la base de la construcción social del conocimiento. Es mediante el estudio de la construcción social del conocimiento con base en el modelo de anidación de prácticas que la podemos inferir ¿Cómo se constituye el saber?

> Se pasa de la acción directa del sujeto (individual, colectivo o histórico) ante el medio en tres acepciones (material o entorno, organizacional o contexto, social o normativo) esto se organiza como una actividad humana (situada socioculturalmente), para perfilar una práctica (interacción deliberada del sujeto y regulada por el contexto); dicha práctica cae bajo la regulación de una práctica de referencia que es la expresión material e ideológica de un paradigma (ideológico, disciplinar y cultural), las que a su vez son normadas mediante sus cuatro funciones por la práctica social (normativa, identitaria, pragmática y discursiva-reflexiva). (Cantoral, 2016, p. 159)

La función identitaria relacionada con la práctica de referencia dota de identidad al grupo o comunidad, la pragmática y la reflexiva: partiendo de las prácticas socialmente compartidas las actividades y las acciones promueven usos diferenciados del objeto matemático y; por lo tanto, reflexiones diferenciadas, por último la función normativa es de carácter regulatorio, la norma que regula el quehacer de los individuos en colectividad, es decir, no es la predicción en sí, es lo que te hace querer predecir. (Hernández – Zavaleta, 2019)

3.1.2 Modelo dinámico de la anidación de prácticas

El modelo dinámico de anidación de prácticas explica teórica y empíricamente la construcción social del conocimiento matemático (figura 3.1). Para la TSME, esto constituye la base para la intervención y transformación escolar de la educación matemática centrada en la construcción social.

La articulación del modelo la podemos expresar en los siguientes momentos: la *acción* es la intervención directa del sujeto frente al objeto, esta se organiza como una *actividad* humana situada socioculturalmente, para perfilar una *práctica socialmente compartida* que es intencional, reiterativa y normada culturalmente, que cae bajo la regulación de una o varias *prácticas de referencia* - la expresión material e ideológica de un paradigma - que a la vez son normadas por la *práctica social* (Cantoral, Montiel, Reyes-Gaparini, 2015).

Figura 3.1 Modelo de anidación de práctica

Fuente: Tomado de Cantoral (2016)

3.1.3 El *Prædiciere*: una práctica social

> En el marco del PyLV[ar], el interés por estudiar el cambio y la variación se deriva de una necesidad inherente al ser humano, la necesidad de predecir, ya que, ante la incapacidad de adelantar el tiempo para observar los resultados venideros, se han desarrollado diversas herramientas basadas en el estudio del cambio y orientadas por la práctica social del Prædiciere para anticipar el comportamiento de sistemas complejos. (Cantoral, 2016 citado en Caballero, 2018, p. 53)

Los trabajos de Cantoral alrededor de los años 90 sentaron los cimientos de la caracterización del *Prædiciere* cómo: “La acción intelectual del sujeto epistémico sobre datos fácticos para establecer los patrones de regularidad del comportamiento de lo que ha de predecirse. Acción que tiene efecto, sólo con el conocimiento de las explicaciones causales de los fenómenos estudiados" (Cantoral, 2016, p.113). Idea que más tarde se ha robustecido con la evidencia empírica ofrecida por los trabajos alrededor de su línea de investigación.

3.1.4 Pensamiento y Lenguaje Variacional

Como se menciona anteriormente, diversos han sido los trabajos desarrollados en la línea de Pensamiento y Lenguaje Variacional, ligados a caracterizar las prácticas que se emergen al predecir estados futuros en diferentes tipos de situaciones.

Caballero (2018) en su estudio sobre la construcción de la variación en estudiantes de bachillerato hace una organización de las prácticas de la siguiente manera:

- *Comparar* al nivel acción. "Establecer diferencias entre dos estados, uno anterior y uno posterior, o bien, dos estados equivalentes de dos fenómenos diferentes, lo que permite identificar y cuantificar el cambio" (Caballero, 2018, p. 52).
- *Seriar* al nivel actividad. Analizar estados consecutivos de un fenómeno, con el objetivo de encontrar una relación o propiedad entre ellos que describa el comportamiento variacional de esos estados. Organizar y establecer una lógica a un conjunto finito de comparaciones que posibilite determinar el carácter estable del cambio.
- *Estimar* y *predecir* al nivel de práctica socialmente compartida. *Estimar* es "anticipar comportamientos o tendencias en la variación del fenómeno en un intervalo" (Caballero, 2018, p. 59). *Predecir* "consiste en la acción de anticipar un estado o valor específico de una variable, sea futuro o anterior a los datos que se tienen" (Caballero, 2018, p. 58)

Moreno – Durazo (2018) al estudiar el diagnóstico y el seguimiento al tratamiento de enfermedades cardiacas mediante la interpretación de electrocardiogramas evidencia que la variación sucesiva se pone en uso al identificar patrones en el funcionamiento del corazón y al regular los efectos provocados por los medicamentos. Algo distintivo de este trabajo es que, al estudiarse un escenario no determinista, emerge la práctica de inferir alusiva a la predicción con cierto margen de error. Este trabajo hace una organización de las prácticas de la siguiente manera:

  - *Medir* al nivel de acción. Retoma la distinción sobre la medida que hace Reyes (2016) en la problematización del saber matemático relativo a lo proporcional directo donde se privilegia la construcción de unidades de medida con la finalidad de medir en otras situaciones. Esta se evidencia al medir el electrocardiograma del paciente con respecto a un electrocardiograma que presenta un funcionamiento adecuado del corazón, es decir, se identifican qué elementos del ciclo cardiaco cambian (ondas, segmentos, intervalos).
- *Comparar y seriar* al nivel de actividad. Retoma la caracterización que hace Caballero (2012), donde la *comparación* es “el establecimiento de diferencias entre estados permitiendo así una caracterización desde el primer orden de variación (mayor/menor que, crece más que, decrece más que, etc.)” (Moreno-Durazo, 2018, p. 108) y la *seriación* es “el análisis de estados sucesivos, de donde emerge una caracterización hasta en un segundo orden de variación (crece cada vez más rápido/lento, su comportamiento es periódico, etc.)” (Moreno-Durazo, 2018, p. 108). La caracterización del comportamiento que tienen los elementos del ciclo cardiaco se realiza a través de la comparación y la seriación.
- *Estimar, secuenciar e inferir* al nivel de práctica socialmente compartida. *Estimar* está “asociada a la caracterización de comportamientos globales” (Caballero, 2012 citado en Moreno-Durazo, 2019, p.109). El cardiólogo estima “el comportamiento del corazón de forma aproximada, con base en su análisis de las

características de los elementos del ciclo cardiaco" (Moreno-Durazo, 2019, p. 109). *Secuenciar* es construir el orden de los diferentes comportamientos. *Inferir* es seleccionar aquella explicación sobre el comportamiento que seguirá la evolución de los estados con el menor margen de error, se relaciona a las decisiones que el cardiólogo debiera tomar para conducir al paciente hacia el estado saludable.

Por su parte Hernández-Zavaleta (2019) en la exploración de las nociones de cambio y variación en el estudio de fenómenos no lineales, en este caso actividades para estudiar el comportamiento del péndulo doble por estudiantes de bachillerato al modificar las longitudes de la barra inferior. El tránsito entre las prácticas en este trabajo está permeado por la pequeña variación y la práctica de clasificar es un aporte de este trabajo relativa al estudio de fenómenos no lineales. Hernández-Zavaleta (2019) propone como anidación de prácticas asociado a "lo errático" o aparición de eventos inesperados:

- *Comparar del tipo 1 y de tipo 2* a nivel de acción. Es establecer diferencias y equivalencias entre dos estados del sistema, estados locales (momentos particulares del movimiento) y estados globales (movimiento desde su condición de inicio hasta alcanzar el reposo nuevamente). Esto permite identificar y cuantificar el cambio.
- *Secuenciar* y *seriar* a nivel actividad. *Seriar* es articular varios estados consecutivos con el fin de encontrar una regularidad. Alude a la regularidad o explicación causal de una colección de comparaciones de estados sucesivos. *Secuenciar* es "dar un orden para los diferentes comportamientos que articulan las diferentes dinámicas que exhiben el fenómeno estudiado y se elabora una explicación sobre ese orden a nivel global de la dinámica" (Hernández-Zavaleta, 2019, p. 33).
- *Clasificar* a nivel de práctica socialmente compartida*. "Clasificar* promueve la construcción de conjeturas sobre tipos de

movimiento ante la aparición de eventos inesperados" (Hernández-Zavaleta, 2019, p. 114).

3.2 Aspectos metódicos

3.2.1 Método de delimitación del objeto de estudio

Covián (2005) y Moreno-Durazo (2018) son investigaciones socioepistemológicas que investigan el saber matemático en escenarios fuera del escolar analizan los datos mediante la triangulación de los mismos, por ejemplo, analiza lo que dicen que hacen, lo que narran que hacen y lo que observan que hacen para estudiar la construcción de viviendas en la vivienda tradicional Maya y el diagnóstico médico en enfermedades cardiovasculares respectivamente. Yojcom (2013) discurre, además, lo que han dicho otros que hacen. Un método similar, pero para la elección del documento de estudio fue el usado por esta investigación, considerando lo que se divulga que hacen, lo que narran que hacen, lo que escriben que hacen.

Figura 3.2 Método para la elección del texto de estudio

Lo que se divulga que hacen	• Fuente: Noticias difundidas por diferentes medios con modelos matemáticos para explicar la toma de decisiones antes los posibles escenarios de la Covid-19.
Lo que narran que hacen	• Fuente: Relatos y conferencias de modeladores de epidemias.
Lo que escriben que hacen	• Fuente: Artículos y handbooks con diferentes métodos para la modelación de epidemias y de difusión.

- Lo que se divulga que hacen

En el contexto de la epidemia COVID-19 realizamos una exploración sistemática de la página oficial de la Organización Mundial de la Salud, noticias difundidas por noticieros, el espacio de difusión para la epidemia en México a las 19:00 horas del centro de México y sitios oficiales de noticias.

- Lo que narran que hacen

Fueron consultados videos de Youtube que hablan sobre la modelación de epidemias matemáticos de la Universidad Autónoma de México (Epidemias y Matemáticas, 2020, 2020a).

- Lo que escriben que hacen

Comenzamos realizando una exploración libre en buscadores académicos considerando como palabras claves “modelación de epidemias” y su respectiva traducción al inglés. Esto conllevó a encontrar diversos tipos de métodos que modelan epidemias (Vidal y otros, 2020) basados en diferentes técnicas, sociales, de inteligencia artificial o matemáticas tanto estocásticos (Allen, 2008) cómo deterministas.

Todo esto conllevó delimitar el objeto de estudio, el análisis documental del modelo de Susceptible, Infectado y Recuperados (*SIR*) de Kermack y McKendrick (1927). En la modelación de epidemias se observó que se utilizan diversos métodos, tanto en su finalidad como en la precisión, cantidad de variables involucradas, en su naturaleza determinista o estocástica. Una característica encontrada en varios autores es que su método tenía bases en la producción de Kermack y McKendrick (1927). Además, el análisis de la historia de la disciplina sostiene que fue en este trabajo donde se encuentran las bases de posibilidad de la predicción en la epidemiología. A pesar de casi un siglo de su surgimiento muchos gobiernos usaron este modelo para el análisis del comportamiento de la epidemia y al segmentar la población según su interacción con la epidemia constituye una sencilla explicación para aquellos que no están tan familiarizados con la epidemiología.

3.2.3 Método de análisis de la modelación de epidemia

Bajo los mismos lentes teóricos diversas investigaciones (Mota, 2019; Giacoleti-Castillo, 2020) revelan los usos del conocimiento matemático en las comunidades de conocimiento matemático de la gente a través de su funcionamiento y forma en una situación específica (Cordero y Flores, 2007).

El ‘‘uso’’ es la función orgánica de la situación que se manifiesta por las ‘‘tareas’’ que componen la situación, y la forma del ‘‘uso’’ serán la clase de esas ‘‘tareas’’. Las tareas pueden ser actividades, acciones, ejecuciones y alternancias de dominios. Cuando la alternancia de tareas sucede se genera una nueva función orgánica que debatirá con las formas de los usos. A este acto de ‘‘uso’’ se le llamará resignificación [de usos]. (p. 13, énfasis añadido)

Ulloa y Arrieta (2009) fundamentan su investigación utilizando el término de Derrida deconstruir, un término referido a deshacer analíticamente los elementos que constituyen una estructura conceptual, como una metáfora para deshacer aquellos elementos que constituyen la práctica de modelación en comunidades profesionales (en su caso, una Comunidad Pesquera); es un medio para mostrar o encontrar la intencionalidad de una práctica constituida. Esta deconstrucción de la práctica de modelación la propone, en su caso, a través de nueve momentos que, en conjunto, constituyen una metodología específica para hacer una revisión socioepistemológica fuera de un ambiente escolar (citado en Montiel y Buendía, 2012).

En el caso de esta investigación se hará una problematización de la variación desde el Pensamiento y Lenguaje Variacional (Caballero, 2018; Moreno-Durazo, 2018; Hernández Zavaleta, 2019) del fenómeno de la propagación de epidemias y su modelación mediante el modelo

Susceptible, Infectados y Recuperados de Kermack y McKendrick (1927) a través de un análisis documental. Esta epistemología revelada será la base para la elaboración de diseños didácticos.

Problematización de la variación desde el Pensamiento y el Lenguaje Variacional

La problematización del saber, es “entender los usos y razón de ser del conocimiento matemático estudiado” (Reyes – Gasparini, 2016. p. 54). Problematizar la variación desde el Pensamiento y el Lenguaje Variacional será entender la variación y el cambio en el fenómeno de propagación de la epidemia y las prácticas para su modelación ¿Cuál es la dinámica subyacente al fenómeno? ¿Cómo se conforma un modelo? ¿cuáles son las variables de un modelo epidemiológico?, ¿qué cambia? ¿Cómo influye cada una de las variables?, ¿cómo cambia?, ¿cuánto influyen?, ¿cuánto cambia?, ¿cómo justifico el cambio? Para esto se hizo un análisis documental utilizando el modelo socioepistemológico para el estudio del cambio (Caballero, 2018; Moreno Durazo, 2018; Hernández Zavaleta, 2019) de conjunto con el análisis refinado de la acción (Cantoral, Montiel, Reyes-Gasparini, 2015) *¿qué hace? ¿cómo lo hace?*, para explicitar la acción directa del sujeto con el objeto y para identificar las herramientas que se lo permiten, y *¿para qué lo hace?*, buscando reconocer la actividad. La pregunta *¿por qué lo hace?*, la vamos a considerar para evidenciar la práctica socialmente compartida.

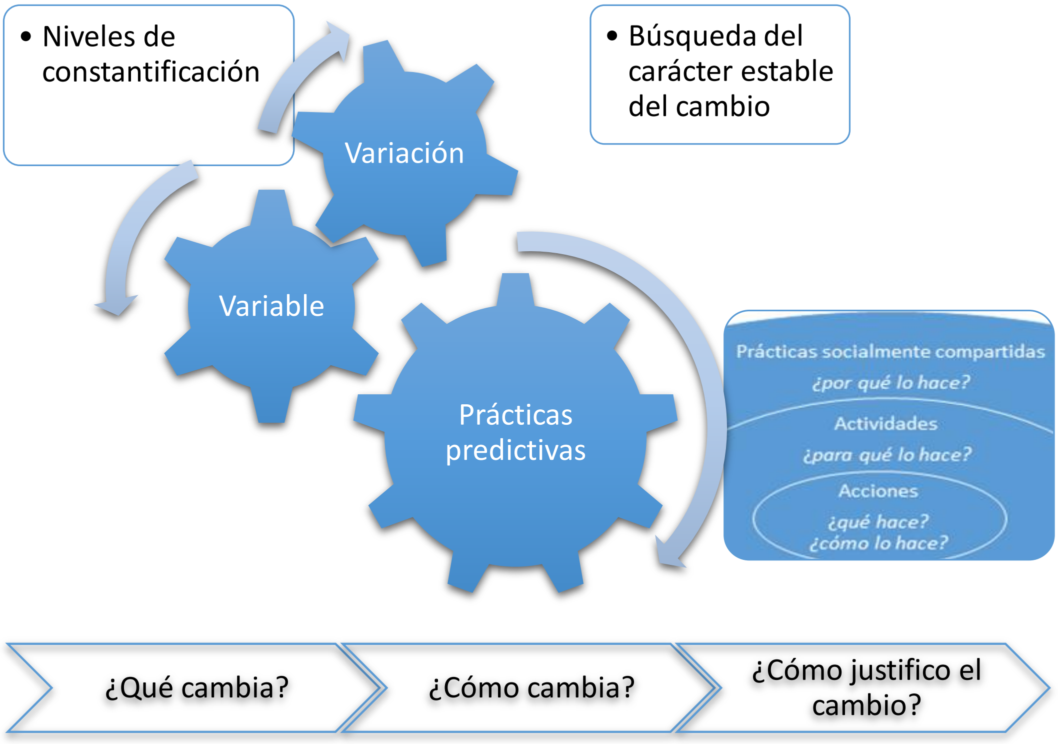
El modelo socioepistemológico para el estudio del cambio (Caballero, 2018; Moreno-Durazo, 2018; Hernández-Zavaleta, 2019) (Figura 3.3) ha sido desarrollado por diversas investigaciones dentro de la línea de Pensamiento y Lenguaje Variacional para estudiar situaciones dinámicas en las profesiones, en situaciones de movimiento y situaciones áulicas donde se exploran las nociones de cambio y variación.

En el modelo el *primer nivel de constantificación* se refiere a la acción de elegir las variables significativas para el estudio del sistema. Este nivel recurre a la pregunta ¿qué cambia?, relacionada con el engrane “variable”.

El *segundo nivel de constantificación* se refiere a reconocer las condiciones iniciales que le funcionen para determinar los estados estables del sistema, es decir, que le permitan una predicción del comportamiento mediante las variaciones de las variables elegidas en el primer nivel. En este nivel se ponen en juego las preguntas ¿cómo y cuánto cambia? (Hernández Zavaleta, 2019)

El *carácter estable del cambio* se refiere a la búsqueda de leyes que rigen el cambio mediante el establecimiento de relaciones entre las variables, estas relaciones se significan en leyes dadas por fórmulas o modelos matemáticos. El tránsito entre los engranes de variación y las prácticas predictivas está dado por ¿cómo justifico el cambio?

Figura 3.3 Método de problematización de la variación desde el Pensamiento y el Lenguaje Variacional



CAPÍTULO IV. ANÁLISIS DE LOS DATOS Y RESULTADOS

4.1 Análisis

En este apartado se presentará el análisis realizado al modelo de Susceptible, Infectados y Recuperados (Kermack y McKendrick, 1927) mediante el análisis documental y la problematización de la variación desde el Pensamiento y el Lenguaje Variacional: el modelo de análisis socioepistemológico de la variación y el cambio y la construcción social del conocimiento matemático en la conformación del modelo. Ello responde al objetivo 1 de la investigación: Conformar una epistemología de práctica a partir del análisis documental y el análisis variacional de un sistema complejo, en la dinámica en la propagación de una epidemia y las este caso, estudiar acciones, actividades y prácticas que se evidencian en su modelación mediante un modelo SIR; y responde las pregunta de investigación 1 y 2: ¿Cómo se caracteriza la dinámica de la propagación de una epidemia, a partir de un análisis documental y el modelo socioepistemológico de análisis de la variación y el cambio? ¿Qué acciones, actividades y prácticas se evidencian en la modelación de la dinámica de la propagación de epidemias mediante un modelo SIR? Esto constituirá un marco de referencia para la elaboración del diseño exploratorio.

Kermack y McKendrick (1927) obtienen una mayor comprensión que lo que se conocía hasta el momento de los efectos de los diversos factores que rigen la propagación de las epidemias contagiosas. El problema en su aspecto más general es difícil de tratar. Los autores se limitan al caso en que todos los miembros de la comunidad sean inicialmente igualmente susceptibles a la enfermedad y que la inmunidad completa se confiere por una sola infección. Se puede resumir de la siguiente manera:

> Una (o más) persona infectada se introduce en una comunidad de individuos, más o menos susceptibles a la enfermedad en cuestión.

> La enfermedad se propaga de los afectados a los no afectados por la infección de contacto. Cada persona infectada recorre el curso de su enfermedad, y finalmente es eliminada del número de los que están enfermos, por recuperación o por muerte. Las posibilidades de recuperación o muerte varían de un día para otro durante el curso de su enfermedad. Las posibilidades de que los afectados transmitan la infección a los no afectados dependen también de la fase de la enfermedad. A medida que la epidemia se extiende, el número de miembros no afectados de la comunidad se reduce. Como el curso de una epidemia es corto en comparación con la vida de un individuo, se puede considerar que la población permanece constante, excepto en la medida en que se modifica por las muertes debidas a la propia enfermedad epidémica. (Kermack y McKendrick, 1927, p. 700-701)

El debate se limitará al caso en que todos los miembros de la comunidad sean inicialmente igualmente susceptibles a la enfermedad, y se supondrá además que la inmunidad completa se confiere por una sola infección.

Primer nivel de constantificación ¿qué cambia? Las variables significativas para el estudio de la dinámica de la propagación de la epidemia son: Población susceptible, población infectada y población recuperada. También se realizarán suposiciones con algunas de estas variables con fines de no hacer más engorroso el cálculo y sin pérdida de generalidad. “El debate se limitará al caso en que todos los miembros de la comunidad sean inicialmente igualmente susceptibles a la enfermedad, y se supondrá además que la inmunidad completa se confiere por una sola infección” (Kermack y McKendrick, 1927, p. 3).

Segundo nivel de constantificación ¿cómo cambia? y ¿cuánto cambia? “La terminación de una epidemia puede ser el resultado de una relación particular entre la densidad de población y las tasas de infecciosidad, recuperación y mortalidad” y “por un ligero aumento de la tasa de infecciosidad, puede estallar una gran epidemia". (Kermack y McKendrick, 1927, p. 702)

Kermack y McKendrick (1927) consideran "primero las ecuaciones que surgen cuando el tiempo se divide en varios intervalos separados, y se supone que las infecciones sólo tienen lugar en el instante de pasar de un intervalo a otro" (p.702).

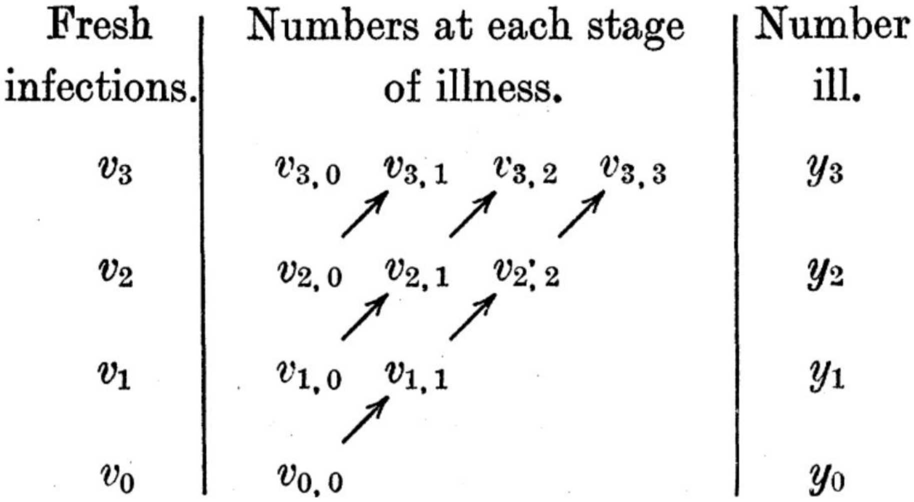
Aquí podemos ver *temporizar* al nivel acción, entendida cómo reconocer estados intermedios para analizar el proceso de variación de las variables en una unidad de tiempo considerada constante. Similar a esta acción es la descripción de Caballero (2018) para temporizar a la hora de crear un sistema de referencia.

$v_{t,\theta}$ será el número de individuos en el área del momento t que ha sido infectados para los intervalos θ. El número total de enfermos en ese intervalo t es $\sum_{\theta=0}^{t} v_{t,\theta}$ que denominan y_t. También se utiliza el símbolo v_t para denotar el número que realmente experimentan el proceso de infección durante la transición del intervalo $t-1$, al intervalo t. En general $v_{t,\theta} = v_t$ excepto en el origen, donde se asume un cierto número y_0 de infectados inicialmente.

$$v_{0,0} = v_0 + y_0 \ (1)$$

Todo el proceso se puede resumir en el siguiente esquema (figura 4.1:

Figura 4.1 Proceso de infección durante un período de tiempo



Fuente: Kermack y McKendrick (1927, p. 703)

Nota: Las flechas indican el curso seguido por cada individuo hasta que se recupera o muere.

¿Cómo explicamos la figura? Consideremos que la unidad de tiempo es un día, entonces tendremos que existe cierto número de infectados inicialmente y_0. Transcurrido un día de la epidemia en la población los infectados inicialmente tendrán un día de infectado $v_{1,1}$ y ese día habrá nuevos contagios $v_{1,0}$, en total habrá $v_{1,0} + v_{1,1} = y_1$ infectados el primer día. En el día 2 los infectados inicialmente tendrán dos días de contagiados $v_{2,2}$, los infectados el día 1 tendrán 1 día de infectado $v_{2,1}$ y ese día habrá nuevos contagios $v_{2,0}$, para un total de $v_{2,0} + v_{2,1} + v_{2,2} = y_2$ infectados para el día 2. En día 3 los infectados inicialmente tendrán 3 días de contagiados $v_{3,3}$, los infectados el día 2 tendrán 1 día de contagiados $v_{3,1}$, los infectados el día 1 tendrán 2 días de contagiados $v_{3,2}$ y habrá nuevos infectados ese día $v_{3,0}$, en total $v_{3,0} + v_{3,1} + v_{3,2} + v_{3,3} = y_3$. Es decir en $v_{t,\theta}$, t denota las unidades de tiempo de la epidemia que está transcurriendo y θ el número de unidades de tiempo que tiene un conjunto de individuos de haberse infectado.

Si ψ_θ denota la tasa de eliminación, es decir, es la suma de las tasas de recuperación y de mortalidad, entonces el número de personas que se eliminan de cada grupo de θ al final del intervalo t es $\psi_\theta v_{t,\theta}$, y esto es igual a $v_{t,\theta} - v_{t+1,\theta+1}$. Entonces,

$$\psi_\theta v_{t,\theta} = v_{t,\theta} - v_{t+1,\theta+1}$$

$$v_{t,\theta} = \frac{v_{t,\theta} - v_{t+1,\theta+1}}{\psi_\theta}$$

$$v_{t,\theta} = v_{t-1,\theta-1}(1 - \psi_{\theta-1})$$

$$v_{t,\theta} = v_{t-2,\theta-2}(1 - \psi_{\theta-1})(1 - \psi_{\theta-2})$$

$$v_{t,\theta} = v_{t-\theta,0} B_\theta \ (2)$$

donde B_θ es el producto de $(1 - \psi_{\theta-1})(1 - \psi_{\theta-2}) \ldots (1 - \psi_0)$.

y_t debe ser igual a $x_t \sum_1^t \phi_\theta v_{t,\theta}$ donde x_t denota el número de individuos aún no afectados, y ϕ_θ es la tasa de infectividad al momento θ. "Esto es así porque la probabilidad de una infección es proporcional al número de infectados en una parte, y al número de no infectados todavía en la otra" (Kermack y McKendrick, 1927, p. 703). Entonces,

$$x_t = N - \sum_1^t v_{t,\theta}$$

$$x_t = N - \sum_1^t v_t - y_0 \ (3)$$

donde N es la densidad de la población inicial.

$$x_t + y_t + z_t = N \ (4)$$

$$v_t = x_t \sum_1^t \phi_\theta v_{t,\theta} = x_t \sum_1^t \phi_\theta B_\theta v_{t-\theta,0} \ \text{(por 2)}$$

$$= x_t(\textstyle\sum_1^t \phi_\theta B_\theta (v_{t-\theta} + y_0)) = x_t(\sum_1^t \phi_\theta B_\theta v_{t-\theta} + \phi_t B_t y_0)$$

Si denotamos $\phi_\theta B_\theta$ por A_θ, entonces es igual a

$$= x_t(\textstyle\sum_1^t A_\theta v_{t-\theta} + A_t y_0) \ \text{(por 1) (5)}$$

También

$$y_t = \sum_{0}^{t} v_{t,\theta} = \sum_{0}^{t} B_\theta v_{t-\theta} + B_t y_0 \text{ (6)}$$

Por definición

$$-v_t = x_{t+1} - x_t \text{ (7)}$$

Es decir, la variación en los susceptibles entre un momento y el anterior es igual al número de nuevos infectados en el momento.

Por tanto (5) puede ser escrita de la siguiente manera:

$$x_t - x_{t-1} = x_t \left(\sum_{1}^{t} A_\theta v_{t-\theta} + A_t y_0 \right) \text{(8)}$$

También $z_{t+1} - z_t$ es el número de personas que se retiran al final del intervalo de tiempo t, y esto equivale a $\sum_1^t \psi_\theta v_{t,\theta}$ es decir, a $\sum_1^t \psi_\theta B_\theta v_{t-\theta} + \psi_t B_t y_0$, por lo que escribiendo C_θ para $\psi_\theta B_\theta$ tenemos:

$$z_t - z_{t-1} = \sum_{1}^{t} C_\theta v_{t-\theta} + C_t y_0 \text{ (9)}$$

Por tanto, al escribir la variación del número de infectados entre un momento y el anterior este queda:

$$y_t - y_{t-1} = x_t \left(\sum_{1}^{t} A_\theta v_{t-\theta} + A_t y_0 \right) - \sum_{1}^{t} C_\theta v_{t-\theta} + C_t y_0 \text{ (por 4) (10)}$$

Hasta aquí podemos ver cómo se desarrolla *parametrizar* a nivel de acción, entendido cómo encontrar los valores que rigen la variación en el comportamiento del sistema. Además, una acción entrelazada a temporizar y *parametrizar* es *comparar*. *Comparar* se denomina al establecer diferencias y equivalencias entre dos momentos en un mismo estado para identificar y cuantificar el cambio.

A continuación, se expresa *seriar* a nivel de actividad, al articular varios intervalos de tiempo consecutivos con el fin de encontrar una regularidad. Se aumentan las subdivisiones del tiempo de manera que cada intervalo se haga muy pequeño, entonces en el límite las ecuaciones anteriores $(4, 6, 7, 8, 9)$ se convierten en:

$$x_t + y_t + z_t = N \ (11)$$

$$-v_t = x_{t+1} - x_t \ (12)$$

$$\frac{dx_t}{dt} = -x_t \left[\int_0^t A_\theta v_{t-\theta} d\theta + A_t y_0\right] \ (13)$$

$$\frac{dz_t}{dt} = \int_0^t C_\theta v_{t-\theta} \, d\theta + C_t y_0 \ (14)$$

$$y_t = \int_0^t B_\theta v_{t-\theta} d\theta + B_t y_0 \ (15)$$

donde $B_\theta = e^{-\int_0^\theta \psi(a)da}$, $A_\theta = \phi_\theta B_\theta$, y $C_\theta = \psi_\theta B_\theta$

"La (11) es una consecuencia necesaria de la (13), (14) y (15). Las cuatro relaciones independientes (12), (13), (14) y (15) determinan las cuatro funciones x, y, z y v" (Kermack y McKendrick, 1927, p. 704-705).

Por la ecuación (13), dejando caer el sufijo t excepto cuando sea necesario en el análisis,

$$\frac{dx}{dt} = -x\left[\int_0^t A_\theta v_{t-\theta} + A_t y_0\right] = -x\left[\int_0^t A_{t-\theta} v_\theta + A_t y_0\right] = x\left[\int_0^t A_{t-\theta} \frac{dx}{d\theta} - A_t y_0\right]$$

Por tanto

$$\frac{d \log x}{dt} = A_{t-\theta} x_\theta \Big|_0^t - \int_0^t x_\theta \frac{dA_{t-\theta}}{d\theta} d\theta - A_t y_0$$

$$= A_0 x_t - A_t x_0 + \int_0^t x_\theta A'_{t-\theta} d\theta - A_t y_0$$

donde $A'_{t-\theta} = \frac{dA_{t-\theta}}{d(t-\theta)} = -\frac{dA_{t-\theta}}{d\theta}$.

Pero $A_0 = \phi_0 B_0 = \phi_0 = 0$, ya que asumimos que un individuo al momento de infectarse no puede transmitir la infección.

$$\frac{d\log x}{dt} = -A_t(x_0 + y_0) + \int_0^t x_\theta A'_{t-\theta} d\theta = -A_t N + \int_0^t A'_\theta x_{t-\theta} d\theta \quad (16)$$

No hemos sido capaces de resolver esta ecuación de tal manera que dé x en términos de t como una función explícita. Sin embargo, puede señalarse que se trata de una ecuación integral similar a la ecuación de Volterra

$$f(t) = \phi(t) + \int_0^t N(t,\theta)\phi(t) d\theta$$

excepto en lugar de $f(x)$ tenemos $\frac{d\log x}{dt}$.

Si se considera una ecuación de la forma

$$\frac{d\log x}{dt} = A_t + \lambda \int_0^t N(t,\theta) x(\theta) d\theta$$

de la cual la ecuación anterior es un caso particular, parecería que se puede llegar a una solución mediante una serie de aproximaciones sucesivas de manera similar al método utilizado para resolver la ecuación de Volterra.

Si se escribe:

$$x = f_0(t) + \lambda f_1(t) + \lambda^2 f_2(t) + etc.$$

Al sustituir esta expresión en la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = x\left[A_t + \lambda \int_0^t N(t,\theta) x(\theta) d\theta\right]$$

e igualando los coeficientes de las potencias de λ, obtenemos

$$\frac{d}{dt}f_n(t) = f_n(t)A_t + f_{n-1}(t)\int_0^t N(t,\theta)f_0(\theta)d\theta + f_{n-2}(t)\int_0^t N(t,\theta)f_1(\theta)d\theta$$
$$+ \cdots + f_0(t)\int_0^t N(t,\theta)f_{n-1}(\theta)d\theta = L_{n-1}(t)$$

Esta es una ecuación diferencial para $f_n(t)$ de la cual la solución es

$$f_n(t)e^{-\int_0^t A_t dt} = \int_0^t L_{n-1}(t)e^{-\int_0^t A_t dt}dt + constante$$

donde $L_{n-1}(t)$ es una función de f.

También $f_n(0)$ es cero ($n > 0$), ya que las condiciones iniciales son independientes de λ. Por lo tanto, las constantes de integración son todas cero excepto $f_0(0)$.

En el caso de esta función tenemos

$$\frac{df_0(t)}{dt} = f_0(t)A_t$$

de donde

$$f_0(t) = f_0(0)e^{\int_0^t A_t dt}$$

de manera que $f_0(0) = x_0$

Por lo tanto, tenemos para la solución de la ecuación integral,

$$x = x_0E_t + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n E_t\int_0^t \frac{L_{n-1}(t)}{E_t}dt = E_t\left[x_0 + \sum_1^{\infty}\lambda^n\int_0^t \frac{L_{n-1}(t)}{E_t}dt\right]$$

donde E_t se escribe como $exp.\int_0^t A_t dt$; y cuando $\lambda = 1$

$$x = E_t \left[x_0 + \sum_1^{\infty} \int_0^t \frac{L_{n-1}(t)}{E_t} dt \right] \ (17)$$

Volviendo a la ecuación (16) y considerándola de forma más general

$$\frac{d \log x}{dt} = A_t + \int_0^t Q_{t-\theta} x_\theta d\theta$$

Al multiplicar ambos lados por e^{-zt} donde la parte real de z es positiva, e integrando con respecto a t entre los límites cero e infinito, se tiene que

$$\int_0^{\infty} e^{-zt} \frac{d \log x}{dt} dt = \int_0^{\infty} e^{-zt} A_t dt + \int_0^{\infty} e^{-zt} \int_0^t Q_{t-\theta} x_\theta d\theta \, dt$$

por lo tanto

$$-\log x_\theta + \int_0^{\infty} z e^{-zt} \log x \, dt = F(z) + \int_0^{\infty} e^{-z\theta} d\theta \int_0^{\infty} e^{-zt} x_t dt$$

$$= F(z) + F_1(z) \int_0^{\infty} e^{-zt} x_t dt$$

donde $F(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} A_t dt$, y $F_1(z) \int_0^{\infty} e^{-zt} Q_\theta d\theta$, $e^{-zt} \log x$ tiende a cero ya que t tiende al infinito y x nunca excede el valor inicial $N - y_0$.

Luego

$$\int_0^{\infty} e^{-zt} (z \log x - F_1(z) x) dt = F(z) + \log x_0 \ \ (18)$$

Esta es una ecuación de la forma

$$\int_0^{\infty} \phi(x, z) \psi(z, t) dt = \chi(z) \ (19)$$

donde las funciones ϕ, ψ y χ son conocidas, y x es una función de t. z puede tener cualquier valor siempre que su parte real sea positiva. De ello se deduce que la solución formal obtenida en el párrafo anterior, la ecuación (17), debe satisfacer esta ecuación (19). Si $\phi(x,z)$ no hubiera contenido z explícitamente la ecuación (19) sería del primer tipo de Fredholm. Desde este punto de vista, la ecuación anterior puede considerarse como una generalización de la ecuación de Fredholm del primer tipo.

Al integrar la ecuación (13) con respecto a t, entre los límites cero e infinito.

Se tiene que

$$-\int_0^\infty \frac{d\log x}{dt}dt = \int_0^\infty \frac{d\log x}{dt}\int_0^t A_\theta v_{t-\theta}\, d\theta dt + y_0\int_0^\infty A_t dt$$

por lo tanto

$$\log\frac{x_0}{x_\infty} = \int_0^\infty A_\theta d\theta \int_0^\infty v_t dt + y_0\int_0^\infty A_t dt$$

Si se sustituye A para $\int_0^\infty A_t dt$, y se usa la relación $\int_0^\infty v_t dt = x_0 - x_\infty$ se tiene:

$$\log\frac{x_0}{x_\infty} = A(x_0 - x_\infty) + Ay_0 = A(N - x_\infty)$$

Introduciendo el valor $p = \frac{N-x_\infty}{N}$, para que p sea la proporción de la población que se infecta durante la epidemia.

Entonces $x_\infty = N(1-p)$

y

$$-\log\frac{1-p}{1-\frac{y_0}{N}} = AN_p \ (20)$$

Esta ecuación determina el tamaño de la epidemia en términos de A, N, y y_0.

Al tratar la ecuación (15) de manera similar, se obtiene la relación:

$$\int_0^\infty y_t \, dt = Np \int_0^\infty B_\theta \, d\theta$$

Así, $\int_0^\infty B_\theta d\theta$ es la duración media de la enfermedad en un individuo.

> Los datos de observación se dan en términos de x, y, y z, aunque en determinados casos la información puede ser incompleta. Puede surgir el problema de obtener A_θ y B_θ como funciones de θ y, por consiguiente, de adquirir conocimientos sobre ϕ_θ y ψ_θ, las tasas de infectividad y de eliminación. (Kermack y McKendrick, 1927, p. 708)

En la ecuación (13) v_t y $\frac{d \log x}{dt}$ son funciones conocidas de t y del tipo discutido por Fock (1924 citado en Kermack y McKendrick, 1927). Por tanto, se puede aplicar su método para obtener la solución de esta y otras ecuaciones similares.

Por la ecuación (13)

$$-\int_0^\infty e^{-zt} \frac{d \log x}{dt} dt = \int_0^\infty e^{-zt} \int_0^t A_\theta v_{t-\theta} \, d\theta dt + y_0 \int_0^\infty e^{-zt} A_t dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-zt} A_\theta d\theta \int_0^\infty e^{-zt} v_t \, dt + y_0 \int_0^\infty e^{-zt} A_t dt$$

por lo tanto

$$\int_0^\infty e^{-zt} A_t dt = \frac{-\int_0^\infty e^{-zt} \frac{d \log x}{dt} dt}{y_0 + \int_0^\infty e^{-zt} v_t \, dt} \quad (21)$$

si se denota esta última expresión con $F_2(z)$, entonces

$$A_\theta = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{-zt}\,F_2(z)dz\ (21A)$$

Por la ecuación (15)

$$\int_0^\infty e^{-zt}y_t dt = \int_0^\infty e^{-zt}\int_0^t B_\theta v_{t-\theta} d\theta\, dt + y_0\int_0^\infty e^{-zt}B_t dt$$

de donde

$$\int_0^\infty e^{-zt}B_t dt = \frac{\int_0^\infty e^{-zt}y_t dt}{y_0 + \int_0^\infty v_t\, dt}\ (22)$$

si se denota esta última expresión con $F_3(z)$, entonces

$$B_\theta = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{-zt}\,F_3(z)dz\ (22A)$$

Las ecuaciones $(21A)$ y $(22A)$ dan A_θ y B_θ en términos de los datos observables.

Si $F_2(z)$ y $F_3(z)$ pueden ser expresadas como funciones racionales de z, entonces en lugar de la transformación de Laplace se puede usar la solución más simple.

"Durante las primeras etapas de una epidemia en una población numerosa, el número de personas no afectadas puede considerarse constante, ya que cualquier alteración es pequeña en comparación con el número total" (Kermack y McKendrick, 1927, p. 709).

Dada esta premisa la ecuación (13) pasa a ser

$$-\frac{dx_t}{dt} = v_t = N\left[\int_0^\infty A_\theta v_{t-\theta}\, d\theta + A_t y_0\right]$$

donde N es la población constante.

Usando el método de Fock

$$\int_0^\infty e^{-zt} v_t dt = \frac{N y_0 \int_0^\infty e^{-zt} A_t dt}{1 - N \int_0^\infty e^{-zt} A_t dt} \ (23)$$

si se denota con $F_4(z)$.

$$v_t = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{-zt} F_4(z) dz \ (23A)$$

Haciendo uso de la ecuación (15) se tiene algo similar

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-zt} y_t dt &= \int_0^\infty e^{-zt} \int_0^t B_\theta v_{t-\theta} d\theta \, dt + y_0 \int_0^\infty e^{-zt} B_t dt \\
&= \int_0^\infty e^{-zt} v_t dt \int_0^\infty e^{-zt} B_\theta d\theta + y_0 \int_0^\infty e^{-zt} B_t dt \\
&= \frac{N y_0 \int_0^\infty e^{-zt} A_t dt \int_0^\infty e^{-zt} B_t dt}{1 - N \int_0^\infty e^{-zt} A_t dt} + y_0 \int_0^\infty e^{-zt} B_t dt \\
&= \frac{y_0 \int_0^\infty e^{-zt} B_t dt}{1 - N \int_0^\infty e^{-zt} A_t dt} \ (24)
\end{aligned}$$

llamándola $F_5(z)$.

$$y_t = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{-zt} F_5(z) dz \ (24A)$$

Se puede encontrar la ecuación integral para y_t de la siguiente manera:

$$y_t = \int_0^t B_{t-\theta} v_\theta d\theta + B_t y_0 = N \int_0^t B_{t-\theta} \left(\int_0^\theta A_{\theta-z} v_z \, dz + A_\theta y_0 \right) d\theta + B_t y_0$$

$$= N \int_0^t B_{t-\theta} \int_0^\theta A_{\theta-z} v_z \, dz d\theta + N y_0 \int_0^t B_{t-\theta} A_\theta d\theta + B_t y_0$$

$$= N \int_0^t A_{t-\theta} \int_0^\theta B_{\theta-z} v_z \, dz d\theta + N y_0 \int_0^t A_{t-\theta} B_\theta d\theta + B_t y_0$$

$$= N \int_0^t A_{t-\theta} (y_\theta - B_\theta y_0 + -B_\theta y_0) d\theta + B_t y_0$$

$$= N \int_0^t A_{t-\theta} y_\theta d\theta + B_t y_0 \ (25)$$

Resolviendo esto directamente obtenemos la solución (24).

Si la ecuación para $v_{t,0}$ se expresa como:

$$v_{t,0} = \int_0^t A_\theta v_{t-\theta,0} d\theta$$

y se obtiene la solución:

$$v_{t,0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{zt} \frac{N_0}{1 - \int_0^\infty e^{-z\theta} A_\theta d\theta} \cdot dz$$

Se observa que $v_{t,0}$ tenía una singularidad en el punto $t = 0$.

En la presente discusión consideramos que las infecciones originales ocurren en las ecuaciones que definen la epidemia propiamente dicha. Así, $v_{t,0} = v_t$ excepto en el corto intervalo de tiempo 0 a ε, y durante este intervalo la ecuación integral no se sostiene, sino que $\int_0^\varepsilon v_{t,0} dt$ es igual a y_0. (Kermack y McKendrick, 1927, p.711)

Entonces

$$v_{t,0} = v_{t,0} - v_{\varepsilon,0} + v_{\varepsilon,0} = \int_{\varepsilon}^{t} A_\theta v_{t-\theta,0} d\theta + \int_{0}^{\varepsilon} A_\theta v_{t-\theta,0} d\theta$$

$$= \int_{\varepsilon}^{t} A_\theta v_{t-\theta,0} d\theta + A_{t-\varepsilon'} \int_{0}^{\varepsilon} v_{\theta,0} d\theta\, , donde\ 0 < \varepsilon' < \varepsilon$$

$$= \int_{\varepsilon}^{t} A_\theta v_{t-\theta,0} d\theta + A_t y_0$$

Así, la ecuación integral dada anteriormente para $v_{t,0}$ implica la ecuación dada ahora para v_t.

La solución dada anteriormente puede ser escrita en la forma:

$$v_{t,0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{zt} F(z) dz$$

donde

$F(z) = \frac{y_0}{1-\int_0^\infty e^{-z\theta} A_\theta d\theta}$: denotémoslo como $\frac{y_0}{1-A}$.

En la nueva forma

$$F_4(z) = -y_0 + \frac{y_0}{1-A} = \frac{Ay_0}{1-A}$$

que es la misma que en la ecuación (23) cuando se observa que en la discusión anterior se tomó la función A para incluir a N. Ahora bien, si v_t no tiene singularidades, la solución laplaciana de $F_4(z)$ es una función sin singularidades y por lo tanto el laplaciano de y_0 corresponde a la singularidad. Es fácil ver que la solución laplaciana $\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{zt}(-y_0)dz$ corresponde a una función $\phi(t)$ tal que $\int_0^\infty e^{-zt}\phi(t)dt = -y_0$. Ahora bien, si $\phi(t)$ es cero desde ε a ∞, y se vuelve infinita en el origen de tal manera que $\int_0^\varepsilon \phi(t)dt$ tiende a y_0 como ε tiende a cero, entonces está claro que la ecuación anterior será cierta. Y así la expresión $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{zt}(-y_0)dz$ puede ser tomada como representación de una función con exactamente las mismas propiedades que $v_t - v_{t,0}$. Es decir, es cero desde ε a ∞ y $\int_0^{\varepsilon}(v_t - v_{t,0})dt = -y_0$, cuando ε se vuelve muy pequeño.

> Estos valores de v_t y y_t constituyen la solución general del problema en el caso de que se considere que N permanece constante, si se dan A_θ y B_θ, o ϕ_θ y ψ_θ. (Kermack y McKendrick, 1927, p.711)

Al obtener los valores A_θ y B_θ a partir de los valores de v_t y y_t, se tiene que

$$A_\theta = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{zt}\frac{\int_0^\infty e^{-zt}v_t dt}{Ny_0 - N\int_0^\infty e^{-zt}v_t dt}dz \quad (26)$$

y

$$B_\theta = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{zt}\frac{\int_0^\infty e^{-zt}y_t dt}{y_0 + \int_0^\infty e^{-zt}v_t dt}dz \quad (27)$$

Las soluciones (21, 22, 23, 24, 26, 27) dependen de una ecuación del tipo $\int_0^\infty e^{-zt}\phi(t)dt = F(z)$ cuya solución puede encontrarse mediante el uso de la Transformada de Laplace.

Aquí vemos la práctica socialmente compartida de *clasificar* muy similar a la que se desarrolla en los cursos de ecuaciones diferenciales usualmente. A partir de la ecuación diferencial se clasifica para encontrar un método *ad hoc* para su solución.

Caso en que las tazas sean constantes

A partir del caso en que ϕ y ψ son constantes κ y l respectivamente se puede obtener información sobre el proceso por el cual las epidemias en poblaciones limitadas siguen determinado curso hasta su extinción.

En este caso las ecuaciones son:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\kappa xy\\ \frac{dy}{dt} &= \kappa xy - ly\\ \frac{dz}{dt} &= ly\end{aligned}\right\}(29)$$

se sabe que $x + y + z = N$.

Por tanto

$$\frac{dz}{dt} = l(N - x - z)$$

y $\frac{dx}{dz} = -\frac{\kappa}{l}x$, de donde $\log\frac{x_0}{x} = \frac{\kappa}{l}z$, ya que se asume que $z_0 = 0$, es decir al inicio de la epidemia no existe ninguna persona recuperada.

Luego

$$\frac{dz}{dt} = l\left(N - x_0 e^{-\frac{\kappa}{l}z} - z\right)$$

Para obtener z como una función explícita de t, se puede expandir el término exponencial en potencias de $\frac{\kappa}{l}z$, y asumir que $\frac{\kappa}{l}z$ es pequeño comparado con la unidad.

Por lo tanto,

$$\frac{dz}{dt} = l\left\{N - x_0 + \left(\frac{\kappa}{l}x_0 - 1\right)z - \frac{x_0\kappa^2 z^2}{2l^2}\right\}$$

“Pero $N - x_0 = y_0$, donde y_0 es pequeño. Es por esta razón que debemos tomar en consideración el tercer término en z^2, ya que aunque $\frac{\kappa}{l}z$ es pequeño comparado con la unidad, su cuadrado puede no ser pequeño comparado con $\left(\frac{\kappa}{l}x_0 - 1\right)z$” (Kermack y McKendrick, 1927, p. 713).

La solución es

$$z = \frac{l^2}{\kappa^2 x_0}\left\{\frac{\kappa}{l}x_0 - 1 + \sqrt{-q}\tanh\left(\frac{\sqrt{-q}}{2}lt - \phi\right)\right\}$$

donde

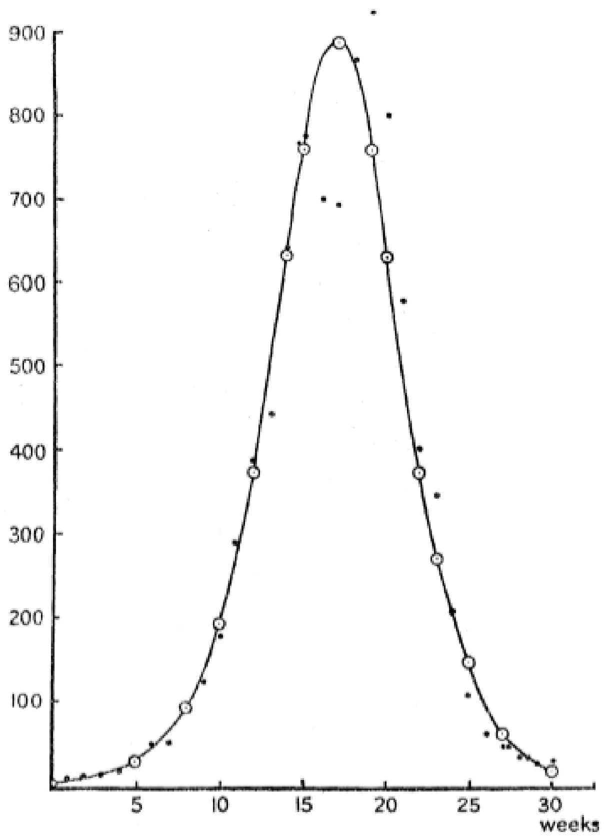
$$\phi = \tanh^{-1}\frac{\frac{\kappa}{l}x_0 - 1}{\sqrt{-q}}$$

y

$$\sqrt{-q} = \left\{\left(\frac{\kappa}{l}x_0 - 1\right)^2 + 2x_0 y_0 \frac{\kappa^2}{l^2}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

Figura 4.2 Cifras de muertes por la plaga en la isla de Bombay durante el período del 17 de diciembre de 1905 al 21 de julio de 1906.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{l^3}{2x_0\kappa^2}\sqrt{-q}\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{\sqrt{-q}}{2}lt - \phi\right). \qquad (31)$$



Fuente: Tomado de Kermack y McKendrick (1927, p. 714)

La ordenada representa el número de muertes por semana, y la abscisa denota el tiempo en semanas. "Dado que al menos el 80% al 90% de los casos notificados terminan fatalmente, se puede considerar que la ordenanza representa aproximadamente $\frac{dz}{dt}$ en función de t. Es decir, debido a la alta letalidad de la enfermedad, un alto número de las personas infectadas la forma en que terminan la enfermedad es fallecida en lugar de recuperada. La curva calculada se obtiene de la fórmula

$$\frac{dz}{dt} = 890\,\mathrm{sech}^2(0 \cdot 2t - 3 \cdot 4)$$

Debido a que este es un modelo al cual se arriba mediante supuestos la ecuación numérica sólo puede ser una aproximación a las observaciones reales. Por tanto, se manifiesta la práctica socialmente compartida de *estimar* caracterizada como anticipar comportamientos globales del fenómeno.

Al final de la epidemia

$$z = \frac{2l}{\kappa x_0}\left(x_0 - \frac{\kappa}{l}\right)$$

y_0 ha sido descuidado número inicial de casos infectados suele ser pequeño en comparación con x_0. Cuando x_0, que es idéntico a N si y_0 es descuidado, es igual a l/κ, no puede ocurrir ninguna epidemia. Sin embargo, si N excede ligeramente este valor, entonces se producirá epidemia, y si escribimos $N = \frac{l}{\kappa} + n$, su magnitud será $2\frac{l}{\kappa}\frac{n}{N}$ o $2n - \frac{2n^2}{N}$.

> La densidad de población $N_0 = \frac{l}{\kappa}$ puede considerarse como la densidad umbral de la población para una epidemia de estas características. No puede producirse ninguna epidemia a menos que la densidad de población supere este valor, y si supera el valor umbral, el tamaño de la epidemia será, con una primera aproximación, igual a $2n$, es decir, el doble del exceso (si n es pequeño en comparación con N). Y así, al final de la epidemia la

densidad de población estará tan por debajo de la densidad del umbral como lo estaba inicialmente por encima.

A primera vista parece peculiar que en una población tan homogénea la epidemia aumente en un primer momento y luego disminuya. La razón de este comportamiento se aprecia fácilmente cuando se centra la atención en las condiciones que se dan cuando la epidemia está en su máximo. Por la ecuación (29) esto ocurre cuando $\frac{dy}{dt} = 0$, es decir, cuando $x = \frac{l}{\kappa}$, o cuando la población no afectada se ha reducido a su valor umbral. Una vez que la población está por debajo de este valor, cualquier individuo infectado en particular tiene más posibilidades de ser eliminado por recuperación o por muerte que de convertirse en una fuente de infección adicional, y así la epidemia comienza a disminuir. De hecho, como se ha señalado anteriormente, en las pequeñas epidemias la curva de y es simétrica respecto al máximo. Esta simetría existe para y en función de t, y por consiguiente también para dz/dt, es decir, la curva de eliminación por recuperación o por muerte. Por otra parte, no se obtiene tal simetría en la curva de incidencia de los casos, es decir, de $-\frac{dx}{dt} = \kappa xy$. Esto está claro ya que y es simétrica y $x = e^{-\frac{l^2}{\kappa}\int y dt}$. (Kermack y McKendrick, 1927, p. 715-716)

Caso general

Cuando la población es limitada y las tasas características son constantes, existe un valor umbral, de modo que no puede surgir ninguna epidemia si la densidad es inferior a ese valor, mientras que, si la densidad es superior, el tamaño de la epidemia es igual al doble del exceso, siempre que el exceso sea una pequeña fracción de la densidad umbral. Es importante preguntar hasta qué punto un resultado similar es cierto en el caso general de que las tasas características varíen durante el curso de la enfermedad. (Kermack y McKendrick, 1927, p. 716)

En

$$-\log\frac{1-p}{1-\frac{y_0}{N}} = AN_p \ (20)$$

p es la proporción de la población infectada durante la epidemia, y

$$A = \int_0^\infty A_\theta d\theta = \int_0^\infty \phi_\theta e^{\int_0^\theta \psi_a da} d\theta$$

Si se asume que el y_0/N es pequeño comparado con la unidad, entonces, puede ser descuidado.

Cuando $p > 0$, $-\log(1-p) > p$, por lo tanto $ApN > p$ y en consecuencia $AN > 1$.

Es decir, para que ocurra una epidemia ($p > 0$), $N > 1/A$. Escribiendo $N_0 = 1/A$ y $N = N_0 + n$ se tiene que

$$\frac{p}{2} + \frac{p^2}{3} + \cdots = \frac{n}{N_0}$$

o despreciando las potencias de p superiores a la primera

$$pN = 2n\frac{N}{N_0} = 2n\left(1 + \frac{n}{N_0}\right) = 2n$$

> Una dificultad ocurre debido al hecho de que y_0 no puede tener un valor menor que la unidad, y por lo tanto y_0/N no puede hacerse indefinidamente pequeño. De hecho, parece que en determinadas condiciones podrían producirse bastantes casos en el valor umbral, pero serían casos esporádicos y no constituirían una epidemia en el verdadero sentido. La dificultad puede superarse si permitimos que la unidad de superficie aumente. Si la aumentamos κ veces, entonces N_0 se convierte en κN_0 y A se convierte en A/κ, de modo que AN_0 no cambia. Por otro lado y_0/N_0 se convierte en $y_0/\kappa N_0$, y aunque y_0 nunca puede ser menos que la unidad, κ puede hacerse indefinidamente grande, y por lo tanto $y_0/\kappa N_0$ puede ser finalmente

despreciado en comparación con la unidad. (Kermack y McKendrick, 1927, p. 717)

Como en el caso en el que las tasas eran constantes, existe una población umbral cuya densidad es igual a $1/A$, y cuando se produce una epidemia en una población de densidad ligeramente superior, su tamaño es aproximadamente el doble del exceso.

$$A = \int_0^\infty \kappa e^{-\int_0^\theta l da} d\theta = \kappa \int_0^\infty e^{-l\theta} d\theta = \frac{\kappa}{l}$$

En la ecuación (20), p nunca puede ser igual a la unidad, siempre que N sea finito, de modo que una epidemia nunca puede afectar a todos los miembros susceptibles de una población finita. Por supuesto, hay que reconocer que cuando la población se ha reducido a pequeños números las ecuaciones aquí dadas no se sostienen estrictamente. Además, con relación a las variaciones de la tasa de infectividad, al aumentar la infectividad de ϕ_θ a $\alpha\phi_\theta$ aumenta A a αA, y en consecuencia el valor umbral N_0 se reduce a N_0/α.

$\alpha = 1 + \beta$, donde β es muy pequeño, de modo que β es el aumento fraccionario de la infectividad.

El nuevo umbral es ahora $\frac{N_0}{1+\beta} = N_0 - \beta N_0$. Por consiguiente , el exceso es βN_0, se espera una epidemia del tamaño de $2\beta N_0$.

> Así pues, <u>un pequeño aumento de la tasa de infecciosidad puede causar una epidemia muy marcada</u> en una población que, de otro modo, estaría libre de la epidemia, siempre que la población se encontrara previamente en su valor umbral. Por otra parte, si la densidad real estuviera por debajo del umbral, no podría producirse ninguna epidemia hasta que la infecciosidad hubiera aumentado hasta tal punto que el valor del umbral fuera inferior a la densidad real. (Kermack y McKendrick, 1927, p. 718, énfasis añadido)

Aquí se infiere la práctica socialmente compartida *clasificar* en la búsqueda de los patrones de interacción. Con similar caracterización a la que propone Hernández Zavaleta (2019). Tiene que ver con ¿qué cambia?, es decir, las variables significativas para el estudio de la dinámica del fenómeno estudiado, en este caso, la propagación de la epidemia; población susceptible, población infectada y población recuperada y realizar suposiciones con respecto a algunas variables. Además, ¿cómo cambian estás variables? y ¿cuánto cambian?, para esto se necesita describir las situaciones iniciales del sistema: la densidad de población; y los parámetros: las tasas de infecciosidad y eliminación (taza de recuperación y taza de mortalidad); en dependencia del patrón de interacción de esas condiciones iniciales y las tazas, existirá uno u otro comportamiento del fenómeno, lo cual se traduce en este caso en uno u otro escenario de la epidemia.

> Estos resultados explican en cierta medida la frecuencia de la aparición de epidemias en poblaciones cuya densidad ha aumentado por la importación de individuos no afectados. También ponen de relieve el papel que desempeñan las epidemias contagiosas en la regulación de las densidades de población. Es muy posible que en muchas regiones del mundo la densidad real de una población no sea muy diferente de la densidad umbral con respecto a alguna enfermedad contagiosa dominante. Cualquier aumento por encima de este valor umbral conduciría a un estado de riesgo y de inestabilidad. Cuanto más tiempo se retenga la epidemia, mayor será la catástrofe, siempre y cuando la población siga aumentando y la densidad umbral no cambie. Una demora tan prolongada puede conducir a la extinción casi completa de la población. (Kermack y McKendrick, 1927, p. 718)

4.2 Resultados del análisis

La propuesta que se conforma en este trabajo para la enseñanza y aprendizajes de las ecuaciones diferenciales no se enmarca solo a resolver analíticamente la ecuación diferencial o describirla cualitativamente. Tiene que ver con a partir de la ecuación diferencial explicar el fenómeno y viceversa a partir del fenómeno dar significado a la ecuación diferencial y su solución.

El sistema de ecuaciones diferenciales constituye una *instrucción que organiza el comportamiento*[8] de la epidemia, **son los parámetros lo que describirán ese comportamiento**. Como se describe en el análisis: "un pequeño aumento de la tasa de infecciosidad puede causar una epidemia muy marcada"

4.2.1 Anidación de prácticas de la modelación de epidemias

La construcción social del conocimiento, la anidación de práctica o evolución pragmática ante una situación de modelación de un sistema complejo, en este caso la propagación de una epidemia queda organizada de la siguiente manera (Figura 4.2):

1. Para la modelación de epidemias se parte de la división del tiempo en varios intervalos separados, donde ocurre el proceso de infección. Aquí podemos ver *temporizar* al nivel acción, entendida cómo reconocer estados intermedios para analizar el proceso de variación de las variables en una unidad de tiempo considerada constante. Además, se desarrolla *parametrizar* a nivel de acción, entendido cómo encontrar los valores que rigen la variación en el

[8] Esta acepción para la ecuación diferencial: instrucción que organiza comportamiento, coincide con los trabajos del Dr. Francisco Cordero en los que estudia el uso del conocimiento matemático en comunidades de ingenieros y el comportamiento de la solución de la ecuación diferencial a partir del comportamiento de $F(x)$ en una ecuación diferencial del tipo $y'(x) + y(x) = F(x)$ o a partir de las condiciones iniciales (ver Cordero, 1998; Solís, 2012; Buendía y Cordero, 2013; Mendoza y Cordero 2018, para más detalles).

comportamiento del sistema, al pasar los individuos de un estado al otro. Una acción entrelazada a temporizar y *parametrizar* es *comparar*. *Comparar* denominamos al establecer diferencias y equivalencias entre dos momentos en un mismo estado para identificar y cuantificar el cambio.

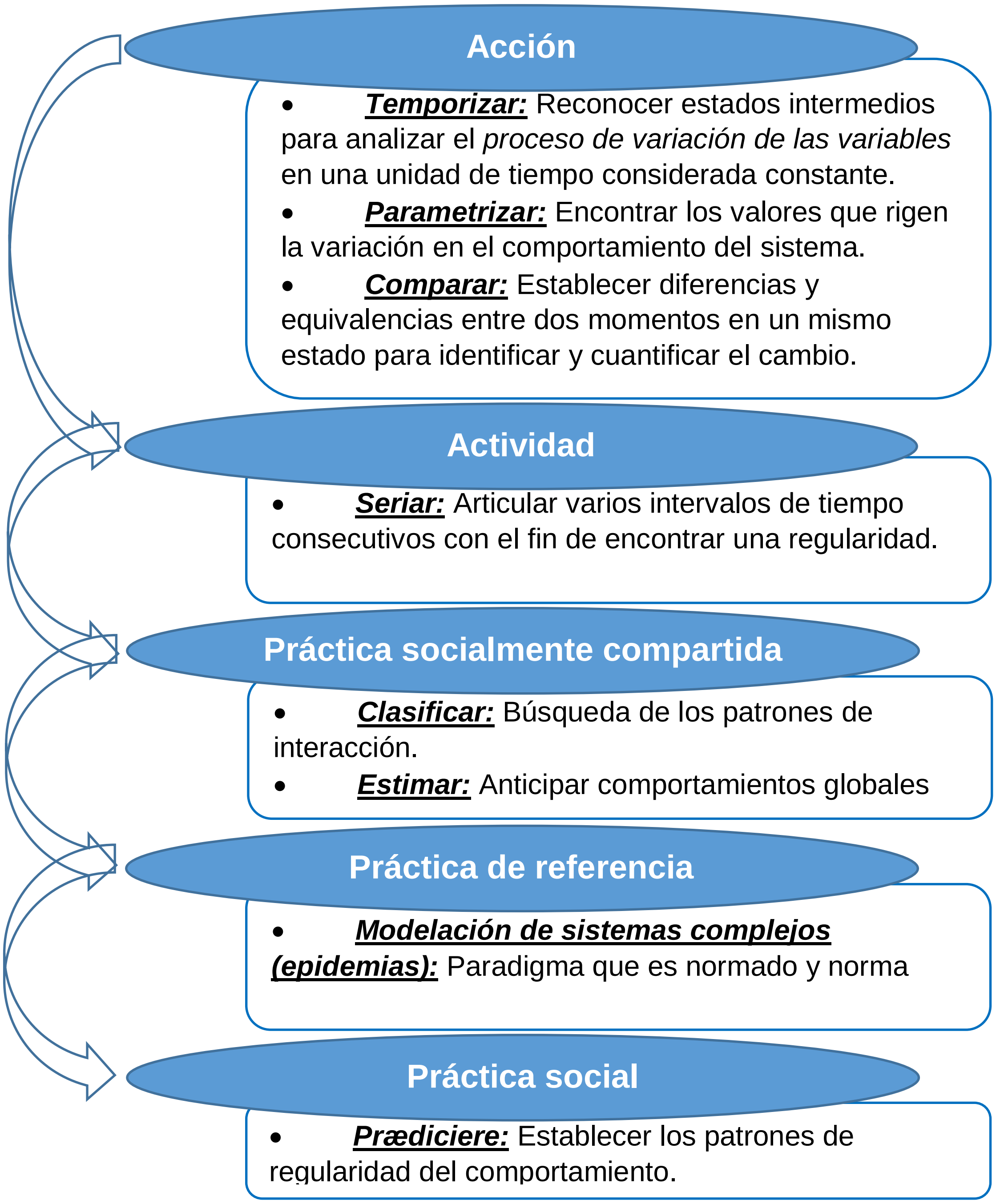
2. A continuación, se expresa *seriar* a nivel de actividad, al articular varios intervalos de tiempo consecutivos con el fin de encontrar una regularidad.
3. Luego la práctica socialmente compartida *clasificar* en la búsqueda de los patrones de interacción. Tiene que ver con ¿qué cambia?, es decir, las variables significativas para el estudio de la dinámica del fenómeno estudiado, en este caso, la propagación de la epidemia; población susceptible, población infectada y población recuperada y realizar suposiciones con respecto a algunas variables. Además, ¿cómo cambian estás variables? y ¿cuánto cambian?, para esto se necesita describir las situaciones iniciales del sistema: la densidad de población; y los parámetros: las tasas de infecciosidad y eliminación (taza de recuperación y taza de mortalidad); en dependencia del patrón de interacción de esas condiciones iniciales y las tazas, existirá uno u otro comportamiento del fenómeno, lo cual se traduce en este caso en uno u otro escenario de la epidemia. Además, tiene lugar estimar al anticipar comportamientos globales.
4. La modelación de fenómenos no lineales, en este caso la modelación de epidemias conforma una práctica de referencia dado que es un paradigma que es normado por la práctica social y a la vez ellos viven en un quehacer que norma acciones, actividades y prácticas socialmente compartida.
5. Todo esto cae bajo la normatividad de la práctica social Prædiciere al establecer los patrones de regularidad del comportamiento a partir de datos fácticos. A partir del conocimiento de las explicaciones causales del fenómeno estudiado.

Tabla 1. Sustentación de las acciones, actividades y prácticas socialmente compartidas

Temporizar	Se reconocen estados intermedios para analizar el proceso de variación de las variables en una unidad de tiempo considerada constante. Consideran primero las ecuaciones que surgen cuando el tiempo se divide en varios intervalos separados, y se supone que las infecciones sólo tienen lugar en el instante de pasar de un intervalo a otro.
Parametrizar	Se encuentran los valores que rigen la variación en el comportamiento del sistema. La probabilidad de una infección es proporcional al número de infectados en una parte, y al número de no infectados todavía en la otra.
Comparar	Se establecen diferencias y equivalencias entre dos momentos en un mismo estado para identificar y cuantificar el cambio. La variación en los susceptibles entre un momento y el anterior es igual al número de nuevos infectados en el momento.
Seriar	Se articulan varios intervalos de tiempo consecutivos con el fin de encontrar una regularidad. $$x_t + y_t + z_t = N$$ $$-v_t = x_{t+1} - x_t$$ $$\frac{dx_t}{dt} = -x_t \left[\int_0^t A_\theta v_{t-\theta} d\theta + A_t y_0 \right]$$ $$\frac{dz_t}{dt} = \int_0^t C_\theta v_{t-\theta}\, d\theta + C_t y_0$$ $$y_t = \int_0^t B_\theta v_{t-\theta} d\theta + B_t y_0$$
Clasificar Tipo 1	A partir de la ecuación diferencial se clasifica para encontrar un método ad hoc para su solución.
Estimar	Se supone que las tazas sean constantes y se obtiene información sobre el proceso por el cual las epidemias en poblaciones limitadas siguen determinado curso hasta su extinción. Debido a que este es un modelo al cual se arriba mediante supuestos la ecuación numérica sólo puede ser una aproximación a las observaciones reales.
Clasificar Tipo 2	Tiene que ver con ¿qué cambia?, es decir, las variables significativas para el estudio de la dinámica del fenómeno estudiado, en este caso, la propagación de la epidemia; población susceptible, población infectada y población recuperada y realizar suposiciones con

	respecto a algunas variables. Además, ¿cómo cambian estás variables? y ¿cuánto cambian?, para esto se necesita describir las situaciones iniciales del sistema: la densidad de población; y los parámetros: las tasas de infecciosidad y eliminación (taza de recuperación y taza de mortalidad); en dependencia del patrón de interacción de esas condiciones iniciales y las tazas, existirá uno u otro comportamiento del fenómeno, lo cual se traduce en este caso en uno u otro escenario de la epidemia.

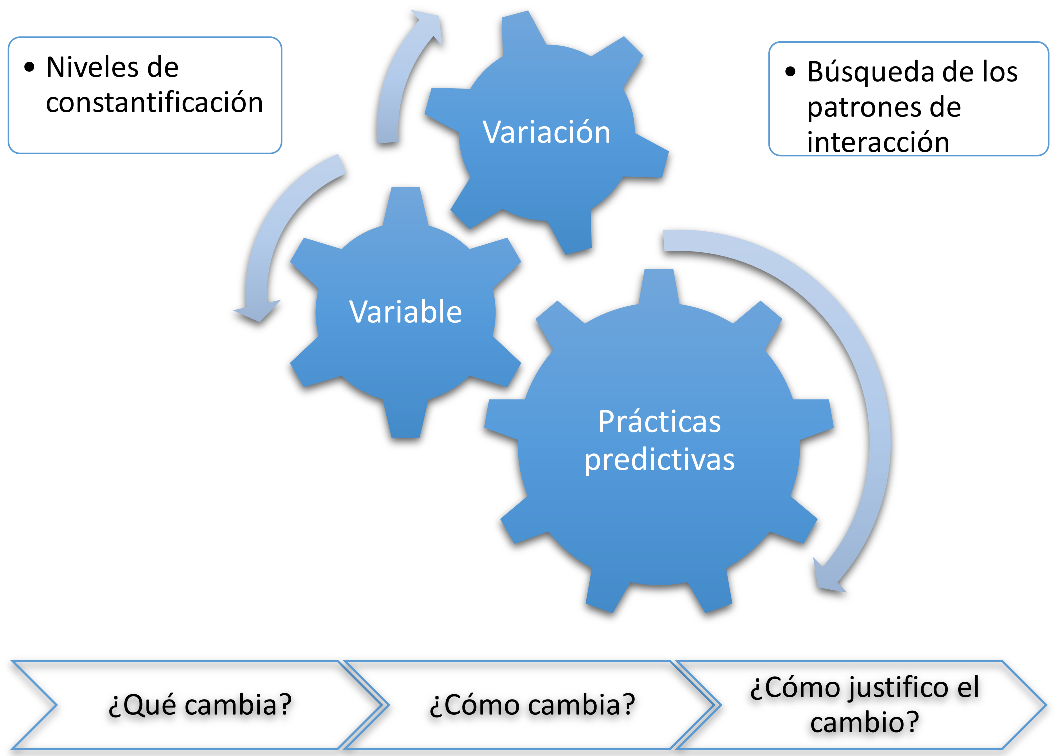
Figura 4.3 Anidación de prácticas en la modelación de epidemias (modelación de sistemas complejos)



4.2.2 Modelo socioepistemológico para el estudio del cambio en sistemas complejos

Una hipótesis que arroja esta investigación es que en el estudio del cambio en los sistemas complejos no hay una estabilidad del sistema dado que un pequeño aumento de la tasa de infecciosidad puede causar una epidemia muy marcada. Por tanto, será importante la *búsqueda de patrones de interacción* que permita la clasificación de los escenarios que producen diferentes grupos de comportamientos. Por lo tanto, el modelo socioepistemológico para el estudio del cambio pudiera sufrir la variación que se muestra en la figura 4.3, en lugar de la búsqueda del carácter estable del cambio se buscarán patrones de interacción.

Figura 4.4 Modelo socioepistemológico para el estudio del cambio, el caso de los sistemas complejos



Fuente: Elaboración propia con base en Hernández-Zavaleta (2019), Caballero (2018) y Moreno-Durazo (2018)

4.3 Diseño exploratorio

Cantoral (2016) expone una reflexión sobre el tipo de problemas y actividades que se le puede plantear a los estudiantes: ¿cuáles de ellos están basados en situaciones reales en donde aparezcan las estructuras matemáticas que se desean enseñar?; ¿se recurre a otras ciencias, que usan las matemáticas para que el aprendizaje tenga sentido para el alumno y que haya una motivación del alumno para adquirirlo?; ¿qué actividades se proponen para que los conceptos adquieran significado para los alumnos?

4.3. 1 Racionalidad del diseño exploratorio

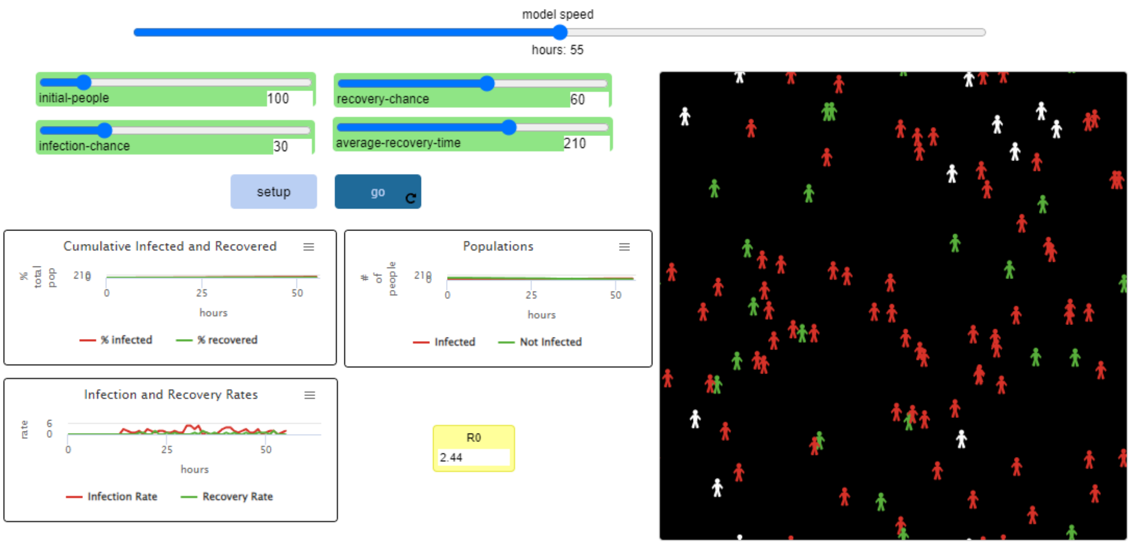
En un primer momento se exploran los significados previos de los parámetros y su variación en el comportamiento de la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales. Luego con base en el contexto situacional de la modelación de epidemias y la anidación de prácticas asociadas a esta, se realiza un diseño para explorar ideas asociadas al Pensamiento y Lenguaje Variacional mediante el análisis de la variación y el cambio en sistemas complejos. Además, lograr una significación del papel de los parámetros en el comportamiento de la solución.

El primer momento servirá de confrontación a la matemática escolar. En la matemática escolar usualmente se resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales analíticamente, pero ¿qué sucede con la relación entre el sistema y la gráfica de la solución? Los siguientes dos momentos busca poner en juego la epistemología propia de la modelación de epidemias y la dinámica de propagación para la emergencia de prácticas asociadas a situaciones de cambio y variación, además de la emergencia del Pensamiento y el Lenguaje Variacional.

Con apoyo en el modelo denominado epiDEM (Epidemiology: Understanding Disease Dynamics and Emergence through Modeling) (Yang y Wilensky, 2011) (Ver código en anexo 1), de la biblioteca del

Netlogo (Figura 4.4), basado en el modelo de Kermack y McKendrick se realizará la familiarización visual de los estudiantes con la dinámica de propagación de epidemias y mediante la manipulación de los parámetros podrán obtener diferentes comportamientos, de esta manera llegarán a generalidades sobre los comportamientos y podrán ser clasificados según diferentes escenarios de la epidemia. Describe la dinámica sistémica de un fenómeno que emerge cuando una persona infectada se introduce en una población totalmente susceptible.

Figura 4.5 Interfaz del modelo epiDEM



Fuente: Tomado de Yang y Wilensky (2011)

Este modelo, facilita los análisis matemáticos y también el cálculo del umbral en el que se espera que se produzca una epidemia. Denominado número de reproducción (R_0), representa el número de infecciones secundarias que surgen como resultado de la introducción de una persona infectada en una población totalmente susceptible, en el transcurso del periodo de contagio de la persona infectada (es decir, mientras la persona es infecciosa, que, en este modelo, es desde el comienzo de la infección hasta la recuperación).

Este modelo incorpora todos los supuestos anteriores, pero cada individuo tiene un 5% de posibilidades de ser inicializado como infectado. Este modelo muestra la propagación de la enfermedad como un fenómeno con un elemento de estocasticidad. Pequeñas perturbaciones en los parámetros incluidos aquí pueden, de hecho, conducir a resultados finales diferentes.

En general, este modelo ayuda a los usuarios a: 1) participar en una nueva forma de ver/modelar las epidemias, que es más personal y relacionable; 2) entender cómo el número de reproducción, representa el umbral de una epidemia; 3) pensar en diferentes formas de calcular R_0, y en los puntos fuertes y débiles de cada enfoque; 4) entender la relación entre las derivadas y las integrales, representadas simplemente como tasas y número acumulado de casos; y 5) proporcionar oportunidades para ampliar o cambiar el modelo para incluir algunas propiedades de la enfermedad que más interesan a los usuarios.

En la simulación de la epidemia en Netlogo los individuos vagan en movimiento aleatorio. Al entrar en contacto con una persona infectada, al estar en cualquiera de los ocho vecinos circundantes de la persona infectada o en el mismo lugar, un individuo no infectado tiene la posibilidad de contraer la enfermedad. El usuario puede establecer el número de personas en el mundo y la probabilidad de contraer la enfermedad.

Una persona infectada tiene una probabilidad de recuperarse tras alcanzar su periodo de recuperación, que también establece el usuario. El tiempo de recuperación de cada individuo se determina extrayendo de una distribución aproximadamente normal con una media del tiempo medio de recuperación establecida por el usuario.

Los colores de los individuos indican el estado de su salud. Se utilizan tres colores: los individuos blancos no están infectados, los rojos están infectados y los verdes están recuperados. Una vez recuperado, el individuo es permanentemente inmune al virus.

Además, cuenta con gráficos, los gráficos de las tasas de infección y recuperación muestra la tasa de cambio del acumulado de infectados y recuperados en la población. Hace un seguimiento del número medio de infecciones secundarias y recuperaciones. El número de reproducciones se calcula bajo supuestos diferentes a los del modelo de Kermack McKendrick, ya que permitimos que haya más de un individuo infectado en la población, y se introduce las variables mencionadas.

Al final de la simulación, el R_0 refleja la estimación del número de reproducción, la relación de tamaño final que indica si habrá (o hubo, en el sentido del modelo) una epidemia. Esto sigue de nuevo la derivación matemática de que $R_0 = \frac{\beta S(0)}{\gamma} = \frac{N \ln\left(\frac{\frac{S(0)}{S}}{S(t)}\right)}{N - S(t)}$, donde N es la población total, $S(0)$ es el número inicial de susceptibles y $S(t)$ es el número total de susceptibles en el momento t. En este modelo, la estimación de R_0 es el número de infecciones secundarias que surgen para un individuo infectado medio en el transcurso del periodo de infección de la persona.

¿CÓMO USAR LA BIBLOTECA?

El botón SETUP crea individuos según los valores de los parámetros elegidos por el usuario. Cada individuo tiene un 5% de posibilidades de ser inicializado como infectado. Una vez configurado el modelo, se pulsa el botón GO para ejecutarlo. El botón GO inicia el modelo y lo ejecuta continuamente hasta que se vuelve a pulsar el botón GO.

Se debe de tener en cuenta que en este modelo cada paso de tiempo puede considerarse en horas, aunque cualquier unidad de tiempo adecuada servirá.

Además, tiene deslizadores con diferentes funciones:

INITIAL-PEOPLE (inicializado para variar entre 50 - 400): El número total de individuos en la simulación, determinado por el usuario.

INFECTION-CHANCE (10 - 100): Probabilidad de transmisión de la enfermedad de un individuo a otro.

RECOVERY-CHANCE (10 - 100): Probabilidad de que un individuo infectado se recupere una vez que la infección ha durado más que el tiempo de recuperación de la persona.

AVERAGE-RECOVERY-TIME (50 - 300): El tiempo que tarda un individuo en recuperarse por término medio. El tiempo de recuperación real del individuo se extrae de una distribución normal centrada en la media del tiempo de recuperación medio, con una desviación estándar de un cuarto del tiempo de recuperación medio. Cada paso de tiempo puede considerarse en horas, aunque cualquier unidad de tiempo adecuada servirá.

En este modelo también se trazan varios gráficos:

CUMULATIVE INFECTED AND RECOVERED: Se representa el porcentaje total de individuos infectados y recuperados a lo largo de la propagación de la enfermedad.

POPULATIONS: Representa el número total de personas con o sin epidemia a lo largo del tiempo.

INFECTION AND RECOVERY RATES: Se muestran las tasas estimadas de propagación de la enfermedad. βN es la tasa a la que cambia el acumulado de infectados, y γ la tasa a la que cambia el acumulado de recuperados.

R_0: Es una estimación del número de reproducción, sólo comparable a la definición de Kermack McKendrick si el número inicial de infectados fuera 1.

4.3. 2 Diseño exploratorio

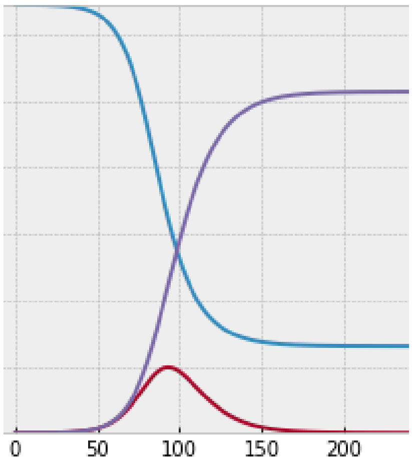
Momento 1

1. Relacione cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales con la representación gráfica de su solución.

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{0.3}{N}SI$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{0.3}{N}SI - 0.1I$$

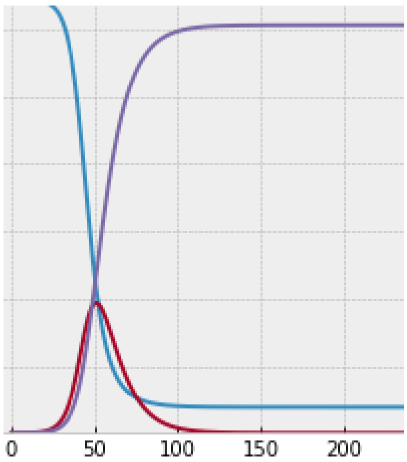
$$\frac{dR}{dt} = 0.1I$$



$$\frac{dS}{dt} = -\frac{0.4}{N}SI$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{0.4}{N}SI - 0.1I$$

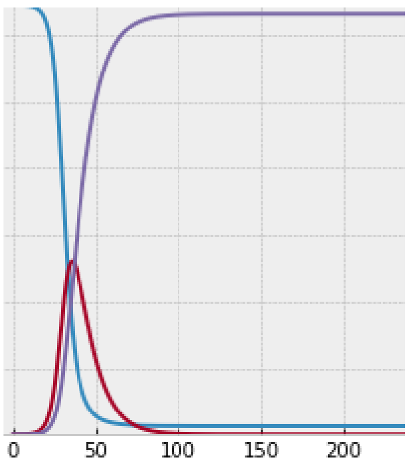
$$\frac{dR}{dt} = 0.1I$$



$$\frac{dS}{dt} = -\frac{0.5}{N}SI$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{0.5}{N}SI - 0.1I$$

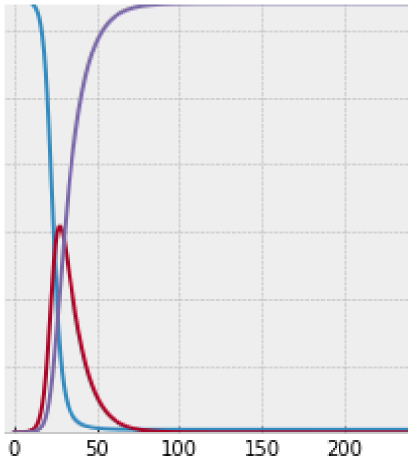
$$\frac{dR}{dt} = 0.1I$$



$$\frac{dS}{dt} = -\frac{0.6}{N}SI$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{0.6}{N}SI - 0.1I$$

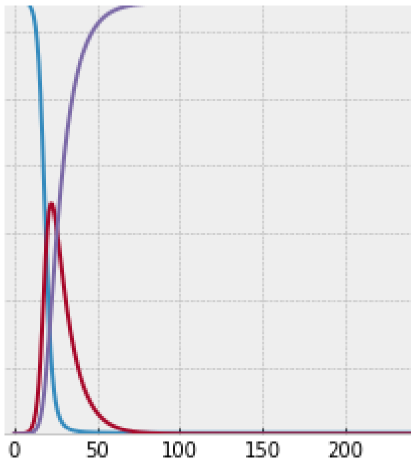
$$\frac{dR}{dt} = 0.1I$$



$$\frac{dS}{dt} = -\frac{0.2}{N}SI$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{0.2}{N}SI - 0.1I$$

$$\frac{dR}{dt} = 0.1I$$



Momento 2

1. ¿Qué es una epidemia y cómo se comporta?

Luego de la presentación de las ideas de los estudiantes se realiza una síntesis de los argumentos y se presenta la interfaz de la biblioteca de Netlogo.

2. Cambiando los valores de los parámetros mediante el deslizador, intente ver qué tipos de cambios hacen que la curva que representa los infectados se estire o se encoja.

3. El número de reproducción básica R_0 indica el número de infecciones secundarias que surgen como resultado de la introducción de una persona infectada en una población totalmente susceptible, en el transcurso del periodo de contagio de la persona infectada (es decir,

mientras la persona está infectada). Si $R_0 > 1$, se produce una epidemia. Si $R_0 < 1$, es probable que la propagación de la enfermedad se detenga en breve, y lo llamamos endemia.

a) ¿Cómo afecta el aumento del número de personas infectadas inicialmente a la propagación de la enfermedad?

b) ¿Cómo afecta el aumento de la taza de recuperación a la forma de los gráficos? ¿Y los cambios en el tiempo medio de recuperación?

c) ¿Cómo afecta el aumento de la taza de tasa de infección a la forma de los gráficos?

d) ¿Qué ocurre con la forma de los gráficos cuando se aumenta la taza de recuperación y se reduce el tiempo de recuperación?

e) ¿Qué ocurre con la forma de los gráficos cuando se aumenta el tiempo de recuperación y se reduce taza de recuperación?

f) Fíjese en el gráfico de Infectados y Recuperados Acumulados, y en el de Tasas de Infección y Recuperación. ¿Cuáles son las relaciones entre ambos?

g) A partir del movimiento libre de los deslizadores recree diferentes interacciones entre los parámetros que representen escenarios de epidemia o de endemia, respectivamente.

4. A partir de las interacciones de los parámetros del ejercicio anterior inciso g) enuncie cualitativamente características del comportamiento gráfico y de los agentes que brindan información acerca de la difusión de la enfermedad y cómo ocurre la variación de un estado a otro.

Este diseño constituye una propuesta para el tratamiento de sistemas complejos en el aula, a partir de la incorporación de fenómenos propios de otras disciplinas y dónde el foco para el desarrollo del pensamiento matemático sea la construcción social de ese conocimiento y las nociones de variación y cambio asociadas a la dinámica del *fenómeno tratado, en lugar de la comprensión del objeto matemático sin significados. Un signo para la generalización fuera del contexto de la propagación de epidemias, en otros sistemas complejos, constituye la clasificación de los comportamientos emergentes dado los patrones de interacción que delimitan uno u otro escenario del sistema que se describe.*

CAPÍTULO V. CONCLUSIONES Y PROSPECTIVAS

5.1 Conclusiones

El trabajo de investigación fue divido en dos partes: la primera, en una dimensión epistemológica, se estudió la modelación de epidemias, la construcción social de esta y las nociones asociadas al análisis de la variación y el cambio en la propagación de epidemias y; la segunda conformar un diseño exploratorio con base en la epistemología conformada. De conjunto respondieron a las preguntas de investigación:

Para conformar la epistemología:

1. ¿Cómo se caracteriza la dinámica de la propagación de una epidemia, a partir de un análisis documental y el modelo socioepistemológico de análisis de la variación y el cambio?
2. ¿Qué acciones, actividades y prácticas se evidencian en la modelación de la dinámica de la propagación de epidemias mediante un modelo SIR?

Para la elaboración del diseño didáctico:

3. ¿Cómo la epistemología rescatada conforma un diseño con fines didácticos para el análisis del procesamiento del cambio y la significación de la parametrización?

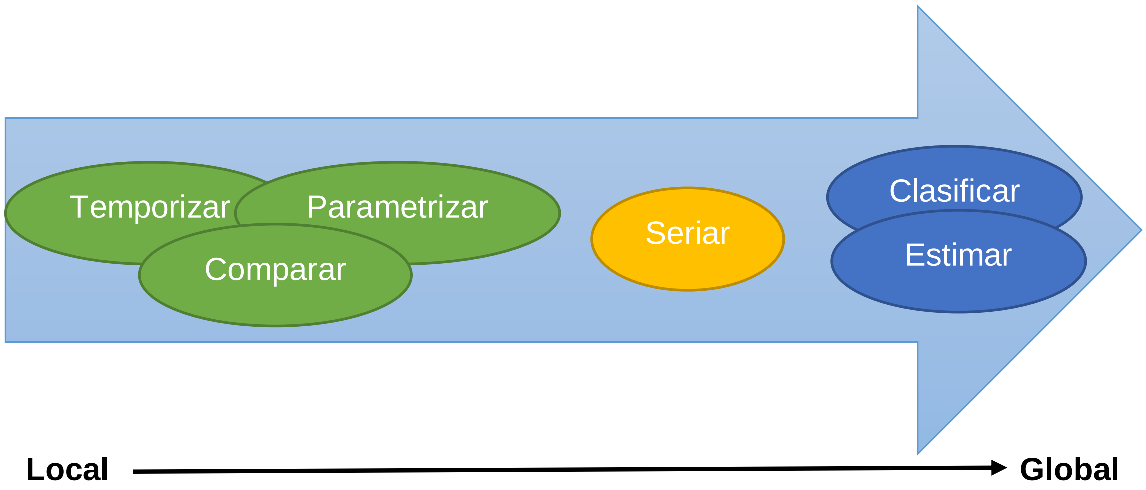
La elección del artículo de Kermack y McKendrick (1927) denota la hipótesis de que un modelo básico como el SIR permite entender modelos más complejos siempre y cuando esas ideas se vertebren las técnicas que se suelen estudiar. El entender el modelo de origen de la epidemia, propicia el entendimiento de otros modelos en otras circunstancias y es posible entender la dinámica de otras variables que no se contemplan acá o el comportamiento de no cumplirse los supuestos iniciales.

La dinámica de la propagación de epidemia fue estudiada mediante el modelo socioepistemológico de análisis de la variación y está caracterizada por las relaciones particular entre la densidad de la población, las tasas de infecciosidad, recuperación y mortalidad. Un ligero aumento de la tasa de infecciosidad, puede hacer estallar una gran epidemia. Dada esta particularidad en el comportamiento es difícil predecir con exactitud por lo que es necesario en lugar de solo la búsqueda del carácter estable del cambio sino la búsqueda de los patrones de interacción.

Es a partir de la búsqueda de los patrones de interacción que se podrán describir diferentes comportamientos de la epidemia dependiendo de la variación de los parámetros. Esto puede ser una característica generalizable a la predicción en los sistemas complejos donde los comportamientos emergentes no permiten saber con exactitud el comportamiento a largo plazo.

Mediante el estudio de la construcción social del conocimiento en la modelación de epidemias se puede ver cómo se organiza el comportamiento de lo local a lo global (ver figura 5.1). Es decir, a partir de la identificación y cuantificación del cambio en un mismo estado a partir de datos fácticos se encuentra una regularidad que permite anticipar comportamientos globales. Y estos comportamientos se clasifican según los patrones de interacción que describen las variaciones entre los estados.

Figura. 5.1 Evolución pragmática de la modelación de epidemias (sistemas complejos)



Fuente: Elaboración propia con base en Hernández-Zavaleta (2019, p. 124)

El diseño está dividido en dos momentos. Un primer momento se confronta con el significado de las ecuaciones diferenciales, nuestra hipótesis es que el desarrollo propio de la matemática escolar no permite desarrollar un significado del comportamiento de la solución de un mismo sistema de ecuaciones diferenciales con parámetros variados. Sin embargo, es este conocimiento el que exigen otras disciplinas que tratan con sistemas complejos que pueden ser estudiados mediante una aproximación global e importa los patrones de interacción para entender los diferentes posibles comportamientos.

En un segundo momento se pretende dotar de significado la variación de parámetros en las interacciones que describen diferentes escenarios de la epidemia. Para ello se visualiza en el interfaz de NetLogo que ocurre ante diferentes patrones de interacción y se realizan preguntas que aluden al análisis de la variación y el cambio para el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional.

5.2 Prospectivas

La aplicación del diseño exploratorio dará lugar a robustecer los estudios de la línea de investigación sobre el Pensamiento y Lenguaje

Variacional, ahora en el estudio de la dinámica y modelación de sistemas complejos. Queda buscar en otras disciplinas sistemas complejos para ser estudiados, por ejemplo, en la ecología, el cambio climático, en la sociología, el tráfico, entre otros.

Además, con base en este mismo diseño se pueden agregar cambios que inviten al estudiante a mas discusiones sobre el cambio y la variación en estos sistemas complejos y las argumentaciones para poder organizar sus comportamientos. Algunas posibles variaciones a la simulación pueden estar dada por vivencias en torno al COVID-19, cambiar el comportamiento de las personas una vez infectadas. Por ejemplo, una vez infectado, el individuo podría moverse más lentamente, tener menos contactos, aislarse. Además, se pueden incluir variables demográficas como los nacimientos, las muertes y los desplazamientos para reflejar más las complejidades que rodean la naturaleza de la investigación de epidemias.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arslan S (2010) Do students really understand what an ordinary differential equations is? *Internacional Journal Sciens Mathematics Education* 41(7), pp. 873–888

Blanchard, P. (1994) Teaching differential equations with a dynamical systems viewpoint, *College Math. J*. 25(5), pp. 385–393.

Boyce, W.E. (1994) New directions in elementary differential equations, *College Math. J*. 25(5), pp. 364–371.

Boyce, W.E. (1999) Differential equations in the information age, in Revolutions in Differential Equations: Exploring ODES with Modern Technology, MAA Notes, M.J. Kallaher, ed., Mathematical Association of America, Washington, DC, pp. 13–18.

Buendía, G. y Cordero, F. (2013), The use of graphs in specific situations of the initial conditions of linear differential equations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. 44(6), pp. 927-937, DOI: 10.1080/0020739X.2013.790501

Caballero, M. (2012). *Un estudio de las dificultades en el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional en profesores de bachillerato*. Tesis de maestría no publicada. CINVESTAV-IPN.

Caballero-Pérez, M. (2018). *Causalidad y Temporización entre jóvenes de bachillerato. La construcción de la noción de Variación y el Desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional.* Tesis de doctorado no publicada. Cinvestav-IPN.

Cai, J., Morris, A., Hohensee, C., Hwang, S., Robison, V., Cirillo, M., Kramer, S. J, & Hiebert, J. (2019). Theoretical framing as justifying. *Journal for Research in Mathematics Education*, 50(3), 218-224.

Cantoral, R. (1990). *Categorías relativas a la apropiación de una base de significaciones para conceptos y procesos matemáticos de la Teoría elemental de las Funciones Analíticas. Simbiosis y Predación entre las nociones de "el Prædiciere" y "lo Analítico"*. Tesis Doctoral. México: Cinvestav.

Cantoral, R. (2013, 2016 2ª edición). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. México: Gedisa.

Cantoral, R. (2019). *Caminos del saber pensamiento y lenguaje variacional*. México: Gedisa.

Carranza-Rogerio, B (2019). *Estrategias dinámicas para la introducción de la noción de variación en la ecuación diferencial ordinaria con perspectiva de género. Un caso de simulación digital del fenómeno de caída libre.* Tesis de maestría no publicada. CINVESTAV-IPN.

Cilliers, P. (2002) Complexity & Postmodernism. Understanding complex system. London and New York: Routledge. Taylor & Francis Group.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *4*(2), pp. 103-128.

Cordero, F. (1998). El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del cálculo y análisis: el caso de comportamiento tendencial de las funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Número 1, pp. 56-74.

Cuoco, A., Goldenberg, E. P., & Mark, J. (1996). Habits of mind: An organizing principle for a mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, 14(4), 375–402.

da Silva, S. (2015). Model Analysis with Digital Technology: A "Hybrid Approach". In G. A. Stillman, W. Blum, & M. S. Biembengut (Eds.), *Mathematical modelling in education research and practice: Cultural, social and cognitive influences*. Cham: Springer.

Davis B., Sengupta P. (2020) Complexity in Mathematics Education. In: Lerman S. (eds) *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_28

Fallas-Soto, R. (2015). *Existencia y unicidad: Estudio socioepistemológico de la solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden*. Tesis de maestría no publicada. Cinvestav-IPN. doi:10.13140/RG.2.1.1265.6485

Fisher, D. M. (2021). Global Understanding of Complex Systems Problems Can Start in Pre-college Education. In F. Leung, G. A. Stillman, G. Kaiser & K. L. Wong (Eds.), *Mathematical Modelling Education in East and West*, 35 – 44. Cham: Springer.

Galbraith, P., Fisher, D.M. (2021). System Dynamics: Adding a String to the Modelling Bow. In: Leung, F.K.S., Stillman, G.A., Kaiser, G., Wong, K.L. (eds) *Mathematical Modelling Education in East and West. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling*, 619-629. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-66996-6_52

Giacoleti-Castillo, F. (2020). *La temporalización y la tendencia en un rango como factores funcionales de la reproducción de comportamientos discontinuos: una resignificación de la Transformada de Laplace en un sistema de control*. Tesis de maestría no publicada. Cinvestav –IPN.

Habre, S. (2003) Investigating students' approval of a geometrical approach to differential equations and their solutions, *Journal Mathematics Education Sciencs and Technology*. 34(5), pp. 651–662.

Hernández-Zavaleta, E. (2019). *Elementos para el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional entre estudiantes de bachillerato:*

el caso de “lo errático”. Tesis de doctorado no publicada. Cinvestav-IPN.

Kermack, W. O., & McKendrick, A. G. (1927). A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proceedings of the royal society of london. Series A, Containing papers of a mathematical and physical character*, *115*(772), 700-721.

Kwon O.N. (2020) Differential Equations Teaching and Learning. In: Lerman S. (eds) *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer, Cham, 220-223. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_100023

Leyva, LA (2017). Unpacking the male superiority myth and masculinization of mathematics at the intersections: a review of research on gender in mathematics education. *J Res Math Educ* 48(4), pp. 397–433

Moreno-Durazo, A. (2018) *Principios del pensamiento matemático: el principio estrella en la práctica médica. El uso de la pequeña variación en el diagnóstico y el tratamiento de enfermedades cardiacas.* Tesis de doctorado no publicada. Cinvestav-IPN.

Mota, C. (2019) *La Matemática Escolar y la Modelación: De la Integral a una Categoría de Acumulación*. Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav-IPN.

Niss, M. (2015). Prescriptive modelling—Challenges and opportunities. In G. A. Stillman, W. Blum, & M. S. Biembengut (Eds.), *Mathematical modelling in education research and practice: Cultural, social and cognitive influences* (pp. 67–79). Cham: Springer.

Pliego, E. C. (2011). *Modelos Epidemiológicos de Enfermedades Virales Infecciosas*. México: Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Obtenido de https://www.fcfm.buap.mx/assets/docs/docencia/tesis/matematicas/EmileneCarmelitaPliegoPliego.pdf

Reyes, E. y Barrios Borges E. (2022) Implementación del modelo SIR. https://colab.research.google.com/drive/1JlFiTsgBHmHMMCLSCmAHNdFj5ApZlMXQ#scrollTo=BBRuwJt3sViT

Reyes-Gasparini, D. (2016). *Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: una alternativa de intervención para la transformación y la mejora educativa*. Tesis de doctorado no publicada. CINVESTAV-IPN.

Rodríguez Gallegos, R. (2015). A differential equations course for engineers through modelling and technology. In G. A. Stillman,W. Blum, & M. S. Biembengut (Eds.), *Mathematical modelling in education research and practice: Cultural, social and cognitive influences* (pp. 545–555). Cham: Springer.

Rodríguez, R. & Quiroz, S (2015). Developing Modelling Competencies Through the Use of Technology. In G. A. Stillman,W. Blum, & M. S. Biembengut (Eds.), *Mathematical modelling in education research and practice: Cultural, social and cognitive influences*. Cham: Springer.

Solís, M. (2012). *Las gráficas de las funciones como una argumentación del Cálculo. Caso de la predicción y la simulación en las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden*. Tesis de doctorado no publicada. CINVESTAV-IPN.

Vidal, M., Guinovart, R., Baldoquín, W., Valdivia, N. C., & Morales, W. (2020). Modelos matemáticos para el control epidemiológico. *Educación Médica Superior*, 32(2).

Yang, C. y Wilensky, U. (2011). NetLogo epiDEM Basic model.http://ccl.northwestern.edu/netlogo/models/epiDEMBasic. Center for Connected Learning and Computer-Based Modeling, Northwestern University, Evanston,IL.

ANEXOS

Anexo 1. Código de Netlogo de la biblioteca de modelación de una epidemia (Yang y Wilensky, 2011)

```
)

globals

[

  nb-infected-previous  ;; Number of infected people at the previous tick

  beta-n                ;; The average number of new secondary

                        ;; infections per infected this tick

  gamma                 ;; The average number of new recoveries

                        ;; per infected this tick

  r0                    ;; The number of secondary infections that arise

                        ;; due to a single infected introduced in a wholly

                        ;; susceptible population

]


turtles-own

[

  infected?             ;; If true, the person is infected

  cured?                ;; If true, the person has lived through an infection.

                        ;; They cannot be re-infected.
```

```
  susceptible?       ;; Tracks whether the person was initially susceptible
  infection-length    ;; How long the person has been infected
  recovery-time       ;; Time (in hours) it takes before the person has a
chance to recover from the infection
  nb-infected         ;; Number of secondary infections caused by an
                      ;; infected person at the end of the tick
  nb-recovered        ;; Number of recovered people at the end of the tick
]

;;;
;;; SETUP PROCEDURES
;;;
to setup
  clear-all
  setup-people
  reset-ticks
end

to setup-people
  create-turtles initial-people
  [
    setxy random-xcor random-ycor
```

```
set cured? false

set infected? false

set susceptible? true


set shape "person"

set color white


;; Set the recovery time for each agent to fall on a

;; normal distribution around average recovery time

set recovery-time random-normal average-recovery-time average-
recovery-time / 4


;; make sure it lies between 0 and 2x average-recovery-time

if recovery-time > average-recovery-time * 2 [

  set recovery-time average-recovery-time * 2

]

if recovery-time < 0 [ set recovery-time 0 ]


;; Each individual has a 5% chance of starting out infected.

;; To mimic true KM conditions use "ask one-of turtles" instead.

if (random-float 100 < 5)

[
```

```
;;
      set infected? true
      set susceptible? false
      set infection-length random recovery-time
    ]
    assign-color
  ]
end


;; Different people are displayed in 3 different colors depending on health
;; White is neither infected nor cured (set at beginning)
;; Green is a cured person
;; Red is an infected person


to assign-color  ;; turtle procedure
  if infected?
    [ set color red ]
  if cured?
    [ set color green ]
end


;;;
```

```
;;; GO PROCEDURES
;;;

to go
  if all? turtles [ not infected? ]
    [ stop ]

  ask turtles
    [ move
      clear-count ]

  ask turtles with [ infected? ]
    [ infect
      maybe-recover ]

  ask turtles
    [ assign-color
      calculate-r0 ]

  tick
end
```

```
;; People move about at random.
to move  ;; turtle procedure
  rt random-float 360
  fd 1
end

to clear-count
  set nb-infected 0
  set nb-recovered 0
end

;; Infection can occur to any susceptible person nearby
to infect  ;; turtle procedure
   let nearby-uninfected (turtles-on neighbors)
     with [ not infected? and not cured? ]

     if nearby-uninfected != nobody
     [ ask nearby-uninfected
       [ if random-float 100 < infection-chance
         [ set infected? true
```

```
          set nb-infected (nb-infected + 1)
        ]
      ]
    ]
end


to maybe-recover
  set infection-length infection-length + 1


  ;; If people have been infected for more than the recovery-time
  ;; then there is a chance for recovery
  if infection-length > recovery-time
  [
    if random-float 100 < recovery-chance
    [ set infected? false
      set cured? true
      set nb-recovered (nb-recovered + 1)
    ]
  ]
end
```

```
to calculate-r0

  let new-infected sum [ nb-infected ] of turtles
  let new-recovered sum [ nb-recovered ] of turtles

  ;; Number of infected people at the previous tick:
  set nb-infected-previous
    count turtles with [ infected? ] +
    new-recovered - new-infected

  ;; Number of susceptibles now:
  let susceptible-t
    initial-people -
    count turtles with [ infected? ] -
    count turtles with [ cured? ]

  ;; Initial number of susceptibles:
  let s0 count turtles with [ susceptible? ]

  ifelse nb-infected-previous < 10
  [ set beta-n 0 ]
```

```
  [
    ;; This is beta-n, the average number of new
    ;; secondary infections per infected per tick
    set beta-n (new-infected / nb-infected-previous)
  ]

  ifelse nb-infected-previous < 10
  [ set gamma 0 ]
  [
    ;; This is the average number of new recoveries per infected per tick
    set gamma (new-recovered / nb-infected-previous)
  ]

  ;; Prevent division by 0:
  if initial-people - susceptible-t != 0 and susceptible-t != 0
  [
    ;; This is derived from integrating dI / dS = (beta*SI - gamma*I) / (-
beta*SI):
    set r0 (ln (s0 / susceptible-t) / (initial-people - susceptible-t))
    ;; Assuming one infected individual introduced in the beginning,
    ;; and hence counting I(0) as negligible, we get the relation:
    ;; N - gamma*ln(S(0)) / beta = S(t) - gamma*ln(S(t)) / beta,
```

```
    ;; where N is the initial 'susceptible' population

    ;; Since N >> 1

    ;; Using this, we have R_0 = beta*N / gamma = N*ln(S(0)/S(t)) / (K-S(t))

    set r0 r0 * s0 ]

end
```

Anexo 2. Código en Python para graficar la solución del modelo SIR al variar gamma y beta (Reyes y Barrios-Borges, 2022)

```
# --- Paqueterías para el sistema SIR ---

import numpy as np

from scipy.integrate import odeint

import matplotlib.pyplot as plt

plt.style.use("bmh")



# --- Paqueterías para la animación ---

%matplotlib inline

from ipywidgets import interactive

import matplotlib.pyplot as plt

import numpy as np

# Las ecuaciones diferenciales del modelo SIR

def sistema_SIR(y, t, N, beta, gamma):

    S, I, R = y

    dSdt = -beta * S * I / N

    dIdt = beta * S * I / N - gamma * I

    dRdt = gamma * I

    return dSdt, dIdt, dRdt



# --- Parámetros Iniciales ---
```

```
#
# Población inicial. (N)
N = 129_000_000  # Población aproximada de México
# Número inicial de infectados y recuperados. (I0, R0)
I0 = 10_000
R0 = 0
# El resto es susceptible de infectarse. (S0)
S0 = N - I0 - R0
# Tasas de contagio y recuperación.
beta = 0.20    # contagio
gamma = 0.015  # recuperación
# Línea de tiempo en días (1 año)
t = np.linspace(0, 365, 365)
## condiciones iniciales del SIR
y0 = S0, I0, R0


# --- Solución del Sistema SIR ---
#
# Resuelve el sistema SIR sobre la linea de tiempo, t
ret = odeint(sistema_SIR, y0, t, args=(N, beta, gamma))
S, I, R = ret.T
```

```python
# La solución del sistem SIR

def solucion_SIR(y0, t, N, beta, gamma):

    ret = odeint(sistema_SIR, y0, t, args=(N, beta, gamma))

    S, I, R = ret.T

    return S, I, R


# Solución del sistema SIR como función de BETA y GAMMA

def SIR(beta, gamma):

    ret = odeint(sistema_SIR, y0, t, args=(N, beta, gamma))

    S, I, R = ret.T

    plt.figure(2)

    plt.plot(t, S, label='Susceptibles')

    plt.plot(t, I, label='Infectados')

    plt.plot(t, R, label='Recuperados')

    plt.legend()

    plt.ylim(0, N)

    plt.show()



#S, I, R = SIR(beta, gamma)
```

```
interactive_plot = interactive(SIR, beta=(0, 0.8), gamma=(0, 0.4))

output = interactive_plot.children[-1]

output.layout.height = '350px'

interactive_plot
```