Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del
Instituto Politécnico Nacional

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemática Educativa

Análisis de dificultades de la construcción de los números naturales con base en Von Neumann

Tesis que presenta:

M. en C. María Leticia Rodríguez González

Para obtener el grado de:
Doctora en Ciencias

en la especialidad de
Matemática Educativa

Directores de la tesis:

Dr. Eugenio Filloy Yagüe (QEPD)
Dra. María Teresa Rojano Ceballos
Dr. Bernardo Gómez Alfonso

Ciudad de México Mayo, 2021

Dedicatorias

A mis hijas Mitzi y Libertad mi inspiración en todos los momentos de mi vida, siempre apoyando todos los proyectos que me propongo y en especial a Majo que ha sido una luz en mi camino.

A mi madre porque tengo la certeza de que está orgullosa de este logro, ella siempre ha sido el pilar de mi vida.

A mis hermanos Margarita y Fernando, que siempre han estado a mi lado alentándome en todos lo que me propongo.

A Jorge, por su apoyo incondicional.

Agradecimientos

Mi especial agradecimiento al Dr. Eugenio Filloy Yagüe, director de esta tesis. Con sus enseñanzas, recomendaciones y dirección se logró la consolidación de esta investigación. Siempre me dijo que tenía toda la confianza en mí para realizar este proyecto, pero era yo, la que dudaba. Gracias maestro, usted fue una persona maravillosa que nos conocía perfectamente a cada uno de nosotros.

Al Dr. Bernardo Gómez Alfonso, con su paciencia, dedicación y dirección me orientó para estructurar este complicado proceso. Su guía me permitió identificar que la complejidad tiene una estructura lógica y muchas posibilidades de organización.

Especialmente a la Dra. Teresa Rojano Ceballos, quien en la etapa final de la tesis me brindó todo su apoyo como directora ante la inesperada partida del Dr. Eugenio Filloy. Sus recomendaciones me ayudaron para dar el cierre a este proyecto de investigación.

Al Dr. Ernesto Sánchez, porque me brindó la oportunidad y confianza de postularme para estudiar el doctorado en esta honorable casa de estudios.

A Susana Figueroa por su incondicional apoyo, que en todo momento estuvo al pendiente de mi proceso.

A Héctor Chávez, con sus enseñanzas me ayudó construir el sentido matemático de esta investigación.

A mis compañeros Carmen Ceniceros, Arturo Emmanuel Meléndez, René Trejo y Rocío Uicab, por el apoyo que nos brindamos al compartir nuestras experiencias en diversos campos del saber.

Mi agradecimiento para Adriana Parra, que sin dudarlo nos brinda su incondicional apoyo. Agradezco sinceramente a María del Rosario Mendoza Hernández, Yadira López Ponce, Angélica Nava Martínez Directoras de las escuelas “Profra. Susana I. Herrera Mascorro, General Gertrudis Sánchez y Profr. Jorge Casahonda Castillo” respectivamente. A las profesoras de grupo Ma. Verónica Vargas Flores, Alexandra Parra Robledo y Elizabeth Izquierdo que cedieron su tiempo de clase para realizar esta investigación. Un agradecimiento muy especial a todos los alumnos que participaron con mucho entusiasmo.

Agradecimiento especial al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo brindado al otorgarme la beca para la realización de mis estudios de Doctorado en el Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN

Becario 88237/88237

Índice

Resumen 1

Abstract 2

Presentación 3

1. PROBLEMA ARITMÉTICO DE INVESTIGACIÓN 6

Introducción 7

1.1. Importancia de la construcción conceptual de los números 13

1.2. Sobre los Modelos de Enseñanza 19

1.3. Breve conceptualización de la noción de números naturales 22

2. MARCO DE REFERENCIA 23

2.1. Investigaciones sobre los procesos de construcción de los números naturales 24

2.2. Influencia piagetiana en la Investigación Educativa 24

2.2.1. Piaget y la Abstracción Reflexiva de los números naturales 25

2.2.2. Refutaciones a Piaget 27

2.3. Perspectivas soviéticas: Teoría de la Actividad y las Acciones Mentales 27

2.4. Influencia de las teorías cognitivas y su impacto en la Investigación en Educación Matemática 31

3. MODELOS TEÓRICOS LOCALES 34

3.1. Diseño de un MTL para la construcción de los números naturales 39

3.1.1. Modelo de Competencia Formal 39

3.1.1.1. Breve Epistemología de la construcción los números naturales 39

3.1.1.2. El número cero 40

3.1.1.3. Conceptualización de los Números Naturales de John Von Neumann 41

3.1.2. Modelo de Cognición 46

3.1.2.1. Procesos cognitivos, teoría de la actividad 46

3.1.3. Modelo de Comunicación 54

3.1.3.1. Construcción del significado en Peirce 54

3.1.3.2. Relaciones Significantes 55

3.1.3.3. Argumentos como Procesos de Significación 56

3.1.3.4. Lógica de uso de los SMS involucrados en la construcción de los Números Naturales 57

3.1.4. Modelo de enseñanza 58

3.1.4.1. El Modelo de Enseñanza como espacio de intertextualidad 58

3.1.4.2. Texto matemático 58

3.1.4.3. Intertexto matemático 59

3.1.4.4. Procesos de Lectura/transformación 59

3.1.4.5. Elementos para el diseño de este Modelo de Enseñanza 60

4. METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN 65

4.1. Justificación de la propuesta del Modelo Formal de Von Neumann 66

4.2. Elementos para el diagnóstico 71

4.3. Categorías de análisis 78

5. ANÁLISIS Y RESULTADOS DE LA EXPERIENCIA EMPÍRICA 80

5.1. Análisis cualitativo de la experiencia empírica 81

5.1.1. Identificación de dificultades recurrentes 81
5.1.2. Análisis de las dificultades observadas 82
5.2. Análisis cuantitativo de la experiencia empírica 96
5.2.1. Justificación teórica de los ejercicios escritos 98
5.2.2. Perfil de los alumnos de 1º - 2º grado Escuela Primaria "General Gertrudis Sánchez" ciclos escolares 2016 – 2017 y 2017 – 2018 100
5.2.2.1. Representación del perfil de grupo de 1º -2º grado en el plano tridimensional 109
5.2.3. Perfil de los alumnos de 3º - 4º grado Escuela Primaria "Susana I. Herrera Mascorro" ciclos escolares 2016 – 2017 y 2017 – 2018 110
5.2.3.1. Representación del perfil de grupo de 3º- 4º en el plano tridimensional. 122
5.2.4. Diagnóstico: Primeras aproximaciones 123
6. ANÁLISIS Y RESULTADOS DE LAS ENTREVISTAS CLÍNICAS 126
6.1. Análisis y resultados de las entrevistas clínicas 127
6.1.1. Protocolo de la entrevista 128
6.1.2. Categorías para el análisis 129
6.1.3. Selección de los estudiantes 131
6.2. Análisis de dificultades recurrentes (similares a la fase de experimentación) 132
6.3. Dificultades nuevas 141
6.4. Indicios de transición hacia la generalización 149
6.4.1. Generalización aritmética de acuerdo con el modelo de Von Neumann 150
6.4.2. Generalización hacia las nociones numéricas y sus operaciones 159
6.5. Resultados de las Entrevistas Clínicas 162
CONSIDERACIONES FINALES Y FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN 164
Referencias Bibliográficas 175
Anexos 179

Listado de figuras

1 Comparar, igualar.
2 Conteo Creciente y Decreciente.
3 Descomposición de números.
4 Carrera de autos.
5 Animales en orden.
6 Completar la serie numérica.
7 El cero como cifra en la resolución de problemas.
8 Lección I: La unidad e inicio de la secuencia contadora.
9 Lección II: La cardinalidad de los números y la introducción del cero.
10 Lección III: Cómo se forman los números.
11 Lección IV: La decena.
12 Esquematización del uso de símbolos y signos.

13 Inclusión jerárquica para la representación del número ocho.
14 Tabla de Suma.
15 Tabla de Multiplicación.
16 Métodos para realizar procedimientos para contar.
17 Proceso recursivo de construcción.
18 Bolsa construida por los niños.
19 Bolsa/número uno.
20 Así debió quedar la bolsa/número dos.
21 A la bolsa/número uno le falta la bolsa/número cero.
22 Construcción incompleta del número dos.
23 La bolsa etiquetada con el número uno esta vacía.
24 Representación tridimensional (Rojano, 1985).
25 Representación gráfica del diagnóstico del grupo de 1º - 2º.
26 Representación gráfica del diagnóstico del grupo de 3º - 4º.
27 Esquematización de la dificultad B3: falta la bolsa/número uno.
28 Guillermo tiene la dificultad para la construcción del sucesor del número tres.
29 Dificultad para usar la forma $a \cdot 10 + b$.
30 Ana intenta resolver el problema usando algoritmos en forma de columna.
31 Representación del uso de la reversibilidad para dotar de sentido el uso del proceso recursivo.
32 Dulce prepara las bolsas/número cero, uno y dos para introducirlas en la bolsa/número 3.

Listado de tablas

1. Secuencia de Actividades.
2. Concentrado de sesiones por grupo, grado y etapa en el ciclo escolar 2016 – 2017.
3. Concentrado de sesiones por grupo y grado en el ciclo escolar 2017 – 2018.
4. Actividades de suma y multiplicación (P_6).
5. Selección de los episodios.
6. Criterios de estratificación.
7. Concentrado General de todos los reactivos de los tres ejes, organizados de mayor a menor grado de dificultad del grupo de 1º - 2º grado.
8. Concentrado de los reactivos del Eje de Conocimientos Intuitivos organizados de mayor a menor grado de dificultad del grupo de 1º - 2º grado.
9. Concentrado de los estratos y clase de acuerdo con el número de reactivos por eje

10. Concentrado de los cinco estratos del eje Conocimientos Intuitivos.
11. Concentrado de reducción de estratos del eje Conocimientos Intuitivos.
12. Concentrado de los reactivos del Eje Semántico organizados de mayor a menor grado de dificultad del grupo de 1º - 2º grado.
13. Concentrado de los estratos y clase de acuerdo con el número de reactivos por eje.
14. Concentrado de los cinco estratos del eje Semántico.
15. Concentrado de reducción de estratos del eje Semántico.
16. Concentrado de los reactivos del Eje de Sintáctico organizados de mayor a menor grado de dificultad del grupo de 1º - 2º grado.
17. Concentrado de los estratos y clase de acuerdo con el número de reactivos por eje.
18. Concentrado de los cinco estratos del eje Sintáctico.
19. Concentrado de reducción de estratos del eje Sintáctico.
20. Concentrado de coordinadas y asignación de clase en cada eje del grupo de 1º - 2º.
21. Concentrado General de todos los reactivos de los tres ejes, organizados de mayor a menor grado de dificultad del grupo de 3º - 4º grado.
22. Concentrado de los reactivos del Eje de Conocimientos Intuitivos organizados de mayor a menor grado de dificultad del grupo de 3º - 4º grado.
23. Concentrado de los estratos y clase de acuerdo con el número de reactivos por eje.
24. Concentrado de los cinco estratos del eje Conocimientos Intuitivos.
25. Concentrado de reducción de estratos del eje Conocimientos Intuitivos.
26. Concentrado de los reactivos del Eje Semántico organizados de mayor a menor grado de dificultad del grupo de 3º - 4º grado.
27. Concentrado de los estratos y clase de acuerdo con el número de reactivos por eje.
28. Concentrado de los cinco estratos del eje Semántico.
29. Concentrado de reducción de estratos del eje Semántico.
30. Concentrado de los reactivos del Eje de Sintáctico organizados de mayor a menor grado de dificultad del grupo de 3º - 4º grado.
31. Concentrado de los estratos y clase de acuerdo con el número de reactivos por eje.
32. Concentrado de los cinco estratos del eje Sintáctico.
33. Concentrado de reducción de estratos del eje Sintáctico.
34. Concentrado de coordinadas y asignación de clase en cada eje del grupo de 3º - 4º.

35. Selección de alumnos que participaron en la Entrevista Clínica.

36. Generalización aritmética de acuerdo con el modelo de Von Neumann.

37. Generalización hacia las nociones numéricas y sus operaciones.

Listado de siglas

A_i: Dificultad recurrente clasificada en el eje Conocimientos Intuitivos.

APS: Argumentos como Procesos de Significación

B_i; Dificultad recurrente clasificada en el eje Semántico.

C_i: Dificultad recurrente clasifica en el eje Sintáctico.

DS: Dotación de Sentido

E: Entrevistadora

Letra Inicial del nombre del alumno en particular.

M: Maestra

MTL: Modelos Teóricos Locales.

N_i: Niño

OB: Obstáculos cognitivos.

P_i: Principio Matemático

SMS: Sistema Matemático de Signos.

UDEEI: Unidad de Educación Especial y Educación Inclusiva.

UNESCO: Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura.

Resumen

Esta investigación se desarrolló bajo la pespectiva de la Matemática educativa, sosteniendo que las dificultades del aprendizaje que tienen los niños no están en lo que hace la enseñanza o el aprendizaje; sino en la matemática misma. Por lo que el docente ha de conocer a fondo lo que tiene que enseñar. Para tal efecto, se diseñó un Modelo de Enseñanza para la construcción de los números naturales incluyendo el cero, con base en el modelo formal matemático de Von Neumann.

El marco teórico lo conforman los Modelos Teórico Locales (MTL) y sus cuatro componentes: de Competencia Formal, Cognitivo, de Comunicación y de Enseñanza.

El Objetivo General: Analizar la viabilidad de introducir un Modelo de Enseñanza, diseñado a partir de un Modelo Matemático Formal para la construcción de los números naturales, dirigido a niños de los primeros ciclos de Educación Primaria, trabajando simultáneamente la ordinalidad y cardinalidad, incluyendo el cero.

La organización metodológica de la investigación se realizó en tres fases: 1. Diseño de un Modelo Teórico Local (MTL) para la construcción de los números naturales incluyendo el cero, con la base formal matemática de Von Neumann. 2. Experimentación del Modelo de enseñanza: identificación y análisis de dificultades observadas durante las tres etapas de su aplicación, a partir del diseño de las categorías de análisis. 3. Diseño y aplicación de entrevistas clínicas a estudiantes previamente seleccionados de acuerdo con los criterios establecidos en el análisis cuantitativo y cualitativo del diagnóstico.

Como resultado de la investigación se encontró que las maneras de cómo han aprendido las nociones numéricas influyen en el aprendizaje de los niños, pero no lo determinan y hay posibilidades de consolidar las nociones numéricas, cuando tienen la oportunidad de trabajar con un modelo de enseñanza diseñado con una base matemática formal, como lo es el Modelo matemático de Von Neumann.

Se llega a la conclusión de que es necesario retomar las bases formales matemáticas en el diseño de los Modelos de Enseñanza para acercar a los niños a las nociones de los números naturales incluyendo el cero. Incorporar la componente formal matemática en el diseño de libros de texto y en el currículo de los profesores en formación.

Abstract

This research was developed under the perspective of Educational Mathematics, arguing that children's learning issues are not in what teaching or learning does; but in mathematics itself. So, the teacher has to know deeply what he has to teach. For this purpose, a Teaching Model was designed for the construction of natural numbers including zero, based on Von Neumann's formal mathematical model.

The theoretical framework is made up of the Local Theoretical Models (MTL) and its four components: Formal Competence, Cognitive, Communication and Teaching.

The General Objective: To analyze the feasibility of introducing a Teaching Model, designed from a Formal Mathematical Model for the construction of natural numbers, aimed to children from the first cycles of Primary Education, simultaneously working ordinality and cardinality, including zero.

The methodological organization of the research was carried out in three phases: 1. Design of a Local Theoretical Model (MTL) for the construction of natural numbers including zero, with the formal mathematical basis of Von Neumann. 2. Experimentation of the Teaching Model: identification and analysis of difficulties observed during the three stages of its application, based on the design of the categories of analysis. 3. Design and application of clinical interviews to previously selected students according to the criteria established in the quantitative and qualitative analysis of the diagnosis.

As a result of this research, we found that ways they have learned numerical notions influence children's learning, but they do not determine it and there are possibilities to consolidate numerical notions, when they have the opportunity to work with a teaching model designed on a formal mathematical basis, such as von Neumann's Mathematical Model.

It is concluded that it is necessary to return to the formal mathematical bases in the design of teaching models to bring children closer to the notions of natural numbers including zero. Incorporate the formal mathematical component into the design of textbooks and in curriculum teacher’s in training.

Presentación

Este documento doctoral se ha organizado en seis capítulos, en los cuales se va a describir el proceso que se siguió, cerrando la investigación con las consideraciones finales.

Capítulo 1. Problema Aritmético de Investigación. - En este capítulo se problematiza la importancia de la construcción conceptual de los números naturales en sus dimensiones de ordinalidad y cardinalidad, identificando su carencia en la enseñanza en educación primaria.

Capítulo 2. Marco de Referencia. - Este capítulo se presentan algunas investigaciones y aproximaciones para la construcción de los números naturales en niños de educación básica. Se reconoce la influencia de las teorías cognitivas fundamentalmente derivadas de los aportes de Piaget y su impacto en Educación Matemática. Se presenta la Teoría de la Actividad y las Acciones Mentales, proveniente de las teorías cognitivas soviéticas encabezadas por Ya. Galperín y Talizina.

Capítulo 3. Marco Teórico: Modelos Teóricos Locales. - En la primera parte de este capítulo se presenta una breve descripción de esta propuesta teórico – metodológico para realizar investigación en Matemática Educativa. Se explica cada una de sus cuatro componentes. En la segunda parte de este capítulo se presenta el diseño de un MTL específico, para la construcción de los números naturales, explicando el contenido de cada componente:

- Modelo de Competencia Formal. - Se hace una breve epistemología de la historia de las ideas de la construcción de los números y el número cero. Se recuperan los elementos básicos de la adaptación que hacen Hamilton & Landin (1961) del modelo de Von Newman, traduciéndolos en principios matemáticos (P_i) para la construcción de los números naturales, usando la iteración y recursión para cada sucesor, empezando por el número cero.
- Modelo de Cognición. - Se aborda el proceso de transición de la acción a la operación, teniendo como referente la Teoría de la actividad de Galperín y Talizina. Para finalizar, se incorporan las aportaciones de Fuson (1982), para entender y comprender cómo se desarrollan los procesos de conteo en los niños.
- Modelo de Comunicación. - Se parte del referente de los conceptos semióticos para explicar la lógica de uso de los SMS involucrados en la construcción de los números

naturales, para llegar a la abstracción. Se explica el papel de la semiótica en la construcción del significado propuesta por Peirce (1987), para desarrollar procesos de significación.

- Modelo de Enseñanza. - Con base en los P_i (traducción del Modelo Von Neumann para la construcción de los números naturales) se diseñan secuencias de actividades, con el uso de material manipulativo, para ser trabajadas con los niños de 6 a 9 años en espacios de intertextualidad. Con el análisis de la observación se identifican la producción de códigos en la construcción de textos con sentido matemático, así como en los procesos de lectura/transformación que se generan durante la interacción entre los participantes y acciones de la enseñanza.

Capítulo 4. Metodología de la investigación. - Se fundamenta el procedimiento para la construcción del diseño del diagnóstico y la experimentación con base en la estructura de los MTL, justificando la pertinencia del Modelo formal de Von Neumann. Se presenta el esquema del diseño de la observación experimental y se describen las categorías de análisis.

Capítulo 5. Se describe el proceso de la experimentación y el diseño de las categorías de análisis para interpretar las acciones y dificultades que se presentaron durante el desarrollo de las actividades del Modelo de Enseñanza.

Capítulo 6. Análisis y resultados de experiencia empírica.- Se presenta el análisis de algunos episodios de las tres etapas de la experimentación, centrando la atención en donde se observaron dificultades recurrentes para ser interpretadas a la luz de las categorías. Se contrastaron los resultados con el análisis de la entrevista clínica, presentando algunos fragmentos de los momentos en que se volvieron a presentar dificultades recurrentes, dificultades nuevas e indicios de generalización tendiente a la abstracción numérica.

Consideraciones Finales. Se cierra este momento de la investigación insistiendo en que el objetivo del trabajo no fue mejorar la enseñanza, sino en averiguar y comprender qué dificultades enfrentan el alumnado cuando se les enseña con un modelo diseñado a partir de una base formal matemática para el aprendizaje de los números naturales y los SMS involucrados, usando la iteración y recursividad para obtener el sucesor.

Como reflexión de este proceso de investigación, se llega a la conclusión que al trabajar un Modelo de Enseñanza diseñado con una estructura matemática formal, abre un horizonte de posibilidades para que los niños desarrollen un pensamiento matemático desde los primeros grados de educación primaria.

Continuidad de la investigación. - Se considera que es necesario recuperar la tradición formal matemática en la enseñanza, para potenciar el pensamiento abstracto, que les permita a los alumnos acceder a niveles superiores de conocimiento matemático. Incorporar en la formación de maestros, la componente formal matemática en el currículo de formación docente de las Escuelas Normales.

Como producto del proceso de investigación se publicaron siete artículos y comunicaciones a congresos (ver anexo 1).

1. PROBLEMA ARITMÉTICO DE INVESTIGACIÓN

Introducción

En todos los espacios de la vida social el uso de los números es una actividad cotidiana. Desde el hogar a los niños en edades tempranas se les motiva a realizar actividades que implican acciones clasificar, seriar y ordenar, relacionadas con el conteo. Sin embargo, el que puedan expresar oralmente secuencias numéricas, reconocer y dibujar algunos numerales e incluso identificar algunas regularidades del sistema de numeración, no significa que tengan nociones aritméticas, ni que reconozcan que "…la numeración tiene que ver con las reglas sintácticas y fonéticas para expresar el número." (Gómez, 1988, p. 17) Aún les falta discriminar los diferentes usos de los números: contar, numerar, medir, operar y su sentido ordinal además del cardinal (Gómez, 1988, p. 18 – 23). Una de las funciones de los sistemas educativos es introducir las nociones de los números naturales para establecer las bases del desarrollo del pensamiento matemático infantil.

En muchos países y en particular en México, el tratamiento de los números naturales en educación primaria enfatiza la cardinalidad en detrimento de la ordinalidad; convirtiéndose en una carencia conceptual acerca de las nociones numéricas. La tradición antigua de enseñanza de las décadas 70's y 80's del siglo pasado, consideraba ambas componentes; sin embargo, a partir de la adaptación de las ideas de Piaget al diseño de la currícula se enfocó en la cardinalidad de conjuntos, el conteo como la correspondencia uno – uno, numerar y operar, entre otros usos. Aunque los programas de matemáticas en la actualidad ya no tienen ese referente teórico, en la enseñanza se sigue trabajando de esa manera, predominando la memorización, la ejercitación de la secuencia contadora, la mecanización los algoritmos de adición y multiplicación.

Si bien es cierto, que el proceso de desarrollo que siguen los niños en la construcción numérica, ha generado numerosas investigaciones; todavía no se ha podido determinar con precisión las dificultades que tienen los niños para comprender y usar el concepto de número. Aún quedan muchas líneas de investigación por continuar y construir.

A partir de ahí, nos preguntamos si es posible avanzar en el tratamiento "paralelo" de la cardinalidad y ordinalidad de los números naturales sin que una componente eclipse a la otra, a partir de una fundamentación matemática formal.

Desde la mirada de la Matemática Educativa sostiene que las dificultades de aprendizaje de los niños no están sólo en la enseñanza ni en los procesos de aprendizaje; están principalmente en la matemática, por lo que se considera necesario conocer con profundidad la estructura matemática para trasladarla a la enseñanza.

A tal fin, de acuerdo con Filloy, Rojano & Puig (2008), es el análisis formal matemático lo que permite observar el origen de la problemática al reducirla a sus elementos primarios. En el caso de la construcción de los números naturales, estos elementos primarios están, de acuerdo con el modelo formal de Von Neumann (Hamilton & Landin, 1961), en la *iteración* como la operación más básica y como base del proceso recursivo.

Siguiendo la misma lógica de construcción, en este trabajo se considera fundamental iniciar el aprendizaje de los números naturales con el número cero, como lo propone el modelo matemático de Von Neumann, quien usa la teoría de conjuntos y encapsula la axiomatica de Peano en el principio de inducción finita a través de la *iteración*, para construir el *sucesor* a partir de un número finito de iteraciones usando un proceso *recursivo*, bajo la adaptación de Hamilton & Landin (1961).

Objetivos y preguntas de investigación

El Objetivo General de la investigación fue estudiar la viabilidad de introducir un Modelo de Enseñanza, diseñado a partir de un Modelo Matemático Formal para la construcción de los números naturales, dirigido a niños de los primeros ciclos de Educación Primaria, trabajando simultáneamente la ordinalidad y cardinalidad, incluyendo el cero.

De este objetivo General se desprenden tres objetivos particulares:

- Diseñar e implementar un modelo de enseñanza que traslade el Modelo Formal de Von Neumann a secuencias de actividades concretas.
- Identificar y explicar dificultades que tienen los niños de los dos primeros ciclos de educación primaria en la construcción de los números naturales cuando trabajan con un modelo de enseñanza con base en el modelo de Von Neumann.
- Contrastar a través de la entrevista clínica las dificultades observadas durante la experimentación.

Para lograr estos objetivos se diseñó el proyecto que sustenta esta tesis doctoral en tres fases:

1. Diseñar un Modelo de Enseñanza con base en Von Neumann, dirigido a niños de 6 a 9 años.
2. Experimentar el modelo con tres grupos (1º, 2º y 3º) de educación primaria e identificar dificultades de aprendizaje.
3. Contrastar a través de la entrevista clínica las dificultades observadas durante la experimentación.

Para guiar estas fases se plantearon las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Qué elementos del modelo formal en los términos señalados por Hamilton & Landin (1961) se deben considerar para diseñar un Modelo de Enseñanza que se traduzca en actividades concretas, dirigidas a niños de 6 a 9 años de edad?
- ¿Qué dificultades se pueden observar cuando los niños trabajan a partir de la construcción de los números naturales, con base en ese Modelo de Enseñanza?
- ¿Cuál es el efecto del Modelo de Enseñanza con relación a las dificultades observadas en su implementación, una vez transcurrido un periodo aproximado de un curso escolar desde su implementación?

Marco teórico

El sustento teórico con que se organiza la investigación lo conforman los Modelos Teóricos Locales (MTL) y sus cuatro componentes: El *Modelo de Competencia Formal* es la base teórica para el diseño del *Modelo de Enseñanza*; las actuaciones de los estudiantes son interpretados a la luz de los Modelos de Cognición y el Modelo de Comunicación.

Diseño Metodológico

El desarrollo de la investigación se realizó en tres fases, durante los ciclos escolares 2016 – 2017 y 2017 – 2018. La experimentación se realizó en tres etapas, con la participación de tres grupos de los dos primeros ciclos de educación primaria. Las sesiones fueron video grabadas y transcritas para su análisis.

Fase 1

En esta primera fase se planeó el diseño del Modelo Teórico Local a partir de la estructura matemática de Von Neumann para la construcción de los números naturales, incluyendo el cero, bajo la adaptación de Hamilton & Landin (1961), traduciendo los elementos principales en principios matemáticos y después a secuencias de actividades en el diseño del Modelo Enseñanza.

Fase 2

En esta segunda fase se experimentó el modelo de enseñanza con alumnos de tres grupos de educación primaria durante el ciclo escolar (2016 – 2017). Cada una de las sesiones fueron video grabadas, para identificar dificultades que se presentaron durante el proceso y explicarlas con los aportes de las componentes formal, cognición y de comunicación:

- Se identificaron dificultades recurrentes que presentaron los alumnos.
- Para entender estas dificultades se diseñaron las categorías de análisis, las cuales fueron producto de las aportaciones de cada componente, organizándolas en tres bloques: Obstructores provenientes de procesos y conocimientos cognitivos; Argumentos como procesos de Significación y procesos de Dotación de Sentido de los SMS.
- Se explican las dificultades a la luz de las categorías.

Las dificultades que se identificaron en los estudiantes con las actividades de la secuencia del Modelo de Enseñanza se tipificaron como sigue:

A. Uso de conocimientos pragmáticos y espontáneos de los números en diversas situaciones.

B. Uso semántico de los números en acciones de representación y conteo.

C. Uso sintáctico en las operaciones.

De la observación de cada una de las sesiones, los ejercicios escritos y la actuación de los alumnos, se estructuró el perfil grupal. Con base en este diagnóstico se establecieron los criterios de selección de los niños que participaron en la entrevista clínica:

a) Registro y análisis Cuantitativo de respuestas a los ejercicios escritos de cada alumno.

b) Análisis Cualitativo de su desempeño en cada sesión grupal.

Por sus resultados cada alumno se clasificó en estratos (alto, medio y bajo), usando el modelo tridimensional propuesto por Rojano (1985).

Fase 3

En la tercera fase se aplicó la entrevista clínica en el siguiente ciclo escolar (2017 – 2018), con la finalidad de comparar si persistían las dificultades identificadas durante la experimentación, si se superaron o si aparecieron nuevas.

Se aplicaron seis entrevistas, seleccionando un alumno representante de cada estrato, tres niños de 2º grado y tres de 4º grado.

Resultados

Se da respuesta a las preguntas que guiaron el proceso:

1. ¿Qué elementos del modelo formal en los términos señalados por Hamilton & Landin (1961) se deben considerar para diseñar un Modelo de Enseñanza que se traduzca en actividades concretas, dirigidas a niños de 6 a 9 años de edad?

Los elementos que se deben considerar del Modelo de Von Neumann para el diseño de un Modelo de Enseñanza, traducidos a principios matemáticos:

- El conjunto vacío como número cero.
- Construcción del sucesor.
- Todo conjunto está ordenado por la manera de construirlo (definición de los números naturales).
- El conteo es una relación ordenada por el mismo proceso de construcción a partir del uso del intervalo $[1, n]$.
- Uso de la forma $10 + a$ para representar números mayores de 10 en construcción de la tabla de suma y la forma $a \cdot 10 + b$, cuando el producto implica la iteración del número diez como unidad, en la construcción de la tabla de multiplicación.

2. ¿Qué dificultades se pueden observar cuando los niños trabajan a partir de la construcción de los números naturales, con base en ese Modelo de Enseñanza?

Dificultades recurrentes que se observaron:

Identificar el cero como número.

Identificar el sucesor y antecesor de cualquier número.

Identificar el número cero como conjunto vacío.

Reconocer que el cero es el único número que pertenece a cualquier sucesor.

El cero es el único número que no es un sucesor.

Todo sucesor contiene a sus anteriores.

Identificar el número cero como punto origen en la recta

El uso de la forma $a \cdot 10 + b$, para representar a los sucesores y productos mayores de 10.

Con este análisis se planteó la pregunta:

3. ¿Cuál es el efecto del Modelo de Enseñanza con relación a las dificultades observadas en su implementación, una vez transcurrido un periodo aproximado de un curso escolar desde su implementación?

Una vez transcurrido un ciclo escolar, las entrevistas mostraron:

a) Nuevas dificultades, relacionadas con el uso de la relación de clasficación para seleccionar objetos para formar conjuntos, el uso de las propiedades asociativa y conmutativa en la resolución de problemas.

b) Indicios de transición hacia la generalización aritmética de acuerdo con el Modelo de Von Neumann.

c) Indicios de Generalización hacia las nociones numéricas y sus operaciones.

Como resultado de la investigación se encontró que existen posibilidades de potenciar el aprendizaje de los números naturales incluyendo el cero. Que se pueden implementar modelos de enseñanza con una base formal desde los primeros grados de educación primaria.

1.1. Importancia de la construcción conceptual de los números

El rumbo de la educación en este siglo XXI, requiere reformar sus propuestas curriculares con la finalidad de que nuestro país esté a la vanguardia, que le permita alcanzar los estándares de calidad educativa que propone la UNESCO. La intención curricular del Plan de Estudios 2011, pretende mejorar el desempeño académico de todos sus integrantes: maestros, alumnos, y comunidad; así como contar con materiales, infraestructura y recursos didácticos; para que los estudiantes desarrollen su capacidad para resolver los problemas que la vida cotidiana les presenta.

El Plan de Estudios vigente (SEP, 2011, p. 53) afirma que "…el estudio de la matemática considera el conocimiento y uso del lenguaje aritmético, algebraico y geométrico, así como la interpretación de información y de los procesos de medición." Los programas de estudio estructuran los aprendizajes en tres ejes: Sentido numérico y pensamiento algebraico, Forma espacio y medida, Manejo de la información y Actitud hacia el estudio de las matemáticas. Los contenidos se organizan secuencialmente de lo simple a lo complejo. El enfoque didáctico apuesta por una "... formación matemática que permite a los individuos enfrentar con éxito los problemas de la vida cotidiana, lo que depende en gran parte de los conocimientos adquiridos y de las habilidades y actitudes desarrolladas durante la educación básica." (SEP, 2015, p. 65). La Enseñanza de las matemáticas se concreta en secuencias de actividades llamadas *Desafíos Matemáticos* como estrategia pedagógica, para que los niños y docentes desarrollen herramientas matemáticas que les permita poner en práctica sus conocimientos matemáticos. Como parte de las orientaciones didácticas, se sugieren diferentes formas de interacción: individual, en parejas, en equipos y grupalmente; que los alumnos intenten resolverlos en un primer momento para después compartir con sus compañeros sus procesos y resultados, momento fundamental para reflexionar y analizar sus dificultades y aciertos.

Sin embargo, en la práctica se observa que los maestros trabajan los desafíos como lecciones o ejercicios, de forma individual, los dejan de tarea en casa, los califican perdiendo la esencia metodológica para promover la creatividad y gusto por las matemáticas.

Con estas acciones se rompe con el sentido pedagógico de la evaluación como un proceso de valoración y análisis de los procedimientos que realizaron para consensar los más factibles y económicos, las dificultades que tuvieron y cómo lo resolvieron; no respetan su secuencia gradual en torno a la complejidad conceptual. El resultado de esta situación es común observar prácticas docentes centradas en el uso de ejercicios fotocopiados (de libros de matemáticas que no tienen coherencia con el enfoque metodológico de la asignatura de matemáticas), incluyendo mecanización de algoritmos de aditivos y multiplicativos como los siguientes:

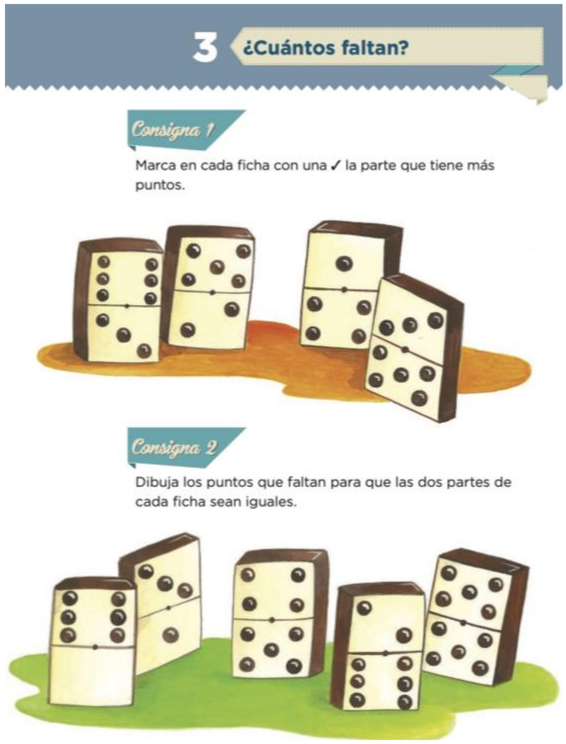
845	935	834
+ 356	- 237	x 46

Reyes Jaramillo y Ramos Palacios (2017), investigaron las dificultades que tienen los profesores para el manejo de los libros de texto y sus orientaciones didácticas y encontraron que

> …el 58% de los profesores los emplean para reafirmar el contenido y verificar qué aprendieron como ejercicio individual (…) el 33% comentó que son útiles para evaluar de manera formativa (…) y el 16% los califica y son evaluaciones formales. (Reyes Jaramilllo y Ramos Palacios, 2017, p. 7),

Se aclara que este trabajo no tiene la intención de problematizar sobre las dificultades que tienen los profesores en el manejo de las orientaciones didácticas para trabajar los Desafíos Matemáticos, propuestos en el currículo oficial; sin embargo, es otro problema que se debe atender.

Por otro lado, al revisar los contenidos temáticos que estructuran el Eje *Sentido Numérico y Pensamiento Algebraico* del Programa oficial de matemáticas de Educación Primaria (SEP, 2011), para el aprendizaje de los números naturales, se observa que predomina el enfoque cardinal por encima del ordinal. Se pueden encontrar una gran cantidad de actividades de cardinalidad en el libro Desafíos Matemáticos para el alumno de primer grado (SEP, 2015), se proponen actividades relacionadas con acciones para comparar e igualar conjuntos como se muestra en la figura 1 (SEP, 2015, p. 12); conteo de la secuencia numérica hacia adelante y hacia atrás <ver la figura 2> (SEP, 2015, p. 13 y 15); descomposición de números (figura 3).



3 ¿Cuántos faltan?

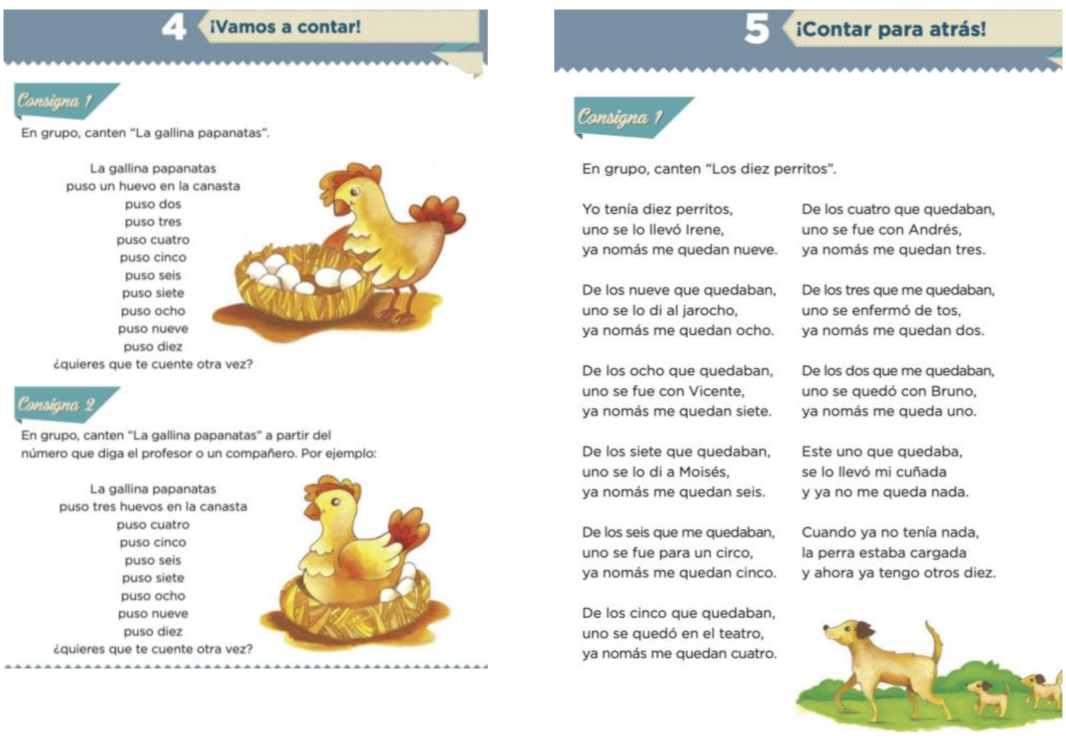
Consigna 1

Marca en cada ficha con una ✓ la parte que tiene más puntos.

Consigna 2

Dibuja los puntos que faltan para que las dos partes de cada ficha sean iguales.

Fig. 1. Comparar, igualar



4 ¡Vamos a contar!

Consigna 1

En grupo, canten "La gallina papanatas".

La gallina papanatas
puso un huevo en la canasta
puso dos
puso tres
puso cuatro
puso cinco
puso seis
puso siete
puso ocho
puso nueve
puso diez
¿quieres que te cuente otra vez?

Consigna 2

En grupo, canten "La gallina papanatas" a partir del número que diga el profesor o un compañero. Por ejemplo:

La gallina papanatas
puso tres huevos en la canasta
puso cuatro
puso cinco
puso seis
puso siete
puso ocho
puso nueve
puso diez
¿quieres que te cuente otra vez?

5 ¡Contar para atrás!

Consigna 1

En grupo, canten "Los diez perritos".

Yo tenía diez perritos,
uno se lo llevó Irene,
ya nomás me quedan nueve.

De los nueve que quedaban,
uno se lo di al jarocho,
ya nomás me quedan ocho.

De los ocho que quedaban,
uno se fue con Vicente,
ya nomás me quedan siete.

De los siete que quedaban,
uno se lo di a Moisés,
ya nomás me quedan seis.

De los seis que me quedaban,
uno se fue para un circo,
ya nomás me quedan cinco.

De los cinco que quedaban,
uno se quedó en el teatro,
ya nomás me quedan cuatro.

De los cuatro que quedaban,
uno se fue con Andrés,
ya nomás me quedan tres.

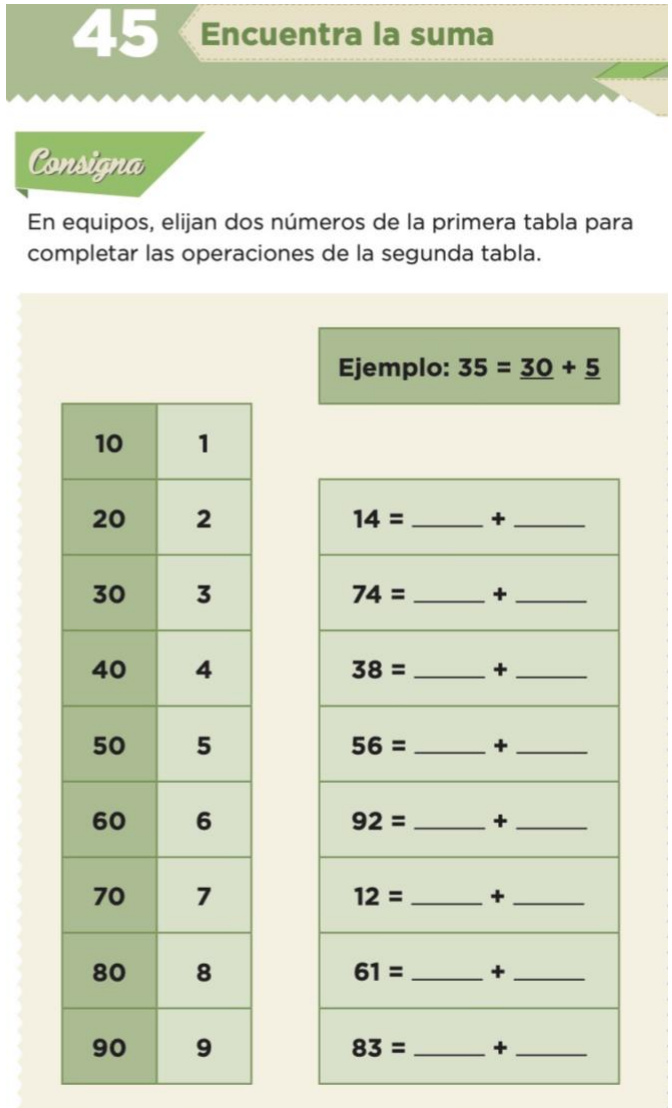
De los tres que me quedaban,
uno se enfermó de tos,
ya nomás me quedan dos.

De los dos que me quedaban,
uno se quedó con Bruno,
ya nomás me queda uno.

Este uno que quedaba,
se lo llevó mi cuñada
y ya no me queda nada.

Cuando ya no tenía nada,
la perra estaba cargada
y ahora ya tengo otros diez.

Fig. 2. Conteo Creciente y Decreciente



45 Encuentra la suma

Consigna

En equipos, elijan dos números de la primera tabla para completar las operaciones de la segunda tabla.

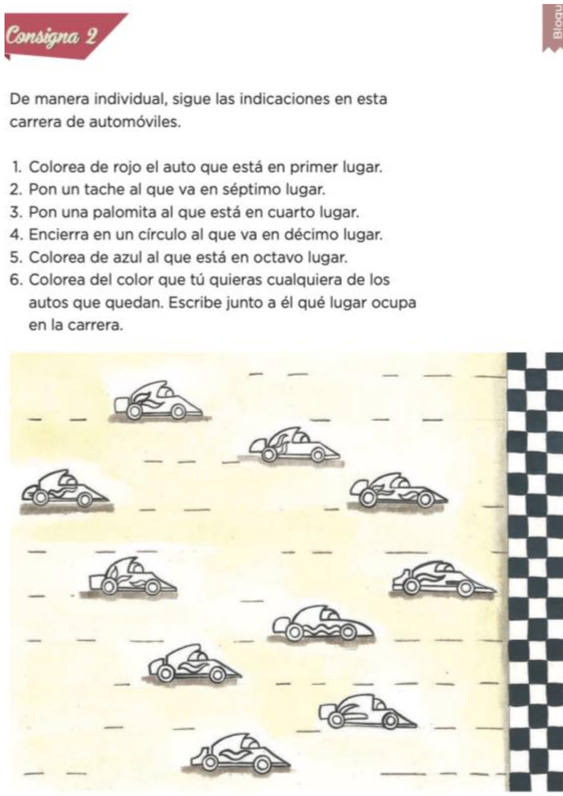
Ejemplo: 35 = 30 + 5

10	1
20	2
30	3
40	4
50	5
60	6
70	7
80	8
90	9

14 = _____ + _____
74 = _____ + _____
38 = _____ + _____
56 = _____ + _____
92 = _____ + _____
12 = _____ + _____
61 = _____ + _____
83 = _____ + _____

Fig. 3. Descomposición de números

Mientras que para la componente ordinal sólo hay un contenido temático en todo el programa de Educación Primaria, el cual está traducido en el libro de texto para el alumno de primer grado en dos Desafíos: *"Carrera de autos"* (SEP, 2015, p. 39) en esta secuencia de actividades los niños tienen que colorear los coches de acuerdo con el orden de llegada a la meta (figura 4) y *"Animales en orden"* (SEP, 2015, p. 40) donde la tarea consiste en que los niños deben conjuntar el juego de cartas ilustrado con imágenes de animales con el juego de cartas ilustrado con números ordinales (figura 5).



Consigna 2

De manera individual, sigue las indicaciones en esta carrera de automóviles.

1. Colorea de rojo el auto que está en primer lugar.
2. Pon un tache al que va en séptimo lugar.
3. Pon una palomita al que está en cuarto lugar.
4. Encierra en un círculo al que va en décimo lugar.
5. Colorea de azul al que está en octavo lugar.
6. Colorea del color que tú quieras cualquiera de los autos que quedan. Escribe junto a él qué lugar ocupa en la carrera.

Fig. 4. Carrera de autos

18 Animales en orden

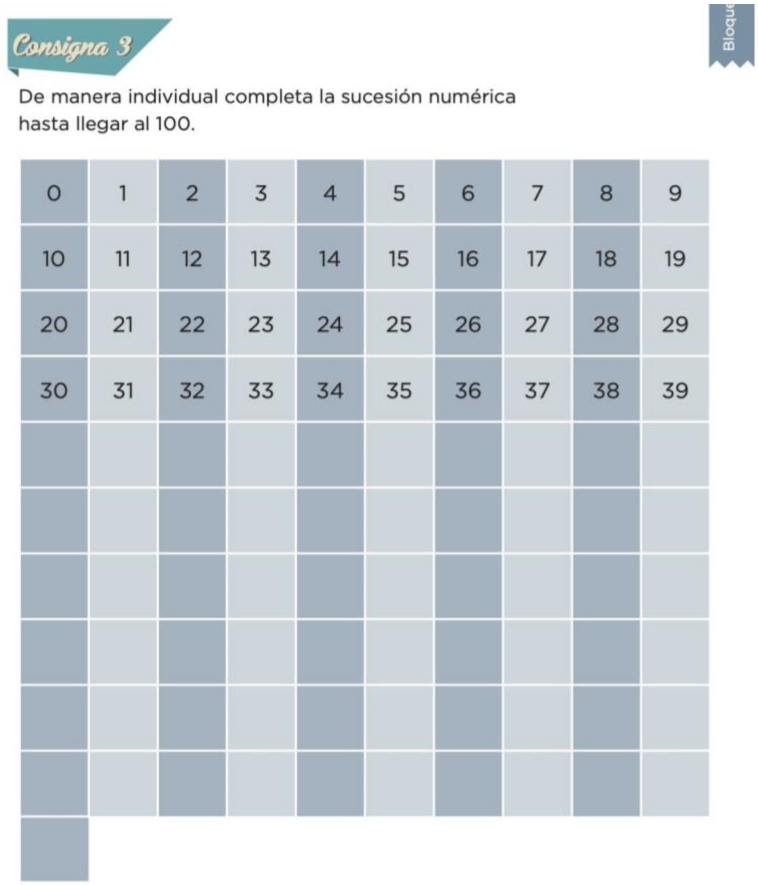
Consigna

En equipos, jueguen con el material recortable de las páginas 131-135.

1. Sobre la mesa hay un juego de tarjetas con animales y otro juego de tarjetas con números ordinales. El maestro tomará una tarjeta de los dos juegos y leerá lo que contienen, por ejemplo, "tiburón, sexto". Cada equipo deberá colocar el tiburón de su juego de tarjetas junto a la que tiene escrito el número correspondiente en el sexto lugar.
2. Cuando el maestro termine de leer las tarjetas de ambas columnas, vean qué equipos acomodaron correctamente las 10 tarjetas. Estos equipos ganarán un punto.
3. Después de cinco rondas, ganará el juego el equipo que sume más puntos.

Fig. 5. Animales en orden

La conceptualización del cero como número natural no está presente. El trabajo comienza en el Desafío 9 “Competencias”, con una actividad para completar la secuencia numérica que inicia con el número cero, para llegar al número cien (SEP, 2015, p. 25) ver figura 6.


Consigna 3

Bloque

De manera individual completa la sucesión numérica
hasta llegar al 100.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39

Fig. 6. Completar la serie numérica

A partir de esta actividad, en las siguientes lecciones se usa el cero como cifra, en la resolución de problemas, como se ve en el ejemplo de la figura 7 (SEP, 2015, p. 41).

Fig. 7. El cero como cifra en la resolución de problemas

1.2. Sobre los Modelos de Enseñanza

En los modelos de enseñanza desde mediados del siglo XIX hasta la década de los 80´s y 90´s del siglo XX, se favorecía la construcción de los números naturales como cardinales y ordinales, incluyendo el cero, relacionado con las nociones de “no tener o valer nada” y de representación de “la columna vacía”.

Conviene señalar que las raíces de estos modelos se encuentran en la Aritmética para niños de Condorcet (1854), *Moyens d’apprendre a compter* (*Maneras de aprender a contar*), que destaca por su trascendencia e influencia histórica al ser la primera obra elemental para la instrucción pública seleccionada en un concurso público en Francia. Esta obra plantea que los números naturales se construyen agregando un elemento para obtener el siguiente, hasta llegar a 9. La decena se compone con el 1 y 0 y los números subsecuentes: diez y uno, diez y dos, diez y tres ... en vez de once, doce, trece… Para las decenas se hace el mismo procedimiento: agregar una unidad del siguiente orden para tener veinte, treinta, cuarenta... hasta llegar a la centena. Para el cambio de unidad, propone la regla: “…la siguiente unidad se va a escribir con tantos ceros como nueves tenga: 9 – 10, 99 – 100; ...” (Condorcet, 1854, p. 22).

Un ejemplo de libro para niños que sigue este modelo es la *Aritmética del Párvulo* (Aguado, 1940), en las figuras 8 a 11 se muestran las lecciones I a IV:

La Lección I empieza por el número uno y sigue con la secuencia contadora, mostrando el sentido ordinal y cardinal de los números como signos que representan cantidades.


2 I Lección

I
LA UNIDAD

Yo quiero **una** muñeca. Yo tengo **un** perro. Yo veo **un** árbol.

¿Cuántos árboles veo? **Uno.**
¿Cuántas muñecas quiero? **Una.**
¿Cuántos perros tengo? **Uno.**

Un perro, una muñeca un árbol, son **unidades.**
El uno de cada cosa es la unidad.

La Unidad 3

Yo quiero aprender a contar:

Una manzana. **Dos** manzanas.

Tres manzanas.

BIBLIOTECA VALENCIA

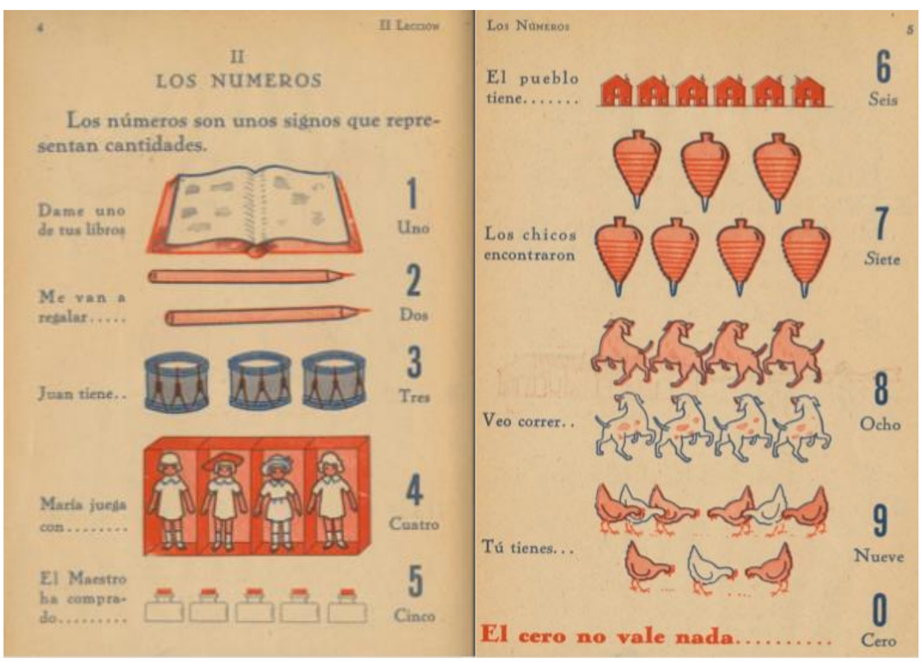
Una, dos, tres .... son números.

EJERCICIOS

Contad las unidades que veáis en la habitación.

Fig. 8. Lección I: *La unidad e inicio de la secuencia contadora*

En la lección II se introduce el sentido de cardinalidad de los números dígitos y el cero después del nueve.


4 II Lección

II
LOS NUMEROS

Los números son unos signos que representan cantidades.

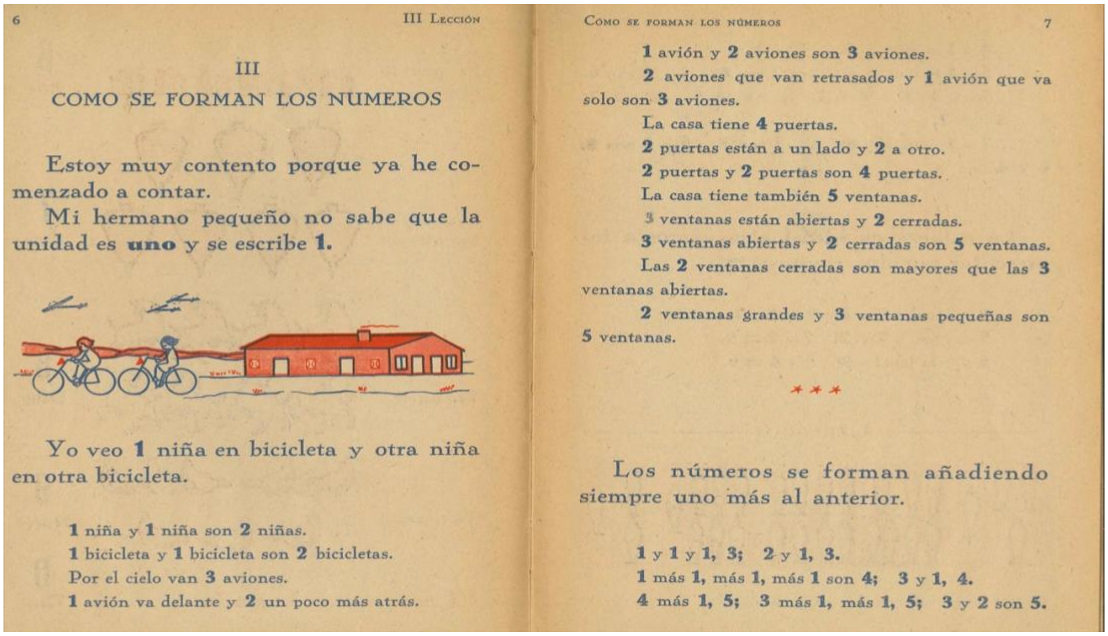
Dame uno de tus libros — 1 Uno
Me van a regalar..... — 2 Dos
Juan tiene.. — 3 Tres
María juega con........ — 4 Cuatro
El Maestro ha comprado......... — 5 Cinco

Los Números 5

El pueblo tiene....... — 6 Seis
Los chicos encontraron — 7 Siete
Veo correr.. — 8 Ocho
Tú tienes... — 9 Nueve
El cero no vale nada.......... — 0 Cero

Fig. 9. Lección II: *La cardinalidad de los números y la introducción del cero*

En la lección III se aborda el sentido ordinal de los números y explica que se forman añadiendo siempre uno más al anterior, comenzando a partir del uno.



6 III Lección

III

COMO SE FORMAN LOS NUMEROS

Estoy muy contento porque ya he comenzado a contar.

Mi hermano pequeño no sabe que la unidad es **uno** y se escribe **1.**

Yo veo **1** niña en bicicleta y otra niña en otra bicicleta.

1 niña y **1** niña son **2** niñas.
1 bicicleta y **1** bicicleta son **2** bicicletas.
Por el cielo van **3** aviones.
1 avión va delante y **2** un poco más atrás.

Como se forman los números 7

1 avión y **2** aviones son **3** aviones.

2 aviones que van retrasados y **1** avión que va solo son **3** aviones.

La casa tiene **4** puertas.
2 puertas están a un lado y **2** a otro.
2 puertas y **2** puertas son **4** puertas.
La casa tiene también **5** ventanas.
3 ventanas están abiertas y **2** cerradas.
3 ventanas abiertas y **2** cerradas son **5** ventanas.

Las **2** ventanas cerradas son mayores que las **3** ventanas abiertas.

2 ventanas grandes y **3** ventanas pequeñas son **5** ventanas.

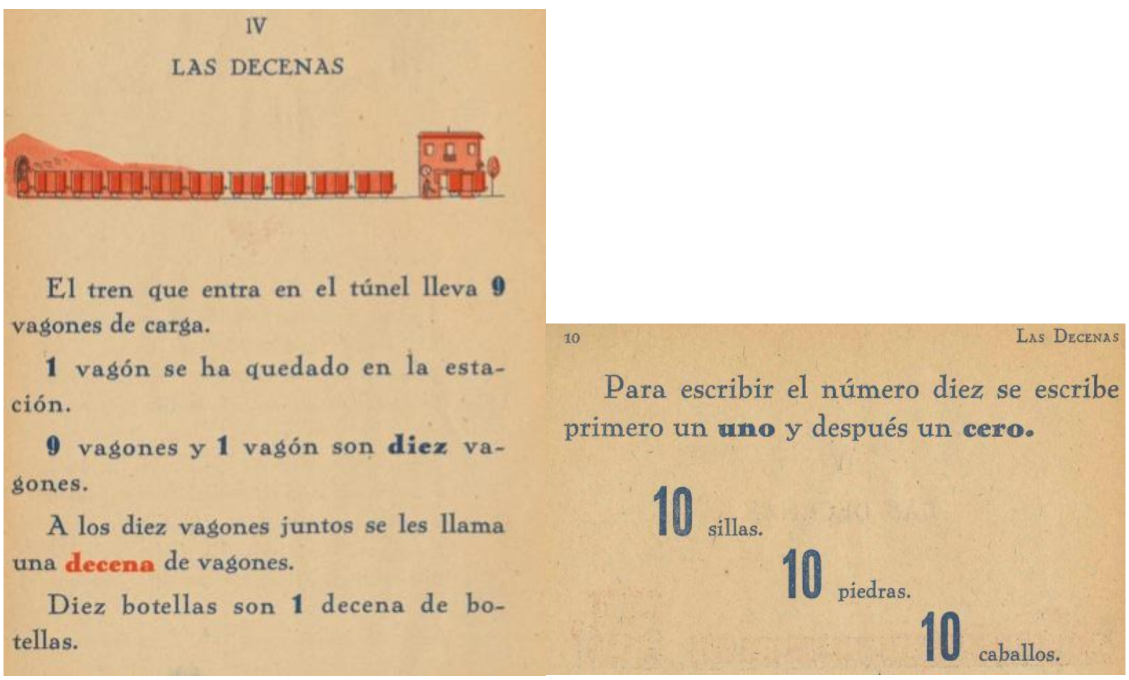
* * *

Los números se forman añadiendo siempre uno más al anterior.

1 y **1** y **1, 3; 2** y **1, 3.**
1 más **1,** más **1,** más **1** son **4; 3** y **1, 4.**
4 más **1, 5; 3** más **1,** más **1, 5; 3** y **2** son **5.**

Fig. 10. Lección III: *Cómo se forman los números*

En la lección IV se introduce el concepto de decena a partir del diez, que es uno más que el nueve, como denominación de diez ítems juntos.



IV

LAS DECENAS

El tren que entra en el túnel lleva **9** vagones de carga.

1 vagón se ha quedado en la estación.

9 vagones y **1** vagón son **diez** vagones.

A los diez vagones juntos se les llama una **decena** de vagones.

Diez botellas son **1** decena de botellas.

10 Las Decenas

Para escribir el número diez se escribe primero un **uno** y después un **cero.**

10 sillas.

10 piedras.

10 caballos.

Fig. 11. Lección IV: *La decena*

1.3. Breve conceptualización de la noción de números naturales

Desde el punto de vista de la epistemología de los números naturales, en este trabajo no hemos considerado la discusión Cantor – Peano, dado que para Cantor (Mosterín, 2000, pp. 15 – 17), pero el número se asocia a la cardinalidad de un conjunto y el conteo a la correspondencia biunívoca entre conjuntos equipotentes; los números se construyen separados unos de otros; el orden se da a partir de la relación de inclusión entre conjuntos. Para Peano, los números se construyen desde una perspectiva ordinal, asociada a la axiomatización a partir de la idea del sucesor. Estas contribuciones han permitido conceptualizar a los números naturales y han permeado las propuestas curriculares en educación primaria. En ese sentido, este trabajo se propone un modelo formal matemático distinto que recupera ambas aportaciones.

El modelo matemático de J. Von Neumann (Mosterín 2000, pp. 186 – 188) es poco conocido y abordado en la investigación educativa. Sin embargo, su estructura propone una lógica de construcción que precisa de un SMS que involucra simultáneamente ordinalidad y cardinalidad, a partir de la construcción del cero como conjunto vacío y como número que es el único que sumado o restado a cualquier número siempre lo deja igual. Este modelo encapsula en la iteración el principio de inducción finita de los axiomas de Peano, donde todo número es construido a partir de un número finito de iteraciones, empezando por el cero.

El interés de esta investigación retoma la adaptación que hicieron Hamilton & Landin (1961) del Modelo formal de Von Neumann, porque su base conceptual formal matemática de construcción de los números naturales, es una posibilidad no trabajada ni analizada por la investigación en Matemática Educativa, a excepción del acercamiento que Filloy (1999) ha realizado y la investigación de Maravilla (2011) con alumnos de educación preescolar.

La plataforma conceptual de Von Neumann usa la iteración como la operación más básica y como principio del proceso recursivo, partiendo del cero y la noción de sucesor, lo que constituye una posibilidad para desarrollar un pensamiento formal matemático en la escuela primaria.

2. MARCO DE REFERENCIA

2.1. Investigaciones sobre los procesos de construcción de los números naturales

En la investigación educativa han emergido líneas teóricas provenientes de la psicología, para comprender la evolución de la cognición de los individuos, el desarrollo procesos de generalización y abstracción del conocimiento. En Matemática Educativa siguen siendo un referente esencial para estudiar y comprender los procesos de aprendizaje que promueven el desarrollo del pensamiento matemático.

2.2. Influencia piagetiana en la Investigación Educativa

La contribución de Piaget sobre el desarrollo del proceso cognitivo se ha centrado el funcionamiento de la inteligencia o desarrollo intelectual desde su génesis, inicia sus observaciones desde el nacimiento de los niños. Da cuenta de la influencia del contexto psicosocial que rodea al infante, el tiempo y el espacio. Su perspectiva teórica precisa que inteligencia y pensamiento son distintos, aunque se desarrollan de manera paralela:

> La inteligencia es la solución de un problema nuevo para el sujeto, es la coordinación de los medios para alcanzar un cierto objetivo que no es accesible de manera inmediata: mientras que el pensamiento es la inteligencia interiorizada y se apoya no ya sobre la acción directa sino sobre un simbolismo, sobre la evocación simbólica por el lenguaje, las imágenes mentales, etc., que permiten representar lo que la inteligencia sensorio-motriz, por el contrario, va a captar directamente. Hay una inteligencia antes del pensamiento, antes del lenguaje. (Piaget, 1980, p. 18).

El proceso desarrollo del pensamiento comienza desde los primeros meses de vida, pero no es lineal, hay una reconstrucción de las acciones a los esquemas, con el uso de las invariantes funcionales (Piaget, 1980, p. 27). El proceso comienza con el desarrollo de las "…praxias o acciones (…) que son (…) sistemas de movimientos coordinados en función de un resultado o de una intención." (Piaget 1980, p. 77). Los actos que aparecen antes de ellos son actos reflejos, movimientos sin control del sujeto, los cuales son característicos durante el primer mes de vida. Cuando

> …las praxias comportan dos posibles formas de coordinaciones, (…) la primera está constantemente en acción y la segunda puede superponerse o derivarse de ella. Llamaremos a la primera coordinación interna: la que reúne muchos movimientos parciales en un acto total, ya sea que algunos de estos movimientos parciales hayan existido previamente en estado aislado (…) o bien que estén coordinados desde el principio, o incluso que resulten de una diferenciación progresiva durante las coordinaciones graduales.

> Llamaremos coordinaciones externas a las coordinaciones de dos o más praxias en una nueva praxia total de orden superior, … (Piaget, 1980, pp. 77 y 78).

La organización de las acciones da lugar a la siguiente categoría: los esquemas: "Un esquema es la estructura o la organización de las acciones, tales como se transfieren o se generalizan con motivo de la repetición de una acción determinada en circunstancias iguales o análogas" (Piaget & Inhelder, 1984, p. 20). Las acciones y esquemas se activan por los estímulos externos que interpelan al infante. Las operaciones son la organización de los esquemas que posibilitan el desarrollo de las nociones de objeto permanente, conservación de la materia, cantidad, peso y volumen. La organización de las operaciones permite la consolidación de las operaciones formales o estructuras.

El paso de las acciones a las operaciones es posible a partir de las invariantes funcionales, que constituyen el proceso recursivo en el que la asimilación, acomodación y equilibrio como el proceso regulador, van a permitir el paso de la acción a la operación. Referirse a la operación implica que los sujetos pueden establecer relaciones de reversibilidad, "llamaremos operaciones, acciones reversibles y acciones que se coordinan unas con otras en sistemas de conjunto…" (Piaget, 1980, p. 25) para dar cuenta de la transformación de una acción sobre un estado inicial, reconociendo las propiedades del objeto (Piaget & Inhelder, 1984, p. 55).

2.2.1. Piaget y la Abstracción Reflexiva de los números naturales

Para Piaget (Deaño y Delval, 1982), las operaciones son acciones lógicas de pensamiento interiorizadas, reversibles por medio de las cuales los sujetos desarrollan un sistema estructurado para comprender y usar los símbolos socialmente convencionales, de tal forma que se pueden establecer y desarrollar conocimientos en todas las áreas. Los niños poco a poco van desarrollando la capacidad de ir estableciendo las relaciones numéricas conforme vayan comprendiendo y las relaciones entre la reversibilidad y transitividad. Este proceso no es inmediato, implica consolidar la noción de conservación para reconocer las transformaciones de los objetos, del espacio y tiempo. Descubrir "… la conservación de la sustancia es hacia los siete – ocho años, del peso a los nueve – diez y del volumen a los once – doce …" (Piaget & Inhelder, 1984, p. 102).

La noción de conservación implica transformaciones reversibles: inversiones o reciprocidad; la reversibilidad es la clave para desarrollar el pensamiento operatorio, usando la noción de agrupamiento de clases (aditivos o multiplicativos) y grupo INRC (Identidad, Negación, Reciprocidad, Correlatividad) y el retículo, para realizar desplazamientos conceptuales que den cuenta de un pensamiento operatorio estructurado. “Los esquemas operatorios, por tanto, han de ser considerados como estructuras actualizadas, que implican las diversas posibilidades implícitas en el todo estructurado, es decir, en la forma de equilibrio de las operaciones proposicionales.” (Deaño y Delval, 1982, p. 77).

Con el comienzo de la reversibilidad se construye la representación conceptual (Piaget & Inhelder 1984) y el establecimiento de las relaciones de inclusión, orden y clasificación de los objetos; con la relación de transitividad se consolida el razonamiento lógico – matemático, como producto de las experiencias del sujeto. Este proceso depende directamente del ambiente favorecedor y la convivencia con los otros, para contar con mayores oportunidades de consolidación de sus estructuras lógico – matemáticas, en especial la génesis del número (Piaget, 1984). Con la conservación de la materia, el peso y el volumen los sujetos pueden establecer las relaciones de clasificación, seriación y ordenación de los objetos del mundo cotidiano. A través de la clasificación agrupan los objetos usando el concepto de pertenencia; con la seriación establecen relaciones entre varios objetos y al ordenarlos hacen comparaciones y aplican criterios de jerarquía entre ellos. Estas relaciones se consolidan con la transitividad, reciprocidad y reversibilidad. Así la conservación de número les permitirá comprender la variación de la cantidad, posición y forma. Las nociones de conservación serán fundamentales en la transición de la acción a la operación. La coordinación de las acciones se conforma con el proceso de la asimilación para conferir diversos significados a los objetos a través de la acomodación.

Para Piaget, la constitución de las estructuras numéricas comienza a partir de que las nociones de conservación son posibles, entonces pueden establecer la seriación de objetos, la clasificación (clases y subclases) y el establecimiento de orden. Las nociones de conservación permitirán el acercamiento a la estructura de número. “El número es por lo tanto solidario con una estructura operatoria de conjunto, sin lo cual no hay aún conservación de las totalidades numéricas independientemente de su disposición figural.” (Piaget, 1975, p. 12). Considera una “…estructuración lógica de la construcción de número a partir de los agrupamientos…" (Piaget, 1975, p. 12). Este proceso evolutivo les permite usar la conservación de la cantidad para hacer comparaciones entre muchos, pocos, más, menos, ancho, alto... para establecer un orden entre los objetos, seriarlos creciente y decreciente o con algún otro criterio.

2.2.2. Refutaciones a Piaget

En investigaciones recientes de neurociencia Dahaene (2016, pp. 70 - 72) ha demostrado que la noción de conservación de Piaget es ambigua, puesto que la metodología que usó para dar cuenta de la conservación de cantidad tiene que ver con las características de los objetos que usó y la forma en que se les preguntó a los niños, pues cuando se les cambia los objetos (piedras o fichas) por dulces, su respuesta es totalmente aritmética en relación con la cantidad. El sentido que los niños dan a las actividades está centrado en las acciones y no en el lenguaje.

El contexto y las palabras utilizadas por el experimentador para formular las consignas puede propiciar "...que los niños se confundan y crean que se les pide que evalúen el largo de las filas, más que su numerosidad" (Dahaene 2016, p. 72). Por ejemplo, cuando se les propone a los niños comerse los dulces una de las dos hileras, generalmente eligen la que tiene más, sin poner atención en la longitud de la hilera. Otra de las refutaciones proviene de las psicologías soviéticas representadas por Galperín (1976) y Talizina (2001), quienes no están de acuerdo con Piaget en que desarrollo del pensamiento operacional sea hasta la adolescencia.

> Si estamos de acuerdo con el punto de vista de Piaget, entonces no es necesario estudiar las matemáticas antes de la adolescencia o estudiarlas de manera inadecuada y acostumbrarse a los malos resultados en esta materia. (…) Por el contrario, si reconocemos la naturaleza social de las leyes del desarrollo de la psique del hombre y, entre ellas, las del intelecto, entonces se resolverán de otra manera los problemas de la aplicación del pensamiento lógico y de las correlaciones entre la enseñanza y el desarrollo (Talizina, 2001, p. 11).

2.3. Perspectivas soviéticas: Teoría de la Actividad y las Acciones Mentales

La herencia de Vigotsky ha sido fundamental para la investigación en diversas áreas de la educación, particularmente para comprender los procesos que se generan en las actividades de aula. La referencia para este trabajo de investigación se retoma la aportación de su discípulo y colaborador P. Y. Galperín (1976), como fundador de la Teoría de la Actividad y Talizina (2000, 2001) quien colaboró con Galperín y continuó su investigación después de su muerte. Ella se especializa en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, ha desarrollado investigación en algunas universidades de México y América Latina. Sus aportaciones representan quizá una oportunidad para observar las acciones que realizan los niños, cuando usan material manipulable en las actividades matemáticas, así como la relación entre la acción y la operación como procesos de pensamiento.

En este enfoque teórico, la relación sujeto - objeto genera procesos de significación mediados por la actividad que los individuos hacen sobre los objetos, con el uso de instrumentos socioculturales como las herramientas lingüísticas, los códigos y los signos. El lenguaje y sus códigos de signos son herramientas que constituyen una experiencia histórico - cultural, en la que los sujetos a través de su acción mediada por los usos en la interacción social pueden internalizar el conocimiento a través del desarrollo de la "psique humana". La *acción* es la base organizacional de la actividad social. Los *signos* son producto de la evolución sociocultural y su manifestación en el lenguaje, constituyen una de las herramientas de mediación. El desarrollo psicológico posibilita al sujeto interiorizar el proceso de las transformaciones cualitativas en tres momentos:

a) La percepción del sujeto actúa de manera confusa en un primer momento;

b) La ejercitación de sus funciones psicológicas le va a permitir la toma de decisiones, el uso de la memoria, del pensamiento y del lenguaje;

c) El uso de las funciones superiores le facultará el control de la acción y podrá contar con la capacidad de regular su acción voluntaria, ser consciente de su toma de decisiones, la implicación social de ellas y usar los signos como mediadores.

Galperín (1976) y Talizina (2001) estructuran la Teoría de la Actividad por etapas de las Acciones Mentales, afirmando que se requiere de la *lógica* como la ciencia para comprender el proceso de construcción del pensamiento, a partir de la descripción del paso de la actividad externa hacia la actividad interna en la psique del hombre. Dado que el desarrollo de las capacidades humanas son producto de la interacción social, los conocimientos son una fuente de experiencias sociales que constituyen los elementos de las acciones del hombre. "La acción es aquella unidad que tenemos para utilizar para el análisis de cualquier proceso de aprendizaje.” (Talizina, 2001, p. 12), “…constituye el acto de la actividad vital del sujeto.” (Talizina, 2000, p. 14). La acción como proceso intermedio y la operación como la automatización que depende de la acción, son los procesos que permiten la relación de la actividad y la construcción de significados. A través de las acciones mentales, en el proceso de enseñanza y aprendizaje, se plantean cinco etapas: motivacional, base orientadora de la acción, material, verbal y mental.

Etapa motivacional. - Es permanente, su influencia es positiva, es el objetivo de la actividad, en un primer momento permite al sujeto la formación del sentido, para poder resolver con las herramientas que ha construido, apropiarse de nuevos conocimientos a través del aprendizaje.

Base Orientadora de la Acción. - Permite al sujeto obtener información sobre el objeto de estudio, asimilándolo ordenada y sistemáticamente, de acuerdo con las actividades que va a realizar, así como con las acciones y operaciones que intervienen o se requieren para comprenderlo.

Material. - El sujeto va a planear y ejecutar la acción, apoyándose con el uso de material concreto, mapas mentales, dibujos, esquemas y signos. Esta etapa, es un ejemplo del esbozo lógico semiótico de como los niños pueden estructurar distintos códigos para resolver distintas situaciones matemáticas.

Verbal. – En esta etapa se da el paso de la acción al lenguaje verbal (oral o escrito) a través de la socialización, el sujeto pone en práctica la reflexión sobre su acción, logrando la generalización y su autonomía.

Mental. - En esta última etapa de manera progresiva el sujeto sintetiza todo el proceso partiendo de la acción a la automatización y al pensamiento reflexivo para desarrollar a través de la abstracción y la argumentación la comunicación de las ideas y conceptos.

Para Talizina (2001) el concepto del número es una de las dificultades que no han podido ser atendidas adecuadamente, lo que conlleva a deficiencias en el aprendizaje del conocimiento matemático de los niños. Asegura que la lógica está presente en cualquier concepto formal o informal y constituye el sentido de construcción. Con estos referentes es necesario preguntarse sobre los usos de los números en su carácter absoluto, ya que a los niños se les ha enseñado que los números van cambiando de acuerdo con la secuencia numérica, pero cuando se les plantea una situación en la que no necesariamente el 8 es mayor que el 5, ellos pueden entrar en conflicto. Por ejemplo, si se les pregunta quién es el más grande, generalmente responden el 8, pero cuando los situamos en magnitudes la situación puede cambiar, como cuando se trata de unidades diferentes: 8 centímetros y 5 decímetros. O bien, seis monedas de dos pesos y una moneda de diez pesos. Generalmente el contexto social permite convertir la experiencia social en una experiencia individual, al momento de descubrir el carácter relativo de los números.

2.4. Influencia de las teorías cognitivas y su impacto en la Investigación en Educación Matemática

Una de las preocupaciones de la investigación educativa ha sido entender los procesos de construcción del pensamiento numérico en niños, cómo se desarrollan los procesos cognitivos de los niños en edades tempranas. A continuación, se mencionan algunos referentes que han impactado en la investigación y en el diseño curricular.

a) Kamii (1989). - Retoma el planteamiento piagetiano para explicar cómo se desarrolla el conocimiento físico, lógico matemático y social en niños desde la educación preescolar hasta la educación primaria. Parte del supuesto de que "…el conocimiento lógico-matemático consiste en la *relación* creada por cada individuo" (Kamii, 1989, 23). La conceptualización de número "… es una relación creada mentalmente por cada persona" (Kamii, 1989, 23). Es un proceso evolutivo que va de lo concreto a lo abstracto, donde el papel de la enseñanza va a ser fundamental, para brindar al niño las herramientas lúdicas que le permitan representar las acciones a través de la palabra o el dibujo, con el apoyo de símbolos y signos (figura 12).

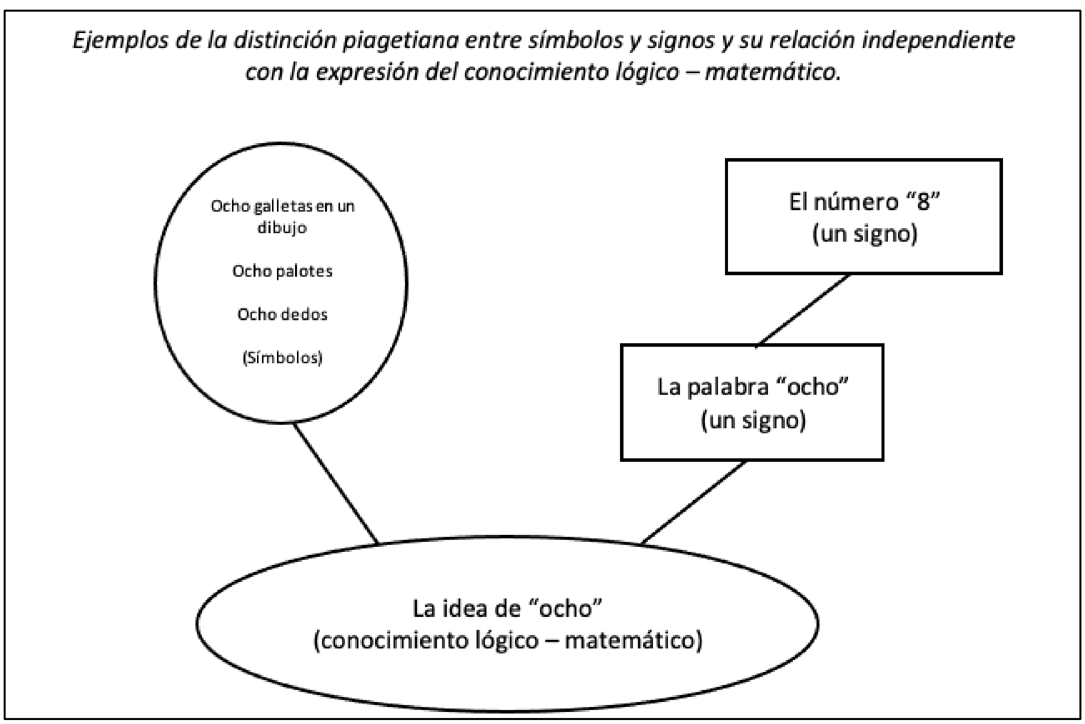


Fig. 12. Esquematización del uso de símbolos y signos (Kamii, 1989, p. 30)

Para ella, la noción de número parte del principio del orden, por lo que las acciones de clasificación, seriación y ordenación son fundamentales. La inclusión va a posibilitar que los niños vayan “reinventando la aritmética”, al reconocer por ejemplo que en el número ocho, están incluidos los números uno, dos, tres, … ocho. Este proceso lo esquematiza en la figura 13.

El término ocho empleado en (a) para refeirse sólo al último elemento y en (b) para refirirse a todos los elementos con la estructura de inclusión jerárquica.

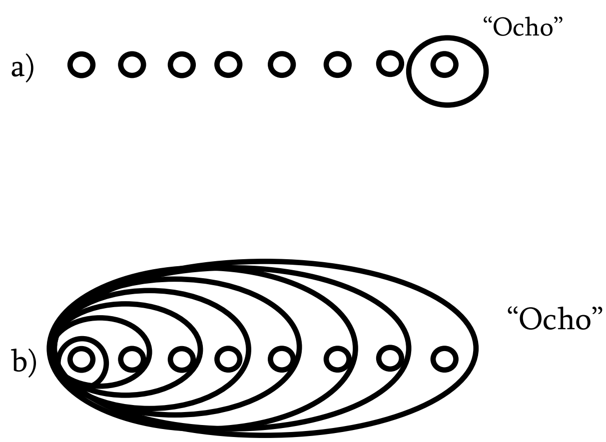


Fig. 13. Inclusión jerárquica para la representación del número ocho (Kamii, 1989, p. 28)

Para Kamii, la enseñanza tiene el compromiso de brindar todas las posibilidades para que los niños interactúen con el mundo físico, para desarrollar su conocimiento lógico-matemático, a través de la abstracción constructiva.

b) Bermejo (1990). - Para este autor, las aportaciones piagetianas son el soporte de su propuesta, la cual está dirigida a enriquecer la enseñanza de las nociones numéricas. Considera que la percepción de la numerosidad comienza a desarrollarse en los niños de manera precoz (Bermejo, 1990, p. 19), en contraste con la numerosidad relativa. Retoma los procesos de investigación de sus antecesores Piaget y Szemiska 1941, Koehler 1951, Gelman 1982, Starkey, Spelke y Gelman 1983, entre otros, para enriquecer la enseñanza de las matemáticas en la escuela básica.

c) Castro, Rico y Rico (1988). - Sus aportaciones ha enriquecido la investigación de las nociones numéricas. Si bien retoman los aportes piagetianos, en la manera de cómo aprenden los niños y cómo la enseñanza los promueve, consideran las críticas que han surgido a los planteamientos teóricos de Piaget (Castro, Rico y Rico 1988, p. 65), para comprender su impacto en las teorías del aprendizaje en la enseñanza escolar.

d) Gómez (1988). - Aporta elementos con fundamento matemático que han servido para orientar y fundamentar la investigación en educación matemática y en la didáctica de las matemáticas. Su impacto ha salido de España hacia América, especialmente en México en diferentes instituciones de investigación en Matemática Educativa.

e) Puig y Cerdán (1988). - Proponen una línea de investigación trazada por Freudenthal para el tratamiento del concepto de número. Identifican cuatro maneras de acceder al concepto: Número para contar, Número de la numerosidad, Número de medir y Número de calcular, de acuerdo con las diferentes acciones, usos y contextos. Con relación a las operaciones distinguen al menos tres aspectos: conceptual, algorítmico y algebraico. Su propuesta también ha sido de gran impacto para las investigaciones centradas en la resolución de problemas escolares.

f) Carpenter, Moser & Romberg (1982). - Ha sido otra línea de investigación que retoma las aportaciones de la perspectiva cognitiva, para comprender la complejidad que implica el desarrollo de los conceptos numéricos en niños pequeños. Para ellos la relación que hay en la estructura semántica de las situaciones numéricas, influyen en las estrategias que usan los niños para resolver problemas aditivos, así como las diferentes maneras de representación que implementan. El contexto va a definir factores lingüísticos y culturales para contribuir en el desarrollo de diferentes patrones de actuación (Carpenter, Moser & Romberg 1982, viii).

g) Fuson (1982). - Sus aportaciones han sido de gran trascendencia en la investigación en educación matemática, se ha enfocado en el proceso que siguen los niños en el conteo y los procesos de resolución de problemas aditivos.

3. MODELOS TEÓRICOS LOCALES

Por su estructura los Modelos Teóricos Locales constituyen un marco teórico y metodológico para la observación experimental en la investigación en Matemática Educativa. Los MTL tienen su origen en los trabajos de investigación de Rojano (1985). Para esta investigadora la *observación empírica* es la principal herramienta para comprender los procesos cognitivos que se articulan en la competencia formal y pragmática, su interés está centrado en la comprensión de los fenómenos que se desarrollan en los procesos de enseñanza y aprendizaje en las aulas.

El sentido de lo *Local* está focalizado en fenómenos específicos, con actores específicos, en donde se pueda tomar en cuenta las cuatro componentes de competencia formal, cognición, comunicación y del modelo de enseñanza, para proponer "…diseños experimentales ad-hoc que arrojen luz sobre las interrelaciones y opciones que tienen lugar durante la evolución de todos los procesos pertinentes relacionados con cada una de las componentes" (Filloy, 1999, p. 7). Al centrarse en las actuaciones de los participantes durante los procesos educativos, se puede observar cómo se están construyendo los procesos de pensamiento a través del intercambio de mensajes con contenido matemático entre los sujetos con distintos grados de competencia en el uso de los SMS, para crear textos matemáticos.

Los procesos de lectura/transformación permiten ir concretando eslabones en el camino a la abstracción. Durante este proceso, cada participante va instrumentando estrategias y códigos personales para producir significados intermedios, en la resolución de situaciones problemáticas en las que se involucran.

Las observaciones empíricas de los procesos de descodificación de problemas matemáticos que realizan los alumnos requieren un análisis detallado de los bosquejos de solución. Esto implica "…la conveniencia de que el observador cuente con una competencia de uso de los SMS más abstracto que englobe todos los utilizados en el proceso observado." (Filloy, 1999, p. 7) Dicho de otra manera, "…el observador, necesita contar con un modelo formal descrito en un SMS más abstracto que el utilizado por los sujetos observados: los aprendices, los enseñantes y el mismo observador cuando se ve involucrado en el intercambio de mensajes…" (Filloy, 1999, p. 8).

Los diseños experimentales tienen la intención de analizar la información que permita comprender las dificultades a las que se enfrentan los actores en situaciones problemáticas para observar las interacciones y contraposiciones de las cogniciones que se ponen en juego en el espacio textual; cómo se van construyendo los intertextos a través del modelo de enseñanza específico con un soporte en el modelo formal y qué competencias comunicativas usan para decodificar y codificar los mensajes, así como las dificultades o posibilidades tienen para realizar un esbozo lógico semiótico de la situación problemática.

La estructura de los MTL está organizada en cuatro componentes:

a) *Modelo de Competencia Formal.* - En esta componente se presenta el referente matemático abstracto y sus aplicaciones. El análisis de la fenomenología de Freudenthal, sobre la naturaleza de los objetos matemáticos como un concepto matemático, una estructura o una idea matemática, "…que se construyen como medios de organización (…) como fenómenos tanto del mundo real como de las matemáticas (…), sus propiedades, las acciones que hacemos sobre ellos o las propiedades de esas acciones, para cuya organización han sido creados los objetos matemáticos", permite analizar el proceso de construcción de los objetos matemáticos mediante la acción educativa. En ésta última, la relación entre significado y sentido posibilita explicar la semiosis matemática como un proceso que remite a un mundo de productos de otras semiosis (Puig, 1994, p. 9).

   Lo formal matemático considera los fenómenos que están organizados en las matemáticas tomadas en su estado en el momento actual y considerando su uso actual. Este referente constituye la base conceptual para trasladarlo a fenómenos del mundo de los alumnos, constituyendo campos semánticos para darles sentido y significado para quien lo usa, lo lee y lo reescribe como producto de sus referentes socioculturales o epistémicos. Puig (1994, p. 11) menciona que, si la interpretación es acertada, la producción de sentido dará significado matemático.

b) *Modelo de Cognición.* - En esta componente se identifican y analizan los procesos cognitivos que se ponen en acción para desarrollar el pensamiento matemático y su comunicación, es decir, la expresión y representación de las ideas matemáticas a través de códigos establecidos convencionalmente. Para ello, se orienta la atención para desarrollar procesos de comprensión de los textos matemáticos, apoyados en la memoria para desencadenar procesos de análisis y síntesis articulados con el uso de la lógica en distintas situaciones matemáticas, lo que a su vez posibilita acciones y actuaciones heurísticas ligadas a la promoción de la generalización y la abstracción, dando nuevos usos de los SMS de la matemática escolar (Filloy ,1999, p. 37).

Las situaciones problemáticas que se les proponen, pueden ser situaciones reales o situaciones escolares, para ser transformadas en textos matemáticos, a través de los procesos de lectura/transformación y las representaciones mentales que les permiten el diseño de esbozos lógico-matemáticos de solución. Aunque el uso de la sintaxis y códigos en un principio puede no ser congruente desde un punto de vista convencional. Este proceso de transición puede considerarse como un proceso intermedio, en el que la convencionalidad se va a adquirir poco a poco, desencadenando procesos de análisis lógicos cada vez más abstractos. La memoria ayuda a los estudiantes a desarrollar procesos de representación cada vez más convencionales, establecimiento de inferencias que les permitirá ir descubriendo las relaciones matemáticas involucradas. Estos procesos constituyen la base de la mecanización como producto de procesos memorísticos y que aunado a la práctica intensa permitirán el uso de representaciones de las expresiones y operaciones convencionales. En una situación de enseñanza y con la intención de que los estudiantes logren transitar de un estrato de lenguaje SMS concreto a uno más abstracto, los procesos que se producen de forma recurrente Filloy, Rojano & Puig (2008, pp. 164 – 166) las denominan tendencias cognitivas:

1. Presencia de un proceso de abreviación de los textos concretos para poder producir reglas sintácticas nuevas.
2. Dotación de Sentidos intermedios.
3. Retorno a situaciones más concretas, cuando se presenta una situación de análisis.
4. La imposibilidad de desencadenar operaciones que podían hacerse momentos antes.
5. Lecturas hechas en estratos de lenguaje que no permitirán resolver la situación problemática.
6. Articulación de generalizaciones erróneas.
7. La presencia de mecanismos apelativos que centran el desencadenamiento de procesos erróneos de resolución.
8. La presencia de mecanismos inhibitorios.

9. La presencia de obstrucciones provenientes de la semántica sobre la sintaxis y viceversa.
10. La generación de errores sintácticos debido a la producción de códigos personales intermedios, para dotar de sentidos a las acciones concretas intermedias.
11. La necesidad de dotar de sentidos a las redes de acciones cada vez más abastractas hasta convertirlas en operaciones.

c) *Modelo de Enseñanza*. – Esta componente es la traducción del modelo formal matemático a una secuencia de actividades que permite la producción de una sucesión de textos matemáticos, "… como el resultado de un trabajo de lectura/transformación, hecho sobre un espacio textual…" (Filloy, 1999, p. 65). Estos textos son también llamados intertextos matemáticos que modelan situaciones matemáticas, con lenguajes que van de lo concreto a lo abstracto, con códigos intermedios y el uso de los SMS para desarrollar gradualmente las habilidades matemáticas y conocimientos pragmáticos, sintácticos y semánticos que la experiencia escolar y cognitiva aporta a los niños (Filloy, Rojano & Puig, 2008, pp. 124 - 125).

d) *Modelo de Comunicación.* - Esta componente se fundamenta en la semiótica de Peirce (1987) para identificar y entender cómo son los procesos de producción de sentido y significado que se generan en el aula, en la interacción de los alumnos con diferentes grados de competencia de los SMS involucrados en la construcción de los conceptos matemáticos y los códigos que se generan para crear los textos matemáticos abstractos.

En esta investigación el diseño del MTL para el aprendizaje de los números naturales se centra en identificar dificultades que tienen los alumnos del primer y segundo ciclo de educación primaria, cuando se les enseña con la base formal matemática de Von Neumann.

3.1. Diseño de un MTL para la construcción de los números naturales

3.1.1. Modelo de Competencia Formal

3.1.1.1. Breve Epistemología de la construcción los números naturales

Para la Matemática Educativa entender y comprender las dificultades de aprendizaje, es necesario partir de las matemáticas, de bases sus formales. Siguiendo la tradición de Freudental, se requiere caracterizar fenomenológicamente el proceso de construcción histórica del concepto matemático en cuestión, en nuestro caso la construcción de los números naturales (Filloy, 1999, p. 56). Este proceso implica realizar una reconstrucción histórica sobre las conceptualizaciones de los números naturales (Freudenthal, 2002).

Históricamente el hombre tuvo la necesidad de representar los conteos simbólicamente, usando diversos registros como marcas como puntos y rayas sobre tablas, huesos, piedras, nudos y otros objetos; o bien, usando su cuerpo para poder contar como una técnica corporal, método que aún persiste en algunas comunidades indígenas (Ifrah, 1988, pp. 33 – 37).

Matemáticos griegos se esforzaron por entender qué son los números naturales, enfrentándose a contradicciones y debates para definirlos, algunos las relacionaron con proporciones numéricas y gracias a Eudoxo se consolida "… la teoría de las proporciones expuesta por Euclides" (Dedekind, 2014, p. 15), lo que permitió entender la precisión de la razón entre magnitudes incomensurables, consolidando la base de una nueva aritmética.

La influencia de los árabes está presente en la Edad Media, permitiendo la introducción del sistema de numeración posicional utilizado en el cálculo. En 1585, Simón Stevin propone una definición: "número es aquello mediante lo que explica la magnitud de una alguna cosa" (Dedekind, 2014. p. 16).

Aunque Dedekind compartió ideas con Cantor, no escribió sobre temas cantorianos relacionados con la teoría de conjuntos, Sin embargo, su obra "¿Qué son y para que sirven los números?" repercutió en la teoría de conjuntos (Dedekind, 2014, p. 57).

Cantor y Frege fueron los primeros en teorizar a los números. Para Cantor los números naturales son cardinales finitos, pero no precisó que era la finitud (Mosterín, 2000, p. 47). Las aportaciones de Frege fueron más rigurosas, para él los números se refieren a conceptos y no a cosas. Propone:

> "… definir recursivamente los números naturales del siguiente modo:
> a) El número 0 corresponde al concepto P, si ningún objeto cae bajo P.
> b) El número $n + 1$ corresponde al concepto P si hay un objeto a, tal que a cae bajo P y el número n corresponde al concepto < cae bajo P, pero es distinto de a >" (Mosterín, 2000, p. 49).

Para Frege, la conceptualización de número implica dos partes: definir al número como cardinal y definir al número natural o finito.

Peirce (1881) en "On the logic number" presenta una lógica para comprender si las proposiciones sobre los números son verdades probadas. Afirma que "…los objetos de un sistema con un relativo fundamental de cantidad se llaman cantidades y el sistema se llama sistema de cantidad." (William, 1999, p. 599). Para ello define cantidad simple, cantidad múltiple, cantidad discreta, cantidad semi-infinita, definiciones relacionadas con el orden (sucesor y antecesor). Más tarde Zermelo (Mosterín, 2000, p. 46) ofrece una nueva prueba para demostrar el teorema del buen orden y la teoría con conjuntos infinitos.

John Von Neumann resuelve las complejidades conceptuales de sus antecesores al definir a los números como ordinales:

> "…cada ordinal es el conjunto de todos los ordinales precedentes. Este conjunto está bien ordenado por la relación $\in$ de pertenencia o, si se prefiere, por la equivalente relación < de ser menor que (entre ordinales). En efecto, un ordinal α precede a otro β si y solo si $\alpha \in \beta$, lo cual equivales decir que $\alpha < \beta$. Así, 0 es el conjunto vacío, 1 es el conjunto cuyo único elemento es 0, 2 es el conjunto cuyos elementos son 0 y 1, y así sucesivamente." (Mosterín, 2000, p. 1987).

3.1.1.2. El número cero

Los números son una construcción y abstracción social que posibilitaron el desarrollo de las civilizaciones humanas, en contraste con los orígenes del número cero.

Los egipcios (1700 A. C.) representaban al cero con un signo *nfr*. "Hacia el año 700 A. C. se encontró una tablilla en la antigua ciudad mesopotámica de Kish, un signo que se parece a la forma actual del número cero" (García del Cid, L. 2010, p. 15). Pero eso no significa que ya tenía una connotación conceptual numérica. En América, hay evidencia de que los mayas en el año 36 A.C. usaban el número cero. Pero de acuerdo con García del Cid (2010, pp. 51- 52) fueron los hindúes quienes formalizaron el valor de vacío con un uso matemático. Otra evidencia se encuentra en Europa (SXII) con Fibonacci a través de su obra *Liber Abaci*, quien lo introdujo por primera vez en Europa. Lo relaciona con la palabra “zehirum” que más tarde derivó en cifra y cero (Boyer, C. 1986, p. 327).

Siguiendo este hilo de ideas, García y Arias (2019) dan el crédito a Brahmagupta (siglo VII) de considerar el cero como un número, diferenciándolo de ser un dígito marcador de posición, explicándolo como un operador: “El resultado de restar un número de sí mismo y apuntar algunas propiedades del nuevo número: cuando el cero se suma o se resta a una cantidad esta permanece inalterada”.

Estas aportaciones permitieron sistematizar la aritmética; sin embargo, hasta nuestros días el número cero, es un concepto complejo que implica una construcción cultural. Se usa de manera cotidiana con diferentes significados y sentidos.

Después de esta breve fenomenología histórica de la conceptualización de los números naturales y el cero, en el siguiente apartado se presenta con más detalle la construcción conceptual de los números naturales propuesta por John Von Neumann.

3.1.1.3. Conceptualización de los Números Naturales de John Von Neumann

John Von Neumann (1923) propone construir el conjunto de los números naturales como números ordinales. Esta plataforma teórica tiene como base un sistema formal expresado en axiomas, lo que constituye un sistema lógico. Para evitar las paradojas lógicas establece diferencias entre conjuntos y clases. Si bien todo conjunto es una clase, no toda clase es un conjunto. En este sentido conjunto se refiere aquellas clases que pertenecen al conjunto.

El principio “…de orden de un conjunto bien ordenado sería la clase de todos los conjuntos bien ordenados isomorfos con él.” (Mosterín, 2000, p. 186). Sin embargo, esta situación llevó a contradicciones dentro de la misma teoría intuitiva de conjuntos, a lo que Von Neumann demostró que en lugar de “…identificar un ordinal con una enorme clase de conjuntos isomorfos entre sí, propuso identificarlo con un representante (un elemento) particular de esa clase, con la que desaparecen los peligros asociados a la gran cardinalidad y se simplifica la teoría.” (Mosterín, 2000, p. 186). Entonces se tiene que: “Cada ordinal es el conjunto de todos los ordinales que lo preceden” (Van Heijenoort, 1967, p. 347).

En la adaptación que hacen Hamilton & Landin (1961) del modelo formal de Von Neumann, consideran que su conceptualización es un proceso complicado y que no basta nombrar los números o establecer una correspondencia uno – uno, estos autores consideran que es necesario construirlos ordinalmente. El proceso comienza con la construcción del cero como el primer número, con el recurso de la iteración se construyen los sucesores. La *iteración* es el proceso que se repite una y otra vez. Choate, Devaney y Foster (1999, pág. IX) afirman: “Iterar significa repetir algo una y otra vez”. Es decir, el procedimiento que se hizo para el primer elemento se hace para el segundo, para el tercero y así recursivamente, dicho de otra manera: el paso $n + 1$ se obtiene directamente del paso n. El procedimiento *recursivo* es la ejecución inicial que se repite exactamente para el caso anterior. Con la *recursión* se puede definir una función para todos los ordinales, basta hacerlo con el primero que es el cero y se realiza el mismo proceso para los demás.

> “El teorema de la recursión transfinita nos permite definir una función para todos los ordinales, definiéndola para el 0 y, suponiendo que ya esté definida para un ordinal cualquiera α, definiéndola para $\alpha + 1$, y, suponiendo que ya esté definida para todos los ordinales menores que un ordinal límite λ, definiéndola para λ.” (Mosterín, 2000. p. 188).

Asimismo, este autor afirma que “una función computable puede definirse también como función recursiva. Toda definición recursiva es computable, y a la inversa, toda función computable es recursiva”. Más adelante refiere: “… una función es recursiva si y solo si es computable…” (Mosterín, 2000, p. 295).

De la secuencia de contenidos de Hamilton & Landin (1961), se retoman las ideas fundamentales del Modelo matemático de Von Neumann, traduciéndolas en el modelo de enseñanza. Con el símbolo (P_i) se presentan como los principios matemáticos que son el soporte de estas secuencias de actividades, como se presenta a continuación:

P_1. La construcción recursiva se inicia con la definición de: “Cero es el vacío; i. e., 0 = Ø”, enseguida se plantea la definición del uno.

P_2. Una vez que se define al cero, se inicia la construcción recursiva con la definición del uno: “$1 = \{0\} = 0 \cup \{0\}$", de manera similar se construyen los números siguientes (Hamilton & Landin, 1961, p. 76).

0 = Ø

1 = {Ø}

2 = {Ø, {Ø}}

3 = {Ø, {Ø}, {Ø, {Ø}}}

4 = {Ø, {Ø}, {Ø, {Ø}}, {Ø,{Ø},{Ø,{Ø}}}}

5 = {Ø, {Ø}, {Ø,{Ø}}, {Ø, {Ø}, {Ø,{Ø}}}, {Ø, {Ø},{Ø, {Ø}}, {Ø,{Ø}, {Ø, {Ø}}}}}.

Y así sucesivamente.

Si los ordinales están ordenados por la relación de pertenencia, se tiene que $0 \in 1 \in 2 \in 3$ ... Entonces "…cada conjunto bien ordenado es isomorfo a cada uno de estos ordinales de Von Neumann" (Mosterín, 2000, p. 187).

P3. Se introduce la definición del sucesor:

> "El conjunto $x \cup \{x\}$ es el suceso del conjunto x . Si y es un conjunto y si hay un conjunto x tal que y es el sucesor de x, entonces y es un *sucesor*. Para cada conjunto x, el sucesor de x es x' .
>
> Por lo tanto, 1 = 0', 2 = 1', 3 = 2', etc. (Hamilton & Landin, p. 77)

La notación $x \cup \{x\}$ da cuenta del proceso de construcción bajo la denominación del sucesor, lo que lo denota como x'.

Cada uno de estos conjuntos es $\in -ordenado$.

Que un conjunto *A* sea $\in -ordenado$ significa que, para todo $\boldsymbol{x}$ y para todo $\boldsymbol{y}$ en *A*, se cumple sólo una de estas condiciones:

$$x \in y, \qquad x = y, \qquad o \qquad y \in x$$

P4. Para que *n* sea un número natural, debe satisfacer las siguientes condiciones (Hamilton & Landin, p. 81):

> Un número natural es un conjunto n tal que:
>
> a) $\boldsymbol{n}$ *es* $\in -ordenado$,
> b) *Cada subconjunto no vacío de* $\boldsymbol{n}$ *posee un elemento principal,*
> c) *Si* $x \in n$, *entonces* $x \subset n$,
> d) *Si* $\boldsymbol{n}$ *no está vacío entonces* $\boldsymbol{n}$ *es un sucesor,*
> e) *Si* $x \in n$, *y* x *no está vacío entonces* x *es un sucesor.*

P5. Después se introduce la noción de intervalo "Si $a, b \in N, [a, b] = \{x \ x \in N$ y $a \leq x$ y $x \leq b\}$" (Op. cit. p. 97) para definir el *conteo.* Esta definición se apoya en los intervalos de la forma $[1, n]$ de la siguiente manera: "Contar un conjunto *A* es una correspondencia uno-uno φ: $[1, n] \rightarrow A$ entre $[1, n]$ y A, donde $n \in N$." (Op. Cit. p. 99).

Una vez definido el conteo, se define la cardinalidad como el resultado del conteo:

Si *n* es el resultado de un conteo de *A*, entonces *A* tiene *n* elementos, o el número de elementos en *A* es *n,* o la cardinalidad de *A* es *n.* Esto también lo denotamos como la cardinalidad de *A* por #*(A).* (Op. Cit. p. 101)

P6. En la *adición,* si A y B son dos conjuntos disjuntos donde m y n son los cardinales de A y B respectivamente, entonces $A \cup B$ es $m + n$.

La suma se obtiene de manera natural como una cadena de sucesores, $n' = n + 1$, donde el 10 es el sucesor del 9: $9' = 9 + 1 = 10$. Una vez que se precisan las propiedades de la adición (conmutativa, asociativa), se construye la tabla de suma (Hamilton & Landin 1961, p. 109), donde el número de cada celda es el sucesor del número de la celda anterior; los números mayores de 10 se representan como $10 + a$, siendo a un dígito (figura 14).

m \ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	10 + 1
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	10 + 1	10 + 2
3	3	4	5	6	7	8	9	10	10 + 1	10 + 2	10 + 3
4	4	5	6	7	8	9	10	10 + 1	10 + 2	10 + 3	10 + 4
5	5	6	7	8	9	10	10 + 1	10 + 2	10 + 3	10 + 4	10 + 5
6	6	7	8	9	10	10 + 1	10 + 2	10 + 3	10 + 4	10 + 5	10 + 6
7	7	8	9	10	10 + 1	10 + 2	10 + 3	10 + 4	10 + 5	10 + 6	10 + 7
8	8	9	10	10 + 1	10 + 2	10 + 3	10 + 4	10 + 5	10 + 6	10 + 7	10 + 8
9	9	10	10 + 1	10 + 2	10 + 3	10 + 4	10 + 5	10 + 6	10 + 7	10 + 8	10 + 9

Fig. 14. Tabla de Suma

Para la multiplicación se parte del producto cartesiano: "Si $m, n \in N$, el número #$([1, m] \times [1, n])$ es el producto $m \cdot n$ $(o\ mn)$. Entonces $[1, m] \times [1, n]$ es finito" (Op. Cit. 110). Define las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva de la multiplicación de números naturales y construye la tabla de multiplicación (Hamilton & Landin 1961, 111) mediante la descomposición del multiplicador *n* en $(n - 1) + 1$, para obtener los productos con base en el producto inmediato anterior ya conocido, los escribe como $a \cdot 10 + b$, donde a y b son dígitos (figura 15).

m \ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	10	$10+2$	$10+4$	$10+6$	$10+8$
3	0	3	6	9	$10+2$	$10+5$	$10+8$	$2\cdot 10+1$	$2\cdot 10+4$	$2\cdot 10+7$
4	0	4	8	$10+2$	$10+6$	$2\cdot 10$	$2\cdot 10+4$	$2\cdot 10+8$	$3\cdot 10+2$	$3\cdot 10+6$
5	0	5	10	$10+5$	$2\cdot 10$	$2\cdot 10+5$	$3\cdot 10$	$3\cdot 10+5$	$4\cdot 10$	$4\cdot 10+5$
6	0	6	$10+2$	$10+8$	$2\cdot 10+4$	$3\cdot 10$	$3\cdot 10+6$	$4\cdot 10+2$	$4\cdot 10+8$	$5\cdot 10+4$
7	0	7	$10+4$	$2\cdot 10+1$	$2\cdot 10+8$	$3\cdot 10+5$	$4\cdot 10+2$	$4\cdot 10+9$	$5\cdot 10+6$	$6\cdot 10+3$
8	0	8	$10+6$	$2\cdot 10+4$	$3\cdot 10+2$	$4\cdot 10$	$4\cdot 10+8$	$5\cdot 10+6$	$6\cdot 10+4$	$7\cdot 10+2$
9	0	9	$10+8$	$2\cdot 10+7$	$3\cdot 10+6$	$4\cdot 10+5$	$5\cdot 10+4$	$6\cdot 10+3$	$7\cdot 10+2$	$8\cdot 10+1$

Fig. 15. Tabla de multiplicación

A continuación, se presenta un ejemplo para el número 7 para ilustrar el proceso:

$0 \cdot 7 = 0;$

$1 \cdot 7 = 7$

$2 \cdot 7 = (1 + 1) \cdot 7 = 1 \cdot 7 + 1 \cdot 7 = 7 + 7 = 10 + 4\,,$

$3 \cdot 7 = (2 + 1) \cdot 7 = 2 \cdot 7 + 1 \cdot 7 = (10 + 4) + 7$

$\qquad = 10 + (4 + 7) = 10 + (10 + 1) = (10 + 10) + 1 = 2 * 10 + 1$

y así sucesivamente.

3.1.2. Modelo de Cognición

3.1.2.1. Procesos cognitivos, teoría de la actividad

El sustento teórico de esta componente son las aportaciones de Talizina (2000 y 2001) para entender el tránsito de la *acción* a la *operación* y consolidar la *abstracción matemática.* A partir de las aportaciones de Galperín (1976, p. 27), propone el desarrollo de la *Acción* como eje fundamental de la psique y la memoria para la formación de hábitos. La *acción está* directamente relacionada con la actividad psíquica de los sujetos, está organizada, como una función cerebral exclusiva del ser humano. A través de las acciones se pueden establecer comparaciones para formar significados del mundo que los rodea. (Galperín, 1976, pp. 75 - 83). En la condición humana el pensamiento está ligado a las "…necesidades, los sentimientos y la voluntad (…) que desde el punto de vista psicológico no son otra cosa más que formas diferentes de actividad orientadora del sujeto en diferentes situaciones problemáticas y ante diferentes procedimientos de solución" (Galperín, 1976, p. 84).

Las acciones implican la actividad psíquica del sujeto siempre tienen un objetivo "…a partir de la imagen de la situación." (Galperín, 1976, p. 123). La acción tiene diferentes niveles: física, fisiológica, del sujeto y de la personalidad. "*La acción física* constituye el contenido básico del concepto de acción (…) consisten en el mundo inorgánico el mecanismo productor de la acción es indiferente al resultado que provoca…" (Galperín, 1976, p. 128). En *la acción fisiológica* existe el interés por el resultado de la acción. La *acción del sujeto* es la reflexión de una acción ante el éxito o el fracaso, para reforzar u orientar. Finalmente, en la *acción de la personalidad* se consideran los factores de contexto que influyen en la actuación de los sujetos. La correlación de estos niveles se va dando de manera evolutiva, dando lugar al ejercicio de la conciencia. (Galperín, 1976, pp. 130 – 131).

La acción y la actividad son subjetividades que le pertenecen al sujeto, constituyen una estructura de la actividad psíquica, que tienen un objetivo, un motivo y un objeto al que se dirige la acción. (Talizina, 2000, p. 14). La experiencia es una práctica histórica social de la experiencia humana, que permite la formación de las capacidades humanas, con el apoyo de las generaciones adultas.

El proceso empieza desde el nacimiento y en las instituciones se va fortaleciendo. El desarrollo sensorial constituido por la atención que implica la concentración voluntaria para memorizar significados que le permitan interactuar con el mundo. De ahí se establece la relación entre el pensamiento y lenguaje. Las actividades que los niños van realizando con los símbolos y los signos les permiten sustituir, codificar, esquematizar y modelar una situación, concepto u objeto (Talizina, 2000, p. 44); mientras que "…la imaginación es la formación psicológica nueva, central, que garantiza la preparación para los estudios escolares." (Talizina, 2000, p. 45), lo que les permitirá desarrollar la reflexión como un acto inminente de la conciencia humana para desarrollar la habilidad de argumentar y explicar la realidad. (Talizina, 2000, p. 47). En síntesis, las acciones se pueden orientar, ejecutar, controlar y corregir. (Talizina 2000, p. 115). De acuerdo con esta postura, hay acciones específicas para la formación de los conceptos matemáticos, mismas que nos interesa recuperar para entender la actuación de los niños.

Este proceso de transformación del objeto inicial se realiza a través de la asimilación y ejecución de las acciones realizadas por los infantes. El desarrollo de la asimilación requiere a su vez de otros procesos: la percepción, atención y memoria, que permitirán una asimilación profunda, en la que se utilizan otro tipo de acciones, por ejemplo: "…comparación, deducción de consecuencias, clasificación." (Talizina, 2001, p. 34). Con dichas acciones los sujetos pueden establecer diversas relaciones entre los objetos, precisar sus semejanzas y diferencias, encontrar clases y subclases. Para Galperín "… el pensamiento se considera actividad cuando se tienen en cuenta los motivos del hombre (…); el pensamiento interviene en un aspecto procesual cuando se estudian los procesos de análisis, síntesis y generalización mediante los cuales se resuelven las tareas mentales" (Galperín, 1975, p. 139).

"La acción posee la misma estructura que la actividad: el objetivo, el motivo, el objeto hacia el cual va dirigida la acción, …" (Talizina, 2000, p. 14). Al identificar la *acción* como el acto de la actividad del sujeto y como unidad de análisis del aprendizaje, en este sentido la acción adquiere relevancia para su comprensión en este trabajo de investigación.

Las acciones se constituyen en la relación con la imagen (sensorial, perceptiva y abstracta). "Ninguna imagen, sea sensorial o abstracta, puede ser obtenida sin la acción correspondiente al sujeto" (Talizina, 2000, p. 14). La percepción como imagen sensorial, es el resultado de acciones perceptivas. Con estos referentes, Talizina llega a la conclusión de que "El concepto es el producto de diferentes acciones cognitivas del hombre dirigidas hacia aquellos objetos, cuyos conceptos se están formando" (Talizina, 2000, p. 14).

Los diferentes tipos de acciones son articuladas y organizadas a través de la asimilación, para poder establecer semejanzas, diferencias, clases y subclases entre los objetos matemáticos (Talizina 2001, 34) con ello ir construyendo gradualmente conceptos matemáticos (Talizina, 2001, p. 37). "Con la teoría de la asimilación, se podrá entender y dirigir los procesos de asimilación y formar las acciones cognoscitivas y los conocimientos relacionados con estas acciones, con cualidades establecidas anteriormente" (Talizina, 2001, 13).

Esta autora señala que la enseñanza deberá proponer actividades para que los niños ejerciten diversas acciones, desarrollen el uso de las operaciones cognitivas para sustituir, codificar, decodificar, esquematizar y modelar situaciones problemáticas o conceptos matemáticos (Talizina, 2000, p. 44) y se familiaricen con el uso de símbolos y signos matemáticos. Sin embargo, es necesario considerar que las experiencias adquiridas en el contexto familiar, escolar, cultural y social pueden generar obstructores cognitivos que dificultan el paso de las acciones a las operaciones para la construcción de conceptos matemáticos.

"P. Ya. Galperin, (…) llegó a la siguiente conclusión: los conceptos matemáticos pueden formarse de manera completa, sólo después de la previa asimilación de las operaciones matemáticas generales, de los conceptos y de las relaciones." (Talizina, 2001, p. 49). Este proceso continúa desarrollándose para acceder a escenarios más complejos, para consolidar la asimilación del concepto como producto del "…trabajo con las habilidades lógicas y simbólicas (…) que gradualmente, pasa a niveles más complejos de actividad, los cuales se consideran las tareas de seriación y clasificación, así como en las tareas sobre la actividad de signos y símbolos." (Talizina, 2001, p. 57).

3.1.2.2. Teoría de la actividad y el desarrollo de las habilidades aritméticas

La construcción del concepto matemático implica un proceso lógico, en el que intervienen diferentes tipos de acciones. *Acción de inducción al concepto*, en la cual es necesario señalar las características de los objetos para incorporarlos a una clase; después establecer los criterios de pertenencia a un conjunto, esta acción permite a los sujetos establecer comparaciones, seleccionar y discriminar a los objetos por su condición. La *Acción de Deducción* le permite identificar de manera intuitiva características y propiedades de los conceptos matemáticos, generalizar la información obtenida y analizada a otras situaciones similares y expresar posibles conclusiones. Con la *Acción de comparación*, puede ubicar y discriminar el concepto de los demás, establecer relaciones de acuerdo con sus características esenciales y específicas. La *Acción de Clasificación* le permite usar las relaciones de clases y subclases, permite identificar las características de los objetos y los conceptos. Las *Acciones de seriación y ordenación* para ubicar a cada elemento de acuerdo con sus características relacionadas con las de los otros.

En la consolidación de la asimilación intervienen las acciones interrelacionadas, junto con los procesos de atención, observación, percepción y la memoria, constituyendo la base del concepto y del conocimiento. "La definición del concepto incluye el contenido de la base orientadora de esta acción" (Talizina, 2001, p. 32)

La asimilación gradual de conceptos, permitirán a los alumnos establecer distintas propiedades, como son el carácter relativo y absoluto. "La experiencia muestra que, los conceptos relativos producen mayores dificultades en los escolares, que los conceptos absolutos" (Talizina, 2001, p. 25), lo que se puede observar en los procesos de representación de los números. "El número es la relación entre aquello que se somete a una valoración cuantitativa (longitud, peso, volumen, etc.) y el patrón que se utiliza para dicha valoración." (Talizina, 2001, p. 25). En este ejemplo, la noción de número no sólo es la comparación en la magnitud, la inclusión o el orden, pues se trata de una construcción conceptual compleja, pero fundamental para constituir las bases de un pensamiento matemático formal. La asimilación tiene en la imaginación una de las funciones cognitivas más importantes, estructura a partir de la interrelación de la percepción, memoria y atención las acciones necesarias para la construcción de las nociones de número en los niños en edad escolar.

3.1.2.3. Procesos cognitivos: Percepción, atención y memoria

La percepción, atención y la memoria, son los procesos cognitivos indispensables para profundizar en el procesamiento de la información, permite al sujeto transformarla y representarla de manera abstracta, logrando interpretar, entender, comprender y transmitir diversos significados, en diferentes momentos y contextos.

Percepción. - toda la información que llega a través de los sentidos, se procesa a través de la percepción; sin embargo, la interpretación y entendimiento que nos lleva a deducciones y representaciones puede no ser real. Dado que la interpretación de lo que vemos, olemos, escuchamos o sentimos puede ser ilusoria. Esta va a depender de las experiencias anteriores que tengamos, de la información que ya se tiene almacenada en la memoria, el tipo de atención selectiva que hemos venido desarrollando. Lo importante de este proceso, es la información de cómo y de dónde la capta; lo que podemos aprovechar en la comprensión de la actuación de los sujetos en relación con la asignación de sentido a las actividades que se les proponen con una intención educativa. Por esta razón, es necesario que la enseñanza promueva habilidades para observar y percibir propiedades y relaciones de los objetos (Talizina, 2000, p. 39).

Atención. - a través de este proceso se activan los receptores para seleccionar la información, procesarla, inhibirla o separarla (Smith & Kosselyn, 2008, p. 106). Dichas acciones se realizan de acuerdo con los intereses de los sujetos. Smith & Kosselyn (2008, p. 107) retoman de Posner & Boies los tres componentes de la atención: "…orientación a los sucesos sensoriales, detección de señales para un procesamiento enfocado y mantenimiento de un estado de vigilancia o alerta."

> El manejo de la atención es una de las metas de quienes dirigen cualquier acto educativo, pues si bien es un mecanismo de selección de la información, "…puede ser motivada por factores endógenos como nuestras metas (…) o por factores exógenos como un estímulo destacado o nuevo…" (Smith & Kosselyn, 2008, p. 147).

En la actividad escolar, es necesario que la enseñanza diseñe mecanismos para motivar la atención, En nuestro caso, será un proceso que analizaremos para comprender qué tipo de estímulos son captados por los niños en la realización de actividades numéricas con base en el modelo formal matemático de Von Neumann.

Memoria. - A través de este proceso cognitivo, se retiene y evoca la información que ha sido atendida y registrada, para ser evocada en las situaciones que los sujetos las requieran. La memoria es el componente que se comienza a desarrollar desde los primeros meses de vida, pero aclara que "…el problema de la memoria es (…) un problema de delimitación. No toda la conservación del pasado es memoria (…) se conserva por su funcionamiento" (Piaget, 1984, p. 86). Además de que no todos los recuerdos son reales; o bien hay recuerdos que se han construido sin haber vivido la experiencia. Smith y Kosselyn (2008, p. 228) afirman que "…existen numerosas formas de errores de memoria, entre los que se incluyen el sesgo, la atribución errónea y la sugestión". A través de la memoria se realizan los procesos de codificación de la información, la cual puede tener diferentes formatos. Esta información va a ser la base del conocimiento. "El conocimiento interpreta los recuerdos, confiere significados a las palabras y produce las representaciones que subyacen a los pensamientos." (Smith & Kosselyn, 2008, p. 195). La información puede estar almacenada por periodos cortos o largos -*memoria a corto o largo plazo*- en este proceso activo la primera está vinculada directamente con la percepción, que corre el riesgo de no ser almacenada; mientras que la segunda irá a formar parte de la representación cognitiva. La información va constituyendo la base del conocimiento que los sujetos van conformando; les permiten consolidar las bases de la representación conceptual. El conocimiento se va construyendo para "…representar en varios formatos, incluyendo imágenes descriptivas, análisis de características, símbolos amodales y modelos estadísticos" (Smith & Kosselyn, 2008, p. 195). Estas representaciones van a conformar conocimientos de categorías para formular deducciones o interpretaciones de la información a la que están expuestos los sujetos.

El uso de la memoria a largo plazo posibilita la codificación de la información. De acuerdo con Smith & Kosselyn (2008, pp. 201 – 202) existen cuatro tipos de memoria a largo plazo: *declarativa o explicita, episódica, semántica* y *operativa o de trabajo*.

- La memoria declarativa o explicita nos permite recordar conscientemente la información, es flexible y posibilita formar la representación de la memoria unificada.
- La memoria episódica implica evocar acontecimientos en el pasado personal.
- La memoria semántica se refiere al conocimiento en general con la que podemos asignar significados a través de las palabras, conceptos, propiedades e interrelaciones.
- La memoria operativa o de trabajo se mantiene por poco tiempo, esto ocurre antes de pasar a la memoria a largo plazo, ya que siempre está activa y es susceptible de ser usada en cualquier momento. Permite a los sujetos el análisis y la síntesis para la formación de conceptos y significados; así como procesos de pensamiento complejo. Se apoya en el uso de la atención selectiva, para realizar procesos reversibles, que le permiten establecer deducciones y conjeturas; el control de la conducta que implica

> “…múltiples facetas y posiblemente implique una serie de mecanismos.” (Smith & Kosselyn 2008 p. 291). Sin embargo, si esta información no se usa puede quedar en el olvido o no ser susceptible de significación.

Para nuestra investigación, el aporte de esta componente nos permitió entender y comprender los procesos cognitivos que los niños desarrollaron para darle sentido a la lógica de construcción de los números naturales, con base en el modelo matemático de Von Neumann, articulado con la teoría de las acciones y los procesos de asimilación. Se identificaron obstructores provenientes de los conocimientos previos y de las maneras como los niños han aprendido las nociones numéricas que les generan dificultades semánticas, sintácticas y pragmáticas.

Derivado del análisis de las actuaciones de los niños en las actividades de la entrevista, relacionadas con la construcción de los números, fue necesario revisar la propuesta teórica de Fuson (1982), para comprender el significado de los procesos de conteo.

“El proceso de conteo deriva de un proceso llamado contar todo.” (Fuson, 1982, p. 67) Contar todo, significa nombrar la última entidad de la secuencia numérica, lo que está relacionado con el sentido de cardinalidad. En este conteo los niños usan sus dedos, objetos, marcas en papel o representaciones mentales. Las marcas en papel y las representaciones mentales son niveles de mayor abstracción. El uso de sus dedos u objetos, implican que hay contacto con el propio cuerpo, lo que es necesario para activar los procesos cognitivos.

De acuerdo con el avance del sentido de número cardinal, los niños van a desarrollar distintos niveles de conteo. “Fuson nos presenta una secuencia de desarrollo que toma en consideración tres aspectos: el nombre de los números, su estructuración y las prácticas de conteo asociadas” (Chamorro, 2005, p. 161).

Fuson propone cinco niveles de actuación (Chamorro, 2005, p. 162):

> Nivel repetitivo: los niños repiten la secuencia numérica, sin darle sentido a los números, por ejemplo: uno-dos-tres-cuatro…
>
> Nivel incortable: Los niños consideran que el conteo no puede iniciar en cualquier número, siempre empiezan por el uno.
>
> Nivel cortable: los niños pueden iniciar el conteo en cualquier número y continuar el conteo, por ejemplo: seis, siete,..

Nivel numerable: Los elementos de la serie numérica tienen entidad propia y cada palabra número tiene una entidad cardinal. Así la palabra tres, se refiere a un conjunto de tres elementos. Comienzan los conteos *X* a partir de un número *Y*, es decir, es contar de *X* para llegar a *Y*. Este conteo, también lo llegan a hacer a la inversa, pero es un proceso más complejo, con más errores.

Nivel terminal: logran la bidereccionalidad: contar hacia adelante o hacia atrás a partir de *X* para llegar a *Y*.

Para Fuson (1982, p. 74), hay más diferencias, cuando cuentan objetos y cuando se trata de números, como se puede observar en la figura 16.

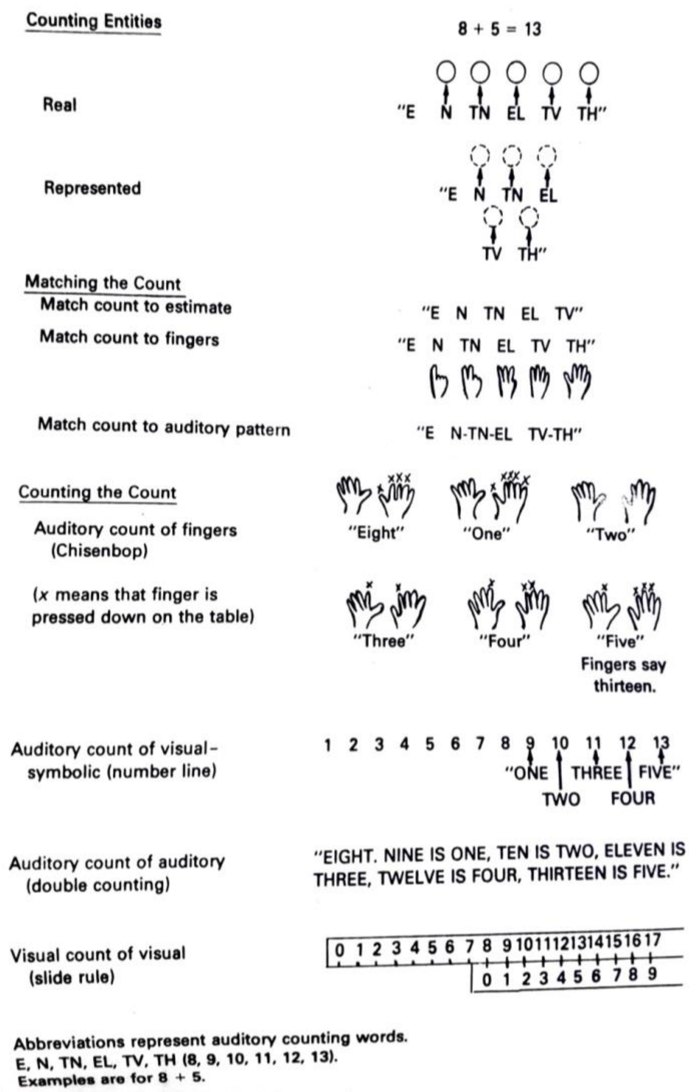


Fig. 16. Métodos para realizar procedimientos para contar

3.1.3. Modelo de Comunicación

De acuerdo con Filloy, Rojano & Puig (2008, pp. 4 - 6) la matemática educativa se ocupa de comprender y entender cómo son los procesos de significación y comunicación que se generan en los espacios educativos. El referente es el uso de los conceptos semióticos como signo, texto y los SMS. En esta componente se pretende entender y comprender cómo son los procesos de comunicación que se generan en el aula, para identificar las dificultades que tienen los niños con la lógica de uso de los SMS involucrados en la construcción de los números naturales; así como la producción de sentido para consolidar los procesos de significación, que les permita llegar a la abstracción.

3.1.3.1. Construcción del significado en Peirce

Los MTL se apoyan en la construcción semiótica de Peirce "… como una teoría de la referencia y una teoría de la significación" (Peirce, 1987, p. 9). Para conceptualizar el signo y su doble dimensión: acto (acción) y representación; así como su relación tríadica (signo, objeto e interpretante) en la cual el interpretante (cognición) va a jugar un papel fundamental, para construir procesos de significación.

En la introducción a la *Obra Lógico Semiótica* de Peirce (1987) escrita por Sercovich la representación es la esencia del pensamiento. "Peirce define así a la lógica, en sentido amplio, como una semiótica general que trata no sólo de la verdad, (…) los pensamientos son signos, la mente es un signo y, (…) el hombre mismo es un signo." (Peirce, 1987, p. 8) Así el objeto de estudio de la Semiótica son los signos, para lo que propone la tríada: gramática, lógica y retórica.

> …una *gramática pura* a la *gramática speculativa* (asignándole el cometido de determinar qué es lo que debe ser cierto del signo o del representamen para que pueda encarnar algún significado), llama *lógica propiamente* dicha (exacta) a la ciencia de lo que es cuasi-necesariamente verdadero de los representámenes para que puedan ser válidos para algún objeto, o sea, verdaderos, y (…) la *retórica pura*, que deber determinar las leyes mediante las cuales un signo da nacimiento a otro signo, un pensamiento a otro pensamiento". (Peirce, 1987, p. 9)

Este proceso de significación se concreta con la participación del interpretante. Entonces podemos afirmar que un signo y la cosa significada, son producto de la cognición producida en la mente. En esta lógica de construcción, el signo es ícono, es la relación del signo y la cosa.

3.1.3.2. Relaciones Significantes

Las relaciones significantes son interrelaciones activas, continuas y complejas entre la *sintaxis*, la *semántica* y la *pragmática*, de acuerdo con los códigos establecidos en un contexto a través de los procesos de significación que se generan a partir de la producción de sentido en relación con el signo y los textos que van produciendo los interpretantes (Barthes, 1993, pp. 22 – 23).

El *signo* está relacionado con la cognición como fundamento de las ideas, se trata entonces de un "*...Interpretante Dinámico*, pensamiento – signo u hombre – signo. Sólo este sujeto – significante, completa una explicativa tríada genuina y permite un enfoque no dicotómico del tipo <significado-significante>" (Peirce, 1987, p. 11). El signo (representamen) adquiere sentido para quien lo interpreta, el signo ocupa el lugar del objeto, es la idea que se forma al tener algún sentido y va a formar parte del proceso de significación para darle un significado. El signo es la actuación del interpretante, "… la palabra o signo que el hombre usa es el hombre mismo" (Peirce, 1987, p. 8). La relación tríadica del signo no es arbitraria, es la relación entre el signo (representamen), el objeto y el interpretante. El representamen es el fundamento de las ideas, es el objeto que representa al signo, son los interpretantes quienes construyen el sentido y la significación a partir de la tríada *signo – objeto – interpretante*.

Para significar relaciones se requiere de la producción de sentido, significación y significado

Producción de Sentido: es el resultado de los procesos de lectura/transformación que hacen los alumnos durante las actividades escolares, cuando están aprendiendo matemáticas (Puig 1994, p.8), utiliza fuentes cognitivas (atención, memoria y percepción) en una interrelación texto – contexto para destacar información, trasladando la vivencia a experiencia a partir de los procesos de interpretación y gracias a la actividad práxica puede asignar el valor correspondiente a la acción.

Significación: es el acto de producción de sentido, para nombrar las cosas, se reconoce al objeto, cuando lo dota de significado lo convierte en signo.

Significado: es la apropiación del objeto al establecer la relación del objeto con el signo, a través del proceso de significación.

Las relaciones significantes son clave para identificar dificultades de acuerdo con el uso sintáctico, semántico y pragmático de los números naturales que los niños hacen en las actividades que se les proponen.

3.1.3.3. Argumentos como Procesos de Significación

La *inducción, deducción y abducción* (Peirce, 1987, pp. 258 – 260) son los argumentos que aportan la base de la reflexión y abstracción para desarrollar los procesos de significación. La *inducción* es el razonamiento de lo particular a lo general, de tal modo que los sujetos pueden validar experimentalmente una predicción general. Permite comprender los hechos homogéneos para clasificar, pero no explicar, busca los hechos empíricos para demostrar, prueba experimentalmente sus hipótesis, para verificar sus resultados. "Una Inducción es (…) una verificación experimental de una predicción general,… " (Peirce,1987, p. 259). Por ejemplo, generalizar la idea de sucesor a la vista de la construcción de los primeros números.

La *deducción* es la habilidad para razonar de lo general a lo particular reconociendo las partes de un todo aunque no estén explícitas, para establecer relaciones mentales entre ellas.

> …*Deducción* es un argumento cuyo Interpretante representa que éste pertenece a una clase general de posibles argumentos precisamente análogos, que son tales que, a la larga, dentro de la experiencia, la mayor parte de aquellos cuyas premisas son verdaderas tendrán conclusiones verdaderas. Las Deducciones son o *Necesarias* o *Probables*. (Peirce, 1987, p. 258)

A través de la deducción es posible, reconocer que todos los números son sucesores, excepto el cero.

La *Abducción* es la capacidad para desarrollar inferencias hipotéticas y puede discriminar premisas verdaderas o falsas para formular conjeturas explicativas. A través de la abducción, se transita de una hipótesis inicial a otra más abstracta. Es una transcripción de las palabras en signos y símbolos. Un ejemplo de abducción, es el reconocimiento de que todo número es un sucesor y contiene a todos los anteriores, excepto el número cero; por lo tanto el cero no es un sucesor.

El proceso de *abducción* implica un uso correcto de la lógica de los SMS, sus códigos y sus reglas convencionales, artefactos lingüísticos que se emplean en una comunidad matemática.

Los sujetos también usan metacódigos que constituyen "… una colección de instrumentos discursivos y semióticos heterogénea y divergente que dan cuenta de la <masa de actividades de significación y comunicación que en la práctica acompañan el primer modo (formal y rigoroso) de presentar las matemáticas>." (Filloy, 1999, p. 63).

Identificar los argumentos que los niños emplean permitirá entender los procesos de significación y el uso de la lógica de los SMS implicados en la construcción de los números naturales.

3.1.3.4. Lógica de uso de los SMS involucrados en la construcción de los Números Naturales

La *lógica* se refiere a la semiótica (Peirce, 1987, p. 8), en tanto que es la referencia teórica de los MTL. Los SMS parten de que lo *matemático* está en los *sistemas* y no en los signos. Los SMS son "…una herramienta de análisis de los textos que producen los alumnos cuando se les está enseñando matemáticas en los sistemas escolares…" (Filloy, 1999, p. 64). En los textos, los niños producen sistemas de signos o estratos de sistemas de signos para dar sentido a las actividades que se les proponen en el modelo de enseñanza (Filloy, Rojano & Puig, 2008, p. 7).

De esta componente, interesa identificar la dotación de sentidos intermedios con el uso de códigos personales, como parte del proceso de transición de lo concreto a lo abstracto; para nombrar y reconocer al objeto con el empleo de códigos convencionales de los SMS involucrados en la construcción de los números naturales.

3.1.4. Modelo de enseñanza

3.1.4.1. El Modelo de Enseñanza como espacio de intertextualidad

Esta componente concibe como Modelo de Enseñanza una colección de textos, donde se generan y modelan acciones, con lenguajes que van de lo concreto a lo abstracto, con códigos intermedio, para gradualmente desarrollar habilidades matemáticas y resolver distintas situaciones o problemas. Estas habilidades matemáticas van desde los conocimientos intuitivos, sintácticos y semánticos que la experiencia escolar y cognitiva les va aportando. La base de este modelo de enseñanza debe partir de una estructura matemática formal, transformándola en actividades concretas, como un texto para producir otros textos en la interacción maestro – alumno; alumno – alumno; alumno – maestro. En los intercambios de textos se producen "…códigos para desarrollar habilidades de resolución." (Filloy 1999, p. 26). Estas habilidades son tanto sintácticas como semánticas, a partir de los conocimientos intuitivos que poseen los actores.

> Dicha caracterización involucra nociones como *texto* y *espacio textual*, cuya particularidad corresponde a la diferencia entre significado y sentido, dado que una vez que se entiende que es un texto se establece la lectura de un espacio textual, enseñar y aprender en la clase de matemáticas se puede interpretar como un proceso de lectura/transformación de espacios textuales en textos, que se toman como espacios textuales para leer y así sucesivamente. (Filloy, Rojano & Puig, 2008, p. 121)

Este funcionamiento textual contiene unidades comunicacionales, en los que la producción de sentido, la significación y el significado permiten la relación entre los textos que van produciendo los interpretantes.

3.1.4.2. Texto matemático

Los textos matemáticos se conforman por un sistema de signos con una estructura formal, que son interpretados por los sujetos que los usan y conceptualizan, a partir de ciertos códigos para comprenderlos. Puig (1994) cita a Javier Lorenzo: "…la caracterización del texto matemático (...) va a estar en el modo de emplearlo y en el modo por el cual se le da un referente o contenido semántico posterior". Argumenta que en matemática educativa una semiótica de las matemáticas implica centrarse en los sistemas de significación y los procesos de producción de sentido, porque lo que se va a "...calificar de <matemático> no es sólo un tipo particular de signos, sino determinados sistemas de signos." (Filloy 1999, pp. 63 y 64).

3.1.4.3. Intertexto matemático

En el aula, los alumnos y maestros producen textos cuando se está realizando la enseñanza y el aprendizaje de matemáticas. Interactúan a través del sentido y como producto del proceso de significación; dichos textos no son producto del lenguaje matemático "...sino el resultado de procesos de lectura/transformación hecha sobre un espacio textual..." (Filloy 1999, p. 64) el cual adquiere el significado de los interpretantes que participan en él, de acuerdo con sus referentes contextuales. Así el texto que se produce en el aula es producto de la intertextualidad. "La intertextualidad en el sentido de Kristeva no es una relación entre textos separados, sino que está presente en un texto (dialógico)…" (Córdoba 2016, p. 63) en el contexto de la comunicación.

3.1.4.4. Procesos de Lectura/transformación

El proceso recursivo de lectura/transformación de los espacios textuales en textos y los textos en espacios textuales implica la producción de sentido para significar las acciones, es por esta razón que los modelos de enseñanza en las aulas de matemáticas "…se complementan con el uso de las nociones de SMS y de los estratos del idioma, para ser aplicado en el caso de un modelo concreto…" (Filloy, Rojano & Puig, 2008, p. 121). Los textos matemáticos no se consideran manifestaciones del lenguaje matemático, puesto que la lectura/transformación puede ser utilizada en cualquier práctica de producción de sentido (Filloy, 1999, pp 64 – 65). En la relación espacio textual y texto están implicadas diferencias entre significado y sentido. Los procesos de lectura/transformación de un texto en un contexto, no buscan extraer o desentrañar un significado inherente en el espacio textual, sino producir sentido (Filloy, Rojano & Puig, 2008, p. 125). El espacio textual es la existencia empírica, en la que el sujeto es quien lo va a significar a partir de la lectura que haga de él.

En este modelo de Enseñanza se proponen acciones, las cuales se realizan en un espacio textual, a partir del intercambio de mensajes entre el profesor y el niño, poniendo en acción sus SMS y permiten observar la concatenación que se produce con la utilización del Sistema de Signos Matemáticos (SSM) que los alumnos poseen, así como identificar las competencias discursivas que emplean. Este proceso de concatenación tiene que ver con lo que Filloy, Rojano & Puig (2008) afirman que en los modelos de enseñanza los textos se van interrelacionando a partir de situaciones problemáticas, en las cuales los alumnos realizan diversas acciones y construyen nuevos SMS; van generando sentido y significación a la secuencia de esos textos, en donde a partir de la enseñanza se consolidan y fortalecen nuevos conceptos para proveer nuevas etapas de abstracción estratificada.

De acuerdo con Filloy (1999, pp. 61 – 71) el investigador pondrá atención en observar los códigos que usan los niños, cómo los van transformando, las dificultades del uso lógico que tienen en su decodificación, cómo construyen nuevos estratos de abstracción de número natural, cómo van transitando de SMS concretos a los más abstractos y cómo los usan en la solución de diversos problemas. El diseño de la secuencia de actividades considera los aportes del modelo cognitivo y de comunicación, con la finalidad de precisar su sentido local y su eficiencia.

3.1.4.5. Elementos para el diseño de este Modelo de Enseñanza

Para el diseño de este modelo, se tradujeron los principios (P_i) matemáticos del modelo formal de Von Neumann a una secuencia de actividades concretas con el uso de material manipulable, como se muestra:

P_1 El número cero es la bolsa vacía.

P_2 Para la representación de conjuntos, las llaves { } se sustituyen con bolsas.

P_3 El sucesor es *el siguiente*, es la bolsa que contiene a todas las bolsas anteriores. Así, el cero es la bolsa vacía; el uno es la bolsa que contiene dentro la bolsa del cero; el dos es la bolsa que contiene dos bolsas: la cero y la del uno; el tres es la bolsa que contiene tres bolsas: la del cero, la del uno y la del dos… (figura 17).

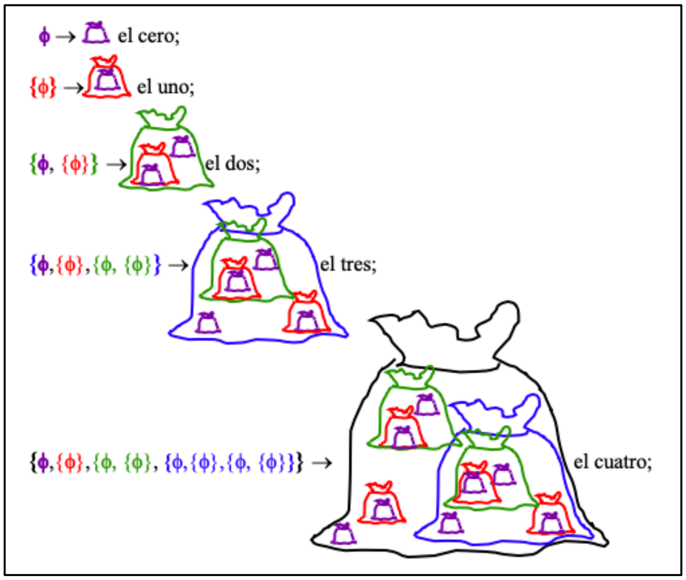


Fig. 17. Proceso recursivo de construcción

P_4 Para la definición de números naturales se usan bolsas para mostrar que todo conjunto de bolsas está ordenado por la manera de construirlo. En toda bolsa siempre hay un primer elemento que es la bolsa del cero. Para toda bolsa el sucesor se construye metiendo en otra bolsa esa y todas las anteriores. La bolsa del cero es la única que no es un sucesor, por lo tanto no contiene otra bolsa.

P_5 El conteo es establecer ordenadamente la correspondencia uno – uno con los intervalos de la forma $[1, n]$. Para este principio no se diseñó una secuencia de actividades, dado que los niños están habituados al conteo.

P_6 Se completan las tablas de doble de entrada de suma y multiplicación usando las formas $10 + a$ y $a \cdot 10 + b$ cuando los resultados o productos son mayores a diez.

Aunque no está en la estructura de Von Neumann ni en Hamilton & Landin (1961), se ha introducido el uso de una semirrecta para representar los números, sobre ella trabajar la correspondencia entre linealidad y orden.

En el diseño de la secuencia de actividades que se describen brevemente en la Tabla Núm. 1, se presentan los principios matemáticos (P_i) del modelo formal que han sido traducidos a actividades y en la tercera columna se enumeran los materiales manipulables que se usaron.

Tabla Núm. 1: Secuencia de Actividades

P_i	Actividades	Material manipulable
P_1	1. *Adivina quién soy* La tarea consiste en identificar al número cero como el conjunto vacío. - Se invita a los niños para que observen una bolsa de plástico transparente vacía y comenten sobre el contenido. (Posibles respuestas: nada y vacío). - Una vez que aparezca la palabra vacío, se les pide sugerencias para nombrarla. - Cuando expresen que se pueden nombrar con números, se les pide que elijan una de las pegatinas con números que coincida con el color de la pegatina amarilla que tiene la bolsa vacía que se usó. - Se les pregunta si conocen el número y dónde lo han usado. - Se les pide pegar la etiqueta del número cero sobre la bolsa vacía. - Se les pide pegar la bolsa sobre la semirrecta que se ha dibujado en la pizarra.	Bolsas de plástico transparente, números en plástico flexible de distintos colores, semirrecta dibujada en la pizarra.
P_2 P_3	2. *¿Podemos construir el siguiente?* - A partir de la construcción del número cero como conjunto vacío, se les pregunta a los niños si se puede construir el *siguiente*. (El *siguiente* es el número/bolsa que contiene al elemento cero). - Se introduce la bolsa del cero en la nueva bolsa. Esta otra bolsa se nombra como uno. - Se les pide que peguen la etiqueta del número uno a la nueva bolsa y lo coloquen en la semirrecta (se espera que la coloquen a la derecha de la bolsa/número cero). - Con esta lógica se construyen los sucesores y se pone énfasis que cada sucesor contiene a todos sus anteriores.	 Pizarra, bolsas de plástico, etiquetas de números, semirrecta dibujada en la pizarra.

P_4	3. *¿Cómo soy?* En la construcción de cada sucesor, se pregunta a los niños para guiar su reflexión sobre la noción de ordinalidad y la definición de los números naturales. - Se les pregunta, teniendo como referencia la representación en la semirrecta: a) ¿Cuál es la relación de cualquier sucesor con el cero? b) ¿Quién está antes de…, después de…? c) ¿Quiénes son los antecesores de…? d) ¿Quién no tiene antecesor?	
P_6	4. *Construimos las tablas de suma y multiplicación* - Se les presenta una tabla de suma con los números del 0 al 9 colocados en la primer columna y fila, para que los niños la completen. En la celda donde se cruzan una fila y una columna se pone el resultado de operar los números que las encabezan, tanto para la suma como para la multiplicación. - Se les invita a usar las formas $10 + a$ y $a \cdot 10 + b,$ para representar los números mayores de 10. - Complementariamente, se usa una semirrecta para representar los resultados obtenidos.	 Tabla de suma y tabla de multiplicación.

Este Modelo de Enseñanza se aplicó a un grupo de clase de 1º, 2º y 3º grados de educación primaria, en escuelas públicas ubicadas al norte de la Ciudad de México.

Durante el trabajo con los niños, se observó que los alumnos de 1º grado ya saben contar y algunos mencionan el número cero, pero no hay evidencia de las nociones que han adquirido sobre los números naturales. Los niños de 2º grado saben contar y sumar, pero no saben multiplicar y no han trabajado el cero como número. Los niños de 3º grado tampoco han trabajado el cero como número. El común denominador de los tres grupos es que no han experimentado con un modelo de enseñanza centrado en el tratamiento simultáneo de los números en su sentido ordinal y cardinal; ni en construir cada número incluyendo el cero, usando un proceso recursivo; ni con las operaciones de suma y multiplicación en la forma $a \cdot 10 + b$.

4. METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

La metodología es de corte cualitativo, para analizar y comprender dificultades de los niños en la construcción de los números naturales con base en el modelo de Von Neumann. De acuerdo con los investigadores cualitativos la realidad se estudia en su contexto natural, el énfasis está centrado en la observación, generalización y la interpretación. En este modelo la explicación del fenónomeno se realiza a la luz de la teoría, constituyendo la base fundamental para dar la validez a la investigación.

En este trabajo experimental la guía teórico – metodológica de los MTL y las categorías de análisis son la base para interpretar y comprender la actuación de los participantes a quien está dirigida la observación y constituyen la validación de la investigación.

4.1. Justificación de la propuesta del Modelo Formal de Von Neumann

Debido al énfasis en el tratamiento de los números naturales en su sentido cardinal que se tiene en los programas, libros de texto oficiales vigentes y prácticas docentes, generan una carencia conceptual del número. Estas referencias conceptuales tienen sus orígenes en Cantor con la teoría de conjuntos y Peano con la noción de $n+1$.

En Cantor está la idea de cardinalidad asociada a la teoría de conjuntos, el número se define como la cantidad de elementos que hay en el conjunto, el conteo se hace relacionando dos conjuntos equipotentes para que se pueda establecer la correspondencia biunívoca. El orden se construye a partir de las relaciones entre la cardinalidad de los conjuntos, pues los números naturales se construyen separados unos de otros, pero no hay continuidad.

Peano, matemático italiano, construye los números desde una perspectiva ordinal, está la idea del sucesor, pero no hay conjuntos; propone la axiomatización de los números naturales, a partir de definir el primer elemento y el sucesor. Históricamente constituyó

> "...el punto de partida de la sistematización de la matemática bajo el método formal axiomático. Actualmente los axiomas de Peano, complementados con la teoría ramificada de los tipos, constituyen la fórmula más común (...) en lo que respecta a los números naturales". (Peano, 1979 p. 26).

Para ello propone 9 axiomas, de los cuales se caracterizan 5:

1. El n es un número natural: $n \in \mathbb{N}$
2. Si n es un número natural, entonces el sucesor de n también es un número natural.

   Si $x \in \mathbb{N} \Longrightarrow$ el Sig $(x) \in \mathbb{N}$

3. El 1 no es el sucesor de ningún número natural. No existe $x : x$ que 1 sea el siguiente de (x).

$$\nexists\, x : x \qquad 1 = sig.(x)$$

4. Si hay dos números naturales n y m con el mismo sucesor, entonces n y m son el mismo número natural.

   $Si \quad x = y \implies$ el siguiente $(x) =$ al siguiente (y)

5. Si el *x* pertenece a un conjunto, y dado un número natural cualquiera, el sucesor de ese número también pertenece a ese conjunto, entonces todos los números naturales pertenecen a ese conjunto. *(Axioma de inducción).*

John Von Neumann lógico – matemático del siglo mediados del siglo XX, encapsula en la iteración los axiomas de Peano en el Principio de inducción finita. La suma se da manera natural, en el sucesor $(n + 1)$ y la resta en la operación contraria. Este modelo presenta una lógica de construcción precisa de los SMS involucrados en la construcción de los números naturales. Así que plantear una discusión Cantor – Peano – Von Neumann, no tiene sentido para esta investigación.

El interés de esta investigación se enfocó en diseñar un Modelo de Enseñanza con base en la estructura matemática formal de Von Neumann (1923 - 1957) y analizar las dificultades que tienen los niños con esta manera de enseñar.

Es importante señalar que un modelo de enseñanza de los números con estas características nunca se ha puesto en práctica en la escuela primaria; salvo el antecedente de Maravilla (2011), que lo trabajó con niños preescolares (3 a 5 años) para establecer el orden y el conteo a partir de la construcción de los primeros números naturales. Con la finalidad de dar continuidad a ese trabajo, en esta nueva etapa se profundizó en el Modelo de Competencia Formal para introducir al alumnado de los dos primeros ciclos primeros de educación primaria en la construcción de los números naturales, incluyendo el cero y avanzar un poco más en las operaciones aditivas y multiplicativas con esta perspectiva matemática.

El modelo de Von Neumann es una estructura matemática en la que el principio del orden se da por la construcción de los números, empezando por el número cero. Usa la teoría de conjuntos, los procesos de iteración y recursividad.

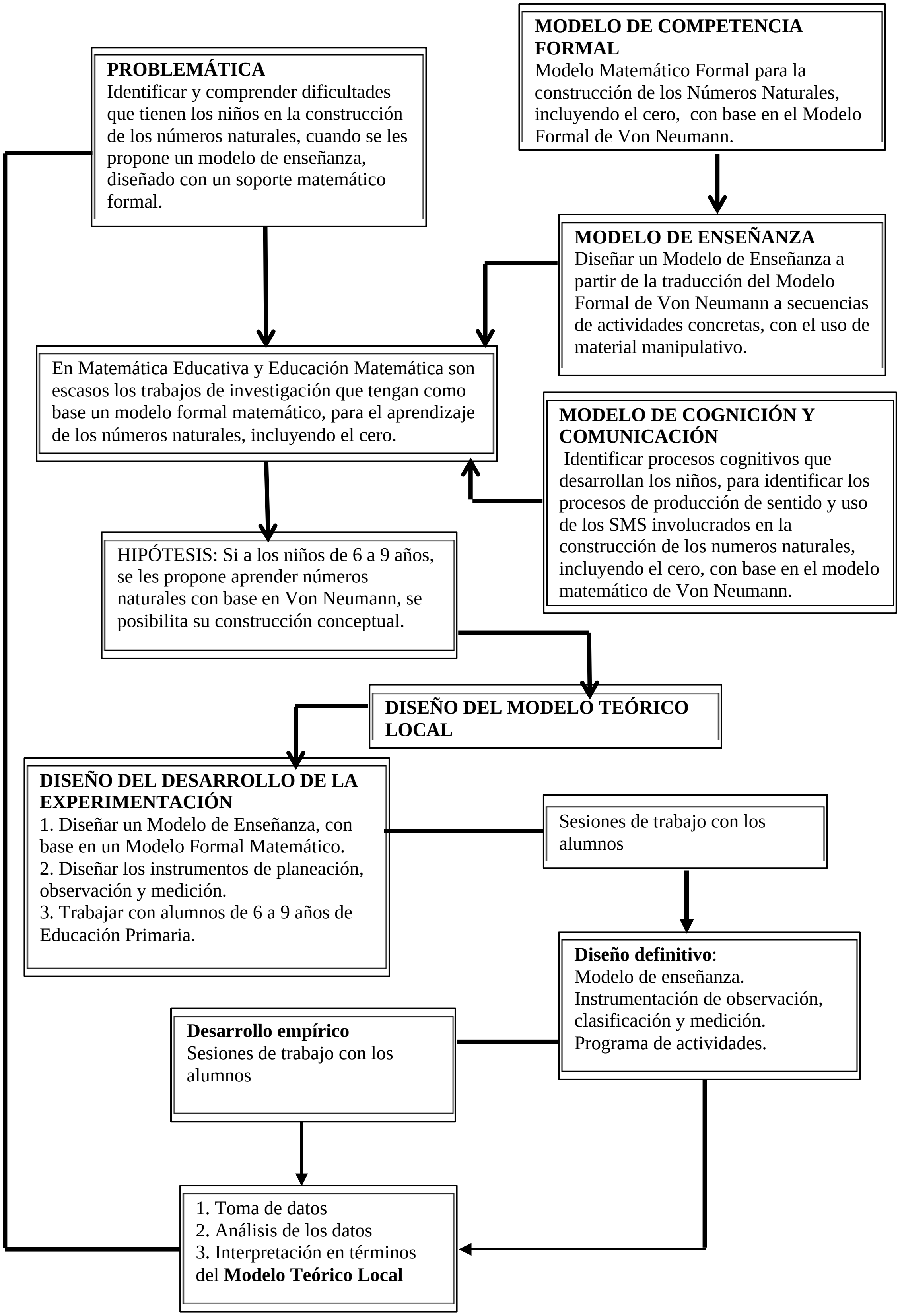
La idea fundamental es centrar la atención para identificar qué *dificultades* tienen los niños con la lógica de uso de los SMS implicados en la construcción de los números naturales, sus propiedades y operaciones; comprender cómo estructuran el esbozo lógico semiótico de la situación, qué papel juegan los procesos cognitivos en la construcción de representaciones y las inferencias analíticas en la construcción de los números naturales, para poder operarlos en diferentes contextos. Identificar el tipo de códigos personales que usan para referirse a las acciones que realizan en las actividades que se les proponen, cómo las nombran y las posibilidades de generalización y abstracción, que van desde la dotación de sentidos intermedios, retrocesos, obstáculos, hasta la necesidad de dotar de sentidos a las redes de acciones cada vez más abstractas para convertirlas en operaciones (Filloy, 1999, pp. 43 y 44).

Las experiencias que devienen de la investigación en Educación Matemática se retomaron para enriquecer los Modelos de Cognición y Comunicación, componentes del referente teórico – metodológico de los MTL con la finalidad de consolidar el diseño de un Modelo de Enseñanza; permaneciendo en todo el proceso el Modelo de Competencia Formal Matemática, el cual fue la guía de las diferentes etapas de la experimentación. Esta componente constituye la fortaleza y la columna vertebral de esta investigación.

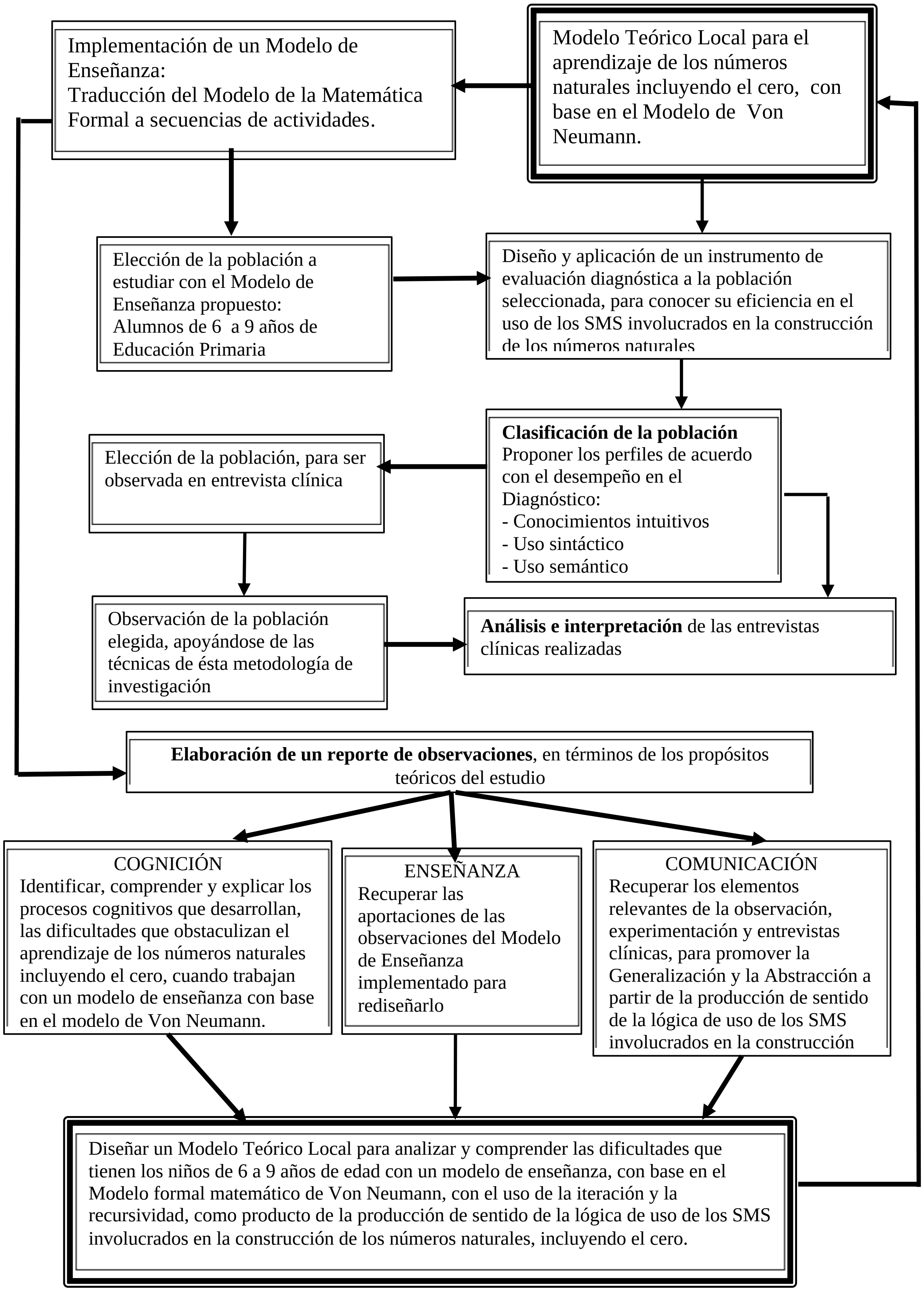
Para la fase de experimentación se trabajó durante dos ciclos escolares (2016 – 2017)

con tres grupos (1º, 2º y 3º grado) y (2017 – 2018) se continuó sólo con dos de los grupos 2º y 4º de las mismas escuelas públicas de educación primaria norte de la Ciudad de México, en la Alcadía de Gustavo A. Madero. De acuerdo con la metodología de los MTL, se organizaron dos fases: Observación experimental y Desarrollo de la Experimentación como se muestra en los respectivos esquemas 1 y 2.

Esquema 1. Diseño de la Observación Experimental



Esquema 2. Diseño del Desarrollo de la Experimentación



4.2. Elementos para el diagnóstico

Para interpretar la experimentación del modelo de enseñanza, se utilizó la observación como técnica metodológica, con la finalidad de identificar dificultades que tienen los niños en la construcción de los números naturales al trabajar las actividades del Modelo de Enseñanza, diseñado para ese fin, usando los procesos de *iteración* y la *recursividad* para dar sentido al proceso de construcción del sucesor de cada número, comenzando por el cero.

El Modelo de Competencia Formal, fue la base para interpretar la observación de las situaciones por medio del SMS más abstracto. Con esta lógica de análisis metodológico se decodificaron los textos que se producen en el intercambio de mensajes con contenido matemático en el aula, donde se conjugaron diferentes grados de competencia de uso de los SMS utilizados.

Otro recurso metodológico que se implementó fue el uso de la *pregunta,* ya que representa una posibilidad que puede usar el docente o el adulto para "…ofrecer una ayuda para que el niño active y movilice los esquemas de conocimiento que posee, para ello es necesario que el educador tome como punto de partida los significados y contenidos que, con relación al tema, tienen los infantes" (Polanco, 2004, p. 3). Desde esta perspectiva, la estructura de las preguntas debe generar retos y desafíos que desencadenen procesos de atención, memoria, interpretación, comprensión, aplicación, reflexión, análisis, síntesis, inferencias, deducciones, así como juicios de valor de la situación, procesos que consideramos en el modelo de comunicación y el de cognición. Las preguntas o cuestionamientos constituyeron un recurso didáctico para guiar la actividad de los niños en este proceso de construcción, de acuerdo con las acciones y actitudes que se fueron manifestando, considerando que la preocupación fue identificar dificultades que tienen para desarrollar esbozos lógico-semióticos de los SMS que descubren y emplean.

Se propusieron preguntas con la finalidad de promover la reflexión sobre las acciones, por ejemplo: ¿Qué hay en la bolsa? ¿Se podrá construir el siguiente? ¿Qué se necesita? ¿Cómo lo nombramos? ¿En dónde lo colocamos? ¿Quién es el primero? ¿Quién es el segundo? ¿Cuál fue el primero que construimos?... ¿Qué pasará si…?

En total se trabajaron 54 sesiones de aproximadamente 40 minutos. En el ciclo escolar 2016 – 2017, se aplicaron las dos primeras etapas, con un total de 30 sesiones con tres grupos de educación primaria 1º, 2º y 3º grado (Tabla Núm. 2).

Tabla Núm. 2
Concentrado de sesiones por grupo, grado y etapa
en el ciclo escolar 2016 – 2017

etapa	1º grado	2º grado	3º grado	Total
1ª	8	7	3	18
2ª	5	3	4	12
Total	13	10	7	30

La tercera etapa se desarrolló al inicio del siguiente ciclo escolar (2017 – 2018) sólo participaron dos grupos: el de 1º grado pasó a 2º grado y el grupo de 3º grado ahora fue el grupo de 4º grado (Tabla Núm. 3).

Tabla Núm. 3
Concentrado el número de sesiones por grupo y grado
en el ciclo escolar 2017 – 2018

Etapa	Grupo de 2º grado	Grupo de 4º grado	Total
3ª	12	12	24

- *El grupo de 2º grado de la Esc. Jorge Casahonda Castillo, ya no pudo continuar, debido al sismo del 19 de septiembre de 2017, el edificio escolar sufrió daño estructural y los alumnos no pudieron regresar a clases a su escuela, por más de cinco meses.*
- *Las secuencias de actividades en cada una de las etapas se pueden consultar en el anexo número 2.*

https://cinvestav365-my.sharepoint.com/:w:/g/personal/leticia_rodriguez_cinvestav_mx/EVHLWdQT_RtLpog77YED1LcB5-n167eSe5eujPva8k5MYw?e=4vgD4e

A continuación, se hace una breve descripción del desarrollo de cada etapa:

1ª Etapa: Construcción de los diez primeros números naturales (0 - 9)

La acción consistió en observar dificultades que tienen los niños para construir los diez primeros números, incluyendo al cero. Los números son ordenados por la construcción y *cualquier número es menor que cualquier posterior* (Hamilton & Landin 1961, p. 77), al construir un número ordinal como un representante del tipo de orden de un conjunto bien ordenado, con el proceso de la iteración construyen el sucesor, entonces todos tienen un antecesor excepto el cero.

A partir del primer número (bolsa/número cero) los niños iteraron la bolsa/número, para la construcción del sucesor, apoyándose en el proceso recursivo para repetir exactamente las mismas acciones para la construcción $n + 1$ como el *sucesor*.

2ª Etapa: Construcción de las tablas de suma y multiplicación

En esta etapa se construyen las tablas de suma y multiplicación con el uso de los de procesos de iteración y recursión. Los números mayores a diez se representan de la forma $10 + a$. El número 10 se escribe con color rojo, en la semirrecta y en las tablas de suma y multiplicación, con la finalidad de que sirva de referente de la nueva unidad. En la tabla de multiplicación se agrega el uso de la forma $a \cdot 10 + b$, cuando el producto está representado por cantidades mayores a 10+9, se representan siguiendo este patrón como sigue:

$3\ x\ 4$ se representa como $10\ +\ 2$;

$4\ x\ 5$ como $2\ \cdot 10$;

$4\ x\ 6$ como $5 \cdot 10 + 4$.

3ª Etapa: Relaciones de orden, operaciones aditivas, multiplicación, uso de las propiedades asociativa, conmutativa y el elemento neutro para la suma

En la secuencia de actividades diseñadas para trabajar el principio matemático ($\mathbf{P_6}$) del Modelo de Enseñanza, se hicieron adaptaciones actividades tomadas de diferentes fuentes. Se les propusieron situaciones de resolución de operaciones de suma y multiplicación. En la tabla Núm. 4 se presenta el desglose.

Tabla Núm. 4. Actividades de suma y multiplicación **(P_6)**

Secuencia de actividades	Material manipulativo/ Fuente
1. *El cambio* Por turnos los niños tiran dos dados y toman el número de fichas de color azul, de acuerdo con el puntaje obtenido en la suma de los dados. Si la suma es mayor a 10, deben tomar una roja. En cuanto cada jugador reúna diez fichas azules, deberá cambiarlas por una roja, para ello deben detener el juego diciendo: "Cambio". Pierde el jugador que no realice el cambio. Gana el jugador que reúna el mayor número de puntos. RESTA Para practicar la operación de Resta, cada jugador comienza el juego con una ficha verde que equivale a 100. Lanza los dados y deberá transformar su ficha verde en 10 fichas rojas y regresar el número de puntos que obtuvo en los dados. Gana el jugador que logre dejar todas sus fichas, que llegue a cero. Usan una semirrecta pintada en la pizarra, para representar el número de puntos que cada jugador obtuvo al finalizar el juego.	Fichas de color rojo, azul y verde. Dos dados.
2. *El boliche* En esta actividad se realizan operaciones aditivas usando la propiedad asociativa y el elemento neutro para la suma. Se acomodan los bolos para ser tirados con una pelota. Cada jugador tiene oportunidad de hacer una tirada. Los alumnos realizan la sumatoria de los puntos obtenidos en cada bolo, los cuales están números del 1 al 10. La regla para hacer la sumatoria, es ir agrupando en parejas los números, para ir realizando las sumas, es decir, usar la forma $a \cdot 10 + b$. Por	Bolos numerados del 1 al 10 y una pelota pequeña. (SEP, 1991, p. 39).

ejemplo, si tiraron los bolos: 3, 10, 6, 7 y 9, los pueden agrupar como sigue: $$(3+10)+(6+7)+9=$$ Realizar las sumas como sigue: $$(10+3)+(10+3)+9=$$ $$2\cdot 10+3+(3+9)=$$ $$2\cdot 10+(10+2)+3=$$ $$3\cdot 10+5=$$ Gana el jugador que obtenga el mayor número de puntos.	
3. *Tiro al Blanco* Cada jugador tiene tres fichas: una roja y dos azules. Lanza una por una sobre el tablero y trata de obtener el mayor número de puntos. Se usa la misma forma $a\cdot 10+b$. Gana el jugador que obtenga el mayor número de puntos.	Tablero y fichas de color rojo y azul. (SEP, 1991, p. 31).
4. *Las trampas de la rana* En la semirrecta, se hacen particiones, usando la secuencia del 1 – 30; 1 – 40; 1 – 50… con la finalidad de que los niños encuentren las posibilidades de saltos iterados que dio la rana para llegar al número en donde está situada, la cual puede estar en un múltiplo de los números del 2 al 9. Cada jugador tiene la oportunidad de adivinar la trampa que le puso la rana. Gana el jugador que tenga más aciertos.	Una rana de papel (Fuenlabrada, et. al. 1991, p. 43)
5. *Otros nombres de los números* En una urna se colocan tarjetas del cero al diez. Un alumno sacará una tarjeta al azar.	Urna y tarjetas con los números del 0 al 9 (Sin datos)

Los niños deberán proponer diferentes maneras de representar este número, pueden usar las operaciones aditivas y multiplicativas, por ejemplo, inventar diferentes nombres para el número 6: $10 - 4 = 6;\ 3 + 3 = 6;\ 2x3 = 6;\ 42 - 36 = 6, \ldots$	
6. *La calculadora* En una urna se colocan tarjetas del cero al diez. Se forman equipos. Un alumno de un equipo saca dos tarjetas al azar y otro equipo teclea en la calculadora los números en el orden en que salieron y tienen que escribir y decir el número que obtuvieron.	Calculadora simple, urna y tarjetas con los números del 0 al 9. (SEP, 1991, p. 29)
7. *Número escondido* La profesora forma series ascendentes y descendentes usando tarjetas con los números del 0 al 100. Quita alguno de los números y los vuelve a acomodar, para que los niños encuentren el número que falta.	Tarjetas con los números del 0 al 100. (SEP, 1991, p. 16).
8. *El artesano (ejercicio escrito)* Los niños resuelven operaciones aditivas, con el uso del modelo aritmético y sus transformaciones: $A + B = C$ $A + \_\_ = C;\ C - A = \_\_;\ldots$	Adaptación de la Lección 12. (Imaz y Filloy 1972, p. 37 - 39). Ejercicio escrito
9. *Caras del payaso (ejercicio escrito)* Los niños dibujan diferentes payasos, combinando tres diferentes bocas, ojos y nariz. Usan la iteración de la unidad, para representar sumas iteradas: $3 + 3 + 3 + 3 = 12 \qquad 4\ x\ 3 = 12$	Adaptación de la Lección 31 (Imaz y Filloy 1972, pp. 78 - 81). Ejercicio escrito
10. *La ropa de Luis (ejercicio escrito)* En este ejercicio los niños tienen que colorear el suéter y el pantalón, combinando colores: Suéter rojo, amarillo, azul y verde.	Adaptación de la Lección 32 (Imaz y Filloy 1972, pp. 82 - 83). Ejercicio escrito

Pantalón azul, café, gris y verde.	
11. El banquero Los alumnos se forman en equipos. El banquero se turnará en cada ronda, un niño funge como banquero. Se reparten 100 fichas en partes iguales a todos los jugadores, el banquero decide cuántas fichas se meterán al bote, así cada jugador deberá ponerlas. El banquero tira los dados, si saca un doble o un total de 3 u 11, él se queda con todo lo del bote; pero si saca un total de 5 o 9, los demás jugadores se reparten el contenido del bote. Si saca otro total (4, 6, 7, 8, 10) nadie gana y el banquero vuelve a tirar otra vez la siguiente vez será el compañero de la derecha. Gana el primero que obtenga 100. * *Esta última actividad sólo se trabajó con los alumnos de 4º grado.*	Fichas de colores, dados y recipientes. Reglas del juego por escrito en papel bond. Actividad del libro: Reinventando la aritmética III. (Kamii, 1995, p. 137)

4.3. Categorías de análisis

La base teórica del diseño de las categorías se sustenta en las aportaciones de las componentes formal, de cognición y comunicación, descritas en el apartado del marco teórico.

De la componente de cognición interesa identificar los obstructores relacionados con factores internos y externos al sujeto, que dificultan dotar de significado las acciones de transición de la acción a la operación, afectando el desarrollo de la abstracción. Estas dificultades se manifiestan en errores sintácticos y semánticos, para realizar el proceso de lectura/transformación de textos matemáticos, propiciando generalización de errores, conflictos para decidir el uso de las operaciones aditivas y multiplicativas en distintas situaciones problemáticas.

> Las obstrucciones (…) constituyen una especie de insuficiencia esencial, en el sentido de que el modelaje dejado al desarrollo espontáneo por parte del niño, al verse fortalecido en una de sus componentes, tiende a ocultar precisamente, lo que esencialmente se intenta enseñar, que son conceptos y operaciones nuevas. (Filloy, 1999, pp. 108 – 109).

Obstructores (OB)

1. Obstructores provenientes de los conocimientos previos y de las maneras como los niños han aprendido las nociones numéricas que les generan dificultades semánticas y sintácticas en la construcción de los números naturales.
2. Obstructores provenientes de los procesos cognitivos, que les genera dificultades para establecer las relaciones de reversibilidad para usar la iteración y recursividad en la construcción del sucesor.

De la componente de comunicación, se retoman las aportaciones de la semiótica para identificar las dificultades que los niños tienen en el uso de indicadores de las relaciones significantes en la producción de sentido y desarrollar procesos de significación con el uso de la lógica de los SMS.

Argumentos como Procesos de Significación (APS)

1. Inducción: Habilidad para generalizar el uso de la iteración en la construcción de cada número sucesor, comprobando sus hipótesis con el uso de procesos recursivos.

2. Deducción: Habilidad de razonamiento con la posibilidad de llegar a conclusiones, proponer argumentos que ofrecen criterios de verdad, por ejemplo: cualquier sucesor contiene a todos los anteriores.
3. Abducción: Razonamiento que permite transitar de una hipótesis a otra más abstracta. Desarrollar inferencias hipotéticas y un uso correcto de la lógica de los SMS con sus códigos y reglas, para discriminar supuestos verdaderos o falsos. Por ejemplo, en la construcción de los números naturales, el cero es el único número que no es un sucesor y es el único que está contenido en cualquier número. Si un número no está vacío entonces es un sucesor.

Dotación de Sentido (DS) de los SMS

1. Dotación de sentidos intermedios: utilización de códigos personales para dotar de sentido a acciones concretas, lo que puede constituir el tránsito de lo concreto a lo abstracto.
2. Dotación de sentidos a las redes de acciones cada vez más abstractas hasta convertirlas en operaciones.

5. ANÁLISIS Y RESULTADOS DE LA EXPERIENCIA EMPÍRICA

5.1. Análisis cualitativo de la experiencia empírica

Una vez que se ha implementado este modelo de enseñanza, el análisis cualitativo comienza con la identificación de dificultades recurrentes con base en los indicadores de las relaciones significantes: *pragmático (conocimientos intuitivos), semántico* y *sintáctico* de los números naturales, ligadas a los principios del modelo formal.

Pragmático (conocimientos intuitivos) - En este eje se identifican los usos espontáneos hacen de los números y su correspondencia con estratos de SMS, que les permiten hacer nuevas decodificaciones y desarrollar nuevas tendencias cognitivas. Los niños actúan a partir de conocimientos que han adquirido con experiencias previas, provenientes del seno familiar, escolar y cultural que los rodea.

Sintáctico. - En este eje se centra la atención en el uso de las reglas, de signos y símbolos matemáticos (+ - *x* = ><*)* para operar con los números naturales en la suma, resta, multiplicación, a partir de la iteración y la recursión; para leer los textos matemáticos que se producen a partir de las actividades diseñadas.

Semántico. - En este eje se identifican las dificultades que tienen para darle sentido a la lógica de construcción de los números, decidir entre un SMS y otro para bosquejar un proceso de solución, a partir de la interpretación y manipulación que hacen con las actividades que se les proponen en el modelo de enseñanza, que implican la resolución de problemas aritméticos.

5.1.1. Identificación de dificultades recurrentes

Las dificultades recurrentes que se observaron durante la experimentación se concretan como sigue:

A. *Uso de conocimientos pragmáticos y espontáneos de los números en diversas situaciones.*

A1. Identificar el cero como número (P_1).

A2. Identificar al sucesor y antecesor de cualquier número. (P_3)

B. *Uso semántico de los números en acciones de representación y conteo*

B1. Número cero como conjunto vacío (P_1).

B2. Reconocer que el cero es el único número que pertenece a cualquier sucesor (P_2).

B3. Reconocer que todo sucesor contiene a todos los anteriores. (P_3).

B4. Identificar el número cero como el punto origen en la recta.

C. Uso sintáctico en las operaciones

C.1 Usar las formas $10 + a$ y $a \cdot 10 + b, \ldots$ para representar a los sucesores (P_6).

5.1.2. Análisis de las dificultades observadas

El análisis se realiza con las tres categorías señaladas: Obstructores, Argumentos como Procesos de Significación y Dotación de Sentido.

A continuación, se presentan episodios parciales de las actividades del modelo de enseñanza donde aparecen esas dificultades correspondientes a las tres etapas de la experimentación, indicando el grupo correspondiente (Tabla Núm. 5). Los tres primeros episodios corresponden al grupo de 1º grado, el cuarto episodio al grupo de 2º grado de la escuela “Jorge Casahonda Castillo” (alumnos que ya no pudieron participar en la tercera etapa), los siguientes dos episodios corresponden al grupo de 3º grado y los dos últimos episodios (tercera etapa) corresponden al grupo de 2º, que en el ciclo escolar anterior estaban en primer grado, de la escuela “Gral. Gertrudis Sánchez”.

Tabla Núm. 5. Selección de los episodios

<table>
<tr><th>Etapa</th><th>Grupo</th><th>Episodio (E_i) parcial de la actividad</th><th>Siglas</th></tr>
<tr><td rowspan="3">1ª</td><td>1º grado</td><td>E_1 Adivina quien soy
E_2 ¿Podemos construir el siguiente?
E_3 Como soy,</td><td rowspan="5">M – Maestra
N_s – Niños todos
Ne – Nicole
N_1, N_2,… cuando es un niño cualquiera.
Letra inicial del nombre cuando es un niño particular.
Para el análisis de la experiencia se usa la letra inicial del nombre y entre</td></tr>
<tr><td>2º grado</td><td>E_4 ¿Podemos construir el siguiente?</td></tr>
<tr><td>3º grado</td><td>E_5 ¿Podemos construir el siguiente?</td></tr>
<tr><td>2ª</td><td>3º grado</td><td>E_6 Construir las tablas de (x)</td></tr>
<tr><td>3ª</td><td>2º grado</td><td>E_7 La calculadora
E_8 El cambio</td></tr>
</table>

			paréntesis el número de la línea en el diálogo.

* Las transcripciones completas de se pueden consultar en el Anexo número 5: https://cinvestav365-my.sharepoint.com/:w:/g/personal/leticia_rodriguez_cinvestav_mx/EVHLWdQT_RtLpog77YED1LcB5-n167eSe5eujPva8k5MYw?e=4vgD4e

Para el análisis de estos episodios se presenta un extracto seleccionado que muestra las dificultades observadas. A continuación, se hace el análisis con el apoyo de las categorías señaladas antes.

E_1 *Adivina quién soy*

1 *M: ¿Qué tengo aquí?*

2 N_s*: Una bolsa.*

3 *M: ¿Qué tiene la bolsa?*

4 N_1*: Nada* [La maestra introduce algunos objetos a la bolsa y luego la vacía frente a ellos].

5 *M: ¿Cómo quedó la bolsa?*

6 N_2*: Vacía.*

7 *M: ¿Cómo podemos saber que mi bolsa está vacía?*

8 *A: Porque no tiene nada.*

9 *F: Porque si no metes algo, no tienes nada.*

10 *E: Si está vacío, no esta pesado.*

11 *Ne: Si le metes algo, ya está lleno.*

12 *E: O por números.*

13 *M: ¿Cómo dijiste?*

14 N_s*: Por números.*

15 *M: ¿Y cuál creen que sea el número que debe de estar aquí?*

16 N_s*: El uno, el dos, el tres, …*

(…)

17 N_3*: un cero.*

18 *M: ¿Quién es ese número?*

19 *N_s: Nada.*

0 *M: ¿Nada?*

21 *N_s: Cero.*

22 *M: ¿En dónde lo coloco?* [La maestra se refiere a la bolsa que representa el número cero, para colocarla en la semirrecta pintada en la pizarra].

23 *F: Hasta el final* [señala al extremo izquierdo de la semirrecta].

24 *M: ¿Hasta el final? ¿fue lo último que hicieron?*

25 *F: ¡Ah! ¡En el primero!* [Corrige y cambia final por primero].

En el episodio se observan las dificultades B1 y B4, los niños tienen dificultades para identificar *el número cero como conjunto vacío*. Esto se puede entender que es debido a un obstructor cognitivo proveniente de su conocimiento previo (OB 1) del cero como cifra, lo que también les dificulta identificar al *número cero como primer número* (A1), pues han aprendido que el primer elemento de la secuencia contadora es el uno, como lo expresan N_s (16) al empezar por el uno. Sin embargo, la respuesta de N_3 (17) indica que reconoce que cero va antes que el número uno, lo que es recapitulado por los demás niños N_s (19 – 21).

La dotación de sentido aparece en las primeras líneas (1 – 7), al relacionar las palabras *nada* y *vacío:* N_1 (4); y N_2 (6). El alumno A (8) hace un razonamiento inductivo (APS 1) al usar la palabra *nada* para justificar el *vacío*, con lo cual dota de sentido intermedio (DS 1) a la ausencia de elementos, dando la pauta a otros sentidos intermedios expresados como *no metes algo, no tiene nada, no está pesado y lo que no es lleno* (líneas 9 – 11), N_e (11) verbaliza su deducción (APS 2) con la acción de no introducir elementos y la relación de dos nociones distintas (masa y peso).

De las líneas 12 a 16, se observa un razonamiento abductivo (APS 3), cuando E (12), hace una inferencia hipotética al proponer el uso de números para referirse al vacío; pero para otros niños N_s (16) tienen la dificultad para nombrar al vacío. N_3 (17) deduce que el número que se busca es el cero, lo que es reafirmado por sus demás compañeros N_s (19 – 21).

En la línea 22, se observa la dificultad B4, cuando se les pregunta en qué punto de la recta van a colocar la bolsa del número cero. Para unos niños es indiferente si el principio del segmento es a la izquierda o a la derecha porque aún no han establecido que el orden es de izquierda a derecha F (23). Esta es una dificultad para *identificar que el cero es un punto origen de la recta.* Esto es una ausencia en el modelo de Von Neumann, dado que no hay referencias que den cuenta de la linealidad y direccionalidad del orden. El alumno F (25) manifiesta una dotación de sentido intermedio (DS 1) cuando verbaliza y exclama *¡Ah! ¡En el primero!* corrigiendo su hipótesis inicial, precisando además los puntos de referencia en la recta: principio y final.

E_2 ¿Podemos construir el siguiente número?

1. *M: ¿Podemos construir el siguiente?*
2. *N_s: El uno.*
3. *M: ¿Cómo le haremos para construir el que sigue?*
4. *Ne: Tomar otra bolsa y ponerle el uno.*
5. *M: ¿Qué tenemos aquí?* [mostrando la bolsa vacía].
6. *N_s: Vacía.*
7. *M: Vacío, pero necesito…*
8. *N_s: El uno.*
9. *M: ¿Cómo le haremos, porque esta bolsa está vacía?*
10. *N_s: ¡Póngale el uno!*
11. M: [introduce la bolsa del cero que se construyó previamente y les pregunta].
12. *M: ¿Cuántas bolsas hay adentro?*

    (…)
13. *N_s: Una.*

    (…)
14. *M: ¿Qué número se formó aquí?*
15. *N_s: Un uno.*
16. *M: ¿Por qué es uno? Emiliano.*

17. E: Porque el uno es primero.

18. M: Nicole...

19. Ne: Porque el uno va después que el cero.

20. M: ¿Dónde lo coloco?

21. N_s*: En el primero.*

22. *M: ¿En el primero? ¿Quién está en el primero?* [señala al cero que está colocado en la semirrecta].

23. N_s*: Un número cero.*

24. *E: Lo pasas para el segundo* [se refiere a la derecha del cero, en la semirrecta].

En este episodio se observa la dificultad B3 y B2. Se puede apreciar que una vez situado el número cero en la recta en el episodio anterior en las líneas (1 – 3), los niños saben que su sucesor es el uno, dando un sentido intermedio (DS 1) a la expresión *el que sigue*. Sin embargo, cuando Ne (4) dice: *tomar otra bolsa y ponerle el uno*, se observa la dificultad para identificar que *todo el sucesor de cero contiene a la bolsa del cero,* porque los niños consideran que basta con etiquetar con el número *uno* otra bolsa vacía; pero entonces no es el uno, sigue siendo la bolsa del cero. Esta dificultad persiste en (6 – 10), puesto que no identifican que el número uno ha de contener el elemento cero. Se puede decir que esta dificultad se debe a un obstructor cognitivo (OB 1) que proviene de cómo los niños han aprendido que la secuencia contadora comienza por el número uno.

La acción que realiza la maestra (11, 12 y 14) frente a todo el grupo, al introducir la bolsa del número cero dentro de la bolsa del uno, permitió que los niños N_s (15) observaran que ese número es el uno y contiene al elemento cero (ver P_2). Pero para otros niños (líneas 17 y 21) sigue siendo un obstructor (OB 1) el seguir la lógica de construcción y usar la relación de reversibilidad para identificar que *el cero es el antecesor del uno*. Es hasta después del argumento deductivo (APS 2) de Ne (19) cuando dice *el uno va después del cero*, lo que lleva a E (24) a corregir su respuesta, con el argumento inductivo (APS 1) de que este número va a la derecha del cero.

E_3 "Como soy"

1. *M: ¿Quién va primero?*
2. *N_s: El uno.*
3. *M: ¿El uno va primero?*
4. *N_s: El cero, el cero…*

   (…)
5. *M: ¿Quién sigue después del cero?*
6. *N_s: El dos.*
7. *M: Escuchen. ¿Quién sigue después del cero?*
8. *N_s: El uno.*
9. *M: ¿Quién está antes del uno?*
10. *N_s: El dos.*
11. *M: ¿Quién?*
12. *A: El dos.*
13. *N_s: ¡El cero!*
14. *M: Axel dice que el dos. ¿El dos está antes del uno?*
15. *N_s: ¡Nooo!*
16. *M: ¿Quién está antes del uno?*
17. *N_s Cero.*
18. *M: ¿Quién está antes del cero?*
19. *N_s: Nadie.*
20. *M: ¿Quién es el primer número que aparece?*
21. *N_s: Cero, el cero.*

En este episodio se observa la dificultad A2. En el episodio anterior dotaron de sentido (DS 1) al proceso de construcción de los números cero y uno; pero se sigue observando en las líneas (1 – 12) que los niños tienen dificultades para *identificar el sucesor y antecesor del* n*úmero uno.* Esto podría ser debido a una manifestación del obstructor cognitivo (OB 1), que una vez más está ligado a la manera en que los niños han aprendido los números, no están acostumbrados a reflexionar los procesos de construcción, lo que se puede interpretar como una respuesta automatizada cuando dicen "dos" (líneas 6 y 12), por lo que la maestra vuelve a centrarlos haciendo determinadas preguntas M (3, 5, 7, 9, 11), dificultad que persiste en las respuestas de N_s (10) y A (12). En las líneas (16 a 21) los niños expresan la dotación de sentidos intermedios (DS 1), dando cuenta de la relación de antecesor y sucesor entre el cero y el uno como producto de la construcción.

E_4 *¿Podemos construir el siguiente?*

En este episodio los niños de este grupo (7 – 8 años) ya han construido el cero y el uno.

1. *M: ¿Podemos construir el siguiente?*
2. *N_s: Sigue el dos* [organizados en equipos de tres o cuatro niños construyen los antecesores del número 2].
3. *M: Vamos a revisar los números que han hecho… En este equipo tienen una bolsa del 2, veamos que hay adentro, ¿está el …?* [La maestra toma la bolsa etiquetada con el número dos que hicieron los niños de uno de los equipos (ver figura 18)].

Fig. 18. Bolsa construida por los niños

4. *N_s: El uno* [La maestra extrae la bolsa/número uno, mostrando a todo el grupo que la bolsa/número uno contiene a la bolsa/número cero (ver figura 19).]

Fig. 19. Bolsa/número uno

5. *M: ¿Está completo?* [La bolsa/número uno contiene a la bolsa/número cero].
6. *N_s: Sí, dentro del uno está el cero.*

7. *M: ¿Es correcto para tener el dos?* [Pero para completar la bolsa/número dos, falta otra bolsa, la del cero que es la bolsa vacía (ver figura 20)].

Fig. 20. Así debió quedar la bolsa/número dos

8. *N$_s$: ¡Sí!, ¡Nooo!…*

9. *M: ¿Qué le falta?*

10. *J: Otro elemento.*

11. *Z: El cero* [Zoe entrega su bolsa del cero].

12. *M: ¿Qué tenemos que hacer?*

13. *N$_s$: Meterla dentro de la bolsa del dos.*

14. *M: Entonces ahora ¿Cuántos elementos tiene?*

15. *N$_s$: El uno y el cero.*

16. *M: ¿Está correcta*? [En este otro equipo la bolsa del número dos tiene dentro dos bolsas vacías etiquetadas una con cero y otra con la etiqueta del uno (ver figura 21)].

Fig. 21. A la bolsa/número uno le falta la bolsa/número cero

17. *N$_s$: ¡Nooo!*

18. *M: ¿Qué le falta?*

19. *N$_s$: La bolsa del cero adentro.*

20. *M: ¿Adentro de quién?*

21. *N$_1$: Del uno* [otro niño del equipo entrega una bolsa vacía con la etiqueta del cero para meterla en la bolsa de uno].

22. M: Ya tenemos las dos, ahora ¿qué sigue?

23. N_s: Meterlas a la bolsa del dos…

(…)

- Fragmento del episodio de la construcción del número nueve -

24. M: ¿Hubieran imaginado que dentro del número nueve hay todos estos números?

25. N_s: ¡Nooo! ¡Está bien gordo!

26. N_2: Y va a ser más gordo que nunca, ¿imagínate el diez?

27. N_3: ¡Se tendría que tener una bolsa de la basura para el cien!

En este episodio se observa la dificultad B3 y B2. La tarea consistió en construir la bolsa del número dos, trabajando en equipos. En las líneas 1 – 9, los niños de un equipo tuvieron la dificultad para *reconocer que todo sucesor contiene a todos los anteriores*, pues dentro de la bolsa etiquetada con el número dos, solo contenía la bolsa del número uno, faltando la bolsa vacía etiquetada con el número cero. Esto se esquematiza en la figura 22:

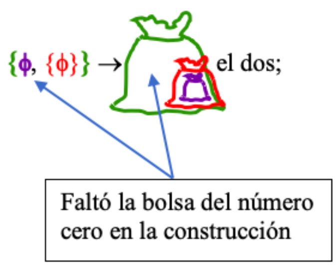


Fig. 22. Construcción incompleta del número dos

Para algunos niños, como N_s (7) la dificultad ha sido superada, pero el resto del grupo N_s (9) no ha encontrado sentido a la construcción ordinal de cada número, al contestar "¡Sí!, ¡Nooo…!" a la pregunta de M (8). Hasta que J (11) expresa que falta otro elemento, dotando de sentido la acción de iterar (DS 1), acción que le sigue Z(12) (DS 1) cuando entrega una bolsa vacía como número cero, por lo que los N_s (14) siguen la lógica de construcción (DS 1) e indican que se deben introducir estos dos elementos en la bolsa del número dos.

En el otro equipo, los niños tienen dificultad para *reconocer que el cero es el único número que pertenece a cualquier sucesor*, pues la bolsa que han construido y etiquetado con el número dos: tienen dos bolsas vacías, una etiquetada con el cero y la otra con el número uno.

Al considerar que sólo se necesita etiquetar la bolsa del número uno, *no han reconocido que el número cero pertenece a cualquier sucesor* (B2), les falta introducir la bolsa/número cero dentro de la bolsa/número uno. La figura 23 ilustra lo que construyeron.

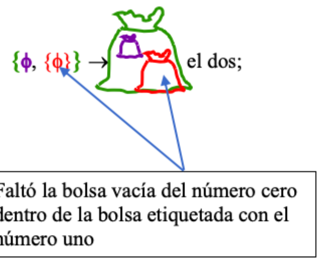


Fig. 23. La bolsa etiquetada con el número uno, está vacía.

Después de la revisión con el equipo anterior, en este equipo los N_s (18 y 20) ya explican que la bolsa del número dos no está completa, lo que da evidencia de dotación de sentido intermedio (DS 1). Este proceso permite que N_1 (22) afirme que el cero está en el uno, acto seguido N_s (24) exclaman que deben meter las dos bolsas (cero y uno) a la bolsa del dos, dando sentido de ordinalidad a la construcción.

Con el uso de un proceso recursivo en la construcción de cada número, los niños logran dotar de sentido (DS 1), superando el obstructor (OB 1) en la construcción del número nueve. N_2 (27) usa un argumento inductivo (APS 1) para verbalizar la imagen mental que se hace refiriéndose al tamaño de la bolsa del número diez N_3 (28) hace un razonamiento inductivo (APS 3) al exclamar en voz alta el tamaño de la bolsa del número cien. Esta inferencia les ha permitido desarrollar procesos de generalización, pues intuitivamente le han dado sentido a que el número siguiente va a necesitar una bolsa de mayor volumen.

E_5 ¿Podemos construir el siguiente?

Los alumnos de tercer grado construyen el número uno.

1. *M: ¿Podemos construir el siguiente?*
2. *C: Sí.*
3. *M: ¿Cómo lo haremos?*
4. *C: Sumándole.*
5. *M: ¿A quién tenía anteriormente?*
6. *G: Al cero.*

7. *M: Entonces esta otra bolsita, ¿cómo está?* [Se refiere a la bolsa del número uno].
8. *N_s: Vacía.*
9. *M: Pero si meto adentro de esta bolsa vacía la bolsa del cero, ahora ¿Cuántos elementos tiene?*
10. *G: Uno.*
11. *M: ¿Qué número le voy a dar a esta nueva bolsa?*
12. *V: Uno.*
13. *M: Entonces para que pueda ser el uno es hasta que…*
14. *G: ¡Hasta que entre el pasajero!*

Aunque en este episodio no se observan dificultades, es importante mostrar como los niños usan sus conocimientos previos para dotar de sentido (DS 1) a la construcción del sucesor. C (4) usa la la suma en su significado de *añadir*. G (14) usa la palabra *pasajero* para nombrar la bolsa que contiene al elemento cero. Obsérvese que en el primer caso se usa un código convencional, mientras que en el segundo se usa un código personal.

E_6 Construimos la tabla de multiplicar

(Construyendo el producto sucesor de $6 \cdot 3$).

1. *M: ¿Quién sigue?* [la maestra se refiere a qué producto sigue] *¿Cómo lo vamos a leer?*
2. *N_s: Siete veces tres.*
3. *M: ¿Quién era el anterior?*
4. *G: Seis* [señalando con su mano en la pizarra el $6 \cdot 3$].
5. *M: ¿Cuántas veces lo vuelves a iterar?*
6. *G: Una vez más* [Valeria usa la semirrecta para representar la iteración de 3 en 3, a partir del $10 + 8$].
7. *M: ¿A qué número llegaste?*
8. *V: al 21.*
9. *M: ¿Cómo lo vamos a representar?* [Valeria escribe en la pizarra 10 + 1].

10. M: ¿Qué le falta? ¿Qué tiene que hacer?

11. *O: Tiene que poner otro uno* [El niño escribe en la pizarra: 10 + 11].

12. M: ¿Es correcto?

13. N_s: ¡Nooo!

14. M: ¿Cuántas fichas rojas tiene?

15. N_s: Dos.

16. M: Entonces…

17. N_s: Dos veces 10.

18. M: ¿Cómo será?

19. N_s: Dos veces diez.

20. [Valeria escribe: $10 + 2$].

21. M: ¿Está bien?

22. N_s: No ahí es 12.

23. *M: Acuérdate como lo hemos hecho* [Valeria escribe $2 \cdot 10$].

24. M: ¿Qué le falta?

25. N_s: El uno.

26. M: ¿Cómo le hacemos?

27. G: Más uno.

28. M: ¿Cómo lo escribimos?

29. G: Dos veces 10 más uno.

En este episodio se observa la dificultad C1. En las primeras líneas (1 – 9) se presenta la dotación de sentido (DS 1) para identificar que el producto sucesor que sigue a $6 \cdot 3$ es el producto de siete veces tres N_s (2). Es importante señalar que no hay manifestación del obstructor (OB 2) para identificar que el producto $6 \cdot 3$ está antes del producto $7 \cdot 3$. G (6) logra argumentar inductivamente (APS 2) que se necesita iterar una vez más la unidad.

Caso contrario en V (8) que, apoyándose en la semirrecta, itera correctamente el número *tres*, después del producto anterior $(6 \cdot 3)$, pero tiene dificultad con el *uso sintáctico de la forma* $2 \cdot 10 + 1, \dots$ para representar el producto de $7 \cdot 3$. Esta dificultad es recurrente en otros alumnos, como O (11) que escribe en la pizarra $10 + 11$, lo que se puede entender como un obstructor cognitivo (OB 1), dado que no han tenido experiencia de usar los números de esta forma. Después en las líneas (12 – 19) hacen una serie de reflexiones y ensayos sin lograr escribirlo correctamente, V (20) escribe solo un diez, tal y como lo hicieron en la suma, pero no da cuenta de la iteración del 10 como la nueva unidad; dificultad que proviene del obstructor cognitivo (OB 2) para usar la relación de reversibilidad. La aclaración de N_s (22) para corregir lo que V(20) escribió en la pizarra $(10 + 2)$, en realidad es doce y no dos veces diez, es un argumento inductivo (APS 1); lo que permite a Valeria modificar su respuesta V (24) pero sólo itera dos veces la unidad: $2 \cdot 10$. No se ha dado cuenta de que en la semirrecta avanzó un lugar más del segundo número diez, por lo que otros niños intervienen N_s (25) y dicen que falta un uno, argumento que es retroalimentado por G (27) al deducir (APS 2) y afirmar que falta uno más y verbalizando: “dos veces diez más uno”.

De la tercera etapa de la experimentación, se presentan los episodios “La Calculadora” y “El Cambio”.

E_7 La calculadora

1. *M: ¿Qué número salió?* [los números salieron en el orden: cero y ocho].

   (…)

2. *N_1: Ochenta.*
3. *M: Cero y ocho, marca cero y ocho* [la maestra les repite los números en el orden en que salieron].
4. *Ns: Ochenta* [otros niños repiten el número ochenta].
5. *N_2: Ocho* [otro alumno dice ocho igual que N_1].
6. *M: ¿Qué pasó? Vuelve a teclearlo, primero el cero y luego el ocho.*
7. *N_2: ¡Ah, sale ocho!*

En este episodio en las líneas (2 y 4) los niños invierten el orden de los números para poder nombrar una cantidad de dos cifras, lo que se puede entender como una dificultad proveniente del obstáculo cognitivo (OB1), por las maneras en que ha aprendido las nociones numéricas. Para ellos no tiene sentido que el número cero esté colocado a la izquierda. La petición de M(6), permite que N3(7), identifique su error, al comprobar el resultado que sale en la pantalla de la computadora: ocho.

E_8 El cambio

1. *M: ¿Cuánto le tocó?* [los compañeros del equipo insisten a su compañera que diga "cambio", porque en los dados le salió cinco y ya tenía seis fichas azules].
2. *Ns: Cinco*
3. *N_1: Di cambio.*
4. *M: Pasa a cambiarlas* [la niña no sabe qué hacer]. ¿Alguien le dice qué hacer?
5. *Ns: Tienes que tomar las diez fichas para hacer el cambio*. [la alumna toma las cinco fichas azules y reúne diez fichas azules para cambiarlas por una roja].

En este episodio se observa la dificultad de la alumna que lanzó los dados, no sabía qué hacer para cambiar diez fichas azules por una roja y aunque sus compañeros Ns (2, 3 y 5) le dan la respuesta, no estaba segura de hacerlo. La transformación de diez unidades a una decena, es una dificultad que puede ser generada por obstructores provenientes de los procesos cognitivos para establecer relaciones de reversibilidad (OB 1). Esta dificultad se resolvió conforme se iba avanzando en el juego.

5.2. Análisis cuantitativo de la experiencia empírica

Para complementar el perfil grupal se utilizó un modelo tridimensional (Rojano, 1985) representando a cada estudiante en el espacio tridimensional. Se establecieron criterios para determinar el nivel de desempeño (Alto, Medio o Bajo) de cada estudiante, en cada eje conocimientos intuitivos, semántico y sintáctico.

Durante la experimentación del modelo, los alumnos resolvieron ejercicios escritos. De acuerdo con su estructura cada reactivo, se clasificó en alguno de los ejes:

A. *Conocimientos intuitivos* (Conocimientos previos y espontáneos).

B. *Semántico* (resolver situaciones matemáticas con base en sus conocimientos y el sentido semántico que asignan a las actividades).

C. *Sintáctico* (uso de reglas aritméticas para usar y operar los números).

Cada reactivo se cuantificó con 0 y 1:

> ***0****: el reactivo fue contestado incorrectamente o no fue contestado.*
>
> ***1****: el reactivo fue contestado correctamente*

Se establecieron criterios para determinar el estrato, clase y coordenadas de cada estudiante

a) Estrato: Siguiendo el modelo de Rojano (1985, p. 40), se establecieron cinco criterios de estratificación de desempeño de acuerdo con el número total de reactivos por eje, como se muestra en la tabla Núm. 6. Los estratos 4 y 5, se sumaron para obtener el Estrato Alto; el Estrato Medio se tomó el número 3, ya que es el punto medio y para obtener el Estrato Bajo se sumaron el 1 y 2.

Tabla Núm. 6. Criterios de estratificación

	Eje / Estrato	Conocimientos Intuitivos	Semántico	Sintáctico
ALTO	5			
	4			
MEDIO	3			
	2			
BAJO	1			

b) Clase: Para obtener la asignación de clase por eje, se consideró el total de reactivos, con relación a los rangos determinados por el porcentaje, como se describen y ejemplifican en la tabla Núm. 7.

Tabla Núm. 7. Criterios para asignación de la clase

Clase	Descripción del % (29 reactivos)	%	Rango numérico
3	Más del 80% del total de reactivos	23.2%	24-29
2	Menos del 80% del total de reactivos	23.2%	14-23
1	Al menos el 80% de la mitad del total de reactivos	12.8%	8-13
0	Menos del 80% de la mitad del total de reactivos	7.2%	0-7

c) Representación espacial: De acuerdo con la clase obtenida en cada eje (0, 1, 2, 3) son los puntos de las coordenadas (x, y, z) para su representación en el espacio tridimensional. Cada estudiante obtiene las coordenadas de acuerdo con los criterios de estratificación y el establecimiento de clase. Las coordenadas de cada alumno se representan con las letras del alfabeto (A, B, C…)

d) Representación tridimensional de las clases: Las líneas del plano tridimensional (x,y,z) representan los ejes sintáctico, semántico y conocimientos intuitivos, respectivamente. Cada estudiante obtiene las coordenadas de acuerdo con los criterios de estratificación y el establecimiento de clase. Las coordenadas de cada alumno se representan con las letras del alfabeto (A, B, C…) ver figura 24.

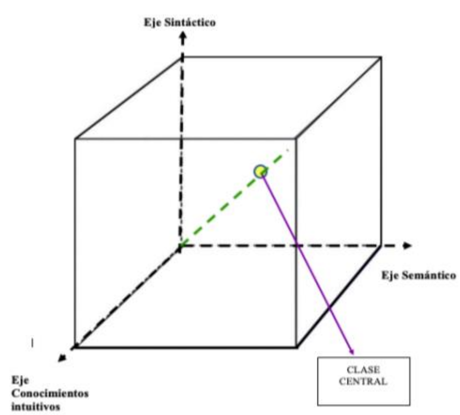


Figura 24. Representación tridimensional (Rojano 1985)

5.2.1. Justificación teórica de los ejercicios escritos

La resolución de los ejercicios escritos permitió contar con el criterio cuantitativo para estructurar el diagnóstico y la selección de los niños que participaron en la entrevista clínica.

El diseño de los reactivos fueron producto de la traducción de los principios matemáticos del modelo Von Neumann. Cada reactivo, se clasificó en alguno de los tres ejes:

- *Conocimientos Intuitivos*. - conocimientos previstos y respuestas espontáneas que hacen de los números en correspondencia con estratos de SMS, que les permiten hacer nuevas decodificaciones y desarrollar nuevas tendencias cognitivas. Las actuaciones de los niños están relacionadas con los conocimientos que han adquirido en experiencias previas, provenientes del seno familiar, escolar y cultural que los rodea.
- *Semánticos*. - Resolución de situaciones problemáticas, la producción de sentido a la lógica de uso de los SMS involucrados en la construcción de los números naturales, para bosquejar procesos de solución, a partir de la interpretación y manipulación que hacen con las actividades que se les proponen en el modelo de enseñanza.
- *Sintácticos*. - Uso de las reglas, símbolos y signos aritméticos $(+\ -\ x\ =>)$ para operar con los números naturales.

Los ejercicios se aplicaron a todos los alumnos que participaron en la experimentación. Para los grados superiores se aumentó el rango numérico y algunos ejercicios, los cuales se presentarán en el momento correspondiente de este apartado.

La intención de los ejercicios pretendió que los niños representaran de manera escrita la noción del cero como número y conjunto vacío, como punto origen en la recta; el sucesor y el antecesor de cualquier número y la resolución de problemas aritméticos de suma y multiplicación.

Los ejercicios se titularon:

Evaluación Formativa

Ejercicio número 1

Ejercicio número 2

Ejercicio número 3

Ejercicio número 4

Evaluación Escuela (Este ejercicio sólo se aplicó en el grupo de 1º grado)

El artesano

La ropa de Luis

Los payasos

Cada reactivo se codificó usando la letra ***R*** y su número progresivo correspondiente en cada ejercicio: **R1, R2, R3**, ...

* Los ejercicios completos se pueden ver en el anexo número 3 en:

  https://cinvestav365-my.sharepoint.com/:w:/g/personal/leticia_rodriguez_cinvestav_mx/EVHLWdQT_RtLpog77YED1LcB5-n167eSe5eujPva8k5MYw?e=4vgD4e

5.2.2. Perfil de los alumnos de 1º - 2º grado Escuela Primaria “General Gertrudis Sánchez” ciclos escolares 2016 – 2017 y 2017 – 2018

Tabla Núm. 7: Concentrado General de todos los reactivos distribuidos por ejes de mayor a menor dificultad 1º - 2º grado

	EJE CONOCIMIENTOS INTUITIVOS																					
	EJ	EF	EJ	ART	EJ 3		ART	AR	EF	EJ 1			EJ3	EJ	PA	EE	EF	EF	PAY		EE	EE
Nombre	P8	P5	P9	P6	P1	P10	P5	P4	P7	P8	P9	P10	P7	P7	P5	P3	P1	P2	P4	P6	P4	P6
Ershel	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Dilán	0	0	1	NP	0	0	NP	NP	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Dominic	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
Nicole	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Uriel	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Italia	1	0	0	NP	1	1	NP	NP	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Axel	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Alejandra	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Karen	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
Derek	0	1	0	NP	1	1	NP	NP	1	NP	NP	NP	1	NP	1	1	1	1	1	1	1	1
Fabián	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Barush	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Daniel	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1
Pablo	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Ana	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	5	5	6	9	10	10	10	12	12	13	13	13	13	14	14	14	14	15	15	15	15	15

	EJE SEMÁNTICO																				
	EF	EF	EJ 3	PAY	EV-	ART		EF	EJ 1	ART	PAY	EV-	EJ 1		EV	PAY	EJ 3		EV E		ROP
Nombre	P3	P4	P5	P2	P2	P3	P10	P8	P5	P2	P1	P1	P1	P4	P8	P3	P3	P4	P9	P10	P1
Ershel	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Dilán	1	0	0	0	0	NP	NP	1	1	NP	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1
Dominic	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Nicole	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Uriel	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Italia	1	0	1	0	1	NP	NP	1	1	NP	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Axel	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Alejandra	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Karen	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Derek	0	0	1	0	0	NP	NP	0	NP	NP	1	0	NP	1	1	1	1	1	1	1	1
Fabián	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Barush	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Daniel	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Pablo	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	NP	1	1	1	1	1	1	1
Ana	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	4	5	8	8	9	9	10	10	11	12	12	12	14	14	14	14	15	15	15	15	15

	EJE SINTÁCTICO																												
	ART	ROP	ART					EJ3	PAYASOS			ART		EF	EJ1		PAYASOS				EE	EJ1	EJ 3	PAYASOS				EE	
Nombre	P8	P2	P13	P14	P9	P11	P12	P6	P13	P8	P9	P1	P7	P6	P2	P3	P7	P10	P15	P16	P7B	P11	P2	P4	P14	P11	P12	P5	P7A
Ershel	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Dilán	NP	1	NP	NP	NP	NP	NP	1	NP	1	1	NP	NP	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Dominic	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Nicole	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Uriel	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Italia	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP	0	NP	1	1	NP	NP	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Axel	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1
Alejandra	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Karen	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Derek	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP	1	1	NP	NP	1	NP	NP	1	1	1	1	1	NP	NP	1	1	1	1	1	1
Fabián	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Barush	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Daniel	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
Pablo	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Ana	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	8	8	9	9	10	10	10	10	11	11	11	12	12	13	13	13	13	13	13	13	14	14	14	14	14	15	15	15	15

Tabla Núm. 8. Concentrado de los reactivos del Eje de Conocimientos Intuitivos
Organizados de mayor a menor grado de dificultad
Grupo de 1º - 2º grado

	EJ 3	EF	EJ 3	ART	EJ 3		ART	ART	EF	EJ 1			EJ3	EJ 1	PAY	EE	EF	EF	PAY		EE	EE
Nombre	P8	P5	P9	P6	P1	P10	P5	P4	P7	P8	P9	P10	P7	P7	P5	P3	P1	P2	P4	P6	P4	P6
Ershel	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Dilán	0	0	1	NP	0	0	NP	NP	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Dominic	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
Nicole	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Uriel	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Italia	1	0	0	NP	1	1	NP	NP	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Axel	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Alejandra	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Karen	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
Derek	0	1	0	NP	1	1	NP	NP	1	NP	NP	NP	1	NP	1	1	1	1	1	1	1	1
Fabián	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Barush	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Daniel	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1
Pablo	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Ana	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	5	5	6	9	10	10	10	12	12	13	13	13	13	14	14	14	14	15	15	15	15	15

Estratificación de acuerdo con el número de alumnos que contestaron cada reactivo en el eje Conocimientos Intuitivos (22 reactivos)

Tabla Núm. 9. Concentrado de Estratos y Clase de acuerdo con el número de reactivos y respuestas

ESTRATOS	No. Respuestas	ESTRATOS		CLASE		%	Rango
1	15,15,15,15,15	1-2	15,15,15,15,15, 14,14,14,14	0	Menos del 80% de 9 preguntas	7.2	0 a 7
2	14,14,14,14			1	Menos del 80% de 13 preguntas	10.4	8 a 10
3	13,13,13,13	3	13,13,13,13	2	Menos del 80% de 22 preguntas	17.6	11 a 17
4	10,10,10,12,12	4-5	12,12,10,10,10, 9,6,5,5	3	Más del 80 % de 22 preguntas	17.6	18 a 22
5	5,5,6,9						

Tabla Núm. 10. Concentrado de los cinco estratos del Eje de Conocimientos Intuitivos

Alumno	ESTRATO 5	ESTRATO 4	ESTRATO 3	ESTRATO 2	ESTRATO 1
Ershel	1	5	4	4	5
Dilán	1	1	4	4	5
Dominic	3	4	4	3	5
Nicole	2	3	4	4	5
Uriel	2	4	4	4	5
Italia	1	3	4	4	5
Axel	3	4	4	4	5
Alejandra	2	5	4	4	5
Karen	0	5	4	3	5
Derek	1	3	1	3	5
Fabián	1	3	2	4	5
Barush	1	2	3	4	5
Daniel	1	2	2	3	5
Pablo	4	5	4	4	5
Ana Laura	2	5	4	4	5

Tabla Núm. 11. Concentrado de reducción de estratos del Eje de Conocimientos Intuitivos y asignación de la clase

Alumno	ESTRATO 4-5	ESTRATO 3	ESTRATO 2-1	**CLASE**
Ershel	6	4	9	**3**
Dilán	2	4	9	**2**
Dominic	7	4	8	**3**
Nicole	5	4	9	**3**
Uriel	6	4	9	**3**
Italia	4	4	9	**2**
Axel	7	4	9	**3**
Alejandra	7	4	9	**3**
Karen Saraí	5	4	8	**2**
Derek Iván	4	1	8	**1**
Fabián	4	2	9	**2**
Barush	3	3	9	**2**
Daniel	3	2	8	**1**
Pablo	9	4	9	**3**
Ana Laura	7	4	9	**3**

Tabla Núm.12. Concentrado de los reactivos del Eje de Semántico organizados de mayor a menor grado de dificultad
Grupo de 1º - 2º grado

Alumnos	EF	EF	EJ 3	PAY	EE	ART		EF	EJ 1	ART	PAY	EE	EJ 1		EE	PAY	EJ 3		EE		RO
Nombre	P3	P4	P5	P2	P2	P3	P10	P8	P5	P2	P1	P1	P1	P4	P8	P3	P3	P4	P9	P10	P1
Ershel	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Dilán	1	0	0	0	0	NP	NP	1	1	NP	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1
Dominic	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Nicole	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Uriel	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Italia	1	0	1	0	1	NP	NP	1	1	NP	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Axel	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Alejandra	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Karen	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Derek	0	0	1	0	0	NP	NP	0	NP	NP	1	0	NP	1	1	1	1	1	1	1	1
Fabián	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Barush*	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Daniel	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Pablo	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	NP	1	1	1	1	1	1	1
Ana Laura	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	4	5	8	8	9	9	10	10	11	12	12	12	14	14	14	14	15	15	15	15	15

Estratificación de acuerdo con el número de alumnos que contestaron cada reactivo en el eje Semántico (21 reactivos)

Tabla Núm. 13. Concentrado de estratos y clase de acuerdo con el número de reactivos

ESTRATOS	No. Respuestas	ESTRATOS		CLASE		%	Rango
1	15,15,15,15,15	1-2	15,15,15,15,15, 14,14,14,14	0	Menos del 80% de 9 preguntas	7.2	0 a 7
2	14,14,14,14			1	Menos del 80% de 13 preguntas	10.4	8 a 10
3	11,12,12,12	3	11,12,12,12	2	Menos del 80% de 21 preguntas	16.8	11 a 17
4	9,9,10,10,	4-5	10,10,9,9,8,8,5,4	3	Más del 80 % de 21 preguntas	16.8	18 a 22
5	8,8,5,4						

Tabla Núm. 14. Concentrado de los cinco estratos del Eje Semántico

Alumno	ESTRATO 5	ESTRATO 4	ESTRATO 3	ESTRATO 2	ESTRATO 1
Ershel	1	4	4	4	5
Dilán	1	1	3	2	5
Dominic	2	2	3	4	5
Nicole	2	2	2	4	5
Uriel	3	4	4	4	5
Italia	2	2	2	4	5
Axel	2	2	3	4	5
Alejandra	2	4	4	4	5
Karen Saraí	0	3	3	4	5
Derek Iván	1	0	1	3	5
Fabián	2	2	4	4	5
Barush	1	2	4	4	5
Daniel	0	3	3	4	5
Pablo	2	3	3	3	5
Ana Laura	4	4	4	4	5

Tabla Núm.15. Concentrado de reducción de estratos del Eje Semántico para asignar la clase

Alumno	ESTRATO 4 y 5	ESTRATO 3	ESTRATO 1 y 2	**CLASE**
Ershel	5	4	9	**3**
Dilán	2	3	7	**1**
Dominic	4	3	9	**2**
Nicole	4	2	9	**2**
Uriel	7	4	9	**3**
Italia	4	2	9	**2**
Axel	4	3	9	**2**
Alejandra	6	4	9	**3**
Karen Saraí	3	3	9	**2**
Derek Iván	1	1	8	**1**
Fabián	4	4	9	**2**
Barush	3	4	9	**2**
Daniel	3	3	9	**2**
Pablo	5	3	8	**2**
Ana Laura	8	4	9	**3**

Tabla Núm. 16. Concentrado de los reactivos del Eje de Sintáctico organizados de mayor a menor grado de dificultad Grupo de 1º - 2º grado

	ART	ROP	ART					EJ3	PAYASOS			ART		EF	EJ1		PAYASOS				EE	EJ1	EJ3	PAYASOS					EE
Nom.	P8	P2	P13	P14	P9	P11	P12	P6	P13	P8	P9	P1	P7	P6	P2	P3	P7	P10	P15	P16	P7B	P11	P2	P4	P14	P11	P12	P5	P7A
Ershel	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Dilán	NP	1	NP	NP	NP	NP	NP	1	NP	1	1	NP	NP	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Domin	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Nicole	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Uriel	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Italia	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP	0	NP	1	1	NP	NP	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Axel	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1
Aleja	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Karen	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Derek	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP	1	1	NP	NP	1	NP	NP	1	1	1	1	1	NP	NP	1	1	1	1	1	1
Fabián	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Barush	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Daniel	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
Pablo	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Ana	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	8	8	9	9	10	10	10	10	11	11	11	12	12	13	13	13	13	13	13	13	14	14	14	14	14	15	15	15	15

Tabla Núm. 17. Concentrado de estratos y clase de acuerdo con el número de reactivos

ESTRATOS	No. Respuestas	ESTRATOS		CLASE		%	Rango
1	15,15,15,15	1-2	15,15,15,15, 14,14,14,14,14	0	Menos del 80% de 9 preguntas	7.2	0 a 7
2	14,14,14,14,14			1	Menos del 80% de 16 preguntas	12.8	8 a 13
3	13,13,13,13,13, 13,13	3	13,13,13,13,13, 13,13	2	Menos del 80% de 29 preguntas	23.2	14 a 23
4	11,11,11,13,13	4-5	11,11,11,13,13,10, 10,10,10,9,9,8,8	3	Más del 80 % de 29 preguntas	23,2	24 a 29
5	8,8,9,9,10,10,10						

Tabla núm. 18. Concentrado de estratos del Eje Sintáctico

Alumno	ESTRATO 5	ESTRATO 4	ESTRATO 3	ESTRATO 2	ESTRATO 1
Ershel	8	5	7	5	4
Dilán	2	2	7	5	4
Dominic	8	5	7	5	4
Nicole	1	4	7	5	4
Uriel	8	4	6	5	4
Italia	0	2	7	5	4
Axel	2	3	5	4	4
Alejandra	8	5	7	5	4
Karen Saraí	7	3	6	5	4
Derek Iván	0	2	5	3	4
Fabián	6	3	6	5	4
Barush	2	4	3	5	4
Daniel	6	5	6	4	4
Pablo	8	5	5	5	4
Ana Laura	8	5	7	4	4

Tabla núm. 19. Concentrado de la reducción a tres estratos para asignar la clase

Alumno	ESTRATO 5	ESTRATO 3	ESTRATO 1	**CLASE**
Ershel	13	7	9	**3**
Dilán	4	7	9	**2**
Dominic	13	7	9	**3**
Nicole	5	7	9	**2**
Uriel	12	6	9	**3**
Italia	2	7	9	**2**
Axel	5	5	8	**1**
Alejandra	13	7	9	**3**
Karen Saraí	10	6	9	**3**
Derek Iván	2	5	7	**0**
Fabián	9	6	9	**3**
Barush	6	3	9	**1**
Daniel	11	6	8	**3**
Pablo	13	5	9	**3**
Ana Laura	13	7	8	**3**

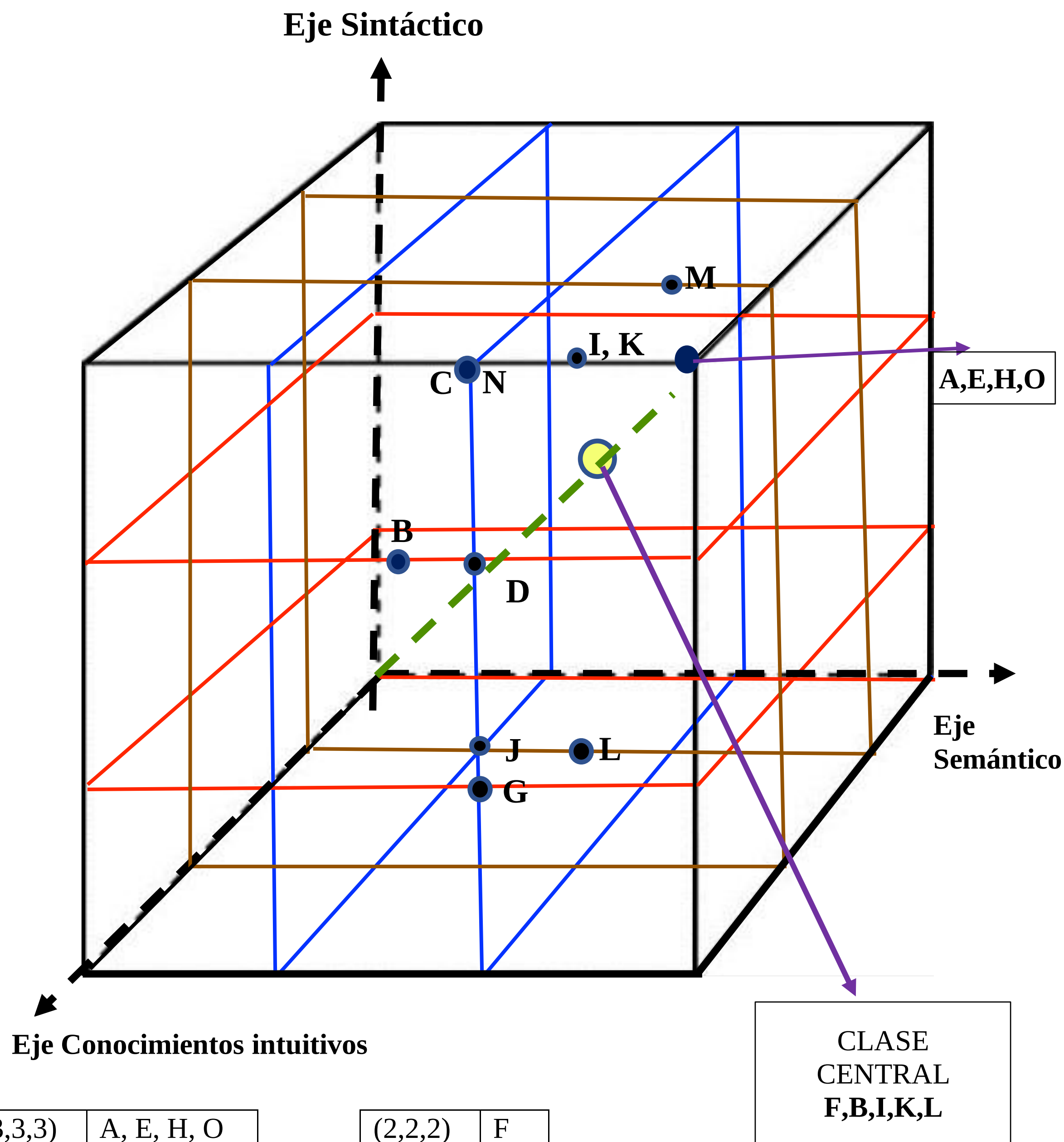
Tabla núm. 20. Concentrado de coordenadas, asignación de clase en cada eje, del grupo de 1º - 2º

Alumno	CONOC. INTUITIVOS	SEMÁNTICO	SINTÁCTICO	**Coordenadas**	**PUNTO**
Ershel	3	3	3	333	**A**
Dilán (*)	2	1	2	212	**B**
Dominic	3	2	3	323	**C**
Nicole	3	2	2	322	**D**
Uriel	3	3	3	333	**E**
Italia (*)	2	2	2	222	**F**
Axel	3	2	1	321	**G**
Alejandra	3	3	3	333	**H**
Karen	2	2	3	223	**I**
Derek (*)	1	1	0	110	**J**
Fabián	2	2	3	223	**K**
Barush	2	2	1	221	**L**
Daniel	1	2	3	123	**M**
Pablo	3	2	3	323	**N**
Ana	3	3	3	333	**O**

(*) Alumnos que se dieron de baja del plantel.

Representación de la población en el modelo tridimensional, (Rojano, 1985) de acuerdo con las coordenadas x, y, z (conocimientos intuitivos, semántico y sintáctico respectivamente).

5.2.2.1. Representación del perfil de grupo de 1º -2º grado en el plano tridimensional



(3,3,3)	A, E, H, O
(3,2,3)	C, N
(3,2,2)	D
(3,2,1)	G
(2,2,3)	I, K

(2,2,2)	F
(2,2,1)	L
(2,1,2)	B
(1,2,3)	M
(1,1,0)	J

Fig. 25. Representación gráfica del diagnóstico del grupo de 1º - 2º grado

5.2.3. Perfil de los alumnos de 3º - 4º grado Escuela Primaria “Susana I. Herrera Mascorro” ciclos escolares 2016 – 2017 y 2017 – 2018

Tabla núm. 21. Concentrado General de 3º - 4º de todos los reactivos por eje organizados de mayor a menor grado de dificultad

EJE CONOCIMIENTOS INTUITIVOS

	EJE1	EJ4	1° E	EJ 4			1° E	ART	EJ 1	EJ 4		1° EVAL		PAY		EJ 4		ART
NOMBRE	P5	P7	P3	P4	P8	P9	P2	P5	P1	P5	P6	P1	P6	P5	P6	P1	P2	P4
Giovanni	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Wendy	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Jazmín	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1
Fátima	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1
Leslie	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Emiliano	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1
Dulce	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Santiago	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0
Guillermo	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1
Eliany	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1
Gadiel	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1
Itzel	1	0	NP	1	0	1	NP	NP	0	0	1	NP	NP	1	1	1	1	NP
Pamela	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1
Viancy	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1
Miriam	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0
Valeria	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1
Allison	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Nanomi	NP	NP	0	NP	NP	NP	1	0	NP	NP	NP	1	1	1	1	NP	NP	1
Britany	NP	NP	0	NP	NP	NP	1	1	NP	NP	NP	0	0	1	1	NP	NP	1
Carlos	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0
	3	4	6	8	10	11	11	11	13	13	13	14	14	14	15	16	16	16

EJE SEMÁNTICO

	1° E	ART	1° E	EJ4	1° E	EJ2	1° E	EJ 4	1° E	PAYASOS			EJ2		ARTESANO		
NOMBRE	P8	P11	P7	P4	P11	P3	P4	P3	P12	P1	P2	P3	P2	P6	P10	P3	P2
Giovanni	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1
Wendy	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
Jazmín	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
Fátima	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
Leslie	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Emiliano	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1
Dulce	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Santiago	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1
Guillermo	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1
Eliany	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
Gadiel	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
Itzel	NP	NP	NP	1	NP	0	NP	1	NP	1	1	1	1	NP	NP	NP	NP
Pamela	0	0	0	1	0	NP	1	0	0	0	0	0	NP	0	1	1	1
Viancy	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1
Miriam	0	0	0	0	0	NP	0	0	1	0	1	1	NP	1	0	1	1
Valeria	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Allison	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Nanomi	0	0	0	NP	0	NP	1	NP	0	1	1	1	NP	0	0	1	1
Britany	1	1	0	NP	1	NP	1	NP	1	1	1	1	NP	1	1	1	1
Carlos	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1
	3	7	8	8	10	10	11	11	11	12	12	15	16	16	16	18	19

EJE SINTÁCTICO

	ART	1° E	EJ 1			EJ3	PAY	EJ 2	EJ 3	PAYASOS				EJ 1		EJ 3		PAY	ART	1°E
NOMBRE	P9	P9	P2	P3	P9	P7	P10	P1	P6	P13	P14	P15	P16	P7	P8	P3	P4	P4	P7	P10
Giovanni	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
Wendy	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
Jazmín	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1
Fátima	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1
Leslie	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1
Emiliano	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1
Dulce	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1
Santiago	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
Guillermo	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1
Eliany	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1
Gadiel	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
Itzel	0	NP	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	NP
Pamela	1	0	0	0	1	1	0	NP	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1
Viancy	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
Miriam	0	0	0	1	1	0	1	NP	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
Valeria	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0
Allison	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0
Nanomi	0	0	NP	NP	NP	NP	0	NP	NP	0	0	0	0	NP	NP	NP	NP	1	1	0
Britany	0	1	NP	NP	NP	NP	0	NP	NP	0	0	0	0	NP	NP	NP	NP	0	0	1
Carlos	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1
	5	7	10	10	10	10	10	11	11	11	11	11	11	12	12	12	12	12	12	13

	PAYASOS			EJ3		PAY	ART	PAY	ART	1° E	EJ3	EJ1	EJ4	EJ1	ART		
NOMBRE	P11	P12	P9	P1	P5	P7	P14	P8	P8	P5	P2	P6	P10	P10	P13	P12	P1
Giovanni	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
Wendy	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Jazmín	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1
Fátima	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1
Leslie	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Emiliano	1	1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Dulce	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Santiago	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Guillermo	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1
Eliany	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
Gadiel	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Itzel	1	1	1	1	1	1	0	1	1	NP	1	1	1	1	1	1	1
Pamela	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Viancy	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1
Miriam	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1
Valeria	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Allison	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
Nanomi	0	0	0	NP	NP	0	1	0	0	1	NP	NP	NP	NP	1	1	1
Britany	0	1	0	NP	NP	1	0	0	1	1	NP	NP	NP	NP	1	1	1
Carlos	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	13	13	13	14	14	14	14	15	15	16	16	17	17	18	18	19	20

Tabla núm. 22. Concentrado de los reactivos del Eje de Conocimientos Intuitivos organizados
de mayor a menor grado de dificultad Grupo de 3º - 4º grado

	EJE1	EJ4	1º E	EJ 4			1º E	ART	EJ 1	EJ 4		1º EV		PAY		EJ 4		ART
Nombre	P5	P7	P3	P4	P8	P9	P2	P5	P1	P5	P6	P1	P6	P5	P6	P1	P2	P4
Giovani	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Wendy	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Jazmín	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1
Fátima	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1
Leslie	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Emiliano	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1
Dulce	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Santiago	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0
Guillermo	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1
Eliany	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1
Gadiel	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1
Itzel	1	0	NP	1	0	1	NP	NP	0	0	1	NP	NP	1	1	1	1	NP
Pamela	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1
Vianey	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1
Miriam	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0
Valeria	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1
Allison	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Naomi	NP	NP	0	NP	NP	NP	1	0	NP	NP	NP	1	1	1	1	NP	NP	1
Britany	NP	NP	0	NP	NP	NP	1	1	NP	NP	NP	0	0	1	1	NP	NP	1
Carlos	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0
	3	4	6	8	10	11	11	11	13	13	13	14	14	14	15	16	16	16

Estratificación de acuerdo con el número de alumnos que contestaron cada reactivo en el eje Conocimientos Intuitivos (18 reactivos)

Tabla núm. 23. Concentrado de estratos y clase de acuerdo con el número de reactivos

ESTRATOS	No. Respuestas	ESTRATOS	No. Respuestas	CLASE		%	Rango
1	15,16,16,16	1-2	15,16,16,16, 14,14,14	0	Menos del 80% de 7 preguntas	5.6	0 a 6
2	14,14,14			1	Menos del 80% de 10 preguntas	8	7 a 8
3	13,13,13	3	13,13,13	2	Menos del 80% de 18 preguntas	14.4	9 a 14
4	11,11,11,10	4-5	11,11,11,10,8,6, 4,3	3	Más del 80 % de 18 preguntas	14.4	15 a 18
5	8,6,4,3						

Tabla núm. 24. Concentrado de los cinco estratos del eje de Conocimientos Intuitivos
Del grupo 3º - 4º grado

Nombre	ESTRATO 5	ESTRATO 4	ESTRATO 3	ESTRATO 2	ESTRATO 1
Giovani	2	3	3	3	4
Wendy	3	2	3	3	4
Jazmín	0	1	0	3	3
Fátima	0	2	2	2	4
Leslie	0	1	3	3	4
Emiliano	4	3	3	2	3
Dulce	0	3	3	3	4
Santiago	1	3	3	1	3
Guillermo	1	1	1	3	2
Eliany	1	4	3	1	3
Gadiel	1	4	2	2	3
Itzel	2	1	1	1	3
Pamela	0	0	2	1	3
Vianey	2	4	3	0	3
Miriam	0	1	0	3	3
Valeria	2	2	1	3	4
Allison	1	3	3	3	4
Naomi	0	1	0	3	2
Britany	0	2	0	1	2
Carlos	1	2	3	1	2

Tabla núm. 25. Concentrado de la reducción a tres estratos para la asignación de la clase en el

Eje Conocimientos Intuitivos

Nombre	ESTRATO 5-4	ESTRATO 3	ESTRATO 2-1	**CLASE**
Giovani	5	3	7	**3**
Wendy	5	3	7	**3**
Jazmín	1	0	6	**0**
Fátima	2	2	6	**0**
Leslie	1	3	7	**2**
Emiliano	7	3	5	**0**
Dulce	3	3	7	**2**
Santiago	4	3	4	**0**
Guillermo	2	1	5	**0**
Eliany	5	3	4	**0**
Gadiel	5	2	5	**0**
Itzel	3	1	4	**0**
Pamela	0	2	4	**0**
Vianey	6	3	3	**0**
Miriam	1	0	6	**0**
Valeria	4	1	7	**2**
Allison	4	3	7	**2**
Naomi	1	0	5	**0**
Britany	2	0	3	**0**
Carlos	3	3	3	**0**

Tabla núm. 26. Concentrado de los reactivos del Eje de Semántico organizados de mayor a menor grado de dificultad
Grupo de 3º - 4º grado

Nombre	1º E	ART	1º E	EJ4	1º E	EJ2	1º E	EJ 4	1º E	PAYASOS			EJ2		ARTESANO		
	P8	P11	P7	P4	P11	P3	P4	P3	P12	P1	P2	P3	P2	P6	P10	P3	P2
Giovani	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1
Wendy	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Jazmín	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
Fátima	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
Leslie	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Emiliano	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1
Dulce	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Santiago	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1
Guillermo	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1
Eliany	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
Gadiel	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
Itzel	NP	NP	NP	1	NP	0	NP	1	NP	1	1	1	1	NP	NP	NP	NP
Pamela	0	0	0	1	0	NP	1	0	0	0	0	0	NP	0	1	1	1
Vianey	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1
Miriam	0	0	0	0	0	NP	0	0	1	0	1	1	NP	1	0	1	1
Valeria	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Allison	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Naomi	0	0	0	NP	0	NP	1	NP	0	1	1	1	NP	0	0	1	1
Britany	1	1	0	NP	1	NP	1	NP	1	1	1	1	NP	1	1	1	1
Carlos	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1
	3	7	8	8	10	10	11	11	12	12	12	15	16	16	16	18	19

Estratificación de acuerdo con el número de alumnos que contestaron cada reactivo en el eje Semántico (17 reactivos)

Tabla núm. 27. Concentrado de estratos y clase de acuerdo con el número de reactivos

ESTRATOS	No. Respuestas	ESTRATOS	No. Respuestas	CLASE		%	Rango
1	18,19	1-2	18,19,16,16,16	0	Menos del 80% de 4 preguntas	3.2	0 a 3
2	16,16,16			1	Menos del 80% de7 preguntas	5.6	4 a 6
3	15, 12,12,12	3	15,12,12,12	2	Menos del 80% de 17 preguntas	13.6	7 a 14
4	11,11,10,10	4-5	11,11,11,10,10, 8,8,7,3	3	Más del 80 % de 17 preguntas	13.6	15 a 17
5	8,8,7,3						

Tabla núm. 28. Concentrado de los cinco estratos del eje Semántico
Grupo 3º - 4º grado

Nombre	ESTRATO 5	ESTRATO 4	ESTRATO 3	ESTRATO 2	ESTRATO 1
Giovani	2	2	1	3	2
Wendy	2	4	3	3	2
Jazmín	0	3	3	3	2
Fátima	1	0	3	3	2
Leslie	2	4	3	3	2
Emiliano	3	2	0	3	2
Dulce	1	3	3	3	2
Santiago	2	4	0	2	2
Guillermo	1	4	1	3	2
Eliany	2	4	2	3	2
Gadiel	2	4	2	3	2
Itzel	1	1	3	1	0
Pamela	1	1	0	1	2
Vianey	0	2	1	3	1
Miriam	0	1	2	1	2
Valeria	0	2	3	3	2
Allison	2	3	3	3	2
Naomi	0	1	3	0	2
Britany	2	3	3	2	2
Carlos	2	5	0	2	2

Tabla núm. 29. Concentrado de reducción a tres estratos y obtención de la clase del eje Semántico

Nombre	ESTRATO 5 – 4	ESTRATO 3	ESTRATO 2 – 1	**CLASE**
Giovani	4	3	5	**2**
Wendy	6	3	5	**2**
Jazmín	3	3	5	**2**
Fátima	1	3	5	**2**
Leslie	6	3	5	**2**
Emiliano	5	0	5	**1**
Dulce	4	3	5	**2**
Santiago	6	0	4	**1**
Guillermo	5	1	5	**1**
Eliany	6	2	5	**2**
Gadiel	6	2	5	**2**
Itzel	2	3	1	**0**
Pamela	2	0	3	**0**
Vianey	2	1	4	**1**
Miriam	1	2	3	**0**
Valeria	2	3	5	**2**
Allison	5	3	5	**2**
Naomi	1	3	2	**0**
Britany	5	3	4	**2**
Carlos	7	0	4	**1**

Tabla núm. 30. Concentrado de los reactivos del Eje de Sintáctico, organizados de mayor a menor grado de dificultad
Grupo de 3º - 4º grado

	ART	1° E	EJ 1			EJ3	PAY	EJ 2	EJ 3	PAYASOS				EJ 1		EJ 3		PAY	ART	1°E	PAYASOS			EJ3		PAY	ART	PAY	ART	1° E	EJ3	EJ1	EJ4	EJ1	ART		
NOMBRE	P9	P9	P2	P3	P9	P7	P10	P1	P6	P13	P14	P15	P16	P7	P8	P3	P4	P4	P7	P10	P11	P12	P9	P1	P5	P7	P14	P8	P8	P5	P2	P6	P10	P10	P13	P12	P1
Giovanni	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
Wendy	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Jazmîn	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1
Fâtima	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1
Leslie	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Emiliano	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Dulce	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Santiago	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Guillermo	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1
Eliany	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
Gadiel	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Itzel	0	NP	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	NP	1	1	1	1	1	1	0	1	1	NP	1	1	1	1	1	1	1
Pamela	1	0	0	0	1	1	0	NP	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Vianey	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1
Miriam	0	0	0	1	1	0	1	NP	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1
Valeria	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Allison	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
Nanomi	0	0	NP	NP	NP	NP	0	NP	NP	0	0	0	0	NP	NP	NP	NP	1	1	0	0	0	0	NP	NP	0	1	0	0	1	NP	NP	NP	NP	1	1	1
Britany	0	1	NP	NP	NP	NP	0	NP	NP	0	0	0	0	NP	NP	NP	NP	0	0	1	0	1	0	NP	NP	1	0	0	1	1	NP	NP	NP	NP	1	1	1
Carlos	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	5	7	10	10	10	10	10	11	11	11	11	11	11	12	12	12	12	12	12	13	13	13	13	14	14	14	14	15	15	16	16	17	17	18	18	19	20

Estratificación de acuerdo con el número de alumnos que contestaron cada reactivo en el eje Semántico (17 reactivos)

Tabla núm. 31. Concentrado de estratos y clase de acuerdo con el número de reactivos

<table>
<tr><th>ESTRATOS</th><th>No. Respuestas</th><th>ESTRATOS</th><th></th><th>CLASE</th><th></th><th>%</th><th>Rango</th></tr>
<tr><td>1</td><td>17,17,18,18,19,20</td><td rowspan="2">1-2</td><td rowspan="2">17,17,18,18,19,20
14,14,14,14,
15,15,16,16,</td><td>0</td><td>Menos del 80% de 14 preguntas</td><td>11.2</td><td>0 a 11</td></tr>
<tr><td>2</td><td>14,14,14,14,
15,15,16,16,</td><td>1</td><td>Menos del 80% de7 preguntas</td><td>19.2</td><td>12 a19</td></tr>
<tr><td>3</td><td>12,12,12,12,12,12,
13,13,13,13,</td><td>3</td><td>12,12,12,12,12,12,
13,13,13,13,</td><td>2</td><td>Menos del 80% de 17 preguntas</td><td>29.6</td><td>20 a 30</td></tr>
<tr><td>4</td><td>11,11,11,11,
11,11</td><td rowspan="2">4-5</td><td rowspan="2">11,11,11,11,11,11
5,7,10,10,,10,10,10</td><td>3</td><td>Más del 80 % de 17 preguntas</td><td>29.6</td><td>31 a 37</td></tr>
<tr><td>5</td><td>5,7,10,10,,10,10,10</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Tabla núm. 32. Concentrado de los cinco estratos del eje Sintáctico
Grupo 3º - 4º grado

Nombre	ESTRATO 5	ESTRATO 4	ESTRATO 3	ESTRATO 2	ESTRATO 1
Giovani	2	6	9	7	6
Wendy	6	6	9	7	6
Jazmín	2	4	6	5	5
Fátima	0	1	4	7	5
Leslie	4	2	6	4	6
Emiliano	4	5	7	8	6
Dulce	2	2	5	7	6
Santiago	3	2	4	6	6
Guillermo	5	5	7	5	6
Eliany	3	6	8	7	6
Gadiel	3	6	9	8	6
Itzel	5	6	7	6	6
Pamela	3	1	4	5	6
Vianey	4	5	9	7	4
Miriam	3	4	9	6	5
Valeria	3	0	4	7	6
Allison	3	0	6	5	6
Naomi	0	0	2	2	3
Britany	1	0	2	3	3
Carlos	6	5	7	6	6

Tabla núm. 33. Reducción a tres estratos y asignación de la clase del Eje Sintáctico

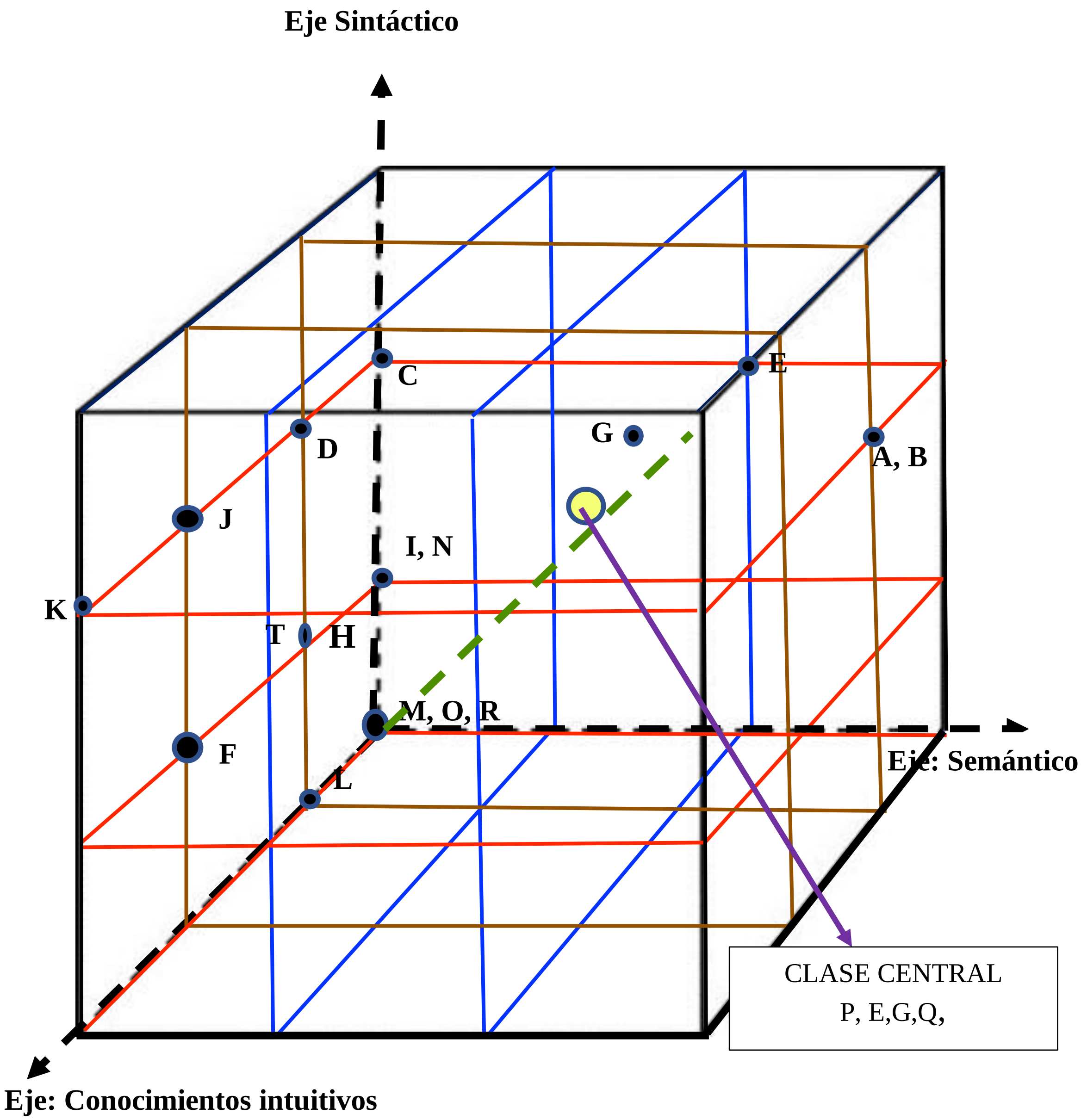
Nombre	ESTRATO 5 – 4	ESTRATO 3	ESTRATO 2 – 1	**CLASE**
Giovani	8	9	13	**1**
Wendy	12	9	13	**1**
Jazmín	6	6	10	**0**
Fátima	1	4	12	**1**
Leslie	6	6	10	**0**
Emiliano	9	7	14	**2**
Dulce	4	5	13	**1**
Santiago	5	4	12	**1**
Guillermo	10	7	11	**0**
Eliany	9	8	13	**2**
Gadiel	9	9	14	**3**
Itzel	11	7	12	**1**
Pamela	4	4	11	**0**
Vianey	9	9	11	**0**
Miriam	7	9	11	**0**
Valeria	3	4	13	**2**
Allison	3	6	11	**0**
Naomi	0	2	5	**0**
Britany	1	2	6	**0**
Carlos	11	7	12	**1**

Tabla núm. 34. Concentrado de clases de acuerdo con los ejes 3º - 4º grado

Nombre	CONOC INT	SEMÁNTICO	SINTÁCTICO	**Coordenadas**	PUNTO
Giovani	3	2	1	**321**	A
Wendy	3	2	1	**321**	B
Jazmín	0	2	0	**020**	C
Fátima	0	2	1	**021**	D
Leslie	2	2	0	**220**	E
Emiliano	0	1	2	**012**	F
Dulce	2	2	1	**221**	G
Santiago	0	1	1	**011**	H
Guillermo	0	1	0	**010**	I
Eliany	0	2	2	**022**	J
Gadiel	0	2	3	**023**	K
Itzel	0	0	1	**001**	L
Pamela	0	0	0	**000**	M
Vianey	0	1	0	**010**	N
Miriam	0	0	0	**000**	O
Valeria	2	2	2	**222**	P
Allison	2	2	0	**220**	Q
Naomi	0	0	0	**000**	R
Britany	0	2	0	**020**	S
Carlos	0	1	1	**011**	T

ación de la población en el modelo tridimensional de acuerdo con las coordenadas x, y, z (conocimientos intuitivos, semántico y sintáctico respectivamente).

5.2.3.1. Representación del perfil de grupo de 3º- 4º en el plano tridimensional



A,B (321)	G (221)	L (001)
C (020)	H (011)	M, O, R (000)
D (021)	I, N (010)	P (222)
E, Q (220)	J (022)	S (020)
F (012)	K (023)	T (011)

Fig. 26. Representación gráfica del diagnóstico del grupo de 3º - 4º

5.2.4. Diagnóstico: Primeras aproximaciones

Este análisis nos permitió averiguar qué dificultades de aprendizaje tienen los niños enfrentan cuando se les enseña con un modelo fundamentado en la estructura formal de Von Neumann, centrado en el principio de la ordinalidad a partir de la construcción del número cero e identificando que cualquier sucesor contienen a todos los anteriores.

El análisis cuantitativo complementó el perfil grupal de cada grupo, usando el modelo tridimensional (Rojano, 1985) para representarlo en el plano. Para este análisis se consideraron las respuestas en cada reactivo de los ejercicios escritos que se diseñaron para este fin. Cada alumno se ubicó en un estrato de acuerdo con su nivel de competencia (alto medio, bajo) en cada uno de los ejes (conocimientos intuitivos, semántico y sintáctico), lo que permitió la asignación de clase por eje.

En el grupo de 1º - 2º grado el 33.3%. de los alumnos representaron la clase central, frente al 53.33% de los alumnos ubicados en desempeño alto, sólo el 13.3% tuvo un desempeño bajo.

En el grupo de 3º - 4º grado el 20% de los alumnos representaron la clase central, frente al 10% de desempeño alto, el 60% tuvo en desempeño bajo.

En el análisis cualitativo, se observó que conforme se repetía el proceso de construcción de cada número (usando la iteración como principio de construcción) y la edad de los niños aumentaba, las dificultades se iban superando más rápido. La interacción que se dio en la construcción de los intertextos facilitó la dotación de sentidos intermedios, posibilitó la producción de procesos de significación y propició una ruptura de los conocimientos previos, facilitando un pensamiento tendiente a la abstracción numérica.

Los niños de 1º grado lograron superar las dificultades utilizando los argumentos de inducción, deducción y abducción para significar las acciones dirigidas a la construcción del conjunto vacío como número cero.

Los niños de 2º grado superaron rápidamente las dificultades en la construcción de los primeros cinco números, realizaron procesos de lectura/transformación en sus primeros acercamientos a la noción de cero como conjunto vacío y cómo el único número que pertenece a cualquier sucesor. Dotaron de Sentido la construcción del sucesor al completar las celdas en la tabla de suma, usando la forma $10 + a$; pero tuvieron dificultad al usar la forma $a \cdot 10 + b$, para representar al producto en cada celda de la tabla de multiplicación.

Los niños de 3º grado no presentaron dificultades en la construcción de los primeros números, incluyendo el cero. Dotaron de Sentido intermedio la noción de sucesor al introducir la palabra "pasajeros" que hizo un estudiante de este grupo, permitiendo usar pragmáticamente el principio de ordinalidad. Se observó la dificultad al usar la forma $a \cdot 10 + b$, para representar el producto en cada celda en la tabla de multiplicación.

Durante el diseño del modelo de enseñanza se encontró que, en el modelo de Von Neumann hay una ausencia para representar la linealidad y el orden en la construcción de los números naturales, por lo que se introdujo el uso de una semirrecta como un recurso didáctico para este fin retomado de Maravilla (2011), justificándolo en la definición de intervalo (Hamilton & Landin 1961, p. 97). Este recurso permitió que los niños establecieran la linealidad del orden de los números, colocando la bolsa del cero como el primer elemento de la construcción. Después de ensayo y error, los alumnos lograron usar la forma $10 + a$ para representar a los números mayores que diez y para los números mayores de $10 + 9$ usaron la forma $a \cdot 10 + b$.

En la tercera etapa de la experimentación, los niños de 2º grado identificaron el *orden* de los números, en la actividad de "Número escondido". También encontraron el número escondido en las diferentes secuencias numéricas, usando tarjetas con números del 0 al 100 (no se consideró relevante elegir episodios de esta secuencia de actividades, pues la atención está centrada en las dificultades recurrentes).

En la actividad de la calculadora, los niños de 2º grado se enfrentaron a la dificultad del uso del número cero, cuando éste apareció en la primera tarjeta que se extrajo de la urna y en segundo lugar salió la tarjeta del ocho, para poder darle sentido al uso del número cero, algunos niños invirtieron el orden: ochenta. Esta acción generó debate entre los niños, permitiendo identificar que el cero como cifra antes de un dígito representa el vacío y usando la calculadora simple para comprobar el resultado, se logró corregir la respuesta.

En la actividad "Otros nombres de los números", los dos grupos (2º y 4º) lograron representar los números que se les propusieron usando operaciones aditivas.

En las actividades “Tiro al blanco y el boliche usaron la propiedad asociativa y el elemento neutro para la suma, generó dificultades para representar las cantidades de la forma $a \cdot 10 + b$, los alumnos de 2º grado sólo hicieron la sumatoria de manera directa, apoyándose en la semirrecta. Los alumnos de 4º grado lograron usar la propiedad asociativa y la forma aritmética propuesta, a partir del trabajo grupal.

La actividad “El banquero”, los alumnos de 4º grado lograron realizar acciones de reparto, siguiendo las reglas del juego.

En el siguiente capítulo se presenta el análisis de las seis entrevistas que se aplicaron a finales del curso escolar 2017 – 2018. Participaron tres alumnos de segundo y tres alumnos de cuarto grado.

6. ANÁLISIS Y RESULTADOS DE LAS ENTREVISTAS CLÍNICAS

6.1. Análisis y resultados de las entrevistas clínicas

Para el análisis de las entrevistas, se irán retomando fragmentos de los diálogos de las secuencias de actividades atendiendo a: dificultades recurrentes, nuevas dificultades e indicios de transición hacia la generalización.

Para explicar este análisis conviene retomar el diseño del trabajo, el cual se estructuró en tres fases:

1. *Diseñar un Modelo de Enseñanza con base en Von Neumann, dirigido a niños de 6 a 9 años.*
2. *Experimentar con tres grupos (1º, 2º y 3º) grado de educación primaria, para identificar dificultades de aprendizaje.*
3. *Contrastar a través de la entrevista clínica las dificultades observadas durante la experimentación.*

Para guiar estas fases se plantearon las siguientes preguntas de investigación:

¿Qué elementos del modelo formal en los términos señalados por Hamilton & Landin (1961) se deben considerar para diseñar un Modelo de Enseñanza que se traduzca en actividades concretas, dirigidas a niños entre 6 a 9 años?

¿Qué dificultades se pueden observar cuando los niños trabajan a partir de la construcción de los números naturales, con base en ese modelo de enseñanza?

¿Cuál es el efecto del Modelo de Enseñanza con relación a las dificultades observadas en su implementación, una vez transcurrido un periodo aproximado de un curso escolar desde su implementación?

En los capítulos precedentes se han abordado las dos primeras fases del proyecto con las que se han dado respuesta a las dos primeras preguntas de la investigación. Ahora se aborda la tercera fase, el análisis de la entrevista clínica, con la que se pretende dar respuesta a la tercera pregunta.

Para centrar este análisis de la tercera fase de la entrevista se toma como objetivo particular averiguar si persisten las dificultades identificadas durante la experimentación, si se han superado o si aparecen nuevas.

6.1.1. Protocolo de la entrevista

El protocolo de la entrevista se estructuró con las mismas actividades del Modelo de Enseñanza con algunas modificaciones, siguiendo los principios (P_i) propuestos por Hamilton & Landin (1961) en su adaptación del Modelo de Von Neumann. A continuación, se describen brevemente las secuencias de actividades de las cuales se identificaron dificultades.

P_1: *Adivina quién soy* (Construcción del número cero como el conjunto vacío: 0 = Ø). Se usa la bolsa vacía de plástico transparente para reflexionar y representar al número cero como el conjunto vacío.

P_2 y P_3: *¿Podemos construir el siguiente?* Construcción del número uno como sucesor del cero 0 = Ø; 1 = {Ø}. Concepto de sucesor como un *siguiente*. Con esta idea y usando el proceso recursivo se construyen todos los demás números; 2={Ø,{Ø}}; 3={Ø,{Ø}, {Ø,{Ø}}}.

P_4: *¿Cómo soy?* Definición de número natural como conjunto *n*. En la construcción de cada bolsa con *n* elementos, se les guía en la reflexión de que cada bolsa es el número *n* en relación con la noción de sucesor y antecesor. Lo que conlleva a reflexionar y analizar las propiedades de la conceptualización de los números naturales: “El conjunto *n* contiene a todos los anteriores; si está vacío es el número cero, si no está vació es un sucesor”.

P_5: *¿Cuál es el orden?* Conteo: cardinalidad y ordinalidad. Con esta actividad se pretende que los alumnos reflexionen las acciones del proceso recursivo para darle sentido a la noción de ordinalidad y cardinalidad, de acuerdo con el valor posicional de cada cifra.

P_6: *Construimos las tablas de suma y multiplicación:* con el uso de las formas $10 + 1$ y $a\cdot 10 + b$, para representar los números mayores que 10. Esta actividad se sustituyó por la *Resolución de problemas aditivos, multiplicativos y de reparto.* Se involucra la reflexión sobre el uso de las propiedades conmutativa y asociativa, el uso del número cero como el elemento neutro para la suma, así como el uso de la forma $a\cdot 10 + b$, para representar los números mayores que 10.

Se agregaron algunas actividades porque se consideró necesario complementar el modelo de enseñanza, en los aspectos que no se lograron implementar en la primera fase de la experimentación:

P_0: En esta actividad se explora la noción de conjuntos, con el uso de la clasificación y seriación, dado que durante la experimentación no fue considerada. Se les pide a los niños que clasifiquen objetos, formen diferentes conjuntos y los ordenen en orden ascendente y descendente.

P_5: La actividad tiene la intención de que los niños entrevistados reflexionen la importancia del lugar que ocupa cada elemento en el conteo y que no es sólo un acto mecánico de correspondencia uno – uno. Se busca que identifiquen la noción de orden relacionada con el uso convencional de la correspondencia uno – uno ligada al uso del intervalo [*1, n*].

El protocolo de la secuencia de las actividades completo se puede consultar en el anexo número 4:

https://cinvestav365-my.sharepoint.com/:w:/g/personal/leticia_rodriguez_cinvestav_mx/EVHLWdQT_RtLpog77YED1LcB5-n167eSe5eujPva8k5MYw?e=4vgD4e

6.1.2. Categorías para el análisis

En el análisis de las dificultades observadas en la entrevista clínica se utilizaron las mismas categorías de análisis de la fase de dos, de acuerdo con el aporte del marco teórico:

1. *Obstructores (OB*) que generan tendencias cognitivas, por las maneras en que han aprendido las nociones numéricas, manifestadas en dificultades semánticas, pragmáticas, sintácticas y de uso numérico.
2. *Argumentos como Procesos de Significación* (APS), para identificar el razonamiento inductivo, deductivo y abductivo en el uso de la iteración y recursividad en la conceptualización de los números naturales.
3. *Dotación de Sentido* (DS) de los SMS con la utilización de códigos personales, para desarrollar el tránsito de lo concreto a lo abstracto.

Recuérdese que las dificultades recurrentes que se presentaron en la experimentación del modelo se clasificaron de acuerdo con los obstructores en tres rubros:

A. *Pragmático.* Uso de conocimientos pragmáticos y espontáneos de los números en acciones de representación de conteo. En este rubro las dificultades fueron:

A1. Identificar al cero como número (P_1).

A2. Identificar el sucesor y antecesor de cualquier número (P_3).

B. *Semántico.* Uso semántico de los números en acciones de representación y conteo. En este otro rubro las dificultades fueron:

B1. Reconocer al número cero como conjunto vacío (P_1).

B2. Reconocer que el cero es el único número que pertenece a cualquier sucesor (P_2).

B3. Reconocer que todo sucesor contiene a todos los anteriores (P_3).

B4. Identificar el cero como el punto origen en la recta.

C. *Sintáctico.* Uso sintáctico en las operaciones. Aquí, las dificultades fueron:

C1. Uso de la forma $a \cdot 10 + b$ para representar a los sucesores (P_6).

Cada entrevista tuvo una duración de dos horas aproximadamente.

En el análisis de las entrevistas las dificultades que se presentaron se organizaron en dos grupos; también se identificaron indicios de transición hacia la generalización matemática:

1. Dificultades recurrentes similares a la fase de experimentación.
2. Dificultades nuevas.
3. Indicios de transición hacia la generalización matemática.

6.1.3. Selección de los estudiantes

A partir de las respuestas y actuaciones de los niños durante la enseñanza – experimentación, cada alumno se clasificó en uno de tres estratos (Alto, Medio y Bajo). Para la entrevista clínica se seleccionó un alumno representante de cada estrato de cada uno de los grupos (2º y 4º), como se muestra en la tabla núm. 35.

Tabla núm. 35. Selección de alumnos que participaron en la Entrevista Clínica

Grado	**Estudiante**	**Estrato**
2º	Daniel	Bajo
	Nicole	Medio
	Ana	Alto
4º	Guillermo	Bajo
	Dulce	Medio
	Wendy	Alto

6.2. Análisis de dificultades recurrentes (similares a la fase de experimentación)

Las dificultades recurrentes que se volvieron a presentar durante la entrevista fueron:

A2. Identificar el sucesor y antecesor de cualquier número.

B1. Reconocer el número cero como conjunto vacío.

B2. Reconocer que el cero es el único número que pertenece a cualquier sucesor.

B3. Reconocer que todo sucesor contiene a sus anteriores.

C1. Uso de la forma $a \cdot 10 + b$*, en la resolución de problemas.*

A continuación, se presentan los fragmentos de diálogo de los alumnos entrevistados, en donde se presenta cada una de las dificultades recurrentes.

Dificultad *A2*. Fragmento de Daniel en la actividad "¿Podemos construir el siguiente?" (P_2 y P_3)

1. *E: ¿Qué necesito para que sea el número uno?*
2. *D: Un número que esté adentro.*
3. *E: Acuérdate, estamos de acuerdo que debe tener un elemento que esté adentro, pero ¿Quién va a ser ese elemento que esté adentro?*
4. *D: ¿El uno?*
5. *E: ¿Quién era el que estaba antes?*
6. *D: ¡Ah, el cero!*
7. *E: ¿Qué tienes que hacer?*
8. *D: Agarrar una* [Daniel usa la palabra uno para referirse a una bolsa vacía que ha tomado y le pega la etiqueta del cero, al mismo tiempo que describe lo que está haciendo, pero el volumen de su voz es muy bajo].
9. *E: ¡Eso! ¡Muy bien! Ahora ¿Qué tienes que hacer?*
10. *D: Meterlo.*

En las primeras líneas (1 – 3) se está haciendo referencia al número uno como sucesor, por lo que Daniel contesta con la frase: "un número que esté adentro", lo que se puede considerar como un argumento deductivo (APS 2). Sin embargo, cuando E(3) le pregunta "¿Quién va a ser ese elemento que esté adentro?", el entrevistado contesta con otra pregunta D(4) que denota inseguridad, lo que se puede interpretar como parte de la dificultad *A2* para *identificar al sucesor y antecesor de cualquier número*. Por lo que E(5) hace un recordatorio a través de una pregunta, lo que permite a Daniel darse cuenta de que el antecesor es el primer número que se construyó: "¡Ah! El cero" (D6). Con esta acción, Daniel evoca el proceso recursivo de la construcción, en las siguientes líneas (8 – 10) comienza a realizar y describir oralmente el procedimiento.

Dificultad *B1*. Fragmento de Daniel en la actividad "Adivina quién soy" (P_1)

1. *E: ¿Qué tiene la bolsa*? [la entrevistadora toma una bolsa vacía y se la muestra a Daniel].
2. *D: Está chiquita*
3. *E: ¿Y además cómo está la bolsa?*
4. *D: Vacía*
5. *E: ¿Cómo sabes que está vacía?*
6. *D: Porque no tiene nada.*
7. *E: ¿Cómo puedes decir que no tiene nada?*
8. *D: Estuviera un poco pesado.*
9. *E: ¿Cómo podemos representar esta bolsa que no tiene nada, que está vacía?* [Daniel no contesta, sólo observa la bolsa que la entrevistadora tiene en la mano].
10. *E: ¿Qué le puedo poner aquí para saber que esta bolsa está vacía*? [la entrevistadora le muestra el material que tiene sobre la mesa: una semirrecta, bolsas de plástico transparente de diferentes tamaños, números en plástico flexible] *¿Alguno de estos puedo usar?*
11. *D: ¿Éste?*
12. *E: ¿Cuál es éste*? [Daniel señala el montón de las etiquetas del número cero].
13. *D: El cero.*
14. *E: El cero ¿Qué le tengo que hacer?*
15. *D: ¿Cortarlo?*
16. *E: Pegarlo…* [Daniel pega la etiqueta del número cero en la bolsa vacía] *¡Muy bien!*

Al inicio de este fragmento Daniel centra su atención en la percepción visual, al referirse al tamaño de la bolsa D(2), lo que está relacionado con la dificultad *B1* para *identificar el cero* *como conjunto vacío*, por lo que la entrevistadora lo cuestiona nuevamente E(3), Daniel lo relaciona con la palabra *vacía* D(4). Se interpreta que usa un argumento deductivo (APS 2), al relacionar *vacía* con *nada* D(6). En D(8) el argumento de inferencia (APS 1), para explicar que no tiene nada, es producto de una evocación de la memoria, de la experiencia grupal de la experimentación del modelo de enseñanza en el ciclo próximo pasado, al relacionar la palabra *nada* con la acción contraria: "si estuviera un poco pesado" D(8). La entrevistadora continúa cuestionándolo con la finalidad de que pueda explicar esta relación a partir de una manera convencional de representarlo E(10). Daniel dirige la mirada hacia el montón de las etiquetas del número cero y pregunta si es correcta D(11). Para tener certeza de lo que se percibe, la entrevistadora le pregunta "¿Cuál es éste?" E(12), y sin titubear Daniel D(13) responde "El cero" lo que se puede entender como una transición hacia una dotación de sentido convencional (DS 2). Sin embargo, el proceso de representación del número cero, no es claro para Daniel, pues a la pregunta de E(14), el niño pregunta D(15) si se tiene que cortar la etiqueta del número uno, pero las etiquetas ya están cortadas, por lo que la entrevistadora E(16) lo corrige, indicándole que sólo debe pegarla, concluyendo este proceso.

Dificultades *B2* y *B3* Fragmentos de Daniel, Nicole, Ana y Guillermo en la actividad "¿Podemos construir el siguiente?" (P_2 y P_3)

1. *E: Estamos de acuerdo que debe tener un elemento que esté adentro, pero ¿Quién va a ser ese elemento que esté adentro?* [Se refiere al sucesor del cero].
2. *D: ¿El uno?*
3. *E: ¿Quién era el que estaba antes?*
4. *D: ¡Ah, el cero!*
5. *E: ¿Qué tienes que hacer?*
6. *D: Agarrar una* [Daniel usa la palabra "una" para refirse a una bolsa vacía que ha tomado y le pega la etiqueta del cero, al mismo tiempo que describe lo que está haciendo, pero el volumen de su voz es muy bajo].
7. *E: ¡Eso! ¡Muy bien! Ahora ¿Qué tienes que hacer?*
8. *D: Meterlo.*

En las primeras líneas de este fragmento Daniel D(2), denota inseguridad en su respuesta, lo que se puede interpretar como parte de la dificultad *B3* para *reconocer que todo sucesor* *contiene a todos los anteriores)*. La pregunta de E (3) por el antecesor, permite que Daniel identifique que el antecesor es el número cero que construyó previamente: "¡Ah! El cero" (D4), por lo que empieza la construcción describiendo oralmente el procedimiento D(6), una vez que construye otra bolsa/número cero, tiene claridad que todo sucesor contiene a sus anteriores, al contestar la pregunta de E(7) que la acción de meterla dentro de la bolsa/número uno D(8), es una dotación de sentido (DS2) del proceso recursivo.

Para Nicole (7 años), la dificultad *B2*, se relaciona con el uso de los numerales sin el sentido de construcción:

1. *E: ¿Cómo lo vas a construir?* [Sucesor del número uno].
2. *N: Agarro esta bolsita y el uno* [toma la etiqueta del número uno y la introduce a la nueva bolsa/número].
3. *E: Si pero acuérdate no va adentro lo tenemos que pegar afuera de la bolsa. Pero para que sea el uno ¿A quién debe de tener?*
4. *N: Al cero.* (…) [Nicole construye otra bolsa/número cero y la introduce en la bolsa/número uno].
5. *E: Ok, ya tienes el uno ¿Qué te falta?*
6. *N: El dos.*
7. *E: Pero ¿quién te falta?* [la entrevistadora se refiere al número cero].
8. *N: El uno.*
9. *E: El uno ya está, ¿quién te falta?*
10. *N: El dos.*
11. *E: Aquí tienes un elemento que es el uno, pero ¿quién te falta? Este es el uno igual a este, con su número cero adentro, pero ¿quién te falta?* [La entrevistadora se refiere a que falta otra bolsa/número cero].
12. *N: ¿El cero?*

La dificultad *B2* en Nicole N(2), pues sólo considera que debe introducir la etiqueta del número uno dentro de la nueva bolsa, acción que está relacionada con un sentido de inclusión, al introducir el numeral uno en la bolsa vacía. Este obstáculo (OB 2) le dificulta la acción de reversibilidad, para comprender el sentido del proceso recursivo para construir cualquier sucesor. Para atender esta dificultad, la entrevistadora E(3), le recuerda que las bolsas se les pega la etiqueta de los números como parte del proceso de construcción, haciendo referencia al proceso recursivo con la pregunta: "¿A quién debe de tener?". Con esta intervención Nicole puede construir la bolsa/número uno, pero sigue presente la dificultad *B2*, en la línea N(6), pues a pesar de que E(5) le muestra que ya tiene la bolsa/número uno, no logra reconocer que debe construir otra bolsa/número cero, para introducirla a la bolsa/número dos, es decir, la bolsa/número cero y la bolsa/número uno, ella sólo reconoce que el número que sigue del uno es el dos, pues se centra en la expresión de E(5): "Ok, ya tienes el uno ¿qué te falta?". Esta dificultad puede ser producto del obstáculo (OB 1 y 2) que está relacionado con las maneras en que han aprendido la secuencia numérica, así como la dificultad *B3* para usar la reversibilidad para reconocer que todo sucesor contiene a todos los anteriores. Situación que se repite en N(8 y 10), Por lo que la entrevistadora hace una recapitulación del proceso en E(11), para que Nicole pueda identificar que falta es la bolsa/número cero, quien responde N(12) con una pregunta, esperando la aprobación.

Para Ana la dificultad *B3*, se presentó en la construcción de la bolsa número tres:

1. *E: Pero ¿quién te falta para poderlo meter?* [Ana ha construido la bolsa/número dos].
2. *A: El* cero [toma otra bolsita vacía y le pega la etiqueta del cero].
3. *E: Ya tienes el cero, ahora ¿quién te falta? Tienes el cero y el dos ¿quién falta?*
4. *A: El tres.*
5. *E: Fíjate, tienes cero, el dos, ¿quién falta* [al mismo tiempo que le señala las dos bolsas/número del cero y dos, que acaba de construir. Señalando el espacio entre ambas bolsas. Pero Ana duda por lo que la entrevistadora le vuelve a señalar el espacio entre las dos bolsas/número y le pregunta] *¿quién sigue después del cero?*
6. *A: El uno.*

En este fragmento Ana presenta la dificultad *B3*, pues a pesar de haber construido las bolsa/número dos E(1) y la bolsa/número cero A(2), no logra reconocer que falta la bolsa/número uno A(4) como se puede apreciar en la figura 24, hasta que E(5) le muestra las bolsas/número que están sobre la semirrecta, para que ella pudiera reconstruir el proceso en A(6), acto que es interpretado por Ana, a través de la reversibilidad, ver figura 27.

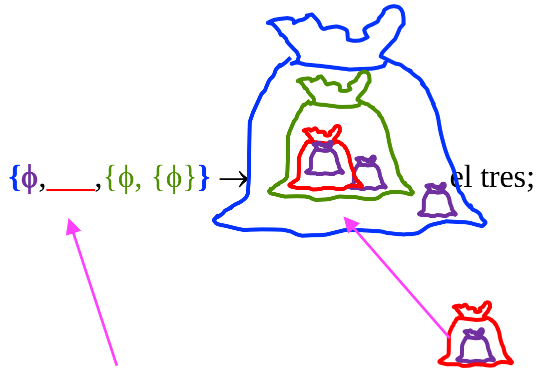
 En la construcción de la bolsa/número tres, ha construído el dos y el cero, pero no reconoce que falta el uno	 Falta {Ø} Falta la bolsa/número uno

Figura 27. Esquematización de la dificultad B3: falta la bolsa/número uno

De manera similar esta dificultad la presenta Guillermo (9 años), con la construcción del número tres:

Guillermo usa el proceso recursivo para construir las bolsas/número

1. *G: Ya tengo el cero y el uno. (…) Y este*
   [Toma una bolsa y la etiqueta con el número dos, toma una bolsa/número cero; toma otra bolsa y la etiqueta con el número uno; de inmediato toma otra bolsa y la etiqueta con el número cero para introducirla en la bolsa/número uno, una vez que ya tiene las bolsas/número cero y uno, las introduce en la nueva bolsa/número dos].
2. *E: Ahora ya tienes a tus tres elementos, ¿dónde van a ir?*
3. *G: En el tres.*
4. *E: Lo estás haciendo muy bien Guillermo* [El niño toma la bolsa/número dos].
5. *G: Ya está* [Guillermo sólo introduce la bolsa/número dos en la bolsa/número tres].
6. *E: A ver, ¿qué te faltó?, nada más metiste al dos ¿Quién te falta?*
7. *G: El cero.*
8. *E: El cero y ¿quién más?*
9. *G: El uno.*

Guillermo es un alumno que está cursando el cuarto grado, atendido por la Unidad de Educación Especial Inclusiva (UDEEI), debido a que no ha consolidado la adquisición del sistema de escritura. En este fragmento Guillermo usa correctamente el proceso recursivo para la construcción de las bolsas/número cero, uno y dos G(1), para construir al sucesor del número dos, lo que se corrobora con la intervención de la entrevistadora E(2) y G(3). Sin embargo, para la construcción de la bolsa/número tres, sólo usa la bolsa/número dos, sin considerar las otras bolsas/número cero y uno. Esta "omisión" es un obstáculo cognitivo (OB2), para usar la relación de reversibilidad, como puede verse en la figura 28.

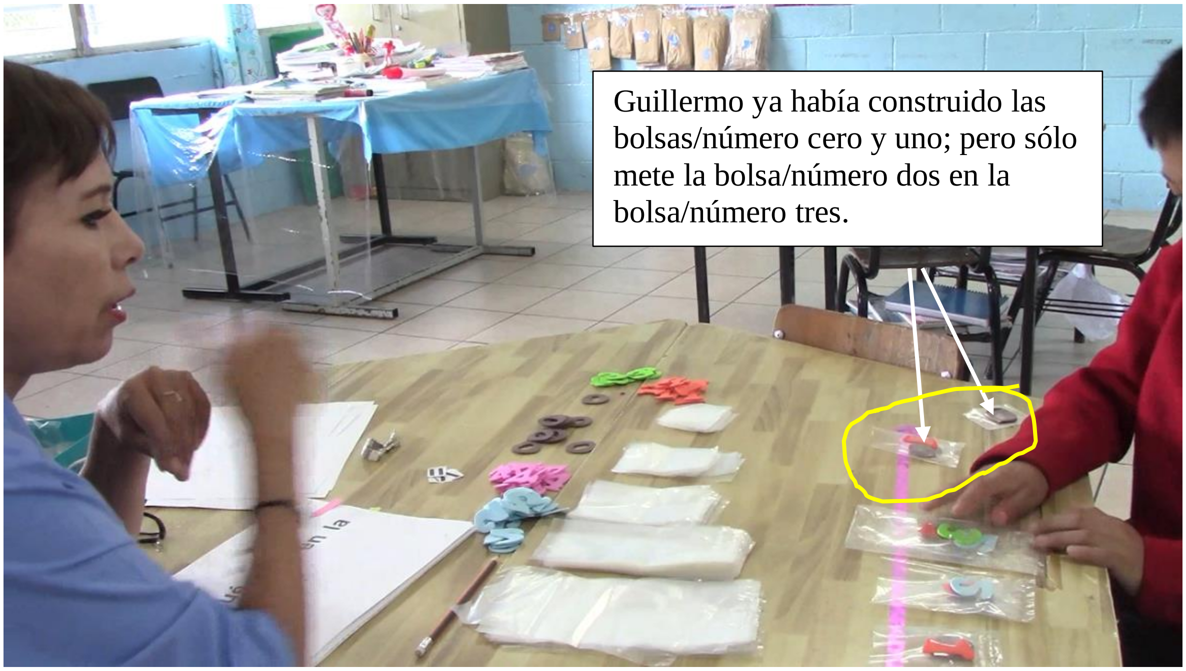


Fig. 28. Guillermo tiene dificultad para la construcción del sucesor del número tres

Las dificultades *B2* y *B3* se observaron en diferentes episodios; en algunos casos los niños responden con preguntas, porque esperan la aprobación del adulto. Esto puede ser un efecto de la tradición de la enseñanza: los niños esperan la aprobación de la profesora o profesor.

Dificultad C1. Uso de la forma $\boldsymbol{a \cdot 10 + b}$

La resolución de problemas (P_6), específicamente en este segmento, la alumna Dulce usó la forma $10 + a$, pero no pudo usar la forma $a \cdot 10 + b$.

Fragmento de Dulce (9 años).

1. *E: Ahora trata de hacer esta.* [Le señala la operación $9 + 3 + 6 + 5 =$] *Ve diciendo lo que estás haciendo.*
   (…)
2. *D:* [Dulce agrupa por parejas los números: $(9 + 3) + (6 + 5)$]. *En la suma me da doce, diez más dos* [se refiere a la suma de $(9 + 3)$ y lo representa $(10 + 2)$].
3. *E: ¡Muy bien! Así, luego…*
4. *D: Me da 11. Diez más una* [se refiere a la suma de $(6 + 5)$ y lo representa $(10 + 1)$]
5. *E: ¿Qué vas a hacer? Tienes* $10 + 2$ *y luego* $10 + 1$
6. *D: Diez.*
7. *E: ¿Diez con quién?*
8. *D: ¿Más dos?*
9. *E: Ese ya está.*
10. *D: Más 9.*
11. *E: Fíjate cuando jugábamos con el boliche la condición era agrupar las cantidades, nunca dejar una pareja de números que sumen más de diez y al final juntábamos los dieces con los dieces y sumábamos los números que quedaban sueltos.*
12. *D: Entonces es diez más diez* [Escribe $10 + 10$].
13. *E: En paréntesis, más… ¿quién quedó suelto ahora?*
14. *D: Más dos y uno.*
15. *E: Exacto, ahora sí, ya puedes juntarlos: diez más diez igual a…. ¿cuánto?*
16. *D: Veinte más tres igual a veintitrés.* [Escribe $20 + 3 = 23$].

En las primeras líneas (1 – 2) Dulce agrupa: $(9 + 3) + (6 + 5)$ y siguiendo el primer ejemplo en D(2 y 4) las representa como: $(9 + 3) = (10 + 2)$; $(6 + 5) = (10 + 1)$, lo que se puede entender como una dotación de sentido (DS 2). El problema comienza cuando E(5) le pregunta por el siguiente paso; pero su respuesta “Diez” D(6), carece de sentido, para usar la forma $a \cdot 10$, lo que se puede entender como la dificultad C1. Aunque la entrevistadora le da la pista E(7) “¿Diez con quién?”, Dulce se centra sólo en el primer par de cantidades: $10 + 2$ D(8), después intenta con otro de los primeros números, el nueve D(10). Con la intervención de E(11), infiere que debe escribir $(10 + 10) + (2 + 1)$ (APS 1). A pesar de estos avances, escribe la suma como $20 + 3 = 23$, y lo explica como "veinte más tres, igual a veintetrés" (D16), sin usar la forma $a \cdot 10 + b : 2 \cdot 10 + 3$, como puede observarse en la figura 29.

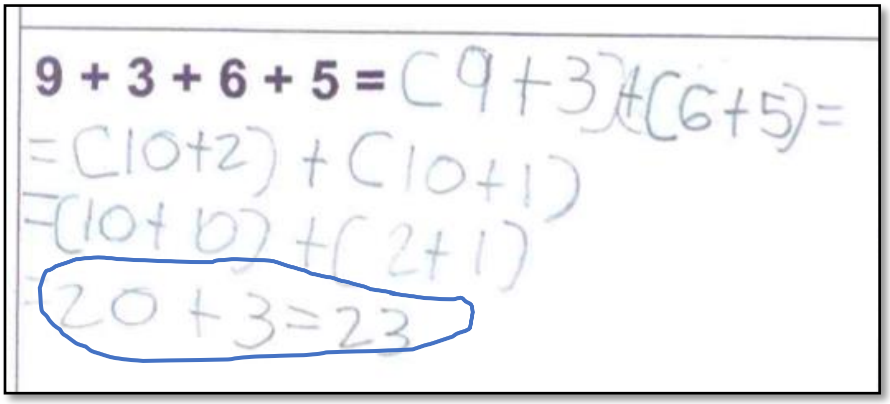


Fig. 29. Dificultad para usar la forma $a \cdot 10 + b$.

6.3. Dificultades nuevas

El análisis se realiza en dos partes:

6.3.1. Dificultades que se relacionan directamente con el modelo de Von Neumann, vinculadas a alguno de los P_i:

A4. Usar la clasificación para seleccionar objetos y formar conjuntos (P_0)

C2. Usar las propiedades asociativa y conmutativa para la suma (P_6).

Dificultad A4: Fragmento de Dulce (9 años) con la actividad "Pon junto lo que va junto" *(P_0):*

1. *E: Vuelve a revisar. Pon junto lo que va junto. ¿Qué cosas irían juntas? Observa todo ¿Qué observas Dulce?* [Dulce comienza a hacer parejas: dos blusas rosas, dos flores amarillas...] *¿Estos por qué los pusiste de este lado?* [acomoda otro par de flores junto al par de blusas]. *(…) ¿Qué estas haciendo?*
2. *D: Los iguales.*
3. *E: Observa para que pongas junto lo que va junto. ¿Qué observas? ¿Qué hay en estas estampas?*
4. *D: Flores.*

   (…)
5. *E: Y esas ¿Dónde las pondrías? sigues insistiendo en poner parejas... Escucha: "Pon junto lo que va junto" ¿Cómo le harías? ¿Cómo entiendes pon junto lo que va junto?*
6. *D: Que lo ponga junto.*
7. *E: La clasificación es de todas las estampas. Observa y dime ¿Qué hay en todas las imágenes que tienes aquí?*
8. *D: Observo que hay números, flores, vestidos, animales.*
9. *E: Entonces ¿Cómo podrías clasificar?*
10. *D: Flores, vestidos, animales.*
11. *E: Entonces, ¿quién pondrías con quién? Para que queden juntos todos los que pertenecen al mismo grupo.*

    (…)
12. *D: La flor con la mariposa.*

13. *E: ¿Por qué?*
14. *D: Porque la mariposa se pone en la flor* [Dulce vuelve a formar parejas].
15. *E: Pero tú me dijiste que había flores… ¿Qué más dijiste?* [la entrevistadora le señala todas las estampas].
16. *D: Animales, ropa.*
17. *E: ¿Podrías clasificar de esa manera a todos? ¿En un lado la ropa, en otro lado los animales y en otro lado la flor?*
18. *D: Si*, [Dulce termina de clasificar las estampas en tres conjuntos].

En este fragmento la entrevistadora E(1) le pide a la alumna que explique cómo hizo su selección. La estudiante hace parejas y explica junta las iguales D(2), a lo que E(3) le pregunta que observe todas las estampas, pero Dulce le responde que son flores D(4), ella sólo se refiere a las flores. Esto se puede considerar como un obstructor cognitivo (OB 1), para observar la totalidad y no sólo una parte. Por lo que E(5 y 7) le vuelve a insitir en concentrarse en que la indicación se refiere a todas las estampas, permitiendo que D(8 - 10) vea el total de estampas y pueda nombrar los conjuntos: números, flores, vestidos y animales. Sin embargo, Dulce pone juntos a la flor con la mariposa D(12), con un argumento de la vida cotidiana: "La mariposa se pone en la flor" D(14). E(15 - 17) le vuelve a señalar todas las estampas, para que Dulce vuelva a centrarse en que la tarea consiste en clasificar todas las estampas por conjuntos de acuerdo con sus atributos. De esta manera Dulce clasifica a todas las estampas en el conjunto de ropa, animales y flores.

Dificultad C2. Fragmento de Guillermo (9 años) en la actividad Resolución de problemas (P_6)

1. *E: Ahora fíjate muy bien: "En el recreo mis amigos y yo jugamos a tazos, al final queríamos saber cuántos puntos hicimos entre los tres: Miguel ganó 32 puntos, Lucero 23 puntos y yo 21 puntos. ¿De cuántas maneras se puede resolver?*
   (…)
2. *G: Él ganó* [Señala el nombre de Miguel]
3. *E: El problema no se trata de quien ganó, sino de ¿cuántos puntos hicieron entre los tres? Luego dice. Escribe en la línea de la derecha la letra "V" si es correcto, si es verdadero. Es decir, que las operaciones como están escritas podemos obtener un*

resultado correcto o una "F" si es incorrecto o falso. Fíjate en las cantidades para ver cuánto vamos a obtener entre los tres: $(32 + 23) + 21$*; pero aquí encerramos primero una pareja. ¿Esta también si la hacemos nos puede llevar al resultado?*

4. *G: No.*
5. *E: ¿Por qué?*
6. *G: Porque cada quien tiene una pareja.*
7. *E: Acuérdate. Esto si lo hicimos cuando jugamos al boliche. Ocupábamos estos dos y luego lo sumábamos con este. Entonces ¿Será cierto o no?*
8. *G: Cierto.*
9. *E: Escribe "verdadero". Ahora: (30 + 2) – (20 + 3) ¿Así podemos llegar al resultado?*
10. *G: No.*
11. *E: ¿Por qué?*
12. *G: Porque aquí le están quitando en vez de ponerle.*

En las primeras líneas de este fragmento (1 – 2), se observa que Guillermo tiene dificultades para entender la instrucción del problema. Se adelanta a responder "Él ganó", refiriéndose a Miguel G(2), sin darle sentido a la pregunta del problema: "¿De cuántas maneras se puede resolver?". La entrevistadora le explica E(3), el contenido del problema, pero sólo responde "No" G(4). Ante esa respuesta, la entrevistadora E(5) le pide que justifique su respuesta; sin embargo, su respuesta carece de argumentos para justificarla G(6), no relaciona que la tarea consiste identificar la propiedad asociativa, como una opción para la resolución de operaciones aditivas con más de tres miembros, para él sólo se trata de pares de cantidades agrupadas con un paréntesis. Esta dificultad (C.2) *para usar la propiedad asociativa para la suma*, puede ser consecuencia de un obstructor cognitivo (OB1), de las maneras que ha aprendido que "resolver problemas", implican ¿quién ganó?, ¿cuánto perdió?… Cuando la entrevistadora E(7) le recuerda que esa actividad es similar a una que realizaron con todo el grupo y al evocarlo, recuerda el uso de la propiedad asociativa para resolver operaciones aditivas con más de tres miembros, Guillermo parece recordarlo G(8); pero ante la siguiente opción $(30 + 2) - (20 + 3)$, sólo hace referencia a las palabras clave: "quitando en vez de ponerle"; lo que hace suponer que la dificultad sigue constante.

6.3.2. Dificultades que se relacionan con nociones numéricas y sus operaciones, las cuales pueden ser producto de obstáculos provenientes cognitivos o de la enseñanza tradicional

C3. Resolver problemas aditivos de la forma $A + B = C$*, transformándolos como* $A + \_\_\_ = C; C - \_\_ = A; \_\_\_ + B = C; ...$

Dificultad C3. Fragmento de Nicole (7 años) y Ana (7 años) en la actividad "Resolución de problemas" (P_6)

Para Nicole la dificultad C3, la presentó en el fragmento de la actividad "Resolución de problemas" (P_6) en los problemas de resta, usando el modelo aditivo.

Problema en los que se usa la transformación del modelo aditivo $A + \_\_ = C$ como $C - A = \_\_$:

1. *E: Ahora fíjate bien, "Gilberto tiene nueve canicas quiere tener diez y seis ¿Cuántas canicas más necesita?".*
2. *N: 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17.* [Comienza a contar a partir de nueve, usando sus dedos]
3. *E: Cuéntale otra vez.*
4. *N: 9, 10, 11.*
5. *E: No...*
6. *N: 9…*
7. *E: 10…* [la entrevistadora le indica en qué número debe comenzar a contar].
8. *N: 10,11, 12, 13, 14, 15, 16.*
9. *E: ¿Cuántas más necesitas?*
10. *N: Seis.*
11. *E: Revisa otra vez*
12. *N: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16.*
13. *E: ¿Cuántos dedos son?* [la entrevistadora le toca los dedos de una mano al pedirle que vuelva a contarlos].
14. *N: Siete.*
15. *E: ¿Cómo lo escribimos? ¿Cómo le podemos hacer?*
16. *N: Ponemos aquí seis, …* [corrige de inmediato] *dieciséis.*

17. *E: ¿Dieciséis menos qué?*
18. *N: ¿Menos siete?*
19. *E: ¿Menos siete? ¿Cuántas canicas tenía?*
20. *N: Seis.*
21. *E: ¿Seis?*
22. *N: Digo nueve.*
23. *E: ¿Cuántos nos da* $16 - 9$*?*
24. *N: Siete.*
25. *E: ¿Por qué supiste que era siete?*
26. *N: Porque lo dice aquí.*

En este fragmento Nicole tiene dificultad *C3.* Al *contar a partir de…* usa sus dedos para contar, pero comienza a partir del número nueve N(2), recitando la secuencia, sin obtener la respuesta correcta a la pregunta, por lo que la entrevistadora E(3) le indica que vuelva a contar. Nicole vuelve a contar a partir del número nueve, pero esta vez se detiene en el número once, sin lograr responder correctamente. La entrevistadora E(5) le dice “No”, a lo que Nicole intenta contestar con la palabra “nueve” N(6), lo que denota que Nicole tiene dificultades con esta manera de contar. La entrevistadora E(7) le indica que el conteo debe continuar a partir del número diez, pista que Nicole N(8) sigue y termina en dieciséis; pero al retomar la pregunta del problema E(9), vuelve a equivocarse N(10). Por lo que la entrevistadora E(11) le pide que verique su respuesta, a lo que Nicole N(12), la dificultad que persiste es que inicia a contar a partir del último número (nueve) sin considerar que debe hacerlo a partir de su sucesor (diez). La entrevistadora E(13) le pide que cuente los dedos que usó para realizar el conteo. En este intento, Nicole N(14) logra encontrar el número faltante. Ahora la dificultad se presenta cuando E(15) le pide que represente la operación, N(16), sólo escribe el número dieciseis, por lo que E(17) la orienta para que la relacione la suma con el uso de la resta, es decir, transformar la operación $9 + \_\_ = 16$ a $16 - 9 = \_\_\_$.

Se puede entender que la dificultad para transformar la suma en su operación contraria, es debida a que Nicole aún no le ha dado sentido a esta acción, como se puede observar en N(18), al expresar su respuesta como una pregunta. Nicole está nerviosa, lo que origina que se vuelva a equivocar N(20). Por la pregunta de la entrevistadora, se da cuenta de que el número que tiene que escribir es el nueve N(22). Para reforzar este hallazgo, la entrevistadora

E(23) le repite oralmente, al mismo tiempo que va señalando la operación que acaba de escribir Nicole. Pero cuando E(25) le pide que lo justifique, la respuesta de N(26), sólo hace referencia a la operación.

La dificultad C3 para usar la operación aditiva con sus respectivas transformaciones, puede ser resultado de un obstructor (OB2) proveniente de los procesos cognitivos para realizar relaciones de reversibilidad, lo que le impide estructurar argumentos inductivos o deductivos (APS 1, 2) para justificar su respuesta, evidenciando una carencia de producción de sentido de la transformación de la operación aditiva.

Para Ana, la dificultad C3 se presentó en el fragmento de la actividad “Resolución de problemas” (P_6); para resolver problemas aditivos usando el modelo aritmético de la forma $\mathrm{A}+\mathrm{B}=\mathrm{C}$ transformándolo en $\mathrm{A}+\_\_=\mathrm{C}$ ó $\mathrm{C}-\mathrm{A}=\_\_$.

1. *E: Correcto Ana. ¡Muy bien! Ahora fíjate, dice “Adriana fue a la tienda y compró varias cosas…”*
2. *A: Que le costaron a $11, pagó con su billete de $20 ¿Cuánto dinero le dieron de cambio?* [Ana siguió leyendo el problema].
3. *E: ¿Cómo le puedes hacer?*
4. *A: Restándole. Dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve y diez* [Ana cuenta e intenta resolverlo usando un algoritmo en forma de columna colocando 11 - 20].
5. *E: ¿Qué sucedió Ana?*
6. *A: No se pudo* [obtuvo como resultado 81].
7. *E: ¿Por qué? A uno le puedes quitar cero. Pero a uno ¿le puedes quitar dos?* [Se refiere a restar primero la columna de las unidades y después la de las decenas].
8. *A: No.*
9. *E: Hazlo acá de este lado. ¿Otra vez* $11-20$*? ¿A 11 le puedes quitar 20?*
10. *A: No.*
11. *E: ¿Se puede?*
12. *A: No* [Ana suma las cantidades y obtiene como resultado 31].
13. *E: Hazlo acá otra vez.*
14. *A: ¡Otra vez!* [Su tono de voz es de decepción, dado que lleva dos intentos].
15. *E: ¿Cómo puede ser?*

16. *A: Multiplicación.*

17. *E: ¿Por qué vas a multiplicar? Si tú vas a la tienda y compras, gastas $11 pesos y das un billete de 20 ¿Cuánto te van a regresar de cambio? Es lo que te están preguntando* [Ana vuelve a escribir el algoritmo 20 – 11 en forma de columna y lo resuelve iniciando con la columna de las unidades y después con la de las decenas].

18. *A: Nueve.*

En este fragmento se observa que Ana tiene la dificultad C3 *resolver operaciones que implican una resta, usando el modelo aditivo* $A + \_\_ = C$.

En la línea (A4) es claro que el problema lo puede resolver con una resta, es decir, semánticamente tiene sentido para Ana que se trata de un problema de resta (DS1), lo cual puede ser a que ha aprendido a relacionar las palabras clave: "le dieron de cambio". La dificultad al usar el conteo y un algoritmo en forma de columna (figura 30) se puede apreciar en los dos primeros intentos, pues escribe primero la cantidad menor, el resultado no tiene congruencia con el resultado.

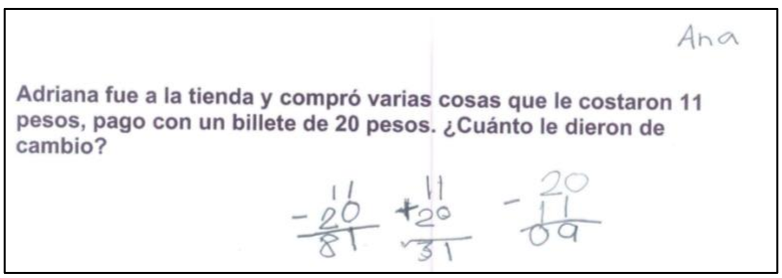


Fig. 30. Ana intenta resolver el problema usando algoritmos en forma de columna

En el primer intento, inicia un conteo comenzando por dos hasta llegar a diez y escribe el primer algoritmo, pero invierte las cantidades, por lo que no puede resolverlo. Usa las estrategias que ha aprendido para resolver estos algoritmos, acomodando los datos: a uno le resta cero, le da uno (en la columna de las unidades) y en la columna de las decenas, el uno lo toma como diez, por lo que puede restar diez menos dos. Sin embargo, se da cuenta de que no está correcta A(6), lo que se puede entender como dotación de sentido (DS2), al reconocer que no ha usado la estrategia correcta al usar un algoritmo de columna, tratando de restar once menos veinte. En su siguiente intento usa un algoritmo de columna de suma y obtiene como resultado treinta y uno, otro resultado incorrecto (E9). Por lo que la entrevistadora la cuestiona (E15) por su resultado, pero la respuesta de Ana carece de sentido aritmético A(16).

La entrevistadora la vuelve a cuestionar para que Ana se centre en la pregunta del problema E(17). En ese momento Ana prueba invirtiendo los datos en el algoritmo vertical y logra resolver el problema A(18) escribiendo veinte menos once y obtiene el resultado correcto.

6.4. Indicios de transición hacia la generalización

En este campo describimos los indicios de transición hacia la generalización que se identificaron en las entrevistas. En estos indicios se puede observar las maneras en que reflexionan y argumentan el uso de las nociones aritméticas aplicadas en la resolución de problemas. En la tabla núm. 36, se presentan las generalizaciones que están relacionadas con los P_i con base en el modelo de Von Neumann (GP_i); en la tabla núm. 37, se presentan las generalizaciones que están relacionadas con las nociones numéricas y sus operaciones (GNO_i).

Tabla núm. 36. Generalización aritmética de acuerdo con el modelo de Von Neumann

P_i	GPi	Actividad de generalización
P_1	GP_1	Identificación del cero como número y como conjunto vacío.
P_2	GP_2	Reconocer que el cero es el único número que pertenece a todos los sucesores.
	GP_3	Reconocer que el cero es el único número que no es un sucesor.
P_3	GP_4	Acercamiento conceptual a la noción de sucesor.
	GP_5	Producción de sentido para la construcción del sucesor, usando el proceso recursivo.
P_4	GP_6	Acercamiento al sentido de ordinalidad: reconocer que todo sucesor contiene a todos los anteriores.
P_6	GP_7	Uso del número cero como elemento neutro en la resolución de problemas aditivos.
	GP_8	Uso de las propiedades asociativa y conmutativa en la operación de suma.

Tabla núm. 37. Generalización hacia las nociones numéricas y sus operaciones (GNO)

GNO_i	Actividad de Generalización hacia las nociones numéricas y sus operaciones
GNO_1	Identificar el cero como punto origen de la recta.
GNO_2	Uso de la transformación del modelo aditivo $A + B = C$, para la resolución de problemas aditivos.
GNO_3	Relacionar el uso de los $(+)$ y $(-)$ con las operaciones aditivas.

6.4.1. Generalización aritmética de acuerdo con el modelo de Von Neumann

GP₁ Identificación del cero como número y como conjunto vacío

Fragmento de Nicole (7 años) y Ana (7 años,) en la actividad "Adivina quién soy" (P_1)

Nicole:

1. *E: ¿Te acuerdas cuando hicimos lo de las bolsitas?*
2. *N: Sí.*
3. *E: Muy bien. ¿Por cuál empezamos?*
4. *N: Por esta.*
5. *E: ¿Cómo está esa bolsa?*
6. *N: Chiquita.*
7. *E: Y además de chiquita. ¿Cómo está? ¿Qué tiene adentro?*
8. *N: Nada.*
9. *E: Entonces ¿Cómo está la bolsa?*
10. *N: ¿Vacía?*
11. *E: Y si no tiene nada y está vacía ¿Cómo la representamos?*
12. *N: Con un número.*

    (…)

13. *E: ¿Con cuál número lo representamos?*
14. *N: Con cero, lo tenemos que pegar.*

De las líneas (1 a 6) Nicole atiende perceptualmente a la pregunta de la entrevistadora, lo que se pudiera entender como un obstáculo perceptual (OB 1); sin embargo, la intervención de la entrevistadora E(7, 9), permite que Nicole centre su atención en el contenido de la bolsa, con ello relaciona la palabra "nada" con "vacía" N(8,10). La respuesta de N(12) a la pregunta de E(11), se considera que es una dotación de sentido (DS2), a través del argumento deductivo (APS2). A la pregunta de E(13) sobre el número que representa la bolsa vacía, se observa que tiene la certeza de que la bolsa vacía se puede representar con un número N(14). Esta respuesta se puede interpretar que Nicole ha generalizado que el cero es el número que representa a la bolsa vacía, pues de inmediato afirma que se tiene que pegar, lo que podemos relacionar con una dotación de sentido (DS2) al etiquetar la bolsa/número cero. Esta acción se puede considerar como *generalización para relacionar el cero como número y como conjunto vacío* GP_1.

Ana:

1. *E: Ahora, ¿qué hay en la bolsa?*
2. *A: Nada.*
3. *E: Entonces si no hay nada ¿Cómo está la bolsa?*
4. *A: Vacía.*
5. *E: ¿Cómo la podemos representar?*
6. *A: Con el cero* [Toma el número cero de los números de foami que tiene a la derecha].
7. *E: ¿Te acuerdas como lo hicimos en el salón cuando lo trabajamos?* [Ana procedió a realizar el proceso de construcción de la bolsa/número de manera natural, y la entrevistadora fue describiendo oralmente las acciones que iba realizando]. *Primero la bolsa…* [La entrevistadora observa como Ana pega la etiqueta del cero afuera de la bolsa] *y encima de la bolsa… ¡Muy bien!*

El desarrollo de Ana es más preciso, en las primeras líneas (1 – 4) se puede entender que usa un argumento inferencial (APS 1) al relacionar la bolsa con las palabras "vacía" y "nada". A la pregunta de E(5), para representar la bolsa vacía, responde con un argumento abductivo (APS 3) al relacionar las palabras *nada* y *vacío* con una noción numérica, es decir el número cero. Esta dotación de sentido (DS2) se confirma en la línea E(7) cuando la entrevistadora le pregunta si recuerda la actividad que hicieron en el salón, no contesta pero empieza con la construcción de la bolsa/número cero y le pega la etiqueta del número cero. Se considera que esta acción es muestra de *generalización de identificación del cero como número y como conjunto vacío* (GP_1).

GP_2 Reconocer que el cero es el único número que pertenece a todos los sucesores

Fragmento de Guillermo (9 años, estrato bajo) en la actividad "¿Podemos construir el que sigue?" (P_2)

1. *E: Construye al sucesor del uno.*
2. *G: Tomo una bolsa…* [Guillermo toma una bolsa y le pega la etiqueta del cero].
3. *E: ¡Muy bien, perfecto!*

4. *G: Ahora tomo otra bolsa… voy a ponerle el uno* [Guillermo toma la etiqueta del número uno y la pega en la nueva bolsa] *y lo tengo que meter…* [toma la bolsa/número del cero y la introduce en la bolsa/número uno].
5. *E: ¡Muy bien! Ahora…*
6. *G: Ahora tengo que hacer otro cero.*
7. *E: Ponle su etiqueta. Entonces, ¿cuántos elementos tienes allí?*
8. *G: Dos.*
9. *E: ¡Muy bien!*
10. *G: Se mete primero el cero y el uno construido.*
11. *E: ¡Muy bien! ¿Dónde lo vas a colocar?*
12. *G: En el dos.*

En este fragmento se puede observar que para Guillermo *el número cero pertenece a todos los sucesores (GP_2)*: Inicia con la construcción de la primera bolsa/número *cero* G(2); continua con la construcción de la bolsa/número uno G(4), en la que introduce la bolsa/número *cero*. En esta construcción se puede apreciar que dota de sentido (DS 2) la construcción de la bolsa/número uno como sucesor del *cero.* La tarea es construir la bolsa/número dos, como sucesor del número uno, por lo que el siguiente paso, explica que debe construir otro *cero* G(6). Como puede observarse, Guillermo tiene claro, *que el número cero pertenece a todos los sucesores (GP 2),* acción que se comprueba en G(10 y 12).

GP_3 Reconocer que el cero es el único número que no es un sucesor

Para esta generalización se consideraron los fragmentos de Ana (7 años) y Wendy (9 años) ambas alumnas de estrato alto, en la actividad “¿Cómo soy?” (P_4).

Ana:

1. *E: ¿Quién es el antecesor del cero?*
2. *A: Nadie. Porque no sigue nadie. Porque antes del cero no hay nadie. Hasta allí ya no hay.*

En este fragmento se puede observar que Ana tiene clara la noción de sucesor A(2), lo que podemos interpretar como una dotación de sentido (DS 2) para acercarse a la noción de que *el número cero no es un sucesor (GP 3),* apoyándose en un argumento (APS 2), justificando que el número cero representa un límite o frontera.

Wendy:

1. *E: ¡Muy bien! El cero ¿De quién es sucesor?*
2. *W: De nadie.*
3. *E: Muy bien. ¿Cuál de estos es el único que no tiene antecesor?*
4. *W: El cero.*
5. *E: ¿Cuál es el único que no es sucesor de nadie?*
6. *W: ¿El dos?*
7. *E: El dos es el sucesor del uno. ¿Quién es el único…?*
8. *W: El cero.*

Se puede observar que en las primeras líneas (1 – 4), para Wendy es clara la relación del sucesor y antecesor del número cero, lo que se puede interpretar como una dotación de sentido (DS 2); pero cuando la entrevistadora E(5) le pregunta por el único número que no es sucesor de nadie, Wendy duda (W6) respondiendo con una pregunta, ante la aclaración de la entrevistadora y su pregunta E(7), le permite dar sentido a la tarea (DS 2) y responde correctamente W(8). Lo que se puede entender como una *generalización para reconocer que el cero es el único número que no es un sucesor (GP_3).*

GP_4 Acercamiento conceptual a la noción de sucesor

Fragmento de Ana (7 años,) en la actividad "¿Cómo soy?"

Ana:

1. *E: Entonces ¿Qué es?*
2. *A: Sucesor, porque es el que siguió, el que hicimos después. El sucesor siempre va a ser los que hicimos después.*
   (…)
3. *E: ¿Cómo sabes que un conjunto es el sucesor de otro? ¿Cómo podremos saber?*
4. *A: Porque vamos a ir sumando.*

Para Ana, el sucesor es "el que sigue" A(2), para ella es claro que es producto de la construcción (GP_4). En la línea A(4) relaciona la noción de sucesor con la acción de sumar, ir agregando, lo que le permite un *acercamiento a la noción de sucesor* (GP_4), apoyándose en el proceso iterativo. De acuerdo con Hamilton & Landin (1961), la iteración en un proceso para la construcción del sucesor

GP_5 Producción de sentido para la construcción del sucesor, usando el proceso recursivo

Fragmento de Guillermo (9 años) y Dulce (9 años) en la actividad "¿Podemos construir el siguiente?" (P_2 y P_3).

1. *E:* *¿Podremos construir el que sigue?* [se refiere al sucesor del cero].
2. *G:* *El uno.*
3. *E:* *¿Cómo le hacemos?*
4. *G:* *Con otro* [Guillermo toma otra bolsa vacía y le pega la etiqueta del cero].
5. *E:* *Muy bien.*
6. *G:* *Poner este adentro…* [Va describiendo sus acciones, tomando otra bolsa vacía más grande e introduciendo la bolsa/número del cero en la nueva bolsa].
7. *E:* *¡Muy bien! ¿Dónde lo vas a meter?*
8. *G:* *En el uno.*

En las primeras líneas G (2) Guillermo reconoce que el número uno es el sucesor del número cero, lo que se puede entender que ha superado la dificultad (A2) *identificar al sucesor de cualquier número*, dando sentido (DS1) al realizar el proceso de manera natural: toma otra bolsa vacía, la etiqueta con el número cero y la introduce en la nueva bolsa/número uno, mostrando que tiene claridad en el uso de la construcción recursiva G(4, 6 y 8). Estas acciones permiten pensar que Guillermo está en un proceso de transición en el uso de un SMS para dotar de sentido *la construcción recursiva de los sucesores* (GP_5).

GP_6 Acercamiento al sentido de ordinalidad: reconocer que todo sucesor contiene a todos los anteriores

Fragmento de Dulce (9 años) en la actividad "¿Podemos construir el siguiente?" (P_2 y P_3)

1. *E: El cero ¡Muy bien! ¿Quién será el sucesor del dos?*
2. *(…)*
3. *E: ¿Lo puedes construir?*
4. *D: Si* [hace un movimiento afirmativo con su cabeza]
5. *E: ¿Cómo lo vas a construir?*

6. *D: Con una bolsa, le ponemos el cero, luego en la bolsa del uno, metemos aquí el cero. Y después le pegamos aquí el uno* [construye la bolsa/número uno]. *Igual que hace rato voy a agarrar una bolsa del dos. Metemos aquí el uno y luego construyo el cero* [construye otra bolsa/número cero].
7. *E: ¿Por qué estas metiendo otro cero?* [Dulce mete en la bolsa/número dos la bolsa/número uno y la bolsa/número cero].
8. *D: Porque tienen que ser dos elementos. Luego agarro la bolsa del tres, la abro y meto aquí la bolsa del dos. Luego agarró la bolsa del cero, pego el cero y lo meto aquí* [construye otra bolsa/número cero y la mete a la nueva bolsa/número tres]. *Luego agarro la bolsa del uno. Luego agarro la bolsa del cero* [toma otra bolsa vacía y la etiqueta con el número cero] *y lo meto aquí* [se refiere a otra bolsa/número uno, la etiqueta con el número uno].
9. *E: ¡Muy bien!*
10. *D: Luego agarro la bolsa del tres y todo esto de aquí lo meto aquí.*
11. *E: Sí.*
12. *D: Luego le pego el tres.*

En la primeras líneas (1 – 3) se le pregunta a Dulce quién es el sucesor del número dos, para ella la pregunta tiene sentido, al hacer un movimiento afirmativo con su cabeza D(4) para responder a la pregunta de E(3). En D(6) se puede observar que Dulce va describiendo oralmente las acciones que va realizando para la construcción de la bolsa/número uno, dotando de sentido el uso (DS2) del proceso recursivo, una vez que la completa, toma otra nueva bolsa y la nombra como el número dos, por lo que introduce la bolsa/número uno en ella y construye otra bolsa/número cero. En este proceso se puede apreciar que usa la relación de reversibilidad, lo que se esquematiza de la siguiente manera (Figura 31)

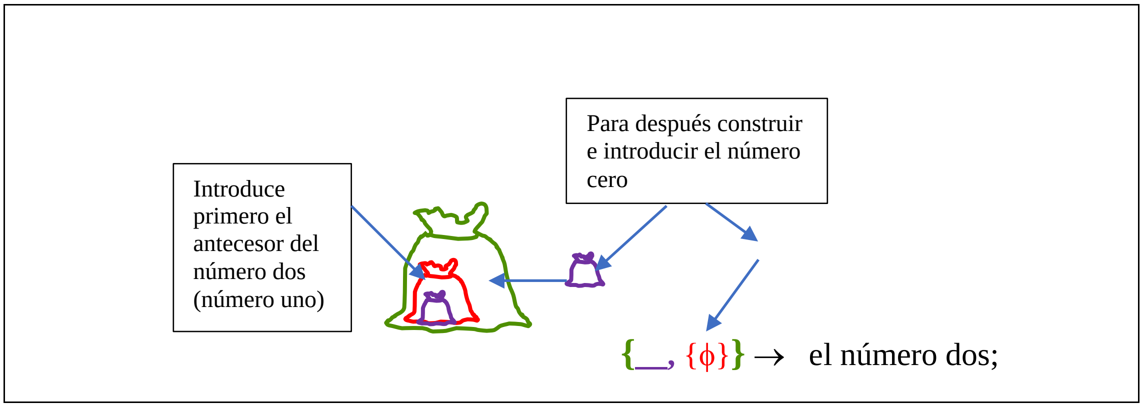


Fig. 31. Representación del uso de la reversibilidad para dotar de sentido al proceso recursivo

La justificación que ofrece en D(8) se puede entender como una inferencia (APS 1) al realizar el mismo proceso recursivo para construir la bolsa/número tres: ya tiene el antecesor del número tres, sigue con la bolsa/número cero y finalmente construye la bolsa número uno. Durante el proceso de construcción va descubriendo y justificando oralmente cada una de las acciones que va realizando D(8, 10 y 12). Finalmente observa que ya tiene todos los elementos y se prepara para introducirlos en la nueva bolsa/número tres, esta acción se puede interpretar como una *generalización de acercamiento al sentido de ordinalidad, al reconocer que todo sucesor contiene a los anteriores* (GP_6), como se puede ver figura 32.

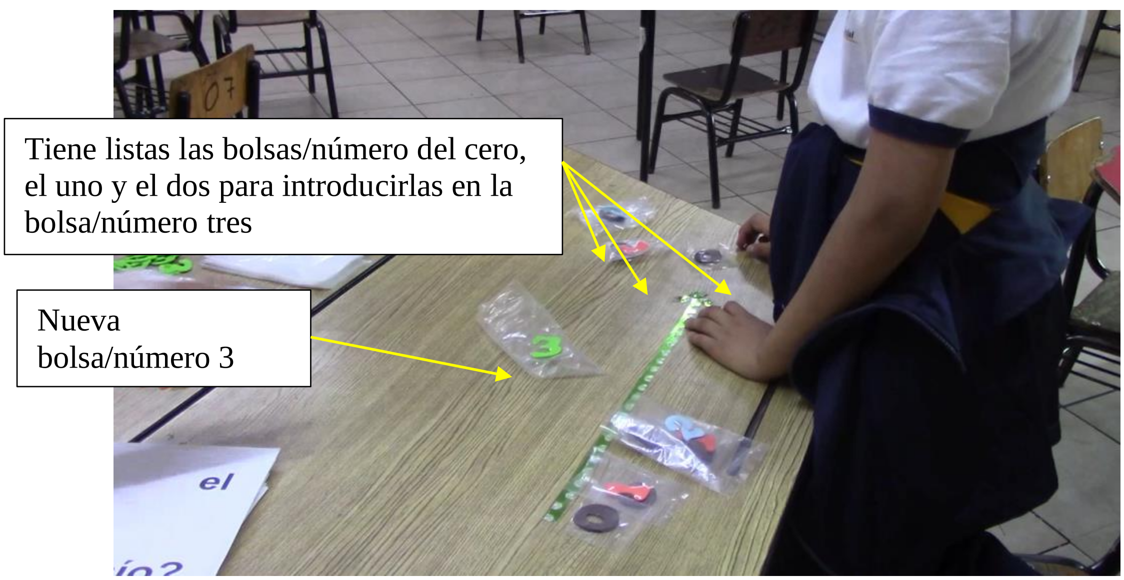


Fig. 32. Dulce prepara las bolsas/número cero, uno y dos para introducirlos en la bolsa/número 3

GP_7 Uso del número cero como elemento neutro en la suma

Fragmento de Ana en la "Resolución de problemas" (P_6) (uso del número cero en la suma)

1. *A: Porque* $32 + 0$ *me da 32. Cero más ocho, ocho. Seis más cero, seis.*
2. *E: Sí.*
3. *A: Cero más quince… quince*
4. *E: ¿Qué pasa entonces con el cero? ¿Qué pasa si sumamos a cualquier número el cero?*
5. *A: Sería que lo que nos están poniendo para sumar más cero sería igual a la misma cantidad que vamos a sumar con cero.*

En este fragmento Ana da cuenta del uso del cero en la suma, que consiste en sumar cero a cualquier cantidad la deja igual A(5), es decir, *usa el número cero como el elemento neutro en la suma* (GP_7), lo que podemos esquematizar: $a + 0 = a$.

GP_8 Uso de las propiedades asociativa y conmutativa en la resolución de problemas aditivos.

Fragmentos de Dulce (9 años) para el uso de la propiedad asociativa y Ana (7 años) para el uso de la propiedad conmutativa.

Dulce:

1. *E: ¿Qué diferencia hay entre esta y esta?* [Entre la primera y la tercera opción].
2. *D: Que en esta tiene esto* [se refiere a las cantidades que están agrupadas de distinta manera por los paréntesis: $(32 + 23) + 21 =$ y $32 + (23 + 21) =$].
3. *E: Paréntesis.*
4. *D: Sí.*
5. *E: ¿Qué significan esos paréntesis?*
6. *D: Que están separados.*

En este fragmento, Dulce le da sentido (DS2) al uso de la propiedad asociativa para la suma (D2), relaciona eficientemente el uso de parentesis para agrupar dos sumandos, en un algoritmo de suma de más de tres sumandos, no importa el orden, reconoce que se pueden sumar de las dos maneras (D6) donde

> El parentesis de la expresión inicial $(a + b) + c$, indica que debemos determinar primero el elemento $(a + b)$ y después encontrar $(a + b) + c$. (…). En la expresión $a + (b + c)$, el paréntesis indica que primero debemos encontrar el elemento $(b + c)$ y después $a + (b + c)$. (Peterson y Hasisaki, 1996, p. 102)

Las actuaciones de los tres alumnos denotan dotación de sentido, para posibilitar la *generalización para usar la propiedad asociaiva en la resolución de problemas aditivos (GP_8).*

Ana:

1. *E: Ahora fíjate ¿qué pasa si yo cambio de lugar esta suma? ¿Qué pasa si yo las cambio? ¿Qué crees que pase?*
2. *A: 110* [Ana da el resultado de 46 + 64].
3. *E: ¿Por qué crees que suceda esto?*
4. *A: Porque sólo cambiamos los números, pero sigue siendo el mismo resultado.*
5. *E: Entonces ¿qué pasa en la suma, si yo cambio los números?*
6. *A: Nada.*

En este fragmento Ana dota de sentido la tarea, al usar eficientemente la propiedad conmutativa para la suma A(2). En A(4) explica que si cambian los sumandos no afecta el resultado, lo que se puede entender como un (APS 2). Deducción que se confirma con la respuesta A(6) que le da a la pregunta de E(5), dando sentido a la generalización (*GP_8) para usar la propiedad conmutativa en la resolución de problemas aditivos.*

6.4.2. Generalización hacia las nociones numéricas y sus operaciones

GNO_1 Identificar el cero como punto origen de la recta

Fragmento de Ana (7 años) en la Actividad "Adivina quién soy" (P_1)

1. *E: Ahora, ¿qué hay en la bolsa?*
2. *A: Nada.*
3. *E: Entonces si no hay nada ¿Cómo está la bolsa?*
4. *A: Vacía.*
5. *E: ¿Cómo la podemos representar?*
6. *A: Con el cero* [Toma el número cero de los números de foami que tiene a la derecha].
7. *E: ¿Te acuerdas como lo hicimos en el salón cuando lo trabajamos?* [Ana procedió a realizar el proceso de construcción de la bolsa/número de manera natural, y la entrevistadora fue describiendo oralmente las acciones que iba realizando Ana]. *Primero la bolsa y encima de la bolsa…* [Ana pega la etiqueta del cero afuera de la bolsa] *¡Muy bien! ¿Dónde lo vas a colocar?*
8. *A: Allí.*
9. *E: ¡Muy bien! ¿Por qué lo pusiste allí?*
10. *A: Porque no podemos empezar con el diez, porque es más grande y el cero como no tiene número va al principio. Porque va del más menor al mayor.*

En este fragmento, Ana construye la bolsa/número cero en las líneas (1 – 6). La entrevistadora E(7) le pregunta "¿Dónde lo vas a colocar?", como respuesta Ana lo coloca en el extremo izquierdo de la semirrecta (GNO_1) y argumenta: "Porque no podemos empezar por el diez, porque es más grande y el cero como no tiene número va al principio", agrega: "…va del más menor al mayor" (A10), dando sentido a la secuencia en orden creciente.

GNO_2 Uso de la transformación del modelo aditivo $A + B = C$, para la resolución de los problemas aditivos

Fragmento de Dulce (7 años) diálogo "Resolución de problemas" (P_6)

1. *E: Ahora observa esto también lo podemos escribir así* $20 - 7 = 13$. *¿Por qué lo podemos escribir así?*
2. *D: Mmmm…* [Se queda pensando].

3. *E: ¿Por qué crees que es igual* $7 + 13 = 20$ *que* $20 - 13 =$*?*
4. *D: Porque a* $20 - 13$ *me da siete.*

En este fragmento la alumna le da sentido a la operación inversa de resta, al dotar de sentido (DS2) que puede obtener el resultado usando la operación inversa de la suma: $\_\_ + 13 = 20$ tranformándola en una resta: $20 - 13 = 7$ (GNO_2).

GNO_3 Relacionar el uso de los signos $(+)$ y $(-)$ con las operaciones aditivas

Fragmento de Ana (7 años) en la actividad "Resolución de problemas" (P_6)

En esta actividad la tarea consiste en escribir las palabras "Falso" o "Verdadero" en las opciones de operaciones que se le proponen para resolver el problema: En el recreo mis amigos y yo jugamos tazos, al final queríamos saber cuántos puntos hicimos entre los tres: Miguel ganó 32 puntos, Lucero 23 puntos y to 21 puntos. ¿De cuántas maneras se puede resolver?

(32 + 23) + 21 = ______________

(30 + 2) – (20 + 3) = ______________

32 + (23 + 21) = ______________

(32 + 21) + 23 = ______________

(20 X 1 + 2) + (30 X 23) = ______________

1. *E: Bien, Ana. Ahora dice: "En el recreo mis amigos y yo jugamos tazos , al final queríamos saber cuántos puntos hicimos entre los tres. Miguel ganó 32 puntos, Lucero 23 puntos y yo 21 puntos. ¿De cuántas maneras se puede resolver?"*
2. *A: Sumando.*

   (…)

3. *E: (…) Ahora fíjate* $(30 + 2) - (20 + 3)$
4. *A: No.*
5. *E: ¿No? ¿Por qué?*
6. *A: Porque aquí dice treinta y dos menos veintitres.*

   (…)

7. *E: Y ahora este* $(20x1 + 2) + (30x23)$ *¿Se puede?*

8. *A: No.*
9. *E: ¿Por qué?*
10. *A: Porque veinte por uno es veinte, más dos sería veintidos.*

En las primeras líneas de este fragmento (1 – 2) Ana sabe que se trata de un problema de suma. En A(4) afirma que la operación $(30 + 2) - (20 + 3)$, no es una opción para resolver el problema. En A(7) se observa tiene un conocimiento aritmético, al realizar la suma de las cantidades que están dentro del paréntesis, relacionadas con un signo de $(+)$ y después le da sentido (DS) al signo $(-)$ que implica la resta de las dos sumas: "porque aquí dice treinta y dos, menos veintitres" (GNO 3), lo que puede se puede entender como un argumento abductivo (APS 3) dotando de sentido (DS 2) este procedimiento algorítmico. La siguiente opción: $(20\ x\ 1 + 2)\ + (30\ x\ 23)$ tampoco es una posibilidad que resuelva el problema A(8). La entrevistadora le pregunta por qué no es una opción de solución al problema E(9) y como respuesta Ana sigue el mismo procedimiento de resolución que en la opción anterior; pero ahora se observa que puede resolver operaciones de multiplicación y suma dentro del primer paréntesis: "Porque veinte por uno es veinte, más dos sería veintidos" A(10). Usa eficientemente los signos $(+)$ y $(-)$ eficientemente para resolver operaciones aditivas dentro de cada paréntesis (GNO_3).

6.5. Resultados de las Entrevistas Clínicas

Es importante considerar que la aplicación de las Entrevistas Clínicas se realizó a finales del ciclo escolar 2017 – 2018, casi un ciclo escolar después.

Aunque se observó que se volvieron a presentar algunas de las dificultades recurrentes de la experimentación del Modelo de Enseñanza, en este espacio personalizado, los niños lograron superarlas en menor tiempo:

A2. Identificar el sucesor y Antecesor de cualquier número.

B1. Reconocer el número cero como conjunto vacío.

B2. Reconocer que el cero es el único número que pertenece a cualquier sucesor.

B3. Reconocer que todo sucesor contiene a sus anteriores.

C1. Uso de la forma $a \cdot 10 + b$, en la resolución de problemas.

Se presentaron dos nuevas dificultades:

A4. Usar la clasificación para seleccionar objetos y formar conjuntos (P_0).

Esta dificultad sólo la presentó la alumna de estrato medio de 4º grado, pues no le daba sentido a los atributos del conjunto, sino al uso cotidiano que se le da a los objetos: “la mariposa se posa en la flor”.

C2. Usar las propiedades asociativa y conmutativa para la suma (P_6).

Esta dificultad está relacionada con su sentido semántico en la resolución de problemas y se presentó en algunos niños entrevistados, que además en algunos reactivos estaba relacionada con el uso de la forma $a \cdot 10 + b$.

Uno de los hallazgos más importantes que se observaron, fue que los niños manifestaron razonamientos tendientes a la generalización aritmética, mismos que por su estructura se agruparon en dos bloques: los que se relacionan directamente con el modelo de Von Neumann y los que se relacionan con las nociones numéricas y sus operaciones.

Es importante señalar que las diferencias de la edad de los niños fue mínima, sólo la alumna Dulce de 4º grado presentó mayores dificultades para darle sentido a las actividades que se le fueron presentando. Las dificultades de aprendizaje de Guillermo no fueron obstáculo para la producción de sentido y significación de las acciones que se trabajaron.

CONSIDERACIONES FINALES Y FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

Cerramos este momento de la investigación recapitulando las ideas principales que guiaron la investigación, resaltando algunas conclusiones que se derivan de la misma junto con las futuras líneas de investigación.

Este trabajo forma parte parte de la línea de investigación “El álgebra y sus aritméticas” dirigida por el Dr. Eugenio Filloy Yagüe, bajo la mirada de la Matemática Educativa donde se sostiene que las dificultades de aprendizaje de los niños no están sólo en la enseñanza ni en los procesos de aprendizaje; están principalmente en la matemática. Por lo que se considera necesario conocer con profundidad la estructura matemática para trasladarla a la enseñanza.

A partir del diagnóstico que se realizó con el marco teórico – metodológico de los MTL nos llevó a entender que las contribuciones de Cantor y Peano han sido importantes para introducir a los infantes a las nociones numéricas en la escuela; pero las dificultades conceptuales siguen presentes en el aprendizaje matemático, así lo muestran las evaluaciones internas (PLANEA) y externas (PISA). Lo que genera una preocupación y un desafío para docentes, diseñadores de currículas, de libros de texto, para potenciar el pensamiento matemático en los alumnos.

Esto nos llevó a proponer que la problemática de la enseñanza de los números naturales incluido el cero, se podría realizar a partir de un acercamiento formal matemático partiendo de las acciones básicas de su construcción.

El diseño del proyecto de investigación se planeó en tres fases:

Fase 1. *Diseño de un Modelo Teórico Local para la construcción de los números naturales*

De la revisión de investigaciones recientes sobre el tema, se retomó el trabajo de Maravilla (2011) “El orden y el conteo en la construcción de los números naturales con el modelo de John von Neumann en niños preescolares” quien llega a la conclusión de que el problema del aprendizaje de las nociones numéricas se debe a las carencias conceptuales de los profesores con respecto a los números naturales. Esto nos llevó a realizar un análisis del modelo formal matemático de Von Neumann bajo la adaptación de Hamilton & Landin (1961), porque usa la *iteración* como operación básica y es la base del proceso *recursivo*. Como resultado de esta primera fase se diseñaron las preguntas, objetivos y el MTL específico.

a) Preguntas que guiaron la investigación

1. ¿Qué elementos del modelo formal en los términos señalados por Hamilton y Landin (1961) se deben considerar para diseñar un Modelo de Enseñanza que se traduzca en actividades concretas, dirigidas a alumnos de los dos primeros ciclos de educación primaria?
2. ¿Qué dificultades se pueden observar cuando los niños trabajan a partir de la construcción de los números naturales con base en ese modelo de enseñanza?
3. ¿Cuál es el efecto del Modelo de Enseñanza con relación a las dificultades observadas en su implementación, una vez transcurrido un periodo aproximado de un curso escolar desde su implementación?

b) Diseño de Objetivos para dar respuesta a estas preguntas

1. Diseñar un Modelo de Enseñanza con base en Von Neumann, dirigido a niños de 6 a 9 años.

2. Experimentar el Modelo de Enseñanza con tres grupos (1º, 2º y 3º grado) de educación primaria para identificar dificultades de aprendizaje.

3. Constatar a través de la entrevista clínica las dificultades observadas durante la experimentación.

c) Diseño del MTL para el aprendizaje de los Números Naturales incluido el cero

Componente formal: se tradujeron los elementos del modelo matemático formal de Von Neumann a principios matemáticos y después a secuencias de actividades con el uso de material manipulativo y se incorporó una semirrecta para representar el orden de linealidad y direccionalidad en la construcción de cada número.

La traducción del modelo formal de Von Neumann a principios matemáticos para la construcción de los números naturales (Hamilton y Landin, 1961), se hizo de la siguiente forma:

P_0 Uso de la noción de conjuntos.

P_1 El número cero es la bolsa vacía.

P_2 Para la representación de conjuntos, las llaves { } se sustituyen con bolsas.

P_3 El sucesor es el siguiente.

P_4 Definición de los números naturales.

P_5 Conteo como correspondencia uno – uno, a partir de los intervalos de la forma [1,n].

P_6 Construcción de las tablas de suma y multiplicación, resolución de operaciones y problemas aritméticos.

Fase 2. *Experimentación del Modelo de Enseñanza y análisis de la experiencia empírica*

El modelo de enseñanza se experimentó con un grupo de 1º, 2º y 3º grado, de tres escuelas primarias distintas. Las dos primeras etapas se aplicaron durante el ciclo escolar 2016 – 2017 y la tercera etapa a inicios del ciclo escolar 2017 – 2018.

Del análisis de la observación con base en el diseño del MTL, se identificaron dificultades recurrentes que presentaron los niños durante el desarrollo de cada una de las actividades, las cuales se relacionaron con los principios matemáticos de la traducción que se hizo del modelo formal, clasificándolas en tres ejes:

a) Pragmático

A1. Identificar el cero como número (P_1).

A2. Identificar al sucesor y antecesor de cualquier número. (P_3)

b) Semántico

B1. Número cero como conjunto vacío (P_1).

B2. Reconocer que el cero es el único número que pertenece a cualquier sucesor (P_2).

B3. Reconocer que todo sucesor contiene a todos los anteriores. (P_3).

B4. Identificar el número cero como el punto origen en la recta.

c) Sintáctico

C.1 Usar las formas $10 + a$ y $a \cdot 10 + b, \ldots$ para representar a los sucesores mayores que diez (P_6).

C.2 Usar la propiedad asociativa para la suma (P_6).

C.3 Usar la forma aditiva $A + B = C$ y sus transformaciones (P_6):

$A + \_\_ = C$

$C - \_\_ = A$

$\_\_ - B = C$

$C - \_\_ = B$

Para explicar estas dificultades se diseñaron las categorías de análisis, con los aportes teóricos del MTL:

Del componente de cognición se identificaron los obstructores (OB) internos y externos al sujeto que les dificultan dotar de significado las acciones realizadas:

1. Obstructores provenientes de los conocimientos previos y de las maneras de como los niños han aprendido las nociones numéricas que les generan dificultades semánticas y sintácticas en la construcción de los números naturales.
2. Obstructores provenientes de los procesos cognitivos, que les genera dificultades para establecer las relaciones de reversibilidad para usar la iteración y recursividad en la construcción del sucesor.

Del componente de comunicación se consideraron los indicadores de las relaciones significantes en la producción de sentido y el desarrollo de procesos de significación con la lógica de uso de los SMS:

Argumentos como Procesos de Significación (APS):

1. Inducción: Habilidad para generalizar el uso de la iteración en la construcción de cada número sucesor, comprobando sus hipótesis con el uso de procesos recursivos.
2. Deducción: Habilidad de razonamiento con la posibilidad de llegar a conclusiones, proponer argumentos que ofrecen criterios de verdad, por ejemplo: cualquier sucesor contiene a todos los anteriores.
3. Abducción: Razonamiento que permite transitar de una hipótesis a otra más abstracta. Desarrollar inferencias hipotéticas y un uso correcto de la lógica de los SMS con sus códigos y reglas, para discriminar supuestos verdaderos o falsos. Por ejemplo, en la construcción de los números naturales, el cero es el único número que no es un sucesor y es el único que está contenido en cualquier número. Si un número no está vacío entonces es un sucesor.

Dotación de Sentido (DS) de los SMS:

1. Dotación de sentidos intermedios: utilización de códigos personales para dotar de sentido a acciones concretas, lo que puede constituir el tránsito de lo concreto a lo abstracto.
2. Dotación de sentidos a las redes de acciones cada vez más abstractas hasta convertirlas en operaciones.

Estas categorías permitieron entender y explicar que las dificultades de aprendizaje que los niños enfrentan cuando se les enseña con un modelo fundamentado en la estructura formal de Von Neumann (centrado en el principio de ordinalidad a partir de la construcción del número cero y el encapsulamiento en el principio de inducción de Peano, para la construcción del *sucesor*, que además usa la iteración en la construcción de los números naturales, a través del proceso recursivo), se deben a obstructores provenientes de conocimientos que han aprendido en el contexto familiar, social y escolar.

También permitió observar que conforme se repetía el proceso recursivo en la construcción de cada número y la edad de los niños aumentaba, estas dificultades se iban superando. Como se puede apreciar en los siguientes párrafos:

> Los alumnos de 1º grado lograron superar las dificultades utilizando los argumentos de inducción, deducción y abducción para significar acciones de la construcción del conjunto vacío como número cero.
>
> Los alumnos de 2º grado dieron sentido al uso de la iteración y el proceso recursivo para la construcción del sucesor en menor tiempo que los niños de primer grado. Fue evidente el desarrollo de procesos de lectura/transformación en sus primeros acercamientos a la noción de cero como conjunto vacío y como único número que es el antecesor de cualquier sucesor. La noción de sucesor les facilitó completar fácilmente la tabla de suma, usando la forma $10 + a$. Sin embargo, la principal dificultad que tuvieron fue el uso de la forma $a \cdot 10 + b$, para representar el producto en cada celda en la tabla de multiplicación.
>
> Los alumnos de 3º grado dotaron de sentido intermedio la noción de sucesor, al introducir la palabra “pasajeros” la cual da cuenta del uso del proceso recursivo para la construcción del sucesor, lo que les permitió usar pragmáticamente el principio de ordinalidad. Al igual que los alumnos de 2º grado, tuvieron dificultades para usar la forma $a \cdot 10 + b$, para representar el producto en cada celda, o bien usarla en la resolución de problemas.

La interacción que se dio en la construcción de los intertextos facilitó la dotación de sentidos intermedios, posibilitando la dotación y producción de sentido, generando una ruptura con los conocimientos numéricos adquiridos en la familia y la escuela, propiciando un pensamiento tendiente a la abstracción.

El análisis cuantitativo complementó el perfil grupal de cada grupo, usando el modelo tridimensional (Rojano, 1985) para representarlo en el plano. En la fase de experimentación del modelo de enseñanza, se pudo observar que los alumnos de 1º grado tuvieron mayor dificultad para identificar el conjunto vacío como el número cero y como primer elemento de la construcción. Se puede decir, que la edad cronológica no fue un obstáculo, pues lograron darle sentido el uso del proceso de iteración y recursividad para la construcción del sucesor.

Los alumnos de 2º grado superaron las dificultades en menor tiempo en comparación con los alumnos de 1º grado, a través de la interacción y los procesos de lectura/transformación, realizaron la producción de sentido y significado en sus primeros acercamientos a la noción de cero como conjunto vacío y como el único número que pertenece a cualquier sucesor. Las principales dificultades estuvieron relacionadas con el uso de la forma $10 + a$ para la suma y la forma $a \cdot 10 + b$, para representar el producto en cada celda de la tabla de multiplicación.

A pesar del bajo desempeño que tuvieron en los ejercicios escritos, los alumnos de 3º grado, se pudo observar en las actividades grupales, que dotaron de sentido la construcción de los primeros números incluyendo el cero, dotando de sentido la noción de sucesor al usar la palabra “pasajeros” para dar cuenta del proceso de recursividad. Las dificultades se manifestaron en el uso de la forma $a \cdot 10 + b$, para representar el producto de cada celda en la multiplicación.

Los resultados del análisis cuantitativo y cualitativo permitieron contar con elementos para la selección de los niños que participaron en la entrevista, seleccionando un alumno representante de cada nivel y grupo.

Fase 3. *Las entrevistas clínicas*

Como resultado del análisis del desempeño de los entrevistados, se volvieron a presentar las dificultades relacionadas con la construcción del sucesor, el número cero como conjunto vacío y que es el único número que pertenece a cualquier sucesor. El uso de la forma $a \cdot 10 + b$, en la resolución de problemas.

Se identificaron nuevas dificultades relacionadas directamente con el Modelo de von Neumann vinculadas a alguno del $P_{i:}$ con la noción de conjuntos, el uso de las propiedades asociativa y conmutativa para la suma.

Otras dificultades nuevas que se presentaron están relacionadas con las nociones numéricas y sus operaciones:

Transformación de la forma $A + B = C$, como $A + \_\_ = C$; $C - \_\_ = A$; $\_\_\_ + B = C$; … en la resolución de problemas.

Por otro lado, como resultado de la aplicación del modelo se pudieron observar indicios de generalización de nociones aritméticas:

a) *Indicios de generalización relacionados con el Modelo de Von Neumann:*
   - Identificación del cero como número y como conjunto vacío.
   - Reconocer que el cero es el único número que no es un sucesor.
   - Acercamiento conceptual a la noción de sucesor.
   - Uso del proceso recursivo para la construcción del sucesor, dando cuenta de su conceptualización al identificar el tamaño de la bolsa/número que se necesitará para el siguiente sucesor.
   - Uso del número cero como elemento neutro en la resolución de problemas aditivos.
   - Uso de las propiedades asociativa y conmutativa en la resolución de operaciones de suma.

b) *Indicios de generalización relacionadas con las nociones numéricas y sus operaciones:*
   - Identificar el cero como punto origen de la recta.
   - Uso de la transformación del modelo aditivo $A + B = C$, para la resolución de problemas aditivos.
   - Relacionar el uso de los $(+)$ y $(-)$ con la resolución de operaciones aditivas.

En conclusión, se puede decir que la implementación de este Modelo de Enseñanza, motivó a los niños a trabajar una manera distinta de conceptualizar a los números, a partir de la construcción del sucesor.

Asimismo podemos señalar que los niños de los primeros grados de educación primaria, tienen un desarrollo cognitivo y comunicativo para darle sentido a actividades que promueven la generalización aritmética.

Podemos decir que la influencia de las maneras en que los niños han adquirido las nociones numéricas en los diferentes entornos de su vida cotidiana, pueden obstruir la comprensión y uso pragmático de la recursividad para reconocer que cada sucesor (número) contiene a todos los sucesores; que el número cero es el primer elemento de la construcción, que es el único que pertenece a todos sus sucesores y que no tiene antecesor.

Pero cuando se trabaja con un modelo de enseñanza con una base formal matemática, como en este caso Von Neumann, esas dificultades se pueden superar, como muestran los resultados de la entrevista; a pesar de haberse realizado la entrevista en el siguiente ciclo escolar al de la implementación de la enseñanza. Los niños con un bajo nivel de competencia (Estrato Bajo) superaron las dificultades que se presentaron durante la experimentación grupal, lo que nos permite proponer la posibilidad de implementar estos modelos desde los primeros grados de educación elemental, brindando un área de oportunidad para establecer las bases un pensamiento matemático que les permita acceder a otros niveles de comprensión. Además, incorporar la componente formal para la conceptualización de los números desde el primer grado de primaria, ha facilitado el desarrollo conceptual antes del uso del simbolísmo, propio del enfoque de la enseñanza de los números naturales como una construcción trivial, memorística y operativa.

Aunque la intención de esta investigación no fue mejorar la enseñanza, la experimentación del modelo diseñado permitió aportar elementos para el análisis de las dificultades de aprendizaje de los números naturales con especial atención al cero como número, lo que abre un abánico de posibilidades para reconceptualizar la enseñanza, fortaleciendo la competencia formal de los docentes en servicio y los que están en formación.

Es por esto que se considera que es necesario recuperar la tradición formal matemática en la enseñanza, para potenciar el pensamiento matemático abstracto, que les permita a los alumnos acceder a niveles superiores de conocimiento matemático.

Posibles futuras líneas de investigación para proponer estudios en relación con:

- La incorporación de la componente Formal Matemática en el currículo de Educación Básica para enriquecer y profundizar la relación entre el pensamiento aritmético y el pensamiento algebraico. Simplificando la práctica del pensamiento aritmético para la construcción de las nociones numéricas; mismas que servirán de base conceptual para que a través del manejo algebraico, se establezcan las relaciones abstractas entre dichas nociones, dando sentido y significado a las expresiones algebraicas.
- El diseño de actividades para los libros de texto para los alumnos, reconceptualizando la enseñanza evitando saltos y rupturas entre el aprendizaje de la aritmética y del álgebra a través de la traducción de los principios matemáticos a actividades concretas, con el uso de material manipulable.
- La incorporación de la componente formal matemática en el currículo de formación docente de las Escuelas Normales y en la formación continua de maestros en servicio, para consolidar la competencia matemática en los profesores en servicio y en los que están en formación, con la finalidad para que la enseñanza promueva el aprendizaje y el desarrollo del pensamiento aritmético y algebraico de los alumnos, a través de la manipulación de expresiones matemáticas cada vez más abstractas.

Referencias Bibliográficas

Aguado. (1940). *Aritmética del Párvulo. Método por imágenes*. Madrid: Ediciones Afrodisio Aguado.

Barthes, R. (1993). *La Aventura semiológic*a. Barcelona-Buenos Aires-Ciudad de México: Paidos.

Bermejo, V. (1990). *El niño y la aritmética. Instrucción y construcción de las primeras nociones aritméticas.* Barcelona-Buenos Aires-Ciudad de México: Paidós.

Boyer, C. (1986). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza.

Carpenter, Moser & Romberg. (1982). *Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Castro, E. Rico, L. Castro, E. (1988). *Números y Operaciones. Fundamentos para una aritmética escolar.* Madrid: Síntesis.

Chamorro, M del C. (Coord.). (2005). *Didáctica de las Matemáticas para la educación infantil.* Madrid: Pearson Educación.

Choate, J. Devaney, R. y Foster, A. (1999). *Iteration: The Tool Kit of Dynamic Activities.* California: Key Curriculum Press, Innovators in Mathematics Education.

Condorcet, N. (1854). *Moyens d'apprendre a compter*. Paris : Imprimeur libraire.

Córdoba, J. M. (2016). *Intertextualidad y producción de sentido en la lectura/transformación de textos algebraicos en la enseñanza/aprendizaje en secundaria*. Tesis doctoral no publicada. Ciudad de México: Cinvestav – IPN.

Deaño, A. y Delval J. (Comps.) (1982). *Jean Piaget, Estudios sobre lógica y psicología*. Madrid: Alianza Editorial.

Dedekind, R. (2014). *¿Qué son y para qué sirven los números?* J. Ferreirós, (Tr. y Ed), Madrid: Alianza Editorial, Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid.

Dehaene, S. (2016). *El cerebro matemático*. Buenos Aires: Siglo XXI editores.

Filloy, E. Rojano T. & Puig L. (2008). *Educational Algebra: A Theoretical and Empirical Approach*. Nueva York: Springer.

Filloy, Y. E. (1999). *Aspectos Teóricos del álgebra educativa*. Ciudad de México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Freudenthal, H. (2002). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers. e-book ISBN 0306-47235X.

Fuenlabrada, I. Block, D. Balbuena, H. Carvajal, A. (1991). *Juega y aprende matemáticas.* Ciudad de México: SEP.

Fuson, K. (1982). An Analysis of Counting-on Solution Procedure in Addition, in Carpenter, Moser & Romberg (Eds.) *Addition and Subtraction: a Cognitive Perspective*. (Pp. 67 – 81). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Galperín, P.Y. (1976). *Introducción a la Psicología: un enfoque dialéctico*. Madrid: Pablo del Río Editor.

García del Cid, L. (2010). *El 0, el 666 y otras bestias numéricas*. Colec. National Geographic. Madrid: EDITEC.

García, B. y Arias, D. (2019). *Así nació el cero, el número que multiplicó el poder de las matemáticas.* https://www.bbvaopenmind.com/ciencia/matematicas/asi-nacio-el-cero-el-numero-que-multiplico-el-poder-de-las-matematicas/

Gómez, B. (1988). *Numeración y Cálculo*. Madrid: Síntesis.

Hamilton, N. & Landin, N. (1961). *Set Theory and The Structure of Arithmetic*. Boston: Allyn and Bacon, Inc.

Ifrah, G. (1988). *Las cifras*. Historia de una gran invención. Madrid: Alianza Editorial.

Imaz, C. Filloy, E. (Autores y Coords.) (1972). *Matemáticas tercer grado*. Ciudad de México: SEP.

Kamii, C. (1989). *Reinventando la Aritmética II*. Madrid: Visor Distribuciones, S. A.

Kamii, C. (1995). *Reinventando la Aritmética III*. Madrid: Visor Distribuciones, S. A.

Maravilla, C. (2011). *El orden y el conteo en la construcción de los números naturales con el modelo de John von Neumann en niños preescolares*. Tesis de maestría no publicada. Ciudad de México: Cinvestav - IPN.

Mosterín, J. (2000). *Los Lógicos*. Madrid: Editorial Espasa Calpe. S. A.

Peano, J. (1979). *Los principios de la aritmética expuestos según un nuevo método*. Tr. e introducción Velarde, Lombraña. J. Colec. Clásicos el basilisco, Madrid: Pentalfa Ediciones Oviedo.

Peirce, Ch. (1881). On the logic number. En William, E. (1999). *From Kant to Hilbert. A source Book in the foundations of mathematics*. Oxford: Bookcraft (Bath) Lid Midsomer Norton. Avon.

Peirce, Ch. (1987). *Obra Lógico Semiótica*. Madrid: Taurus Ediciones.

Peterson, J. Hashisaki, J. (1996). *Teoría de la Artimética*. Ciudad de México: Limusa Noriega.

Piaget, J. (1980). *Problemas de Psicología Genética*. Barcelona – Caracas – Ciudad de México: Ariel quincenal.

Piaget, J. y Inhelder, B. (1984). *Psicología del niño.* Madrid: Morata.

Piaget, J. y Szemiska, A. (1975). *Génesis del número en el niño*. Buenos Aires: Guadalupe.

Polanco, H. (2004). La pregunta en el nivel inicial. Revista electrónica *Actualidades Investigativas en Educación*. Vol. 4, Núm. 2, julio – diciembre. ISSN: Disponible en: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=447/44740213

Puig, L. (1994). Semiótica y matemáticas. *Eutopías 2ª época*. Centro de Semiótica y teoría del espectáculo de la Universitat de València & Asociación Vasca de Semiótica, Vol. 51.

Puig, L. Cerdán, F. (1988). *Problemas Aritméticos Escolares*. Madrid: Síntesis.

Rojano, C. T. (1985). *De la Aritmética al álgebra*. Tesis Doctoral no publicada. Ciudad de México: Cinvestav – IPN.

Rojano, C. T. (1994). *La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investgación y enseñanza.* Revista Enseñanza de las Ciencias, 12 (1), 45-56.

S.E.P. (1991). *Fichero de actividades de Matemáticas. Segundo grado*. Ciudad de México: SEP.

S.E.P. (2011). *Plan de Estudios*. Ciudad de México: SEP.

Smith, E. y Kosslyn, S. (2008). *Procesos cognitivos: modelos y bases neurales*. Madrid: Pearson Educación, S. A.

Talizina, N. (2000). *Manual de Psicología Pedagógica*. San Luis Potosí: Universidad Autónoma de San Luis Potosí.

Talizina, N. Comp. (2001). *La formación de las Habilidades del Pensamiento Matemático.* San Luis Potosí: Universidad Autónoma de San Luis Potosí.

Van Heijenoort. (1967). *From Frege to Gödel: A source Book in Mathematical Logic, 1879 – 1931*. Massachusetts: Harvard University Press.

Von Neumann, J. (1923). On the introduction of transfinite numbers. En J. Van Heijenoort (1967). *From Frege to Gödel. A source book in mathematical logic, 1879 – 1931.* Massachusetts: Harvard, University Press.

William, E. (1999). *A source Book in the foundations of mathematics*. Oxford: Book craft (Bath) Lid Misomer Norton Avon.

Anexos

Anexo Número 1: Publicaciones

- Rodríguez y Filloy. (2017). Dificultades que tienen los niños con la lógica del uso de los SMS en la construcción del número natural en *REVISTA ELECTRONICA AMIUTEM* número V, vol 1 del 2017. ISSN: 2395-955X.

- Rodríguez y Filloy. (2018). Dificultades de uso de la lógica de los SMS involucrados en la construcción del número natural. En Herrera, Carrasco &. Macías, Romero. (Coords). *Matemáticas y sus Aplicaciones 10.* (Cap. 1. Pp. 5 – 31). ISBN: 978-607-525-521-7. México: BUAP, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas.

- Rodríguez, Gómez y Filloy. (2019). Dificultades en el aprendizaje del número cero, en alumnos de escuela elemental. En Marbán, J. M., Arce, M., Maroto, A., Muñoz-Escolano, J. M. y Alsina, Á. (Eds.) (2019). *Investigación en Educación Matemática XXIII*. Valladolid: SEIEM. ISBN: 978-84-09-16492-9 ISSN: 1888-0762 (Pp. 513-522).

- Rodríguez, Filloy & Gómez. (2019). Un Modelo de Enseñanza para la adquisición de las nociones de los números naturales con base en von Neumann. En *Comité Interamericano de Educación Matemática (2020)*. (Eds.) Morales-López Yuri y Ruíz Ángel. Educación Matemática en las Américas 2019. Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM). (Pp. 1968-1976). ISBN: 978-9945-09-413-8.

- Rodríguez, Filloy & Gómez. (2020). Dificultades en la construcción de los números naturales incluyendo el cero, con estudiantes de 6 a 8 años. En *Revista Enseñanza de las ciencias, Vol. 38-3.* https//doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2881. ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174 – 6486.

- Rodríguez, Filloy & Gómez. (2020). Learning difficulties to build zero and one, based on von Neumann. Dificultades de aprendizaje para construir el cero y el uno con base en von Neumann. In A.I. Sacristán, J.C. Cortés-Zavala & P.M. Ruiz-Arias, (Eds.). *Mathematics Education Across Cultures: Proceedings of the 42nd Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Mexico* (pp. 211 – 226). Cinvestav /AMIUTEM / PME-NA.

https:/doi.org/10.51272/pmena.42.2020. ISBN: 978-734805-0-3. DOI: 10.51272/pmena.42.2020.

- Rodríguez, Filloy & Gómez. (2020). De la construcción a la conceptualización de los números naturales en Educación Primaria. *En SEIEM XXIV, Valencia, España.* (Aceptado y en proceso de publicación)

* *Los anexos del 2 al 5 se pueden consultar en: https://cinvestav365-my.sharepoint.com/:w:/g/personal/leticia_rodriguez_cinvestav_mx/EVHLWdQT_RtLpog77YED1LcB5-n167eSe5eujPva8k5MYw?e=4vgD4e).*