Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemática Educativa

Sobre los Procesos de Generalización en Entornos de Construcción Social de Conocimiento: el caso de la serie trigonométrica de Fourier

Tesis que presenta

Fabián Wilfrido Romero Fonseca

Para obtener el Grado de

Doctor en Ciencias

En la especialidad de Matemática Educativa

Directora de la tesis

Dra. Rosa María Farfán Márquez

Ciudad de México, agosto 2020

Dedicatoria

Dedico esta tesis a tres personas muy importante:

A la memoria de mi hermano, Roller Figueroa, que siempre está en mi corazón y pensamientos. Te extraño cada día.

A mi esposa, Natalia Fonseca, por su apoyo incondicional, este logro lo conseguimos juntos. Gracias por tu paciencia y sacrificio para ayudarme a hacer este sueño realidad.

A mi hermoso hijo, Zaid Romero, que llena de felicidad mis días, es una dicha verte crecer.

Agradecimientos

Al tener enfrente la hoja de agradecimientos en blanco lo primero que vino a mi cabeza fue, como lo he sostenido en otras ocasiones, que la culminación de un proyecto de investigación, si bien lleva tu nombre, es producto de un esfuerzo colectivo: familia, amigos, compañeros, profesores, personal administrativo e instituciones. Por tanto, quiero ofrecerles mi más profundo agradecimiento.

Agradezco a mi familia, quienes siempre me han apoyado en cada decisión que he tomado y esperan siempre lo mejor de mí. A mis hermanos Taylor, Gregory, Greivin y Jordy, por ser siempre ejemplo de trabajo y perseverancia. A mi madre, Rosalba, por su constante apoyo y amor incondicional. A mi padre Wilfredo, quien siempre comprendió el valor del estudio y me instó a nunca detenerme.

Agradezco a la Dra. Rosa María Farfán, por su atenta dirección y comentarios, sin duda sus ideas enriquecieron fuertemente mi proceso formativo como investigador. Gracias por propiciar siempre en todos sus estudiantes el trabajo con convicción y generar un ambiente de confianza para poder salir adelante es nuestros proyectos personales y profesionales.

Agradezco, de forma muy especial, a la Dra. Gisela Montiel, que me ha tratado como a otro de sus estudiantes, siempre dispuesta a discutir y reflexionar, cuyos consejos me ayudaron a crecer personal y profesionalmente. Es una persona desborda calidez humana.

Agradezco mucho a mis colegas, amigos y amigas, por que de una u otra forma han contribuido a este trabajo: Eduardo, Alan, Piña, Abraham, Jorge, Dianita, Luis López, Gerardo, Carlitos, Luis Carlos, Melvin, … por mencionar algunos. Muy en especial a mi amiga y colega Verónica Ortiz, pues su apoyo y colaboración fue vital para el desarrollo de mi investigación. Otro agradecimiento especial a mi amigo Rodolfo Fallas pues siempre ha estado ahí, como un hermano, apoyando y dando palabras de aliento.

Para finalizar extiendo mi agradecimiento a esta maravillosa institución como es el Cinvestav-IPN y al personal que siempre está dispuesto a ayudarnos. Un agradecimiento especial para Adriana Parra y Jaqueline Desfassiaux, su labor es admirable.

A todos y todas gracias.

Agradecimientos a Instituciones

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt) por su apoyo económico para la realización de mis estudios.

Fabián Wilfrido Romero Fonseca

Número de becario: 570036

Agradezco a la Universidad de Costa Rica, por todas las facilidades y apoyo para la realización de mis estudios en el extranjero.

Tabla de contenido

Tabla de contenido

Índice de Figuras

Índice de Tablas

Resumen

Esta investigación versa sobre los procesos de generalización en entornos de construcción social del conocimiento matemático, en particular de la Serie Trigonométrica de Fourier (STF). El abordaje responde a dos aproximaciones teóricas, por un lado, la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, a partir de una problematización del saber matemático, nos provee del fundamento teórico para diseñar un entorno de construcción social del conocimiento matemático —la situación de aprendizaje para significar a la STF— e identificar las prácticas —acciones y actividades— en las producciones de los estudiantes; por otro lado, la Teoría de Generalización Operativa nos permite vislumbrar los procesos de generalización a partir del hacer del estudiante.

La Ingeniería Didáctica fungió como metodología que guio el diseño de la situación de aprendizaje. El análisis de las producciones de los estudiantes y de las interacciones entre los partícipes se basó en la consideración de cuestionamientos analíticos producto de las posturas teóricas, para caracterizar las acciones —qué hace y cómo lo hace—, las actividades —estructurante de las acciones—, los elementos de las acciones y las relaciones entre dichos elementos —sobre qué lo hace—, y su simbolización —por medio de qué lo hace—. Todo esto para dar cuenta de los procesos de generalización y las prácticas que subyacen a estos.

El análisis permitió identificar las prácticas —acciones y actividades— que se suscitan al hacer una construcción social de la STF, además logramos identificarlas componentes de los procesos de generalización en el desarrollo de la situación de aprendizaje y dar evidencia del rol de las prácticas en dichos procesos.

Abstract

This research deals with the processes of generalization in environments of social construction of mathematical knowledge, in particular of the Trigonometric Fourier Series (TFS). The approach responds to two theoretical approaches, on the one hand, the Socioepistemological Theory of Mathematics Education, from a problematization of mathematical knowledge, provides us with the theoretical foundation to design an environment of social construction of mathematical knowledge —the learning situation to signify the TFS— and to identify the practices —actions and activities— in the students' productions; on the other hand, the Theory of Operational Generalization allows us to glimpse the processes of generalization from the student's doing.

Didactic Engineering served as a methodology that guided the design of the learning situation. The analysis of the students' productions and of the interactions among the participants was based on the consideration of analytical questions resulting from the theoretical positions, in order to characterize the actions —what does the student do and how does the student do it—, the activities —structuring of the actions—, the elements of the actions and the relations among those elements —what does the student do it about—, and their symbolization —by means of what does the student do—. All this to give an account of the processes of generalization and the practices that underlie them.

The analysis made it possible to identify the practices —actions and activities— that arise when making a social construction of the TFS. We also managed to identify the components of the generalization processes in the development of the learning situation and to give evidence of the role of practices in such processes.

1 Introducción

La Serie Trigonométrica de Fourier (STF) ha sido motivo de múltiples investigaciones en Matemática Educativa. Puntualmente, en el área de educación superior del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN un grupo de investigación se ha preocupado por el estudio de las series y su convergencia (Farfán, 2012), además de colocar a la serie trigonométrica como el estadio más avanzado en desarrollo del pensamiento trigonométrico (Montiel, 2011).

Romero (2016) realizó una sistematización de los resultados de investigación alrededor de la STF hasta la fecha y mostró teóricamente, a partir de una problematización del saber matemático, las prácticas que acompañan la construcción de la STF en su contexto histórico-social y propuso pautas para la escritura de diseños de intervención en el aula.

De dicha investigación se desprende —sin ser su objeto de estudio— la importancia de considerar los procesos de generalización que acompañan la construcción social de la STF, esto pues se requiere una significación a partir del uso de la serie antes de generalizar la representación en serie trigonométrica para una función. Sin embargo, no se ha profundizado en el estudio de los procesos de generalización asociados a la STF; el propósito de esta investigación es abonar a ello.

Con esto en mente, este escrito está organizado de la siguiente manera: El Capítulo 1 titulado *Planteamiento del problema*, realiza una revisión de los antecedentes, la problemática y los objetivos de investigación. En el Capítulo 2 *Revisión bibliográfica*, se realiza una revisión respecto de las investigaciones sobre los procesos de generalización en matemáticas y los marcos teóricos existentes al respecto. En el Capítulo 3 *Marco Teórico*, se consideran los elementos de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) necesarios para la realización de la presente investigación, además de la postura de Generalización Operativa adoptada, ambos como complementos teóricos; el segundo nos dará teóricamente la manera de identificar los procesos de generalización y la primera nos permitirá identificar las prácticas que acompañan dicho proceso. El Capítulo 4 *Metodología*, considera a la Ingeniería Didáctica como guía de la investigación y la descripción de sus fases (1) análisis preliminar; (2) diseño de situación de aprendizaje y análisis a priori; (3)

experimentación, observación y toma de datos; y (4) análisis a posteriori. Esta investigación retoma las primeras dos fases de esta metodología a partir de la investigación de maestría (Romero, 2016) para dar continuidad a las siguientes dos fases. El Capítulo 5 *Resultados del análisis*, muestra una síntesis del análisis de los datos empíricos. Por último, el Capítulo 6 *Conclusiones*, corresponde a las reflexiones finales y respuesta a las preguntas de investigación.

2 Planteamiento del problema

2.1 Antecedentes: la serie trigonométrica de Fourier

Las investigaciones alrededor de la STF, hasta la fecha, dan cuenta de diversos aspectos relacionados con la serie; como su génesis histórica, la hipótesis de periodicidad, las nociones de calor y convergencia, entre otras (Romero y Farfán, 2016). Para esta investigación interesa revisar aquellos resultados de investigación relacionados con la STF y lo que han dicho respecto del proceso de generalización relacionado con la serie, ya sea directa o indirectamente.

Farfán (2012) nos muestra cómo la controversia alrededor del problema de la cuerda vibrante no es la solución en sí, más bien la discusión gira en torno a cuál es la *solución general* del problema y la metodología empleada para encontrarla. Es el afán de generalizar sus resultados lo que provoca una discusión que se extendería por cerca de un siglo y que provoca el cuestionamiento de los fundamentos del Análisis Matemático en la época. Es en el trabajo de Fourier (1822) que se da solución al problema y en el afán de generalizar sus resultados, debido al paradigma positivista imperante en la época y a las exigencias de la comunidad científica, surge lo que hoy en día llamamos *los coeficientes de Fourier*.

Respecto de la noción de estado estacionario en el fenómeno de la propagación del calor, Marmolejo (2006) indica que existe una idea generalizada en el discurso escolar que asegura que el estado estacionario se alcanza cuando las temperaturas no dependan del tiempo, en realidad el estacionario se logra cuando las variaciones de temperatura son infinitamente pequeñas para un tiempo infinitamente grande. El ambiente fenomenológico, juega aquí un papel sumamente importante, pues:

> …nos permite preestablecer las condiciones de frontera, que no solo tienen la función de obtener una solución particular del problema de la transferencia de calor, sino que, además, permiten orientar o bien reglar la intuición del estudiante, lo restringen en su pensamiento… (Marmolejo, 2006, p. 77)

Es decir, las condiciones de frontera, que se obtienen a partir del ambiente fenomenológico, más que permitir hallar soluciones particulares, orientan el pensamiento del estudiante para comprender el comportamiento general del fenómeno de propagación del calor. Lo que nos enfrenta a un proceso inductivo, buscando generalizar los resultados de estudiar casos particulares hacia el comportamiento general del fenómeno.

Para esta generalización, Ulín (1984) indica que es imposible separar el fenómeno físico de su matematización, sin embargo, la escuela no propicia las herramientas físicas necesarias para la comprensión del fenómeno de propagación del calor (Morales, 2010), mucho menos para su matematización.

Respecto de la convergencia de la STF, Farfán (2012) y Albert (1996) evidencian el *principio de permanencia de Leibniz* (Artigue, 1998) como un obstáculo epistemológico que provoca, tanto en estudiantes como profesores, que trasladen las propiedades de las sumas parciales —continuidad y la naturaleza oscilatoria— a la función límite, es decir, sobre-generalizan los resultados del caso finito al caso infinito, lo que amerita atención en cuanto a las generalizaciones que se realizan en el trabajo con la STF.

Aunado a lo anterior, se debe considerar que "las **generalizaciones** que hace Fourier son para intervalos de longitud finita, y no sobre todo $\mathbb{R}$" (Vásquez, 2006, p. 45), pero existe una tendencia generalizada en el discurso matemático escolar alrededor de la serie en el cual predomina la propiedad periódica de la misma en un contexto meramente matemático, lo que incentiva la sobre-generalización de propiedades pues no permite confrontar la idea de que el valor de convergencia de una serie de funciones no tiene, necesariamente, las mismas propiedades de los términos de la serie (Vásquez, 2006).

Respecto de la convergencia de series numéricas, Flores (1992) asegura que para el estudio de la convergencia se debe pasar por cinco etapas, las últimas dos corresponden a la conjeturación y a la generalización. Respecto de la etapa de conjeturación, plantea que es necesario utilizar casos particulares de convergencia de series con el propósito de enunciar los criterios de convergencia. A pesar de que Flores hace referencia a los criterios de convergencia enunciados por Cauchy, cuyo contexto tiene la característica de ser meramente matemático, posterior a los trabajos de Fourier, y sin olvidar que su objeto matemático corresponde a series numéricas; no podemos dejar de evidenciar que, respecto de las series de Fourier, es necesario el estudio de casos particulares de convergencia de series trigonométricas previo al cálculo de los coeficientes de Fourier (Romero, 2016; Farfán y Romero, 2017).

Respecto de la generalización, Flores plantea que esta “consiste en el enunciado y la demostración rigurosa de los nuevos criterios de convergencia” (Flores, 1992, p. 201). Entendiendo *criterio* como una condición suficiente para que la serie sea convergente, según Flores. Es decir, en este sentido *generalizar* corresponde a determinar y demostrar una condición suficiente para que se dé la convergencia. Sin olvidarnos de la diferencia epistemológica entre el trabajo de Cauchy y el de Fourier, surge la cuestión ¿qué es generalizar en el trabajo de Fourier, suponiendo que se debe partir de casos particulares para su significación? Esto es parte de las preocupaciones de esta investigación.

2.2 Definición del problema

Como se mostró en la sección anterior, la STF se ha problematizado en múltiples investigaciones para conocer el funcionamiento del sistema didáctico y las concepciones de estudiantes y profesores acerca de las nociones involucradas con la serie. Considerando los aportes realizados por todas estas investigaciones, Romero (2016) identifica las prácticas que acompañan la construcción social de la STF en su contexto de surgimiento, además sostiene que para construir la serie se requiere como “ambiente de significación el modelaje de un *fenómeno estacionario con variación periódica y acotada*, para el cual la STF se convierta en una herramienta de predicción, donde la acción de interpretar juega un rol fundamental al permitir validar la argumentación matemática en el fenómeno físico” (Romero, 2016, p. 127), esto caracteriza los fenómenos necesarios para hacer evolucionar el pensamiento trigonométrico de la funcionalidad a la formalidad trigonométrica.

Refiriéndose a la noción de variación en el ambiente fenomenológico de la transferencia del calor, Solís señala que:

> …la culminación del manejo de esta noción de variación se da cuando, pudiendo operar con los símbolos de la variación, un individuo es capaz de establecer las leyes que rigen un fenómeno de variación, esto es, el construir un modelo que nos permita del fenómeno hacerlo predecible. (Solís, 1993, p. 2)

Por tanto, es a partir de la matematización del fenómeno de la transferencia del calor que se logra comprender a profundidad su comportamiento y hacerlo predecible, es decir, determinar su estado estacionario —o permanente, en palabras de Fourier—. Entonces, se logra expresar el modelo **general** del fenómeno cuando se matematiza a través de los símbolos de la variación[1], es decir, se logra establecer la ecuación diferencial que modela el fenómeno. Por ejemplo, ante el problema de la cuerda vibrante, la ecuación diferencial dada por D'Alembert, es el modelo general de un fenómeno de variación

$$a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

En dicha ecuación $y(x,t)$ representa la posición —altura— de cada punto de la cuerda en el tiempo y a es una constante que depende de la tensión y la densidad de masa lineal de la cuerda. Luego de establecer el modelo, la discusión gira en torno a cuál es la solución **general** de la ecuación, lo cual no tuvo respuesta contundente por parte de los matemáticos de la época (siglo XVIII). Daniel Bernoulli, en 1755, propone la solución como superposición de ondas, llegando a que la forma inicial de la cuerda (una función arbitraria), se puede representar como serie trigonométrica.

Euler debate fuertemente dicha solución, pues "Bernoulli no basa sus opiniones en ningún argumento matemático, por tanto, no existe prueba de la **generalidad** de que una función sea susceptible de tal representación; aunado a ello, no existen indicaciones de algún método para calcular los coeficientes" (Farfán, 2012, p. 66) [El resaltado es nuestro]. La controversia alrededor del problema de la cuerda vibrante se resuelve con el trabajo de Fourier sobre la propagación del calor, cuya ecuación diferencial es otro ejemplo de la **generalización** del comportamiento de un fenómeno de variación:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{K}{C \cdot D}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right).$$

[1] Para Solís (1993) los símbolos de la variación se refieren a los diferenciales y las derivadas parciales, tales como: Δx, dy, $\frac{\partial T}{\partial z}$, etc.

Donde $v(x, y, z, t)$ representa la temperatura en el punto (x, y, z) de un cuerpo sólido en el instante t y las constantes K, C y D, representan la conductividad térmica, la capacidad calórica específica y la densidad de masa del material, respectivamente. Al hacer uso de esta ecuación para resolver el problema de la propagación del calor en una lámina infinita[2], Fourier, mediante un gran dominio algebraico, logra determinar los coeficientes de una serie trigonométrica que converge a un valor específico. Esto da paso a que **generalice** sus resultados, para lo cual "enuncia y demuestra lo que para los matemáticos más prominentes del siglo XVIII era inaceptable: la posibilidad de representar una función *arbitraria* en serie trigonométrica" (Farfán, 2012, p. 128).

En Romero (2016) se da cuenta del significado geométrico-analítico detrás del razonamiento de Fourier para el cálculo de los coeficientes, además de proponer dos momentos importantes para la construcción social de la STF: el primero busca comprender que series trigonométricas particulares pueden converger a una función, el segundo busca generalizar la representación en serie trigonométrica para un función arbitraria —pero que cumpla las condiciones de Dirichlet—, es decir, determinar los coeficientes de la serie.

> El Momento 2 para la construcción social de la STF surge a partir del Momento 1 ya que, gracias a la necesidad de **generalizar** en matemáticas, se hace natural realizar la pregunta inversa ¿y si se conoce la función a la que se converge, cuál es la serie? Este segundo momento no busca determinar las condiciones para que una función se pueda representar en serie trigonométrica, más bien, supone de antemano que la función se puede representar y se concentra únicamente en el cómo se calculan los coeficientes de la serie. Para esto se evidencia cómo detrás del trabajo de Fourier existe una base de argumentaciones gráficas y geométricas, que permiten significar el cálculo de los coeficientes de Fourier. (Romero, 2016, p. 128)

Por lo tanto, no se pueda dar el segundo momento sin el primero, se requiere una significación al partir del uso de la serie antes de generalizar la representación en serie trigonométrica para una función arbitraria —pero que cumpla las condiciones de Dirichlet—. Es por esto por lo que se plantea como hipótesis que, *para lograr la generalización de la representación de una función en serie trigonométrica de Fourier, se debe primero significar*

[2] El planteamiento de este problema y una explicación detallada se puede encontrar en (Farfán, 2012).

a la serie trigonométrica misma a partir del uso y luego significar el cálculo de sus coeficientes.

Refiriéndonos al cálculo de los coeficientes de Fourier, es decir, al segundo momento de construcción social de la STF, Romero (2016) y Farfán y Romero (2017) muestran que las argumentaciones iniciales dadas por Fourier para el cálculo de los coeficientes de la serie se encuentran en el registro geométrico-analítico —área bajo la curva y ortogonalidad de las funciones trigonométricas— y luego pasa a las argumentaciones algebraicas. Es decir, para el cálculo de los coeficientes, es necesaria la articulación de al menos dos registros de representación, el geométrico-analítico y el algebraico, para validar el segundo en el primero.

Este análisis, que se muestra con mayor profundidad en (Romero, 2016; Romero y Farfán, 2018), permite plantear como hipótesis que *el proceso de generalización asociado al cálculo de los coeficientes de Fourier requiere de una situación de partida meramente matemática, pero sobre una base de significados geométrico-analíticos, donde al simbolizar los elementos de las acciones se permita construir la relación de las fórmulas (las integrales) con el área bajo la curva para significar las primeras a partir de las segundas.*

2.3 Objetivo de la investigación

El objetivo planteado es *caracterizar las prácticas que subyacen a los procesos de generalización que se suscitan cuando se significa la serie trigonométrica de Fourier, a través de una situación de aprendizaje que promueva la construcción social de este conocimiento matemático, en particular el cálculo de sus coeficientes*.

2.4 Preguntas de investigación

1. ¿Cuáles son los componentes, en términos de prácticas, que permiten significar a la serie de Fourier?
2. ¿Cuáles son las componentes del proceso de generalización, cuando se propicia la construcción social de la serie trigonométrica de Fourier?
3. ¿Cuáles son las componentes, en términos de prácticas, que dotan de significado los procesos de generalización asociados a la serie trigonométrica de Fourier?

3 Revisión bibliográfica

Este capítulo presenta de forma sintética una revisión bibliográfica respecto de diversas posturas sobre los procesos de generalización. Esto se hace necesario, pues nuestro problema de investigación versa sobre estos procesos cuando se quiere realizar una construcción social de conocimiento matemático, en particular de la STF.

Acerca de la serie, una revisión completa del estado de la investigación al respecto se encuentra en Romero y Farfán (2016), ahí se evidencia —al igual que en la sección 2.1— que aún no se estudian los procesos de generalización relacionados con la STF. Por otra parte, tampoco encontramos evidencia de investigación relativa a los procesos de generalización y su relación con las prácticas sociales, de esta manera la revisión bibliográfica permite tomar postura respecto de los procesos de generalización.

Dörfler (1991), marca una diferencia entre generalizar y la generalización, para lo primero sostiene que se trata de un proceso social-cognitivo que conduce hacia algo general —o más general— y cuyo producto se refiere a una variedad real o potencial —colección, conjunto, variabilidad— de cierta manera. La manera de referirse a la variedad —cerrada o abierta— está mediada por la forma particular de generalización. Entonces, generalizar según Dörfler (1991) es un proceso psicológico, cuyos productos son las correspondientes construcciones cognitivas, pero este proceso individual siempre está condicionado y mediado socialmente, pues usa y depende de los medios alcanzados y producidos por la sociedad —como el lenguaje—, es decir, las generalizaciones son objeto y medio para pensar y comunicarse.

Para Vygotsky (1986), el origen de todos los conceptos se encuentra en las generalizaciones, ante esto, Radford (2008) asegura que la formación de un concepto requiere de seleccionar algunas características de las entidades particulares y descartar otras; por tanto, se forma una entidad generalizada que no coincide con ninguna de sus instancias. Entonces "la generalización es la detección de una interconexión o interrelación entre lo general y lo individual. […] Lo general contiene, potencialmente, toda la diversidad de lo individual" (Davydov, 1990, p. 138).

En estas generalizaciones, el "observar las diferencias y similitudes que conducen al concepto […] es algo que ocurre en las actividades sociales subsumidas en las tradiciones culturales que transmiten ideas sobre lo mismo y lo diferente" (Radford, 2008, p. 48), es decir, tal como se indicó anteriormente, la generalización está mediada social y culturalmente[1].

Las generalizaciones no solo se dan en la formación de conceptos, según Swafford y Langrall (2000), generalizar una situación problema, relativa a generalización de patrones algebraicos, es identificar los operadores y la secuencia de operaciones que son comunes entre casos específicos y extenderlos al caso general, esta generalización puede ser presentada verbal o simbólicamente. Es decir, en este caso lo que se busca generalizar no es un concepto, sino las operaciones que se pueden aplicar en ciertas situaciones problema (Swafford y Langrall, 2000).

Krutetskii (como se cita en Čadež y Kolar, 2015) distingue dos aspectos de la generalización: ver lo general en lo particular o ver lo particular en lo general. Estos dos aspectos permiten clasificar las generalizaciones de los alumnos. Para crear un esquema de «generalización», los estudiantes primero deben resolver un problema, generalmente observando un caso particular, creando nuevos casos, observando el patrón y generalizando. Al abordar los problemas relacionados, los estudiantes pueden resolverlos aplicando sus esquemas, es decir, viendo lo particular en lo general. "Cuando los estudiantes usan el caso general y tratan de incorporarlo en un caso específico, activan sus esquemas para asimilar o acomodar nuevas situaciones problemáticas" (Steele y Johanning, 2004, p. 68).

Desde el punto de vista matemático, el dicho "ver lo general en lo particular" puede entenderse como razonamiento inductivo, que es una forma muy prominente de pensamiento científico, que proporciona verdades matemáticamente válidas sobre la base de casos concretos. Polya (1967) indica que el razonamiento inductivo es un método de detección de

[1] Si bien, desde nuestra postura socioepistemológica, estamos de acuerdo con la afirmación de Radford, es difícil apreciar en sus investigaciones esta influencia cultural sobre la construcción de la generalidad. Quizá se deba a que los objetos matemáticos involucrados y sus escenarios están dentro de la escuela, donde usualmente se opaca la influencia cultural en el hacer matemáticas.

propiedades de fenómenos y de encontrar regularidades de una manera lógica. El segundo aspecto de la generalización, “ver lo particular en lo general”, se refiere al razonamiento deductivo. Es el proceso de inferir conclusiones a partir de la información conocida —premisas— basada en reglas de lógica formal, por medio de las cuales las conclusiones son necesariamente extraídas de la información dada, y no hay necesidad de validarlas por experimentos (Ayalon y Even, 2008). Según Davydov (1990), la abstracción y la generalización subyacen en la formación de un concepto teórico, que es un método de pasar de la esencia a los fenómenos. La generalización teórica consiste principalmente en derivar lo particular de lo universal.

Muchos investigadores han desarrollado diferentes etapas de razonamiento inductivo (Cañadas y Castro, 2007; Reid, 2002; Polya, 1967), pero no todos han considerado el momento creativo en el proceso de generalización o la llamada generalización abductiva, propuesta por Peirce (como se cita en Rivera y Rossi-Becker, 2007) y es ampliamente utilizado en la investigación actual.

Según Peirce, las deducciones teóricas requieren de realizar experimentos sobre el diagrama original construido a partir de las premisas del teorema, debe manipular el diagrama —añadiendo nuevos elementos— porque la demostración no surge, necesariamente, de forma inmediata a partir del diagrama original, para elegir estos elementos el matemático se basa en su sagacidad (Marietti, 2005). Por lo que no basta con pensar en términos generales, según Peirce (como se cita en Rivera y Rossi-Becker, 2007) es necesario que algo más se haga.

> Aunque la presencia del diagrama es particularmente evidente en la geometría, todo razonamiento deductivo es, según Peirce, diagramático, lo que significa que la observación juega un papel en el conjunto de las matemáticas. Por muy fácil que sea, toda inferencia deductiva depende de la observación. (Marietti, 2005, p. 36)

Radford (2008) utiliza el término razonamiento abductivo. También distingue entre generalizaciones de patrones algebraicos y generalizaciones aritméticas. “La generalización algebraica se refiere a la capacidad de comprender la comunalidad observada en algunos detalles, extendiendo este carácter común a todos los términos subsiguientes y siendo capaz de usar la comunalidad para proporcionar una expresión directa de cualquier término de la secuencia (deducción del esquema o regla)” (p. 84). Si en la generalización falta el paso de formar una regla algebraica, entonces hablamos de generalización aritmética.

Radford (2008) define el paso de notar una comunidad y generalizarla al resto de los términos de la secuencia como una instancia de razonamiento abductivo. El razonamiento inductivo se relaciona con la fase abductiva definida como una fase de pruebas y confirmación de la viabilidad de una forma abducida (Rivera y Rossi-Becker, 2007). Hay dos tipos de abducción: la abducción basada en modelos y la manipulación (Magnani, 2005). Un tipo de abducción es basado en modelos —figural— cuando los estudiantes usan símbolos algebraicos para articular una propiedad importante sobre la secuencia de señales figurales. La abducción manipulativa —numérica—, por otra parte, se desarrolla principalmente sobre la base del procedimiento matemático sin el beneficio de una explicación conceptual (Magnani, 2005). Rivera y Rossi-Becker (2007) concluyen que los participantes en sus investigaciones que abdujeron numéricamente en sus situaciones de resolución de problemas desarrollaron más estrategias que los que abdujeron figuralmente; pero este último grupo era más capaz que el primero para justificar la viabilidad de las formas abducidas. Otra relación interesante entre la abducción y la inducción en la generalización se observó en la investigación de Rivera y Rossi-Becker (2007): la formalización progresiva de las formas. Los investigadores manifestaron que en la fase abductiva los participantes descubrieron y construyeron una forma viable *R* no sobre la base de los elementos disponibles de toda la clase, sino solo sobre la base de uno o dos casos. En la fase inductiva, cuando los participantes probaron y confirmaron la viabilidad *R* en varios casos más, se generalizó *R*, lo que se supondría que se mantendría para toda la clase (Rivera y Rossi-Becker, 2007). Radford (2000; 2008) reporta que muchos estudiantes novatos logran notar la coincidencia en casos particulares e incluso generalizarlo para el resto de los términos. En otras palabras, están teniendo éxito en el razonamiento abductivo, pero fracasan en la formación de una regla algebraica significativa, que es, según Radford (2008), crucial para definir una generalización como algo algebraico.

Pero formar una regla no significa necesariamente que se alcance la etapa de generalización algebraica. Hay otro tipo de situación a tratar cuando las abducciones no resultan de la inferencia de una comunalidad entre los casos particulares, pero son simples conjeturas. En ese caso, las abducciones conducen a adivinar la expresión del caso general. Aunque se forme una regla general, no es basado en el pensamiento algebraico sino en adivinar. Radford (2008) llama a este tipo de generalización como inducción ingenua. Rossi-Becker y Rivera (2006) también reportan sobre las dificultades de los estudiantes para producir una regla significativa. Por lo general emplean el ensayo-error y las diferencias finitas como estrategias para desarrollar relaciones de recurrencia con apenas un sentido de lo que representa el coeficiente en el patrón lineal. Por lo tanto, esto no es una inducción algebraica, sino una inducción ingenua.

Otra clasificación de las situaciones de generalización es propuesta por Krygowska (como se cita en Ciosek, 2012), quien distingue entre los siguientes tipos de generalización:

- Generalización a través de la inducción: primero se establece la regla $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$... y se nota que los resultados pueden obtenerse al aplicar una regla general $f(n)$ para n natural, que es una conjetura solamente.
- Generalización a través de la generalización del razonamiento: se nota que el razonamiento realizado en un solo caso seguirá siendo correcto en un escenario diferente o serán necesarias solo modificaciones menores para obtener un resultado más general. Por ejemplo, al observar el perímetro del cuadrado para casos particulares, se puede tomar conciencia de la estructura del perímetro del cuadrado para un caso general y, en consecuencia, también para el perímetro de un rectángulo.
- Generalización a través de la unificación de casos específicos: un conjunto de enunciados, cada uno referente a un caso de un conjunto, puede ser sustituido por una declaración general, siendo los originales sus casos especiales. Por ejemplo, dados los lados de un triángulo a, b y c, donde c es el lado mayor, se cumplen los siguientes teoremas:

Si $a^2 + b^2 = c^2$, entonces el triángulo es rectángulo.	Si $a^2 + b^2 > c^2$, entonces el triángulo es acutángulo.	Si $a^2 + b^2 < c^2$, entonces el triángulo es obtusángulo.

Estos casos se pueden generalizar a través de la ley de cosenos.

- Generalización a través de la percepción de la recurrencia: similar a la generalización por inducción, pero en este caso la fórmula $f(2)$ se obtiene usando $f(1)$, $f(3)$ usando $f(2)$...; por lo tanto, el resultado es la regla de recurrencia $f(n)$.

Se observan algunas relaciones entre esta clasificación y la definición de Davydov (1990) de dos tipos de generalización. Describe un tipo de generalización como aquel que implica descubrir a través del análisis de la forma simple y universal de algún sistema su relación genéticamente original y esencial, mientras que el otro tipo de generalización se refiere a la detección de una forma simple y universal en la que ciertos fenómenos complejos están pasando constantemente, y a los que se reducen. El primer tipo podría estar relacionado con la generalización de Krygowska a través del razonamiento y el segundo con la generalización de Krygowska a través de la unificación de casos específicos. Este caso se relaciona también con lo que es, según Davydov (1990), típico del pensamiento empírico: analizar varios casos y encontrar propiedades compartidas. Čadež y Kollar (2015) establecen una relación entre el primer y el tercer tipo de generalización de Krygowska: la relación entre los casos específicos y una regla general: generalizar a través de la inducción especifica la generalización a través de la unificación de casos específicos cuando los casos específicos se refieren a números naturales. Así, afirman que la generalización a través de la unificación de casos específicos es una generalización de generalizaciones. El último de los casos de Krygowska, que se generaliza a través de la percepción de la recurrencia, podría estar relacionado también con la inducción ingenua (Radford, 2000), ya que la regla general se adivina como la forma más probable de dar sentido al cambio de uno a otro caso (Čadež y Kolar, 2015).

Dörfler (1991) hace una crítica a la generalización por comparación[2], pues ésta es un medio para seleccionar aquellos rasgos comunes a varios objetos con el propósito de abstraer y posteriormente generalizar.

> La comparación y la búsqueda de rasgos comunes entre diferentes objetos o situaciones es claramente un tipo de actividad, pero esta actividad no está en modo alguno relacionada con la estructura común y general o con la propiedad que se busca, […] en principio la comparación será neutral con respecto al concepto a construir. (Dörfler, 1991, p. 66) [La traducción es nuestra].

Esto quiere decir que la generalización y la abstracción empíricas no son suficientes para la constitución de lo común como general y como una entidad de pensamiento en sí misma, pero sí pueden ser parte o punto de partida, para la *generalización operativa* propuesta por el mismo Dörfler (1991), quien establece el siguiente modelo de generalización, dependiendo del centro de interés:

- Generalización de invariantes de acciones: se desarrolla un nuevo objeto matemático cuya significación reside en los invariantes[3], separando los invariantes de los "portadores" originales, adquiriendo independencia y forma de generalidad abstraída. Aquí la abstracción es el medio para desarrollar una *generalización intencional*.
- Generalización de condiciones para las acciones: para llevar a cabo acciones deben existir elementos adecuados que cumplan ciertas condiciones. Estas condiciones son cualidades de los elementos de las acciones y relaciones entre dichos elementos. De igual forma se aplica un proceso de generalización a dichas condiciones.
- Generalización de resultados de acciones: Una acción o sistema de acciones tienen un resultado, que puede ser un objeto con ciertas cualidades o una relación. Los objetos son productos de acciones, y en aquellos casos importantes para las matemáticas esas cualidades son realizaciones de sistemas de relaciones. El proceso

[2] Según Dörfler (1991), la generalización por comparación o empírica es el proceso de hallar una cualidad o propiedad común entre varios/muchos objetos o situaciones; esto da paso a la abstracción empírica o Aristotélica, donde dicha cualidad común (o un sistema de tales cualidades) es aislada mentalmente y separada de los objetos o situaciones; y se constituye (mental y epistemológicamente) como una propiedad general (un concepto) que puede ser poseída o no por los objetos o situaciones.

[3] La propuesta de Dörfler se expone con detalle en el capítulo 4.

de generalización puede partir de este sistema de relaciones que es abstraído a través del reflejo de la acción y sus resultados. El resultado es una generalidad que puede ser entendida como un modelo para el resultado o producto de la acción.

Considerando ahora las definiciones de generalización dadas por Radford (2000) y Krygowska (como se cita en Ciosek, 2012). Los tipos de generalización de Radford representan diferentes niveles de pensamiento algebraico logrados resolviendo un problema de generalización de patrones. La inducción ingenua y la generalización aritmética no dudan en un modo menos avanzado de pensamiento algebraico en comparación con la generalización algebraica; ambos reflejan algunas deficiencias en el esquema de resolución de problemas de los estudiantes. Pero la definición de generalización de Krygowska no se refiere a niveles de pensamiento algebraico y desarrollo esquemático, sino a procedimientos matemáticos que pueden ser utilizados para resolver un problema de generalización (Čadež y Kolar, 2015). Al resolver un problema matemático, un estudiante puede elegir entre estos procedimientos y se pueden lograr diferentes niveles de generalización.

Según Čadež y Kollar (2015), el éxito del proceso de generalización deriva de la elección adecuada de un procedimiento y del desarrollo del esquema de resolución de problemas del estudiante, el procedimiento de generalización depende en muchos casos de la naturaleza del problema o, de manera más puntual, a la forma en que el individuo percibe el problema: con contexto o sin contexto. Concluyen además que la generalización a través del razonamiento requiere de una fuerte relación entre el problema a resolver y el contexto matemático subyacente. Kedrov (como se cita en Davydov, 1990) dice que la generalización no se logra mediante la simple comparación de atributos en objetos particulares, que es típica para la generalización inductiva, sino a través del análisis de la esencia de objetos y fenómenos estudiados, que, según Čadež y Kollar (2015), corresponde a la generalización a través del razonamiento.

Por otra parte, los problemas que deben ser resueltos mediante la generalización a través de la inducción y sobre todo la generalización a través de la percepción de recurrencia llevan a utilizar la inducción ingenua. Estos dos tipos de generalizaciones se basan simplemente en operar con casos particulares que a menudo no poseen un significado para quien los resuelve, sino que simplemente busca una relación entre los casos (Čadež y Kolar, 2015).

Para finalizar, la revisión bibliográfica realizada muestra que las investigaciones acerca de los procesos de generalización, en su mayoría, atienden solamente objetos de la geometría y del álgebra, en el segundo caso particularmente sobre generalización de patrones. Sin embargo, dadas las diferencias epistemológicas entre esos objetos y los objetos del cálculo, nos es difícil considerar alguno de estos referentes como punto de partida para trabajar con la STF. A pesar de esto, logramos identificar en la postura de Dörfler (1991) un punto de partida en común, considerar la generalización como un proceso socio-cognitivo y el rol de la acción —en el sentido de Piaget— como punto de partida del proceso, nos permitió adoptar su postura como complemento teórico para el desarrollo de la investigación.

4 Marco Teórico

En este capítulo se exponen los elementos teóricos necesarios para el desarrollo de la investigación, estos serán nuestros lentes para analizar los datos y dar respuesta a las preguntas de investigación. Dado nuestro objeto de estudio, los procesos de generalización en entornos de construcción social de conocimiento matemático, nos vimos obligados a considerar dos posicionamientos teóricos distintos. Por un lado, la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, cuyos elementos nos permiten analizar el rol de la práctica en diversidad de contextos y además nos provee de los elementos necesario para el diseño de una situación de aprendizaje —entorno de construcción social del conocimiento—. Por el otro lado, la Generalización Operativa nos provee de los elementos necesarios para identificar los procesos de generalización que se suscitan en el desarrollo de la situación de aprendizaje.

Es importante recalcar que estos dos enfoques teóricos trabajan de forma complementaria —no articulada—, cada uno es responsable de una parte del problema de investigación. A continuación, se exponen los elementos teóricos que consideramos en cada caso.

4.1 Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa

La TSME analiza los fenómenos relacionados con la construcción social del conocimiento matemático (CSCM) y su difusión institucional. Bajo este enfoque se hace legítima “toda forma de saber, sea este popular, técnico o culto, pues en su conjunto constituyen la sabiduría humana” (Cantoral, 2013, p. 26), es decir, desde la TSME se toman en cuenta todas las formas de saber[1] y no solamente el saber sabio, lo que permite asegurar que en toda actividad humana se puede construir conocimiento matemático, o dicho de otra forma, las matemáticas son parte de la cultura de la sociedad.

[1] Se hace diferencia entre conocimiento y saber, entendiéndose el conocimiento como la información sin uso, y el saber como la acción intencional de utilizar el conocimiento para resolver una situación problemática (conocimiento en uso).

Racionalidad contextualizada	*Relativismo epistemológico*	*Resignificación progresiva*	*Normativa de la práctica social*
• La relación del sujeto al saber es una función del contexto, es decir, la racionalidad del sujeto depende del contexto en el que este se encuentre en un momento y lugar determinado; por lo que la construcción del conocimiento es un producto sociocultural.	• El saber es una multitud de saberes (popular, técnico y culto), con valores de verdad relativos a quién y dónde lo experimente, lo que provoca que se acepte la diversidad de opiniones ante los mismos hechos, ya que al no haber una verdad única, se precisa comprender el porqué de las opiniones de cada sujeto, esto es, el salto del error al obstáculo.	• Una vez que el conocimiento es puesto en uso, su validez será relativa a un entorno y de este emergió su construcción y sus respectivas argumentaciones, en el momento en que ese saber evoluciona y de su interacción con diversos contextos, se resignificarán estos saberes enriqueciéndose con variantes significativas.	• Se asume que las prácticas sociales son la base y orientación en los procesos de construcción de conocimiento. La práctica social tiene tres funciones: *normativa* (de la actividad humana), *identitaria* (dota de identidad cultural al individuo o al grupo), *reflexiva-discursiva* (construye argumentaciones de acción) y *pragmática* (regula los comportamientos de los individuos).

Figura 4-1. Principios de la Socioepistemología (Cantoral, 2013).

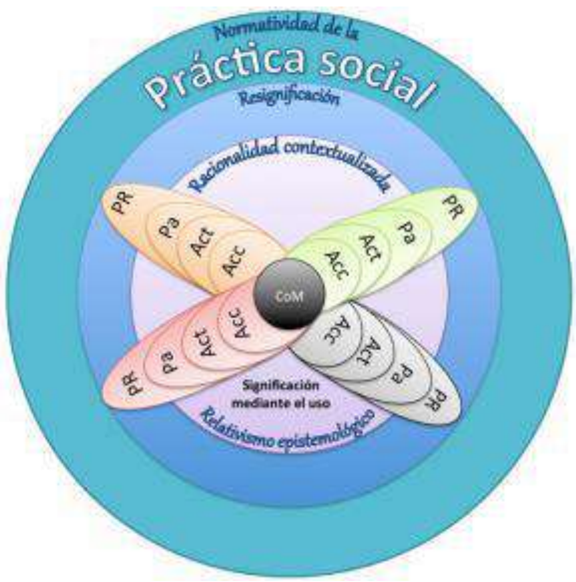
Las investigaciones enmarcadas en la TSME descansan en cuatro principios fundamentales, inherentes a la teoría —Figura 4-1—. Los cuales, sin formar una secuencia lineal, explican la constitución del saber a partir de su construcción social, esto a través de una secuencia que permite explicar empírica y teóricamente el proceso de construcción social del sujeto (individual, colectivo o histórico): se pasa de la *acción*, directa del sujeto ante el medio en tres acepciones (material o *entorno*, organizacional o *contexto*, social o *normativo*), esto —las acciones— se organiza como una *actividad* humana (situada socioculturalmente), para perfilar una *práctica socialmente compartida* (interacción deliberada del sujeto y regulada por el contexto); dicha práctica cae bajo la regulación de una *práctica de referencia* que es la expresión material e ideológica de un paradigma (ideológico, disciplinar y cultural), las que a su vez son normadas mediante sus cuatro funciones por la *práctica social* (normativa, identitaria, pragmática y discursiva-reflexiva).

Figura 4-2. Modelo de anidación de prácticas (Cantoral, 2013, p. 334).

En este sentido, la acción se concibe, desde la epistemología genética de Piaget, como la intervención activa del sujeto que recae sobre objetos del mundo o sobre otras acciones realizadas por el mismo sujeto a fin de adaptarse al entorno y organizarse internamente. Desde el punto de vista sociocultural, Vygotsky propone que a través de la *actividad humana* se da el proceso de formación de las funciones psicológicas superiores, pero no de manera individual, sino en la interacción o cooperación social, lo que amplifica las capacidades intelectuales de cada individuo.

> Si la *acción* como noción de partida, está en la base de los fenómenos adaptativos funcionales del desarrollo de la inteligencia [...] a fin de adaptarse al entorno y organizarse internamente; entonces, la *actividad* como concepto teórico es el elemento vinculante del desarrollo humano al desarrollo cultural y consiste en la *actividad práctica e instrumental mediada* (no individual, sino en cooperación social) *para la formación de funciones psicológicas superiores*, a fin de modificar la naturaleza. (Cantoral, 2013, p. 335)

Reyes-Gasperini (2016) hace evidente la articulación entre los principios de la TSME y el esquema de prácticas anidadas. La Figura 4-3 se puede leer en dos direcciones, de adentro hacia afuera y de afuera hacia adentro. En primer caso el conocimiento matemático se *significa mediante el uso* a través de acciones, actividades y prácticas socialmente compartidas. La *racionalidad contextualizada* desde la cual se argumente provocará que, en diferentes prácticas de referencia, existan diferentes significaciones que provean valor de uso al conocimiento matemático. El *relativismo epistemológico* dotará de validez a las diferentes significaciones con base en la coherencia de las argumentaciones. Las argumentaciones de construcción provenientes de las distintas prácticas de referencia y del cambio de marcos de referencia basado en usos provocará que el conocimiento se *resignifique*. Los invariantes en las construcciones y en las argumentaciones, sin importar la práctica de referencia, da evidencia de que la práctica social *norma* la construcción del conocimiento matemático.



PR: Práctica de referencia.
Pa: Práctica Socialmente compartida.
Act: Actividad.
Acc: Acción.
CoM: Conocimiento matemático.

Figura 4-3. Modelo dinámico de la construcción social del conocimiento matemático (Reyes-Gasperini, 2016, p. 35).

La lectura de la Figura 4-3 hacia adentro, muestra que la *práctica social* viene a articular *acción* y *actividad*, pues rige de forma normada dicha articulación (principio normativo de la práctica social). La mediación entre esta normativa y la actividad práctica en sí, la brinda la *práctica de referencia*, pues es la que provee el contexto temporal y situacional necesario para la resignificación (principio de resignificación progresiva). La *práctica socialmente compartida* (o simplemente, la *práctica*) en tanto reiteración eficaz, intencional y controlada de la articulación acción-actividad, queda organizada por paradigmas o *prácticas de referencia*. Estas a su vez quedan normadas por la *práctica social*, el emergente regulatorio que posibilitará el tránsito del conocimiento al saber.

4.1.1 La situación de aprendizaje

Desde la TSME se sostiene que es el que aprende quien debe construir su propio conocimiento haciendo funcionar al saber, es decir, ante el problema planteado en una *situación de aprendizaje*, el saber es un medio para la toma de decisiones. Pero ¿cómo asegurar que se genera el ambiente propicio para esto?

Según Cantoral (2013) no siempre se está en situación de aprender. El conflicto cognitivo es una manera de propiciarlo, proponiendo una situación problema que enfrente al sujeto a un escenario en el que deba poner en juego los saberes que se requieren a partir de un desequilibrio cognitivo (Piaget, 2009). Sin embargo, esta postura es compartida por diferentes enfoques teóricos en nuestra disciplina, entonces ¿qué es lo que caracteriza a una situación de aprendizaje socioepistemológica? Según Reyes-Gasperini (2016), la situación de aprendizaje debe favorecer una evolución pragmática del conocimiento matemático (saber matemático escolar), poniendo en juego el saber matemático mediante el contexto de significancia —Figura 4-4—.

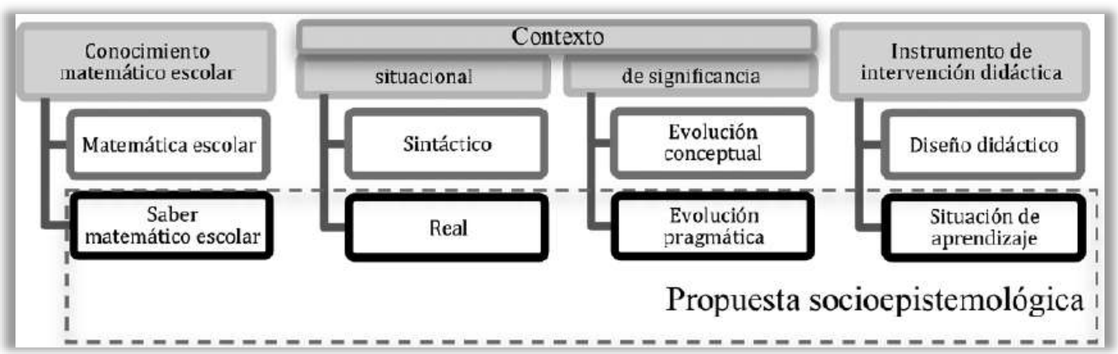


Figura 4-4. Situación de aprendizaje (Reyes-Gasperini, 2016, p. 61).

Se hace una diferencia entre el contexto situacional y el contexto de significancia. El primero se refiere a la manera de contextualizar la tarea, que puede ser a través de un entorno o medio conocido, pero la estructura matemática no se ve afectada al prescindir de él o alterarlo —contexto sintáctico—, otra forma de contextualizar es con un escenario intrínseco a la tarea que suscita una situación que requiere del saber matemático para dar respuesta, dotando al conocimiento matemático de significado a través de su uso —contexto real—. Por su parte, el contexto de significancia es la manera de contextualizar la construcción del conocimiento matemático, que puede ser mediante la algoritmia o consecuencia de un cambio de representación —evolución conceptual—, entre otros; o fruto de las prácticas y la significación mediante el uso —evolución pragmática— (Reyes-Gasperini, 2016).

Esta evolución pragmática antecede y acompaña a la evolución conceptual del conocimiento matemático —matemática escolar—. Por tanto, la situación de aprendizaje se convierte en una herramienta didáctica para la construcción social del conocimiento matemático, en tanto promueve la significación de los objetos matemáticos mediante el uso —un entorno de construcción social de conocimiento matemático—.

4.2 Generalización Operativa

Este marco teórico desarrollado por Dörfler (1991), propone que, en el proceso de generalización, las acciones —en el sentido de Piaget— son el punto de partida para la construcción de conocimiento matemático. En él, una acción se debe entender en sentido tan amplio como sea necesario, incluso las más puras operaciones matemáticas deben considerarse como acciones, debido al carácter cíclico del proceso de generalización. Pues en la formación de un concepto matemático, en un nivel elemental, una acción puede consistir en agrupar objetos materiales determinados y en otro nivel superior, del mismo concepto, la acción puede tomar el sentido de operación matemática de orden o suma, actuando sobre elementos abstractos.

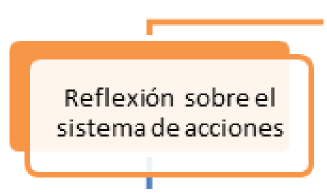
Dörfler (1991) contempla tres procesos de generalización dependiendo cada uno del centro de interés:

- El centro de interés son los invariantes de la acción, forma general del proceso.
- Las condiciones para la plausibilidad de las acciones, formuladas como relaciones entre objetos o como propiedades de los objetos.
- El producto o resultado de las acciones.

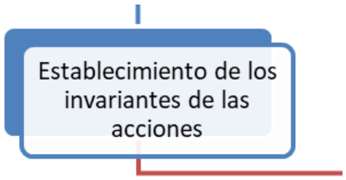
Dado nuestro objeto de estudio, esta investigación se centra en los invariantes de las acciones, la Figura 4-5 detalla la forma general del proceso. El punto de partida, génesis del proceso, es una acción introducida por el sujeto en la situación o estímulo que produce el desequilibrio.

Figura 4-5. Esquema del proceso de generalización de acciones e invariantes de acciones.

La acción o sistema de acciones pueden ser imaginarias, materiales o simbólicas, pero siempre acciones concretas, y centra la atención del sujeto sobre los elementos de esas acciones que, en particular, son ciertos objetos materiales o ideales.

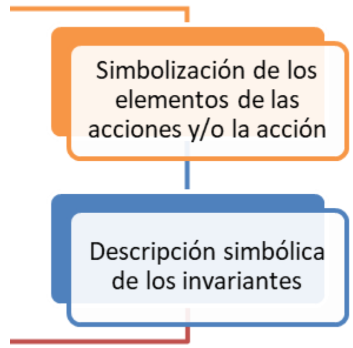


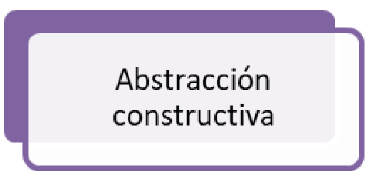
Los objetivos planteados, los medios empleados y el curso de tales acciones dirigen la atención del sujeto hacia algunas relaciones y conexiones entre los elementos de las acciones.



Estas relaciones se muestran invariantes cuando las acciones se repiten y se denominan invariantes de las acciones.

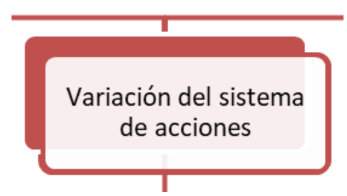
El establecimiento de estos invariantes requiere, no obstante, de cierta descripción simbólica, ya que se han de introducir símbolos para los elementos de las acciones o para las cantidades que son relevantes. Estos símbolos pueden ser de naturaleza verbal, icónica, geométrica, aritmética o algebraica. En cualquier caso, los invariantes se describen por medio de los símbolos y son por lo tanto fijados de esa forma. Los símbolos son primero representantes y juegan solo un papel descriptivo.

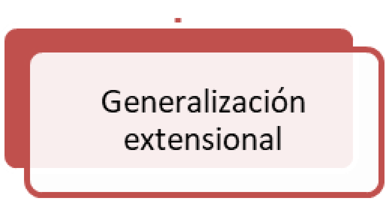




Este establecimiento de los invariantes y su descripción simbólica tiene el carácter de un proceso de abstracción ya que se señalan determinadas propiedades y relaciones y se centra la atención sobre ellas. Por medio de esto cobran independencia de los elementos u objetos a los que originariamente están asociados hasta un cierto grado, produciéndose de esta forma una objetivación de los símbolos. Es importante señalar aquí que este proceso corresponde claramente con una abstracción constructiva, en la que lo que se abstrae queda constituido por las acciones y gana significado y existencia vía las propias acciones.

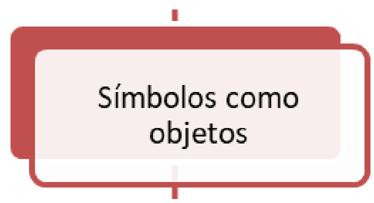
En principio, los símbolos concretos tienen un rango de referencia descrito por el contexto de la acción, es decir, son variables referenciales. Los invariantes en su descripción simbólica servirán como una pantalla de búsqueda para la posibilidad de acciones idénticas.



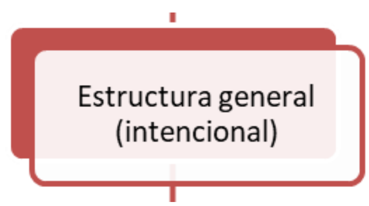


Esto es por la capacidad de sustitución e intercambiabilidad de los elementos de la acción (generalización empírica), y también de la acción misma, por lo que debe mantenerse la estructura de las acciones declaradas a través del esquema y de las invariantes. Esta es una especie de generalización extensional. Más adelante, los invariantes se convertirán en los criterios para elegir objetos como elementos de acción. Por lo tanto, los símbolos utilizados al principio son variables con propiedad de sustitución.

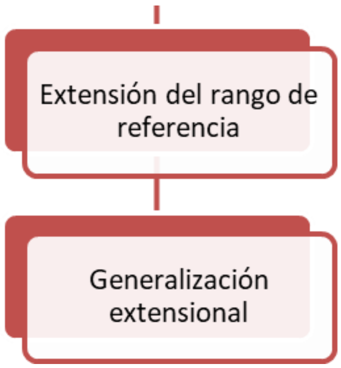
Al reflexionar sobre la descripción simbólica de los invariantes, los símbolos utilizados comenzarán a sustituir gradualmente los elementos de las acciones. Los símbolos tienen el carácter de objetos; se convierten en elementos de acciones y son representantes o "portadores" de las relaciones invariantes.



Se puede hablar acerca de la adecuación de los símbolos: el símbolo se separa de su rango de referencia en una especie de cambio de perspectiva, se convierten en objetos independientes que adquieren su significante y significado a partir de las relaciones (las invariantes) y de los operadores para los que actúan como objetos simbólicos. Los símbolos se convierten en objetos (objetivamente y en la cognición del alumno), cuyas cualidades determinantes son las invariantes descritas anteriormente.



De esta forma se desarrolla un nuevo objeto de pensamiento, un objeto matemático cuyo significante y significado intencional reside en los invariantes. Este objeto mental es una generalidad, pues posee un rango de referencia más amplio. En este objeto, ahora los símbolos tienen la cualidad primaria de variables con el carácter de objetos. Esta reificación (objetivación) de las variables y de los símbolos completa el proceso de abstracción que comenzó fijando los invariantes. De esta forma los invariantes son separados de sus "portadores" originales, adquieren independencia y forman la generalidad abstraída. Aquí la abstracción es el medio para desarrollar una generalización intencional.



La generalidad construida, expresada mediante el uso de variables concretas similares a objetos (para elementos de acciones y acciones), sirve posteriormente, de una manera subjetivo-cognitiva, así como de manera objetivo-epistemológica, para una generalización extensional adicional. Al interpretar adecuadamente las variables, los nuevos sistemas de acciones se incluyen bajo la generalidad cuyo rango de referencia se extiende más allá. Esto puede dar como resultado la construcción de nuevos sistemas de acciones por medio de la generalidad de manera que los invariantes expresados en la generalidad estén presentes y sean "válidos" allí.

El proceso descrito tiene como resultado un objeto variable, tanto en la cognición del sujeto como respecto de su cualidad como objeto matemático. Debido al carácter operativo de la generalidad así construida, uno puede concebir tareas que permitan la adquisición de alguna evidencia sobre el grado de éxito que han tenido los estudiantes en la construcción de un concepto general. Tal evidencia se mostrará, en primer lugar, mediante la producción propia de los alumnos, materializada en expresiones para los cálculos y explicaciones de estos, tanto por escrito como de forma verbal y que serán el medio por el cual se podrá determinar hasta cierto grado elementos claves del proceso. Tales elementos, que interesan particularmente en este estudio, son las acciones, los invariantes de la acción y los resultados del proceso, es decir las generalizaciones construidas.

Resaltemos el carácter cíclico del proceso de generalización. Toda generalización construida puede ser objeto de una nueva acción por parte del sujeto y ser el punto de partida, mediante el proceso general descrito, de una nueva generalización. En este sentido, cobran importancia los dos últimos procesos del marco teórico, donde el centro de interés puede variar desde las condiciones de la acción hasta el resultado de estas. Durante tales procesos, los alumnos utilizan esquemas conceptuales —en el sentido de Piaget—, a partir de los cuales, construyen los nuevos esquemas y establecen relaciones entre los esquemas nuevos y ya poseídos, fijando además la consistencia de estos últimos.

5 Metodología: La Ingeniería Didáctica

La Ingeniería Didáctica (ID) funciona como guía para el diseño de situaciones para la aplicación en el aula, así como una metodología de investigación que guía las experimentaciones en clase (Artigue, 2014; 2015; Farfán, 1997) cuyas características principales son: se aplica en situación escolar, su análisis es cualitativo con validación interna, y permite abordar diversidad de aspectos gracias a su funcionamiento metodológico (Albert, 1996).

La ID cuenta con cuatro fases —Figura 5-1—, las cuales corresponden a su esquema experimental de trabajo, estas fases están permeadas por la TSME para así acercarse a la construcción social del conocimiento matemático:

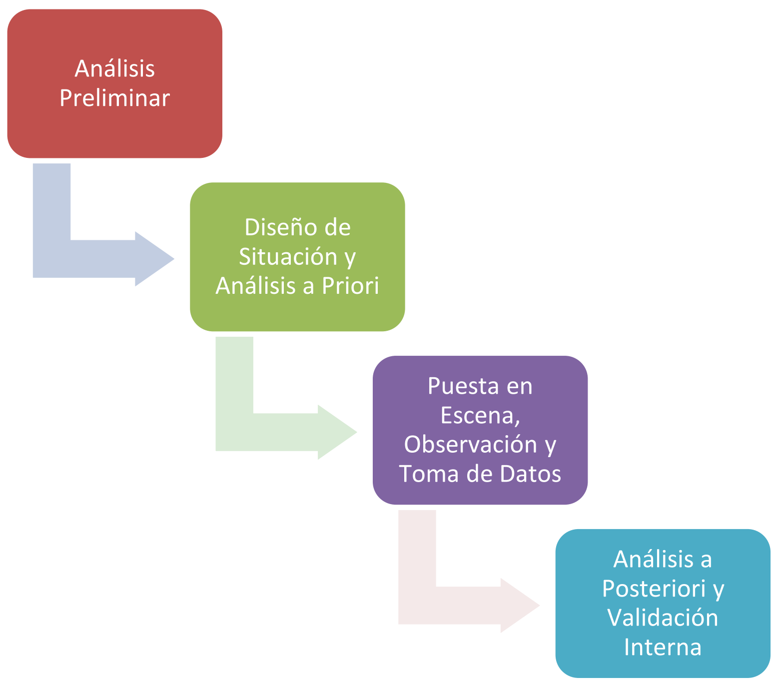


Figura 5-1. Fases de la Ingeniería Didáctica.

Respecto de la STF, en la investigación de maestría nos centra en las dos primeras fases de la ID (Romero, 2016). Para el análisis preliminar, estudiamos de forma sistémica el papel de la práctica social en la constitución del saber matemático de nuestro interés. Esto mediante el estudio integrado de las dimensiones epistemológica, sociocultural —pues el conocimiento es una construcción social y cultural—, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza (Cantoral y Farfán, 2003).

Para el diseño y análisis a priori, se definieron las variables macro-didácticas y micro-didácticas, y las hipótesis de lo que podría estar en juego durante el desarrollo de la situación de aprendizaje: posibilidades de acción, de selección, de decisión, de control y de validación de las que dispone el estudiante, por lo que se busca predecir que en los comportamientos esperados, si intervienen, sean resultado de la puesta en práctica del conocimiento contemplado para el aprendizaje y que la tarea intentaba desarrollar (Romero, 2016).

Esta investigación dará continuidad a las dos últimas fases de la ID. Sin embargo, se hace necesario presentar una síntesis de las dos primeras fases, así como el funcionamiento metodológico de las últimas.

5.1 El análisis preliminar o la problematización del saber

Las investigaciones enmarcadas en la TSME analizan el papel de la práctica social en la constitución del saber de manera sistémica, se consideran cuatro componentes fundamentales acerca del conocimiento: su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural —pues el conocimiento es una construcción social y cultural—, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza (Cantoral y Farfán, 2003). La integración de estas cuatro componentes es lo que en TSME se denomina una **problematización del saber matemático**, la cual "radica en buscar las causas que conducen a los individuos a «hacer lo que hacen» con el conocimiento en juego, es decir, hacer del saber matemático un problema «localizando y analizando su uso y su razón de ser»" (Reyes-Gasperini, 2011, p. 39).

Según Montiel (2005), al analizar la evolución del conocimiento e ideas en la historia que permitan encontrar las circunstancias, los escenarios y los medios que posibilitaron la emergencia del conocimiento matemático, es posible plantear su construcción social. Para la STF se analizó su contexto de origen, lo que permitió reconocer los escenarios, los contextos, las problemáticas y las prácticas de referencia asociadas a la STF y que se consideran fundamentales para significar al concepto en escenario escolar. Además, a partir de la dimensión didáctica, se considera el estado del discurso escolar predominante y cómo éste influye en la didáctica; con la componente cognitiva se analizaron las construcciones mentales de estudiantes y profesores y cómo esto afecta la manera en que conciben la STF y los conceptos relacionados con la misma.

En lo que sigue se hará evidente, en forma general, la presencia de Práctica de Referencia - Práctica Socialmente Compartida – Actividad - Acciones, en su escenario histórico, institucional y cultural, y su relación con el estado actual del sistema de enseñanza y las nociones mentales de profesores y estudiantes acerca de la STF. El análisis a profundidad para proponer la construcción social de la STF se encuentra en (Romero, 2016; Farfán y Romero, 2017), aquí solo se resumen los aspectos que se consideran centrales.

5.1.1 El problema de la cuerda vibrante

Al estudiar las circunstancias que posibilitaron la emergencia de la noción de convergencia, ambiente en el cual se dio el surgimiento de la STF, la investigación de Farfán (2012) muestra cómo la discusión alrededor del problema de la cuerda vibrante enunciado por B. Taylor en 1715 es antecedente del trabajo de Fourier. La solución física propuesta por D. Bernoulli, a partir de sus conocimientos musicales sobre la superposición de armónicos, asegura que la forma inicial de la cuerda se puede representar en serie de sinusoidales, lo cual fue punto de controversia entre los matemáticos de la época. Por ejemplo, Euler sostenía que de ser cierta la solución planteada por D. Bernoulli, se debía cumplir que la forma inicial de la cuerda fuese una función periódica e impar —por las propiedades de los términos de la serie—, lo cual era una restricción innecesaria, sin embargo D. Bernoulli se mantuvo firme en su postura pues argumentaba que hay suficientes coeficientes —infinitos— para seleccionarlos de manera que la igualdad se cumpla, por lo que para él ésta era la solución general del problema de la cuerda vibrante.

La solución propuesta por D. Bernoulli permite vislumbrar que la comprensión a profundidad de la superposición de ondas —sumas parciales— permite predecir ciertas propiedades del comportamiento general de la serie —convergencia—. Sin embargo, los matemáticos de la época, aunque no se preguntaron por la convergencia de la serie, generalizaron las propiedades de los términos de la serie a la función que esta representaba —su valor de convergencia—, lo cual está reportado que sucede hoy día en las aulas con profesores y estudiantes (Farfán, 2012; Moreno, 1999).

5.1.2 El contexto del trabajo de Fourier

Aunado al trabajo de Fourier y en su contexto local, la Francia del siglo XVIII, se produce el surgimiento de la ingeniería matemática, para lo cual la Escuela Politécnica, de la cual Fourier fue profesor, juega un rol protagónico en el proceso, pues poseía las condiciones para la creación de un ambiente de la ingeniería como ciencia, ya que el propósito de su creación fue el de imponer la uniformización y un nivel avanzado de conocimientos en matemáticas en toda Francia.

Asimismo, los profesores de esta institución tenían la obligación de escribir materiales para sus cursos, lo que provocó un incremento notable en la producción de textos de matemáticas, contribuyendo a la matematización del mundo científico, en un periodo en el que las matemáticas no lograron tantos avances como lo hicieron otras ciencias, pues los libros de texto de matemática no se preocupaban por la investigación, sino en reforzar la creación de ingenieros militares e industriales (Farfán, 2012).

Así, el análisis de Fourier sobre la propagación de calor "se da en el marco de la profesionalización de una **práctica de referencia**, la práctica de la ingeniería y por ende en el seno de la comunidad politécnica" (Cantoral et al., 2006, p. 90). Por lo que el problema de propagación del calor nace ligado a la práctica de la ingeniería, en un momento en que se está consolidando la ingeniería como ciencia.

5.1.3 La ecuación de propagación del calor

Con el trabajo de Biot se establece la primera ecuación diferencial que modela el fenómeno de propagación del calor, a través de la noción de calórico y de mediciones con un termómetro. Esto provoca que no se estudie el fenómeno en sí, ya que los cálculos están basados en el dato empírico, además no explica la naturaleza de los coeficientes de la ecuación diferencial, lo que es propio del material y lo que no —conductividad, densidad, entre otros—. Es con el trabajo de Fourier, en la *Théorie Analytique de la Chaleur* (1822), donde se analiza el problema de la propagación del calor en cuerpos sólidos.

La variación está presente y se significa en la ecuación general que modela el fenómeno, donde $v(x, y, z, t)$ es la temperatura del sólido en el punto (x, y, z) en el tiempo t y K, C y D son constantes que dependen del sólido:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{K}{C \cdot D}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right).$$

Se puede decir que ésta es la ecuación que modela completamente el fenómeno, pues se corresponde con la que Biot había obtenido de forma empírica. La discusión siguiente gira en torno de la solución de la ecuación diferencial, para lo cual Fourier da ejemplos de su uso.

Es así como el estudio del ambiente fenomenológico de la transferencia del calor propicia la construcción de la ecuación diferencial que modela el problema, pero la solución de ésta ecuación en los casos particulares está inserta en la matemática misma, sin hacer alusión a la situación física, y es aquí en donde surge la serie trigonométrica.

5.1.4 La serie trigonométrica y su convergencia

Al estudiar la propagación del calor, Fourier (1822) establece la ecuación general que modela el fenómeno en cuerpos sólidos, luego presenta una serie de problemas de uso de esta, entre ellos el problema de la propagación de calor en una lámina infinita, el cual es un modelo de la transferencia de calor en la Tierra (Romero, 2016), al obtener la solución de dicho problema y considerar sus condiciones iniciales llega a la ecuación:

$$1 = a\cos y + b\cos 3y + c\cos 5y + \cdots.$$

Esta solución, al igual que la dada por D. Bernoulli en el problema de la cuerda vibrante, es una representación en serie trigonométrica de una constante, para la cual, a diferencia de D. Bernoulli, Fourier proporciona el cálculo de los coeficientes. Antes de mostrar el cálculo, Fourier vio necesario justificar dicha solución físicamente, lo que permite ver que tanto Fourier, como la comunidad de la Escuela Politécnica, están interesados en “anticipar el comportamiento de la naturaleza, en modelarla” (Cantoral *et al.*, 2006, p. 94).

Para Fourier, a diferencia de D. Bernoulli que presenta argumentos físicos como demostración, es importante comprobar que la solución matemática es coherente con la situación física —modelar e interpretar—, pero la demostración se inserta en la matemática misma, sin hacer alusión a los argumentos físicos, se da así el inicio de la separación entre física y matemática que siempre iban de la mano (Farfán, 2012). De esta manera, en palabras de Fourier, la característica principal del problema de la propagación del calor es presentar un estado inicial y uno final fijo, es decir, es un problema que inicia en un estado transitorio y con el paso del tiempo llega a su estado estable o estacionario, para el cual la serie representa el estado estable del fenómeno, donde para un tiempo infinitamente grande, las variaciones de la temperatura son infinitamente pequeñas. Surge la cuestión, al no afectar el flujo de tiempo el estado estable ¿cómo se observa dicha estabilidad en la solución? Esta estabilidad se vislumbra en la convergencia de la serie.

Luego de estas consideraciones físicas y matemáticas acerca de la convergencia, Fourier procede al cálculo de los coeficientes de la serie y generaliza sus procedimientos para resolver lo que generó la controversia en el problema de la cuerda vibrante, representar una función arbitraria por serie trigonométrica.

Es importante resaltar que Fourier utiliza razonamientos geométricos como argumento para demostrar sus ideas matemáticas y visualiza en la gráfica todos los pasos necesarios al lado de la operatoria aritmética que le permite calcular los coeficientes para la STF; esto hoy día no es un recurso metodológico para demostrar un teorema, pues en el actual discurso alrededor de la STF predomina el contexto algebraico. Se puede asegurar entonces que, en la forma de trabajo de Fourier, la manera de construir el conocimiento matemático relativo al cálculo de los coeficientes está ligada a la coordinación y articulación de diferentes miradas del objeto, una geométrica-analítica y la otra algebraica, para validar la segunda en la primera.

5.1.5 Una epistemología de prácticas preliminar

El análisis socioepistemológico presentado hasta ahora, basado en una problematización del saber alrededor de la STF, evidenció la presencia de la predicción como práctica socialmente compartida, la cual está regulada por el surgimiento de la ingeniería como ciencia como un paradigma imperante alrededor del trabajo de Fourier —la práctica de referencia—. Es dentro de ésta donde Fourier hace el estudio de la propagación del calor, en la cual la actividad que permite la formación de funciones psicológicas superiores es el estudio de la convergencia de series trigonométricas particulares.

El problema inicial de Fourier consiste en conocer el estado ulterior —estable— de un sistema, en particular el fenómeno de propagación del calor cuyas variaciones son periódicas y acotadas, y del cual se conocen sus condiciones iniciales y de frontera. Se requiere, entonces, conocer el valor que tomará la temperatura cuando el flujo de tiempo ya no sea una variable que modifique el comportamiento del sistema —estado estacionario—.

La STF se presenta entonces como resultado de una situación que precisa de la predicción, cuya fenomenología intrínseca es la determinación del estado estacionario (Farfán, 2012). Es así como "la predicción, en tanto que no es un objeto matemático, tiene que entrar en la problemática teórica no como noción, o representación, sino como expresión de una práctica social […]: el *Prædiciere*" (Cantoral, 2013, p. 93)[1].

La predicción (práctica socialmente compartida), que es regulada por el surgimiento de la ingeniería como ciencia (práctica de referencia), va a significar la STF como un modelo de predicción para fenómenos estables con variación periódica y acotada, en el cual, la estabilidad se vislumbra en la convergencia de la serie trigonométrica; para lo que es necesario la intervención de las acciones de predecir, modelar e interpretar.

En resumen, se pueden identificar las prácticas asociadas a la STF, donde predecir, modelar e interpretar corresponden a las acciones directas del sujeto sobre el medio; estas acciones se organizan para el estudio de la convergencia de series trigonométricas como actividad que provoca el surgimiento de funciones psicológicas superiores, para perfilar a la predicción como práctica socialmente compartida; dicha práctica cae bajo la regulación de una práctica de referencia, la cual es el surgimiento de la ingeniería como ciencia; la que a su vez es normada por la *Prædiciere* como práctica social —Figura 5-2—.

[1] Un análisis detallado del *Prædiciere* como práctica social lo encuentra en (Cantoral, 2013).

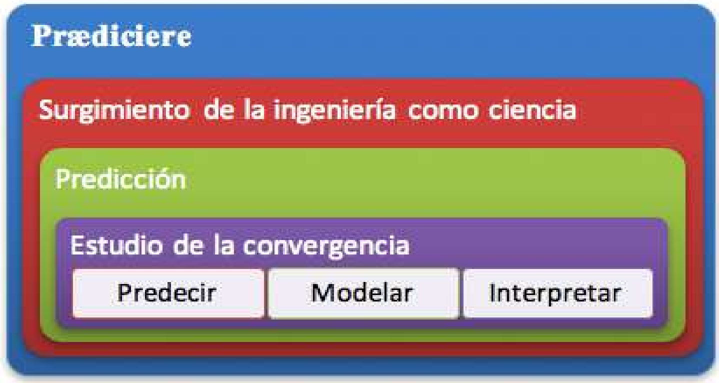


Figura 5-2. Esquema de prácticas anidadas preliminar para la STF (Romero, 2016, p. 84).

La problematización del saber permite asegurar que un ambiente de significación para la STF requiere de modelar un fenómeno estable con variación periódica y acotada en el paso del tiempo, en el cual, la estabilidad se vislumbra en la convergencia de la serie, es decir, en el estudio del límite de la sucesión de sumas parciales.

Para finalizar, cabe resaltar que la epistemología de prácticas propuesta es un modelo preliminar de construcción social de la STF que se vislumbra a partir de un estudio teórico de la misma, tomando en cuenta los resultados de investigación reportados hasta la fecha, se debe ahora comprobar este modelo mediante el diseño de situaciones de aprendizaje con fundamento socioepistemológico que permitan comprobar y fortalecer el modelo propuesto a la luz de los datos empíricos.

5.2 Diseño de la situación de aprendizaje y análisis a priori

A partir del análisis preliminar se diseña la situación de aprendizaje, para esto la ID supone la selección de las variables macro-didácticas, que conciernen a la organización global de la ingeniería; y las micro-didácticas, que hacen referencia directamente al proceso que se ha de seguir durante la situación de aprendizaje. Sin olvidar la relación entre las variables macro y micro que, aunque se muestren separadas, no son independientes entre sí, ya que las concepciones generales deben permitir el devenir de las locales, las cuales están directamente ligadas al diseño de la situación de aprendizaje (Artigue, 1995).

Por tanto, el análisis a priori comprende una descripción de las selecciones locales relacionándolas con las globales y las características de la situación de aprendizaje, posteriormente se analiza lo que podría estar en juego durante el desarrollo de las tareas que conforman la situación de aprendizaje: posibilidades de acción, de selección, de decisión, de control y de validación de las que dispone el estudiante. Por lo que se busca predecir que, en los comportamientos esperados, si intervienen, sean resultado de la puesta en práctica del conocimiento contemplado para el aprendizaje y que la tarea intentaba desarrollar.

En este sentido, las variables macro-didácticas que guiarán el comportamiento general de la situación de aprendizaje son:

- Carácter funcional: La STF se debe presentar como una herramienta de *predicción* al *modelar* e *interpretar* ciertos fenómenos cercanos al sujeto (individual o colectivo), reconociendo a la *Prædiciere* como práctica social que norma la construcción de la STF, mediante su uso culturalmente situado.
- Racionalidad contextual diversa: Se considera la evolución de lo trigonométrico, de la función a la serie, lo cual permitirá la emergencia de argumentaciones en el contexto de quien aprende, ya que se debe resignificar a la función trigonométrica para que surja la serie trigonométrica a partir del estudio de la convergencia.
- Validación de saberes: Detrás de la STF existe diversidad de argumentaciones (físicas, geométricas, analíticas y algebraicas), por lo que se debe considerar esta diversidad a la hora de construir este conocimiento.
- Pluralidad de prácticas de referencia para la resignificación: La construcción de la STF requiere del *modelaje* e *interpretación* de un fenómeno estacionario de variación periódica y acotada, para el cual la STF se convierta en una herramienta de *predicción*. A partir de esto se debe identificar su interacción con diversos contextos.

Estas variables guían el comportamiento general de la situación de aprendizaje. Por otra parte:

> La construcción social de la STF requiere de dos momentos importantes: (1) el estudio de fenómenos estacionarios en el flujo del tiempo y (2) el estudio

> matemático de la representación de una función arbitraria en serie trigonométrica. Esto se evidencia en la historia, los grandes matemáticos que discutieron alrededor del problema de la cuerda vibrante no lograron llegar a lo segundo, fue hasta que Fourier estableció la convergencia de series trigonométricas específicas que se dio paso a la manera de calcular los coeficientes de Fourier. (Farfán y Romero, 2017, p. 498)

Para el primer momento de construcción social de la STF se busca significar mediante el uso a la serie trigonométrica y su posibilidad de converger a una función[2]. Para el segundo momento es el problema inverso, dada la función a la cual la serie converge, determinar la serie; lo que incluye determinar los coeficientes de Fourier.

Ahora bien, la población de destino para la cual fue diseñada la situación son estudiantes de la Licenciatura en Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional (IPN) en México, dado que el ambiente fenomenológico en el que surgió la serie de Fourier —la propagación del calor—, no se pretende abordar este mismo fenómeno en la escuela, ya que este ambiente fenomenológico es cognitivamente más complejo que la serie misma, pues su comprensión no proviene de la primera experiencia sensible, se requiere de una abstracción profunda cuyas herramientas necesarias no las provee la escuela, ni el entorno social (Farfán, 2012). Se debe buscar un contexto cercano a la población de destino, para lo cual se propone matematizar un fenómeno de tipo físico-geométrico: la superposición de movimientos circulares. Un contexto de significación para este fenómeno físico-geométrico es el modelo de movimiento de los planetas propuesto por los astrónomos alejandrinos (323 a.C. – 30 a.C.), el cual se considera de gran importancia epistémica ya que perduró hasta el siglo XVI, cuando Copérnico propuso que la Tierra no era el centro del universo.

En el Anexo 9.1 se presenta en forma detallada la situación de aprendizaje —disponible como libro de GeoGebra en https://ggbm.at/byc8hxdv—, dividida en secuencias de tareas, se explica la intención de cada uno de los incisos de las tareas. La situación se organiza a partir de los dos momentos de construcción social de la STF: 1. comprender que una serie trigonométrica puede converger a una función (Tareas de la #1 a la #5) y 2. dada

[2] El esquema de prácticas anidadas preliminar —Figura 5-2— corresponde a este momento de construcción social de la STF.

una función que se puede representar en serie trigonométrica, determinar los coeficientes de la serie (Tarea #6). La Tabla 5-1 resume de forma general las intencionalidades del diseño propuesto.

Tabla 5-1. Esquema general de la situación de aprendizaje.

Momento	Tarea	Objetivo	Justificación.
Momento 1	Tarea #1	Caracterizar el comportamiento del sistema de forma cualitativa, lo que permitirá una comprensión más profunda del fenómeno y no solo aquello que detectan los sentidos a simple vista.	Farfán (2012) propone que es necesario desarrollar la intuición más allá de lo sensible ante los fenómenos de determinación de estado estacionario. Marmolejo (2006) sostiene que, si se conoce la noción de estado estacionario, la parte matemática que dará solución al problema cobrará mayor significado.
	Tareas #2 y #3	Significar la convergencia de series trigonométricas mediante la estabilidad de la trayectoria del planeta, caracterizándola mediante el límite de la sucesión de sumas parciales.	Al igual que en el trabajo de Fourier sobre propagación de calor es el carácter estable del fenómeno el que provoca la necesidad de hablar de la convergencia de series trigonométricas.
	Tarea #4	Diferenciar el tipo de convergencia entre los puntos cercanos a las discontinuidades y los que no, para así construir una mejor comprensión de la convergencia de la serie, a través del estudio del comportamiento de las sumas parciales.	Según Albert (1996) los estudiantes consideran convergente solo aquello que converge de manera uniforme, y como divergente todo lo demás. Por lo que alrededor de las discontinuidades suelen considerar que la serie diverge, debido a que visualizan el fenómeno de Gibbs (muchas oscilaciones alrededor de la discontinuidad) cuando en realidad si se da la convergencia, pero esta no es uniforme como en el resto de puntos.
	Tarea #5	Significar los elementos presentes en la serie trigonométrica que emerge al matematizar el modelo del movimiento planetario de los alejandrinos en forma general.	Se pretende con esta generalización que el estudiante identifique las condiciones para que el modelo sea estable. Por otra parte, debe encontrar condiciones para que el modelo sea equivalente a la STF. De esta manera, a partir de todo el trabajo previo, significará las nociones matemáticas en el ambiente físico-geométrico.
Momento 2	Tarea #6	Significar el cálculo de los coeficientes de Fourier utilizando argumentaciones gráficas y geométricas, tal y como lo hizo Fourier.	A propósito del trabajo de Fourier y la búsqueda de generalizar en matemáticas se propone el problema inverso, dada la función a la que converge la serie, determinar los coeficientes, para lo cual las argumentaciones gráficas y geométricas cobraran gran importancia, justo como se evidenció en el trabajo de Fourier.

Este diseño, hasta la fecha, ha sido piloteado en repetidas ocasiones, la primera con un grupo de estudiantes del programa de Maestría en Matemática Educativa del Cinvestav-IPN con el fin de revisar redacción, claridad de las ideas, tiempo de ejecución, entre otros factores; la segunda vez se implementó en un taller con profesores de nivel medio superior y superior, buscando revisar si las correcciones hechas a partir del primer pilotaje fueron acertadas. El pilotaje más reciente fue realizado con tres estudiantes egresadas de la Licenciatura en Física y Matemáticas del IPN en México, para tener un punto de referencia de la población de destino. Si bien, el objetivo de un pilotaje no es analizar las producciones de los participantes —para esto es la fase de análisis a posteriori de la ID—, en las intencionalidades del diseño —Anexo 9.1— se realizaron algunas referencias a los mismos, para validar de alguna manera la pertinencia de la propuesta.

5.3 Puesta en escena, observación y toma de datos

La siguiente fase en el esquema de la ID es la puesta en escena, observación y toma de datos. En esta fase, los datos se recopilan para el análisis a posteriori. Se presta especial atención a la recopilación de datos que permiten al investigador comprender la interacción de los estudiantes con el medio y hasta qué punto esta interacción respalda su movimiento autónomo desde las estrategias iniciales hasta las estrategias dirigidas (Artigue, 2015).

Para esto, a partir de la situación de aprendizaje propuesta, se planteó un curso titulado *Modelando el Movimiento de los Planetas*. Con el fin de invitar a participar del curso a estudiantes de la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional (ESFM), se diseñó un cartel informativo (Anexo 9.2) con lo siguiente: nombre y descripción general del curso, datos del profesor, materiales, conocimientos previos y cronograma. Dicho cartel fue exhibido en la dirección del departamento de matemáticas de la ESFM y se entregó a los profesores de los cursos Cálculo II, Análisis Vectorial y Cálculo IV; los alumnos interesados enviaron un correo electrónico para inscribirse al curso.

Se inscribieron al curso 13 estudiantes —3 mujeres y 10 hombres—, con edades entre 20 y 27 años. Con esta lista preliminar se asignó una etiqueta a cada estudiante —M1, M2 y M3 para las mujeres, H1, H2, …, H9 y H10 para los hombres—. Se acordó con quienes accedieron participar en desarrollar el curso en tres sesiones —dos tareas de la situación de aprendizaje por sesión—. Además, los participantes firmaron un consentimiento para el uso de los registros tomados durante el curso y de sus producciones para la investigación —la plantilla de la carta se encuentra en el Anexo 9.3—.

5.3.1 La puesta en escena

La implementación se llevó a cabo en el laboratorio de cómputo del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN. Participaron efectivamente del curso 10 estudiantes —H5 y H10 no participaron en ninguna sesión, H8 no participó en la tercera sesión—. Para la resolución de las tareas se trabajó en cuatro equipos de a lo sumo tres estudiantes cada uno —Figura 5-3—.

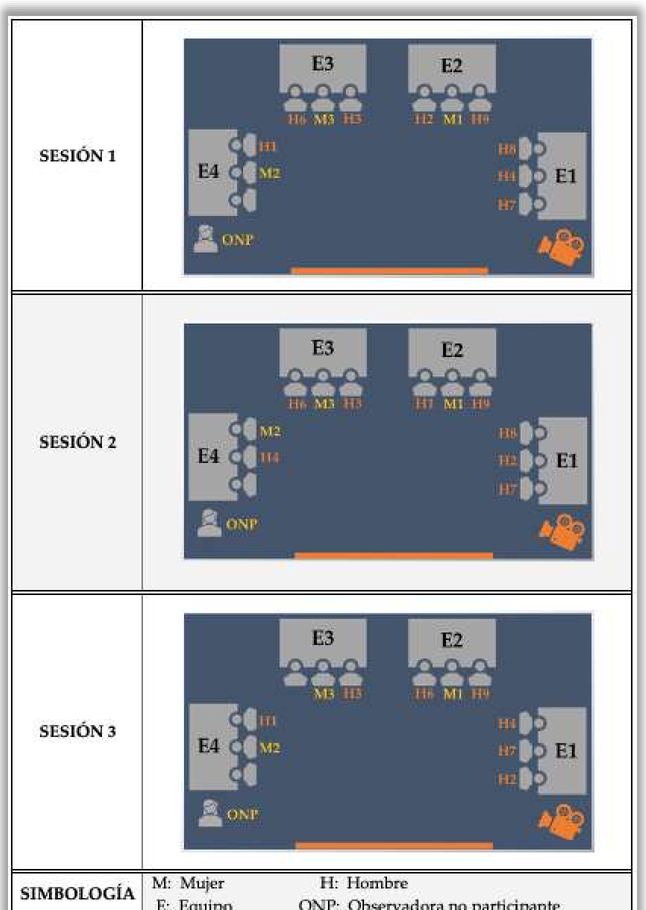


Figura 5-3. Distribución de los estudiantes en cada sesión de trabajo.

Metodología

Dado que la situación de aprendizaje requiere de la interacción con numerosos applets de GeoGebra, se decidió crear un *Grupo GeoGebra*, el cual funcionó como un aula virtual que permitió asignar tareas y conservar un registro del trabajo de los miembros del grupo[3]. Sin embargo, para no limitar las posibilidades de acción de los estudiantes, se les entregaron hojas blancas donde podían registrar sus respuestas en caso de que prefirieran trabajar en lápiz y papel, también tenían libertad de responder algunas preguntas en el Grupo GeoGebra y otras en las hojas físicas. La Figura 5-4 muestra, a grandes rasgos, la manera en que se llevó a cabo la implementación y la duración aproximada de cada actividad.

SESIÓN 1	**INTRODUCCIÓN AL CONTEXTO SITUACIONAL**	20 minutos
	Tarea 1 – Parte I	40 minutos
	Puesta en común de las respuestas	15 minutos
	Tarea 1 – Parte II	60 minutos
	Puesta en común de las respuestas	25 minutos
	Introducción a la situación planteada en la Tarea 2	10 minutos
	Tarea 2 – Parte I	40 minutos
	Puesta en Común de las respuestas	10 minutos
	Receso	60 minutos
	Tarea 2 – Parte II	120 minutos
	Puesta en común de las respuestas	50 minutos
SESIÓN 2	Repaso de lo realizado en las tareas anteriores	10 minutos
	Introducción a la situación planteada en la Tarea 3	5 minutos
	Tarea 3 – Parte I	55 minutos
	Puesta en común de las respuestas	10 minutos
	Tarea 3 – Parte II	70 minutos
	Puesta en común de las respuestas	65 minutos
	Receso	60 minutos
	Repaso de lo realizado en las tareas anteriores	3 minutos
	Introducción a la situación planteada en la Tarea 4	2 minutos
	Tarea 4 – Parte I	60 minutos
	Puesta en común de las respuestas	20 minutos
	Tarea 4 – Parte II	40 minutos
	Puesta en común de las respuestas	10 minutos
SESIÓN 3	Repaso de lo realizado en las tareas anteriores	10 minutos
	Introducción a la situación planteada en la Tarea 5	5 minutos
	Tarea 5 – Parte I	55 minutos
	Puesta en común de las respuestas	20 minutos
	Tarea 5 – Parte II	45 minutos
	Puesta en común de las respuestas	15 minutos
	Receso	60 minutos
	Introducción a la situación planteada en la Tarea 6	3 minutos
	Tarea 6 – Parte I	75 minutos
	Puesta en común de las respuestas	10 minutos
	Tarea 6 – Parte II y Parte III	70 minutos
	Puesta en común de las respuestas	35 minutos

Figura 5-4. Actividades de la implementación y sus duraciones aproximadas.

[3] Para más información acerca de los Grupos GeoGebra puede consultar el sitio https://www.geogebra.org/m/Ucar7PHU#material/q7xjy9fN.

En general, para cada parte de cada tarea, primero se trabajó en equipos —a pesar de estar en equipos la mayoría de los estudiantes trabajó de forma individual, interactuando muy poco con sus compañeros y se limitaban a validar sus respuestas—; luego se pasó a una fase de puesta en común, donde se compartían y discutían las distintas respuestas a cada pregunta, buscando construir consensos o haciendo explícito cuando no los había.

5.3.2 Observación y toma de datos

Durante la puesta en escena, el investigador asumió la posición de profesor del curso. Además, se contó con la colaboración de una investigadora en formación —estudiante de tercer semestre de maestría en Matemática Educativa—, quien fungió como observadora no participante.

La observadora contó con un *Protocolo de Observación*[4] para cada Tarea de la situación de aprendizaje (Anexo 9.4), dicho protocolo consideraba aspectos desde la organización del espacio y el tiempo, hasta la interacción de los estudiantes con el conocimiento matemático en juego. A continuación, se presentan los aspectos considerados en el protocolo:

- Datos generales:
    a. Numero de sesión.
    b. Hora de inicio y fin de la tarea.
    c. Cantidad de estudiantes.
    d. Descripción del espacio físico.
    e. Tarea trabajada y objetivo de la tarea.
- Proceso de la sesión:
    a. Rol del profesor y de los estudiantes.
    b. Interacciones profesor-estudiante, estudiante-estudiante, estudiante-tarea.

[4] El Protocolo de Observación es una adaptación de los instrumentos de notas de campo de Torres (2018) y Cruz (2019).

- Conocimiento didáctico-pedagógico:
    a. Comprensión de las preguntas e indicaciones planteadas en la situación de aprendizaje.
    b. Dificultades con el trabajo en el Grupo GeoGebra y con los applets presentados.
- Conocimiento matemático en juego de los estudiantes:
    a. Nociones matemáticas puestas en juego.
    b. Ideas, preguntas y reflexiones de los estudiantes.
- Conocimiento interdisciplinario:
    a. Relación de la matemática involucrada con el contexto situacional del movimiento planetario.
- Otros aspectos:
    a. Situaciones que favorecieran o impidieran el trabajo realizado.
    b. Actitud y comportamiento de los estudiantes.
    c. Estudiantes líderes, participativos y no participativos.
    d. Reacciones ante la presencia de la observadora.
    e. Registros complementarios.

Respecto del conocimiento matemático en juego de los estudiantes y el conocimiento interdisciplinario, las preguntas del protocolo son distintas para cada tarea de la situación aprendizaje, dado que tienen objetivos e intencionalidades distintas —las preguntas específicas están en el Anexo 9.4—.

La fuente primaria de los datos correspondió a las producciones finales de los estudiantes —respuestas a las tareas de la situación de aprendizaje registradas en el Grupo GeoGebra y en sus producciones en lápiz y papel—. Las notas de la observadora no participante —protocolo de observación— fungen como fuente secundaria de datos, junto con:

- Grabaciones en video de las pantallas de las computadoras de los estudiantes —a través del programa computacional *OBS Studio*[5]—. Estas permitirán observar cómo fue el movimiento del estudiante en las tareas: orden en que resuelven, si cambian respuestas, tiempo de ejecución, entre otros.
- Grabaciones de audio de los equipos de trabajo —se colocó una grabadora de audio a cada equipo—. Estas permitirán contar con las interacciones entre estudiantes de un mismo equipo.
- Grabación en video del trabajo en colectivo—se colocó una cámara de video que captara el trabajo de todo el grupo (Figura 5-3)—. Esta permitirá contar con las interacciones a nivel grupal ininterrumpidamente.

Dado que el trabajo con la situación de aprendizaje siempre fue en equipos, se realizó una edición de video de manera que, para cada tarea de la situación de aprendizaje, en un mismo video se visualicen las grabaciones de las pantallas de todos los integrantes de un mismo equipo y se añadió la grabación de audio del equipo. Esto con el propósito de simplificar la referencia a los datos en el análisis. Por ejemplo, en la Tarea #1, el Equipo 3 estaba integrado por los estudiantes M3, H3 y H6, por lo que contamos con la grabación de audio del equipo y tres grabaciones de las pantallas —4 fuentes secundarias de datos—. En su lugar se haría referencia a un único video —Figura 5-5—.

Figura 5-5. Captura de pantalla del video del Equipo 3 - Tarea #1.

[5] Disponible de manera gratuita en https://obsproject.com/es.

En síntesis, las fuentes secundarias de datos se resumen en:

- Seis Protocolos de Observación —notas de la observadora no participante—.
- Seis videos grupales —uno por cada tarea de la situación de aprendizaje—.
- Seis videos de equipo, se decidió analizar a nivel de equipo solamente las interacciones del Equipo 3 —ver en la sección siguiente la *Etapa 0: Selección de la muestra*—.

La referencia a las fuentes secundarias se presentará de la siguiente forma:

- Protocolos de Observación: [PO]-1- «texto». El número indica la tarea a la que corresponde el protocolo. El «texto» será la referencia textual a lo que se indica en el protocolo de observación respectivo. Si lo que se coloca es un parafraseo o descripción no se utilizarán las comillas.
- Videos grupales: [VG]-1-|00:00:01|- «transcripción textual del video». El primer número indica la tarea correspondiente y lo que está entre barras muestra la hora, minuto y segundo del video en el que inicia lo transcrito. Si lo que se coloca es una descripción de lo ocurrido no se utilizarán las comillas.
- Videos de equipo: [VE1]-1-|00:00:01|- «transcripción textual del video». EL primer número indicará el número de equipo, el segundo número indica la tarea correspondiente y lo que está entre barras muestra la hora, minuto y segundo del video en el que inicia lo transcrito. Si lo que se coloca es una descripción de lo ocurrido no se utilizarán las comillas.

En caso de que se realice la transcripción de un diálogo, se utilizará la adaptación del código de transcripción de Gail Jefferson propuesta por Bassi (2015) —ver Anexo 9.5—, para los diálogos se utiliza la misma nomenclatura para indicar video, tarea y tiempo en que inicia el diálogo e inmediatamente, hacia abajo, la transcripción del diálogo como se muestra a continuación:

[VE1]-1-|00:00:01|
M3: transcripción textual.
P: transcripción textual.
H1: transcripción textual.

Para esto, se utiliza una P como etiqueta para el profesor y las etiquetas asignadas a cada estudiante previo al inicio del curso.

5.3.3 Consideraciones respecto de la recolección de datos

Durante la recolección de datos se dieron algunos inconvenientes que se describen a continuación, separados por las sesiones de trabajo:

- Sesión 1 —Tareas #1 y #2—: Hubo un problema técnico con la cámara de video, lo que no permitió tomar el video grupal de la Tarea #2 - Parte I. Además, la grabadora de audio del Equipo 1 dejó de funcionar, lo que no permitió registrar sus interacciones.
- Sesión 2 —Tareas #3 y #4—: Al finalizar la sesión la computadora de M1 se reinició en forma automática, lo que provocó que se borraran las grabaciones de la pantalla, pues la computadora está programada para limpiar los archivos al reiniciarse. Además, durante la solución de la Tarea #4, la computadora de H2 se quedó sin conexión a internet —necesaria para el trabajo en el Grupo GeoGebra—por lo que se le proporcionó una computadora portátil para continuar con la actividad.
- Sesión 3 —Tareas #5 y #6—: No presentó inconvenientes.

Es importante resaltar que, dado que los inconvenientes se presentaron con fuentes de datos secundarias, esto no afectó la siguiente fase de la ID —análisis a posteriori—. Sin embargo, se consideraron estos inconvenientes a la hora de seleccionar la muestra para el análisis.

5.4 Análisis a posteriori y validación interna

Según Artigue (2015), el análisis a posteriori se organiza en términos de contraste con el análisis a priori, poniendo a prueba las hipótesis subyacentes al diseño, en forma cualitativa y local, razón por la cual se hacen importantes las siguientes preguntas:

- ¿Hasta qué punto los datos recopilados durante la fase de experimentación respaldan el análisis a priori?

- ¿Cuáles son las convergencias y divergencias significativas y cómo se pueden interpretar?
- ¿Qué sucedió que no se anticipó y cómo se puede interpretar?

Es importante tener en cuenta que siempre hay diferencias entre la referencia proporcionada por el análisis a priori y la contingencia analizada en el análisis a posteriori. Esto debido a que el análisis a priori trata con estudiantes genéricos y epistémicos, que no es el caso durante la experimentación. Por lo tanto, la validación de las hipótesis subyacentes al diseño no impone una combinación perfecta entre los dos análisis (Artigue, 2014; 2015). A continuación, se presentan las etapas en que se organizó el análisis a posteriori.

5.4.1 Etapa 0: Selección de la muestra y organización de los datos

Para la selección de la muestra se utilizaron los siguientes criterios: 1) su desenvolvimiento durante la fase de implementación del diseño —participación activa y discusión con sus compañeros de equipo—, 2) que hayan trabajado en el mismo equipo la mayor cantidad de veces posible de las tres sesiones de la puesta en escena —esto permitiría analizar no solo a nivel individual sino también a nivel de equipos— y 3) que no se hayan visto afectados por los inconvenientes expuestos en la Sección 5.3.3.

A partir de estos criterios se seleccionó a las estudiantes M2 y M3 y a los estudiantes H1, H3 y H4, dado que:

1. En conversación con la observadora no participante, se acordó que estos estudiantes proveerían gran cantidad de información debido a su desenvolvimiento en el curso.
2. M3 y H3 integraron el mismo equipo —Equipo 3— durante las tres sesiones de la puesta en escena. M2 y H1 integraron el mismo equipo —Equipo 4— en la primera y tercera sesión. M2 y H4 integraron el mismo equipo en la segunda sesión.
3. Si bien H4 formó parte del Equipo 1 en la primera sesión —audio perdido—, la calidad de sus intervenciones en la puesta en común y el hecho de que formó equipo con M2 en una de las sesiones, motivó a considerarlo para el análisis.

De esta manera se seleccionaron casos que permiten analizar en tres niveles: individual, equipo y grupal —considerando el video grupal de las puestas en común—. Adicionalmente, con el fin de complementar la información proporcionada, en algunos casos, se presentan datos de los demás participantes.

Después de la selección de la muestra se realizó la organización de los datos, que consistió en trasladar las respuestas a las tareas de la situación de aprendizaje a una tabla donde se incluye: número de tarea, objetivo de la tarea, las partes de la tarea y preguntas con su intencionalidad —análisis a priori— (Figura 5-6). En el Anexo 9.6 se muestra la organización de los datos inicial para las seis tareas de la situación de aprendizaje.

TAREA #1					
Objetivo de la Tarea:	Caracterizar el comportamiento del sistema de forma cualitativa, lo que permitirá una comprensión más profunda del fenómeno y no solo aquello que detectan los sentidos a simple vista.				
Parte I.	**¿Qué permite explicar este modelo?**				
Intención:	Comprender por qué el modelo de los alejandrinos permite explicar aquello que el modelo griego no permitía. Se busca propiciar una comprensión profunda del sistema, así como Fourier conocía el comportamiento del fenómeno de propagación del calor a través de la empírea antes de proponer su modelo matemático del fenómeno (Farfán y Romero, 2017).				
Estudiante	**M2**	**M3**	**H1**	**H3**	**H4**
Pregunta a					
Pregunta b					
Pregunta c					
Intencionalidad	En los incisos a, b y c, se espera que el estudiante relacione el cambio de luminosidad y las estaciones del año con la distancia que hay entre T y P, por tanto, el modelo de una circunferencia no permite explicar estos fenómenos ya que esta distancia nunca cambia, no así en el modelo con 2, 3 y 4 circunferencias en donde la distancia de P a T cambia durante la trayectoria. Respecto del fenómeno de retrogradación, su explicación estará en los bucles que se generan en el modelo con 4 circunferencias.				
Parte II.	**¿Y si aumentamos el número de epiciclos?**				
Intención:	Se busca, con apoyo de un applet, vislumbrar la noción de estabilidad del sistema, para esto se permite la posibilidad en el applet de aumentar hasta treinta el número de circunferencias y así analizar los cambios que se dan en el comportamiento del sistema.				
Pregunta a					
Intencionalidad	Se busca concluir que los radios de las circunferencias tienden a cero en forma cualitativa, para esto los estudiantes podría usar frases como "disminuyen", "se hacen más pequeños", entre otras.				
Pregunta b					
Intencionalidad	A través del estudio del cambio se pretende que los estudiantes infieran que la velocidad de los puntos sobre cada circunferencia sigue aumentando sin cota, para esto podría utilizar frases como "va más rápido", "en el mismo tiempo recorre cada vez más distancia", entre otras. Según la prueba piloto, es posible que para la pregunta b los estudiantes consideren que la gráfica se refiere a la trayectoria del planeta al agregar circunferencias, cuando en realidad se refiere al movimiento de cada punto sobre cada circunferencia.				
Pregunta c					
Intencionalidad	La intención es que el estudiante identifique el carácter estable del sistema en forma cualitativa, esto a través de frases como "cuando hay muchas circunferencias casi no cambia la forma de la trayectoria conforme se agregan más", "tiende a parecerse a una…". Para esto se espera analice el cambio en la forma de la trayectoria conforme se agregan cada vez más circunferencias. Se espera que, expresen que "algo extraño pasaba con la parte izquierda de la trayectoria", esto es importante, pues no toda la trayectoria es estable.				
Pregunta d					
Intencionalidad	Se busca confrontar el cómo cambia la trayectoria del planeta (estabilidad) con lo que provoca el cambio. Sin embargo, determinar cómo cambia y qué produce el cambio es una tarea cognitivamente muy compleja para los fenómenos de determinación del estado estacionario (Farfán, 2012; Romero, 2016). Se espera que, con ayuda del docente y a partir de las ideas planteadas por los estudiantes, se acerquen a la idea de que al tender los radios de las circunferencias a cero y la velocidad de movimiento del punto al infinito esto provoca que se logre la estabilidad; es decir, agregar una circunferencia muy pequeña y un punto sobre esta que se mueve muy rápido no provoca cambios significativos en el sistema en general.				

Figura 5-6. Tabla de organización de datos inicial para la Tarea #1.

Para las siguientes etapas, dadas las preguntas de investigación, es necesario identificar los componentes, en términos de prácticas, que permiten significar a la STF y las componentes del proceso de generalización que se dan al promover la construcción social de la STF. Es importante hacer notar aquí que, a partir de las intencionalidades de las tareas —Tabla 5-1— y el esquema de generalización adoptado para esta investigación —Figura 4-5— podemos notar que las Tareas #1, #2, #3 y #5 corresponden a variaciones del sistema de acciones para el Momento 1 de construcción social de la STF. Sin embargo, la Tarea #4 pretende analizar un fenómeno distinto —el fenómeno de Gibbs— sin hacer una relación directa con el contexto situacional, por lo que se escapa de lo que queremos analizar —las prácticas que subyacen a los procesos de generalización—, si bien implementamos la situación de aprendizaje en su totalidad no analizaremos la Tarea #4.

Por otra parte, dado que las Tareas #2 y #3 tienen los mismos objetivos e intencionalidades, la organización inicial de los datos permitió realizar una comparación entre las producciones de los estudiantes y permitió percatarse de que la Tarea #3 no proveía información adicional a lo que ya hacía la Tarea #2, por lo que no se consideró para el análisis. De esta manera, para las Tareas #1, #2, #5 y #6, se siguieron las Etapas 1 y 2 que se exponen a continuación.

5.4.2 Etapa 1: Identificación de acciones

Dado que la *acción* —desde la epistemología genética de Piaget— es el punto de partida en el modelo de anidación de prácticas —relaciones de subida en la Figura 4-2— y en el modelo de generalización adoptado para esta investigación —Figura 4-5—, es importante su identificación y caracterización inicial, entonces “[la *acción*] podemos asociarla a las preguntas ¿qué hace? y ¿cómo lo hace?” (Cruz, 2019, p. 82).

Estas preguntas funcionarán como cuestionamientos analíticos para identificar y caracterizar las acciones en el hacer de los estudiantes, para lo cual agregamos a la tabla inicial de datos tres filas debajo de cada intencionalidad del diseño: 1) ¿qué hace? 2) ¿cómo hace? y 3) argumentos y confrontaciones presentados.

Además, a la tabla inicial se agregaron dos columnas: Equipo 3 y Puesta en común. Esto con el objetivo de realizar el análisis en los tres niveles indicados anteriormente —individual, equipo y grupo—.

5.4.3 Etapa 2: Identificación de los invariantes de las acciones

Después de identificadas las acciones en la etapa previa —¿qué hace?— y previo a identificar los invariantes de las acciones, según el esquema de generalización adoptado para esta investigación —Figura 4-5—, debemos determinar los elementos de la acción, las relaciones entre dichos elementos y su simbolización.

Dado que los *elementos de la acción* corresponden a objetos materiales o ideales en los que el sujeto centra su atención al actuar, para su identificación podemos asociarlos a la pregunta ¿sobre qué objetos lo hace?

Como los *invariantes de las acciones* corresponden a relaciones —en las que en sujeto se centra— entre los elementos de las acciones que se mantienen invariantes cuando las acciones se repiten, se deben identificar primero dichas relaciones, asociando la pregunta ¿sobre qué relaciones lo hace?

A través de la pregunta ¿por medio de qué lo hace? se identifica la descripción simbólica para los elementos de las acciones y para las relaciones entre los elementos, lo cual es necesario para el establecimiento de los invariantes.

Estas preguntas funcionarán como cuestionamientos analíticos para la identificación y caracterización de los invariantes de las acciones, para lo cual agregamos a la tabla inicial de datos —siempre considerando las columnas de Equipo 3 y Puesta en común— cuatro filas debajo de cada intencionalidad del diseño: 1) ¿sobre qué objetos lo hace? 2) ¿aobre qué relaciones lo hace? 3) ¿por medio de qué lo hace? y 4) invariantes de las acciones.

Para los primeros tres puntos las preguntas se hacen sobre las acciones identificadas en la Etapa 1, el último punto corresponde a una mirada horizontal, de las relaciones entre los elementos de las acciones, pues los invariantes se identifican al repetirse las acciones, para esta investigación la frecuencia se analizará a nivel individual, de equipo y de la puesta en común.

5.4.4 Etapa 3: Identificación de las actividades

Dado el trabajo realizado en las etapas 1 y 2, y con los resultados sintetizados —sección 6.1—, corresponde continuar con el siguiente nivel de la práctica, la *actividad* —relaciones de subida en la Figura 4-2—.

Desde el enfoque sociocultural de Vygotsky, la *actividad* "es una práctica instrumental con intencionalidad, mediada y situada socioculturalmente, asociada a la pregunta ¿para qué lo hace?" (Cruz, 2019, p. 82), esta pregunta se considera un cuestionamiento analítico para la identificación de la actividad en el hacer de los estudiantes. Sin embargo, la respuesta a dicha pregunta no puede ser «para responder a las preguntas de la situación de aprendizaje», la idea detrás del cuestionamiento analítico es aquello que hicieron que les sirvió para dar respuesta.

Esta herramienta metodológica —el cuestionamiento analítico—, que fue muy útil es las etapas anteriores, nos fue insuficiente para determinar *actividades* que no fuesen propiciadas por la situación de aprendizaje, ya que no logramos identificar a lo largo del desarrollo de la situación algo que escapara de las intencionalidades del diseño y que, además, les sirviera a los estudiantes para abordar las preguntas planteadas. Esto no es del todo contraproducente por que da fortaleza a la validación del diseño, parece que una problematización tan robusta como la que tenemos —más de tres décadas de resultados de investigación considerados— plantea un problema metodológico en este sentido.

Así que decidimos, de forma alternativa, basarnos en el carácter articulador de la actividad sobre las acciones, y recurrir a las acciones identificadas y sus relaciones invariantes. Al identificar relaciones invariantes sobre las cuales actúan diferentes acciones o acciones sobre relaciones distintas y afines a una misma noción, podremos decir que estamos en presencia de una actividad —organizadora de acciones—.

Esto nos permitió identificar, a lo largo del desarrollo de la situación de aprendizaje, tres actividades, los resultados se encuentran en la sección 6.2.

6 Resultados del análisis

El análisis del desarrollo de la situación de aprendizaje pretende caracterizar las prácticas que subyacen a los procesos de generalización que se suscitan al hacer una construcción social de la STF, para ello se construyeron cuestionamientos analíticos a partir de nuestro marco teórico —ver sección 5.4—, con dichas herramientas construimos tablas de análisis para identificar y caracterizar las acciones y los invariantes de las acciones en el hacer de los estudiantes con base en la evidencia empírica—ver Anexo 9.7—.

A continuación, se muestra una síntesis del análisis realizado. Cómo se explicó al final de la sección 5.4.1 nos enfocamos en las Tareas #1, #2, #5 y #6. Mostraremos los hallazgos en dos secciones, la primera enfocada en caracterizar las acciones y los invariantes de las acciones, y la segunda en caracterizar las actividades.

6.1 Caracterización de las acciones y de los invariantes de las acciones

6.1.1 Las acciones en la Tarea #1

Se presenta, en formato de tabla[1], una síntesis del análisis realizado para la Tarea #1 —Anexo 9.7.1— identificando las prácticas de los estudiantes en el nivel de acción —qué hacen y cómo lo hacen—nos enfocaremos en las intencionalidades del diseño como hilo conductor.

[1] La forma de estructurar la información en la tabla para la caracterización de las acciones se tomó de la investigación de (Cruz, 2019), ya que nos pareció muy apropiada para realizar la síntesis del análisis.

Tabla 6-1. Caracterización de acciones en la Tarea #1 – Parte I.

<table>
<tr><td colspan="4">Intención de la Tarea #1 - Parte I: Comprender por qué el modelo de los alejandrinos permite explicar aquello que el modelo griego no permitía. Se busca propiciar una comprensión profunda del sistema, así como Fourier conocía el comportamiento del fenómeno de propagación del calor a través de la empírea antes de proponer su modelo matemático del fenómeno (Farfán y Romero, 2017).</td></tr>
<tr><th rowspan="2">Intencionalidad
(Análisis a priori)</th><th rowspan="2">Argumentos (A)
Confrontaciones (C)</th><th colspan="2">Práctica en el nivel de acción</th></tr>
<tr><th>¿Qué hace?</th><th>¿Cómo lo hace?</th></tr>
<tr><td>Relacionar el cambio de luminosidad y las estaciones del año con la distancia que hay entre T y P.</td><td>(A) El cambio de luminosidad y las estaciones del año dependen de los cambios en la distancia del planeta a la Tierra.
(C) Con su conocimiento actual sobre las estaciones del año.</td><td>Comparar las distancias entre el planeta y la Tierra.</td><td>Considerando la distancia del planeta a la Tierra en diferentes porciones de la trayectoria, en los modelos presentados.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Relacionar el fenómeno de retrogradación con los bucles que se generan en el modelo con 4 circunferencias.</td><td>(A) El cambio de luminosidad se podría deber a eclipses, planetas que en su trayectoria se colocan en medio del Sol y la Tierra.
(C) Con su conocimiento actual sobre el funcionamiento de los eclipses.</td><td>Comparar los movimientos del Sol y de otro planeta alrededor de la Tierra.</td><td>Considerando la posibilidad de que algún planeta se cruce en medio de la Tierra y el Sol lo que podría provocar cambios de luminosidad.</td></tr>
<tr><td>(A) Debido al movimiento del vector velocidad sobre la trayectoria se puede explicar el fenómeno de retrogradación.</td><td>Comparar la dirección del vector velocidad en cada punto de la trayectoria.</td><td>Considerando los cambios en la dirección del vector velocidad al moverse sobre la trayectoria.</td></tr>
<tr><td>(A) Debido la forma de la cuarta trayectoria se puede explicar el fenómeno de retrogradación.
(C) Con el modelo de movimiento planetario actual, al explicar con base en el movimiento de traslación de los planetas alrededor del Sol.
(C) Con sus nociones físicas de movimiento, inercia en particular.</td><td>Observar el movimiento sobre la trayectoria.</td><td>Considerando la forma de la trayectoria y cómo se vería el movimiento posicionado desde la Tierra.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Mediante esta primera parte de la Tarea #1, reconocemos en el nivel de acción:
- Comparar estados en un mismo comportamiento.
- Observar el vector velocidad y el cambio de su dirección al moverse sobre la trayectoria.</td></tr>
</table>

Tabla 6-2. Caracterización de acciones en la Tarea #1 - Parte II.

Intención de la Tarea #1 - Parte II: Se busca, con apoyo de un applet, vislumbrar la noción de estabilidad del sistema, para esto se permite la posibilidad en el applet de aumentar hasta treinta el número de circunferencias y así analizar los cambios que se dan en el comportamiento del sistema.			
Intencionalidad **(Análisis a priori)**	**Argumentos (A) Confrontaciones (C)**	**Práctica en el nivel de acción**	
		¿Qué hace?	**¿Cómo lo hace?**
Se busca concluir que los radios de las circunferencias tienden a cero en forma cualitativa, para esto los estudiantes podría usar frases como “disminuyen”, “se hacen más pequeños”, entre otras.	(A) Se aprecia directamente de la figura que los radios disminuyen. (A) Si los radios se mantienen iguales el planeta, eventualmente, colisionaría a la Tierra. (A) Si los radios aumentan la trayectoria del planeta cruzaría por dentro de la primera circunferencia.	**Observar** los radios de las circunferencias.	Considerando el movimiento del planeta en su trayectoria y en los casos en que los radios aumenten de tamaño o se mantengan iguales.
	(A) Se puede apreciar del *applet* que la variación del radio de las circunferencias conforme se añade otra es $R/2^n$, con respecto a la circunferencia original, *R*. (C) Con la costumbre escolar de cuantificar el cambio sin atender lo que cambia y cómo lo hace.	**Estimar** la medida de los radios.	Considerando la primera circunferencia como su unidad de medida para estimar que la medida de los radios va disminuyendo a la mitad.
	(A) Al medir directamente se comprueba que los radios no pueden disminuir a la mitad. (C) Con la medición hecha pues no se ajusta a su hipótesis de que los radios disminuyen a la mitad.	**Medir** los radios de las circunferencias.	Utilizando una regla para medir los radios de las circunferencias.

A través del estudio del cambio se pretende que los estudiantes infieran que la velocidad de los puntos sobre cada circunferencia sigue aumentando sin cota, para esto podría utilizar frases como “va más rápido”, “en el mismo tiempo recorre cada vez más distancia”, entre otras.	(A) Se da mayor velocidad al recorrer una mayor distancia en un menor tiempo. (A) La pendiente de la recta da la misma información sobre el cambio de la velocidad. (A) Al ser el tiempo de traslación fijo y aumentar el tamaño de la trayectoria, debe aumentar la velocidad del planeta conforme se agregan más circunferencias. (C) Estudia el cambio de la rapidez del Planeta, y no de los puntos sobre cada circunferencia.	**Observar** los cambios de la distancia respecto del tiempo en cada gráfica. **Comparar** la pendiente de una gráfica a otra. **Estimar** la velocidad del planeta al agregar cada vez más circunferencias.	Considerando la distancia recorrida respecto del tiempo en cada gráfica. Relacionando la velocidad con la pendiente de la recta. Considerando el movimiento del planeta sobre la trayectoria.
Identificar el carácter estable del sistema en forma cualitativa, esto a través de frases como “cuando hay muchas circunferencias casi no cambia la forma de la trayectoria conforme se agregan más”, “tiende a parecerse a una…”.	(A) Conforme se agregan más circunferencias las distintas partes de una misma trayectoria se modifican. (A) La forma de la trayectoria se va pareciendo a una elipse conforme se agregan más circunferencias.	**Observar** los cambios en la forma de la trayectoria al agregar circunferencias. **Comparar** las diferencias en la trayectoria al agregar circunferencias.	Considerando los cambios en la forma de la trayectoria para diferentes partes de esta y en forma global. Considerando los cambios en la forma de la trayectoria en forma global.
Confrontar el cómo cambia la trayectoria del planeta (estabilidad) con lo que provoca el cambio. Se espera que requieran ayuda del docente, pues determinar cómo cambia y qué produce el	(A) La conservación del momento angular depende del radio y la velocidad angular del objeto, y en la situación se presentan los mismos parámetros y solamente se agrega la manera de la trayectoria del objeto. (A) Puede ser como un fractal de los arcos que se van haciendo, dependiendo de los	**Identificar** los parámetros en una noción física conocida. **Identificar** la similitud con una noción geométrica conocida.	Relacionando con la conservación del momento angular. Relacionando con la noción de fractal, sin

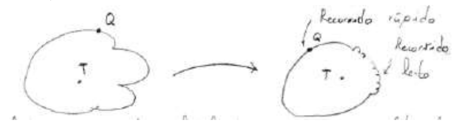
cambio es una tarea cognitivamente muy compleja para los fenómenos de determinación del estado estacionario (Farfán, 2012; Romero, 2016).	radios que se tengan, para establecerlo matemáticamente, va a ser como la ecuación de un fractal. (A) Mientras más círculos más bucles tienen que dar los planetas y cada círculo añadido tiene un radio menor que el anterior, por lo que su bucle será de menor longitud que el del círculo anterior. (A) Al aumentar el número de circunferencias, la distancia en la trayectoria es mayor, y por lo tanto, la rapidez con que se mueve tiene que aumentar para completar la trayectoria durante el ciclo. (A) Al aumentar el número de circunferencias el aporte del punto a la trayectoria es insignificante.	 **Comparar** los efectos sobre la forma de la trayectoria al aumentar el número de circunferencias. **Comparar** lo que se mantiene invariante —el periodo—, con lo que no —tamaño de la trayectoria, radios, velocidad de los puntos—. **Comparar** el aporte que proporciona a la trayectoria el punto al agregar cada vez más circunferencias.	explicar cómo es esa relación. Relacionando la cantidad de bucles con el tamaño de los radios, sin indicar cómo es esa relación. Prestando atención los cambios en el tamaño de la trayectoria y la velocidad de los puntos respecto del tiempo que tarda el planeta en completar la trayectoria. Prestando atención al aporte del punto al agregar cada vez más circunferencias.
Mediante esta segunda parte de la Tarea #1, reconocemos en el nivel de acción: - **Identificar** la similitud con una noción física o geométrica conocida. - **Observar** los cambios que dan al agregar circunferencias, ya sea en la forma de la trayectoria, en los radios de las circunferencias o en las distancias recorridas sobre cada circunferencia. - **Estimar** la medida de los radios y la velocidad del planeta al agregar cada vez más circunferencias. - **Medir** los radios de las circunferencias. - **Comparar** estados entre comportamientos distintos. - **Comparar localmente** los efectos sobre la forma de la trayectoria al aumentar el número de circunferencias. - **Comparar globalmente** el cambio en la forma de la trayectoria. - **Comparar con el infinito** el aporte que proporciona a la trayectoria agregar más circunferencias.			

6.1.2 Los invariantes de las acciones en la Tarea #1

Dadas las acciones identificadas en la sección anterior y el análisis realizado para la Tarea #1 —Anexo 9.7.2— se presenta una síntesis identificando, en el hacer de los estudiantes, los elementos de la acción y las relaciones entre dichos elementos —sobre qué lo hacen— y la simbolización de los elementos y las relaciones —por medio de qué lo hacen—, para así finalizar con el establecimiento de los invariantes de la acción.

Tabla 6-3. Identificación de los invariantes de la acción en la Tarea #1.

Acción **Identificar** la similitud con una noción física o geométrica conocida.	
¿Sobre qué objetos lo hace?	**¿Por medio de qué lo hace?** Simbolización de los elementos.
1. El comportamiento. 2. Los parámetros.	1. Verbal: La trayectoria. 2. Verbal: Velocidad angular y radio.
¿Sobre qué relaciones lo hace?	**¿Por medio de qué lo hace?** Simbolización de las relaciones.
1. La forma que toma la trayectoria es similar a un fractal. 2. La trayectoria se estabiliza debido a la conservación del momento angular.	1. Verbal: Puede ser como un fractal de los arcos que se van haciendo, dependiendo de los radios que se tengan. 2. Verbal: Podría tener relación con la conservación del momento angular ya que esto depende del radio y la velocidad angular del objeto, y aquí se presentan los mismos parámetros solamente se agrega la manera de la trayectoria del objeto.
Mediante un análisis de la frecuencia de la acción no se identificaron relaciones invariantes.	
Acción **Observar** los cambios que dan al agregar circunferencias, ya sea en la forma de la trayectoria, en los radios de las circunferencias o en las distancias recorridas sobre cada circunferencia.	
¿Sobre qué objetos lo hace?	**¿Por medio de qué lo hace?** Simbolización de los elementos.
1. El planeta *P* y la trayectoria, vistos desde la Tierra. 2. La sucesión de los radios de las circunferencias. 3. El planeta *Q* y la trayectoria. 4. Las pendientes de las rectas. 5. Las trayectorias para distinta cantidad de circunferencias.	1. Verbal: El planeta y la trayectoria. 2. Verbal: Los radios. 2. Algebraico: r_n es el radio de la circunfencia *n*-ésima. 3. Verbal: El planeta y la trayectoria. 4. Verbal: La pendiente. 5. Verbal: La trayectoria.
¿Sobre qué relaciones lo hace?	**¿Por medio de qué lo hace?** Simbolización de las relaciones.

<table>
<tr><td>1. El bucle sobre la trayectoria.</td><td>1. Verbal: En el modelo 4 se puede ver un retroceso al dar un giro completo y regresar al mismo punto.
1. Icónico:
</td></tr>
<tr><td>2. La medida de los radios disminuye.</td><td>2. Verbal: En la figura se puede ver que los radios disminuyen.
2. Algebraico: $r_n > r_{n+1}$ para todo n natural</td></tr>
<tr><td>3. La distancia recorrida por Q en función del tiempo.</td><td>3. Verbal: Conforme se agregan más círculos los planetas tienen que recorrer mayor distancia en un mismo tiempo.
3. Icónico:
</td></tr>
<tr><td>4. Entre más cercana la recta al eje Y mayor pendiente.
4. Distancia recorrida por cada punto sobre las rectas en función del tiempo.</td><td>4. Verbal: Entre más cerca esté del Y es mayor su velocidad.
4. Verbal: Por que recorre mayor distancia en menos tiempo.</td></tr>
<tr><td>5. La cantidad de oscilaciones en la trayectoria depende del número de circunferencias.</td><td>5. Verbal: El número de oscilaciones aumenta al aumentar el número de circunferencias y cada vez son más pequeñas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Mediante un análisis de la frecuencia de la acción se identificó como relaciones invariantes:
- El bucle que realiza el planeta sobre la trayectoria explica el fenómeno de retrogradación.
- La medida de los radios disminuye.
- A mayor distancia se requiere mayor velocidad para recorrer en un mismo tiempo.
- A mayor pendiente mayor rapidez de movimiento del punto sobre cada circunferencia.
- A mayor número de circunferencias, mayor número de oscilaciones sobre la trayectoria, pero cada vez más pequeñas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Acción
Estimar la medida de los radios y la velocidad del planeta al agregar cada vez más circunferencias.</td></tr>
<tr><td>¿Sobre qué objetos lo hace?</td><td>¿Por medio de qué lo hace?
Simbolización de los elementos.</td></tr>
<tr><td>1. La sucesión de los radios de las circunferencias.

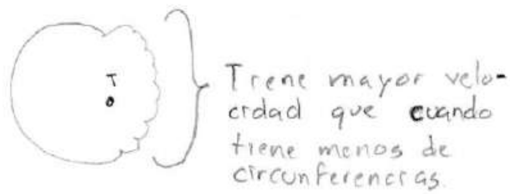
2. El planeta Q y la trayectoria.</td><td>1. Verbal: Los radios.

2. Verbal: El planeta</td></tr>
<tr><td>¿Sobre qué relaciones lo hace?</td><td>¿Por medio de qué lo hace?
Simbolización de las relaciones.</td></tr>
</table>

Resultados

<table>
<tr><td>1. La medida de los radios disminuye.

2. La distancia recorrida por Q en función del tiempo.</td><td>1. Verbal: Pareciera que cada circunferencia es la mitad de la anterior, tiene un radio de la mitad de la anterior.

2. Verbal: Se vuelve aparentemente más rápido en ciertos puntos de la órbita mientras el número de circunferencias aumenta.
2. Icónico:

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Mediante un análisis de la frecuencia de la acción se identificó como relaciones invariantes:
- La medida de los radios disminuye.
- A mayor distancia se requiere mayor velocidad para recorrer en un mismo tiempo.</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Acción
Medir los radios de las circunferencias.</td></tr>
<tr><td align="center">¿Sobre qué objetos lo hace?</td><td align="center">¿Por medio de qué lo hace?
Simbolización de los elementos.</td></tr>
<tr><td>1. La sucesión de los radios de las circunferencias.</td><td>1. Verbal: Los radios.</td></tr>
<tr><td align="center">¿Sobre qué relaciones lo hace?</td><td align="center">¿Por medio de qué lo hace?
Simbolización de las relaciones.</td></tr>
<tr><td>1. La medida de los radios disminuye.</td><td>1. Verbal/Numérico: Estos son 2.8, este sí es de 1.4 y este es de 6 milímetros.
1. Verbal/Numérico: Encontramos que la primera era la mitad, se aproximaba a la mitad del primer radio, y la tercera se aproximaba a la tercera parte del primer radio, pero la cuarta ya no nos coincidió que fuera la cuarta parte; o medimos mal.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Mediante un análisis de la frecuencia de la acción se identificó como relación invariante:
- La medida de los radios disminuye.</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Acción
Comparar estados en un mismo comportamiento o entre comportamientos distintos.</td></tr>
<tr><td align="center">¿Sobre qué objetos lo hace?</td><td align="center">¿Por medio de qué lo hace?
Simbolización de los elementos.</td></tr>
<tr><td>1. La Tierra y el planeta a lo largo de su trayectoria.

2. El vector velocidad y la trayectoria de planeta.

3. Los radios y el radio de la primera circunferencia.

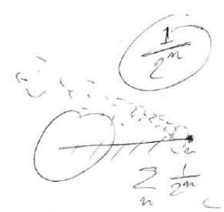
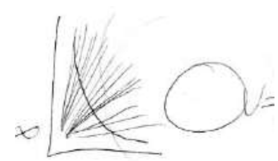
4. Las pendientes.</td><td>1. Verbal: La Tierra y el Sol.

2. Verbal: Vector velocidad y trayectoria.

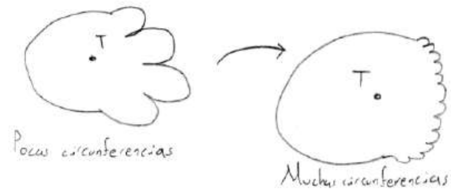
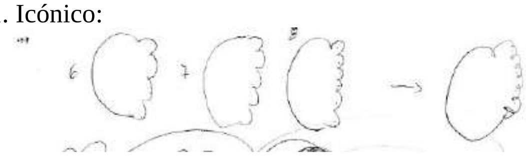
3. Algebraico: R es el radio de la primera circunferencia y n el número de circunferencias.

4. Verbal: Las pendientes.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>¿Sobre qué relaciones lo hace?</th><th>¿Por medio de qué lo hace?
Simbolización de las relaciones.</th></tr>
<tr><td>1. Distancia entre la Tierra y el planeta.</td><td>1. Verbal: Suponiendo que el planeta es el Sol, en el punto más cerca de la Tierra es el verano, conforme se aleja el Sol es el otoño, cuando más lejos está es invierno y cuando se vuelve a acercar es primavera.
1. Icónico:


1. Verbal: Entre más cerca estén más luminosos se ven y entre más alejados menos luminosos.</td></tr>
<tr><td>2. El vector velocidad es tangente a la trayectoria.</td><td>2. Verbal: El vector velocidad es tangente a la trayectoria.</td></tr>
<tr><td>3. La medida de los radios varía según $\frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{2^n}}$, donde $\boldsymbol{R}$ es el radio de la primera circunferencia.</td><td>3. Algebraico: $\frac{R}{2^n}$.
3. Icónico:
</td></tr>
<tr><td>4. A mayor pendiente, mayor rapidez.</td><td>4. Verbal: La pendiente en la gráfica de los puntos de mayores circunferencias es mayor a las de menor número de circunferencias.
4. Icónico:
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Mediante un análisis de la frecuencia de la acción se identificó como relaciones invariantes:
- La variación en la distancia entre el planeta y la Tierra explica las estaciones del año.
- A mayor pendiente, mayor rapidez de movimiento del punto.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Acción
Comparar localmente los efectos sobre la forma de la trayectoria al aumentar el número de circunferencias.</td></tr>
<tr><th>¿Sobre qué objetos lo hace?</th><th>¿Por medio de qué lo hace?
Simbolización de los elementos.</th></tr>
<tr><td>1. Las trayectorias para distinta cantidad de circunferencias.</td><td>1. Verbal: La trayectoria.</td></tr>
</table>

¿Sobre qué relaciones lo hace?	**¿Por medio de qué lo hace?** Simbolización de las relaciones.
1. La cantidad de oscilaciones en la trayectoria depende del número de circunferencias.	1. Verbal: El número de bucles aumenta, teniendo uno de mayor tamaño y el resto disminuyendo en tamaño.
Mediante un análisis de la frecuencia de la acción se identificó como relaciones invariantes: - La distancia recorrida sobre la trayectoria aumenta, al aumentar el número de circunferencias.	
Acción **Comparar globalmente** el cambio en la forma de la trayectoria.	
¿Sobre qué objetos lo hace?	**¿Por medio de qué lo hace?** Simbolización de los elementos.
1. Las distintas trayectorias al agregar circunferencias. 2. El periodo, el tamaño de la trayectoria y la rapidez.	1. Verbal: La trayectoria. 2. Verbal: El periodo, la trayectoria y la velocidad.
¿Sobre qué relaciones lo hace?	**¿Por medio de qué lo hace?** Simbolización de las relaciones.
1. Distancia recorrida sobre la trayectoria aumenta, al aumentar el número de circunferencias. 2. Dado un periodo fijo, si la trayectoria aumenta de tamaño también lo debe hacer la velocidad.	1. Verbal: La distancia que recorre el planeta aumenta al aumentar el número de circunferencias. 2. Verbal: Al aumentar el número de circunferencias en el modelo, la distancia en la trayectoria es mayor, y por lo tanto, la rapidez con que se mueve tiene que aumentar para completar la trayectoria durante el ciclo.
Mediante un análisis de la frecuencia de la acción se identificó como relaciones invariantes: - La distancia recorrida sobre la trayectoria aumenta, al aumentar el número de circunferencias. - Dado un periodo fijo, si la trayectoria aumenta de tamaño también lo debe hacer la velocidad.	
Acción **Comparar con el infinito** el aporte que proporciona a la trayectoria agregar más circunferencias.	
¿Sobre qué objetos lo hace?	**¿Por medio de qué lo hace?** Simbolización de los elementos.
1. Las trayectorias para distinta cantidad de circunferencias. 2. La trayectoria, los radios y la velocidad.	1. Verbal: La trayectoria. 2. Verbal: La trayectoria, los radios y la velocidad.
¿Sobre qué relaciones lo hace?	**¿Por medio de qué lo hace?** Simbolización de las relaciones.

1. La trayectoria toma una forma definida, al agregar muchas circunferencias.	1. Verbal: Parece que la trayectoria tiende a una elipse con la Tierra en uno de los focos. 1. Verbal: Observé la aparente convergencia hacia una trayectoria muy bien definida. 1. Icónico:  1. Verbal: Se van agregando cada vez más pequeños arcos que modelará una curva suave cuando el número de circunferencias agregadas sea muy grande. 1. Icónico: 
2. Agregar una circunferencia muy pequeña y un punto sobre esta que se mueve muy rápido no provoca cambios significativos en la forma de la trayectoria.	2. Verbal: Conforme se va agregando otra circunferencia, la contribución al giro se desplaza en torno al centro de masa del planeta, con lo que no se sale de la forma bien definida que se respondió en el inciso.
Mediante un análisis de la frecuencia de la acción se identificó como relaciones invariantes: - La trayectoria toma una forma definida, al agregar muchas circunferencias. - Agregar una circunferencia muy pequeña y un punto sobre esta que se mueve muy rápido no provoca cambios significativos en la forma de la trayectoria.	

6.1.3 Las acciones en la Tarea #2

Se presenta, en formato de tabla, una síntesis del análisis realizado para la Tarea #2 —Anexo 9.7.3— identificando las prácticas de los estudiantes en el nivel de acción —qué hacen y cómo lo hacen—nos enfocaremos en las intencionalidades del diseño como hilo conductor.

Tabla 6-4. Caracterización de acciones en la Tarea #2 – Parte I.

<table>
<tr><td colspan="4">Intención de la Tarea #2 - Parte I: Se busca que el estudiante comprenda cómo se comporta el sistema, y la relación que guarda con los datos suministrados por la situación planteada.</td></tr>
<tr><th rowspan="2">Intencionalidad
(Análisis a priori)</th><th rowspan="2">Argumentos (A)
Confrontaciones (C)</th><th colspan="2">Práctica en el nivel de acción</th></tr>
<tr><th>¿Qué hace?</th><th>¿Cómo lo hace?</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Reconocer el comportamiento del movimiento de los puntos sobre cada circunferencia.</td><td>(A) El ángulo es la suma de un ángulo inicial más el cambio del ángulo, dicho cambio es la velocidad angular por el tiempo.</td><td>Comparar los valores siguientes con el estado inicial.</td><td>Considerando que el ángulo es el resultado de un ángulo inicial más el resultado del movimiento respecto del tiempo.</td></tr>
<tr><td>(A)<table><tr><th>Meses</th><th>OTR</th><th>QRP</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>6</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td><td>9</td></tr><tr><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td></tr><tr><td>t</td><td>t</td><td>3t</td></tr></table></td><td>Seriar los valores de los ángulos en la tabla suministrada.</td><td>Completando la tabla proporcionada</td></tr>
<tr><td>(A) La velocidad es igual a la distancia (angular) recorrida dividida por el tiempo.</td><td>Identificar los parámetros en una noción física conocida.</td><td>Utilizando la relación física, velocidad es igual a distancia entre tiempo.</td></tr>
<tr><td>(A) Considerando el sector circular como un triángulo equilátero y utilizando la ley de cosenos.</td><td>Geometrizar la relación entre el ángulo y la distancia recorrida.</td><td>Identificando una figura geométrica conocida sobre la cual trabajar.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Construir las primeras tres sumas parciales de dos series trigonométricas, pero con un significado asociado al fenómeno -las coordenadas del planeta- que permite determinar la distancia del planeta a la Tierra. Se espera que los estudiantes recurran a dibujar</td><td>(A) Los puntos pueden considerarse vectores en el plano y parametrizarse utilizando coordenadas polares.
(A) Para determinar el cambio se puede considerar un sistema de coordenadas centrado en el centro de la circunferencia que se agrega.</td><td>Identificar un sistema de referencia adecuado.</td><td>Utilizando coordenadas polares y considera los puntos como vectores en el plano y/o utilizando un cambio de coordenadas.</td></tr>
<tr><td>(A) La componente siguiente es la componente anterior más una diferencia.
A) Los puntos pueden considerarse vectores en el plano.</td><td>Comparar los casos conforme se agregan circunferencias.</td><td>Considerando los cambios en las componentes del punto que representa al planeta y/o considerando el caso como una suma de vectores.</td></tr>
</table>

triángulos rectángulos sobre las figuras proporcionadas para identificar las razones trigonométricas involucradas, aunque para hacer la generalización a cualquier valor del tiempo se requiera que la función trigonométrica esté construida previamente (Montiel, 2011).	(A) Considerando el triángulo rectángulo que se forma y aplicando razones trigonométricas. (A) Para utilizar la fórmula de la distancia entre dos puntos se necesitan las coordenadas.	**Geometrizar** la posición del planeta respecto del sistema de coordenadas. **Medir** la distancia del planeta a la tierra.	Identificando una figura geométrica conocida sobre la cual trabajar. Utilizando la fórmula de distancia entre dos puntos, la norma de un vector y/o el teorema de Pitágoras.
Mediante esta primera parte de la Tarea #2, reconocemos en el nivel de acción: - **Comparar** estados en un mismo comportamiento o entre comportamientos distintos. - **Seriar** los valores de los ángulos en la tabla suministrada. - **Identificar** los parámetros en una noción física conocida. - **Identificar** un sistema de referencia adecuado. - **Geometrizar** las relaciones involucradas (ángulo-distancia, posición-tiempo). - **Medir** la distancia del planeta a la tierra.			

Tabla 6-5. Caracterización de acciones en la Tarea #2 – Parte II.

Intención de la Tarea #2 - Parte II: Se proporciona un applet con el fin de visualizar la estabilidad del sistema. A partir de manipular el número de circunferencias se podrá analizar el comportamiento del sistema, al estudiar cómo cambia la trayectoria del planeta.			
Intencionalidad (Análisis a priori)	**Argumentos (A) Confrontaciones (C)**	**Práctica en el nivel de acción**	
		¿Qué hace?	**¿Cómo lo hace?**
Identificar que la trayectoria del planeta se estabiliza conforme se agregan más circunferencias. Se espera que la respuesta surja por sí sola con base en el trabajo realizado en la Tarea #1.	(A) La trayectoria comienza a tomar una forma específica conforme se agregan más circunferencias. (A) Conforme se agregan más circunferencias las distintas partes de una misma trayectoria se modifican.	**Comparar** las diferencias en la trayectoria al agregar circunferencias. **Observar** los cambios en la forma de la trayectoria al agregar circunferencias.	Considerando los cambios en la forma de la trayectoria en forma global. Considerando los cambios en la forma de la trayectoria para diferentes partes de esta.

Resultados

Propiciar un análisis numérico de la variación de una suma parcial a otra. Percatarse que la trayectoria del planeta no es estable para todos los valores del tiempo.	(A) Para cierto tiempo, el planeta oscila cada vez más cerca de un punto/valor específico al agregar circunferencias. (A) Para cierto tiempo, el planeta se aleja del centro de la circunferencia conforme se agregan circunferencias. (A) Para cierto tiempo, el valor de la distancia aumenta conforme se agregan circunferencias.	**Comparar** la distancia del planeta a la Tierra al agregar circunferencias.	Considerando los cambios en el valor numérico de la distancia al agregar circunferencias.
Matematizar el fenómeno como una generalización de los resultados obtenidos en la Tarea #2 - Parte I.	(A) Teniendo los datos de radio y velocidad, se hace lo mismo que cuando se calculó la fórmula para una, dos y tres circunferencias.	**Identificar** la regularidad a partir de los primeros términos de la suma.	Aplicando la misma estrategia de solución que en los resultados obtenidos en la Tarea #2 – Parte I. Agregando los términos necesarios a las fórmulas construidas en la Tarea #2 – Parte I.
Interpretar la matemática involucrada en el fenómeno físico, relacionar la estabilidad de la trayectoria del planeta con el límite de las sumas parciales involucradas en la fórmula calculada anteriormente.	(A) Converge para cada valor de t, sin tener certeza de lo que sucede en $t = \pi$ y $t = 2\pi$. (A) Converge para cada valor de t, este valor es más pequeño conforme t se aleje que π y 2π, justo en esos valores P se aleja horizontalmente.	**Distinguir** las propiedades de la trayectoria en la fórmula.	Considerando la convergencia y la forma de la trayectoria.
Interpretar la matemática involucrada en el fenómeno físico, relacionar la estabilidad de la trayectoria del planeta con la convergencia de las series involucradas en la fórmula calculada para la distancia de planeta P a la	(A) En $t = 0$, $t = \pi$ y $t = 2\pi$ se alcanzan máximos y mínimos que crecen y decrecen, respectivamente, al agregar más circunferencias. (A) La serie de ordenadas toma un valor constante en 1 y -1. Se mantiene por un intervalo de $-\pi$ y π. (A) la serie de abscisas parece que converge en $(0, \pi)$ (C) la serie de abscisas toma un valor constante en $n\pi$.	**Reconocer** valores en los que se alcanzan máximos y mínimos de las sumas parciales. **Comparar** los valores máximos y mínimos de una suma parcial a otra.	Considerando los cambios en las gráficas en forma local. Considerando los cambios en las gráficas en forma global.

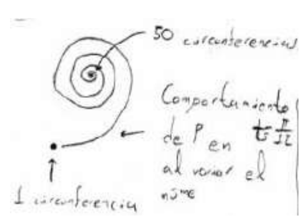
Tierra. Se tiene como hipótesis que los estudiantes respondan que la serie de las ordenadas diverge.	(C) La serie de ordenadas diverge cuando se acerca a los valores de 0 y múltiplos de π. (A) El comportamiento de la gráfica se aproxima a una constante, por lo que converge. (C) La serie de ordenadas se acerca a dos valores distintos, por tanto, diverge. (C) La función resultante de la serie de ordenadas tiene picos, pero los senos no tienen picos. (C) La serie de abscisas diverge, nunca hemos visto convergencias así. (C) La serie de las ordenadas diverge en $t = \pi$. (C) La serie de las ordenadas diverge porque se parece a la sucesión 1, -1, 1, -1, … y esa diverge.	**Comparar** las diferencias en las gráficas de una suma parcial a otra.	Relacionando las gráficas con la trayectoria del planeta.
Provocar que la periodicidad sea un resultado de la serie y no una condición de la función que se está representando. Pues la serie, como objeto matemático, posee ciertas características que no tienen sentido en el fenómeno que se está modelando.	(A) Converge a una función escalonada. (C) La serie converge a 1, porque para $t = \pi/2$ converge a 1. (A) Converge a la misma función, pues se sigue trabajando con valores del tiempo positivos. (A) Al ser funciones impartes solo provoca reflexiones. (C) Para $t = 0$ la serie converge a la suma de los radios de las circunferencias. (A) Considerando el tiempo negativo el planeta se movería en sentido horario. (A) Sería extender la gráfica en forma periódica hacia la izquierda.	**Identificar** la naturaleza del valor de convergencia. **Evaluar** la serie en un tiempo determinado para determinar la convergencia. **Extender** el valor de convergencia dado en la pregunta anterior. **Comparar** el movimiento del planeta. **Observar** el movimiento del planeta.	Considerando lo realizado en la pregunta anterior. Considerando un valor del tiempo en que sea más directo determinar la convergencia de la serie. Considerando que se sigue trabajando con valores del tiempo positivos. Considerando el cambio respecto del movimiento para tiempo positivo. Considerando ángulos negativos.
Mediante esta segunda parte de la Tarea #2, reconocemos en el nivel de acción: - **Comparar** estados en un mismo comportamiento o entre comportamientos distintos. - **Comparar globalmente** el cambio en la forma de la trayectoria.			

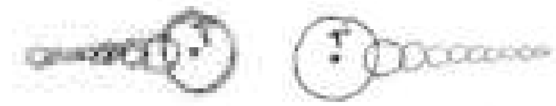
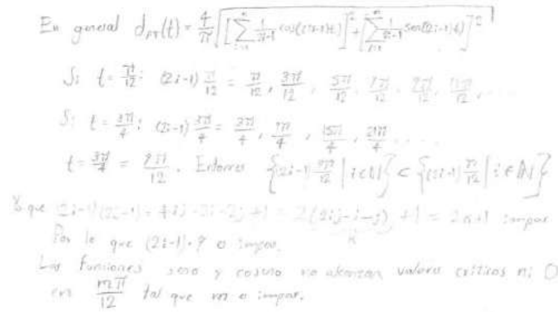
- **Comparar con el infinito** el aporte que proporciona a la trayectoria agregar más circunferencias. - **Observar** los cambios en el movimiento del planeta considerar distintos valores del tiempo. - **Reconocer** valores en los que se alcanzan máximos y mínimos de las sumas parciales. - **Identificar** la regularidad a partir de los primeros términos de la suma. - **Distinguir** las propiedades de la trayectoria en la fórmula. - **Identificar** la naturaleza del valor de convergencia. - **Extender** el valor de convergencia dado en la pregunta anterior.

6.1.4 Los invariantes de las acciones en la Tarea #2

Dadas las acciones identificadas en la sección anterior y el análisis realizado para la Tarea #2 —Anexo 9.7.4— se presenta una síntesis identificando, en el hacer de los estudiantes, los elementos de la acción y las relaciones entre dichos elementos —sobre qué lo hacen— y la simbolización de los elementos y las relaciones —por medio de qué lo hacen—, para así finalizar con el establecimiento de los invariantes de la acción.

Tabla 6-6. Identificación de los invariantes de la acción en la Tarea #2.

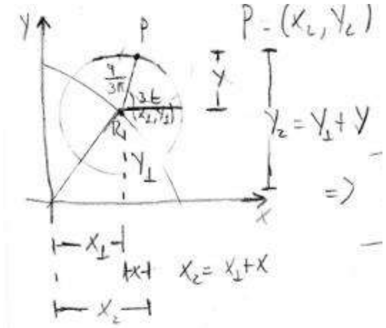
Acción **Comparar** estados en un mismo comportamiento o entre comportamientos distintos.	
¿Sobre qué objetos lo hace?	**¿Por medio de qué lo hace?** Simbolización de los elementos.
1. El ángulo con el valor inicial. 2. El planeta, la Tierra y un tiempo dado.	1. Algebraico: θ_k es el valor del ángulo y θ_0 su valor inicial. 2. Algebraico: P el planeta y T la Tierra.
¿Sobre qué relaciones lo hace?	**¿Por medio de qué lo hace?** Simbolización de las relaciones.
1. El ángulo en el tiempo t es igual al ángulo inicial más la velocidad por el tiempo. 2. La distancia entre el planeta y la Tierra, en un tiempo dado.	1. Algebraico: $\theta_k = \theta_0 + 1\frac{rad}{mes}t$. 2. Verbal: Para $t = \frac{\pi}{12}$ observamos una tendencia a la estabilidad, convergiendo la distancia al planeta a un valor específico. 2. Icónico:  1. Verbal: Para $t = \pi$ y $t = 2\pi$, entre más circunferencias se agregan la distancia PT va aumentando. 1. Icónico: Para $t = \pi$ y $t = 2\pi$.

<table>
<tr><td></td><td>
1. Algebraico:
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Mediante un análisis de la frecuencia de la acción se identificó como relación invariante.
- La distancia entre el planeta y la Tierra se estabiliza para algunos tiempos y para otros no.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Acción
Comparar globalmente el cambio en la forma de la trayectoria.</td></tr>
<tr><td>¿Sobre qué objetos lo hace?</td><td>¿Por medio de qué lo hace?
Simbolización de los elementos.</td></tr>
<tr><td>1. Las coordenadas de los puntos.

2. Los valores máximo y mínimo para distintas sumas parciales.</td><td>1. Algebraico: Las coordenadas de los puntos sobre la primera y segunda circunferencias son (x_1, y_1) y (x_2, y_2), respectivamente.

2. Verbal: Máximo y mínimo.</td></tr>
<tr><td>¿Sobre qué relaciones lo hace?</td><td>¿Por medio de qué lo hace?
Simbolización de las relaciones.</td></tr>
</table>

Resultados

1. Considerando los puntos como vectores, para determinar las coordenadas del punto siguiente basta con sumar el vector del punto que se agrega. 1. Para determinar las coordenadas del punto siguiente basta con sumar en cada coordenada la diferencia aportada por la nueva circunferencia.	1. Algebraico: $P = R + r_2(\cos\theta_2 , \operatorname{sen}\theta_2)$. 1. Icónico:  1. Algebraico: $\begin{array}{l} x_2 = x_1 + x \\ y_2 = y_1 + y \end{array}$ 1. Verbal: De forma muy análoga al caso de dos circunferencias, observamos que hay que sumar la contribución de la nueva componente.
2. La serie de cosenos inicia en un máximo y alcanza un mínimo. La serie de senos inicia en un punto máximo y alcanza un mínimo. En $\boldsymbol{t = \pi}$ el mínimo es cada vez menor conforme se agregan circunferencias.	2. Verbal: La serie de cosenos inicia en un punto máximo alcanza un mínimo y vuelve a recuperar un punto máximo en un determinado. 2. Verbal: La serie de senos inicia en un punto máximo se mantiene por un intervalo de tiempo y después alcanza un mínimo donde de igual manera se mantiene constante y el proceso se repite. 2. Verbal: Tiene un valor mínimo en π que decrece cuando aumenta el número de circunferencias. En los valores de $t = 0$, $t = 2\pi$, crece cuando aumenta el número de circunferencias.
Mediante un análisis de la frecuencia de la acción se identificó como relaciones invariantes: - Considerando los puntos como vectores, para determinar las coordenadas del punto siguiente basta con sumar el vector del punto que se agrega. - Para determinar las coordenadas del punto siguiente basta con sumar en cada coordenada la diferencia aportada por la nueva circunferencia.	
Acción **Comparar con el infinito** el aporte que proporciona a la trayectoria/gráfica agregar más circunferencias.	
¿Sobre qué objetos lo hace?	**¿Por medio de qué lo hace?** Simbolización de los elementos.
1. Las trayectorias. 2. Las gráficas de una suma parcial a otra.	1. Verbal: La trayectoria. 2. Verbal: La gráfica.
¿Sobre qué relaciones lo hace?	**¿Por medio de qué lo hace?** Simbolización de las relaciones.

<table>
<tr><td>1. La forma de la trayectoria.

2. La serie converge a una función escalonada.</td><td>1. Verbal: La trayectoria comienza a tomar una figura particular.
1. Verbal: En la parte central los bucles parecen juntarse más hasta formar dos líneas paralelas.
1. Verbal: Conforme se le agregan mas circunferencias la parte central de la trayectoria se acerca a una recta y los extremos a circunferencias.

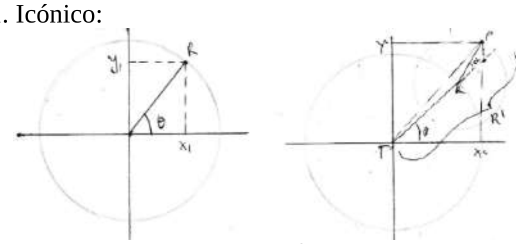
2. Verbal: Toma un valor constante en $n\pi$.
2. Verbal: Toma un valor constante en 1 y -1, y se mantiene por un intervalo de y $-\pi$ y π.
2. Verbal: Parece que converge en intervalos abierto de 0 y π y diverge cuando se acerca a los valores de 0 y múltiplos de π.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Mediante un análisis de la frecuencia de la acción se identificó como relación invariante:
- Al agregar muchas circunferencias la trayectoria toma una forma definida.
- La serie converge a una función escalonada.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Acción
Seriar los valores de los ángulos en la tabla suministrada.</td></tr>
<tr><td>¿Sobre qué objetos lo hace?</td><td>¿Por medio de qué lo hace?
Simbolización de los elementos.</td></tr>
<tr><td>1. El tiempo y la medida del ángulo.</td><td>1. Algebraico: t es el tiempo en meses, $< OTR$ y $< QRP$ las medidas de los ángulos.</td></tr>
<tr><td>¿Sobre qué relaciones lo hace?</td><td>¿Por medio de qué lo hace?
Simbolización de las relaciones.</td></tr>
<tr><td>1. Para cada incremento de una unidad en el tiempo, la medida del ángulo aumenta la cantidad de unidades dada por la velocidad angular.
1. Para un tiempo dado el valor del ángulo es igual a la velocidad por el tiempo.</td><td>1. Numérico:
<table><tr><td>Meses</td><td>OTR</td><td>QRP</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>6</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td><td>9</td></tr><tr><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td></tr><tr><td>t</td><td>t</td><td>3t</td></tr></table>1. Algebraico: Para el mes t, los valores de los ángulos en la primera y segunda circunferencia son t y $3t$, respectivamente.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Mediante un análisis de la frecuencia de la acción se identificó como relaciones invariantes:
- Para cada incremento de una unidad en el tiempo, la medida del ángulo aumenta la cantidad de unidades dada por la velocidad angular.
- Para un tiempo dado el valor del ángulo es igual a la velocidad por el tiempo.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Acción
Identificar los parámetros en una noción física conocida.</td></tr>
<tr><td>¿Sobre qué objetos lo hace?</td><td>¿Por medio de qué lo hace?
Simbolización de los elementos.</td></tr>
</table>

Resultados

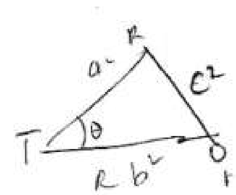
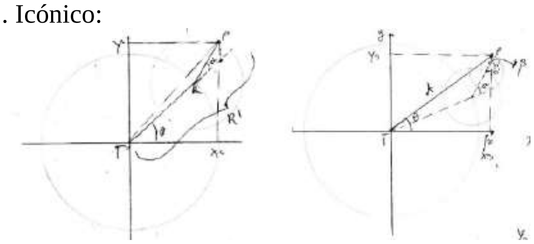
<table>
<tr><td>1. Parámetros velocidad, distancia y tiempo.</td><td>1. Algebraico: ω es la veocidad angular, θ la medida del ángulo y T el tiempo.</td></tr>
<tr><td>¿Sobre qué relaciones lo hace?</td><td>¿Por medio de qué lo hace?
Simbolización de las relaciones.</td></tr>
<tr><td>1. La velocidad es igual a la distancia entre el tiempo.</td><td>1. Algebraico: $\omega = \frac{\theta}{T} \Rightarrow 1\frac{rad}{mes} = \frac{\theta}{t} \Rightarrow t\, 1\frac{rad}{mes} = \theta$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Mediante un análisis de la frecuencia de la acción no se identificaron relaciones invariantes.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Acción
Identificar un sistema de referencia adecuado.</td></tr>
<tr><td>¿Sobre qué objetos lo hace?</td><td>¿Por medio de qué lo hace?
Simbolización de los elementos.</td></tr>
<tr><td>1. El ángulo y los radios.

2. Centro de cada circunferencia.</td><td>1. Algebraico: θ es el ángulo en meses, r_1 y r_2 los radios de la primera y segunda circunferencias, respectivamente.

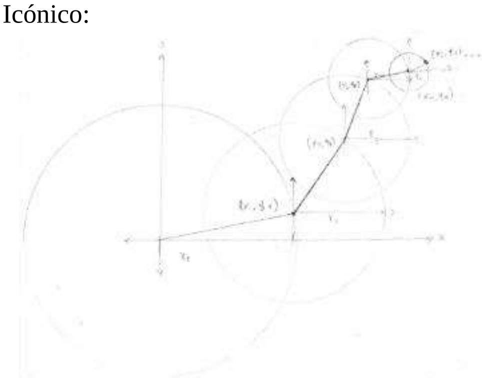
2. Verbal/Algebraico: Punto R como nuevo origen.</td></tr>
<tr><td>¿Sobre qué relaciones lo hace?</td><td>¿Por medio de qué lo hace?
Simbolización de las relaciones.</td></tr>
<tr><td>1. Parametrizar utilizando coordenadas polares.

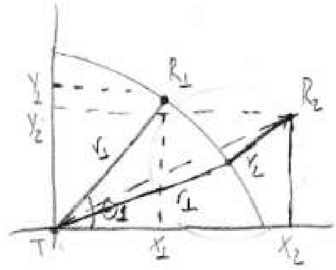
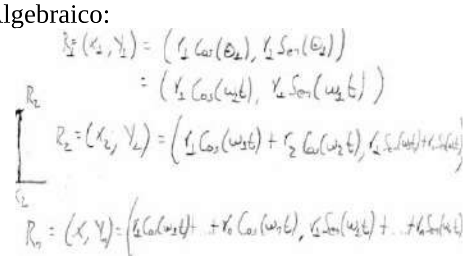
2. Cambio de sistema coordenadas, a uno cuyo origen sea el centro de la última circunferencia.</td><td>1. Icónico:

1. Algebraico: $x_1 = TR \text{ Cos } \theta$
$x_1 = TR \text{ Sen } \theta$
1. Algebraico: $(x_1, y_1) = r_1(\cos(\theta_1), \text{sen}(\theta_1))$, $(x_2, y_2) = r_1(\cos(\theta_1), \text{sen}(\theta_1)) + r_2(\cos(\theta_2), \text{sen}(\theta_2))$.

2. Verbal: [VE1]-2-|01:08:22|
H3: Entonces si nos fijáramos aquí ((se refiere al punto R)) como una especie de nuevo origen, podríamos hacer exactamente el mismo proceso que hicimos aquí ((se refiere al cálculo de las coordenadas de R)) y obtener que la distancia de este punto a este punto ((se refiere a la distancia de R a P)).</td></tr>
<tr><td colspan="2">Mediante un análisis de la frecuencia de la acción se identificó como relaciones invariantes:
- Parametrizar utilizando coordenadas polares.
- Cambio de sistema coordenadas, a uno cuyo origen sea el centro de la última circunferencia.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Acción
Geometrizar las relaciones involucradas (ángulo-distancia, posición-tiempo).</td></tr>
</table>

¿Sobre qué objetos lo hace?	**¿Por medio de qué lo hace?** Simbolización de los elementos.
1. El ángulo, el radio y la secante. 2. El planeta y la Tierra, en el sistema de coordenadas.	1. Algebraico: θ es el ángulo entre los lados a y b, ambos con medida igual al radio de la circunferencia. 2. Icónico: —ver la simbolización de las relaciones—.
¿Sobre qué relaciones lo hace?	**¿Por medio de qué lo hace?** Simbolización de las relaciones.
1. Ley de cosenos sobre el triángulo isósceles. 2. El triángulo rectángulo cuya hipotenusa corresponde al segmento cuyos extremos son el planeta y la Tierra, y cuyos catetos corresponden a las coordenadas del planeta (considerando un sistema de coordenadas cuyo origen sea la Tierra).	1. Icónico:  1. Algebraico: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$. 2. Icónico: 
Mediante un análisis de la frecuencia de la acción se identificó como relación invariante: - El triángulo rectángulo cuya hipotenusa corresponde al segmento cuyos extremos son el centro y el punto sobre la circunferencia, y cuyos catetos corresponden a las coordenadas de ese punto sobre la circunferencia (considerando un sistema de coordenadas cuyo origen sea el centro de la circunferencia).	
Acción **Medir** la distancia del planeta a la tierra.	
¿Sobre qué objetos lo hace?	**¿Por medio de qué lo hace?** Simbolización de los elementos.
1. El planeta y la Tierra.	1. Algebraico: P el planeta y T la Tierra.
¿Sobre qué relaciones lo hace?	**¿Por medio de qué lo hace?** Simbolización de las relaciones.

1. La norma del vector.	1. Algebraico: $\lvert\vec{P}\rvert = \left((r_1 \cos\theta_1 + r_2 \cos\theta_2)^2 + (r_1 \operatorname{sen}\theta_1 + r_2 \operatorname{sen}\theta_2)\right)^{1/2}$.
1. Fórmula de la distancia de un punto al origen.	1. Algebraico: $\overline{PT} = \sqrt{x^2 + y^2}$.
1. Fórmula de la distancia entre dos puntos.	1. Algebraico: $\overline{PT} = \sqrt{({y_2}^2 - 0)^2 + ({x_2}^2 - 0)^2} = \sqrt{{y_2}^2 + {x_2}^2}$.
1. Teorema de Pitágoras.	1. Algebraico: $r^2 = {x_2}^2 + {y_2}^2, A^2 = {x_3}^2 + {y_3}^2$.
Mediante un análisis de la frecuencia de la acción se identificó como relación invariante: - Norma de un vector. Fórmula de Distancia entre dos puntos. Teorema de Pitágoras.	
Acción **Observar** los cambios en el movimiento del planeta considerar distintos valores del tiempo.	
¿Sobre qué objetos lo hace?	**¿Por medio de qué lo hace?** Simbolización de los elementos.
1. El planeta y el tiempo.	1. Verbal: El planeta 1. Algebraico: t es el tiempo.
¿Sobre qué relaciones lo hace?	**¿Por medio de qué lo hace?** Simbolización de las relaciones.
1. El movimiento del planeta sobre la trayectoria.	1. Verbal: Valores de $t < 0$ indican planetas moviéndose en sentido horario, lo cual no tiene sentido en el modelo propuesto. 1. Verbal: Tiene sentido matemáticamente, ya que equivale a invertir el sentido de giro. Y ahí sólo cambiaría el signo de los términos de la serie, la cual convergería a $-\frac{\pi}{4}$. Pero físicamente no tiene sentido el tiempo negativo. 1. Verbal: No tiene sentido considerarlos, porque ni siquiera implican un retroceso. En caso de converger, convergería al mismo valor en las ordenadas.
Mediante un análisis de la frecuencia de la acción se identificó como relación invariante: - Considerar el tiempo negativo no tiense sentido en el fenómeno físico. Matematicamente indicaría movimiento en sentido horario.	
Acción **Reconocer** valores en los que se alcanzan máximos y mínimos de las sumas parciales.	
¿Sobre qué objetos lo hace?	**¿Por medio de qué lo hace?** Simbolización de los elementos.
1. El valor de la suma parcial para diferentes tiempos.	1. Verbal: Los máximos y mínimos.
¿Sobre qué relaciones lo hace?	**¿Por medio de qué lo hace?** Simbolización de las relaciones.

1. En la suma de las abscisas la función varía de un máximo a un mínimo y luego del mínimo al máximo. 1. La serie de senos inicia en un punto máximo y alcanza un mínimo. 2. Para la serie de consenos, los máximos y los mínimos son la suma de los radios.	1. Verbal: La serie de cosenos inicia en un punto máximo alcanza un mínimo y vuelve a recuperar un punto máximo. En los múltiplos de $t = \pi$ se alcanza máximos y mínimos. 1. Verbal: La serie de senos inicia en un punto máximo se mantiene por un intervalo de tiempo y después alcanza un mínimo donde de igual manera se mantiene constante y el proceso se repite. 2. Verbal: [VG]-2-|02:16:46| H7: Pues que es una función oscilante y los máximos y mínimos son la suma de los radios. P: Ok. H4: Que toma también un valor constante, ¿no? Entre 0 y π (x)las sumas de las coordenadas.
Mediante un análisis de la frecuencia de la acción no se identificaron relaciones invariantes.	
Acción **Identificar** la regularidad a partir de los primeros términos de la suma.	
¿Sobre qué objetos lo hace?	**¿Por medio de qué lo hace?** Simbolización de los elementos.
1. Los términos de la suma, los radios de las circunferencias y las velocidades de los puntos.	1. Icónico: —ver simbolización de las relaciones—. 1. Algebraico: —ver simbolización de las relaciones—.
¿Sobre qué relaciones lo hace?	**¿Por medio de qué lo hace?** Simbolización de las relaciones.
1. La abscisa del planeta corresponde a una suma de cosenos y la ordenada corresponde a una suma de senos. 1. El coeficiente del término *n-ésimo* corresponde al radio de la circunferencia *n-ésima*. 1. El argumento para el término *n-ésimo* corresponde a la velocidad del punto sobre la circunferencia *n-ésima* multiplicada por el tiempo.	1. Icónico:  1. Icónico:

	 1. Algebraico:  1. Algebraico: $$(x_n, y_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j , \sum_{j=1}^{n} y_j\right)$$ $$= \left(\sum_{j=1}^{n} r_j \cos(\theta_j) , \sum_{j=1}^{n} r_j \operatorname{sen}(\theta_j)\right)$$ 1. Algebraico: $$d_{PT} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} r_i \operatorname{Cos}((2i-1)t)\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} r_i \operatorname{Sen}((2i-1)t)\right)^2}$$ Con $r_i = \frac{1.27}{2i-1}$.
Mediante un análisis de la frecuencia de la acción se identificó como relación invariante: - La abscisa del planeta corresponde a una suma de cosenos y la ordenada corresponde a una suma de senos. - El coeficiente del término *n-ésimo* corresponde al radio de la circunferencia *n-ésima*. - El argumento para el término *n-ésimo* corresponde a la velocidad del punto sobre la circunferencia *n-ésima* multiplicada por el tiempo.	
Acción **Distinguir** las propiedades de la trayectoria en la fórmula.	
¿Sobre qué objetos lo hace?	**¿Por medio de qué lo hace?** Simbolización de los elementos.
1. Fórmula evaluada en valores específicos del tiempo.	1. Verbal: Meter al t en la fórmula y averiguar la convergencia.
¿Sobre qué relaciones lo hace?	**¿Por medio de qué lo hace?** Simbolización de las relaciones.

1. Forma de la trayectoria (convergencia).	1. Verbal: [VG]-2-|02:14:45| H1: Ah:: Es que la fórmula explica::: la forma que toma la figura. P: ¡Ujú! ¿Y respecto de lo que respondieron arriba de va tomando una forma definida? H4: Habría que ver los valores de convergencia. Meter al t en la fórmula y averiguar la convergencia. 1. Verbal: Siempre converge a un valor, y este valor es más pequeño conforme t se aleje que π y 2π, pues la parte sinoidal se anula, la parte del coseno se vuelve 1 y sólo se suman los términos del numerador y P se aleja horizontalmente.
Mediante un análisis de la frecuencia de la acción se identificó como relación invariante: - La convergencia de la serie se significa en la estabilidad del sistema.	
Acción **Identificar** la naturaleza del valor de convergencia.	
¿Sobre qué objetos lo hace?	**¿Por medio de qué lo hace?** Simbolización de los elementos.
1. El valor de convergencia.	1. Verbal: La función.
¿Sobre qué relaciones lo hace?	**¿Por medio de qué lo hace?** Simbolización de las relaciones.
1. El valor de convergencia es una función escalonada.	1. Verbal: Converge a una función escalonada. 1. Verbal: Converge a una función.
Mediante un análisis de la frecuencia de la acción se identificó como relación invariante: - El valor de convergencia corresponde a una función escalonada.	
Acción **Extender** el valor de convergencia pata otros intervalos del tiempo.	
¿Sobre qué objetos lo hace?	**¿Por medio de qué lo hace?** Simbolización de los elementos.
1. El valor de convergencia para un intervalo.	1. Verbal: La función.
¿Sobre qué relaciones lo hace?	**¿Por medio de qué lo hace?** Simbolización de las relaciones.

1. El valor de convergencia para $\boldsymbol{t \geq 0}$.	1. Verbal: Converge al mismo valor que en la respuesta anterior, ya que se estaba trabajando con valores de t positivos. 1. Verbal: [VE3]-2-|02:53:07| H6: No pasaría nada porque está considerando valores positivos (incomprensible, 1). M3: Pues simón no pasa nada. H3: No sé qué está pasando. M3: Pues es que sí mira, porque hemos trabajado hasta ahorita con t's positivos, entonces, entonces no pasa nada sigue convergiendo. H3: Si, si es el mismo. M3: Sí:::, es lo mismo que la f, y ya.
Mediante un análisis de la frecuencia de la acción se identificó como relación invariante: - El valor de convergencia para $\boldsymbol{t \geq 0}$ es la misma función escalonada que para $\boldsymbol{t \in [0, 2\pi)}$.	

6.1.5 Las acciones en la Tarea #5

Se presenta, en formato de tabla, una síntesis del análisis realizado para la Tarea #5 —Anexo 9.7.5— identificando las prácticas de los estudiantes en el nivel de acción —qué hacen y cómo lo hacen—nos enfocaremos en las intencionalidades del diseño como hilo conductor.

Tabla 6-7. Identificación de acciones en la Tarea #5 - Parte I.

Intención de la Tarea #5 - Parte I: Se pretende que el estudiante identifique las condiciones para que el modelo sea estable.			
Intencionalidad (Análisis a priori)	**Argumentos (A) Confrontaciones (C)**	**Práctica en el nivel de acción**	
		¿Qué hace?	**¿Cómo lo hace?**
Se espera que el estudiante identifique que para garantizar la estabilidad del sistema se debe cumplir que $\boldsymbol{A_n \to 0}$ y $\boldsymbol{w_n} \to \infty$, es importante resaltar que estas condiciones son necesarias para la convergencia, pero no suficientes.	(A) Para que la trayectoria tome una forma definida la sucesión de los radios debe converger a cero y la sucesión de las velocidades angulares debe diverger. (C) Para que la trayectoria tome una forma definida la sucesión de los radios debe ser decreciente y la sucesión de las velocidades angulares debe ser creciente.	**Establecer** las condiciones necesarias para la estabilidad del sistema.	Extendiendo los resultados de las tareas anteriores.

Se espera que no haya problema con el establecimiento de las relaciones, y que el argumento para dar su respuesta sea bajo lo construido en las tareas anteriores, así sucedió en la prueba piloto.	(A) Presentan los cálculos para el modelo con una y dos circunferencias, luego establecen el modelo para *n* circunferencias.	**Seriar** los términos de la suma.	Identificando la regularidad en los términos que se agregan.
Se busca que se interprete el modelo matemático en el fenómeno físico.	(A) Para que la trayectoria tome una forma definida la sucesión de los radios debe converger a cero y la sucesión de las velocidades angulares debe diverger. (C) Para que la trayectoria tome una forma definida la sucesión de los radios debe decrecer y la sucesión de las velocidades angulares debe crecer. (A) Se deben cumplir ciertas condiciones sobre los radios y las velocidades, para que las coordenadas del planeta converjan a una función.	**Establecer** las condiciones necesarias para la convergencia de la serie. **Interpretar** el modelo en el fenómeno.	Extendiendo los resultados de las tareas anteriores. Relacionando la estabilidad del sistema con la convergencia de las series.
Se establezcan las condiciones para que el modelo sea equivalente con la serie trigonométrica de Fourier.	(A) $\mathrm{sen}(\alpha+\beta) = \mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta + \mathrm{sen}\,\beta\cos\alpha$.	**Reescribir** las fórmulas construidas	Utilizando la identidad trigonométrica para $\mathrm{sen}(\alpha+\beta)$.
Mediante esta primera parte de la Tarea #5, reconocemos en el nivel de acción: - **Establecer** condiciones necesarias para la estabilidad del sistema y para la convergencia de la serie. - **Seriar** la sucesión de sumas parciales para identificar la regularidad en la fórmula. - **Interpretar** el modelo en el fenómeno físico, en particular relacionar la convergencia de las series con la estabilidad del sistema. - **Reescribir** las fórmulas construidas a partir de identidades conocidas.			

Tabla 6-8. Identificación de acciones en la Tarea #5 - Parte II.

Intención de la Tarea #5 - Parte II: Encontrar condiciones para que el modelo sea equivalente a la STF.			
Intencionalidad (Análisis a priori)	**Argumentos (A) Confrontaciones (C)**	**Práctica en el nivel de acción**	
		¿Qué hace?	**¿Cómo lo hace?**
Se pretende que el estudiante reconozca a $\boldsymbol{p}$ como el periodo de la función límite cuando se considera la variable t un número real	(A) El tiempo es igual a la distancia (angular) recorrida dividida por la velocidad. (C) Considera la distancia recorrida de P como el perímetro de la circunferencia, al relacionarlo que lo velocidad que es dada en radianes por unidad de tiempo.	**Identificar** los parámetros en una noción física conocida.	Utilizando la relación física, velocidad es igual a distancia entre tiempo.
	(A) Dada la relación física, velocidad es igual a distancia entre tiempo, se sustituyen los valores dados.	**Sustituir** los valores dados en las relaciones construidas.	Cambiando los valores dados en las relaciones construidas.
	(A) p es el periodo de tiempo en que la trayectoria se repite.	**Reconocer** la periodicidad en el fenómeno.	Identificando la repetición regular del comportamiento.
Mediante esta segunda parte de la Tarea #5, reconocemos en el nivel de acción: - **Identificar** relaciones conocidas a partir de los parámetros disponibles. - **Sustituir** datos conocidos en relaciones ya construidas. - **Reconocer** un comportamiento periódico a partir de la regularidad de su repetición.			

6.1.6 Los invariantes de las acciones en la Tarea #5

Dadas las acciones identificadas en la sección anterior y el análisis realizado para la Tarea #5 —Anexo 9.7.6— se presenta una síntesis identificando, en el hacer de los estudiantes, los elementos de la acción y las relaciones entre dichos elementos —sobre qué lo hacen— y la simbolización de los elementos y las relaciones —por medio de qué lo hacen—, para así finalizar con el establecimiento de los invariantes de la acción.

Tabla 6-9. Identificación de los invariantes de la acción en la Tarea #5.

Acción **Establecer** condiciones necesarias para la estabilidad del sistema y para la convergencia de la serie.	
¿Sobre qué objetos lo hace?	**¿Por medio de qué lo hace?** Simbolización de los elementos.
1. La sucesión de radios	1. Algebraico: A_n. 1. Verbal: Los radios.
2. La sucesión de velocidades angulares.	2. Algebraico: w_n.

	2. Verbal: Las velocidades.
¿Sobre qué relaciones lo hace?	**¿Por medio de qué lo hace?** Simbolización de las relaciones.
1. La sucesión de radios debe converger a cero. 2. La sucesión de las velocidades angulares debe diverger.	1. Algebraico: $A_n \to 0$. 1. Verbal: Los radios tienden a cero. 2. Algebraico: $w_n \to \infty$. 2. Verbal: Las velocidades angulares a infinito.
Mediante un análisis de la frecuencia de la acción se identificó como relación invariante: - Para que la forma de la trayectoria sea definida, se debe cumplir que $\boldsymbol{A_n \to 0}$ y $\boldsymbol{w_n \to \infty}$. - Para que las series sean convergentes, se debe cumplir que $\boldsymbol{A_n \to 0}$ y $\boldsymbol{w_n \to \infty}$.	
Acción **Seriar** la sucesión de sumas parciales para identificar la regularidad en la fórmula.	
¿Sobre qué objetos lo hace?	**¿Por medio de qué lo hace?** Simbolización de los elementos.
1. Cada término de la suma.	1. Icónico:  1. Algebraico: $x_1 = A_0 + A_1 \cos(\theta_1 + \omega_1 t)$ $x_2 = A_0 + A_1 \cos(\theta_1 + \omega_1 t) + A_2 \cos(\theta_2 + \omega_2 t)$ $\vdots$ 1. Algebraico: $y_1 = A_0 + A_1 \operatorname{sen}(\theta_1 + \omega_1 t)$ $y_2 = A_0 + A_1 \operatorname{sen}(\theta_1 + \omega_1 t) + A_2 \operatorname{sen}(\theta_2 + \omega_2 t)$ $\vdots$
¿Sobre qué relaciones lo hace?	**¿Por medio de qué lo hace?** Simbolización de las relaciones.
1. La componente $\boldsymbol{x_n}$ del punto corresponde a la suma de $\boldsymbol{A_0}$ y de los términos de la forma $\boldsymbol{A_k \cos[w_k t + \theta_k]}$.	1. Algebraico: $x_n = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos(\theta_k + \omega_k t)$.

Resultados

<table>
<tr><td>1. La componente $\boldsymbol{y_n}$ del punto corresponde a la suma de $\boldsymbol{A_0}$ y de los términos de la forma $\boldsymbol{A_k\,\mathrm{sen}[w_k t + \theta_k]}$.</td><td>1. Algebraico: $y_n = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos(\theta_k + \omega_k t)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Mediante un análisis de la frecuencia de la acción se identificó como relación invariante:
- Las coordenadas del planeta $(\boldsymbol{x_n}, \boldsymbol{y_n})$ el el modelo con n circunferencias son:
$$\begin{cases} \boldsymbol{x_n = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos(\theta_k + \omega_k t)} \\ \boldsymbol{y_n = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos(\theta_k + \omega_k t)} \end{cases}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Acción
Interpretar el modelo en el fenómeno físico, en particular relacionar la convergencia de las series con la estabilidad del sistema.</td></tr>
<tr><td>¿Sobre qué objetos lo hace?</td><td>¿Por medio de qué lo hace?
Simbolización de los elementos.</td></tr>
<tr><td>1. El modelo

2. El fenómeno.</td><td>1. Verbal: La fórmula.

2. Verbal: La trayectoria del planeta.</td></tr>
<tr><td>¿Sobre qué relaciones lo hace?</td><td>¿Por medio de qué lo hace?
Simbolización de las relaciones.</td></tr>
<tr><td>La fórmula describe la trayectoria del planeta.</td><td>Verbal: De acuerdo con las condiciones obtenidas, la formula describen la trayectoria del planeta.
Verbal: Dependerá de nuestras condiciones para aproximarse a la forma de la trayectoria.
Verbal: Estamos aproximando a una función capaz de describir la trayectoria del planeta conforme se agregan más circunferencias.
Verbal: La ecuación anterior describe la convergencia y forma definida de la trayectoria.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Mediante un análisis de la frecuencia de la acción se identificó como relación invariante:
- La fórmula para $(\boldsymbol{x_n}, \boldsymbol{y_n})$ describe la trayectoria del planeta.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Acción
Reescribir las fórmulas construidas a partir de identidades conocidas.</td></tr>
<tr><td>¿Sobre qué objetos lo hace?</td><td>¿Por medio de qué lo hace?
Simbolización de los elementos.</td></tr>
<tr><td>La fórmula de la ordenada del planeta.</td><td>Algebraico: $y_n = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \,\mathrm{sen}(w_k t + \theta_k)$</td></tr>
<tr><td>¿Sobre qué relaciones lo hace?</td><td>¿Por medio de qué lo hace?
Simbolización de las relaciones.</td></tr>
<tr><td>$$\boldsymbol{y_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(k w_0 t) + b_k\,\mathrm{sen}(k w_0 t)}$$</td><td>Algebraico:
$$\begin{aligned} &A_k \,\mathrm{sen}(w_k t + \theta_k) \\ &= A_k \,\mathrm{sen}(\theta_k)\cos(w_k t) + A_k \cos(\theta_k)\,\mathrm{sen}(w_k t) \end{aligned}$$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">Mediante un análisis de la frecuencia de la acción se identificó como relación invariante:
- $\boldsymbol{y_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kw_0 t) + b_k \operatorname{sen}(kw_0 t)}$, donde $\boldsymbol{\frac{a_0}{2} = A_0}$, $\boldsymbol{a_k = A_k \operatorname{sen}(\theta_k)}$, $\boldsymbol{b_k = A_k \cos(\theta_k)}$ y $\boldsymbol{\omega_k = k\omega_0}$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Acción
Identificar relaciones conocidas a partir de los parámetros disponibles.</td></tr>
<tr><td>¿Sobre qué objetos lo hace?</td><td>¿Por medio de qué lo hace?
Simbolización de los elementos.</td></tr>
<tr><td>Parámetros de velocidad, distancia y tiempo.</td><td>Algebraico: v, d y t, respectivamente.</td></tr>
<tr><td>¿Sobre qué relaciones lo hace?</td><td>¿Por medio de qué lo hace?
Simbolización de las relaciones.</td></tr>
<tr><td>La velocidad es igual a la distancia entre el tiempo.</td><td>Algebraico: $v = \frac{d}{t} \Longrightarrow t = \frac{2\pi}{\omega_0}$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Mediante un análisis de la frecuencia de la acción se identificó como relación invariante:
- El tiempo que tarda el punto sobre la primera circunferencia en dar un giro completo es $\boldsymbol{t = \frac{2\pi}{\omega_0}}$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Acción
Sustituir datos conocidos en relaciones ya construidas.</td></tr>
<tr><td>¿Sobre qué objetos lo hace?</td><td>¿Por medio de qué lo hace?
Simbolización de los elementos.</td></tr>
<tr><td>1. El tiempo p que tarda el punto sobre la primera circunferencia en dar una vuelta.

2. La velocidad del punto sobre la primera es constante $\boldsymbol{\frac{2\pi}{p}}$.</td><td>1. Algebraico: $t = p$.

2. Algebraico: $\omega_0 = \frac{2\pi}{p}$.</td></tr>
<tr><td>¿Sobre qué relaciones lo hace?</td><td>¿Por medio de qué lo hace?
Simbolización de las relaciones.</td></tr>
<tr><td>1. El tiempo que tarda el punto sobre la primera circunferencia en dar un giro completo es $\boldsymbol{t = \frac{2\pi}{\omega_0}}$.

2. $\boldsymbol{y_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}[a_k \operatorname{Cos}(k\omega_0 t) + b_k \operatorname{Sen}(k\omega_0 t)]}$.</td><td>1. Algebraico: $\omega_0 = \frac{2\pi}{p}$.

2. Algebraico: $y_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left[a_k \operatorname{Cos}\left(k\frac{2\pi}{p}t\right) + b_k \operatorname{Sen}\left(k\frac{2\pi}{p}t\right)\right]$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Mediante un análisis de la frecuencia de la acción se identificó como relación invariante:
- $\boldsymbol{\omega_0 = \frac{2\pi}{p}}$.
- $\boldsymbol{y_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left[a_k \operatorname{Cos}\left(k\frac{2\pi}{p}t\right) + b_k \operatorname{Sen}\left(k\frac{2\pi}{p}t\right)\right]}$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Acción
Reconocer un comportamiento periódico a partir de la regularidad de su repetición.</td></tr>
<tr><td>¿Sobre qué objetos lo hace?</td><td>¿Por medio de qué lo hace?
Simbolización de los elementos.</td></tr>
</table>

1. El estado estable del sistema. 2. El valor de convergencia.	1. Verbal: La trayectoria. 2. Verbal: La función.
¿Sobre qué relaciones lo hace?	**¿Por medio de qué lo hace?** Simbolización de las relaciones.
El valor de convergencia debe ser periódico debido al comportamiento del fenómeno.	1. Algebraico: *p* es el periodo de la trayectoria. 2. Algebraico: *p* es el periodo de la función.
Mediante un análisis de la frecuencia de la acción se identificó como relación invariante: - El valor de convergencia debe ser periódico debido al comportamiento del fenómeno.	

6.1.7 Las acciones en la Tarea #6

Se presenta, en formato de tabla, una síntesis del análisis realizado para la Tarea #6 —Anexo 9.7.7— identificando las prácticas de los estudiantes en el nivel de acción —qué hacen y cómo lo hacen—nos enfocaremos en las intencionalidades del diseño como hilo conductor.

Tabla 6-10. Caracterización de acciones en la Tarea #6 – Parte I.

Intención de la Tarea #6 - Parte I: Significar el cálculo del coeficiente de Fourier $\boldsymbol{a_0}$, a partir de la articulación de los registros geométrico-analítico y algebraico, para validar el segundo en el primero.			
Intencionalidad **(Análisis a priori)**	**Argumentos (A)** **Confrontaciones (C)**	**Práctica en el nivel de acción**	
		¿Qué hace?	**¿Cómo lo hace?**
Se busca que el estudiante se percate de que el área bajo la curva de los términos de la serie son todos iguales a cero, salvo el del término constante $\frac{\boldsymbol{a_0}}{\boldsymbol{2}}$, que tiene área $\frac{\boldsymbol{a_0 p}}{\boldsymbol{2}}$ en un intervalo de tamaño p.	(A) El valor de cada área sombreada es la misma. (A) Para $y = a_0/2$ el área en un intervalo de tamaño p corresponde al área de un rectángulo. (A) Para las integrales que tienen senos o cosenos se pueden observar las regiones con área positiva y negativa. (A) El cálculo de las integrales en cada caso.	**Comparar** las regiones sombreadas. **Geometrizar** el área bajo la curva. **Calcular** el valor de las áreas bajo la curva solicitadas.	Observando las regiones sombreadas en las gráficas. Identificando una figura geométrica conocida. Calculando las integrales definidas correspondientes.
Utilizar argumentos geométricos y los conocimientos sobre integral definida para	(A) Si A representa la función área, $A\left(f(t)\right) = A\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\right)$.	**Equivaler** el área bajo la curva de la función con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica.	Utilizando la integral definida sobre la igualdad presentada.

decir que el área bajo la curva de la función $\boldsymbol{f(t)}$ es igual a la suma de las áreas bajo la curva de los términos de la serie.			
Mediante esta primera parte de la Tarea #5, reconocemos en el nivel de acción: - **Comparar** las regiones sombreadas. - **Geometrizar** el área bajo la curva. - **Calcular** el valor de las áreas bajo la curva solicitadas. - **Equivaler** el área bajo la curva de la función con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica.			

Tabla 6-11. Caracterización de acciones en la Tarea #6 – Parte II.

Intención de la Tarea #6 - Parte II: Significar el cálculo del coeficiente de Fourier $\boldsymbol{a_k}$, a partir de la articulación de los registros geométrico-analítico y algebraico, para validar el segundo en el primero.			
Intencionalidad (Análisis a priori)	**Argumentos (A) Confrontaciones (C)**	**Práctica en el nivel de acción**	
		¿Qué hace?	**¿Cómo lo hace?**
Significar geométricamente la ortogonalidad de las funciones trigonométricas y utilizar este hecho para calcular el valor de $\boldsymbol{a_1}$ pues, será capaz de identificar que la multiplicación de $\boldsymbol{\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)}$ por cualquier otro término de la serie —excepto el término $\boldsymbol{a_1\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)}$— tendrá área bajo la curva igual a cero, y a partir de ellos que el valor de $\boldsymbol{\frac{a_1 p}{2}}$ corresponde al área bajo la curva que resulta de multiplicar la función $\boldsymbol{f(t)}$ por $\boldsymbol{\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)}$. Lo que permite determinar el valor de $\boldsymbol{a_1}$ en términos de $\boldsymbol{f(t)}$, la función conocida.	A) El valor de cada área sombreada es la misma. (A) Si es por simetría queda el área igual a la misma, entonces calcular nada más el área del rectángulo y lo dividís entre 2. (A) El cálculo de la integral $\int_0^p a_1\cos^2\left(\frac{2\pi}{p}t\right)dt = \frac{a_1}{2}p$. (A) Por simetría el área bajo la curva en cada caso es cero. (A) Según el applet, se observan los valores de las áreas bajo la curva. (A) Si A representa la función área, $A\left(f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\right) = A\left(\frac{a_0}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) +\right.$	**Comparar** las regiones sombreadas. **Geometrizar** el área bajo la curva. **Calcular** el valor de las áreas bajo la curva solicitadas. **Observar** el valor del área bajo la curva para distintos valores de k. **Equivaler** el área bajo la curva de la función $f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ con el área bajo la curva de su expansión en	Observando las regiones sombreadas en la gráfica. Identificando una figura geométrica conocida. Calculando las integrales definidas correspondientes e identificando simetrías entre las regiones. Analizando el applet suministrado. Utilizando la integral definida sobre la igualdad presentada.

	$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\Big)$.	serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por $\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$.	
Las preguntas de esta parte tienen la misma intención que las propuestas para el cálculo de $\boldsymbol{a_1}$, la idea es que utilicen argumentos similares para concluir que el valor de $\boldsymbol{a_k}$ está dado por la fórmula: $\frac{2}{p}\int_0^p \boldsymbol{f(t)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)dt}$, cuyo significado esté asociado al área bajo la curva.	(A) Se nota a partir del applet, que el área bajo la curva en cada caso es cero. (A) El área bajo la curva de la función $f(t)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva de la expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por $\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$.	**Observar** el valor del área bajo la curva para distintos valores de k y m. **Equivaler** el área bajo la curva de la función $f(t)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por $\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$.	Analizando el applet suministrado. Utilizando la integral definida sobre la igualdad presentada.
Mediante esta primera parte de la Tarea #5, reconocemos en el nivel de acción: - **Comparar** las regiones sombreadas. - **Geometrizar** el área bajo la curva. - **Calcular** el valor de las áreas bajo la curva solicitadas. - **Observar** el valor del área bajo la curva para distintos valores de los parámetros. - **Equivaler** el área bajo la curva de la función $\boldsymbol{f(t)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)}$ con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica de $\boldsymbol{f(t)}$ multiplicada por $\boldsymbol{\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)}$.			

Tabla 6-12. Caracterización de acciones en la Tarea #6 – Parte III.

Intención de la Tarea #6 - Parte III: Significar el cálculo del coeficiente de Fourier $\boldsymbol{b_k}$, a partir de la articulación de los registros geométrico-analítico y algebraico, para validar el segundo en el primero.			
Intencionalidad **(Análisis a priori)**	**Argumentos (A)** **Confrontaciones (C)**	**Práctica en el nivel de acción**	
		¿Qué hace?	**¿Cómo lo hace?**
Se busca que el estudiante utilice estrategias similares a las utilizadas para calcular $\boldsymbol{a_k}$, y de esta manera concluir que $\boldsymbol{b_k} = \frac{2}{p}\int_0^p \boldsymbol{f(t)\operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)dt}$.	(A) Se nota a partir del applet, que el área bajo la curva en cada caso es cero. (A) El área bajo la curva de la función $f(t)\operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva de la expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por $\operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$.	**Observar** el valor del área bajo la curva para distintos valores de k y m. **Equivaler** el área bajo la curva de la función $f(t)\operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por $\operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$.	Analizando el applet suministrado. Utilizando la integral definida sobre la igualdad presentada.

Mediante esta primera parte de la Tarea #5, reconocemos en el nivel de acción: - **Observar** el valor del área bajo la curva para distintos valores de los parámetros. - **Equivaler** el área bajo la curva de la función $\boldsymbol{f(t)}\ \mathbf{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica de $\boldsymbol{f(t)}$ multiplicada por $\mathbf{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$.

6.1.8 Los invariantes de acciones en la Tarea #6

Dadas las acciones identificadas en la sección anterior y el análisis realizado para la Tarea #6 —Anexo 9.7.8— se presenta una síntesis identificando, en el hacer de los estudiantes, los elementos de la acción y las relaciones entre dichos elementos —sobre qué lo hacen— y la simbolización de los elementos y las relaciones —por medio de qué lo hacen—, para así finalizar con el establecimiento de los invariantes de la acción.

Tabla 6-13. Identificación de los invariantes de la acción en la Tarea #6.

Acción **Comparar** las regiones sombreadas.	
¿Sobre qué objetos lo hace?	**¿Por medio de qué lo hace?** Simbolización de los elementos.
1. Las regiones sombreadas.	1. Verbal: La región sombreada.
¿Sobre qué relaciones lo hace?	**¿Por medio de qué lo hace?** Simbolización de las relaciones.
1. Las regiones sombreadas tienen la misma área.	1. Verbal: El valor de cada área sombreada es la misma. 1. Verbal: Que ambas regiones en el intervalo de p, sus áreas son 0. Ya que tienen simetría. 1. Verbal: La suma de las áreas del doble achurado es la misma que la suma de las áreas del achurado simple.
Mediante un análisis de la frecuencia de la acción se identificó como relación invariante: - Las regiones sombreadas tienen la misma área.	
Acción **Geometrizar** el área bajo la curva.	
¿Sobre qué objetos lo hace?	**¿Por medio de qué lo hace?** Simbolización de los elementos.
1. La región bajo la curva $\boldsymbol{y = \frac{a_0}{2}}$ en el intervalo $[\mathbf{0}, \boldsymbol{p}]$. 2. La región bajo la curva $\boldsymbol{y = a_1 \cos^2\left(\frac{2\pi}{p}t\right)}$ en el intervalo $[\mathbf{0}, \boldsymbol{p}]$.	1. Verbal: El área de la región. 2. Verbal: El área de la región.

Resultados

¿Sobre qué relaciones lo hace?	**¿Por medio de qué lo hace?** Simbolización de las relaciones.
1. La región bajo la curva $\boldsymbol{y = \frac{a_0}{2}}$ en el intervalo $[\mathbf{0}, \boldsymbol{p}]$ es igual al área del rectángulo cuyos lados miden $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{\frac{a_0}{2}}$. 2. La región bajo la curva $\boldsymbol{y = a_1 \cos^2\left(\frac{2\pi}{p} t\right)}$ en el intervalo $[\mathbf{0}, \boldsymbol{p}]$ es igual a la mitad del área del rectángulo cuyos lados miden $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{a_1}$.	1. Verbal: [VG]-6-|01:22:28|- $y = \frac{a_0}{2}$ el profesor pregunta quién usó primero el argumento del rectángulo, H1 levantó la mano. 2. Verbal: [VG]-6-|02:45:54| P: ¿Todos lo hicieron de esa manera? H9: También se:::, si es por simetría queda el área igual a la misma, entonces calcular nada más el área del rectángulo y lo dividís entre 2.
Mediante un análisis de la frecuencia de la acción se identificó como relación invariante: - El área de la región bajo la curva $\boldsymbol{y = \frac{a_0}{2}}$ en el intervalo $[\mathbf{0}, \boldsymbol{p}]$ es igual al área del rectángulo de cuyos lados miden $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{\frac{a_0}{2}}$.	
Acción **Calcular** el valor de las áreas bajo la curva solicitadas.	
¿Sobre qué objetos lo hace?	**¿Por medio de qué lo hace?** Simbolización de los elementos.
1. El área bajo la curva. 2. La región bajo la curva $\boldsymbol{y = a_1 \cos^2\left(\frac{2\pi}{p} t\right)}$ en el intervalo $[\mathbf{0}, \boldsymbol{p}]$.	1. Algebraico: *A*. 2. Verbal: El área de la región.
¿Sobre qué relaciones lo hace?	**¿Por medio de qué lo hace?** Simbolización de las relaciones.
1. El valor del área bajo la curva en un intervalo de tamaño $\boldsymbol{p}$ es igual al valor de la integral definida sobre ese intervalo de la curva dada.	1. Algebraico: $A_1 = \int_0^p y\,dt = \int_0^p \frac{a_0}{2}\,dt = \frac{a_0}{2}p$ $A_2 = \int_0^p a_1 \mathrm{Cos}\left(\frac{2\pi}{p}t\right)dt = a_1 \frac{p}{2\pi} \mathrm{Sen}\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\Big\vert_0^p = a_1\frac{p}{2\pi}\left(\mathrm{Sen}\,2\pi - \mathrm{Sen}\,0\right) = 0.$ $A_3 = \int_0^p b_1 \mathrm{Sen}\left(\frac{2\pi}{p}t\right)dt = -b_1\frac{p}{2\pi}\mathrm{Cos}\left(\frac{2\pi t}{p}\right)\Big\vert_0^p = -b_1\frac{p}{2\pi}(1-1) = 0$ $A_4 = \int_0^p a_2 \mathrm{Cos}\left(\frac{4\pi}{p}t\right)dt = 0$ $A_5 = \int_0^p b_2 \mathrm{Sen}\left(\frac{4\pi}{p}t\right)dt = 0$ $A_6 = \int_0^p a_3 \mathrm{Cos}\left(\frac{6\pi}{p}t\right)dt = 0$ $A_7 = \int_0^p b_3 \mathrm{Sen}\left(\frac{6\pi}{p}t\right)dt = 0$ 2. Algebraico: $\mathrm{Cos}^2\left(\frac{2\pi}{p}t\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{Cos}\left(\frac{4\pi}{p}t\right).$ $\Rightarrow \quad a_1\int_0^p \mathrm{Cos}^2\left(\frac{2\pi}{p}t\right)dt = a_1\int_0^p \frac{1}{2}dt + \frac{a_1}{2}\int_0^p \mathrm{Cos}\left(\frac{4\pi}{p}t\right)dt$ $= \frac{a_1 p}{2}.$

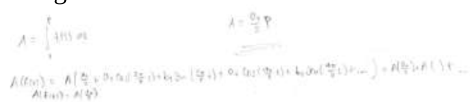
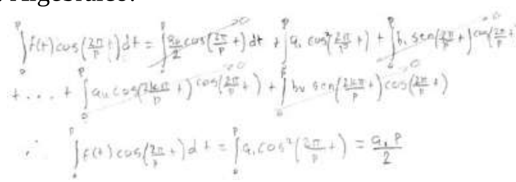
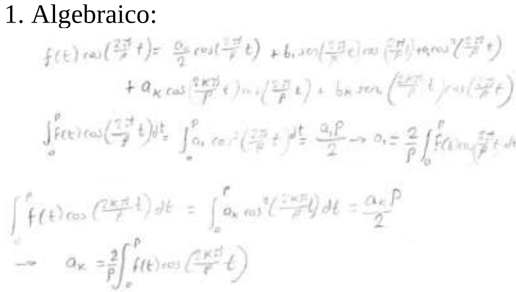
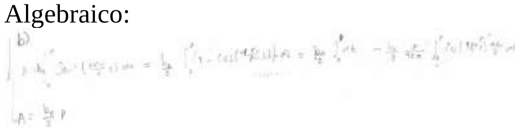
<table>
<tr>
<td>2. El valor del área bajo la curva en un intervalo de tamaño $\boldsymbol{p}$ es igual a la suma de las áreas de las regiones sobre el eje $\boldsymbol{X}$, menos la suma de las áreas de las regiones bajo el eje $\boldsymbol{X}$, en ese intervalo.</td>
<td>2. Verbal: Verbal: [VE3]-6-|00:13:52|
M3: Coseno de cero es uno, ¿no?
H3: ¡Ajá!
M3: Y el coseno de 2π, (5) huy no me voy a matar, este también da cero, ¿no?
H3: Sí, da cero, ¿no?
M3: Sí, porque esta área menos esta área también da cero.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Mediante un análisis de la frecuencia de la acción se identificó como relaciones invariantes:
- El valor del área bajo la curva en un intervalo de tamaño $\boldsymbol{p}$ es igual al valor de la integral definida sobre ese intervalo de la curva dada.
- El valor del área bajo la curva en un intervalo de tamaño $\boldsymbol{p}$ es igual al valor de la integral definida sobre ese intervalo de la curva dada.
- El valor del área bajo la curva en un intervalo de tamaño $\boldsymbol{p}$ es igual a la suma de las áreas de las regiones sobre el eje $\boldsymbol{X}$, menos la suma de las áreas de las regiones bajo el eje $\boldsymbol{X}$, en ese intervalo.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Acción
Observar el valor del área bajo la curva para distintos valores de los parámetros.</td>
</tr>
<tr>
<td>¿Sobre qué objetos lo hace?</td>
<td>¿Por medio de qué lo hace?
Simbolización de los elementos.</td>
</tr>
<tr>
<td>1. Las gráficas para distintos valores de $\boldsymbol{k}$ en los applets.

2. Las gráficas para distintos valores de $\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{m}$ en los applets.</td>
<td>1. Icónico: El applet.

2. Verbal: El applet</td>
</tr>
<tr>
<td>¿Sobre qué relaciones lo hace?</td>
<td>¿Por medio de qué lo hace?
Simbolización de las relaciones.</td>
</tr>
</table>

Resultados

<table>
<tr>
<td>1. Cuando $\boldsymbol{k=1}$, la curva $\boldsymbol{y = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\cos\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)}$, tiene área bajo la curva no nula. cuando $\boldsymbol{k>1}$ su área bajo la curva es 0. El área bajo la curva $\boldsymbol{y = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)}$ es 0, para cualquier valor de $\boldsymbol{k}$.</td>
<td>1. Verbal/Algebraico: Según el applet, para la función $y = a_1 \operatorname{Cos}\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\operatorname{Cos}\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)$, el área bajo la curva es $A = a_1\frac{p}{2}$ para el caso k=1, luego, para k>1, el área es cero. Mientras que para la función $y = a_1 \operatorname{Cos}\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\operatorname{Sen}\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)$ el área bajo la curva es cero para todo k.</td>
</tr>
<tr>
<td>2. Cuando $\boldsymbol{k=m}$, la curva $\boldsymbol{y = a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)}$, tiene área bajo la curva no nula, cuando $\boldsymbol{k \neq m}$ su área bajo la curva es 0. El área bajo la curva $\boldsymbol{y = b_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)}$ es 0, para cualquier valor de $\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{m}$.</td>
<td>2. Verbal/Algebraico: Cuando $k = m\ \forall k,m \in \mathbb{Z}$, el área es $A = \frac{a_k p}{2}$, en el caso contrario $k \neq m$, $A = 0$, siendo A el área bajo las curvas.</td>
</tr>
<tr>
<td>2. Cuando $\boldsymbol{k=m}$, la curva $\boldsymbol{y = b_k \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)}$, tiene área bajo la curva no nula, cuando $\boldsymbol{k \neq m}$ su área bajo la curva es 0. El área bajo la curva $\boldsymbol{y = b_k \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\cos\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)}$ es 0, para cualquier valor de $\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{m}$.</td>
<td>2. Verbal/Algebraico: Para la función $y = b_k \operatorname{Sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\operatorname{Sen}\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$ el área bajo la curva es $A = \frac{p}{2}b_k$ cuando $k = m$, y cero en otro caso, mientras que para la función $y = b_k \operatorname{Sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\operatorname{Cos}\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$ es cero para cualquier.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Mediante un análisis de la frecuencia de la acción se identificó como relaciones invariantes:
- Cuando $\boldsymbol{k=1}$, la curva $\boldsymbol{y = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\cos\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)}$, tiene área bajo la curva no nula. cuando $\boldsymbol{k>1}$ su área bajo la curva es 0.
- Cuando $\boldsymbol{k=m}$, la curva $\boldsymbol{y = a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)}$, tiene área bajo la curva no nula, cuando $\boldsymbol{k \neq m}$ su área bajo la curva es 0.
- Cuando $\boldsymbol{k=m}$, la curva $\boldsymbol{y = b_k \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)}$, tiene área bajo la curva no nula, cuando $\boldsymbol{k \neq m}$ su área bajo la curva es 0.
- El área bajo la curva $\boldsymbol{y = b_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)}$ es 0, para cualquier valor de $\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{m}$.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Acción
Equivaler el área bajo la curva de la función $\boldsymbol{f(t)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)}$ con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica de $\boldsymbol{f(t)}$ multiplicada por $\boldsymbol{\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)}$.</td>
</tr>
<tr>
<td>¿Sobre qué objetos lo hace?</td>
<td>¿Por medio de qué lo hace?
Simbolización de los elementos.</td>
</tr>
<tr>
<td>1. La igualdad:
$$\boldsymbol{f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)}$$</td>
<td>1. Algebraico:
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$$</td>
</tr>
<tr>
<td>¿Sobre qué relaciones lo hace?</td>
<td>¿Por medio de qué lo hace?
Simbolización de las relaciones.</td>
</tr>
</table>

1. El área bajo la curva $\boldsymbol{y = f(t)}$ es igual al área bajo la curva $\boldsymbol{y = \frac{a_0}{2}}$, en un intervalo de tamaño $\boldsymbol{p}$.	1. Verbal: Las áreas son iguales. 1. Icónico:  1. Algebraico: 
1. El área bajo la curva $\boldsymbol{y = f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)}$ es igual al área bajo la curva $\boldsymbol{y = a_1\cos^2\left(\frac{2\pi}{p}t\right)}$, en un intervalo de tamaño $\boldsymbol{p}$.	1. Algebraico: 
1. El área bajo la curva $\boldsymbol{y = f(t)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)}$ es igual al área bajo la curva $\boldsymbol{y = a_k\cos^2\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)}$, en un intervalo de tamaño $\boldsymbol{p}$.	1. Algebraico: 
1. El área bajo la curva $\boldsymbol{y = f(t)\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)}$ es igual al área bajo la curva $\boldsymbol{y = b_k\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)}$, en un intervalo de tamaño $\boldsymbol{p}$.	Algebraico: 

Mediante un análisis de la frecuencia de la acción se identificó como relaciones invariantes:

- El área bajo la curva $\boldsymbol{y = f(t)}$ es igual al área bajo la curva $\boldsymbol{y = \frac{a_0}{2}}$, en un intervalo de tamaño $\boldsymbol{p}$.
- El área bajo la curva $\boldsymbol{y = f(t)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)}$ es igual al área bajo la curva $\boldsymbol{y = a_k\cos^2\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)}$, en un intervalo de tamaño $\boldsymbol{p}$.
- El área bajo la curva $\boldsymbol{y = f(t)\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)}$ es igual al área bajo la curva $\boldsymbol{y = b_k\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)}$, en un intervalo de tamaño $\boldsymbol{p}$.

6.2 Caracterización de las actividades

Dadas las acciones y las relaciones invariantes identificadas en la sección anterior, para la identificación de las practicas en el nivel de actividad, se pone atención sobre aquellas acciones realizadas sobre una misma relación invariante o sobre relaciones afines a una misma noción—organización de acciones—.

La primera actividad identificada atañe a dos relaciones invariantes «la medida de los radios disminuye» y «la velocidad de los puntos aumenta», a la vez estas relaciones son responsables de la estabilidad del sistema, las causas de la variación —Tabla 6-14—.

Tabla 6-14. Caracterización de la actividad relativa a las causas del comportamiento del fenómeno.

Relación	La medida de los radios disminuye.	La velocidad de los puntos aumenta.
Acciones	**Observar** los cambios que se dan al agregar circunferencias, ya sea en la forma de la trayectoria, en los radios de las circunferencias o en las distancias recorridas sobre cada circunferencia. **Estimar** la medida de los radios y la velocidad del planeta al agregar cada vez más circunferencias. **Medir** los radios de las circunferencias. **Comparar** estados en un mismo comportamiento o entre dos comportamientos distintos.	**Observar** los cambios se que dan al agregar circunferencias, ya sea en la forma de la trayectoria, en los radios de las circunferencias o en las distancias recorridas sobre cada circunferencia. **Estimar** la medida de los radios y la velocidad del planeta al agregar cada vez más circunferencias. **Comparar** estados en un mismo comportamiento o entre comportamientos distintos.
Actividad	**Atender** las causas del comportamiento del fenómeno —lo que produce la variación—.	

La segunda actividad identificada organiza aquellas acciones sobre relaciones que explican el comportamiento del sistema, el estado estacionario —Tabla 6-15—.

Tabla 6-15. Caracterización de la actividad relativa al comportamiento del fenómeno.

Relación	La trayectoria toma una forma definida.	La distancia entre el planeta y la tierra.
Acciones	**Observar** los cambios que se dan al agregar circunferencias, ya sea en la forma de la trayectoria, en los radios de las circunferencias o en las distancias recorridas sobre cada circunferencia. **Comparar localmente** los efectos sobre la forma de la trayectoria al aumentar el número de circunferencias. **Comparar con el infinito** el aporte que proporciona a la trayectoria/gráfica agregar más circunferencias.	**Comparar** estados en un mismo comportamiento o entre comportamientos distintos.
Actividad	**Reconocer** que el fenómeno alcanza un estado estable —lo que varía—.	

La última acción identificada resulta de considerar aquellas relaciones que tienen que ver con la convergencia de las series y su significación en la estabilidad del sistema —Tabla 6-16—.

Tabla 6-16. Caracterización de la actividad relativa a la convergencia de la serie.

Relación	La convergencia de la serie se significa en la estabilidad del sistema.	La serie/gráfica converge a una función.
Acciones	**Distinguir** las propiedades de la trayectoria en la fórmula.	**Comparar con el infinito** el aporte que proporciona a la trayectoria/gráfica agregar más circunferencias. **Identificar** la naturaleza del valor de convergencia.
Actividad	**Relacionar** la convergencia de la serie con la estabilidad del sistema.	

7 Conclusiones

A continuación, se presentan tres secciones que sintetizan los hallazgos y lo que, a la luz de los datos empíricos, logramos dilucidar respecto de las preguntas de investigación. La primera sección hace referencia a las prácticas que logramos identificar para la significación de la STF, la segunda hace referencia a los procesos de generalización que logramos identificar en el desarrollo de la situación de aprendizaje, para finalizar, en la tercera sección, con una reflexión teórica respecto del rol de las prácticas que subyacen a dichos procesos.

7.1 Sobre las prácticas que permiten significar a la STF

Respecto del primer momento de construcción social de la STF —Tareas de la #1 a la #5— el análisis realizado logró caracterizar como actividades: (1) ***atender*** las causas del comportamiento del fenómeno —las causas de la variación—, la cual organiza las acciones: *observar* los cambios que se dan al agregar circunferencias —enfocado en los radios de las circunferencias—, *estimar* la medida de los radios y la velocidad del planeta al agregar cada vez más circunferencias, *medir* los radios de las circunferencias, y *comparar* estados en un mismo comportamiento o entre comportamientos distintos; (2) ***reconocer*** que el fenómeno alcanza un estado estable —lo que varía—, la cual organiza las acciones: *observar* los cambios que se dan al agregar circunferencias —enfocado en la forma de porciones de la trayectoria—, *comparar localmente* los efectos sobre la forma de la trayectoria al aumentar el número de circunferencias, *comparar con el infinito* el aporte que proporciona a la trayectoria/gráfica agregar más circunferencias; (3) ***relacionar*** la convergencia de la serie con la estabilidad del sistema, la cual organiza las acciones: *distinguir* las propiedades de la trayectoria en la fórmula, *comparar con el infinito* el aporte que proporciona a la trayectoria/gráfica agregar más circunferencias, e *identificar* la naturaleza del valor de convergencia.

Estas prácticas identificadas permiten validar y fortalecer el esquema de prácticas anidadas preliminar para la STF —Figura 5-2— en los niveles de acción y actividad. Respecto de la actividad, el esquema de prácticas anidadas preliminar contempla el ***estudio de la convergencia*** como aquello que organiza acciones para el surgimiento de las funciones psicológicas superiores, esta investigación permitió precisar esta actividad, para la situación de aprendizaje propuesta, en tres actividades relativas al estudio de la convergencia de series trigonométricas. Por otra parte, las acciones organizadas bajo dichas actividades dan cuenta de las acciones del esquema de prácticas preliminar, particular las concernientes a la *predicción* e *interpretación*, respecto de la primera las acciones concernientes corresponden a observar, estimar, medir y comparar —en las tres acepciones identificadas—, y respecto de la segunda, las acciones de distinguir e identificar. Todo esto —actividades y acciones— se organiza para significar a la serie trigonométrica como una herramienta predictiva —para determinar el estado estable del sistema, la trayectoria del planeta—. Estas relaciones de subida —acción, actividad, práctica socialmente compartida— se observar en la Figura 5-2.

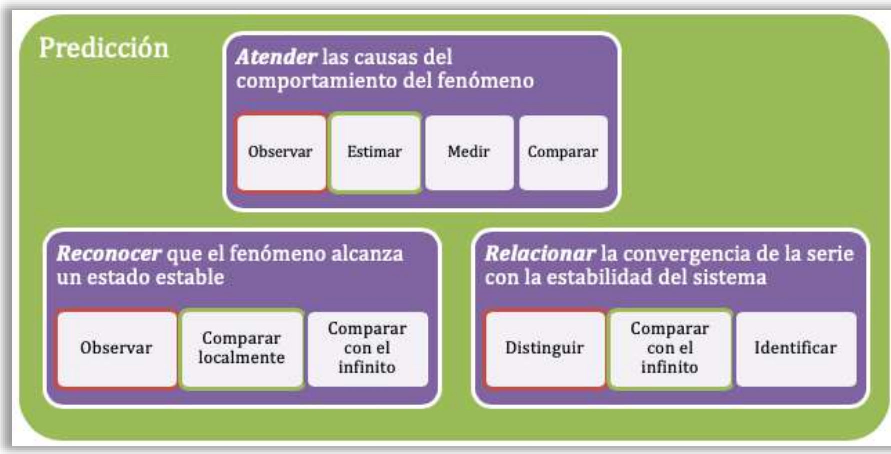


Figura 7-1. Prácticas en los niveles de acción y actividad identificadas.

Es importante recalcar que el esquema de prácticas anidadas preliminar —Figura 5-2— incluye como acciones aquellas relativas a la *modelación*. Sin embargo, el diseño propuesto no promueve la construcción de un modelo, este es dado a priori —la superposición de movimientos circulares—. Aún así la matematización del modelo permite caracterizar, a lo largo del diseño, diferentes prácticas en el nivel de acción: *comparar* estados en un mismo comportamiento —la medida de los ángulos—, *seriar* los valores de los ángulos en la tabla suministrada y las sumas parciales para identificar la regularidad en la fórmula, *identificar* un sistema de referencia adecuado, *comparar globalmente* la forma de la trayectoria, *geometrizar* las relaciones involucradas —posición-tiempo—, por mencionar algunas; pero las herramientas teórico-metodológicas con las que contamos no nos permitieron caracterizar la práctica en el nivel de actividad. Es claro que es necesaria más investigación para ahondar respecto de la modelación relativa a la STF.

Por otra parte, para el segundo momento de construcción social de la STF —Tarea #6— se tuvo la misma limitación ante la identificación de la práctica al nivel de actividad. Sin embargo, se logró identificar como acciones: *comparar* las regiones sombreadas, *geometrizar* el área bajo la curva, *calcular* el valor de las áreas bajo la curva solicitadas, *observar* el valor del área bajo la curva para distintos valores de los parámetros, *equivaler* el área bajo la curva de la una función con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica, ambas multiplicadas por un factor adecuado.

Cabe mencionar que este momento de construcción pretende una articulación entre los registros geométrico–analítico y algebraico, para validar el segundo en el primero. Se pudo notar que, si bien esto se logró con el trabajo en la situación —como se puede notar en las acciones y los invariantes identificados—, los estudiantes aún muestran un fuerte apego al registro algebraico, pues sus estrategias iniciales en la mayoría de los casos fueron algebraicas —calcular las integrales, por ejemplo—. Esto puede deberse a que la situación trató de manejar ambos registros a la vez —siempre se presentó la gráfica acompañada de su expresión analítica—, esto debe ser considerado ante un rediseño de la situación de aprendizaje.

7.2 Sobre los procesos de generalización que se suscitan durante el trabajo con la situación de aprendizaje

En esta sección discutiremos los procesos de generalización desarrollados por los estudiantes al abordar la situación de aprendizaje, si bien en el capítulo de los resultados mostramos que existe numerosa cantidad de relaciones invariantes, daremos énfasis a aquellas que nos permitan evidenciar el esquema de generalización adoptado para esta investigación —Figura 4-5— y su relación con las prácticas caracterizadas en la sección anterior.

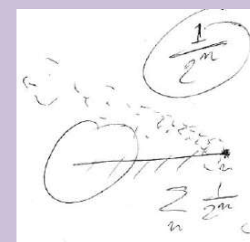
Relacionado al primer momento de construcción social de la STF —Tareas de la #1 a la #5—, y con el objetivo, no solo de evidenciar el proceso de generalización, sino también del rol de las prácticas en los niveles de acción y actividad, utilizaremos las actividades caracterizadas como hilo conductor de la discusión.

Respecto de la actividad relacionada con fijar la atención en las causas que provocan el comportamiento del sistema —la variación de la sucesión de los radios y de la sucesión de las velocidades angulares—, los resultados relativos a la Tarea #1 de la situación de aprendizaje muestran que se valida lo esperado en el análisis a priori, los estudiantes utilizaron frases como "son cada vez más pequeños" para referirse a la sucesión de los radios y "van cada vez más rápido" para referirse a la sucesión de velocidades angulares —ver Tabla 7-1—. Sin embargo, esto no fue suficiente para concluir que la primera converge a cero y la segunda a infinito, sino que las relaciones invariantes fijadas quedaron en términos de la monotonía de la sucesión, la de radios es decreciente y la de velocidades angulares es creciente. Fue necesario, durante la puesta en común de la Tarea #5, que el profesor los cuestionara respecto de si la monotonía era una condición lo bastante fuerte para asegurar la estabilidad del sistema, por ejemplo, preguntando qué pasaría si la sucesión de radios decrecía, pero siempre acotada inferiormente por algún número positivo, a partir de ello lograron identificar la relación esperada.

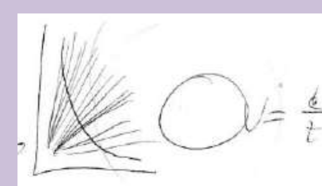
Quizá dicha predilección en la monotonía por sobre el límite de las sucesiones fue resultado del tipo de objeto matemático con el que se está trabajando, al ser los radios siempre positivos, suponer un comportamiento decreciente podría ser suficiente para pensar que debían converger a cero —algo similar con las velocidades angulares—. Es importante poner atención a este fenómeno para profundizar al respecto en alguna otra investigación, o bien, proponer un rediseño de la situación de aprendizaje.

Tabla 7-1. Inicio del proceso de generalización relativo a las causas del comportamiento del sistema.

<table>
<tr><th colspan="3">Actividad
Atender las causas del comportamiento del fenómeno —lo que produce la variación—.</th></tr>
<tr><th>Acciones</th><th>Reflexión sobre el sistema de acciones y establecimiento de los invariantes
¿Sobre qué lo hace?</th><th>Simbolización
¿Por medio de qué lo hace?</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Observar
Permite percibir los cambios en los radios directamente del applet, sin realizar una comparación directa entre un radio y otro —se ve del applet que los radios disminuyen—.
Estimar
Trata de cuantificar la variación a partir de su percepción del applet/figura, sin realizar una comparación directa entre un estado y otro —se ve que los radios disminuyen a la mitad, entre más cerca del eje y más rápido se mueve el punto—.
Medir
Medir directamente los radios para poder realizar la comparación de estos.
Comparar
Compara los radios, ya sea a partir de su medida o tomando el primer radio como elementos de comparación. En el caso de las pendientes compara las pendientes de las rectas.</td><td>Elementos de la acción
La sucesión de radios.

Relación invariante
La medida de los radios disminuye.</td><td>Verbal: Los radios.
Algebraico: r_n o A_n.

Verbal: En la figura se puede ver que los radios disminuyen.
Algebraico: $r_n > r_{n+1}$ para todo n natural.
Algebraico: $\frac{R}{2^n}$, donde R es el radio de la primera circunferencia.</td></tr>
<tr><td>Elementos de la acción
La sucesión de velocidades angulares.

Relaciones invariantes
La velocidad de los puntos aumenta.</td><td>Verbal: Las velocidades.
Algebraico: ω_n.

Verbal: La pendiente en la gráfica de los puntos de mayores circunferencias es mayor a las de menor número de circunferencias.

Algebraico: $\omega_n < \omega_{n+1}$ para todo n natural.</td></tr>
</table>

Pasamos ahora a la actividad concerniente con reconocer que el fenómeno es susceptible de alcanzar un estado estable —o estacionario—, los resultados muestran que los estudiantes logran establecer como relación invariante que al agregar muchas circunferencias la trayectoria toma una forma definida —ver Tabla 7-2—, tal y como se esperaba según el análisis a priori, incluso ya mencionan desde la Tarea #1 la noción de convergencia relativa a este hecho, cuando en el diseño no se menciona la convergencia de la series de manera directa sino hasta la Tarea #2 – Parte II —en específico en la pregunta *f*—.

Podemos notar como estas dos actividades —***atender*** las causas del comportamiento del fenómeno y ***reconocer*** que el fenómeno alcanza un estado estable— se organizan para poder realizar la primera generalización extensional inicial —esquema de generalización de la Figura 4-5— al final de la Tarea #1, pues se mantiene la estructura de los invariantes ya establecidos. Esta generalización consiste en relacionar las causas del fenómeno con el comportamiento del fenómeno, en específico los estudiantes muestran como relación invariante que «agregar una circunferencia muy pequeña y un punto sobre esta que se mueve muy rápido no provoca cambios significativos en la forma de la trayectoria» —ver última acción de la Tabla 6-3— , esta relación está asociada a la acción de *comparar con el infinito*, la cual tiene un carácter predictivo, pues no presta atención solo a la variación, sino también a las causas de la misma para poder describir su comportamiento futuro —en este caso en el infinito—.

Luego, en la Tarea #5, las relaciones relativas a las causas del comportamiento del fenómeno se muestran como elementos de la acción *establecer* condiciones necesarias para la estabilidad del sistema —ver Tabla 6-9—, lo que les da el carácter de objeto, concluyendo así el proceso de abstracción que inició al fijar los invariantes.

Tabla 7-2. Inicio del proceso de generalización relativo al comportamiento del sistema.

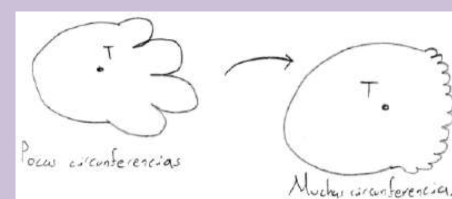
<table>
<tr><th colspan="3">Actividad
Reconocer que el fenómeno alcanza un estado estable —lo que varía—.</th></tr>
<tr><th>Acciones</th><th>Reflexión sobre el sistema de acciones y establecimiento de los invariantes
¿Sobre qué lo hace?</th><th>Simbolización
¿Por medio de qué lo hace?</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Observar
Permite percibir los cambios de forma local en la trayectoria directamente del applet, sin realizar una comparación directa entre una trayectoria y otra —se ve del applet que al aumentar las circunferencias hay más oscilaciones en la trayectoria—.

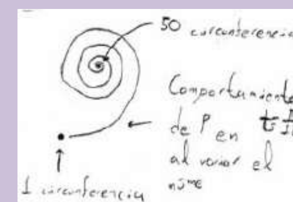
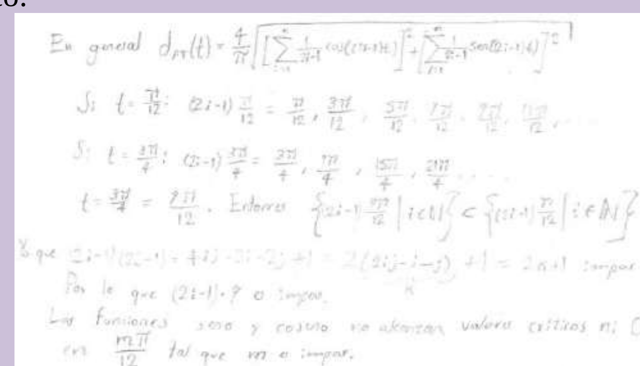
Comparar localmente
Permite percibir los cambios de forma local en la trayectoria directamente del applet, realizando comparaciones entre una</td><td>Elementos de la acción
Las trayectorias para distinta cantidad de circunferencias.

Relación invariante
La cantidad de oscilaciones en la trayectoria depende del número de circunferencias.</td><td>Verbal: La trayectoria.

Tarea #1
Verbal: El número de oscilaciones aumenta al aumentar el número de circunferencias.
Verbal: El número de bucles aumenta, teniendo uno de mayor tamaño y el resto disminuyendo en tamaño.</td></tr>
<tr><td>Elementos de la acción
Las trayectorias para distinta cantidad de circunferencias.

Relaciones invariantes
La trayectoria toma una forma definida, al agregar muchas circunferencias.</td><td>Verbal: La Trayectoria.

Tarea #1

Verbal: Parece que la trayectoria tiende a una elipse con la Tierra en uno de los focos.
Verbal: Observé la aparente convergencia hacia una trayectoria muy bien definida.
Verbal: Se van agregando cada vez más pequeños arcos que modelará una curva suave cuando el número de circunferencias agregadas sea muy grande.</td></tr>
</table>

trayectoria y otra —las oscilaciones son más y cada vez más pequeñas— **Comparar con el infinito** Permite relacionar la convergencia de la serie con la estabilidad del sistema. **Comparar** Compara las sumas parciales para tiempos específicos, ya sea a partir del *applet* o de forma algebraica. Esto permite identificar que para ciertos puntos de la trayectoria el sistema no es estable.		**Tarea #2** Verbal: La trayectoria comienza a tomar una figura particular. Verbal: En la parte central los bucles parecen juntarse más hasta formar dos líneas paralelas. Verbal: Conforme se le agregan mas circunferencias la parte central de la trayectoria se acerca a una recta y los extremos a circunferencias.
	Elementos de la acción El planeta, la Tierra y un tiempo dado. *Relaciones invariantes* La distancia entre el planeta y la Tierra, en un tiempo dado.	Algebraico: *P* el planeta y *T* la Tierra.  **Tarea #2** Verbal: Para $t = \frac{\pi}{12}$ observamos una tendencia a la estabilidad, convergiendo la distancia al planeta a un valor específico.  Verbal: Para $t = \pi$ y $t = 2\pi$, entre más circunferencias se agregan la distancia PT va aumentando. Algebraico: 

Para la actividad referente a la relación entre la convergencia de la serie con la estabilidad del sistema, los invariantes identificados dan evidencia de que los estudiantes logran significar la convergencia de la serie —construida al matematizar el modelo dado— en la estabilidad del sistema para valores específicos del tiempo, para luego identificar la convergencia a partir del estudio de las gráficas de la sucesión de sumas parciales —ver Tabla 7-3—. En el caso particular de la Tarea #1, el análisis a priori planteaba como hipótesis que el estudio de las sumas parciales podría provocar que los estudiantes sostuvieran que la serie era divergente —debido a que se acerca a dos valores 1 y -1—, así sucedió durante la puesta en escena. Sin embargo, la identificación de la naturaleza del valor de convergencia —una función—, les permitió hacer la diferencia entre el límite de funciones —o de sucesiones— y la convergencia de una serie de funciones.

Nuevamente, se organizan las actividades — ***reconocer*** que el fenómeno alcanza un estado estable y ***relacionar*** la convergencia de la serie con la estabilidad del sistema— para realizar otra generalización extensional inicial en la Tarea #2, «la serie converge a una función» —ver Tabla 6-6—, esto bajo la acción de *comparar con el infinito*, la cual ya indicamos previamente tiene carácter predictivo, cuya significación radica en que la fórmula describe la trayectoria del planeta, tal y como lo indican los estudiantes —ver Tabla 6-9—.

Luego, en la Tarea #5, la estabilidad del sistema y el valor de convergencia de la serie —la función— se muestran como elementos de la acción *reconocer* un comportamiento periódico a partir de la regularidad de su repetición —ver Tabla 6-9—, lo que les da el carácter de objeto, concluyendo así el proceso de abstracción que inició al fijar los invariantes.

Es importante resaltar que los procesos de generalización descritos hasta el momento no suceden en forma lineal, se dieron en forma simultanea durante el desarrollo de la situación de aprendizaje, separarlos utilizando las actividades como hilo conductor fue la estrategia para poder presentarlos en forma ordenada y así hacer evidente el rol de las prácticas durante la abstracción, desde la fijación de los invariantes hasta la consideración de los símbolos como objetos.

Tabla 7-3. Inicio del proceso de generalización relativo a la convergencia de la serie y la estabilidad del sistema.

<table>
<tr><th colspan="3">Actividad
Relacionar la convergencia de la serie con la estabilidad del sistema.</th></tr>
<tr><th>Acciones</th><th>Reflexión sobre el sistema de acciones y establecimiento de los invariantes
¿Sobre qué lo hace?</th><th>Simbolización
¿Por medio de qué lo hace?</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Distinguir
Permite percibir la relación entre la convergencia de la serie y la estabilidad del sistema para valores específicos del tiempo, es decir, estudiando series numéricas particulares.

Comparar con el infinito
Permite relacionar la convergencia de la serie con la convergencia de la sucesión de sumas parciales a través de sus gráficas.
Identificar
Permite diferenciar entre la noción de convergencia de series y la de límite de funciones, para aceptar que se da la convergencia.</td>
<td>Elementos de la acción
Fórmula evaluada en valores específicos del tiempo.

Relación invariante
La convergencia de la serie se significa en la estabilidad del sistema.</td>
<td>Verbal: Meter al t en la fórmula y averiguar la convergencia.

Tarea #2
Verbal: [VG]-2-|02:14:45|
H1: Ah:: Es que la fórmula explica::: la forma que toma la figura.
P: ¡Ujú! ¿Y respecto de lo que respondieron arriba de va tomando una forma definida?
H4: Habría que ver los valores de convergencia. Meter al t en la fórmula y averiguar la convergencia.</td></tr>
<tr><td>Elementos de la acción
El valor de convergencia.

Relaciones invariantes
La gráfica converge a una función.</td>
<td>Verbal: El valor de convergencia.

Tarea #2
Verbal: Converge a una función escalonada.
Verbal: Converge a una función.</td></tr>
</table>

Respecto del segundo momento de construcción social de la STF —Tarea #6— como se comentó en la sección anterior, las herramientas teórico-metodológicas de las que disponemos no nos permitieron caracterizar la práctica en el nivel de actividad, por lo que el proceso de generalización se queda a nivel de la acción. Por otra parte, dado que este momento no presenta una clara variación del sistema de acciones, solo se puede considerar la parte inicial del proceso de generalización para cada una de las acciones caracterizadas, esto ya se hizo en el capítulo de resultados —ver 6.1.8—.

Aunado al comentario final hecho en la sección anterior sobre las consideraciones para un rediseño de esta tarea de la situación de aprendizaje, podría ser importante considerar para el rediseño un trabajo meramente geométrico-analítico, es decir, sobre las gráficas sin tener a mano las expresiones analíticas, y pasar luego al trabajo algebraico como una variación del sistema de acciones. Esto quizá sirva no solo para analizar el proceso de generalización, sino para caracterizar a la práctica en el nivel de actividad.

7.3 Reflexiones finales

En primer lugar, la adopción de elementos conceptuales de dos marcos teóricos fue fundamental para atender nuestro objeto de estudio *los procesos de generalización en un entorno de construcción social de conocimiento matemático*. La TSME dotó de las herramientas metodológicas para caracterizar la práctica en los niveles de acción y actividad; por su parte la Generalización Operativa (Dörfler, 1991) nos fue útil para determinar elementos clave en los procesos de generalización presentes en el desarrollo de la situación de aprendizaje.

Desde la TSME el esquema de anidación de práctica —Figura 4-2— es el modelo explicativo de la construcción social de conocimiento matemático donde cada uno de los niveles de la práctica acompaña y antecede al siguiente (Reyes-Gasperini, 2016), es decir, no es un proceso lineal las prácticas se dan todas, de forma complementaria, en el hacer del sujeto —individual o colectivo—. Sin embargo, este modelo no permite explicar la reificación —objetivación— del conocimiento, de echo no tiene por que hacerlo, la postura alternativa de la Socioepistemología centrada en las prácticas —paso del reificacionismo al relativismo— está en la base de la teoría (Cantoral, 2013).

Por su parte, la Generalización Operativa (Dörfler, 1991) explica el proceso de generalización seguido para lograr la reificación de los símbolos —Figura 4-5—, que comienza con la fijación de los invariantes. Lo que encontramos, a la luz del análisis realizado, es el rol que juegan las prácticas en esta reificación, produciendo objetos con significado a partir de su uso, en nuestro caso la STF como herramienta predictiva.

En la Figura 7-2 se muestra una propuesta teórica de la relación identificada entre las prácticas a la luz de los datos empíricos. En general se sigue el esquema de generalización de Dörfler (1991), se parte de la *acción* o sistema de acciones deliberadas del sujeto —individual o colectivo— que realiza sobre ciertos objetos materiales o inmateriales —elementos de la acción—. El sistema de acciones centra la atención del sujeto sobre ciertas relaciones entre los elementos de la acción que permanecen invariantes cuando las acciones se repiten —invariantes de la acción—. La *actividad* estructura dichas acciones mediante una variación del sistema de acciones, para fijar las relaciones invariantes en la cognición de individuo. Es la *práctica socialmente compartida* la que articula acciones y actividades para poder realizar la primera generalización extensional y que los invariantes se conviertan en elementos de la acción —la reificación— lo que les da el carácter de objeto, desde el punto de vista de Dörfler (1991).

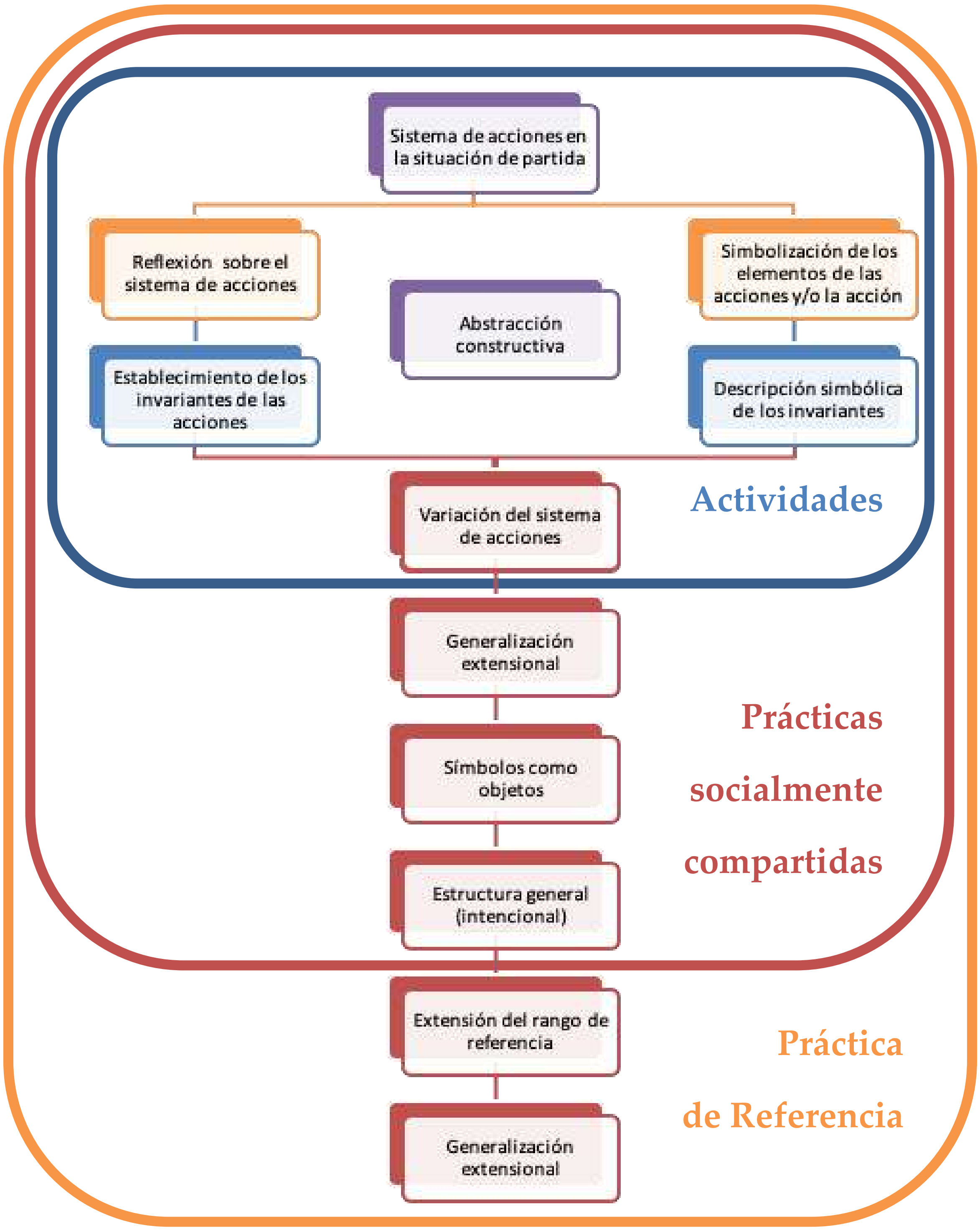


Figura 7-2. Relación de las prácticas con el esquema de generalización.

Ahora bien, los datos empíricos nos permitieron vislumbrar una propuesta del rol de las prácticas —acciones, actividades, práctica socialmente compartida— en los procesos de generalización, lo que nos permitió llegar hasta la reificación en el esquema de generalización adoptado para esta investigación. Según dicho esquema, se podría dar una extensión del rango de referencia a partir del estudio de nuevos sistemas de acciones, lo que nos hace pensar desde la TSME que esto podría tener relación con las prácticas de referencia, considerando nuevos marcos de referencia para la resignificación, se hace necesario entonces proponer nuevos marcos de referencia para la significación de la STF y analizar ahí estas relaciones.

Sin lugar a duda, se hace necesaria más investigación empírica para ahondar en nuestro objeto de estudio, los procesos de generalización en entornos de construcción social de conocimiento matemático parecen abrir una línea de investigación que dará frutos, será necesario incursionar en otras prácticas de referencia considerando diversidad de saberes matemáticos, lo que sigue parece ser prometedor.

8 Referencias

Albert, J. A. (1996). *La convergencia de series en el nivel superior: Una aproximación sistémica.* Tesis doctoral no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno, y P. Gómez (Eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática: un esquema para la invención y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 33-59). México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 1*(1), 40-55.

Artigue, M. (2014). Didactic Egineering in Mathematics Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 159-162). London: Springer.

Artigue, M. (2015). Perspectives on Design Research: The Case of Didactical Engineering. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knniping, y N. Presmeg, *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Examples of Methodology and Methods* (pp. 467-496). London: Advances in Mathematics Education.

Ayalon, M., y Even, R. (2008). Deductive reasoning: in the eye of the beholder. *Educational Studies in Mathematics, 69*, 235-247. doi:10.1007/s10649-008-9136-2

Bassi, J. (2015). El código de transcripción de Gail Jefferson: adaptación para las ciencias sociales. *Quaderns de Psicologia, 17*(1), 39-62. doi:10.5565/rev/qpsicologia.1252

Čadež, T., y Kolar, V. (2015). Comparison of types of generalizations and problem-solving schemas used to solve a mathematical problem. *Educational Studies in Mathematics, 89*, 283-306.

Cañadas, M., y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA, 1*(2), 67-78.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa.* Barcelona, España: Editorial Gedisa S.A.

Cantoral, R., y Farfán, R. M. (2003). Mathematics education: A vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics, 53*, 255-270.

Cantoral, R., Farfán, R. M., Lezama, J., y Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, (especial), 83-102.

Ciosek, M. (2012). Generalization in the process of defining a concept and exploring it by students. En B. Maj-Tatsis, y K. Tatsis (Eds.), *Generalization in mathematics at all educational levels* (pp. 38-56). Rzeszow: University of Rzeszow.

Cruz, M. (2019). *Linealidad y angularidad en la esfera: un nuevo escenario de trabajo geométrico.* Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México. doi: 10.13140/RG.2.2.25114.49604

Davydov, V. (1990). *Soviet Studies in Mathematics Education. Types of generalization in instruction: logical and psycholgical problems in the structuring of school curricula* (Vol. 2). (J. Teller, Trad.) Reston Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. En A. Bishop, S. Mellin-Olsen, y J. Dormolen (Eds.), *Mathematical knowledge: its growth through teaching* (pp. 63-85). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Farfán, R. M. (1997). *Ingeniería didáctica: un estudio de la variación y el cambio.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Farfán, R. M. (2012). *Socioepistemología y ciencia: el caso del estado estacionario y su matematización.* Barcelona, España: Gedisa S. A.

Farfán, R. M., y Romero, F. (2017). Construcción social del conocimiento matemático: La serie trigonométrica de Fourier desde la Socioepistemología. *Perspectivas da Educação Matemática – INMA/UFMS, 10*(23), 483-503.

Flores, R. (1992). *Sobre la construcción del concepto de convergencia en relación al manejo heurístico de los criterios.* Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Fourier, J. (1822). *Théorie analytique de la chaleur* (Reimpressions Editions Jacques Gabay (1988) ed.). París: Chez Firmin Didot, père et fils. Libraires pour les mathématiques, l'architecture hydraulique et la marine. Rue Jacop. No. 24.

Magnani, L. (2005). An abductive theory of scientific reasoning. *Semiotica, 153*(1-4), 261-186. doi:10.1515/semi.2005.2005.153-1-4.261

Marietti, S. (2005). The semiotic approach to mathematical evidence and generalization. En M. Hoffmann, J. Lenhard, y F. Seeger (Eds.), *Activity and sing. Grounding mathematics education* (pp. 35-43). Estados Unidos de América: Springer.

Marmolejo, R. (2006). *Estudio de la noción de estado estacionario en el ámbito fenomenológico de la transferencia de calor.* Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Montiel, G. (2005). *Estudio Socioepistemológico de la función trigonométrica.* Tesis doctoral no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Apicada y Tecnología Avanzada del IPN, México.

Montiel, G. (2011). *Construcción de conocimiento trigonométrico: Un estudio socioepistemológico.* México: Díaz de Santos.

Morales, F. (2010). *Causas y efectos de la ambigüedad en el tratamiento didáctico de la noción de calor. Una caracterización del pensamiento fisicomatemático.* Tesis doctoral no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Moreno, J. A. (1999). *Estudio de la noción de convergencia de series trigonométricas en un ambiente de simulación.* Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Piaget, J. (2009). *Psicología de la inteligencia* (Juan C. Foix, trad.). Barcelona, España: Editorial Crítica. (Obra original publicada en 1947).

Polya, G. (1967). *La découverte des mathématiques.* París: Dunod.

Radford, L. (2000). Sings and meanings in students' emergent algebraic thinking: a semiotic analysis. *Educational Studies in Mathemtics, 42*, 237-268.

Referencias

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 40*(1), 83-96. doi:10.1007/s11858-007-0061-0

Reid, D. (2002). Conjectures and Refutations in Grade 5 Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(1), 5-29.

Reyes-Gasperini, D. (2011). *Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: Estudio de los factores de cambio en las prácticas del profesor de matemáticas.* Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Reyes-Gasperini, D. (2016). *Empoderamiento docente y Socioepistemología: un estudio sobre la transformación educativa en Matemáticas.* México: Gedisa.

Rivera, F., y Rossi-Becker, J. (2007). Abduction–induction (generalization) processes of elementary majors on figural patterns in algebra. *Journal of Mathematical Behavior, 26*, 140-155. doi:10.1016/j.jmathb.2007.05.001

Romero, F. (2016). *Construcción social de la serie trigonométrica de Fourier: Pautas para un diseño de intervención en el aula.* Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México. doi:10.13140/RG.2.2.14118.63048

Romero, F., y Farfán, R. M. (2016). Estado actual de la investigación alrededor de la serie trigonométrica de Fourier. En F. Rodríguez, R. Rodríguez, y L. Sosa (Eds.), *Investigación e Innovación en Matemática Educativa*, *1*, pp. 275-282. Oaxaca, México: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A. C.

Romero, F., y Farfán, R. M. (2018). Cálculo de los coeficientes de Fourier. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 31*(2), 1567-1575.

Rossi-Becker, J., y Rivera, F. (2006). Sixth graders' figural and numerical strategies for generalizing patterns in algebra. En S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, y A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (pp. 95-101). Mérida, México.

Solís, M. (1993). *Estudio de la noción de variación en contextos físicos: El fenómeno de la propagación de calor.* Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Steele, D., y Johanning, D. (2004). A schematic-theoretic view of problem solving and development ofalgebraic thinking. *Educational Studies in Mathematics, 57*, 65-90.

Swafford, J., y Langrall, C. (2000). Grade 6 students' preinstructional use of equations to describe and represent problem situations. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(1), 89-112.

Ulín, C. (1984). *Análisis histórico-crítico de la difusión de calor: el trabajo de Fourier.* Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Vásquez, R. (2006). *Sobre el papel de la hipótesis de periodicidad en las series de Fourier.* Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Vygotsky, L. S. (1986). *Thought and Language.* (A. Kozulin, Ed.) Cambrige: MIT Press.

9 Anexos

9.1 Situación de aprendizaje: Modelando el Movimiento de los Planetas

A continuación, se presenta en forma detallada la situación de aprendizaje —disponible como libro de GeoGebra en https://ggbm.at/byc8hxdv—, divida en secuencias de tareas, se explica la intención de cada uno de los incisos de las tareas. La situación se organiza a partir de los dos momentos de construcción social de la STF: 1. comprender que una serie trigonométrica puede converger a una función (Tareas de la #1 a la #5) y 2. dada una función que se puede representar en serie trigonométrica, determinar los coeficientes de la serie (Tarea #6).

9.1.1 Introducción: El movimiento de los planetas

Se busca con esta parte que el estudiante se familiarice con el modelo del movimiento planetario propuesto por los astrónomos alejandrinos[1]. Dicho modelo consistía en una circunferencia centrada en la Tierra y sobre su perímetro se mueve un punto, este punto es el centro de otra circunferencia, y sobre el perímetro de esta se mueve otro punto, el cual es centro de otra circunferencia y así sucesivamente, todos los puntos se mueven con velocidad angular uniforme y en sentido antihorario. A este modelo del movimiento se le conoce con el nombre de superposición de movimientos circulares o epiciclos[2] (Ilustración 9.1-1).

Aquí, y para todo el diseño, los applets de Geogebra utilizados funcionan como variable de control para promover una comprensión más profunda del fenómeno. Esto es necesario, ya que la primera experiencia sensible no es suficiente para modelar los fenómenos de estado estacionario, lo que requiere de una comprensión más profunda de los mismos (Farfán, 2012; Romero, 2016; Farfán y Romero, 2017).

---

[1] Cabe resaltar que para la época el Sol y la Luna eran considerados planetas, por lo que durante todas las tareas cuando se ha referencia a los planetas se está considerando también al Sol y la Luna.

[2] Para tener referencia de este modelo y ampliar la introducción se puede revisar (Calles, Yépez, y Peralta, 2003).

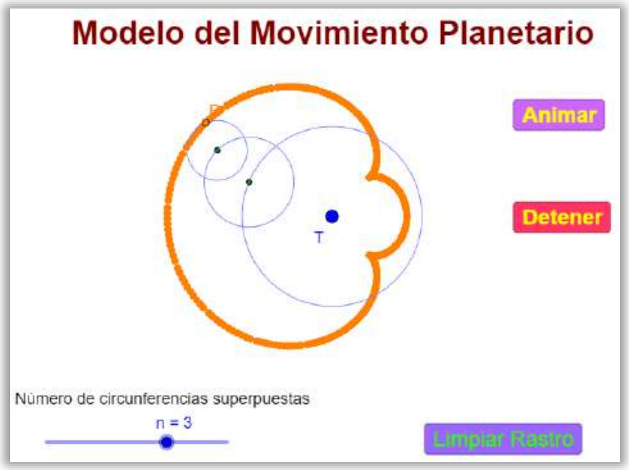


Ilustración 9.1-1. Applet de introducción a la situación (https://ggbm.at/yGBB3pVF).

A continuación, se presentan las Tareas que componen la situación de aprendizaje, para analizar el tipo de preguntas que se proponen, así como la ruta a seguir, partir de una profunda comprensión cualitativa del fenómeno hacia su matematización, donde se debe vigilar la coherencia entre el fenómeno físico y la matemática involucrada, tal como lo hizo Fourier ante el problema de la propagación del calor.

9.1.2 Tarea #1: Explicando el movimiento de los planetas

El objetivo de esta tarea es *caracterizar el comportamiento del sistema de forma cualitativa, lo que permitirá una comprensión más profunda del fenómeno y no solo aquello que detectan los sentidos a simple vista*. Esta Tarea se divide en dos partes, la primera (Ilustración 9.1-2) procura comprender por qué el modelo de los alejandrinos permite explicar aquello que el modelo griego no permitía.

Parte I. ¿Qué permite explicar este modelo?

Llamemos a la Tierra T y considere la trayectoria de un planeta P que se mueve alrededor de la Tierra, utilizando el modelo de los epiciclos con una, dos, tres y cuatro circunferencias.

a) ¿Por qué crees que el modelo con una única circunferencia no permite explicar el cambio de luminosidad de los planetas, las estaciones del año y el fenómeno de retrogradación?

b) ¿Cuál(es) permite(n) explicar el cambio de luminosidad de los planetas y las estaciones del año?

c) ¿Cuál(es) permite(n) explicar el fenómeno de retrogradación de los planetas?

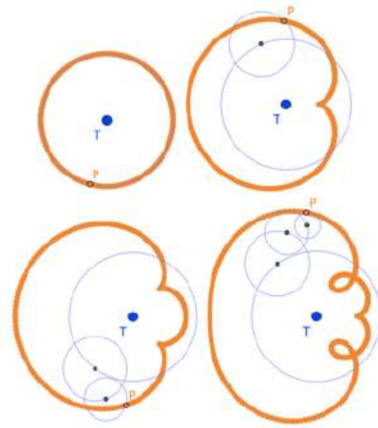


Ilustración 9.1-2. Tarea #1 – Parte I, incisos *a*, *b* y *c* de la situación de aprendizaje[3].

Se busca de esta manera propiciar una comprensión profunda del sistema, así como Fourier conocía el comportamiento del fenómeno de propagación del calor a través de la empírea antes de proponer su modelo matemático del fenómeno (Farfán y Romero, 2017).

Se espera que el estudiante relacione el cambio de luminosidad y las estaciones del año con la distancia que hay entre T y P, por tanto, el modelo de una circunferencia no permite explicar estos fenómenos ya que esta distancia nunca cambia, no así en el modelo con 2, 3 y 4 circunferencias en donde la distancia de P a T cambia durante la trayectoria. Respecto del fenómeno de retrogradación, su explicación estará en los bucles que se generan en el modelo con 4 circunferencias.

Estas preguntas confrontan al estudiante ¿cómo lo sabemos? A partir del pilotaje realizado y varias puestas en escena no controladas notamos que los partícipes se veían obligados no solo a decir lo que sucede, sino a explicar las causas de esos comportamientos,

[3] El cambio de luminosidad se refiere al cambio de brillo de los planetas, en la época de los alejandrinos se creía que esto se debía al cambio de la distancia entre la Tierra y el planeta. Esta misma explicación se daba para las estaciones del año, recuerde que en esa época el Sol era considerado un planeta. El fenómeno de retrogradación se refiere a una breve interrupción en el movimiento de algunos planetas durante breves intervalos, donde el movimiento se da en sentido contrario al movimiento habitual.

lo que provocó una demanda cognitiva, más allá de lo que la percepción les permitía observar en las imágenes de manera inicial.

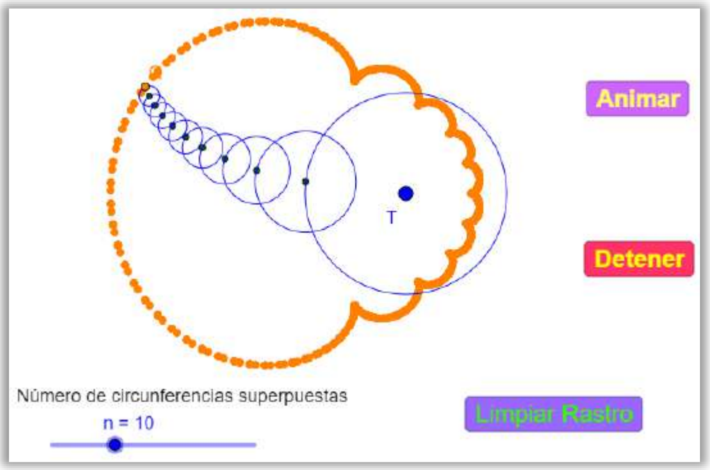
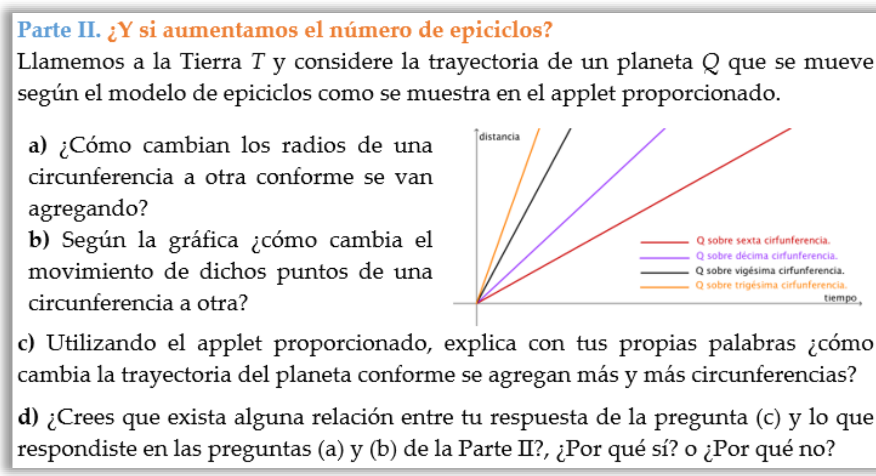


Ilustración 9.1-3. Applet de la Tarea 1 – Parte II (https://ggbm.at/d3CN5DT8).

La segunda parte de esta tarea busca, con apoyo de un applet (Ilustración 9.1-3), vislumbrar la noción de estabilidad del sistema, para esto se permite la posibilidad en el applet de aumentar hasta treinta el número de circunferencias y así analizar los cambios que se dan en el comportamiento del sistema.


Parte II. ¿Y si aumentamos el número de epiciclos?
Llamemos a la Tierra T y considere la trayectoria de un planeta Q que se mueve según el modelo de epiciclos como se muestra en el applet proporcionado.

a) ¿Cómo cambian los radios de una circunferencia a otra conforme se van agregando?
b) Según la gráfica ¿cómo cambia el movimiento de dichos puntos de una circunferencia a otra?

c) Utilizando el applet proporcionado, explica con tus propias palabras ¿cómo cambia la trayectoria del planeta conforme se agregan más y más circunferencias?

d) ¿Crees que exista alguna relación entre tu respuesta de la pregunta (c) y lo que respondiste en las preguntas (a) y (b) de la Parte II?, ¿Por qué sí? o ¿Por qué no?

Ilustración 9.1-4. Tarea #1 – Parte II, incisos del *a* al *d* de la situación de aprendizaje.

El inciso *a* (Ilustración 9.1-4) busca concluir que los radios de las circunferencias tienden a cero en forma cualitativa, para esto los estudiantes podría usar frases como “disminuyen”, “se hacen más pequeños”, entre otras. En el inciso *b* (Ilustración 9.1-4), la gráfica proporcionada muestra la distancia recorrida en función el tiempo para cada punto sobre las circunferencias sexta, décima, vigésima y trigésima; a través del estudio del cambio se pretende que los estudiantes infieran que la velocidad de los puntos sobre cada circunferencia sigue aumentando sin cota, para esto podría utilizar frases como “va más rápido”, “en el mismo tiempo recorre cada vez más distancia”, entre otras.

Según la prueba piloto, es posible que para la pregunta *b* los estudiantes consideren que la gráfica se refiere a la trayectoria del planeta al agregar circunferencias, cuando en realidad se refiere al movimiento de cada punto sobre cada circunferencia, se debe hacer esta aclaración.

Para el inciso *c* (Ilustración 9.1-4) la intención es que el estudiante identifique el carácter estable del sistema en forma cualitativa, esto a través de frases como “cuando hay muchas circunferencias casi no cambia la forma de la trayectoria conforme se agregan más”, “tiende a parecerse a una…”. Para esto se espera analice el cambio en la forma de la trayectoria conforme se agregan cada vez más circunferencias (Ilustración 9.1-5).

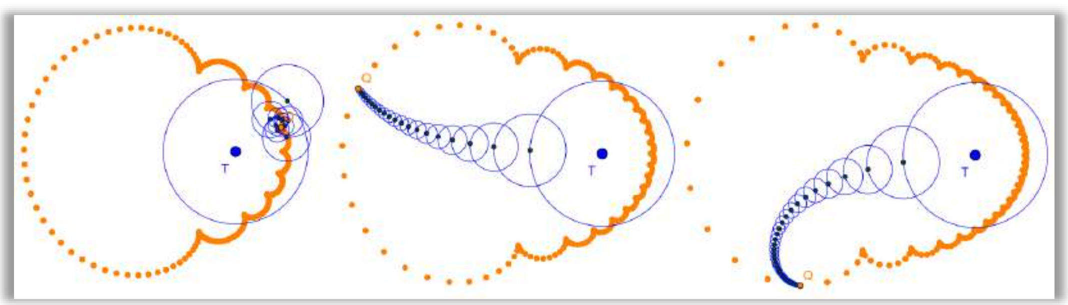


Ilustración 9.1-5. Trayectoria del planeta *Q* utilizando 10, 20 y 30 circunferencias, respectivamente.

En el pilotaje y las puestas en escena los participantes lograron identificar el carácter estable del fenómeno. Sin embargo, expresaban que “algo extraño pasaba con la parte izquierda de la trayectoria”, esto es importante, pues no toda la trayectoria es estable y esto dará significado, en las tareas posterior a las nociones de convergencia y divergencia de series.

El inciso *d* (Ilustración 9.1-4) busca confrontar el cómo cambia la trayectoria del planeta (estabilidad) con lo que provoca el cambio. Sin embargo, determinar cómo cambia y qué produce el cambio es una tarea cognitivamente muy compleja para los fenómenos de determinación del estado estacionario (Farfán, 2012; Romero, 2016). Se espera que, con ayuda del docente y a partir de las ideas planteadas por los estudiantes, se acerquen a la idea de que al tender los radios de las circunferencias a cero y la velocidad de movimiento del punto al infinito esto provoca que se logre la estabilidad; es decir, agregar una circunferencia muy pequeña y un punto sobre esta que se mueve muy rápido no provoca cambios significativos en el sistema en general.

9.1.3 Tarea #2: Modelando el movimiento de los planetas

Esta tarea tiene como objetivo *significar la convergencia de series trigonométricas mediante la estabilidad de la trayectoria del planeta, caracterizándola mediante el límite de la sucesión de sumas parciales*. Se tiene como expectativa, que al igual que en el trabajo de Fourier sobre propagación del calor, el carácter estable del fenómeno provoque la necesidad de hablar de la convergencia de series trigonométricas (Farfán, 2012). En la Ilustración 9.1-6, se observa la situación planteada.

Tarea #2. Modelando el movimiento de los planetas.
Llamemos a la Tierra T y consideremos un cierto planeta P cuya órbita corresponde a una superposición de movimientos circulares en torno de T, el modelo se comporta de la manera siguiente:

- Los radios de las circunferencias primera, segunda, tercera, … son respectivamente $\frac{4}{\pi}, \frac{4}{3\pi}, \frac{4}{5\pi}, \dots$
- La velocidad angular, en radianes por mes, de los puntos sobre las circunferencias primera, segunda, tercera, . . . son respectivamente 1, 3, 5, …
- Cuando el tiempo es $t = 0$, el ángulo en posición estándar del punto con respecto al centro de la circunferencia es nulo.

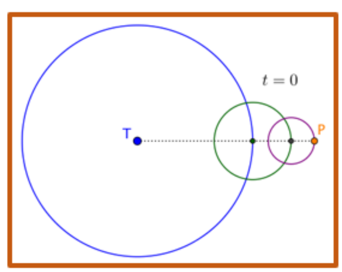


Ilustración 9.1-6. Situación planteada en la Tarea #2 de la situación de aprendizaje.

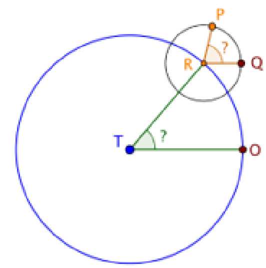
Esta tarea está dividida en dos partes, la primera busca que el estudiante comprenda cómo se comporta el sistema, y la relación que guarda con los datos suministrados por la situación planteada. Para empezar, en el inciso *a* (Ilustración 9.1-7) se pretende reconocer el comportamiento del movimiento de los puntos sobre cada circunferencia.

Parte I. Comprendiendo el modelo.

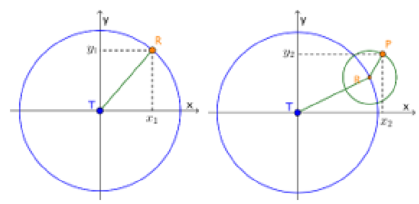
Con base en la situación planteada, realice lo que se le solicita a continuación:

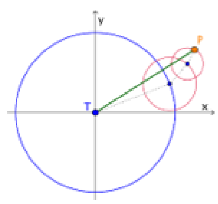
a) Considere el modelo con dos circunferencias, como en la imagen adjunta. Complete la siguiente tabla para determinar la medida (en radianes) de los ángulos $\angle OTR$ y $\angle QRP$, después de t meses.

Meses	Medida de $\angle OTR$ (en radianes)	Medida de $\angle QRP$ (en radianes)
0		
1		
2		
3		
⋮	⋮	⋮
t		



b) Continuando con el modelo utilizando dos circunferencias y agregando un sistema de coordenadas cuyo origen sea T. Determine las coordenadas (x_1, y_1) de R y las coordenadas (x_2, y_2) de P, para cualquier valor de t. Determine además la distancia de P a T, para cualquier t.





c) Considere ahora el modelo utilizando tres circunferencias. Determine una fórmula que permita calcular la distancia del planeta P a la Tierra, para cualquier valor de tiempo t.

Ilustración 9.1-7. Tarea #2 – Parte I, incisos del *a* al *d* de la situación de aprendizaje.

Para esta pregunta es probable que la idea de velocidad angular genere dificultades, esto se evidenció en el pilotaje y las diferentes puestas en escena; debido a que la concepción de radian en sí misma provoca dificultades según se ha reportado en distintas investigaciones (Akkoc, 2008; Moore, 2009).

Los incisos *b* y *c* (Ilustración 9.1-7) buscan construir las primeras tres sumas parciales de dos series trigonométricas, pero con un significado asociado al fenómeno -las coordenadas del planeta- que permite determinar la distancia del planeta a la Tierra. Se espera que los estudiantes recurran a dibujar triángulos rectángulos sobre las figuras proporcionadas para identificar las razones trigonométricas involucradas, aunque para hacer la generalización a cualquier valor del tiempo se requiera que la función trigonométrica esté construida previamente (Montiel, 2011).

Para la segunda parte de esta tarea se proporciona un applet (Ilustración 9.1-8), con el fin de visualizar la estabilidad del sistema. A partir de manipular el número de circunferencias se podrá analizar el comportamiento del sistema, al estudiar cómo cambia la trayectoria del planeta.

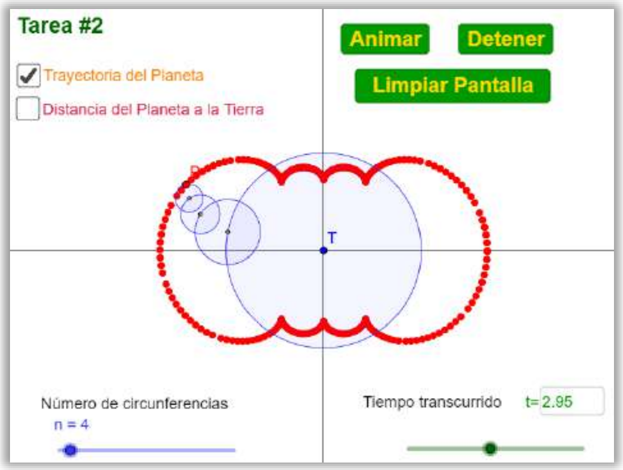
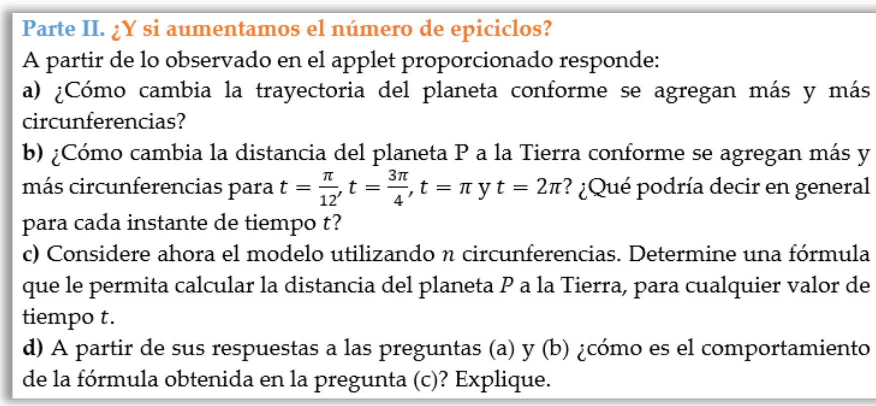


Ilustración 9.1-8. Applet de la Tarea 2 – Parte II (https://ggbm.at/jdBYwe8E).

En el inciso *a* (Ilustración 9.1-9) se tiene como expectativa que el estudiante identifique que la trayectoria del planeta se estabiliza conforme se agregan más circunferencias. Se espera que la respuesta surja por sí sola con base en el trabajo realizado en la Tarea #1.



Parte II. ¿Y si aumentamos el número de epiciclos?
A partir de lo observado en el applet proporcionado responde:
a) ¿Cómo cambia la trayectoria del planeta conforme se agregan más y más circunferencias?
b) ¿Cómo cambia la distancia del planeta P a la Tierra conforme se agregan más y más circunferencias para $t = \frac{\pi}{12}$, $t = \frac{3\pi}{4}$, $t = \pi$ y $t = 2\pi$? ¿Qué podría decir en general para cada instante de tiempo t?
c) Considere ahora el modelo utilizando n circunferencias. Determine una fórmula que le permita calcular la distancia del planeta P a la Tierra, para cualquier valor de tiempo t.
d) A partir de sus respuestas a las preguntas (a) y (b) ¿cómo es el comportamiento de la fórmula obtenida en la pregunta (c)? Explique.

Ilustración 9.1-9. Tarea #2 – Parte II, incisos del *a* al *d* de la situación de aprendizaje.

El inciso *b* (Ilustración 9.1-9) pretende propiciar un análisis numérico de la variación de una suma parcial a otra, se busca que el estudiante se percate que la trayectoria del planeta no es estable para todos los valores del tiempo, para luego pasar a matematizar el fenómeno en el inciso *c* (Ilustración 9.1-9), como una generalización de los resultados obtenidos en la Tarea #2 - Parte I, para llegar a que la distancia del planeta P a la Tierra es igual a $\sqrt{x_n^2 + y_n^2}$, donde:

$$\begin{cases} x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{(2k-1)\pi} \cos[(2k-1)t] \\ y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{(2k-1)\pi} \operatorname{sen}[(2k-1)t] \end{cases}$$

Las fórmulas así construidas corresponden a sumas parciales de series trigonométricas, colocando a la tierra T como el origen de un sistema de coordenadas. El incido *d* (Ilustración 9.1-9) conduce hacia la interpretación de la matemática involucrada en el fenómeno físico, relacionar la estabilidad de la trayectoria el planeta con el límite de las sumas parciales involucradas en la fórmula calculada en el inciso *c*. Esto es de suma importancia, pues en el trabajo de Fourier siempre hubo un ir y venir entre el fenómeno físico y la matemática involucrada, para validar la segunda en la primera (Farfán, 2012; Farfán y Romero, 2017).

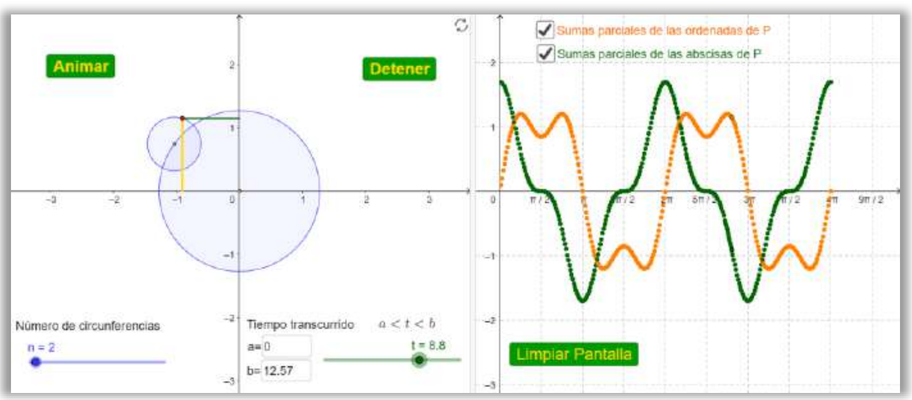


Ilustración 9.1-10. Tarea #2 – Parte II, applet para los incisos del *e* al *h* de la situación de aprendizaje (https://ggbm.at/jf9gmZ4A).

Las preguntas siguientes de esta tarea requieren de otro applet de Geogebra (Ilustración 9.1-10), en el que se muestra en la parte izquierda el modelo del movimiento del planeta *P* alrededor de la Tierra *T*; a la derecha se presenta el cambio de las coordenadas del planeta P conforme transcurre el tiempo.

Parte II. ¿Y si aumentamos el número de epiciclos?

A partir de lo observado en el applet proporcionado responde:

e) ¿Cómo es el comportamiento de las sumas parciales de las abscisas? ¿Y el de las ordenas? Explica con tus propias palabras. ¿Qué relación existe entre estas respuestas y las de las preguntas (a) y (b)?

f) Note que las fórmulas obtenidas corresponden a sumas parciales de series trigonométricas. Con base en el mismo applet y tu respuesta a la pregunta anterior ¿podrías asegurar si la serie de las ordenadas converge o diverge? En caso de que converja ¿podrías identificar su valor de convergencia? Explica tus respuestas.

g) Si se cambia el rango de valores de t, para todos aquellos en los que $t \geq 0$. ¿Cuál es el valor de convergencia de la serie de las ordenadas del planeta P?

h) ¿Tiene sentido en nuestro modelo considerar valores de t negativos? ¿Cuál sería el valor de convergencia de la serie de las ordenadas del Planeta P en caso de considerar a $t \in \mathbb{R}$?

Ilustración 9.1-11. Tarea #2 – Parte II, incisos del *e* al *h* de la situación de aprendizaje.

Se espera con los incisos *e* y *f* (Ilustración 9.1-11) la interpretación de la matemática involucrada en el fenómeno físico, relacionar la estabilidad de la trayectoria del planeta con la convergencia de las series involucradas en la fórmula calculada para la distancia de planeta *P* a la Tierra. Se espera que se percaten de que la suma parcial de las abscisas no siempre es divergente y que la suma parcial de las ordenadas es siempre convergente (Ilustración 9.1-12).

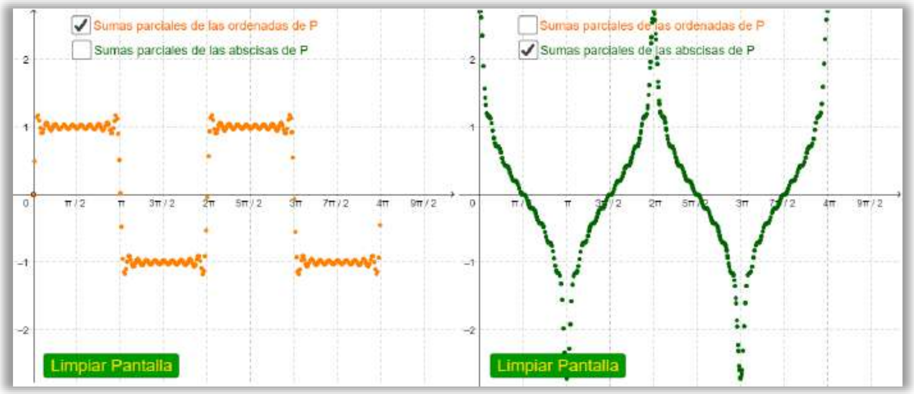


Ilustración 9.1-12. Gráfica de las sumas parciales con 10 circunferencias
para las ordenadas de *P* y las abscisas de *P*, respectivamente.

En particular para el inciso *f*, se tiene como hipótesis que los estudiantes respondan que la serie de las ordenadas diverge, cuando en realidad es convergente. Esto lo sabemos gracias a la prueba piloto y las diferentes puestas en escena, ya que el argumento principal utilizado fue que "la gráfica se está acercando a dos valores 1 y -1", lo que da evidencia de la concepción de límite funcional como obstáculo para comprender la convergencia de series. Es importante aquí promover la confrontación de los argumentos de los participantes y que a través del diálogo compartido se construya una respuesta más sólida a partir de cuestionar la naturaleza de los términos de la serie. Para llegar, por ejemplo, a qué en el intervalo $(0,2\pi)$ la serie de las ordenadas de *P* converge a la función:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 < t < \pi \\ -1 & si \quad \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

Si bien sabemos que en $t = \pi$, la serie converge a cero -de hecho, en todas las discontinuidades considerando a $t \in \mathbb{R}$- aquellos estudiantes que vislumbren la convergencia podrían pensar que cerca de $t = \pi$ -las discontinuidades- la serie de las ordenadas de *P* es divergente, pues ya está reportado que los estudiantes consideran convergente solo aquello que converge uniformemente y lo demás es divergente (Albert, 1996); además que estarían observando el fenómeno de Gibbs -muchas oscilaciones alrededor de la discontinuidad- que será objeto de análisis en la Tarea #4.

Los incisos g y h (Ilustración 9.1-11) pretenden provocar que la periodicidad sea un resultado de la serie y no una condición de la función que se está representando. Pues la serie, como objeto matemático, posee ciertas características que no tienen sentido en el fenómeno que se está modelando. En este caso dicha característica es la condición de periodicidad, la cual se da en toda la recta real, pero el fenómeno no tiene sentido al hablar de valores negativos del tiempo. Para concluir con esta tarea, se espera que los estudiantes no sepan escribir en forma analítica una función periódica en el inciso *h*, ya que no es usual hacerlo en la escuela, posiblemente escriban la función para un intervalo y escriban con palabras que se repite de manera periódica.

9.1.4 Tarea #3: Un modelo más general

Esta tarea tiene el mismo objetivo que la Tarea #2, lo que presenta es otro caso de convergencia en el contexto abordado. Se espera entonces, que al igual que en la tarea anterior el carácter estable del fenómeno provoque la necesidad de hablar de la convergencia de series trigonométricas, pero esta vez dicha serie se podrá representar como suma de senos y cosenos para el final de la tarea.

Al igual que la tarea anterior, esta tarea se divide en dos partes y las preguntas planteadas son prácticamente las mismas, con diferencias sutiles, por lo que no analizaremos todas las preguntas planteadas ya que su intencionalidad es la misma. En lugar de esto pondremos especial atención en tres cambios significativos que se hacen respecto de la Tarea #2.

Tarea #3. Un modelo más general.

Llamemos a la Tierra T y consideremos un cierto planeta P cuya órbita corresponde a una superposición de movimientos circulares en torno de T, el modelo se comporta de la manera siguiente:

- El radio de la circunferencia número n está dado por $\frac{\sqrt{n^2\pi^2+2-2(-1)^2}}{n^2\pi}$.
- La velocidad angular, en radianes por mes, de los puntos sobre las circunferencias primera, segunda, tercera, . . . son respectivamente 1, 2, 3, …
- Cuando el tiempo es $t=0$, el ángulo en posición estándar del punto con respecto al centro de la circunferencia número n es $\theta_n = \arctan\left(\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\right)$.

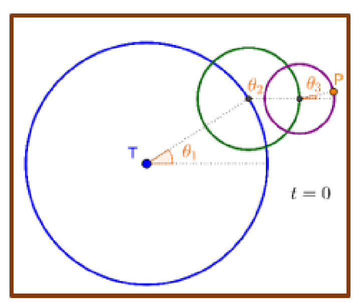


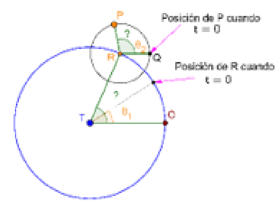
Ilustración 9.1-13. Situación planteada en la Tarea #3 de la situación de aprendizaje.

El primer cambio importante está en el planteamiento de la situación (Ilustración 9.1-13), donde como condición inicial del fenómeno los puntos no se encuentran alineados hacia la derecha. Esto repercute directamente en el inciso *a* (Ilustración 9.1-14), aunque se espera que ya no haya problema con la idea de velocidad angular gracias a la tarea anterior, el hecho de que el ángulo no inicie su movimiento en la posición horizontal mostró dificultades en la prueba piloto.

Parte I. Comprendiendo el modelo.

Con base en la situación planteada, realice lo que se le solicita a continuación:

a) Considere el modelo con dos circunferencias, como en la imagen adjunta. Determine la medida (en radianes) de los ángulos $\angle OTR$ y $\angle QRP$, después de t meses.



b) Regresando al modelo utilizando dos circunferencias y agregando un sistema de coordenadas, en el cual T esté en el punto $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$. Determine las coordenadas (x_1, y_1) de R y las coordenadas (x_2, y_2) de P, para cualquier valor de t. Determine además la distancia de P a T, para cualquier t.

c) Considere ahora el modelo utilizando tres circunferencias. Determine una fórmula que permita calcular las coordenadas (x_3, y_3) del planeta P, para cualquier valor de tiempo t.

Ilustración 9.1-14. Tarea #3 – Parte I, incisos del *a* al *d* de la situación de aprendizaje.

El inciso *b* (Ilustración 9.1-14) muestra el segundo cambio significativo, y no es el hecho de que no se dan las imágenes como en la Tarea #2 - Parte I (Ilustración 9.1-7), esto es solo con intención de evaluar la comprensión del comportamiento del sistema que se logró a partir de la tarea anterior; el cambio importante radica en que la Tierra ya no está centrada en el origen del sistema de coordenadas, esto nos permitirá significar el término constante de la serie de Fourier, tal y como se verá más adelante.

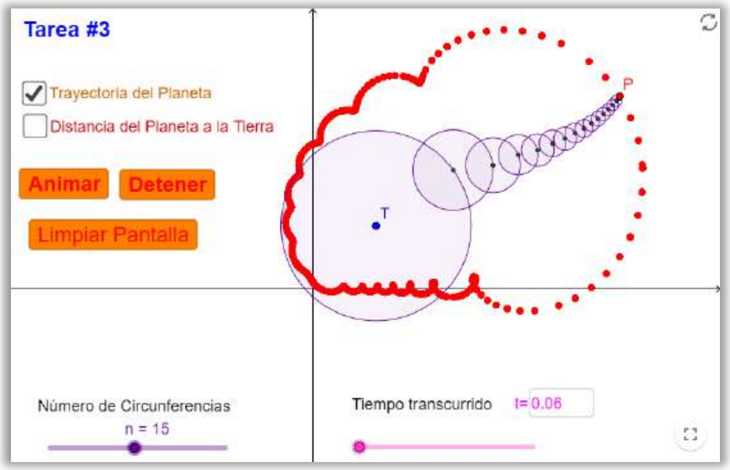


Ilustración 9.1-15. Applet de la Tarea 3 – Parte II (https://ggbm.at/tJwCF8um).

La segunda parte de la tarea inicia analizando un applet (Ilustración 9.1-15), en términos generales se sigue la estructura de la Tarea #2 - Parte II, es decir, se busca primero que el estudiante identifique que la trayectoria del planeta se estabiliza conforme se agregan más circunferencias; luego análisis numérico de la variación de una suma parcial a otra, se busca que el estudiante se percate que la trayectoria del planeta no es estable para todos los valores del tiempo. Seguidamente se pasa a matematizar el fenómeno, como una generalización de los resultados obtenidos en la Tarea #3 - Parte I, para llegar a que las coordenadas (x_n, y_n) del planeta P, en función del tiempo t, están dadas por:

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{\pi}{4} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} r_k \cos[kt + \theta_k] \\ y_n = \dfrac{\pi}{4} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} r_k \operatorname{sen}[kt + \theta_k] \end{cases}$$

Donde $r_k = \frac{\sqrt{k^2\pi^2+2-2(-1)^k}}{k^2\pi}$ y $\theta_k = \arctan\left(\frac{1-(-1)^k}{k\pi}\right)$. De nueva cuenta, las preguntas planteadas buscan relacionar la matemática involucrada con el contexto físico, de suma importancia para la significación de la serie trigonométrica, mediante la significación de sus sumas parciales. Para esto se utilizará otro applet de Geogebra (Ilustración 9.1-16) con el objetivo de relacionar el fenómeno con la convergencia de las series.

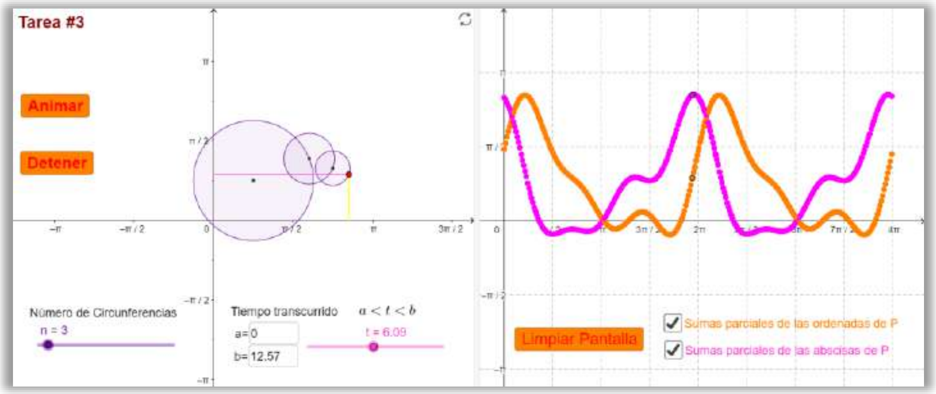


Ilustración 9.1-16. Segundo applet de la Tarea 3 – Parte II (https://ggbm.at/Kwx2Mpcc).

De igual forma que en la tarea anterior, se espera que el estudiante se percate de que la serie de las abscisas es divergente y que la serie de las ordenadas es convergente, y que el valor de convergencia, para $t \in (0,2\pi)$, es:

$$f(t) = \begin{cases} \pi - t & si \quad 0 < t \leq \pi \\ 0 & si \quad \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

Nuevamente, visualizar el fenómeno de Gibbs, puede provocar que los estudiantes que vislumbren la convergencia piensen que cerca de $t = 0$ y $t = 2\pi$ —las discontinuidades— la serie de las ordenadas de P es divergente, al igual se espera que pase en la Tarea #2. La tarea siguiente trabajará sobre este fenómeno.

Parte II. ¿Y si aumentamos el número de epiciclos?

i) Considere ahora la serie de las ordenadas de P. Utilizando identidades trigonométricas, escríbala en la forma:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kt) + b_k \operatorname{sen}(kt))$$

es decir, identifique los valores de a_0, a_k y b_k.

Ilustración 9.1-17. Tarea #3 – Parte II, inciso *i* de la situación de aprendizaje.

El tercer cambio significativo de esta tarea corresponde a la adición de una pregunta que no se hizo en la Tarea #2 (Ilustración 9.1-17), esta tiene como propósito verificar la idea de que una serie trigonométrica de senos y cosenos puede converger a una función, pues hasta el momento solo se había trabajado con series de senos convergentes, esta idea debe surgir en la puesta en común de esta parte de la tarea.

9.1.5 Tarea #4: El fenómeno de Gibbs

Esta tarea tiene por objetivo *diferenciar el tipo de convergencia entre los puntos cercanos a las discontinuidades y los que no, para así construir una mejor comprensión de la convergencia de la serie, a través del estudio del comportamiento de las sumas parciales*. Cómo se comentó antes, los estudiantes consideran que las oscilaciones mostradas cerca de las discontinuidades de salto se dan porque en esos puntos la serie es divergente (Fenómeno de Gibbs).

Entonces, retomamos las series construidas en las tareas anteriores para analizar el comportamiento de las sumas parciales en los puntos cercanos a las discontinuidades, dividiendo la tarea en dos partes, una para la serie de la Tarea #2 y otra para la de la Tarea #3.

Parte I. Volvamos a la serie de la Tarea #2.

a) Considere el applet utilizado en la Tareas #2, en el que se representan las sumas parciales de las ordenadas del planeta P, responda ¿cómo se comporta la sucesión de sumas parciales en valores muy cercanos a $t = 0$, $t = \pi$ y $t = 2\pi$? ¿Cómo se observa este comportamiento en la trayectoria de P?

b) Utilice el applet proporcionado y elija un valor de $t \in (0, \pi)$ "lejano" de los extremos del intervalo ¿a partir de cuál suma parcial la aproximación dada por la suma difiere del valor de la función límite en menos de 0.1?

c) Utilice el applet proporcionado y elija dos valores de $t \in (0, \pi)$ "cercanos" a cada uno de los extremos del intervalo ¿a partir de cuál suma parcial la aproximación dada por la suma difiere del valor de la función límite en menos de 0.1?

d) ¿Cuál es la diferencia en el comportamiento de las sumas parciales para los puntos "cercanos" a las discontinuidades y los "lejanos" de las discontinuidades?

e) ¿Es convergente la serie para valores cercanos a $t = 0$? ¿y cercanos a $t = \pi$? Explica tus respuestas.

f) ¿Qué valor toman las sumas parciales exactamente en $t = 0$ y $t = \pi$? ¿Qué puedes decir respecto de la convergencia en estos valores? Explica tus respuestas.

g) Con base en lo trabajado en esta parte, podría replantear la función límite de la serie de las ordenadas del planeta P.

Ilustración 9.1-18. Tarea #4 – Parte I, incisos del *a* al *g* de la situación de aprendizaje.

Para el inciso *a* (Ilustración 9.1-18) se utiliza el applet proporcionado en la Figura 11, se espera que el estudiante responda que la suma diverge o que no está completamente seguro de la convergencia. Para las preguntas b y c se utiliza otro applet de Geogebra (Ilustración 9.1-19) se espera con estas preguntas que el estudiante se percate de que, para lograr la aproximación deseada, los puntos "cercanos" a las discontinuidades requiere de sumas parciales de orden mucho mayor al orden de la suma que requieren los puntos "lejanos" de las discontinuidades.

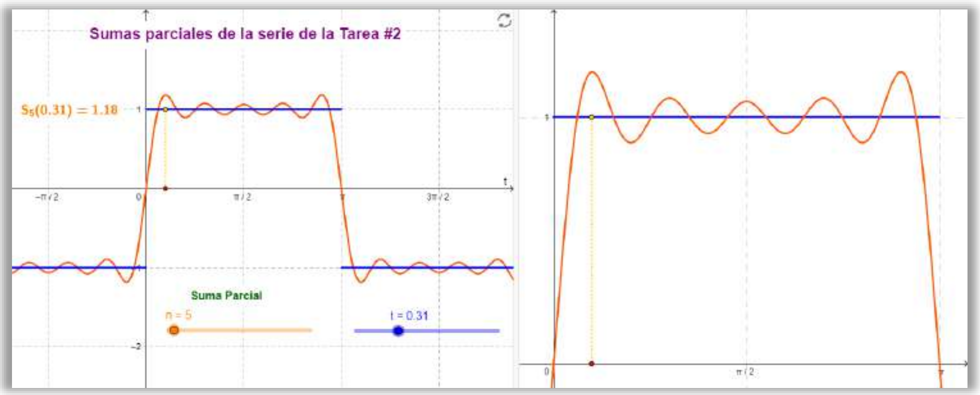


Ilustración 9.1-19. Tarea 4 – Parte I, applet para los incisos b y c de la situación de aprendizaje (https://ggbm.at/tpvjSaFt).

Este análisis busca que el estudiante haga una diferencia entre convergencia "rápida" y "lenta" en los incisos d y e (Ilustración 9.1-18), para que en el inciso f (Ilustración 9.1-18) se convenza de que la serie es convergente incluso en las discontinuidades de salto. De esta manera podrá replantear su función límite, en el inciso g (Ilustración 9.1-18), a la función con $t \in [0,2\pi[$:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 < t < \pi \\ 0 & si \quad t = 0 \ \vee \ t = \pi \\ -1 & si \quad \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

La segunda parte de esta tarea corresponde al análisis de la serie trabajada en la Tarea #3. Las preguntas y la intencionalidad son las mismas, el único cambio es que el análisis se realiza únicamente para $t = 0$ y valores cercanos (Ilustración 9.1-20).

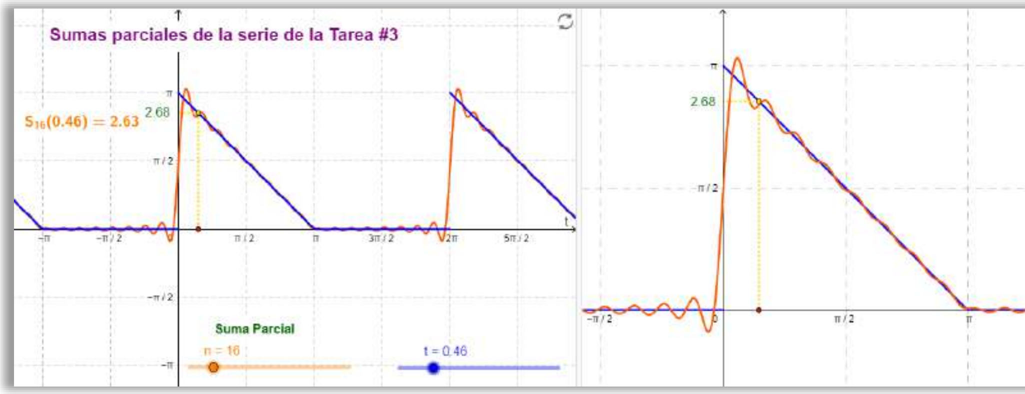


Ilustración 9.1-20. Applet para la Tarea 4 – Parte II (https://ggbm.at/DzGjyNW6).

9.1.6 Tarea #5: El modelo general

Esta tarea busca *significar los elementos presentes en la serie trigonométrica que emerge al matematizar el modelo del movimiento planetario de los alejandrinos en forma general*. La Ilustración 9.1-21 presenta la situación inicial planteada es esta tarea.

Tarea #5. El modelo general.

Llamemos a la Tierra T y consideremos un cierto planeta P cuya órbita corresponde a una superposición de movimientos circulares en torno de T, el modelo se comporta en forma general de la manera siguiente:

- La primera circunferencia está centrada en el punto (A_0, A_0).
- Los radios de las circunferencias primera, segunda, tercera, … son respectivamente A_1, A_2, A_3, …
- La velocidad angular, en radianes por unidad de tiempo, de los puntos sobre las circunferencias primera, segunda, tercera, . . . son respectivamente w_1, w_2, w_3, …
- Cuando el tiempo es $t = 0$, el ángulo en posición estándar del punto con respecto al centro de la circunferencia número n es θ_n.

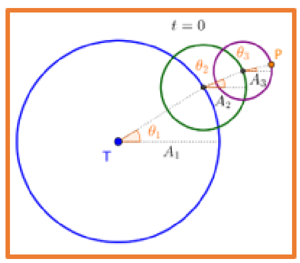


Ilustración 9.1-21. Situación planteada en la Tarea #5 de la situación de aprendizaje.

Se pretende con esta generalización que el estudiante identifique las condiciones para que el modelo sea estable —primera parte de la tarea—. Por otra parte, debe encontrar condiciones para que el modelo sea equivalente a la STF —segunda parte de la tarea—. De esta manera, a partir de todo el trabajo previo, significará las nociones matemáticas en el ambiente físico-geométrico.

Parte I. Generando el modelo.

a) Con base en los modelos particulares estudiados en las Tareas #1, #2 y #3 ¿qué condiciones deben cumplirse en el modelo general para que la trayectoria del planeta P se estabilice conforme se agreguen cada vez más circunferencias?

b) Considere el modelo utilizando n circunferencias. Determine las coordenadas (x_n, y_n) del punto P en el tiempo t.

c) ¿Cómo se relaciona su respuesta a la pregunta (a) con la fórmula obtenida en la pregunta anterior?

d) Note nuevamente que y_n representa la n-ésima suma parcial de una serie trigonométrica. Utilice identidades trigonométricas para reescribir esta serie en la forma:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kw_0 t) + b_k \operatorname{sen}(kw_0 t)$$

Es decir, determina los valores de a_0, w_0, a_k y b_k, en términos de A_0, w_k, A_k y θ_k.

e) ¿Cómo se relaciona su respuesta a la pregunta (c) con esta nueva fórmula?

Ilustración 9.1-22. Tarea #5 – Parte I, incisos del *a* al *e* de la situación de aprendizaje.

En el inciso *a* (Ilustración 9.1-22) se espera que el estudiante identifique que para garantizar la estabilidad del sistema se debe cumplir que $A_n \longrightarrow 0$ y $w_n \longrightarrow \infty$, es importante resaltar que estas condiciones son necesarias para la convergencia, pero no suficientes. Para el inciso *b* (Ilustración 9.1-22) se espera que no haya problema con el establecimiento de las relaciones, y que el argumento para dar su respuesta sea bajo lo construido en las tareas anteriores, así sucedió en la prueba piloto, concluyendo que las coordenadas del planeta son:

$$\begin{cases} x_n = A_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_k \cos[w_k t + \theta_k] \\ y_n = A_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_k \operatorname{sen}[w_k t + \theta_k] \end{cases}$$

Para que en el inciso *d* (Ilustración 9.1-22) se establezcan las condiciones para que el modelo sea equivalente con la serie trigonométrica de Fourier. Los incisos *c* y *e* (Ilustración 9.1-22) buscan que se interprete el modelo matemático en el fenómeno físico.

Parte II. Otra forma de interpretar w_0.
Considere el movimiento del punto sobre la primera circunferencia, es decir aquella donde el punto se mueve con velocidad angular w_0 (en radianes por unidad de tiempo).
a) Determina el tiempo t que tarda el punto P en dar un giro completo. [Sugerencia: recuerda que $velocidad\ angular = \frac{ángulo\ en\ radianes}{tiempo}$].
b) Si llamamos p al tiempo que tarda el punto P para dar exactamente una vuelta. ¿Cuál es el valor de w_0 en términos de p?
c) Reescribe la fórmula que obtuviste en la pregunta (d) de la Parte I, utilizando este nuevo valor de w_0.
d) Dado que el valor p es el tiempo que tarda el planeta P en completar una vuelta alrededor de la Tierra T. ¿Cómo se observaría este valor en la gráfica de la función límite? Explica tu respuesta.

Ilustración 9.1-23. Tarea #5 – Parte II, incisos del *a* al *d* de la situación de aprendizaje.

Esta parte (Ilustración 9.1-23) pretende que el estudiante reconozca a *p* como el periodo de la función límite cuando se considera la variable *t* un número real. Esto es importante para la Tarea #6, pues se espera que el estudiante realice su estudio en un intervalo de tamaño *p*, el cual es representativo del comportamiento general de la serie.

9.1.7 Tarea #6: El cálculo de los coeficientes

Esta tarea[4] tiene como objetivo *significar el cálculo de los coeficientes de Fourier utilizando argumentaciones gráficas y geométricas, tal y como lo hizo Fourier*. Es importante, como inicio de esta tarea, hacer al alumno consciente de que se trabajará el problema inverso, dada la función a la cual converge una serie, cómo saber cuáles son los coeficientes de dicha serie. La situación planteada se presenta en la Ilustración 9.1-24.

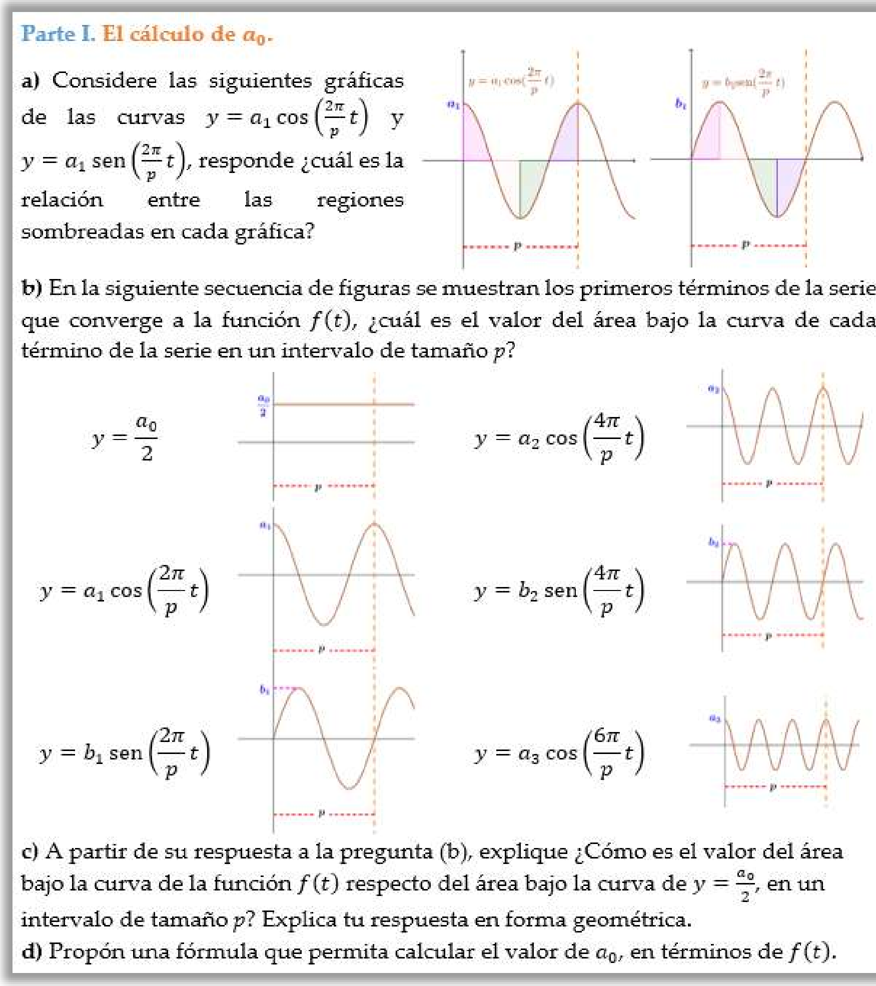
Tarea #6. El cálculo de los coeficientes.
Considera ahora la situación inversa, es decir, se conoce la función $f(t)$ a la cual converge la serie cuyas sumas parciales se forman con la ordenada del planeta P en un sistema de coordenadas. Es decir, se cumple que:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k\, sen\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$$

Ilustración 9.1-24. Situación planteada en la Tarea #2 de la situación de aprendizaje.

[4] Esta tarea tiene, a pesar de no estar basada en ello, mucha similitud con lo propuesto en el libro *Aventuras con Fourier* (Transnational College of Lex, 2008), recomendamos su revisión.

Esta tarea está dividida en tres partes, cada una destinada a significar el cálculo de cada uno de los coeficientes de Fourier a_0, a_k y b_k, a partir de la articulación de los registros geométrico-analíticos y algebraicos, para validar el segundo en el primero.


Parte I. El cálculo de a_0.

a) Considere las siguientes gráficas de las curvas $y = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ y $y = a_1 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$, responde ¿cuál es la relación entre las regiones sombreadas en cada gráfica?

b) En la siguiente secuencia de figuras se muestran los primeros términos de la serie que converge a la función $f(t)$, ¿cuál es el valor del área bajo la curva de cada término de la serie en un intervalo de tamaño p?

$y = \frac{a_0}{2}$ $\quad y = a_2 \cos\left(\frac{4\pi}{p}t\right)$

$y = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ $\quad y = b_2 \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{p}t\right)$

$y = b_1 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ $\quad y = a_3 \cos\left(\frac{6\pi}{p}t\right)$

c) A partir de su respuesta a la pregunta (b), explique ¿Cómo es el valor del área bajo la curva de la función $f(t)$ respecto del área bajo la curva de $y = \frac{a_0}{2}$, en un intervalo de tamaño p? Explica tu respuesta en forma geométrica.

d) Propón una fórmula que permita calcular el valor de a_0, en términos de $f(t)$.

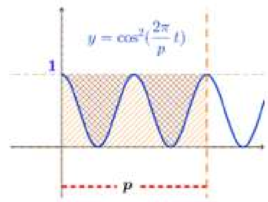
Ilustración 9.1-25. Tarea #6 – Parte I, incisos del *a* al *d* de la situación de aprendizaje.

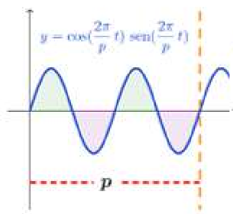
Los incisos a y b (Ilustración 9.1-25) buscan que el estudiante se percate de que el área bajo la curva de los términos de la serie son todos iguales a cero, salvo el del término constante $\frac{a_0}{2}$, que tiene área $\frac{a_0 p}{2}$ en un intervalo de tamaño p. Por su parte, los c y d (Ilustración 9.1-25) pretenden que el estudiante utilice argumentos geométricos y sus conocimientos sobre integral definida para decir que el área bajo la curva de la función $f(t)$ es igual a la suma de las áreas bajo la curva de los términos de la serie. De esta manera el estudiante puede construir la fórmula para el cálculo con un significado asociado a la noción de área bajo la curva.

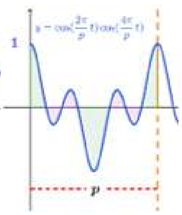
Con respecto al cálculo del coeficiente a_k, el cual corresponde a la segunda parte de esta tarea, se busca significar el cálculo de los coeficientes empezando por el coeficiente a_1.

Parte II. El cálculo de a_k.

a) Considera la curva $y = \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ y el resultado de multiplicarla por $\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ ¿Cuál es la relación entre las áreas sombreadas? ¿Cuál es el valor de área bajo la curva de $y = a_1\cos^2\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ en un intervalo de longitud p?







b) Ahora se presentan las gráficas resultantes al multiplicar la curva $y = \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ por $\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ y por $\cos\left(\frac{4\pi}{p}t\right)$ ¿Cuál es el valor del área bajo la curva de las curvas $y = a_1\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ y $y = a_1\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\cos\left(\frac{4\pi}{p}t\right)$ en un intervalo de longitud p, en cada caso?

c) Utilice el applet proporcionado y responda ¿cuál es el valor del área bajo las curvas $y = a_1\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ y $y = a_1\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ en un intervalo de longitud p, para valores de $k = 1,2,3, \ldots$?

d) Considere la ecuación del desarrollo de la función $f(t)$ en serie trigonométrica, es decir,

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) + b_1\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{p}t\right) + \cdots + a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + \cdots$$

y multiplique a ambos lados por $\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ ¿Qué relación existe entre el área bajo la curva de $f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ y la de $y = a_1\cos^2\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$, en un intervalo de longitud p?

e) Propón una fórmula que permita calcular a_1, en términos de $f(t)$.

Ilustración 9.1-26. Tarea #6 – Parte II, incisos del *a* al *e* de la situación de aprendizaje.

En estas preguntas (Ilustración 9.1-26) se espera que el estudiante signifique geométricamente la ortogonalidad de las funciones trigonométricas y que utilice este hecho para calcular el valor de a_1 pues, será capaz de identificar que la multiplicación de $\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ por cualquier otro término de la serie – excepto el término $a_1\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$- tendrá área bajo la curva igual a cero (Ilustración 9.1-27), y a partir de ellos que el valor de $\frac{a_1 p}{2}$ corresponde al área bajo la curva que resulta de multiplicar la función $f(t)$ por $\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$. Lo que permite determinar el valor de a_1 en términos de $f(t)$, la función conocida.

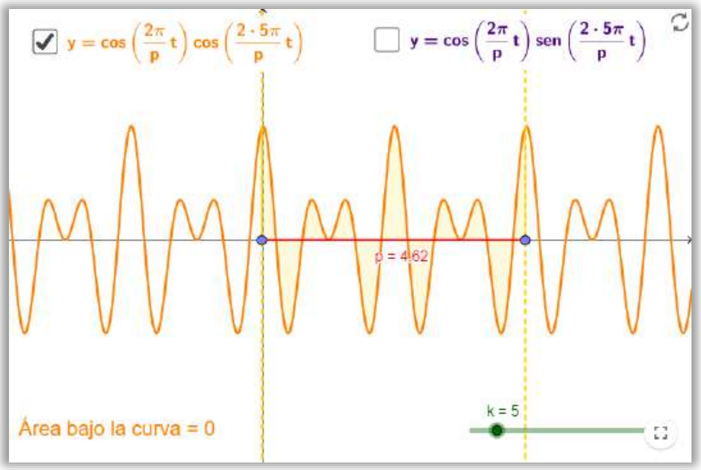


Ilustración 9.1-27. Tarea #6 – Parte II, applet para el inciso *c* de la situación de aprendizaje (https://ggbm.at/nmkFwh2F).

Luego se busca generalizar este razonamiento para a_k utilizando un applet similar al utilizado para calcular a_1 (Ilustración 9.1-28).

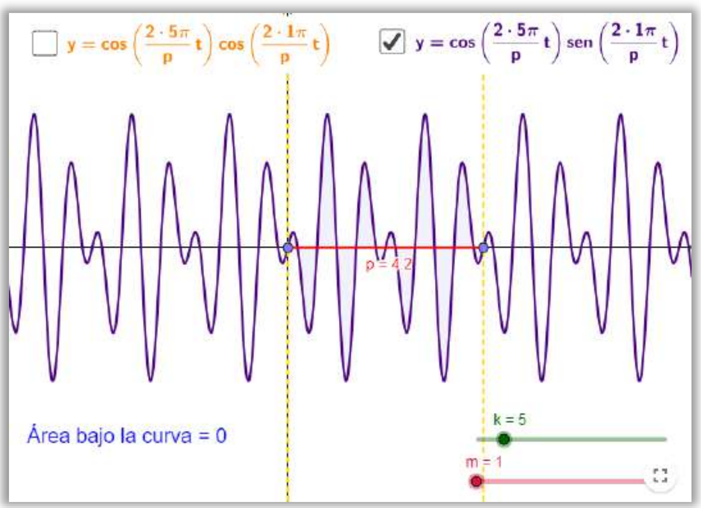


Ilustración 9.1-28. Tarea #6 – Parte II, applet para el inciso *f* de la situación de aprendizaje (https://ggbm.at/bMz7yfhW)

Las preguntas de esta parte (Ilustración 9.1-29) tienen la misma intención que las propuestas para el cálculo de a_1, la idea es que utilicen argumentos similares para concluir que el valor de a_k está dado por la fórmula $\frac{2}{p}\int_0^p f(t)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)dt$, cuyo significado esté asociado al área bajo la curva.

Parte II. El cálculo de a_k.

f) Considere ahora el área bajo las curvas $y = a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\cos\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$ y $y = a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$, para valores de $k = 1,2,3, \ldots$ y de $m = 1,2,3, \ldots$ Utilice el applet proporcionado para responder ¿cuál es el área bajo cada curva en un intervalo de tamaño p, cuando $k = m$? ¿y cuando $k \neq m$?

g) Utilice un razonamiento similar al utilizado en las preguntas (d) y (e) para proponer una fórmula para calcular a_k.

h) ¿Qué relación encuentra entre esta fórmula y la que se propuso para calcular a_0?

Ilustración 9.1-29. Tarea #6 – Parte II, incisos *f*, *g* y *h* de la situación de aprendizaje.

Para finalizar, la tercera parte de esta tarea busca significar y construir la fórmula para el cálculo de b_k, buscando que el estudiante utilice estrategias similares a las utilizadas para calcular a_k, y de esta manera concluir que $b_k = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)dt$. Se presentan solo los incisos de esta parte (Ilustración 9.1-30), pues su intencionalidad es la misma que los de la parte anterior, el applet requerido para esta parte está disponible en https://ggbm.at/MwXy2KsM.

Parte III. El cálculo de b_k.

a) Considere ahora el área bajo las curvas $y = b_k \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$ y $y = b_k \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\cos\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$, para valores de $k = 1,2,3, \ldots$ y de $m = 1,2,3, \ldots$ Utilice el applet proporcionado para responder ¿cuál es el área bajo cada curva en un intervalo de tamaño p, cuando $k = m$? ¿y cuando $k \neq m$?

b) Utilice un razonamiento similar al utilizado en la Parte II para proponer una fórmula para calcular b_k.

Ilustración 9.1-30. Tarea #6 – Parte III, incisos *a* y *b* de la situación de aprendizaje.

Es muy probable que, durante toda esta tarea, los estudiantes quieran realizar explicaciones utilizando integrales definidas; sin embargo, es importante que durante la puesta en común se dialogue sobre los diferentes argumentos posibles con la intención de confrontar la cualidad (el área) con las fórmulas (las integrales). De esta forma se promoverá la interacción entre los registros geométrico-analíticos y algebraicos, necesarios para significar el cálculo de los coeficientes de Fourier (Romero, 2016; Farfán y Romero, 2017).

Referencias utilizadas en este anexo

Akkoc, H. (2008). Pre-service mathematics teachers concept images of radian. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *39*(7), 857-878. doi:10.1080/00207390802054458

Calles, A., Yépez, E., y Peralta, J. (2003). El análisis de Fourier de las trayectorias planetarias y el modelo copernicano del sistema solar. *Revista Mexicana de Física*, *49*(3), 283-289.

Farfán, R. M. (2012). *Socioepistemología y ciencia: el caso del estado estacionario y su matematización.* Barcelona, España: Gedisa S. A.

Farfán, R. M., y Romero, F. (2017). Construcción social del conocimiento matemático: La serie trigonométrica de Fourier desde la Socioepistemología. *Perspectivas da Educação Matemática – INMA/UFMS, 10*(23), 483-503.

Montiel, G. (2011). *Construcción de conocimiento trigonométrico: Un estudio socioepistemológico.* México: Díaz de Santos.

Moore, K. (2009). An investigation into precalculus students' conceptions of angle measure. *Twelfth Annual Special Interest Group of the Mathematical Association of America on Research in Undergraduate Mathematics Education (SIGMAA on RUME) Conference.* Raleigh, NC: North Carolina State University.

Romero, F. (2016). *Construcción social de la serie trigonométrica de Fourier: Pautas para un diseño de intervención en el aula.* Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México. doi:10.13140/RG.2.2.14118.63048

Transnational College of Lex (2008). *Aventuras con Fourier*. (J. Gutiérrez, Trad.) México: UNAM.

9.2 Cartel informativo.

Programa del curso: *Modelando el Movimiento de los Planetas*

Profesor

Fabián W. Romero Fonseca.

Correo electrónico

fwromero@cinvestav.mx

¿Dónde se impartirá el curso?

Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN o en un lugar a convenir con los participantes.

Horario del curso

Sábado de 10 horas a 14 horas, u otro horario a convenir con los participantes.

Resumen del curso

A partir de superponer movimientos circulares, los astrónomos alejandrinos propusieron un modelo geométrico para explicar el movimiento de los planetas. Construyendo y analizando dicho modelo, transitaremos de nociones trigonométricas básicas hacia otras más avanzadas en un proceso de matematización acompañado de diversas prácticas.

Materiales del curso

- El curso se impartirá en un laboratorio de cómputo o aula equipada con computadoras.
- Para algunas actividades será necesario utilizar regla y compás, esto será proporcionado por su profesor.

Conocimientos previos

- Nociones básicas de cálculo integral: área bajo la curva, integral definida y sus propiedades.
- Nociones básicas de series numéricas y su convergencia.

Programación del curso

Semana	Tema	Objetivo
Semana 1	Explicando el movimiento de los planetas.	Caracterizar el comportamiento del movimiento planetario propuesto por los astrónomos alejandrinos en forma cualitativa.
Semana 2 Semana 3	Modelando el movimiento de los planetas.	Matematizar el modelo del movimiento planetario de los astrónomos alejandrinos para casos particulares.
Semana 4	El fenómeno de Gibbs.	Analizar a profundidad la matemática involucrada en el modelo construido.
Semana 5	El modelo general del movimiento de los planetas.	Matematizar el modelo del movimiento planetario de los astrónomos alejandrinos en forma general.
Semana 6	El cálculo de los coeficientes.	Significar el cálculo de los coeficientes de Fourier.

Directiva de deberes

A quienes participen del 100% de las sesiones se entregará un certificado de participación al finalizar el curso.

9.3 Carta de consentimiento

Ciudad de México, a 10 de noviembre de 2018

Yo, ____

acepto participar del Curso *«Modelando el Movimiento de los Planetas»*, enmarcado en un proyecto de investigación desarrollado por el M. en C. Fabián Wilfrido Romero Fonseca (https://www.researchgate.net/profile/Fabian_Romero4) y bajo la supervisión de la Dra. Rosa María Farfán Márquez (https://www.matedu.cinvestav.mx/rfarfan/presentacion.php), el cual se lleva a cabo en las instalaciones del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Autorizo que los registros tomados en el Curso y los productos derivados se utilicen exclusivamente con fines académicos bajo las normas éticas del manejo de datos personales en la investigación científica.

Deseo acceder a los reportes técnicos emanados de la investigación:

___ ___
SÍ NO

Favor de enviarlos a la cuenta de correo electrónico ________________________________

____

Nombre y firma

9.4 Protocolo de Observación

Este Protocolo de Observación es una adaptación de los instrumentos de notas de campo de Torres (2018) y Cruz (2019). Dicho protocolo considera aspectos desde la organización del espacio y el tiempo, hasta la interacción de los estudiantes con el conocimiento matemático en juego.

Dado que las tareas que componen la situación de aprendizaje tienen objetivos e intencionalidades distintas, los puntos IV y V del protocolo —conocimiento matemático en juego de los estudiantes y conocimiento interdisciplinario— son diferentes para cada una de las tareas.

En las páginas siguientes, se presenta el Protocolo de Observación correspondiente a la Tarea #1 de la situación de aprendizaje, después de este solo se presentan los puntos IV y V de las tareas siguientes, pues el resto del protocolo se mantiene idéntico. Es importante recordar que las Tareas #2 y #3 tienen en mismo objetivo y la misma intencionalidad, por lo que se utilizó exactamente el mismo protocolo para ambas. Además, la Tarea #6 no cuenta con el aspecto de conocimiento interdisciplinario, pues es un trabajo meramente matemático, sin relación al contexto del movimiento planetario propuesto.

Referencias utilizadas en este anexo

Cruz, M. (2019). *Linealidad y angularidad en la esfera: un nuevo escenario de trabajo geométrico*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Torres, D. (2020). *Usos y significados de nociones trigonométricas en el problema cinemático directo de la Robótica*. Memoria doctoral no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

9.4.1 Protocolo de Observación Tarea #1

<table>
<tr><td colspan="3">I.Datos generales</td></tr>
<tr><td>Sesión número: 1
Fecha: 10/11/2018
Día: sábado.
Hora de inicio de la actividad:
Hora de inicio del receso:
Hora final del receso:
Hora final de la actividad:
Tiempo efectivo:</td><td>Cantidad de estudiantes:
Mujeres:
Hombres:

Descripción del espacio físico:</td><td>Trabajo con la Tarea #1 de la situación de aprendizaje
Objetivo de la Tarea: caracterizar el comportamiento del sistema de forma cualitativa, lo que permitirá una comprensión más profunda del fenómeno y no sólo aquello que detectan los sentidos a simple vista.</td></tr>
<tr><td colspan="3">II.Proceso de la sesión</td></tr>
<tr><td>¿Qué realizó el profesor del curso durante la tarea?</td><td>¿Describa la interacción entre el profesor y los estudiantes?</td><td>¿Describa la interacción entre los estudiantes?</td></tr>
<tr><td>¿Qué realizaron los estudiantes durante la tarea?</td><td>¿Describa la interacción entre los estudiantes y la tarea planteada por la situación de aprendizaje?</td><td>Observaciones:</td></tr>
<tr><td colspan="3">III.Conocimiento didáctico-pedagógico</td></tr>
<tr><td>¿Los estudiantes presentan dificultades en la comprensión o uso de las hojas de trabajo en el libro de Geogebra?</td><td colspan="2">¿Qué dificultades o ventajas en términos didácticos promueven los recursos (Hojas de trabajo y, en particular, los applets de Geogebra)?</td></tr>
<tr><td>¿Comprenden los estudiantes las preguntas e indicaciones presentadas por el profesor?</td><td colspan="2">Observaciones:</td></tr>
</table>

IV.Conocimiento matemático en juego de los estudiantes		
¿Qué nociones matemáticas escolares ponen en juego durante la experiencia? y ¿en qué momento?	¿Qué ideas, preguntas o reflexiones, permiten identificar el estado estable del fenómeno presentado?	¿Cuáles son las preguntas que se hacen, o hacen los estudiantes alrededor de la noción de estabilidad?
¿Algunas ideas matemáticas son consideradas ilógicas por los estudiantes?, ¿cuáles?, ¿presentan algunos argumentos?	¿Los estudiantes logran identificar las condiciones que provocan la estabilidad del sistema?	Observaciones:
V.Conocimiento interdisciplinario		
¿Qué ideas, preguntas o reflexiones, permiten identificar que el modelo de los alejandrinos permite explicar aquello que el modelo griego no permitía?	¿Los estudiantes a medida que avanzan en la tarea construyen la relación entre la trayectoria del planeta y la estabilidad del sistema?	¿Cómo perciben los estudiantes la relación entre las nociones matemáticas y el fenómeno del movimiento planetario?
Observaciones:		
VI.Acontecimientos de la comunidad		
¿Se presentó alguna situación que favoreciera o impidiera la comprensión del tema tratado?	Situación presentada:	Otros:
VII.Reacciones de la comunidad (estudiantes y profesor)		
¿Cuál fue el comportamiento y/o actitud general?	¿Cuál fue el rol del profesor?	¿Cuál fue el rol de los estudiantes en general?

¿Hubo estudiantes líderes y/o participativos? ¿Hubo estudiantes que no participaron y/o subversivos?	¿Se presentó algún comportamiento y/o actitud inusual?, ¿cuál?	Otros:
VIII.Reacciones ante la presencia del observador externo		
¿Existió algún acontecimiento o reacción de la comunidad que favorezca o impida que se me acepte como integrante?	¿qué acontecimientos?	Observaciones:
IX.Registros complementarios		
¿Cuáles registros complementarios (fotografía, audio y/o vídeo) se utilizaron?	¿Cuál fue la actitud ante los registros complementarios?	Observaciones:
¿Considera que se logró el objetivo de la tarea? ¿por qué?		

9.4.2 Protocolo de Observación Tareas #2 y #3

IV.Conocimiento matemático en juego de los estudiantes		
¿Qué nociones matemáticas escolares ponen en juego durante la experiencia? y ¿en qué momento?	¿Qué ideas, preguntas o reflexiones, permiten provocar la necesidad de hablar de la convergencia de la serie?	¿Cuáles son las preguntas que se hacen, o hacen los estudiantes alrededor de la noción de convergencia?
¿Algunas ideas matemáticas son consideradas ilógicas por los estudiantes?, ¿cuáles?, ¿presentan algunos argumentos?	¿Los estudiantes logran relacionar la convergencia de las series con la estabilidad del sistema?	Observaciones:

V.Conocimiento interdisciplinario		
¿Qué ideas, preguntas o reflexiones, permiten identificar que la trayectoria del planeta no es estable en todo su recorrido?	¿Los estudiantes a medida que avanzan en la tarea construyen la relación entre la trayectoria del planeta y las series trigonométricas?	¿Cómo perciben los estudiantes la relación entre las nociones matemáticas y el fenómeno del movimiento planetario?
Observaciones:		

9.4.3 Protocolo de Observación Tarea #4

IV.Conocimiento matemático en juego de los estudiantes		
¿Qué nociones matemáticas escolares ponen en juego durante la experiencia? y ¿en qué momento?	¿Qué ideas, preguntas o reflexiones, permiten provocar la necesidad de diferenciar entre convergencia "rápida" y "lenta" para los puntos lejanos y cercanos a las discontinuidades, respectivamente?	¿Cuáles son las preguntas que se hacen, o hacen los estudiantes alrededor de la convergencia exactamente en las discontinuidades de salto?
¿Algunas ideas matemáticas son consideradas ilógicas por los estudiantes?, ¿cuáles?, ¿presentan algunos argumentos?	¿Los estudiantes logran relacionar los distintos tipos de convergencia -"rápida" y "lenta"- la estabilidad del sistema y/o la trayectoria de planeta?	Observaciones:
V.Conocimiento interdisciplinario		
A pesar de que no se pregunta en forma directa en la tarea ¿Qué ideas, preguntas o reflexiones, permiten identificar en la trayectoria del planeta los distintos tipos de convergencia, "rápida" y "lenta"?	¿Los estudiantes a medida que avanzan en la tarea construyen la relación entre la trayectoria del planeta y las series trigonométricas?	¿Cómo perciben los estudiantes la relación entre las nociones matemáticas y el fenómeno del movimiento planetario?
Observaciones:		

9.4.4 Protocolo de Observación Tarea #5

IV.Conocimiento matemático en juego de los estudiantes		
¿Qué nociones matemáticas escolares ponen en juego durante la experiencia? y ¿en qué momento?	¿Qué ideas, preguntas o reflexiones, permiten construir el modelo general?	¿Cuáles son las preguntas que se hacen, o hacen los estudiantes alrededor de la convergencia de la serie construida (caso general)?
¿Algunas ideas matemáticas son consideradas ilógicas por los estudiantes?, ¿cuáles?, ¿presentan algunos argumentos?	¿Los estudiantes logran determinar condiciones para que se dé la convergencia?	Observaciones:
V.Conocimiento interdisciplinario		
¿Qué ideas, preguntas o reflexiones, permiten identificar la relación entre la serie construida y el fenómeno físico-geométrico?	¿Los estudiantes a medida que avanzan en la tarea construyen la relación entre la estabilidad del sistema y la convergencia?	¿Cómo perciben los estudiantes la relación entre las nociones matemáticas y el fenómeno del movimiento planetario?
Observaciones:		

9.4.5 Protocolo de Observación Tarea #6

IV.Conocimiento matemático en juego de los estudiantes		
¿Qué nociones matemáticas escolares ponen en juego durante la experiencia? y ¿en qué momento?	¿Qué ideas, preguntas o reflexiones, permiten construir la relación entre la cualidad (ideas geométricas) y las fórmulas algebraicas?	¿Cuáles son las preguntas que se hacen, o hacen los estudiantes alrededor del cálculo de los coeficientes?

¿Algunas ideas matemáticas son consideradas ilógicas por los estudiantes?, ¿cuáles?, ¿presentan algunos argumentos?	¿Los estudiantes logran determinar los coeficientes de la serie?	Observaciones:

9.5 Adaptación del código de transcripción de Gail Jefferson

Símbolo y nombre	Uso
[ ] Corchetes	Solapamiento de hablantes. Se debe indicar el inicio y el final del solapamiento, con el cuidado de que los extractos en los que se produce el solapamiento queden uno arriba del otro (aún en los casos que esto suponga dejar espacios en blanco). Los corchetes de cierre pueden indicar un cese simultáneo del solapamiento por parte de los/las hablantes o el momento en que uno/a de ellos/as deja de hablar. P.: Antes me dijo que abandonó [la escue-] R.: [Me echaron. P.: Ah, entiendo.
= Signo igual	No hay espacio de tiempo entre los dichos de los/las hablantes o de un/a mismo/a hablante. Suele utilizarse para señalar interrupciones (algo que también podría hacerse con corchetes si se considera que hubo solapamiento de hablantes). P.: Su nombre era= R.: =Carlos.
(3) (5) Tiempo que dura una pausa, medido en segundos	Pausas *destacadas*, en cantidad de segundos. Se aconseja no señalar las pausas convencionales entre oraciones o entre hablantes, sino aquéllas que puedan tener alguna significación para el análisis. P.: Bueno, yo… (4). Yo no pude hacerlo.
Subrayado Subrayado de palabras o sílabas	Énfasis en una palabra o sílaba (no para gritos o modificaciones de la entonación). P.: Fuiste tú, entonces. R.: No, tú fuiste. Yo no estaba ese día. P.: ¡Vaya caradura que eres!
::: Serie de dos puntos	Alargamiento de un sonido. Puede producirse al final o al medio de una palabra e incluye vocales y consonantes. La cantidad debe ser, como mínimo, dos pares de dos puntos (::), para no producir confusión con el uso convencional (gramatical) de los dos puntos (:). Yo sugiero tres pares. P.: No:::, no puede ser. R.: Sí, amigo mío, así es:::. P.: Increí:::ble.

Símbolo y nombre	Uso
↑↓ Flechas indicando hacia arriba o hacia abajo	Cambios en la entonación (pitch), es decir, aparición de habla más aguda o grave de lo habitual. Se coloca un par de flechas, antes y después del extracto con entonación cambiada, de modo de indicar su inicio y final. P.: Y ella ↑no estaba↑. R.: ¿No? P.: No. Fue ↓muy decepcionante↓.
MAYÚSCULAS Mayúsculas	Volumen elevado de voz (respecto de lo habitual para un/una hablante dado/a). Habitualmente utilizado para señalar gritos. P.: ¡VÉTE DE AQUÍ!
° º Signo ordinal o de grados	Murmullos o volumen menos elevado de lo habitual para un/una hablante dado/a. Se señala el inicio y el final del extracto de volumen reducido. Se aconseja usar uno u otro de forma consistente —no los dos alternativamente— a lo largo de toda una transcripción. P.: ¿Y qué pasó? R.: ºMurió poco despuésº.
<Habla acelerada> Símbolos de menor que y mayor que (con el lado abierto señalando «hacia dentro» de un extracto de habla determinado)	Habla más acelerada o rápida de lo habitual en un/a hablante dado/a. P.: Explícame bien. R.: No, no, <me tengo que ir volando>.
>Habla lenta< Símbolos de mayor que y menor que (con el lado abierto señalando «hacia fuera» de un extracto determinado)	Habla más pausada de lo habitual en un/a hablante dado/a. P.: Y allá va, >con to:::da la calma del mundo<, y yo lo miro y me río como loca.
- Guión	Corte repentino de una palabra. Usar sólo en el caso de palabras sin terminar por voluntad del hablante (no por la interrupción de otro/a hablante, en cuyo caso se debe utilizar el signo igual o los corchetes). P.: Pero si él me di-, me dijo que no iría. R.: Él te puede haber dicho cualquier cosa.
☺	Habla «entre risas» o, como se dice en nuestro medio, el habla de una persona cuando está «tentada de risa».

Símbolo y nombre	Uso
Emoticón para indicar sonrisa	P.: ¿Y? R.: ☺Y se subió los pantalones y salió☺.
☹ Emoticón para indicar tristeza	Jefferson no sugiere un símbolo para el habla entre sollozos o llanto. Yo sugiero, en la línea del uso de ☹, el uso del emoticón habitualmente empleado para señalar tristeza. El extracto entre sollozos o llanto se abre y se cierra con ☹. Nótese que es habla y no sollozos o llanto solos. En ese caso, se señalaría como lenguaje no verbal: ((llora)), ((solloza)), ((gime)). P.: Cuéntame. R.: ☹Ahora no puedo☹.
(incomprensible, 4) Paréntesis con la palabra incomprensible y la duración en segundos del extracto inaudible o incomprensible	Extractos de habla no audibles o no comprensibles, por las razones que sean, según los siguientes criterios: ¡) Escribir «incomprensible» dentro del paréntesis. ii) Escribir una coma y, luego, el número de segundos de habla ininteligible o inaudible. iii) Escribir otra coma y, entre signos de pregunta, lo que uno cree escuchar, a modo de hipótesis. P.: Yo creo que el aborto no es más que (incomprensible, 1, ¿un asesinato?)
(( )) Doble paréntesis	Información no verbal o contextual. Se puede consignar cualquier información relevante, tanto del comportamiento no verbal del/de la hablante como del contexto de interacción (información disponible en los archivos de audio o video, o en las notas de los entrevistadores). En el caso de las conductas (provenientes, por ejemplo, de notas cronometradas de los/las entrevistadores/as o de un archivo o cinta de video), se aconseja su consignación con un grado mínimo de interpretación o inferencia. Así, será preferible, por ejemplo, escribir ((solloza)) o ((llora), a ((se emociona)) o ((sufre)).
(x) Una equis en minúscula, entre paréntesis	Balbuceo, duda, tartamudeo o habla incipiente. P.: (x)Pero:::, ¿(x)cómo puede ser?
…, *cursivas*, ’, —, -, “”, ( ), [ ], etc. Puntos suspensivos, cursivas, apóstrofe, raya, guión, comillas,	Se utilizan según su forma convencional y se intercalan con el resto de símbolos aquí presentados. En caso de conflicto o aparición de una cantidad «excesiva» de símbolos en un extracto y a fines de facilitar la lectura de las transcripciones, se recomienda priorizar el uso de símbolos gramaticales.

Símbolo y nombre	Uso
paréntesis, corchetes, etc.	

Fuente: Bassi (2015, p. 58).

Bassi, J. (2015). El código de transcripción de Gail Jefferson: adaptación para las ciencias sociales. *Quaderns de Psicología, 17*(1), 39-62. DOI: 10.5565/rev/qpsicologia.1252.

9.6 Organización inicial de los datos

En las páginas siguientes, se presenta la organización inicial de los datos. La organización consistió en trasladar las respuestas a las tareas de la situación de aprendizaje, de los estudiantes seleccionados como muestra, a seis tablas —una tabla por tarea— que incluyen:

- Número de la tarea.
- Objetivo de la tarea.
- Las partes de la tarea y su intencionalidad.
- Las preguntas de cada parte con su intencionalidad.

Los objetivos y las intencionalidades corresponden al análisis a priori de la situación de aprendizaje. Esto permitirá tener una organización de lo que se esperaba en el análisis a priori, junto con lo que en realidad sucedió en la implementación del diseño

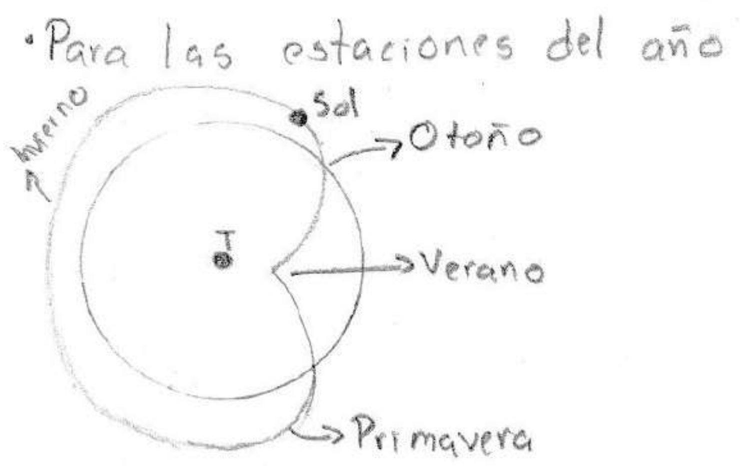
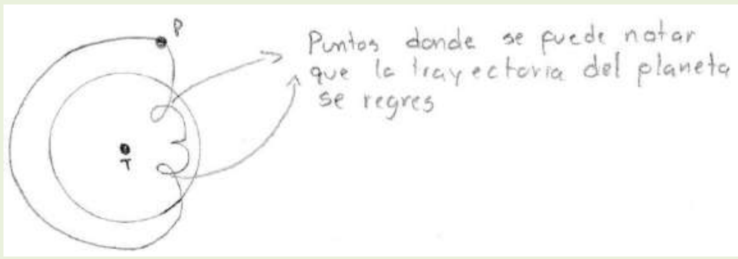
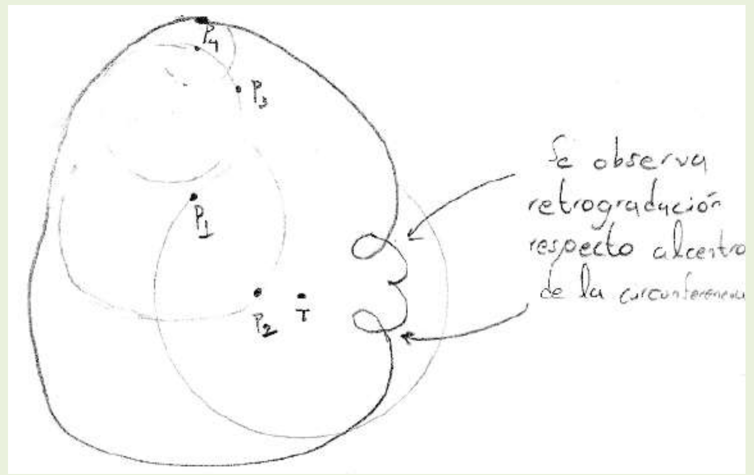
9.6.1 Tarea #1

TAREA #1

Objetivo de la Tarea: Caracterizar el comportamiento del sistema de forma cualitativa, lo que permitirá una comprensión más profunda del fenómeno y no solo aquello que detectan los sentidos a simple vista.

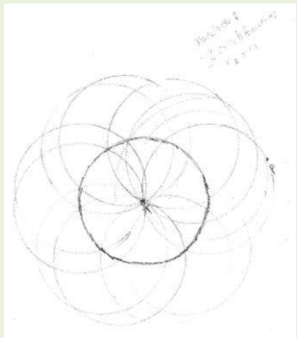
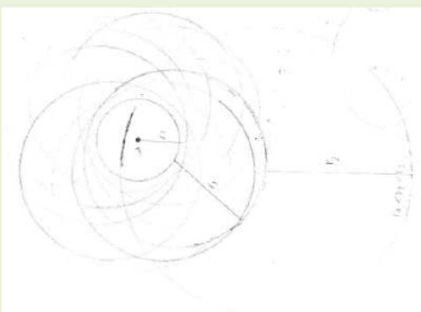
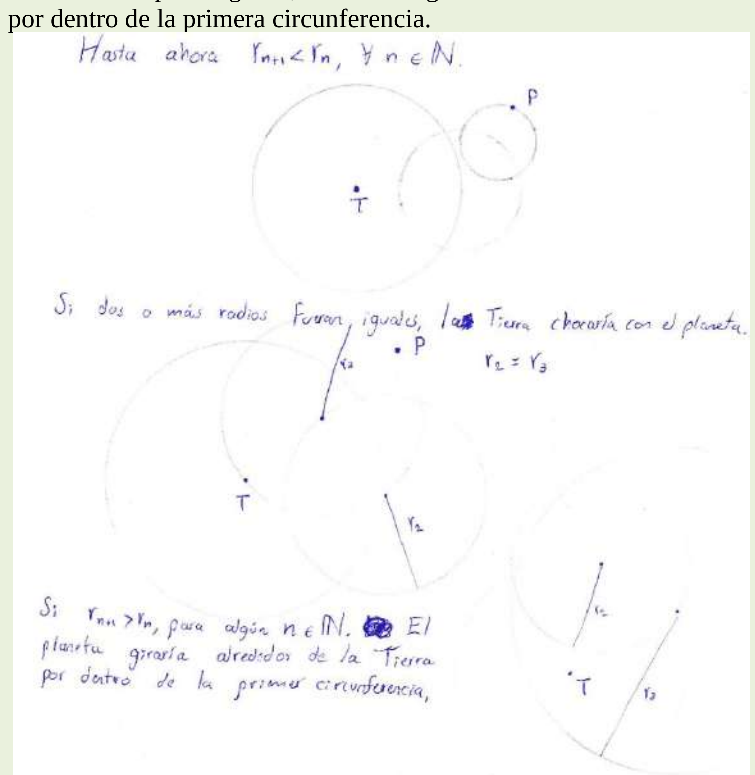
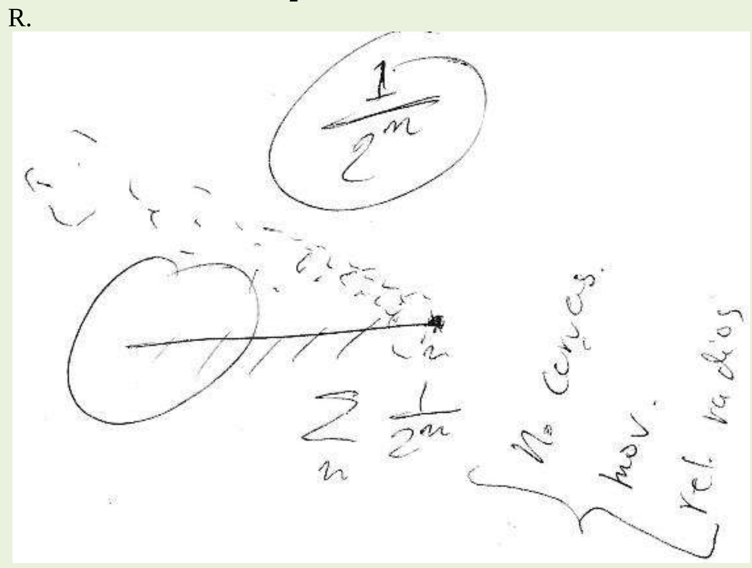
Parte I. **¿Qué permite explicar este modelo?**

Intención: Comprender por qué el modelo de los alejandrinos permite explicar aquello que el modelo griego no permitía.
Se busca propiciar una comprensión profunda del sistema, así como Fourier conocía el comportamiento del fenómeno de propagación del calor a través de la empírea antes de proponer su modelo matemático del fenómeno (Farfán y Romero, 2017).

Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4
Pregunta a	La luminosidad es constante en el modelo con una sola circunferencia, ya que depende solamente de la distancia del planeta respecto a la Tierra, la cual es constante para una circunferencia de radio r; se tiene un problema análogo para la explicación de las estaciones del año. El movimiento de P alrededor de una circunferencia no explica el movimiento de retrogradación debido a que la velocidad es constante y se mueve siguiendo la trayectoria circular.	Las estaciones del año se dan por el movimiento de traslación de la Tierra, al dejar en el modelo geocentrico fija la Tierra pues no veían su comportamiento. Para la luminosidad de los planetas depende de cuanta cantidad de luz les llega del Sol pero al contemplar a la Tierra como el centro y al Sol como planeta por aparte al no estudiar al conjunto con el movimiento de traslación de los planetas no podían explicar la trayectoria de la luz. Ahora bien para el fenómeno de retrogradación el suponer el hecho de que se movían en una trayectoria circular es erróneo pues cada planeta tiene un distinto comportamiento.	Porque el brillo de un objeto aumenta conforme se acerca y disminuye conforme se aleja. Y si un planeta (con brillo constante) está a distancia constante con la Tierra, entonces su brillo sería constante. Porque si el Sol es quien da calor a la Tierra. El calor varía de la misma manera que el brillo. Así que con una órbita constante del Sol no podrían producirse los cambios de temperatura necesarios para producir las estaciones. Porque con una órbita de una circunferencia, los planetas siempre se mueven en un sentido. Por lo que no pueden parar y retroceder.	Debido a que se está suponiendo la Tierra al centro de la circunferencia, el hecho de que cambie la luminosidad de un astro no puede explicarse pues en este caso se tendría al astro a la misma distancia siempre respecto al centro, no teniendo sentido entonces que cambie la intensidad de la luz que se recibe de ahí. El fenómeno de retrogradación no podría explicarse pues el astro siempre se encontraría a la misma distancia del centro de la circunferencia si se moviera en un círculo. Las estaciones del año no tienen sentido si dejamos fija la Tierra como el centro de la circunferencia, pues debe haber un cambio en su posición respecto a otro lugar para explicar dicho fenómeno.	Si suponemos al punto P como el Sol, éste siempre se halla a la misma distancia de la Tierra. Las estaciones del año se dan cuando la tierra está a distintas distancias radiales del Sol. Por lo tanto falla la noción de las estaciones en el modelo con una circunferencia. Hablando de la retrogradación, como se cumplen las leyes de la física, el planeta sigue su propia trayectoria por efecto de inercia, lo cual impide que el planeta regrese sobre su propia trayectoria. Análogamente, al estar la tierra a la misma distancia del Sol, no hay acercamientos del mismo, por lo cual no se aprecia un efecto del aumento de la intensidad luminosa del Sol.
Pregunta b	Los modelos 2, 3, y 4 permiten explicar el cambio en la luminosidad de los planetas y las estaciones del año, ya que la distancia entre P y T varía a lo largo de la trayectoria, entonces también la luminosidad. En los tres modelos se puede ver que la distancia entre P y T es mayor al radio de la primera circunferencia en parte de la trayectoria y menor al radio de la primera circunferencia en el resto de la trayectoria. Particularmente, el modelo con dos circunferencias explica de mejor manera el modelo de las estaciones que conocemos.	El modelo 2 explicaría perfectamente las estaciones del año, ya que suponiendo que el planeta es el Sol, en el punto mas cerca de la Tierra seria donde mayor calor y luz le da a la Tierra que seria la estación del Verano, conforme se aleja el Sol seria otoño, cuando mas lejos esta seria invierno y cuando se vuelve a acercar seria primavera. El modelo 2,3,4 explican la luminosidad de los planetas ya que entre mas cerca esten mas luminosos se ven y mas alejados menos luminosos se notaran. 	Los modelos 2, 3 y 4 pueden explicar el cambio de luminosidad de los planetas. Ya que en todos ellos varía la distancia a la Tierra (los planetas se acercan y luego se alejan). Por lo tanto también varía el brillo de los planetas. Los modelos 2, 3 y 4 pueden explicar las estaciones. Ya que si el Sol tiene una órbita de esos tipos, varía la distancia a la Tierra (el Sol se acerca y luego se aleja). Por lo que también varía el calor que le da a ella. Y así podrían explicarse las estaciones. Pero nuestras 4 estaciones podrían explicarse muy bien con el segundo modelo. Ya que en la parte derecha el Sol tendría un acercamiento máximo que correspondería al verano. Arriba al otoño. A la izquierda con el alejamiento máximo, el invierno. Y abajo la primavera.	Los modelos de 2 , 3 y 4 circunferencias son capaces de explicar el cambio en la luminosidad de los planetas, dado que su trayectoria no describe un círculo perfecto alrededor del centro de la circunferencia, es decir, existen épocas del año en las que los astros se encuentran más alejados o menos alejados del centro de la circunferencia. Las estaciones del año pueden explicarse fácilmente usando el modelo de 2 circunferencias, teniéndose como circunferencia central a la Tierra y como aquella que gira alrededor de ella al Sol. Tendría sentido entonces que la parte más cercana de la trayectoria del Sol respecto a la Tierra produciría el verano y la más lejana el invierno. 	Se puede explicar a partir del modelo de 2 circunferencias pues la distancia del punto P a la tierra deja de ser igual radialmente en todos sus puntos, esto perimite que haya un acercamiento y un alejamiento del planeta (puede tratarse del Sol), claro, el modelo de 4 circunferencias explica mejor los fenómenos de luminosidad y de cambio en las estaciones del año.
Pregunta c	El modelo 4 permite explicar el fenómeno de retrogradación. Dado que el vector velocidad es tangente a la trayectoria, en los modelos 2 y 3, dicho vector se mueve siempre en sentido horario visto desde T. En el modelo 4 se puede ver una retroceso al dar un giro completo y regresar al mismo punto.	El modelo 4 explica el fenómeno de retrogradación ya que es cuando se notaria mas la presencia de que la trayectoria del planeta se regresa y vuelve a tomar su trayectoria original. 	El modelo 4 puede explicar el fenómeno de retrogradación. Ya que tiene una parte (la parte derecha de la imagen) en la que los círculos se desfasan. Provocando que el planeta gire en sentido opuesto (horario) al del círculo con centro en la Tierra. En las animaciones de los modelos 2 y 3 se aprecia que los planetas se frenan, pero no se ve que retrocedan.	El modelo que explica de manera más sencilla la retrogradación es el de 4 circunferencias, pues la curva descrita por el cuarto planeta se corta a sí misma en ciertos puntos de la trayectoria (ver figura). En los modelos de 2 y 3 circunferencias podríamos observar un cambio de velocidad aparente al acercarse los planetas más lejanos a su punto más cercano al centro de la circunferencia principal. 	Pienso que el modelo que mejor describe el proceso de retrogradación es el modelo de 4 circunferencias, pues hay partes de la trayectoria en las que la trayectoria pasada se cruza con la trayectoria presente, de hecho, hay dos secciones de este fenómeno.
Intencionalidad	En los incisos a, b y c, se espera que el estudiante relacione el cambio de luminosidad y las estaciones del año con la distancia que hay entre T y P, por tanto, el modelo de una circunferencia no permite explicar estos fenómenos ya que esta distancia nunca cambia, no así en el modelo con 2, 3 y 4 circunferencias en donde la distancia de P a T cambia durante la trayectoria. Respecto del fenómeno de retrogradación, su explicación estará en los bucles que se generan en el modelo con 4 circunferencias.				

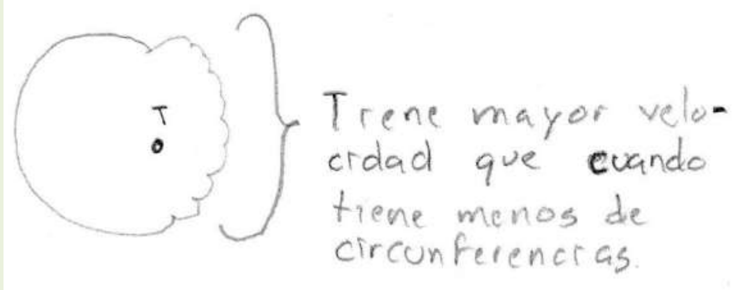
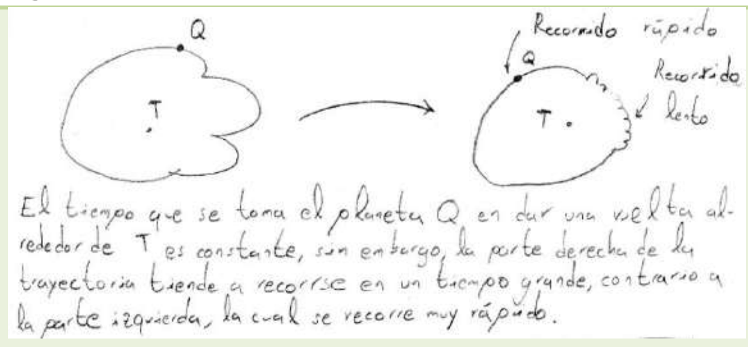
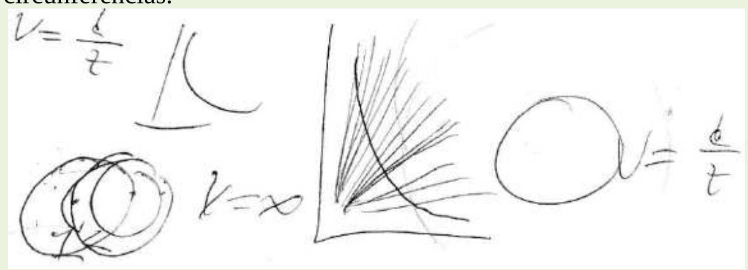
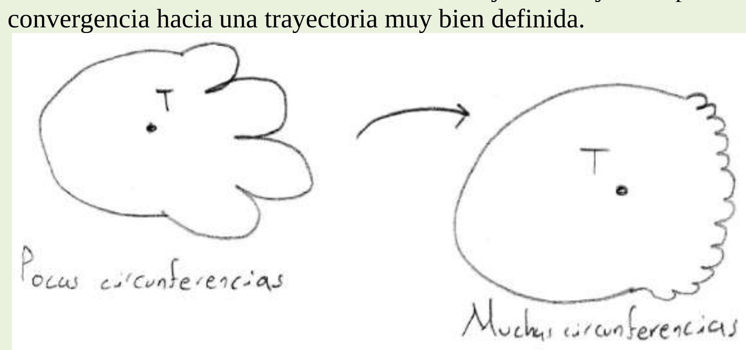
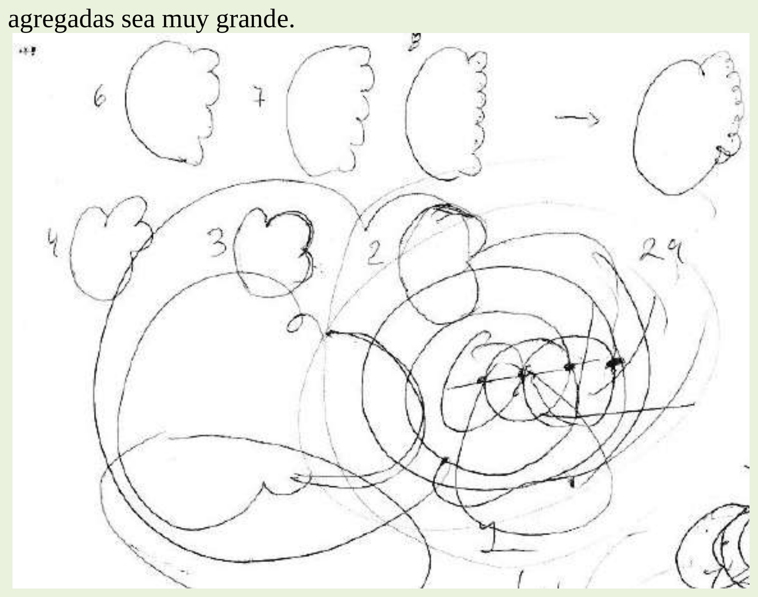
Parte II. **¿Y si aumentamos el número de epiciclos?**

Intención: Se busca, con apoyo de un applet, vislumbrar la noción de estabilidad del sistema, para esto se permite la posibilidad en el applet de aumentar hasta treinta el número de circunferencias y así analizar los cambios que se dan en el comportamiento del sistema.

Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4
Pregunta a	En la figura se puede ver que disminuyen. El número de bucles aumenta, teniendo uno de mayor tamaño y el resto disminuyendo en tamaño. Si consideramos un modelo en el que los radios de las circunferencias agregadas aumenten, se obtendría un modelo similar, pero la mayoría de los bucles aumentarían su tamaño teniendo al final uno pequeño. Además, hay circunferencias donde la Tierra queda encerrada en dicha circunferencia o incluso chocan. 	Solo van disminuyendo los radios.	$r_n > r_{n+1}$ para todo n natural. Datos curiosos: Si dos o más radios fueran iguales, el planeta eventualmente chocaría con la Tierra. Si [math]r_n para algún n, las órbitas girarían alrededor de la Tierra por dentro de la primera circunferencia. 	Solo se vuelven más pequeños.	A apreciación del dibujo, la variación del radio de las circunferencias conforme se añade otra es $\frac{R}{2^n}$, con respecto a la circunferencia original, R. 
Intencionalidad	Se busca concluir que los radios de las circunferencias tienden a cero en forma cualitativa, para esto los estudiantes podría usar frases como "disminuyen", "se hacen más pequeños", entre otras.				
Pregunta b	La rapidez es mayor al aumentar las circunferencias.	Pues entre mas circunferencias se agreguen mas rápido va el punto Q.	Conforme se agregan más círculos los planetas tienen que recorrer mayor distancia y hacer más giros. Así que si tienen que mantener un	Se vuelve aparentemente más rápido en ciertos puntos de la órbita mientras el número de circunferencias aumenta.	Conforme se agrega una circunferencia, la velocidad recorrida por el punto de la órbita, aumenta, esto pues la pendientes en la gráfica de los

Parte II. **¿Y si aumentamos el número de epiciclos?**

Intención: Se busca, con apoyo de un applet, vislumbrar la noción de estabilidad del sistema, para esto se permite la posibilidad en el applet de aumentar hasta treinta el número de circunferencias y así analizar los cambios que se dan en el comportamiento del sistema.

<table>
<tr><th>Estudiante</th><th>M2</th><th>M3</th><th>H1</th><th>H3</th><th>H4</th></tr>
<tr><td></td><td>Además de que la trayectoria parece tomar una forma definida al aumentar el número de circunferencias.</td><td></td><td>periodo constante de rotación. Tendrían que moverse con más rapidez conforme se agregan círculos.</td><td></td><td>puntos de mayores circunferencias es mayor a las de menor número de circunferencias.
</td></tr>
<tr><td>Intencionalidad</td><td colspan="5">A través del estudio del cambio se pretende que los estudiantes infieran que la velocidad de los puntos sobre cada circunferencia sigue aumentando sin cota, para esto podría utilizar frases como “va más rápido”, “en el mismo tiempo recorre cada vez más distancia”, entre otras.
Según la prueba piloto, es posible que para la pregunta b los estudiantes consideren que la gráfica se refiere a la trayectoria del planeta al agregar circunferencias, cuando en realidad se refiere al movimiento de cada punto sobre cada circunferencia.</td></tr>
<tr><td>Pregunta c</td><td>La distancia que recorre el planeta aumenta al aumentar el número de circunferencias, así como también aumenta el número de bucles.</td><td>Conforme mas circunferencias se agreguen la parte derecha se vuelve mas curvas cerradas y la parte izquierda se vuelve mas amplia y rápida. Ademas la parte derecha la recorre en un tiempo mas lento que la parte izquierda.</td><td>Los planetas van haciendo más bucles y cada vez más pequeños conforme se agregan círculos.
Parece que la trayectoria tiende a una elipse con la Tierra en uno de los focos.
La distancia máxima es la suma de los radios. Así que esta suma debe converger para que la figura converja.</td><td>Se observan deformaciones en la parte más cercana al centro de la trayectoria, las cuales aumentan cada vez más conforme se agregan más circunferencias. Por otra parte, la trayectoria en su punto más alejado describe una perturbación grande, la cual tiende a aumentar su tamaño conforme se agregan más circunferencias.
Observe la simetría horizontal de la trayectoria y la aparente convergencia hacia una trayectoria muy bien definida.
</td><td>Se va haciendo más uniforme (suavemente continua) en su parte derecha, pues se van agregando cada vez más pequeños arcos que modelará una curva suave cuando el número de circunferencias agregadas sea muy grande.
</td></tr>
<tr><td>Intencionalidad</td><td colspan="5">La intención es que el estudiante identifique el carácter estable del sistema en forma cualitativa, esto a través de frases como “cuando hay muchas circunferencias casi no cambia la forma de la trayectoria conforme se agregan más”, “tiende a parecerse a una…”.
Para esto se espera analice el cambio en la forma de la trayectoria conforme se agregan cada vez más circunferencias.
Se espera que, expresen que “algo extraño pasaba con la parte izquierda de la trayectoria”, esto es importante, pues no toda la trayectoria es estable.</td></tr>
<tr><td>Pregunta d</td><td>Sí, dado que el modelo se plantea para un ciclo determinado para cada planeta, al aumentar el numero de circunferencias en el modelo, la distancia en la trayectoria es mayor, y por lo tanto, la rapidez con que se mueve tiene que aumentar para completar la trayectoria durante el ciclo.
Al aumentar el número de circunferencias, el punto se mueve mucho más rápido, y la aportación que realiza a la trayectoria puede ser despreciable, por lo que, se puede apreciar una forma casi definida.</td><td>Si, entre mas circunferencias vamos agregando la forma de la trayectoria no se ve casi afectada ya que el radio vas disminuyendo tanto de tal forma que despues se vera que el movimiento del punto Q es insignificante.</td><td>Sí hay relación. Ya que de b) se tiene que mientras más círculos más bucles tienen que dar los planetas. Y de a) se tiene que cada círculo añadido tiene un radio menor que el anterior, por lo que su bucle será de menor longitud que el del círculo anterior.</td><td>Sí, el aumento en la velocidad aparente se explica por el hecho de que la trayectoria total del planeta ocurre en el mismo tiempo, sin depender del número de circunferencias, teniendo que recorrer una mayor distancia en un mismo tiempo (relación entre a) y b)).
La observación de una mayor deformación en la trayectoria se relaciona con la cantidad de círculos porque al aumentar las circunferencias aumenta el número de deformaciones, volviéndose éstas más pequeñas y recurrentes en la trayectoria.
Observemos que la forma de la trayectoria tiende a algo que nos recuerda a una elipse, conforme se agreguen más circunferencias esta forma se definirá cada vez más, siendo que los puntos tienden a girar sobre el radio más rápido y su radio tiende a ser cada vez más pequeño, concluyendo que su contribución a la distancia respecto al centro será cada vez más mínima.</td><td>Conforme se va agregando otra circunferencia, la contribución al giro se desplaza en torno al centro de masa del planeta, con lo que no se sale de la forma bien definida que se respondió en el inciso c)</td></tr>
<tr><td>Intencionalidad</td><td colspan="5">Se busca confrontar el cómo cambia la trayectoria del planeta (estabilidad) con lo que provoca el cambio. Sin embargo, determinar cómo cambia y qué produce el cambio es una tarea cognitivamente muy compleja para los fenómenos de determinación del estado estacionario (Farfán, 2012; Romero, 2016).
Se espera que, con ayuda del docente y a partir de las ideas planteadas por los estudiantes, se acerquen a la idea de que al tender los radios de las circunferencias a cero y la velocidad de movimiento del punto al infinito esto provoca que se logre la estabilidad;
es decir, agregar una circunferencia muy pequeña y un punto sobre esta que se mueve muy rápido no provoca cambios significativos en el sistema en general.</td></tr>
</table>

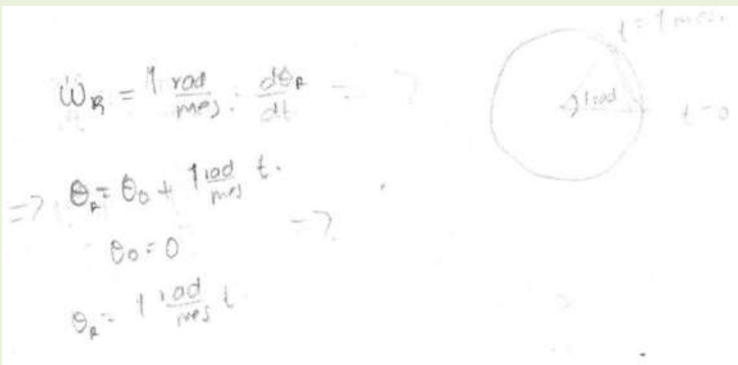
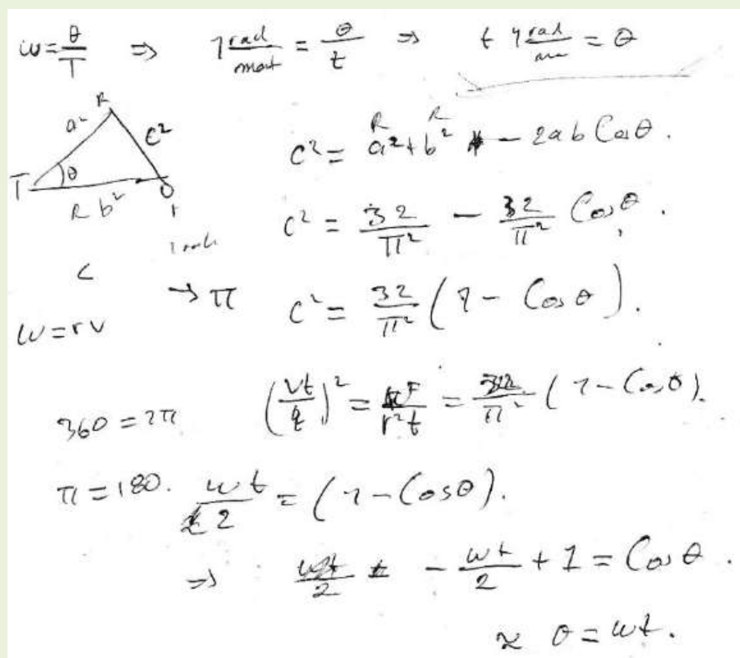
9.6.2 Tarea #2

TAREA #2

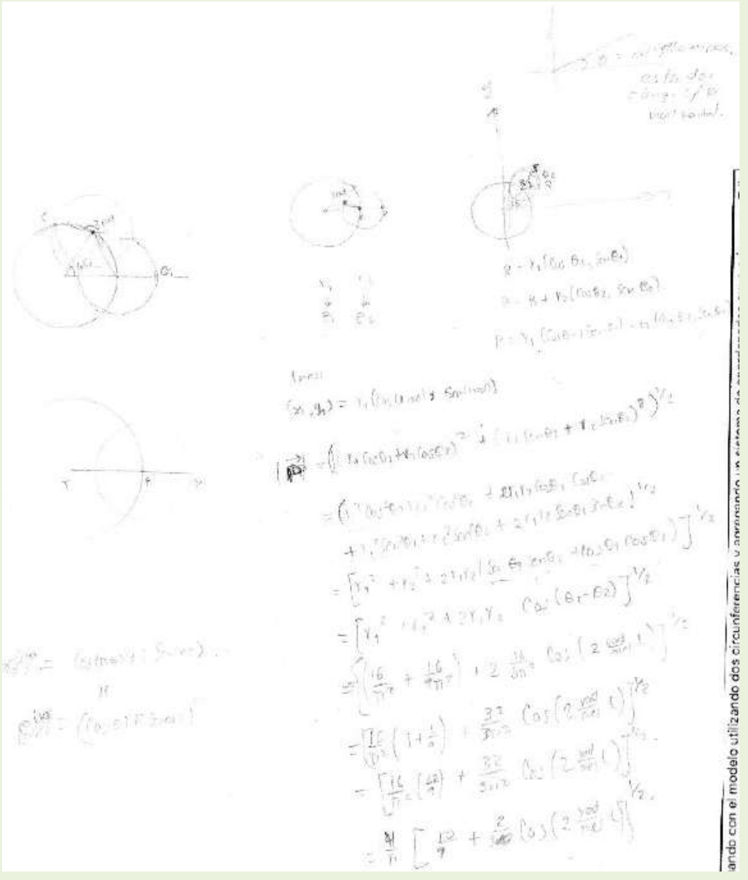
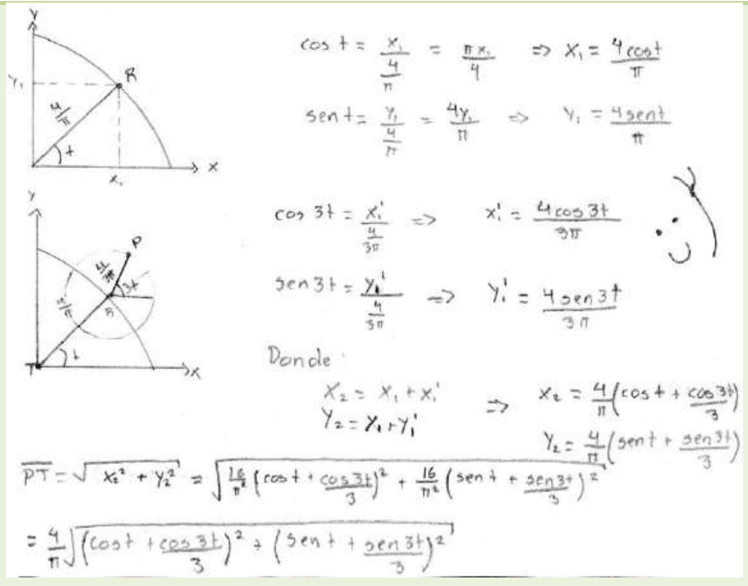
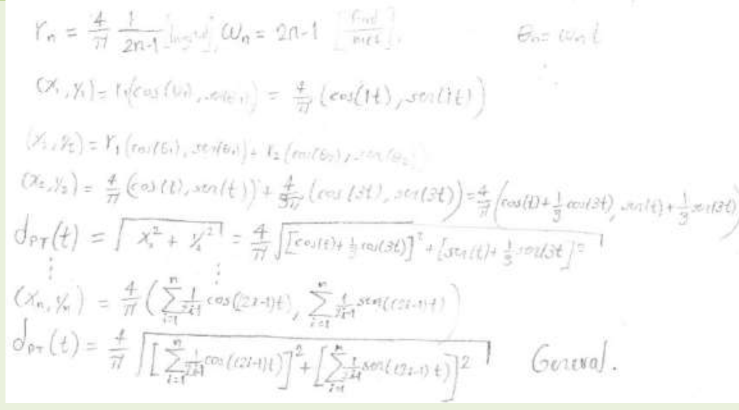
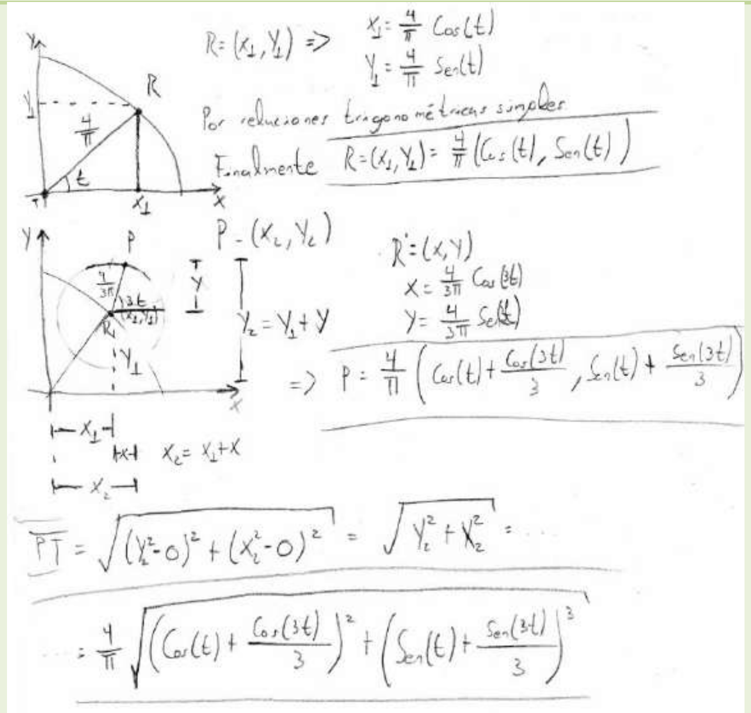
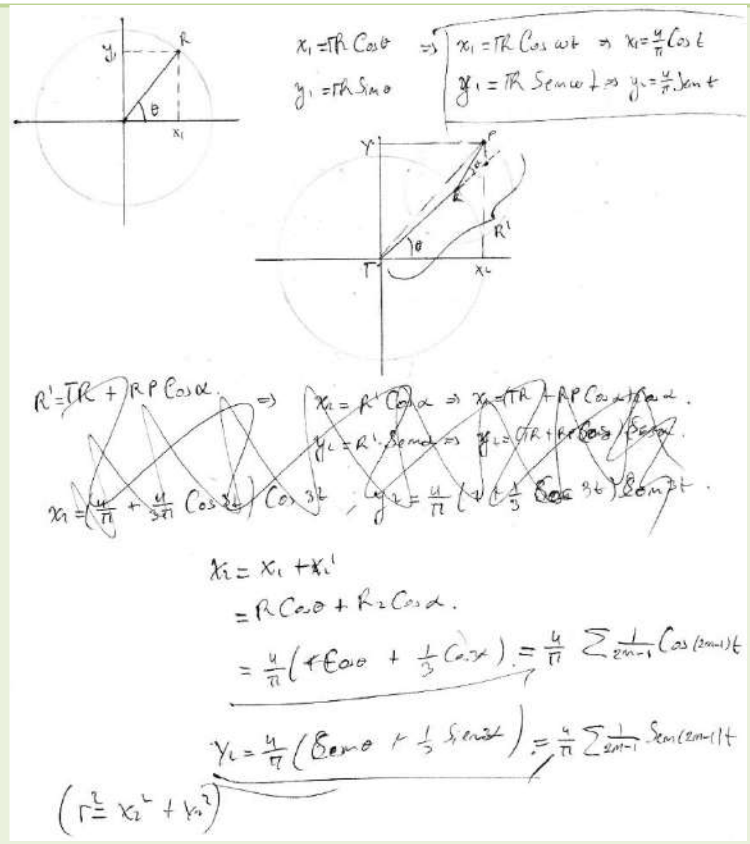
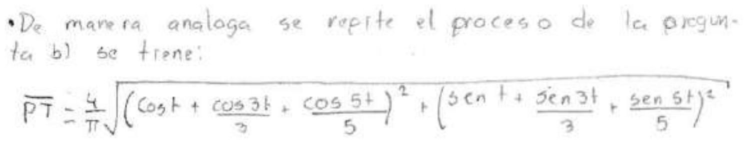
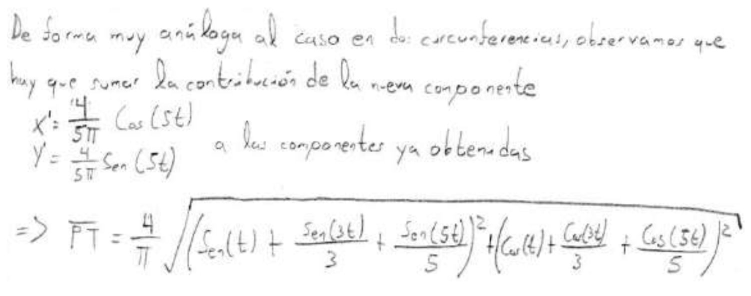
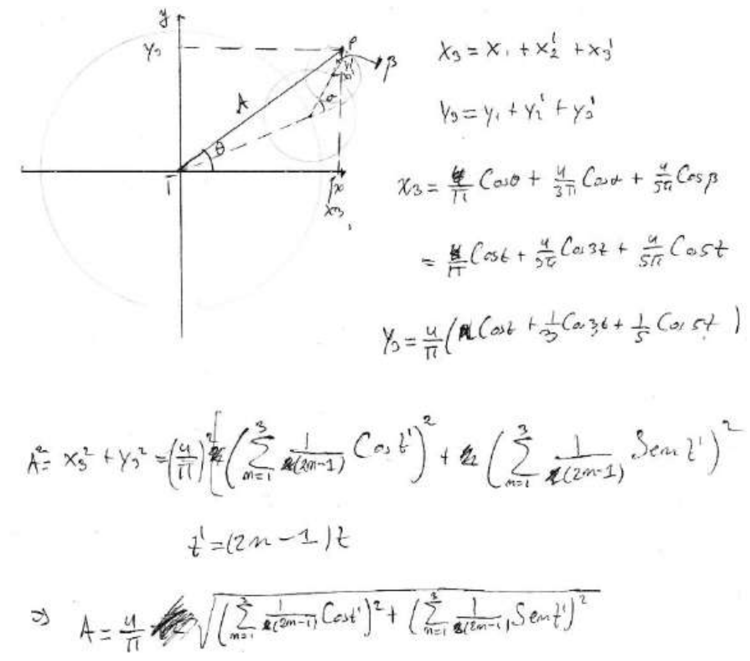
Objetivo de la Tarea: Significar la convergencia de series trigonométricas mediante la estabilidad de la trayectoria del planeta, caracterizándola mediante el límite de la sucesión de sumas parciales.

Parte I. **Comprendiendo el modelo**

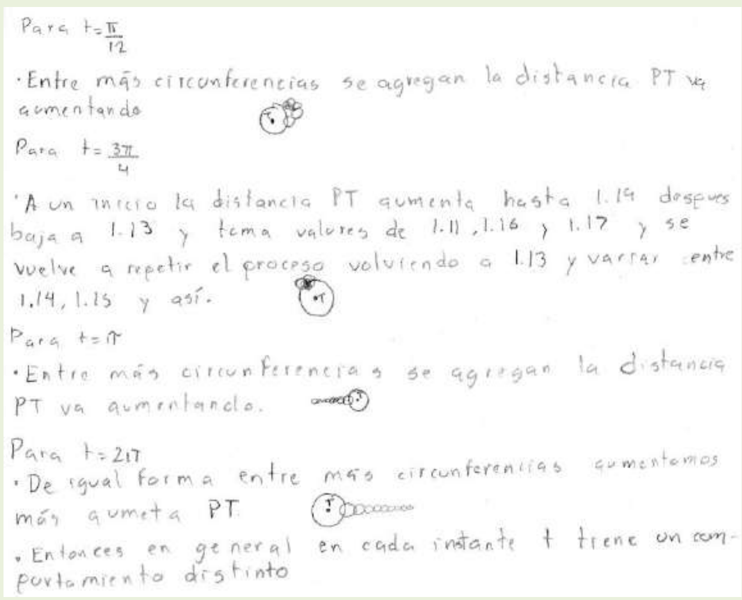
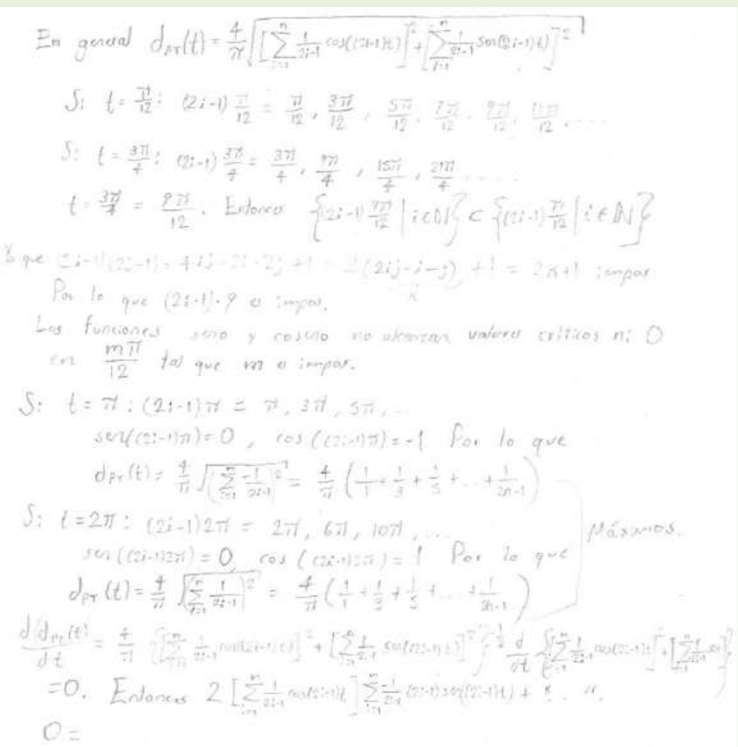
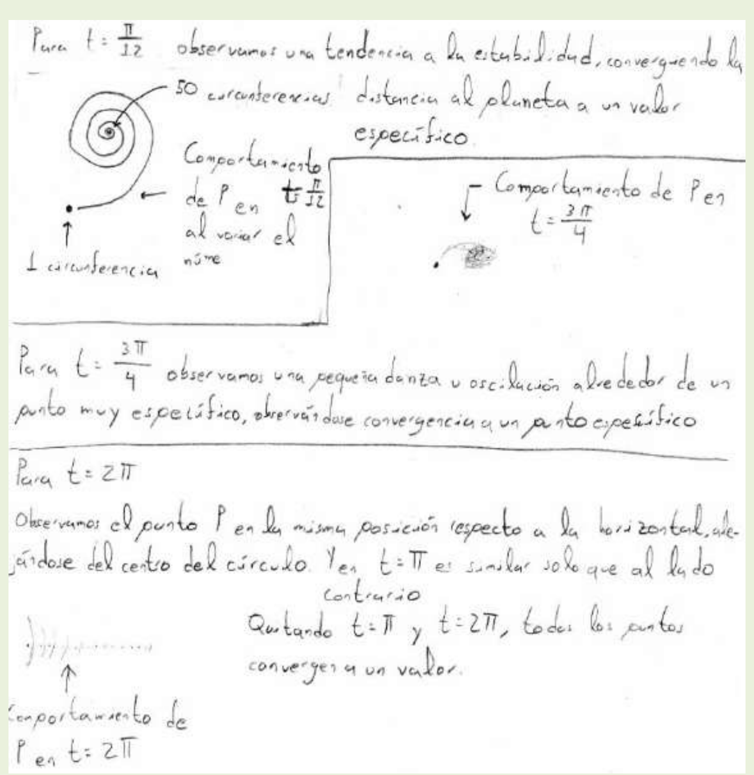
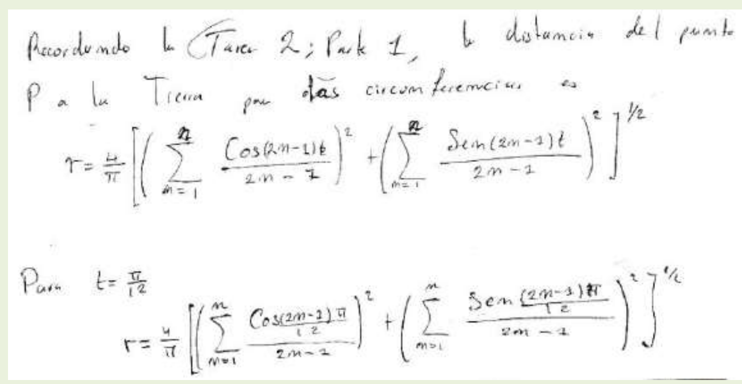
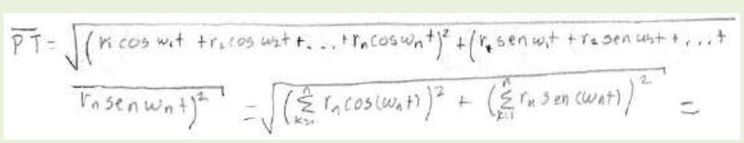
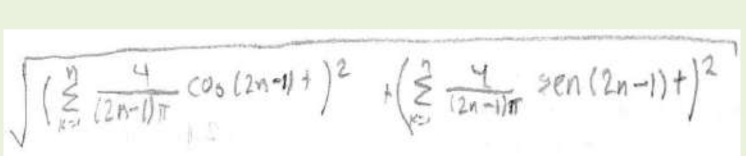
Intención: Se busca que el estudiante comprenda cómo se comporta el sistema, y la relación que guarda con los datos suministrados por la situación planteada.

<table>
<tr><th>Estudiante</th><th>M2</th><th>M3</th><th>H1</th><th>H3</th><th>H4</th></tr>
<tr><td>Pregunta a</td><td><table><tr><th>Meses</th><th>OTR (Rad)</th><th>QRP (Rad)</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>6</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td><td>9</td></tr><tr><td>n</td><td>n</td><td>3n</td></tr></table></td><td><table><tr><th>Meses</th><th>Medidas de ∠OTR (en radianes)</th><th>Medidas de ∠QRP (en radianes)</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>6</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td><td>9</td></tr><tr><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td></tr><tr><td>t</td><td>t</td><td>3t</td></tr></table></td><td><table><tr><th>Meses</th><th>OTR</th><th>QRP</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>n</td><td>n</td><td>3n</td></tr></table></td><td><table><tr><th>Meses</th><th>Medida de ∠OTR (rad)</th><th>Medida de ∠QRP (rad)</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>6</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td><td>9</td></tr><tr><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td></tr><tr><td>t</td><td>t</td><td>3t</td></tr></table></td><td><table><tr><th>Meses</th><th>Medida OTR</th><th>Medida QRP</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>6</td></tr><tr><td>t</td><td>$wt = 1\frac{rad}{mes}t$</td><td>$wt = 3\frac{rad}{mes}t$</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Intencionalidad</td><td colspan="5">Se pretende reconocer el comportamiento del movimiento de los puntos sobre cada circunferencia.
Para esta pregunta es probable que la idea de velocidad angular genere dificultades, esto se evidenció en el pilotaje y las diferentes puestas en escena; debido a que la concepción de radian en sí misma provoca dificultades según se ha reportado en distintas investigaciones (Akkoc, 2008; Moore, 2009).</td></tr>
<tr><td>Pregunta b</td><td>$(x_1, y_1) = \frac{4}{\pi}\left(\text{Cos}\left(\frac{1rad}{mes}t\right), \text{Sen}\left(\frac{1rad}{mes}t\right)\right)$
$(x_2, y_2) = \frac{4}{\pi}\left(\text{Cos}\left(\frac{1rad}{mes}t\right), \text{Sen}\left(\frac{1rad}{mes}t\right)\right) + \frac{4}{3\pi}\left(\text{Cos}\left(\frac{3rad}{mes}t\right), \text{Sen}\left(\frac{3rad}{mes}t\right)\right)$</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

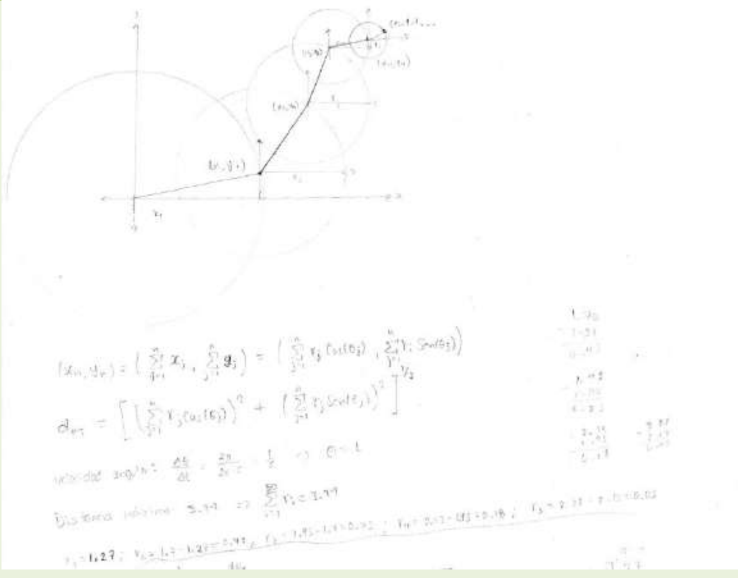
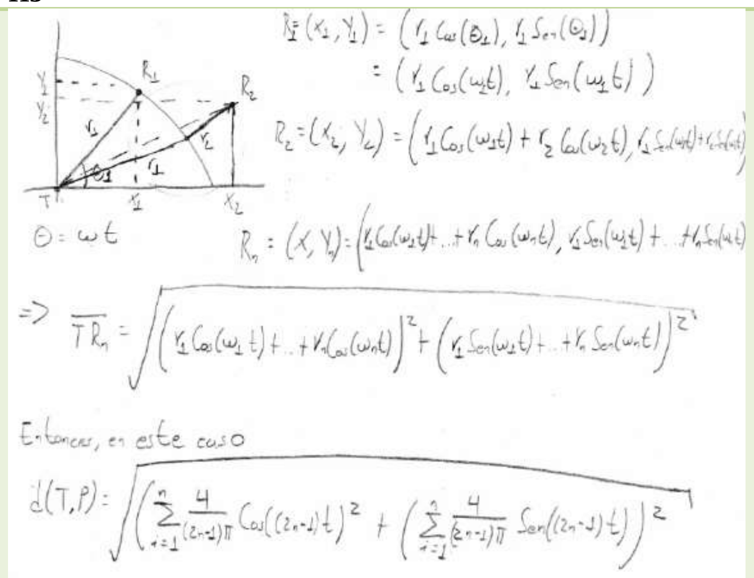
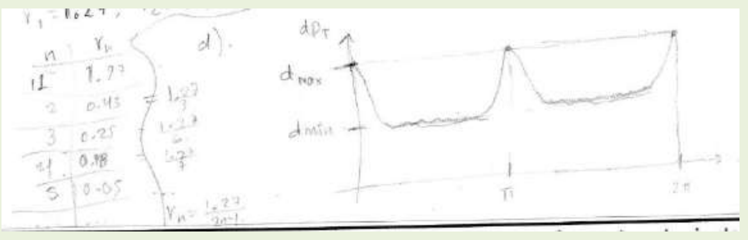
Parte I.	**Comprendiendo el modelo**
Intención:	Se busca que el estudiante comprenda cómo se comporta el sistema, y la relación que guarda con los datos suministrados por la situación planteada.

Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4
	$d_{TP}=\frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{10}{9}+\frac{2}{3}\mathrm{Cos}\left(2\frac{rad}{mes}t\right)}$ 				
Pregunta c	Se tienen las coordenadas: $(x_1,y_1)=\frac{4}{\pi}\left(\mathrm{Cos}\left(\frac{1rad}{mes}t\right),\mathrm{Sen}\left(\frac{1rad}{mes}t\right)\right)$ $(x_2,y_2)=\frac{4}{\pi}\left(\mathrm{Cos}\left(\frac{1rad}{mes}t\right),\mathrm{Sen}\left(\frac{1rad}{mes}t\right)\right)+\frac{4}{3\pi}\left(\mathrm{Cos}\left(\frac{3rad}{mes}t\right),\mathrm{Sen}\left(\frac{3rad}{mes}t\right)\right)$ $(x_3,y_3)=\frac{4}{\pi}\left(\mathrm{Cos}\left(\frac{1rad}{mes}t\right),\mathrm{Sen}\left(\frac{1rad}{mes}t\right)\right)+\frac{4}{3\pi}\left(\mathrm{Cos}\left(\frac{3rad}{mes}t\right),\mathrm{Sen}\left(\frac{3rad}{mes}t\right)\right)+\frac{4}{5\pi}\left(\mathrm{Cos}\left(\frac{5rad}{mes}t\right),\mathrm{Sen}\left(\frac{5rad}{mes}t\right)\right)$ $d_{TP}=\frac{4}{\pi}\sqrt{\left(\mathrm{Cos}\left(\frac{1rad}{mes}t\right)+\frac{1}{3}\mathrm{Cos}\left(\frac{3rad}{mes}t\right)+\frac{1}{5}\mathrm{Cos}\left(5\frac{rad}{mes}t\right)\right)^2+\left(\mathrm{Sen}\left(\frac{1rad}{mes}t\right)+\frac{1}{3}\mathrm{Sen}\left(\frac{3rad}{mes}t\right)+\frac{1}{5}\mathrm{Sen}\left(5\frac{rad}{mes}t\right)\right)^2}$		$d_{PT}(t)=$ $\frac{4}{\pi}\sqrt{\left(\cos(t)+\frac{1}{3}\cos(3t)+\frac{1}{5}\cos(5t)\right)^2+\left(\mathrm{sen}(t)+\frac{1}{3}\mathrm{sen}(3t)+\frac{1}{5}\mathrm{sen}(5t)\right)^2}$		
Intencionalidad	Se busca construir las primeras tres sumas parciales de dos series trigonométricas, pero con un significado asociado al fenómeno -las coordenadas del planeta- que permite determinar la distancia del planeta a la Tierra. Se espera que los estudiantes recurran a dibujar triángulos rectángulos sobre las figuras proporcionadas para identificar las razones trigonométricas involucradas, aunque para hacer la generalización a cualquier valor del tiempo se requiera que la función trigonométrica esté construida previamente (Montiel, 2011).				

Parte II.	**¿Y si** agregamos más **epiciclos?**
Intención:	Se proporciona un applet con el fin de visualizar la estabilidad del sistema. A partir de manipular el número de circunferencias se podrá analizar el comportamiento del sistema, al estudiar cómo cambia la trayectoria del planeta.

Estudiante	**M2**	**M3**	**H1**	**H3**	**H4**
Pregunta a	La trayectoria comienza a tomar una figura particular. El número de bucles aumenta al aumentar el número de circunferencias. En la parte central los bucles parecen juntarse más hasta formar dos líneas paralelas donde la distancia es mínima. La trayectoria en los laterales se alarga.	Conforme se le agregan mas circunferencias la parte central de la trayectoria se acerca a una recta y los extremos a circunferencias, ademas el tiempo en la parte central es mucho mas tardado que los extremos.	Se tiende a formar una figura parecida a dos líneas paralelas unidas por arcos.	A medida que se agregan más circunferencias podemos observar una tendencia hacia una figura que recuerda a un "huesito", con una línea recta en la parte central y dos medios círculos en las partes extremas de la trayectoria que tienden a ser más grandes cuando agregamos más circunferencias.	Toman la forma definida de dos rectas secantes paralelas horizontales a la circunferencia.
Intencionalidad	Se tiene como expectativa que el estudiante identifique que la trayectoria del planeta se estabiliza conforme se agregan más circunferencias. Se espera que la respuesta surja por sí sola con base en el trabajo realizado en la Tarea #1.				
Pregunta b	EL valor de la distancia del planeta P a la Tierra oscila al agregar más circunferencias para los valores de $t=\frac{\pi}{12}$, $t=\frac{3\pi}{4}$. El rango de oscilación va disminuyendo al agregar más circunferencias. Cuando P está en los puntos más alejados, es decir, en $t=\pi$ y $t=2\pi$, la distancia aumenta al aumentar el número de circunferencias.		En t=pi/12, 3pi/4 las funciones seno y coseno no alcanzan valores extremos ni 0. Pero la distancia converge. En t=pi, 4pi las función seno vale 0 y coseno -1, 1 respectivamente. La función de distancia se maximiza. En general, hay 2 máximos y 2 mínimos de distancia según el tiempo. 		$t=2\pi$ para $t=\frac{\pi}{12}$, mientras más circunferencias se añaden, la sucesión de puntos P al tiempo t, forma una espiral hacia un cierto calor fijo (parecido a una serie de Fibonacci) Para $t=\frac{3\pi}{4}$, la sucesión de puntos vuelve a tomar el valor de una espiras, pero ahora el punto P, termina más cerca de la tierra y se acerca en menos puntos que en para el tiempo anterior. Para $t=\pi$ la sucesión de puntos P se aleja cada vez más del punto P, lo mismo para $t=2\pi$. Así, para cualquier t, mientras más se aleje de $t=\pi$ y $t=2\pi$, el punto P, mientras más circunferencias se agreguen, se acercará al punto P. 
Intencionalidad	Se pretende propiciar un análisis numérico de la variación de una suma parcial a otra, se busca que el estudiante se percate que la trayectoria del planeta no es estable para todos los valores del tiempo.				
Pregunta c	$d_{PT}=\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}r_i\,\mathrm{Cos}((2i-1)t)\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}r_i\,\mathrm{Sen}((2i-1)t)\right)^2}$ Con $r_i=\frac{1.27}{2i-1}$	 	$d_{PT}(t)$ $=\frac{4}{\pi}\sqrt{\left[\sum\frac{1}{2i-1}\cos((2i-1)t)\right]^2+\left[\sum\frac{1}{2i-1}\mathrm{sen}((2i-1)t)\right]^2}$ $i=1,2,\dots,n.$		$r=\frac{4}{\pi}\left[\left(\sum_{1}^{n}\frac{\cos(2n-1)t}{2n-1}\right)^2+\left(\sum_{1}^{n}\frac{\mathrm{sen}(2n-1)t}{2n-1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$

Parte II. **¿Y si** agregamos más **epiciclos?**
Intención: Se proporciona un applet con el fin de visualizar la estabilidad del sistema. A partir de manipular el número de circunferencias se podrá analizar el comportamiento del sistema, al estudiar cómo cambia la trayectoria del planeta.

Estudiante	**M2**	**M3**	**H1**	**H3**	**H4**
					
Intencionalidad	Matematizar el fenómeno como una generalización de los resultados obtenidos en la Tarea #2 - Parte I.				
Pregunta d	Su comportamiento puede considerarse oscilatorio. Alcanza un valor máximo y un valor mínimo. 	Se debe conocer el radio de las circunferencias y su velocidad angular para poder determinar la distancia del punto P a la Tierra.	Es una función en la que los máximos y mínimos se pueden intuir sin mucha dificultad (múltiplos de pi y múltiplos impares de pi medios, respectivamente). Pero analíticamente es difícil de demostrar. Es una función periódica.	Es necesario conocer el radio de cada círculo utilizado en el modelado de la trayectoria, así como su velocidad angular para poder determinar la forma a la que tenderá la trayectoria cuando agreguemos más círculos, este hecho se sigue de que estos parámetros alteran la forma de la trayectoria final. Sería conveniente que tanto los radios como las velocidades formen una progresión para poder formar trayectorias interesantes.	Para empezar, siempre converge a un valor, y este valor es más pequeño conforme t se aleje que pi y 2pi, pues la parte sinoidal se anula, la parte del coseno se vuelve 1 y sólo se suman los términos del numerador y P se aleja horizontalmente.
Intencionalidad	Este inciso conduce hacia la interpretación de la matemática involucrada en el fenómeno físico, relacionar la estabilidad de la trayectoria el planeta con el límite de las sumas parciales involucradas en la fórmula calculada en el inciso c. Esto es de suma importancia, pues en el trabajo de Fourier siempre hubo un ir y venir entre el fenómeno físico y la matemática involucrada, para validar la segunda en la primera (Farfán, 2012; Farfán y Romero, 2017).				
Pregunta e.1	Tiene un valor mínimo en π que decrece cuando aumenta el número de circunferencias. En los valores de $t=0$, $t=2\pi$, crece cuando aumenta el número de circunferencias.	Se comporta como una serie de Fourier de Cosenos, que dependerá de la velocidad angular, ya que inicia en un punto maximo aslcanza un minimo y vuelve a recuperar un punto maximo en un determinado.	Conforme aumenta el número de círculos. Va desde el valor máximo hasta el mínimo dentro del intervalo $((2n-2)\pi,(2n-1)\pi)$ y del mínimo al máximo dentro del intervalo $((2n-1)\pi,2n\pi)$.	Como una especie de serie (suma infinita) de cosenos, esto se deduce de la expresión general calculada para la distancia de T a P y de la forma de la suma parcial de abcisas cuando se tiene una sola circunferencia, la serie se deforma hasta el punto en que parece formar una especie de señal con forma de V.	Toma un valor constante en npi
Pregunta e.2	Al aumentar el número de circunferencias la suma se acerca a 1 en el rango $(0,\pi)$, mientras que en el rango $(\pi,2\pi)$ la suma se acerca a -1.	Se comporta como una serie de Fourier de Senos, que dependerá de la velocidad angular, ya que inicia en un punto máximo se mantiene por un intervalo de tiempo y después alcanza un mínimo donde de igual manera se mantiene constante y el proceso se repite. Comportandose como un pulso.	Conforme aumenta el número de círculos. La suma de las abscisas se vuelve igual a 1 dentro del intervalo $((2n-2)\pi,(2n-1)\pi)$ ((2n-2) y -1 dentro del intervalo $((2n-1)\pi,2n\pi)$.	Como una especie de serie (suma infinita) de senos, esto se sigue de la expresión general calculada para la distancia de T a P y de la forma de la suma parcial de ordenadas cuando se tiene una sola circunferencia la cual es una función seno, con una cierta amplitud. La serie parace deformarse hasta el punto de formar una función pulsante y periódica.	Toma un valor constante en 1 y -1. y se mantiene por un intervalo de y -pi y pi
Pregunta e.3	En la respuesta (a) menciono que la trayectoria se vuelve más alargada en π y en 2π, lo cual concuerda con ésta gráfica donde podemos ver mínimo y máximo respectivamente. (Máximos si se toma el cuadrado de las sumas). La parte de la trayectoria donde los bucles parecen formar dos líneas paralelas se observa en la última gráfica donde la suma de las ordenadas se vuelve constante.	Que ambas se comportan como funciones periodicas y dependeran de la velocidad angular que tengan y los radios de la circunferencias que se van agregando.	En múltiplos de pi las abscisas están completamente estiradas, por lo que ahí son los máximos o mínimos en los que alterna la función. Luego los círculos se enciman sobre las líneas, por lo que las ordenadas suman casi una constante.	No cabe duda de que la relación existente es aquella que produce el hecho de que las coordenadas del planeta respecto al tiempo están expresadas como sumas de senos y cosenos, mismos términos que se ven alterados a causa de constantes tales como el radio de cada circunferencia y la velocidad angular de cada una de estas, esto produce la forma de la trayectoria y la altera conforme se agregan más círculos.	Concuerdan con las respuestas en a) y b)
Pregunta f	Sí converge, su comportamiento se aproxima a una constante. Converge a una función escalonada	La serie de la ordenadas converge y su valor de convergencia es la coordenada "y" de la posición del planeta con respecto a la Tierra.	La serie de ordenadas $\sum\frac{1}{2i-1}\operatorname{sen}\big((2i-1)t\big)$ con t=pi/2, es igual a $\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\sum(-1)^{i+1}\frac{1}{2i-1}$ i=1,2,... La cual, por la propiedad telescópica tiende a pi/4. Y con 0=-pi/2 tiende a -pi/4. Por lo que la serie no converge ya que tiene dos puntos de acumulación.	La serie de las ordenadas converge, aseguramos que esta serie converge al valor de la componente "y" del vector de posición del planeta respecto a T.	Parace que converge en intervalos abierto de 0 y pi y diverge cuando se acerca a los valores de 0 y múltiplos de pi
Intencionalidad	Se espera con los incisos e y f la interpretación de la matemática involucrada en el fenómeno físico, relacionar la estabilidad de la trayectoria del planeta con la convergencia de las series involucradas en la fórmula calculada para la distancia de planeta P a la Tierra. Se espera que se percaten de que la suma parcial de las abscisas no siempre es divergente y que la suma parcial de las ordenadas es siempre convergente. En particular para el inciso f, se tiene como hipótesis que los estudiantes respondan que la serie de las ordenadas diverge, cuando en realidad es convergente. Esto lo sabemos gracias a la prueba piloto y las diferentes puestas en escena, ya que el argumento principal utilizado fue que "la gráfica se está acercando a dos valores 1 y -1", lo que da evidencia de la concepción de límite funcional como obstáculo para comprender la convergencia de series. Si bien sabemos que en t=π, la serie converge a cero —de hecho, en todas las discontinuidades considerando a $t\in\mathbb{R}$— aquellos estudiantes que vislumbren la convergencia podrían pensar que cerca de $t=\pi$ —las discontinuidades— la serie de las ordenadas de P es divergente, pues ya está reportado que los estudiantes consideran convergente solo aquello que converge uniformemente y lo demás es divergente (Albert, 1996).				
Pregunta g	Converge a una función escalonada	Converge al mismo valor que en la respuesta anterior, ya que se estaba trabajando con valores de t positivos.	Según la applet, la suma de ordenadas converge a 1. Tiene sentido ya que la coordenada y es igual a $y_n=\frac{4}{\pi}\sum\frac{1}{2i-1}\operatorname{sen}\big((2i-1)t\big)$ para t=pi/2 $y_n\to 1$, $i\to\infty$.	Convergería al mismo valor, dado que hemos estado trabajando todo el tiempo con t's positivas. En caso de t=0 el valor de cada función seno será cero, provocando así la convergencia de la serie a la suma de todos los radios de las circunferencias.	converge a una función
Pregunta h	Valores de t<0 indican planetas moviéndose en sentido horario, lo cual no tiene sentido en el modelo propuesto.	Si tiene sentido pero no es necesario ya que al ser funciones pares e impares lo único que provoca son reflexiones.	Tiene sentido matemáticamente, ya que equivale a invertir el sentido de giro. Y ahí sólo cambiaría el signo de los términos de la serie, la cual convergería a -pi/4. Pero físicamente no tiene sentido el tiempo negativo.	En efecto, tiene sentido, aunque es probable que las expresiones solo acaben por reflejar la trayectoria formada, esto dada la simetría de la misma respecto al eje horizontal, la paridad del coseno y la no paridad del seno.	No tiene sentido considerarlos, porque ni siquiera implican un retroceso. En caso de converger, convergería al mismo valor en las ordenadas.
Intencionalidad	Se pretende provocar que la periodicidad sea un resultado de la serie y no una condición de la función que se está representando. Pues la serie, como objeto matemático, posee ciertas características que no tienen sentido en el fenómeno que se está modelando. En este caso dicha característica es la condición de periodicidad, la cual se da en toda la recta real, pero el fenómeno no tiene sentido al hablar de valores negativos del tiempo. Para concluir con esta tarea, se espera que los estudiantes no sepan escribir en forma analítica una función periódica en el inciso h, ya que no es usual hacerlo en la escuela, posiblemente escriban la función para un intervalo y escriban con palabras que se repite de manera periódica.				

9.6.3 Tarea #3

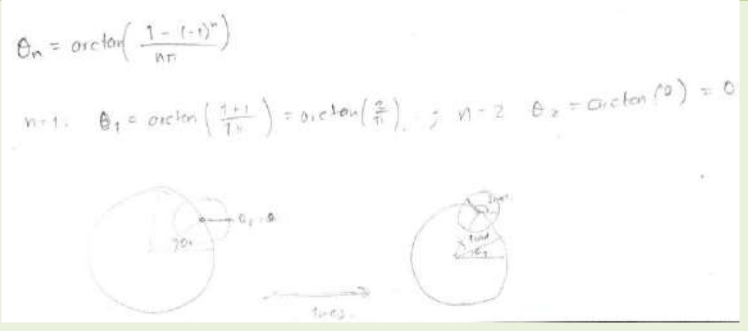
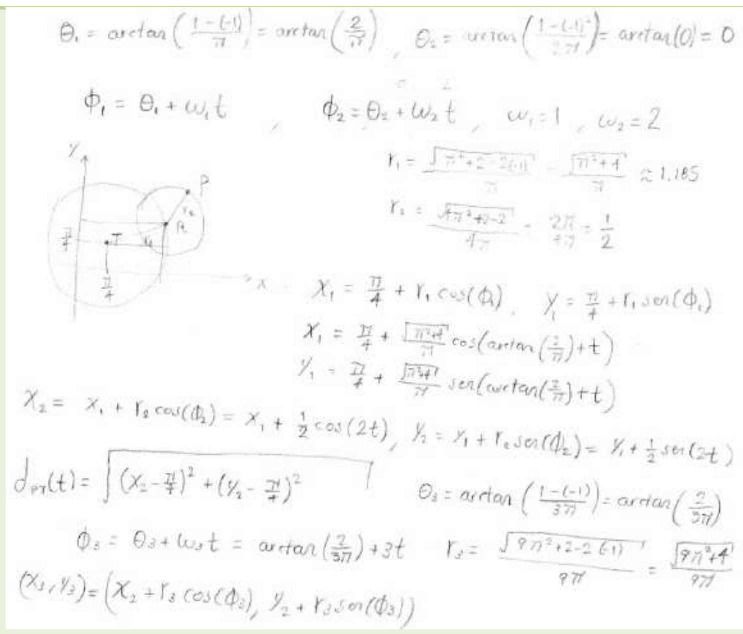
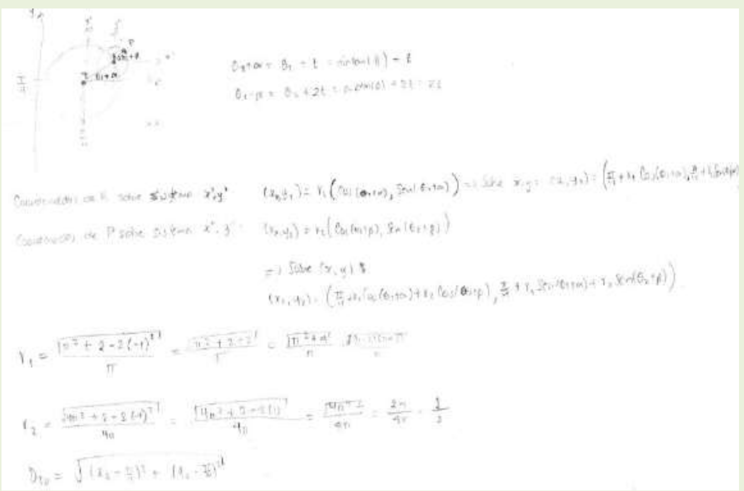
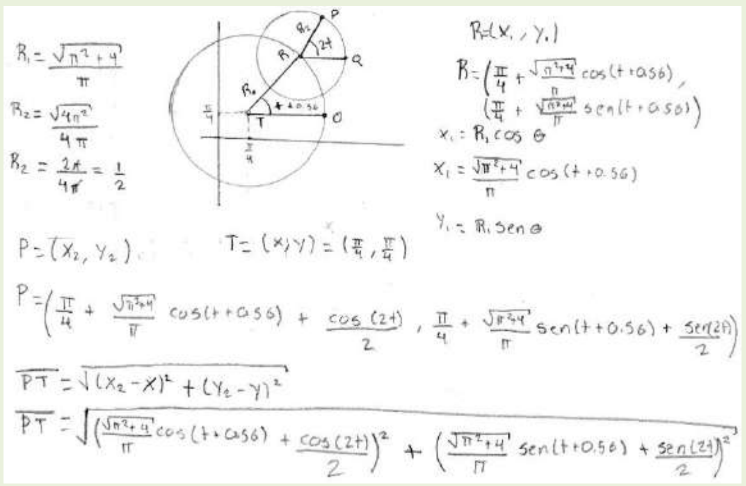
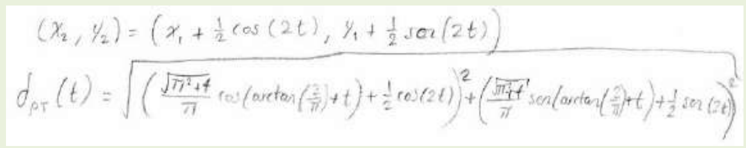
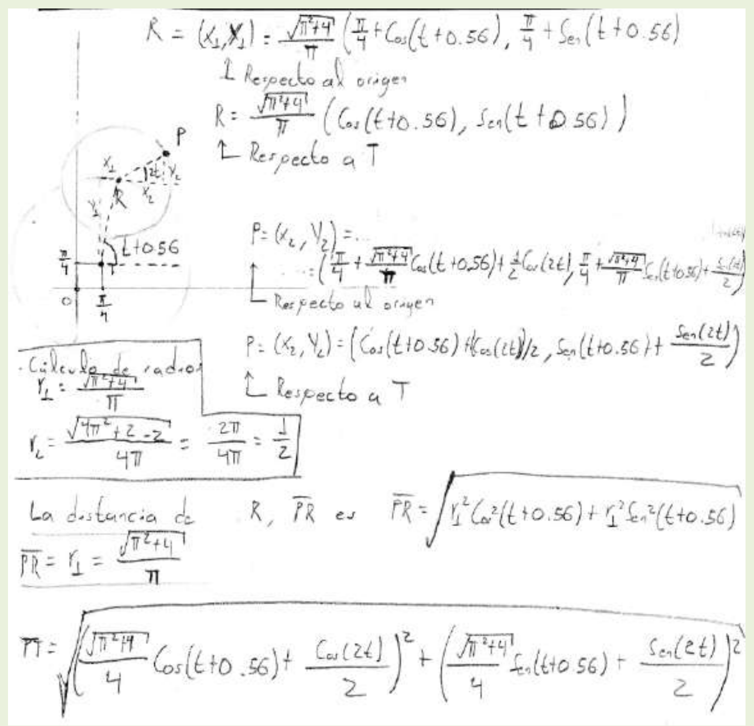
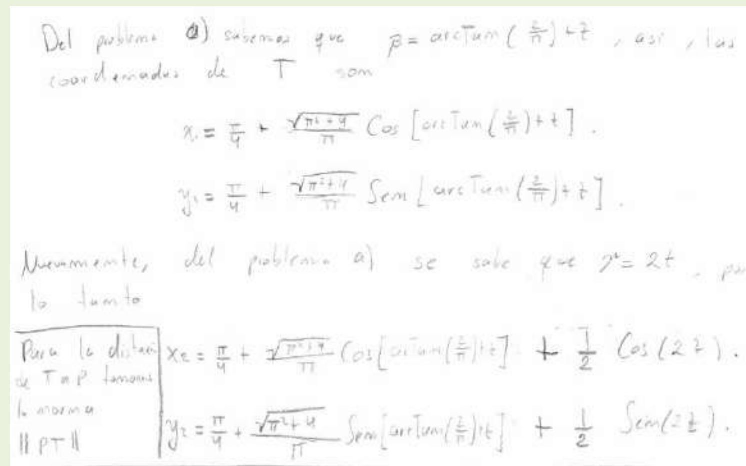
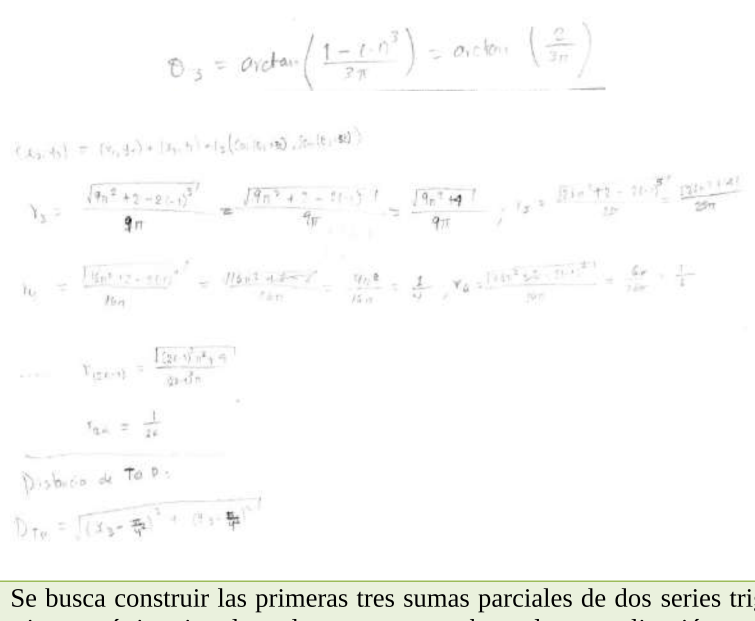
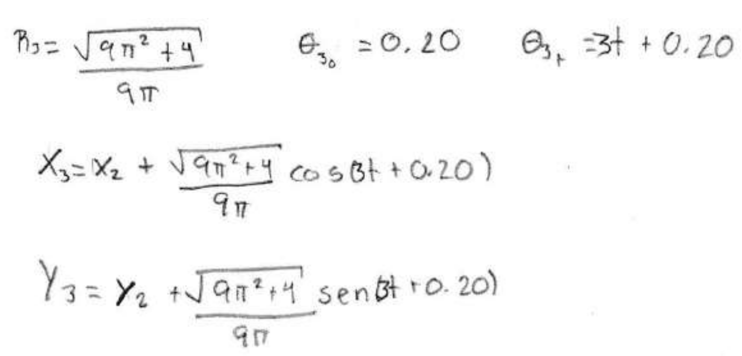
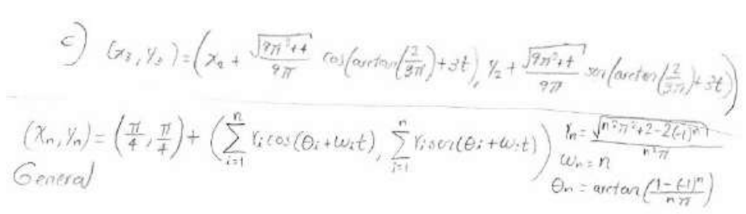
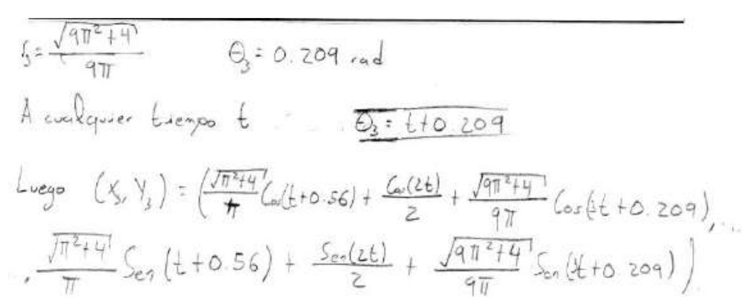
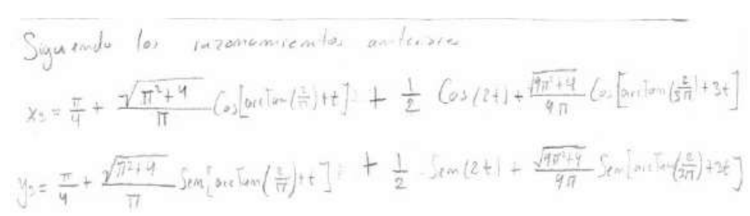
TAREA #3

Objetivo de la Tarea: Significar la convergencia de series trigonométricas mediante la estabilidad de la trayectoria del planeta, caracterizándola mediante el límite de la sucesión de sumas parciales.

Parte I. **Comprendiendo el modelo**
Intención: Se busca que el estudiante comprenda cómo se comporta el sistema, y la relación que guarda con los datos suministrados por la situación planteada.

<table>
<tr><th>Estudiante</th><th>M2</th><th>M3</th><th>H1</th><th>H3</th><th>H4</th></tr>
<tr><td>Pregunta a</td>
<td>
<table>
<tr><td>MESES</td><td>ÁNGULO OTR</td><td>ÁNGULO QRP</td></tr>
<tr><td>1</td><td>$\theta_1 + 1rad = \arctan\left(\frac{2}{\pi}\right) + 1$</td><td>$\theta_2 + 2rad = \arctan(0) + 2rad = 2rad$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$\theta_1 + 2rad = \arctan\left(\frac{2}{\pi}\right) + 2$</td><td>$4rad$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$\theta_1 + 3rad = \arctan\left(\frac{2}{\pi}\right) + 3$</td><td>$6rad$</td></tr>
<tr><td>t</td><td>$\theta_1 + (t)rad = \arctan\left(\frac{2}{\pi}\right) + (t)rad$</td><td>$(2t)rad$</td></tr>
</table>
</td>
<td>
<table>
<tr><td>Meses</td><td>Medidas de ∠OTR (en radianes)</td><td>Medidas de ∠QRP (en radianes)</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0.56</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1.56</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2.56</td><td>4</td></tr>
<tr><td>3</td><td>3.56</td><td>6</td></tr>
<tr><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td></tr>
<tr><td>t</td><td>$t + 0.56$</td><td>$2t$</td></tr>
</table>
</td>
<td>
<table>
<tr><td>t</td><td>OTR</td><td>QRT</td></tr>
<tr><td>0</td><td>$\arctan\left(\frac{2}{\pi}\right) \approx 0.567$</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>$\arctan\left(\frac{2}{\pi}\right) + 1 \approx 1.567$</td><td>2</td></tr>
<tr><td>n</td><td>$\arctan\left(\frac{2}{\pi}\right) + n \approx 0.567 + n$</td><td>$2n$</td></tr>
</table>
</td>
<td>
<table>
<tr><td>Tiempo (meses)</td><td>Medida de ∠OTR</td><td>Medida de ∠QRP</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0.567</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1.567</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2.567</td><td>4</td></tr>
<tr><td>3</td><td>3.567</td><td>6</td></tr>
<tr><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td></tr>
<tr><td>t</td><td>$t + 0.567$</td><td>$2t$</td></tr>
</table>
</td>
<td>
Puesto que ahora el punto R comienza a un àngulo θ_1, y la velocidad angular del punto R es $\omega = \frac{\phi}{t}$ donde ϕ es el àngulo recorrido en un tiempo t desde el punto de partida, asì pues, el àngulo OTR està dado por $\arctan\left(\frac{2}{\pi}\right) + \omega t = \arctan\left(\frac{2}{\pi}\right) + 1t$. Anàlogamente, el àngulo QRP està dado por $\arctan\left(\frac{0}{\pi}\right) + \omega t = 0 + 2t = 2t$
<table>
<tr><td>t</td><td>OTR</td><td>QRT</td></tr>
<tr><td>1</td><td>$\arctan\left(\frac{2}{\pi}\right) + 1$</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$\arctan\left(\frac{2}{\pi}\right) + 2$</td><td>4</td></tr>
<tr><td>t</td><td>$\arctan\left(\frac{2}{\pi}\right) + t$</td><td>$2t$</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

Parte I.	**Comprendiendo el modelo**
Intención:	Se busca que el estudiante comprenda cómo se comporta el sistema, y la relación que guarda con los datos suministrados por la situación planteada.

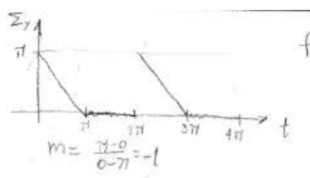
Estudiante	**M2**	**M3**	**H1**	**H3**	**H4**
					
Intencionalidad	Se pretende reconocer el comportamiento del movimiento de los puntos sobre cada circunferencia. Se espera que ya no haya problema con la idea de velocidad angular gracias a la Tarea #2. Sin embargo, el hecho de que el ángulo no inicie su movimiento en la posición horizontal mostró dificultades en la prueba piloto.				
Pregunta b	$(x_1,y_1)=\left(\frac{4}{\pi},\frac{4}{\pi}\right)+r_1\left(\text{Cos}\left(\arctan\left(\frac{2}{\pi}\right)+t\right),\text{Sen}\left(\arctan\left(\frac{2}{\pi}\right)+t\right)\right)$ $(x_1,y_1)=\left(\frac{4}{\pi}+r_1\,\text{Cos}\left(\arctan\left(\frac{2}{\pi}\right)+t\right),\frac{4}{\pi}+r_1\,\text{Sen}\left(\arctan\left(\frac{2}{\pi}\right)+t\right)\right)$ $(x_2,y_2)=\left(\frac{4}{\pi},\frac{4}{\pi}\right)+r_1\left(\text{Cos}\left(\arctan\left(\frac{2}{\pi}\right)+t\right),\text{Sen}\left(\arctan\left(\frac{2}{\pi}\right)+t\right)\right)+r_2(\text{Cos}(2t),\text{Sen}(2t))$ $(x_2,y_2)=\left(\frac{4}{\pi}+r_1\,\text{Cos}\left(\arctan\left(\frac{2}{\pi}\right)+t\right)+r_2\,\text{Cos}(2t),\frac{4}{\pi}+r_1\,\text{Sen}\left(\arctan\left(\frac{2}{\pi}\right)+t\right)+r_2\,\text{Sen}(2t)\right)$ Con: $r_1=\frac{\sqrt{\pi^2+4}}{\pi}$ $r_2=\frac{\sqrt{4\pi^2}}{4\pi}=\frac{1}{2}$ Distancia en la hoja. 		$(x_1,y_1)=\left(\frac{4}{\pi}+\frac{\sqrt{\pi^2+4}}{\pi}\cos\left(\arctan\left(\frac{2}{\pi}\right)+t\right),\frac{4}{\pi}+\frac{\sqrt{\pi^2+4}}{\pi}\text{sen}\left(\arctan\left(\frac{2}{\pi}\right)+t\right)\right)$ $(x_3,y_3)=\left(x_2+\frac{\sqrt{9\pi^2+4}}{9\pi}\cos\left(\arctan\left(\frac{2}{3\pi}\right)+3t\right),y_2+\frac{\sqrt{9\pi^2+4}}{9\pi}\text{sen}\left(\arctan\left(\frac{2}{3\pi}\right)+3t\right)\right)$ Se me borraron dos fórmulas!! 		
Pregunta c	$(x_3,y_3)=\left(\frac{4}{\pi},\frac{4}{\pi}\right)+r_1\left(\text{Cos}\left(\arctan\left(\frac{2}{\pi}\right)+t\right),\text{Sen}\left(\arctan\left(\frac{2}{\pi}\right)+t\right)\right)+r_2(\text{Cos}(2t),\text{Sen}(2t))+r_3(\text{Cos}(\theta_3+3t),\text{Sen}(\theta_3+3t))$ $(x_3,y_3)=\left(\frac{4}{\pi},\frac{4}{\pi}\right)+r_1\left(\text{Cos}\left(\arctan\left(\frac{2}{\pi}\right)+t\right),\text{Sen}\left(\arctan\left(\frac{2}{\pi}\right)+t\right)\right)+r_2(\text{Cos}(2t),\text{Sen}(2t))+r_3\left(\text{Cos}\left(\arctan\left(\frac{2}{3\pi}\right)+3t\right),\text{Sen}\left(\arctan\left(\frac{2}{3\pi}\right)+3t\right)\right)$ Con $r_3=\frac{\sqrt{9\pi^2+4}}{9\pi}$ Distancia en la hoja 				
Intencionalidad	Se busca construir las primeras tres sumas parciales de dos series trigonométricas, pero con un significado asociado al fenómeno -las coordenadas del planeta- que permite determinar la distancia del planeta a la Tierra. Se espera que los estudiantes recurran a dibujar triángulos rectángulos sobre las figuras proporcionadas para identificar las razones trigonométricas involucradas, aunque para hacer la generalización a cualquier valor del tiempo se requiera que la función trigonométrica esté construida previamente (Montiel, 2011).				

Parte II.	**¿Y si** agregamos más **epiciclos?**
Intención:	Se proporciona un applet con el fin de visualizar la estabilidad del sistema. A partir de manipular el número de circunferencias se podrá analizar el comportamiento del sistema, al estudiar cómo cambia la trayectoria del planeta.

Estudiante	**M2**	**M3**	**H1**	**H3**	**H4**
Pregunta a	Al aumentar el número de circunferencias la trayectoria sobre el primer cuadrante va formando una curva cada vez más abierta o alejada de T.	Conforme vamos agregando mas circunferencias alcanza una forma como una especie de nube (gatitos de cielo).	Se forman figuras que tienden a ser ovaladas. Alrededor de la Tierra, pero la Tierra está desplazada del centro.	De nuevo, al agrega más circunferencias tiende a alcanzar una forma definida, con una parte recta en la parte más cercana de la trayectoria	Conforme se agregan más circunferencias, en el segundo cuadrante, la trayectoria se acerca mucho a la trayectoria de la primera circunferencia. En el primer cuadrante se sigue abriendo, al parecer

Parte II. **¿Y si** agregamos más **epiciclos?**

Intención: Se proporciona un applet con el fin de visualizar la estabilidad del sistema. A partir de manipular el número de circunferencias se podrá analizar el comportamiento del sistema, al estudiar cómo cambia la trayectoria del planeta.

Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4
	Mientras que al pasar por el segundo cuadrante la trayectoria parece oscilar alrededor o cerca de la primera circunferencia. A simple vista, se nota que cruza por el origen para modelos con dos o más circunferencias, y al pasar al cuarto cuadrante oscila alrededor del eje x.			y un medio círculo con perturbaciones en el resto, recordando a una nube.	indefinidamente con la forma de un arco muy excentrico. Toda la trayectoria se puede encerrar en una envolvente con la forma de un cuasi huevo.
Intencionalidad	Se tiene como expectativa que el estudiante identifique que la trayectoria del planeta se estabiliza conforme se agregan más circunferencias. Se espera que la respuesta surja por sí sola con base en el trabajo realizado en las Tareas #1 y #2.				
Pregunta b	Al iniciar la trayectoria se tiene una distancia máxima, que va aumentando al agregar más circunferencias al modelo. Al iniciar el movimiento, la distancia decrece hasta que P pasa por el origen o cerca de él. Luego, la distancia entre P y T oscila entre un rango, para finalmente crecer nuevamente, hasta llegar al punto máximo.	Oscila, ya que hay momentos en los que la distancia aumenta pero otros en los que la distancia disminuye.	Tiene puntos de acercamiento y alejamiento.	Se tiene un comportamiento oscilatorio alrededor de algún punto, a causa de la convergencia hacia una forma definida.	En el primer cuadrante, pareciera que no converge el valor de la distancia pues es el punto en el que mas se va alejando conforme se aumenta el número de circunfererencias. No obstante, podemos decir que cuando el punto P vuelve a pasar por el eje x en el primer cuadrante, su trayectoria cada vez se va acercando mas a seguir al eje x en línea horizontal
Intencionalidad	Se pretende propiciar un análisis numérico de la variación de una suma parcial a otra, se busca que el estudiante se percate que la trayectoria del planeta no es estable para todos los valores del tiempo.				
Pregunta c	$(x_n, y_n) = (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) + \sum_{k=1}^{n} r_k(\cos(\theta_k + kt), \operatorname{Sen}(\theta_k + kt))$ [illegible] $(x_n, y_n) = (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) + \sum_{j=1} \frac{1}{2j}(\cos(\theta_{2j} + 2jt), \operatorname{Sen}(\theta_{2j} + 2jt)) + \sum_{j=1} [illegible]$ $\theta_{2j} = 0$ $(x_n, y_n) = (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) + \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{2j}(\cos(2jt), \operatorname{Sen}(2jt)) + \sum_{j=1}^{p} [illegible]$ Donde $n = 2p$ ó $n = 2p+1$	$x_n = \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k^2\pi^2 + 2 - 2(-1)^k}}{k^2\pi} \cos(\theta_k + (2k-1)t)$ $y_n = \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k^2\pi^2 + 2 - 2(-1)^k}}{k^2\pi} \operatorname{sen}(\theta_k + (2k-1)t)$ con: $\theta_k = \arctan\left(\frac{1-(-1)^k}{k\pi}\right) \quad \forall k = 1, 2, \ldots$	$r_n = \frac{\sqrt{n^2\pi^2 + 2 - 2(-1)^n}}{n^2\pi}, \quad \omega_n = n, \quad \theta_n = \arctan\left(\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\right)$ $(x_n, y_n) = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} r_i \cos(\theta_i + \omega_i t), \sum_{i=1}^{n} r_i \operatorname{sen}(\theta_i + \omega_i t)\right)$	$(x_n, y_n) = \left(\frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{(k)^2\pi^2 + 2 - 2(-1)^k}}{k^2\pi} \cos(\theta_k + (2k-1)t), \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k^2\pi^2 + 2 - 2(-1)^k}}{k^2\pi} \operatorname{Sen}(\theta_k + (2k-1)t)\right)$ Donde $\theta_k = \left(\arctan\left(\frac{1-(-1)^k}{k\pi}\right)\right)$	$x_m = \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\sqrt{k^2\pi^2 + 2 - 2(-1)^k}}{k^2\pi} \operatorname{Cos}\left[\operatorname{arcTam}\left(\frac{1-(-1)^k}{k\pi}\right) + kt\right]$ $y_m = \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\sqrt{k^2\pi^2 + 2 - 2(-1)^k}}{k^2\pi} \operatorname{Sem}\left[\operatorname{arcTam}\left(\frac{1-(-1)^k}{k\pi}\right) + kt\right].$ $\Rightarrow \lVert PT \rVert = \sqrt{y_m^2 + x_m^2}$ $\operatorname{Sem}(a+b) = \operatorname{Sem} a \operatorname{Cos} b + \operatorname{Cos} a \operatorname{Sem} b.$ $\sum r_m \{\operatorname{Sem}\left[\operatorname{arcTam}\left(\frac{1-(-1)^k}{k\pi}\right)\right] \operatorname{Cos} kt + \operatorname{Cos}\left[\operatorname{arcTam}\left(\frac{1-(-1)^k}{k\pi}\right)\right] \operatorname{Sem} kt\}$ Para $k = 2m$ $= \sum r_{2m} \{\operatorname{Sem}(0) \operatorname{Cos} 2mt + \operatorname{Cos}(0) \operatorname{Sem} 2mt\}.$ $= \sum r_{2m} \operatorname{Sem} 2mt.$ Para $k = 2m-1$ $= \sum r_{2m-1} \{\operatorname{Sem}[illegible] \operatorname{Cos}[illegible] + \operatorname{Cos}[illegible] \operatorname{Sem}(2m-1)t\}.$
Intencionalidad	Matematizar el fenómeno como una generalización de los resultados obtenidos en la Tarea #3 - Parte I.				
Pregunta d	Tomando n circunferencias (Con n muy grande), se comienza a tomar la forma definida antes mencionada.	Se comporta como una serie de Fourier, que depende de los ángulos de las circunferencias así como la magnitud de su radio.	Se forma una figura cerrada oscilante según los valores de t.	Se comporta como una serie de Fourier que coverge a la coordenada n-ésima de cada punto P. Lo cual explica la forma definida hacia la que tiende la trayectoria.	La formula obtenida describe la trayectoria del punto P para valores K grandes
Intencionalidad	Este inciso conduce hacia la interpretación de la matemática involucrada en el fenómeno físico, relacionar la estabilidad de la trayectoria el planeta con el límite de las sumas parciales involucradas en la fórmula calculada en el inciso c. Esto es de suma importancia, pues en el trabajo de Fourier siempre hubo un ir y venir entre el fenómeno físico y la matemática involucrada, para validar la segunda en la primera (Farfán, 2012; Farfán y Romero, 2017).				
Pregunta e.1	Comienza en un punto máximo, decrece a un punto mínimo, y vuelve a aumentar al punto máximo. El punto máximo en 0 y 2π aumenta al agregar más circunferencias al modelo. El punto mínimo se encuentra entre $\frac{\pi}{2}, \pi$, y se acerca a un valor constante al agregar más circunferencias.	Se comporta a un inicio como un coseno desplazado de amplitud variable. Al ir agregando circunferencias se distorciona la forma ya que los radios y los angulos empiezan a variar.	Parecen diverger en 0 y 2pi. Y parece tener un mínimo en 3pi/4.	Como una suma de cosenos desplazados que se aproximan a una función.	Para el valor de 2π y 0 parece que tiene una divergencia. Su comportamiento tiene un mìnimo en el intervalo $\frac{\pi}{2}$ y π.
Pregunta e.2	En el rango $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ oscila alrededor de 0 al agregar más circunferencias. En los puntos extremos 0 y 2π el valor se aproxima a π.	Se comporta como una serie de Fourier de cosenos de periodo 2π.	Crece muy rápido a partir del t=0 y antes de t=pi. Poco después de t=0 parece decrecer linealmente hasta llegar a 0 en t=pi/2. De ahí se mantiene en 0 hasta casi t=pi.	Como una senos desplazados que también aproximan a una función.	Tienen una recta de pendiente negativa en el intervalo de 0 y π. Posteriormente, tiene un valor constante en $(\pi, 2\pi)$ y en 2π tiene un salto similar a un punto de discontinuidad
Pregunta e.3	Coincide mi respuesta en a) con el comportamiento de las sumas parciales de las abscisas, ya que la distancia máxima aumenta al agregar circunferencias. En la respuesta b) se tiene que la distancia parece oscilar alrededor de una constante en cierto rango, lo cual se puede ver en las sumas parciales de las ordenadas.	Pues ya que la trayectoria que forman las circunferencias se acerca a una forma definida, las sumas parciales de las ordenadas y las abscisas se acercan a formas definidas para lograr describir la forma original de la funcion.	Las sumas parciales alcanzan valores extremos, y eso se manifiesta en la distancia del planeta a la Tierra.	En la aproximación a una cierta función, mientras la forma de la trayectoria tiende a una forma definida, la serie de Fourier en cada coordenada tiende a una función que modela de manera cada vez más precisa dicha trayectoria	Al hablar de la forma definida, el comportamiento de las ordenadas lo describe. Al hablar de el incremento de la distancia del punto P de 1), el comportamiento de las abscisas nos describe esta posible divergencia.
Pregunta f	En la applet se puede ver que las sumas parciales de las ordenadas están acotadas, por lo que converge. Se propone una función a la que converge (Hoja) $f(t) = \begin{cases} \pi - t & 0 < x < \pi \\ 0, & \pi < x < 2\pi \end{cases}$	Si, converge a $\pi - x$ cuando x está entre 0 y π y a 0 cuando x está entre π y 2π.	No converge porque se forma una función periódica  $f(t) = \begin{cases} -t + \pi, & 0 < t < \pi \\ 0, & \pi < t < 2\pi \end{cases}$ Se forma una función periódica.	En efecto, la serie de las ordenadas converge a la función diente de sierra, la cual es una señal pulsante. $f(t) = \begin{cases} \pi - t & 0 < t < \pi \\ 0 & \pi < t < 2\pi \end{cases}$	La suma parcial de las ordenadas es la que tiene el termino Sen. esta es $\frac{\sqrt{k^2\pi^2+2-2(-1)^k}}{k^2\pi} \operatorname{Sen}\left(\operatorname{arcTan}\left(\frac{1-(-1)^k}{\pi k}\right) + kt\right)$ Cuando k sea muy grande, el argumento de la serie toma la forma $\frac{1}{k}\operatorname{Sen}(kt)$. Y por el applet, la serie de las ordenadas converge a la funciòn $f(x) = \pi - x$ entre 0 y π y $f(x) = 0$ entre π y 2π. $f(x) = \begin{cases} \pi - x & ; 0 < x \leq \pi \\ 0 & ; \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$
Intencionalidad	Se espera con los incisos e y f la interpretación de la matemática involucrada en el fenómeno físico, relacionar la estabilidad de la trayectoria del planeta con la convergencia de las series involucradas en la fórmula calculada para la distancia de planeta P a la Tierra. Se espera que se percaten de que la suma parcial de las abscisas no siempre es divergente y que la suma parcial de las ordenadas es siempre convergente. Nuevamente, visualizar el fenómeno de Gibbs, puede provocar que los estudiantes que vislumbren la convergencia piensen que cerca de $t = 0$ y $t = 2\pi$ —las discontinuidades— la serie de las ordenadas de P es divergente, al igual se esperó pasara en la Tarea #2.				
Pregunta g	$f(t) = \begin{cases} \pi - t & , (2j-2)\pi < x < (2j-1)\pi \\ 0 & , (2j-1)\pi < x < 2j\pi \end{cases} \quad k \geq 1$	Si, converge a la función de la pregunta f solo que x varia entre 2j y 2j+1 y en el otro caso cuando x esta entre 2j+1 y 2j+2.	La serie no converge porque se forma una función periódica tipo sierra conforme se añaden más epiciclos.	Converge a la función mencionada anteriormente, dado que siempre hemos trabajado t positivo. Se aproxima a la función $f(t) = \begin{cases} \pi - t & 2j < t < 2j+1 \\ 0 & 2j+1 < t < 2j+2 \end{cases}$ Con $j \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$	Converge a trozos a la función antes dicha, sólo que ahora cambian los valores de X con cada trozo de convergencia
Pregunta h	No, serían tiempos en retroceso.	Matemáticamente si tiene sentido tomar valores negativos del tiempo, pero para razones físicas no tiene sentido ya que no existen tiempo negativos.	Tiene sentido matemático pero no sentido físico. Si se toman tiempos negativos la serie seguiría sin converger. Solamente la gráfica de sierras continuaría en tiempos negativos.	No, pues un tiempo negativo no tiene sentido en un sistema físico, debido a que siempre consideramos tiempos mayores o iguales que cero, sin embargo, matematicamente los valores existen y de nuevo, la serie convergería a la función diente de sierra, solo que alcanzando valores negativos.	Nuevamente, en nuestro modelo (ya que es un modelo físico) no tiene sentido considrar t negativos. Matemáticamente, al considerarlos se tendría el mismo valor de convergencia
Intencionalidad	Se pretende provocar que la periodicidad sea un resultado de la serie y no una condición de la función que se está representando. Pues la serie, como objeto matemático, posee ciertas características que no tienen sentido en el fenómeno que se está modelando. En este caso dicha característica es la condición de periodicidad, la cual se da en toda la recta real, pero el fenómeno no tiene sentido al hablar de valores negativos del tiempo. Para concluir con esta tarea, se espera que los estudiantes no sepan escribir en forma analítica una función periódica en el inciso h, ya que no es usual hacerlo en la escuela, posiblemente escriban la función para un intervalo y escriban con palabras que se repite de manera periódica.				

Parte II. **¿Y si** agregamos más **epiciclos?**
Intención: Se proporciona un applet con el fin de visualizar la estabilidad del sistema. A partir de manipular el número de circunferencias se podrá analizar el comportamiento del sistema, al estudiar cómo cambia la trayectoria del planeta.

Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4
Pregunta i	$y_n = \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k^2\pi^2+2-2(-1)^k}}{k\pi} \operatorname{Sen}\left(\arctan\left(\frac{1-(-1)^k}{k\pi}\right)+kt\right)$ Usando identidad trigonométrica: Sen(a+p) = Sen(a)Cos(p) + Sen(p)Cos(a) $y_n = \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k^2\pi^2+2-2(-1)^k}}{k\pi} \left[\operatorname{Sen}\left(\arctan\left(\frac{1-(-1)^k}{k\pi}\right)\right)\operatorname{Cos}(kt) + \operatorname{Cos}\left(\arctan\left(\frac{1-(-1)^k}{k\pi}\right)\right)\operatorname{Sen}(kt)\right]$ $a_0 = \frac{\pi}{2}$ $a_k = \frac{\sqrt{k^2\pi^2+2-2(-1)^k}}{k\pi} \operatorname{Sen}\left(\arctan\left(\frac{1-(-1)^k}{k\pi}\right)\right)$ $b_k = \frac{\sqrt{k^2\pi^2+2-2(-1)^k}}{k\pi} \operatorname{Cos}\left(\arctan\left(\frac{1-(-1)^k}{k\pi}\right)\right)$	Retomando la pregunta c), notemos que: $a_0 = \frac{\pi}{2}$ $b_k = \frac{\sqrt{k^2\pi^2+2-2(-1)^k}}{k^2\pi}\cos\left(\arctan\frac{1-(-1)^k}{\pi k}\right)$ De forma analoga se obtine a_k solo se modifica el cos por el sen.	$a_0 = \frac{\pi}{2}, a_k = r_k \operatorname{sen}(\theta_k), b_k = r_k \cos(\theta_k), w_k = k$ $\frac{\pi}{4} + \sum_{i=1}^{n} r_i \operatorname{sen}(\theta_i + w_i t)$: Se tiene que $\operatorname{sen}(\theta_i + w_i t) = \operatorname{sen}(\theta_i)\cos(w_i t) + \cos(\theta_i)\operatorname{sen}(w_i t)$ $a_0 = \frac{\pi}{2}, r_i \operatorname{sen}(\theta_i) = a_i, r_k \cos(\theta_i) = b_i, w_i = i$ $\therefore \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{a_0} + \sum_{k=1}^{n}\left(\underbrace{r_k \operatorname{sen}(\theta_k)}_{a_k}\cos(kt) + \underbrace{r_k \cos(\theta_k)}_{b_k}\operatorname{sen}(kt)\right)$	$y = \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n} r_k \operatorname{Sen}(\Theta_k + kt) = \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n} r_k\left(\operatorname{Sen}\Theta_k \operatorname{Cos}(kt) + \operatorname{Cos}(\Theta_k)\operatorname{Sen}(kt)\right)$ $\Rightarrow a_0 = \frac{\pi}{2} \quad a_k = r_k \operatorname{Sen}\Theta_k \quad b_k = r_k \operatorname{Cos}(\Theta_k)$	Desarrollando Sen(a+b) = Sena Cosb + Cosa Senb. $\Rightarrow$ $\frac{\pi}{4} + \sum_k r_k \operatorname{Sen}\left[\arctan\left(\frac{1-(-1)^k}{k\pi}\right) + kt\right] = \sum_k \operatorname{Sen}\left(\frac{1-(-1)^k}{k\pi}\right)\operatorname{Cos} kt$ $+ \sum_k r_k \operatorname{Cos}\left(\frac{1-(-1)^k}{k\pi}\right)\operatorname{Sen} kt + \frac{\pi}{4}$ Así pues $a_0 = \frac{\pi}{2}$. $b_k = r_k \operatorname{Cos}\left(\frac{1-(-1)^k}{k\pi}\right)$. $a_k = r_k \operatorname{Sen}\left(\frac{1-(-1)^k}{k\pi}\right)$.
Intencionalidad	Esta pregunta tiene como propósito verificar la idea de que una serie trigonométrica de senos y cosenos puede converger a una función, pues hasta el momento solo se había trabajado con series de senos convergentes, esta idea debe surgir en la puesta en común de esta parte de la tarea.				

9.6.4 Tarea #4

TAREA #4

Objetivo de la Tarea: Diferenciar el tipo de convergencia entre los puntos cercanos a las discontinuidades y los que no, para así construir una mejor comprensión de la convergencia de la serie, a través del estudio del comportamiento de las sumas parciales.

Parte I. **Volvamos a la serie de la Tarea #2**
Intención: Analizar el comportamiento de las sumas parciales en los puntos cercanos a las discontinuidades en la serie de la Tarea #2.

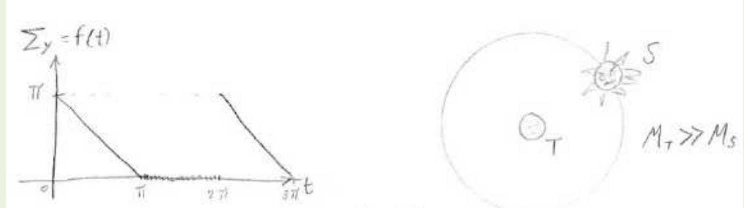
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4
Pregunta a	Es discontinua Salta de 1 a -1	En las ordenadas parece ser que divergen, cabe destacar que esos puntos en 0, π y 2π son los puntos en donde mayor velocidad lleva el punto P.	En t=0 la suma vale 0 y se incrementa muy rápidamente a 1. Poco antes de llegar a t=pi decrece muy rápidamente a 0 y sigue hasta -1. Poco antes de llegar a t=2pi la suma se incrementa muy rápidamente hasta llegar a 0 en t=2pi.	Se comporta como si no tuviera un valor específico en dichos puntos, dando saltos muy rápidos, es decir, variando su valor de manera muy abrupta. En la trayectoria se observa la transición entre la parte de abajo a la parte de arriba y viceversa, esto, en un tiempo muy pequeño.	En esos puntos la funciòn presenta un salto, asemejàndose a una discontinuidad
Intencionalidad	Se espera que el estudiante responda que la suma diverge o que no está completamente seguro de la convergencia.				
Pregunta b	Tomando el valor fijo t=1.85, a partir de $S_2 = 0.94$, difiere del límite 1, en 0.06<0.1 Para t=1.57, a partir de $S_4 = 0.92$, difiere del límite 1, en 0.08<0.1 Para t=1.7, a partir de $S_3 = 1.07$, difiere del límite 1, en 0.03<0.1	Para t= 1.57 a partir de la suma parcial numero 4.	En valores cercanos a t=pi/2. A partir de n=4 se tiene que la suma difiere en menos de 0.1 del valor límite 1.	A partir de la cuarta suma parcial, observamos una diferencia menor a 0.1 a partir de 50 observamos un comportamiento estático en la diferencia. Es decir, para valores muy pequeños de n.	Tomando t=1.41 como nuestro punto lejano, podemos ver que desde S_4 la diferencia es menos a 0.1
Pregunta c	Tomando t=0.03, a partir de $S_{29} = 0.92$ difiere del límite 1 en 0.08<1 Tomando t=3.08, a partir de $S_{14} = 0.94$ difiere del límite 1, en 0.06 <1	Para t=3.11 a partir de la suma parcial numero 30. Para t=0.1 a partir de la suma parcial numero 21.	En valores cercanos a t=0. A partir de n=29 se tiene que la suma difiere en menos de 0.1 del valor límite 1.	A partir de la suma con 90 circunferencias. Es decir, a partir de valores de n muy grandes.	Tomando a t=3.11 como punto cercano, vemos que en S_{26} se cumple la condición requerida. Tomando ahora t=0.02 como punto cercano, S_{44} cumple lo requerido.
Pregunta d	En puntos lejanos a la discontinuidad, en las primeras sumas parciales se obtienen valores cercanos al límite, mientras que en puntos cercanos a la discontinuidad se necesita un mayor número de sumas parciales para obtener valores cercanos al límite.	En los puntos cercanos a los extremos se requiere de menos sumas parciales que en los puntos lejanos.	En los valores cercanos a las discontinuidades se necesitan más epiciclos para que la suma se aproxime al valor límite. En los valores centrales se necesitan menos.	Los puntos ubicados en el centro del intervalo logran acercarse al valor de esperado por la función límite mucho más rápido que aquellos que se encuentran ubicados cerca de las discontinuidades.	En los puntos cercanos se necesitan muchas sumas parciales para aproximar el valor de 1. Para los puntos lejanos se requieren de pocas sumas parciales para aproximar el valor de 1.
Intencionalidad	Se espera que el estudiante se percate de que, para lograr la aproximación deseada, los puntos “cercanos” a las discontinuidades requiere de sumas parciales de orden mucho mayor al orden de la suma que requieren los puntos “lejanos” de las discontinuidades. Diferenciar entre convergencia “rápida” y “lenta”.				
Pregunta e	Para puntos alrededor de los extremos 0, y π, la serie sí converge ya que dada una distancia ε siempre se puede encontrar un n_0 a partir del cual la diferencia entre las sumas parciales y el límite 1 sea menor que ε	Para los valores cercanos a t=0 la serie si es convergente al igual que para t=3.14, ya que se tienen valores especificos para las sumas parciales.	Las sumas parciales se van aproximando a la función escalón conforme n tiende a infinito.	Para valores cercanos, sin tocar a 0 ni a π, sí se observa convergencia, ya sea hacia 1 o hacia -1.	Sí, pues se alcanza a aproximar el valor de 1.
Pregunta f	Según el applet: En t=0, las sumas parciales $S_n = 0$ para $n \leq 4$, y $S_n < 0$ para $n > 4$. En t=pi, las sumas parciales $S_n = 0$, para n=1, y $S_n > 0$ para $n > 1$. En ambos casos son valores cercanos a cero. Evaluando directamente en la serie: $y(t = 0) = y(t = \pi) = 0$ La serie converge a cero en los puntos extremos	Para t=0 su suma parcial se aproxima a 0 y en t=3.14 su suma parcial se aproxima a 0	En t=0 y t=pi. Las sumas valen 0. Se vuelven divergentes conforme aumenta el número de epiciclos.	Exactamente en los puntos mencionados, el valor al que se aproximan es distinto, si nos acercamos a cero por la derecha, el valor límite vale 1, si nos acercamos a cero por la izquierda, el valor límite vale -1, de manera análoga para los múltiplos de π. De lo anterior, se concluye que el valor límite de la función en estos puntos está indefinido.	Toman el valor 0. En esos puntos hay convergencia al cero.
Pregunta g	función límite: $f(t) = \begin{cases} 1 & ; 0 < t < \pi \\ 0 & ; t = 0 ; t = \pi \\ -1 & ; \pi < t < 2\pi \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi)$	$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad 0 < t < \pi \\ 0 & \text{si} \quad t \in \{0, \pi\} \\ 1 & \text{si} \quad \pi < t < 2\pi \end{cases}$	f(t)=1 si t pertenece a (2kpi,(2k+1)pi), -1 si t pertenece a ((2k+1)pi,(2k+2)pi). k natural o 0.	$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad 0 < t < \pi \\ 0 & \text{si} \quad t \in \{0, \pi\} \\ 1 & \text{si} \quad \pi < t < 2\pi \end{cases}$	$f(x) = \begin{cases} 1 & 2j < x < 2j+1 \\ 0 & t = (2j), t = (2j+1) \\ -1 & 2j+1 < x < 2(j+1) \end{cases}$ $1 \quad 0 < x < \pi$ $-1 \quad \pi < x < 2\pi$ $1 \quad 2\pi < x < 3\pi$ $-1 \quad 3\pi < x < 4\pi$ $1 \quad 4\pi < x < 5\pi$ $(2j+1) < x < 2j+2$ $2j < x <$ $f(x) = \begin{cases} 1 & 2j\pi < x < (2j+1)\pi \\ 0 & t = (2j)\pi, t = (2j+1)\pi \\ -1 & (2j+1)\pi < x < (2(j+1)\pi) \end{cases}$
Intencionalidad	Se espera que el estudiante se convenza de que la serie es convergente incluso en las discontinuidades de salto. De esta manera podrá replantear su función límite.				

Parte II. **Volvamos a la serie de la Tarea #3**
Intención: Analizar el comportamiento de las sumas parciales en los puntos cercanos a las discontinuidades en la serie de la Tarea #3.

Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4
Pregunta a	Alrededor de t=0 converge a una recta de pendiente negativa. Puntos alrededor de $t = 2\pi$ convergen a la función constante 0.	Alrededor de cero parece que se acerca a $\pi - t$ y en 2π se acerca a 0.	Antes de t=0 la suma de ordenadas converge a 0. Poco después de t=0 la suma de ordenadas converge a pi-t. Antes de t=2pi la suma de ordenadas converge a 0. Poco después de t=2pi la suma de ordenadas converge a pi-t.	Para t cercano a cero positivo, tenemos convergencia a $\pi - t$, para t negativo observamos convergencia a cero.	Toma el valor acercado de $\pi - t$ pata t=0 y un valor cercano al 0 en $t = 2\pi$
Intencionalidad	Se espera que el estudiante responda que la suma diverge o que no está completamente seguro de la convergencia.				
Pregunta b	Para t=2.81, la función a converger es $f(t) = \pi - t = 3.14 - 2.81 = 0.33$, difiere menos de 0.1 desde S_2.	Para $t = \frac{\pi}{2}$ en la sumatoria numero 5.	Escogiendo t=pi ya que está igual de lejano de cada extremo. Se tiene que a partir de n=3 la suma se aproxima al límite en menos de 0.1 de diferencia.	A partir de la quinta suma, dando a entender que los puntos que cumplen esta característica necesitan menos circunferencias para aproximar el valor de la función límite.	Para t=2.22 la tercera suma parcial difiere en menos de 0.1 a la función límite
Pregunta c	t=0.07 la función debe converger a $f(t) = \pi - t = 3.14 - 0.07 = 3.07$, se difiere en menos de 0.1 a partir de S_{25}	Para t=0.08 en la sumatoria numero 24.	Para el valor positivo más cercano a 0 que permite la aplicación, t=0.01. No se logra conseguir un valor de n a partir del cual la suma difiera en menos de 0.1 de la función convergente.	En estos puntos fue necesario usar más de 90 circunferencias para aproximar el valor hasta el requerido, es decir, en los puntos cercanos a cero o a π se necesita muchos valores para aproximar a la función límite.	a t=.08 se necesitaron 100 sumas parciales para obtener lo requerido

Parte II. **Volvamos a la serie de la Tarea #3**

Intención: Analizar el comportamiento de las sumas parciales en los puntos cercanos a las discontinuidades en la serie de la Tarea #3.

Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4
Pregunta d	En los puntos cercanos a las discontinuidades se necesita un mayor número n para observar la convergencia, mientras que en puntos alejados, se necesita un número menor.	Para los puntos cercanos se necesitan mas sumas parciales, que los puntos lejanos necesitan menos sumas parciales.	En los puntos cercanos a las discontinuidades se necesitan de más círculos para aproximar a la función límite que en los puntos lejanos a las discontinuidades.	Como se menciono antes, en los puntos lejanos a las discontinuidades observamos una aproximación rápida a la función requerida y en específico a su valor, sucede lo contrario con los puntos cercanos, donde observamos una convergencia lente.	Se necesitan más sumas parciales para aproximar los puntos cercanos y menos para aproximar los puntos lejanos
Intencionalidad	Se espera que el estudiante se percate de que, para lograr la aproximación deseada, los puntos "cercanos" a las discontinuidades requiere de sumas parciales de orden mucho mayor al orden de la suma que requieren los puntos "lejanos" de las discontinuidades. Diferenciar entre convergencia "rápida" y "lenta".				
Pregunta e	Sí, la diferencia entre las sumas parciales y el límite tienden a cero al aumentar el número de circunferencias.	Si es convergente, ya que para valores cercanos a t=0, los valores convergen a puntos específicos	La suma converge a la función límite para valores cercanos a t=0.	Sí, pues al fijarse t cercano a cero, ya sea con t mayor o menor que cero, se concluye la aproximación hacia un valor de la suma.	Sí. Pues cada vez que aumenta los npumero de circunferencias el valor de las sumas parciales se acerca mucho a la función
Pregunta f	Según la applet, el valor de las sumas parciales en t=0 es cercano a 1.54. Las sumas parciales convergen a dicho valor: $\frac{\pi}{2}$	Para t=0 su valor se aproxima a $\frac{\pi}{2}$.	En t=0 las sumas valen pi/2. Pero cuando n tiende a infinito la serie converge más lentamente a la función convergente en t=0.	Al parecer en esta parte de la función primero sube hasta valores cercanos hasta 1.55 y luego desciende hasta 1.49 cuando se tienen 100 circunferencias. Obsérvese la expresión para las coordenadas n-ésimas, cuando se vuelve t=0 la convergencia de la serie queda determinada completamente por el ángulo inicial, acercándose a $\frac{\pi}{2}$	Segun el applte, las sumas parciales tienden a el valor de $\frac{\pi}{2}$
Pregunta g	$g(t)=\begin{cases}\pi-t & si\quad 0<t\leq\pi\\ 0 & si\quad \pi<t<2\pi\\ \pi/2 & si\quad t=0,\ t=2\pi.\end{cases}$ $\quad t\in[0,2\pi]$	$f(t)=\begin{cases}\pi-t & si\quad 0<t<\pi\\ \frac{\pi}{2} & si\quad t=0\\ 0 & si\quad \pi\leq t<2\pi\end{cases}$	f(t)=pi/2 si t=2kpi, pi-t si t existe en ((2k)pi,(2k+1)pi), 0 si t=(2k+1)pi, 0 si t existe en ((2k+1)pi,(2k+2)pi). k=0,1,2,…  $m=\frac{\pi-0}{0-\pi}=-1\quad f(t)=-t+\pi\quad 0<t<\pi$ $f(t)=\begin{cases}\pi-t, & t\in((2k)\pi,(2k+1)\pi)\\ \frac{\pi}{2}, & t=2k\pi\\ 0, & t\in[(2k+1)\pi,(2k+2)\pi)\end{cases}$	$f(t)=\begin{cases}\pi-t & si\quad 0<t\leq\pi\\ \frac{\pi}{2} & si\quad t=0\\ 0 & si\quad \pi<t<2\pi\end{cases}$	La funcion original fue $g(t)=\begin{cases}\pi-t & si\quad 0<t<\pi\\ 0 & si\quad \pi<t<2\pi\end{cases}$ Pero ahora le agregaremos el valor en t=0. $g(t)=\begin{cases}\pi-t\ ; & 0<t<\pi\\ \pi/2\ ; & t=0,\ t=2\pi\\ 0\ ; & \pi\leq t<2\pi.\end{cases}$
Intencionalidad	Se espera que el estudiante se convenza de que la serie es convergente incluso en las discontinuidades de salto. De esta manera podrá replantear su función límite.				

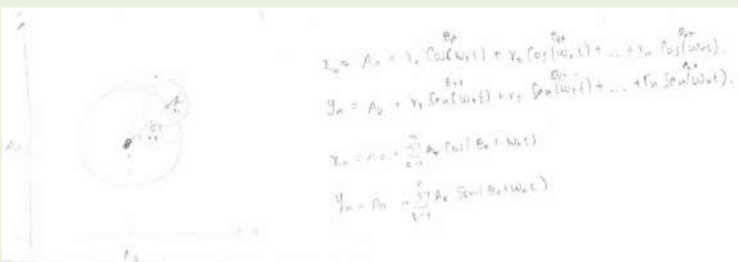
9.6.5 Tarea #5

TAREA #5

Objetivo de la Tarea: Significar los elementos presentes en la serie trigonométrica que emerge al matematizar el modelo del movimiento planetario de los alejandrinos en forma general.

Parte I. **Generando el modelo**

Intención: Se pretende con esta generalización que el estudiante identifique las condiciones para que el modelo sea estable.

Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4
Pregunta a	$A_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ Las velocidades aumentan al agregar más circunferencias y $w_k \to \infty$ cuando k→ ∞ Así se formarán trayectorias con formas definidas al agregar más circunferencias.	Debe cumplirse que los radios de las circunferencias vayan disminuyendo y las velocidad angulares vayan aumentado, ademas que las series de las componentes sean convergentes. Donde los radios tienden a cero y las velocidades angulares a infinito.	Se debe cumplir $r_{k+1} y < canvasclass =$ para que la trayectoria no se desborde. Y $\omega_{k+1} > \omega_k$ y $[math]\backslash omega\_k\backslash longrightarrow\backslash infty" >$ para que se complete el recorrido en un tiempo finito.	Debe cumplirse que al ir agregando más y más circunferencias, estas decrezcan en radio y el punto o planeta P aumente su velocidad angular, para completar un giro cada vez más rápido, observándose como si el planeta ya no girara en torno al centro de cada nueva circunferencia. Con los radios tendiendo a cero y las velocidades angulares tendiendo a infinito.	Los radios de las circunferencias agregadas deben de ser menores con respecto al anterior, pero es necesario que $A_n \to 0$. A su vez, la velocidad angular del punto P en cada nueva circunferencia debe de aumentar (esto como consecuencia de la disminución de las circunferencias) y es necesario que $w_n \to \infty$
Intencionalidad	Se espera que el estudiante identifique que para garantizar la estabilidad del sistema se debe cumplir que $A_n \to 0$ y $w_n \to \infty$, es importante resaltar que estas condiciones son necesarias para la convergencia, pero no suficientes.				
Pregunta b	$x_n = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \operatorname{Cos}(\theta_k + w_k t)$ $y_n = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \operatorname{Sen}(\theta_k + w_k t)$ 	$X_1 = A_0 + A_1\cos(\theta_1+\omega_1 t)$ $X_2 = (A_0 + A_1\cos(\theta_1+\omega_1 t) + A_2\cos(\theta_2+\omega_2 t)$ $\vdots$ $X_n = A_0 + A_1\cos(\theta_1+\omega_1 t) + A_2\cos(\theta_2+\omega_2 t) + \ldots + A_n\cos(\theta_n+\omega_n t)$ $Y_1 = A_0 + A_1\operatorname{sen}(\theta_1+\omega_1 t)$ $Y_2 = A_0 + A_1\operatorname{sen}(\theta_1+\omega_1 t) + A_2\cos(\theta_2+\omega_2 t)$ $\vdots$ $Y_n = A_0 + A_1\operatorname{sen}(\theta_1+\omega_1 t) + A_2\cos(\theta_2+\omega_2 t)$ $(X_n, Y_n) = \left(A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k\cos(\theta_k+\omega_k t),\ A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k\operatorname{sen}(\theta_k+\omega_k t)\right)$	$(x_n, y_n) = (A_0, A_0) + \left(\sum A_k \cos(\theta_k + \omega_k t), \sum A_k \operatorname{sen}(\theta_k + \omega_k t)\right)$ $k = 1, 2, \ldots, n.$	$(X_1,Y_1) = \left(A_0 + A_1\operatorname{Cos}(\theta_1+\omega_1 t),\ A_0 + A_1\operatorname{Sen}(\theta_1+\omega_1 t)\right)$ $(X_2,Y_2) = \left(A_0 + A_1\operatorname{Cos}(\theta_1+\omega_1 t) + A_2\operatorname{Cos}(\theta_2+\omega_2 t),\ A_0 + A_1\operatorname{Sen}(\theta_1+\omega_1 t) + A_2\operatorname{Sen}(\theta_2+\omega_2 t)\right)$ $\vdots$ $(X_n,Y_n) = \left(A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k\operatorname{Cos}(\theta_k+\omega_k t),\ A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k\operatorname{Sen}(\theta_k+\omega_k t)\right)$	$(x_n, y_n) = \left(A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \operatorname{Cos}(\omega_k t + \theta_k), A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \operatorname{Sen}(\omega_k t + \theta_k)\right)$
Intencionalidad	Se espera que no haya problema con el establecimiento de las relaciones, y que el argumento para dar su respuesta sea bajo lo construido en las tareas anteriores, así sucedió en la prueba piloto, concluyendo que las coordenadas del planeta son: $\begin{cases} x_n = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos[w_k t + \theta_k] \\ y_n = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \operatorname{sen}[w_k t + \theta_k] \end{cases}$				
Pregunta c	$w_k \to \infty$ al agregar más circunferencias, y los radios son menores, por lo que, las contribuciones A_k son cada vez menores.	Que de acuerdo a las condiciones obtenidas y la formula describen la trayectoria que forma el planeta conforme se agregan mas circunferencias.	Según las características del radio y de la velocidad angular, la formula anterior debería converger a una función definida.	Las condiciones de que los radios decrezcan y las velocidades angulares aumenten asegura la convergencia de las expresiones obtenidas a una función, misma que modela la forma final de la trayectoria. Se observa que los coeficientes a_k y b_k representan las condiciones iniciales del sistema cuando se tienen n circunferencias.	Las condiciones de la respuesta en a) dan una descripción de la fórmula en b), por ejemplo, al disminuir los radios, las coordenadas se desplazan cada vez en una valor más pequeño.
Pregunta e	a_k, b_k también tienden a cero kw_0 también tiende a infinito	La formula describe una serie de Fourier la cual se aproxima a una función periódica, que dependera de nuestras condiciones para aproximarse a la forma de la trayectoria.	Es una nueva forma de expresar la fórmula de b). Permite ver más fácilmente la condición de convergencia ya que a_k, b_k tienden a 0.	Observamos que la expresión obtenida tiene la forma de una serie de Fourier, confirmando que nos estamos aproximando a una función capaz de describir la trayectoria del planeta conforme se agregan más circunferencias, por otra parte, en la expresión obtenida siguen siendo necesarias las condiciones presentadas en a) para poder asegurar la convergencia de la serie.	La ecuación anterior describe la convergencia y forma definida de la trayectoria al disminuir los radios de las circunferencias que se agregan cada vez más, tal como se trata en el inciso c)
Intencionalidad	Se busca que se interprete el modelo matemático en el fenómeno físico.				
Pregunta d	$a_0 = 2A_0$ $a_k = A_k \operatorname{Sen}(\theta_k)$ $b_k = A_k \operatorname{Cos}(\theta_k)$ $\omega_k = k\omega_0$	$\operatorname{sen}(\theta_k + w_k t) = \operatorname{sen}\theta_k \cos w_k t + \operatorname{sen} w_k t \cos\theta_k$ · Así $a_0 = 2A_0$ $a_k = A_k \operatorname{sen}\theta_k \Rightarrow \quad A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \operatorname{sen}\theta_k \cos w_k t + A_k \cos\theta_k \operatorname{sen} w_k t$ $b_k = A_k \cos\theta_k$ $\omega_k = k w_0$ donde a_k es la componente en "y" y b_k la componente en "x"	$a_0 = 2A_0, \omega_k = k\omega_0, a_k = A_k \operatorname{sen}(\theta_k), b_k = A_k \cos(\theta_k)$ $Y_n = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \operatorname{sen}(\theta_k + \omega_k t)$ $\operatorname{sen}(\theta_k + \omega_k t) = \operatorname{sen}(\theta_k)\cos(\omega_k t) + \cos(\theta_k)\operatorname{sen}(\omega_k t)$ $Y_n = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \operatorname{sen}(\theta_k)\cos(\omega_k t) + A_k\cos(\theta_k)\operatorname{sen}(\omega_k t)$ $A_0 = \frac{a_0}{2} \quad A_k\operatorname{sen}(\theta_k) = a_k \quad A_k\cos(\theta_k) = b_k$ $Y_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos(\omega_k t) + b_k\operatorname{sen}(\omega_k t)$ Si es como la vez pasada $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = 1\omega_0, \ldots, \omega_k = k\omega_0$. $Y_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos(k\omega_0 t) + b_k\operatorname{sen}(k\omega_0 t)$	Claramente $\boxed{a_0 = 2A_0}$. Por identidades trigonométricas $\operatorname{Sen}(\theta_k + \omega_k t) = \operatorname{Sen}(\theta_k)\operatorname{Cos}(\omega_k t) + \operatorname{Sen}(\omega_k t)\operatorname{Cos}(\theta_k)$ Luego $\sum_{k=1}^{n} A_k \operatorname{Sen}(\theta_k + \omega_k t) = \sum_{k=1}^{n} A_k\left(\operatorname{Sen}(\theta_k)\operatorname{Cos}(\omega_k t) + \operatorname{Sen}(\omega_k t)\operatorname{Cos}(\theta_k)\right) = \ldots$ $\ldots = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{A_k \operatorname{Sen}\theta_k}_{a_k} \operatorname{Cos}(\omega_k t) + \underbrace{A_k \operatorname{Cos}\theta_k}_{b_k} \operatorname{Sen}(\omega_k t)$ $\Rightarrow \underline{a_k = A_k \operatorname{Sen}\theta_k}$ Si $\underline{\omega_k = k\omega_0}$ $\underline{b_k = A_k \operatorname{Cos}\theta_k}$	Desarrollando al seno de la suma de dos ángulos, se obtiene que $a_0 = 2A_0$ $a_k = A_k \operatorname{Sen}(\theta_k)$ $b_k = A_k \operatorname{Cos}(\theta_k)$ $\omega_k = k\omega_0$ $\frac{a_0}{2} = A_0 \Rightarrow a_0 = 2A_0.$ $a_n \quad \operatorname{Sen}(w_n t + \theta_n) = \operatorname{Sen}(w_n t)\operatorname{Cos}\theta_n + \operatorname{Sen}\theta_n \operatorname{Cos}(w_n t).$ $y_n = A_0 + \sum \underbrace{A_n \operatorname{Cos}\theta_n}_{b_n} \operatorname{Sen}(w_n t) + \sum \underbrace{A_n \operatorname{Sen}(\theta_n)}_{a_n} \operatorname{Cos} w_n t.$ $w_n = k w_0$

Parte I.	**Generando el modelo**
Intención:	Se pretende con esta generalización que el estudiante identifique las condiciones para que el modelo sea estable.

Estudiante	**M2**	**M3**	**H1**	**H3**	**H4**
	$Y_n = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \operatorname{Sen}(\theta_k + \omega_k t)$ $Y_n = \frac{2A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} A_k \left[\operatorname{Sen}(\theta_k)\operatorname{Cos}(\omega_k t) + \operatorname{Sen}(\omega_k t)\operatorname{Cos}(\theta_k)\right]$ $Y_n = \frac{2A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[A_k \operatorname{Sen}(\theta_k)\operatorname{Cos}(\omega_k t) + A_k \operatorname{Cos}(\theta_k)\operatorname{Sen}(\omega_k t)\right]$ $k\omega_0 t = \omega_k t$ $\boxed{k\omega_0 = \omega_k}$ $Y_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[a_k \operatorname{Cos}(k\omega_0 t) + b_k \operatorname{Sen}(k\omega_0 t)\right]$				
Intencionalidad	Se establezcan las condiciones para que el modelo sea equivalente con la serie trigonométrica de Fourier.				

Parte II.	**Otra forma de interpretar w_0**
Intención:	Encontrar condiciones para que el modelo sea equivalente a la STF.

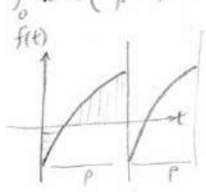
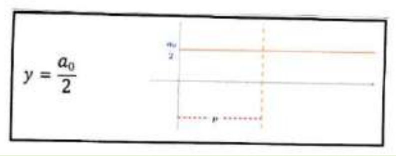
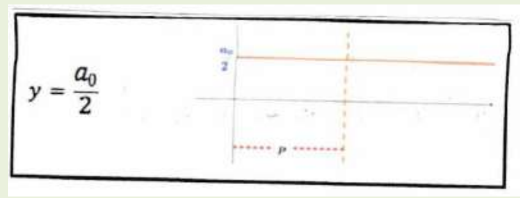
Estudiante	**M2**	**M3**	**H1**	**H3**	**H4**
Pregunta a	$t = \frac{d}{v} = \frac{2\pi}{\omega_0}$	$v = \frac{d}{t} \Rightarrow t = \frac{d}{v} = \frac{2\pi A_1}{A_1\omega_0}$ $t = \frac{2\pi}{\omega_0}$	$t = \frac{distancia}{velocidad} = \frac{2\pi}{\omega_0}$	En efecto, $v = \frac{x}{t}$, pero $v = A_1\omega_0$ y $x = \pi A_1 \Rightarrow$ $A_1\omega_0 = \frac{2\pi A_1}{t} \Rightarrow t = \frac{2\pi}{\omega_0}$	$t = \frac{2\pi}{\omega_0}$ $\omega_0 = \frac{2\pi}{t} \Rightarrow t = \frac{2\pi}{\omega_0}$
Pregunta b	$\omega_0 = \frac{2\pi}{p}$	$p = \frac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{p}$	$\omega_0 = \frac{2\pi}{p}$	$\omega_0 = \frac{2\pi}{p}$	$\omega_0 = \frac{2\pi}{p}$
Pregunta c	$y_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left[a_k \operatorname{Cos}\left(k\frac{2\pi}{p}t\right) + b_k \operatorname{Sen}\left(k\frac{2\pi}{p}t\right)\right]$	$Y_n = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \operatorname{sen}\theta_k \cos\left(\frac{k\pi}{p}t\right) + A_k \cos\theta_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{p}t\right)$	$y_n = \frac{a_0}{2} + \sum a_k \cos\left(k\frac{2\pi}{p}t\right) + b_k \operatorname{Sen}\left(k\frac{2\pi}{p}t\right)$	$Y_n = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \operatorname{Sen}(\Theta_k)\operatorname{Cos}\left(k\frac{2\pi}{p}t\right) + A_k \operatorname{Cos}(\Theta_k)\operatorname{Sen}\left(k\frac{2\pi}{p}t\right)$	$y_n = A_0 + \sum\left[A_k \operatorname{Sen}(\theta_k)\operatorname{Cos}\left(k\frac{2\pi}{p}t\right) + A_k \operatorname{Cos}(\theta_k)\operatorname{Sen}\left(k\frac{2\pi}{p}t\right)\right]$
Pregunta d	Constante para todo t y k. P es el periodo de la trayectoria, determina cuántas vueltas darán los puntos de las siguientes circunferencias.	Como el periodo temporal de la grafica de la funcion limite ya que cada que pasa p, el planeta P da una vuelta completa a la Tierra.	Constante porque el que cuenta es el periodo de la primera circunferencia. Ya que los demás dan cierta cantidad de vueltas por cada vuelta de la primera circunferencia. $P_1 = \frac{2\pi A_1}{\omega_0}$ $P_k = \frac{2\pi A_k}{k\omega_0} \xrightarrow[A_k \to 0]{k\to\infty} 0$ Periódo del K-ésimo ciclo. $tiempo = \sum_{k=1}^{n} P_k$ No es cierto.	Como el periodo temporal de la gráfica de la función límite, esto, pues cada que transcurre el tiempo p el planeta completa una vuelta, lo que se ve reflejado en el periodo temporal del resto de las circunferencias.	Como el periodo de la función
Intencionalidad	Se pretende que el estudiante reconozca a p como el periodo de la función límite cuando se considera la variable t un número real. Esto es importante para la Tarea #6, pues se espera que el estudiante realice su estudio en un intervalo de tamaño p, el cual es representativo del comportamiento general de la serie.				

9.6.6 Tarea #6

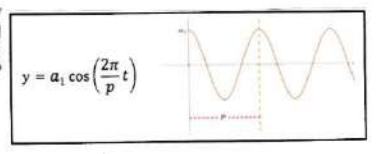
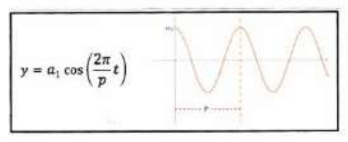
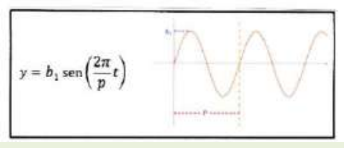
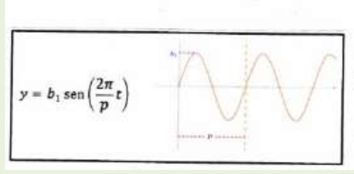
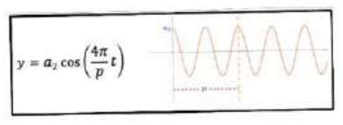
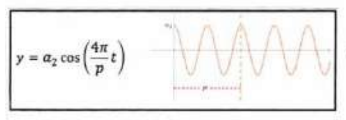
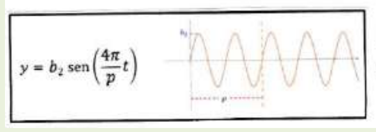
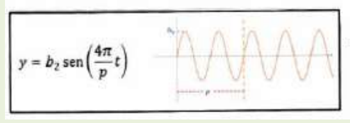
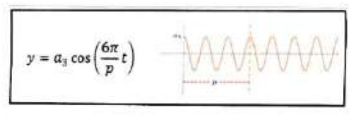
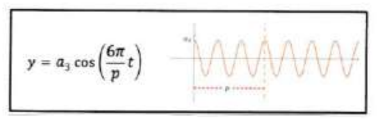
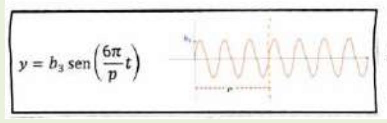
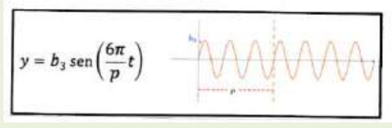
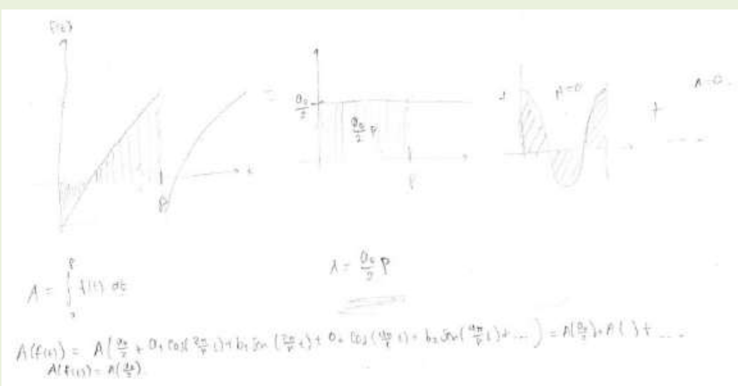
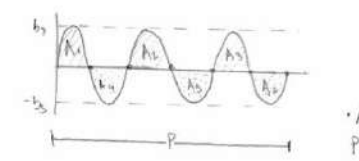
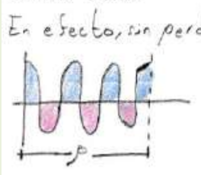
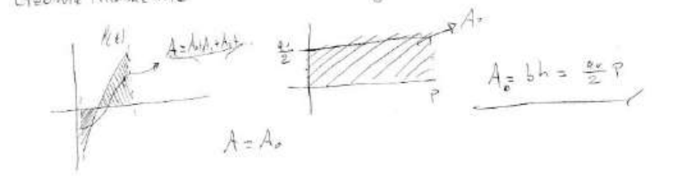
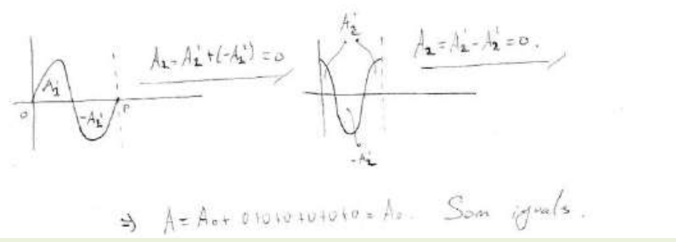
TAREA #6

Objetivo de la Tarea:	Significar el cálculo de los coeficientes de Fourier utilizando argumentaciones gráficas y geométricas, tal y como lo hizo Fourier.

Parte I.	**El cálculo de a_0**
Intención:	Significar el cálculo del coeficiente de Fourier a_0, a partir de la articulación de los registros geométrico-analítico y algebraico, para validar el segundo en el primero.

Estudiante	**M2**	**M3**	**H1**	**H3**	**H4**
Pregunta a	El valor de cada área sombreada es la misma	Que ambas regiones en el intervalo de p, sus áreas son 0. Ya que tienen simetria.	Todas las regiones sombreadas tienen la misma área.	Representan áreas bajo la curva semejantes, para saber en que medida se relacionan es necesario conocer la relación entre a_1 y b_1. Para cada una, es claro de la gráfica que el valor de las áreas es igual.	En cada región se representa un cuarto del periodo. El área bajo la curva de cada una es un cuarto del áreabajo la corva de toda la sección.
Pregunta b	Caso general: $y = c \operatorname{Cos}\left(\frac{m\pi}{p}t\right)$ $m \in \mathbb{N}$ $A = \int_0^p y(t)\,dt = \int_0^p c \operatorname{Cos}\left(\frac{m\pi}{p}t\right)dt = \frac{cp}{m\pi}\operatorname{Sen}\left(\frac{m\pi}{p}t\right)\Big\|_0^p = \frac{cp}{m\pi}\left[\operatorname{Sen}(m\pi) - \operatorname{Sen}(0)\right]$ $y = b \operatorname{Sen}\left(\frac{s\pi}{p}t\right)$ $s \in \mathbb{N}$ $A = \int_0^p y(t)\,dt = b\int_0^p \operatorname{Sen}\left(\frac{s\pi}{p}t\right)dt = -\frac{bp}{s\pi}\operatorname{Cos}\left(\frac{s\pi}{p}t\right)\Big\|_0^p = \frac{bp}{s\pi}\left[\operatorname{Cos}(0) - \operatorname{Cos}(s\pi)\right]$ $A = \frac{bp}{s\pi}\left[1 - (-1)^s\right] = \begin{cases} 0 & \text{si } s \text{ es par} \\ \frac{2bp}{s\pi} & \text{si } s \text{ es impar}\end{cases}$		Hay que hacer varias integrales de la forma $\int_0^p g(t)\,dt$ $\int_0^p \frac{a_0}{2}dt = \frac{a_0}{2}t\Big\|_0^p = \frac{a_0}{2}p$ $\int_0^p a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)dt = a_k \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\Big\|_0^p = a_k \operatorname{sen}(2k\pi) = 0$ $\int_0^p b_k \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)dt = -b_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\Big\|_0^p = -b_k\cos(2k\pi) + b_k\cos(0) = 0$  $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{3} a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + \sum_{k=1}^{3} b_k \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ $\int_0^p f(t)\,dt = \frac{a_0}{2}p + 0 \rightarrow a_0 = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\,dt$		$A_1 = \int_0^p y\,dt = \int_0^p \frac{a_0}{2}dt = \frac{a_0}{2}p$ $A_2 = \int_0^p a_1 \operatorname{Cos}\left(\frac{2\pi}{p}t\right)dt = a_1\frac{p}{2\pi}\operatorname{Sen}\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\Big\|_0^p = a_1\frac{p}{2\pi}(\operatorname{Sen}2\pi - \operatorname{Sen}0) = 0.$ $A_3 = \int_0^p b_1 \operatorname{Sen}\left(\frac{2\pi}{p}t\right)dt = -b_1\frac{p}{2\pi}\operatorname{Cos}\left(\frac{2\pi t}{p}\right)\Big\|_0^p = -b_1\frac{p}{2\pi}(1-1) = 0$ $A_4 = \int_0^p a_2 \operatorname{Cos}\left(\frac{4\pi}{p}t\right)dt = 0$ $A_5 = \int_0^p b_2 \operatorname{Sen}\left(\frac{4\pi}{p}t\right)dt = 0$ $A_6 = \int_0^p a_3 \operatorname{Cos}\left(\frac{6\pi}{p}t\right)dt = 0$ $A_7 = \int_0^p b_3 \operatorname{Sen}\left(\frac{6\pi}{p}t\right)dt = 0$
$y = \frac{a_0}{2}$	$A = \frac{a_0}{2}p$	 Integrando: $\int_0^p y\,dt = \int_0^p \frac{a_0}{2}dx = \frac{pa_0}{2}$	$A = p\frac{a_0}{2}$ En la hoja hice las integrales	 Integrando: $\int_0^p \frac{a_0}{2}dx = \frac{a_0}{2}p$	$A_0 = \frac{a_0}{2}\int_0^p dt = \frac{a_0}{2}p$
$y = a_1\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$	$A = 0$ (argumentación en la hoja)		$A = 0$ En la hoja hice las integrales		$A_1 = a_1\int_0^p \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)dt = 0$

Parte I. **El cálculo de a_0**
Intención: Significar el cálculo del coeficiente de Fourier a_0, a partir de la articulación de los registros geométrico-analítico y algebraico, para validar el segundo en el primero.

Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4
		$\int_0^p y\,dt=\int_0^p a_1\cos(\frac{2\pi}{p}t)=\frac{a_1 p}{2\pi}\operatorname{sen}(\frac{2\pi}{p}t)\Big\vert_0^p$ $=\frac{a_1 p}{2\pi}(\cancel{\operatorname{sen}(2\pi)}-\cancel{\operatorname{sen}(0)})=0$ 		 $\int_0^p a_1\cos(\frac{2\pi}{p}t)\,dt=\frac{p}{2\pi}a_1\operatorname{sen}(\frac{2\pi}{p}t)\Big\vert_0^p=\ldots=0$	
$y = b_1 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$	$A = 0$	 $\int_0^p y\,dt=\int_0^p b_1\operatorname{sen}(\frac{2\pi}{p}t)=-\frac{b_1 p}{2\pi}\cos(\frac{2\pi}{p}t)\Big\vert_0^p$ $=-\frac{b_1 p}{2\pi}(\cos(2\pi)-\cos(0))=0$	$A = 0$	 $\int_0^p b_1\operatorname{sen}(\frac{2\pi}{p}t)\,dt=-\frac{p}{2\pi}b_1\cos(\frac{2\pi}{p}t)\Big\vert_0^p=\ldots=-\frac{p}{2\pi}b_1+\frac{p}{2\pi}b_1=0$	$A_2 = b_1 \int_0^p \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{p}t\right)dt = 0$
$y = a_2 \cos\left(\frac{4\pi}{p}t\right)$	$A = 0$	$\int_0^p a_2\cos(\frac{4\pi}{p}t)=\frac{a_2 p}{4\pi}\operatorname{sen}(\frac{4\pi}{p}t)\Big\vert_0^p$ $=\frac{a_2 p}{4\pi}(\operatorname{sen}(4\pi)-\operatorname{sen}(0))=0$ 	$A = 0$	 $\int_0^p a_2\cos(\frac{4\pi}{p}t)\,dt=\frac{p}{4\pi}a_2\operatorname{sen}(\frac{4\pi}{p}t)\Big\vert_0^p=\ldots=\frac{p}{4\pi}a_2(\operatorname{sen}(4\pi)-0)=0$	$A_3 = a_2 \int_0^p \cos\left(\frac{4\pi}{p}t\right)dt = 0$
$y = b_2 \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{p}t\right)$	$A = 0$	 $\int_0^p b_2\operatorname{sen}(\frac{4\pi}{p}t)=-\frac{b_2 p}{4\pi}\cos(\frac{4\pi}{p}t)\Big\vert_0^p$ $=-\frac{b_2 p}{4\pi}(\cos(4\pi)-\cos(0))=0$	$A = 0$	 $\int_0^p b_2\operatorname{sen}(\frac{4\pi}{p}t)\,dt=-\frac{p}{4\pi}b_2(\cancel{\cos(4\pi)}-\cancel{\cos(4\pi)})$	$A_4 = b_2 \int_0^p \operatorname{Sen}\left(\frac{4\pi}{p}t\right)dt = 0$
$y = a_3 \cos\left(\frac{6\pi}{p}t\right)$	$A = 0$	$\int_0^p a_3\cos(\frac{6\pi}{p}t)=\frac{a_3 p}{6\pi}\operatorname{sen}(\frac{6\pi}{p}t)\Big\vert_0^p$ $=\frac{a_3 p}{6\pi}(\operatorname{sen}(6\pi)-\operatorname{sen}(0))=0$ 	$A = 0$	 $\int_0^p a_3\cos(\frac{6\pi}{p}t)\,dt=\frac{p}{6\pi}a_3(0)=0$	$A_5 = a_3 \int_0^p \cos\left(\frac{6\pi}{p}t\right)dt = 0$
$y = b_3 \operatorname{sen}\left(\frac{6\pi}{p}t\right)$	$A = 0$	 $\int_0^p b_3\operatorname{sen}(\frac{6\pi}{p}t)=-\frac{b_3 p}{6\pi}\cos(\frac{6\pi}{p}t)\Big\vert_0^p$ $=-\frac{b_3 p}{6\pi}(\cos(6\pi)-\cos(0))=0$	$A = 0$	 $\int_0^p b_3\operatorname{Sen}(\frac{6\pi}{p}t)=\frac{p}{6\pi}b_3(0)=0$	$A_6 = b_3 \int_0^p \operatorname{Sen}\left(\frac{6\pi}{p}t\right)dt = 0$
Intencionalidad	Se busca que el estudiante se percate de que el área bajo la curva de los términos de la serie son todos iguales a cero, salvo el del término constante $\frac{a_0}{2}$, que tiene área $\frac{a_0 p}{2}$ en un intervalo de tamaño p.				
Pregunta c	Las áreas son iguales. 	• En efecto el área de $f(t)$ y de $y=\frac{a_0}{2}$ son la misma ya que si notamos el caso donde:  $A_1+A_2+A_3=A_4+A_5+A_6$ $A_1+A_2+A_3+(-A_4-A_5-A_6)=0$ • Así en realidad en el periodo P no tenemos área bajo la curva. • Lo mismo para los otros casos se concluye que su área es cero. • Así la única área que contribuye es la de $y=\frac{a_0}{2}$ puesto que: $\int_0^p f(t)=\int_0^p\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\operatorname{sen}\theta_k+b_k\cos\theta_k\right) \Rightarrow \frac{a_0}{2}p=\int_0^p f(t)dt$ ∴ tienen la misma área	Las áreas son iguales ya que $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{3} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + \sum_{k=1}^{3} b_k \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ Y las áreas de los términos trigonométricos son 0 ya que se anulan por simetría al sumar las áreas superiores y restar las inferiores.	Afirmamos que el área bajo la curva de $y=\frac{a_0}{2}$ es igual a la de la función $f(t)$. En efecto, sin perdida de generalidad, considere $y=a_3\cos(\frac{6\pi}{p}t)$.  El área bajo la curva puesta en color azul tiene el mismo valor que el área sombreada en color rosa. Esto permite observar que el área bajo la curva total de la función Y en el periodo completo p es igual a cero, luego, su aportación al valor del área bajo la curva de la función $f(t)$ es nula así pues, no importa el término de la serie trigonométrica que busquemos para encontrar su área bajo la curva, este siempre será cero. Luego, el único término de la serie que aporta a la búsqueda del área bajo la curva de $f(t)$ es el área bajo $\frac{a_0}{2}$, el cual se obtiene por la fórmula del área de un rectángulo de base p y altura $\frac{a_0}{2}$.	Si $f(t)$ es una serie con los términos de $f(t)$ $f(t)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos(\frac{2\pi}{p}t)+b_1\operatorname{Sen}(\frac{2\pi}{p}t)+\ldots$ y si integramos en un intervalo de longitud p $\int_0^p f(t)=\int_0^p\frac{a_0}{2}dt+0+0+\ldots$ $\Rightarrow \int_0^p f(t)=\frac{a_0}{2}p \Rightarrow a_0=\frac{2}{p}\int_0^p f(t)dt$ Geométricamente tenemos lo siguiente   $\Rightarrow A=A_0$. Son iguales.
Pregunta d	$a_0 = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)dt$	• Se tiene que $\frac{a_0}{2}p=\int_0^p f(t)dt \Rightarrow a_0=\frac{2}{p}\int_0^p f(t)dt$	$a_0 = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)dt$	Se tiene que $\frac{a_0}{2}p=\int_0^p f(t)dt \Rightarrow a_0=\frac{1}{p}2\int_0^p f(t)dt$	$a_0 = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)dt$
Intencionalidad	Se pretende que el estudiante utilice argumentos geométricos y sus conocimientos sobre integral definida para decir que el área bajo la curva de la función $f(t)$ es igual a la suma de las áreas bajo la curva de los términos de la serie. De esta manera el estudiante puede construir la fórmula para el cálculo con un significado asociado a la noción de área bajo la curva.				

Parte II. **El cálculo de a_k**
Intención: Significar el cálculo del coeficiente de Fourier a_k, a partir de la articulación de los registros geométrico-analítico y algebraico, para validar el segundo en el primero.

Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4
Pregunta a	Las áreas sombreadas son iguales. El área bajo la curva de la función $y = a_1\operatorname{Cos}^2\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ es $A = \frac{a_1}{2}p$ $y(t)=a_1\cos^2(\frac{2\pi}{p}t)=\frac{a_1}{2}\left[1+\cos(\frac{4\pi}{p}t)\right]$ $A(y(t))=\frac{a_1}{2}\int_0^p\left[1+\cos(\frac{4\pi}{p}t)\right]dt$ $=\frac{a_1}{2}\int_0^p dt+\frac{a_1}{2}\int_0^p\cos(\frac{4\pi}{p}t)\,dt$ $=\frac{a_1}{2}t\Big\vert_0^p+\frac{a_1}{2}\cdot\frac{p}{4\pi}\operatorname{Sen}(\frac{4\pi}{p}t)\Big\vert_0^p$ $=\frac{a_1}{2}p$	El area es la misma. El valor de la integral esta en la tarea 6, parte 2, hoja 11. $\int_0^p a_1\cos^2(\frac{2\pi}{p}t)\,dt=\int_0^p a_1\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos(\frac{4\pi}{p}t)}{2}\right)dt=a_1\left[\frac{t}{2}+\frac{p}{8\pi}\operatorname{sen}(\frac{4\pi}{p}t)\right]_0^p$ $=a_1\left[\frac{p}{2}\right]=\frac{a_1 p}{2}$	Son iguales las área por simetría. $A = \frac{a_1 p}{2}$ $\cos(2x)=\cos(x)\cos(x)-\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(x)=\cos^2(x)-\operatorname{sen}^2(x)$ $\cos^2(x)=\operatorname{sen}^2(x)+\cos(2x)=1-\cos^2(x)+\cos(2x) \rightarrow 2\cos^2(x)=1+\cos(2x)$ $\cos^2(x)=\frac{1+\cos(2x)}{2}$ $\quad a_1\int_0^p\cos^2(\frac{2\pi}{p}t)\,dt=a_1\int_0^p\frac{1+\cos(\frac{4\pi}{p}t)}{2}dt$ $=\frac{a_1}{2}\left(\int_0^p dt+\int_0^p\cos(\frac{4\pi}{p}t)dt\right)$ $=\frac{a_1}{2}\left(p+\frac{p}{4\pi}\operatorname{sen}(\frac{4\pi}{p}t)\Big\vert_0^p\right)=\frac{a_1 p}{2}$.	Tienen el mismo valor. $\int_0^p a_1\operatorname{Cos}^2(\frac{2\pi t}{p})\,dt=a_1\left(\int_0^p\frac{1}{2}dt+\frac{1}{2}\int_0^p\operatorname{Cos}(\frac{4\pi t}{p})\right)=a_1\frac{p}{2}+\cancel{\frac{1}{2}(0)}$	La suma de las áreas del doble ashurado es la misma que la suma de las áreas del ashurado simple. $\operatorname{Cos}^2(\frac{2\pi}{p}t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{Cos}(\frac{4\pi}{p}t)$. $\Rightarrow a_1\int_0^p\operatorname{Cos}^2(\frac{2\pi}{p}t)dt=a_1\int_0^p\frac{1}{2}dt+\frac{a_1}{2}\int_0^p\operatorname{Cos}(\frac{4\pi}{p}t)\,dt$ $=\frac{a_1 p}{2}$.
Pregunta b	Por simetría, el área bajo la curva en cada caso es cero.		En cada caso el área es 0.		

Parte II.	**El cálculo de $\boldsymbol{a_k}$**
Intención:	Significar el cálculo del coeficiente de Fourier $\boldsymbol{a_k}$, a partir de la articulación de los registros geométrico-analítico y algebraico, para validar el segundo en el primero.

Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4
		$\int_0^p a_1\cos(\frac{2\pi}{p}t)\,sen(\frac{2\pi}{p}t)dt = a_1\left[\frac{p}{2\pi}sen^2(\frac{2\pi}{p}t)\Big\|_0^p - \int_0^p sen(\frac{2\pi}{p}t)\cos(\frac{2\pi}{p}t)dt\right]$ $dv=\cos(\frac{2\pi}{p}t)dt$ $v=\frac{p}{2\pi}sen(\frac{2\pi}{p}t)$ $u=sen(\frac{2\pi}{p}t)$ $du=\frac{2\pi}{p}\cos(\frac{2\pi}{p}t)dt$ $=-a_1\int_0^p sen(\frac{2\pi}{p}t)\cos(\frac{2\pi}{p}t)dt=0$ $\int_0^p a_1\cos(\frac{2\pi}{p}t)\cos(\frac{4\pi}{p}t)dt = a_1\left[\frac{p}{4\pi}\cos(\frac{2\pi}{p}t)sen(\frac{4\pi}{p}t)\Big\|_0^p + \frac{1}{2}\int sen(\frac{2\pi}{p}t)sen(\frac{4\pi}{p}t)dt\right]$ $u=\cos(\frac{2\pi}{p}t)$ $du=-\frac{2\pi}{p}sen(\frac{2\pi}{p}t)dt$ $dv=\cos(\frac{4\pi}{p}t)dt$ $v=\frac{p}{4\pi}sen(\frac{4\pi}{p}t)$ $=\frac{a_1}{2}\int_0^p sen(\frac{2\pi}{p}t)sen(\frac{4\pi}{p}t)dt$ $u'=sen(\frac{2\pi}{p}t)$ $du'=\frac{2\pi}{p}\cos(\frac{2\pi}{p}t)$ $dv'=sen(\frac{4\pi}{p}t)$ $v'=\frac{-p}{4\pi}\cos(\frac{4\pi}{p}t)$ $=\frac{a_1}{2}\left[\frac{-p}{4\pi}\cos(\frac{4\pi}{p}t)sen(\frac{2\pi}{p}t)\Big\|_0^p + \frac{1}{2}\int_0^p\cos(\frac{2\pi}{p}t)\cos(\frac{4\pi}{p}t)\right]$ $=0$	$2sen(\frac{2\pi}{p}t)\cos(\frac{2\pi}{p}t)=sen(\frac{4\pi}{p}t) \to \int_0^p\cos(\frac{2\pi}{p}t)sen(\frac{2\pi}{p}t)dt=\frac{1}{2}\int_0^p sen(\frac{4\pi}{p}t)dt$ $=-\frac{1}{2}\frac{p}{4\pi}\cos(\frac{4\pi}{p}t)\Big\|_0^p=\frac{-p}{8\pi}(0)=0$ $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-sen(a)sen(b)$ $\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+sen(a)sen(b)$ $\cos(a+b)+\cos(a-b)=2\cos(a)\cos(b) \to \int_0^p\cos(\frac{4\pi}{p}t)\cos(\frac{2\pi}{p}t)dt=$ $=\frac{1}{2}\int_0^p\cos(\frac{6\pi}{p}t)+\cos(\frac{2\pi}{p}t)dt=\frac{1}{2}\left(\frac{p}{6\pi}sen(\frac{6\pi}{p}t)\Big\|_0^p+\frac{p}{2\pi}sen(\frac{2\pi}{p}t)\Big\|_0^p\right)$ $=0$	$\int_0^p a_1\cos(\omega t)\,Sen(\omega t)\,dt=\frac{1}{\omega}\cos(\omega t)Sen(\omega t)\Big\|_0^p-\int_0^p\frac{1}{\omega}\omega\cos(\omega t)dt=\ldots$ Sea $\omega=\frac{2\pi}{p}$ $u=\cos(\omega t)$ $dv=Sen(\omega t)dt$ $du=\omega\cos(\omega t)dt$ $v=\frac{1}{\omega}Sen(\omega t)$ $\ldots=0-0=0$ Lo cual se puede concluir también por un argumento geométrico De la misma forma el área bajo la curva de $Y=a_1\cos(\frac{2\pi}{p}t)\cos(\frac{4\pi}{p}t)$ es cero, de la gráfica.	$I_1=\int_0^p a_1\cos(\frac{2\pi}{p}t)Sem(\frac{2\pi}{p}t)dt=a_1\int u\,du$, con $u=Sem(\frac{2\pi}{p}t)$, $du=\cos(\frac{2\pi}{p}t)$ $\Rightarrow I_1=\frac{a_1}{2}u^2\Big\|_0^p=\frac{a_1}{2}Sem^2(\frac{2\pi}{p}t)\Big\|_0^p=0.$ $\cancel{I_2=a_1\int_0^p\cos(\frac{2\pi}{p}t)\cos(\frac{4\pi}{p}t)dt=a_1\left[\frac{p}{4\pi}Sem(a)\cos(a)\Big\|_0^p\right]}$ $I_2=a_1\int_0^p\left(\frac{e^{\frac{i2\pi t}{p}}+e^{-\frac{i2\pi t}{p}}}{2}\right)\left(\frac{e^{\frac{i4\pi t}{p}}+e^{-\frac{i4\pi t}{p}}}{2}\right)dt=\frac{a_1}{4}\int_0^p\left(e^{\frac{i6\pi t}{p}}+2e^{\frac{2\pi i t}{p}}+e^{-\frac{i6\pi t}{p}}\right)dt$ $=\frac{a_1}{4}\left[\frac{p}{i6\pi}e^{\frac{i6\pi t}{p}}\Big\|_0^p+\frac{2p}{2\pi i}e^{\frac{2\pi i t}{p}}\Big\|_0^p-\frac{p}{i6\pi}e^{-\frac{i6\pi t}{p}}\Big\|_0^p\right]$ $\Rightarrow I_2=\frac{a_1}{4}\left[\frac{p}{3\pi}\left(\frac{e^{\frac{6i\pi t}{p}}-e^{-\frac{6i\pi t}{p}}}{2i}\right)\Big\|_0^p+\frac{p}{\pi i}\left(e^{2\pi i}-1\right)\right]$ $=\frac{a_1}{4}\left[\frac{p}{3\pi}Sem(\frac{6\pi t}{p})\Big\|_0^p+\frac{p}{\pi i}\left(e^{2\pi i}-1\right)\right].$ Como $e^{2\pi i}=1$ y $Sem(m\pi)=0$ $\forall m\in\mathbb{Z}$ $\Rightarrow I_2=0.$
Pregunta c	Según la applet, y la función $y=a_1\operatorname{Cos}\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\operatorname{Cos}\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)$, el área bajo la curva es $A=a_1\frac{p}{2}$ para el caso k=1, luego, para k>1, el área es cero. Mientras que para la función $y=a_1\operatorname{Cos}\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\operatorname{Sen}\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)$ el área bajo la curva es cero para todo k.	• Para $y=a_1\cos(\frac{2\pi}{p}t)\cos(\frac{2k\pi}{p}t)$ donde k=1 su área bajo la curva es de 2.31 pero para k≥2 su área bajo la curva es 0 • Para $y=a_1\cos(\frac{2\pi}{p}t)sen(\frac{2k\pi}{p}t)$ ∀k=1,2,3,... su área bajo la curva es 0.	k — cos cos — cos sen 1 — $\frac{a_1p}{2}$ — 0 2 — 0 — 0 3 — 0 — 0	En todos los casos valen cero, excepto por el área bajo la curva de $y=a_1\cos^2\left(\frac{2\pi}{p}\right)$, este razonamiento incluye literalmente a todos los demás términos.	De acuerdo al Applet, para $k\neq 1$ en los términos del Cose, todas las áreas son cero. Para la g´rafica de Seno y Coseno, las áreas son cero $\forall k\in\mathbb{Z}$
Pregunta d	Las áreas son iguales $\int_0^p f(t)\cos(\frac{2\pi}{p}t)dt=\int_0^p\frac{a_0}{2}\cos(\frac{2\pi}{p}t)dt+\int_0^p a_1\cos(\frac{2\pi}{p}t)\cos(\frac{2\pi}{p}t)dt+\int_0^p b_1Sen(\frac{2\pi}{p}t)\cos(\frac{2\pi}{p}t)dt+\ldots$ $\int_0^p f(t)\cos(\frac{2\pi}{p}t)=a_1\int_0^p\cos^2(\frac{2\pi}{p}t)dt=\frac{a_1p}{2}$	$\int_0^p f(t)\cos(\frac{2\pi}{p}t)dt=\int_0^p\frac{a_0}{2}\cos(\frac{2\pi}{p}t)dt+\int_0^p a_1\cos^2(\frac{2\pi}{p}t)+\int_0^p b_1sen(\frac{2\pi}{p}t)\cos(\frac{2\pi}{p}t)$ $+\ldots+\int_0^p a_k\cos(\frac{2k\pi}{p}t)\cos(\frac{2\pi}{p}t)+\int_0^p b_ksen(\frac{2k\pi}{p}t)\cos(\frac{2\pi}{p}t)$ $\therefore\int_0^p f(t)\cos(\frac{2\pi}{p}t)dt=\int_0^p a_1\cos^2(\frac{2\pi}{p}t)=\frac{a_1p}{2}$	Las áreas son iguales. Ya que los demás términos de la expansión trigonométrica se anulan.	$f(t)\cos(\frac{2\pi}{p}t)=\frac{a_0}{2}\cos(\frac{2\pi}{p}t)+a_1\cos^2(\frac{2\pi}{p}t)+\ldots+a_k\cos(\frac{2\pi k}{p}t)\cos(\frac{2\pi}{p}t)$ $+b_1Sen(\frac{2\pi}{p}t)\cos(\frac{2\pi}{p}t)+\ldots+b_kSen(\frac{2\pi k}{p}t)\cos(\frac{2\pi}{p}t)$ • Integrando en ambos lados de la igualdad anterior y por los argumentos mostrados en a), b), c): $\int_0^p f(t)\cos(\frac{2\pi}{p}t)dt=\int_0^p a_1\cos^2(\frac{2\pi}{p}t)dt=a_1\frac{p}{2}$	$\int_0^p f(t)\cos(\frac{2\pi}{p}t)dt=\frac{a_0}{2}\int_0^p\cos(\frac{2\pi}{p}t)+a_1\int_0^p\cos^2(\frac{2\pi}{p}t)dt+b_1\int_0^p Sen(\frac{2\pi t}{p})\cos(\frac{2\pi t}{p})dt$ $+\ldots+a_k\int_0^p\cos(\frac{2\pi}{p}t)\cos(\frac{2k\pi}{p}t)+b_k\int_0^p Sen(\frac{2k\pi}{p}t)\cos(\frac{2\pi}{p}t)dt$ $=a_1\int_0^p\cos^2(\frac{2\pi}{p}t)dt=\frac{a_1p}{2}$ Las áreas son iguales $\Rightarrow a_1=\frac{2}{p}\int_0^p f(t)\cos(\frac{2\pi}{p}t)dt$
Pregunta e	$a_1=\frac{2}{p}\int_0^p f(t)\operatorname{Cos}\left(\frac{2\pi}{p}t\right)dt$	$\int_0^p f(t)\cos(\frac{2\pi}{p}t)=\frac{a_1p}{2}\Rightarrow a_1=\frac{2}{p}\int_0^p f(t)\cos(\frac{2\pi}{p}t)$	$a_1=\frac{2}{p}\int_0^p f(t)\operatorname{Cos}\left(\frac{2\pi}{p}t\right)dt$	$a_1=\frac{2}{p}\int_0^p f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)dt$	$a_1=\frac{2}{p}\int_0^p f(t)\operatorname{Cos}\left(\frac{2\pi}{p}t\right)dt$
Intencionalidad	Se espera que el estudiante signifique geométricamente la ortogonalidad de las funciones trigonométricas y que utilice este hecho para calcular el valor de $\boldsymbol{a_1}$ pues, será capaz de identificar que la multiplicación de cos$\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ por cualquier otro término de la serie —excepto el término $\boldsymbol{a_1}\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$— tendrá área bajo la curva igual a cero, y a partir de ellos que el valor de $\frac{a_1p}{2}$ corresponde al área bajo la curva que resulta de multiplicar la función $f(t)$ por cos$\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$. Lo que permite determinar el valor de $\boldsymbol{a_1}$ en términos de $f(t)$, la función conocida.				
Pregunta f	Para la función $y=a_k\operatorname{Cos}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\operatorname{Cos}\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$, según la applet, el área bajo la curva es $A=a_k\frac{p}{2}$ cuando k=m, y cero en cualquier otro caso. Para la función $y=a_k\operatorname{Cos}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\operatorname{Sen}\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$, el área bajo la curva es cero en cualquier caso.	En la primera expresión de "y" si k=m el valor del área bajo la curva es a_k2.1, mientras que en la segunda expresión de "y" si k=m el valor del área bajo la curva es 0. Ahora bien para la primera expresión de "y" si k y m son distintos el valor del área bajo la curva es 0, mientras que en la segunda expresión de "y" si k y m son distintos el área bajo la curva es 0.	En y cos cos el área es $\frac{a_kp}{2}$ si m=k y 0 si m diferente de k. En y sen cos el área siempre es 0 para todo m y k.	La función que contiene el seno por el coseno siempre tiene un área de bajo de ella igual a cero en un periodo. La función coseno por coseno tiene un área bajo la curva igual a cero si $m\neq n$, Solo cuando $m=n$ el área bajo la curva tiene un valor distinto de cero, más aun, para cualquier $k\in\mathbb{N}$ el área bajo la curva queda dada por $a_k\frac{p}{2}$	Cuando $k=m\ \forall k,m\in\mathbb{Z}$, el área es $A=\frac{a_kp}{2}$, en el caso contrario $k\neq m$, $A=0$, siendo A el área bajo las curvas
Pregunta g	$a_k=\frac{2}{p}\int_0^p f(t)\operatorname{Cos}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)dt$	$\int_0^p f(t)\cos(\frac{2k\pi}{p}t)dt=\frac{a_kp}{2}\Rightarrow a_k=\frac{2}{p}\int_0^p f(t)\cos(\frac{2k\pi}{p}t)dt$	$a_k=\frac{2}{p}\int_0^p f(t)\operatorname{Cos}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)dt$ $f(t)\cos(\frac{2\pi}{p}t)=\frac{a_0}{2}\cos(\frac{2\pi}{p}t)+b_1sen(\frac{2\pi}{p}t)\cos(\frac{2\pi}{p}t)+a_1\cos^2(\frac{2\pi}{p}t)$ $+a_k\cos(\frac{2k\pi}{p}t)\cos(\frac{2\pi}{p}t)+b_ksen(\frac{2k\pi}{p}t)\cos(\frac{2\pi}{p}t)$ $\int_0^p f(t)\cos(\frac{2\pi}{p}t)dt=\int_0^p a_1\cos^2(\frac{2\pi}{p}t)dt=\frac{a_1p}{2}\to a_1=\frac{2}{p}\int_0^p f(t)\cos(\frac{2\pi}{p}t)dt$ $\int_0^p f(t)\cos(\frac{2k\pi}{p}t)dt=\int_0^p a_k\cos^2(\frac{2k\pi}{p}t)dt=\frac{a_kp}{2}$ $\to a_k=\frac{2}{p}\int_0^p f(t)\cos(\frac{2k\pi}{p}t)$	$a_k=\frac{2}{p}\int_0^p f(t)\cos\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)dt$	$a_k=\frac{2}{p}\int_0^p f(t)\operatorname{Cos}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)dt$
Pregunta h	Si tomamos k=0 se llega a la fórmula propuesta anteriormente.	Se puede decir que la formula de a_k es la generalidad y la formula de a_0 es una particularidad.	Es más general la última que la primera.	El caso de $\boldsymbol{a_0}$, se observa que es un caso específico de la expresión encontrada en el inciso anterior cuando $k=0$.	Esta necesita que se le multplique el término Cos$\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$.
Intencionalidad	Las preguntas de esta parte tienen la misma intención que las propuestas para el cálculo de $\boldsymbol{a_1}$, la idea es que utilicen argumentos similares para concluir que el valor de $\boldsymbol{a_k}$ está dado por la fórmula: $\frac{2}{p}\int_0^p f(t)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)dt$, cuyo significado esté asociado al área bajo la curva.				

Parte III.	**El cálculo de $\boldsymbol{b_k}$**
Intención:	Significar el cálculo del coeficiente de Fourier $\boldsymbol{b_k}$, a partir de la articulación de los registros geométrico-analítico y algebraico, para validar el segundo en el primero.

Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4
Pregunta a	Para la función $y=b_k\operatorname{Sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\operatorname{Sen}\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$ el área bajo la curva es $A=\frac{p}{2}b_k$ cuando k=m, y cero en otro caso, mientras que para la función $y=b_k\operatorname{Sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\operatorname{Cos}\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$ es cero para cualquier	En la primera expresión de "y" si k=m el valor del área bajo la curva es b_k3.16, mientras que en la segunda expresión de "y" si k=m el valor del área bajo la curva es 0. Ahora bien para la primera expresión de "y" si k y m son distintos el valor del área bajo la curva es 0, mientras que en la segunda expresión de "y" si k y m son distintos el área bajo la curva es 0.	Para y=sen sen el área es $\frac{b_kp}{2}\delta_{km}$. Para y=sen cos el área es o para toda k,m.	En esta ocasión, la función que contiene seno por seno es cero siempre que $m\neq k$ y el área bajo la curva vale $a_k\frac{p}{2}$ cuando $m=n$. El el caso de las funciones que contienen seno por coseno, de nuevo, el valor del área bajo la curva es igual a cero en todos los casos.	Para el caso de $k=m$, $A=\frac{b_kp}{2}$, en el caso en que $k\neq m\forall k,m\epsilon\mathbb{Z}$, A=0, donde A es el área bajo las curvas.
Pregunta b	$b_k=\frac{2}{p}\int_0^p f(t)\operatorname{Sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)dt$ b) $\int_0^p b_kSen^2(\frac{2k\pi}{p}t)dt=\frac{b_k}{2}\int_0^p(1-\cos(\frac{4k\pi}{p}t))dt=\frac{b_k}{2}\int_0^p dt-\frac{b_k}{2}\frac{p}{4k\pi}\int_0^p\ldots$ $A=\frac{b_k}{2}p$	$\int_0^p f(t)sen(\frac{2k\pi}{p}t)dt=\frac{b_kp}{2}\Rightarrow b_k=\frac{2}{p}\int_0^p f(t)sen(\frac{2k\pi}{p}t)dt$	$b_k=\frac{2}{p}\int_0^p f(t)\operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)dt$	$b_k=\frac{2}{p}\int_0^p f(t)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)dt$	$b_k=\frac{2}{p}\int_0^p f(t)\operatorname{Sen}\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)dt$

Parte III. **El cálculo de $\boldsymbol{b_k}$**

Intención: Significar el cálculo del coeficiente de Fourier $\boldsymbol{b_k}$, a partir de la articulación de los registros geométrico-analítico y algebraico, para validar el segundo en el primero.

Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4
Intencionalidad	Se busca que el estudiante utilice estrategias similares a las utilizadas para calcular $\boldsymbol{a_k}$, y de esta manera concluir que $b_k = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\,\text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)dt$.				

9.7 Tablas de análisis de las Tareas #1, #2, #5 y #6

En las páginas siguientes, se presenta el análisis de datos para las Tareas #1, #2, #5 y #6. Donde se analizan las producciones de los estudiantes —sus respuestas a las preguntas de la tarea— como fuente primaria de información. La referencia a las fuentes secundarias se presenta de la siguiente forma:

- Videos grupales: [VG]-1-|00:00:01|- «transcripción textual del video». El primer número indica la tarea correspondiente y lo que está entre barras muestra la hora, minuto y segundo del video en el que inicia lo transcrito. Si lo que se coloca es una descripción de lo ocurrido no se utilizarán las comillas.
- Videos de equipo: [VE1]-1-|00:00:01|- «transcripción textual del video». El primer número indicará el número de equipo, el segundo número indica la tarea correspondiente y lo que está entre barras muestra la hora, minuto y segundo del video en el que inicia lo transcrito. Si lo que se coloca es una descripción de lo ocurrido no se utilizarán las comillas.

Para los diálogos se utiliza la misma nomenclatura para indicar video, tarea y tiempo en que inicia el diálogo e inmediatamente, hacia abajo, la transcripción del diálogo como se muestra a continuación:

[VE1]-1-|00:00:01|
M3: transcripción textual.
P: transcripción textual.
H1: transcripción textual.

Para esto, se utiliza una P como etiqueta para el profesor y las etiquetas asignadas a cada estudiante previo al inicio del curso.

9.7.1 Tarea #1. Etapa 1: Identificación de acciones

TAREA #1

Objetivo de la Tarea: Caracterizar el comportamiento del sistema de forma cualitativa, lo que permitirá una comprensión más profunda del fenómeno y no solo aquello que detectan los sentidos a simple vista.

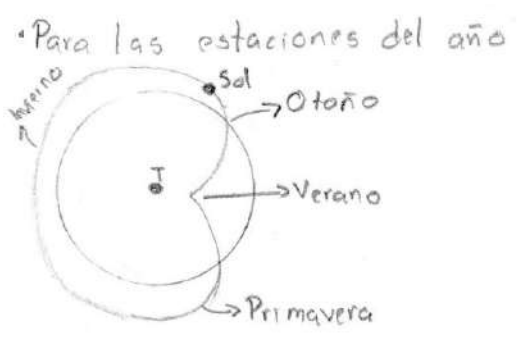
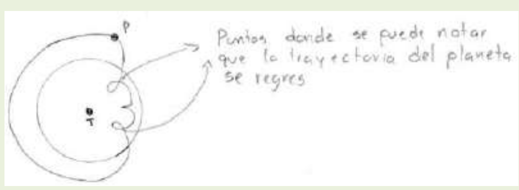
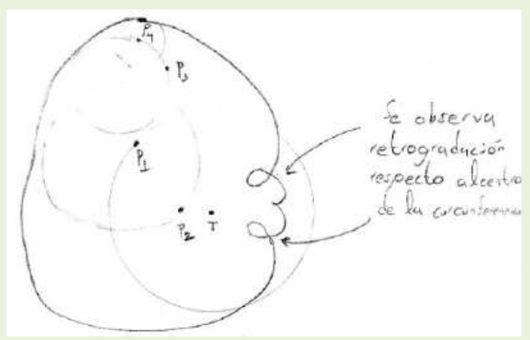
Parte I. **¿Qué permite explicar este modelo?**

Intención: Comprender por qué el modelo de los alejandrinos permite explicar aquello que el modelo griego no permitía.
Se busca propiciar una comprensión profunda del sistema, así como Fourier conocía el comportamiento del fenómeno de propagación del calor a través de la empírea antes de proponer su modelo matemático del fenómeno (Farfán y Romero, 2017).

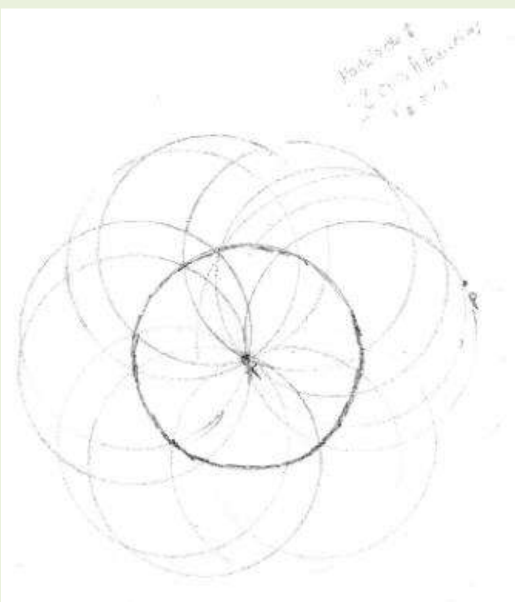
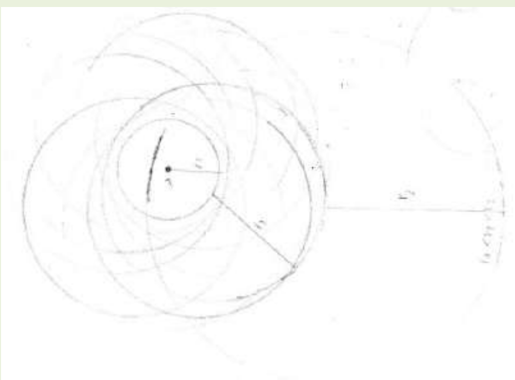
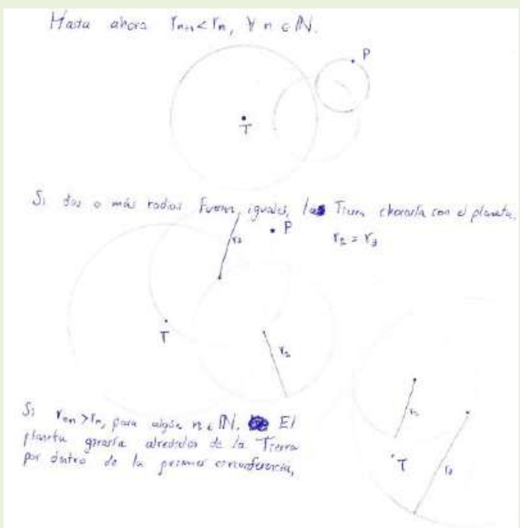
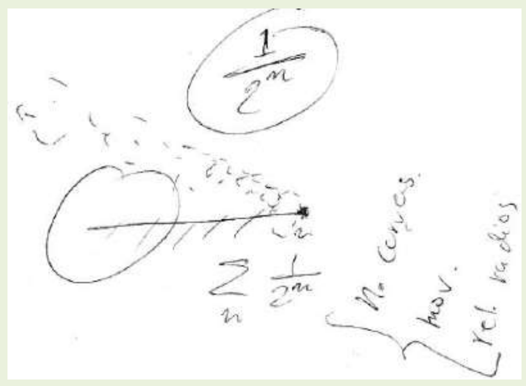
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
Pregunta a	La luminosidad es constante en el modelo con una sola circunferencia, ya que depende solamente de la distancia del planeta respecto a la Tierra, la cual es constante para una circunferencia de radio r; se tiene un problema análogo para la explicación de las estaciones del año. El movimiento de P alrededor de una circunferencia no explica el movimiento de retrogradación debido a que la velocidad es constante y se mueve siguiendo la trayectoria circular.	Las estaciones del año se dan por el movimiento de traslación de la Tierra, al dejar en el modelo geocentrico fija la Tierra pues no veían su comportamiento. Para la luminosidad de los planetas depende de cuanta cantidad de luz les llega del Sol pero al contemplar a la Tierra como el centro y al Sol como planeta por aparte al no estudiar al conjunto con el movimiento de traslación de los planetas no podían explicar la trayectoria de la luz. Ahora bien para el fenómeno de retrogradación el suponer el hecho de que se movían en una trayectoria circular es erróneo pues cada planeta tiene un distinto comportamiento.	Porque el brillo de un objeto aumenta conforme se acerca y disminuye conforme se aleja. Y si un planeta (con brillo constante) está a distancia constante con la Tierra, entonces su brillo sería constante. Porque si el Sol es quien da calor a la Tierra. El calor varía de la misma manera que el brillo. Así que con una órbita constante del Sol no podrían producirse los cambios de temperatura necesarios para producir las estaciones. Porque con una órbita de una circunferencia, los planetas siempre se mueven en un sentido. Por lo que no pueden parar y retroceder.	Debido a que se está suponiendo la Tierra al centro de la circunferencia, el hecho de que cambie la luminosidad de un astro no puede explicarse pues en este caso se tendría al astro a la misma distancia siempre respecto al centro, no teniendo sentido entonces que cambie la intensidad de la luz que se recibe de ahí. El fenómeno de retrogradación no podría explicarse pues el astro siempre se encontraría a la misma distancia del centro de la circunferencia si se moviera en un círculo. Las estaciones del año no tienen sentido si dejamos fija la Tierra como el centro de la circunferencia, pues debe haber un cambio en su posición respecto a otro lugar para explicar dicho fenómeno.	Si suponemos al punto P como el Sol, éste siempre se halla a la misma distancia de la Tierra. Las estaciones del año se dan cuando la tierra está a distintas distancias radiales del Sol. Por lo tanto falla la noción de las estaciones en el modelo con una circunferencia. Hablando de la retrogradación, como se cumplen las leyes de la física, el planeta sigue su propia trayectoria por efecto de inercia, lo cual impide que el planeta regrese sobre su propia trayectoria. Análogamente, al estar la tierra a la misma distancia del Sol, no hay acercamientos del mismo, por lo cual no se aprecia un efecto del aumento de la intensidad luminosa del Sol.	[VE3]-1-|00:15:16| M3: ¿Y las estaciones del año? H3: ¿Qué? (incomprensible, 8) M3: (incomprensible, 3) H3: Ah pues, es que imagínate que tienes una regla, ¿no? Entonces si se mueve, o sea si la dejas en el (incomprensible, 1, ¿puntito aquí?). Tiene sentido si fuera como un planeta y si tienes un planeta a una distancia alrededor de una manera, pero si lo alejas o lo acercas le daría (x)más o menos intenso, ¿no? M3: A parte se supone que en este tiempo estudiaban como uno, ¿no? Por uno. Y aquí también contempl- no contemplaban la cantidad de los kilómetros o (incomprensible, 2) ¿Ay no? ↑¿Si?↑ H3: Si, creo yo que (incomprensible, 4) esta de aquí (incomprensible, 2) como siempre está a la misma distancia no tendría sentido si cambia.	[VG]-1-|00:41:46| H1: Yo podría ((levantando la mano)) con el primero de luminosidad. ¡Eh! Bueno (x)la luminosidad (x)de un objeto varia con el::: con la distancia, o sea si se acerca más recibimos más luz, si se aleja recibimos menos. Y con la órbita de una circunferencia es una distancia constante, es un círculo de radio constante. Así que, si el planeta no cambia su brillo por no cambiar la distancia, tampoco cambiaría el brillo que percibimos. Así que, debería ser una órbita que si cambie la distancia a la Tierra, que se acerque y se aleje para explicar cambios de brillo= P: Para explicar cambios de brillo ¿quién quiere opinar sobre el cambio de luminosidad? H8: Yo ((levantando la mano)) consideré que, si por esas mismas razones se puede explicar con la luminosidad, pero si consideramos planetas entre el Sol y la Tierra que estorbaran o hicieran una especie de sombra. P: ¡Ajá! H8: Para que la iluminación del Sol no llegara 100% a la Tierra, podría haber cambios en la luminosidad. P: ¡Ajá! ¿Cómo con eclipses? H8: ((Asiente con la cabeza)) [VG]-1-|00:44:10| H8: También podría ser como que las órbitas de los planetas se sincronizan cierto tiempo con el sol ((explica el movimiento con sus manos)) y al estar, pos tomando un cierto tiempo, paralelos con la, con la, del sol y podría mantenerse más tiempo el cambio de luminosidad, pero solo considerando un poquito ((se refiere a la duración del evento)). P: ¡Ajá! Yo tengo un comentario, pero me voy a esperar, sobre eso. Porque hoy en día sabemos (x)que es, los planetas lo que hacen es reflejar la luz del Sol, ¿verdad? Sí. ¿Y en la época de los alejandrinos se sabía eso? H4: ¡Eh:::! Prácticamente no, por que como no es un modelo helicocéntrico cada planeta tiene su propio brillo, en el modelo alejandriano. P: ¡Ajá! Entonces eso, como que entonces no es el Sol el culpable de que cambien (x)de brillo ¿verdad? Tiene que ser el mismo planeta al que algo le pasa para que cambie de brillo. [VG]-1-|00:45:28| H1: Bueno, me surgió una idea, una idea, de una forma de::: pensar más, sería más antigua, más eh::: mística. Por ejemplo, decir que los planetas tienen almas o voluntades ¿no? Y que de repente puedan decir hoy quiero brillas más o hoy quiero brillar menos. Y::: igual el Sol, que yo me imagino que los alejandrinos si se imaginaban al Sol como una bola de fuego ¿no? Caliente, que era la que da el calor a la tierra y tal vez el Sol podía tener (x)una voluntad de decir eh tal año voy a calentar más, brillar más. P: De hecho los dioses están asociados a los planetas ¿verdad? Los dioses griegos, [los alejandrinos]. H1: [Justamente por eso]. Si, (x)y eso todavía podía ser explicado con una circunferencia. O sea, eso del brillo y estaciones, o sea con las voluntades de los planetas, pero el problema yo creo que ya es la retrogradación= H4: =Perdón, yo creo que ahí te sales un poquito del marco contextual, porque::: tú lo único que estás analizando (x)son circunferencias. O sea, igual ponte en el en los zapatos de un astrofi- astrónomo alejandrino, o sea, también están como (x)a este midiendo, están experimentando, igual no todo (incomprensible, 3) de todo esto, entonces están a prueba y error. Por ejemplo, ubícate en un, en un, astrónomo frustrado alejandrino que no puede explicar el modelo (x)de luminosidad o de estaciones como un modelo de una, así que yo discrepo un poco contigo. H1: Si, si, por eso dije al final que la retrogradación es lo que mata al modelo de una circunferencia, porque eso de plano no podría explicarse con ese modelo ¿no? Que el planeta se salga de su órbita y haga lo que quiera, ya tendrían que aplicar un modelo matemático basado en los datos.

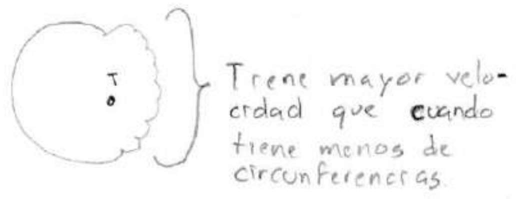
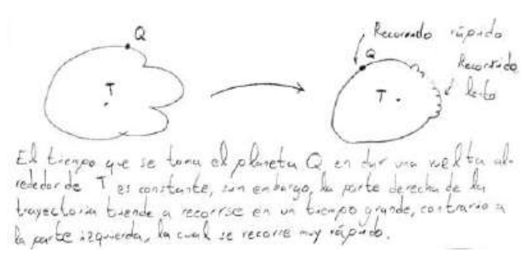
Parte I. **¿Qué permite explicar este modelo?**

Intención: Comprender por qué el modelo de los alejandrinos permite explicar aquello que el modelo griego no permitía.
Se busca propiciar una comprensión profunda del sistema, así como Fourier conocía el comportamiento del fenómeno de propagación del calor a través de la empírea antes de proponer su modelo matemático del fenómeno (Farfán y Romero, 2017).

Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
							[VG]-1-|00:48:35| P: Entonces de las estaciones, ya dijeron algo, pero para que quede así como tal vez de este grupo ((señala al equipo 3)) alguien, nos dice por qué no, ya lo mencionaron pero como para que lo dejemos. H1: Bueno, el calor también, bueno varía de la misma forma que el brillo, y si el calor se lo adjudicamos al sol, o sea un cambio de distancia bien podría, o sea si se disminuye la distancia va a recibir más calor la Tierra igual si se aleja va a recibir menos, y eso podría explicar estaciones. Por ejemplo, de la segunda circunferencia ahí podría verse un, en la parte derecha, por ejemplo que sea verano que el sol se acerca más, y luego seguiría arriba podría ser otoño y la parte izquierda el invierno y abajo la primavera. Digo como una idea de cuatro estaciones podrían (x)ser explicadas ahí por la segunda imagen.
Pregunta b	Los modelos 2, 3, y 4 permiten explicar el cambio en la luminosidad de los planetas y las estaciones del año, ya que la distancia entre P y T varía a lo largo de la trayectoria, entonces también la luminosidad. En los tres modelos se puede ver que la distancia entre P y T es mayor al radio de la primera circunferencia en parte de la trayectoria y menor al radio de la primera circunferencia en el resto de la trayectoria. Particularmente, el modelo con dos circunferencias explica de mejor manera el modelo de las estaciones que conocemos.	El modelo 2 explicaría perfectamente las estaciones del año, ya que suponiendo que el planeta es el Sol, en el punto mas cerca de la Tierra seria donde mayor calor y luz le da a la Tierra que seria la estación del Verano, conforme se aleja el Sol seria otoño, cuando mas lejos esta seria invierno y cuando se vuelve a acercar seria primavera. El modelo 2,3,4 explican la luminosidad de los planetas ya que entre mas cerca esten mas luminosos se ven y mas alejados menos luminosos se notaran.  	Los modelos 2, 3 y 4 pueden explicar el cambio de luminosidad de los planetas. Ya que en todos ellos varía la distancia a la Tierra (los planetas se acercan y luego se alejan). Por lo tanto también varía el brillo de los planetas. Los modelos 2, 3 y 4 pueden explicar las estaciones. Ya que si el Sol tiene una órbita de esos tipos, varía la distancia a la Tierra (el Sol se acerca y luego se aleja). Por lo que también varía el calor que le da a ella. Y así podrían explicarse las estaciones. Pero nuestras 4 estaciones podrían explicarse muy bien con el segundo modelo. Ya que en la parte derecha el Sol tendría un acercamiento máximo que correspondería al verano. Arriba al otoño. A la izquierda con el alejamiento máximo, el invierno. Y abajo la primavera.	Los modelos de 2, 3 y 4 circunferencias son capaces de explicar el cambio en la luminosidad de los planetas, dado que su trayectoria no describe un círculo perfecto alrededor del centro de la circunferencia, es decir, existen épocas del año en las que los astros se encuentran más alejados o menos alejados del centro de la circunferencia. Las estaciones del año pueden explicarse fácilmente usando el modelo de 2 circunferencias, teniéndose como circunferencia central a la Tierra y como aquella que gira alrededor de ella al Sol. Tendría sentido entonces que la parte más cercana de la trayectoria del Sol respecto a la Tierra produciría el verano y la más lejana el invierno.  	Se puede explicar a partir del modelo de 2 circunferencias pues la distancia del punto P a la tierra deja de ser igual radialmente en todos sus puntos, esto perimite que haya un acercamiento y un alejamiento del planeta (puede tratarse del Sol), claro, el modelo de 4 circunferencias explica mejor los fenómenos de luminosidad y de cambio en las estaciones del año.	[VE3]-1-|00:16:49| M3: ¿Cuáles permiten explicar el cambio de luminosidad y las estaciones del año? H3: Pero, imagínate que uno de estos fuera el Sol, (2) [como que M3: [Mmm] H3: suena muy raro, ¿no? M3: Si es ra= H3: =O sea, imagínate que uno de estos fuera el Sol y es el que hace que nos de calor o frío. Yo creo que a lo mej- por muy antiguo que fuera (incomprensible, 2, ¿la gente?) padecía de frío. M3: ((risas)) H3: Entonces, tienen sentido que si uno de estos fuera el Sol y si fuera a describir una trayectoria rara, entonces se aleja y hace calor y hace frío (incomprensible, 2). M3: Entonces, esto también se puede explicar con cualquiera de estos. H3: Con cualquiera de estos tres. M3: O en específico con este, ¿no? H3: Con este, ¿con este se podrían explicar las estaciones? M3: Pues sí, porque podrías decir de que aquí es como el verano donde más tiene (incomprensible, 5) y entonces conforme se va alejando es como el otoño, ¿no?, (incomprensible, 2), el pinche invierno y te acercas y es primavera, ¿no? H3: ¿Y este no lo podría explicar? Igual= M3: =Tendrías dos veranos, ¿no? H3: Tendrías dos veranos. M3: ((risas)) Pues sí, ¿no? Porque mira tienes dos puntos a la misma distancia interviniendo. Entonces tendrías dos veranos. ((risas)) H3: Y este tampoco podría, ni este. M3: Dos veranos, [dos ver- ((risas)) H3: [Dos veranos y medio]. M3: Tal vez el de la luminosidad podría ser.	[VG]-1-|00:50:24| P: De los modelos con dos, tres y cuatro circunferencias, entonces ¿cuál permite explicar el cambio de luminosidad de los planetas y las estaciones? Entonces vamos a escuchar de aquí, de este equipo ((señalando al Equipo 2)), alguien que nos comente. M1: ¿De luminosidad? P: ¡Ajá! ¿Cuál modelo te parece? M1: Mmm, yo creo que los tres. P: Los tres pueden explicar. M1: Porque, ya hay variación en la distancia entre, eh bueno la órbita ya no tiene radio constante, entonces ya hay variación entre la distancia del planeta y la Tierra, ya. P: Con eso explicamos cambios de distancia. ¿De acuerdo? ¿Todos de acuerdo? ((Los estudiantes asienten con la cabeza)) Entonces sí, los tres podrían ser luminosidad. ¿De las estaciones? ((M3 levanta la mano, pero H1 toma la palabra inmediatamente)) H1: Si ponemos ahí en esa órbita el Sol, ya va a haber partes en las que de más calor y otras menos. P: ¿Si? ¿Todos de acuerdo? H3: No exactamente, yo creo que, para lo que estamos acostumbrados nosotros aquí, el más sencillo sería el de dos circunferencias solamente, porque solamente tiene un punto en la órbita donde está, digamos, más cerca. O sea aquel planeta que rodea a la Tierra que está más cerca a nosotros, entonces tendría sentido que sólo en esa parte de la órbita hubiera más calor aquí en la Tierra y en la parte más alejada también tendría sentido decir que es aquella donde sentimos más frío. Sin embargo, las otras dos ((refiriéndose a los modelos con tres y cuatro circunferencias)) tienen= M3: =Dos puntos cercanos. H3: ¡Ajá! Dos puntos cercanos o dos puntos más o menos alejados, entonces= P: =Como que dos veranos ¿verdad? Tendría dos veranos. H3: Eso es un poco extraño, creo.
Pregunta c	El modelo 4 permite explicar el fenómeno de retrogradación. Dado que el vector velocidad es tangente a la trayectoria, en los modelos 2 y 3, dicho vector se mueve siempre en sentido horario visto desde T. En el modelo 4 se puede ver una retroceso al dar un giro completo y regresar al mismo punto.	El modelo 4 explica el fenómeno de retrogradación ya que es cuando se notaria mas la presencia de que la trayectoria del planeta se regresa y vuelve a tomar su trayectoria original.  	El modelo 4 puede explicar el fenómeno de retrogradación. Ya que tiene una parte (la parte derecha de la imagen) en la que los círculos se desfasan. Provocando que el planeta gire en sentido opuesto (horario) al del círculo con centro en la Tierra. En las animaciones de los modelos 2 y 3 se aprecia que los planetas se frenan, pero no se ve que retrocedan.	El modelo que explica de manera más sencilla la retrogradación es el de 4 circunferencias, pues la curva descrita por el cuarto planeta se corta a sí misma en ciertos puntos de la trayectoria (ver figura). En los modelos de 2 y 3 circunferencias podríamos observar un cambio de velocidad aparente al acercarse los planetas más lejanos a su punto más cercano al centro de la circunferencia principal.  	Pienso que el modelo que mejor describe el proceso de retrogradación es el modelo de 4 circunferencias, pues hay partes de la trayectoria en las que la trayectoria pasada se cruza con la trayectoria presente, de hecho, hay dos secciones de este fenómeno.	[VE3]-1-|00:14:09| H3: ¿Cuál de estas (incomprensible, 4, ¿permite explicar?) el fenómeno de retrogradación? (2) M3: >Yo digo que sería el ¿cuatro?< H3: ¡Ajá!, está, así como [(incomprensible, 3)] H6: [Como que regresa y luego sigue con la misma.]	[VG]-1-|00:52:57| P: Y en la pregunta c, ya::: dice ¿cuáles permiten explicar el fenómeno de retrogradación? (3) Entonces ¿cuál o cuáles? M2: [El::: modelo 4] ((varios lo confirman)) H4: [El modelo 4] P: ¿El modelo 4? Bueno de este equipo ((refiriéndose al Equipo 3)), ya tu hablaste ((refiriéndose a H3)), entonces ehm, “M2” o::: “H6” ((llama a M2 y H6 por su nombre)). Coméntenos, del modelo todos coincidieron que el 4, entonces ¿en qué parte del trayecto? H6: Bueno en la parte derecha, porque bueno, (incomprensible, 1) de hecho cualquier planeta. Realmente nada más se marca el rastro de uno de los puntos verdes, pero cualquiera de ellos si es observado desde la Tierra de alguna manera ((realiza el movimiento de un bucle con su mano e igual que H4)) se puede apreciar como hay un aparente cambio de dirección o de trayectoria. [VG]-1-|00:55:15| P: ¿Cuál modelo podría? M2: El cuatro. H6: Bueno, aun así considero que cualquier caso, porque en esta parte de aquí ((señalando la parte derecha de la imagen)) en el que hay dos circunferencias, esa parte aun observándola se podría ver aunque sea al menos uno, una regresión. P: ¿Están de acuerdo? H1: No necesariamente, es que del dibujo pienso que seguramente se podría ver que el planeta se frena, o sea que va, de repente va muy lento, se para un instante

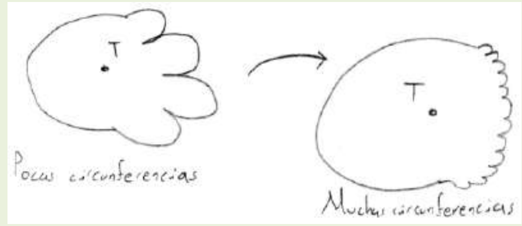
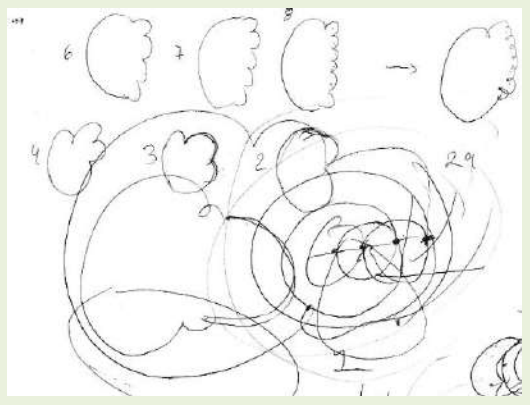
Parte I.	**¿Qué permite explicar este modelo?**						
Intención:	Comprender por qué el modelo de los alejandrinos permite explicar aquello que el modelo griego no permitía. Se busca propiciar una comprensión profunda del sistema, así como Fourier conocía el comportamiento del fenómeno de propagación del calor a través de la empírea antes de proponer su modelo matemático del fenómeno (Farfán y Romero, 2017).						
Estudiante	**M2**	**M3**	**H1**	**H3**	**H4**	**Equipo 3**	**Puesta en común**
							y luego ya sigue, pero regresión como tal, bueno de la figura a mí no me parece que se, que se vea que se regrese, pero que si se frene, en el segundo y tercer modelo.
Intencionalidad	En los incisos a, b y c, se espera que el estudiante relacione el cambio de luminosidad y las estaciones del año con la distancia que hay entre T y P, por tanto, el modelo de una circunferencia no permite explicar estos fenómenos ya que esta distancia nunca cambia, no así en el modelo con 2, 3 y 4 circunferencias en donde la distancia de P a T cambia durante la trayectoria. Respecto del fenómeno de retrogradación, su explicación estará en los bucles que se generan en el modelo con 4 circunferencias.						
¿Qué hace?	**Comparar** las distancias entre el planeta y la Tierra. **Comparar** la direcció del vector velocidad en cada punto de la trayectoria. **Observar** el movimiento sobre la trayectoria.	**Comparar** las distancias entre el planeta y la Tierra. **Observar** el movimiento sobre la trayectoria.	**Comparar** las distancias entre el planeta y la Tierra. **Observar** el movimiento sobre la trayectoria.	**Comparar** las distancias entre el planeta y la Tierra. **Observar** el movimiento sobre la trayectoria.	**Comparar** las distancias entre el planeta y la Tierra. **Observar** el movimiento sobre la trayectoria.	**Comparar** las distancias entre el planeta y la Tierra. **Observar** el movimiento sobre la trayectoria.	**Comparar** las distancias entre el planeta y la Tierra. **Comparar** el movimiento del Sol y de otro planeta alrededor de la Tierra. **Observar** el movimiento sobre la trayectoria.
¿Cómo hace?	Considerando la distancia del planeta a la Tierra en diferentes puntos de la trayectoria, en los modelos presentados. Considerando al vector velocidad y su movimiento en la trayectoria.	Considerando la distancia del planeta a la Tierra en diferentes porciones de la trayectoria, en los modelos presentados. Considerando la forma de la trayectoria y cómo se vería el movimiento posicionado desde la Tierra.	Considerando la distancia del planeta a la Tierra en diferentes porciones de la trayectoria, en los modelos presentados. Considerando la forma de la trayectoria y cómo se vería el movimiento posicionado desde la Tierra.	Considerando la distancia del planeta a la Tierra en diferentes porciones de la trayectoria, en los modelos presentados. Considerando la forma de la trayectoria y cómo se vería el movimiento posicionado desde la Tierra.	Considerando la distancia del planeta a la Tierra en diferentes porciones de la trayectoria, en los modelos presentados. Considerando la forma de la trayectoria y cómo se vería el movimiento posicionado desde la Tierra.	Considerando la distancia del planeta a la Tierra en diferentes porciones de la trayectoria, en los modelos presentados. Considerando la forma de la trayectoria y cómo se vería el movimiento posicionado desde la Tierra.	Considerando la distancia del planeta a la Tierra en diferentes porciones de la trayectoria, en los modelos presentados. Considera la posibilidad de que la un planeta debido se cruce en medio de la Tierra y el sol lo que podría provocar cambios de luminosidad. Considera la forma de la trayectoria y cómo se vería el movimiento posicionado desde la Tierra.
Argumentos (A) y confrontaciones (C) presentados.	(A) El cambio de luminosidad y las estaciones del año dependen de los cambios en la distancia del planeta a la Tierra. (A) Debido al movimiento del vector velocidad sobre la trayectoria se puede explicar el fenómeno de retrogradación.	(A) El cambio de luminosidad y las estaciones del año dependen de los cambios en la distancia del planeta a la Tierra. (A) Debido la forma de la cuarta trayectoria se puede explicar el fenómeno de retrogradación. (C) Con el modelo de movimiento planetario actual, al explicar con base en el movimiento de traslación de los planetas alrededor del Sol.	(A) El cambio de luminosidad y las estaciones del año dependen de los cambios en la distancia del planeta a la Tierra. (A) Debido la forma de la cuarta trayectoria se puede explicar el fenómeno de retrogradación. (C) Con el modelo de movimiento planetario actual, para evaluar si sus argumentos son plausibles.	(A) El cambio de luminosidad y las estaciones del año dependen de los cambios en la distancia del planeta a la Tierra. (A) Debido la forma de la cuarta trayectoria se puede explicar el fenómeno de retrogradación. (C) Con el modelo de movimiento planetario actual, para evaluar si sus argumentos son plausibles.	(A) El cambio de luminosidad y las estaciones del año dependen de los cambios en la distancia del planeta a la Tierra. (A) Debido la forma de la cuarta trayectoria se puede explicar el fenómeno de retrogradación. (C) Con sus nociones físicas de movimiento, inercia en particular.	(A) El cambio de luminosidad y las estaciones del año dependen de los cambios en la distancia del planeta a la Tierra. (A) Debido la forma de la cuarta trayectoria se puede explicar el fenómeno de retrogradación. (C) Con su conocimiento actual sobre las estaciones del año.	(A) El cambio de luminosidad y las estaciones del año dependen de los cambios en la distancia del planeta a la Tierra. (A) El cambio de luminosidad se podría deber a eclipses, planetas que en su trayectoria se colocan en medio del Sol y la Tierra. (A) Debido la forma de la cuarta trayectoria se puede explicar el fenómeno de retrogradación. (C) Con su conocimiento actual sobre el funcionamiento de los eclipses. (C) Con su conocimiento actual sobre las estaciones del año.

Parte II.	**¿Y si aumentamos el número de epiciclos?**						
Intención:	Se busca, con apoyo de un applet, vislumbrar la noción de estabilidad del sistema, para esto se permite la posibilidad en el applet de aumentar hasta treinta el número de circunferencias y así analizar los cambios que se dan en el comportamiento del sistema.						
Estudiante	**M2**	**M3**	**H1**	**H3**	**H4**	**Equipo 3**	**Puesta en común**
Pregunta a	En la figura se puede ver que disminuyen. El número de bucles aumenta, teniendo uno de mayor tamaño y el resto disminuyendo en tamaño. Si consideramos un modelo en el que los radios de las circunferencias agregadas aumenten, se obtendría un modelo similar, pero la mayoría de los bucles aumentarían su tamaño teniendo al final uno pequeño. Además, hay circunferencias donde la Tierra queda encerrada en dicha circunferencia o incluso chocan.  	Solo van disminuyendo los radios.	$r_n > r_{n+1}$ para todo n natural. Datos curiosos: Si dos o más radios fueran iguales, el planeta eventualmente chocaría con la Tierra. Si [math]r_n para algún n, las órbitas girarían alrededor de la Tierra por dentro de la primera circunferencia. 	Solo se vuelven más pequeños.	A apreciación del dibujo, la variación del radio de las circunferencias conforme se añade otra es $\frac{R}{2^n}$, con respecto a la circunferencia original, R. 	[VE3]-1-|01:01:55| H6: Cada circunferencia es la mitad de la anterior, tiene un radio de la mitad de la anterior. (4) Esta circunferencia tiene un radio de la mitad de esta. M3: Sí, creo que sí. Se van haciendo más chicos, o sea de mitad. H6: [¡Ajá!] H3: [Quieres] *wachar* eso eh, si eso que dices es cierto sería interesante. ((Empieza a medir sobre la pantalla con el transportador)) M3: ¿Y por qué con el transportador si tienes una regla? ((risas)) H3: Porque está más chiquito el transportador "M3" ((llama a M3 por su nombre)). M3: ¡Ay! No lo he detenido, qué tonta. (16) No m-, sí es cierto. H3: ¿En serio? M3: ↑Sí↑ [VE3]-1-|01:03:11| H6: Pos no jaló. H3: (Incomprensible, 1, ¿después?) del tercer círculo ya no jaló la idea de que disminuyen a la mitad. M3: ¿Uju? H3: Del tercer círculo ya no jaló eso de que disminuyan a la mitad. M3: Sí::: H3: ¿En serio? M3: Mira aquí son como cuatro y medio= H3: =Tu tienes unas elipses= M3: Ah:::, mira y aquí son como dos veinticinco, y como uno y cacho. Son casi, sí son casi la mitad. H3: No mira, estos son dos cuatro, dos qué, dos siete, dos ocho, dos punto ocho ¡dos punto ocho! Este sí es de uno punto cuatro, (3) pero este es de (incomprensible, 2) y este es de seis milímetros= M3: =Bueno solo van disminuyendo ¿no? Ya.	[VG]-1-|02:03:47| P: ¿Cómo cambian los radios de una circunferencia a otra conforme se van agregando? H4: Bueno, tal vez no importe tanto la expresión, eh, pero, eh, digamos que decrecían como uno en a la dos n. P: >Ok< (3) Ok, entonces (3) ↑Ajá↑ No importa tanto la expresión matemática, pero uno como a la dos n, pero ¿cómo sabes que uno a la dos n? H4: Fue una suposición. P: Una suposición, un supuesto. H8: Ver-, bueno, de vista tiene varias (incomprensible, 1, ¿formas?). P: Ok, ¿quién más? H6: Yo llegué a la misma, a la misma conclusión. P: Llegaron a la misma conclusión. H6: ¡Ajá! Pero es que yo::: vi repetidas veces la animación. P: ¿Ajá? H6: Y siguiendo la trayectoria anaranjada, viendo las circunferencias, pues si pareciera que cada radio es la mitad del anterior. P: Ok, ¿pareciera que cada radio es la mitad del anterior? H6: Sí, la expresión es uno entre dos a la n. P: Ok, pero eso ¿pareciera? ¿Cierto? H6: ¡Ajá! ((asiente con la cabeza)) P: Pero, entonces, (x)si tienes que contestar algo así como con certeza ¿qué contestarían? M3: Pues que [se van haciendo más pequeños]. H3: [Pos que se hacen más pequeños] H1: Que disminuyen. P: Van disminuyendo ¿verdad? Eso es como con certeza, eso. La expresión quien sabe, porque habría que tener como más informació:::n. Bueno los compañeros ((señalando al equipo 2)) tal vez nos puedan compartir lo que estaban haciendo, al respecto, porque ellos si trataron de::: como que medirlo. H2: Bueno, digamos, los pi- la posición los pixeles que había entre cada, o sea la distancia entre:::, el radio, pero en pixeles. Y encontramos que la primera era la mitad, se aproximaba a la mitad del primer radio, y la tercera se aproximaba a la tercera parte del primer radio, pero la cuarta ya no nos coincidió que fuera la cuarta parte; o medimos mal, entonces podría ser uno en- n, o nosotros, bueno yo también había visto, pero nada más fue asumiendo que fuera la mitad cada radio, que también era uno entre dos a la n. P: Ah ok, pero en lo que coincidían todos es que disminuyen ¿verdad? ((los estudiantes asienten con la cabeza)) En eso si coinciden todos. "H1" ((refiriéndose por su nombre)) me dijo por qué no podían aumentar, entonces no sé si quiera compartirlo con los compañeros su análisis de por qué no se pueden, por qué no pueden aumentar los radios. H1: Bueno primero me, eh, me fijé en el caso en que::: dos radios son iguales, ahí eventualmente se produciría un choque

Parte II.	**¿Y si aumentamos el número de epiciclos?**						
Intención:	Se busca, con apoyo de un applet, vislumbrar la noción de estabilidad del sistema, para esto se permite la posibilidad en el applet de aumentar hasta treinta el número de circunferencias y así analizar los cambios que se dan en el comportamiento del sistema.						
Estudiante	**M2**	**M3**	**H1**	**H3**	**H4**	**Equipo 3**	**Puesta en común**
							con la Tierra, porque (x)los círculos eh, no sé si se alcanza a ver ((mostrando su hoja de trabajo a los compañeros)). P: Si quieres lo haces en el, en el pintarrón. Ahí hay plumones H1: El círculo de la tierra y por acá voy a poner un círculo del mismo radio. Yo puedo encontrar un punto sobre esta circunferencia, en la que este, le voy a poner r dos ((se refiere al radio de la segunda circunferencia)), un punto sobre esta circunferencia en la que diste r dos de la Tierra, aquí voy a trazar otro círculo y esta que sea la trayectoria del planeta y se ve que eventualmente aquí chocaría con la Tierra, en algún punto ¿no? Podría ser cuando avance más, por acá, pero en algún punto chocaría con la Tierra. Y ahora se me ocurrió que, pues algo parecido, esta es la Tierra, con un r dos menor, que realmente podría ser un r n-ésimo en el caso general, pero que aquí hubiera un círculo mayor que r tres, o sea no pasaría algo trágico pero si serían órbitas interiores. Pero serían, bueno, le darían vuelta a la Tierra por dentro de la primera circunferencia, si fueran mayores. Pero el caso feo es que chocarían con tan solo dos circunferencias iguales eventualmente chocaría con la Tierra.
Intencionalidad	Se busca concluir que los radios de las circunferencias tienden a cero en forma cualitativa, para esto los estudiantes podría usar frases como “disminuyen”, “se hacen más pequeños”, entre otras.						
¿Qué hace?	Observar los radios de las circunferencias conforme se van agregando. Comparar los cambios en la trayectoria al agregar circunferencias.	Observar los radios de las circunferencias conforme se van agregando.	Observar los radios de las circunferencias conforme se van agregando.	Observar los radios de las circunferencias conforme se van agregando.	Estimar la medida de los radios. Comparar las medidas de los radios de las circunferencias.	Estimar la medida de los radios. Medir los radios de las circunferencias. Observar las medidas de los radios de las circunferencias.	Observar los radios de las circunferencias. Estimar la medida de los radios. Medir los radios de las circunferencias.
¿Cómo hace?	Considera el número de “curvaturas” que se van formando al agregar circunferencias y sus tamaños. Considera el movimiento al considerar los casos en que los radios aumenten de tamaño o se mantengan iguales.		Considera el movimiento al considerar los casos en que los radios aumenten de tamaño o se mantengan iguales.		Establece la primera circunferencia como su unidad de medida y compara los demás radios con esta para medirlos.	Considera la figura para estimar que la medida de los radios va disminuyendo a la mitad. Utilizan una regla para medir los radios de las circunferencias.	Considera la figura para estimar que la medida de los radios va disminuyendo a la mitad. Utilizan una regla para medir los radios de las circunferencias. Considera el movimiento al considerar los casos en que los radios aumenten de tamaño o se mantengan iguales.
Argumentos (A) y confrontaciones (C) presentados.	(A) Se aprecia directamente de la figura. (A) El número de bucles aumenta, teniendo uno de mayor tamaño y el resto disminuyendo en tamaño. (A) Si los radios aumentan cambiaría la forma de la trayectoria que se forma.		(A) Se aprecia directamente de la figura. (A) Si los radios se mantienen iguales el planeta, eventualmente, colisionaría a la Tierra. (A) Si los radios aumentan la trayectoria del planeta cruzaría por dentro de la primera circunferencia.		(A) Se aprecia directamente de la figura. (C) Con la costumbre escolar de cuantificar el cambio sin atender lo que cambia y cómo lo hace.	(A) Se aprecia directamente de la figura. (A) Se pueden comparar las medidas de los radios. (C) Con la costumbre escolar de cuantificar el cambio sin atender lo que cambia y cómo lo hace. (C) Con la medición hecha pues no se ajusta a su hipótesis de que los radios disminuyen a la mitad.	(A) Se aprecia directamente de la figura. (A) Se pueden comparar las medidas de los radios. (A) Si los radios se mantienen iguales el planeta, eventualmente, colisionaría a la Tierra. (A) Si los radios aumentan la trayectoria del planeta cruzaría por dentro de la primera circunferencia. (C) Con la costumbre escolar de cuantificar el cambio sin atender lo que cambia y cómo lo hace. (C) Con la medición hecha pues no se ajusta a su hipótesis de que los radios disminuyen a la mitad.
Pregunta b	La rapidez es mayor al aumentar las circunferencias. Además de que la trayectoria parece tomar una forma definida al aumentar el número de circunferencias.	Pues entre mas circunferencias se agreguen mas rápido va el punto Q. 	Conforme se agregan más círculos los planetas tienen que recorrer mayor distancia y hacer más giros. Así que si tienen que mantener un periodo constante de rotación. Tendrían que moverse con más rapidez conforme se agregan círculos.	Se vuelve aparentemente más rápido en ciertos puntos de la órbita mientras el número de circunferencias aumenta. 	Conforme se agrega una circunferencia, la velocidad recorrida por el punto de la órbita, aumenta, esto pues la pendientes en la gráfica de los puntos de mayores circunferencias es mayor a las de menor número de circunferencias. 	[VE3]-1-|01:04:00| H6: Va aumentando la velocidad ¿no? M3: A no sé, no he vi- no he llegado a esa, pérame. (16) Es que ni sé. La siguiente gráfica muestra la distancia recorrida por el punto que se mueve sobre las circunferencias ((leyendo la pregunta)) H3: (Incomprensible, 2) La velocidad está aumentando. M3: Sí, es la, la pendiente es la velocidad. H3: ¿Entonces? M3: Entre más::: cerca esté del *Y* es más grande su velocidad ¿no? (4) Por que recorre mayor distancia en menos tiempo ¿no? H6: Exactamente. [VE3]-1-|02:25:10|- después de la puesta en común, H3 elimina una parte de su respuesta inicial, esta incluia «…aumenta, sin embargo, el tiempo que tarda un planeta en dar una vuelta completa permanece constante»	[VG]-1-|02:03:47| P: Ok, la siguiente gráfica muestra la distancia recorrida por un punto que se mueve sobre la circunferencia sexta, décima, vigésima y trigésima, entonces, ¿cómo cambia el movimiento de dichos puntos, (7) de una circunferencia a otra? H4: Bueno ((H7 levantó la mano, entonces H4 le cedió la palabra)). H7: Pues entre más aumenten el número de circunferencias, un punto sobre esa circunferencia va a ser, bueno digamos un planeta en esa circunferencia se va a mover a una velocidad mayor que un planeta en una circunferencia menor. Porque de la gráfica se ve que, por ejemplo, la amarilla es la es que es del mayor número de circunferencias, entonces quiere decir de la gráfica que recorre mayor, mayores distancias en menores tiempos y::: por eso sabemos que es mayor la velocidad comparada con la anterior. P: ¿Qué más? ¿(x)Quién está de acuerdo, no está de acuerdo? ¿Otro argumento? Pueden estar de acuerdo, pero tener otro argumento. H2: Lo mismo, pero nosotros nos fijamos en <u>la pendiente</u>. P: ¿Se fijaron en la pendiente? M3: Ajá ((varios estudiantes asienten con la cabeza)).
Intencionalidad	A través del estudio del cambio se pretende que los estudiantes infieran que la velocidad de los puntos sobre cada circunferencia sigue aumentando sin cota, para esto podría utilizar frases como “va más rápido”, “en el mismo tiempo recorre cada vez más distancia”, entre otras. Según la prueba piloto, es posible que para la pregunta b los estudiantes consideren que la gráfica se refiere a la trayectoria del planeta al agregar circunferencias, cuando en realidad se refiere al movimiento de cada punto sobre cada circunferencia.						
¿Qué hace?	Observar el movimiento de los puntos sobre cada circunferencia. Comparar los cambios en la trayectoria al agregar circunferencias.	Estimar la velocidad del punto Q al agregar cada vez más circunferencias.	Observar la forma que va tomando la trayectoria. Estimar la velocidad del punto Q al agregar cada vez más circunferencias.	Estimar la velocidad del punto Q al agregar cada vez más circunferencias. Observar la forma que va tomando la trayectoria.	Comparar la pendiente de una gráfica a otra. Estimar la velocidad del punto Q sobre la órbita recorrida.	Observar la posición de las rectas respecto del eje de las ordenadas.	Observar los cambios de la distancia respecto del tiempo en cada gráfica. Comparar la pendiente de una gráfica a otra.
¿Cómo hace?	Considera el movimiento del punto sobre diferentes circunferencias. Considera la forma de la trayectoria al agregar circunferencias.	Considera el movimiento del punto sobre la trayectoria.	Considera el movimiento del punto sobre la trayectoria. Considera el tiempo que tarda el planeta de completar la trayectoria (periodo).	Considera el movimiento del punto sobre la trayectoria.	Considera el movimiento del punto sobre la trayectoria. Considera las pendientes de las rectas en la gráfica suministrada.	Relaciona la velocidad con la pendiente de la recta.	Considera la distancia recorrida respecto del tiempo en cada gráfica.
Argumentos (A) y confrontaciones (C) presentados.	(A) La rapidez es mayor al aumentar las circunferencias.	(A) Considera las trayectorias formadas por diferente número de circunferencias. (C) Estudia el cambio de la rapidez del Planeta, y no de los puntos sobre cada circunferencia.	(A) Al ser el periodo fijo y aumentar el tamaño de la trayectoria, debe aumentar la velocidad del punto Q conforme se agregan más circunferencias. (C) Estudia el cambio de la rapidez del Planeta, y no de los puntos sobre cada circunferencia.	(A) Considera las trayectorias formadas por diferente número de circunferencias. (A) Al ser el periodo fijo y aumentar el tamaño de la trayectoria, debe aumentar la velocidad del punto Q conforme se agregan más circunferencias. (C) Estudia el cambio de la rapidez del Planeta, y no de los puntos sobre cada circunferencia.	(A) A mayor número de circunferencia mayor pendiente. (C) Estudia el cambio de la rapidez del Planeta, y no solo de los puntos sobre cada circunferencia.	(A) Entre más cerca se encuentre la recta del eje de las ordenadas mayor es la velocidad. (A) Se da mayor velocidad al recorrer una mayor distancia en un menor tiempo. (C) Estudia el movimiento del Planeta, y no solo de los puntos sobre cada circunferencia, al considerar el que el tiempo que tarda en completar la órbita el planeta permanece constante.	(A) Se da mayor velocidad al recorrer una mayor distancia en un menor tiempo. (A) La pendiente de la recta da la misma información sobre el cambio de la velocidad.

Parte II. **¿Y si aumentamos el número de epiciclos?**

Intención: Se busca, con apoyo de un applet, vislumbrar la noción de estabilidad del sistema, para esto se permite la posibilidad en el applet de aumentar hasta treinta el número de circunferencias y así analizar los cambios que se dan en el comportamiento del sistema.

Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
Pregunta c	La distancia que recorre el planeta aumenta al aumentar el número de circunferencias, así como también aumenta el número de bucles.	Conforme mas circunferencias se agreguen la parte derecha se vuelve mas curvas cerradas y la parte izquierda se vuelve mas amplia y rápida. Ademas la parte derecha la recorre en un tiempo mas lento que la parte izquierda.	Los planetas van haciendo más bucles y cada vez más pequeños conforme se agregan círculos. Parece que la trayectoria tiende a una elipse con la Tierra en uno de los focos. La distancia máxima es la suma de los radios. Así que esta suma debe converger para que la figura converja.	Se observan deformaciones en la parte más cercana al centro de la trayectoria, las cuales aumentan cada vez más conforme se agregan más circunferencias. Por otra parte, la trayectoria en su punto más alejado describe una perturbación grande, la cual tiende a aumentar su tamaño conforme se agregan más circunferencias. Observe la simetría horizontal de la trayectoria y la aparente convergencia hacia una trayectoria muy bien definida.  	Se va haciendo más uniforme (suavemente continua) en su parte derecha, pues se van agregando cada vez más pequeños arcos que modelará una curva suave cuando el número de circunferencias agregadas sea muy grande.  	[VE3]-1-|01:05:54| H6: Agregamos dos circunferencias. M3: Teníamos tres circunferencias. H6: (Incomprensible, 1) la trayectoria fíjate, la trayectoria se va::: ¿deteriorando? ¿Se va haciendo discreta, no? M3: Oye H6: No sí, mira, aquí. Mira, ahorita vas a ver. Esta es un polígono discreto. M3: Pues porque va más rápido en ese punto. [VE3]-1-|01:07:13| H3: No te parece como una especie de elipse fea. M3: ((risas)) Parece un (2) gatito del cielo. H3: ¿Un qué? M3: Un gatito del cielo, una nube pues. H3: Ah::: [VE3]-1-|01:07:43| H3: ¿Cómo cambian las trayectorias mientras se agregan más? M3: Que se vuelve más como chicharrón, wey, la parte derecha. H3: ¡Ajá! M3: Y lo avienta más atrás. H3: Y si le pongo todos ((se refiere a todas las circunferencias que permite el applet)) M3: Ya ves se hace como chicharrón. [VE3]-1-|02:27:31|- después de la puesta en común, H3 le agrega argumentos a su respuesta inicial a la pregunta, la cual no incluía la frase «y la aparente convergencia hacia una trayectoria muy bien definida»	[VG]-1-|02:12:23| P: ¿Cómo cambia la trayectoria del planeta conforme se agregan más y más circunferencias? Ahora si estamos hablando de la trayectoria del planeta, entonces qué analizaron de ese. A ver, quién nos dice qué fue lo que hicieron para analizar ese. H2: Nosotros nos fijamos que el punto más alejado que estaba, la (incomprensible, 1) de T era la suma de todos, de todas las otras circunferencias. Entonces entre más circunferencias tuviera, más alejado iba a estar de T, entonces iba a recorrer una gran distancia en un y regreso, entre mayor fuera el número de radios iba a ser más grande, la trayectoria. P: ¿Siempre, siempre iba a ser más grande la trayectoria? ¿En todo momento? H1: Bueno, ahí también podríamos preguntarnos eh::: la relación entre, entre los radios. Porque si eh::: como si estuviéramos midiendo pixeles, si variara con uno en n no convergería, o sea la suma al infinito ser- haría una distancia máxima infinita. P: ¿Si fuera uno en n? ((H1 asiente con la cabeza)) ¿Los radios? H1: Sí, en el punto más alejado, que es la suma de todos los radios. P: Ah ok, entonces la suma de todos los radios sería la que no convergería, en ese caso= H1: =En ese caso= P: =Si fuera uno entre n. H1: Sí. (3) Si fueran mitades si:::, si convergerían. P: Uno entre dos a la n. H1: ¡Ajá! Esa sí converge. H8: Aunque conforme más círculos se van agregando tiende a una forma::: ¿elíptica? Pero es que no sé (incomprensible, 2) cómo verlo porque es más grande de un lado y más chico del otro.
Intencionalidad	La intención es que el estudiante identifique el carácter estable del sistema en forma cualitativa, esto a través de frases como “cuando hay muchas circunferencias casi no cambia la forma de la trayectoria conforme se agregan más”, “tiende a parecerse a una…”. Para esto se espera analice el cambio en la forma de la trayectoria conforme se agregan cada vez más circunferencias. Se espera que, expresen que “algo extraño pasaba con la parte izquierda de la trayectoria”, esto es importante, pues no toda la trayectoria es estable.						
¿Qué hace?	**Comparar** la distancia recorrida por el planeta para las diferentes trayectorias al agregar circunferencias. **Observar** los cambios en la forma de la trayectoria al agregar circunferencias.	**Observar** los cambios en la forma de la trayectoria al agregar circunferencias. **Comparar** el tiempo transcurrido en recorrer distintas partes de una misma trayectoria.	**Observar** los cambios en la forma de la trayectoria al agregar circunferencias. **Comparar** las diferencias en la trayectoria al agregar circunferencias.	**Observar** los cambios en la forma de la trayectoria al agregar circunferencias. **Comparar** las diferencias en la trayectoria al agregar circunferencias.	**Observar** los cambios en la forma de la trayectoria al agregar circunferencias. **Comparar** las diferencias en la trayectoria al agregar circunferencias.	**Observar** los cambios en la forma de la trayectoria al agregar circunferencias. **Comparar** las diferencias en la trayectoria al agregar circunferencias.	**Observar** los cambios en la forma de la trayectoria al agregar circunferencias. **Comparar** las diferencias en la trayectoria al agregar circunferencias. **Estimar** los radios de las circunferencias.
¿Cómo hace?	Considera los cambios en la distancia recorrida. Considera los cambios en la forma de la trayectoria para diferentes partes de la misma, no en forma global.	Considera los cambios en la forma de la trayectoria para diferentes partes de la misma, no en forma global.	Considera los cambios en la forma de la trayectoria para diferentes partes de la misma y en forma global.	Considera los cambios en la forma de la trayectoria para diferentes partes de la misma y en forma global.	Considera los cambios en la forma de la trayectoria en forma global.	Considera los cambios en la forma de la trayectoria para diferentes partes de la misma y en forma global.	Considera los cambios en la forma de la trayectoria para diferentes partes de la misma y en forma global.
Argumentos (A) y confrontaciones (C) presentados.	(A) La distancia que recorre el planeta aumenta al aumentar el número de circunferencias.	(A) Conforme se agregan más circunferencias las distintas partes de una misma trayectoria se modifican.	(A) Conforme se agregan más circunferencias las distintas partes de una misma trayectoria se modifican. (A) La forma de la trayectoria se va pareciendo a una elipse conforme se agregan más circunferencias.	(A) Conforme se agregan más circunferencias se observan deformaciones en la aparte cercana al centro de la trayectoria. (A) Conforme se agregan más circunferencias se observa una perturbación grande que aumenta de tamaño en el punto más alejado de la trayectoria. (A) La trayectoria toma una forma simétrica muy bien definida conforme se agregan más circunferencias.	(A) La trayectoria toma más uniforme (suavemente continua) conforme se agregan más circunferencias.	(A) La trayectoria toma una forma definida conforme se agregan más circunferencias. (A) Conforme se agregan más circunferencias una parte de la trayectoria cambia con cierta regularidad.	(A) La distancia que recorre el planeta aumenta al aumentar el número de circunferencias. (A) La trayectoria toma una forma definida conforme se agregan más circunferencias. (A) Conforme se agregan más circunferencias en el punto más alejado de la trayectoria podría converger o no.
Pregunta d	Sí, dado que el modelo se plantea para un ciclo determinado para cada planeta, al aumentar el numero de circunferencias en el modelo, la distancia en la trayectoria es mayor, y por lo tanto, la rapidez con que se mueve tiene que aumentar para completar la trayectoria durante el ciclo. Al aumentar el número de circunferencias, el punto se mueve mucho más rápido, y la aportación que realiza a la trayectoria puede ser despreciable, por lo que, se puede apreciar una forma casi definida.	Si, entre mas circunferencias vamos agregando la forma de la trayectoria no se ve casi afectada ya que el radio vas disminuyendo tanto de tal forma que despues se vera que el movimiento del punto Q es insignificante.	Sí hay relación. Ya que de b) se tiene que mientras más círculos más bucles tienen que dar los planetas. Y de a) se tiene que cada círculo añadido tiene un radio menor que el anterior, por lo que su bucle será de menor longitud que el del círculo anterior.	Sí, el aumento en la velocidad aparente se explica por el hecho de que la trayectoria total del planeta ocurre en el mismo tiempo, sin depender del número de circunferencias, teniendo que recorrer una mayor distancia en un mismo tiempo (relación entre a) y b)). La observación de una mayor deformación en la trayectoria se relaciona con la cantidad de círculos porque al aumentar las circunferencias aumenta el número de deformaciones, volviéndose éstas más pequeñas y recurrentes en la trayectoria. Observemos que la forma de la trayectoria tiende a algo que nos recuerda a una elipse, conforme se agreguen más circunferencias esta forma se definirá cada vez más, siendo que los puntos tienden a girar sobre el radio más rápido y su radio tiende a ser cada vez más pequeño, concluyendo que su contribución a la distancia respecto al centro será cada vez más mínima.	Conforme se va agregando otra circunferencia, la contribución al giro se desplaza en torno al centro de masa del planeta, con lo que no se sale de la forma bien definida que se respondió en el inciso c)	[VE3]-1-|01:26:40| H3: Al final ¿qué contestaron? M3: Ah::: H6: ¿En cuál? M3: En la d. H6: Yo puse que sí, por la conservación del momento angular. M3: Sí, yo también, yo puse así ((risas)). H6: ¿La conservación del momento angular? Ok::: M3: ¿Tú qué le pusiste? ↑Ah caramba↑ si lo explicaste bien. H6: A mí me pareció trampa, pero. H3: ¡Ajá! (4) No sé (7) M3: (Incomprensible, 2) (5) H3: Es que no entiendo muy bien qué está pasando. O sea, le agregas un círculo ((realiza un sonido repetitivo al añadir circunferencias al applet)) M3: Lo vas a bobiar como hace rato ((risas)). H3: Si, pero le agregas un círculo, pero al final de cuentas tarda el mismo tiempo en dar una trayectoria= M3: =Sí= H3: =Siempre ¿no? M3: No sé, es que. (13) Pero por las grafiquitas de aquí no parece que tardan el mismo tiempo, ¡mira! H3: Pero se refiere a distancia. M3: Con respecto al tiempo= H3: =Respecto al tiempo. (3) M3: Mmm::: H3: Tienes (x)un tiempo aquí, bueno entonces tiene sentido que hagan- que no hayan recorrido la misma distancia. Pero, en general, yo siento que:::	[VG]-1-|02:19:09| P: Bueno, entonces esa es la pregunta interesante, eso que acabamos de responder acá de que va tomando como una forma definida, en este caso como un huevo, digamos ¿Cómo se relaciona con esas otras dos? Con que los radios se hacen cada vez más pequeños y con que la velocidad de los puntos es cada vez mayor. A ver. H8: Puede ser como un fractal de los arcos que se van haciendo dependiendo de los radios que se tengan, y esa es la relación que puede exis- bueno para ya establecerlo matemáticamente, va a ser como la ecuación de un fractal. P: ¿Parece como la ecuación de un fractal? H4: Eh, bueno yo entien-, bueno yo pensé que si los radios fueran iguales en todo momento, que no pudieran (incomprensible, 1) entonces ni siquiera tendríamos esa::: esa forma que nos plantea el modelado, tendríamos una forma más educada ¿no? Algo más concéntrico, pero siempre (incomprensible, 1). Entonces también tendríamos que la velocidad del punto más, más alejado con radios más o menos iguales, en caso de que no choquen, iría más lento, (x)el punto más alejado. Bueno, es lo que, lo que yo pude observar. P: Ok::: Eso fue lo que pudo observar ¿qué más? H6: Por la conservación del momento angular. P: ¿Ajá, qué? H6: Digamos en los puntos en esta parte ((se refiere a la parte izquierda de la trayectoria)) se dan radios mayores y

Parte II.	**¿Y si aumentamos el número de epiciclos?**						
Intención:	Se busca, con apoyo de un applet, vislumbrar la noción de estabilidad del sistema, para esto se permite la posibilidad en el applet de aumentar hasta treinta el número de circunferencias y así analizar los cambios que se dan en el comportamiento del sistema.						
Estudiante	**M2**	**M3**	**H1**	**H3**	**H4**	**Equipo 3**	**Puesta en común**
						aunque agregues más círculos tardan la misma cantidad de tiempo en dar la vuelta. Mira, lo que sí es que el punto parece moverse más rápido. M3: Ok::: [VE3]-1-|02:23:32|- después de la puesta en común, M3 cambia su respuesta inicial a la pregunta. Su respuesta inicial había sido «Si, podría tener relación con la conservación del momento angular ya que esto depende del radio y la velocidad angular del objeto, y aquí se presentan los mismos parámetros solamente se agrega la manera de la trayectoria del objeto.» [VE3]-1-|02:25:10|- después de la puesta en común, H3 le agrega argumentos a su respuesta inicial a la pregunta, la cual no incluía el último párrafo.	estos más cercanos cercana los radios son menores y ya vimos que en las circunferencias pues la velocidad al parecer es mayor, entonces, hay una, buena la pregunta plantea si hay alguna relación, entonces yo creo que la relación es esa, bueno a parte de otras, pero sería visualmente la conservación del momento angular. [VG]-1-|02:21:39| P: Pero no me queda claro todavía cómo afecta eso el momento angular. H6: Porque se tiene que conservar, entonces, bueno, bueno es que no sé cómo plantearlo mejor, no sé cómo puedo explicarlo. Pero, pues sí, a la pregunta, de que si hay una relación yo creo que es el momento angú-, bueno la conservación del momento angular. H1: Es que sería con fuerzas, es decir si es una fuerza central sí, sí se conserva, pero esto son solo trayectorias. P: ¿Ustedes qué contestaron, o qué:::? ((refiriéndose al Equipo 2)) H2: Pues bueno yo iba a argumentar que entre mayor número de órbitas la trayectoria total recorrida iba a ser mayor y, pues yo lo relacioné con eso, pero no (incomprensible, 2) P: Ahorita estás repensando el= M2: =Bueno considerando que::: ese movimiento es para un solo planeta (incomprensible, 2) la observación decía que pues todo ese planeta tenía un cierto ciclo, un cierto tiempo, y así como lo dice "H2" ((se refiere a H2 por su nombre)) si aumentas el número de circunferencias parece que la distancia es mayor entonces si dejas ese, ese tiempo fijo por eso también se determina que tiene que ir más rápido, la velocidad tiene que aumentar. [VG]-1-|02:23:14| P: Ahorita que dijeron, no es que como que va tomando ya una forma definida, se esperaría que esa forma definida sea la del planeta ¿cierto? ((los estudiantes asienten con la cabeza)) ¿Por qué no cambia esa forma después? ¿O sea si yo sigo agregando circunferencias ustedes creen que esa forma cambie mucho? H4: (x)Va a converger, como a lo que va a ser ¿no? Si le sigue agregando pues cada vez se va haciendo más chiquito cada radio (x)que le va agregando entonces cada vez va contribuyendo menos al giro, y cada vez gira más entorno a su propio centro de masa, entonces ya no va a girar como que va a ser como diferencia sino en sí mismo, entonces pues ya no cambia tanto la forma definida.
Intencionalidad	Se busca confrontar el cómo cambia la trayectoria del planeta (estabilidad) con lo que provoca el cambio. Sin embargo, determinar cómo cambia y qué produce el cambio es una tarea cognitivamente muy compleja para los fenómenos de determinación del estado estacionario (Farfán, 2012; Romero, 2016). Se espera que, con ayuda del docente y a partir de las ideas planteadas por los estudiantes, se acerquen a la idea de que al tender los radios de las circunferencias a cero y la velocidad de movimiento del punto al infinito esto provoca que se logre la estabilidad; es decir, agregar una circunferencia muy pequeña y un punto sobre esta que se mueve muy rápido no provoca cambios significativos en el sistema en general.						
¿Qué hace?	**Comparar** lo que se mantiene invariante —el periodo—, con lo que no —tamaño de la trayectoria, radios, velocidad de los puntos—. **Comparar** el aporte que proporciona a la trayectoria el punto al agregar cada vez más circunferencias.	**Comparar** el aporte que proporciona a la trayectoria el punto al agregar cada vez más circunferencias.	**Comparar** los efectos sobre la forma de la trayectoria al aumentar el número de circunferencias.	**Comparar** lo que se mantiene invariante —el periodo—, con lo que no —tamaño de la trayectoria, radios, velocidad de los puntos—. **Comparar** los efectos sobre la forma de la trayectoria al aumentar el número de circunferencias. **Comparar** el aporte que proporciona a la trayectoria el punto al agregar cada vez más circunferencias.	**Comparar** el aporte que proporciona a la trayectoria el punto al agregar cada vez más circunferencias.	**Identificar** los parámetros en una noción física conocida. **Comparar** lo que se mantiene invariante —el periodo—, con lo que no —tamaño de la trayectoria, radios, velocidad de los puntos—.	**Identificar** la similitud con una noción geométrica conocida. **Identificar** los parámetros en una noción física conocida. **Comparar** lo que se mantiene invariante —el periodo—, con lo que no —tamaño de la trayectoria, radios, velocidad de los puntos—. **Comparar** el aporte que proporciona a la trayectoria el punto al agregar cada vez más circunferencias.
¿Cómo hace?	Prestando tención los cambios en el tamaño de la trayectoria, los radios y la velocidad de los puntos respecto del tiempo que tarda el planeta en completar la trayectoria. Prestando atención al aporte del punto al agregar cada vez más circunferencias.	Prestando atención al aporte del punto al agregar cada vez más circunferencias.	Relacionando la cantidad de bucles con el tamaño de los radios, sin indicar cómo es esa relación.	Presta tención los cambios en el tamaño de la trayectoria, los radios y la velocidad de los puntos respecto del tiempo que tarda el planeta en completar la trayectoria. Relaciona la cantidad de bucles con el tamaño de los radios, sin indicar cómo es esa relación. Presta atención al aporte del punto al agregar cada vez más circunferencias.	Prestando atención al aporte del punto al agregar cada vez más circunferencias.	Relacionando con la conservación del momento angular. Prestando atención los cambios en el tamaño de la trayectoria y la velocidad de los puntos respecto del tiempo que tarda el planeta en completar la trayectoria.	Relacionando con la noción de fractal, sin explicar cómo es esa relación. Relaciona con la conservación del momento angular. Prestando atención los cambios en el tamaño de la trayectoria y la velocidad de los puntos respecto del tiempo que tarda el planeta en completar la trayectoria. Prestando atención al aporte del punto al agregar cada vez más circunferencias.
Argumentos (A) y confrontaciones (C) presentados.	(A) Al aumentar el número de circunferencias en el modelo, la distancia en la trayectoria es mayor, y por lo tanto, la rapidez con que se mueve tiene que aumentar para completar la trayectoria durante el ciclo. (A) Al aumentar el número de circunferencias el aporte del punto a la trayectoria es despreciable, por lo que toma una forma casi definida.	(A) Al aumentar el número de circunferencias el aporte del punto a la trayectoria es insignificante.	(A) Mientras más círculos más bucles tienen que dar los planetas y cada círculo añadido tiene un radio menor que el anterior, por lo que su bucle será de menor longitud que el del círculo anterior.	(A) Al aumentar el número de circunferencias, la distancia en la trayectoria es mayor, y por lo tanto, la rapidez con que se mueve tiene que aumentar para completar la trayectoria durante el ciclo. (A) Mientras más círculos más bucles se dan en la trayectoria, volviéndose cada vez más pequeñas y recurrentes. (A) Al aumentar el número de circunferencias el aporte del punto a la trayectoria es despreciable, por lo que toma una forma casi definida.	(A) Al aumentar el número de circunferencias el aporte del punto a la trayectoria es insignificante.	(A) La conservación del momento angular depende del radio y la velocidad angular del objeto, y en la situación se presentan los mismos parámetros y solamente se agrega la manera de la trayectoria del objeto. (A) Al aumentar el número de circunferencias, la distancia en la trayectoria es mayor, y por lo tanto, la rapidez con que se mueve tiene que aumentar para completar la trayectoria durante el ciclo.	(A) Puede ser como un fractal de los arcos que se van haciendo dependiendo de los radios que se tengan, para establecerlo matemáticamente, va a ser como la ecuación de un fractal. (A) La conservación del momento angular depende del radio y la velocidad angular del objeto, y en la situación se presentan los mismos parámetros y solamente se agrega la manera de la trayectoria del objeto. (A) Al aumentar el número de circunferencias, la distancia en la trayectoria es mayor, y por lo tanto, la rapidez con que se mueve tiene que aumentar para completar la trayectoria durante el ciclo. (A) Al aumentar el número de circunferencias el aporte del punto a la trayectoria es insignificante.

9.7.2 Tarea #1. Etapa 2: Identificación de los invariantes de las acciones

TAREA #1

Objetivo de la Tarea: Caracterizar el comportamiento del sistema de forma cualitativa, lo que permitirá una comprensión más profunda del fenómeno y no solo aquello que detectan los sentidos a simple vista.

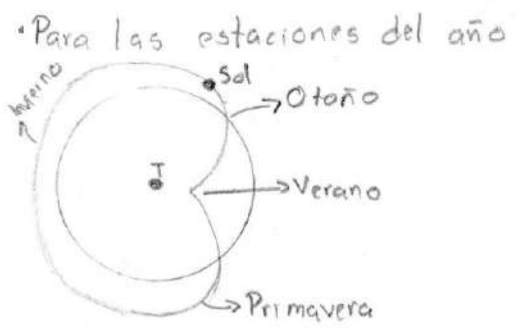
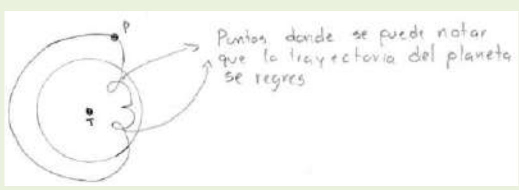
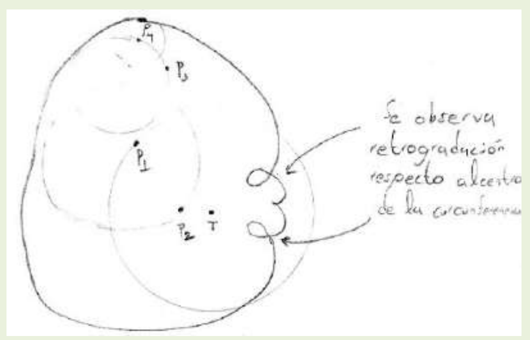
Parte I. **¿Qué permite explicar este modelo?**

Intención: Comprender por qué el modelo de los alejandrinos permite explicar aquello que el modelo griego no permitía.
Se busca propiciar una comprensión profunda del sistema, así como Fourier conocía el comportamiento del fenómeno de propagación del calor a través de la empírea antes de proponer su modelo matemático del fenómeno (Farfán y Romero, 2017).

Estudiante	**M2**	**M3**	**H1**	**H3**	**H4**	**Equipo 3**	**Puesta en común**
Pregunta a	La luminosidad es constante en el modelo con una sola circunferencia, ya que depende solamente de la distancia del planeta respecto a la Tierra, la cual es constante para una circunferencia de radio r; se tiene un problema análogo para la explicación de las estaciones del año. El movimiento de P alrededor de una circunferencia no explica el movimiento de retrogradación debido a que la velocidad es constante y se mueve siguiendo la trayectoria circular.	Las estaciones del año se dan por el movimiento de traslación de la Tierra, al dejar en el modelo geocentrico fija la Tierra pues no veían su comportamiento. Para la luminosidad de los planetas depende de cuanta cantidad de luz les llega del Sol pero al contemplar a la Tierra como el centro y al Sol como planeta por aparte al no estudiar al conjunto con el movimiento de traslación de los planetas no podían explicar la trayectoria de la luz. Ahora bien para el fenómeno de retrogradación el suponer el hecho de que se movían en una trayectoria circular es erróneo pues cada planeta tiene un distinto comportamiento.	Porque el brillo de un objeto aumenta conforme se acerca y disminuye conforme se aleja. Y si un planeta (con brillo constante) está a distancia constante con la Tierra, entonces su brillo sería constante. Porque si el Sol es quien da calor a la Tierra. El calor varía de la misma manera que el brillo. Así que con una órbita constante del Sol no podrían producirse los cambios de temperatura necesarios para producir las estaciones. Porque con una órbita de una circunferencia, los planetas siempre se mueven en un sentido. Por lo que no pueden parar y retroceder.	Debido a que se está suponiendo la Tierra al centro de la circunferencia, el hecho de que cambie la luminosidad de un astro no puede explicarse pues en este caso se tendría al astro a la misma distancia siempre respecto al centro, no teniendo sentido entonces que cambie la intensidad de la luz que se recibe de ahí. El fenómeno de retrogradación no podría explicarse pues el astro siempre se encontraría a la misma distancia del centro de la circunferencia si se moviera en un círculo. Las estaciones del año no tienen sentido si dejamos fija la Tierra como el centro de la circunferencia, pues debe haber un cambio en su posición respecto a otro lugar para explicar dicho fenómeno.	Si suponemos al punto P como el Sol, éste siempre se halla a la misma distancia de la Tierra. Las estaciones del año se dan cuando la tierra está a distintas distancias radiales del Sol. Por lo tanto falla la noción de las estaciones en el modelo con una circunferencia. Hablando de la retrogradación, como se cumplen las leyes de la física, el planeta sigue su propia trayectoria por efecto de inercia, lo cual impide que el planeta regrese sobre su propia trayectoria. Análogamente, al estar la tierra a la misma distancia del Sol, no hay acercamientos del mismo, por lo cual no se aprecia un efecto del aumento de la intensidad luminosa del Sol.	[VE3]-1-|00:15:16| M3: ¿Y las estaciones del año? H3: ¿Qué? (incomprensible, 8) M3: (incomprensible, 3) H3: Ah pues, es que imagínate que tienes una regla, ¿no? Entonces si se mueve, o sea si la dejas en el (incomprensible, 1, ¿puntito aquí?). Tiene sentido si fuera como un planeta y si tienes un planeta a una distancia alrededor de una manera, pero si lo alejas o lo acercas le daría (x)más o menos intenso, ¿no? M3: A parte se supone que en este tiempo estudiaban como uno, ¿no? Por uno. Y aquí también contempl- no contemplaban la cantidad de los kilómetros o (incomprensible, 2) ¿Ay no? ↑¿Si?↑ H3: Si, creo yo que (incomprensible, 4) esta de aquí (incomprensible, 2) como siempre está a la misma distancia no tendría sentido si cambia.	[VG]-1-|00:41:46| H1: Yo podría ((levantando la mano)) con el primero de luminosidad. ¡Eh! Bueno (x)la luminosidad (x)de un objeto varia con el::: con la distancia, o sea si se acerca más recibimos más luz, si se aleja recibimos menos. Y con la órbita de una circunferencia es una distancia constante, es un círculo de radio constante. Así que, si el planeta no cambia su brillo por no cambiar la distancia, tampoco cambiaría el brillo que percibimos. Así que, debería ser una órbita que si cambie la distancia a la Tierra, que se acerque y se aleje para explicar cambios de brillo= P: Para explicar cambios de brillo ¿quién quiere opinar sobre el cambio de luminosidad? H8: Yo ((levantando la mano)) consideré que, si por esas mismas razones se puede explicar con la luminosidad, pero si consideramos planetas entre el Sol y la Tierra que estorbaran o hicieran una especie de sombra. P: ¡Ajá! H8: Para que la iluminación del Sol no llegara 100% a la Tierra, podría haber cambios en la luminosidad. P: ¡Ajá! ¿Cómo con eclipses? H8: ((Asiente con la cabeza)) [VG]-1-|00:44:10| H8: También podría ser como que las órbitas de los planetas se sincronizan cierto tiempo con el sol ((explica el movimiento con sus manos)) y al estar, pos tomando un cierto tiempo, paralelos con la, con la, del sol y podría mantenerse más tiempo el cambio de luminosidad, pero solo considerando un poquito ((se refiere a la duración del evento)). P: ¡Ajá! Yo tengo un comentario, pero me voy a esperar, sobre eso. Porque hoy en día sabemos (x)que es, los planetas lo que hacen es reflejar la luz del Sol, ¿verdad? Sí. ¿Y en la época de los alejandrinos se sabía eso? H4: ¡Eh:::! Prácticamente no, por que como no es un modelo helicocéntrico cada planeta tiene su propio brillo, en el modelo alejandriano. P: ¡Ajá! Entonces eso, como que entonces no es el Sol el culpable de que cambien (x)de brillo ¿verdad? Tiene que ser el mismo planeta al que algo le pasa para que cambie de brillo. [VG]-1-|00:45:28| H1: Bueno, me surgió una idea, una idea, de una forma de::: pensar más, sería más antigua, más eh::: mística. Por ejemplo, decir que los planetas tienen almas o voluntades ¿no? Y que de repente puedan decir hoy quiero brillas más o hoy quiero brillar menos. Y::: igual el Sol, que yo me imagino que los alejandrinos si se imaginaban al Sol como una bola de fuego ¿no? Caliente, que era la que da el calor a la tierra y tal vez el Sol podía tener (x)una voluntad de decir eh tal año voy a calentar más, brillar más. P: De hecho los dioses están asociados a los planetas ¿verdad? Los dioses griegos, [los alejandrinos]. H1: [Justamente por eso]. Si, (x)y eso todavía podía ser explicado con una circunferencia. O sea, eso del brillo y estaciones, o sea con las voluntades de los planetas, pero el problema yo creo que ya es la retrogradación= H4: =Perdón, yo creo que ahí te sales un poquito del marco contextual, porque::: tú lo único que estás analizando (x)son circunferencias. O sea, igual ponte en el en los zapatos de un astrofi- astrónomo alejandrino, o sea, también están como (x)a este midiendo, están experimentando, igual no todo (incomprensible, 3) de todo esto, entonces están a prueba y error. Por ejemplo, ubícate en un, en un, astrónomo frustrado alejandrino que no puede explicar el modelo (x)de luminosidad o de estaciones como un modelo de una, así que yo discrepo un poco contigo. H1: Si, si, por eso dije al final que la retrogradación es lo que mata al modelo de una circunferencia, porque eso de plano no podría explicarse con ese modelo ¿no? Que el planeta se salga de su órbita y haga lo que quiera, ya tendrían que aplicar un modelo matemático basado en los datos.

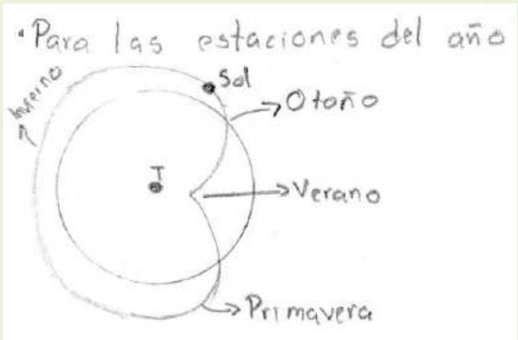
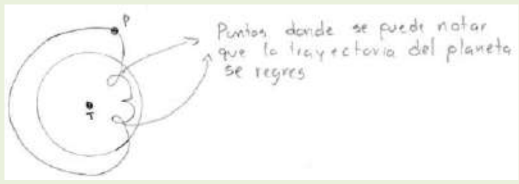
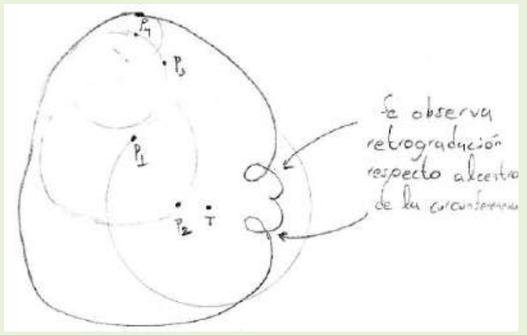
Parte I. **¿Qué permite explicar este modelo?**

Intención: Comprender por qué el modelo de los alejandrinos permite explicar aquello que el modelo griego no permitía.
Se busca propiciar una comprensión profunda del sistema, así como Fourier conocía el comportamiento del fenómeno de propagación del calor a través de la empírea antes de proponer su modelo matemático del fenómeno (Farfán y Romero, 2017).

Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
							[VG]-1-|00:48:35| P: Entonces de las estaciones, ya dijeron algo, pero para que quede así como tal vez de este grupo ((señala al equipo 3)) alguien, nos dice por qué no, ya lo mencionaron pero como para que lo dejemos. H1: Bueno, el calor también, bueno varía de la misma forma que el brillo, y si el calor se lo adjudicamos al sol, o sea un cambio de distancia bien podría, o sea si se disminuye la distancia va a recibir más calor la Tierra igual si se aleja va a recibir menos, y eso podría explicar estaciones. Por ejemplo, de la segunda circunferencia ahí podría verse un, en la parte derecha, por ejemplo que sea verano que el sol se acerca más, y luego seguiría arriba podría ser otoño y la parte izquierda el invierno y abajo la primavera. Digo como una idea de cuatro estaciones podrían (x)ser explicadas ahí por la segunda imagen.
Pregunta b	Los modelos 2, 3, y 4 permiten explicar el cambio en la luminosidad de los planetas y las estaciones del año, ya que la distancia entre P y T varía a lo largo de la trayectoria, entonces también la luminosidad. En los tres modelos se puede ver que la distancia entre P y T es mayor al radio de la primera circunferencia en parte de la trayectoria y menor al radio de la primera circunferencia en el resto de la trayectoria. Particularmente, el modelo con dos circunferencias explica de mejor manera el modelo de las estaciones que conocemos.	El modelo 2 explicaría perfectamente las estaciones del año, ya que suponiendo que el planeta es el Sol, en el punto mas cerca de la Tierra seria donde mayor calor y luz le da a la Tierra que seria la estación del Verano, conforme se aleja el Sol seria otoño, cuando mas lejos esta seria invierno y cuando se vuelve a acercar seria primavera. El modelo 2,3,4 explican la luminosidad de los planetas ya que entre mas cerca esten mas luminosos se ven y mas alejados menos luminosos se notaran.  	Los modelos 2, 3 y 4 pueden explicar el cambio de luminosidad de los planetas. Ya que en todos ellos varía la distancia a la Tierra (los planetas se acercan y luego se alejan). Por lo tanto también varía el brillo de los planetas. Los modelos 2, 3 y 4 pueden explicar las estaciones. Ya que si el Sol tiene una órbita de esos tipos, varía la distancia a la Tierra (el Sol se acerca y luego se aleja). Por lo que también varía el calor que le da a ella. Y así podrían explicarse las estaciones. Pero nuestras 4 estaciones podrían explicarse muy bien con el segundo modelo. Ya que en la parte derecha el Sol tendría un acercamiento máximo que correspondería al verano. Arriba al otoño. A la izquierda con el alejamiento máximo, el invierno. Y abajo la primavera.	Los modelos de 2, 3 y 4 circunferencias son capaces de explicar el cambio en la luminosidad de los planetas, dado que su trayectoria no describe un círculo perfecto alrededor del centro de la circunferencia, es decir, existen épocas del año en las que los astros se encuentran más alejados o menos alejados del centro de la circunferencia. Las estaciones del año pueden explicarse fácilmente usando el modelo de 2 circunferencias, teniéndose como circunferencia central a la Tierra y como aquella que gira alrededor de ella al Sol. Tendría sentido entonces que la parte más cercana de la trayectoria del Sol respecto a la Tierra produciría el verano y la más lejana el invierno.  	Se puede explicar a partir del modelo de 2 circunferencias pues la distancia del punto P a la tierra deja de ser igual radialmente en todos sus puntos, esto perimite que haya un acercamiento y un alejamiento del planeta (puede tratarse del Sol), claro, el modelo de 4 circunferencias explica mejor los fenómenos de luminosidad y de cambio en las estaciones del año.	[VE3]-1-|00:16:49| M3: ¿Cuáles permiten explicar el cambio de luminosidad y las estaciones del año? H3: Pero, imagínate que uno de estos fuera el Sol, (2) [como que M3: [Mmm] H3: suena muy raro, ¿no? M3: Si es ra= H3: =O sea, imagínate que uno de estos fuera el Sol y es el que hace que nos de calor o frío. Yo creo que a lo mej- por muy antiguo que fuera (incomprensible, 2, ¿la gente?) padecía de frío. M3: ((risas)) H3: Entonces, tienen sentido que si uno de estos fuera el Sol y si fuera a describir una trayectoria rara, entonces se aleja y hace calor y hace frío (incomprensible, 2). M3: Entonces, esto también se puede explicar con cualquiera de estos. H3: Con cualquiera de estos tres. M3: O en específico con este, ¿no? H3: Con este, ¿con este se podrían explicar las estaciones? M3: Pues sí, porque podrías decir de que aquí es como el verano donde más tiene (incomprensible, 5) y entonces conforme se va alejando es como el otoño, ¿no?, (incomprensible, 2), el pinche invierno y te acercas y es primavera, ¿no? H3: ¿Y este no lo podría explicar? Igual= M3: =Tendrías dos veranos, ¿no? H3: Tendrías dos veranos. M3: ((risas)) Pues sí, ¿no? Porque mira tienes dos puntos a la misma distancia interviniendo. Entonces tendrías dos veranos. ((risas)) H3: Y este tampoco podría, ni este. M3: Dos veranos, [dos ver- ((risas)) H3: [Dos veranos y medio]. M3: Tal vez el de la luminosidad podría ser.	[VG]-1-|00:50:24| P: De los modelos con dos, tres y cuatro circunferencias, entonces ¿cuál permite explicar el cambio de luminosidad de los planetas y las estaciones? Entonces vamos a escuchar de aquí, de este equipo ((señalando al Equipo 2)), alguien que nos comente. M1: ¿De luminosidad? P: ¡Ajá! ¿Cuál modelo te parece? M1: Mmm, yo creo que los tres. P: Los tres pueden explicar. M1: Porque, ya hay variación en la distancia entre, eh bueno la órbita ya no tiene radio constante, entonces ya hay variación entre la distancia del planeta y la Tierra, ya. P: Con eso explicamos cambios de distancia. ¿De acuerdo? ¿Todos de acuerdo? ((Los estudiantes asienten con la cabeza)) Entonces sí, los tres podrían ser luminosidad. ¿De las estaciones? ((M3 levanta la mano, pero H1 toma la palabra inmediatamente)) H1: Si ponemos ahí en esa órbita el Sol, ya va a haber partes en las que de más calor y otras menos. P: ¿Si? ¿Todos de acuerdo? H3: No exactamente, yo creo que, para lo que estamos acostumbrados nosotros aquí, el más sencillo sería el de dos circunferencias solamente, porque solamente tiene un punto en la órbita donde está, digamos, más cerca. O sea aquel planeta que rodea a la Tierra que está más cerca a nosotros, entonces tendría sentido que sólo en esa parte de la órbita hubiera más calor aquí en la Tierra y en la parte más alejada también tendría sentido decir que es aquella donde sentimos más frío. Sin embargo, las otras dos ((refiriéndose a los modelos con tres y cuatro circunferencias)) tienen= M3: =Dos puntos cercanos. H3: ¡Ajá! Dos puntos cercanos o dos puntos más o menos alejados, entonces= P: =Como que dos veranos ¿verdad? Tendría dos veranos. H3: Eso es un poco extraño, creo.
Pregunta c	El modelo 4 permite explicar el fenómeno de retrogradación. Dado que el vector velocidad es tangente a la trayectoria, en los modelos 2 y 3, dicho vector se mueve siempre en sentido horario visto desde T. En el modelo 4 se puede ver una retroceso al dar un giro completo y regresar al mismo punto.	El modelo 4 explica el fenómeno de retrogradación ya que es cuando se notaria mas la presencia de que la trayectoria del planeta se regresa y vuelve a tomar su trayectoria original.  	El modelo 4 puede explicar el fenómeno de retrogradación. Ya que tiene una parte (la parte derecha de la imagen) en la que los círculos se desfasan. Provocando que el planeta gire en sentido opuesto (horario) al del círculo con centro en la Tierra. En las animaciones de los modelos 2 y 3 se aprecia que los planetas se frenan, pero no se ve que retrocedan.	El modelo que explica de manera más sencilla la retrogradación es el de 4 circunferencias, pues la curva descrita por el cuarto planeta se corta a sí misma en ciertos puntos de la trayectoria (ver figura). En los modelos de 2 y 3 circunferencias podríamos observar un cambio de velocidad aparente al acercarse los planetas más lejanos a su punto más cercano al centro de la circunferencia principal.  	Pienso que el modelo que mejor describe el proceso de retrogradación es el modelo de 4 circunferencias, pues hay partes de la trayectoria en las que la trayectoria pasada se cruza con la trayectoria presente, de hecho, hay dos secciones de este fenómeno.	[VE3]-1-|00:14:09| H3: ¿Cuál de estas (incomprensible, 4, ¿permite explicar?) el fenómeno de retrogradación? (2) M3: >Yo digo que sería el ¿cuatro?< H3: ¡Ajá!, está, así como [(incomprensible, 3)] H6: [Como que regresa y luego sigue con la misma.]	[VG]-1-|00:52:57| P: Y en la pregunta c, ya::: dice ¿cuáles permiten explicar el fenómeno de retrogradación? (3) Entonces ¿cuál o cuáles? M2: [El::: modelo 4] ((varios lo confirman)) H4: [El modelo 4] P: ¿El modelo 4? Bueno de este equipo ((refiriéndose al Equipo 3)), ya tu hablaste ((refiriéndose a H3)), entonces ehm, "M2" o::: "H6" ((llama a M2 y H6 por su nombre)). Coméntenos, del modelo todos coincidieron que el 4, entonces ¿en qué parte del trayecto? H6: Bueno en la parte derecha, porque bueno, (incomprensible, 1) de hecho cualquier planeta. Realmente nada más se marca el rastro de uno de los puntos verdes, pero cualquiera de ellos si es observado desde la Tierra de alguna manera ((realiza el movimiento de un bucle con su mano e igual que H4)) se puede apreciar como hay un aparente cambio de dirección o de trayectoria. [VG]-1-|00:55:15| P: ¿Cuál modelo podría? M2: El cuatro. H6: Bueno, aun así considero que cualquier caso, porque en esta parte de aquí ((señalando la parte derecha de la imagen)) en el que hay dos circunferencias, esa parte aun observándola se podría ver aunque sea al menos uno, una regresión. P: ¿Están de acuerdo? H1: No necesariamente, es que del dibujo pienso que seguramente se podría ver que el planeta se frena, o sea que va, de repente va muy lento, se para un instante y luego ya sigue, pero regresión como

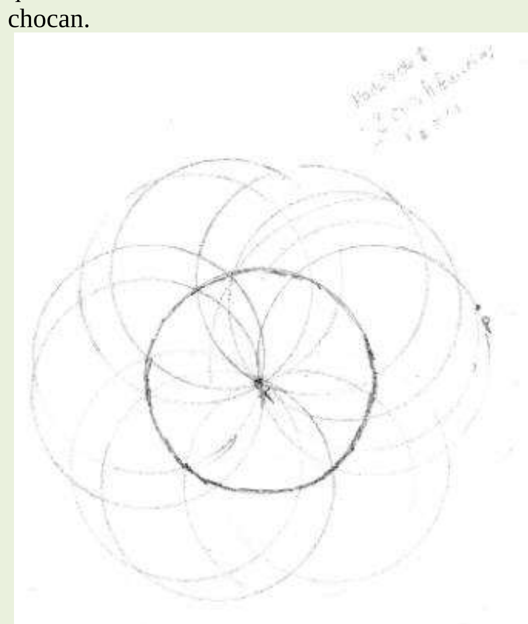
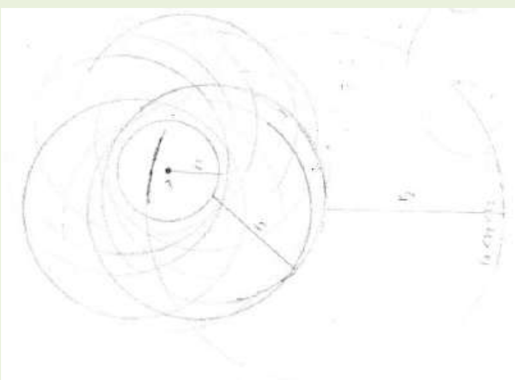
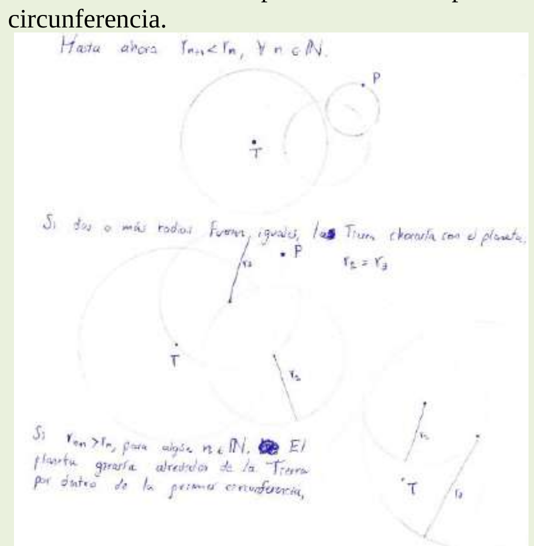
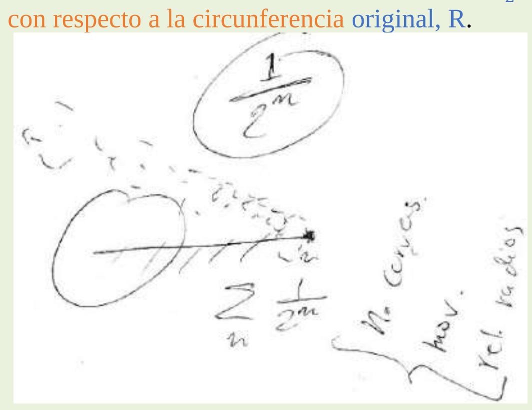
Parte I. **¿Qué permite explicar este modelo?**

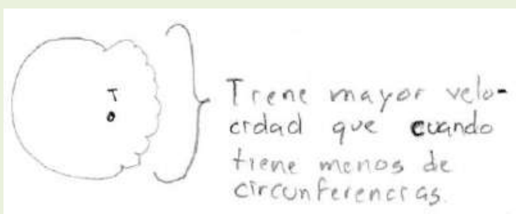
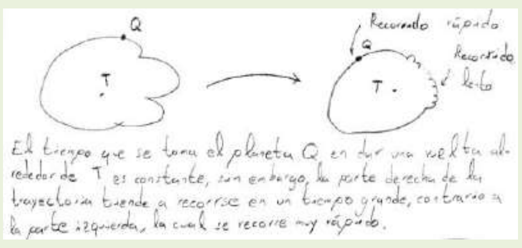
Intención: Comprender por qué el modelo de los alejandrinos permite explicar aquello que el modelo griego no permitía.
Se busca propiciar una comprensión profunda del sistema, así como Fourier conocía el comportamiento del fenómeno de propagación del calor a través de la empírea antes de proponer su modelo matemático del fenómeno (Farfán y Romero, 2017).

Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
							tal, bueno de la figura a mí no me parece que se, que se vea que se regrese, pero que si se frene, en el segundo y tercer modelo.
Intencionalidad	En los incisos a, b y c, se espera que el estudiante relacione el cambio de luminosidad y las estaciones del año con la distancia que hay entre T y P, por tanto, el modelo de una circunferencia no permite explicar estos fenómenos ya que esta distancia nunca cambia, no así en el modelo con 2, 3 y 4 circunferencias en donde la distancia de P a T cambia durante la trayectoria. Respecto del fenómeno de retrogradación, su explicación estará en los bucles que se generan en el modelo con 4 circunferencias.						
¿Sobre qué objetos lo hace?	**Comparar** La Tierra y el planeta a lo largo de su trayectoria. **Comparar** El vector velocidad y la trayectoria de planeta. **Observar** El planeta y la trayectoria, vistos desde la Tierra.	**Comparar** La Tierra y el planeta a lo largo de su trayectoria. **Observar** El planeta y la trayectoria, vistos desde la Tierra.	**Comparar** La Tierra y el planeta a lo largo de su trayectoria. **Observar** El planeta y la trayectoria, vistos desde la Tierra.	**Comparar** La Tierra y el planeta a lo largo de su trayectoria. **Observar** El planeta y la trayectoria, vistos desde la Tierra.	**Comparar** La Tierra y el planeta a lo largo de su trayectoria. **Observar** El planeta y la trayectoria, vistos desde la Tierra.	**Comparar** La Tierra y el planeta a lo largo de su trayectoria. **Observar** El planeta y la trayectoria, vistos desde la Tierra.	**Comparar** La Tierra y el planeta a lo largo de su trayectoria. **Comparar** El Sol y otro planeta. **Observar** El planeta y la trayectoria, vistos desde la Tierra.
¿Sobre qué relaciones lo hace?	**Comparar** Distancia entre la Tierra y el planeta. **Comparar** El vector velocidad es tangente a la trayectoria. **Observar** El bucle que realiza el planeta sobre la trayectoria.	**Comparar** Distancia entre la Tierra y el planeta. **Observar** El bucle que realiza el planeta sobre la trayectoria.	**Comparar** Distancia entre la Tierra y el planeta. **Observar** El bucle que realiza el planeta sobre la trayectoria.	**Comparar** Distancia entre la Tierra y el planeta. **Observar** El bucle que realiza el planeta sobre la trayectoria.	**Comparar** Distancia entre la Tierra y el planeta. **Observar** El bucle que realiza el planeta sobre la trayectoria.	**Comparar** Distancia entre la Tierra y el planeta. **Observar** El bucle que realiza el planeta sobre la trayectoria.	**Comparar** Distancia entre la Tierra y el planeta. **Comparar** Las orbitas del Sol y del planeta se sincronizan durante cierto tiempo. **Observar** El bucle que realiza el planeta sobre la trayectoria.
¿Por medio de qué lo hace?	**Comparar** Verbal: Depende solamente de la distancia del planeta respecto a la Tierra. Algebraico: Constante para una circunferencia de radio r. **Comparar** Verbal: El vector velocidad es tangente a la trayectoria. **Observar** Verbal: En el modelo 4 se puede ver un retroceso al dar un giro completo y regresar al mismo punto.	**Comparar** Verbal: Suponiendo que el planeta es el Sol, en el punto más cerca de la Tierra es el verano, conforme se aleja el Sol es el otoño, cuando más lejos está es invierno y cuando se vuelve a acercar es primavera. Icónico:  Verbal: Entre más cerca estén más luminosos se ven y entre más alejados menos luminosos. **Observar** Verbal: Entre más cerca estén más luminosos se ven y entre más alejados menos luminosos. Verbal: Se notaría más la presencia de que la trayectoria del planeta se regresa y vuelve a tomar su trayectoria original. Icónico: 	**Comparar** Verbal: El brillo de un objeto aumenta conforme se acerca y disminuye conforme se aleja. Verbal: si un planeta está a distancia constante con la Tierra, entonces su brillo sería constante. Verbal: En todos ellos varía la distancia a la Tierra. Verbal: En la parte derecha el Sol tendría un acercamiento máximo que correspondería al verano. Arriba al otoño. A la izquierda con el alejamiento máximo, el invierno. Y abajo la primavera. **Observar** Verbal: Para el modelo 4, en la parte derecha de la imagen, en la que los círculos se desfasan, provoca que el planeta gire en sentido opuesto (horario) al del círculo con centro en la Tierra.	**Comparar** Verbal: Se tendría al astro a la misma distancia siempre respecto al centro. Verbal: Dado que su trayectoria no describe un círculo perfecto alrededor del centro de la circunferencia. Icónico:  Verbal: Entre más cerca estén más luminosos se ven y entre más alejados menos luminosos. **Observar** Verbal: La curva descrita por el cuarto planeta se corta a sí misma en ciertos puntos de la trayectoria (ver figura). Icónico: 	**Comparar** Verbal: El Sol siempre se halla a la misma distancia de la Tierra. Verbal: Las estaciones del año se dan cuando la tierra está a distintas distancias radiales del Sol. Verbal: pues la distancia del punto P a la tierra deja de ser igual radialmente en todos sus puntos. **Observar** Verbal: Hay partes de la trayectoria en las que la trayectoria pasada se cruza con la trayectoria presente.	**Comparar** Verbal: Siempre está a la misma distancia. Verbal: Si uno de estos fuera el Sol y si fuera a describir una trayectoria rara, entonces se aleja y hace calor y hace frío. Verbal: Podría decir que aquí es como el verano y entonces conforme se va alejando es como el otoño, el invierno, te acercas y es primavera. **Observar** Verbal: Como que regresa y luego sigue con la misma.	**Comparar** Verbal: La luminosidad de un objeto varía con la distancia. Algebraico: Si se disminuye la distancia la Tierra va a recibir más calor, si se aleja va a recibir menos. Verbal: La órbita ya no tiene radio constante Verbal: hay variación entre la distancia del planeta y la Tierra. Verbal: Aquel planeta que rodea a la Tierra que está más cerca de nosotros, entonces tendría sentido que sólo en esa parte de la órbita hubiera más calor aquí en la Tierra y en la parte más alejada también tendría sentido decir que es aquella donde sentimos más frío. **Comparar** Verbal: Planetas entre el Sol y la Tierra que estorbaran o hicieran una especie de sombra. **Observar** Verbal: Si es observado desde la Tierra de alguna manera ((realiza el movimiento de un bucle con su mano e igual que H4)) se puede apreciar como hay un aparente cambio de dirección o de trayectoria.
Invariantes de las acciones	- Distancia entre la Tierra y el planeta. - El bucle que realiza el planeta sobre la trayectoria.						

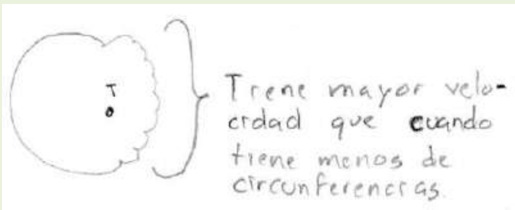
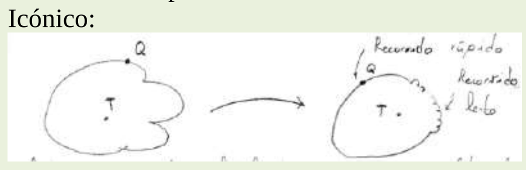
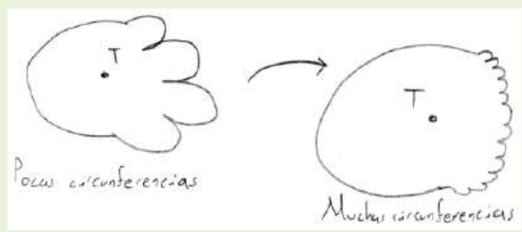
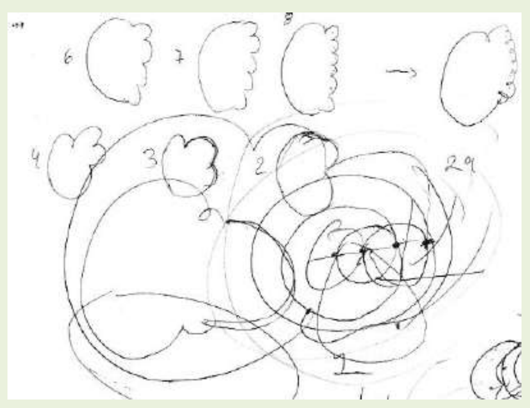
Parte II. **¿Y si aumentamos el número de epiciclos?**

Intención: Se busca, con apoyo de un applet, vislumbrar la noción de estabilidad del sistema, para esto se permite la posibilidad en el applet de aumentar hasta treinta el número de circunferencias y así analizar los cambios que se dan en el comportamiento del sistema.

Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
Pregunta a	En la figura se puede ver que disminuyen. El número de bucles aumenta, teniendo uno de mayor tamaño y el resto disminuyendo en tamaño. Si consideramos un modelo en el que los radios de las circunferencias agregadas aumenten, se obtendría un modelo similar, pero la mayoría de los bucles aumentarían su tamaño teniendo al final uno pequeño. Además, hay circunferencias donde la Tierra queda encerrada en dicha circunferencia o incluso chocan.  	Solo van disminuyendo los radios.	$r_n > r_{n+1}$ para todo n natural. Datos curiosos: Si dos o más radios fueran iguales, el planeta eventualmente chocaría con la Tierra. Si [math]r_n para algún n, las órbitas girarían alrededor de la Tierra por dentro de la primera circunferencia. 	Solo se vuelven más pequeños.	A apreciación del dibujo, la variación del radio de las circunferencias conforme se añade otra es $\frac{R}{2^n}$, con respecto a la circunferencia original, R. 	[VE3]-1-|01:01:55| H6: Cada circunferencia es la mitad de la anterior, tiene un radio de la mitad de la anterior. (4) Esta circunferencia tiene un radio de la mitad de esta. M3: Sí, creo que sí. Se van haciendo más chicos, o sea de mitad. H6: [¡Ajá!] H3: [Quieres] *wachar* eso eh, si eso que dices es cierto sería interesante. ((Empieza a medir sobre la pantalla con el transportador)) M3: ¿Y por qué con el transportador si tienes una regla? ((risas)) H3: Porque está más chiquito el transportador "M3" ((llama a M3 por su nombre)). M3: ¡Ay! No lo he detenido, qué tonta. (16) No m-, sí es cierto. H3: ¿En serio? M3: ↑Sí↑ [VE3]-1-|01:03:11| H6: Pos no jaló. H3: (Incomprensible, 1, ¿después?) del tercer círculo ya no jaló la idea de que disminuyen a la mitad. M3: ¿Uju? H3: Del tercer círculo ya no jaló eso de que disminuyan a la mitad. M3: Sí::: H3: ¿En serio? M3: Mira aquí son como cuatro y medio= H3: =Tu tienes unas elipses= M3: Ah:::, mira y aquí son como dos veinticinco, y como uno y cacho. Son casi, sí son casi la mitad. H3: No mira, estos son dos cuatro, dos qué, dos siete, dos ocho, dos punto ocho ¡dos punto ocho! Este sí es de uno punto cuatro, (3) pero este es de (incomprensible, 2) y este es de seis milímetros=	[VG]-1-|02:03:47| P: ¿Cómo cambian los radios de una circunferencia a otra conforme se van agregando? H4: Bueno, tal vez no importe tanto la expresión, eh, pero, eh, digamos que decrecían como uno en a la dos n. P: >Ok< (3) Ok, entonces (3) ↑Ajá↑ No importa tanto la expresión matemática, pero uno como a la dos n, pero ¿cómo sabes que uno a la dos n? H4: Fue una suposición. P: Una suposición, un supuesto. H8: Ver-, bueno, de vista tiene varias (incomprensible, 1, ¿formas?). P: Ok, ¿quién más? H6: Yo llegué a la misma, a la misma conclusión. P: Llegaron a la misma conclusión. H6: ¡Ajá! Pero es que yo::: vi repetidas veces la animación. P: ¿Ajá? H6: Y siguiendo la trayectoria anaranjada, viendo las circunferencias, pues si pareciera que cada radio es la mitad del anterior. P: Ok, ¿pareciera que cada radio es la mitad del anterior? H6: Sí, la expresión es uno entre dos a la n. P: Ok, pero eso ¿pareciera? ¿Cierto? H6: ¡Ajá! ((asiente con la cabeza)) P: Pero, entonces, (x)si tienes que contestar algo así como con certeza ¿qué contestarían? M3: Pues que [se van haciendo más pequeños]. H3: [Pos que se hacen más pequeños] H1: Que disminuyen. P: Van disminuyendo ¿verdad? Eso es como con certeza, eso. La expresión quien sabe, porque habría que tener como más informació:::n. Bueno los compañeros ((señalando al equipo 2)) tal vez nos puedan compartir lo que

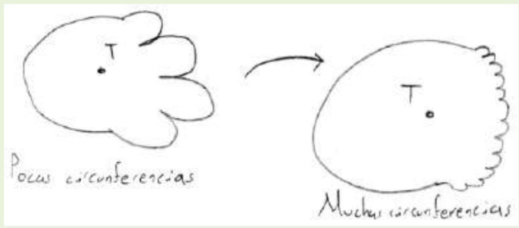
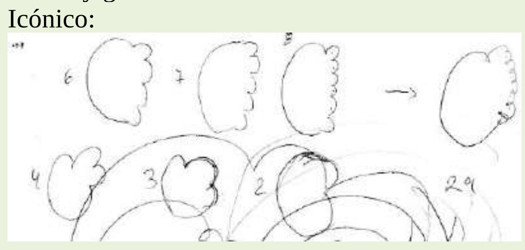
Parte II.	**¿Y si aumentamos el número de epiciclos?**						
Intención:	Se busca, con apoyo de un applet, vislumbrar la noción de estabilidad del sistema, para esto se permite la posibilidad en el applet de aumentar hasta treinta el número de circunferencias y así analizar los cambios que se dan en el comportamiento del sistema.						
Estudiante	**M2**	**M3**	**H1**	**H3**	**H4**	**Equipo 3**	**Puesta en común**
						M3: =Bueno solo van disminuyendo ¿no? Ya.	estaban haciendo, al respecto, porque ellos si trataron de::: como que medirlo. H2: Bueno, digamos, los pi- la posición los pixeles que había entre cada, o sea la distancia entre:::, el radio, pero en pixeles. Y encontramos que la primera era la mitad, se aproximaba a la mitad del primer radio, y la tercera se aproximaba a la tercera parte del primer radio, pero la cuarta ya no nos coincidió que fuera la cuarta parte; o medimos mal, entonces podría ser uno en- n, o nosotros, bueno yo también había visto, pero nada más fue asumiendo que fuera la mitad cada radio, que también era uno entre dos a la n. P: Ah ok, pero en lo que coincidían todos es que disminuyen ¿verdad? ((los estudiantes asienten con la cabeza)) En eso si coinciden todos. “H1” ((refiriéndose por su nombre)) me dijo por qué no podían aumentar, entonces no sé si quiera compartirlo con los compañeros su análisis de por qué no se pueden, por qué no pueden aumentar los radios. H1: Bueno primero me, eh, me fijé en el caso en que::: dos radios son iguales, ahí eventualmente se produciría un choque con la Tierra, porque (x)los círculos eh, no sé si se alcanza a ver ((mostrando su hoja de trabajo a los compañeros)). P: Si quieres lo haces en el, en el pintarrón. Ahí hay plumones H1: El círculo de la tierra y por acá voy a poner un círculo del mismo radio. Yo puedo encontrar un punto sobre esta circunferencia, en la que este, le voy a poner r dos ((se refiere al radio de la segunda circunferencia)), un punto sobre esta circunferencia en la que diste r dos de la Tierra, aquí voy a trazar otro círculo y esta que sea la trayectoria del planeta y se ve que eventualmente aquí chocaría con la Tierra, en algún punto ¿no? Podría ser cuando avance más, por acá, pero en algún punto chocaría con la Tierra. Y ahora se me ocurrió que, pues algo parecido, esta es la Tierra, con un r dos menor, que realmente podría ser un r n-ésimo en el caso general, pero que aquí hubiera un círculo mayor que r tres, o sea no pasaría algo trágico pero si serían órbitas interiores. Pero serían, bueno, le darían vuelta a la Tierra por dentro de la primera circunferencia, si fueran mayores. Pero el caso feo es que chocarían con tan solo dos circunferencias iguales eventualmente chocaría con la Tierra.
Intencionalidad	Se busca concluir que los radios de las circunferencias tienden a cero en forma cualitativa, para esto los estudiantes podría usar frases como “disminuyen”, “se hacen más pequeños”, entre otras.						
¿Sobre qué objetos lo hace?	**Observar** Los radios de las circunferencias. **Comparar** Las oscilaciones y cantidad de circunferencias.	**Observar** Los radios de las circunferencias.	**Observar** Los radios de las circunferencias.	**Observar** Los radios de las circunferencias.	**Estimar** Los radios de las circunferencias. **Comparar** Los radios y el radio de la primera circunferencia.	**Estimar** Los radios de las circunferencias. **Medir** Los radios de las circunferencias. **Observar** Los radios de las circunferencias.	**Observar** Los radios de las circunferencias. **Estimar** Los radios de las circunferencias. **Medir** Los radios de las circunferencias.
¿Sobre qué relaciones lo hace?	**Observar** La medida de los radios disminuye. **Comparar** Aumento del número de oscilaciones de menor tamaño al agregar circunferencias.	**Observar** La medida de los radios disminuye.	**Observar** La medida de los radios disminuye.	**Observar** La medida de los radios disminuye.	**Estimar** La medida de los radios. **Comparar** La medida de los radios varía según $\frac{R}{2^n}$, donde R es el radio de la primera circunferencia.	**Estimar** La medida de los radios. **Medir** La medida de los radios disminuye. **Observar** La medida de los radios disminuye.	**Observar** La medida de los radios disminuye. **Estimar** La medida de los radios. **Medir** La medida de los radios disminuye.
¿Por medio de qué lo hace?	**Observar** Verbal: En la figura se puede ver que disminuyen. **Comparar** Verbal: El número de bucles aumenta, teniendo uno de mayor tamaño y el resto disminuyendo en tamaño.	**Observar** Verbal: Solo van disminuyendo los radios.	**Observar** Algebraico: $r_n > r_{n+1}$ para todo n natural.	**Observar** Verbal: Solo se vuelven más pequeños.	**Estimar** Verbal: A apreciación del dibujo la variación del radio de las circunferencias. **Comparar** Algebraico: $\frac{R}{2^n}$ Icónico: 	**Estimar** Verbal: Cada circunferencia es la mitad de la anterior, tiene un radio de la mitad de la anterior. **Medir** Numérico: Estos son 2.8, este sí es de 1.4 y este es de 6 milímetros. **Observar** Verbal: Solo se vuelven más pequeños.	**Observar** Verbal: Si pareciera que cada radio es la mitad del anterior. **Estimar** Algebraico: Digamos que decrecen como $\frac{1}{2^n}$. Algebraico: Asumiendo que fuera la mitad cada radio, que también era uno entre dos a la n **Medir** Numérico: Encontramos que la primera era la mitad, se aproximaba a la mitad del primer radio, y la tercera se aproximaba a la tercera parte del primer radio, pero la cuarta ya no nos coincidió que fuera la cuarta parte; o medimos mal.
Invariantes de las acciones	- La medida de los radios disminuye.						
Pregunta b	La rapidez es mayor al aumentar las circunferencias. Además de que la trayectoria parece tomar una forma definida al aumentar el número de circunferencias.	Pues entre mas circunferencias se agreguen mas rápido va el punto Q. 	Conforme se agregan más círculos los planetas tienen que recorrer mayor distancia y hacer más giros. Así que si tienen que mantener un periodo constante de rotación. Tendrían que moverse con más rapidez conforme se agregan círculos.	Se vuelve aparentemente más rápido en ciertos puntos de la órbita mientras el número de circunferencias aumenta. 	Conforme se agrega una circunferencia, la velocidad recorrida por el punto de la órbita, aumenta, esto pues la pendientes en la gráfica de los puntos de mayores circunferencias es mayor a las de menor número de circunferencias. 	[VE3]-1-|01:04:00| H6: Va aumentando la velocidad ¿no? M3: A no sé, no he vi- no he llegado a esa, pérame. (16) Es que ni sé. La siguiente gráfica muestra la distancia recorrida por el punto que se mueve sobre las circunferencias ((leyendo la pregunta)) H3: (Incomprensible, 2) La velocidad está aumentando. M3: Sí, es la, la pendiente es la velocidad. H3: ¿Entonces? M3: Entre más::: cerca esté del *Y* es más grande su velocidad ¿no? (4) Por que	[VG]-1-|02:03:47| P: Ok, la siguiente gráfica muestra la distancia recorrida por un punto que se mueve sobre la circunferencia sexta, décima, vigésima y trigésima, entonces, ¿cómo cambia el movimiento de dichos puntos, (7) de una circunferencia a otra? H4: Bueno ((H7 levantó la mano, entonces H4 le cedió la palabra)). H7: Pues entre más aumenten el número de circunferencias, un punto sobre esa circunferencia va a ser, bueno digamos un planeta en esa circunferencia se va a mover a una velocidad mayor que un planeta en una circunferencia menor.

Parte II. **¿Y si aumentamos el número de epiciclos?**
Intención: Se busca, con apoyo de un applet, vislumbrar la noción de estabilidad del sistema, para esto se permite la posibilidad en el applet de aumentar hasta treinta el número de circunferencias y así analizar los cambios que se dan en el comportamiento del sistema.

Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
						recorre mayor distancia en menos tiempo ¿no? H6: Exactamente. [VE3]-1-|02:25:10|- después de la puesta en común, H3 elimina una parte de su respuesta inicial, esta incluía «…aumenta, sin embargo, el tiempo que tarda un planeta en dar una vuelta completa permanece constante»	Porque de la gráfica se ve que, por ejemplo, la amarilla es la es que es del mayor número de circunferencias, entonces quiere decir de la gráfica que recorre mayor, mayores distancias en menores tiempos y::: por eso sabemos que es mayor la velocidad comparada con la anterior. P: ¿Qué más? ¿(x)Quién está de acuerdo, no está de acuerdo? ¿Otro argumento? Pueden estar de acuerdo, pero tener otro argumento. H2: Lo mismo, pero nosotros nos fijamos en la pendiente. P: ¿Se fijaron en la pendiente? M3: Ajá ((varios estudiantes asienten con la cabeza)).
Intencionalidad	A través del estudio del cambio se pretende que los estudiantes infieran que la velocidad de los puntos sobre cada circunferencia sigue aumentando sin cota, para esto podría utilizar frases como “va más rápido”, “en el mismo tiempo recorre cada vez más distancia”, entre otras. Según la prueba piloto, es posible que para la pregunta b los estudiantes consideren que la gráfica se refiere a la trayectoria del planeta al agregar circunferencias, cuando en realidad se refiere al movimiento de cada punto sobre cada circunferencia.						
¿Sobre qué objetos lo hace?	**Observar** Los puntos. **Comparar** Las trayectorias al agregar circunferencias.	**Estimar** El punto Q y la trayectoria.	**Observar** El punto Q y la trayectoria. **Estimar** El punto Q y la trayectoria.	**Observar** El punto Q y la trayectoria. **Estimar** El punto Q y la trayectoria.	**Comparar** Las pendientes. **Estimar** El punto Q y la trayectoria.	**Observar** Las gráficas.	**Observar** Las gráficas. **Comparar** Las pendientes.
¿Sobre qué relaciones lo hace?	**Observar** Distancia recorrida en función del tiempo. **Comparar** La trayectoria va tomando una forma definida.	**Estimar** Distancia recorrida en función del tiempo.	**Observar** Distancia recorrida en función del tiempo. **Estimar** Distancia recorrida en función del tiempo.	**Observar** Distancia recorrida en función del tiempo. **Estimar** Distancia recorrida en función del tiempo.	**Comparar** A mayor pendiente mayor rapidez. **Estimar** Distancia recorrida en función del tiempo.	**Observar** Entre más cercana al eje Y mayor pendiente. Distancia recorrida en función del tiempo.	**Observar** Distancia recorrida en función del tiempo. **Comparar** A mayor pendiente mayor rapidez.
¿Por medio de qué lo hace?	**Observar** Verbal: La rapidez es mayor al aumentar las circunferencias. **Comparar** Verbal: La trayectoria parece tomar una forma definida al aumentar el número de circunferencias.	**Estimar** Verbal: Pues entre más circunferencias se agreguen más rápido va el punto Q. Icónico: 	**Observar** Verbal: Conforme se agregan más círculos los planetas tienen que recorrer mayor distancia en un mismo tiempo. **Estimar** Verbal: Tendrían que moverse con más rapidez conforme se agregan círculos.	**Observar** Verbal: Conforme se agregan más círculos los planetas tienen que recorrer mayor distancia en un mismo tiempo. Icónico:  **Estimar** Verbal: Se vuelve aparentemente más rápido en ciertos puntos de la órbita mientras el número de circunferencias aumenta.	**Comparar** Verbal: La pendiente en la gráfica de los puntos de mayores circunferencias es mayor a las de menor número de circunferencias. Icónico:  **Estimar** Verbal: Conforme se agrega una circunferencia, la velocidad recorrida por el punto de la órbita, aumenta.	**Observar** Verbal: Entre más cerca esté del Y es mayor su velocidad. Verbal: Por que recorre mayor distancia en menos tiempo.	**Observar** Verbal: La gráfica recorre mayores distancias en menores tiempos y por eso sabemos que es mayor la velocidad comparada con la anterior. **Comparar** Verbal: Lo mismo, pero nosotros nos fijamos en la pendiente.
Invariantes de las acciones	- Distancia recorrida en función del tiempo. - A mayor pendiente mayor rapidez.						
Pregunta c	La distancia que recorre el planeta aumenta al aumentar el número de circunferencias, así como también aumenta el número de bucles.	Conforme mas circunferencias se agreguen la parte derecha se vuelve mas curvas cerradas y la parte izquierda se vuelve mas amplia y rápida. Ademas la parte derecha la recorre en un tiempo mas lento que la parte izquierda.	Los planetas van haciendo más bucles y cada vez más pequeños conforme se agregan círculos. Parece que la trayectoria tiende a una elipse con la Tierra en uno de los focos. La distancia máxima es la suma de los radios. Así que esta suma debe converger para que la figura converja.	Se observan deformaciones en la parte más cercana al centro de la trayectoria, las cuales aumentan cada vez más conforme se agregan más circunferencias. Por otra parte, la trayectoria en su punto más alejado describe una perturbación grande, la cual tiende a aumentar su tamaño conforme se agregan más circunferencias. Observe la simetría horizontal de la trayectoria y la aparente convergencia hacia una trayectoria muy bien definida. 	Se va haciendo más uniforme (suavemente continua) en su parte derecha, pues se van agregando cada vez más pequeños arcos que modelará una curva suave cuando el número de circunferencias agregadas sea muy grande. 	[VE3]-1-|01:05:54| H6: Agregamos dos circunferencias. M3: Teníamos tres circunferencias. H6: (Incomprensible, 1) la trayectoria fíjate, la trayectoria se va::: ¿deteriorando? ¿Se va haciendo discreta, no? M3: Oye H6: No sí, mira, aquí. Mira, ahorita vas a ver. Esta es un polígono discreto. M3: Pues porque va más rápido en ese punto. [VE3]-1-|01:07:13| H3: No te parece como una especie de elipse fea. M3: ((risas)) Parece un (2) gatito del cielo. H3: ¿Un qué? M3: Un gatito del cielo, una nube pues. H3: Ah::: [VE3]-1-|01:07:43| H3: ¿Cómo cambian las trayectorias mientras se agregan más? M3: Que se vuelve más como chicharrón, wey, la parte derecha. H3: ¡Ajá! M3: Y lo avienta más atrás. H3: Y si le pongo todos ((se refiere a todas las circunferencias que permite el applet)) M3: Ya ves se hace como chicharrón. [VE3]-1-|02:27:31|- después de la puesta en común, H3 le agrega argumentos a su respuesta inicial a la pregunta, la cual no incluía la frase «y la aparente convergencia hacia una trayectoria muy bien definida»	[VG]-1-|02:12:23| P: ¿Cómo cambia la trayectoria del planeta conforme se agregan más y más circunferencias? Ahora si estamos hablando de la trayectoria del planeta, entonces qué analizaron de ese. A ver, quién nos dice qué fue lo que hicieron para analizar ese. H2: Nosotros nos fijamos que el punto más alejado que estaba, la (incomprensible, 1) de T era la suma de todos, de todas las otras circunferencias. Entonces entre más circunferencias tuviera, más alejado iba a estar de T, entonces iba a recorrer una gran distancia en un y regreso, entre mayor fuera el número de radios iba a ser más grande, la trayectoria. P: ¿Siempre, siempre iba a ser más grande la trayectoria? ¿En todo momento? H1: Bueno, ahí también podríamos preguntarnos eh::: la relación entre, entre los radios. Porque si eh::: como si estuviéramos midiendo pixeles, si variara con uno en n no convergería, o sea la suma al infinito ser- haría una distancia máxima infinita. P: ¿Si fuera uno en n? ((H1 asiente con la cabeza)) ¿Los radios? H1: Sí, en el punto más alejado, que es la suma de todos los radios. P: Ah ok, entonces la suma de todos los radios sería la que no convergería, en ese caso= H1: =En ese caso= P: =Si fuera uno entre n. H1: Sí. (3) Si fueran mitades si:::, si convergerían. P: Uno entre dos a la n. H1: ¡Ajá! Esa sí converge. H8: Aunque conforme más círculos se van agregando tiende a una forma::: ¿elíptica? Pero es que no sé (incomprensible, 2) cómo verlo porque es más grande de un lado y más chico del otro.
Intencionalidad	La intención es que el estudiante identifique el carácter estable del sistema en forma cualitativa, esto a través de frases como “cuando hay muchas circunferencias casi no cambia la forma de la trayectoria conforme se agregan más”, “tiende a parecerse a una…”. Para esto se espera analice el cambio en la forma de la trayectoria conforme se agregan cada vez más circunferencias. Se espera que, expresen que “algo extraño pasaba con la parte izquierda de la trayectoria”, esto es importante, pues no toda la trayectoria es estable.						
¿Sobre qué objetos lo hace?	**Comparar** Las trayectorias. **Observar** Las trayectorias.	**Observar** Las trayectorias. **Comparar** Distintas partes de una misma trayectoria.	**Observar** Las trayectorias. **Comparar** Las trayectorias.	**Observar** Las trayectorias. **Comparar** Las trayectorias.	**Observar** Las trayectorias. **Comparar** Las trayectorias.	**Observar** Las trayectorias. **Comparar** Las trayectorias.	**Observar** Las trayectorias. **Comparar** Las trayectorias. **Estimar** La suma de los radios.
¿Sobre qué relaciones lo hace?	**Comparar** Distancia recorrida sobre la trayectoria.	**Observar** La forma de la trayectoria.	**Observar** La forma de la trayectoria.	**Observar** La forma de la trayectoria.	**Observar** La forma de la trayectoria.	**Observar** La forma de la trayectoria.	**Observar** La distancia recorrida.

Parte II. **¿Y si aumentamos el número de epiciclos?**

Intención: Se busca, con apoyo de un applet, vislumbrar la noción de estabilidad del sistema, para esto se permite la posibilidad en el applet de aumentar hasta treinta el número de circunferencias y así analizar los cambios que se dan en el comportamiento del sistema.

Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
	Observar La forma de la trayectoria.	**Comparar** Distancia recorrida en función del tiempo.	**Comparar** La forma de la trayectoria.	**Comparar** La forma de la trayectoria.	**Comparar** La forma de la trayectoria.	**Comparar** La forma de la trayectoria.	**Comparar** La forma de la trayectoria. **Estimar** La convergencia numérica.
¿Por medio de qué lo hace?	**Comparar** Verbal: La distancia que recorre el planeta aumenta al aumentar el número de circunferencias. **Observar** Verbal: El número de oscilaciones aumenta al aumentar el número de circunferencias.	**Observar** Verbal: El número de oscilaciones aumenta al aumentar el número de circunferencias. **Comparar** Verbal: La parte derecha la recorre en un tiempo más lento que la parte izquierda, en una misma trayectoria.	**Observar** Verbal: Los planetas van haciendo más oscilaciones y cada vez más pequeñas conforme se agregan círculos. **Comparar** Verbal: Parece que la trayectoria tiende a una elipse con la Tierra en uno de los focos.	**Observar** Verbal: Se observan deformaciones en la parte más cercana al centro de la trayectoria, las cuales aumentan cada vez más conforme se agregan más circunferencias. **Comparar** Verbal: Observe la simetría horizontal de la trayectoria y la aparente convergencia hacia una trayectoria muy bien definida. Icónico:  	**Observar** Verbal: Se va haciendo más uniforme (suavemente continua) en su parte derecha. **Comparar** Verbal: Se van agregando cada vez más pequeños arcos que modelará una curva suave cuando el número de circunferencias agregadas sea muy grande. Icónico: 	**Observar** Verbal: La trayectoria se va ¿deteriorando? ¿se va haciendo discreta? Verbal: La parte derecha vuelve más como chicharrón. **Comparar** Verbal: No te parece como una especie de elipse fea.	**Observar** Verbal: Entre mayor número de radios mayor distancia recorrida. **Comparar** Verbal: Conforme más círculos se van agregando tiende a una forma ¿elíptica? **Estimar** Numérico: Si estuviéramos midiendo pixeles, si variara con $\frac{1}{n}$ no convergería, o sea la suma al infinito haría una distancia máxima infinita. Si fueran mitades si convergerían.
Invariantes de las acciones	- La forma de la trayectoria. - La distancia recorrida sobre la trayectoria.						
Pregunta d	Sí, dado que el modelo se plantea para un ciclo determinado para cada planeta, al aumentar el numero de circunferencias en el modelo, la distancia en la trayectoria es mayor, y por lo tanto, la rapidez con que se mueve tiene que aumentar para completar la trayectoria durante el ciclo. Al aumentar el número de circunferencias, el punto se mueve mucho más rápido, y la aportación que realiza a la trayectoria puede ser despreciable, por lo que, se puede apreciar una forma casi definida.	Si, entre mas circunferencias vamos agregando la forma de la trayectoria no se ve casi afectada ya que el radio vas disminuyendo tanto de tal forma que despues se vera que el movimiento del punto Q es insignificante.	Sí hay relación. Ya que de b) se tiene que mientras más círculos más bucles tienen que dar los planetas. Y de a) se tiene que cada círculo añadido tiene un radio menor que el anterior, por lo que su bucle será de menor longitud que el del círculo anterior.	Sí, el aumento en la velocidad aparente se explica por el hecho de que la trayectoria total del planeta ocurre en el mismo tiempo, sin depender del número de circunferencias, teniendo que recorrer una mayor distancia en un mismo tiempo (relación entre a) y b)). La observación de una mayor deformación en la trayectoria se relaciona con la cantidad de círculos porque al aumentar las circunferencias aumenta el número de deformaciones, volviéndose éstas más pequeñas y recurrentes en la trayectoria. Observemos que la forma de la trayectoria tiende a algo que nos recuerda a una elipse, conforme se agreguen más circunferencias esta forma se definirá cada vez más, siendo que los puntos tienden a girar sobre el radio más rápido y su radio tiende a ser cada vez más pequeño, concluyendo que su contribución a la distancia respecto al centro será cada vez más mínima.	Conforme se va agregando otra circunferencia, la contribución al giro se desplaza en torno al centro de masa del planeta, con lo que no se sale de la forma bien definida que se respondió en el inciso c)	[VE3]-1-|01:26:40| H3: Al final ¿qué contestaron? M3: Ah::: H6: ¿En cuál? M3: En la d. H6: Yo puse que sí, por la conservación del momento angular. M3: Sí, yo también, yo puse así ((risas)). H6: ¿La conservación del momento angular? Ok::: M3: ¿Tú qué le pusiste? ↑Ah caramba↑ si lo explicaste bien. H6: A mí me pareció trampa, pero. H3: ¡Ajá! (4) No sé (7) M3: (Incomprensible, 2) (5) H3: Es que no entiendo muy bien qué está pasando. O sea, le agregas un círculo ((realiza un sonido repetitivo al añadir circunferencias al applet)) M3: Lo vas a bobiar como hace rato ((risas)). H3: Si, pero le agregas un círculo, pero al final de cuentas tarda el mismo tiempo en dar una trayectoria= M3: =Sí= H3: =Siempre ¿no? M3: No sé, es que. (13) Pero por las grafiquitas de aquí no parece que tardan el mismo tiempo, ¡mira! H3: Pero se refiere a distancia. M3: Con respecto al tiempo= H3: =Respecto al tiempo. (3) M3: Mmm::: H3: Tienes (x)un tiempo aquí, bueno entonces tiene sentido que hagan- que no hayan recorrido la misma distancia. Pero, en general, yo siento que::: aunque agregues más círculos tardan la misma cantidad de tiempo en dar la vuelta. Mira, lo que sí es que el punto parece moverse más rápido. M3: Ok::: [VE3]-1-|02:23:32|- después de la puesta en común, M3 cambia su respuesta inicial a la pregunta. Su respuesta inicial había sido «Si, podría tener relación con la conservación del momento angular ya que esto depende del radio y la velocidad angular del objeto, y aquí se presentan los mismos parámetros solamente se agrega la manera de la trayectoria del objeto.» [VE3]-1-|02:25:10|- después de la puesta en común, H3 le agrega argumentos a su respuesta inicial a la pregunta, la cual no incluía el último párrafo.	[VG]-1-|02:19:09| P: Bueno, entonces esa es la pregunta interesante, eso que acabamos de responder acá de que va tomando como una forma definida, en este caso como un huevo, digamos ¿Cómo se relaciona con esas otras dos? Con que los radios se hacen cada vez más pequeños y con que la velocidad de los puntos es cada vez mayor. A ver. H8: Puede ser como un fractal de los arcos que se van haciendo dependiendo de los radios que se tengan, y esa es la relación que puede exis- bueno para ya establecerlo matemáticamente, va a ser como la ecuación de un fractal. P: ¿Parece como la ecuación de un fractal? H4: Eh, bueno yo entien-, bueno yo pensé que si los radios fueran iguales en todo momento, que no pudieran (incomprensible, 1) entonces ni siquiera tendríamos esa::: esa forma que nos plantea el modelado, tendríamos una forma más educada ¿no? Algo más concéntrico, pero siempre (incomprensible, 1). Entonces también tendríamos que la velocidad del punto más, más alejado con radios más o menos iguales, en caso de que no choquen, iría más lento, (x)el punto más alejado. Bueno, es lo que, lo que yo pude observar. P: Ok::: Eso fue lo que pudo observar ¿qué más? H6: Por la conservación del momento angular. P: ¿Ajá, qué? H6: Digamos en los puntos en esta parte ((se refiere a la parte izquierda de la trayectoria)) se dan radios mayores y estos más cercanos cercana los radios son menores y ya vimos que en las circunferencias pues la velocidad al parecer es mayor, entonces, hay una, buena la pregunta plantea si hay alguna relación, entonces yo creo que la relación es esa, bueno a parte de otras, pero sería visualmente la conservación del momento angular. [VG]-1-|02:21:39| P: Pero no me queda claro todavía cómo afecta eso el momento angular. H6: Porque se tiene que conservar, entonces, bueno, bueno es que no sé cómo plantearlo mejor, no sé cómo puedo explicarlo. Pero, pues sí, a la pregunta, de que si hay una relación yo creo que es el momento angú-, bueno la conservación del momento angular. H1: Es que sería con fuerzas, es decir si es una fuerza central sí, sí se conserva, pero esto son solo trayectorias. P: ¿Ustedes qué contestaron, o qué:::? ((refiriéndose al Equipo 2)) H2: Pues bueno yo iba a argumentar que entre mayor número de órbitas la trayectoria total recorrida iba a ser mayor y, pues yo lo relacioné con eso, pero no (incomprensible, 2) P: Ahorita estás repensando el= M2: =Bueno considerando que::: ese movimiento es para un solo planeta (incomprensible, 2) la observación decía que pues todo ese planeta tenía un cierto ciclo, un cierto tiempo, y así como lo dice "H2" ((se refiere a H2 por su nombre)) si aumentas el número de circunferencias parece que la distancia es mayor entonces si dejas ese, ese tiempo fijo por eso también se determina que tiene que ir más rápido, la velocidad tiene que aumentar. [VG]-1-|02:23:14| P: Ahorita que dijeron, no es que como que va tomando ya una forma definida, se esperaría que esa forma definida sea la del planeta ¿cierto? ((los estudiantes

Parte II. **¿Y si aumentamos el número de epiciclos?**

Intención: Se busca, con apoyo de un applet, vislumbrar la noción de estabilidad del sistema, para esto se permite la posibilidad en el applet de aumentar hasta treinta el número de circunferencias y así analizar los cambios que se dan en el comportamiento del sistema.

Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
							asienten con la cabeza)) ¿Por qué no cambia esa forma después? ¿O sea si yo sigo agregando circunferencias ustedes creen que esa forma cambie mucho? H4: (x)Va a converger, como a lo que va a ser ¿no? Si le sigue agregando pues cada vez se va haciendo más chiquito cada radio (x)que le va agregando entonces cada vez va contribuyendo menos al giro, y cada vez gira más entorno a su propio centro de masa, entonces ya no va a girar como que va a ser como diferencia sino en sí mismo, entonces pues ya no cambia tanto la forma definida.
Intencionalidad	Se busca confrontar el cómo cambia la trayectoria del planeta (estabilidad) con lo que provoca el cambio. Sin embargo, determinar cómo cambia y qué produce el cambio es una tarea cognitivamente muy compleja para los fenómenos de determinación del estado estacionario (Farfán, 2012; Romero, 2016). Se espera que, con ayuda del docente y a partir de las ideas planteadas por los estudiantes, se acerquen a la idea de que al tender los radios de las circunferencias a cero y la velocidad de movimiento del punto al infinito esto provoca que se logre la estabilidad; es decir, agregar una circunferencia muy pequeña y un punto sobre esta que se mueve muy rápido no provoca cambios significativos en el sistema en general.						
¿Sobre qué objetos lo hace?	Comparar El periodo, el tamaño de la trayectoria y la rapidez. La trayectoria, los radios y la velocidad.	Comparar La trayectoria y los radios.	Comparar Los radios y las oscilaciones.	Comparar El periodo, el tamaño de la trayectoria y la rapidez. Los radios y las oscilaciones. La trayectoria, los radios y la velocidad.	Comparar La trayectoria, los radios y la velocidad.	Identificar Los parámetros Comparar El periodo, el tamaño de la trayectoria y la rapidez.	Identificar El comportamiento. Los parámetros. Comparar El periodo, el tamaño de la trayectoria y la rapidez. La trayectoria, los radios y la velocidad.
¿Sobre qué relaciones lo hace?	Comparar Dado un periodo fijo, si la trayectoria aumenta de tamaño también lo debe hacer la velocidad. Agregar una circunferencia muy pequeña y un punto sobre esta que se mueve muy rápido no provoca cambios significativos en la forma de la trayectoria.	Comparar Agregar una circunferencia muy pequeña no provoca cambios significativos en la forma de la trayectoria.	Comparar Más circunferencias, provoca más oscilaciones y como los radios son menores las oscilaciones con cada vez más pequeñas.	Comparar Dado un periodo fijo, si la trayectoria aumenta de tamaño también lo debe hacer la velocidad. Más circunferencias, provoca más oscilaciones y como los radios son menores las oscilaciones con cada vez más pequeñas. Agregar una circunferencia muy pequeña y un punto sobre esta que se mueve muy rápido no provoca cambios significativos en la forma de la trayectoria.	Comparar Agregar una circunferencia muy pequeña y un punto sobre esta que se mueve muy rápido no provoca cambios significativos en la forma de la trayectoria.	Identificar Conservación del momento angular. Comparar Dado un periodo fijo, si la trayectoria aumenta de tamaño también lo debe hacer la velocidad.	Identificar Fractal. Conservación del momento angular. Comparar Dado un periodo fijo, si la trayectoria aumenta de tamaño también lo debe hacer la velocidad. Agregar una circunferencia muy pequeña y un punto sobre esta que se mueve muy rápido no provoca cambios significativos en la forma de la trayectoria.
¿Por medio de qué lo hace?	Comparar Verbal: Al aumentar el número de circunferencias en el modelo, la distancia en la trayectoria es mayor, y por lo tanto, la rapidez con que se mueve tiene que aumentar para completar la trayectoria durante el ciclo. Verbal: Al aumentar el número de circunferencias, el punto se mueve mucho más rápido, y la aportación que realiza a la trayectoria puede ser despreciable, por lo que, se puede apreciar una forma casi definida.	Comparar Verbal: Entre más circunferencias vamos agregando la forma de la trayectoria no se ve casi afectada ya que el radio vas disminuyendo tanto de tal forma que después se verá que el movimiento del punto Q es insignificante.	Comparar Verbal: Ya que de b) se tiene que mientras más círculos más bucles tienen que dar los planetas. Y de a) se tiene que cada círculo añadido tiene un radio menor que el anterior, por lo que su bucle será de menor longitud que el del círculo anterior.	Comparar Verbal: El aumento en la velocidad aparente se explica por el hecho de que la trayectoria total del planeta ocurre en el mismo tiempo, sin depender del número de circunferencias, teniendo que recorrer una mayor distancia en un mismo tiempo. Verbal: Porque al aumentar las circunferencias aumenta el número de deformaciones, volviéndose éstas más pequeñas y recurrentes en la trayectoria. Verbal: Conforme se agreguen más circunferencias esta forma se definirá cada vez más, siendo que los puntos tienden a girar sobre el radio más rápido y su radio tiende a ser cada vez más pequeño, concluyendo que su contribución a la distancia respecto al centro será cada vez más mínima.	Comparar Verbal: Conforme se va agregando otra circunferencia, la contribución al giro se desplaza en torno al centro de masa del planeta, con lo que no se sale de la forma bien definida que se respondió en el inciso c).	Identificar Verbal: Podría tener relación con la conservación del momento angular ya que esto depende del radio y la velocidad angular del objeto, y aquí se presentan los mismos parámetros solamente se agrega la manera de la trayectoria del objeto. Comparar Verbal: Aunque agregues más círculos tardan la misma cantidad de tiempo en dar la vuelta. Mira, lo que sí es que el punto parece moverse más rápido.	Identificar Verbal: Puede ser como un fractal de los arcos que se van haciendo, dependiendo de los radios que se tengan. Verbal: Sería visualmente la conservación del momento angular. Comparar Verbal: Si aumentas el número de circunferencias parece que la distancia es mayor, entonces si dejas ese tiempo fijo la velocidad tiene que aumentar. Verbal: Va a converger, si le sigue agregando pues cada vez se va haciendo más chiquito cada radio entonces cada vez va contribuyendo menos al giro, y cada vez gira más entorno a su propio centro de masa, entonces ya no va a girar como que va a ser como diferencia sino en sí mismo, entonces pues ya no cambia tanto la forma definida.
Invariantes de las acciones	- Agregar una circunferencia muy pequeña y un punto sobre esta que se mueve muy rápido no provoca cambios significativos en la forma de la trayectoria. - Dado un periodo fijo, si la trayectoria aumenta de tamaño también lo debe hacer la velocidad. - Más circunferencias, provoca más oscilaciones y como los radios son menores las oscilaciones con cada vez más pequeñas.						

9.7.3 Tarea #2. Etapa 1: Identificación de acciones

TAREA #2

Objetivo de la Tarea: Significar la convergencia de series trigonométricas mediante la estabilidad de la trayectoria del planeta, caracterizándola mediante el límite de la sucesión de sumas parciales.

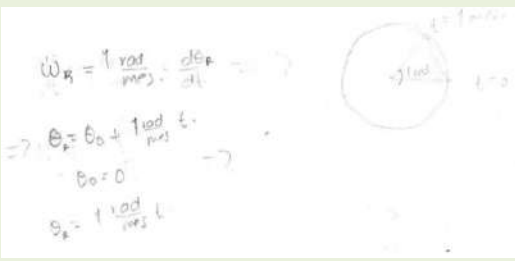
Parte I. **Comprendiendo el modelo**

Intención: Se busca que el estudiante comprenda cómo se comporta el sistema, y la relación que guarda con los datos suministrados por la situación planteada.

Estudiante: Pregunta a

M2

Meses	OTR (Rad)	QRP (Rad)
0	0	0
1	1	3
2	2	6
3	3	9
n	n	3n



M3

Meses	Medidas de ∠OTR (en radianes)	Medidas de ∠QRP (en radianes)
0	0	0
1	1	3
2	2	6
3	3	9
⋮	⋮	⋮
t	t	3t

H1

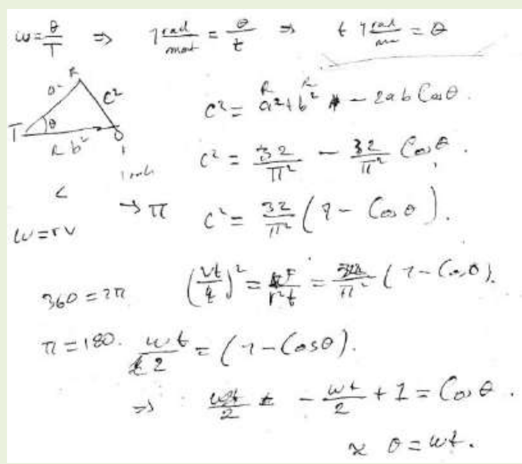
Meses	OTR	QRP
0	0	0
1	1	3
n	n	3n

H3

Meses	Medida de ∠OTR (rad)	Medida de ∠QRP (rad)
0	0	0
1	1	3
2	2	6
3	3	9
⋮	⋮	⋮
t	t	3t

H4

Meses	Medida OTR	Medida QRP
0	0	0
1	1	3
2	2	6
t	$wt = 1\frac{rad}{mes}t$	$wt = 3\frac{rad}{mes}t$

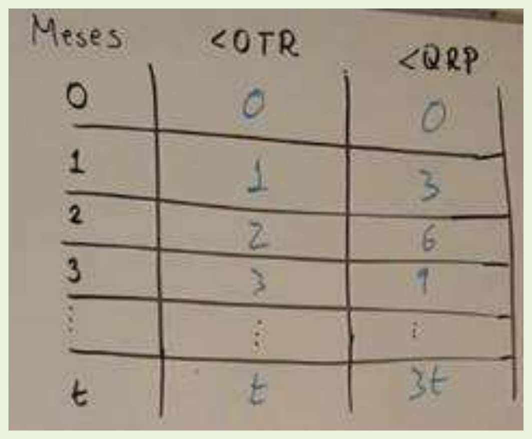


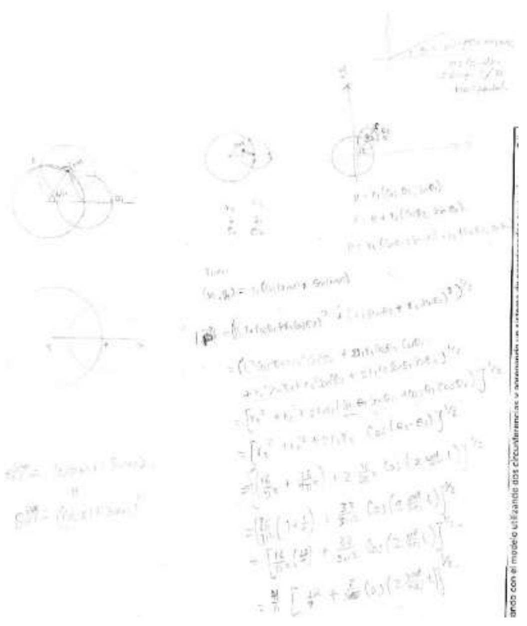
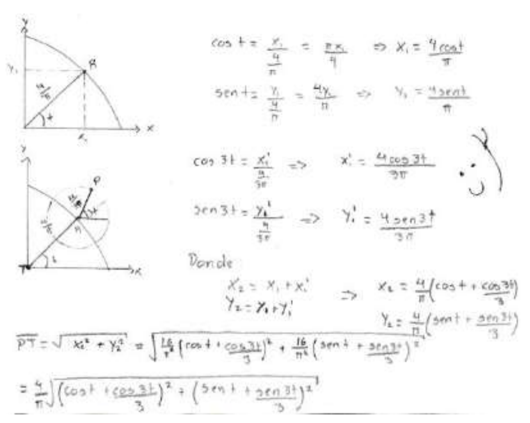
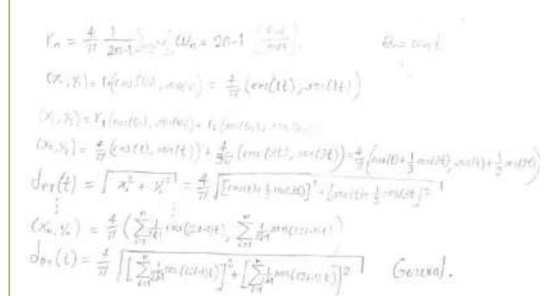
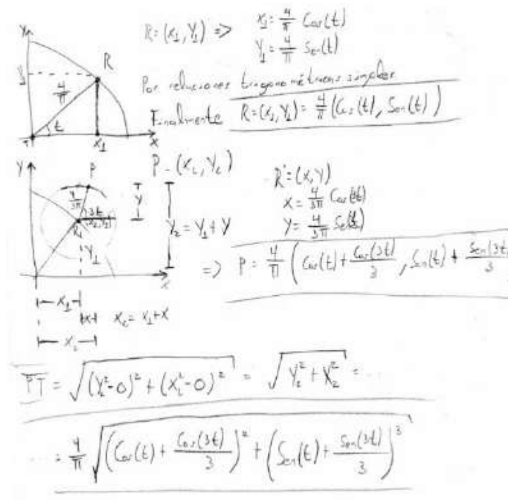
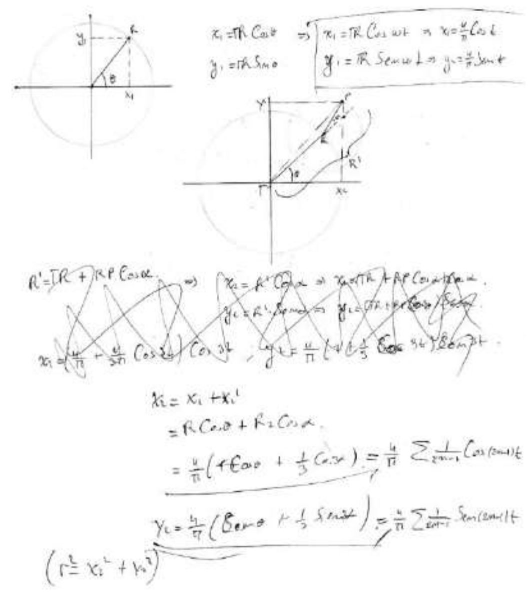
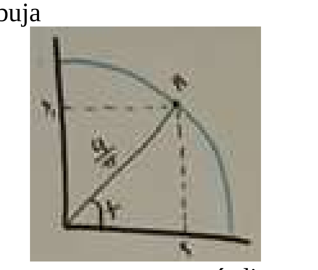
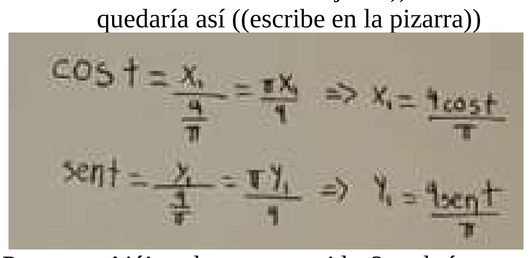
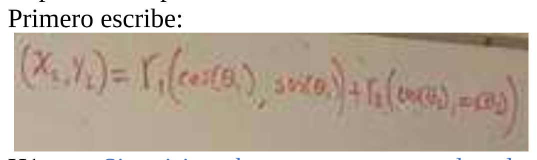
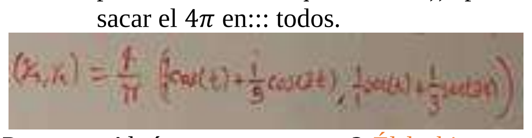
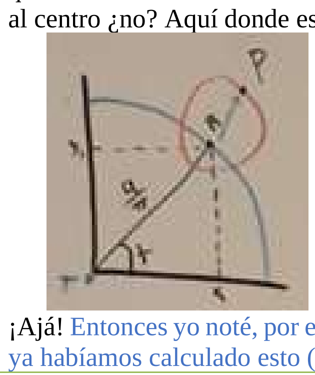
Equipo 3

[VE3]-2-|00:11:02|
H3: ¿Cuánto crees que valga ese? Al inicio vale cero.
M3: Pues::: ¡ajá!
H3: Así inicia=
M3: Ajá, inicia desde el cero, y llega mmm en un mes:::
H3: A un radián por mes, entonces sería uno.
M3: ¿Cuánto es un radián por mes?
H3: Pues un radian por mes ((risas)).
M3: ¡Ay! si es cierto ((risas)).
H3: El ángulo, ¿no?
M3: ¡Ajá! ¿Y el de Q?
H3: Y el otro se mueve a tres radianes por mes.
M3: Entonces serian tres, ¿no?
H3: ¡Ajá! Y así ya.
M3: Y luego entonces este es dos y este es (6) ¿cinco?
H3: ¿Por qué cinco?
M3: Porque van (incomprensible, 1) ¿no? Nada más.
H3: Bueno por el tres radianes. Mira pasan dos meses entonces cada mes tu::: ángulo este son tres radianes veces, dos por tres son seis radianes ¿no?

Puesta en común

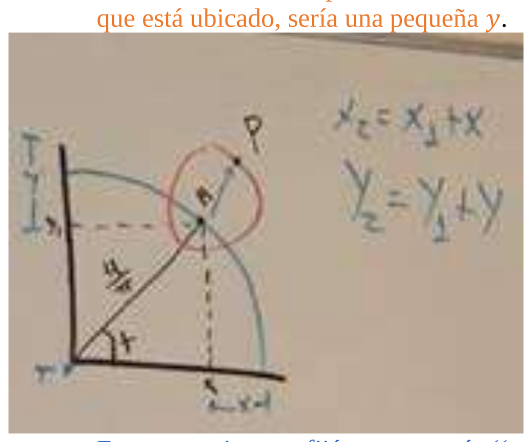
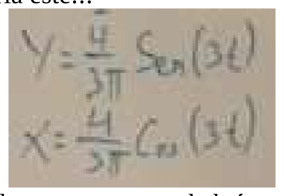
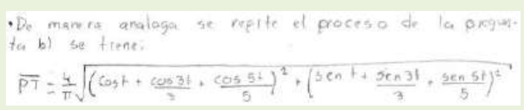
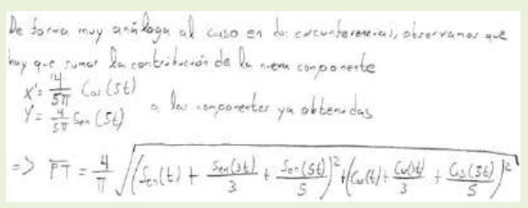
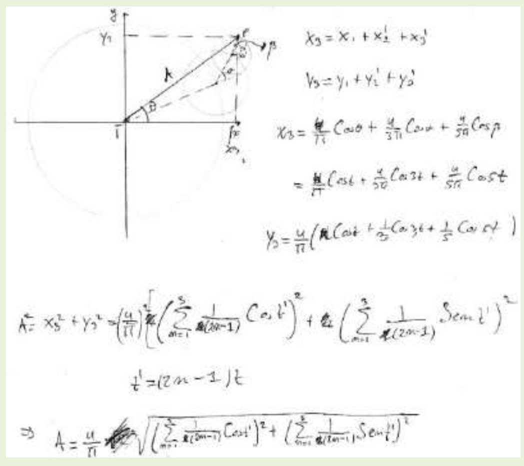
[VE3]-2-|00:56:34|- H3 rellena la tabla en la pizarra.
H3: Como estamos en el mes cero, tenemos un tiempo igual a cero, o sea estamos en la condición inicial, entonces ambos ángulos valdrían cero. Luego como estamos en el mes uno, el primer ángulo nos dice que avanza o se mueve un radian cada mes, entonces este va a valer uno, el otro nos dice que se mueve a una velocidad de tres radianes cada mes, entonces sería tres. Bueno aquí ya podemos continuar con este proceso sería un dos, aquí sería un seis, tres, nueve y, en general, ya serían t y tres veces t.
P: ¿Sí? ¿Todos de acuerdo? ¿Alguien lo pensó diferente o todos lo pensaron de esa manera? ((los estudiantes asienten con la cabeza))



Parte I.	**Comprendiendo el modelo**						
Intención:	Se busca que el estudiante comprenda cómo se comporta el sistema, y la relación que guarda con los datos suministrados por la situación planteada.						
Estudiante	**M2**	**M3**	**H1**	**H3**	**H4**	**Equipo 3**	**Puesta en común**
Intencionalidad	Se pretende reconocer el comportamiento del movimiento de los puntos sobre cada circunferencia. Para esta pregunta es probable que la idea de velocidad angular genere dificultades, esto se evidenció en el pilotaje y las diferentes puestas en escena; debido a que la concepción de radian en sí misma provoca dificultades según se ha reportado en distintas investigaciones (Akkoc, 2008; Moore, 2009).						
¿Qué hace?	**Seriar** los valores de los ángulos en la tabla suministrada. **Comparar** los valores siguientes con el estado inicial.	**Seriar** los valores de los ángulos en la tabla suministrada.	**Seriar** los valores de los ángulos en la tabla suministrada.	**Seriar** los valores de los ángulos en la tabla suministrada.	**Seriar** los valores de los ángulos en la tabla suministrada. **Identificar** los parámetros en una noción física conocida. **Geometrizar** la relación entre el ángulo y la distancia recorrida.	**Seriar** los valores de los ángulos en la tabla suministrada.	**Seriar** los valores de los ángulos en la tabla suministrada.
¿Cómo hace?	Completando la tabla proporcionada Considerando que el ángulo es el resultado de un ángulo inicial más el resultado del movimiento respecto del tiempo.	Completando la tabla proporcionada.	Completando la tabla proporcionada.	Completando la tabla proporcionada.	Completando la tabla proporcionada Utilizando la relación física, velocidad es igual a distancia entre tiempo. Identificando una figura geométrica conocida sobre la cual trabajar.	Completando la tabla proporcionada.	Completando la tabla proporcionada.
Argumentos (A) y confrontaciones (C) presentados.	(A) El ángulo es la suma de una ángulo inicial más el cambio del ángulo, dicho cambio es la velocidad angular por el tiempo.	No presenta explicaciones.	No presenta explicaciones.	No presenta explicaciones.	(A) La velocidad es igual a la distancia (angular) recorrida dividida por el tiempo. (A) Considerando el sector circular como un triángulo equilátero y utilizando la ley de cosenos.	(A) Considerando la velocidad del punto y haciendo aumentos de uno en uno en el tiempo a partir de cero.	(A) Considerando la velocidad del punto y haciendo aumentos de uno en uno en el tiempo a partir de cero.
Pregunta b	$(x_1,y_1)=\frac{4}{\pi}\left(\mathrm{Cos}\left(\frac{1rad}{mes}t\right),\mathrm{Sen}\left(\frac{1rad}{mes}t\right)\right)$ (x_2,y_2) $=\frac{4}{\pi}\left(\mathrm{Cos}\left(\frac{1rad}{mes}t\right),\mathrm{Sen}\left(\frac{1rad}{mes}t\right)\right)$ $+\frac{4}{3\pi}\left(\mathrm{Cos}\left(\frac{3rad}{mes}t\right),\mathrm{Sen}\left(\frac{3rad}{mes}t\right)\right)$ $d_{TP}=\frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{10}{9}+\frac{2}{3}\mathrm{Cos}\left(2\frac{rad}{mes}t\right)}$ 					[VE3]-2-|00:15:58| H3: Ya tienes el ángulo ese si lo tienes. Y lo tienes en radianes y ya con obtener (3) ¿el radio, no? M3: Sí, pero ya utilizar la distancia de (3) la::: ecuación de la distancia entre dos puntos (3) si tienes las coordenadas, ¿no? H3: ¿Y este si lo sabes? M3: ¿Qué? H3: Pues si supieras este entonces ya sabes x. M3: No, no la sé. H3: Sí, o sea imagínate que esto es R, y te pregunto que si sabes esto y esto, pero si sabes esto entonces ya sabes x_1 y y_1, porque son las coordenadas del punto R. M3: ¿La distancia? H3: Sabes las coordenadas del punto R respecto a t que está= [VE3]-2-|00:16:38|- M3 interrumpe a H3 y vuelve a leer en voz alta la pregunta planteada y continúan dialogando. [VE3]-2-|00:16:56| M3: O sea que esto es, el ángulo es t, y este es::: $3t$, ¿no? Ah::: H3: Pero primero hay que encontrar donde está este con las puras coordenadas. M3: En dónde estaría (incomprensible, 1, ¿R?) H3: ¡Ajá! Con las coordenadas. [VE3]-2-|00:17:40| M3: Ah::: tienes el radio, ¿no? H3: No. M3: Sí::: el radio de la circunferen= H3: =Sí, sí. M3: Ah::: entonces con eso sale. Mira, lo que decía Pachequito. H3: Todo lo haces triángulos rectángulos. M3: Ahí está. A poco no, a poco no lo estás haciendo triángulos rectángulos. H3: Sí, sí está bien triangulados, bien triangulados. [VE3]-2-|00:18:23| M3: Tienes los radios. H3: Oye, entonces el tiempo t (2) el tiempo t, este primero de aquí, bueno sí el tiempo t está en el lugar de t ¿no? Para el primer círculo y el radio siempre va a ser $\frac{4}{\pi}$. M3: ¡Ajá! H3: Entonces ¿qué sería aquí este? M3: Sería= H3: =x_1 sería [el seno] M3: [el coseno] si quieres para x_1 es el coseno de t. H3: Sí, es cierto. M3: Es igual a x_1 sobre $\frac{4}{\pi}$, ¿no? [VE3]-2-|00:28:51| H3: Ah entonces te digo que podríamos hacer un origen aquí y luego sacar las coordenadas aquí. M3: Respecto a ese origen. H3: ¡Ajá! Y ese sería respecto a x_1 y a x_2. Entonces lo que tú buscas es esto ¿no? M3: ¡A:::y! A ver. H3: Lo que se me ocurre es que tienes esto y si tu buscas estas coordenadas, ¿ajá? M3: Ujú. H3: Entonces eso sería lo mismo que la componente de aquí más lo de aquí a aquí, ¿no? M3: Pero es que x_2 sería la componente de x_1 [más el cachito de este nuevo, ¿no?] H3: [Más el cachito, <u>exacto</u>] M3: Ahora sí, vamos. [VE3]-2-|00:33:24| M3: No, pero ya tienes de aquí, ¿no? x_2 y y_2, entonces con la de la distancia. H6: No, porque aquí tienes esta y este está chueco. M3: No, pero con la distancia entre dos puntos, ya conoces las coordenadas de esta y esta está en el origen. H6: ¿De T a P? M3: ¡Ujú! H6: <u>Ah</u> de T a P. H3: ¡Ajá! y eso ya te lo da para el tiempo t. H6: Pues sí, sí, sí. [VE3]-2-|00:34:33|	[VE3]-2-|01:00:18|- M3 pasa a la pizarra a responder respecto de las coordenadas de R. Primero dibuja  M3: Bueno, entonces, aquí dice que en un tiempo t, entonces ya sabemos va a ser un ángulo de t y además hasta arriba decía que el radio de::: la primera circunferencia es 4π, 4 sobre π, entonces utilizando trigonometría, entonces se puede calcular el de aquí ((señala la distancia en el eje X)) y el de acá ((señala la distancia en el eje Y)). Entonces quedaría así ((escribe en la pizarra))  P: ¡Ajá! ¿alguna otra idea? ¿algún otro argumento que permita hacer lo mismo? (7) ¿O usaron el mismo, exactamente el mismo argumento? H1: Yo tengo un comentario. P: ¿Ajá? H1: (x)Que el ángulo ahí si funciona con t porque la velocidad angular es uno y el tiempo es t meses, pero en general habría que poner ángulo θ, por ejemplo ¿no? Y θ sería igual a velocidad angular por el tiempo. [VE3]-2-|01:04:18|- H1 pasa a la pizarra a responder respecto de las coordenadas de P. Primero escribe:  H1: Si quisiera hacer esto en coordenadas polares. P: ¿Ujú? H1: (Incomrpensible, 1) lo pone como vectores para especificar el punto (x,y) y en este caso el r n-ésimo sería igual a 4π por uno entre un número impar. P: ¿Ujú? H1: Así nos lo dan al principio, dice que varía primero 4π, y luego 4 entre 3π, y 4 entre 5π, y en general sería sobre los impares, empezando desde el uno. Y el, vamos a ver la fórmula, el θ n-ésimo sería la velocidad angular n-ésima multiplicado por el tiempo, y es sustituyendo estos aquí ((señala la primera ecuación que escribió)), ah bueno, la velocidad angular es, varía con los impares, en el primero es uno, sigue tres y así. Sustituyendo aquí ((se refiere a la primera ecuación que escribió)), puedo sacar el 4π en::: todos.  P: ¿Algún otro argumento? Él lo hizo con suma de vectores. ¿Sí ven el argumento? H3: (x)Tengo, no es exactamente una manera distinta, me voy a aprovechar aquí un poquito del dibujo de la compañera. Entonces, si suponemos que tenemos otro círculo aquí, para que ya sea el caso de las dos circunferencias, y un punto P sobre la circunferencia, entonces queremos ver sus coordenadas respecto al centro ¿no? Aquí donde está la T.  ¡Ajá! Entonces yo noté, por ejemplo, que ya habíamos calculado esto ((se refiere a

Parte I. **Comprendiendo el modelo**

Intención: Se busca que el estudiante comprenda cómo se comporta el sistema, y la relación que guarda con los datos suministrados por la situación planteada.

Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
						H3: Sí, tiene sentido porque estás en la norma común. H6: Sí, sí, sí. H3: ¡Ah! tienes razón, entonces sería nada más este la norma= M3: x_2 al cuadrado menos, más= H3: =O sea la norma de este [vector] M3: [es más o menos, es más ¿no?	las coordenadas de R)), era sencillo, pero entonces si esto es este::: x_1 podemos ver que de aquí ((se refiere a la posición de x_1)) a::: el lugar donde está ubicado el punto del que queremos saber su distancia, es una pequeña distancia x, y tendríamos que la coordenada respecto al origen del punto que queremos sería x_2 igual a esta primer coordenada que ya habíamos calculado más esta pequeña distancia. Lo mismo para la altura en la que está ubicado, sería una pequeña y.  Entonces si nos fijáramos aquí ((se refiere al punto R)) como una especie de nuevo origen, podríamos hacer exactamente el mismo proceso que hicimos aquí ((se refiere al cálculo de las coordenadas de R)) y obtener que la distancia de este punto a este punto ((se refiere a la distancia de R a P)), se puede separar en dos componentes, una vertical y la otra horizontal, para poder sumarlas, o sea me refiero a encontrar x y a encontrar y. Y bueno, como hizo la compañera antes con relaciones trigonométricas se puede obtener entonces el valor de x y el valor de y, que sería este:::  Y luego vemos que habría que sumar x_1 más x, y_1 más y, y nos daría exactamente el mismo resultado. P: Y en esas x y y ¿ $\frac{4}{3\pi}$ qué representa? M3: El radio de la circunferencia chiquita. P: El radio de la segunda circunferencia. (x)Y el $3t$ que está dentro de los argumentos de seno y coseno. M3: Es el ángulo que va. [VE3]-2-|01:10:22|- H1 indica que para calcular la distancia se utiliza el teorema de Pitágoras y que sería lo mismo que calcular la norma del vector.
Pregunta c	Se tienen las coordenadas: $(x_1, y_1) = \frac{4}{\pi}\left(\text{Cos}\left(\frac{1rad}{mes}t\right), \text{Sen}\left(\frac{1rad}{mes}t\right)\right)$ (x_2, y_2) $= \frac{4}{\pi}\left(\text{Cos}\left(\frac{1rad}{mes}t\right), \text{Sen}\left(\frac{1rad}{mes}t\right)\right)$ $+ \frac{4}{3\pi}\left(\text{Cos}\left(\frac{3rad}{mes}t\right), \text{Sen}\left(\frac{3rad}{mes}t\right)\right)$ (x_3, y_3) $= \frac{4}{\pi}\left(\text{Cos}\left(\frac{1rad}{mes}t\right), \text{Sen}\left(\frac{1rad}{mes}t\right)\right)$ $+ \frac{4}{3\pi}\left(\text{Cos}\left(\frac{3rad}{mes}t\right), \text{Sen}\left(\frac{3rad}{mes}t\right)\right)$ $+ \frac{4}{5\pi}\left(\text{Cos}\left(\frac{5rad}{mes}t\right), \text{Sen}\left(\frac{5rad}{mes}t\right)\right)$ $d_{TP} = \frac{4}{\pi}\sqrt{\left(Cos\left(\frac{1rad}{mes}t\right) + \frac{1}{3}Cos\left(\frac{3rad}{mes}t\right) + \frac{1}{5}Cos\left(5\frac{rad}{mes}t\right)\right)^2 + \left(Sen\left(\frac{1rad}{mes}t\right) + \frac{1}{3}Sen\left(\frac{3rad}{mes}t\right) + \frac{1}{5}Sen\left(5\frac{rad}{mes}t\right)\right)^2}$	 	$d_{PT}(t) =$ $\frac{4}{\pi}\sqrt{\left(\cos(t) + \frac{1}{3}\cos(3t) + \frac{1}{5}\cos(5t)\right)^2 + \left(\text{sen}(t)\right.}$		 	[VE3]-2-|00:40:06| H3: Aquí va a ser exactamente lo mismo. M3: Pero con más términos. H3: No:::, exactamente lo mismo. (6) M3: Sólo que aquí van a haber tres. H3: Sí, pero ¿cuál va a ser el que sigue? M3: Cinco. H3: Coseno de $5t$ sobre 5. M3: Sí [(incomprensible, 4)] H6: [(Incomprensible, 2)] H3: Ya tienes esto, ahora le tienes que sumar= M3: =El otro y la coordenada= H3: Pero es cinco π::: M3: ¡Ajá! H3: Coseno de 5π es lo mismo. M3: ¡Ajá! H3: Entonces al final de cuentas tú vas a sacar el cuatro π::: y te va a quedar seno de cinco veces t.	No hubo discusión grupal respecto de esta pregunta.
Intencionalidad	Se busca construir las primeras tres sumas parciales de dos series trigonométricas, pero con un significado asociado al fenómeno -las coordenadas del planeta- que permite determinar la distancia del planeta a la Tierra. Se espera que los estudiantes recurran a dibujar triángulos rectángulos sobre las figuras proporcionadas para identificar las razones trigonométricas involucradas, aunque para hacer la generalización a cualquier valor del tiempo se requiera que la función trigonométrica esté construida previamente (Montiel, 2011).						
¿Qué hace?	**Identificar** un sistema de referencia adecuado. **Comparar** los casos conforme se agregan circunferencias. **Medir** la distancia del planeta a la tierra.	**Geometrizar** la posición del punto sobre la circunferencia. **Comparar** los casos conforme se agregan circunferencias. **Medir** la distancia del planeta a la tierra.	**Identificar** un sistema de referencia adecuado. **Comparar** los casos conforme se agregan circunferencias. **Medir** la distancia del planeta a la tierra.	**Geometrizar** la posición del punto sobre la circunferencia. **Comparar** los casos conforme se agregan circunferencias. **Medir** la distancia del planeta a la tierra.	**Identificar** un sistema de referencia adecuado. **Comparar** los casos conforme se agregan circunferencias. **Geometrizar** la posición del planeta respecto del sistema de coordenadas. **Medir** la distancia del planeta a la tierra.	**Medir** la distancia del planeta a la tierra. **Geometrizar** la posición del punto sobre la circunferencia. **Identificar** un sistema de referencia adecuado. **Comparar** los casos conforme se agregan circunferencias.	**Geometrizar** la posición del punto sobre la circunferencia. **Comparar** los casos conforme se agregan circunferencias. **Identificar** un sistema de referencia adecuado. **Medir** la distancia del planeta a la tierra.
¿Cómo hace?	Utiliza coordenadas polares y considera los puntos como vectores en el plano. Considerando el caso como una suma de vectores. Utilizando la fórmula de norma de un vector.	Identificando una figura geométrica conocida sobre la cual trabajar. Considerando los cambios en las componentes del punto que representa al planeta. Utilizando la fórmula de distancia entre dos puntos.	Utiliza coordenadas polares y considera los puntos como vectores en el plano. Considerando el caso como una suma de vectores. Utilizando la fórmula de distancia entre dos puntos.	Identificando una figura geométrica conocida sobre la cual trabajar. Considerando los cambios en las componentes del punto que representa al planeta. Utilizando la fórmula de distancia entre dos puntos.	Utilizando coordenadas polares y considera los puntos como vectores en el plano. Considerando los cambios en las componentes del punto que representa al planeta. Identificando una figura geométrica conocida sobre la cual trabajar. Utilizando el teorema de Pitágoras.	Utilizando la fórmula de distancia entre dos puntos. Identificando una figura geométrica conocida sobre la cual trabajar. Utilizando un cambio de sistema coordenadas. Considerando los cambios en las componentes del punto que representa al planeta.	Identificando una figura geométrica conocida sobre la cual trabajar. Considerando los cambios en las componentes del punto que representa al planeta. Utilizando coordenadas polares y considera los puntos como vectores en el plano. Utilizando un cambio de coordenadas. Utilizando la fórmula de distancia entre dos puntos.
Argumentos (A) y confrontaciones (C) presentados.	(A) Los puntos pueden considerarse vectores en el plano y parametrizarse utilizando coordenadas polares.	(A) Considerando el triángulo rectángulo que se forma y aplicando razones trigonométricas.	(A) Los puntos pueden considerarse vectores en el plano y parametrizarse utilizando coordenadas polares.	(A) Considerando el triángulo rectángulo que se forma y aplicando razones trigonométricas.	(A) Los puntos pueden considerarse vectores en el plano y parametrizarse utilizando coordenadas polares. (A) Considerando el triángulo rectángulo que se forma.	(A) Para utilizar la fórmula de la distancia entre dos puntos se necesitan las coordenadas. (A) Considerando el triángulo rectángulo que se forma y aplicando razones trigonométricas. (A) Para determinar el cambio se puede considerar un sistema de coordenadas centrado en el centro de la circunferencia que se agrega. (A) La componente siguiente es la componente anterior más una diferencia.	(A) Considerando el triángulo rectángulo que se forma y aplicando razones trigonométricas. (A) La componente siguiente es la componente anterior más una diferencia. (A) Para determinar el cambio se puede considerar un sistema de coordenadas centrado en el centro de la circunferencia que se agrega. (A) Los puntos pueden considerarse vectores en el plano y parametrizarse utilizando coordenadas polares. (A) Para utilizar la fórmula de la distancia entre dos puntos se necesitan las coordenadas.

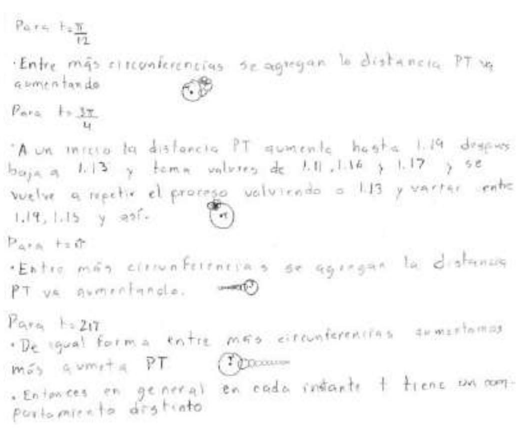
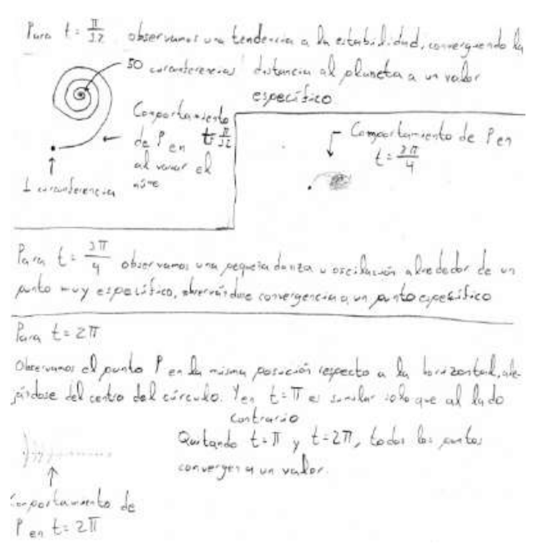
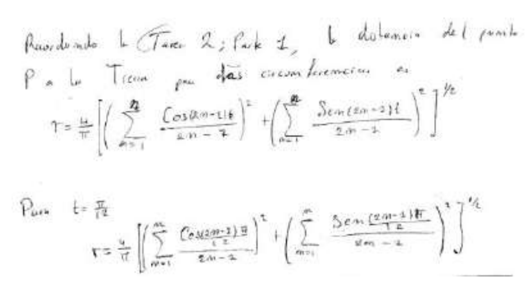
Parte I. **Comprendiendo el modelo**

Intención: Se busca que el estudiante comprenda cómo se comporta el sistema, y la relación que guarda con los datos suministrados por la situación planteada.

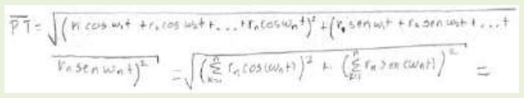
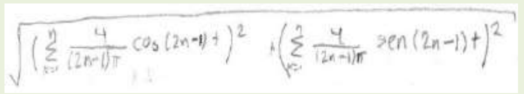
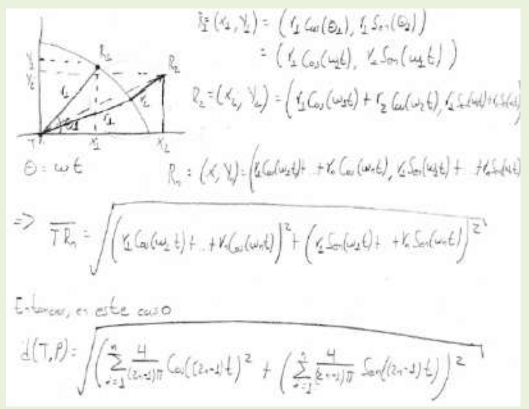
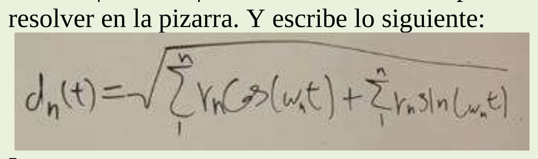
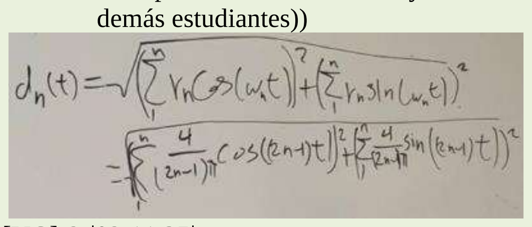
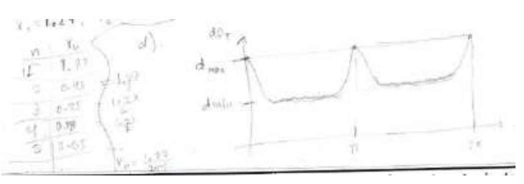
Estudiante	**M2**	**M3**	**H1**	**H3**	**H4**	**Equipo 3**	**Puesta en común**

Parte II. **¿Y si agregamos más epiciclos?**

Intención: Se proporciona un applet con el fin de visualizar la estabilidad del sistema. A partir de manipular el número de circunferencias se podrá analizar el comportamiento del sistema, al estudiar cómo cambia la trayectoria del planeta.

Estudiante	**M2**	**M3**	**H1**	**H3**	**H4**	**Equipo 3**	**Puesta en común**
Pregunta a	La trayectoria comienza a tomar una figura particular. El número de bucles aumenta al aumentar el número de circunferencias. En la parte central los bucles parecen juntarse más hasta formar dos líneas paralelas donde la distancia es mínima. La trayectoria en los laterales se alarga.	Conforme se le agregan mas circunferencias la parte central de la trayectoria se acerca a una recta y los extremos a circunferencias, ademas el tiempo en la parte central es mucho mas tardado que formar que los extremos.	Se tiende a formar una figura parecida a dos líneas paralelas unidas por arcos.	A medida que se agregan más circunferencias podemos observar una tendencia hacia una figura que recuerda a un "huesito", con una línea recta en la parte central y dos medios círculos en las partes extremas de la trayectoria que tienden a ser más grandes cuando agregamos más circunferencias.	Toman la forma definida de dos rectas secantes paralelas horizontales a la circunferencia.	[VE3]-2-|01:18:03| H3: ¿Cómo le llamarías tu a la forma? ¿qué parece? M3: No sé, yo le puse que en la parte central de la trayectoria se acerca ya casi a una línea recta y en los extremos como circunferencias, pues ni modo que le ponga hueso de perro ((risas)).	[VG]-2-|01:58:28| P: ((Leyendo la pregunta)) ¿Cómo cambia la trayectoria del planeta conforme se agregan más y más circunferencias? H4: Toma una forma definida. P: Entonces, ¡ajá! Supuse que iban a pregunt- a explicar lo mismo, ¿verdad? ¿A qué se parece esa forma? Si claro, tiene una forma definida, pero no es la misma forma de la otra. H4: Como dos horizontales. P: Como dos horizonta:::les. M2: °Curva semiflor°. (21) P: Como dos horizontales ¿qué más? ¿qué forma le ven? H6: Pos parece una= P: =¿O le vieron? H6: Especie de mancuerna, como siempre hay dos circunferencias, bueno a partir de dos, siempre están esas dos circunferencias ((con sus manos hace referencia a los extremos de la trayectoria)) nada más que parece que están agregando más. H3: Se están separando más ((con sus manos hace referencia a que los extremos de la trayectoria se separan)) M3: ¡Ajá! P: Ah ok, si vemos menos, entonces algo como que se va a ir separando. Vamos a ver eso. H3: Al revés, (x)si ponemos menos entonces se juntarían. P: ¡Ajá, eso! (12) H6: ¡Ajá! Puede ser con cuatro, pero salen como más pequeñas y así ((con sus manos hace referencia a que están los extremos de la trayectoria juntos)) P: Entonces, otra vez, como que esto y esto se va separando y aquí en medio qué pasa, como que se agregan de estos brinquitos o qué. M2: [¡Ajá!] H3: [¡Ajá!], sí. P: ¿Eso es más o menos lo que pasa? ((los alumnos asienten con la cabeza))
Intencionalidad	Se tiene como expectativa que el estudiante identifique que la trayectoria del planeta se estabiliza conforme se agregan más circunferencias. Se espera que la respuesta surja por sí sola con base en el trabajo realizado en la Tarea #1.						
¿Qué hace?	**Comparar** las diferencias en la trayectoria al agregar circunferencias. **Observar** los cambios en la forma de la trayectoria al agregar circunferencias.	**Comparar** las diferencias en la trayectoria al agregar circunferencias. **Comparar** el tiempo transcurrido en recorrer distintas partes de una misma trayectoria.	**Comparar** las diferencias en la trayectoria al agregar circunferencias.	**Comparar** las diferencias en la trayectoria al agregar circunferencias.	**Comparar** las diferencias en la trayectoria al agregar circunferencias.	**Comparar** las diferencias en la trayectoria al agregar circunferencias.	**Comparar** las diferencias en la trayectoria al agregar circunferencias.
¿Cómo hace?	Considerando los cambios en la forma de la trayectoria para diferentes partes de esta y en forma global.	Considerando los cambios en la forma de la trayectoria de forma global.	Considerando los cambios en la forma de la trayectoria de forma global.	Considerando los cambios en la forma de la trayectoria de forma global.	Considerando los cambios en la forma de la trayectoria de forma global.	Considerando los cambios en la forma de la trayectoria de forma global.	Considerando los cambios en la forma de la trayectoria de forma global.
Argumentos (A) y confrontaciones (C) presentados.	(A) La trayectoria comienza a tomar una forma específica conforme se agregan más circunferencias. (A) Conforme se agregan más circunferencias las distintas partes de una misma trayectoria se modifican.	(A) La trayectoria comienza a tomar una forma específica conforme se agregan más circunferencias.	(A) La trayectoria comienza a tomar una forma específica conforme se agregan más circunferencias.	(A) La trayectoria comienza a tomar una forma específica conforme se agregan más circunferencias.	(A) La trayectoria comienza a tomar una forma específica conforme se agregan más circunferencias.	(A) La trayectoria comienza a tomar una forma específica conforme se agregan más circunferencias.	(A) La trayectoria comienza a tomar una forma específica conforme se agregan más circunferencias.
Pregunta b	EL valor de la distancia del planeta P a la Tierra oscila al agregar más circunferencias para los valores de $t = \frac{\pi}{12}$, $t = \frac{3\pi}{4}$. El rango de oscilación va disminuyendo al agregar más circunferencias. Cuando P está en los puntos más alejados, es decir, en $t = \pi$ y $t = 2\pi$, la distancia aumenta al aumentar el número de circunferencias.		En t=pi/12, 3pi/4 las funciones seno y coseno no alcanzan valores extremos ni 0. Pero la distancia converge. En t=pi, 4pi las función seno vale 0 y coseno -1, 1 respectivamente. La función de distancia se maximiza. En general, hay 2 máximos y 2 mínimos de distancia según el tiempo. 		$t = 2\pi$ para $t = \frac{\pi}{12}$, mientras más circunferencias se añaden, la sucesión de puntos P al tiempo t, forma una espiral hacia un cierto calor fijo (parecido a una serie de Fibonacci) Para $t = \frac{3\pi}{4}$, la sucesión de puntos vuelve a tomar el valor de una espiras, pero ahora el punto P, termina más cerca de la tierra y se acerca en menos puntos que en para el tiempo anterior. Para $t = \pi$ la sucesión de puntos P se aleja cada vez más del punto P, lo mismo para $t = 2\pi$. Así, para cualquier t, mientras más se aleje de $t = \pi$ y $t = 2\pi$, el punto P, mientras más circunferencias se agreguen, se acercará al punto P. 	[VE3]-2-|01:29:44| M3: ¿En qué parámetro estás? H3: Ah, es $\frac{\pi}{12}$. M3: (Incomprensible, 2) H3: (incomprensible, 2) M3: Que aumenta como si fuera una (2) ¿es serie de Fibonacci? Porque va así ((hace un sonido para explicar la forma)). [VE3]-2-|01:31:34| H6: ¿Tú qué viste de esos? M3: Pues cómo va aumentando, pero cómo aumenta de distintos lados. H6: (x)Quiero encontrar algo analítico aquí, pero no me da. [VE3]-2-|01:31:34|- ¿refiriéndose a $t = \pi$ y $t = 2\pi$? M6: ¡Ay! Sí es cierto, sí oscila, con razón no estaba loca. En tres cuartos de π, es que se me hizo raro que ese no aumentaba tanto, oscilaba mira, y sí, solamente baila. H3: No es cierto, a ver. [VE3]-2-|01:34:56| H6: ¿No hay un patrón en general ahí? M3: No. (6) H6: Como que va convergiendo a un punto. (10) Está oscilando más que todo, pero va de manera (2) uniforme. [VE3]-2-|01:37:11| H3: Y este 2π solo se alarga ¿verdad? M3: ¡Ajá! Por la, por la derecha H3: ¿Crees que tienda a algún punto en específico? Porque, por ejemplo, este, este que está aquí ya sabe que está en la parte que se hace una línea recta, ¿no? Esa casi no da (incomprensible, 1) Entonces este de acá, también tiende digamos a un punto, pero este de acá	[VG]-2-|02:02:31| P: ¿Qué fue lo que hicieron? (5) ¿Le movieron acá? ((Los alumnos responden afirmativamente)) Entonces por ejemplo para $t = \frac{\pi}{12}$ ¿qué respondieron? H4: Primero tiene como esa forma (x)de (x)espiral P: ¡Ajá! H4: Converge a un valor fijo. P: Y converge a un valor fijo, ajá ¿qué más? Entonces va tomando como esa forma de espiral y parece que converge a un valor. H6: Pues sí, como que va oscilando, ¿no? Oscila entre un valor y siempre va ((con su mano hace un movimiento con el dedo que va de un lado a otro)) H3: No:::, porque ves que se forma una espiral ((hace el movimiento en espiral con su mano)) H6: O sea sí, pero si lo ves digamos en la manera lineal como que va oscilando hasta llegar a un valor. P: ¡Ujú! Ok, entonces sí, va formar como una espiral, pero se va moviendo como alrededor (x)de algún valor específico. ((Los estudiantes asienten con la cabeza)) Ok. ¿En $t = \frac{3\pi}{4}$ sucede lo mismo, o? ((Varios estudiantes dicen que No)) ¿No? Sucede otra cosa, vamos a ver, $\frac{3\pi}{4}$ a ver, qué pusieron que sucedía antes de que lo veamos. M3: Primero aumenta y luego se queda oscilando en un valor. P: $\frac{3\pi}{4}$ aquí está, es 2.36 más o menos, ok entonces veamos, entonces primero aumenta, empieza en 1.27. M3: ¡Ajá! Aumenta y ya después va, (x)se queda oscilando. H4: Pero eso es lo mismo que la otra, ¿no? H3: Sí, si es lo mismo.

Parte II.	**¿Y si agregamos más epiciclos?**						
Intención:	Se proporciona un applet con el fin de visualizar la estabilidad del sistema. A partir de manipular el número de circunferencias se podrá analizar el comportamiento del sistema, al estudiar cómo cambia la trayectoria del planeta.						
Estudiante	**M2**	**M3**	**H1**	**H3**	**H4**	**Equipo 3**	**Puesta en común**
						crees que también se acerque a un punto si agregaras una circunferencia. M3: No sé, yo creo que, yo siento que ese se va a seguir estirando, y estirando, y estirando. H3: ¿Mmm? M3: Yo siento que sí. (13) H6: Huy mira, si está interesante esto, si es una serie de Fourier, ¿no? M3: ¿Eh? H6: Las series de= M3: =Es que es lo que le decía a él, que este se comporta de otra manera distinta. No sé si sea, la manera natural. H6: No, de hecho, si se comporta igual. Has de cuenta. M3: No, porque la otra hacia esto ((hace un sonido para hablar de la forma)). H6: No fíjate, en un instante de t cualquiera agreguemos dos circunferencias, has de cuenta que es lo mismo, exactamente (incomprensible, 1) o tienes tres, tienes exactamente el mismo, entonces fíjate este es el primer caso en el que estábamos, este es el caso que analizamos, ¿lo recuerdas? M3: Mmm, ah si tienes razón, sí es la misma. H6: Entonces fíjate al agregar cuatro, tendrías este (incomprensible, 1, ¿radio?) y obviamente converge a algún punto.	H6: Pero es diferente, a no sí. M3: No, es que se queda como en un parámetro. P: Como en un parámetro. Porque esta es como en uno uno, uno dieciocho, diecisiete M3: Y baja y sube, y oscila. P: Baja y sube. ¿Cómo que sí se comporta similar, no? ((varios estudiantes responden que sí)) Como que oscila también igual alrededor de algún, de un valor. [VG]-2-|02:04:44| P: ¿En $t = \pi$ y $t = 2\pi$? M2: Crecen (incomprensible, 1). M3: Crecen. H4: Crece a la suma del radio, los radios. H6: Ah, pero es máximo ¿verdad? P: Crecen lo mismo nada más que una está aquí y la otra está de este otro lado, ¿verdad? ¿Sí? ((H6 asiente con la cabeza)) ¿Entonces qué pasa ahí, entonces con la, con la distancia del planeta? M3: Aumenta= H6: =Se va haciendo más grande. P: ¿Siempre aumenta? H6: ¡Ajá! Siempre se va a alejar. P. ¿Tendrá cota? ¿Será acotado o no? H1: ¡Sí! H3: Yo creo que sí. H1: Hay otra serie, para:::, bueno para valores finitos, como ahí lo aproxima. Eh, (x)la serie, cuál era, suma parcial. P: ¡Ujú! H1: La serie trigonométrica, de hecho, esta (x)no cumple aquí, pero para valores finitos si converge, se estaría estirando ((explica con el movimiento de sus manos)) P: Ok, otra vez, la convergencia es algo de infinitud, ¿sí? H1: ¡Ajá! (x)No converge. P: Entonces= H3: (Incomprensible, 1) H1: La horizontal H3: ¡Ajá! H1: O sea, la vertical sí, pero la horizontal se va estirando indefinidamente ((explica con el movimiento de sus manos)) H6: Pero es que van decreciendo los radios cada vez más, o sea (x)sí hay un valor al que tienen que= H3: =Pero van a seguir sumando algo. H1: No, porque ya vieron (x)como definimos los radios. H6: Es como la serie $\frac{1}{2^n}$, o sea va creciendo va sumando algo, pero si hay un valor al que igual llegas H1: (x)En la tarea pasada definieron al radio como, o sea decrecía conforme a los impares, y la de suma de impares no converge, ni la de todos los naturales, ni pares ni impares converge. P: Entonces aquí lo que está pasando es que estamos sumando [los radios]. H1: [Los radios] y el siguiente es:::, decrece conforme impares, ¿no?. P: Entonces, como que unos dicen que sí y otros dicen que no. H6: Pues yo digo que sí converge. P: Sigues convencido de que sí converge. [VG]-2-|02:07:10| H9: Sí convergería, porque estaría acotada. P: ¿Por qué? H9: Porque:::, o sea, para valores ya muy grandes, el radio sería cada vez más pequeño, entonces llegaría a un punto en el que como que no estaría sumando nada, entonces, si le sumas algo más grande, ya estaría acotada y crecería siempre, entonces tiene que converger. P: OK= H9: =Bueno también dependería de la relación entre los radios, porque= H1: =Pero hay series decrecientes que no convergen. H3: ¡Ajá:::! H1: Como la de los naturales, $\frac{1}{n}$ no converge. H9: No, sí, más bien dependería de la relación entre los radios, porque aquí en este ejercicio no te lo está especificando, que es igual al anterior, entonces podría converger o no converger.
Intencionalidad	Se pretende propiciar un análisis numérico de la variación de una suma parcial a otra, se busca que el estudiante se percate que la trayectoria del planeta no es estable para todos los valores del tiempo.						
¿Qué hace?	**Comparar** la distancia del planeta a la Tierra al agregar circunferencias.	**Comparar** la distancia del planeta a la Tierra al agregar circunferencias.	**Evaluar** los valores del tiempo en los argumentos de seno y coseno.	**Comparar** la distancia del planeta a la Tierra al agregar circunferencias.	**Comparar** la distancia del planeta a la Tierra al agregar circunferencias.	**Comparar** la distancia del planeta a la Tierra al agregar circunferencias.	**Comparar** la distancia del planeta a la Tierra al agregar circunferencias.
¿Cómo hace?	Considera los cambios en el valor numérico de la distancia al agregar circunferencias.	Considera los cambios en el valor numérico de la distancia al agregar circunferencias.	Revisando si para dichos valores seno y coseno alcanzan valores críticos (-1 o 1) o cero.	Considera los cambios en la posición del punto al agregar circunferencias.	Considera los cambios en la posición del punto al agregar circunferencias.	Considera los cambios en la posición del punto al agregar circunferencias. Considera los cambios en el valor numérico de la distancia al agregar circunferencias.	Considera los cambios en la posición del punto al agregar circunferencias. Considera los cambios en el valor numérico de la distancia al agregar circunferencias.
Argumentos (A) y confrontaciones (C) presentados.	(A) Para cierto tiempo, el valor de la distancia oscila cada vez más cerca de un valor específico al agregar circunferencias. (A) Para cierto tiempo, el valor de la distancia aumenta conforme se agregan circunferencias.	(A) Para cierto tiempo, el valor de la distancia oscila alrededor de ciertos valores al agregar circunferencias. (A) Para cierto tiempo, el valor de la distancia aumenta conforme se agregan circunferencias.	(A) Si seno y coseno no toman valores críticos para valores específicos del tiempo, entonces la distancia converge. (A) Para un tiempo igual a los múltiplos de π la distancia se maximiza.	(A) Para cierto tiempo, el planeta oscila cada vez más cerca de un punto específico al agregar circunferencias. (A) Para cierto tiempo, el planeta se aleja del centro de la circunferencia conforme se agregan circunferencias.	(A) Para cierto tiempo, el planeta oscila cada vez más cerca de un punto específico al agregar circunferencias. (A) Para cierto tiempo, el planeta se aleja del centro de la circunferencia conforme se agregan circunferencias.	(A) Para cierto tiempo, el planeta oscila cada vez más cerca de un punto específico al agregar circunferencias. (A) Para cierto tiempo, el planeta se aleja del centro de la circunferencia conforme se agregan circunferencias. (A) Para cierto tiempo, el valor de la distancia oscila cada vez más cerca de un valor específico al agregar circunferencias.	(A) Para cierto tiempo, el planeta oscila cada vez más cerca de un punto específico al agregar circunferencias. (A) Para cierto tiempo, el planeta se aleja del centro de la circunferencia conforme se agregan circunferencias. (A) Para cierto tiempo, el valor de la distancia oscila cada vez más cerca de un valor específico al agregar circunferencias.

Parte II.	**¿Y si agregamos más epiciclos?**						
Intención:	Se proporciona un applet con el fin de visualizar la estabilidad del sistema. A partir de manipular el número de circunferencias se podrá analizar el comportamiento del sistema, al estudiar cómo cambia la trayectoria del planeta.						
Estudiante	**M2**	**M3**	**H1**	**H3**	**H4**	**Equipo 3**	**Puesta en común**
							(A) Para cierto tiempo, el valor de la distancia aumenta conforme se agregan circunferencias.
Pregunta c	d_{PT} $= \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} r_i \operatorname{Cos}((2i-1)t)\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} r_i \operatorname{Sen}(\right.}$ Con $r_i = \frac{1.27}{2i-1}$ 	 	$d_{PT}(t)$ $= \frac{4}{\pi}\sqrt{\left[\sum \frac{1}{2i-1}\cos((2i-1)t)\right]^2 + \left[\sum \frac{1}{2i-1}\right.}$ $i = 1,2,\ldots,n.$		$r = \frac{4}{\pi}\left[\left(\sum_{1}^{n}\frac{\cos(2n-1)t}{2n-1}\right)^2 + \left(\sum_{1}^{n}\frac{\operatorname{sen}(2n-1)t}{2n-1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$	[VE3]-2-|01:55:57| H3: Pues sí, es lo que se me ocurre. Es hacer exactamente lo mismo, pero ahora con esa madre, el valor del radio y el valor de a velocidad angular. (incomprensible, 2) La velocidad es angular en términos generales, ¿no? M3: ¡Ujú! H3: Entonces la imagen respecto de la horizontal sería esta, sería velocidad por tiempo. [VE3]-2-|01:57:46| H3: Creo que ya “M3” ((se refiere a M3 por su nombre)). M3: A ver. H3: Sabemos. Tienes aquí el primer punto y eso es R_1. M3: ¡Ujú! H3: El coseno de la primera velocidad angular, que ya sabes quién es, igual trae el seno, ¿no? Aquí también este la coordenada luego de (incomprensible, 5) entonces eso, crearía tu primer punto aquí. Y luego como lo habíamos hecho la otra vez, bueno en el pasado, tienes que saber el otro radio, tienes que saber la velocidad angular, pero es el mismo tiempo, entonces vas a tener que sumar estos, lo mismo para los n. M3: Entonces nos quedaría la raíz.	[VG]-2-|02:09:26|- El estudiante H2 pasa a resolver en la pizarra. Y escribe lo siguiente:  Luego asegura: [VG]-2-|02:10:04| H2: Si no sabemos los radios ni su velocidad angular, esta es la forma general. H1: Dice que retomemos los ejercicios pasados. P: ¡Ajá! En este sí, en este, en este en particular cómo sería, digamos (la) fórmula. H9: Cuatro entre $2n-1$ ((sigue escribiendo en la pizarra la fórmula con ayuda de los demás estudiantes))  [VG]-2-|02:11:35| P: ¿Qué representarían estos $\frac{4}{(2n-1)\pi}$? M2: Los radios ((junto con M2 la mayoría indica que los radios)) P: El radio de la circunferencia (3) ¿Y lo que está adentro, el $(2n-1)t$? H3: Pos, el ángulo. P: El ángulo que va cambiando, ¿verdad? H1: Velocidad angular. P: El $2n-1$ sería la velocidad angular ¿Y el $(2n-1)t$? H1: El ángulo. P: La medida del ángulo en radianes.
Intencionalidad	Matematizar el fenómeno como una generalización de los resultados obtenidos en la Tarea #2 - Parte I.						
¿Qué hace?	**Identificar** la regularidad a partir de los primeros términos de la suma.	**Identificar** la regularidad a partir de los primeros términos de la suma.	**Identificar** la regularidad a partir de los primeros términos de la suma.	**Identificar** la regularidad a partir de los primeros términos de la suma.	**Identificar** la regularidad a partir de los primeros términos de la suma.	**Identificar** la regularidad a partir de los primeros términos de la suma.	**Identificar** la regularidad a partir de los primeros términos de la suma.
¿Cómo hace?	Aplicando la misma estrategia de solución que en los resultados obtenidos en la Tarea #2 – Parte I. Utilizando la fórmula de norma de un vector.	Agregando los términos necesarios a las fórmulas construidas en la Tarea #2 – Parte I.	Agregando los términos necesarios a las fórmulas construidas en la Tarea #2 – Parte I.	Aplicando la misma estrategia de solución que en los resultados obtenidos en la Tarea #2 – Parte I. Agregando los términos necesarios a las fórmulas construidas en la Tarea #2 – Parte I.	Agregando los términos necesarios a las fórmulas construidas en la Tarea #2 – Parte I.	Aplicando la misma estrategia de solución que en los resultados obtenidos en la Tarea #2 – Parte I. Agregando los términos necesarios a las fórmulas construidas en la Tarea #2 – Parte I.	Aplicando la misma estrategia de solución que en los resultados obtenidos en la Tarea #2 – Parte I. Agregando los términos necesarios a las fórmulas construidas en la Tarea #2 – Parte I.
Argumentos (A) y confrontaciones (C) presentados.	(A) Gráficamente muestra que extiende los casos con una, dos y tres circunferencias, para el resto de los términos.	No presenta argumentos.	No presenta argumentos.	(A) Gráficamente muestra que extiende los casos con una, dos y tres circunferencias, para el resto de los términos.	No presenta argumentos.	(A) Teniendo los datos de radio y velocidad, se hace lo mismo que cuando se calculó la fórmula para una, dos y tres circunferencias.	(A) Teniendo los datos de radio y velocidad, se hace lo mismo que cuando se calculó la fórmula para una, dos y tres circunferencias.
Pregunta d	Su comportamiento puede considerarse oscilatorio. Alcanza un valor máximo y un valor mínimo. 	Se debe conocer el radio de las circunferencias y su velocidad angular para poder determinar la distancia del punto P a la Tierra.	Es una función en la que los máximos y mínimos se pueden intuir sin mucha dificultad (múltiplos de pi y múltiplos impares de pi medios, respectivamente). Pero analíticamente es difícil de demostrar. Es una función periódica.	Es necesario conocer el radio de cada círculo utilizado en el modelado de la trayectoria, así como su velocidad angular para poder determinar la forma a la que tenderá la trayectoria cuando agreguemos más círculos, este hecho se sigue de que estos parámetros alteran la forma de la trayectoria final. Sería conveniente que tanto los radios como las velocidades formen una progresión para poder formar trayectorias interesantes.	Para empezar, siempre converge a un valor, y este valor es más pequeño conforme t se aleje que pi y 2pi, pues la parte sinoidal se anula, la parte del coseno se vuelve 1 y sólo se suman los términuos del numerador y P se aleja horizontalmente.	No hubo interacción al responder a esta pregunta.	[VG]-2-|02:14:19| P: Bueno entonces esa fórmula ¿Qué relación tendría con eso? Digamos, con la estabilidad y con la, y con eso que respondieron aquí arriba. H4: Nada más que lo describe= P: =¿Qué puedes decir del comportamiento de esta fórmula, a partir de eso que respondieron ahí en esas preguntas? H1: Ah:: Es que la fórmula explica::: la forma que toma la figura. P: ¡Ujú! ¿Y respecto de lo que respondieron arriba de va tomando una forma definida? H4: Habría que ver los valores de convergencia. Meter al t en la fórmula y averiguar la convergencia. P: ¡Ajá! Por ejemplo, una cosa que podrían decir es, si ponen $t = \frac{\pi}{12}$ ¿qué le pasaría a esa fórmula? ¿sería convergente o divergente? M2: Convergente. H3: Convergente. H1: ¿Cuál? P: A esta. M2: [Converge]. H1: [Convergente]. P: ¿Si ponen $t = \frac{3\pi}{4}$? H3: Converge. P: También. Donde no tenemos, este, un acuerdo es en $t = \pi$ y $t = 2\pi$, ¿cierto? ((H3 asiente con la cabeza))
Intencionalidad	Este inciso conduce hacia la interpretación de la matemática involucrada en el fenómeno físico, relacionar la estabilidad de la trayectoria el planeta con el límite de las sumas parciales involucradas en la fórmula calculada en el inciso c. Esto es de suma importancia, pues en el trabajo de Fourier siempre hubo un ir y venir entre el fenómeno físico y la matemática involucrada, para validar la segunda en la primera (Farfán, 2012; Farfán y Romero, 2017).						
¿Qué hace?	**Graficar** la distancia del planeta a la tierra respecto del tiempo. **Reconocer** valores máximos y mínimos.	**Identificar** los parámetros necesarios para matematizar.	**Distinguir** las características de la fórmula.	**Identificar** los parámetros necesarios para matematizar.	**Distinguir** las propiedades de la gráfica en la fórmula.		**Distinguir** las propiedades de la gráfica en la fórmula.
¿Cómo hace?	Considerando el movimiento oscilatorio y acotado.	Considerando los parámetros involucrados en la fórmula obtenida en la pregunta anterior.	Considerando la fórmula como una función.	Considerando los parámetros involucrados en la fórmula obtenida en la pregunta anterior.	Considerando la convergencia y la forma de la trayectoria.		Considerando la convergencia y la forma de la trayectoria.
Argumentos (A) y confrontaciones (C) presentados.	(A) Su comportamiento puede considerarse oscilatorio. Alcanza un valor máximo y un valor mínimo.	(A) Conociendo los radios y las velocidades de los puntos se puede calcular la fórmula de la distancia del planeta a la Tierra.	(A) Es una función acotada y periódica.	(A) Conociendo los radios y las velocidades de los puntos se puede determinar la forma de la trayectoria del planeta.	(A) Converge para cada valor de t, este valor es más pequeño conforme t se aleje que π y 2π, justo en esos valores P se aleja horizontalmente.		(A) Converge para cada valor de t, sin tener certeza de lo que sucede en $t = \pi$ y $t = 2\pi$.
Pregunta e.1	Tiene un valor mínimo en π que decrece cuando aumenta el número de circunferencias. En los valores de $t = 0$, $t = 2\pi$, crece cuando aumenta el número de circunferencias.	Se comporta como una serie de Fourier de Cosenos, que dependerá de la velocidad angular, ya que inicia en un punto maximo aslcanza un minimo y vuelve a recuperar un punto maximo en un determinado.	Conforme aumenta el número de círculos. Va desde el valor máximo hasta el mínimo dentro del intervalo $((2n-2)\pi, (2n-1)\pi)$ y del mínimo al máximo dentro del intervalo $((2n-1)\pi, 2n\pi)$.	Como una especie de serie (suma infinita) de cosenos, esto se deduce de la expresión general calculada para la distancia de T a P y de la forma de la suma parcial de abcisas cuando se tiene una sola circunferencia, la serie se deforma hasta el punto en que parece formar una especie de señal con forma de V.	Toma un valor constante en npi	[VE3]-2-|02:14:20| M3: Dice abscisas primero, ¿no? H6: Las abscisas convergen a la función periódica, ¿no? M3: Ah::: no sé. [VE3]-2-|02:14:59| H3: ¿Será que esta es una serie de cosenos y la otra una serie de senos? M3: Tendría sentido. H3: Puramente de senos y una puramente de cosenos.	[VG]-2-|02:16:46| H7: Pues que es una función oscilante y los máximos y mínimos son la suma de los radios. P: Ok. H4: Que toma también un valor constante, ¿no? Entre 0 y π (x)las sumas de las coordenadas. H7: Pero si las abscisas no son coordenadas. H4: Ah de las abscisas, pues como quiera es continua, ¿no? La gráfica que describe. P: Ok, ¿y en π? H3: Parece una discontinuidad.

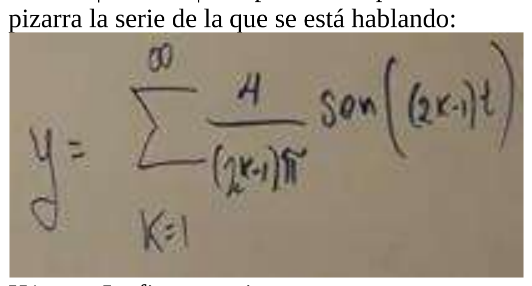
Parte II. **¿Y si agregamos más epiciclos?**

Intención: Se proporciona un applet con el fin de visualizar la estabilidad del sistema. A partir de manipular el número de circunferencias se podrá analizar el comportamiento del sistema, al estudiar cómo cambia la trayectoria del planeta.

Estudiante	**M2**	**M3**	**H1**	**H3**	**H4**	**Equipo 3**	**Puesta en común**
						M3: Una serie de (incomprensible, 1) en cosenos, tendría sentido. H3: Sí, ¿no? Porque, porque ve lo que tenemos aquí una suma pura de cosenos y acá una suma pura de senos. M3: ↑Pues es lo que te dije desde hace rato↑ [VE3]-2-|02:16:04| H6: ¿A dónde converge? M3: ((risas)) H6: Diverge, ¿no? M3: Ah, sí es cierto. No sé, es que no hemos visto convergencias así. H6: ¿Qué te pasa “M3”? ((se refiere a M3 por su nombre)) H3: Pos ahorita tienes que ver a dónde converge, es como las otras dos, la de senos se ve muy clarito que se van (x)a un valor positivo y al otro se va a otro valor negativo nada más. H6: Una se va a= H3: =Ah bueno, pero eso no quiere decir que converja verdad. M3: No::: H3: O sea que se vuelve más bien como una función escalonada. M3: ¿Sí:::? ((risas)) H3: Pero la serie es diferente, ¿no? H6: Es que no es una función escalonada. H3: Sí, ¿no? La otra, la del seno. M3: La de los senos. H6: No:::, (x)no es escalonada. Lo que pasa es que esta cosa está muy chiquita, pero aquí tienes el mismo comportamiento. M3: Es que parece un seno amortiguado.	P: ¿Parece una discontinuidad? ¿de qué tipo? H4: Una divergencia, ¿no? H7: Pero aquí toma el valor de la suma de los radios, ¿no? Y no sabemos si converge o diverge. P: Ajá verdad, está esa discrepancia. Entonces, si converge ¿qué debería pasar ahí? H4: Convergería a la suma de los radios. P: ¿Y si diverge? M2: Se va ((mueve sus manos de abajo hacia arriba para explicar el comportamiento)) P: Da infinito, ¿cierto? Pero la gráfica qué es sugiere ¿qué converge o que diverge? H4: No sé, la gráfica me indica que converge. M2: Es que ahí nada más estamos probando, bueno= P: Muy poquito ((hace referencia al número de circunferencias usadas para ver la gráfica)) M2: Y se va viendo que el mínimo va bajando cada vez más. P: Ok, conforme le agrego las::: otro n, otros n’s, voy a ponerle otros. Ahí en 21, voy a ponerle bastantes ya, los 25. Y lo que hizo fue bajar más, ¿verdad? Entonces conforme le agrega el n, dice “M2” ((se refiere a M2 por su nombre)), entonces, este, como que se va haciendo más hacia abajo siempre. Entonces, si le ponemos $n = 50$ probablemente esté (x)más abajo, ¿verdad? Entonces qué les dice eso ¿que es acotado o no es acotado? H1: No parece. P: Parece que no es acotado, ¿verdad? Entonces ¿converge o diverge? M3: Diverge ((junto con M3 responden varios estudiantes)) P: Pareciera, ¿verdad? Que diverge entonces. Entones podemos volver a las preguntas anteriores ¿qué pasa en $t = \pi$, con la distancia? H1: (Incomprensible, 2, ¿Sería evaluando en la serie?) ((señala la fórmula de la distancia escrita en la pizarra)) Pues el seno se cancela, en todos los múltiplos de π se hace 0. P: Se hace 0, ¡ajá! H1: Y el coseno son múltiplos impares de π o de $-\pi$ y eso siempre va a dar, por ejemplo, el de da -1 con os de $-\pi$, ¿no? Digo con los de π da -1 y con los de $-\pi$. M2: Lo mismo. H1: También, así que sería la suma de, bueno más bien la serie que suma los inversos de los impares y eso diverge.
Pregunta e.2	Al aumentar el número de circunferencias la suma se acerca a 1 en el rango $(0, \pi)$, mientras que en el rango $(\pi, 2\pi)$ la suma se acerca a -1.	Se comporta como una serie de Fourier de Senos, que dependerá de la velocidad angular, ya que inicia en un punto máximo se mantiene por un intervalo de tiempo y después alcanza un mínimo donde de igual manera se mantiene constante y el proceso se repite. Comportandose como un pulso.	Conforme aumenta el número de círculos. La suma de las abscisas se vuelve igual a 1 dentro del intervalo $\left((2n-2)\pi, (2n-1)\pi\right)$ ((2n-2) y -1 dentro del intervalo $\left((2n-1)\pi, 2n\pi\right)$.	Como una especie de serie (suma infinita) de senos, esto se sigue de la expresión general calculada para la distancia de T a P y de la forma de la suma parcial de ordenadas cuando se tiene una sola circunferencia la cual es una función seno, con una cierta amplitud. La serie parace deformarse hasta el punto de formar una función pulsante y periódica.	Toma un valor constante en 1 y -1. y se mantiene por un intervalo de y -pi y pi	[VE3]-2-|02:07:56| H3: Entonces tiende a dos rectas ¿a la función escalonada? No, si brinca mucho ¿no? H6: Yo estoy analizando el coseno. M3: A ver. H3: No, pero es que si tiende a esa, ¿no? Sí da la escalonada. M3: ¡Ash! H3: Pero si le agregas más puntos podríamos alinearlo. Mira, es como una recta no, pero es que esto no me gusta. M3: Pero es que salen picos. Más bien parece un seno, ¿no? H3: No, está raro, porque seno no (incomprensible, 1, ¿tiene picos?) M3: Pero yo creo que le metieron un::: una función exponencial, a lo mejor una composición entre el seno (incomprensible, 1) y una función expo- y una (incomprensible, 1) H3: ¿Qué está pasando? ((risas)) M3: Sí, ponle tú que el seno no tenga una (incomprensible, 1), da positivo de cero a pi y que el (incomprensible, 1) da negativo de pi a dos pi, ¿no? [VE3]-2-|02:22:51| H6: Tendría sentido considerar que esta tiene (incomprensible, 1), ¿no? H3: Sí, sí, es una función escalonada, cómo se llama ese tipo de funciones. Es que hay un tipo de función, ¿no? Cuadradas o no sé cómo= H6: =¿Cuál? H3: La que forma esta. H6: ¿A trozos? (3) H3: ¡Ajá! Sí. M3: Pero es la función de escalón::: H3: Es que la función escalón es cero y luego de repente empieza a valer uno. M3: ¡Ajá! Y luego es discontinua en un punto, pero la puedes hacer continua sin retornos. H3: ¡Ajá! Es que aquí se ve que es más o menos algo así, pero es que no quiero decir que es justamente un escalón, porque no parece que valga lo mismo. M3: ¡Ajá! H3: Yo digo que es más bien como una especie de pulso o algo así. H6: O sea, es porque= M3: =Ah::: quizás pulsos.	[VG]-2-|02:23:48| H1: Esa sí converge. P: Esa sí converge ¿en todos los puntos? ¿En todo lado, para cualquier valor de t? H1: Bueno, para t igual multiplos de $\frac{\pi}{2}$, bueno múltiplos impares. P: ¿Sólo para $t = \frac{\pi}{2}$ pasa eso? ¿Sólo aquí o aquí? ((señalando el valor en la gráfica)) H1: Bueno sí, (x)es fácil demostrar ese, para otros valores (x)no se cómo se demuestra que converge. P: Pero ¿qué pueden ver de la gráfica? H1 Que sí. M2: Que converge. H1: Para intervalos de, sí intervalos abiertos, ¿no? Que esté dentro del intervalo $(0, \pi)$. P: Ok. H1: Y 2π= P: =¿Abiertos? H1: ¡Ajá! Intervalos abiertos. P: Entonces ¿qué pasa (x)en π? H4: Se cancela (incomprensible, 1), porque [(x)ahí está la discontinuidad]. H1: [¿Cuáles son las discontinuidades?] ¿las qué, las coordenadas? P: ¿Tendrá? ¿Qué había dicho? “H8” ((se refiere a H8 por su nombre)) me había dicho algo ahí de ¿cerca de π qué pasa o qué parecía que pasaba? M2: Las discontinuidades. H8: La trayectoria (x)de. Ya se me olvidó ((risas)) H1: Se hace cero, bueno (x)se ve (x)de la función y también de la gráfica que en π, la suma de las ordenadas es cero, porque solo, bueno está completamente estirado en X. P: Ok ¿qué opinan los demás? (6) “H8” ((se refiere a H8 por su nombre)) me había dicho que cerca de π, cerca, no me dijo en π, sino cerca de π, parece que diverge. ¿Vamos a ver qué opinan de eso? ¿Sí me habías dicho eso verdad “H8”? H8: Sí. P: Vamos a poner menos ((se refiere al número de circunferencias en el applet)) para ver qué se ve y vamos a quitar la de las abscisas. Así se ve con cinco (9). Entonces veámoslo con seis, voy a quitar el, a limpiar para que, así se ve con seis(9). Sí, ahora con siete (12).

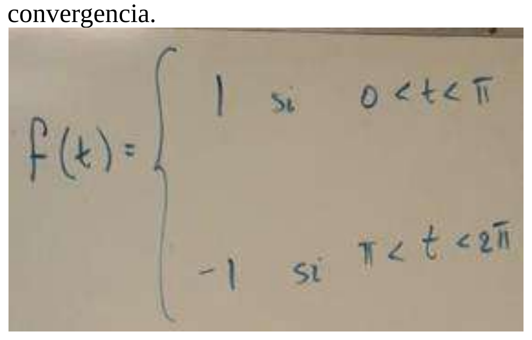
Parte II. **¿Y si agregamos más epiciclos?**

Intención: Se proporciona un applet con el fin de visualizar la estabilidad del sistema. A partir de manipular el número de circunferencias se podrá analizar el comportamiento del sistema, al estudiar cómo cambia la trayectoria del planeta.

Estudiante	**M2**	**M3**	**H1**	**H3**	**H4**	**Equipo 3**	**Puesta en común**
						H6: (x)Es que realmente te faltan puntos, o sea por si, es que si, ese si va así. H3: Entonces tendría sentido decir que es cómo. M3: Un pulso. H6: Es periódica en esos intervalos. H3: ¡Ajá! Porque el pulso si es perió:::dico. H6: Y tienes puntos de discontinuidad.	¿Qué les parece que sucede ahí, converge o diverge? H1: Converge, simplemente que cambia muy rápido al otro valor de convergencia. P: ¿Qué opinan los demás? H7: Que diverge. P: Que diverge. H2: Pero es que del movimiento del Planeta se ve que da cero. (Incomprensible, 1) es continuo porque da así como saltitos, tendría que pasar por cero. H1: Sí. Bueno, en el tiempo se ve que por ahí tiene que pasar más rápido, por eso se ve la caída abrupta. Pero en la figura simplemente tendría que pasar por el cero, porque hay un punto en que los::: la cadenita de círculos está completamente horizontal, no hay ningún termino en Y, o sea en π, y en, ajá, todos los múltiplos de π.
Pregunta e.3	En la respuesta (a) menciono que la trayectoria se vuelve más alargada en π y en 2π, lo cual concuerda con ésta gráfica donde podemos ver mínimo y máximo respectivamente. (Máximos si se toma el cuadrado de las sumas). La parte de la trayectoria donde los bucles parecen formar dos líneas paralelas se observa en la última gráfica donde la suma de las ordenadas se vuelve constante.	Que ambas se comportan como funciones periodicas y dependeran de la velocidad angular que tengan y los radios de la circunferencias que se van agregando.	En múltiplos de pi las abscisas están completamente estiradas, por lo que ahí son los máximos o mínimos en los que alterna la función. Luego los círculos se enciman sobre las líneas, por lo que las ordenadas suman casi una constante.	No cabe duda de que la relación existente es aquella que produce el hecho de que las coordenadas del planeta respecto al tiempo están expresadas como sumas de senos y cosenos, mismos términos que se ven alterados a causa de constantes tales como el radio de cada circunferencia y la velocidad angular de cada una de estas, esto produce la forma de la trayectoria y la altera conforme se agregan más círculos.	Concuerdan con las respuestas en a) y b)	No hubo interacción al responder esta pregunta.	[VG]-2-|02:28:08|- el profesor indica que lo discutido en las dos preguntas anteriores ya incluye la respuesta a esta pregunta.
Pregunta f	Sí converge, su comportamiento se aproxima a una constante. Converge a una función escalonada	La serie de la ordenadas converge y su valor de convergencia es la coordenada "y" de la posición del planeta con respecto a la Tierra.	La serie de ordenadas $\sum \frac{1}{2i-1} \operatorname{sen}((2i-1)t)$ con t=pi/2, es igual a $\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\sum(-1)^{i+1}\frac{1}{2i-1}$ i=1,2,... La cual, por la propiedad telescópica tiende a pi/4. Y con 0=-pi/2 tiende a -pi/4. Por lo que la serie no converge ya que tiene dos puntos de acumulación.	La serie de las ordenadas converge, aseguramos que esta serie converge al valor de la componente "y" del vector de posición del planeta respecto a T.	Parace que converge en intervalos abierto de 0 y pi y diverge cuando se acerca a los valores de 0 y múltiplos de pi	[VE3]-2-|02:29:50| H6: Según yo, el valor de convergencia es el mismo. H3: Entonces sí converge. H6: Sí conver- tiene que converger. M3: ¿A qué converge? H6: Yo le puse que converge a, bueno le puse que conociendo más acerca del movimiento se puede obtener la serie de Fourier en cada valor de convergencia y converge a la función. H3: Converge a la función. H6: A una función periódica. H3: Mmm sí. H6: Porque lo que tienes al final es una serie de funciones, tiene que converger a una función. H3: Ah, sí. H6: Y esa función tiene que ser periódica. (8) De hecho, converge uniformemente. [VE3]-2-|02:30:58| H3: Esta converge a la función pulso, uno, menos uno. M3: ¿Mmm? H3: Esta converge a esta función pulso uno y menos uno.	[VG]-2-|02:29:32|- El profesor especifica en la pizarra la serie de la que se está hablando:  H1: La figura sugiere que a uno. (4) P: ¡Ujú! ¿qué más? ¿converge o diverge? ¿quiénes dicen que converge? ((cinco estudiantes levantan la mano)) ¿quién dice que diverge? ((ninguno levanta la mano)) ¿quién se abstiene de votar? ((risas)) Ok, bueno de converge "H1" ((se refiere a H1 por su nombre)) dice que a 1 ¿pero aquí da -1? H1: Ah bueno, sí, entonces depende del valor (x)de t. P: ¡Ajá! Pero yo estoy preguntando de toda la serie, o sea ahí van incluidos todos los valores que pueda tomar t. H1: Ah bueno de todos= H4: =Convergería como al radio de::: H1: Del todo no converge porque siemre va a ir, es como una onda cuadrada ¿no? Siempre hace ((realiza un movimiento con sus manos para explicar)) P: ¿Entonces? [¿converge o] H4: [Convergería] como al radio de la segunda circunferencia. P: Converge como al radio, pero si converge al radio, como puede dar, porque parece que se acerca a -1, ¿verdad? Ustedes me lo habían dicho. Entonces ¿cómo podría converger a -1, si converge a un radio? ¿Converge o diverge? H4: Bueno, si lo pone en esos términos, entonces diverge. P: Vean que lo único que hago es hacerlos dudar. ((risas)) H1: Es como la solución 1, -1, 1, -1, … esa no es convergente. P: ¡Ajá! H1: (x)Se parece a::: esa función a::: digo a esa sucesión. P: ¿Quién está de acuerdo? ¿quién no? (6) ¿Están con crisis existencial? H2: El factor= P: =Voy a hacer una aclaración importante ¿cuál es la naturaleza de esto que está aquí? Es un número, una matriz, un polinomio, una función ¿qué es? H2: Todas son funciones. P: Función, ¿verdad? Sí, es una función. Si yo sumo funciones ¿el resultado que a de ser? ((Una función dicen los estudiantes)) Una función, ¿sí? O eso me diría el sentido común, ¿verdad? Si yo sumo funciones mi resultado es una función. Entonces ¿una función podría tomar valor de 1 y -1? ((H1 asiente con la cabeza)) H4: Sí, a no, ¿cómo es que dijo? P: O sea ¿una función podría hacer eso? H1: Sí. P: ¿Cuál función? H1: La de escalón. P: Una de escalón, ¿converge o diverge? H1: Bueno, es que sería no converge, bueno H3: Ajá, no converge. H4: Es que divergir es que se va a infinito. P: Puede ser eso, bueno es que depende de qué estemos hablando de convergencia, por ejemplo, ahorita que lo dijiste con sucesiones, lo dijiste bien, si una sucesión da -1 y da 1, entonces tiene dos puntos de acumulación, entonces diverge ¿verdad? La sucesión.

Parte II. **¿Y si agregamos más epiciclos?**

Intención: Se proporciona un applet con el fin de visualizar la estabilidad del sistema. A partir de manipular el número de circunferencias se podrá analizar el comportamiento del sistema, al estudiar cómo cambia la trayectoria del planeta.

Estudiante	**M2**	**M3**	**H1**	**H3**	**H4**	**Equipo 3**	**Puesta en común**
							H1: Bueno, entonces diverger significa no converger. P: ¡Ajá! Diverger es no converger, no quiere decir que de infinito, ¿sí? Por ejemplo esa sucesión que va a -1 y a 1 esa, este:::, diverge porque tiene dos puntos de acumulación hay dos subsucesiones que convergen a valores distintos, por ejemplo. Pero ahí estamos hablando de número, en cambio aquí estamos hablando de funciones, entonces ¿el resultado de esto puede ser una función o no? H1: Es una función. P: Por la naturaleza, ¿verdad? De los términos, si yo sumo funciones, como que es natural que la respuesta sea función. H1: Sí. P: Entonces ahora otra vez la pregunta ¿podría haber una función que haga esto? Pues sí, la función escalón ¿cierto? ((los estudiantes asienten con la cabeza)) Entonces ¿podría esto converger a la función escalón? ((los estudiantes asienten con la cabeza)) ¿Si o no? ((la mayoría responde que sí)) [VG]-2-|02:34:44|- Con la guía de los estudiantes el profesor escribe en la pizarra el valor de convergencia. 
Intencionalidad	Se espera con los incisos e y f la interpretación de la matemática involucrada en el fenómeno físico, relacionar la estabilidad de la trayectoria del planeta con la convergencia de las series involucradas en la fórmula calculada para la distancia de planeta P a la Tierra. Se espera que se percaten de que la suma parcial de las abscisas no siempre es divergente y que la suma parcial de las ordenadas es siempre convergente. En particular para el inciso f, se tiene como hipótesis que los estudiantes respondan que la serie de las ordenadas diverge, cuando en realidad es convergente. Esto lo sabemos gracias a la prueba piloto y las diferentes puestas en escena, ya que el argumento principal utilizado fue que "la gráfica se está acercando a dos valores 1 y -1", lo que da evidencia de la concepción de límite funcional como obstáculo para comprender la convergencia de series. Si bien sabemos que en t=π, la serie converge a cero —de hecho, en todas las discontinuidades considerando a $t \in \mathbb{R}$— aquellos estudiantes que vislumbren la convergencia podrían pensar que cerca de $t = \pi$ —las discontinuidades— la serie de las ordenadas de P es divergente, pues ya está reportado que los estudiantes consideran convergente solo aquello que converge uniformemente y lo demás es divergente (Albert, 1996).						
¿Qué hace?	**Reconocer** valores en los que se alcanzan máximos y mínimos de las sumas parciales. **Comparar** los valores máximos y mínimos de una suma parcial a otra. **Comparar** las diferencias en las gráficas de una suma parcial a otra.	**Reconocer** valores en los que se alcanzan máximos y mínimos de las sumas parciales. **Comparar** los valores máximos y mínimos de una suma parcial a otra. **Comparar** las diferencias en las gráficas de una suma parcial a otra.	**Reconocer** valores en los que se alcanzan máximos y mínimos de las sumas parciales. **Comparar** las diferencias en las gráficas de una suma parcial a otra. **Evaluar** en la fórmula para valores del tiempo específicos.	**Comparar** las diferencias en las gráficas de una suma parcial a otra. **Identificar** los parámetros que afectan la forma de la trayectoria.	**Comparar** las diferencias en las gráficas de una suma parcial a otra.	**Comparar** las diferencias en las gráficas de una suma parcial a otra.	**Reconocer** valores en los que se alcanzan máximos y mínimos de las sumas parciales. **Comparar** las diferencias en las gráficas de una suma parcial a otra. **Evaluar** en la fórmula para valores del tiempo específicos.
¿Cómo hace?	Considerando los cambios en las gráficas en forma puntual y en forma global. Relacionando las gráficas con la trayectoria del planeta.	Considerando los cambios en las gráficas en forma puntual y en forma global. Relacionando las gráficas con la trayectoria del planeta.	Considerando los cambios en las gráficas en forma puntual y en forma global. Relacionando las gráficas con la trayectoria del planeta. Calculando la convergencia de la serie para valores del tiempo específicos.	Considerando los cambios en las gráficas en forma puntual y en forma global. Considerando los parámetros involucrados en la fórmula obtenida en la pregunta anterior.	Considerando los cambios en las gráficas en forma puntual y en forma global.	Considerando los cambios en las gráficas en forma puntual y en forma global.	Considerando los cambios en las gráficas en forma puntual y en forma global. Relacionando las gráficas con la trayectoria del planeta. Calculando la convergencia de la serie para valores del tiempo específicos.
Argumentos (A) y confrontaciones (C) presentados.	(A) En $t = 0$, $t = \pi$ y $t = 2\pi$ se alcanzan máximos y mínimos que crecen y decrecen, respectivamente, al agregar más circunferencias. (A) Explicando la forma de la trayectoria con la forma que toman las gráficas. (A) El comportamiento de la gráfica se aproxima a una constante, por lo que converge.	(A) Se alcanzan máximos y mínimos que crecen y decrecen, respectivamente, al agregar más circunferencias. (A) El valor de convergencia corresponde a la ordenada del planeta respecto de la Tierra.	(A) Se alcanzan máximos y mínimos que crecen y decrecen, respectivamente, al agregar más circunferencias. (A) Explicando la forma de la trayectoria con la forma que toman las gráficas. (C) Diverge, pues la serie, para dos valores distintos del tiempo, converge a valores distintos.	(A) La serie de las abscisas se deforma hasta el punto en que parece formar una especie de señal con forma de V. (A) La serie de las ordenadas se deforma hasta el punto de formar una función pulsante y periódica. (A) El valor de convergencia corresponde a la ordenada del planeta respecto de la Tierra. (A) Las coordenadas del planeta respecto al tiempo están expresadas como sumas de senos y cosenos, mismos términos que se ven alterados a causa de constantes tales como el radio de cada circunferencia y la velocidad angular de cada una de estas, esto produce la forma de la trayectoria y la altera conforme se agregan más circunferencias.	(A) La serie de ordenadas toma un valor constante en 1 y -1. Se mantiene por un intervalo de $-\pi$ y π. (A) la serie de abscisas parece que converge en $(0, \pi)$ (C) la serie de abscisas toma un valor constante en $n\pi$. (C) La serie de ordenadas diverge cuando se acerca a los valores de 0 y múltiplos de π.	(A) La serie de ordenadas se va a un valor positivo y a uno negativo. (A) La serie de ordenadas es la función escalonada o un pulso. (C) La serie de ordenadas se acerca a dos valores distintos, por tanto, diverge. (C) La función resultante de la serie de ordenadas tiene picos, pero los senos no tienen picos. (C) La serie de abscisas diverge, nunca hemos visto convergencias así.	(A) La serie de las abscisas alcanza su máximo y mínimo y estos corresponden a la suma de los radios de las circunferencias. (A) La serie de las abscisas diverge al evaluar en $t = \pi$, pues corresponde a una serie armónica. (A) La serie de las ordenadas converge para todo valor en $(0, \pi)$ y $(\pi, 2\pi)$. (A) La serie de ordenadas en $t = \pi$ debe dar cero por que así se ve en la trayectoria del planeta. (C) La serie de las ordenadas diverge en $t = \pi$. (C) La serie de las ordenadas diverge porque se parece a la sucesión 1, -1, 1, -1, … y esa diverge.
Pregunta g	Converge a una función escalonada	Converge al mismo valor que en la respuesta anterior, ya que se estaba trabajando con valores de t positivos.	Según la applet, la suma de ordenadas converge a 1. Tiene sentido ya que la coordenada y es igual a $y_n = \frac{4}{\pi}\sum\frac{1}{2i-1}\operatorname{sen}((2i-1)t)$ para t=pi/2 $y_n \rightarrow 1$, $i \rightarrow \infty$.	Convergería al mismo valor, dado que hemos estado trabajando todo el tiempo con t's positivas. En caso de t=0 el valor de cada función seno será cero, provocando así la convergencia de la serie a la suma de todos los radios de las circunferencias.	converge a una función	[VE3]-2-|02:44:08| H3: No entiendo. M3: ¿Qué? H3: Dice, si se cambia en rango de valores de t para todos aquellos en los que t es mayor o igual que cero ¿cuál es el valor de convergencia de la serie de las ordenadas del planeta? ¿Cómo si se cambia el valor? H6: Es lo que les dije, o sea que se van a tomar valores de t positivos. H3: ¿Qué solo toma valores positivos? H6: Sí, es lo que estás haciendo. H3: ¿Cómo? H6: Los valores, estás tomando t, posiciones de t positivos. [VE3]-2-|02:48:14| M3: Oye y si le cambiamos ahí ¿qué pasa? ((se refiere al rango de valores de t dado en el applet)) H6: No hay nada. Estás tomando t (incomprensible, 1). M3: Y si le pongo. H6: No va a salir nada porque= M3: =No::: H3: Algo raro pasó ahí. H6: Realmente no pasa mucho, porque si= M3: =¿Cómo no? H6: Si la gráfica de aquí, la función esa es simétrica o antisimétrica esto (incomprensible, 2). (3) Pero limpia el rastro, ¿no? M3: Ya me regañó, que exigente pues. Y si lo quiero mover, no puedo mover los ejes.	[VG]-2-|02:36:33| P: ¿Qué pasaría si t es mayor que cero, verdad? (7) ¿Cuál es el valor de convergencia de la serie de las ordenadas? H3: Sería 1. P: Ahora con $t > 0$, ahí podían cambiar el rango, ¿verdad? De t. Qué se yo, le podemos poner 8π, no se va a ver todo, pero (11). Entonces ¿converge o diverge? (3) H2: Converge a la función, definida por partes. P: Converge a la función definida por partes. O sea, le harían otra listota aquí ((se refiere a la función definida a trozos de la pregunta anterior)) (x)más grande, o ¿qué diríamos? H3: Sí::: ((risas)) P: Es una manera, ¿verdad? Podríamos poner, 1 si t está entre 2π y 3π, -1 si, y ahí. (Incomprensible, 1) ((hablan varios a la vez, H2 sugiere trabajar con los intervalos)) H1: Sí, podemos poner que t exista, por ejemplo, en ese sería desde el límite derecho, múltiplo impar de π y al izquierdo le restamos uno, y el de abajo serán múltiplos pares y al izquierdo le restamos uno. P: Ok, ujú, es una manera de hacerlo ¿sí? ¿Sí está clara la idea? ((los estudiantes asienten con la cabeza))

<table>
<tr><td>Parte II.</td><td colspan="7">¿Y si agregamos más epiciclos?</td></tr>
<tr><td>Intención:</td><td colspan="7">Se proporciona un applet con el fin de visualizar la estabilidad del sistema. A partir de manipular el número de circunferencias se podrá analizar el comportamiento del sistema, al estudiar cómo cambia la trayectoria del planeta.</td></tr>
<tr><th>Estudiante</th><th>M2</th><th>M3</th><th>H1</th><th>H3</th><th>H4</th><th>Equipo 3</th><th>Puesta en común</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>H6: ¡Ajá! simplemente mueves la gráfica, la función es, en este caso la función es antisimétrica, es una función impar, son senos. Si fueran cosenos, esto continuaría aquí.
M3: Ok, entonces para valores positivos la gráfica son se-, ah ok a ver.
H3: Ah ya entendí, aquí es como que (incomprensible, 2) se acota en ciertos lugares.
M3: ¿Eh?
H3: Si es como que la acotas entre ciertos lugares.
M3: ¡Aja!

[VE3]-2-|02:53:07|
H6: No pasaría nada porque está considerando valores positivos (incomprensible, 1).
M3: Pues simón no pasa nada.
H3: No sé qué está pasando.
M3: Pues es que sí mira, porque hemos trabajado hasta ahorita con t's positivos, entonces, entonces no pasa nada sigue convergiendo.
H3: Si, si es el mismo.
M3: Sí:::, es lo mismo que la f, y ya.</td><td></td></tr>
<tr><td>Pregunta h</td><td>Valores de t<0 indican planetas moviéndose en sentido horario, lo cual no tiene sentido en el modelo propuesto.</td><td>Si tiene sentido pero no es necesario ya que al ser funciones pares e impares lo único que provoca son reflexiones.</td><td>Tiene sentido matemáticamente, ya que equivale a invertir el sentido de giro. Y ahí sólo cambiaría el signo de los términos de la serie, la cual convergería a -pi/4. Pero físicamente no tiene sentido el tiempo negativo.</td><td>En efecto, tiene sentido, aunque es probable que las expresiones solo acaben por reflejar la trayectoria formada, esto dada la simetría de la misma respecto al eje horizontal, la paridad del coseno y la no paridad del seno.</td><td>No tiene sentido considerarlos, porque ni siquiera implican un retroceso. En caso de converger, convergería al mismo valor en las ordenadas.</td><td>[VE3]-2-|02:53:45|
H3: No, pero es que yo creo que sí pasa algo por que vea, aquí te dice que estás acotando t entre a y b.
H6: ¡Ajá!
H3: Entonces=
H3: =Pero, entonces a y b ahí son positivos.
H6: ¡Ajá! Pero sería solo en este pedacito.
M3: Sólo convergen más lentamente, ¿no? Porque cuando variábamos b te acuerdas que iba más lento.
H6: No, es que la t (x)solo son los valores que tu metes, tu (incomprensible, 1), y como tal, esa cosa solo tiene senos y cosenos, funciones pares e impares. Con t negativo lo único que tienes es la misma gráfica en el caso de senos invertida, en el caso de cosenos la tienes completamente reflejada porque es una función par, en caso del seno como es impar simplemente se voltea así. Lo único que haces es, es (incomprensible, 1), pero sigue siendo periódico, no pasa mucho. Pero la pregunta que te pre-, en la siguiente que te pregunta de que si tiene algún sentido evaluar t's
H3: [Negativos]
H6: [Negativos], pues tiene sentido, pero realmente es innecesario porque tu gráfica es completamente simétrica o antisimétrica. Bueno yo puse eso.
M3: Tiene sentido.

[VE3]-2-|02:57:47|
H3: Realmente un t negativo sería, sería en sentido antihorario.
M3: [No:::, horario]
H6: [Más bien sería en sentido horario]
M3: Antihorario es positivo.</td><td>[VG]-2-|02:40:02|
P: ¿Y qué pasa si t es::: negativo? ¿tiene sentido (x)en el problema hablar de valores de t negativos?
H6: [Pues::: sí]
M2: [Sería un:::] movimiento en sentido horario.
H1: Sí, sería cambiar el sentido de giro.
P: ¡Ajá! ¿Pero qué es t en el sistema inicial?
H6: El tiempo.
P: El tiempo.
H1: Ajá, el tiempo.
P: ¿Tiene sentido hablar de tiempo negativo?
H3: No ((varios estudiantes mueven su cabeza para indicar que no))
P: O sea, matemáticamente pasan cosas, ¿sí? O sea, el ángulo sería verlo en sentido antihorario, por eje- eh en sentido horario, por ejemplo. O sea, matemáticamente pasan cosas, solamente que digamos que (x)en el modelo no tiene sentido de hablar de valores de t negativos, ¿sí?

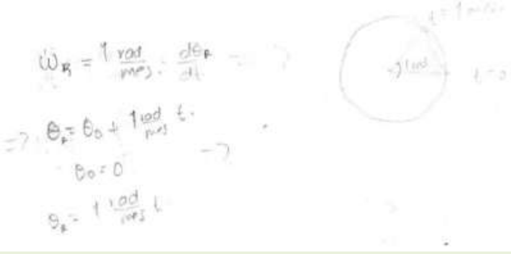
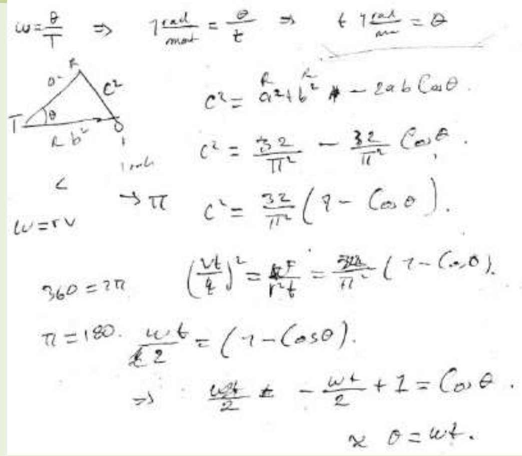
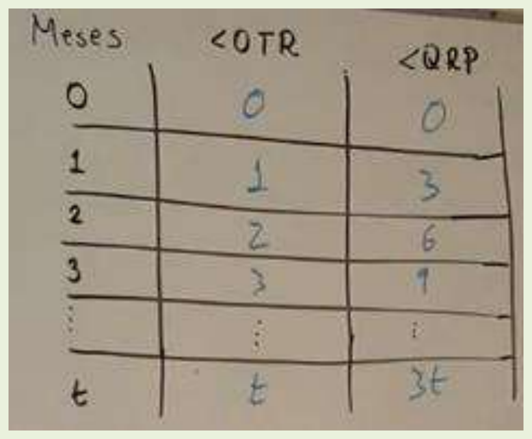
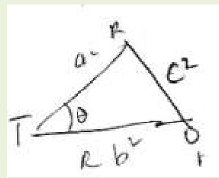
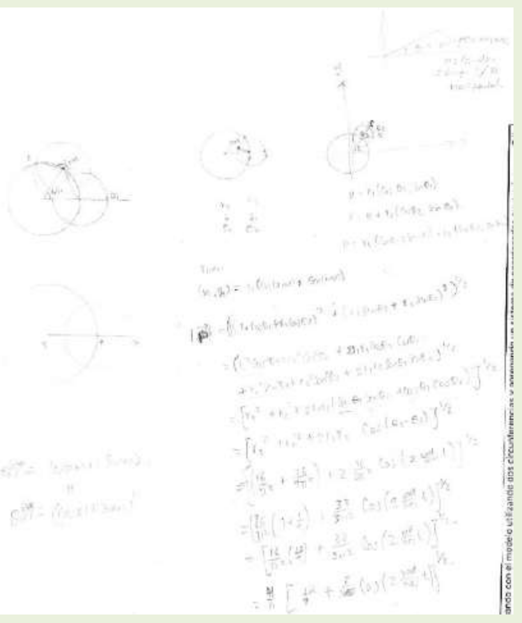
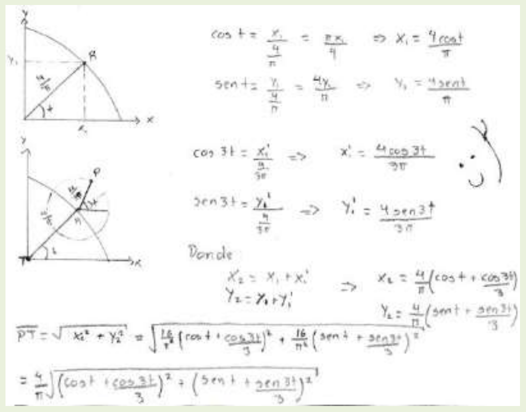
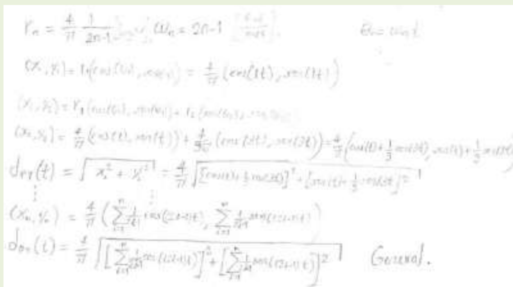
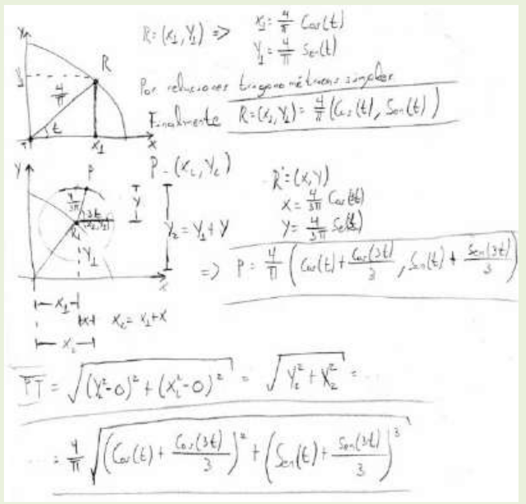
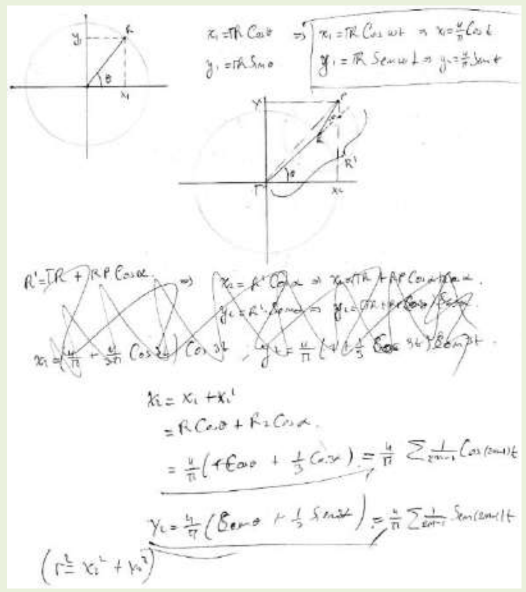
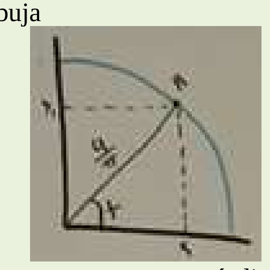
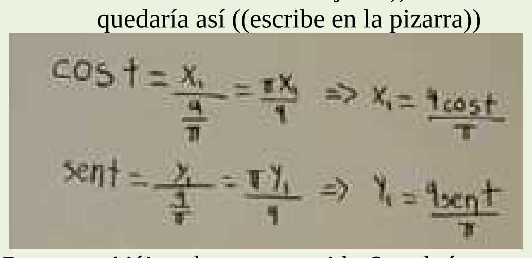
[VG]-2-|02:43:29|
P: Bueno, entonces ¿qué pasaría con la convergencia? ¿sigue siendo convergente?
H4: Sí, solo cambia la paridad de la función, ¿no?
H1: Se voltea (incomprensible, 1)
P: ¿Se voltea?
H1: Bueno (x)los valores, o sea donde había 1 ahora sería -1.
P: ¿Seguros?
H1: Bueno sería continuar la gráfica, pero para el ((con la mano señala que hacia la izquierda))</td></tr>
<tr><td>Intencionalidad</td><td colspan="7">Se pretende provocar que la periodicidad sea un resultado de la serie y no una condición de la función que se está representando. Pues la serie, como objeto matemático, posee ciertas características que no tienen sentido en el fenómeno que se está modelando. En este caso dicha característica es la condición de periodicidad, la cual se da en toda la recta real, pero el fenómeno no tiene sentido al hablar de valores negativos del tiempo. Para concluir con esta tarea, se espera que los estudiantes no sepan escribir en forma analítica una función periódica en el inciso h, ya que no es usual hacerlo en la escuela, posiblemente escriban la función para un intervalo y escriban con palabras que se repite de manera periódica.</td></tr>
<tr><td>¿Qué hace?</td><td>Identificar el tipo de función a la que se converge.
Observar el movimiento del planeta.</td><td>Extender el valor de convergencia dado en la pregunta anterior.
Comparar el movimiento del planeta.</td><td>Evaluar la serie en un tiempo determinado para determinar la convergencia.
Observar el movimiento del planeta.</td><td>Extender el valor de convergencia dado en la pregunta anterior.
Comparar el movimiento del planeta.</td><td>Identificar la naturaleza del valor de convergencia.
Observar el movimiento del planeta.</td><td>Extender el valor de convergencia dado en la pregunta anterior.
Comparar el movimiento del planeta.
Observar el movimiento del planeta.</td><td>Extender el valor de convergencia dado en la pregunta anterior.
Comparar el movimiento del planeta.
Observar el movimiento del planeta.</td></tr>
<tr><td>¿Cómo hace?</td><td>Considerando lo realizado en la pregunta anterior.
Considerando ángulos negativos.</td><td>Considerando que se sigue trabajando con valores del tiempo positivos.
Considerando el cambio respecto del movimiento para tiempo positivo.</td><td>Considerando un valor del tiempo en que sea más directo determinar la convergencia de la serie.
Considerando ángulos negativos.</td><td>Considerando que se sigue trabajando con valores del tiempo positivos.
Considerando el cambio respecto del movimiento para tiempo positivo.</td><td>Considerando lo realizado en la pregunta anterior.
Considerando ángulos negativos.</td><td>Considerando que se sigue trabajando con valores del tiempo positivos.
Considerando el cambio respecto del movimiento para tiempo positivo.
Considerando ángulos negativos.</td><td>Considerando que se sigue trabajando con valores del tiempo positivos.
Considerando el cambio respecto del movimiento para tiempo positivo.
Considerando ángulos negativos.</td></tr>
<tr><td>Argumentos (A) y confrontaciones (C) presentados.</td><td>(A) Converge a una función escalonada.
(A) Considerando el tiempo negativo el planeta se movería en sentido horario.</td><td>(A) Converge a la misma función, pues se sigue trabajando con valores del tiempo positivos.
(A) Al ser funciones pares e impartes solo provoca reflexiones.</td><td>(C) La serie converge a 1, porque para $t=\frac{\pi}{2}$ converge a 1.
(A) Considerando el tiempo negativo el planeta se movería en sentido horario.</td><td>(A) Converge a la misma función, pues se sigue trabajando con valores del tiempo positivos.
(A) Al ser funciones pares e impartes solo provoca reflexiones.
(C) Para $t=0$ la serie converge a la suma de los radios de las circunferencias.</td><td>(A) Converge a una función.
(A) Considerando el tiempo negativo el planeta se movería en sentido horario.</td><td>(A) Converge a la misma función, pues se sigue trabajando con valores del tiempo positivos.
(A) Al ser funciones pares e impartes solo provoca reflexiones.
(A) Considerando el tiempo negativo el planeta se movería en sentido horario.</td><td>(A) Converge a la misma función, pues se sigue trabajando con valores del tiempo positivos.
(A) Al ser funciones pares e impartes solo provoca reflexiones.
(A) Considerando el tiempo negativo el planeta se movería en sentido horario.
(A) Sería extender la gráfica en forma periódica hacia la izquierda.</td></tr>
</table>

9.7.4 Tarea #2. Etapa 2: Identificación de los invariantes de las acciones

<table>
<tr><td colspan="8" align="center">TAREA #2</td></tr>
<tr><td>Objetivo de la Tarea:</td><td colspan="7">Significar la convergencia de series trigonométricas mediante la estabilidad de la trayectoria del planeta, caracterizándola mediante el límite de la sucesión de sumas parciales.</td></tr>
<tr><td>Parte I.</td><td colspan="7">Comprendiendo el modelo</td></tr>
<tr><td>Intención:</td><td colspan="7">Se busca que el estudiante comprenda cómo se comporta el sistema, y la relación que guarda con los datos suministrados por la situación planteada.</td></tr>
<tr><th>Estudiante</th><th>M2</th><th>M3</th><th>H1</th><th>H3</th><th>H4</th><th>Equipo 3</th><th>Puesta en común</th></tr>
<tr><td>Pregunta a</td>
<td><table><tr><td>Meses</td><td>OTR (Rad)</td><td>QRP (Rad)</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>6</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td><td>9</td></tr><tr><td>n</td><td>n</td><td>3n</td></tr></table></td>
<td><table><tr><td>Meses</td><td>Medidas de ∠OTR (en radianes)</td><td>Medidas de ∠QRP (en radianes)</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>6</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td><td>9</td></tr></table></td>
<td><table><tr><td>Meses</td><td>OTR</td><td>QRP</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>n</td><td>n</td><td>3n</td></tr></table></td>
<td><table><tr><td>Meses</td><td>Medida de ∠OTR (rad)</td><td>Medida de ∠QRP (rad)</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>6</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td><td>9</td></tr><tr><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td></tr><tr><td>t</td><td>t</td><td>3t</td></tr></table></td>
<td><table><tr><td>Meses</td><td>Medida OTR</td><td>Medida QRP</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>6</td></tr><tr><td>t</td><td>$wt = 1\frac{rad}{mes}t$</td><td>$wt = 3\frac{rad}{mes}t$</td></tr></table></td>
<td>[VE3]-2-|00:11:02|
H3: ¿Cuánto crees que valga ese? Al inicio vale cero.
M3: Pues::: ¡ajá!
H3: Así inicia=
M3: Ajá, inicia desde el cero, y llega mmm en un mes:::
H3: A un radián por mes, entonces sería uno.
M3: ¿Cuánto es un radián por mes?
H3: Pues un radian por mes ((risas)).
M3: ¡Ay! si es cierto ((risas)).</td>
<td>[VE1]-2-|00:56:34|- H3 rellena la tabla en la pizarra.
H3: Como estamos en el mes cero, tenemos un tiempo igual a cero, o sea estamos en la condición inicial, entonces ambos ángulos valdrían cero. Luego como estamos en el mes uno, el primer ángulo nos dice que avanza o se mueve un radian cada mes, entonces este va a valer uno, el otro nos dice que se mueve a una velocidad de tres radianes cada mes,</td></tr>
</table>

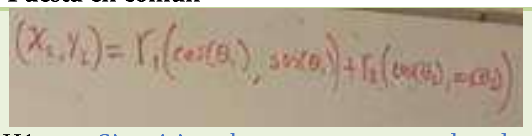
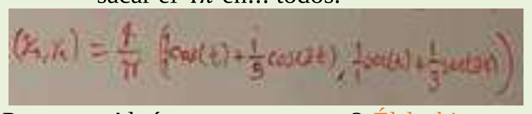
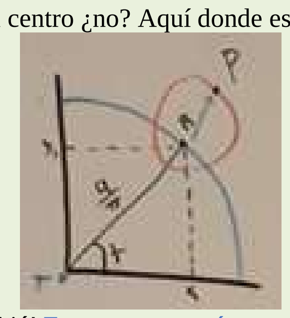
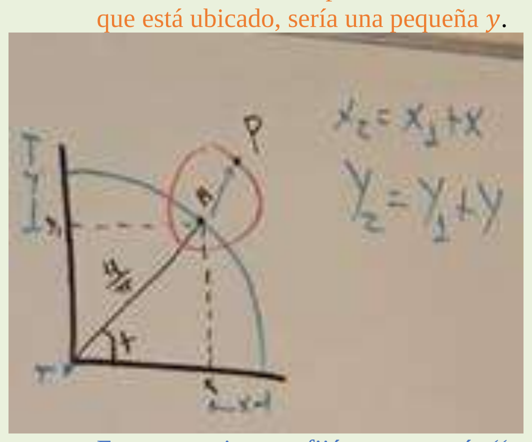
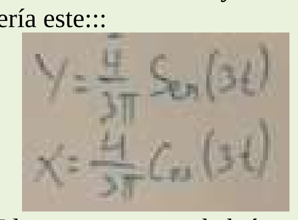
Parte I. **Comprendiendo el modelo**

Intención: Se busca que el estudiante comprenda cómo se comporta el sistema, y la relación que guarda con los datos suministrados por la situación planteada.

Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
		⋮ ⋮ ⋮ t t 3t				H3: El ángulo, ¿no? M3: ¡Ajá! ¿Y el de Q? H3: Y el otro se mueve a tres radianes por mes. M3: Entonces serian tres, ¿no? H3: ¡Ajá! Y así ya. M3: Y luego entonces este es dos y este es (6) ¿cinco? H3: ¿Por qué cinco? M3: Porque van (incomprensible, 1) ¿no? Nada más. H3: Bueno por el tres radianes. Mira pasan dos meses entonces cada mes tu::: ángulo este son tres radianes veces, dos por tres son seis radianes ¿no?	entonces sería tres. Bueno aquí ya podemos continuar con este proceso sería un dos, aquí sería un seis, tres, nueve y, en general, ya serían t y tres veces t. P: ¿Sí? ¿Todos de acuerdo? ¿Alguien lo pensó diferente o todos lo pensaron de esa manera? ((los estudiantes asienten con la cabeza)) 
Intencionalidad	Se pretende reconocer el comportamiento del movimiento de los puntos sobre cada circunferencia. Para esta pregunta es probable que la idea de velocidad angular genere dificultades, esto se evidenció en el pilotaje y las diferentes puestas en escena; debido a que la concepción de radian en sí misma provoca dificultades según se ha reportado en distintas investigaciones (Akkoc, 2008; Moore, 2009).						
¿Sobre qué objetos lo hace?	**Seriar** El tiempo y la medida del ángulo. **Comparar** El ángulo con el valor inicial.	**Seriar** El tiempo y la medida del ángulo.	**Seriar** El tiempo y la medida del ángulo.	**Seriar** El tiempo y la medida del ángulo.	**Seriar** El tiempo y la medida del ángulo. **Identificar** Parámetros velocidad, distancia y tiempo. **Geometrizar** El ángulo, los radios y la secante.	**Seriar** El tiempo y la medida del ángulo.	**Seriar** El tiempo y la medida del ángulo.
¿Sobre qué relaciones lo hace?	**Seriar** Para cada incremento de una unidad en el tiempo, la medida del ángulo aumenta la cantidad de unidades dada por la velocidad angular. Para un tiempo dado el valor del ángulo es igual a la velocidad por el tiempo. **Comparar** El ángulo en el tiempo t es igual al ángulo inicial más la velocidad por el tiempo.	**Seriar** Para cada incremento de una unidad en el tiempo, la medida del ángulo aumenta la cantidad de unidades dada por la velocidad angular. Para un tiempo dado el valor del ángulo es igual a la velocidad por el tiempo.	**Seriar** Para cada incremento de una unidad en el tiempo, la medida del ángulo aumenta la cantidad de unidades dada por la velocidad angular. Para un tiempo dado el valor del ángulo es igual a la velocidad por el tiempo.	**Seriar** Para cada incremento de una unidad en el tiempo, la medida del ángulo aumenta la cantidad de unidades dada por la velocidad angular. Para un tiempo dado el valor del ángulo es igual a la velocidad por el tiempo.	**Seriar** Para cada incremento de una unidad en el tiempo, la medida del ángulo aumenta la cantidad de unidades dada por la velocidad angular. Para un tiempo dado el valor del ángulo es igual a la velocidad por el tiempo. **Identificar** La velocidad es igual a la distancia entre el tiempo. **Geometrizar** Ley de cosenos sobre el triángulo isósceles.	**Seriar** Para cada incremento de una unidad en el tiempo, la medida del ángulo aumenta la cantidad de unidades dada por la velocidad angular. Para un tiempo dado el valor del ángulo es igual a la velocidad por el tiempo.	**Seriar** Para cada incremento de una unidad en el tiempo, la medida del ángulo aumenta la cantidad de unidades dada por la velocidad angular. Para un tiempo dado el valor del ángulo es igual a la velocidad por el tiempo.
¿Por medio de qué lo hace?	**Seriar** Numérico: Rellenando la tabla. Algebraico: Para el mes n, los valores de los ángulos en la primera y segunda circunferencia son n y $3n$, respectivamente. **Comparar** Algebraico: $\theta_k = \theta_0 + 1\frac{rad}{mes}t$	**Seriar** Numérico: Rellenando la tabla. Algebraico: Para el mes t, los valores de los ángulos en la primera y segunda circunferencia son t y $3t$, respectivamente.	**Seriar** Numérico: Rellenando la tabla. Algebraico: Para el mes t, los valores de los ángulos en la primera y segunda circunferencia son t y $3t$, respectivamente.	**Seriar** Numérico: Rellenando la tabla. Algebraico: Para el mes t, los valores de los ángulos en la primera y segunda circunferencia son t y $3t$, respectivamente.	**Seriar** Numérico: Rellenando la tabla. Algebraico: Para el mes t, los valores de los ángulos en la primera y segunda circunferencia son t y $3t$, respectivamente. **Identificar** Algebraico: $\omega = \frac{\theta}{T} \Longrightarrow 1\frac{rad}{mes} = \frac{\theta}{t} \Longrightarrow t\,1\frac{rad}{mes} = \theta$. **Geometrizar** Icónico:  Algebraico: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$	**Seriar** Numérico: Rellenando la tabla. Algebraico: Para el mes t, los valores de los ángulos en la primera y segunda circunferencia son t y $3t$, respectivamente.	**Seriar** Numérico: Rellenando la tabla. Algebraico: Para el mes t, los valores de los ángulos en la primera y segunda circunferencia son t y $3t$, respectivamente.
Invariantes de Acciones	- Para cada incremento de una unidad en el tiempo, la medida del ángulo aumenta la cantidad de unidades dada por la velocidad angular. - Para un tiempo dado el valor del ángulo es igual a la velocidad por el tiempo.						
Pregunta b	$(x_1, y_1) = \frac{4}{\pi}\left(\mathrm{Cos}\left(\frac{1rad}{mes}t\right), \mathrm{Sen}\left(\frac{1rad}{mes}t\right)\right)$ $(x_2, y_2) = \frac{4}{\pi}\left(\mathrm{Cos}\left(\frac{1rad}{mes}t\right), \mathrm{Sen}\left(\frac{1rad}{mes}t\right)\right) + \frac{4}{3\pi}\left(\mathrm{Cos}\left(\frac{3rad}{mes}t\right), \mathrm{Sen}\left(\frac{3rad}{mes}t\right)\right)$ $d_{TP} = \frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{10}{9} + \frac{2}{3}\mathrm{Cos}\left(2\frac{rad}{mes}t\right)}$ 					[VE3]-2-|00:15:58| H3: Ya tienes el ángulo ese si lo tienes. Y lo tienes en radianes y ya con obtener (3) ¿el radio, no? M3: Sí, pero ya utilizar la distancia de (3) la::: ecuación de la distancia entre dos puntos (3) si tienes las coordenadas, ¿no? H3: ¿Y este si lo sabes? M3: ¿Qué? H3: Pues si supieras este entonces ya sabes x. M3: No, no la sé. H3: Sí, o sea imagínate que esto es R, y te pregunto que si sabes esto y esto, pero si sabes esto entonces ya sabes x_1 y y_1, porque son las coordenadas del punto R. M3: ¿La distancia? H3: Sabes las coordenadas del punto R respecto a t que está= [VE3]-2-|00:16:38|- M3 interrumpe a H3 y vuelve a leer en voz alta la pregunta planteada y continúan dialogando. [VE3]-2-|00:16:56| M3: O sea que esto es, el ángulo es t, y este es::: $3t$, ¿no? Ah::: H3: Pero primero hay que encontrar donde está este con las puras coordenadas. M3: En dónde estaría (incomprensible, 1, ¿R?) H3: ¡Ajá! Con las coordenadas. [VE3]-2-|00:17:40| M3: Ah::: tienes el radio, ¿no? H3: No. M3: Sí::: el radio de la circunferen= H3: =Sí, sí. M3: Ah::: entonces con eso sale. Mira, lo que decía Pachequito. H3: Todo lo haces triángulos rectángulos. M3: Ahí está. A poco no, a poco no lo estás haciendo triángulos rectángulos. H3: Sí, sí está bien triangulados, bien triangulados. [VE3]-2-|00:18:23|	[VE1]-2-|01:00:18|- M3 pasa a la pizarra a responder respecto de las coordenadas de R. Primero dibuja  M3: Bueno, entonces, aquí dice que en un tiempo t, entonces ya sabemos va a ser un ángulo de t y además hasta arriba decía que el radio de::: la primera circunferencia es 4π, 4 sobre π, entonces utilizando trigonometría, entonces se puede calcular el de aquí ((señala la distancia en el eje X)) y el de acá ((señala la distancia en el eje Y)). Entonces quedaría así ((escribe en la pizarra))  P: ¡Ajá! ¿alguna otra idea? ¿algún otro argumento que permita hacer lo mismo? (7) ¿O usaron el mismo, exactamente el mismo argumento? H1: Yo tengo un comentario. P: ¿Ajá? H1: (x)Que el ángulo ahí si funciona con t porque la velocidad angular es uno y el tiempo es t meses, pero en general habría que poner ángulo θ, por ejemplo ¿no? Y θ sería igual a velocidad angular por el tiempo. [VE1]-2-|01:04:18|- H1 pasa a la pizarra a responder respecto de las coordenadas de P. Primero escribe:

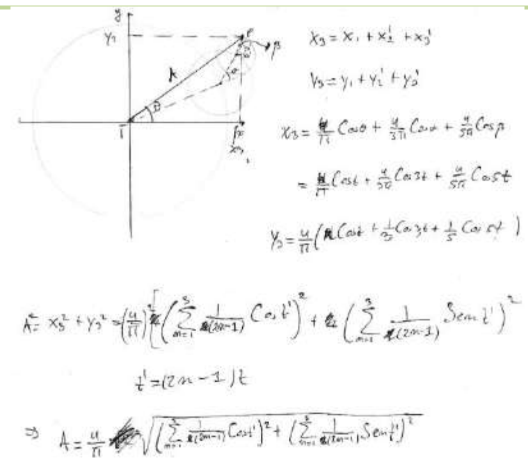
Parte I. **Comprendiendo el modelo**

Intención: Se busca que el estudiante comprenda cómo se comporta el sistema, y la relación que guarda con los datos suministrados por la situación planteada.

Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
						M3: Tienes los radios. H3: Oye, entonces el tiempo t (2) el tiempo t, este primero de aquí, bueno sí el tiempo t está en el lugar de t ¿no? Para el primer círculo y el radio siempre va a ser $\frac{4}{\pi}$. M3: ¡Ajá! H3: Entonces ¿qué sería aquí este? M3: Sería= H3: =x_1 sería [el seno] M3: [el coseno] si quieres para x_1 es el coseno de t. H3: Sí, es cierto. M3: Es igual a x_1 sobre $\frac{4}{\pi}$, ¿no? [VE3]-2-|00:28:51| H3: Ah entonces te digo que podríamos hacer un origen aquí y luego sacar las coordenadas aquí. M3: Respecto a ese origen. H3: ¡Ajá! Y ese sería respecto a x_1 y a x_2. Entonces lo que tú buscas es esto ¿no? M3: ¡A:::y! A ver. H3: Lo que se me ocurre es que tienes esto y si tú buscas estas coordenadas, ¿ajá? M3: Ujú. H3: Entonces eso sería lo mismo que la componente de aquí más lo de aquí a aquí, ¿no? M3: Pero es que x_2 sería la componente de x_1 [más el cachito de este nuevo, ¿no?] H3: [Más el cachito, exacto] M3: Ahora sí, vamos. [VE3]-2-|00:33:24| M3: No, pero ya tienes de aquí, ¿no? x_2 y y_2, entonces con la de la distancia. H6: No, porque aquí tienes esta y este está chueco. M3: No, pero con la distancia entre dos puntos, ya conoces las coordenadas de esta y esta está en el origen. H6: ¿De T a P? M3: ¡Ujú! H6: Ah de T a P. H3: ¡Ajá! y eso ya te lo da para el tiempo t. H6: Pues sí, sí, sí. [VE3]-2-|00:34:33| H3: Sí, tiene sentido porque estás en la norma común. H6: Sí, sí, sí. H3: ¡Ah! tienes razón, entonces sería nada más este la norma= M3: x_2 al cuadrado menos, más= H3: =O sea la norma de este [vector] M3: [es más o menos, es más ¿no?	 H1: Si quisiera hacer esto en coordenadas polares. P: ¿Ujú? H1: (Incomrpensible, 1) lo pone como vectores para especificar el punto (x,y) y en este caso el r n-ésimo sería igual a 4π por uno entre un número impar. P: ¿Ujú? H1: Así nos lo dan al principio, dice que varía primero 4π, y luego 4 entre 3π, y 4 entre 5π, y en general sería sobre los impares, empezando desde el uno. Y el, vamos a ver la fórmula, el θ n-ésimo sería la velocidad angular n-ésima multiplicado por el tiempo, y es sustituyendo estos aquí ((señala la primera ecuación que escribió)), ah bueno, la velocidad angular es, varía con los impares, en el primero es uno, sigue tres y así. Sustituyendo aquí ((se refiere a la primera ecuación que escribió)), puedo sacar el 4π en::: todos.  P: ¿Algún otro argumento? Él lo hizo con suma de vectores. ¿Sí ven el argumento? H3: (x)Tengo, no es exactamente una manera distinta, me voy a aprovechar aquí un poquito del dibujo de la compañera. Entonces, si suponemos que tenemos otro círculo aquí, para que ya sea el caso de las dos circunferencias, y un punto P sobre la circunferencia, entonces queremos ver sus coordenadas respecto al centro ¿no? Aquí donde está la T.  ¡Ajá! Entonces yo noté, por ejemplo, que ya habíamos calculado esto ((se refiere a las coordenadas de R)), era sencillo, pero entonces si esto es este::: x_1 podemos ver que de aquí ((se refiere a la posición de x_1)) a::: el lugar donde está ubicado el punto del que queremos saber su distancia, es una pequeña distancia x, y tendríamos que la coordenada respecto al origen del punto que queremos sería x_2 igual a esta primer coordenada que ya habíamos calculado más esta pequeña distancia. Lo mismo para la altura en la que está ubicado, sería una pequeña y.  Entonces si nos fijáramos aquí ((se refiere al punto R)) como una especie de nuevo origen, podríamos hacer exactamente el mismo proceso que hicimos aquí ((se refiere al cálculo de las coordenadas de R)) y obtener que la distancia de este punto a este punto ((se refiere a la distancia de R a P)), se puede separar en dos componentes, una vertical y la otra horizontal, para poder sumarlas, o sea me refiero a encontrar x y a encontrar y. Y bueno, como hizo la compañera antes con relaciones trigonométricas se puede obtener entonces el valor de x y el valor de y, que sería este:::  Y luego vemos que habría que sumar x_1 más x, y_1 más y, y nos daría exactamente el mismo resultado. P: Y en esas x y y ¿ $\frac{4}{3\pi}$ qué representa? M3: El radio de la circunferencia chiquita. P: El radio de la segunda circunferencia. (x)Y el $3t$ que está dentro de los argumentos de seno y coseno. M3: Es el ángulo que va. [VE1]-2-|01:10:22|- H1 indica que para calcular la distancia se utiliza el teorema de Pitágoras y que sería lo mismo que calcular la norma del vector.
Pregunta c	Se tienen las coordenadas: $(x_1, y_1) = \frac{4}{\pi}\left(\mathrm{Cos}\left(\frac{1rad}{mes}t\right), \mathrm{Sen}\left(\frac{1rad}{mes}t\right)\right)$		$d_{PT}(t) =$			[VE3]-2-|00:40:06| H3: Aquí va a ser exactamente lo mismo. M3: Pero con más términos. H3: No:::, exactamente lo mismo.	No hubo discusión grupal respecto de esta pregunta.

<table>
<tr><td>Parte I.</td><td colspan="7">Comprendiendo el modelo</td></tr>
<tr><td>Intención:</td><td colspan="7">Se busca que el estudiante comprenda cómo se comporta el sistema, y la relación que guarda con los datos suministrados por la situación planteada.</td></tr>
<tr><td>Estudiante</td><td>M2</td><td>M3</td><td>H1</td><td>H3</td><td>H4</td><td>Equipo 3</td><td>Puesta en común</td></tr>
<tr><td></td>
<td>$(x_2, y_2) = \frac{4}{\pi}\left(\text{Cos}\left(\frac{1rad}{mes}t\right), \text{Sen}\left(\frac{1rad}{mes}t\right)\right) + \frac{4}{3\pi}\left(\text{Cos}\left(\frac{3rad}{mes}t\right), \text{Sen}\left(\frac{3rad}{mes}t\right)\right)$

$(x_3, y_3) = \frac{4}{\pi}\left(\text{Cos}\left(\frac{1rad}{mes}t\right), \text{Sen}\left(\frac{1rad}{mes}t\right)\right) + \frac{4}{3\pi}\left(\text{Cos}\left(\frac{3rad}{mes}t\right), \text{Sen}\left(\frac{3rad}{mes}t\right)\right) + \frac{4}{5\pi}\left(\text{Cos}\left(\frac{5rad}{mes}t\right), \text{Sen}\left(\frac{5rad}{mes}t\right)\right)$

$d_{TP} = \frac{4}{\pi}\sqrt{\left(Cos\left(\frac{1rad}{mes}t\right) + \frac{1}{3}Cos\left(\frac{3rad}{mes}t\right) + \frac{1}{5}Cos\left(5\frac{rad}{mes}t\right)\right)^2 + \left(Sen\left(\frac{1rad}{mes}t\right) + \frac{1}{3}Sen\left(\frac{3rad}{mes}t\right) + \frac{1}{5}Sen\left(5\frac{rad}{mes}t\right)\right)^2}$</td>
<td>•De manera análoga se repite el proceso de la pregunta b) se tiene:
$\overline{PT} = \frac{4}{\pi}\sqrt{\left(\cos t + \frac{\cos 3t}{3} + \frac{\cos 5t}{5}\right)^2 + \left(\text{sen } t + \frac{\text{sen } 3t}{3} + \frac{\text{sen } 5t}{5}\right)^2}$</td>
<td>$\frac{4}{\pi}\sqrt{\left(\cos(t) + \frac{1}{3}\cos(3t) + \frac{1}{5}\cos(5t)\right)^2 + \left(\text{sen}(t)\right.}$</td>
<td>De forma muy análoga al caso de dos circunferencias, observamos que hay que sumar la contribución de la nueva componente
$x' = \frac{4}{5\pi}\text{Cos}(5t)$
$y' = \frac{4}{5\pi}\text{Sen}(5t)$ a las componentes ya obtenidas
$\Rightarrow \overline{PT} = \frac{4}{\pi}\sqrt{\left(\text{Sen}(t) + \frac{\text{Sen}(3t)}{3} + \frac{\text{Sen}(5t)}{5}\right)^2 + \left(\text{Cos}(t) + \frac{\text{Cos}(3t)}{3} + \frac{\text{Cos}(5t)}{5}\right)^2}$</td>
<td></td>
<td>(6)
M3: Sólo que aquí van a haber tres.
H3: Sí, pero ¿cuál va a ser el que sigue?
M3: Cinco.
H3: Coseno de $5t$ sobre 5.
M3: Sí [(incomprensible, 4)]
H6: [(Incomprensible, 2)]
H3: Ya tienes esto, ahora le tienes que sumar=
M3: =El otro y la coordenada=
H3: Pero es <u>cin</u>co π:::
M3: ¡Ajá!
H3: Coseno de 5π es lo mismo.
M3: ¡Ajá!
H3: Entonces al final de cuentas tú vas a sacar el cuatro π::: y te va a quedar seno de cinco veces t.</td>
<td></td></tr>
<tr><td>Intencionalidad</td><td colspan="7">Se busca construir las primeras tres sumas parciales de dos series trigonométricas, pero con un significado asociado al fenómeno -las coordenadas del planeta- que permite determinar la distancia del planeta a la Tierra. Se espera que los estudiantes recurran a dibujar triángulos rectángulos sobre las figuras proporcionadas para identificar las razones trigonométricas involucradas, aunque para hacer la generalización a cualquier valor del tiempo se requiera que la función trigonométrica esté construida previamente (Montiel, 2011).</td></tr>
<tr><td>¿Sobre qué objetos lo hace?</td>
<td>Identificar
El ángulo y los radios.

Comparar
Las coordenadas de los puntos.

Medir
El planeta y la Tierra.</td>
<td>Geometrizar
La circunferencia, su centro y un punto sobre ella.

Comparar
Las coordenadas de los puntos.

Medir
El planeta y la Tierra.</td>
<td>Identificar
El ángulo y los radios.

Comparar
Las coordenadas de los puntos.

Medir
El planeta y la Tierra.</td>
<td>Geometrizar
La circunferencia, su centro y un punto sobre ella.

Comparar
Las coordenadas de los puntos.

Medir
El planeta y la Tierra.</td>
<td>Identificar
El ángulo y los radios.

Comparar
Las coordenadas de los puntos.

Geometrizar
El planeta y la Tierra, en el sistema de coordenadas.

Medir
El planeta y la Tierra.</td>
<td>Medir
El planeta y la Tierra.

Geometrizar
El planeta y la Tierra, en el sistema de coordenadas.

Identificar
Centro de cada circunferencia.

Comparar
Las coordenadas de los puntos.</td>
<td>Geometrizar
La circunferencia, su centro y un punto sobre ella.

Comparar
Las coordenadas de los puntos.

Identificar
El ángulo y los radios.

Identificar
Centro de cada circunferencia.

Medir
El planeta y la Tierra.</td></tr>
<tr><td>¿Sobre qué relaciones lo hace?</td>
<td>Identificar
Parametrizar utilizando coordenadas polares.

Comparar
Considerando los puntos como vectores, para determinar las coordenadas del punto siguiente basta con sumar el vector del punto que se agrega.

Medir
La norma del vector.</td>
<td>Geometrizar
El triángulo rectángulo cuya hipotenusa corresponde al segmento cuyos extremos son el centro y el punto sobre la circunferencia, y cuyos catetos corresponden a las coordenadas de ese punto sobre la circunferencia (considerando un sistema de coordenadas cuyo origen sea el centro de la circunferencia).

Comparar
Para determinar las coordenadas del punto siguiente basta con sumar en cada coordenada la diferencia aportada por la nueva circunferencia.

Medir
Fórmula de la distancia de un punto al origen.</td>
<td>Identificar
Parametrizar utilizando coordenadas polares.

Comparar
Considerando los puntos como vectores, para determinar las coordenadas del punto siguiente basta con sumar el vector del punto que se agrega.

Medir
La norma del vector.</td>
<td>Geometrizar
El triángulo rectángulo cuya hipotenusa corresponde al segmento cuyos extremos son el centro y el punto sobre la circunferencia, y cuyos catetos corresponden a las coordenadas de ese punto sobre la circunferencia (considerando un sistema de coordenadas cuyo origen sea el centro de la circunferencia).

Comparar
Para determinar las coordenadas del punto siguiente basta con sumar en cada coordenada la diferencia aportada por la nueva circunferencia.

Medir
Fórmula de la distancia entre dos puntos.</td>
<td>Identificar
Parametrizar utilizando coordenadas polares.

Comparar
Para determinar las coordenadas del punto siguiente basta con sumar en cada coordenada la diferencia aportada por la nueva circunferencia.

Geometrizar
El triángulo rectángulo cuya hipotenusa corresponde al segmento cuyos extremos son el planeta y la Tierra, y cuyos catetos corresponden a las coordenadas del planeta (considerando un sistema de coordenadas cuyo origen sea la Tierra).

Medir
Teorema de Pitágoras.</td>
<td>Medir
Fórmula de la distancia entre dos puntos.

Geometrizar
El triángulo rectángulo cuya hipotenusa corresponde al segmento cuyos extremos son el centro y el punto sobre la circunferencia, y cuyos catetos corresponden a las coordenadas de ese punto sobre la circunferencia (considerando un sistema de coordenadas cuyo origen sea el centro de la circunferencia).

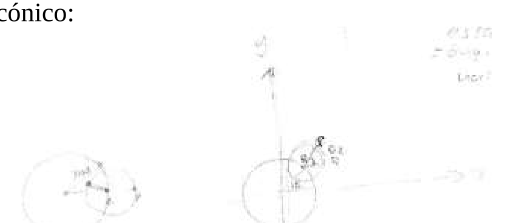
Identificar
Cambio de sistema coordenadas, a uno cuyo origen sea el centro de la última circunferencia.

Comparar
Para determinar las coordenadas del punto siguiente basta con sumar en cada coordenada la diferencia aportada por la nueva circunferencia.</td>
<td>Geometrizar
El triángulo rectángulo cuya hipotenusa corresponde al segmento cuyos extremos son el centro y el punto sobre la circunferencia, y cuyos catetos corresponden a las coordenadas de ese punto sobre la circunferencia (considerando un sistema de coordenadas cuyo origen sea el centro de la circunferencia).

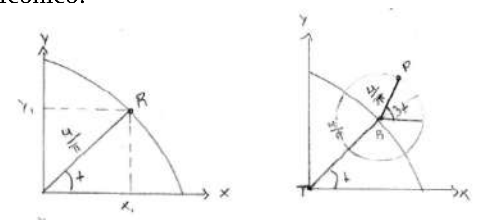
Comparar
Para determinar las coordenadas del punto siguiente basta con sumar en cada coordenada la diferencia aportada por la nueva circunferencia.

Identificar
Parametrizar utilizando coordenadas polares.

Identificar
Cambio de sistema coordenadas, a uno cuyo origen sea el centro de la última circunferencia.

Medir
Norma de un vector y Teorema de Pitágoras.</td></tr>
<tr><td>¿Por medio de qué lo hace?</td>
<td>Identificar
Icónico:

Algebraico: $R = r_1(\cos\theta_1, \text{sen}\,\theta_1)$

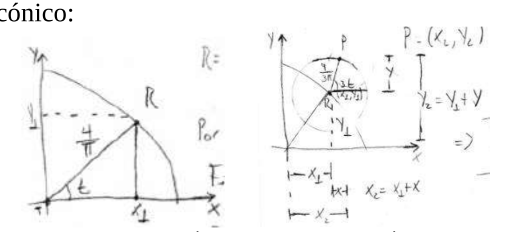
Comparar
Algebraico: $P = R + r_2(\cos\theta_2, \text{sen}\,\theta_2)$.

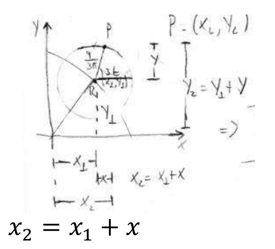
Medir
Algebraico: $\lvert\vec{P}\rvert = \left((r_1\cos\theta_1 + r_2\cos\theta_2)^2 + (r_1\,\text{sen}\,\theta_1 + r_2\,\text{sen}\,\theta_2)\right)^{1/2}$.</td>
<td>Geometrizar
Icónico:

Algebraico: $\cos t = \frac{x_1}{\frac{4}{\pi}}$ $\quad \text{sen}\,t = \frac{y_1}{\frac{4}{\pi}}$
$\cos 3t = \frac{x_1'}{\frac{4}{3\pi}}$ $\quad \text{sen}\,t = \frac{y_1'}{\frac{4}{3\pi}}$

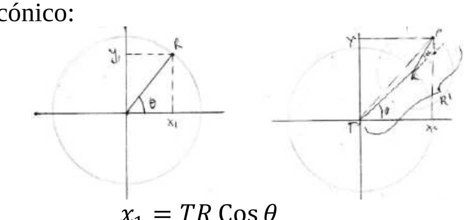
Comparar
Algebraico: $x_2 = x_1 + x_1'$
$y_2 = y_1 + y_1'$

Medir
Algebraico: $\overline{PT} = \sqrt{x^2 + y^2}$.</td>
<td>Identificar
Algebraico: $(x_1, y_1) = r_1(\cos(\theta_1), \text{sen}(\theta_1))$, $(x_2, y_2) = r_1(\cos(\theta_1), \text{sen}(\theta_1)) + r_2(\cos(\theta_2), \text{sen}(\theta_2))$

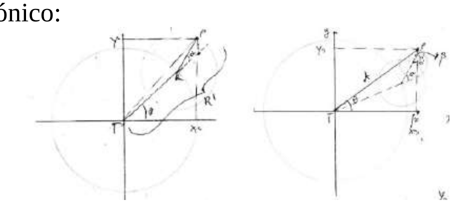
Comparar
Algebraico:
$(x_n, y_n) = \frac{4}{\pi}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2i-1}\cos((2i-1)t), \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2i-1}\text{sen}((2i-1)t)\right)$.

Medir
Algebraico: $d_{PT}(t) = \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2}$.</td>
<td>Geometrizar
Icónico:

$x_1 = \frac{4}{\pi}\cos(t)$ $\quad y_1 = \frac{4}{\pi}\text{sen}(t)$
Algebraico: $x = \frac{4}{3\pi}\cos(3t)$ $\quad y = \frac{4}{3\pi}\text{sen}(3t)$
$x' = \frac{4}{5\pi}\cos(5t)$ $\quad y' = \frac{4}{5\pi}\text{sen}(5t)$

Comparar
Icónico:

Algebraico: $x_2 = x_1 + x$
$y_2 = y_1 + y$
Verbal: De forma muy análoga al caso de dos circunferencias, observamos que hay que sumar la contribución de la nueva componente.

Medir
Algebraico: $\overline{PT} = \sqrt{({y_2}^2 - 0)^2 + ({x_2}^2 - 0)^2} = \sqrt{{y_2}^2 + {x_2}^2}$.</td>
<td>Identificar
Icónico:

Algebraico: $x_1 = TR\,\text{Cos}\,\theta$
$x_1 = TR\,\text{Sen}\,\theta$

Comparar
Algebraico: $x_2 = x_1 + x_2'$

Geometrizar
Icónico:


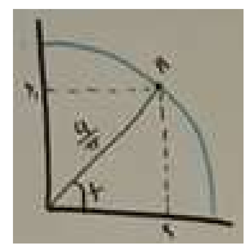
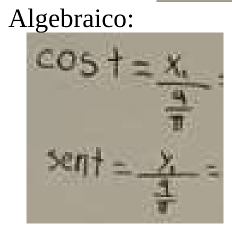
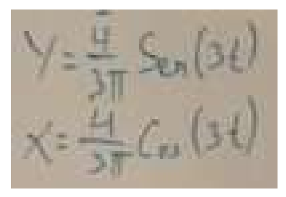
Medir
Algebraico: $r^2 = {x_2}^2 + {y_2}^2$, $A^2 = {x_3}^2 + {y_3}^2$.</td>
<td>Medir
Verbal:
[VE3]-2-|00:16:05|
M3: Sí, pero ya utilizar la distancia de (3) la::: ecuación de la distancia entre dos puntos (3) si tienes las coordenadas, ¿no?

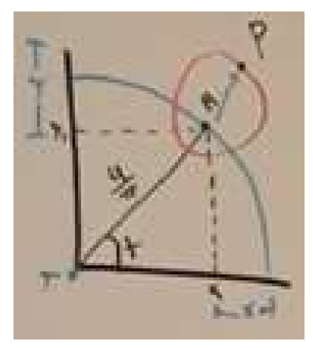
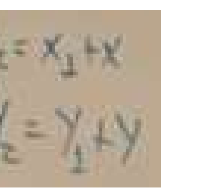
[VE3]-2-|00:33:24|
M3: No, pero ya tienes de aquí, ¿no? x_2 y y_2, entonces con la de la distancia.
H6: No, porque aquí tienes esta y este está chueco.
M3: No, pero con la distancia entre dos puntos, ya conoces las coordenadas de esta y esta está en el origen.

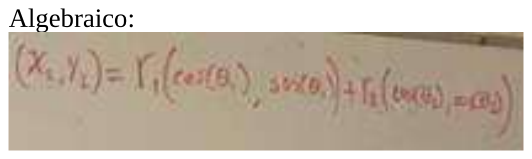
[VE3]-2-|00:34:41|
M3: x_2 al cuadrado menos, más=
H3: =O sea la norma de este [vector]
M3: [es más o menos, es más ¿no?

Geometrizar
Verbal:
[VE3]-2-|00:17:53|
H3: Todo lo haces triángulos rectángulos.
M3: Ahí está. A poco no, a poco no lo estás haciendo triángulos rectángulos.
H3: Sí, sí está bien triangulados, bien triangulados.

[VE3]-2-|00:18:23|
M3: Tienes los radios.
H3: Oye, entonces el tiempo t (2) el tiempo t, este primero de aquí, bueno sí el tiempo t está en el lugar de t ¿no? Para el primer círculo y el radio siempre va a ser $\frac{4}{\pi}$.
M3: ¡Ajá!
H3: Entonces ¿qué sería aquí este?
M3: Sería=
H3: =x_1 sería [el seno]
M3: [el coseno] si quieres para x_1 es el coseno de t.
H3: Sí, es cierto.
M3: Es igual a x_1 sobre $\frac{4}{\pi}$, ¿no?

Identificar
Verbal:
[VE3]-2-|00:28:51|
H3: Ah entonces te digo que podríamos hacer un origen aquí y luego sacar las coordenadas aquí.
M3: Respecto a ese origen.
H3: ¡Ajá! Y ese sería respecto a x_1 y a x_2.</td>
<td>Geometrizar
Icónico:

Algebraico:
 

Comparar
Icónico:

Algebraico:


Identificar
Algebraico:


Identificar
Verbal: [VE1]-2-|01:08:22|
H3: Entonces si nos fijáramos aquí ((se refiere al punto R)) como una especie de nuevo origen, podríamos hacer exactamente el mismo proceso que hicimos aquí ((se refiere al cálculo de las coordenadas de R)) y obtener que la distancia de este punto a este punto ((se refiere a la distancia de R a P))

Medir</td></tr>
</table>

Parte I. **Comprendiendo el modelo**

Intención: Se busca que el estudiante comprenda cómo se comporta el sistema, y la relación que guarda con los datos suministrados por la situación planteada.

Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
						Comparar Verbal: [VE3]-2-|00:29:21| M3: Pero es que x_2 sería la componente de x_1 [más el cachito de este nuevo, ¿no?] H3: [Más el cachito, exacto] [VE3]-2-|00:40:32| H3: Ya tienes esto, ahora le tienes que sumar= M3: =El otro y la coordenada=	Verbal: [VE1]-2-|01:10:22|- H1 indica que para calcular la distancia se utiliza el teorema de Pitágoras y que sería lo mismo que calcular la norma del vector.
Invariantes de Acciones	- Parametrizar utilizando coordenadas polares. - Cambio de sistema coordenadas, a uno cuyo origen sea el centro de la última circunferencia. - Considerando los puntos como vectores, para determinar las coordenadas del punto siguiente basta con sumar el vector del punto que se agrega. - Para determinar las coordenadas del punto siguiente basta con sumar en cada coordenada la diferencia aportada por la nueva circunferencia. - El triángulo rectángulo cuya hipotenusa corresponde al segmento cuyos extremos son el centro y el punto sobre la circunferencia, y cuyos catetos corresponden a las coordenadas de ese punto sobre la circunferencia (considerando un sistema de coordenadas cuyo origen sea el centro de la circunferencia). - Norma de un vector. Fórmula de Distancia entre dos puntos. Teorema de Pitágoras.						

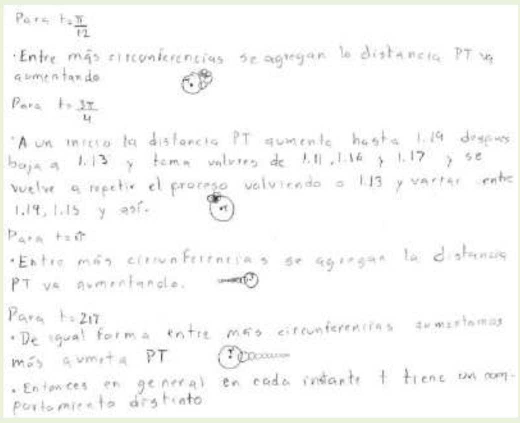
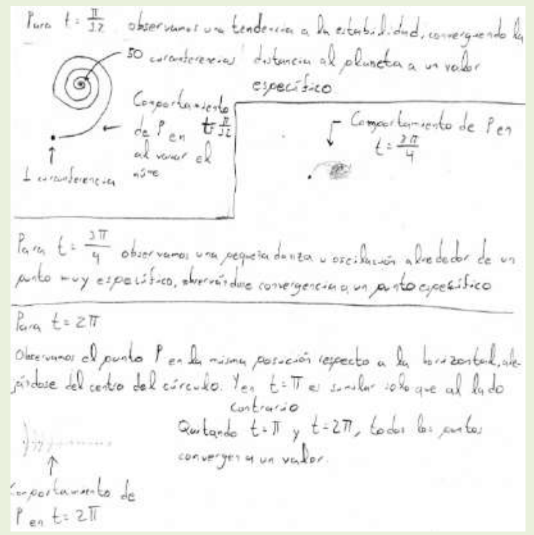
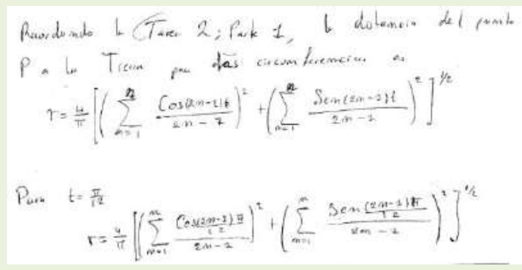
Parte II. **¿Y si agregamos más epiciclos?**

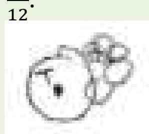
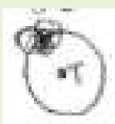
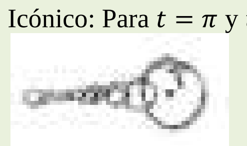
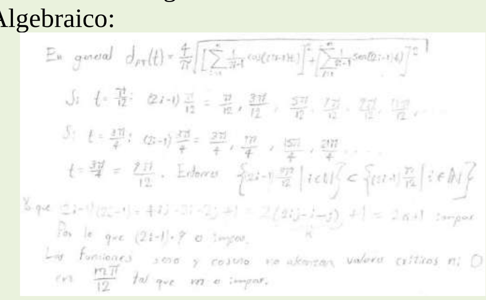
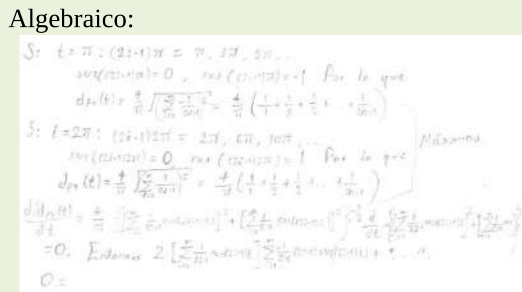
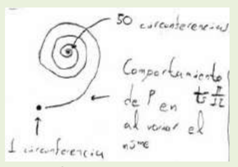
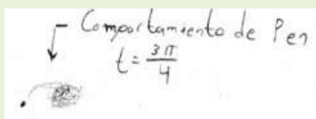
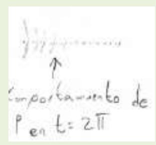
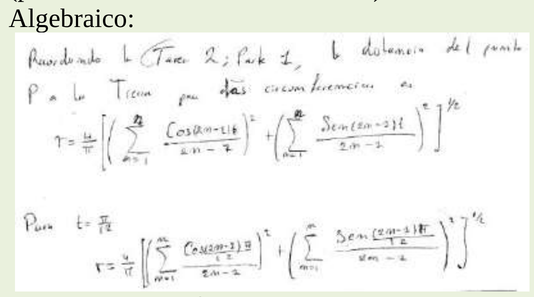
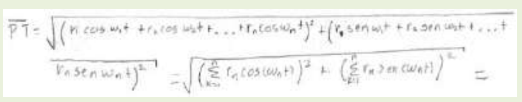
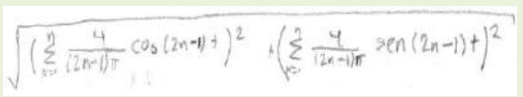
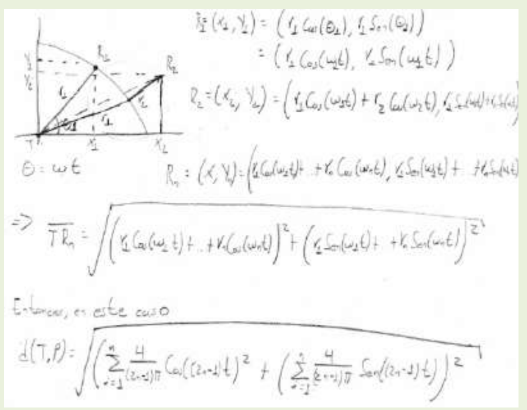
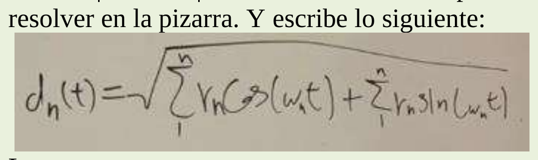
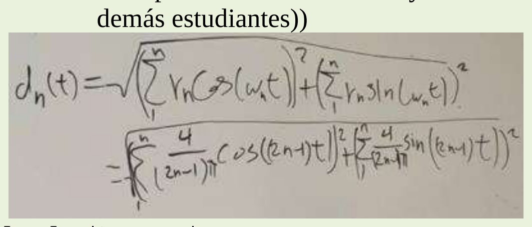
Intención: Se proporciona un applet con el fin de visualizar la estabilidad del sistema. A partir de manipular el número de circunferencias se podrá analizar el comportamiento del sistema, al estudiar cómo cambia la trayectoria del planeta.

Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
Pregunta a	La trayectoria comienza a tomar una figura particular. El número de bucles aumenta al aumentar el número de circunferencias. En la parte central los bucles parecen juntarse más hasta formar dos líneas paralelas donde la distancia es mínima. La trayectoria en los laterales se alarga.	Conforme se le agregan mas circunferencias la parte central de la trayectoria se acerca a una recta y los extremos a circunferencias, ademas el tiempo en la parte central es mucho mas tardado que formar que los extremos.	Se tiende a formar una figura parecida a dos líneas paralelas unidas por arcos.	A medida que se agregan más circunferencias podemos observar una tendencia hacia una figura que recuerda a un "huesito", con una línea recta en la parte central y dos medios círculos en las partes extremas de la trayectoria que tienden a ser más grandes cuando agregamos más circunferencias.	Toman la forma definida de dos rectas secantes paralelas horizontales a la circunferencia.	[VE3]-2-|01:18:03| H3: ¿Cómo le llamarías tu a la forma? ¿qué parece? M3: No sé, yo le puse que en la parte central de la trayectoria se acerca ya casi a una línea recta y en los extremos como circunferencias, pues ni modo que le ponga hueso de perro ((risas)).	[VG]-2-|01:58:28| P: ((Leyendo la pregunta)) ¿Cómo cambia la trayectoria del planeta conforme se agregan más y más circunferencias? H4: Toma una forma definida. P: Entonces, ¡ajá! Supuse que iban a pregunt- a explicar lo mismo, ¿verdad? ¿A qué se parece esa forma? Si claro, tiene una forma definida, pero no es la misma forma de la otra. H4: Como dos horizontales. P: Como dos horizonta:::les. M2: °Curva semiflor°. (21) P: Como dos horizontales ¿qué más? ¿qué forma le ven? H6: Pos parece una= P: =¿O le vieron? H6: Especie de mancuerna, como siempre hay dos circunferencias, bueno a partir de dos, siempre están esas dos circunferencias ((con sus manos hace referencia a los extremos de la trayectoria)) nada más que parece que están agregando más. H3: Se están separando más ((con sus manos hace referencia a que los extremos de la trayectoria se separan)) M3: ¡Ajá! P: Ah ok, si vemos menos, entonces algo como que se va a ir separando. Vamos a ver eso. H3: Al revés, (x)si ponemos menos entonces se juntarían. P: ¡Ajá, eso! (12) H6: ¡Ajá! Puede ser con cuatro, pero salen como más pequeñas y así ((con sus manos hace referencia a que están los extremos de la trayectoria juntos)) P: Entonces, otra vez, como que esto y esto se va separando y aquí en medio qué pasa, como que se agregan de estos brinquitos o qué. M2: [¡Ajá!] H3: [¡Ajá!], sí. P: ¿Eso es más o menos lo que pasa? ((los alumnos asienten con la cabeza))
Intencionalidad	Se tiene como expectativa que el estudiante identifique que la trayectoria del planeta se estabiliza conforme se agregan más circunferencias. Se espera que la respuesta surja por sí sola con base en el trabajo realizado en la Tarea #1.						
¿Sobre qué objetos lo hace?	**Comparar** Las trayectorias. **Observar** Las trayectorias.	**Comparar** Las trayectorias. **Comparar** Distintas partes de una misma trayectoria.	**Comparar** Las trayectorias.	**Comparar** Las trayectorias.	**Comparar** Las trayectorias.	**Comparar** Las trayectorias.	**Comparar** Las trayectorias.
¿Sobre qué relaciones lo hace?	**Comparar** La forma de la trayectoria. **Observar** La forma de la trayectoria.	**Comparar** La forma de la trayectoria. **Comparar** Distancia recorrida en función del tiempo.	**Comparar** La forma de la trayectoria.	**Comparar** La forma de la trayectoria.	**Comparar** La forma de la trayectoria.	**Comparar** La forma de la trayectoria.	**Comparar** La forma de la trayectoria.
¿Por medio de qué lo hace?	**Comparar** Verbal: La trayectoria comienza a tomar una figura particular. Verbal: En la parte central los bucles parecen juntarse más hasta formar dos líneas paralelas. **Observar** Verbal: El número de bucles aumenta al aumentar el número de circunferencias. Verbal: En la parte central los bucles parecen juntarse más hasta formar dos líneas paralelas. Verebal: La trayectoria en los laterales se alarga.	**Comparar** Verbal: Conforme se le agregan mas circunferencias la parte central de la trayectoria se acerca a una recta y los extremos a circunferencias. **Comparar** Verbal: El tiempo en la parte central es mucho mas tardado que formar que los extremos.	**Comparar** Verbal: Se tiende a formar una figura parecida a dos líneas paralelas unidas por arcos.	**Comparar** Verbal: A medida que se agregan más circunferencias podemos observar una tendencia hacia una figura que recuerda a un "huesito", con una línea recta en la parte central y dos medios círculos en las partes extremas de la trayectoria.	**Comparar** Verbal: Toman la forma definida de dos rectas secantes paralelas horizontales a la circunferencia.	**Comparar** Verbal: [VE3]-2-|01:18:03| H3: ¿Cómo le llamarías tu a la forma? ¿qué parece? M3: No sé, yo le puse que en la parte central de la trayectoria se acerca ya casi a una línea recta y en los extremos como circunferencias, pues ni modo que le ponga hueso de perro ((risas)).	**Comparar** Verbal: [VG]-2-|01:58:28| P: ((Leyendo la pregunta)) ¿Cómo cambia la trayectoria del planeta conforme se agregan más y más circunferencias? H4: Toma una forma definida. P: Entonces, ¡ajá! Supuse que iban a pregunt- a explicar lo mismo, ¿verdad? ¿A qué se parece esa forma? Si claro, tiene una forma definida, pero no es la misma forma de la otra. H4: Como dos horizontales. P: Como dos horizonta:::les. M2: °Curva semiflor°. (21) P: Como dos horizontales ¿qué más? ¿qué forma le ven? H6: Pos parece una= P: =¿O le vieron? H6: Especie de mancuerna, como siempre hay dos circunferencias, bueno a partir de dos, siempre están esas dos circunferencias ((con sus manos hace referencia a los extremos de la trayectoria)) nada más que parece que están agregando más.
Invariantes de Acciones	- La forma de la trayectoria.						

Parte II. **¿Y si agregamos más epiciclos?**

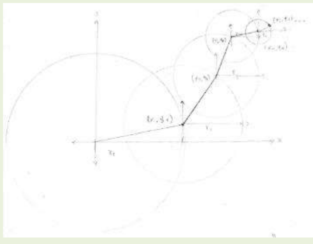
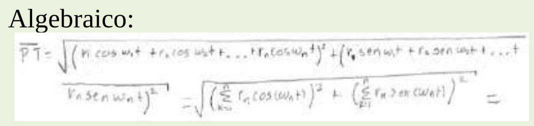
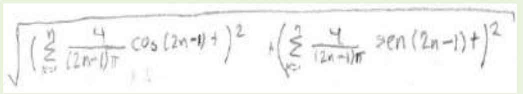
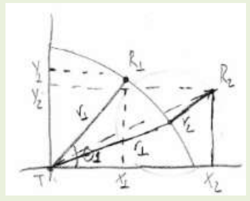
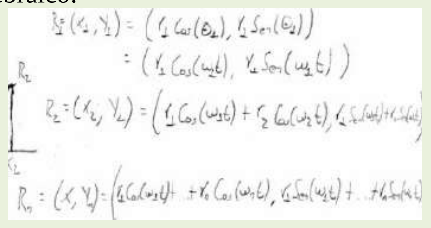
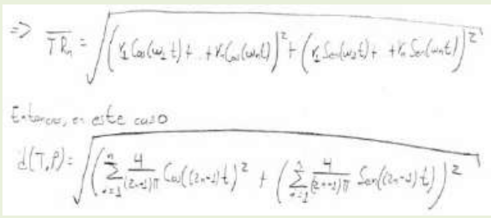
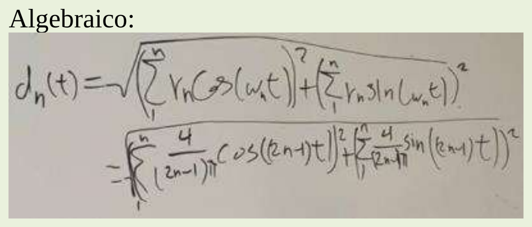
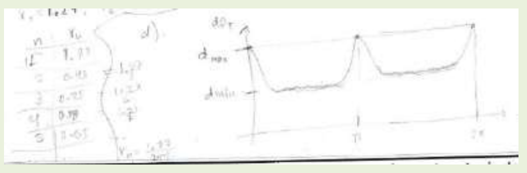
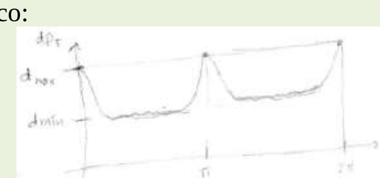
Intención: Se proporciona un applet con el fin de visualizar la estabilidad del sistema. A partir de manipular el número de circunferencias se podrá analizar el comportamiento del sistema, al estudiar cómo cambia la trayectoria del planeta.

Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
Pregunta b	EL valor de la distancia del planeta P a la Tierra oscila al agregar más circunferencias para los valores de $t = \frac{\pi}{12}$, $t = \frac{3\pi}{4}$. El rango de oscilación va disminuyendo al agregar más circunferencias. Cuando P está en los puntos más alejados, es decir, en $t = \pi$ y $t = 2\pi$, la distancia aumenta al aumentar el número de circunferencias.		En t=pi/12, 3pi/4 las funciones seno y coseno no alcanzan valores extremos ni 0. Pero la distancia converge. En t=pi, 4pi las función seno vale 0 y coseno -1, 1 respectivamente. La función de distancia se maximiza. En general, hay 2 máximos y 2 mínimos de distancia según el tiempo. 		$t = 2\pi$ para $t = \frac{\pi}{12}$, mientras más circunferencias se añaden, la sucesión de puntos P al tiempo t, forma una espiral hacia un cierto calor fijo (parecido a una serie de Fibonacci) Para $t = \frac{3\pi}{4}$, la sucesión de puntos vuelve a tomar el valor de una espiras, pero ahora el punto P, termina más cerca de la tierra y se acerca en menos puntos que en para el tiempo anterior. Para $t = \pi$ la sucesión de puntos P se aleja cada vez más del punto P, lo mismo para $t = 2\pi$. Así, para cualquier t, mientras más se aleje de $t = \pi$ y $t = 2\pi$, el punto P, mientras más circunferencias se agreguen, se acercará al punto P. 	[VE3]-2-|01:29:44| M3: ¿En qué parámetro estás? H3: Ah, es $\frac{\pi}{12}$. M3: (Incomprensible, 2) H3: (incomprensible, 2) M3: Que aumenta como si fuera una (2) ¿es serie de Fibonacci? Porque va así ((hace un sonido para explicar la forma)). [VE3]-2-|01:31:34| H6: ¿Tú qué viste de esos? M3: Pues cómo va aumentando, pero cómo aumenta de distintos lados. H6: (x)Quiero encontrar algo analítico aquí, pero no me da. [VE3]-2-|01:31:34|- ¿refiriéndose a $t = \pi$ y $t = 2\pi$? M6: ¡Ay! Sí es cierto, sí oscila, con razón no estaba loca. En tres cuartos de π, es que se me hizo raro que ese no aumentaba tanto, oscilaba mira, y sí, solamente baila. H3: No es cierto, a ver. [VE3]-2-|01:34:56| H6: ¿No hay un patrón en general ahí? M3: No. (6) H6: Como que va convergiendo a un punto. (10) Está oscilando más que todo, pero va de manera (2) uniforme. [VE3]-2-|01:37:11| H3: Y este 2π solo se alarga ¿verdad? M3: ¡Ajá! Por la, por la derecha H3: ¿Crees que tienda a algún punto en específico? Porque, por ejemplo, este, este que está aquí ya sabe que está en la parte que se hace una línea recta, ¿no? Esa casi no da (incomprensible, 1) Entonces este de acá, también tiende digamos a un punto, pero este de acá crees que también se acerque a un punto si agregaras una circunferencia. M3: No sé, yo creo que, yo siento que ese se va a seguir estirando, y estirando, y estirando. H3: ¿Mmm? M3: Yo siento que sí. (13) H6: Huy mira, si está interesante esto, si es una serie de Fourier, ¿no? M3: ¿Eh? H6: Las series de= M3: =Es que es lo que le decía a él, que este se comporta de otra manera distinta. No sé si sea, la manera natural. H6: No, de hecho, si se comporta igual. Has de cuenta. M3: No, porque la otra hacia esto ((hace un sonido para hablar de la forma)). H6: No fíjate, en un instante de t cualquiera agreguemos dos circunferencias, has de cuenta que es lo mismo, exactamente (incomprensible, 1) o tienes tres, tienes exactamente el mismo, entonces fíjate este es el primer caso en el que estábamos, este es el caso que analizamos, ¿lo recuerdas? M3: Mmm, ah si tienes razón, sí es la misma. H6: Entonces fíjate al agregar cuatro, tendrías este (incomprensible, 1, ¿radio?) y obviamente converge a algún punto.	[VG]-2-|02:02:31| P: ¿Qué fue lo que hicieron? (5) ¿Le movieron acá? ((Los alumnos responden afirmativamente)) Entonces por ejemplo para $t = \frac{\pi}{12}$ ¿qué respondieron? H4: Primero tiene como esa forma (x)de (x)espiral P: ¡Ajá! H4: Converge a un valor fijo. P: Y converge a un valor fijo, ajá ¿qué más? Entonces va tomando como esa forma de espiral y parece que converge a un valor. H6: Pues sí, como que va oscilando, ¿no? Oscila entre un valor y siempre va ((con su mano hace un movimiento con el dedo que va de un lado a otro)) H3: No:::, porque ves que se forma una espiral ((hace el movimiento en espiral con su mano)) H6: O sea sí, pero si lo ves digamos en la manera lineal como que va oscilando hasta llegar a un valor. P: ¡Ujú! Ok, entonces sí, va formar como una espiral, pero se va moviendo como alrededor (x)de algún valor específico. ((Los estudiantes asienten con la cabeza)) Ok. ¿En $t = \frac{3\pi}{4}$ sucede lo mismo, o? ((Varios estudiantes dicen que No)) ¿No? Sucede otra cosa, vamos a ver, $\frac{3\pi}{4}$ a ver, qué pusieron que sucedía antes de que lo veamos. M3: Primero aumenta y luego se queda oscilando en un valor. P: $\frac{3\pi}{4}$ aquí está, es 2.36 más o menos, ok entonces veamos, entonces primero aumenta, empieza en 1.27. M3: ¡Ajá! Aumenta y ya después va, (x)se queda oscilando. H4: Pero eso es lo mismo que la otra, ¿no? H3: Sí, si es lo mismo. H6: Pero es diferente, a no sí. M3: No, es que se queda como en un parámetro. P: Como en un parámetro. Porque esta es como en uno uno, uno dieciocho, diecisiete M3: Y baja y sube, y oscila. P: Baja y sube. ¿Cómo que sí se comporta similar, no? ((varios estudiantes responden que sí)) Como que oscila también igual alrededor de algún, de un valor. [VG]-2-|02:04:44| P: ¿En $t = \pi$ y $t = 2\pi$? M2: Crecen (incomprensible, 1). M3: Crecen. H4: Crece a la suma del radio, los radios. H6: Ah, pero es máximo ¿verdad? P: Crecen lo mismo nada más que una está aquí y la otra está de este otro lado, ¿verdad? ¿Sí? ((H6 asiente con la cabeza)) ¿Entonces qué pasa ahí, entonces con la, con la distancia del planeta? M3: Aumenta= H6: =Se va haciendo más grande. P: ¿Siempre aumenta? H6: ¡Ajá! Siempre se va a alejar. P. ¿Tendrá cota? ¿Será acotado o no? H1: ¡Sí! H3: Yo creo que sí. H1: Hay otra serie, para:::, bueno para valores finitos, como ahí lo aproxima. Eh, (x)la serie, cuál era, suma parcial. P: ¡Ujú! H1: La serie trigonométrica, de hecho, esta (x)no cumple aquí, pero para valores finitos si converge, se estaría estirando ((explica con el movimiento de sus manos)) P: Ok, otra vez, la convergencia es algo de infinitud, ¿sí? H1: ¡Ajá! (x)No converge. P: Entonces= H3: (Incomprensible, 1) H1: La horizontal H3: ¡Ajá! H1: O sea, la vertical sí, pero la horizontal se va estirando indefinidamente ((explica con el movimiento de sus manos)) H6: Pero es que van decreciendo los radios cada vez más, o sea (x)sí hay un valor al que tienen que= H3: =Pero van a seguir sumando algo. H1: No, porque ya vieron (x)como definimos los radios. H6: Es como la serie $\frac{1}{2^n}$, o sea va creciendo va sumando algo, pero si hay un valor al que igual llegas H1: (x)En la tarea pasada definieron al radio como, o sea decrecía conforme a los impares, y la de suma de impares no converge, ni la de todos los naturales, ni pares ni impares converge. P: Entonces aquí lo que está pasando es que estamos sumando [los radios]. H1: [Los radios] y el siguiente es:::, decrece conforme impares, ¿no?. P: Entonces, como que unos dicen que sí y otros dicen que no. H6: Pues yo digo que sí converge.

Parte II.	**¿Y si agregamos más epiciclos?**						
Intención:	Se proporciona un applet con el fin de visualizar la estabilidad del sistema. A partir de manipular el número de circunferencias se podrá analizar el comportamiento del sistema, al estudiar cómo cambia la trayectoria del planeta.						
Estudiante	**M2**	**M3**	**H1**	**H3**	**H4**	**Equipo 3**	**Puesta en común**
							P: Sigues convencido de que sí converge. [VG]-2-|02:07:10| H9: Sí convergería, porque estaría acotada. P: ¿Por qué? H9: Porque:::, o sea, para valores ya muy grandes, el radio sería cada vez más pequeño, entonces llegaría a un punto en el que como que no estaría sumando nada, entonces, si le sumas algo más grande, ya estaría acotada y crecería siempre, entonces tiene que converger. P: OK= H9: =Bueno también dependería de la relación entre los radios, porque= H1: =Pero hay series decrecientes que no convergen. H3: ¡Ajá:::! H1: Como la de los naturales, $\frac{1}{n}$ no converge. H9: No, sí, más bien dependería de la relación entre los radios, porque aquí en este ejercicio no te lo está especificando, que es igual al anterior, entonces podría converger o no converger.
Intencionalidad	Se pretende propiciar un análisis numérico de la variación de una suma parcial a otra, se busca que el estudiante se percate que la trayectoria del planeta no es estable para todos los valores del tiempo.						
¿Sobre qué objetos lo hace?	**Comparar** El planeta, la Tierra y un tiempo dado.	**Comparar** El planeta, la Tierra y un tiempo dado.	**Evaluar** Fórmula de la distancia del planeta a la tierra, los términos de dicha suma y un tiempo dado.	**Comparar** El planeta, la Tierra y un tiempo dado.	**Comparar** El planeta, la Tierra y un tiempo dado.	**Comparar** El planeta, la Tierra y un tiempo dado.	**Comparar** El planeta, la Tierra y un tiempo dado.
¿Sobre qué relaciones lo hace?	**Comparar** La distancia entre el planeta y la Tierra, en un tiempo dado.	**Comparar** La distancia entre el planeta y la Tierra, en un tiempo dado.	**Evaluar** La serie numérica resultante al evaluar.	**Comparar** La distancia entre el planeta y la Tierra, en un tiempo dado.	**Comparar** La distancia entre el planeta y la Tierra, en un tiempo dado.	**Comparar** La distancia entre el planeta y la Tierra, en un tiempo dado.	**Comparar** La distancia entre el planeta y la Tierra, en un tiempo dado.
¿Por medio de qué lo hace?	**Comparar** Verbal: El valor de la distancia del planeta P a la Tierra oscila al agregar más circunferencias para los valores de $t = \frac{\pi}{12}, t = \frac{3\pi}{4}$. Verbal: El rango de oscilación va disminuyendo al agregar más circunferencias. Verbal: Cuando P está en los puntos más alejados, es decir, en $t = \pi$ y $t = 2\pi$, la distancia aumenta al aumentar el número de circunferencias.	**Comparar** Verbal: Para $t = \frac{\pi}{12}$, entre más circunferencias se agregan la distancia PT va aumentando. Icónico: Para $t = \frac{\pi}{12}$.  Numérico: Para $t = \frac{3\pi}{4}$, a un inicio la distancia PT aumenta hasta 1.19, después baja a 1.13 y toma valores de 1.11, 1.16 y 1.17 y se vuelve a repetir el proceso volviendo a 1.13 y varía entre 1.14, 1.15 y así. Icónico: $t = \frac{3\pi}{4}$.  Verbal: Para $t = \pi$ y $t = 2\pi$, entre más circunferencias se agregan la distancia PT va aumentando. Icónico: Para $t = \pi$ y $t = 2\pi$.  	**Evaluar** Verbal: En $t = \frac{\pi}{12}, \frac{3\pi}{4}$ las funciones seno y coseno no alcanzan valores extremos ni 0. Pero la distancia converge. Algebraico:  Verbal: En $t = \pi$, 4π las función seno vale 0 y coseno -1, 1 respectivamente. La función de distancia se maximiza. Algebraico: 	**Comparar** Verbal: Para $t = \frac{\pi}{12}$ observamos una tendencia a la estabilidad, convergiendo la distancia al planeta a un valor específico. Icónico:  Verbal: Para $t = \frac{3\pi}{4}$ observamos una pequeña danza u oscilación alrededor de un punto muy específico, observándose convergencia a un punto específico. Icónico:  Verbal: Para $t = 2\pi$ observamos el punto P en la misma posición respecto a la horizontal, alejándose del centro del círculo. Y en $t = \pi$ es similar solo que al lado contrario. Icónico:  Verbal: Quitando $t = \pi$ y $t = 2\pi$, todos los puntos convergen a un valor.	**Comparar** Verbal: Para $t = \frac{\pi}{12}$, mientras más circunferencias se añaden, la sucesión de puntos P al tiempo t, forma una espiral hacia un cierto valor fijo (parecido a una serie de Fibonacci). Algebraico:  Verbal: Para $t = \frac{3\pi}{4}$, la sucesión de puntos vuelve a tomar el valor de una espiral, pero ahora el punto P, termina más cerca de la tierra y se acerca en menos puntos que en para el tiempo anterior. Verbal: Para $t = \pi$ la sucesión de puntos P se aleja cada vez más del punto P, lo mismo para $t = 2\pi$.	**Comparar** Verbal: [VE3]-2-|01:29:44| M3: ¿En qué parámetro estás? H3: Ah, es $\frac{\pi}{12}$. M3: (Incomprensible, 2) H3: (incomprensible, 2) M3: Que aumenta como si fuera una (2) ¿es serie de Fibonacci? Porque va así ((hace un sonido para explicar la forma)). Verbal: [VE3]-2-|01:34:56| H6: ¿No hay un patrón en general ahí? M3: No. (6) H6: Como que va convergiendo a un punto. (10) Está oscilando más que todo, pero va de manera (2) uniforme. Verbal: [VE3]-2-|01:37:11| H3: Y este 2π solo se alarga ¿verdad? M3: ¡Ajá! Por la, por la derecha H3: ¿Crees que tienda a algún punto en específico? Porque, por ejemplo, este, este que está aquí ya sabe que está en la parte que se hace una línea recta, ¿no? Esa casi no da (incomprensible, 1) Entonces este de acá, también tiende digamos a un punto, pero este de acá crees que también se acerque a un punto si agregaras una circunferencia. M3: No sé, yo creo que, yo siento que ese se va a seguir estirando, y estirando, y estirando.	**Comparar** Verbal: [VG]-2-|02:02:31| P: ¿Qué fue lo que hicieron? (5) ¿Le movieron acá? ((Los alumnos responden afirmativamente)) Entonces por ejemplo para $t = \frac{\pi}{12}$ ¿qué respondieron? H4: Primero tiene como esa forma (x)de (x)espiral P: ¡Ajá! H4: Converge a un valor fijo. P: Y converge a un valor fijo, ajá ¿qué más? Entonces va tomando como esa forma de espiral y parece que converge a un valor. H6: Pues sí, como que va oscilando, ¿no? Oscila entre un valor y siempre va ((con su mano hace un movimiento con el dedo que va de un lado a otro)) [VG]-2-|02:04:44| P: ¿En $t = \pi$ y $t = 2\pi$? M2: Crecen (incomprensible, 1). M3: Crecen. H4: Crece a la suma del radio, los radios. H6: Ah, pero es máximo ¿verdad? P: Crecen lo mismo nada más que una está aquí y la otra está de este otro lado, ¿verdad? ¿Sí? ((H6 asiente con la cabeza)) ¿Entonces qué pasa ahí, entonces con la, con la distancia del planeta? M3: Aumenta= H6: =Se va haciendo más grande. P: ¿Siempre aumenta? H6: ¡Ajá! Siempre se va a alejar.
Invariantes de Acciones	- La distancia entre el planeta y la Tierra en un tiempo dado.						
Pregunta c	d_{PT} $= \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} r_i \operatorname{Cos}((2i-1)t)\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} r_i \operatorname{Sen}(\right.}$ Con $r_i = \frac{1.27}{2i-1}$ 	 	$d_{PT}(t)$ $= \frac{4}{\pi}\sqrt{\left[\sum \frac{1}{2i-1}\cos((2i-1)t)\right]^2 + \left[\sum \frac{1}{2i-1}\right.}$ $i = 1,2,\ldots,n.$		$r = \frac{4}{\pi}\left[\left(\sum_{1}^{n} \frac{\cos(2n-1)t}{2n-1}\right)^2 + \left(\sum_{1}^{n} \frac{\operatorname{sen}(2n-1)t}{2n-1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$	[VE3]-2-|01:55:57| H3: Pues sí, es lo que se me ocurre. Es hacer exactamente lo mismo, pero ahora con esa madre, el valor del radio y el valor de a velocidad angular. (incomprensible, 2) La velocidad es angular en términos generales, ¿no? M3: ¡Ujú! H3: Entonces la imagen respecto de la horizontal sería esta, sería velocidad por tiempo. [VE3]-2-|01:57:46| H3: Creo que ya "M3" ((se refiere a M3 por su nombre)). M3: A ver. H3: Sabemos. Tienes aquí el primer punto y eso es R_1. M3: ¡Ujú! H3: El coseno de la primera velocidad angular, que ya sabes quién es, igual trae el seno, ¿no? Aquí también este la coordenada luego de (incomprensible, 5) entonces eso, crearía tu primer punto aquí. Y luego como lo habíamos hecho la otra vez, bueno en el pasado, tienes que saber el otro radio, tienes que saber la velocidad angular, pero es el mismo tiempo, entonces vas a tener que sumar estos, lo mismo para los n. M3: Entonces nos quedaría la raíz.	[VG]-2-|02:09:26|- El estudiante H2 pasa a resolver en la pizarra. Y escribe lo siguiente:  Luego asegura: [VG]-2-|02:10:04| H2: Si no sabemos los radios ni su velocidad angular, esta es la forma general. H1: Dice que retomemos los ejercicios pasados. P: ¡Ajá! En este sí, en este, en este en particular cómo sería, digamos (la) fórmula. H9: Cuatro entre $2n-1$ ((sigue escribiendo en la pizarra la fórmula con ayuda de los demás estudiantes))  [VG]-2-|02:11:35| P: ¿Qué representarían estos $\frac{4}{(2n-1)\pi}$? M2: Los radios ((junto con M2 la mayoría indica que los radios)) P: El radio de la circunferencia (3) ¿Y lo que está adentro, el $(2n-1)t$? H3: Pos, el ángulo. P: El ángulo que va cambiando, ¿verdad? H1: Velocidad angular. P: El $2n-1$ sería la velocidad angular ¿Y el $(2n-1)t$? H1: El ángulo. P: La medida del ángulo en radianes.
Intencionalidad	Matematizar el fenómeno como una generalización de los resultados obtenidos en la Tarea #2 - Parte I.						

Parte II. **¿Y si agregamos más epiciclos?**

Intención: Se proporciona un applet con el fin de visualizar la estabilidad del sistema. A partir de manipular el número de circunferencias se podrá analizar el comportamiento del sistema, al estudiar cómo cambia la trayectoria del planeta.

Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
¿Sobre qué objetos lo hace?	**Identificar** Los términos de la suma, los radios de las circunferencias y las velocidades de los puntos.	**Identificar** Los términos de la suma, los radios de las circunferencias y las velocidades de los puntos.	**Identificar** Los términos de la suma, los radios de las circunferencias y las velocidades de los puntos.	**Identificar** Los términos de la suma, los radios de las circunferencias y las velocidades de los puntos.	**Identificar** Los términos de la suma, los radios de las circunferencias y las velocidades de los puntos.	**Identificar** Los términos de la suma, los radios de las circunferencias y las velocidades de los puntos.	**Identificar** Los términos de la suma, los radios de las circunferencias y las velocidades de los puntos.
¿Sobre qué relaciones lo hace?	**Identificar** La abscisa del planeta corresponde a una suma de cosenos y ordenada corresponde a una suma de senos. El coeficiente del término *n-ésimo* corresponde al radio de la circunferencia *n-ésima*. El argumento para el término *n-ésimo* corresponde a la velocidad del punto sobre la circunferencia *n-ésima* multiplicada por el tiempo.	**Identificar** La abscisa del planeta corresponde a una suma de cosenos y ordenada corresponde a una suma de senos. El coeficiente del término *n-ésimo* corresponde al radio de la circunferencia *n-ésima*. El argumento para el término *n-ésimo* corresponde a la velocidad del punto sobre la circunferencia *n-ésima* multiplicada por el tiempo.	**Identificar** La abscisa del planeta corresponde a una suma de cosenos y ordenada corresponde a una suma de senos. El coeficiente del término *n-ésimo* corresponde al radio de la circunferencia *n-ésima*. El argumento para el término *n-ésimo* corresponde a la velocidad del punto sobre la circunferencia *n-ésima* multiplicada por el tiempo.	**Identificar** La abscisa del planeta corresponde a una suma de cosenos y ordenada corresponde a una suma de senos. El coeficiente del término *n-ésimo* corresponde al radio de la circunferencia *n-ésima*. El argumento para el término *n-ésimo* corresponde a la velocidad del punto sobre la circunferencia *n-ésima* multiplicada por el tiempo.	**Identificar** La abscisa del planeta corresponde a una suma de cosenos y ordenada corresponde a una suma de senos. El coeficiente del término *n-ésimo* corresponde al radio de la circunferencia *n-ésima*. El argumento para el término *n-ésimo* corresponde a la velocidad del punto sobre la circunferencia *n-ésima* multiplicada por el tiempo.	**Identificar** La abscisa del planeta corresponde a una suma de cosenos y ordenada corresponde a una suma de senos. El coeficiente del término *n-ésimo* corresponde al radio de la circunferencia *n-ésima*. El argumento para el término *n-ésimo* corresponde a la velocidad del punto sobre la circunferencia *n-ésima* multiplicada por el tiempo.	**Identificar** La abscisa del planeta corresponde a una suma de cosenos y ordenada corresponde a una suma de senos. El coeficiente del término *n-ésimo* corresponde al radio de la circunferencia *n-ésima*. El argumento para el término *n-ésimo* corresponde a la velocidad del punto sobre la circunferencia *n-ésima* multiplicada por el tiempo.
¿Por medio de qué lo hace?	**Identificar** Icónico:  Algebraico: $(x_n, y_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j, \sum_{j=1}^{n} y_j\right) = \left(\sum_{j=1}^{n} r_j \cos(\theta_j), \sum_{j=1}^{n} r_j \operatorname{sen}(\theta_j)\right)$ $d_{PT} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} r_i \operatorname{Cos}((2i-1)t)\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} r_i \operatorname{Sen}(\ldots\right.}$ Con $r_i = \frac{1.27}{2i-1}$	**Identificar** Algebraico:  	**Identificar** Algebraico: $d_{PT}(t)$ $= \frac{4}{\pi}\sqrt{\left[\sum \frac{1}{2i-1}\cos((2i-1)t)\right]^2 + \left[\sum \frac{1}{2i-1} \ldots\right.}$ $i = 1,2, \ldots, n.$	**Identificar** Icónico:  Algebraico:  	**Identificar** Algebraico: $r = \frac{4}{\pi}\left[\left(\sum_{1}^{n} \frac{\cos(2n-1)t}{2n-1}\right)^2 + \left(\sum_{1}^{n} \frac{\operatorname{sen}(2n-1)t}{2n-1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$	**Identificar** Verbal: [VE3]-2-|01:55:57| H3: Pues sí, es lo que se me ocurre. Es hacer exactamente lo mismo, pero ahora con esa madre, el valor del radio y el valor de a velocidad angular. (incomprensible, 2) La velocidad es angular en términos generales, ¿no? M3: ¡Ujú! H3: Entonces la imagen respecto de la horizontal sería esta, sería velocidad por tiempo. Verbal: [VE3]-2-|01:57:46| H3: Creo que ya “M3” ((se refiere a M3 por su nombre)). M3: A ver. H3: Sabemos. Tienes aquí el primer punto y eso es R_1. M3: ¡Ujú! H3: El coseno de la primera velocidad angular, que ya sabes quién es, igual trae el seno, ¿no? Aquí también este la coordenada luego de (incomprensible, 5) entonces eso, crearía tu primer punto aquí. Y luego como lo habíamos hecho la otra vez, bueno en el pasado, tienes que saber el otro radio, tienes que saber la velocidad angular, pero es el mismo tiempo, entonces vas a tener que sumar estos, lo mismo para los n.	**Identificar** Algebraico:  Verbal: [VG]-2-|02:11:35| P: ¿Qué representarían estos $\frac{4}{(2n-1)\pi}$? M2: Los radios ((junto con M2 la mayoría indica que los radios)) P: El radio de la circunferencia (3) ¿Y lo que está adentro, el $(2n-1)t$? H3: Pos, el ángulo. P: El ángulo que va cambiando, ¿verdad? H1: Velocidad angular. P: El $2n-1$ sería la velocidad angular ¿Y el $(2n-1)t$? H1: El ángulo. P: La medida del ángulo en radianes.
Invariantes de Acciones	- La abscisa del planeta corresponde a una suma de cosenos y ordenada corresponde a una suma de senos. - El coeficiente del término *n-ésimo* corresponde al radio de la circunferencia *n-ésima*. - El argumento para el término *n-ésimo* corresponde a la velocidad del punto sobre la circunferencia *n-ésima* multiplicada por el tiempo.						
Pregunta d	Su comportamiento puede considerarse oscilatorio. Alcanza un valor máximo y un valor mínimo. 	Se debe conocer el radio de las circunferencias y su velocidad angular para poder determinar la distancia del punto P a la Tierra.	Es una función en la que los máximos y mínimos se pueden intuir sin mucha dificultad (múltiplos de pi y múltiplos impares de pi medios, respectivamente). Pero analíticamente es difícil de demostrar. Es una función periódica.	Es necesario conocer el radio de cada círculo utilizado en el modelado de la trayectoria, así como su velocidad angular para poder determinar la forma a la que tenderá la trayectoria cuando agreguemos más círculos, este hecho se sigue de que estos parámetros alteran la forma de la trayectoria final. Sería conveniente que tanto los radios como las velocidades formen una progresión para poder formar trayectorias interesantes.	Para empezar, siempre converge a un valor, y este valor es más pequeño conforme t se aleje que pi y 2pi, pues la parte sinoidal se anula, la parte del coseno se vuelve 1 y sólo se suman los términuos del numerador y P se aleja horizontalmente.	No hubo interacción al responder a esta pregunta.	[VG]-2-|02:14:19| P: Bueno entonces esa fórmula ¿Qué relación tendría con eso? Digamos, con la estabilidad y con la, y con eso que respondieron aquí arriba. H4: Nada más que lo describe= P: =¿Qué puedes decir del comportamiento de esta fórmula, a partir de eso que respondieron ahí en esas preguntas? H1: Ah:: Es que la fórmula explica::: la forma que toma la figura. P: ¡Ujú! ¿Y respecto de lo que respondieron arriba de va tomando una forma definida? H4: Habría que ver los valores de convergencia. Meter al t en la fórmula y averiguar la convergencia. P: ¡Ajá! Por ejemplo, una cosa que podrían decir es, si ponen $t = \frac{\pi}{12}$ ¿qué le pasaría a esa fórmula? ¿sería convergente o divergente? M2: Convergente. H3: Convergente. H1: ¿Cuál? P: A esta. M2: [Converge]. H1: [Convergente]. P: ¿Si ponen $t = \frac{3\pi}{4}$? H3: Converge. P: También. Donde no tenemos, este, un acuerdo es en $t = \pi$ y $t = 2\pi$, ¿cierto? ((H3 asiente con la cabeza))
Intencionalidad	Este inciso conduce hacia la interpretación de la matemática involucrada en el fenómeno físico, relacionar la estabilidad de la trayectoria el planeta con el límite de las sumas parciales involucradas en la fórmula calculada en el inciso c. Esto es de suma importancia, pues en el trabajo de Fourier siempre hubo un ir y venir entre el fenómeno físico y la matemática involucrada, para validar la segunda en la primera (Farfán, 2012; Farfán y Romero, 2017).						
¿Sobre qué objetos lo hace?	**Graficar** El planeta, la Tierra y el tiempo transcurrido.	**Identificar** Radio de la circunferencia y velocidad angular.	**Distinguir** Máximos, mínimos y periodicidad.	**Identificar** Radio de la circunferencia y velocidad angular.	**Distinguir** Fórmula evaluada en $t = \pi$ y $t = 2\pi$.		**Distinguir** Fórmula evaluada en valores específicos del tiempo.
¿Sobre qué relaciones lo hace?	**Graficar** Distancia del planeta a la Tierra respecto del tiempo.	**Identificar** Distancia del planeta a la tierra.	**Distinguir** La fórmula.	**Identificar** Forma de la trayectoria.	**Distinguir** Forma de la trayectoria (convergencia).		**Distinguir** Forma de la trayectoria (convergencia).
¿Por medio de qué lo hace?	**Graficar** Icónico: 	**Identificar** Verbal: Se debe conocer el radio de las circunferencias y su velocidad angular para poder determinar la distancia del punto P a la Tierra.	**Distinguir** Verbal: Es una función en la que los máximos y mínimos se pueden intuir sin mucha dificultad (múltiplos de pi y múltiplos impares de pi medios, respectivamente). Pero analíticamente es difícil de demostrar. Es una función periódica.	**Identificar** Verbal: Es necesario conocer el radio de cada círculo utilizado en el modelado de la trayectoria, así como su velocidad angular para poder determinar la forma a la que tenderá la trayectoria cuando agreguemos más círculos, este hecho se sigue de que estos parámetros alteran la forma de la trayectoria final.	**Distinguir** Verbal: Siempre converge a un valor, y este valor es más pequeño conforme t se aleje que π y 2π, pues la parte sinoidal se anula, la parte del coseno se vuelve 1 y sólo se suman los términos del numerador y P se aleja horizontalmente.		**Distinguir** Verbal: [VG]-2-|02:14:45| H1: Ah:: Es que la fórmula explica::: la forma que toma la figura. P: ¡Ujú! ¿Y respecto de lo que respondieron arriba de va tomando una forma definida? H4: Habría que ver los valores de convergencia. Meter al t en la fórmula y averiguar la convergencia.
Invariantes de Acciones	- Forma de la trayectoria (convergencia).						
Pregunta e.1	Tiene un valor mínimo en π que decrece cuando aumenta el número de circunferencias. En los valores de $t = 0$, $t = 2\pi$, crece cuando aumenta el número de circunferencias.	Se comporta como una serie de Fourier de Cosenos, que dependerá de la velocidad angular, ya que inicia en un punto maximo aslcanza un minimo y vuelve a recuperar un punto maximo en un determinado.	Conforme aumenta el número de círculos. Va desde el valor máximo hasta el mínimo dentro del intervalo $((2n-2)\pi, (2n-1)\pi)$ y del mínimo al máximo dentro del intervalo $((2n-1)\pi, 2n\pi)$.	Como una especie de serie (suma infinita) de cosenos, esto se deduce de la expresión general calculada para la distancia de T a P y de la forma de la suma parcial de abcisas cuando se tiene una sola circunferencia, la serie se deforma hasta el punto en que parece formar una especie de señal con forma de V.	Toma un valor constante en npi	[VE3]-2-|02:14:20| M3: Dice abscisas primero, ¿no? H6: Las abscisas convergen a la función periódica, ¿no? M3: Ah::: no sé. [VE3]-2-|02:14:59|	[VG]-2-|02:16:46| H7: Pues que es una función oscilante y los máximos y mínimos son la suma de los radios. P: Ok. H4: Que toma también un valor constante, ¿no? Entre 0 y π (x)las sumas de las coordenadas.

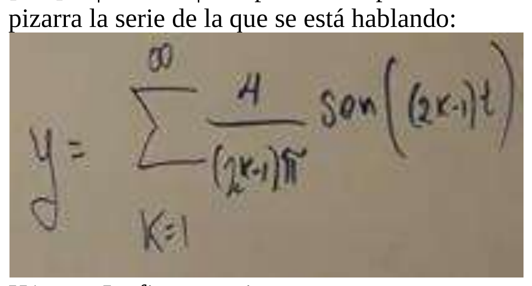
Parte II. **¿Y si agregamos más epiciclos?**

Intención: Se proporciona un applet con el fin de visualizar la estabilidad del sistema. A partir de manipular el número de circunferencias se podrá analizar el comportamiento del sistema, al estudiar cómo cambia la trayectoria del planeta.

Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
						H3: ¿Será que esta es una serie de cosenos y la otra una serie de senos? M3: Tendría sentido. H3: Puramente de senos y una puramente de cosenos. M3: Una serie de (incomprensible, 1) en cosenos, tendría sentido. H3: Sí, ¿no? Porque, porque ve lo que tenemos aquí una suma pura de cosenos y acá una suma pura de senos. M3: ↑Pues es lo que te dije desde hace rato↑ [VE3]-2-|02:16:04| H6: ¿A dónde converge? M3: ((risas)) H6: Diverge, ¿no? M3: Ah, sí es cierto. No sé, es que no hemos visto convergencias así. H6: ¿Qué te pasa “M3”? ((se refiere a M3 por su nombre)) H3: Pos ahorita tienes que ver a dónde converge, es como las otras dos, la de senos se ve muy clarito que se van (x)a un valor positivo y al otro se va a otro valor negativo nada más. H6: Una se va a= H3: =Ah bueno, pero eso no quiere decir que converja verdad. M3: No::: H3: O sea que se vuelve más bien como una función escalonada. M3: ¿Sí:::? ((risas)) H3: Pero la serie es diferente, ¿no? H6: Es que no es una función escalonada. H3: Sí, ¿no? La otra, la del seno. M3: La de los senos. H6: No:::, (x)no es escalonada. Lo que pasa es que esta cosa está muy chiquita, pero aquí tienes el mismo comportamiento. M3: Es que parece un seno amortiguado.	H7: Pero si las abscisas no son coordenadas. H4: Ah de las abscisas, pues como quiera es continua, ¿no? La gráfica que describe. P: Ok, ¿y en π? H3: Parece una discontinuidad. P: ¿Parece una discontinuidad? ¿de qué tipo? H4: Una divergencia, ¿no? H7: Pero aquí toma el valor de la suma de los radios, ¿no? Y no sabemos si converge o diverge. P: Ajá verdad, está esa discrepancia. Entonces, si converge ¿qué debería pasar ahí? H4: Convergería a la suma de los radios. P: ¿Y si diverge? M2: Se va ((mueve sus manos de abajo hacia arriba para explicar el comportamiento)) P: Da infinito, ¿cierto? Pero la gráfica qué es sugiere ¿qué converge o que diverge? H4: No sé, la gráfica me indica que converge. M2: Es que ahí nada más estamos probando, bueno= P: Muy poquito ((hace referencia al número de circunferencias usadas para ver la gráfica)) M2: Y se va viendo que el mínimo va bajando cada vez más. P: Ok, conforme le agrego las::: otro n, otros n’s, voy a ponerle otros. Ahí en 21, voy a ponerle bastantes ya, los 25. Y lo que hizo fue bajar más, ¿verdad? Entonces conforme le agrega el n, dice “M2” ((se refiere a M2 por su nombre)), entonces, este, como que se va haciendo más hacia abajo siempre. Entonces, si le ponemos $n = 50$ probablemente esté (x)más abajo, ¿verdad? Entonces qué les dice eso ¿que es acotado o no es acotado? H1: No parece. P: Parece que no es acotado, ¿verdad? Entonces ¿converge o diverge? M3: Diverge ((junto con M3 responden varios estudiantes)) P: Pareciera, ¿verdad? Que diverge entonces. Entones podemos volver a las preguntas anteriores ¿qué pasa en $t = \pi$, con la distancia? H1: (Incomprensible, 2, ¿Sería evaluando en la serie?) ((señala la fórmula de la distancia escrita en la pizarra)) Pues el seno se cancela, en todos los múltiplos de π se hace 0. P: Se hace 0, ¡ajá! H1: Y el coseno son múltiplos impares de π o de $-\pi$ y eso siempre va a dar, por ejemplo, el de da -1 con os de $-\pi$, ¿no? Digo con los de π da -1 y con los de $-\pi$. M2: Lo mismo. H1: También, así que sería la suma de, bueno más bien la serie que suma los inversos de los impares y eso diverge.
Pregunta e.2	Al aumentar el número de circunferencias la suma se acerca a 1 en el rango $(0, \pi)$, mientras que en el rango $(\pi, 2\pi)$ la suma se acerca a -1.	Se comporta como una serie de Fourier de Senos, que dependerá de la velocidad angular, ya que inicia en un punto máximo se mantiene por un intervalo de tiempo y después alcanza un mínimo donde de igual manera se mantiene constante y el proceso se repite. Comportandose como un pulso.	Conforme aumenta el número de círculos. La suma de las abscisas se vuelve igual a 1 dentro del intervalo $\left((2n-2)\pi, (2n-1)\pi\right)$ ((2n-2) y -1 dentro del intervalo $\left((2n-1)\pi, 2n\pi\right)$.	Como una especie de serie (suma infinita) de senos, esto se sigue de la expresión general calculada para la distancia de T a P y de la forma de la suma parcial de ordenadas cuando se tiene una sola circunferencia la cual es una función seno, con una cierta amplitud. La serie parace deformarse hasta el punto de formar una función pulsante y periódica.	Toma un valor constante en 1 y -1. y se mantiene por un intervalo de y -pi y pi	[VE3]-2-|02:07:56| H3: Entonces tiende a dos rectas ¿a la función escalonada? No, si brinca mucho ¿no? H6: Yo estoy analizando el coseno. M3: A ver. H3: No, pero es que si tiende a esa, ¿no? Sí da la escalonada. M3: ¡Ash! H3: Pero si le agregas más puntos podríamos alinearlo. Mira, es como una recta no, pero es que esto no me gusta. M3: Pero es que salen picos. Más bien parece un seno, ¿no? H3: No, está raro, porque seno no (incomprensible, 1, ¿tiene picos?) M3: Pero yo creo que le metieron un::: una función exponencial, a lo mejor una composición entre el seno (incomprensible, 1) y una función expo- y una (incomprensible, 1) H3: ¿Qué está pasando? ((risas)) M3: Sí, ponle tú que el seno no tenga una (incomprensible, 1), da positivo de cero a pi y que el (incomprensible, 1) da negativo de pi a dos pi, ¿no? [VE3]-2-|02:22:51| H6: Tendría sentido considerar que esta tiene (incomprensible, 1), ¿no? H3: Sí, sí, es una función escalonada, cómo se llama ese tipo de funciones. Es que hay un tipo de función, ¿no? Cuadradas o no sé cómo= H6: =¿Cuál? H3: La que forma esta. H6: ¿A trozos? (3) H3: ¡Ajá! Sí. M3: Pero es la función de escalón::: H3: Es que la función escalón es cero y luego de repente empieza a valer uno. M3: ¡Ajá! Y luego es discontinua en un punto, pero la puedes hacer continua sin retornos. H3: ¡Ajá! Es que aquí se ve que es más o menos algo así, pero es que no quiero decir que es justamente un escalón, porque no parece que valga lo mismo. M3: ¡Ajá!	[VG]-2-|02:23:48| H1: Esa sí converge. P: Esa sí converge ¿en todos los puntos? ¿En todo lado, para cualquier valor de t? H1: Bueno, para t igual múltiplos de $\frac{\pi}{2}$, bueno múltiplos impares. P: ¿Sólo para $t = \frac{\pi}{2}$ pasa eso? ¿Sólo aquí o aquí? ((señalando el valor en la gráfica)) H1: Bueno sí, (x)es fácil demostrar ese, para otros valores (x)no se cómo se demuestra que converge. P: Pero ¿qué pueden ver de la gráfica? H1 Que sí. M2: Que converge. H1: Para intervalos de, sí intervalos abiertos, ¿no? Que esté dentro del intervalo $(0, \pi)$. P: Ok. H1: Y 2π= P: =¿Abiertos? H1: ¡Ajá! Intervalos abiertos. P: Entonces ¿qué pasa (x)en π? H4: Se cancela (incomprensible, 1), porque [(x)ahí está la discontinuidad]. H1: [¿Cuáles son las discontinuidades?] ¿las qué, las coordenadas? P: ¿Tendrá? ¿Qué había dicho? “H8” ((se refiere a H8 por su nombre)) me había dicho algo ahí de ¿cerca de π qué pasa o qué parecía que pasaba? M2: Las discontinuidades. H8: La trayectoria (x)de. Ya se me olvidó ((risas)) H1: Se hace cero, bueno (x)se ve (x)de la función y también de la gráfica que en π, la suma de las ordenadas es cero, porque solo, bueno está completamente estirado en X. P: Ok ¿qué opinan los demás? (6) “H8” ((se refiere a H8 por su nombre)) me había dicho que cerca de π, cerca, no me dijo en π, sino cerca de π, parece que diverge. ¿Vamos a ver qué opinan de eso? ¿Sí me habías dicho eso verdad “H8”? H8: Sí. P: Vamos a poner menos ((se refiere al número de circunferencias en el applet))

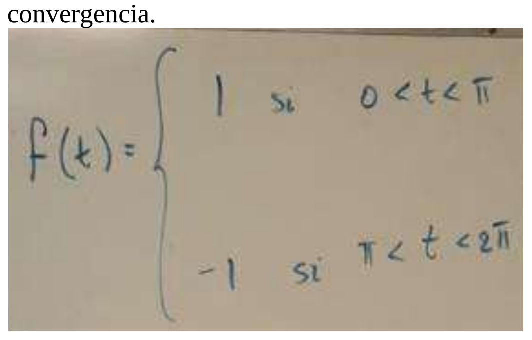
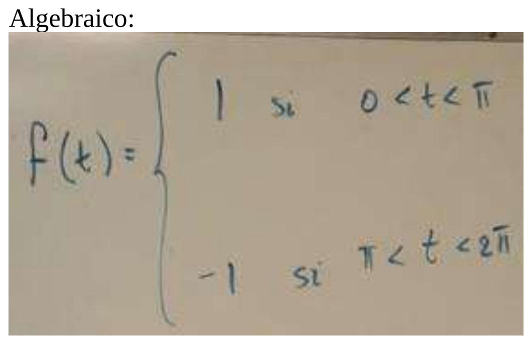
Parte II. **¿Y si agregamos más epiciclos?**

Intención: Se proporciona un applet con el fin de visualizar la estabilidad del sistema. A partir de manipular el número de circunferencias se podrá analizar el comportamiento del sistema, al estudiar cómo cambia la trayectoria del planeta.

Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
						H3: Yo digo que es más bien como una especie de pulso o algo así. H6: O sea, es porque= M3: =Ah::: quizás pulsos. H6: (x)Es que realmente te faltan puntos, o sea por si, es que si, ese si va así. H3: Entonces tendría sentido decir que es cómo. M3: Un pulso. H6: Es periódica en esos intervalos. H3: ¡Ajá! Porque el pulso si es perió:::dico. H6: Y tienes puntos de discontinuidad.	para ver qué se ve y vamos a quitar la de las abscisas. Así se ve con cinco (9). Entonces veámoslo con seis, voy a quitar el, a limpiar para que, así se ve con seis(9). Sí, ahora con siete (12). ¿Qué les parece que sucede ahí, converge o diverge? H1: Converge, simplemente que cambia muy rápido al otro valor de convergencia. P: ¿Qué opinan los demás? H7: Que diverge. P: Que diverge. H2: Pero es que del movimiento del Planeta se ve que da cero. (Incomprensible, 1) es continuo porque da así como saltitos, tendría que pasar por cero. H1: Sí. Bueno, en el tiempo se ve que por ahí tiene que pasar más rápido, por eso se ve la caída abrupta. Pero en la figura simplemente tendría que pasar por el cero, porque hay un punto en que los::: la cadenita de círculos está completamente horizontal, no hay ningún termino en Y, o sea en π, y en, ajá, todos los múltiplos de π.
Pregunta e.3	En la respuesta (a) menciono que la trayectoria se vuelve más alargada en π y en 2π, lo cual concuerda con ésta gráfica donde podemos ver mínimo y máximo respectivamente. (Máximos si se toma el cuadrado de las sumas). La parte de la trayectoria donde los bucles parecen formar dos líneas paralelas se observa en la última gráfica donde la suma de las ordenadas se vuelve constante.	Que ambas se comportan como funciones periodicas y dependeran de la velocidad angular que tengan y los radios de la circunferencias que se van agregando.	En múltiplos de pi las abscisas están completamente estiradas, por lo que ahí son los máximos o mínimos en los que alterna la función. Luego los círculos se enciman sobre las líneas, por lo que las ordenadas suman casi una constante.	No cabe duda de que la relación existente es aquella que produce el hecho de que las coordenadas del planeta respecto al tiempo están expresadas como sumas de senos y cosenos, mismos términos que se ven alterados a causa de constantes tales como el radio de cada circunferencia y la velocidad angular de cada una de estas, esto produce la forma de la trayectoria y la altera conforme se agregan más círculos.	Concuerdan con las respuestas en a) y b)	No hubo interacción al responder esta pregunta.	[VG]-2-|02:28:08|- el profesor indica que lo discutido en las dos preguntas anteriores ya incluye la respuesta a esta pregunta.
Pregunta f	Sí converge, su comportamiento se aproxima a una constante. Converge a una función escalonada	La serie de la ordenadas converge y su valor de convergencia es la coordenada "y" de la posición del planeta con respecto a la Tierra.	La serie de ordenadas $\sum \frac{1}{2i-1}\operatorname{sen}\big((2i-1)t\big)$ con t=pi/2, es igual a $\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\sum(-1)^{i+1}\frac{1}{2i-1}$ i=1,2,... La cual, por la propiedad telescópica tiende a pi/4. Y con 0=-pi/2 tiende a -pi/4. Por lo que la serie no converge ya que tiene dos puntos de acumulación.	La serie de las ordenadas converge, aseguramos que esta serie converge al valor de la componente "y" del vector de posición del planeta respecto a T.	Parace que converge en intervalos abierto de 0 y pi y diverge cuando se acerca a los valores de 0 y múltiplos de pi	[VE3]-2-|02:29:50| H6: Según yo, el valor de convergencia es el mismo. H3: Entonces sí converge. H6: Sí conver- tiene que converger. M3: ¿A qué converge? H6: Yo le puse que converge a, bueno le puse que conociendo más acerca del movimiento se puede obtener la serie de Fourier en cada valor de convergencia y converge a la función. H3: Converge a la función. H6: A una función periódica. H3: Mmm sí. H6: Porque lo que tienes al final es una serie de funciones, tiene que converger a una función. H3: Ah, sí. H6: Y esa función tiene que ser periódica. (8) De hecho, converge uniformemente. [VE3]-2-|02:30:58| H3: Esta converge a la función pulso, uno, menos uno. M3: ¿Mmm? H3: Esta converge a esta función pulso uno y menos uno.	[VG]-2-|02:29:32|- El profesor especifica en la pizarra la serie de la que se está hablando:  H1: La figura sugiere que a uno. (4) P: ¡Ujú! ¿qué más? ¿converge o diverge? ¿quiénes dicen que converge? ((cinco estudiantes levantan la mano)) ¿quién dice que diverge? ((ninguno levanta la mano)) ¿quién se abstiene de votar? ((risas)) Ok, bueno de converge “H1” ((se refiere a H1 por su nombre)) dice que a 1 ¿pero aquí da -1? H1: Ah bueno, sí, entonces depende del valor (x)de t. P: ¡Ajá! Pero yo estoy preguntando de toda la serie, o sea ahí van incluidos todos los valores que pueda tomar t. H1: Ah bueno de todos= H4: =Convergería como al radio de::: H1: Del todo no converge porque siempre va a ir, es como una onda cuadrada ¿no? Siempre hace ((realiza un movimiento con sus manos para explicar)) P: ¿Entonces? [¿converge o] H4: [Convergería] como al radio de la segunda circunferencia. P: Converge como al radio, pero si converge al radio, como puede dar, porque parece que se acerca a -1, ¿verdad? Ustedes me lo habían dicho. Entonces ¿cómo podría converger a -1, si converge a un radio? ¿Converge o diverge? H4: Bueno, si lo pone en esos términos, entonces diverge. P: Vean que lo único que hago es hacerlos dudar. ((risas)) H1: Es como la sucesión 1, -1, 1, -1, … esa no es convergente. P: ¡Ajá! H1: (x)Se parece a::: esa función a::: digo a esa sucesión. P: ¿Quién está de acuerdo? ¿quién no? (6) ¿Están con crisis existencial? H2: El factor= P: =Voy a hacer una aclaración importante ¿cuál es la naturaleza de esto que está aquí? Es un número, una matriz, un polinomio, una función ¿qué es? H2: Todas son funciones. P: Función, ¿verdad? Sí, es una función. Si yo sumo funciones ¿el resultado que a de ser? ((Una función dicen los estudiantes)) Una función, ¿sí? O eso me diría el sentido común, ¿verdad? Si yo sumo funciones mi resultado es una función. Entonces ¿una función podría tomar valor de 1 y -1? ((H1 asiente con la cabeza)) H4: Sí, a no, ¿cómo es que dijo? P: O sea ¿una función podría hacer eso? H1: Sí. P: ¿Cuál función? H1: La de escalón. P: Una de escalón, ¿converge o diverge? H1: Bueno, es que sería no converge, bueno H3: Ajá, no converge. H4: Es que divergir es que se va a infinito. P: Puede ser eso, bueno es que depende de qué estemos hablando de convergencia, por ejemplo, ahorita que lo dijiste con

Parte II. **¿Y si agregamos más epiciclos?**

Intención: Se proporciona un applet con el fin de visualizar la estabilidad del sistema. A partir de manipular el número de circunferencias se podrá analizar el comportamiento del sistema, al estudiar cómo cambia la trayectoria del planeta.

Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
							sucesiones, lo dijiste bien, si una sucesión da -1 y da 1, entonces tiene dos puntos de acumulación, entonces diverge ¿verdad? La sucesión. H1: Bueno, entonces diverger significa no converger. P: ¡Ajá! Diverger es no converger, no quiere decir que de infinito, ¿sí? Por ejemplo esa sucesión que va a -1 y a 1 esa, este:::, diverge porque tiene dos puntos de acumulación hay dos subsucesiones que convergen a valores distintos, por ejemplo. Pero ahí estamos hablando de número, en cambio aquí estamos hablando de funciones, entonces ¿el resultado de esto puede ser una función o no? H1: Es una función. P: Por la naturaleza, ¿verdad? De los términos, si yo sumo funciones, como que es natural que la respuesta sea función. H1: Sí. P: Entonces ahora otra vez la pregunta ¿podría haber una función que haga esto? Pues sí, la función escalón ¿cierto? ((los estudiantes asienten con la cabeza)) Entonces ¿podría esto converger a la función escalón? ((los estudiantes asienten con la cabeza)) ¿Si o no? ((la mayoría responde que sí)) [VG]-2-|02:34:44|- Con la guía de los estudiantes el profesor escribe en la pizarra el valor de convergencia. 
Intencionalidad	Se espera con los incisos e y f la interpretación de la matemática involucrada en el fenómeno físico, relacionar la estabilidad de la trayectoria del planeta con la convergencia de las series involucradas en la fórmula calculada para la distancia de planeta P a la Tierra. Se espera que se percaten de que la suma parcial de las abscisas no siempre es divergente y que la suma parcial de las ordenadas es siempre convergente. En particular para el inciso f, se tiene como hipótesis que los estudiantes respondan que la serie de las ordenadas diverge, cuando en realidad es convergente. Esto lo sabemos gracias a la prueba piloto y las diferentes puestas en escena, ya que el argumento principal utilizado fue que “la gráfica se está acercando a dos valores 1 y -1”, lo que da evidencia de la concepción de límite funcional como obstáculo para comprender la convergencia de series. Si bien sabemos que en t=π, la serie converge a cero —de hecho, en todas las discontinuidades considerando a $t \in \mathbb{R}$— aquellos estudiantes que vislumbren la convergencia podrían pensar que cerca de $t = \pi$ —las discontinuidades— la serie de las ordenadas de P es divergente, pues ya está reportado que los estudiantes consideran convergente solo aquello que converge uniformemente y lo demás es divergente (Albert, 1996).						
¿Sobre qué objetos lo hace?	**Reconocer** El valor de la suma parcial para diferentes tiempos. **Comparar** El valor del mínimo para distintas sumas parciales. **Comparar** Las gráficas de una suma parcial a otra.	**Reconocer** El valor de la suma parcial para diferentes tiempos. **Comparar** Los valores máximo y mínimo para distintas sumas parciales. **Comparar** Las gráficas de una suma parcial a otra.	**Reconocer** El valor de la suma parcial para diferentes tiempos. **Comparar** Las gráficas de una suma parcial a otra. **Evaluar** La serie y un tiempo específico.	**Comparar** Las gráficas de una suma parcial a otra. **Identificar** Radio de los planetas y velocidad de los puntos.	**Comparar** Las gráficas de una suma parcial a otra.	**Comparar** Las gráficas de una suma parcial a otra.	**Reconocer** El valor de la suma parcial para diferentes tiempos. **Comparar** Las gráficas de una suma parcial a otra. **Evaluar** La serie y un tiempo específico.
¿Sobre qué relaciones lo hace?	**Reconocer** En $t = \pi$ se alcanza un mínimo. **Comparar** En $t = \pi$ el mínimo es cada vez menor conforme se agregan circunferencias. **Comparar** En $t = \pi$ y $t = 2\pi$ se alcanzan mínimo y máximo, respectivamente. La serie converge a una función escalonada.	**Reconocer** La serie de cosenos inicia en un máximo y alcanza un mínimo. La serie de senos inicia en un punto máximo y alcanza un mínimo. **Comparar** La serie de cosenos inicia en un máximo y alcanza un mínimo. La serie de senos inicia en un punto máximo y alcanza un mínimo. **Comparar** Las funciones son periódicas. La serie converge a una función escalonada.	**Reconocer** En la suma de las abscisas la función varía de un máximo a un mínimo y luego del mínimo al máximo. En los múltiplos de $t = \pi$ se alcanza máximos y mínimos. **Comparar** La serie converge a una función escalonada. **Evaluar** La serie de las ordenadas diverge, pues para dos valores de t distintos converge a valores distintos.	**Comparar** La serie converge a una función con una forma específica. **Identificar** El radio de las circunferencias que se agregan y la velocidad de los puntos, es lo que produce la forma de la trayectoria (convergencia).	**Comparar** La serie es convergente.	**Comparar** La serie converge a una función escalonada.	**Reconocer** Los máximos y los mínimos son la suma de los radios. **Comparar** La serie converge a una función escalonada. **Evaluar** La serie de las ordenadas diverge, pues para dos valores de t distintos converge a valores distintos.
¿Por medio de qué lo hace?	**Reconocer** Verbal: Tiene un valor mínimo en π. **Comparar** Verbal: Tiene un valor mínimo en π que decrece cuando aumenta el número de circunferencias. En los valores de $t = 0$, $t = 2\pi$, crece cuando aumenta el número de circunferencias. **Comparar** Verbal: La trayectoria se vuelve más alargada en π y en 2π, lo cual concuerda con la gráfica donde podemos ver mínimo y máximo respectivamente. Verbal: La parte de la trayectoria donde los bucles parecen formar dos líneas paralelas se observa en la última gráfica donde la suma de las ordenadas se vuelve constante. Verbal: Al aumentar el número de circunferencias la suma se acerca a 1 en el rango $(0, \pi)$, mientras que en el rango $(\pi, 2\pi)$ la suma se acerca a -1. Verbal: Sí converge, su comportamiento se aproxima a una constante. Converge a una función escalonada.	**Reconocer** Verbal: Tienen puntos máximos y mínimos. **Comparar** Verbal: La serie de cosenos inicia en un punto máximo alcanza un mínimo y vuelve a recuperar un punto máximo en un determinado. Verbal: La serie de senos inicia en un punto máximo se mantiene por un intervalo de tiempo y después alcanza un mínimo donde de igual manera se mantiene constante y el proceso se repite. **Comparar** Verbal: Ambas se comportan como funciones periódicas. Verbal: La serie de las ordenadas converge y su valor de convergencia es la coordenada "y" de la posición del planeta con respecto a la Tierra.	**Reconocer** Verbal: Conforme aumenta el número de círculos. Va desde el valor máximo hasta el mínimo dentro del intervalo $\left((2n-2)\pi, (2n-1)\pi\right)$ y del mínimo al máximo dentro del intervalo $\left((2n-1)\pi, 2n\pi\right)$. Verbal: En múltiplos de π las abscisas están completamente estiradas, por lo que ahí son los máximos o mínimos en los que alterna la función. **Comparar** Verbal: Conforme aumenta el número de círculos. La suma de las abscisas se vuelve igual a 1 dentro del intervalo $\left((2n-2)\pi, (2n-1)\pi\right)$ ((2n-2) y -1 dentro del intervalo $\left((2n-1)\pi, 2n\pi\right)$. Verbal: Los círculos se enciman sobre las líneas, por lo que las ordenadas suman casi una constante. **Evaluar** Algebraico: La serie de ordenadas $\sum \frac{1}{2i-1} \operatorname{sen}\left((2i-1)t\right)$ con $t = \frac{\pi}{2}$, es igual a $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum (-1)^{i+1} \frac{1}{2i-1} \quad i = 1,2, \ldots$ La cual, por la propiedad telescópica tiende a $\frac{\pi}{4}$. Y con $t = -\frac{\pi}{2}$ tiende a $-\frac{\pi}{4}$. Por lo que la serie no converge ya que tiene dos puntos de acumulación.	**Comparar** Verbal: La serie se deforma hasta el punto en que parece formar una especie de señal con forma de V. Verbal: La serie parece deformarse hasta el punto de formar una función pulsante y periódica. Verbal: La serie de las ordenadas converge, aseguramos que esta serie converge al valor de la componente "y" del vector de posición del planeta respecto a T. **Identificar** Verbal: Las coordenadas del planeta respecto al tiempo están expresadas como sumas de senos y cosenos, mismos términos que se ven alterados a causa de constantes tales como el radio de cada circunferencia y la velocidad angular de cada una de estas, esto produce la forma de la trayectoria y la altera conforme se agregan más círculos.	**Comparar** Verbal: Toma un valor constante en $n\pi$. Verbal: Toma un valor constante en 1 y -1, y se mantiene por un intervalo de y $-\pi$ y π. Verbal: Parece que converge en intervalos abierto de 0 y π y diverge cuando se acerca a los valores de 0 y múltiplos de π.	**Comparar** Verbal: [VE3]-2-|02:16:04| H6: ¿A dónde converge? M3: ((risas)) H6: Diverge, ¿no? M3: Ah, sí es cierto. No sé, es que no hemos visto convergencias así. H6: ¿Qué te pasa “M3”? ((se refiere a M3 por su nombre)) H3: Pos ahorita tienes que ver a dónde converge, es como las otras dos, la de senos se ve muy clarito que se van (x)a un valor positivo y al otro se va a otro valor negativo nada más. H6: Una se va a= H3: =Ah bueno, pero eso no quiere decir que converja verdad. M3: No::: H3: O sea que se vuelve más bien como una función escalonada.	**Reconocer** Verbal: [VG]-2-|02:16:46| H7: Pues que es una función oscilante y los máximos y mínimos son la suma de los radios. P: Ok. H4: Que toma también un valor constante, ¿no? Entre 0 y π (x)las sumas de las coordenadas. **Comparar** Verbal: [VG]-2-|02:30:57| H1: Es como la sucesión 1, -1, 1, -1, … esa no es convergente. P: ¡Ajá! H1: (x)Se parece a::: esa función a::: digo a esa sucesión. Algebraico:  **Evaluar** Verbal: [VG]-2-|02:19:06| H1: (Incomprensible, 2, ¿Sería evaluando en la serie?) ((señala la fórmula de la distancia escrita en la pizarra)) Pues el seno se cancela, en todos los múltiplos de π se hace 0.

Parte II. **¿Y si agregamos más epiciclos?**

Intención: Se proporciona un applet con el fin de visualizar la estabilidad del sistema. A partir de manipular el número de circunferencias se podrá analizar el comportamiento del sistema, al estudiar cómo cambia la trayectoria del planeta.

Estudiante	**M2**	**M3**	**H1**	**H3**	**H4**	**Equipo 3**	**Puesta en común**
							P: Se hace 0, ¡ajá! H1: Y el coseno son múltiplos impares de π o de $-\pi$ y eso siempre va a dar, por ejemplo, el de da -1 con os de $-\pi$, ¿no? Digo con los de π da -1 y con los de $-\pi$. M2: Lo mismo. H1: También, así que sería la suma de, bueno más bien la serie que suma los inversos de los impares y eso diverge. Verbal: [VG]-2-|02:23:48| H1: Esa sí converge. P: Esa sí converge ¿en todos los puntos? ¿En todo lado, para cualquier valor de t? H1: Bueno, para t igual múltiplos de $\frac{\pi}{2}$, bueno múltiplos impares. P: ¿Sólo para $t = \frac{\pi}{2}$ pasa eso? ¿Sólo aquí o aquí? ((señalando el valor en la gráfica)) H1: Bueno sí, (x)es fácil demostrar ese, para otros valores (x)no se cómo se demuestra que converge.
Invariantes de Acciones	- La serie converge a una función escalonada.						
Pregunta g	Converge a una función escalonada	Converge al mismo valor que en la respuesta anterior, ya que se estaba trabajando con valores de t positivos.	Según la applet, la suma de ordenadas converge a 1. Tiene sentido ya que la coordenada y es igual a $y_n = \frac{4}{\pi}\sum\frac{1}{2i-1}\mathrm{sen}\big((2i-1)t\big)$ para t=pi/2 $y_n \to 1$, $i \to \infty$.	Convergería al mismo valor, dado que hemos estado trabajando todo el tiempo con t's positivas. En caso de t=0 el valor de cada función seno será cero, provocando así la convergencia de la serie a la suma de todos los radios de las circunferencias.	converge a una función	[VE3]-2-|02:44:08| H3: No entiendo. M3: ¿Qué? H3: Dice, si se cambia en rango de valores de t para todos aquellos en los que t es mayor o igual que cero ¿cuál es el valor de convergencia de la serie de las ordenadas del planeta? ¿Cómo si se cambia el valor? H6: Es lo que les dije, o sea que se van a tomar valores de t positivos. H3: ¿Qué solo toma valores positivos? H6: Sí, es lo que estás haciendo. H3: ¿Cómo? H6: Los valores, estás tomando t, posiciones de t positivos. [VE3]-2-|02:48:14| M3: Oye y si le cambiamos ahí ¿qué pasa? ((se refiere al rango de valores de t dado en el applet)) H6: No hay nada. Estás tomando t (incomprensible, 1). M3: Y si le pongo. H6: No va a salir nada porque= M3: =No::: H3: Algo raro pasó ahí. H6: Realmente no pasa mucho, porque si= M3: =¿Cómo no? H6: Si la gráfica de aquí, la función esa es simétrica o antisimétrica esto (incomprensible, 2). (3) Pero limpia el rastro, ¿no? M3: Ya me regañó, que exigente pues. Y si lo quiero mover, no puedo mover los ejes. H6: ¡Ajá! simplemente mueves la gráfica, la función es, en este caso la función es antisimétrica, es una función impar, son senos. Si fueran cosenos, esto continuaría aquí. M3: Ok, entonces para valores positivos la gráfica son se-, ah ok a ver. H3: Ah ya entendí, aquí es como que (incomprensible, 2) se acota en ciertos lugares. M3: ¿Eh? H3: Si es como que la acotas entre ciertos lugares. M3: ¡Aja! [VE3]-2-|02:53:07| H6: No pasaría nada porque está considerando valores positivos (incomprensible, 1). M3: Pues simón no pasa nada. H3: No sé qué está pasando. M3: Pues es que sí mira, porque hemos trabajado hasta ahorita con t's positivos, entonces, entonces no pasa nada sigue convergiendo. H3: Si, si es el mismo. M3: Sí:::, es lo mismo que la f, y ya.	[VG]-2-|02:36:33| P: ¿Qué pasaría si t es mayor que cero, verdad? (7) ¿Cuál es el valor de convergencia de la serie de las ordenadas? H3: Sería 1. P: Ahora con $t > 0$, ahí podían cambiar el rango, ¿verdad? De t. Qué se yo, le podemos poner 8π, no se va a ver todo, pero (11). Entonces ¿converge o diverge? (3) H2: Converge a la función, definida por partes. P: Converge a la función definida por partes. O sea, le harían otra listota aquí ((se refiere a la función definida a trozos de la pregunta anterior)) (x)más grande, o ¿qué diríamos? H3: Sí::: ((risas)) P: Es una manera, ¿verdad? Podríamos poner, 1 si t está entre 2π y 3π, -1 si, y ahí. (Incomprensible, 1) ((hablan varios a la vez, H2 sugiere trabajar con los intervalos)) H1: Sí, podemos poner que t exista, por ejemplo, en ese sería desde el límite derecho, múltiplo impar de π y al izquierdo le restamos uno, y el de abajo serán múltiplos pares y al izquierdo le restamos uno. P: Ok, ujú, es una manera de hacerlo ¿sí? ¿Sí está clara la idea? ((los estudiantes asienten con la cabeza))
Pregunta h	Valores de t<0 indican planetas moviéndose en sentido horario, lo cual no tiene sentido en el modelo propuesto.	Si tiene sentido pero no es necesario ya que al ser funciones pares e impares lo único que provoca son reflexiones.	Tiene sentido matemáticamente, ya que equivale a invertir el sentido de giro. Y ahí sólo cambiaría el signo de los términos de la serie, la cual convergería a -pi/4. Pero físicamente no tiene sentido el tiempo negativo.	En efecto, tiene sentido, aunque es probable que las expresiones solo acaben por reflejar la trayectoria formada, esto dada la simetría de la misma respecto al eje horizontal, la paridad del coseno y la no paridad del seno.	No tiene sentido considerarlos, porque ni siquiera implican un retroceso. En caso de converger, convergería al mismo valor en las ordenadas.	[VE3]-2-|02:53:45| H3: No, pero es que yo creo que sí pasa algo por que vea, aquí te dice que estás acotando t entre a y b. H6: ¡Ajá! H3: Entonces= H3: =Pero, entonces a y b ahí son positivos. H6: ¡Ajá! Pero sería solo en este pedacito. M3: Sólo convergen más lentamente, ¿no? Porque cuando variábamos b te acuerdas que iba más lento. H6: No, es que la t (x)solo son los valores que tu metes, tu (incomprensible, 1), y como tal, esa cosa solo tiene senos y cosenos, funciones pares e impares. Con t negativo lo único que tienes es la misma gráfica en el caso de senos invertida, en el caso de cosenos la tienes completamente reflejada porque es una función par, en caso del seno como es impar simplemente se voltea así. Lo único que haces es, es (incomprensible, 1), pero sigue siendo periódico, no pasa mucho. Pero la pregunta que te pre-, en	[VG]-2-|02:40:02| P: ¿Y qué pasa si t es::: negativo? ¿tiene sentido (x)en el problema hablar de valores de t negativos? H6: [Pues::: sí] M2: [Sería un:::] movimiento en sentido horario. H1: Sí, sería cambiar el sentido de giro. P: ¡Ajá! ¿Pero qué es t en el sistema inicial? H6: El tiempo. P: El tiempo. H1: Ajá, el tiempo. P: ¿Tiene sentido hablar de tiempo negativo? H3: No ((varios estudiantes mueven su cabeza para indicar que no)) P: O sea, matemáticamente pasan cosas, ¿sí? O sea, el ángulo sería verlo en sentido antihorario, por eje- eh en sentido horario, por ejemplo. O sea, matemáticamente pasan cosas, solamente que digamos que (x)en el modelo no tiene sentido de hablar de valores de t negativos, ¿sí?

<table>
<tr><td>Parte II.</td><td colspan="7">¿Y si agregamos más epiciclos?</td></tr>
<tr><td>Intención:</td><td colspan="7">Se proporciona un applet con el fin de visualizar la estabilidad del sistema. A partir de manipular el número de circunferencias se podrá analizar el comportamiento del sistema, al estudiar cómo cambia la trayectoria del planeta.</td></tr>
<tr><td>Estudiante</td><td>M2</td><td>M3</td><td>H1</td><td>H3</td><td>H4</td><td>Equipo 3</td><td>Puesta en común</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>la siguiente que te pregunta de que si tiene algún sentido evaluar t’s
H3: [Negativos]
H6: [Negativos], pues tiene sentido, pero realmente es innecesario porque tu gráfica es completamente simétrica o antisimétrica. Bueno yo puse eso.
M3: Tiene sentido.

[VE3]-2-|02:57:47|
H3: Realmente un t negativo sería, sería en sentido antihorario.
M3: [No:::, horario]
H6: [Más bien sería en sentido horario]
M3: Antihorario es positivo.</td><td>[VG]-2-|02:43:29|
P: Bueno, entonces ¿qué pasaría con la convergencia? ¿sigue siendo convergente?
H4: Sí, solo cambia la paridad de la función, ¿no?
H1: Se voltea (incomprensible, 1)
P: ¿Se voltea?
H1: Bueno (x)los valores, o sea donde había 1 ahora sería -1.
P: ¿Seguros?
H1: Bueno sería continuar la gráfica, pero para el ((con la mano señala que hacia la izquierda))</td></tr>
<tr><td>Intencionalidad</td><td colspan="7">Se pretende provocar que la periodicidad sea un resultado de la serie y no una condición de la función que se está representando. Pues la serie, como objeto matemático, posee ciertas características que no tienen sentido en el fenómeno que se está modelando. En este caso dicha característica es la condición de periodicidad, la cual se da en toda la recta real, pero el fenómeno no tiene sentido al hablar de valores negativos del tiempo. Para concluir con esta tarea, se espera que los estudiantes no sepan escribir en forma analítica una función periódica en el inciso h, ya que no es usual hacerlo en la escuela, posiblemente escriban la función para un intervalo y escriban con palabras que se repite de manera periódica.</td></tr>
<tr><td>¿Sobre qué objetos lo hace?</td><td>Identificar
El valor de convergencia.

Observar
El planeta.</td><td>Extender
El valor de convergencia para un intervalo.

Comparar
La trayectoria y las funciones.</td><td>Evaluar
La serie y un tiempo específico.

Observar
El planeta.</td><td>Extender
El valor de convergencia para un intervalo.

Comparar
La trayectoria y las funciones.</td><td>Identificar
El valor de convergencia.

Observar
El planeta.</td><td>Extender
El valor de convergencia para un intervalo.

Comparar
La trayectoria y las funciones.

Observar
El planeta.</td><td>Extender
El valor de convergencia para un intervalo.

Comparar
La trayectoria y las funciones.

Observar
El planeta.</td></tr>
<tr><td>¿Sobre qué relaciones lo hace?</td><td>Identificar
El valor de convergencia es una función escalonada.

Observar
El movimiento del planeta sobre la trayectoria.</td><td>Extender
El valor de convergencia para $t \geq 0$.

Comparar
Son funciones pares e impares.</td><td>Evaluar
La serie de las ordenadas converge a 1.

Observar
El movimiento del planeta sobre la trayectoria.</td><td>Extender
El valor de convergencia para $t \geq 0$.

Comparar
Son funciones pares e impares.</td><td>Identificar
El valor de convergencia es una función.

Observar
El movimiento del planeta sobre la trayectoria.</td><td>Extender
El valor de convergencia para $t \geq 0$.

Comparar
Son funciones pares e impares.

Observar
El movimiento del planeta sobre la trayectoria.</td><td>Extender
El valor de convergencia para $t \geq 0$.

Comparar
Son funciones pares e impares.

Observar
El movimiento del planeta sobre la trayectoria.</td></tr>
<tr><td>¿Por medio de qué lo hace?</td><td>Identificar
Verbal: Converge a una función escalonada.

Observar
Verbal: Valores de $t < 0$ indican planetas moviéndose en sentido horario, lo cual no tiene sentido en el modelo propuesto.</td><td>Extender
Verbal: Converge al mismo valor que en la respuesta anterior, ya que se estaba trabajando con valores de t positivos.

Comparar
Verbal: Si tiene sentido, pero no es necesario ya que al ser funciones pares e impares lo único que provoca son reflexiones.</td><td>Evaluar
Algebraico: Según el applet, la suma de ordenadas converge a 1. Tiene sentido ya que la coordenada y es igual a $y_n = \frac{4}{\pi}\sum \frac{1}{2i-1} \operatorname{sen}\big((2i-1)t\big)$ para $t = \frac{\pi}{2}$, $y_n \to 1$, $i \to \infty$.

Observar
Verbal: Tiene sentido matemáticamente, ya que equivale a invertir el sentido de giro. Y ahí sólo cambiaría el signo de los términos de la serie, la cual convergería a $-\frac{\pi}{4}$. Pero físicamente no tiene sentido el tiempo negativo.</td><td>Extender
Verbal: Convergería al mismo valor, dado que hemos estado trabajando todo el tiempo con t's positivas.

Comparar
Verbal: En efecto, tiene sentido, aunque es probable que las expresiones solo acaben por reflejar la trayectoria formada, esto dada la simetría de la misma respecto al eje horizontal, la paridad del coseno y la no paridad del seno.</td><td>Identificar
Verbal: Converge a una función.

Observar
Verbal: No tiene sentido considerarlos, porque ni siquiera implican un retroceso. En caso de converger, convergería al mismo valor en las ordenadas.</td><td>Extender
Verbal: [VE3]-2-|02:53:07|
H6: No pasaría nada porque está considerando valores positivos (incomprensible, 1).
M3: Pues simón no pasa nada.
H3: No sé qué está pasando.
M3: Pues es que sí mira, porque hemos trabajado hasta ahorita con t’s positivos, entonces, entonces no pasa nada sigue convergiendo.
H3: Si, si es el mismo.
M3: Sí:::, es lo mismo que la f, y ya.

Comparar
Verbal: [VE3]-2-|02:48:31|
H6: Realmente no pasa mucho, porque si=
M3: =¿Cómo no?
H6: Si la gráfica de aquí, la función esa es simétrica o antisimétrica esto (incomprensible, 2).
(3)
Pero limpia el rastro, ¿no?
M3: Ya me regañó, que exigente pues. Y si lo quiero mover, no puedo mover los ejes.
H6: ¡Ajá! simplemente mueves la gráfica, la función es, en este caso la función es antisimétrica, es una función impar, son senos. Si fueran cosenos, esto continuaría aquí.

Verbal: [VE3]-2-|02:54:02|
H6: No, es que la t (x)solo son los valores que tu metes, tu (incomprensible, 1), y como tal, esa cosa solo tiene senos y cosenos, funciones pares e impares. Con t negativo lo único que tienes es la misma gráfica en el caso de senos invertida, en el caso de cosenos la tienes completamente reflejada porque es una función par, en caso del seno como es impar simplemente se voltea así. Lo único que haces es, es (incomprensible, 1), pero sigue siendo periódico, no pasa mucho. Pero la pregunta que te pre-, en la siguiente que te pregunta de que si tiene algún sentido evaluar t’s
H3: [Negativos]
H6: [Negativos], pues tiene sentido, pero realmente es innecesario porque tu gráfica es completamente simétrica o antisimétrica. Bueno yo puse eso.
M3: Tiene sentido.

Observar
Verbal: [VE3]-2-|02:57:47|
H3: Realmente un t negativo sería, sería en sentido antihorario.
M3: [No:::, horario]
H6: [Más bien sería en sentido horario]
M3: Antihorario es positivo.</td><td>Extender
Verbal: [VG]-2-|02:36:33|
P: ¿Qué pasaría si t es mayor que cero, verdad? (7) ¿Cuál es el valor de convergencia de la serie de las ordenadas?
H3: Sería 1.
P: Ahora con $t > 0$, ahí podían cambiar el rango, ¿verdad? De t. Qué se yo, le podemos poner 8π, no se va a ver todo, pero (11). Entonces ¿converge o diverge?
(3)
H2: Converge a la función, definida por partes.

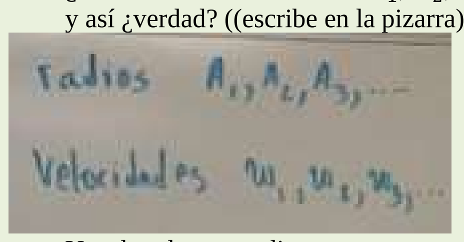
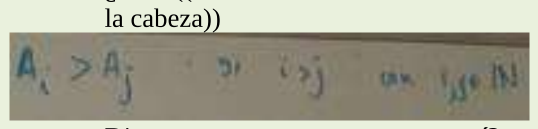
Comparar
Verbal: [VG]-2-|02:43:29|
P: Bueno, entonces ¿qué pasaría con la convergencia? ¿sigue siendo convergente?
H4: Sí, solo cambia la paridad de la función, ¿no?
H1: Se voltea (incomprensible, 1)
P: ¿Se voltea?
H1: Bueno (x)los valores, o sea donde había 1 ahora sería -1.
P: ¿Seguros?
H1: Bueno sería continuar la gráfica, pero para el ((con la mano señala que hacia la izquierda))

Observar
Verbal: [VG]-2-|02:40:02|
P: ¿Y qué pasa si t es::: negativo? ¿tiene sentido (x)en el problema hablar de valores de t negativos?
H6: [Pues::: sí]
M2: [Sería un:::] movimiento en sentido horario.
H1: Sí, sería cambiar el sentido de giro.</td></tr>
<tr><td>Invariantes de Acciones</td><td colspan="7">- El valor de convergencia es una función.
- El valor de convergencia para $t \geq 0$.
- Son funciones pares e impares.
- El movimiento del planeta sobre la trayectoria.</td></tr>
</table>

9.7.5 Tarea #5. Etapa 1: Identificación de acciones

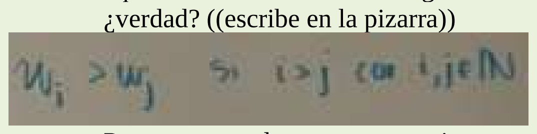
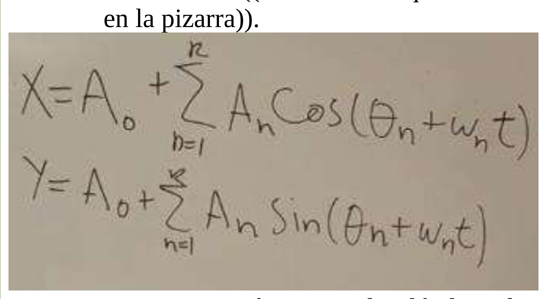
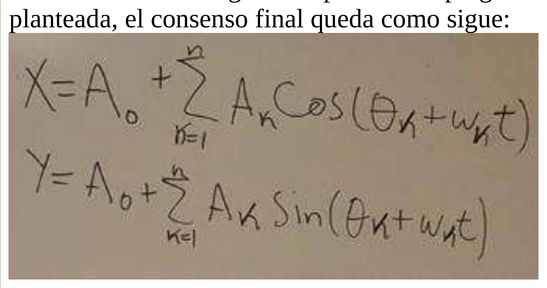
TAREA #5

Objetivo de la Tarea:	Significar los elementos presentes en la serie trigonométrica que emerge al matematizar el modelo del movimiento planetario de los alejandrinos en forma general.
Parte I.	**Generando el modelo**
Intención:	Se pretende con esta generalización que el estudiante identifique las condiciones para que el modelo sea estable.

Estudiante	**M2**	**M3**	**H1**	**H3**	**H4**	**Equipo 3**	**Puesta en común**
Pregunta a	$A_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ Las velocidades aumentan al agregar más circunferencias y $w_k \rightarrow \infty$ cuando k→ ∞ Así se formarán trayectorias con formas definidas al agregar más circunferencias.	Debe cumplirse que los radios de las circunferencias vayan disminuyendo y las velocidad angulares vayan aumentado, ademas que las series de las componentes sean convergentes. Donde los radios tienden a cero y las velocidades angulares a infinito.	Se debe cumplir $r_{k+1}y < canvasclass =$ para que la trayectoria no se desborde. Y $\omega_{k+1} > \omega_k$ y $[math]\backslash omega\_k\backslash longrightarrow\backslash infty" >$ para que se complete el recorrido en un tiempo finito.	Debe cumplirse que al ir agregando más y más circunferencias, estas decrezcan en radio y el punto o planeta P aumente su velocidad angular, para completar un giro cada vez más rápido, observándose como si el planeta ya no girara en torno al centro de cada nueva circunferencia. Con los radios tendiendo a cero y las velocidades angulares tendiendo a infinito.	Los radios de las circunferencias agregadas deben de ser menores con respecto al anterior, pero es necesario que $A_n \rightarrow 0$. A su vez, la velocidad angular del punto P en cada nueva circunferencia debe de aumentar (esto como consecuencia de la disminución de las circunferencias) y es necesario que $w_n \rightarrow \infty$	No hubo interacción al responder esta pregunta. [VE3]-5-|00:56:50|- H3 agrega a su respuesta el último párrafo después de la puesta en común "Con los radios tendiendo a cero y las velocidades angulares tendiendo a infinito" [VE3]-5-|01:01:03|- M3 agrega a su respuesta el último párrafo después de la puesta en común. "Donde los radios tienden a cero y las velocidades angulares a infinito."	[VG]-5-|01:08:15| P: Con base en los modelos particulares estudiados en las Tareas 1, 2 y 3 ¿qué condiciones deben cumplirse en el modelo general para que la trayectoria del planeta se estabilice conforme se agreguen cada vez más circunferencias? ((Leyendo la pregunta)) ¿Qué escribieron por ahí? ((señalando al Equipo 1)) H4: Que todas las circunferencias deben ser cada vez menores. P: Los radios de las circunferencias deben ser cada vez menores ¿qué otro? M3: Y las velocidades tienen que ir aumentando. H1: Las angulares. M3: Las angulares. P: Las velocidades angulares tienen que ir aumentando. ¿y eso cómo lo escribieron, matema-? ¿cómo se escribe matemáticamente? Digamos que ahí está como cualitativo, ¿verdad? Los radios cada vez más chicos y las velocidades cada vez mayores ¿cómo escribirían eso? Qué sería, en este caso los radios son A_1, A_2 ¿verdad? H4: A1 menor que::: P: Los radios son A_1, A_2, A_3 y así ¿verdad? Y las velocidades w_1, w_2, w_3 y así ¿verdad? ((escribe en la pizarra))  Ustedes lo que dicen es que estos ((señalando los radios)) tienen que ir, eh. H3: Decreciendo. P: Ir decreciendo y estos ((señalando las velocidades)) deben de ir. H3: Aumentando. P: Aumentando ¿cómo lo escribirían matemáticamente? H6: A_i es mayor que A_j, si i es mayor que j. P: Ok, Entonces aquí ((escribiendo en la pizarra)) H6: A_i es mayor que A_j. P: Mayor. H6: Si i es mayor que j. Con i, j en (x)uno en ℕ. P: ¿Así? ((varios estudiantes asientan con la cabeza))  Dice que uno es menor que otro, ¿sí? M3: ¡Ujú! P: ¿Pero es suficiente con que sea uno menor que otro? (8) M2: Y consecutivos también deben ser, ¿no? H1: Poner consecutivo, ¿no? P: Bueno, ahí incluye digamos, ya eso incluye que los consecutivos, ¿no? (5) Por ejemplo, a ver, el primero podría ser 10 000, ¿cierto? M2: Sí. P: ¿Sí? ((varios estudiantes asienten con la cabeza)) Y que vayan decreciendo, pero que estén acotados por 9000, ¿sí? Y entonces igual, va a ser siempre esto ((señalando la desigualdad $A_i > A_j$)), pero (x)se hará la estabilidad, por que, qué habíamos dicho (x)que provocaba la estabilidad, los radios al final, cuando era infinito eran tan chiquititos, tan pequeñitos, ¿verdad? Entonces ¿será que ser decreciente es suficiente? H6: (Incomprensible, 1) que converja. H3: Tendría que tender a cero. P: ¿Verdad? Es como necesaria esa condición, ¿cierto? ((los estudiantes asienten con la cabeza)) Que esta ((señalando la desigualdad $A_i > A_j$)) no es suficiente. H1: nada más que, está al revés, ¿no? Debería ser el signo de desigualdad, el signo de desigualdad debería ser al revés. P: ¿Este? H1: Sí. P: ((Cambia $A_i > A_j$ por $A_i < A_j$)) Para una circunferencia con un radio mayor, debe ser menor que el otro, en una posición mayor tiene que ser menor que el otro. Entonces ¿cómo escribirían eso otro? H1: Eh, A_n diverge a 0, tiene a cero ((los estudiantes asienten con la cabeza)) [VG]-5-|01:13:23| P: ¿Y ahora con los w? Digamos que la idea es similar, lo que habían dicho era que tenían que ir creciendo ¿cierto? Entonces eso ¿cómo lo escribirían? w_i

Parte I. **Generando el modelo**

Intención: Se pretende con esta generalización que el estudiante identifique las condiciones para que el modelo sea estable.

Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
							es la misma idea verdad, nada más que aquí si se mantienen las desigualdades ¿verdad? ((escribe en la pizarra))  Pero otra vez la pregunta es si eso es suficiente. H4: Debe tender a::: [a infinito]. M3: [a infinito]. P: Debe tender a infinito, ¿verdad? ((los estudiantes asienten con la cabeza))
Intencionalidad	Se espera que el estudiante identifique que para garantizar la estabilidad del sistema se debe cumplir que $A_n \to 0$ y $w_n \to \infty$, es importante resaltar que estas condiciones son necesarias para la convergencia, pero no suficientes.						
¿Qué hace?	**Establecer** las condiciones necesarias para la estabilidad del sistema.	**Establecer** las condiciones necesarias para la estabilidad del sistema.	**Establecer** las condiciones necesarias para la estabilidad del sistema.	**Establecer** las condiciones necesarias para la estabilidad del sistema.	**Establecer** las condiciones necesarias para la estabilidad del sistema.		**Establecer** las condiciones necesarias para la estabilidad del sistema.
¿Cómo hace?		Extendiendo los resultados de las tareas anteriores.	Extendiendo los resultados de las tareas anteriores.	Extendiendo los resultados de las tareas anteriores.	Extendiendo los resultados de las tareas anteriores.		Extendiendo los resultados de las tareas anteriores.
Argumentos (A) y confrontaciones (C) presentados.	(A) Para que la trayectoria tome una forma definida la sucesión de los radios debe converger a cero y la sucesión de las velocidades angulares debe diverger.	(A) Para que la trayectoria tome formas definidas la sucesión de los radios debe converger a cero y la sucesión de las velocidades angulares debe diverger. (C) Para que la trayectoria tome una forma definida la sucesión de los radios debe ser decreciente y la sucesión de las velocidades angulares debe ser creciente.	(C) Para que la trayectoria tome una forma definida la sucesión de los radios debe ser decreciente y la sucesión de las velocidades angulares debe ser creciente. (C) Para que se complete el recorrido en un tiempo finito la sucesión de las velocidades angulares debe diverger.	(A) Para que la trayectoria tome formas definidas la sucesión de los radios debe converger a cero y la sucesión de las velocidades angulares debe diverger. (C) Para que la trayectoria tome una forma definida la sucesión de los radios debe ser decreciente y la sucesión de las velocidades angulares debe ser creciente.	(A) Para que la trayectoria tome formas definidas la sucesión de los radios debe converger a cero y la sucesión de las velocidades angulares debe diverger. (C) Para que la trayectoria tome una forma definida la sucesión de los radios debe ser decreciente y la sucesión de las velocidades angulares debe ser creciente.		(A) Para que la trayectoria tome formas definidas la sucesión de los radios debe converger a cero y la sucesión de las velocidades angulares debe diverger. (C) Para que la trayectoria tome una forma definida la sucesión de los radios debe ser decreciente y la sucesión de las velocidades angulares debe ser creciente.
Pregunta b	$x_n = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \operatorname{Cos}(\theta_k + w_k t)$ $y_n = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \operatorname{Sen}(\theta_k + w_k t)$ 	$X_1 = A_0 + A_1\cos(\theta_1 + \omega_1 t)$ $X_2 = (A_0 + A_1\cos(\theta_1+\omega_1 t) + A_2\cos(\theta_2+\omega_2 t)$ $\vdots$ $X_n = A_0 + A_1\cos(\theta_1+\omega_1 t) + A_2\cos(\theta_2+\omega_2 t) + \dots + A_n\cos(\theta_n+\omega_n t)$ $Y_1 = A_0 + A_1\operatorname{sen}(\theta_1+\omega_1 t)$ $Y_2 = A_0 + A_1\operatorname{sen}(\theta_1+\omega_1 t) + A_2\cos(\theta_2+\omega_2 t)$ $\vdots$ $Y_n = A_0 + A_1\operatorname{sen}(\theta_1+\omega_1 t) + A_2\cos(\theta_2+\omega_2 t)$ $(X_n, Y_n) = \left(A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k\cos(\theta_k+\omega_k t), A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k\operatorname{sen}(\theta_k+\omega_k t)\right)$	$(x_n, y_n) = (A_0, A_0) + \left(\sum A_k \cos(\theta_k + \omega_k t), \sum A_k \operatorname{sen}(\theta_k + \omega_k t)\right)$ $k = 1, 2, \dots, n.$	$(X_1, Y_1) = (A_0 + A_1\operatorname{Cos}(\theta_1+\omega_1 t), A_0 + A_1\operatorname{Sen}(\theta_1+\omega_1 t))$ $(X_2, Y_2) = (A_0 + A_1\operatorname{Cos}(\theta_1+\omega_1 t) + A_2\operatorname{Cos}(\theta_2+\omega_2 t),$ $A_0 + A_1\operatorname{Sen}(\theta_1+\omega_1 t) + A_2\operatorname{Sen}(\theta_2+\omega_2 t))$ $\vdots$ $(X_n, Y_n) = \left(A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k\operatorname{Cos}(\theta_k+\omega_k t), A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k\operatorname{Sen}(\theta_k+\omega_k t)\right)$	$(x_n, y_n) = \left(A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \operatorname{Cos}(\omega_k t + \theta_k), A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \operatorname{Sen}(\omega_k t + \theta_k)\right)$	[VE3]-5-|00:02:46| M3: ¿No sería la suma de los radios? O sea A_1, A_2, A_3= H3: =No "M3" ((se refiere a M3 por su nombre)). M3: [Ah no:::] H3: [Porque los radios] van a estar multiplicando M3: Sí, exacto. Ya, ya. H3: Entonces. M3 Bueno, pero para las (x)de x serían, [los radios] H3: [(Incomprensible, 2)] ahora sí que para este. Sería A_0 más A_1 ¿por qué? M3: Por el coseno del ángulo. H3: Para x, sí para x, sí para x, ¿para el otro? M3: Sería:::= H3: =Seno, ¿no? M3: Seno. H3: ¿Pero de qué ángulo? M3: Pues de θ_1. H3: ¿Más qué? M3: Má:::s, ay::: la coordenada. H3: Te falta algo. M3: Ah::: sí, [esa cosa]. H3: [¿Por qué?] M3: Más la velocidad angular. H3: ¿Por qué? M3: Por el tiempo.	[VG]-5-|01:14:33| P: Considere el modelo utilizando n circunferencias. Determine las coordenadas x_n, y_n del punto P en el tiempo t ((leyendo la pregunta)). ¿Qué escribieron por ahí? ((señalando al Equipo 1)) Entonces ya eso es como general, ¿verdad? ¿Quién lo quiere escribir? (18) ¿quién quiere escribir ese? ((H2 pasa a la pizarra)) H2: Serían estas ((señalando lo que escribió en la pizarra)).  P: Entonces, cuéntanos ¿de dónde sale? ¿qué significa cada cosa? H2: Esta ((señalando los A_0)) pues la, eje de las coordenadas donde está el planeta. Esta ((señalando los A_n)) pues ya después de que hicimos el análisis de realimentación pues vimos que prácticamente eran los radios de las circunferencias por su componente ((señalando la componente x)) que contribuya en X, el ángulo inicial ((señalando el θ_n del coseno)) de cada circunferencia más la velocidad angular ((señalando el ω_n)). P: Y en Y similar nada más que ahora es la contribución sen en y, ¿verdad? Ok ¿sí están de acuerdo? ((los estudiantes asienten con la cabeza)) [VG]-5-|01:16:45|- Se hace la corrección respecto de los subíndices elegidos respecto de la pregunta planteada, el consenso final queda como sigue: 
Intencionalidad	Se espera que no haya problema con el establecimiento de las relaciones, y que el argumento para dar su respuesta sea bajo lo construido en las tareas anteriores, así sucedió en la prueba piloto, concluyendo que las coordenadas del planeta son: $\begin{cases} x_n = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos[w_k t + \theta_k] \\ y_n = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \operatorname{sen}[w_k t + \theta_k] \end{cases}$						
¿Qué hace?	**Seriar** los términos de la suma.	**Seriar** los términos de la suma.	**Seriar** los términos de la suma.	**Seriar** los términos de la suma.	**Seriar** los términos de la suma.	**Seriar** los términos de la suma.	**Seriar** los términos de la suma.
¿Cómo hace?		Identificando la regularidad en los términos que se agregan.					Identificando la regularidad en los términos que se agregan.
Argumentos (A) y confrontaciones (C) presentados.	(A) Las fórmulas presentadas.	(A) Las fórmulas presentadas.	(A) Las fórmulas presentadas.	(A) Las fórmulas presentadas.	(A) Las fórmulas presentadas.	(A) La descripción de la fórmula presentada.	(A) Las fórmulas presentadas con su descripción.
Pregunta c	$w_k \to \infty$ al agregar más circunferencias, y los radios son menores, por lo que, las contribuciones A_k son cada vez menores.	Que de acuerdo a las condiciones obtenidas y la formula describen la trayectoria que forma el planeta conforme se agregan mas circunferencias.	Según las características del radio y de la velocidad angular, la formula anterior debería converger a una función definida.	Las condiciones de que los radios decrezcan y las velocidades angulares aumenten asegura la convergencia de las expresiones obtenidas a una función, misma que modela la forma final de la trayectoria. Se observa que los coeficientes a_k y b_k representan las condiciones iniciales del sistema cuando se tienen n circunferencias.	Las condiciones de la respuesta en a) dan una descripción de la fórmula en b), por ejemplo, al disminuir los radios, las coordenadas se desplazan cada vez en una valor más pequeño.	No hubo interacción al responder esta pregunta. [VE3]-5-|01:09:53|- H3 agrega a su respuesta el último párrafo después de la puesta en común "Se observa que los coeficientes a_k y b_k representan las condiciones iniciales del sistema cuando se tienen n circunferencias"	[VG]-5-|01:17:34| P: ¿Cómo se relaciona su respuesta a la pregunta a con la fórmula obtenida en la pregunta anterior? ((leyendo la pregunta)). ¿Qué escribieron por ahí? ((señalando al Equipo 1)) Entonces ya eso es como general, ¿verdad? ¿Quién lo quiere escribir? (18) ¿quién quiere escribir ese? ((H2 pasa a la pizarra)) H2: ¿Cómo se relacionan? Los A_k tendrían que ser, que correspondan al radio, tendrían que ser decrecientes y a parte converger a 0. P: Converger a 0, ajá. H2: Y el ωt, ese tendría que diverger y nosotros también pusimos que ese tenía que ser creciente.

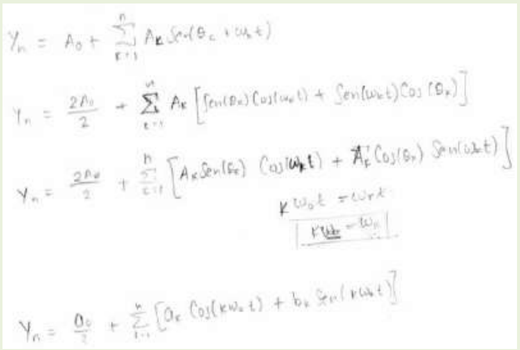
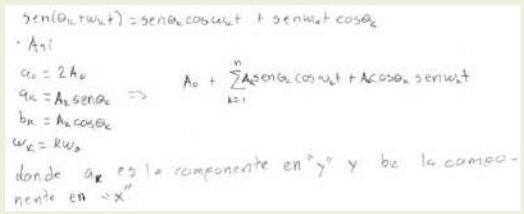
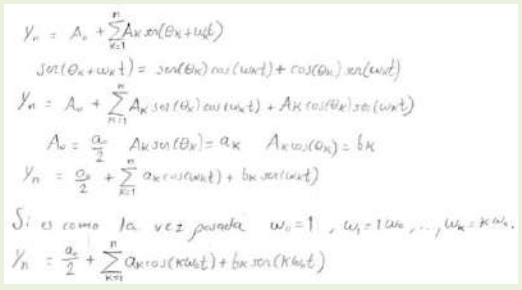
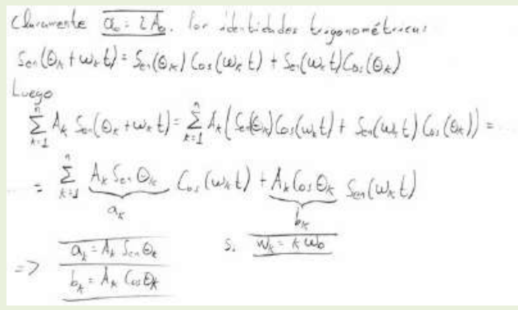
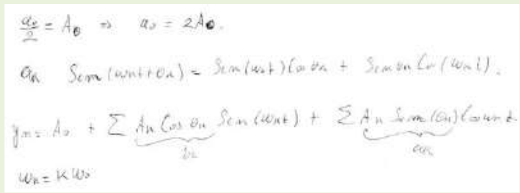
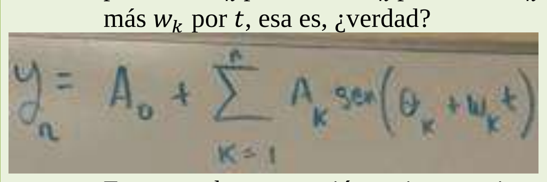
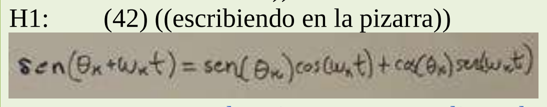
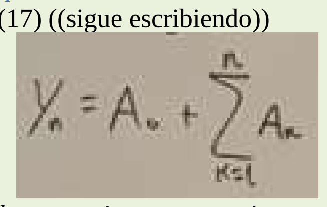
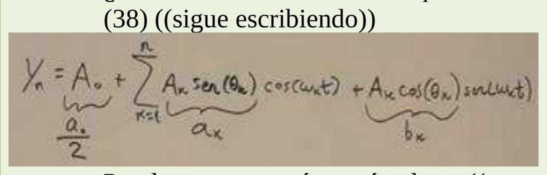
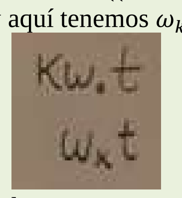
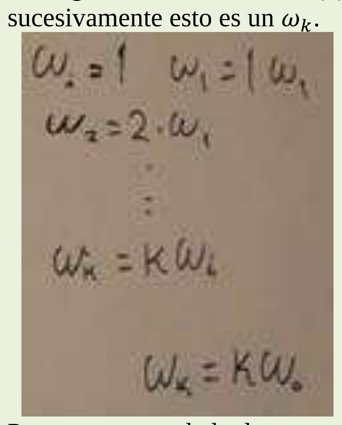
Parte I. **Generando el modelo**

Intención: Se pretende con esta generalización que el estudiante identifique las condiciones para que el modelo sea estable.

Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
							P: ¿El $w_k t$? H2: El w, el ω_k. P: ¿Ese tiene que diverger? H2: Sí. P: ¿Y el θ_k? H2: Pues ((gesto de negación con la cabeza)) P: ¿Qué pasa con ese? M2: (incomprensible, 4) H3: Yo siento que a medida que vamos aumentando el número de circunferencias, como se va haciendo más pequeño el radio, pues igual no parece muy importante dónde comencemos, por que eso es lo que representa ese ángulo, entonces como es más pequeño básicamente no se nota. P: Pero ya para muchos, ¿verdad? H3: ¡Ajá! P: ((Hablándole a M2)) No necesariamente disminuye por que si recuerdas (x)la Tarea 3, en el primer caso el ángulo era $\arctan\left(\frac{2}{\pi}\right)$ y en (x)el, para la siguiente circunferencia era 0, y para la siguiente era $\arctan\left(\frac{3}{\pi}\right)$, y para la siguiente 0, entonces iba aumentando y 0, aumentando y 0, entonces no necesariamente es decreciente. No, es un constante, ¿verdad? para cada circunferencia es un constante, no depende del tiempo, ¿sí? ((los estudiantes asienten con la cabeza))
Pregunta e	a_k, b_k también tienden a cero kw_0 también tiende a infinito	La formula describe una serie de Fourier la cual se aproxima a una función periódica, que dependera de nuestras condiciones para aproximarse a la forma de la trayectoria.	Es una nueva forma de expresar la fórmula de b). Permite ver más fácilmente la condición de convergencia ya que a_k, b_k tienden a 0.	Observamos que la expresión obtenida tiene la forma de una serie de Fourier, confirmando que nos estamos aproximando a una función capaz de describir la trayectoria del planeta conforme se agregan más circunferencias, por otra parte, en la expresión obtenida siguen siendo necesarias las condiciones presentadas en a) para poder asegurar la convergencia de la serie.	La ecuación anterior describe la convergencia y forma definida de la trayectoria al disminuir los radios de las circunferencias que se agregan cada vez más, tal como se trata en el inciso c)	[VE3]-5-|00:16:08| H3: ¿Qué opinas de este? M3: ¿Cómo se relaciona tu respuesta a la pregunta c con esta nueva fórmula? H3: ¿Qué le ves a la de aquí? M3: ☺No manches☺ H3: ¿Cómo se relacionan eh "M3"? ((se refiere a M3 por su nombre)) M3: Se supone que esto que está acá. (Incomprensible, 4) Es nada más de verificarlo ¿no? H3: ¡Ujú! M3: Te acuerdas que había partes en donde iba más rápido la trayectoria y esto es lo de movimiento, ¿no? Pues eso describe la forma de la trayectoria. [VE3]-5-|00:18:54| M3: Como que modela (x)la rapidez con la que (incomprensible, 1, ¿se mueve sobre la trayectoria?), por así decirlo. Por que ya ves que (incomprensible, 2) en donde va más rápido era donde se tenían más puntos que creíamos discontinuo, ¿no? H3: Eso estoy *wachando*. O sea, tu dices que estas cosas te determinan qué tan rápido converge. M3: ¡Ujú! H3: ¿Por qué? M3: ¿Eh? H3: ¿Por qué? M3: Ahí si no sabría decirte cuate. (15) Porque::: modela:::, porque >depende de los radios y la velocidad angular<. [VE3]-5-|00:20:12| H3: ¿Qué respondiste en c, tú? M3: Que, ah:::, que describe la trayectoria que forma el planeta conforme se agregan más circunferencias. H3: Mmm ¿qué puse yo? Que los radios= M3: =¿Describe qué tan rápido converge esta trayectoria o (incomprensible, 1)? H3: Sí converge. M3: Pues ya. H3: Es que no sé, creo que por ahí va la cosa. (15) "M3" ((se refiere a M3 por su nombre)) también tiene que ver aquí con la, de las condiciones, que tiene que cumplir esto para que esta trayectoria se estabilice. M3: Ajá. H3: Y eso de que se estabilice tiene que ver con estas cosas, que tiene que ver las condiciones para que se estabilice con esto. [VE3]-5-|00:22:51| M3: Yo siento que esto, esta describe la manera en la que va a converger la trayectoria, o sea entre más le agregas, o sea primero no va tomando forma, pero ya luego te vas acercando y se empieza a ver la forma de Fourier, que en este caso (incomprensible, 1). H3: Entonces en general sí, pero (incomprensible, 1). M3: Por que se supone que se hace periódica por el hecho de que, pues en un mes uno sustituye los senos no, sin mover la trayectoria en uno, recorriendo 2π, por eso dice entonces ahí viene el otro periodo, entonces conforme vas agregándole se va acercando a la trayectoria, que se podría retomar como (incomprensible, 1) porque ya los radios y las velocidades ya, o sea, el radio ya no contribuye tanto en distancia, entonces nada más se ve como un puntito oscilando. H3: Un ε. M3: Un ε de distancia.	[VG]-5-|01:28:56| P: ¿Cómo se relaciona tu respuesta a la pregunta c con? ((leyendo la pregunta)) O sea, en la pregunta c, qué es lo que habíamos dicho, que este::: esto debe tender a cero, ¿verdad? ((señalando el A_k)) Y esto debe tener a infinito ((señalando el w_k)), y esto es una constante ((señalando el θ_k)), entonces cómo se relaciona eso, con ahora esto otro ((señalando la fórmula construida en la pregunta d)). H1: Que las contribuciones (x)que da cada término siguiente se van disminuyendo, por que se ve que los, por ejemplo, están multiplicados por A_k y esos tienen a cero, o sea que para una contribución de un k cada vez mayor eso se va, va disminuyendo. P: ¿Sí entienden la idea? H1: Eso sería una condición de convergencia. P: Parece verdad una condición de convergencia. Entonces ¿qué le debe pasar a este a_k, este minúscula, y al b_k, minúscula? M2: Tender a cero. P: Deberían verdad, se ve de acá, ¿cierto?

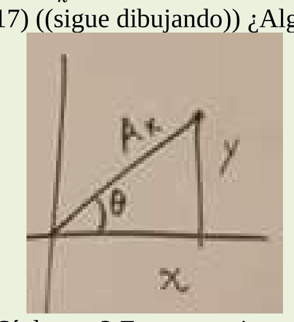
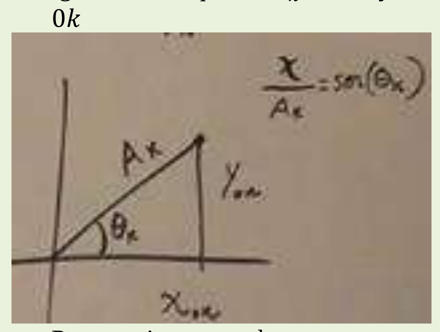
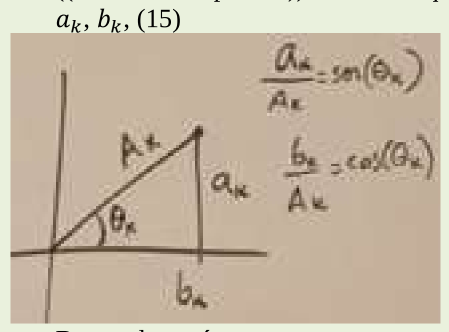
Parte I. Generando el modelo

Intención: Se pretende con esta generalización que el estudiante identifique las condiciones para que el modelo sea estable.

Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
Intencionalidad	Se busca que se interprete el modelo matemático en el fenómeno físico.						
¿Qué hace?	Establecer las condiciones necesarias para la convergencia de la serie.	Interpretar el modelo en el fenómeno.	Establecer las condiciones necesarias para la convergencia de la serie.	Establecer las condiciones necesarias para la convergencia de la serie. Interpretar el modelo en el fenómeno.	Establecer las condiciones necesarias para la convergencia de la serie. Interpretar el modelo en el fenómeno.	Establecer las condiciones necesarias para la convergencia de la serie. Interpretar el modelo en el fenómeno.	Establecer las condiciones necesarias para la convergencia de la serie.
¿Cómo hace?		Asignando significados a los resultados obtenidos en el modelo.		Asignando significados a los resultados obtenidos en el modelo.	Asignando significados a los resultados obtenidos en el modelo.	Extendiendo los resultados de las tareas anteriores. Asignando significados a los resultados obtenidos en el modelo.	Extendiendo los resultados de las tareas anteriores.
Argumentos (A) y confrontaciones (C) presentados.	(A) Para que la trayectoria tome una forma definida la sucesión de los radios debe converger a cero y la sucesión de las velocidades angulares debe diverger. (A) Para que la trayectoria tome una forma definida las sucesiones a_k y b_k deben tender a cero, kw_0 también tiende a infinito.	(A) Para que la trayectoria tome una forma definida se deben cumplir ciertas condiciones.	(A) Para que la trayectoria tome una forma definida se deben cumplir ciertas condiciones sobre los radios y la velocidad angular. (A) Para que la trayectoria tome una forma definida las sucesiones a_k y b_k deben tender a cero.	(C) Para que la trayectoria tome una forma definida la sucesión de los radios debe decrecer y la sucesión de las velocidades angulares debe crecer.	(A) Para que la trayectoria tome una forma definida la sucesión de los radios debe ir disminuyendo.	(A) Para que la trayectoria tome una forma definida la sucesión de los radios debe converger a cero y la sucesión de las velocidades angulares debe diverger.	(A) Para que la trayectoria tome una forma definida la sucesión de los radios debe converger a cero y la sucesión de las velocidades angulares debe diverger. (A) Para que la trayectoria tome una forma definida las sucesiones a_k y b_k deben tender a cero.
Pregunta d	$a_0 = 2A_0$ $a_k = A_k\,\mathrm{Sen}(\theta_k)$ $b_k = A_k\,\mathrm{Cos}(\theta_k)$ $\omega_k = k\omega_0$ 		$a_0 = 2A_0, \omega_k = k\omega_0, a_k = A_k\,\mathrm{sen}(\theta_k), b_k = A_k\cos(\theta_k)$ 		Desarrollando al seno de la suma de dos ángulos, se obtiene que $a_0 = 2A_0$ $a_k = A_k\,\mathrm{Sen}(\theta_k)$ $b_k = A_k\,\mathrm{Cos}(\theta_k)$ $\omega_k = k\omega_0$ 	[VE3]-5-|00:11:29| M3: ¿Qué vamos a hacer? (13) H3: Hay que desarrollar esta suma. M3: Ah, sí es cierto.	[VG]-5-|01:20:25| P: Note nuevamente que y_n representa la n-ésima suma parcial de una serie trigonométrica. Utilice identidades trigonométricas para reescribirla ((leyendo la pregunta)) Voy a, voy a hacerles espacio (5) ((borrando la pizarra)) Entonces ya estamos hablando de y_n, entonces sería ((escribiendo en la pizarra)) A_0 más la serie desde $k = 1$ hasta n, dijimos de A_n por el, de A_k perdón, de A_k por sen de θ_k más w_k por t, esa es, ¿verdad?  Entonces bueno ¿quién quiere venir a reescribir con todos los pasitos eso ((la igualdad de la pizarra)) en esta forma ((la que pide la pregunta))? Ya lo habíamos hecho en la Tarea 3, ¿verdad? Entonces ahora sí como en forma general ((H1 levanta la mano)) Pase. H1: (42) ((escribiendo en la pizarra))  Este es el primer paso, aplicar la identidad de la suma de ángulos, tendría que::: (17) ((sigue escribiendo))  k por, quiere que empiece por coseno, ¿no? Entonces sería esto de aquí (38) ((sigue escribiendo))  Por lo pronto aquí estaría el a_o ((entre dos le indican los compañeros)) ah sí es cierto, a_o medios, este sería el a_k, por que depende de k y también el b_k. Solo que, un problemita es que ahí nos lo piden de la forma ((escribe en la pizarra)) $k\omega_0 t$, y aquí tenemos $\omega_k t$.  Y aquí lo que pensamos hace es, eh recordamos como fue en la forma anterior, que había un omega inicial o no se como le llamaban, que valía 1 ((escribe en la pizarra)) y el siguiente valía, voy a poner inicial, y por ejemplo el siguiente valía así, (8) y así sucesivamente esto es un ω_k.  Pero esto es, es de la, lo que recordamos de la actividad anterior, por que las condiciones a las que llegamos es que simplemente eh::: estas velocidades tienen que ir aumentando sucesivamente y tendiendo a infinito, pero para ponerlas de esta forma, creo que esto fue la que se nos ocurrió, de la vez pasada que las velocidades angulares crecían con k. [VG]-5-|01:25:55| P: Y entonces, ¿ese $\frac{a_0}{2}$ qué representaría en el fenómeno? H1: Condición, posición inicial. P: La posición inicial ¿y el a_k y el b_k? H1: El a_k son, ¿minúsculas verdad? P: Ajá, minúsculas. H1: Pues son los coeficientes de esta suma, ¿no? P: ¿Pero en el fenómeno?

Parte I. Generando el modelo

Intención: Se pretende con esta generalización que el estudiante identifique las condiciones para que el modelo sea estable.

Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
							H1: Ah::: en el fenómeno. P: ¿En el sistema? H1: Bueno ((señalando el coeficiente $A_k \operatorname{sen}(\theta_k)$)) seno del ángulo inicial k-ésimo y radio k-ésimo, ¿no? P: Pero que representan enton-, eso representan A_k y θ_k, pero ¿todo el a_k qué representaría? H1: Posición inicial (x)en x, radio (x)por, bueno sí de las ecuaciones polares, ¿no? r componente en x, o sea es posición inicial en x. P: ¿(x)Sí o ven? Si haces un dibujito del caso. H1: (16) ((dibujando en la pizarra) P: ¿Ahí θ_k verdad sería? H1: (17) ((sigue dibujando)) ¿Algo así?  P: ¿Sí, lo ven? Entones quien sería, puedes poner ahí en el dibujo de una vez quién es a_k más bien, quién es a_k y quién es b_k. H1: ((escribiendo en la pizarra)) x entre A_k es igual a sen, aquí era θ_k, les voy a llamar $0k$  P: Pero ya tienen nombre. H1: Ah no, (x)pero estas de aquí ((señalando a x_{0k} y y_{0k})) M2: Ya ese es el a_k. H1: Ah, sí es cierto::: P: Es el a_k, ¿no? H1: Ya tiene nombre, sí, sí, sí, sí. P: Ya tienen nombre. H1: ((Escribe en la pizarra)) Entonces aquí va a_k, b_k, (15)  Bueno de aquí se ve.
Intencionalidad	Se establezcan las condiciones para que el modelo sea equivalente con la serie trigonométrica de Fourier.						
¿Qué hace?	Reescribir las fórmulas construidas.	Reescribir las fórmulas construidas.	Reescribir las fórmulas construidas.	Reescribir las fórmulas construidas.	Reescribir las fórmulas construidas.	Reescribir las fórmulas construidas.	Reescribir las fórmulas construidas.
¿Cómo hace?	Utilizando la identidad trigonométrica para $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$.	Utilizando la identidad trigonométrica para $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$.	Utilizando la identidad trigonométrica para $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$.	Utilizando la identidad trigonométrica para $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$.	Utilizando la identidad trigonométrica para $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$.	Desarrollando la suma.	Utilizando la identidad trigonométrica para $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$.
Argumentos (A) y confrontaciones (C) presentados.	(A) $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$.	(A) $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$.	(A) $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$.	(A) $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$.	(A) $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$.		(A) $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$.

Parte II. Otra forma de interpretar w_0

Intención: Encontrar condiciones para que el modelo sea equivalente a la STF.

Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
Pregunta a	$t = \frac{d}{v} = \frac{2\pi}{\omega_0}$	$v = \frac{d}{t} \Rightarrow t = \frac{d}{v} = \frac{2\pi \cancel{A_1}}{\cancel{A_1}\omega_0}$ $t = \frac{2\pi}{\omega_0}$	$t = \frac{distancia}{velocidad} = \frac{2\pi}{\omega_0}$	En efecto, $v = \frac{x}{t}$, pero $v = A_1\omega_0$ y $x = \pi A_1 \Rightarrow$ $A_1\omega_0 = \frac{2\pi A_1}{t} \Rightarrow t = \frac{2\pi}{\omega_0}$	$t = \frac{2\pi}{\omega_0}$ $\omega_0 = \frac{2\pi}{t} \Rightarrow t = \frac{2\pi}{\omega_0}$	[VE3]-5-|01:11:02| M3: Pues no sería el su- H3: Ah sí (incomprensible, 1) M3: El ω_0= H3: =Pues sabemos la distancia que da ¿no? Es el primer radio. M3: >La distancia<, pero es del punto P, o sea la distancia que recorre es el perímetro de un círculo. H3: ¡A ver! Considere el movimiento del punto sobre, es decir aquella donde el punto se mueve a una= M3: =Y es π por radio, ¿no? Y sabemos los radios. H3: Y por el π, esto sería π por A_1. M3: Sí, sabemos los radios. H3: Sería la distancia. M3: ¡Ajá! H3: Ya. M3: ¿El tiempo? H3: En que recorre aquí ((silbido)) M3: Y la velocidad también la conocemos. H3: (Incomprensible, 2, ¿por qué la conocemos?) M3: Por los::: angular. H3: La velocidad angular no se define también en términos de= M3: =De la velocidad por el radio. H3: ¿La velocidad por el radio? M3: Sí, ¿no? H3: (Incomprensible, 1, ¿por) qué la velocidad por el radio? M3: Es que eso me confundió. H3: ¿Sería la velocidad entre el radio, no? M3: No era, ↓hay que buscarlo por aquí↓ A ver. H3: Si pones velocidad por distancia, o velocidad por radio, te queda metros cuadrados sobre segundos.	[VG]-5-|02:17:07| P: Determine el tiempo t que tarda el punto P en dar un giro completo ((leyendo la pregunta)) Entonces ¿(x)quién quiere hacer esa? ¿o me dicen? H1: La distancia sería la circunferencia, $2\pi r$. P: 2π. H1: Por el radio= P: =Entonces la distancia sería la circunferencia. H1: Sí ((los estudiantes asienten con la cabeza)) P: Entonces 2π. H1: Y el radio de A_1. P: Y el radio de A_1, ok. H1: Y el tiempo sería::: M2: Entre la velocidad. H1: Ah velocidad, tenemos distancia entre velocidad, y la velocidad es ω_0. P: Entre tiempo, ¿verdad? Sería ahí. H1: Esa es velocidad angular, ese es ω_0. M2: No, es que ahí nos piden el tiempo. H1: Ajá, ese es igual ω_0, solo que ahí nos están pidiendo el tiempo, y luego ahí despejaríamos.

Parte II. **Otra forma de interpretar w_0**
Intención: Encontrar condiciones para que el modelo sea equivalente a la STF.

Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
						M3: Ahí no dice velocidad angular. (13) Ah no, sí, la velocidad es ω (x)por radio, ¿no? Para que ω sea velocidad entre ese. [VE3]-5-|01:13:31| M3: Sí ¿ya ves? Es ω por el radio, bueno estoy haciendo vectorialmente. Sin wache ¿ya ves? H3: A mí algo me decía que ω era ángulo inicial sobre el radio.	
Pregunta b	$\omega_0 = \frac{2\pi}{p}$	$p = \frac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{p}$	$\omega_0 = \frac{2\pi}{p}$	$\omega_0 = \frac{2\pi}{p}$	$\omega_0 = \frac{2\pi}{p}$	No hubo interacción al responder esta pregunta. [VE3]-5-|02:01:50|- H3 agrega a su respuesta el número 2 en el numerador.	[VG]-5-|02:18:35| P: Si llamamos p al tiempo que tarda el punto P para dar exactamente una vuelta. ¿Cuál es el valor de ω_0 en términos de p? ((leyendo la pregunta)) H1: Pues habría que, es como un cambio de variable, nos dice que t lo cambiemos por p. Yo me imagino que es el periodo. P: Puede ser. Entonces para la pregunta b nada más. H1: Es la primera cuestión que se me ocurrió, el periodo. P: Ajá. H1: t igual a p. [VG]-5-|02:19:30| P: Hay un detalle ahí que no han notado. H6: El A_1. P: Ajá ¿por qué el A_1? H6: Por que:::, bueno yo con lo, con lo que es el seno y coseno contiene, lo que es el argumento de seno y coseno tiene que ser de dimensión. H9: Este::: viendo las tareas tiene que ser más bien la rapidez, ¿no? (x)Del punto. P: O sea, es algo que viene desde la anterior, lo estoy dejando aquí, pero (2) Velocidad igual distancia en tiempo, entonces la velocidad es distancia sobre unidad de tiempo, ¿cierto? ((los estudiantes asienten con la cabeza)) Sí, ¿verdad? Se ha dicho que es radianes por unidad de tiempo, entonces la distancia es angular, y esa distancia que está ahí es trayectoria, ¿cierto? ((los estudiantes asienten con la cabeza)) Sí, ahí sería, más bien, metros o unidad de medida lineal, sobre unidad de tiempo. Entonces este A_1= H1: =No va. P: ¿Verdad que no va? ((los estudiantes asienten con al cabeza)) por que esto me está hablando de distancia y esta velocidad es ángulo por unidad de tiempo, entonces sería ángulo por unidad de tiempo ¿estamos claros?
Pregunta c	$y_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left[a_k \operatorname{Cos}\left(k\frac{2\pi}{p}t\right) + b_k \operatorname{Sen}\left(k\frac{2\pi}{p}t\right)\right]$	$y_n = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \operatorname{sen}\theta_k \cos\left(\frac{k\pi}{p}t\right) + A_k \cos\theta_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{p}t\right)$	$y_n = \frac{a_0}{2} + \sum a_k \cos\left(k\frac{2\pi}{p}t\right) + b_k \operatorname{Sen}\left(k\frac{2\pi}{p}t\right)$	$Y_n = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \operatorname{Sen}(\Theta_k) \operatorname{Cos}\left(k\frac{2\pi}{p}t\right) + A_k \operatorname{Cos}(\Theta_k) \operatorname{Sen}\left(k\frac{2\pi}{p}t\right)$	$y_n = A_0 + \sum\left[A_k \operatorname{Sen}(\theta_k) \operatorname{Cos}\left(k\frac{2\pi}{p}t\right) + A_k \operatorname{Cos}(\theta_k) \operatorname{Sen}\left(k\frac{2\pi}{p}t\right)\right]$	[VE3]-5-|01:25:04| M3: Entonces k veces π sobre p por t. Ah no, pero ese ya es un tiempo específico, ¿verdad? Ah no, sí se tiene que tomar el t, ¿verdad? Por que este es el tiempo específico para los ω_0. Sí, ¿no? H3: Pero aquí esto toma (incomprensible, 1). M3: Sí, sí, sí, por eso tenía que ser, entonces si es $k\pi$ veces sobre p por t.	[VG]-5-|02:21:27| P: Reescribe la fórmula que obtuviste en la pregunta d de la Parte I, ahí la dejé arriba verdad, utilizando este nuevo valor de ω_0. ((leyendo la pregunta)) Entonces me imagino que nada más cambiaron, ¿verdad? ((asienten con la cabeza))
Pregunta d	Constante para todo t y k. P es el periodo de la trayectoria, determina cuántas vueltas darán los puntos de las siguientes circunferencias.	Como el periodo temporal de la grafica de la funcion limite ya que cada que pasa p, el planeta P da una vuelta completa a la Tierra.	Constante porque el que cuenta es el periodo de la primera circunferencia. Ya que los demás dan cierta cantidad de vueltas por cada vuelta de la primera circunferencia. $P_1 = \frac{2\pi A_1}{\omega_0}$ $P_k = \frac{2\pi A_k}{k\omega_0} \xrightarrow[A_k \to 0]{k\to\infty} 0$ Periodo del K-ésimo ciclo. $\text{tiempo} = \sum_{k=1}^{n} P_k$ No es cierto.	Como el periodo temporal de la gráfica de la función límite, esto, pues cada que transcurre el tiempo p el planeta completa una vuelta, lo que se ve reflejado en el periodo temporal del resto de las circunferencias.	Como el periodo de la función	[VE3]-5-|01:30:48| H3: Sería el periodo, ¿no? M3: Ah, ok. H3: Sería el periodo (incomprensible, 1). M3: ¡Ujú! (9) Ah::: pues sí:::, porque sería (3) Sí, porque la velocidad también la puedes describir como 2π por el periodo, ¿no? (4) La velocidad la puedes ver 2π por t, o 2π (incomprensible, 1). H3: ¿Dónde está ese 2π? Tendría que wacharlo. M3: Ah no, me refería a que (4) es manera de entendición. H3: Entonces estás de acuerdo que sería como una especie de periodo. [VE3]-5-|01:33:44| H3: Sabes qué, cada vez que pasa el tiempo p va a salir ((realiza un silbido explicando)), sería el periodo, ¿no? M3: Sí. [VE3]-5-|02:14:18|- H3 agrega a su respuesta después de la puesta en común "lo que se ve reflejado en el periodo temporal del resto de las circunferencias"	[VG]-5-|02:22:26| P: Dado que el valor p es el tiempo que tarda el planeta P en completar una vuelta alrededor de la Tierra T. ¿Cómo se observaría ese valor en la gráfica de la función límite? ((leyendo la pregunta)) H6: Su periodo. P: ¿Su periodo? H6: Ajá, como se va repitiendo la gráfica en la función límite. P: ¿Seguros? ¿totalmente? H6: ☺No totalmente☺ P: Por que aquí habla, digamos que p es completar una vuelta, pero::: H6: Para una [circunferencia] P: [Para la primera] circunferencia. Ese mismo p es si tengo dos, tres o cuatro. H6: No, eso no estaba viendo. (9) P: ¿Cómo lo podrían analizar? (4) Nos podemos devolver a los casos particulares y ver. Veámoslo en la Tarea 1 que no tiene radios ni nada a ver qué. (16) ((buscando el applet de la Tarea 1 – Parte 2 en la computadora)) Aquí está el, entonces digamos que, en este caso, p sería lo que tarda ese planeta Q en dar esa vuelta, ¿cierto? La pregunta es, ¿si le agrego más circunferencias tarda eso mismo? ¿verdad? Esa es la pregunta. Pongámosle dos a ver. (6) ¿Qué dicen? ¿Sí se tarda lo mismo? En completar la trayectoria, completa ((risas)). Sí se nota (incomprensible, 2). Sí ¿cómo lo notan? H4: Nos fijamos en el centro de la circunferencia más pequeña. P: Ajá. H4: Y cuando esta se completa, eh::: también completa el punto Q. P: También completa el punto Q la trayectoria ¿cierto? ((los estudiantes asienten con la cabeza)) Y le podemos agregar más, pues agreguemosle, yo creo que aquí podemos agre- pongámosle unas 9, 10. Está un poquito difícil ver

Parte II. **Otra forma de interpretar w_0**
Intención: Encontrar condiciones para que el modelo sea equivalente a la STF.

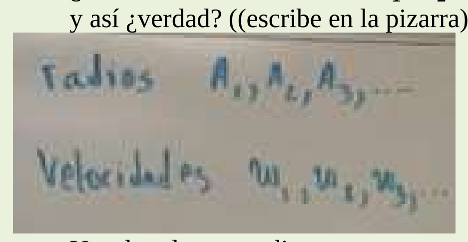
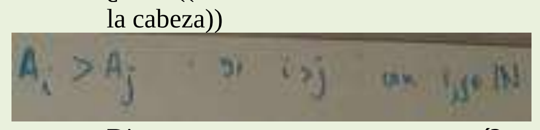
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
							¿verdad? Pero estamos comparando este ¿verdad? El de la primera con la trayectoria ¿cierto? H4: Como que todos (x)van a volver, todos se alinean en el punto de partida. [VG]-5-|02:26:11|- El profesor termina explicando algebraicamente cómo se ve en la fórmula que el periodo efectivamente es p.
Intencionalidad	Se pretende que el estudiante reconozca a p como el periodo de la función límite cuando se considera la variable t un número real. Esto es importante para la Tarea #6, pues se espera que el estudiante realice su estudio en un intervalo de tamaño p, el cual es representativo del comportamiento general de la serie.						
¿Qué hace?	Identificar los parámetros en una noción física conocida. Sustituir los valores dados en las relaciones construidas. Reconocer la periodicidad en el fenómeno.	Identificar los parámetros en una noción física conocida. Sustituir los valores dados en las relaciones construidas. Reconocer la periodicidad en el fenómeno.	Identificar los parámetros en una noción física conocida. Sustituir los valores dados en las relaciones construidas. Reconocer la periodicidad en el fenómeno.	Identificar los parámetros en una noción física conocida. Sustituir los valores dados en las relaciones construidas. Reconocer la periodicidad en el fenómeno.	Identificar los parámetros en una noción física conocida. Sustituir los valores dados en las relaciones construidas. Reconocer la periodicidad en el fenómeno.	Identificar los parámetros en una noción física conocida. Sustituir los valores dados en las relaciones construidas. Reconocer la periodicidad en el fenómeno.	Identificar los parámetros en una noción física conocida. Sustituir los valores dados en las relaciones construidas. Reconocer la periodicidad en el fenómeno.
¿Cómo hace?	Utilizando la relación física, velocidad es igual a distancia entre tiempo. Cambiando los valores dados en las relaciones construidas. Identificando la repetición regular del comportamiento.	Utilizando la relación física, velocidad es igual a distancia entre tiempo. Cambiando los valores dados en las relaciones construidas. Identificando la repetición regular del comportamiento.	Utilizando la relación física, velocidad es igual a distancia entre tiempo. Cambiando los valores dados en las relaciones construidas. Identificando la repetición regular del comportamiento.	Utilizando la relación física, velocidad es igual a distancia entre tiempo. Cambiando los valores dados en las relaciones construidas. Identificando la repetición regular del comportamiento.	Utilizando la relación física, velocidad es igual a distancia entre tiempo. Cambiando los valores dados en las relaciones construidas. Identificando la repetición regular del comportamiento.	Utilizando la relación física, velocidad es igual a distancia entre tiempo. Cambiando los valores dados en las relaciones construidas. Identificando la repetición regular del comportamiento.	Utilizando la relación física, velocidad es igual a distancia entre tiempo. Cambiando los valores dados en las relaciones construidas. Identificando la repetición regular del comportamiento.
Argumentos (A) y confrontaciones (C) presentados.	(A) El tiempo es igual a la distancia (angular) recorrida dividida por la velocidad. (A) Dada la relación física, velocidad es igual a distancia entre tiempo, se sustituyen los valores dados. (A) p es el periodo de la trayectoria.	(A) El tiempo es igual a la distancia (sobre la circunferencia) recorrida dividida por la velocidad (sobre la circunferencia). (A) Dada la relación física, velocidad es igual a distancia entre tiempo, se sustituyen los valores dados. (A) p es el periodo temporal de la gráfica.	(A) El tiempo es igual a la distancia (angular) recorrida dividida por la velocidad. (A) Dada la relación física, velocidad es igual a distancia entre tiempo, se sustituyen los valores dados. (A) p es el periodo de la primera circunferencia.	(A) El tiempo es igual a la distancia (sobre la circunferencia) recorrida dividida por la velocidad (sobre la circunferencia). (A) Dada la relación física, velocidad es igual a distancia entre tiempo, se sustituyen los valores dados. (A) p es el periodo temporal de la gráfica.	(A) El tiempo es igual a la distancia (angular) recorrida dividida por la velocidad. (A) Dada la relación física, velocidad es igual a distancia entre tiempo, se sustituyen los valores dados. (A) p es el periodo de la función.	(C) Considera la distancia recorrida de P como el perímetro de la circunferencia, al relacionarlo que lo velocidad que es dada en radianes por unidad de tiempo. (A) El tiempo es igual a la distancia (angular) recorrida dividida por la velocidad. (A) Dada la relación física, velocidad es igual a distancia entre tiempo, se sustituyen los valores dados. (A) p es el periodo de tiempo en que la trayectoria se repite.	(C) Considera la distancia recorrida de P como el perímetro de la circunferencia, al relacionarlo que lo velocidad que es dada en radianes por unidad de tiempo. (A) El tiempo es igual a la distancia (angular) recorrida dividida por la velocidad. (A) Dada la relación física, velocidad es igual a distancia entre tiempo, se sustituyen los valores dados. (A) p es el periodo de tiempo en que la trayectoria se repite.

9.7.6 Tarea #5. Etapa 2: Identificación de los invariantes de las acciones

TAREA #5

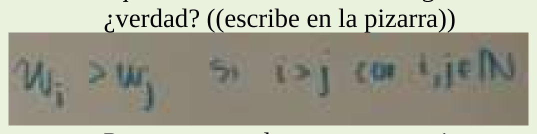
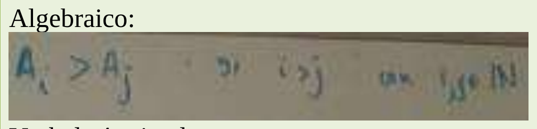
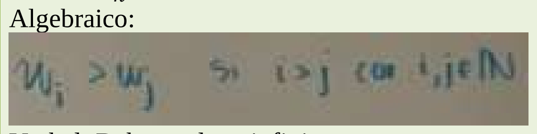
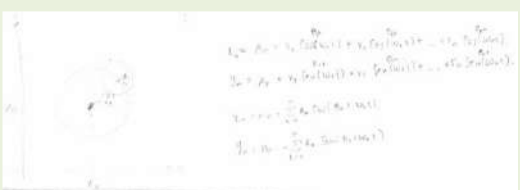
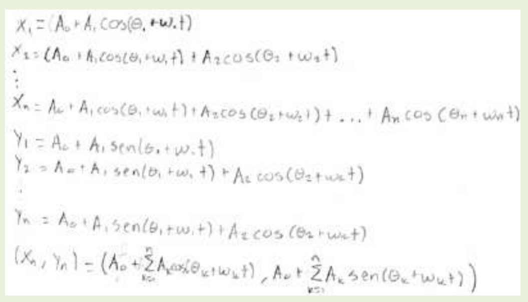
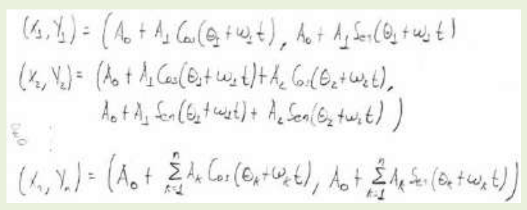
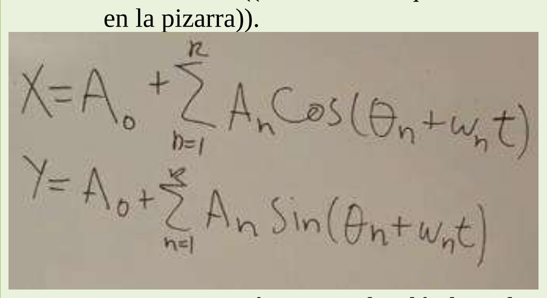
Objetivo de la Tarea: Significar los elementos presentes en la serie trigonométrica que emerge al matematizar el modelo del movimiento planetario de los alejandrinos en forma general.

Parte I. **Generando el modelo**
Intención: Se pretende con esta generalización que el estudiante identifique las condiciones para que el modelo sea estable.

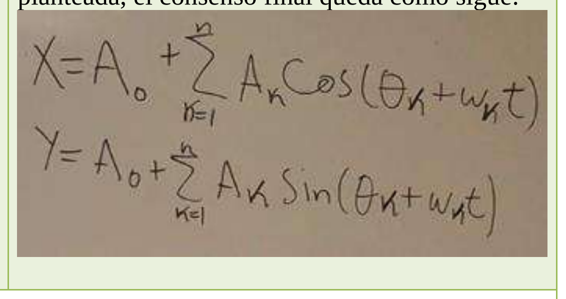
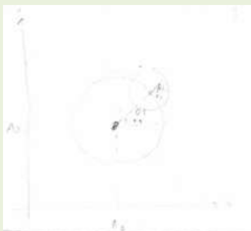
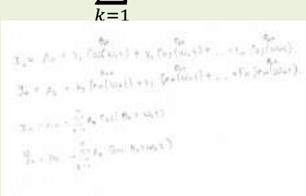
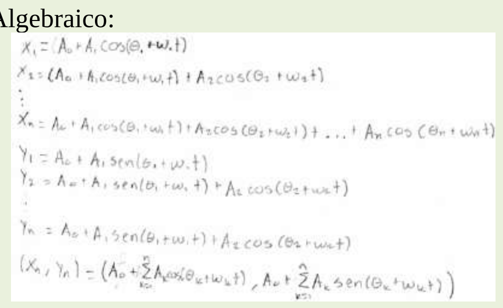
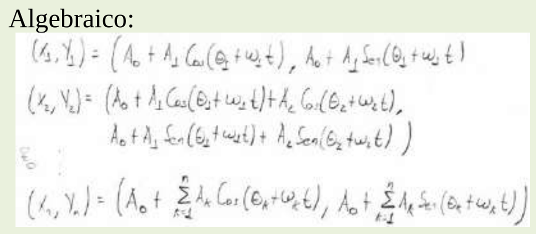
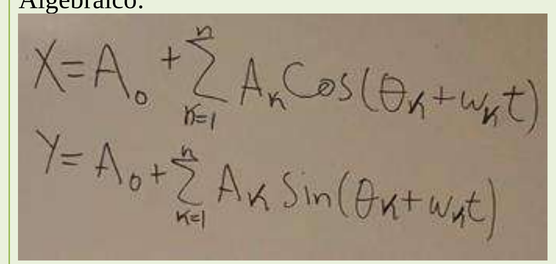
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
Pregunta a	$A_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ Las velocidades aumentan al agregar más circunferencias y $w_k \to \infty$ cuando k→ ∞ Así se formarán trayectorias con formas definidas al agregar más circunferencias.	Debe cumplirse que los radios de las circunferencias vayan disminuyendo y las velocidad angulares vayan aumentado, ademas que las series de las componentes sean convergentes. Donde los radios tienden a cero y las velocidades angulares a infinito.	Se debe cumplir $r_{k+1} y < canvasclass =$ para que la trayectoria no se desborde. Y $\omega_{k+1} > \omega_k$ y [math]\omega_k\longrightarrow\infty" > para que se complete el recorrido en un tiempo finito.	Debe cumplirse que al ir agregando más y más circunferencias, estas decrezcan en radio y el punto o planeta P aumente su velocidad angular, para completar un giro cada vez más rápido, observándose como si el planeta ya no girara en torno al centro de cada nueva circunferencia. Con los radios tendiendo a cero y las velocidades angulares tendiendo a infinito.	Los radios de las circunferencias agregadas deben de ser menores con respecto al anterior, pero es necesario que $A_n \to 0$. A su vez, la velocidad angular del punto P en cada nueva circunferencia debe de aumentar (esto como consecuencia de la disminución de las circunferencias) y es necesario que $w_n \to \infty$	No hubo interacción al responder esta pregunta. [VE3]-5-|00:56:50|- H3 agrega a su respuesta el último párrafo después de la puesta en común "Con los radios tendiendo a cero y las velocidades angulares tendiendo a infinito" [VE3]-5-|01:01:03|- M3 agrega a su respuesta el último párrafo después de la puesta en común. "Donde los radios tienden a cero y las velocidades angulares a infinito."	[VG]-5-|01:08:15| P: Con base en los modelos particulares estudiados en las Tareas 1, 2 y 3 ¿qué condiciones deben cumplirse en el modelo general para que la trayectoria del planeta se estabilice conforme se agreguen cada vez más circunferencias? ((Leyendo la pregunta)) ¿Qué escribieron por ahí? ((señalando al Equipo 1)) H4: Que todas las circunferencias deben ser cada vez menores. P: Los radios de las circunferencias deben ser cada vez menores ¿qué otro? M3: Y las velocidades tienen que ir aumentando. H1: Las angulares. M3: Las angulares. P: Las velocidades angulares tienen que ir aumentando. ¿y eso cómo lo escribieron, matema-? ¿cómo se escribe matemáticamente? Digamos que ahí está como cualitativo, ¿verdad? Los radios cada vez más chicos y las velocidades cada vez mayores ¿cómo escribirían eso? Qué sería, en este caso los radios son A_1, A_2 ¿verdad? H4: A1 menor que::: P: Los radios son A_1, A_2, A_3 y así ¿verdad? Y las velocidades w_1, w_2, w_3 y así ¿verdad? ((escribe en la pizarra))  Ustedes lo que dicen es que estos ((señalando los radios)) tienen que ir, eh. H3: Decreciendo. P: Ir decreciendo y estos ((señalando las velocidades)) deben de ir. H3: Aumentando. P: Aumentando ¿cómo lo escribirían matemáticamente? H6: A_i es mayor que A_j, si i es mayor que j. P: Ok, Entonces aquí ((escribiendo en la pizarra)) H6: A_i es mayor que A_j. P: Mayor. H6: Si i es mayor que j. Con i, j en (x)uno en ℕ. P: ¿Así? ((varios estudiantes asientan con la cabeza))  Dice que uno es menor que otro, ¿sí? M3: ¡Ujú! P: ¿Pero es suficiente con que sea uno menor que otro? (8) M2: Y consecutivos también deben ser, ¿no? H1: Poner consecutivo, ¿no?

Parte I. **Generando el modelo**

Intención: Se pretende con esta generalización que el estudiante identifique las condiciones para que el modelo sea estable.

Estudiante	**M2**	**M3**	**H1**	**H3**	**H4**	**Equipo 3**	**Puesta en común**
							P: Bueno, ahí incluye digamos, ya eso incluye que los consecutivos, ¿no? (5) Por ejemplo, a ver, el primero podría ser 10 000, ¿cierto? M2: Sí. P: ¿Sí? ((varios estudiantes asienten con la cabeza)) Y que vayan decreciendo, pero que estén acotados por 9000, ¿sí? Y entonces igual, va a ser siempre esto ((señalando la desigualdad $A_i > A_j$)), pero (x)se hará la estabilidad, por que, qué habíamos dicho (x)que provocaba la estabilidad, los radios al final, cuando era infinito eran tan chiquititos, tan pequeñitos, ¿verdad? Entonces ¿será que ser decreciente es suficiente? H6: (Incomprensible, 1) que converja. H3: Tendría que tender a cero. P: ¿Verdad? Es como necesaria esa condición, ¿cierto? ((los estudiantes asienten con la cabeza)) Que esta ((señalando la desigualdad $A_i > A_j$)) no es suficiente. H1: nada más que, está al revés, ¿no? Debería ser el signo de desigualdad, el signo de desigualdad debería ser al revés. P: ¿Este? H1: Sí. P: ((Cambia $A_i > A_j$ por $A_i < A_j$)) Para una circunferencia con un radio mayor, debe ser menor que el otro, en una posición mayor tiene que ser menor que el otro. Entonces ¿cómo escribirían eso otro? H1: Eh, A_n diverge a 0, tiene a cero ((los estudiantes asienten con la cabeza)) [VG]-5-|01:13:23| P: ¿Y ahora con los w? Digamos que la idea es similar, lo que habían dicho era que tenían que ir creciendo ¿cierto? Entonces eso ¿cómo lo escribirían? w_i es la misma idea verdad, nada más que aquí si se mantienen las desigualdades ¿verdad? ((escribe en la pizarra))  Pero otra vez la pregunta es si eso es suficiente. H4: Debe tender a::: [a infinito]. M3: [a infinito]. P: Debe tender a infinito, ¿verdad? ((los estudiantes asienten con la cabeza))
Intencionalidad	Se espera que el estudiante identifique que para garantizar la estabilidad del sistema se debe cumplir que $A_n \to 0$ y $w_n \to \infty$, es importante resaltar que estas condiciones son necesarias para la convergencia, pero no suficientes.						
¿Sobre qué objetos lo hace?	**Establecer** Las sucesiones de radios y de velocidades angulares.	**Establecer** Las sucesiones de radios y de velocidades angulares.	**Establecer** Las sucesiones de radios y de velocidades angulares.	**Establecer** Las sucesiones de radios y de velocidades angulares.	**Establecer** Las sucesiones de radios y de velocidades angulares.		**Establecer** Las sucesiones de radios y de velocidades angulares.
¿Sobre qué relaciones lo hace?	**Establecer** Para que la forma de la trayectoria sea definida, la sucesión de radios debe converger a cero y la sucesión de las velocidades angulares debe diverger.	**Establecer** Para que la forma de la trayectoria sea definida, la sucesión de radios debe converger a cero y la sucesión de las velocidades angulares debe diverger.	**Establecer** Para que la forma de la trayectoria sea definida, la sucesión de radios debe ser decreciente y la sucesión de las velocidades angulares debe ser creciente y divergente.	**Establecer** Para que la forma de la trayectoria sea definida, la sucesión de radios debe converger a cero y la sucesión de las velocidades angulares debe diverger.	**Establecer** Para que la forma de la trayectoria sea definida, la sucesión de radios debe converger a cero y la sucesión de las velocidades angulares debe diverger.		**Establecer** Para que la forma de la trayectoria sea definida, la sucesión de radios debe decrecer y converger a cero y la sucesión de las velocidades angulares debe ser creciente y debe diverger.
¿Por medio de qué lo hace?	**Establecer** Algebraico: $A_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ Verbal: Las velocidades aumentan al agregar más circunferencias Algebraico: $w_k \to \infty$ cuando k→ ∞ Verbal: Así se formarán trayectorias con formas definidas al agregar más circunferencias.	**Establecer** Verbal: Debe cumplirse que los radios de las circunferencias vayan disminuyendo y las velocidades angulares vayan aumentando. Verbal: Las series de las componentes sean convergentes. Verbal: Los radios tienden a cero y las velocidades angulares a infinito.	**Establecer** Verbal/Algebraico: Se debe cumplir $r_{k+1} < r_k$ para que la trayectoria no se desborde. Verbal/Algebraico: $\omega_{k+1} > \omega_k$ y $\omega_k \to \infty$ para que se complete el recorrido en un tiempo finito.	**Establecer** Verbal: Debe cumplirse que al ir agregando más y más circunferencias, estas decrezcan en radio y el punto o planeta P aumente su velocidad angular. Verbal: Con los radios tendiendo a cero y las velocidades angulares tendiendo a infinito.	**Establecer** Verbal/Algebraico: Los radios de las circunferencias agregadas deben de ser menores con respecto al anterior, pero es necesario que $A_n \to 0$. Verbal/Algebraico: La velocidad angular del punto P en cada nueva circunferencia debe de aumentar y es necesario que $w_n \to \infty$.		**Establecer** Algebraico:  Verbal: A_n tiende a cero. Algebraico:  Verbal: Debe tender a infinito.
Invariantes de Acciones	- Para que la forma de la trayectoria sea definida, la sucesión de radios debe converger a cero y la sucesión de las velocidades angulares debe diverger.						
Pregunta b	$x_n = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \operatorname{Cos}(\theta_k + w_k t)$ $y_n = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \operatorname{Sen}(\theta_k + w_k t)$ 	 	$(x_n, y_n) = (A_0, A_0) + \left(\sum A_k \cos(\theta_k + \omega_k t), \sum A_k \operatorname{sen}(\theta_k + \omega_k t)\right)$ $k = 1, 2, \ldots, n.$	 	$(x_n, y_n) = \left(A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \operatorname{Cos}(\omega_k t + \theta_k), A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \operatorname{Sen}(\omega_k t + \theta_k)\right)$	[VE3]-5-|00:02:46| M3: ¿No sería la suma de los radios? O sea A_1, A_2, A_3= H3: =No “M3” ((se refiere a M3 por su nombre)). M3: [Ah no:::] H3: [Porque los radios] van a estar multiplicando M3: Sí, exacto. Ya, ya. H3: Entonces. M3 Bueno, pero para las (x)de x serían, [los radios] H3: [(Incomprensible, 2)] ahora sí que para este. Sería A_0 más A_1 ¿por qué? M3: Por el coseno del ángulo. H3: Para x, sí para x, sí para x, ¿para el otro? M3: Sería:::= H3: =Seno, ¿no? M3: Seno. H3: ¿Pero de qué ángulo? M3: Pues de θ_1. H3: ¿Más qué? M3: Má:::s, ay::: la coordenada. H3: Te falta algo. M3: Ah::: sí, [esa cosa]. H3: [¿Por qué?] M3: Más la velocidad angular. H3: ¿Por qué? M3: Por el tiempo.	[VG]-5-|01:14:33| P: Considere el modelo utilizando n circunferencias. Determine las coordenadas x_n, y_n del punto P en el tiempo t ((leyendo la pregunta)). ¿Qué escribieron por ahí? ((señalando al Equipo 1)) Entonces ya eso es como general, ¿verdad? ¿Quién lo quiere escribir? (18) ¿quién quiere escribir ese? ((H2 pasa a la pizarra)) H2: Serían estas ((señalando lo que escribió en la pizarra)).  P: Entonces, cuéntanos ¿de dónde sale? ¿qué significa cada cosa? H2: Esta ((señalando los A_0)) pues la, eje de las coordenadas donde está el planeta. Esta ((señalando los A_n)) pues ya después de que hicimos el análisis de realimentación pues vimos que prácticamente eran los radios de las circunferencias por su componente ((señalando la componente x)) que contribuya en X, el ángulo inicial ((señalando el θ_n del coseno)) de cada circunferencia más la velocidad angular ((señalando el ω_n)).

<table>
<tr><td>Parte I.</td><td colspan="7">Generando el modelo</td></tr>
<tr><td>Intención:</td><td colspan="7">Se pretende con esta generalización que el estudiante identifique las condiciones para que el modelo sea estable.</td></tr>
<tr><th>Estudiante</th><th>M2</th><th>M3</th><th>H1</th><th>H3</th><th>H4</th><th>Equipo 3</th><th>Puesta en común</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>P: Y en Y similar nada más que ahora es la contribución sen en y, ¿verdad? Ok ¿sí están de acuerdo? ((los estudiantes asienten con la cabeza))

[VG]-5-|01:16:45|- Se hace la corrección respecto de los subíndices elegidos respecto de la pregunta planteada, el consenso final queda como sigue:
</td></tr>
<tr><td>Intencionalidad</td><td colspan="7">Se espera que no haya problema con el establecimiento de las relaciones, y que el argumento para dar su respuesta sea bajo lo construido en las tareas anteriores, así sucedió en la prueba piloto, concluyendo que las coordenadas del planeta son:
$$\begin{cases} x_n = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos[w_k t + \theta_k] \\ y_n = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \,\mathrm{sen}[w_k t + \theta_k] \end{cases}$$</td></tr>
<tr><td>¿Sobre qué objetos lo hace?</td><td>Seriar
Cada término de la suma.</td><td>Seriar
Cada término de la suma.</td><td>Seriar
Cada término de la suma.</td><td>Seriar
Cada término de la suma.</td><td>Seriar
Cada término de la suma.</td><td>Seriar
Cada término de la suma.</td><td>Seriar
Cada término de la suma.</td></tr>
<tr><td>¿Sobre qué relaciones lo hace?</td><td>Seriar
La componente x_n del punto corresponde a la suma de A_0 y de los términos de la forma $A_k \cos[w_k t + \theta_k]$.
La componente y_n del punto corresponde a la suma de A_0 y de los términos de la forma $A_k \,\mathrm{sen}[w_k t + \theta_k]$.</td><td>Seriar
La componente x_n del punto corresponde a la suma de A_0 y de los términos de la forma $A_k \cos[w_k t + \theta_k]$.
La componente y_n del punto corresponde a la suma de A_0 y de los términos de la forma $A_k \,\mathrm{sen}[w_k t + \theta_k]$.</td><td>Seriar
La componente x_n del punto corresponde a la suma de A_0 y de los términos de la forma $A_k \cos[w_k t + \theta_k]$.
La componente y_n del punto corresponde a la suma de A_0 y de los términos de la forma $A_k \,\mathrm{sen}[w_k t + \theta_k]$.</td><td>Seriar
La componente x_n del punto corresponde a la suma de A_0 y de los términos de la forma $A_k \cos[w_k t + \theta_k]$.
La componente y_n del punto corresponde a la suma de A_0 y de los términos de la forma $A_k \,\mathrm{sen}[w_k t + \theta_k]$.</td><td>Seriar
La componente x_n del punto corresponde a la suma de A_0 y de los términos de la forma $A_k \cos[w_k t + \theta_k]$.
La componente y_n del punto corresponde a la suma de A_0 y de los términos de la forma $A_k \,\mathrm{sen}[w_k t + \theta_k]$.</td><td>Seriar
La componente x_n del punto corresponde a la suma de A_0 y de los términos de la forma $A_k \cos[w_k t + \theta_k]$.
La componente y_n del punto corresponde a la suma de A_0 y de los términos de la forma $A_k \,\mathrm{sen}[w_k t + \theta_k]$.</td><td>Seriar
La componente x_n del punto corresponde a la suma de A_0 y de los términos de la forma $A_k \cos[w_k t + \theta_k]$.
La componente y_n del punto corresponde a la suma de A_0 y de los términos de la forma $A_k \,\mathrm{sen}[w_k t + \theta_k]$.</td></tr>
<tr><td>¿Por medio de qué lo hace?</td><td>Seriar
Icónico:

Algebraico:
$$x_n = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \,\mathrm{Cos}(\theta_k + w_k t)$$
$$y_n = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \,\mathrm{Sen}(\theta_k + w_k t)$$
</td><td>Seriar
Algebraico:
</td><td>Seriar
Algebraico:
$$(x_n, y_n) = (A_0, A_0) + \left(\sum A_k \cos(\theta_k + \omega_k t), \sum A_k \,\mathrm{sen}(\theta_k + \omega_k t)\right)$$
$k = 1, 2, \dots, n.$</td><td>Seriar
Algebraico:
</td><td>Seriar
Algebraico:
$$(x_n, y_n) = \left(A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \,\mathrm{Cos}(\omega_k t + \theta_k), A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \,\mathrm{Sen}(\omega_k t + \theta_k)\right)$$</td><td>Seriar
Verbal: [VE3]-5-|00:02:46|
M3: ¿No sería la suma de los radios? O sea A_1, A_2, A_3=
H3: =No “M3” ((se refiere a M3 por su nombre)).
M3: [Ah no:::]
H3: [Porque los radios] van a estar multiplicando
M3: Sí, exacto. Ya, ya.
H3: Entonces.
M3 Bueno, pero para las (x)de x serían, [los radios]
H3: [(Incomprensible, 2)] ahora sí que para este. Sería A_0 más A_1 ¿por qué?
M3: Por el coseno del ángulo.
H3: Para x, sí para x, sí para x, ¿para el otro?
M3: Sería:::=
H3: =Seno, ¿no?
M3: Seno.
H3: ¿Pero de qué ángulo?
M3: Pues de θ_1.
H3: ¿Más qué?
M3: Má:::s, ay::: la coordenada.
H3: Te falta algo.
M3: Ah::: sí, [esa cosa].
H3: [¿Por qué?]
M3: Más la velocidad angular.
H3: ¿Por qué?
M3: Por el tiempo.</td><td>Seriar
Algebraico:
</td></tr>
<tr><td>Invariantes de Acciones</td><td colspan="7">- $\begin{cases} x_n = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos(w_k t + \theta_k) \\ y_n = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \,\mathrm{sen}(w_k t + \theta_k) \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>Pregunta c</td><td>$w_k \to \infty$ al agregar más circunferencias, y los radios son menores, por lo que, las contribuciones A_k son cada vez menores.</td><td>Que de acuerdo a las condiciones obtenidas y la formula describen la trayectoria que forma el planeta conforme se agregan mas circunferencias.</td><td>Según las características del radio y de la velocidad angular, la formula anterior debería converger a una función definida.</td><td>Las condiciones de que los radios decrezcan y las velocidades angulares aumenten asegura la convergencia de las expresiones obtenidas a una función, misma que modela la forma final de la trayectoria.
Se observa que los coeficientes a_k y b_k representan las condiciones iniciales del sistema cuando se tienen n circunferencias.</td><td>Las condiciones de la respuesta en a) dan una descripción de la fórmula en b), por ejemplo, al disminuir los radios, las coordenadas se desplazan cada vez en un valor más pequeño.</td><td>No hubo interacción al responder esta pregunta.

[VE3]-5-|01:09:53|- H3 agrega a su respuesta el último párrafo después de la puesta en común “Se observa que los coeficientes a_k y b_k representan las condiciones iniciales del sistema cuando se tienen n circunferencias”</td><td>[VG]-5-|01:17:34|
P: ¿Cómo se relaciona su respuesta a la pregunta a con la fórmula obtenida en la pregunta anterior? ((leyendo la pregunta)).
¿Qué escribieron por ahí? ((señalando al Equipo 1)) Entonces ya eso es como general, ¿verdad? ¿Quién lo quiere escribir? (18) ¿quién quiere escribir ese? ((H2 pasa a la pizarra))
H2: ¿Cómo se relacionan? Los A_k tendrían que ser, que correspondan al radio, tendrían que ser decrecientes y a parte converger a 0.
P: Converger a 0, ajá.
H2: Y el ωt, ese tendría que diverger y nosotros también pusimos que ese tenía que ser creciente.
P: ¿El $w_k t$?
H2: El w, el ω_k.
P: ¿Ese tiene que diverger?
H2: Sí.
P: ¿Y el θ_k?
H2: Pues ((gesto de negación con la cabeza))
P: ¿Qué pasa con ese?
M2: (incomprensible, 4)
H3: Yo siento que a medida que vamos aumentando el número de circunferencias, como se va haciendo más pequeño el radio, pues igual no parece muy importante dónde comencemos, por que eso es lo que representa ese ángulo, entonces como es más pequeño básicamente no se nota.
P: Pero ya para muchos, ¿verdad?
H3: ¡Ajá!
P: ((Hablándole a M2)) No necesariamente disminuye por que si recuerdas (x)la Tarea 3, en el primer caso el ángulo era $\arctan\left(\frac{2}{\pi}\right)$ y en (x)el, para la siguiente circunferencia era 0, y para la siguiente era $\arctan\left(\frac{3}{\pi}\right)$, y para la siguiente 0, entonces iba aumentando y 0, aumentando y 0, entonces no necesariamente es decreciente.</td></tr>
</table>

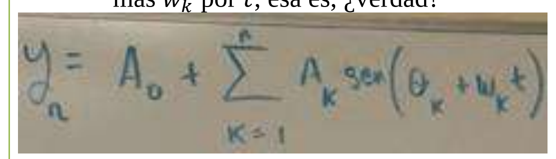
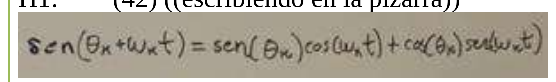
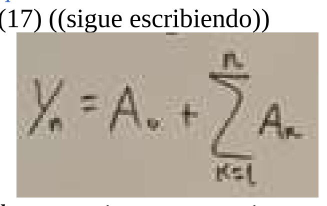
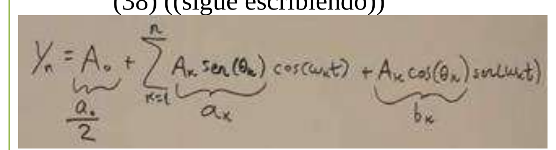
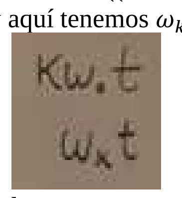
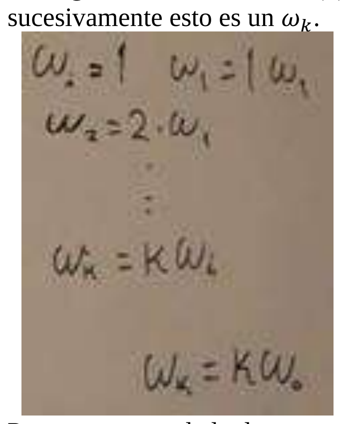
Parte I. **Generando el modelo**

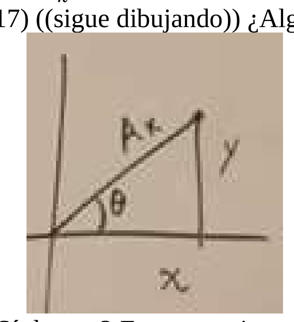
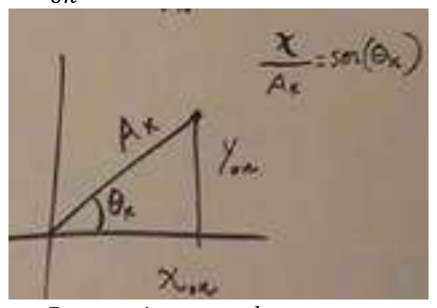
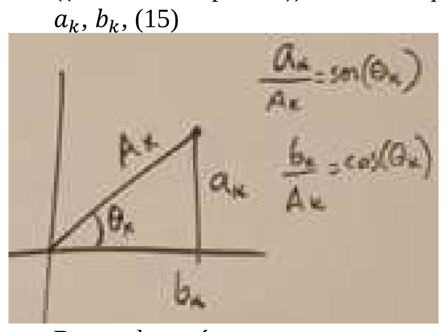
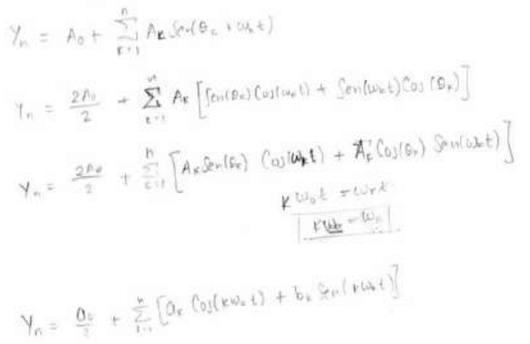
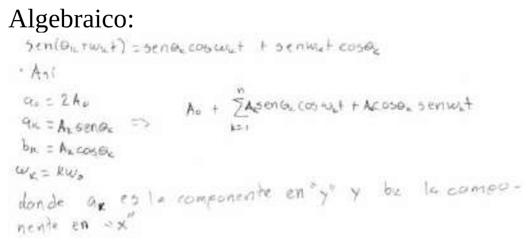
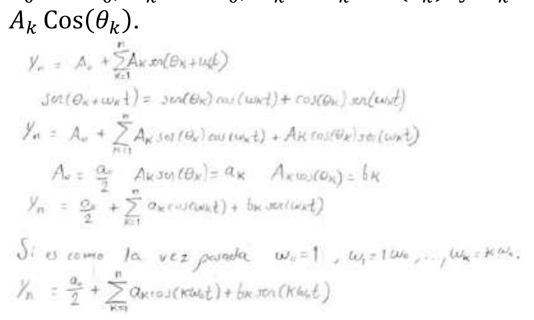
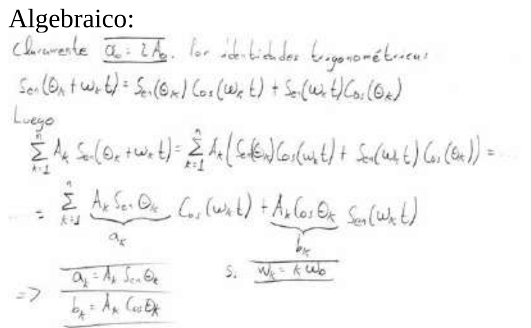
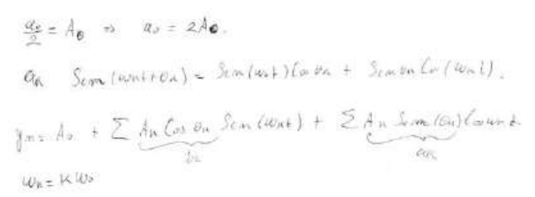
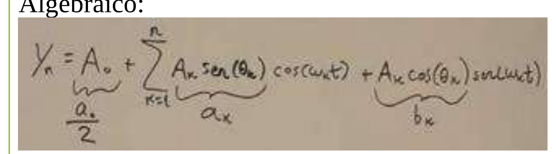
Intención: Se pretende con esta generalización que el estudiante identifique las condiciones para que el modelo sea estable.

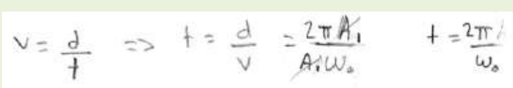
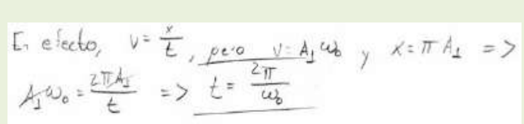
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
							No, es un constante, ¿verdad? Para cada circunferencia es un constante, no depende del tiempo, ¿sí? ((los estudiantes asienten con la cabeza))
Pregunta e	a_k, b_k también tienden a cero kw_0 también tiende a infinito	La formula describe una serie de Fourier la cual se aproxima a una función periódica, que dependera de nuestras condiciones para aproximarse a la forma de la trayectoria.	Es una nueva forma de expresar la fórmula de b). Permite ver más fácilmente la condición de convergencia ya que a_k, b_k tienden a 0.	Observamos que la expresión obtenida tiene la forma de una serie de Fourier, confirmando que nos estamos aproximando a una función capaz de describir la trayectoria del planeta conforme se agregan más circunferencias, por otra parte, en la expresión obtenida siguen siendo necesarias las condiciones presentadas en a) para poder asegurar la convergencia de la serie.	La ecuación anterior describe la convergencia y forma definida de la trayectoria al disminuir los radios de las circunferencias que se agregan cada vez más, tal como se trata en el inciso c)	[VE3]-5-|00:16:08| H3: ¿Qué opinas de este? M3: ¿Cómo se relaciona tu respuesta a la pregunta c con esta nueva fórmula? H3: ¿Qué le ves a la de aquí? M3: ☺No manches☺ H3: ¿Cómo se relacionan eh "M3"? ((se refiere a M3 por su nombre)) M3: Se supone que esto que está acá. (Incomprensible, 4) Es nada más de verificarlo ¿no? H3: ¡Ujú! M3: Te acuerdas que había partes en donde iba más rápido la trayectoria y esto es lo de movimiento, ¿no? Pues eso describe la forma de la trayectoria. [VE3]-5-|00:18:54| M3: Como que modela (x)la rapidez con la que (incomprensible, 1, ¿se mueve sobre la trayectoria?), por así decirlo. Por que ya ves que (incomprensible, 2) en donde va más rápido era donde se tenían más puntos que creíamos discontinuo, ¿no? H3: Eso estoy *wachando*. O sea, tu dices que estas cosas te determinan qué tan rápido converge. M3: ¡Ujú! H3: ¿Por qué? M3: ¿Eh? H3: ¿Por qué? M3: Ahí si no sabría decirte cuate. (15) Porque::: modela:::, porque >depende de los radios y la velocidad angular<. [VE3]-5-|00:20:12| H3: ¿Qué respondiste en c, tú? M3: Que, ah:::, que describe la trayectoria que forma el planeta conforme se agregan más circunferencias. H3: Mmm ¿qué puse yo? Que los radios= M3: =¿Describe qué tan rápido converge esta trayectoria o (incomprensible, 1)? H3: Sí converge. M3: Pues ya. H3: Es que no sé, creo que por ahí va la cosa. (15) "M3" ((se refiere a M3 por su nombre)) también tiene que ver aquí con la, de las condiciones, que tiene que cumplir esto para que esta trayectoria se estabilice. M3: Ajá. H3: Y eso de que se estabilice tiene que ver con estas cosas, que tiene que ver las condiciones para que se estabilice con esto. [VE3]-5-|00:22:51| M3: Yo siento que esto, esta describe la manera en la que va a converger la trayectoria, o sea entre más le agregas, o sea primero no va tomando forma, pero ya luego te vas acercando y se empieza a ver la forma de Fourier, que en este caso (incomprensible, 1). H3: Entonces en general sí, pero (incomprensible, 1). M3: Por que se supone que se hace periódica por el hecho de que, pues en un mes uno sustituye los senos no, sin mover la trayectoria en uno, recorriendo 2π, por eso dice entonces ahí viene el otro periodo, entonces conforme vas agregándole se va acercando a la trayectoria, que se podría retomar como (incomprensible, 1) porque ya los radios y las velocidades ya, o sea, el radio ya no contribuye tanto en distancia, entonces nada más se ve como un puntito oscilando. H3: Un ε. M3: Un ε de distancia.	[VG]-5-|01:28:56| P: ¿Cómo se relaciona tu respuesta a la pregunta c con? ((leyendo la pregunta)) O sea, en la pregunta c, qué es lo que habíamos dicho, que este::: esto debe tender a cero, ¿verdad? ((señalando el A_k)) Y esto debe tener a infinito ((señalando el w_k)), y esto es una constante ((señalando el θ_k)), entonces cómo se relaciona eso, con ahora esto otro ((señalando la fórmula construida en la pregunta d)). H1: Que las contribuciones (x)que da cada término siguiente se van disminuyendo, por que se ve que los, por ejemplo, están multiplicados por A_k y esos tienen a cero, o sea que para una contribución de un k cada vez mayor eso se va, va disminuyendo. P: ¿Sí entienden la idea? H1: Eso sería una condición de convergencia. P: Parece verdad una condición de convergencia. Entonces ¿qué le debe pasar a este a_k, este minúscula, y al b_k, minúscula? M2: Tender a cero. P: Deberían verdad, se ve de acá, ¿cierto?
Intencionalidad	Se busca que se interprete el modelo matemático en el fenómeno físico.						
¿Sobre qué objetos lo hace?	**Establecer** Las sucesiones de radios y de velocidades angulares.	**Interpretar** El modelo y el fenómeno.	**Establecer** Las sucesiones de radios y de velocidades angulares.	**Establecer** Las sucesiones de radios y de velocidades angulares. **Interpretar** El modelo y el fenómeno.	**Establecer** La sucesión de radios. **Interpretar** El modelo y el fenómeno.	**Establecer** Las sucesiones de radios y de velocidades angulares. **Interpretar** El modelo y el fenómeno.	**Establecer** Las sucesiones de radios y de velocidades angulares.
¿Sobre qué relaciones lo hace?	**Establecer** Para que se de la convergencia de la serie de las ordenadas, la sucesión de radios debe converger a cero y la sucesión de las velocidades angulares debe diverger. Para que se de la convergencia de la serie de las ordenadas las sucesiones de los coeficientes deben converger a cero.	**Interpretar** La fórmula describe la trayectoria del planeta.	**Establecer** Para que se de la convergencia de la serie de las ordenadas, la sucesión de radios debe converger a cero y la sucesión de las velocidades angulares debe diverger. Para que se de la convergencia de la serie de las ordenadas las sucesiones de los coeficientes deben converger a cero.	**Establecer** Para que se de la convergencia de la serie de las ordenadas, la sucesión de radios debe converger a cero y la sucesión de las velocidades angulares debe diverger. **Interpretar** La fórmula describe la trayectoria del planeta.	**Establecer** Para que se de la convergencia de la serie de las ordenadas, la sucesión de radios debe converger a cero. **Interpretar** La fórmula describe la trayectoria del planeta.	**Establecer** Para que se de la convergencia de la serie de las ordenadas, la sucesión de radios debe converger a cero y la sucesión de las velocidades angulares debe diverger. **Interpretar** La fórmula describe la trayectoria del planeta.	**Establecer** Para que se de la convergencia de la serie de las ordenadas, la sucesión de radios debe converger a cero y la sucesión de las velocidades angulares debe diverger.
¿Por medio de qué lo hace?	**Establecer** Algebraico: $w_k \to \infty$ Verbal: Los radios son menores, por lo que, las contribuciones A_k son cada vez menores. Verbal: a_k, b_k tienden a cero.	**Interpretar** Verbal: De acuerdo con las condiciones obtenidas, la formula describen la trayectoria del planeta. Verbal: Dependerá de nuestras condiciones para aproximarse a la forma de la trayectoria.	**Establecer** Verbal: Según las características del radio y de la velocidad angular, la formula anterior debería converger a una función definida. Verbal: Es una nueva forma de expresar la fórmula de b). Permite ver más fácilmente la condición de convergencia ya que a_k y b_k tienden a 0.	**Establecer** Verbal: Las condiciones de que los radios decrezcan y las velocidades angulares aumenten asegura la convergencia de las expresiones obtenidas a una función, misma que modela la forma final de la trayectoria. Verbal: En la expresión obtenida siguen siendo necesarias las condiciones presentadas en a) para poder asegurar la convergencia de la serie.	**Establecer** Verbal: Al disminuir los radios, las coordenadas se desplazan cada vez en un valor más pequeño. **Interpretar** Verbal: La ecuación anterior describe la convergencia y forma definida de la trayectoria.	**Establecer** Verbal: [VE3]-5-|00:23:37| M3: Los radios y las velocidades ya, o sea, el radio ya no contribuye tanto en distancia, entonces nada más se ve como un puntito oscilando. H3: Un ε. M3: Un ε de distancia. **Interpretar**	**Establecer** Verbal: [VG]-5-|01:17:45| H2: Los A_k tendrían que ser, que correspondan al radio, tendrían que ser decrecientes y a parte converger a 0. P: Converger a 0, ajá. H2: Y el ωt, ese tendría que diverger y nosotros también pusimos que ese tenía que ser creciente. P: ¿El $w_k t$?

Parte I. Generando el modelo

Intención: Se pretende con esta generalización que el estudiante identifique las condiciones para que el modelo sea estable.

Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
				Interpretar Verbal: Estamos aproximando a una función capaz de describir la trayectoria del planeta conforme se agregan más circunferencias.		Verbal: [VE3]-5-|00:16:39| M3: Te acuerdas que había partes en donde iba más rápido la trayectoria y esto es lo de movimiento, ¿no? Pues eso describe la forma de la trayectoria. Verbal: [VE3]-5-|00:20:17| M3: Describe la trayectoria que forma el planeta conforme se agregan más circunferencias. Verbal: [VE3]-5-|00:22:51| M3: Yo siento que esto, esta describe la manera en la que va a converger la trayectoria, o sea entre más le agregas, o sea primero no va tomando forma.	H2: El w, el ω_k. P: ¿Ese tiene que diverger? H2: Sí. Verbal: [VG]-5-|01:29:30| H1: Que las contribuciones (x)que da cada término siguiente se van disminuyendo, por que se ve que los, por ejemplo, están multiplicados por A_k y esos tienen a cero, o sea que para una contribución de un k cada vez mayor eso se va, va disminuyendo. P: ¿Sí entienden la idea? H1: Eso sería una condición de convergencia. P: Parece verdad una condición de convergencia. Entonces ¿qué le debe pasar a este a_k, este minúscula, y al b_k, minúscula? M2: Tender a cero.
Invariantes de Acciones	- Para que se de la convergencia de la serie de las ordenadas, la sucesión de radios debe converger a cero y la sucesión de las velocidades angulares debe diverger. - Para que se de la convergencia de la serie de las ordenadas las sucesiones de los coeficientes deben converger a cero. - La fórmula describe la trayectoria del planeta.						
Pregunta d	$a_0 = 2A_0$ $a_k = A_k\,\mathrm{Sen}(\theta_k)$ $b_k = A_k\,\mathrm{Cos}(\theta_k)$ $\omega_k = k\omega_0$ $Y_n = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \mathrm{Sen}(\theta_k + \omega_k t)$ $Y_n = \frac{2A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} A_k \left[\mathrm{Sen}(\theta_k)\mathrm{Cos}(\omega_k t) + \mathrm{Sen}(\omega_k t)\mathrm{Cos}(\theta_k)\right]$ $Y_n = \frac{2A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[A_k \mathrm{Sen}(\theta_k)\ \mathrm{Cos}(\omega_k t) + A_k \mathrm{Cos}(\theta_k)\ \mathrm{Sen}(\omega_k t)\right]$ $k\omega_0 t = \omega_k t$ $\boxed{k\omega_0 = \omega_k}$ $Y_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[a_k \mathrm{Cos}(k\omega_0 t) + b_k \mathrm{Sen}(k\omega_0 t)\right]$	$\mathrm{sen}(\theta_k + \omega_k t) = \mathrm{sen}\,\theta_k \cos \omega_k t + \mathrm{sen}\,\omega_k t \cos \theta_k$ $\cdot A_0$ $a_0 = 2A_0$ $a_k = A_k \mathrm{sen}\,\theta_k \Rightarrow A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \mathrm{sen}\,\theta_k \cos \omega_k t + A_k \cos \theta_k \,\mathrm{sen}\,\omega_k t$ $b_k = A_k \cos \theta_k$ $\omega_k = k\omega_0$ donde a_k es la componente en "y" y b_k la componente en "x"	$a_0 = 2A_0, \omega_k = k\omega_0, a_k = A_k\,\mathrm{sen}(\theta_k), b_k = A_k \cos(\theta_k)$ $Y_n = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \mathrm{sen}(\theta_k + \omega_k t)$ $\mathrm{sen}(\theta_k + \omega_k t) = \mathrm{sen}(\theta_k)\cos(\omega_k t) + \cos(\theta_k)\mathrm{sen}(\omega_k t)$ $Y_n = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \mathrm{sen}(\theta_k)\cos(\omega_k t) + A_k \cos(\theta_k)\mathrm{sen}(\omega_k t)$ $A_0 = \frac{a_0}{2}$ $A_k \mathrm{sen}(\theta_k) = a_k$ $A_k \cos(\theta_k) = b_k$ $Y_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(\omega_k t) + b_k \mathrm{sen}(\omega_k t)$ Si es como la vez pasada $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = 1\omega_0, \ldots, \omega_k = k\omega_0$. $Y_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \mathrm{sen}(k\omega_0 t)$	Claramente $\overline{a_0 = 2A_0}$. Por identidades trigonométricas $\mathrm{Sen}(\theta_k + \omega_k t) = \mathrm{Sen}(\theta_k)\mathrm{Cos}(\omega_k t) + \mathrm{Sen}(\omega_k t)\mathrm{Cos}(\theta_k)$ Luego $\sum_{k=1}^{n} A_k \mathrm{Sen}(\theta_k + \omega_k t) = \sum_{k=1}^{n} A_k\left(\mathrm{Sen}(\theta_k)\mathrm{Cos}(\omega_k t) + \mathrm{Sen}(\omega_k t)\mathrm{Cos}(\theta_k)\right) =$ $= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{A_k \mathrm{Sen}\,\theta_k}_{a_k} \mathrm{Cos}(\omega_k t) + \underbrace{A_k \mathrm{Cos}\,\theta_k}_{b_k} \mathrm{Sen}(\omega_k t)$ $\Rightarrow \overline{a_k = A_k \mathrm{Sen}\,\theta_k}$ Si $\overline{\omega_k = k\omega_0}$ $\overline{b_k = A_k \mathrm{Cos}\,\theta_k}$	Desarrollando al seno de la suma de dos ángulos, se obtiene que $a_0 = 2A_0$ $a_k = A_k\,\mathrm{Sen}(\theta_k)$ $b_k = A_k\,\mathrm{Cos}(\theta_k)$ $\omega_k = k\omega_0$ $\frac{a_0}{2} = A_0 \Rightarrow a_0 = 2A_0$. a_n $\mathrm{Sen}(\omega_n t + \theta_n) = \mathrm{Sen}(\omega_n t)\mathrm{Cos}\,\theta_n + \mathrm{Sen}\,\theta_n \mathrm{Cos}(\omega_n t)$. $y_n = A_0 + \sum \underbrace{A_n \mathrm{Cos}\,\theta_n}_{b_n} \mathrm{Sen}(\omega_n t) + \sum \underbrace{A_n \mathrm{Sen}(\theta_n)}_{a_n} \mathrm{Cos}\,\omega_n t$ $\omega_n = k\omega_0$	[VE3]-5-|00:11:29| M3: ¿Qué vamos a hacer? (13) H3: Hay que desarrollar esta suma. M3: Ah, sí es cierto.	[VG]-5-|01:20:25| P: Note nuevamente que y_n representa la n-ésima suma parcial de una serie trigonométrica. Utilice identidades trigonométricas para reescribirla ((leyendo la pregunta)) Voy a, voy a hacerles espacio (5) ((borrando la pizarra)) Entonces ya estamos hablando de y_n, entonces sería ((escribiendo en la pizarra)) A_0 más la serie desde $k = 1$ hasta n, dijimos de A_n por el, de A_k perdón, de A_k por sen de θ_k más w_k por t, esa es, ¿verdad?  Entonces bueno ¿quién quiere venir a reescribir con todos los pasitos eso ((la igualdad de la pizarra)) en esta forma ((la que pide la pregunta))? Ya lo habíamos hecho en la Tarea 3, ¿verdad? Entonces ahora sí como en forma general ((H1 levanta la mano)) Pase. H1: (42) ((escribiendo en la pizarra))  Este es el primer paso, aplicar la identidad de la suma de ángulos, tendría que::: (17) ((sigue escribiendo))  k por, quiere que empiece por coseno, ¿no? Entonces sería esto de aquí (38) ((sigue escribiendo))  Por lo pronto aquí estaría el a_o ((entre dos le indican los compañeros)) ah si es cierto, a_o medios, este sería el a_k, por que depende de k y también el b_k. Solo que, un problemita es que ahí nos lo piden de la forma ((escribe en la pizarra)) $k\omega_0 t$, y aquí tenemos $\omega_k t$.  Y aquí lo que pensamos hace es, eh recordamos como fue en la forma anterior, que había un omega inicial o no se como le llamaban, que valía 1 ((escribe en la pizarra)) y el siguiente valía, voy a poner inicial, y por ejemplo el siguiente valía así, (8) y así sucesivamente esto es un ω_k.  Pero esto es, es de la, lo que recordamos de la actividad anterior, por que las condiciones a las que llegamos es que simplemente eh::: estas velocidades tienen que ir aumentando sucesivamente y tendiendo a infinito, pero para ponerlas de esta forma, creo que esto fue la que se nos ocurrió, de la vez pasada que las velocidades angulares crecían con k. [VG]-5-|01:25:55| P: Y entonces, ¿ese $\frac{a_0}{2}$ qué representaría en el fenómeno? H1: Condición, posición inicial. P: La posición inicial ¿y el a_k y el b_k?

Parte I.	**Generando el modelo**						
Intención:	Se pretende con esta generalización que el estudiante identifique las condiciones para que el modelo sea estable.						
Estudiante	**M2**	**M3**	**H1**	**H3**	**H4**	**Equipo 3**	**Puesta en común**
							H1: El a_k son, ¿minúsculas verdad? P: Ajá, minúsculas. H1: Pues son los coeficientes de esta suma, ¿no? P: ¿Pero en el fenómeno? H1: Ah::: en el fenómeno. P: ¿En el sistema? H1: Bueno ((señalando el coeficiente $A_k\,\mathrm{sen}(\theta_k)$)) seno del ángulo inicial k-ésimo y radio k-ésimo, ¿no? P: Pero que representan enton-, eso representan A_k y θ_k, pero ¿todo el a_k qué representaría? H1: Posición inicial (x)en x, radio (x)por, bueno sí de las ecuaciones polares, ¿no? r componente en x, o sea es posición inicial en x. P: ¿(x)Sí o ven? Si haces un dibujito del caso. H1: (16) ((dibujando en la pizarra) P: ¿Ahí θ_k verdad sería? H1: (17) ((sigue dibujando)) ¿Algo así?  P: ¿Sí, lo ven? Entones quien sería, puedes poner ahí en el dibujo de una vez quién es a_k más bien, quién es a_k y quién es b_k. H1: ((escribiendo en la pizarra)) x entre A_k es igual a sen, aquí era θ_k, les voy a llamar $0k$  P: Pero ya tienen nombre. H1: Ah no, (x)pero estas de aquí ((señalando a x_{0k} y y_{0k})) M2: Ya ese es el a_k. H1: Ah, sí es cierto::: P: Es el a_k, ¿no? H1: Ya tiene nombre, sí, sí, sí, sí. P: Ya tienen nombre. H1: ((Escribe en la pizarra)) Entonces aquí va a_k, b_k, (15)  Bueno de aquí se ve.
Intencionalidad	Se establezcan las condiciones para que el modelo sea equivalente con la serie trigonométrica de Fourier.						
¿Sobre qué objetos lo hace?	**Reescribir** La expresión $y_n = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k\,\mathrm{sen}(w_k t + \theta_k)$.	**Reescribir** La expresión $y_n = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k\,\mathrm{sen}(w_k t + \theta_k)$.	**Reescribir** La expresión $y_n = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k\,\mathrm{sen}(w_k t + \theta_k)$.	**Reescribir** La expresión $y_n = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k\,\mathrm{sen}(w_k t + \theta_k)$.	**Reescribir** La expresión $y_n = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k\,\mathrm{sen}(w_k t + \theta_k)$.	**Reescribir** La expresión $y_n = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k\,\mathrm{sen}(w_k t + \theta_k)$.	**Reescribir** La expresión $y_n = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k\,\mathrm{sen}(w_k t + \theta_k)$.
¿Sobre qué relaciones lo hace?	**Reescribir** $y_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kw_0 t) + b_k\,\mathrm{sen}(kw_0 t)$, donde $\frac{a_0}{2} = A_0$, $a_k = A_k\,\mathrm{sen}(\theta_k)$, $b_k = A_k \cos(\theta_k)$ y $\omega_k = k\omega_0$.	**Reescribir** $y_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kw_0 t) + b_k\,\mathrm{sen}(kw_0 t)$, donde $\frac{a_0}{2} = A_0$, $a_k = A_k\,\mathrm{sen}(\theta_k)$, $b_k = A_k \cos(\theta_k)$ y $\omega_k = k\omega_0$.	**Reescribir** $y_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kw_0 t) + b_k\,\mathrm{sen}(kw_0 t)$, donde $\frac{a_0}{2} = A_0$, $a_k = A_k\,\mathrm{sen}(\theta_k)$, $b_k = A_k \cos(\theta_k)$ y $\omega_k = k\omega_0$.	**Reescribir** $y_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kw_0 t) + b_k\,\mathrm{sen}(kw_0 t)$, donde $\frac{a_0}{2} = A_0$, $a_k = A_k\,\mathrm{sen}(\theta_k)$, $b_k = A_k \cos(\theta_k)$ y $\omega_k = k\omega_0$.	**Reescribir** $y_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kw_0 t) + b_k\,\mathrm{sen}(kw_0 t)$, donde $\frac{a_0}{2} = A_0$, $a_k = A_k\,\mathrm{sen}(\theta_k)$, $b_k = A_k \cos(\theta_k)$ y $\omega_k = k\omega_0$.	**Reescribir** $y_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kw_0 t) + b_k\,\mathrm{sen}(kw_0 t)$, donde $\frac{a_0}{2} = A_0$, $a_k = A_k\,\mathrm{sen}(\theta_k)$, $b_k = A_k \cos(\theta_k)$ y $\omega_k = k\omega_0$.	**Reescribir** $y_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kw_0 t) + b_k\,\mathrm{sen}(kw_0 t)$, donde $\frac{a_0}{2} = A_0$, $a_k = A_k\,\mathrm{sen}(\theta_k)$, $b_k = A_k \cos(\theta_k)$ y $\omega_k = k\omega_0$.
¿Por medio de qué lo hace?	**Reescribir** Algebraico: $a_0 = 2A_0$, $a_k = A_k\,\mathrm{Sen}(\theta_k)$, $b_k = A_k\,\mathrm{Cos}(\theta_k)$ y $\omega_k = k\omega_0$. 	**Reescribir** Algebraico: 	**Reescribir** Algebraico: $a_0 = 2A_0$, $\omega_k = k\omega_0$, $a_k = A_k\,\mathrm{Sen}(\theta_k)$ y $b_k = A_k\,\mathrm{Cos}(\theta_k)$. 	**Reescribir** Algebraico: 	**Reescribir** Verbal: Desarrollando al seno de la suma de dos ángulos. Algebraico: $a_0 = 2A_0$ $a_k = A_k\,\mathrm{Sen}(\theta_k)$ $b_k = A_k\,\mathrm{Cos}(\theta_k)$ $\omega_k = k\omega_0$ 	**Reescribir** Verbal: [VE3]-5-|00:11:29| M3: ¿Qué vamos a hacer? (13) H3: Hay que desarrollar esta suma. M3: Ah, sí es cierto.	**Reescribir** Algebraico: 
Invariantes de Acciones	- $y_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kw_0 t) + b_k\,\mathrm{sen}(kw_0 t)$, donde $\frac{a_0}{2} = A_0$, $a_k = A_k\,\mathrm{sen}(\theta_k)$, $b_k = A_k \cos(\theta_k)$ y $\omega_k = k\omega_0$.						

Parte II.	**Otra forma de interpretar w_0**						
Intención:	Encontrar condiciones para que el modelo sea equivalente a la STF.						
Estudiante	**M2**	**M3**	**H1**	**H3**	**H4**	**Equipo 3**	**Puesta en común**
Pregunta a	$t = \frac{d}{v} = \frac{2\pi}{\omega_0}$		$t = \frac{distancia}{velocidad} = \frac{2\pi}{\omega_0}$		$t = \frac{2\pi}{\omega_0}$ 	[VE3]-5-|01:11:02| M3: Pues no sería el su- H3: Ah sí (incomprensible, 1) M3: El ω_0= H3: =Pues sabemos la distancia que da ¿no? Es el primer radio. M3: >La distancia<, pero es del punto P, o sea la distancia que recorre es el perímetro de un círculo. H3: ¡A ver! Considere el movimiento del punto sobre, es decir aquella donde el punto se mueve a una= M3: =Y es π por radio, ¿no? Y sabemos los radios. H3: Y por el π, esto sería π por A_1.	[VG]-5-|02:17:07| P: Determine el tiempo t que tarda el punto P en dar un giro completo ((leyendo la pregunta)) Entonces ¿(x)quién quiere hacer esa? ¿o me dicen? H1: La distancia sería la circunferencia, $2\pi r$. P: 2π. H1: Por el radio= P: =Entonces la distancia sería la circunferencia. H1: Sí ((los estudiantes asienten con la cabeza)) P: Entonces 2π. H1: Y el radio de A_1.

<table>
<tr><td>Parte II.</td><td colspan="7">Otra forma de interpretar w_0</td></tr>
<tr><td>Intención:</td><td colspan="7">Encontrar condiciones para que el modelo sea equivalente a la STF.</td></tr>
<tr><th>Estudiante</th><th>M2</th><th>M3</th><th>H1</th><th>H3</th><th>H4</th><th>Equipo 3</th><th>Puesta en común</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>M3: Sí, sabemos los radios.
H3: Sería la distancia.
M3: ¡Ajá!
H3: Ya.
M3: ¿El tiempo?
H3: En que recorre aquí ((silbido))
M3: Y la velocidad también la conocemos.
H3: (Incomprensible, 2, ¿por qué la conocemos?)
M3: Por los::: angular.
H3: La velocidad angular no se define también en términos de=
M3: =De la velocidad por el radio.
H3: ¿La velocidad por el radio?
M3: Sí, ¿no?
H3: (Incomprensible, 1, ¿por) qué la velocidad por el radio?
M3: Es que eso me confundió.
H3: ¿Sería la velocidad entre el radio, no?
M3: No era, ↓hay que buscarlo por aquí↓ A ver.
H3: Si pones velocidad por distancia, o velocidad por radio, te queda metros cuadrados sobre segundos.
M3: Ahí no dice velocidad angular.
(13)
Ah no, sí, la velocidad es ω (x)por radio, ¿no? Para que ω sea velocidad entre ese.

[VE3]-5-|01:13:31|
M3: Sí ¿ya ves? Es ω por el radio, bueno estoy haciendo vectorialmente. Sin wache ¿ya ves?
H3: A mí algo me decía que ω era ángulo inicial sobre el radio.</td><td>P: Y el radio de A_1, ok.
H1: Y el tiempo sería:::
M2: Entre la velocidad.
H1: Ah velocidad, tenemos distancia entre velocidad, y la velocidad es ω_0.
P: Entre tiempo, ¿verdad? Sería ahí.
H1: Esa es velocidad angular, ese es ω_0.
M2: No, es que ahí nos piden el tiempo.
H1: Ajá, ese es igual ω_0, solo que ahí nos están pidiendo el tiempo, y luego ahí despejaríamos.</td></tr>
<tr><td>Pregunta b</td><td>$\omega_0 = \frac{2\pi}{p}$</td><td>$p = \frac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{p}$</td><td>$\omega_0 = \frac{2\pi}{p}$</td><td>$\omega_0 = \frac{2\pi}{p}$</td><td>$\omega_0 = \frac{2}{p}$</td><td>No hubo interacción al responder esta pregunta.

[VE3]-5-|02:01:50|- H3 agrega a su respuesta el número 2 en el numerador.</td><td>[VG]-5-|02:18:35|
P: Si llamamos p al tiempo que tarda el punto P para dar exactamente una vuelta. ¿Cuál es el valor de ω_0 en términos de p? ((leyendo la pregunta))
H1: Pues habría que, es como un cambio de variable, nos dice que t lo cambiemos por p. Yo me imagino que es el periodo.
P: Puede ser. Entonces para la pregunta b nada más.
H1: Es la primera cuestión que se me ocurrió, el periodo.
P: Ajá.
H1: t igual a p.

[VG]-5-|02:19:30|
P: Hay un detalle ahí que no han notado.
H6: El A_1.
P: Ajá ¿por qué el A_1?
H6: Por que:::, bueno yo con lo, con lo que es el seno y coseno contiene, lo que es el argumento de seno y coseno tiene que ser de dimensión.
H9: Este::: viendo las tareas tiene que ser más bien la rapidez, ¿no? (x)Del punto.
P: O sea, es algo que viene desde la anterior, lo estoy dejando aquí, pero (2)
Velocidad igual distancia en tiempo, entonces la velocidad es distancia sobre unidad de tiempo, ¿cierto? ((los estudiantes asienten con la cabeza))
Sí, ¿verdad? Se ha dicho que es radianes por unidad de tiempo, entonces la distancia es angular, y esa distancia que está ahí es trayectoria, ¿cierto? ((los estudiantes asienten con la cabeza)) Sí, ahí sería, más bien, metros o unidad de medida lineal, sobre unidad de tiempo. Entonces este A_1=
H1: =No va.
P: ¿Verdad que no va? ((los estudiantes asienten con al cabeza)) por que esto me está hablando de distancia y esta velocidad es ángulo por unidad de tiempo, entonces sería ángulo por unidad de tiempo ¿estamos claros?</td></tr>
<tr><td>Pregunta c</td><td>$y_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left[a_k \operatorname{Cos}\left(k\frac{2\pi}{p}t\right) + b_k \operatorname{Sen}\left(k\frac{2\pi}{p}t\right)\right]$</td><td>$y_n = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \operatorname{sen}\theta_k \cos\left(\frac{k\pi}{p}t\right) + A_k \cos\theta_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{p}t\right)$</td><td>$y_n = \frac{a_0}{2} + \sum a_k \cos\left(k\frac{2\pi}{p}t\right) + b_k \operatorname{Sen}\left(k\frac{2\pi}{p}t\right)$</td><td>$y_n = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \operatorname{Sen}(\theta_k) \operatorname{Cos}\left(k\frac{2\pi}{p}t\right) + A_k \operatorname{Cos}(\theta_k) \operatorname{Sen}\left(k\frac{2\pi}{p}t\right)$</td><td>$y = A_0 + \sum\left[A_k \operatorname{Sen}(\theta_k)\operatorname{Cos}\left(k\frac{2\pi}{p}t\right) + A_k \operatorname{Cos}(\theta_k)\operatorname{Sen}\left(k\frac{2\pi}{p}t\right)\right]$</td><td>[VE3]-5-|01:25:04|
M3: Entonces k veces π sobre p por t. Ah no, pero ese ya es un tiempo específico, ¿verdad? Ah no, sí se tiene que tomar el t, ¿verdad? Por que este es el tiempo específico para los ω_0. Sí, ¿no?
H3: Pero aquí esto toma (incomprensible, 1).
M3: Sí, sí, sí, por eso tenía que ser, entonces si es $k\pi$ veces sobre p por t.</td><td>[VG]-5-|02:21:27|
P: Reescribe la fórmula que obtuviste en la pregunta d de la Parte I, ahí la dejé arriba verdad, utilizando este nuevo valor de ω_0. ((leyendo la pregunta)) Entonces me imagino que nada más cambiaron, ¿verdad? ((asienten con la cabeza))</td></tr>
<tr><td>Pregunta d</td><td>Constante para todo t y k.
P es el periodo de la trayectoria, determina cuántas vueltas darán los puntos de las siguientes circunferencias.</td><td>Como el periodo temporal de la grafica de la funcion limite ya que cada que pasa p, el planeta P da una vuelta completa a la Tierra.</td><td>Constante porque el que cuenta es el periodo de la primera circunferencia. Ya que los demás dan cierta cantidad de vueltas por cada vuelta de la primera circunferencia.

$P_1 = \frac{2\pi A_1}{\omega_0}$
$P_k = \frac{2\pi A_k}{k\omega_0} \xrightarrow[A_k \to 0]{k \to \infty} 0$ Periodo del K-ésimo círculo.
$\text{tiempo} = \sum_{k=1}^{n} P_k$ No es cierto.</td><td>Como el periodo temporal de la gráfica de la función límite, esto, pues cada que transcurre el tiempo p el planeta completa una vuelta, lo que se ve reflejado en el periodo temporal del resto de las circunferencias.</td><td>Como el periodo de la función</td><td>[VE3]-5-|01:30:48|
H3: Sería el periodo, ¿no?
M3: Ah, ok.
H3: Sería el periodo (incomprensible, 1).
M3: ¡Ujú! (9) Ah::: pues sí:::, porque sería (3) Sí, porque la velocidad también la puedes describir como 2π por el periodo, ¿no? (4) La velocidad la puedes ver 2π por t, o 2π (incomprensible, 1).
H3: ¿Dónde está ese 2π? Tendría que wacharlo.
M3: Ah no, me refería a que (4) es manera de entendición.
H3: Entonces estás de acuerdo que sería como una especie de periodo.

[VE3]-5-|01:33:44|
H3: Sabes qué, cada vez que pasa el tiempo p va a salir ((realiza un silbido explicando)), sería el periodo, ¿no?
M3: Sí.

[VE3]-5-|02:14:18|- H3 agrega a su respuesta después de la puesta en común "lo que se ve</td><td>[VG]-5-|02:22:26|
P: Dado que el valor p es el tiempo que tarda el planeta P en completar una vuelta alrededor de la Tierra T. ¿Cómo se observaría ese valor en la gráfica de la función límite? ((leyendo la pregunta))
H6: Su periodo.
P: ¿Su periodo?
H6: Ajá, como se va repitiendo la gráfica en la función límite.
P: ¿Seguros? ¿totalmente?
H6: ☺No totalmente☺
P: Por que aquí habla, digamos que p es completar una vuelta, pero:::
H6: Para una [circunferencia]
P: [Para la primera] circunferencia. Ese mismo p es si tengo dos, tres o cuatro.
H6: No, eso no estaba viendo.
(9)
P: ¿Cómo lo podrían analizar?
(4)
Nos podemos devolver a los casos particulares y ver. Veámoslo en la Tarea 1 que no tiene radios ni nada a ver qué.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Parte II.</td><td colspan="7">Otra forma de interpretar w_0</td></tr>
<tr><td>Intención:</td><td colspan="7">Encontrar condiciones para que el modelo sea equivalente a la STF.</td></tr>
<tr><th>Estudiante</th><th>M2</th><th>M3</th><th>H1</th><th>H3</th><th>H4</th><th>Equipo 3</th><th>Puesta en común</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>reflejado en el periodo temporal del resto de las circunferencias”</td><td>(16) ((buscando el applet de la Tarea 1 – Parte 2 en la computadora))
Aquí está el, entonces digamos que, en este caso, p sería lo que tarda ese planeta Q en dar esa vuelta, ¿cierto? La pregunta es, ¿si le agrego más circunferencias tarda eso mismo? ¿verdad? Esa es la pregunta. Pongámosle dos a ver.
(6)
¿Qué dicen? ¿Sí se tarda lo mismo? En completar la trayectoria, completa ((risas)). Sí se nota (incomprensible, 2). Sí ¿cómo lo notan?
H4: Nos fijamos en el centro de la circunferencia más pequeña.
P: Ajá.
H4: Y cuando esta se completa, eh::: también completa el punto Q.
P: También completa el punto Q la trayectoria ¿cierto? ((los estudiantes asienten con la cabeza)) Y le podemos agregar más, pues agreguemosle, yo creo que aquí podemos agre- pongámosle unas 9, 10. Está un poquito difícil ver ¿verdad? Pero estamos comparando este ¿verdad? El de la primera con la trayectoria ¿cierto?
H4: Como que todos (x)van a volver, todos se alinean en el punto de partida.

[VG]-5-|02:26:11|- El profesor termina explicando algebraicamente cómo se ve en la fórmula que el periodo efectivamente es p.</td></tr>
<tr><td>Intencionalidad</td><td colspan="7">Se pretende que el estudiante reconozca a p como el periodo de la función límite cuando se considera la variable t un número real. Esto es importante para la Tarea #6, pues se espera que el estudiante realice su estudio en un intervalo de tamaño p, el cual es representativo del comportamiento general de la serie.</td></tr>
<tr><td>¿Sobre qué objetos lo hace?</td>
<td>Identificar
Parámetros velocidad, distancia y tiempo.
Sustituir
$t = \frac{2\pi}{\omega_0}$
$y_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kw_0t) + b_k \operatorname{sen}(kw_0t)$
Reconocer
El estado estable del sistema.</td>
<td>Identificar
Parámetros velocidad, distancia y tiempo.
Sustituir
$t = \frac{2\pi}{\omega_0}$
$y_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kw_0t) + b_k \operatorname{sen}(kw_0t)$
Reconocer
El valor de convergencia.</td>
<td>Identificar
Parámetros velocidad, distancia y tiempo.
Sustituir
$t = \frac{2\pi}{\omega_0}$
$y_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kw_0t) + b_k \operatorname{sen}(kw_0t)$
Reconocer
El valor de convergencia.</td>
<td>Identificar
Parámetros velocidad, distancia y tiempo.
Sustituir
$t = \frac{2\pi}{\omega_0}$
$y_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kw_0t) + b_k \operatorname{sen}(kw_0t)$
Reconocer
El valor de convergencia.</td>
<td>Identificar
Parámetros velocidad, distancia y tiempo.
Sustituir
$t = \frac{2\pi}{\omega_0}$
$y_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kw_0t) + b_k \operatorname{sen}(kw_0t)$
Reconocer
El valor de convergencia.</td>
<td>Identificar
Parámetros velocidad, distancia y tiempo.
Sustituir
$t = \frac{2\pi}{\omega_0}$
$y_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kw_0t) + b_k \operatorname{sen}(kw_0t)$
Reconocer
El valor de convergencia.</td>
<td>Identificar
Parámetros velocidad, distancia y tiempo.
Sustituir
$t = \frac{2\pi}{\omega_0}$
$y_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kw_0t) + b_k \operatorname{sen}(kw_0t)$
Reconocer
El valor de convergencia.</td></tr>
<tr><td>¿Sobre qué relaciones lo hace?</td>
<td>Identificar
La velocidad es igual a la distancia entre el tiempo.
Sustituir
$t = p$
$\omega_0 = \frac{2\pi}{p}$
Reconocer
El valor de convergencia debe ser periódico debido al comportamiento del fenómeno.</td>
<td>Identificar
La velocidad es igual a la distancia entre el tiempo.
Sustituir
$t = p$
$\omega_0 = \frac{2\pi}{p}$
Reconocer
El valor de convergencia debe ser periódico debido al comportamiento del fenómeno.</td>
<td>Identificar
La velocidad es igual a la distancia entre el tiempo.
Sustituir
$t = p$
$\omega_0 = \frac{2\pi}{p}$
Reconocer
El valor de convergencia debe ser periódico debido al comportamiento del fenómeno.</td>
<td>Identificar
La velocidad es igual a la distancia entre el tiempo.
Sustituir
$t = p$
$\omega_0 = \frac{2\pi}{p}$
Reconocer
El valor de convergencia debe ser periódico debido al comportamiento del fenómeno.</td>
<td>Identificar
La velocidad es igual a la distancia entre el tiempo.
Sustituir
$t = p$
$\omega_0 = \frac{2\pi}{p}$
Reconocer
El valor de convergencia debe ser periódico debido al comportamiento del fenómeno.</td>
<td>Identificar
La velocidad es igual a la distancia entre el tiempo.
Sustituir
$t = p$
$\omega_0 = \frac{2\pi}{p}$
Reconocer
El valor de convergencia debe ser periódico debido al comportamiento del fenómeno.</td>
<td>Identificar
La velocidad es igual a la distancia entre el tiempo.
Sustituir
$t = p$
$\omega_0 = \frac{2\pi}{p}$
Reconocer
El valor de convergencia debe ser periódico debido al comportamiento del fenómeno.</td></tr>
<tr><td>¿Por medio de qué lo hace?</td>
<td>Identificar
Algebraico: $t = \frac{d}{v} = \frac{2\pi}{\omega_0}$
Sustituir
Algebraico: $\omega_0 = \frac{2\pi}{p}$
Algebraico:
$y_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left[a_k \operatorname{Cos}\left(k\frac{2\pi}{p}t\right) + b_k \operatorname{Sen}\left(k\frac{2\pi}{p}t\right)\right]$
Reconocer
Verbal: p es el periodo de la trayectoria.</td>
<td>Identificar
Algebraico:
$v = \frac{d}{t} \Rightarrow t = \frac{d}{v} = \frac{2\pi A_1}{A_1\omega_0} \quad t = \frac{2\pi}{\omega_0}$
Sustituir
Algebraico:
$p = \frac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{p}$
Algebraico:
$Y_n = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \operatorname{sen}\theta_k \cos\left(\frac{k\pi}{p}t\right) + A_k \cos\theta_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{p}t\right)$
Reconocer
Verbal: Como el periodo temporal de la grafica de la función limite ya que cada que pasa p, el planeta P da una vuelta completa a la Tierra.</td>
<td>Identificar
Algebraico: $t = \frac{distancia}{velocidad} = \frac{2\pi}{\omega_0}$.
Sustituir
Algebraico: $\omega_0 = \frac{2\pi}{p}$.
Algebraico:
$y_n = \frac{a_0}{2} + \sum a_k \cos\left(k\frac{2\pi}{p}t\right) + b_k \operatorname{Sen}\left(k\frac{2\pi}{p}t\right)$
Reconocer
Verbal: Constante porque el que cuenta es el periodo de la primera circunferencia. Ya que los demás dan cierta cantidad de vueltas por cada vuelta de la primera circunferencia.
Algebraico:
$P_1 = \frac{2\pi A_1}{\omega_0}$
$P_k = \frac{2\pi A_k}{K\omega_0} \xrightarrow[A_k \to 0]{K\to\infty} 0$ Periodo del K-ésimo circlo.
$tiempo = \sum_{K=1}^{n} P_K$ No es cierto.</td>
<td>Algebraico:
En efecto, $v = \frac{x}{t}$, pero $v = A_1\omega_0$ y $x = \pi A_1 \Rightarrow$
$A_1\omega_0 = \frac{2\pi A_1}{t} \Rightarrow t = \frac{2\pi}{\omega_0}$
Sustituir
Algebraico: $\omega_0 = \frac{2\pi}{p}$.
Algebraico:
$Y_n = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \operatorname{Sen}(\theta_k) \operatorname{Cos}\left(k\frac{2\pi}{p}t\right) + A_k \operatorname{Cos}(\theta_k) \operatorname{Sen}\left(k\frac{2\pi}{p}t\right)$
Reconocer
Verbal: Como el periodo temporal de la gráfica de la función límite, esto, pues cada que transcurre el tiempo p el planeta completa una vuelta, lo que se ve reflejado en el periodo temporal del resto de las circunferencias.</td>
<td>Identificar
Algebraico: $t = \frac{2\pi}{\omega_0}$.
$\omega_0 = \frac{2\pi}{t} \Rightarrow t = \frac{2\pi}{\omega_0}$
Sustituir
Algebraico: $\omega_0 = \frac{2\pi}{p}$.
Algebraico:
$y_n = A_0 + \sum\left[A_k \operatorname{Sen}(\theta_k)\operatorname{Cos}\left(k\frac{2\pi}{p}t\right) + A_k \operatorname{Cos}(\theta_k)\operatorname{Sen}\left(k\frac{2\pi}{p}t\right)\right]$
Reconocer
Verbal: Como el periodo de la función.</td>
<td>Identificar
Verbal: [VE3]-5-|01:11:02|
M3: Pues no sería el su-
H3: Ah sí (incomprensible, 1)
M3: El ω_0=
H3: =Pues sabemos la distancia que da ¿no? Es el primer radio.
M3: >La distancia<, pero es del punto P, o sea la distancia que recorre es el perímetro de un círculo.
H3: ¡A ver! Considere el movimiento del punto sobre, es decir aquella donde el punto se mueve a una=
M3: =Y es π por radio, ¿no? Y sabemos los radios.
H3: Y por el π, esto sería π por A_1.
M3: Sí, sabemos los radios.
H3: Sería la distancia.
Sustituir
Verbal: [VE3]-5-|01:25:04|
M3: Entonces k veces π sobre p por t. Ah no, pero ese ya es un tiempo específico, ¿verdad? Ah no, sí se tiene que tomar el t, ¿verdad? Por que este es el tiempo específico para los ω_0. Sí, ¿no?
H3: Pero aquí esto toma (incomprensible, 1).
M3: Sí, sí, sí, por eso tenía que ser, entonces si es $k\pi$ veces sobre p por t.
Reconocer
Verbal: Como el periodo de la función.</td>
<td>Identificar
Verbal: [VG]-5-|02:17:07|
P: Determine el tiempo t que tarda el punto P en dar un giro completo ((leyendo la pregunta))
Entonces ¿(x)quién quiere hacer esa? ¿o me dicen?
H1: La distancia sería la circunferencia, $2\pi r$.
P: 2π.
H1: Por el radio=
P: =Entonces la distancia sería la circunferencia.
H1: Sí ((los estudiantes asienten con la cabeza))
P: Entonces 2π.
H1: Y el radio de A_1.
P: Y el radio de A_1, ok.
H1: Y el tiempo sería:::
M2: Entre la velocidad.
H1: Ah velocidad, tenemos distancia entre velocidad, y la velocidad es ω_0.
P: Entre tiempo, ¿verdad? Sería ahí.
H1: Esa es velocidad angular, ese es ω_0.
M2: No, es que ahí nos piden el tiempo.
H1: Ajá, ese es igual ω_0, solo que ahí nos están pidiendo el tiempo, y luego ahí despejaríamos.
Sustituir
Verbal: [VG]-5-|02:18:35|
P: Si llamamos p al tiempo que tarda el punto P para dar exactamente una vuelta. ¿Cuál es el valor de ω_0 en términos de p? ((leyendo la pregunta))
H1: Pues habría que, es como un cambio de variable, nos dice que t lo cambiemos por p. Yo me imagino que es el periodo.
P: Puede ser. Entonces para la pregunta b nada más.
H1: Es la primera cuestión que se me ocurrió, el periodo.
P: Ajá.
H1: t igual a p.

Verbal: [VG]-5-|02:21:27|
P: Reescribe la fórmula que obtuviste en la pregunta d de la Parte I, ahí la dejé arriba verdad, utilizando este nuevo valor de ω_0. ((leyendo la pregunta)) Entonces me imagino que nada más cambiaron, ¿verdad? ((asienten con la cabeza))
Reconocer
Verbal: [VG]-5-|02:22:26|</td></tr>
</table>

Parte II. **Otra forma de interpretar w_0**
Intención: Encontrar condiciones para que el modelo sea equivalente a la STF.

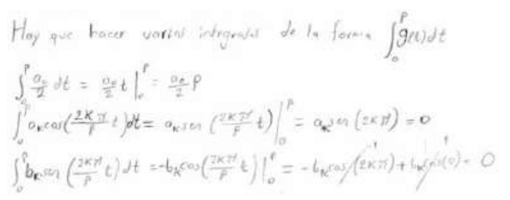
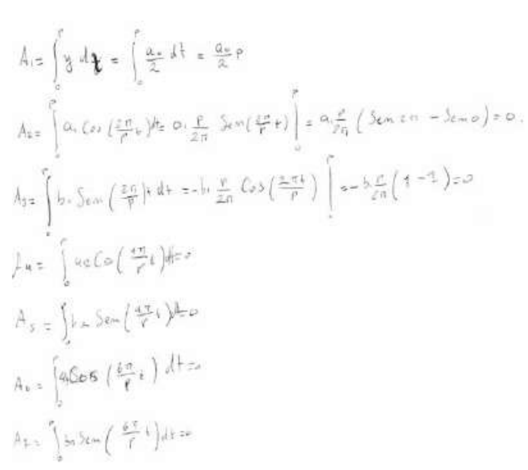
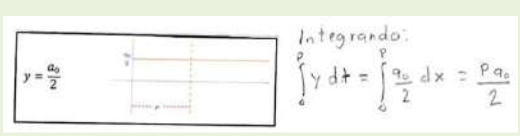
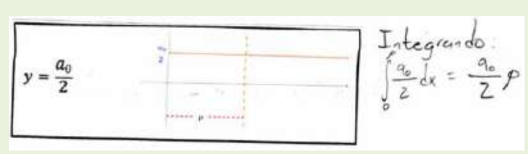
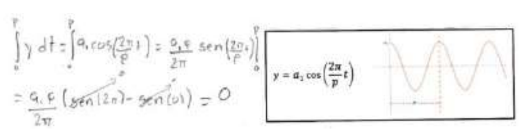
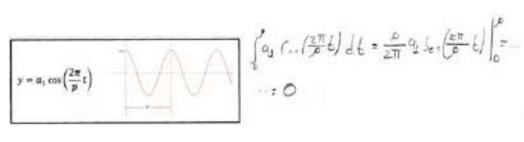
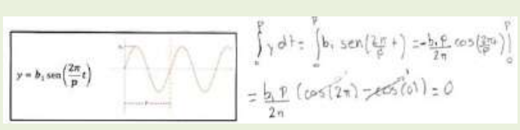
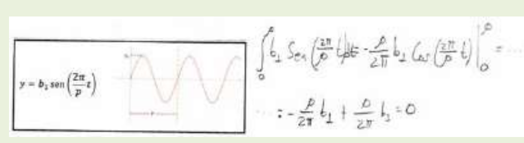
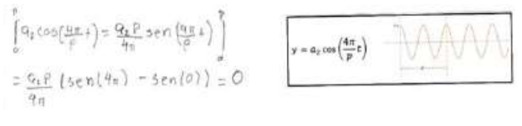
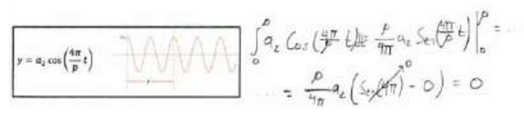
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
							P: Dado que el valor p es el tiempo que tarda el planeta P en completar una vuelta alrededor de la Tierra T. ¿Cómo se observaría ese valor en la gráfica de la función límite? ((leyendo la pregunta)) H6: Su periodo. P: ¿Su periodo? H6: Ajá, como se va repitiendo la gráfica en la función límite. P: ¿Seguros? ¿totalmente? H6: ☺No totalmente☺ P: Por que aquí habla, digamos que p es completar una vuelta, pero::: H6: Para una circunferencia.
Invariantes de Acciones	- La velocidad es igual a la distancia entre el tiempo. - $\omega_0 = \frac{2\pi}{p}$ - $y_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[a_k \operatorname{Cos}\left(k\frac{2\pi}{p}t\right) + b_k \operatorname{Sen}\left(k\frac{2\pi}{p}t\right) \right]$ - El valor de convergencia debe ser periódico debido al comportamiento del fenómeno.						

9.7.7 Tarea #6. Etapa 1: Identificación de acciones

TAREA #6

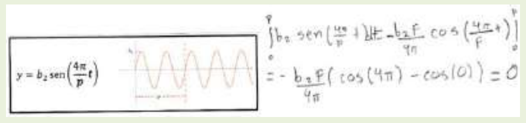
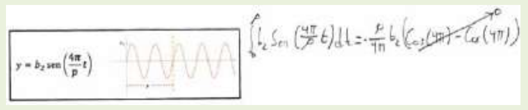
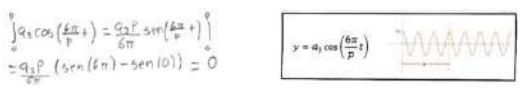
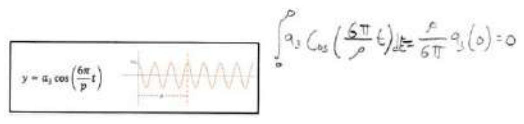
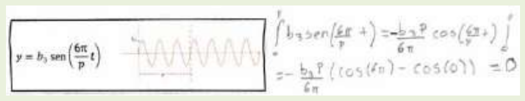
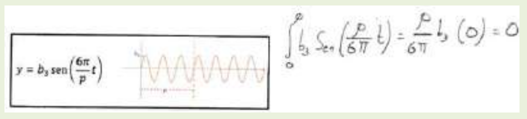
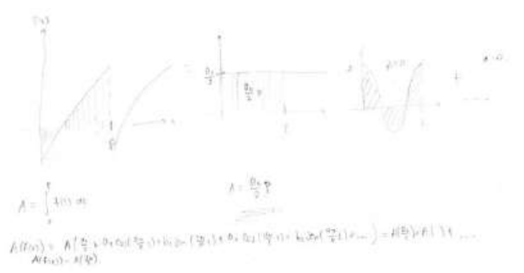
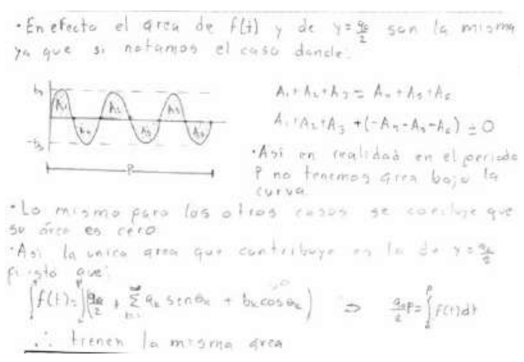
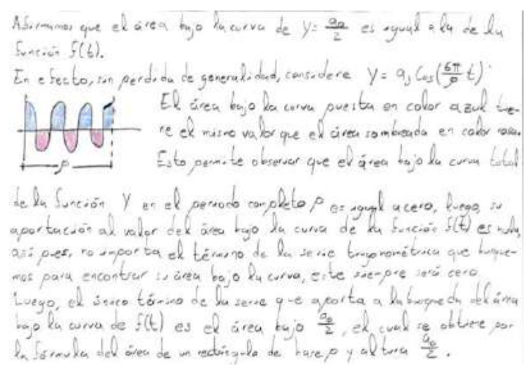
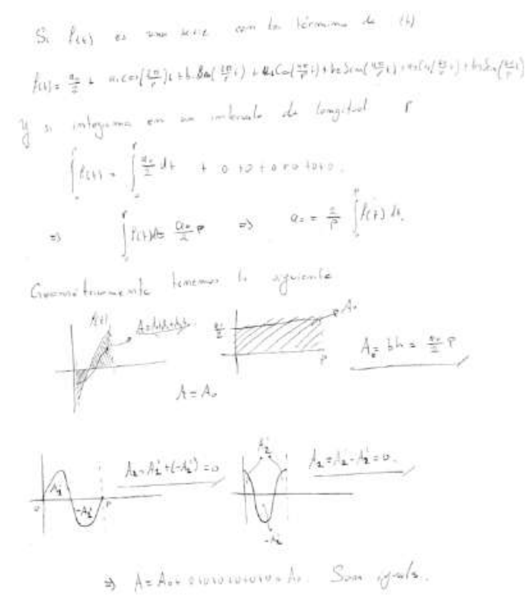
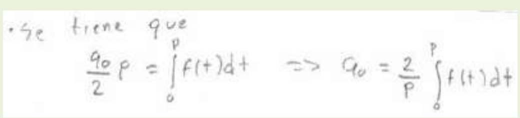
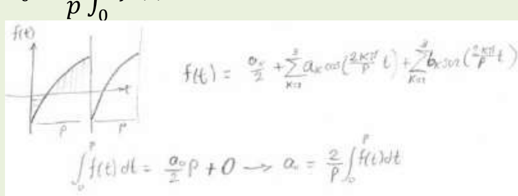
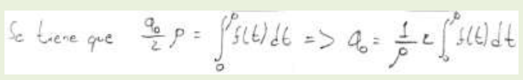
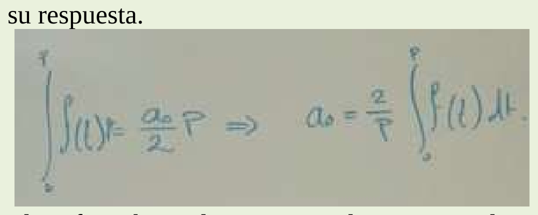
Objetivo de la Tarea: Significar el cálculo de los coeficientes de Fourier utilizando argumentaciones gráficas y geométricas, tal y como lo hizo Fourier.

Parte I. **El cálculo de a_0**
Intención: Significar el cálculo del coeficiente de Fourier a_0, a partir de la articulación de los registros geométrico-analítico y algebraico, para validar el segundo en el primero.

Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
Pregunta a	El valor de cada área sombreada es la misma [VG]-6-|01:21:14|- el profesor pregunta quien dio respuesta solo a partir de ver la gráfica, M2 levanta la mano.	Que ambas regiones en el intervalo de p, sus áreas son 0. Ya que tienen simetría.	Todas las regiones sombreadas tienen la misma área.	Representan áreas bajo la curva semejantes, para saber en que medida se relacionan es necesario conocer la relación entre a_1 y b_1. Para cada una, es claro de la gráfica que el valor de las áreas es igual.	En cada región se representa un cuarto del periodo. El área bajo la curva de cada una es un cuarto del áreabajo la corva de toda la sección.	[VE3]-6-|00:00:36| M3: ¿Cuál es la relación entre las regiones sombreadas de cada gráfica? (8) ((realiza un sonido con la boca)) Tienen la misma área, ¿no? H3: Es la misma área, ¿no? M3: ¡Ajá! Pues sí, ¿no? Pues sí, ¿no? Por que ahí está ((hace un silbido)) H3: Además creo que tienen la misma, la [misma magnitud] M3: [El mismo periodo] [VE3]-6-|01:18:47|- después de la puesta en común M3 agrega a su respuesta “Ya que tienen simetría”, y H3 agrega a su respuesta “Para cada una, es claro de la gráfica que el valor de las áreas es igual”	[VG]-6-|01:18:28| H6: (x)Es una proporción. Lo que hice fue integrar. P: ¿Proporción de qué con qué? H6: De la amplitud del área de una región pequeñita, una de las (incomprensible, 1) P: Ok, entonces viste una de las coloreadas, ¿una nada más? H6: No, bueno, integré todo. P: Ajá, integraste todo. H6: Ajá, bueno, primero noté que son, que están divididas en partes iguales p entre 4, p entre 4, p entre 4, p entre 4. P: Ok. H6: Si saco el área total, bueno eso permite decir que cada uno de esos tiene la misma área. P: Ujú. H6: Entonces calculé el área total de esta ((señalando la curva coseno)), y el área total de esta ((señalando la curva seno)) eso da una expresión, se igualan y al final da llegas a conseguir una proporción. P: Ah, o sea, igualaste el área de esta con la de esta ((refiriéndose a ambas curvas)). H6: No, no las igualé, o sea como tal encontré una proporción, o sea, hay una proporción que siguen. [VG]-6-|01:21:14|- el profesor pregunta quien dio respuesta solo a partir de ver la gráfica, M2 levanta la mano, luego pregunta quien respondió a partir de calcular las integrales y el resto de los estudiantes levantan la mano.
Pregunta b						[VE3]-6-|00:02:02| H3: ¿Cuál es el área bajo la curva de cada término de la serie en un intervalo de tamaño p? M3: O sea, vamos a calcular primero y_0, ¿no? H3: Ah::: (6) ¿cómo, cómo, cómo? M3: Ajá, mira te da la función y el intervalo en donde la tienes que integrar, (3) aquí sería como un rectángulo. Entonces sería la integral, uh::: de cero a la mitad del periodo. H3: Ah::: el área bajo la, sí. M3: Pues sí, ¿no? H3: Pero aquí está de cero a p. M3: Ajá:::m H3: Ujú, entonces integras esta constante, de cero [a p]. M3: [A p]. H3: Entonces te queda p veces esto. M3: ¡Ajá! [VE3]-6-|00:13:52| M3: Coseno de cero es uno, ¿no? H3: ¡Ajá! M3: Y el coseno de 2π, (5) huy no me voy a matar, este también da cero, ¿no? H3: Sí, da cero, ¿no? M3: Sí, porque esta área menos esta área también da cero. [VE3]-6-|00:42:06| H3: También lo puedes obtener como un rectángulo, de base p y altura a_0 M3: ¡Ujú! H3: Entonces el área vale a_0 sobre 2 por p, y eso es igual a esta integral. M3: ¡Ujú!	[VG]-6-|01:22:28| P: ¿Para $\frac{a_0}{2}$ cuál es el área? M3: a_0 sobre 2 por p ((junto con ella H1, H3, H6 y M1 dan la respuesta)) H6: Puedo integrar o es un rectángulo. [VG]-6-|01:22:28|- para $y = \frac{a_0}{2}$ el profesor pregunta quién usó primero el argumento del rectángulo, levantaron la mano M1, M2, H1, H6, H7 y H9. Luego preguntó quienes de primero utilizaron el argumento de integrar, M3, H2, H3 y H4 levantaron la mano. [VG]-6-|01:23:49| P: ¿Cuánto da el área, bajo la curva? ((refiriéndose a $y = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$)) H3: Cero. P: Cero, ¿por qué? H1: Dos argumentos (x)uno geométrico que son áreas de misma magnitud, pero ajá áreas sobre la curva es positivo y bajo la curva negativa, o ya haciendo integrales. [VG]-6-|01:25:59|- el profesor pregunta qué sucede con los demás y los estudiantes responden que lo mismo y que los argumentos son los mismos, uno geométrico y el otro con integrales definidas.
$y = \frac{a_0}{2}$	$A = \frac{a_0}{2}p$ [VG]-6-|01:22:28|- $y = \frac{a_0}{2}$ el profesor pregunta quién usó primero el argumento del rectángulo, M2 levantó la mano.		$A = p\frac{a_0}{2}$ En la hoja hice las integrales [VG]-6-|01:22:28|- $y = \frac{a_0}{2}$ el profesor pregunta quién usó primero el argumento del rectángulo, H1 levantó la mano, e indicó que terminó calculando la integral porque los demás casos eran más complejos.		$A_0 = \frac{a_0}{2}\int_0^p dt = \frac{a_0}{2}p$		
$y = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$	$A = 0$ (argumentación en la hoja)		$A = 0$ En la hoja hice las integrales		$A_1 = a_1\int_0^p \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)dt = 0$		
$y = b_1 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$	$A = 0$		$A = 0$		$A_2 = b_1\int_0^p \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{p}t\right)dt = 0$		
$y = a_2 \cos\left(\frac{4\pi}{p}t\right)$	$A = 0$		$A = 0$		$A_3 = a_2\int_0^p \cos\left(\frac{4\pi}{p}t\right)dt = 0$		

Parte I. **El cálculo de a_0**

Intención: Significar el cálculo del coeficiente de Fourier $\boldsymbol{a_0}$, a partir de la articulación de los registros geométrico-analítico y algebraico, para validar el segundo en el primero.

Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
$y = b_2 \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{p}t\right)$	$A = 0$		$A = 0$		$A_4 = b_2\int_0^p \operatorname{Sen}\left(\frac{4\pi}{p}t\right)dt = 0$		
$y = a_3 \cos\left(\frac{6\pi}{p}t\right)$	$A = 0$		$A = 0$		$A_5 = a_3\int_0^p \cos\left(\frac{6\pi}{p}t\right)dt = 0$		
$y = b_3 \operatorname{sen}\left(\frac{6\pi}{p}t\right)$	$A = 0$		$A = 0$		$A_6 = b_3\int_0^p \operatorname{Sen}\left(\frac{6\pi}{p}t\right)dt = 0$		
Intencionalidad	Se busca que el estudiante se percate de que el área bajo la curva de los términos de la serie son todos iguales a cero, salvo el del término constante $\frac{a_0}{2}$, que tiene área $\frac{a_0 p}{2}$ en un intervalo de tamaño p.						
¿Qué hace?	Comparar las regiones sombreadas. Geometrizar el área bajo la curva. Calcular el valor de las áreas bajo la curva solicitadas.	Comparar las regiones sombreadas. Calcular el valor de las áreas bajo la curva solicitadas.	Comparar las regiones sombreadas. Geometrizar el área bajo la curva. Calcular el valor de las áreas bajo la curva solicitadas.	Comparar las regiones sombreadas. Calcular el valor de las áreas bajo la curva solicitadas.	Comparar las regiones sombreadas. Calcular el valor de las áreas bajo la curva solicitadas.	Comparar las regiones sombreadas. Geometrizar el área bajo la curva. Calcular el valor de las áreas bajo la curva solicitadas.	Comparar las regiones sombreadas. Geometrizar el área bajo la curva. Calcular el valor de las áreas bajo la curva solicitadas.
¿Cómo hace?	Observando las regiones sombreadas en las gráficas. Identificando una figura geométrica conocida. Calculando las integrales definidas correspondientes.	Observando las regiones sombreadas en las gráficas. Calculando las integrales definidas correspondientes.	Observando las regiones sombreadas en las gráficas. Identificando una figura geométrica conocida. Calculando las integrales definidas correspondientes.	Observando las regiones sombreadas en las gráficas. Calculando las integrales definidas correspondientes.	Observando las regiones sombreadas en las gráficas. Calculando las integrales definidas correspondientes.	Observando las regiones sombreadas en las gráficas. Identificando una figura geométrica conocida. Calculando las integrales definidas correspondientes.	Observando las regiones sombreadas en las gráficas. Identificando una figura geométrica conocida. Calculando las integrales definidas correspondientes.
Argumentos (A) y confrontaciones (C) presentados.	(A) El valor de cada área sombreada es la misma. (A) Para $y = \frac{a_0}{2}$ el área en un intervalo de tamaño p corresponde al área de un rectángulo. (A) El cálculo de los casos generales $\int_0^p c\cos\left(\frac{m\pi}{p}t\right)dt$ y $\int_0^p b\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{p}t\right)dt$, con $m, n \in \mathbb{N}$.	(A) El valor de cada área sombreada es la misma. (A) El cálculo de las integrales en cada caso.	(A) El valor de cada área sombreada es la misma. (A) Para $y = \frac{a_0}{2}$ el área en un intervalo de tamaño p corresponde al área de un rectángulo. (A) El cálculo de los casos generales $\int_0^p a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)dt$ y $\int_0^p b_k\operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)dt$, con $m, n \in \mathbb{N}$.	(A) El valor de cada área sombreada es la misma. (A) El cálculo de las integrales en cada caso.	(A) El valor de cada área sombreada es la misma. (A) El cálculo de las integrales en cada caso.	(A) El valor de cada área sombreada es la misma. (A) Para $y = \frac{a_0}{2}$ el área en un intervalo de tamaño p corresponde al área de un rectángulo. (A) Para las integrales que tienen senos o cosenos se pueden observar las regiones con área positiva y negativa. (A) El cálculo de las integrales en cada caso.	(A) El valor de cada área sombreada es la misma. (A) Para $y = \frac{a_0}{2}$ el área en un intervalo de tamaño p corresponde al área de un rectángulo. (A) Para las integrales que tienen senos o cosenos se pueden observar las regiones con área positiva y negativa. (A) El cálculo de las integrales en cada caso.
Pregunta c	Las áreas son iguales. 		Las áreas son iguales ya que $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{3} a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + \sum_{k=1}^{3} b_k\operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ Y las áreas de los términos trigonométricos son 0 ya que se anulan por simetría al sumar las áreas superiores y restar las inferiores.			[VE3]-6-|00:21:51| M3: Pues solamente sería el área de esta, ¿no? Porque todas las demás áreas van a ser cero. H3: Pero no sé si te pregunta por este $f(t)$, porque toda las demás son y. M3: No:::, o sea sí, pero son componentes en X y en Y. H3: Ya vi, la siguien- no, la secuencia muestra los términos de la serie (3) ¿a poco valen lo mismo? M3: ¿Qué? H3: Esta y esta. M3: Pos al parecer, ¿no? Tiene sentido por que al sumar esta cosa ((hace un sonido para expresarse)) [VE3]-6-|00:23:00| M3: Aquí dice explique su respuesta de forma geométrica. Eso no lo *wacho*, es que de manera algebraica el $f(t)$ se escribe como $\frac{a_0}{2}$ más la sumatoria, ¿no? Pero esa sumatoria suma dio A cero. H3: Esa sumatoria vale cero. M3: Ajá, eso es por que siempre están en cero entonces no importa cuántos existen, van a seguir valiendo cero, entonces solamente el área sería la integral de esta. H3: Pero de forma geométrica. M3: Como (incomprensible, 1) H3: ¿Qué sería eso? Sería como dibujarlo, ¿no? [VE3]-6-|00:26:19| H3: Eso significa que el área bajo la curva, de que esta área es igual a esta. Ese sería el argumento geométrico, creo yo. M3: Tiene sentido.	[VG]-6-|01:26:36| M2: Son iguales P: Ajá ¿por qué? H4: Se supone que $f(t)$ es la, con expansión de senos y cosenos, bueno esta expandida en senos y cosenos. P: Ujú. H4: Entonces integramos en un ciclo y todas la integrales son cero, menos (x)la primera M3: [la de a_0]. H4: [la del a_0]. Entonces ya solo queda la integral de $f(t)$ es igual a a_0 por p entre 2. Y geométricamente, pues ya vimos que todas las demás son cero, ¿no? Porque simétricamente se van anulando sus áreas y solo queda que el área del rectangulito es igual al área de la curva $f(t)$.
Pregunta d	$a_0 = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)dt$		$a_0 = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)dt$ 		$a_0 = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)dt$	[VE3]-6-|00:39:27| H3: Propón una fórmula para calcular el valor de a_0 [en términos] M3: [En términos] de $f(t)$, pero es ya la integral, ¿no? H3: Eso yo pensé, yo dije <u>sí</u>, porque si las integrales valen lo mismo, tienen la misma área, pero es que aquí decía que son iguales. M3: Mmm, es que (x)yo siento que $f(t)$ lo puedes expresar así, ¿no? H3: No, ya sé, porque si tienes, ¡ay! (25) Es como una manera de ver de donde salen las series de Fourier	[VG]-6-|01:28:35|- H4 para a escribir a la pizarra su respuesta.  El profesor hace el comentario de que esto sale a partir del último argumento de la pregunta anterior, la igualdad de las áreas, y los estudiantes afirman que así es.
Intencionalidad	Se pretende que el estudiante utilice argumentos geométricos y sus conocimientos sobre integral definida para decir que el área bajo la curva de la función $f(t)$ es igual a la suma de las áreas bajo la curva de los términos de la serie. De esta manera el estudiante puede construir la fórmula para el cálculo con un significado asociado a la noción de área bajo la curva.						
¿Qué hace?	Equivaler el área bajo la curva de la función con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica.	Equivaler el área bajo la curva de la función con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica.	Equivaler el área bajo la curva de la función con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica.	Equivaler el área bajo la curva de la función con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica.	Equivaler el área bajo la curva de la función con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica.	Equivaler el área bajo la curva de la función con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica.	Equivaler el área bajo la curva de la función con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica.
¿Cómo hace?	Utilizando la integral definida sobre la igualdad presentada.	Utilizando la integral definida sobre la igualdad presentada.	Utilizando la integral definida sobre la igualdad presentada.	Utilizando la integral definida sobre la igualdad presentada.	Utilizando la integral definida sobre la igualdad presentada.	Utilizando la integral definida sobre la igualdad presentada.	Utilizando la integral definida sobre la igualdad presentada.
Argumentos (A) y confrontaciones (C) presentados.	(A) Si A representa la función área, $A(f(t)) = A\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k\operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\right)$.	(A) Si A representa la función área, $A(f(t)) = A\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k\operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\right)$.	(A) Si A representa la función área, $A(f(t)) = A\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k\operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\right)$.	(A) Si A representa la función área, $A(f(t)) = A\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k\operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\right)$.	(A) Si A representa la función área, $A(f(t)) = A\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k\operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\right)$.	(A) Si A representa la función área, $A(f(t)) = A\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k\operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\right)$.	(A) Si A representa la función área, $A(f(t)) = A\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k\operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\right)$.

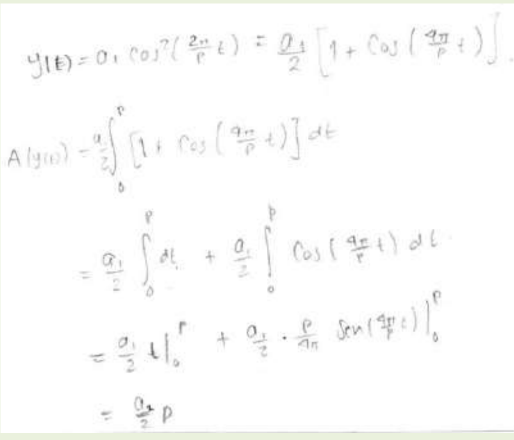
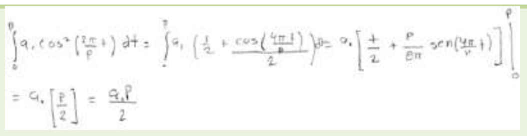
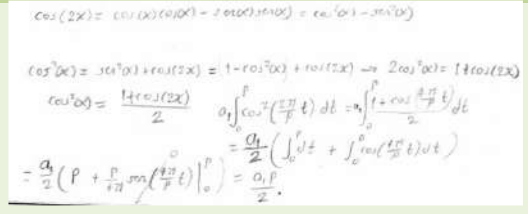
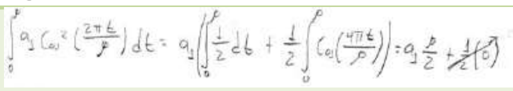
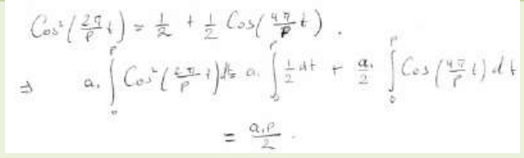
Parte II. **El cálculo de a_k**

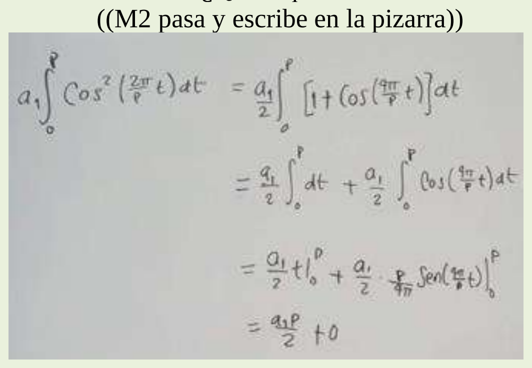
Intención: Significar el cálculo del coeficiente de Fourier $\boldsymbol{a_k}$, a partir de la articulación de los registros geométrico-analítico y algebraico, para validar el segundo en el primero.

Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
Pregunta a	Las áreas sombreadas son iguales. El área bajo la curva de la función $y = a_1\operatorname{Cos}^2\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ es $A = \frac{a_1}{2}p$	El area es la misma. El valor de la integral esta en la tarea 6, parte 2, hoja 11.	Son iguales las área por simetría. $A = \frac{a_1 p}{2}$	Tienen el mismo valor.	La suma de las áreas del doble ashurado es la misma que la suma de las áreas del ashurado simple.	[VE3]-6-|01:28:48| M3: ¿Cuál es la relación entre las áreas sombreadas? Eh::: el área es la misma, ¿no?	[VG]-6-|02:43:02| P: ¿Cuál es la relación entre las áreas sombreadas? Acá está esta rayadita así y

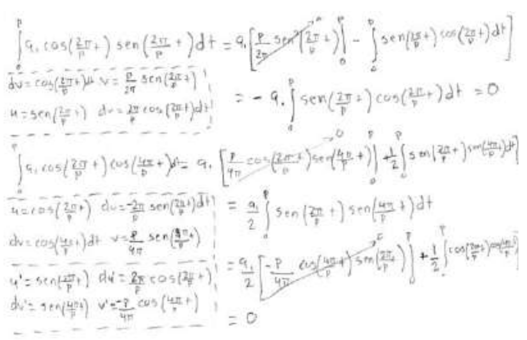
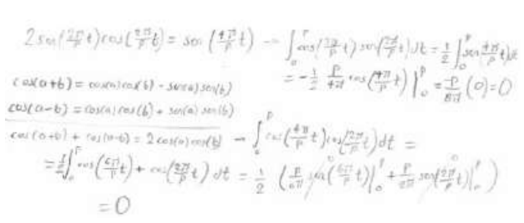
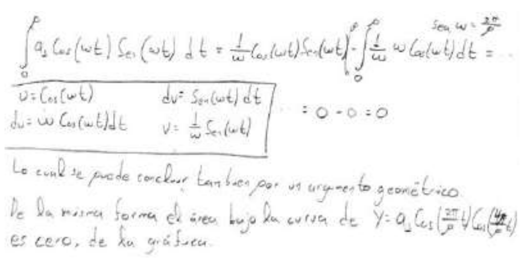
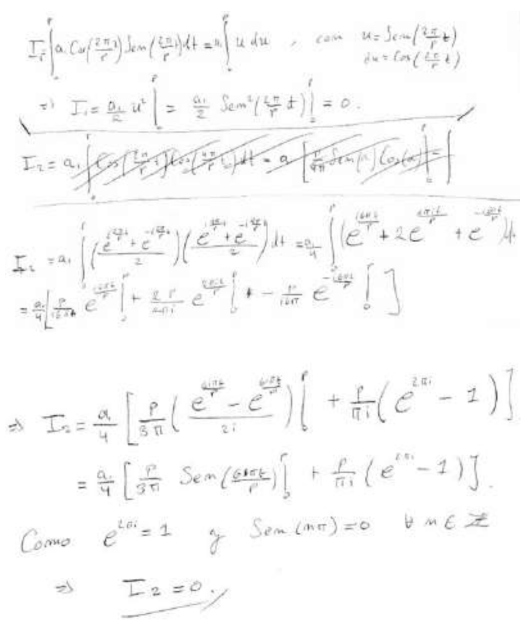
Parte II. **El cálculo de a_k**

Intención: Significar el cálculo del coeficiente de Fourier a_k, a partir de la articulación de los registros geométrico-analítico y algebraico, para validar el segundo en el primero.

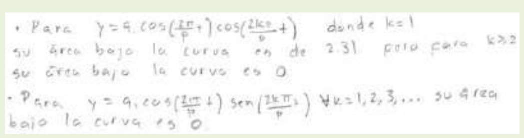
<table>
<tr><th>Estudiante</th><th>M2</th><th>M3</th><th>H1</th><th>H3</th><th>H4</th><th>Equipo 3</th><th>Puesta en común</th></tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td>[VE3]-6-|01:29:41|
M3: ¿Cuál es el valor del área bajo la cur-? Uh::: a ver, vamos a integrar.

[VE3]-6-|01:31:06|- entre M3 y H3 discuten la resolución algebraica-analítica de la integral, primero consideran aplicar el método de integración por partes para tratar de observar una integral cíclica. Se deciden al final por utilizar la identidad $\cos^2 u = \frac{1+\cos(2u)}{2}$ para reescribir la expresión y calcular la integral de forma directa, concluyendo que el área bajo la curva es igual a $\frac{a_1 p}{2}$.</td>
<td>la cuadriculada, ¿verdad? Entonces cuál es la relación.
H4: La cuadriculada es la misma que la rayadita.
P: Son lo mismo, ¿verdad? ((los estudiantes asienten con la cabeza)) Ahí lo pueden ver, ¿verdad? Como que este con este es uno de estos, ¿verdad? ((señalando las regiones sombreadas))
H6: Por simetría.
P: Y este es el otro, por simetría, ¿verdad? Y luego pregunta cuál es el valor del área bajo la curva y igual a_1 coseno cuadrado, en un intervalo de longitud p.
H4: a_1 por $\frac{p}{2}$.
P: a_1 por $\frac{p}{2}$ y cómo lo:::
M2: Integrando.
P: Hicieron la integral ((los estudiantes asienten con la cabeza)) de coseno cuadrado ¿Quién quiere venir a hacerla? ((M2 pasa y escribe en la pizarra))


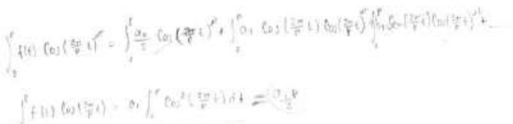
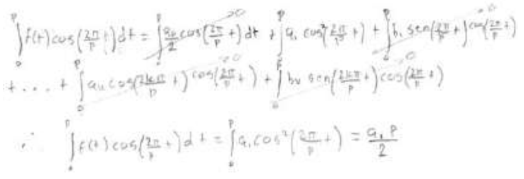
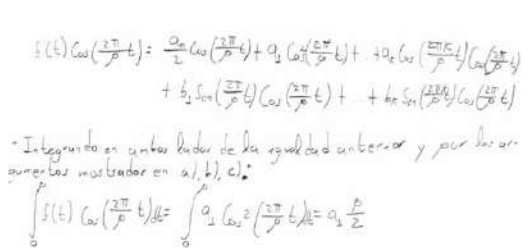
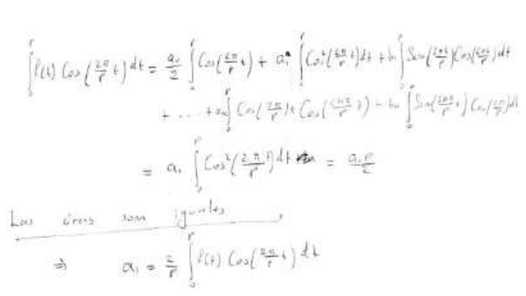
[VG]-6-|02:45:19|- M2 explica que utilizó la identidad $\cos^2 u = \frac{1+\cos(2u)}{2}$ para resolver la integral, además explica el resto de la solución.

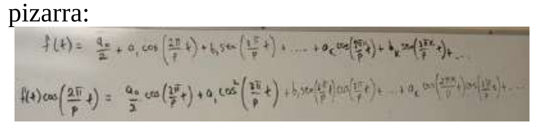
[VG]-6-|02:45:54|
P: ¿Todos lo hicieron de esa manera?
H9: También se:::, si es por simetría queda el área igual a la misma, entonces calcular nada más el área del rectángulo y lo dividís entre 2.</td>
</tr>
<tr>
<td>Pregunta b</td>
<td>Por simetría, el área bajo la curva en cada caso es cero.</td>
<td></td>
<td>En cada caso el área es 0.
</td>
<td></td>
<td></td>
<td>[VE3]-6-|01:36:26|- M3 y H3 empiezan la resolución algebraica-analítica de la integral, al parecer de forma individual.

[VE3]-6-|01:39:43|
M3: A mi no me daba cero.
H3: ¿La de coseno por seno? Mira es esto, esto, esto y esto ((señalando las regiones de la gráfica)). El argumento lo de los valores geométricos se ve que da cero.
M3: Déjame hacerlo (incomprensible, 1)
H3: “M3” ((se refiere a M3 por su nombre)) checa la grafiquirri.
M3: Sí, ahorita veo la grafiquirri (3) sí, sí da cero.
H3: (Incomprensible, 2) es que mira, aquí también se ve, ¿no? Aquí está ((se escucha un sonido como señalando en la pantalla de la computadora))
M3: Sí, esa madre.
H3: Y la otra también ((se escucha un sonido como señalando en la pantalla de la computadora))</td>
<td>[VG]-6-|02:48:23|
H3: Cero.
P: Cero ¿qué estrategia usaron?
H1: Integrales ((varios estudiantes responden a la vez)).
P: Integraron directo, ¿verdad? ¿Cómo lo pueden ver con la gráfica?

[VG]-6-|02:48:33|- los estudiantes, varios a la vez, explica que se pueden hacer corresponder las regiones para darse cuenta que el área bajo la curva es igual a cero, en ambos casos.</td>
</tr>
<tr>
<td>Pregunta c</td>
<td>Según la applet, y la función $y = a_1 \operatorname{Cos}\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\operatorname{Cos}\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)$, el área bajo la curva es $A = a_1\frac{p}{2}$ para el caso k=1, luego, para k>1, el área es cero.
Mientras que para la función $y = a_1 \operatorname{Cos}\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\operatorname{Sen}\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)$ el área bajo la curva es cero para todo k.</td>
<td></td>
<td><table><tr><th>k</th><th>cos cos</th><th>cos sen</th></tr><tr><td>1</td><td>$\frac{a_1 p}{2}$</td><td>0</td></tr><tr><td>2</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>3</td><td>0</td><td>0</td></tr></table></td>
<td>En todos los casos valen cero, excepto por el área bajo la curva de $y = a_1\cos^2\left(\frac{2\pi}{p}\right)$, este razonamiento incluye literalmente a todos los demás términos.</td>
<td>De acuerdo al Applet, para $k \neq 1$ en los términos del Cose, todas las áreas son cero. Para la g´rafica de Seno y Coseno, las áreas son cero $\forall k \in \mathbb{Z}$</td>
<td>[VE3]-6-|01:44:39|- Se ve en la pantalla de H3 que para responder primero manipula el applet variando los valores de k y en algunos casos se nota como el cursor va sobre las áreas sombreadas comparando unas con otras.

[VE3]-6-|01:46:55|
M3: Todos valen cero.
(6)
H3: Ah no manches, es que por ejemplo, esta ((se ve en la pantalla de M3 que colocan $k = 1$)), esta área no vale cero.
M3: ¿Porqué no vale cero?
H3: Mira=
M3: =Ah::: por que esta no tiene parte negativa. En todas las demás ya sí.
(8) ((se ve en la pantalla de H3 que cambia los valores de k))
H3: Ah sí es cierto, mira en esta ((se refiere a la curva se coseno por seno)) también.
M3: No esa desde ahí ((se ve en la pantalla de H3 que colocan $k = 1$)) ya daba cero.</td>
<td>[VG]-6-|02:49:53|
H6: Pues, cuando k es igual a 1 da lo mismo, a_1 sobre 2 por p. Y para k distinto, bueno los demás k esos son cero. En
P: Todos son cero.
H6: En el caso de la morada es cero para cualquier k.

[VG]-6-|02:50:31|
P: ¿Calcularon las integrales?
H6: No ((la mayoría responde lo mismo)).
P: ¿O lo vieron con el:::
H3: Lo vimos de ahí ((señalando el applet))</td>
</tr>
<tr>
<td>Pregunta d</td>
<td>Las áreas son iguales
</td>
<td></td>
<td>Las áreas son iguales. Ya que los demás términos de la expansión trigonométrica se anulan.</td>
<td></td>
<td></td>
<td>[VE3]-6-|01:51:57|
M3: Estas se van a ir a cero, ¿no?
H3: Todas menos esta.
M3: Menos esta y la de a_0 dos.
H3: Esa tampoco.
M3: Ah no, sí, esta también vale cero, por que es el coseno de:::
H3: De una función entre el periodo, ¿no? Digo, de un coseno en su periodo.
M3: A parte no hemos calculado el coseno de esta, ¿no?
H3: ¿A poco?
M3: Sí, a bueno eso da cero.

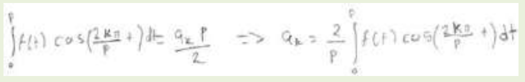
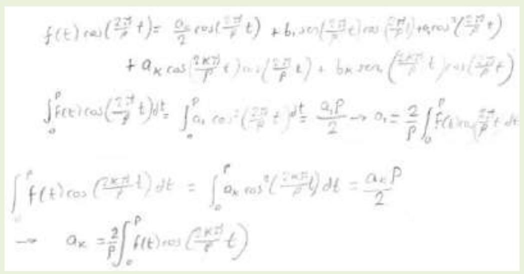
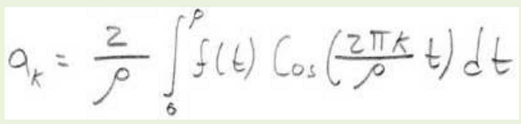
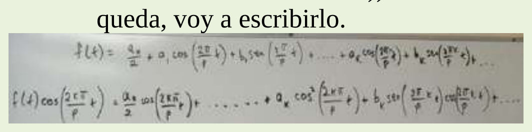
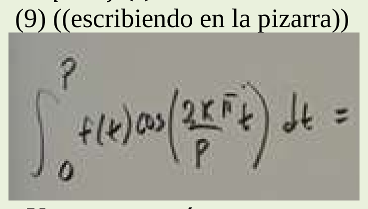
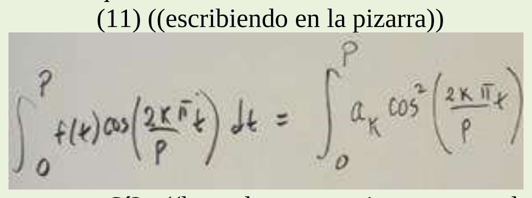
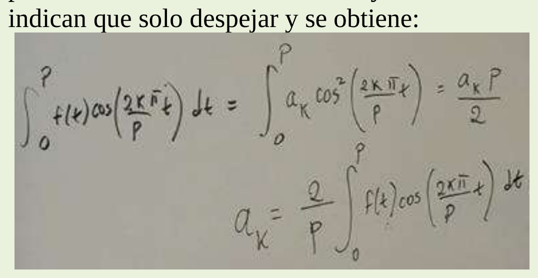
[VE3]-6-|01:51:57|
M3: Estas se van a ir a cero, ¿no?
H3: Todas menos esta.</td>
<td>[VG]-6-|02:51:49|- el profesor escribe en la pizarra:


[VG]-6-|02:53:18|
P: A partir de eso, dice ¿cuál es la relación entre el área bajo la curva de esta ((señalando el $f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$)) y el área bajo la curva de esta ((señalando el $a_1\cos^2\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$))?
M2: Es la misma ((varios alumnos responden junto con ella)).
P: Es la misma, ¿por qué?
H6: Porque las áreas se hacen cero.
H4: Si uno los integra, se van anulando los términos que no tienen coseno cuadrado. O sea, todos los que no tiene coseno cuadrado se anulan, por todo lo que ya vimos arriba.</td>
</tr>
</table>

Parte II. **El cálculo de $\boldsymbol{a_k}$**

Intención: Significar el cálculo del coeficiente de Fourier $\boldsymbol{a_k}$, a partir de la articulación de los registros geométrico-analítico y algebraico, para validar el segundo en el primero.

Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
Pregunta e	$a_1 = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\,\mathrm{Cos}\left(\frac{2\pi}{p}t\right)dt$	$\int_0^p f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) = \frac{a_1 p}{2} \Rightarrow a_1 = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$	$a_1 = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\,\mathrm{Cos}\left(\frac{2\pi}{p}t\right)dt$	$a_1 = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\,\mathrm{Cos}\left(\frac{2\pi}{p}t\right)dt$	$a_1 = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\,\mathrm{Cos}\left(\frac{2\pi}{p}t\right)dt$	No hubo interacción al responder esta pregunta.	[VG]-6-|02:51:49|- el profesor indica que a partir de la pregunta anterior se tiene lo siguiente: $\int_0^p f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)dt = \int_0^p a_1\cos^2\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ [VG]-6-|02:55:01|- M3 pasa a la pizarra y escribe: $\int_0^p f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)dt = \int_0^p a_1\cos^2\left(\frac{2\pi}{p}t\right) = \frac{a_1 p}{2}$ $\Rightarrow a_1 = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)dt$ [VG]-6-|02:55:53|- el profesor plantea la pregunta de cómo se interpreta el coeficiente a_1 geométricamente. [VG]-6-|02:57:08| H4: Con las gráficas. P: Ujú, ¿qué? H4: Por ejemplo, tendríamos la gráfica de $f(t)$ por $\cos\left(\frac{2\pi}{p}\right)$ y medimos el área de esa gráfica y luego tenemos la gráfica de a_1 por cosenos cuadrado (x)de p, ¿no? Entonces medimos el área, las comparamos.
Intencionalidad	Se espera que el estudiante signifique geométricamente la ortogonalidad de las funciones trigonométricas y que utilice este hecho para calcular el valor de a_1 pues, será capaz de identificar que la multiplicación de $\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ por cualquier otro término de la serie —excepto el término $\boldsymbol{a_1}\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$— tendrá área bajo la curva igual a cero, y a partir de ellos que el valor de $\frac{a_1 p}{2}$ corresponde al área bajo la curva que resulta de multiplicar la función $f(t)$ por $\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$. Lo que permite determinar el valor de a_1 en términos de $f(t)$, la función conocida.						
¿Qué hace?	**Comparar** las regiones sombreadas. **Calcular** el valor de las áreas bajo la curva solicitadas. **Observar** el valor del área bajo la curva para distintos valores de k. **Equivaler** el área bajo la curva de la función $f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por $\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$.	**Comparar** las regiones sombreadas. **Calcular** el valor de las áreas bajo la curva solicitadas. **Observar** el valor del área bajo la curva para distintos valores de k. **Equivaler** el área bajo la curva de la función $f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por $\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$.	**Comparar** las regiones sombreadas. **Calcular** el valor de las áreas bajo la curva solicitadas. **Observar** el valor del área bajo la curva para distintos valores de k. **Equivaler** el área bajo la curva de la función $f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por $\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$.	**Comparar** las regiones sombreadas. **Calcular** el valor de las áreas bajo la curva solicitadas. **Observar** el valor del área bajo la curva para distintos valores de k. **Equivaler** el área bajo la curva de la función $f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por $\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$.	**Comparar** las regiones sombreadas. **Calcular** el valor de las áreas bajo la curva solicitadas. **Observar** el valor del área bajo la curva para distintos valores de k. **Equivaler** el área bajo la curva de la función $f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por $\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$.	**Comparar** las regiones sombreadas. **Calcular** el valor de las áreas bajo la curva solicitadas. **Observar** el valor del área bajo la curva para distintos valores de k. **Equivaler** el área bajo la curva de la función $f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por $\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$.	**Comparar** las regiones sombreadas. **Geometrizar** el área bajo la curva. **Calcular** el valor de las áreas bajo la curva solicitadas. **Observar** el valor del área bajo la curva para distintos valores de k. **Equivaler** el área bajo la curva de la función $f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por $\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$.
¿Cómo hace?	Observando las regiones sombreadas en la gráfica. Calculando las integrales definidas correspondientes e identificando simetrías entre las regiones. Analizando el applet suministrado. Utilizando la integral definida sobre la igualdad presentada.	Observando las regiones sombreadas en la gráfica. Calculando las integrales definidas correspondientes. Analizando el applet suministrado. Utilizando la integral definida sobre la igualdad presentada.	Observando las regiones sombreadas en la gráfica. Calculando las integrales definidas correspondientes e identificando simetrías entre las regiones. Analizando el applet suministrado. Utilizando la integral definida sobre la igualdad presentada.	Observando las regiones sombreadas en la gráfica. Calculando las integrales definidas correspondientes e identificando simetrías entre las regiones. Analizando el applet suministrado. Utilizando la integral definida sobre la igualdad presentada.	Observando las regiones sombreadas en la gráfica. Calculando las integrales definidas correspondientes e identificando simetrías entre las regiones. Analizando el applet suministrado. Utilizando la integral definida sobre la igualdad presentada.	Observando las regiones sombreadas en la gráfica. Calculando las integrales definidas correspondientes e identificando simetrías entre las regiones. Analizando el applet suministrado. Utilizando la integral definida sobre la igualdad presentada.	Observando las regiones sombreadas en la gráfica. Identificando una figura geométrica concoida. Calculando las integrales definidas correspondientes e identificando simetrías entre las regiones. Analizando el applet suministrado. Utilizando la integral definida sobre la igualdad presentada.
Argumentos (A) y confrontaciones (C) presentados.	(A) El valor de cada área sombreada es la misma. (A) El cálculo de la integral $\int_0^p a_1\cos^2\left(\frac{2\pi}{p}t\right)dt = \frac{a_1}{2}p$. (A) Por simetría el área bajo la curva en cada caso es cero. (A) Según el applet, se observan los valores de las áreas bajo la curva. (A) Si A representa la función área, $A\left(f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\right) = A\left(\frac{a_0}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) + b_k\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\right)$.	(A) El valor de cada área sombreada es la misma. (A) El cálculo de la integral $\int_0^p a_1\cos^2\left(\frac{2\pi}{p}t\right)dt = \frac{a_1}{2}p$. (A) Según el applet, se observan los valores de las áreas bajo la curva. (A) Si A representa la función área, $A\left(f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\right) = A\left(\frac{a_0}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) + b_k\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\right)$.	(A) El valor de cada área sombreada es la misma, por simetría. (A) El cálculo de las integrales $\int_0^p a_1\cos^2\left(\frac{2\pi}{p}t\right)dt = \frac{a_1}{2}p$, $\int_0^p \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{p}t\right)dt = 0$, $\int_0^p \cos\left(\frac{4\pi}{p}t\right)\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)dt = 0$. (A) Según el applet, se observan los valores de las áreas bajo la curva. (A) Si A representa la función área, $A\left(f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\right) = A\left(\frac{a_0}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) + b_k\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\right)$.	(A) El valor de cada área sombreada es la misma. (A) El cálculo de las integrales $\int_0^p a_1\cos^2\left(\frac{2\pi}{p}t\right)dt = \frac{a_1}{2}p$, $\int_0^p \cos(\omega t)\,\mathrm{sen}(\omega t)\,dt = 0$. (A) Según el applet, se observan los valores de las áreas bajo la curva. (A) Si A representa la función área, $A\left(f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\right) = A\left(\frac{a_0}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) + b_k\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\right)$.	(A) El valor de cada área sombreada es la misma. (A) El cálculo de las integrales $\int_0^p a_1\cos^2\left(\frac{2\pi}{p}t\right)dt = \frac{a_1}{2}p$, $\int_0^p \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{p}t\right)dt = 0$, $\int_0^p \cos\left(\frac{4\pi}{p}t\right)\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)dt = 0$. (A) Según el applet, se observan los valores de las áreas bajo la curva. (A) Si A representa la función área, $A\left(f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\right) = A\left(\frac{a_0}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) + b_k\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\right)$.	(A) El valor de cada área sombreada es la misma. (A) El cálculo de las integrales. (A) Por simetría el área bajo la curva en cada caso es cero. (A) Según el applet, se observan los valores de las áreas bajo la curva. (A) Si A representa la función área, $A\left(f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\right) = A\left(\frac{a_0}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) + b_k\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\right)$.	(A) El valor de cada área sombreada es la misma. (A) Si es por simetría queda el área igual a la misma, entonces calcular nada más el área del rectángulo y lo dividís entre 2. (A) El cálculo de la integral $\int_0^p a_1\cos^2\left(\frac{2\pi}{p}t\right)dt = \frac{a_1}{2}p$. (A) Por simetría el área bajo la curva en cada caso es cero. (A) Según el applet, se observan los valores de las áreas bajo la curva. (A) Si A representa la función área, $A\left(f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\right) = A\left(\frac{a_0}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) + b_k\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\right)$.
Pregunta f	Para la función $y = a_k\,\mathrm{Cos}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\mathrm{Cos}\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$, según la applet, el área bajo la curva es $A = a_k\frac{p}{2}$ cuando k=m, y cero en cualquier otro caso. Para la función $y = a_k\,\mathrm{Cos}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\mathrm{Sen}\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$, el área bajo la curva es cero en cualquier caso.	En la primera expresión de "y" si k=m el valor del área bajo la curva es a_k2.1, mientras que en la segunda expresión de "y" si k=m el valor del área bajo la curva es 0. Ahora bien para la primera expresión de "y" si k y m son distintos el valor del área bajo la curva es 0, mientras que en la segunda expresión de "y" si k y m son distintos el área bajo la curva es 0.	En y cos cos el área es $\frac{a_k p}{2}$ si m=k y 0 si m diferente de k. En y sen cos el área siempre es 0 para todo m y k.	La función que contiene el seno por el coseno siempre tiene un área de bajo de ella igual a cero en un periodo. La función coseno por coseno tiene un área bajo la curva igual a cero si $m \neq n$, Solo cuando $m = n$ el área bajo la curva tiene un valor distinto de cero, más aun, para cualquier $k \in \mathbb{N}$ el área bajo la curva queda dada por $a_k\frac{p}{2}$	Cuando $k = m\ \forall k, m \in \mathbb{Z}$, el área es $A = \frac{a_k p}{2}$, en el caso contrario $k \neq m$, $A = 0$, siendo A el área bajo las curvas	[VE3]-6-|01:59:39|- Se ve en las pantallas de M3 y H3 que para responder primero manipulan el applet variando los valores de m y k. [VE3]-6-|02:00:22| H3: Cuando son iguales eso, solo cuando no se vale tu camote ((refiriéndose al valor de k)), ¿no? Cuando son distintas siempre vale cero. M3: Ah no ma-, a ver, dices tu que cuando son iguales es cuando sí va, hay valor principal, ¿no? No ma-, y ya ¿y todas valen 2.1 te has dado cuenta? H3: ¡Ajá:::! Valen lo mismo, entonces valen lo mismo que la que habíamos calculado, ¿no? Ah, sabiendo que (incomprensible, 3) M3: O sea, podríamos decir que, ah bueno, pero ¿y de esto? ((se refiere a las funciones que son coseno por seno)) [VE3]-6-|02:01:12| H3: Para la del coseno por seno, siempre están, ese siempre vale cero. M3: Sí. [VE3]-6-|02:05:10| H3: Pero::: por ejemplo cuando k tenga un valor mayor que 1, esto valga exactamente a_k´s por p's. M3: ¿En dónde? H3: Aquí. (Incomprensible, 1) Cuando son iguales, si vale lo mismo, pero estas viendo la pura cantidad, te falta multiplicar por la amplitud. M3: Pero es una constante. Cuando integras al fina de cuentas la amplitud siempre la sacas.	[VG]-6-|02:59:20| P: Hablemos de esta primero, coseno por coseno. H6: Si k es igual a m, el área es a_m sobre 2 por p. [VG]-6-|03:00:22| P: ¿Y si son distintos k y m? H3: Cero ((varios estudiantes responden con él)). P: Y lo vieron del::: H3: De ahí ((señalando el applet)) [VG]-6-|03:01:01| P: ¿Con este qué pasa? ((refiriéndose a las curvas coseno por seno)) M3: Cero ((varios estudiantes responden con ella)). P: Siempre es cero, ¿verdad? ((los estudiantes asienten con la cabeza))

Parte II.	**El cálculo de a_k**						
Intención:	Significar el cálculo del coeficiente de Fourier $\boldsymbol{a_k}$, a partir de la articulación de los registros geométrico-analítico y algebraico, para validar el segundo en el primero.						
Estudiante	**M2**	**M3**	**H1**	**H3**	**H4**	**Equipo 3**	**Puesta en común**
						H3: Entonces si queda (x)el coeficiente a subíndice k por p sobre 2, ¿no? M3: Pues sí, es una constante esto. Acuérdate que la, que integrar es una transformada bilineal. H3: O sea, sí, sí, sí, pero lo que digo es que integrando coseno cuadrado de cualquier cosa siempre te va a dar esto, p sobre 2. No lo *wacho*. Eso es lo que no *wacho*.	
Pregunta g	$a_k = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\,\mathrm{Cos}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)dt$	 $\int_0^p f(t)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)dt = \frac{a_k p}{2} \Rightarrow a_k = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)dt$	$a_k = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\,\mathrm{Cos}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)dt$ 	 $a_k = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\,\mathrm{Cos}\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)dt$	$a_k = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\,\mathrm{Cos}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)dt$	No hubo interacción al responder esta pregunta.	[VG]-6-|03:01:45| P: ¿Qué argumento utilizaron? M2: Lo hicimos similar a como lo hicimos para calcular a_1. P: Ujú, entonces ¿qué habría que hacer? H6: Multiplicar por $\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ ((los estudiantes asienten con la cabeza)). P: Ajá. Entonces sí, cómo que si quiero encontrar el coeficiente de a_k multiplico por::: M2: El coseno. P: Su respectivo coseno ((los estudiantes asienten con la cabeza)) Entonces e queda, voy a escribirlo.  [VG]-6-|03:02:54| P: ¿Y ahora? M2: Ahora integra todos, bueno integramos (incomprensible, 2). P: ¿Solo integramos así? (3) ¿o integramos de 0 a p? ((los alumnos asienten con la cabeza y ríen)) Sí, el área bajo la curva, ¿verdad? Entonces sería aquí integral de 0 a p de $f(t)$ (9) ((escribiendo en la pizarra))  $\int_0^p f(t)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)dt =$ ¿Y entonces qué pasa con estos, los que son seno por coseno? H3: Cero ((varios estudiantes responden junto con él)). P: Todos dan cero, por lo anterior. ¿Y los que son coseno por coseno? M2: Cero ((varios estudiantes asienten con al cabeza)). P: Todos dan cero, salvo el caso de coseno cuadrado que es el k por k, ¿verdad? k igual m. ¿Y este? ((señalando el término $a_0\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$)). M3: Da cero ((varios estudiantes responden junto con ella)). P: También da cero, ¿verdad? Entonces nos queda de este lado (11) ((escribiendo en la pizarra))  $\int_0^p f(t)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)dt = \int_0^p a_k\cos^2\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ ¿Sí? ((los alumnos asienten con la cabeza)) ¿Y esta da? M3: $a_k p$ sobre 2 ((H3 responde junto con ella)). [VG]-6-|03:04:22|- el profesor pregunta que falta para dar la fórmula solicitada y los alumnos indican que solo despejar y se obtiene:  $\int_0^p f(t)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)dt = \int_0^p a_k\cos^2\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) = \frac{a_k p}{2}$ $a_k = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)dt$
Pregunta h	Si tomamos k=0 se llega a la fórmula propuesta anteriormente.	Se puede decir que la formula de a_k es la generalidad y la formula de a_0 es una particularidad.	Es más general la última que la primera.	El caso de a_0, se observa que es un caso específico de la expresión encontrada en el inciso anterior cuando $k = 0$.	Esta necesita que se le multplique el término $\mathrm{Cos}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$.	[VE3]-6-|02:11:48| H3: Lo que sí se vale es que es casi lo mismo, encuentras el área bajo la curva, pero de esta función. Es el área bajo la curva de la función, pero multiplicada por la función coseno. M3: Sí, echémosle eso ((no muy convencida)). [VE3]-6-|03:02:21|- Tanto M3 como H3 cambian su respuesta después de la puesta en común.	[VG]-6-|03:04:59| M2: Es un caso particular, cuando k igual a cero.
Intencionalidad	Las preguntas de esta parte tienen la misma intención que las propuestas para el cálculo de $\boldsymbol{a_1}$, la idea es que utilicen argumentos similares para concluir que el valor de $\boldsymbol{a_k}$ está dado por la fórmula: $\frac{2}{p}\int_0^p f(t)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)dt$, cuyo significado esté asociado al área bajo la curva.						
¿Qué hace?	**Observar** el valor del área bajo la curva para distintos valores de k y m. **Equivaler** el área bajo la curva de la función $f(t)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por $\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$.	**Observar** el valor del área bajo la curva para distintos valores de k y m. **Equivaler** el área bajo la curva de la función $f(t)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por $\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$.	**Observar** el valor del área bajo la curva para distintos valores de k y m. **Equivaler** el área bajo la curva de la función $f(t)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por $\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$.	**Observar** el valor del área bajo la curva para distintos valores de k y m. **Equivaler** el área bajo la curva de la función $f(t)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por $\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$.	**Observar** el valor del área bajo la curva para distintos valores de k y m. **Equivaler** el área bajo la curva de la función $f(t)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por $\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$.	**Observar** el valor del área bajo la curva para distintos valores de k y m.	**Observar** el valor del área bajo la curva para distintos valores de k y m. **Equivaler** el área bajo la curva de la función $f(t)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por $\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$.
¿Cómo hace?	Analizando el applet suministrado. Utilizando la integral definida sobre la igualdad presentada.	Analizando el applet suministrado. Utilizando la integral definida sobre la igualdad presentada.	Analizando el applet suministrado. Utilizando la integral definida sobre la igualdad presentada.	Analizando el applet suministrado. Utilizando la integral definida sobre la igualdad presentada.	Analizando el applet suministrado. Utilizando la integral definida sobre la igualdad presentada.	Analizando el applet suministrado.	Analizando el applet suministrado. Utilizando la integral definida sobre la igualdad presentada.
Argumentos (A) y confrontaciones (C) presentados.	(A) Se nota a partir del applet, que el área bajo la curva en cada caso es cero. (A) El área bajo la curva de la función $f(t)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva de	(A) Se nota a partir del applet, que el área bajo la curva en cada caso es cero. (A) El área bajo la curva de la función $f(t)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva de	(A) Se nota a partir del applet, que el área bajo la curva en cada caso es cero. (A) El área bajo la curva de la función $f(t)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva de	(A) Se nota a partir del applet, que el área bajo la curva en cada caso es cero. (A) El área bajo la curva de la función $f(t)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva de	(A) Se nota a partir del applet, que el área bajo la curva en cada caso es cero. (A) El área bajo la curva de la función $f(t)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva de	(A) Se nota a partir del applet, que el área bajo la curva en cada caso es cero.	(A) Se nota a partir del applet, que el área bajo la curva en cada caso es cero. (A) El área bajo la curva de la función $f(t)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva de

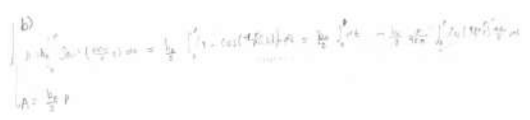
Parte II. **El cálculo de a_k**

Intención: Significar el cálculo del coeficiente de Fourier $\boldsymbol{a_k}$, a partir de la articulación de los registros geométrico-analítico y algebraico, para validar el segundo en el primero.

Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
	la expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por cos $\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$.	la expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por cos $\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$.	la expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por cos $\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$.	la expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por cos $\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$.	la expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por cos $\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$.		la expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por cos $\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$.

Parte III. **El cálculo de b_k**

Intención: Significar el cálculo del coeficiente de Fourier $\boldsymbol{b_k}$, a partir de la articulación de los registros geométrico-analítico y algebraico, para validar el segundo en el primero.

Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
Pregunta a	Para la función $y = b_k$ Sen $\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ Sen $\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$ el área bajo la curva es $A = \frac{p}{2}b_k$ cuando k=m, y cero en otro caso, mientras que para la función $y = b_k$ Sen $\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ Cos $\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$ es cero para cualquier	En la primera expresión de "y" si k=m el valor del área bajo la curva es b_k3.16, mientras que en la segunda expresión de "y" si k=m el valor del área bajo la curva es 0. Ahora bien para la primera expresión de "y" si k y m son distintos el valor del área bajo la curva es 0, mientras que en la segunda expresión de "y" si k y m son distintos el área bajo la curva es 0.	Para y=sen sen el área es $\frac{b_k p}{2}\delta_{km}$. Para y=sen cos el área es o para toda k,m.	En esta ocasión, la función que contiene seno por seno es cero siempre que $m \neq k$ y el área bajo la curva vale $a_k \frac{p}{2}$ cuando $m = n$. El el caso de las funciones que contienen seno por coseno, de nuevo, el valor del área bajo la curva es igual a cero en todos los casos.	Para el caso de $k = m$, $A = \frac{b_k p}{2}$, en el caso en que $k \neq m \forall k, m \epsilon \mathbb{Z}$, A=0, donde A es el área bajo las curvas.	[VE3]-6-|02:15:20| M3: Ay va a ser lo mismo, seguramente va a dar. H3: Lo mismo, pero con seno, ¿no? M3: No tiene sentido. Ay, ya sé que voy a hacer ((se va a la Parte II pregunta f)), porque me da weba escribir todo esto otra vez, lo voy a copiar y después le voy a cambiar eso. [VE3]-6-|02:15:55| M3: Es lo mismo, ¿no? (Incomprensible, 1) Se ve claramente.	[VG]-6-|03:12:47| P: Entonces cuando k igual a m, ¿entonces el área da? H3: b_k P: b_k H3: Periodo p entre 2. P: Por p entre 2. Ajá, por el periodo entre 2. ¿Y cuando k es distinto de m? M3: Cero. P: Cero ¿y en el caso de sen por coseno? H3: Siempre vale cero.
Pregunta b	$b_k = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\,\text{Sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)dt$ 	$\int_0^p f(t)\,\text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)dt = \frac{b_k p}{2} \Rightarrow b_k = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\,\text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)dt$	$b_k = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\,\text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)dt$	$b_k = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)dt$	$b_k = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\,\text{Sen}\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)dt$	[VE3]-6-|01:31:06|- M3 revisa la identidad $\text{sen}^2 u = \frac{1-\cos(2u)}{2}$ y le indica a M3 que va a valer lo mismo (refiriéndose a lo obtenido en la Parte II).	[VG]-6-|03:13:20|- se pone en común que el razonamiento es similar al utilizado en la Parte II para calcular a_k, con la diferencia de que se debe multiplicar por sen $\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ para luego integrar de 0 a p. Al final se despeja el valor de b_k para obtener la fórmula solicitada.
Intencionalidad	Se busca que el estudiante utilice estrategias similares a las utilizadas para calcular a_k, y de esta manera concluir que $b_k = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\,\text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)dt$.						
¿Qué hace?	**Observar** el valor del área bajo la curva para distintos valores de k y m. **Equivaler** el área bajo la curva de la función $f(t)$ sen $\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por sen $\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$.	**Observar** el valor del área bajo la curva para distintos valores de k y m. **Equivaler** el área bajo la curva de la función $f(t)$ sen $\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por sen $\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$.	**Observar** el valor del área bajo la curva para distintos valores de k y m. **Equivaler** el área bajo la curva de la función $f(t)$ sen $\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por sen $\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$.	**Observar** el valor del área bajo la curva para distintos valores de k y m. **Equivaler** el área bajo la curva de la función $f(t)$ sen $\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por sen $\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$.	**Observar** el valor del área bajo la curva para distintos valores de k y m. **Equivaler** el área bajo la curva de la función $f(t)$ sen $\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por sen $\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$.	**Observar** el valor del área bajo la curva para distintos valores de k y m.	**Observar** el valor del área bajo la curva para distintos valores de k y m. **Equivaler** el área bajo la curva de la función $f(t)$ sen $\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por sen $\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$.
¿Cómo hace?	Analizando el applet suministrado. Utilizando la integral definida sobre la igualdad presentada.	Analizando el applet suministrado. Utilizando la integral definida sobre la igualdad presentada.	Analizando el applet suministrado. Utilizando la integral definida sobre la igualdad presentada.	Analizando el applet suministrado. Utilizando la integral definida sobre la igualdad presentada.	Analizando el applet suministrado. Utilizando la integral definida sobre la igualdad presentada.	Analizando el applet suministrado.	Analizando el applet suministrado. Utilizando la integral definida sobre la igualdad presentada.
Argumentos (A) y confrontaciones (C) presentados.	(A) Se nota a partir del applet, que el área bajo la curva en cada caso es cero. (A) El área bajo la curva de la función $f(t)$ sen $\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva de la expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por sen $\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$.	(A) Se nota a partir del applet, que el área bajo la curva en cada caso es cero. (A) El área bajo la curva de la función $f(t)$ sen $\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva de la expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por sen $\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$.	(A) Se nota a partir del applet, que el área bajo la curva en cada caso es cero. (A) El área bajo la curva de la función $f(t)$ sen $\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva de la expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por sen $\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$.	(A) Se nota a partir del applet, que el área bajo la curva en cada caso es cero. (A) El área bajo la curva de la función $f(t)$ sen $\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva de la expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por sen $\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$.	(A) Se nota a partir del applet, que el área bajo la curva en cada caso es cero. (A) El área bajo la curva de la función $f(t)$ sen $\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva de la expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por sen $\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$.	(A) Se nota a partir del applet, que el área bajo la curva en cada caso es cero.	(A) Se nota a partir del applet, que el área bajo la curva en cada caso es cero. (A) El área bajo la curva de la función $f(t)$ sen $\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva de la expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por sen $\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$.

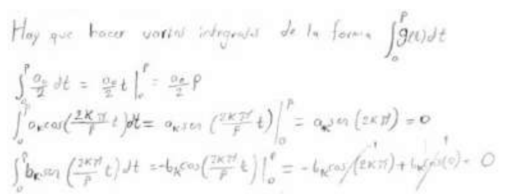
9.7.8 Tarea #6. Etapa 2: Identificación de los invariantes de las acciones

TAREA #6

Objetivo de la Tarea: Significar el cálculo de los coeficientes de Fourier utilizando argumentaciones gráficas y geométricas, tal y como lo hizo Fourier.

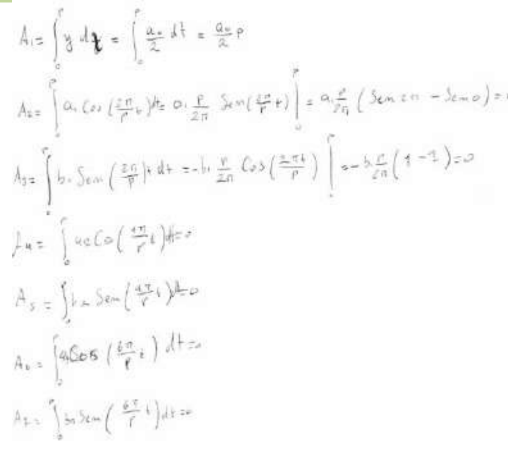
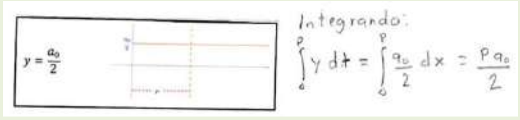
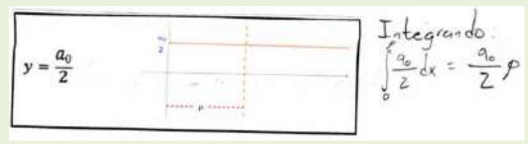
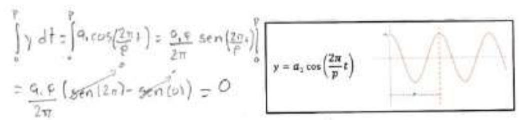
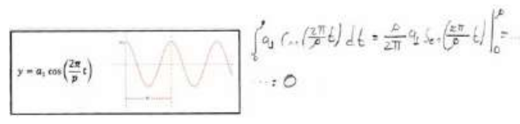
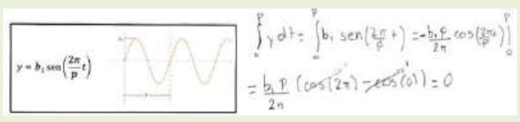
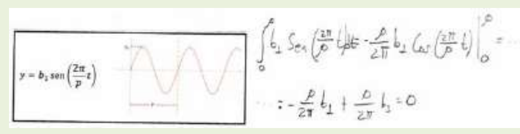
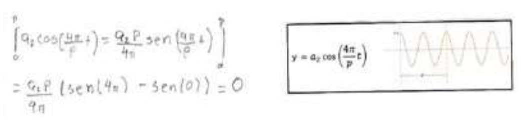
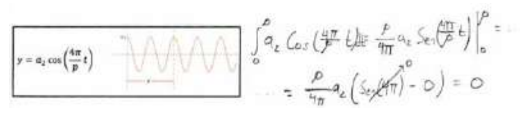
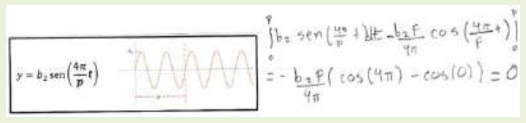
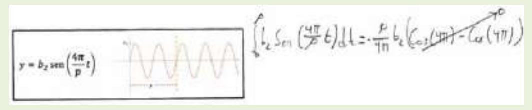
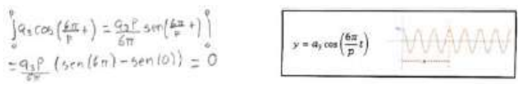
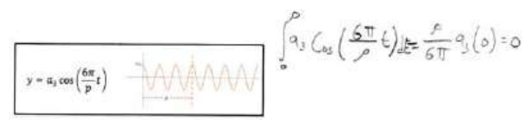
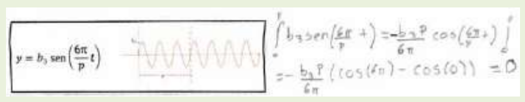
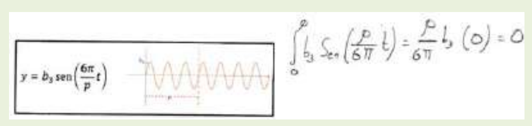
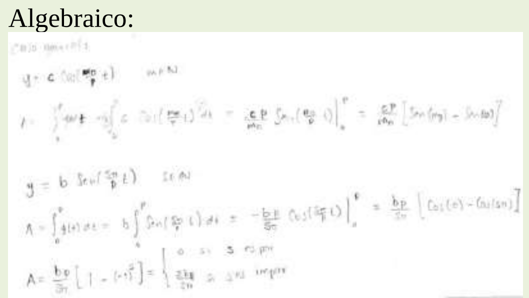
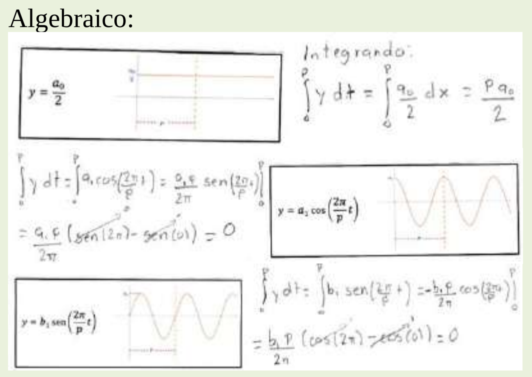
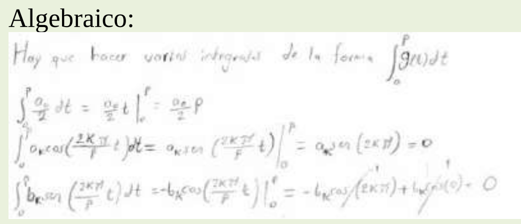
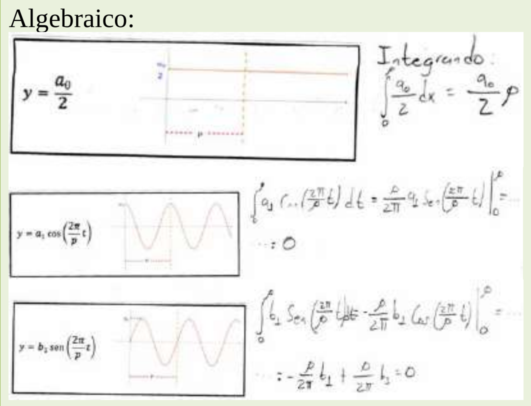
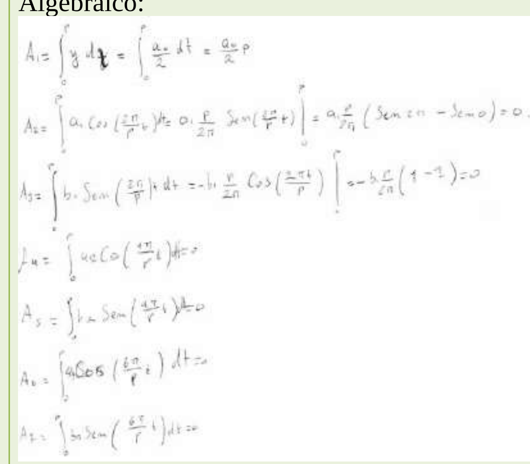
Parte I. **El cálculo de a_0**

Intención: Significar el cálculo del coeficiente de Fourier $\boldsymbol{a_0}$, a partir de la articulación de los registros geométrico-analítico y algebraico, para validar el segundo en el primero.

Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
Pregunta a	El valor de cada área sombreada es la misma [VG]-6-|01:21:14|- el profesor pregunta quien dio respuesta solo a partir de ver la gráfica, M2 levanta la mano.	Que ambas regiones en el intervalo de p, sus áreas son 0. Ya que tienen simetria.	Todas las regiones sombreadas tienen la misma área.	Representan áreas bajo la curva semejantes, para saber en que medida se relacionan es necesario conocer la relación entre a_1 y b_1. Para cada una, es claro de la gráfica que el valor de las áreas es igual.	En cada región se representa un cuarto del periodo. El área bajo la curva de cada una es un cuarto del áreabajo la corva de toda la sección.	[VE3]-6-|00:00:36| M3: ¿Cuál es la relación entre las regiones sombreadas de cada gráfica? (8) ((realiza un sonido con la boca)) Tienen la misma área, ¿no? H3: Es la misma área, ¿no? M3: ¡Ajá! Pues sí, ¿no? Pues sí, ¿no? Por que ahí está ((hace un silbido)) H3: Además creo que tienen la misma, la [misma magnitud] M3: [El mismo periodo] [VE3]-6-|01:18:47|- después de la puesta en común M3 agrega a su respuesta “Ya que tienen simetría”, y H3 agrega a su respuesta “Para cada una, es claro de la gráfica que el valor de las áreas es igual”	[VG]-6-|01:18:28| H6: (x)Es una proporción. Lo que hice fue integrar. P: ¿Proporción de qué con qué? H6: De la amplitud del área de una región pequeñita, una de las (incomprensible, 1) P: Ok, entonces viste una de las coloreadas, ¿una nada más? H6: No, bueno, integré todo. P: Ajá, integraste todo. H6: Ajá, bueno, primero noté que son, que están divididas en partes iguales p entre 4, p entre 4, p entre 4, p entre 4. P: Ok. H6: Si saco el área total, bueno eso permite decir que cada uno de esos tiene la misma área. P: Ujú. H6: Entonces calculé el área total de esta ((señalando la curva coseno)), y el área total de esta ((señalando la curva seno)) eso da una expresión, se igualan y al final da llegas a conseguir una proporción. P: Ah, o sea, igualaste el área de esta con la de esta ((refiriéndose a ambas curvas)). H6: No, no las igualé, o sea como tal encontré una proporción, o sea, hay una proporción que siguen. [VG]-6-|01:21:14|- el profesor pregunta quien dio respuesta solo a partir de ver la gráfica, M2 levanta la mano, luego pregunta quien respondió a partir de calcular las integrales y el resto de los estudiantes levantan la mano.
Pregunta b						[VE3]-6-|00:02:02| H3: ¿Cuál es el área bajo la curva de cada término de la serie en un intervalo de tamaño p? M3: O sea, vamos a calcular primero y_0, ¿no? H3: Ah::: (6) ¿cómo, cómo, cómo? M3: Ajá, mira te da la función y el intervalo en donde la tienes que integrar, (3) aquí sería como un rectángulo. Entonces sería	[VG]-6-|01:22:28| P: ¿Para $\frac{a_0}{2}$ cuál es el área? M3: a_0 sobre 2 por p ((junto con ella H1, H3, H6 y M1 dan la respuesta)) H6: Puedo integrar o es un rectángulo. [VG]-6-|01:22:28|- para $y = \frac{a_0}{2}$ el profesor pregunta quién usó primero el argumento del rectángulo, levantaron la mano M1, M2, H1, H6,

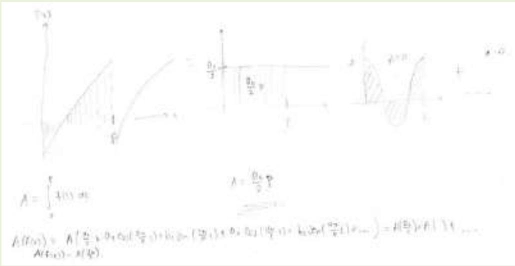
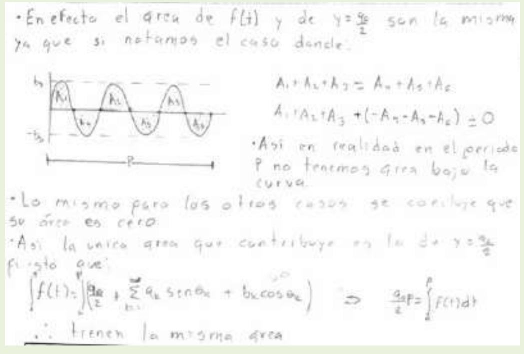
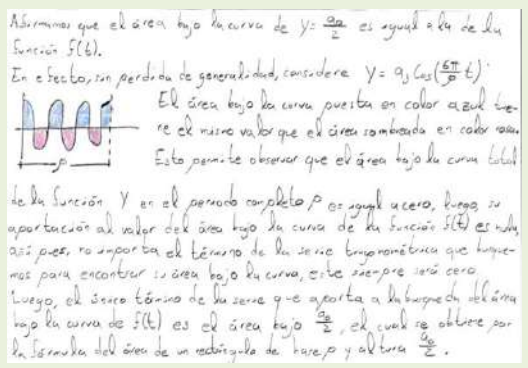
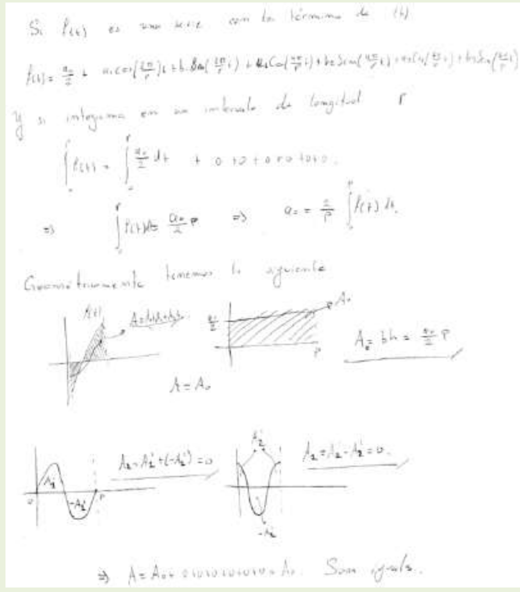
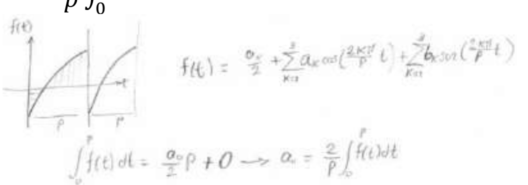
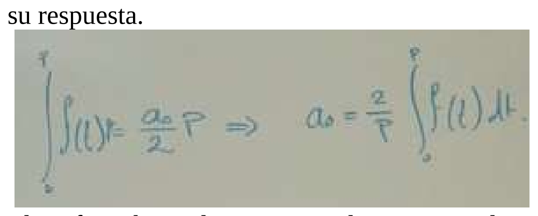
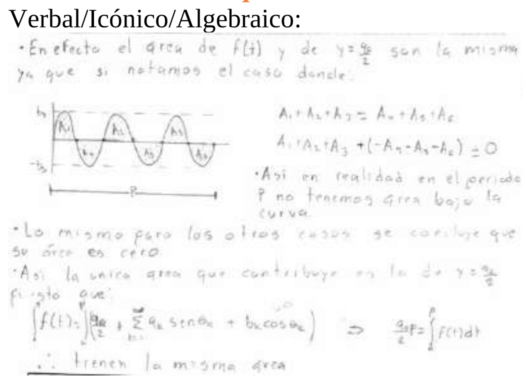
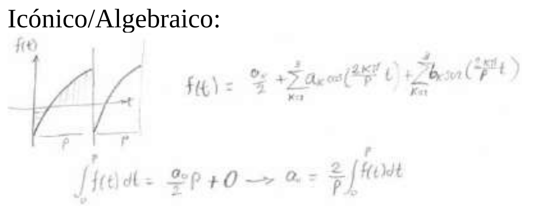
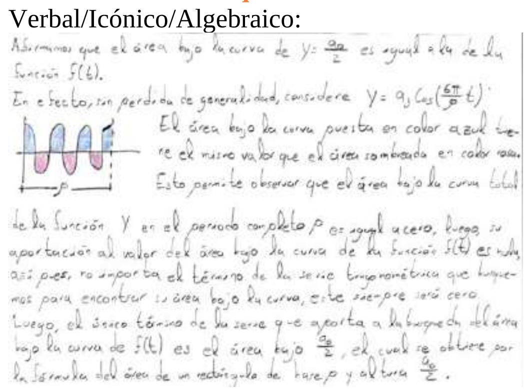
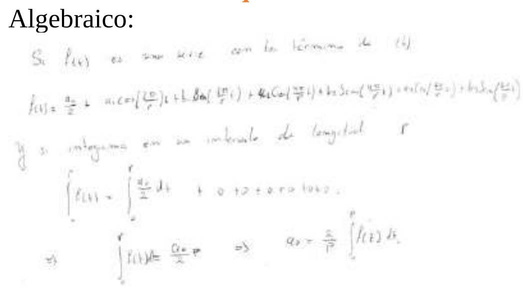
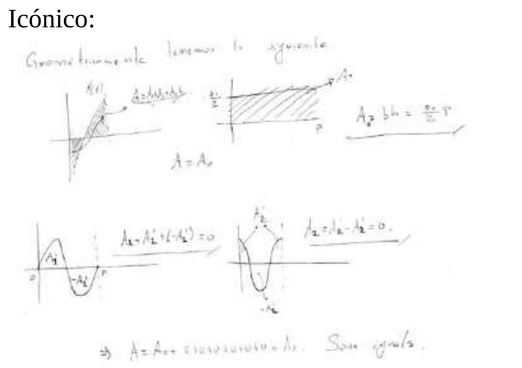
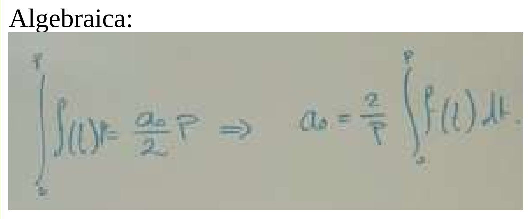
Parte I. **El cálculo de a_0**

Intención: Significar el cálculo del coeficiente de Fourier a_0, a partir de la articulación de los registros geométrico-analítico y algebraico, para validar el segundo en el primero.

Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
						la integral, uh::: de cero a la mitad del periodo. H3: Ah::: el área bajo la, sí. M3: Pues sí, ¿no? H3: Pero aquí está de cero a p. M3: Ajá:::m H3: Ujú, entonces integras esta constante, de cero [a p]. M3: [A p]. H3: Entonces te queda p veces esto. M3: ¡Ajá! [VE3]-6-|00:13:52| M3: Coseno de cero es uno, ¿no? H3: ¡Ajá! M3: Y el coseno de 2π, (5) huy no me voy a matar, este también da cero, ¿no? H3: Sí, da cero, ¿no? M3: Sí, porque esta área menos esta área también da cero. [VE3]-6-|00:42:06| H3: También lo puedes obtener como un rectángulo, de base p y altura a_0 M3: ¡Ujú! H3: Entonces el área vale a_0 sobre 2 por p, y eso es igual a esta integral. M3: ¡Ujú!	H7 y H9. Luego preguntó quienes de primero utilizaron el argumento de integrar, M3, H2, H3 y H4 levantaron la mano. [VG]-6-|01:23:49| P: ¿Cuánto da el área, bajo la curva? ((refiriéndose a $y = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$)) H3: Cero. P: Cero, ¿por qué? H1: Dos argumentos (x)uno geométrico que son áreas de misma magnitud, pero ajá áreas sobre la curva es positivo y bajo la curva negativa, o ya haciendo integrales. [VG]-6-|01:25:59|- el profesor pregunta qué sucede con los demás y los estudiantes responden que lo mismo y que los argumentos son los mismos, uno geométrico y el otro con integrales definidas.
$y = \frac{a_0}{2}$	$A = \frac{a_0}{2}p$ [VG]-6-|01:22:28|- $y = \frac{a_0}{2}$ el profesor pregunta quién usó primero el argumento del rectángulo, M2 levantó la mano.		$A = p\frac{a_0}{2}$ En la hoja hice las integrales [VG]-6-|01:22:28|- $y = \frac{a_0}{2}$ el profesor pregunta quién usó primero el argumento del rectángulo, H1 levantó la mano, e indicó que terminó calculando la integral porque los demás casos eran más complejos.		$A_0 = \frac{a_0}{2}\int_0^p dt = \frac{a_0}{2}p$		
$y = a_1\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$	$A = 0$ (argumentación en la hoja)		$A = 0$ En la hoja hice las integrales		$A_1 = a_1\int_0^p \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)dt = 0$		
$y = b_1\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$	$A = 0$		$A = 0$		$A_2 = b_1\int_0^p \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{p}t\right)dt = 0$		
$y = a_2\cos\left(\frac{4\pi}{p}t\right)$	$A = 0$		$A = 0$		$A_3 = a_2\int_0^p \cos\left(\frac{4\pi}{p}t\right)dt = 0$		
$y = b_2\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{p}t\right)$	$A = 0$		$A = 0$		$A_4 = b_2\int_0^p \operatorname{Sen}\left(\frac{4\pi}{p}t\right)dt = 0$		
$y = a_3\cos\left(\frac{6\pi}{p}t\right)$	$A = 0$		$A = 0$		$A_5 = a_3\int_0^p \cos\left(\frac{6\pi}{p}t\right)dt = 0$		
$y = b_3\operatorname{sen}\left(\frac{6\pi}{p}t\right)$	$A = 0$		$A = 0$		$A_6 = b_3\int_0^p \operatorname{Sen}\left(\frac{6\pi}{p}t\right)dt = 0$		
Intencionalidad	Se busca que el estudiante se percate de que el área bajo la curva de los términos de la serie son todos iguales a cero, salvo el del término constante $\frac{a_0}{2}$, que tiene área $\frac{a_0 p}{2}$ en un intervalo de tamaño p.						
¿Sobre qué objetos lo hace?	**Comparar** Las regiones sombreadas. **Geometrizar** La región bajo la curva $y = \frac{a_0}{2}$ en el intervalo $[0, p]$. **Calcular** El área bajo la curva.	**Comparar** Las regiones sombreadas. **Calcular** El área bajo la curva.	**Comparar** Las regiones sombreadas. **Geometrizar** La región bajo la curva $y = \frac{a_0}{2}$ en el intervalo $[0, p]$. **Calcular** El área bajo la curva.	**Comparar** Las regiones sombreadas. **Calcular** El área bajo la curva.	**Comparar** Las regiones sombreadas. **Calcular** El área bajo la curva.	**Comparar** Las regiones sombreadas. **Geometrizar** La región bajo la curva $y = \frac{a_0}{2}$ en el intervalo $[0, p]$. **Calcular** El área bajo la curva.	**Comparar** Las regiones sombreadas. **Geometrizar** La región bajo la curva $y = \frac{a_0}{2}$ en el intervalo $[0, p]$. **Calcular** El área bajo la curva.
¿Sobre qué relaciones lo hace?	**Comparar** Las regiones sombreadas tienen la misma área. **Geometrizar** El área de la región bajo la curva $y = \frac{a_0}{2}$ en el intervalo $[0, p]$ es igual al área del rectángulo cuyos lados miden p y $\frac{a_0}{2}$. **Calcular** El valor del área bajo la curva en un intervalo de tamaño p es igual al valor de la integral definida sobre ese intervalo de la curva dada.	**Comparar** Las regiones sombreadas tienen la misma área. **Calcular** El valor del área bajo la curva en un intervalo de tamaño p es igual al valor de la integral definida sobre ese intervalo de la curva dada.	**Comparar** Las regiones sombreadas tienen la misma área. **Geometrizar** El área de la región bajo la curva $y = \frac{a_0}{2}$ en el intervalo $[0, p]$ es igual al área del rectángulo cuyos lados miden p y $\frac{a_0}{2}$. **Calcular** El valor del área bajo la curva en un intervalo de tamaño p es igual al valor de la integral definida sobre ese intervalo de la curva dada.	**Comparar** Las regiones sombreadas tienen la misma área. **Calcular** El valor del área bajo la curva en un intervalo de tamaño p es igual al valor de la integral definida sobre ese intervalo de la curva dada.	**Comparar** Las regiones sombreadas tienen la misma área. **Calcular** El valor del área bajo la curva en un intervalo de tamaño p es igual al valor de la integral definida sobre ese intervalo de la curva dada.	**Comparar** Las regiones sombreadas tienen la misma área. **Geometrizar** El área de la región bajo la curva $y = \frac{a_0}{2}$ en el intervalo $[0, p]$ es igual al área del rectángulo cuyos lados miden p y $\frac{a_0}{2}$. **Calcular** El valor del área bajo la curva en un intervalo de tamaño p es igual al valor de la integral definida sobre ese intervalo de la curva dada. El valor del área bajo la curva en un intervalo de tamaño p es igual a la suma de las áreas de las regiones sobre el eje X, menos la suma de las áreas de las regiones bajo el eje X, en ese intervalo.	**Comparar** Las regiones sombreadas tienen la misma área. **Geometrizar** El área de la región bajo la curva $y = \frac{a_0}{2}$ en el intervalo $[0, p]$ es igual al área del rectángulo cuyos lados miden p y $\frac{a_0}{2}$. **Calcular** El valor del área bajo la curva en un intervalo de tamaño p es igual al valor de la integral definida sobre ese intervalo de la curva dada. El valor del área bajo la curva en un intervalo de tamaño p es igual a la suma de las áreas de las regiones sobre el eje X, menos la suma de las áreas de las regiones bajo el eje X, en ese intervalo.
¿Por medio de qué lo hace?	**Comparar** Verbal: El valor de cada área sombreada es la misma. **Geometrizar** Verbal: [VG]-6-|01:22:28|- $y = \frac{a_0}{2}$ el profesor pregunta quién usó primero el argumento del rectángulo, M2 levantó la mano. **Calcular** Algebraico: 	**Comparar** Verbal: Que ambas regiones en el intervalo de p, sus áreas son 0. Ya que tienen simetría. **Calcular** Algebraico: 	**Comparar** Verbal: Todas las regiones sombreadas tienen la misma área. **Geometrizar** Verbal: [VG]-6-|01:22:28|- $y = \frac{a_0}{2}$ el profesor pregunta quién usó primero el argumento del rectángulo, H1 levantó la mano. **Calcular** Algebraico: 	**Comparar** Verbal: Para cada una, es claro de la gráfica que el valor de las áreas es igual. **Calcular** Algebraico: 	**Comparar** Verbal: El área bajo la curva de cada una es un cuarto del área bajo la curva de toda la sección. **Calcular** Algebraico: 	**Comparar** Verbal: Tienen la misma área. **Geometrizar** Verbal: [VE3]-6-|00:02:20| M3: Ajá, mira te da la función y el intervalo en donde la tienes que integrar, (3) aquí sería como un rectángulo. Entonces sería la integral. Verbal: [VE3]-6-|00:42:06| H3: También lo puedes obtener como un rectángulo, de base p y altura a_0 M3: ¡Ujú! H3: Entonces el área vale a_0 sobre 2 por p, y eso es igual a esta integral. M3: ¡Ujú! **Calcular** Verbal: [VE3]-6-|00:13:52| M3: Coseno de cero es uno, ¿no? H3: ¡Ajá! M3: Y el coseno de 2π, (5) huy no me voy a matar, este también da cero, ¿no? H3: Sí, da cero, ¿no? M3: Sí, porque esta área menos esta área también da cero.	**Comparar** Verbal: [VG]-6-|01:18:50| H6: Ajá, bueno, primero noté que son, que están divididas en partes iguales p entre 4, p entre 4, p entre 4, p entre 4. P: Ok. H6: Si saco el área total, bueno eso permite decir que cada uno de esos tiene la misma área. **Geometrizar** Verbal: [VG]-6-|01:22:28| P: ¿Para $\frac{a_0}{2}$ cuál es el área? M3: a_0 sobre 2 por p ((junto con ella H1, H3, H6 y M1 dan la respuesta)) H6: Puedo integrar o es un rectángulo. **Calcular** Verbal: [VG]-6-|01:23:49| P: ¿Cuánto da el área, bajo la curva? ((refiriéndose a $y = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$)) H3: Cero. P: Cero, ¿por qué? H1: Dos argumentos (x)uno geométrico que son áreas de misma magnitud, pero ajá áreas sobre la curva es positivo y bajo la curva negativa, o ya haciendo integrales.

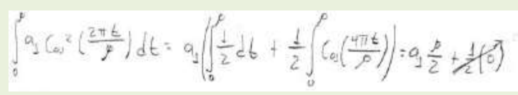
Parte I. **El cálculo de a_0**

Intención: Significar el cálculo del coeficiente de Fourier $\boldsymbol{a_0}$, a partir de la articulación de los registros geométrico-analítico y algebraico, para validar el segundo en el primero.

Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
Invariantes de Acciones	- Las regiones sombreadas tienen la misma área. - El área de la región bajo la curva $y=\frac{a_0}{2}$ en el intervalo $[0,p]$ es igual al área del rectángulo de cuyos lados miden p y $\frac{a_0}{2}$. - El valor del área bajo la curva en un intervalo de tamaño p es igual al valor de la integral definida sobre ese intervalo de la curva dada. - El valor del área bajo la curva en un intervalo de tamaño p es igual a la suma de las áreas de las regiones sobre el eje X, menos la suma de las áreas de las regiones bajo el eje X, en ese intervalo.						
Pregunta c	Las áreas son iguales. 		Las áreas son iguales ya que $f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{3}a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)+\sum_{k=1}^{3}b_k\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ Y las áreas de los términos trigonométricos son 0 ya que se anulan por simetría al sumar las áreas superiores y restar las inferiores.			[VE3]-6-|00:21:51| M3: Pues solamente sería el área de esta, ¿no? Porque todas las demás áreas van a ser cero. H3: Pero no sé si te pregunta por este $f(t)$, porque toda las demás son y. M3: No:::, o sea sí, pero son componentes en X y en Y. H3: Ya vi, la siguien- no, la secuencia muestra los términos de la serie (3) ¿a poco valen lo mismo? M3: ¿Qué? H3: Esta y esta. M3: Pos al parecer, ¿no? Tiene sentido por que al sumar esta cosa ((hace un sonido para expresarse)) [VE3]-6-|00:23:00| M3: Aquí dice explique su respuesta de forma geométrica. Eso no lo *wacho*, es que de manera algebraica el $f(t)$ se escribe como $\frac{a_0}{2}$ más la sumatoria, ¿no? Pero esa sumatoria suma dio A cero. H3: Esa sumatoria vale cero. M3: Ajá, eso es por que siempre están en cero entonces no importa cuántos existen, van a seguir valiendo cero, entonces solamente el área sería la integral de esta. H3: Pero de forma geométrica. M3: Como (incomprensible, 1) H3: ¿Qué sería eso? Sería como dibujarlo, ¿no? [VE3]-6-|00:26:19| H3: Eso significa que el área bajo la curva, de que esta área es igual a esta. Ese sería el argumento geométrico, creo yo. M3: Tiene sentido.	[VG]-6-|01:26:36| M2: Son iguales P: Ajá ¿por qué? H4: Se supone que $f(t)$ es la, con expansión de senos y cosenos, bueno esta expandida en senos y cosenos. P: Ujú. H4: Entonces integramos en un ciclo y todas la integrales son cero, menos (x)la primera M3: [la de a_0]. H4: [la del a_0]. Entonces ya solo queda la integral de $f(t)$ es igual a a_0 por p entre 2. Y geométricamente, pues ya vimos que todas las demás son cero, ¿no? Porque simétricamente se van anulando sus áreas y solo queda que el área del rectangulito es igual al área de la curva $f(t)$.
Pregunta d	$a_0=\frac{2}{p}\int_0^p f(t)dt$	Se tiene que $\frac{a_0}{2}p=\int_0^p f(t)dt \Rightarrow a_0=\frac{2}{p}\int_0^p f(t)dt$	$a_0=\frac{2}{p}\int_0^p f(t)dt$ 	Se tiene que $\frac{a_0}{2}p=\int_0^p f(t)dt \Rightarrow a_0=\frac{1}{p}2\int_0^p f(t)dt$	$a_0=\frac{2}{p}\int_0^p f(t)dt$	[VE3]-6-|00:39:27| H3: Propón una fórmula para calcular el valor de a_0 [en términos] M3: [En términos] de $f(t)$, pero es ya la integral, ¿no? H3: Eso yo pensé, yo dije sí, porque si las integrales valen lo mismo, tienen la misma área, pero es que aquí decía que son iguales. M3: Mmm, es que (x)yo siento que $f(t)$ lo puedes expresar así, ¿no? H3: No, ya sé, porque si tienes, ¡ay! (25) Es como una manera de ver de donde salen las series de Fourier	[VG]-6-|01:28:35|- H4 para a escribir a la pizarra su respuesta.  El profesor hace el comentario de que esto sale a partir del último argumento de la pregunta anterior, la igualdad de las áreas, y los estudiantes afirman que así es.
Intencionalidad	Se pretende que el estudiante utilice argumentos geométricos y sus conocimientos sobre integral definida para decir que el área bajo la curva de la función $f(t)$ es igual a la suma de las áreas bajo la curva de los términos de la serie. De esta manera el estudiante puede construir la fórmula para el cálculo con un significado asociado a la noción de área bajo la curva.						
¿Sobre qué objetos lo hace?	**Equivaler** La igualdad: $f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)+b_k\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$	**Equivaler** La igualdad: $f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)+b_k\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$	**Equivaler** La igualdad: $f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)+b_k\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$	**Equivaler** La igualdad: $f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)+b_k\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$	**Equivaler** La igualdad: $f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)+b_k\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$	**Equivaler** La igualdad: $f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)+b_k\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$	**Equivaler** La igualdad: $f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)+b_k\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$
¿Sobre qué relaciones lo hace?	**Equivaler** El área bajo la curva $y=f(t)$ es igual al área bajo la curva $y=\frac{a_0}{2}$, en un intervalo de tamaño p.	**Equivaler** El área bajo la curva $y=f(t)$ es igual al área bajo la curva $y=\frac{a_0}{2}$, en un intervalo de tamaño p.	**Equivaler** El área bajo la curva $y=f(t)$ es igual al área bajo la curva $y=\frac{a_0}{2}$, en un intervalo de tamaño p.	**Equivaler** El área bajo la curva $y=f(t)$ es igual al área bajo la curva $y=\frac{a_0}{2}$, en un intervalo de tamaño p.	**Equivaler** El área bajo la curva $y=f(t)$ es igual al área bajo la curva $y=\frac{a_0}{2}$, en un intervalo de tamaño p.	**Equivaler** El área bajo la curva $y=f(t)$ es igual al área bajo la curva $y=\frac{a_0}{2}$, en un intervalo de tamaño p.	**Equivaler** El área bajo la curva $y=f(t)$ es igual al área bajo la curva $y=\frac{a_0}{2}$, en un intervalo de tamaño p.
¿Por medio de qué lo hace?	**Equivaler** Verbal: Las áreas son iguales. Icónico:  Algebraico: 	**Equivaler** Verbal/Icónico/Algebraico:  Algebraico: Se tiene que $\frac{a_0}{2}p=\int_0^p f(t)dt \Rightarrow a_0=\frac{2}{p}\int_0^p f(t)dt$	**Equivaler** Verbal: Las áreas son iguales, ya que los términos trigonométricos se anulan por simetría. Icónico/Algebraico: 	**Equivaler** Verbal/Icónico/Algebraico:  Algebraico: Se tiene que $\frac{a_0}{2}p=\int_0^p f(t)dt \Rightarrow a_0=\frac{1}{p}2\int_0^p f(t)dt$	**Equivaler** Algebraico:  Icónico: 	**Equivaler** Verbal: [VE3]-6-|00:21:51| M3: Pues solamente sería el área de esta, ¿no? Porque todas las demás áreas van a ser cero. Verbal: [VE3]-6-|00:23:00| M3: Aquí dice explique su respuesta de forma geométrica. Eso no lo *wacho*, es que de manera algebraica el $f(t)$ se escribe como $\frac{a_0}{2}$ más la sumatoria, ¿no? Pero esa sumatoria suma dio A cero. H3: Esa sumatoria vale cero. M3: Ajá, eso es por que siempre están en cero entonces no importa cuántos existen, van a seguir valiendo cero, entonces solamente el área sería la integral de esta.	**Equivaler** Verbal: [VG]-6-|01:26:36| M2: Son iguales P: Ajá ¿por qué? H4: Se supone que $f(t)$ es la, con expansión de senos y cosenos, bueno esta expandida en senos y cosenos. P: Ujú. H4: Entonces integramos en un ciclo y todas la integrales son cero, menos (x)la primera M3: [la de a_0]. H4: [la del a_0]. Entonces ya solo queda la integral de $f(t)$ es igual a a_0 por p entre 2. Y geométricamente, pues ya vimos que todas las demás son cero, ¿no? Porque simétricamente se van anulando sus áreas y solo queda que el área del rectangulito es igual al área de la curva $f(t)$. Algebraica: 
Invariantes de Acciones	- El área bajo la curva $y=f(t)$ es igual al área bajo la curva $y=\frac{a_0}{2}$, en un intervalo de tamaño p.						

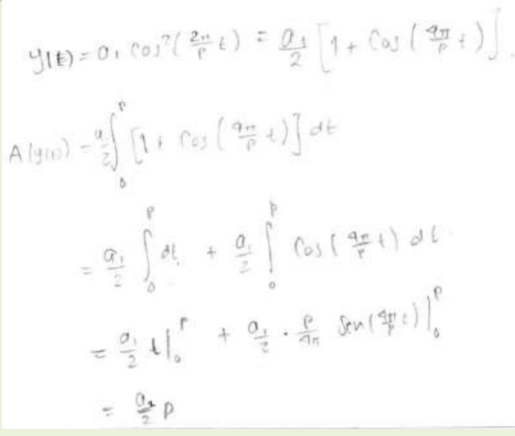
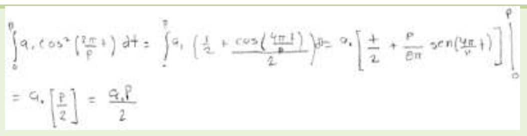
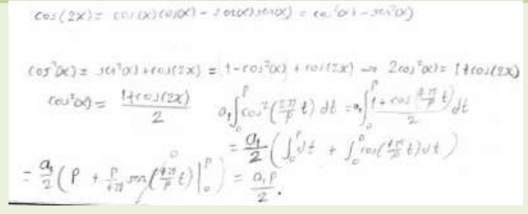
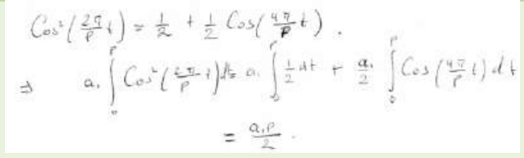
Parte II. **El cálculo de a_k**

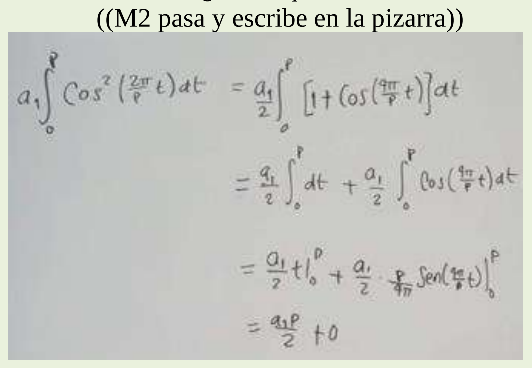
Intención: Significar el cálculo del coeficiente de Fourier $\boldsymbol{a_k}$, a partir de la articulación de los registros geométrico-analítico y algebraico, para validar el segundo en el primero.

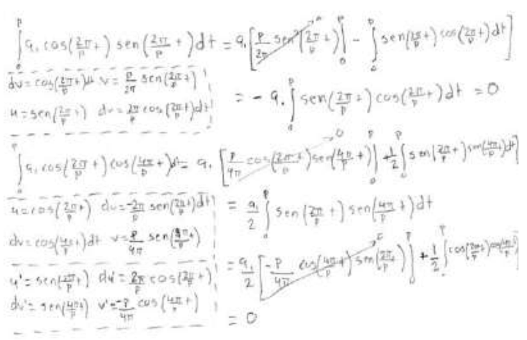
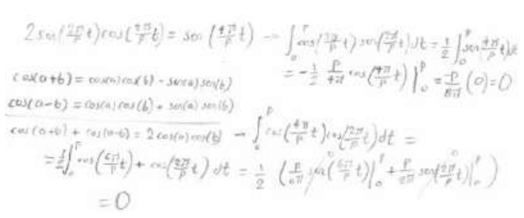
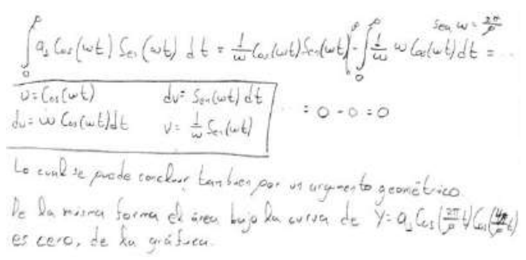
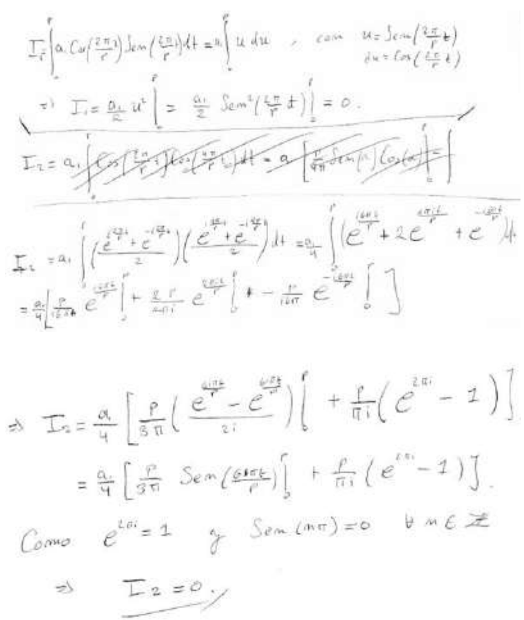
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
Pregunta a	Las áreas sombreadas son iguales. El área bajo la curva de la función $y=a_1\cos^2\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ es $A=\frac{a_1}{2}p$	El area es la misma. El valor de la integral esta en la tarea 6, parte 2, hoja 11.	Son iguales las área por simetría. $A=\frac{a_1p}{2}$	Tienen el mismo valor. 	La suma de las áreas del doble ashurado es la misma que la suma de las áreas del ashurado simple.	[VE3]-6-|01:28:48| M3: ¿Cuál es la relación entre las áreas sombreadas? Eh::: el área es la misma, ¿no? [VE3]-6-|01:29:41|	[VG]-6-|02:43:02| P: ¿Cuál es la relación entre las áreas sombreadas? Acá está esta rayadita así y la cuadriculada, ¿verdad? Entonces cuál es la relación.

Parte II. **El cálculo de a_k**

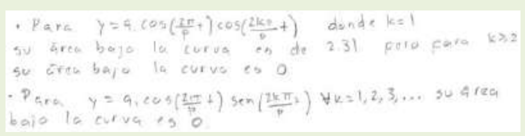
Intención: Significar el cálculo del coeficiente de Fourier a_k, a partir de la articulación de los registros geométrico-analítico y algebraico, para validar el segundo en el primero.

<table>
<tr><th>Estudiante</th><th>M2</th><th>M3</th><th>H1</th><th>H3</th><th>H4</th><th>Equipo 3</th><th>Puesta en común</th></tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td>M3: ¿Cuál es el valor del área bajo la cur-? Uh::: a ver, vamos a integrar.

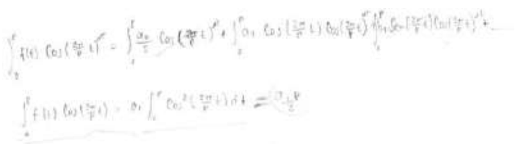
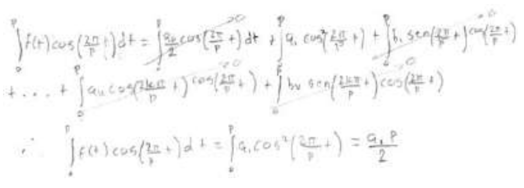
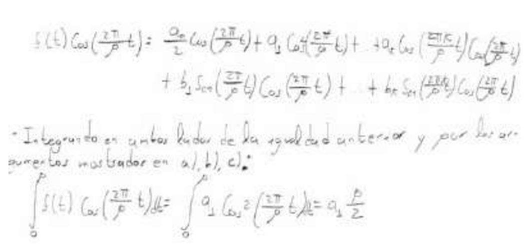
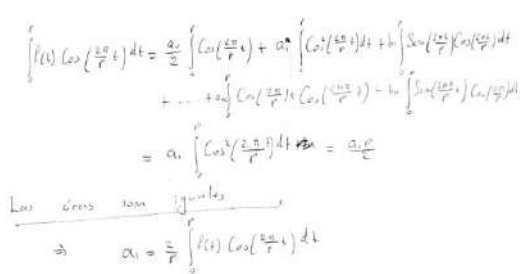
[VE3]-6-|01:31:06|- entre M3 y H3 discuten la resolución algebraica-analítica de la integral, primero consideran aplicar el método de integración por partes para tratar de observar una integral cíclica. Se deciden al final por utilizar la identidad $\cos^2 u = \frac{1+\cos(2u)}{2}$ para reescribir la expresión y calcular la integral de forma directa, concluyendo que el área bajo la curva es igual a $\frac{a_1 p}{2}$.</td>
<td>H4: La cuadriculada es la misma que la rayadita.
P: Son lo mismo, ¿verdad? ((los estudiantes asienten con la cabeza)) Ahí lo pueden ver, ¿verdad? Como que este con este es uno de estos, ¿verdad? ((señalando las regiones sombreadas))
H6: Por simetría.
P: Y este es el otro, por simetría, ¿verdad? Y luego pregunta cuál es el valor del área bajo la curva y igual a_1 coseno cuadrado, en un intervalo de longitud p.
H4: a_1 por $\frac{p}{2}$.
P: a_1 por $\frac{p}{2}$ y cómo lo:::
M2: Integrando.
P: Hicieron la integral ((los estudiantes asienten con la cabeza)) de coseno cuadrado ¿Quién quiere venir a hacerla? ((M2 pasa y escribe en la pizarra))

[VG]-6-|02:45:19|- M2 explica que utilizó la identidad $\cos^2 u = \frac{1+\cos(2u)}{2}$ para resolver la integral, además explica el resto de la solución.

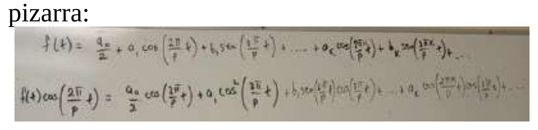
[VG]-6-|02:45:54|
P: ¿Todos lo hicieron de esa manera?
H9: También se:::, si es por simetría queda el área igual a la misma, entonces calcular nada más el área del rectángulo y lo dividís entre 2.</td>
</tr>
<tr>
<td>Pregunta b</td>
<td>Por simetría, el área bajo la curva en cada caso es cero.</td>
<td></td>
<td>En cada caso el área es 0.
</td>
<td></td>
<td></td>
<td>[VE3]-6-|01:36:26|- M3 y H3 empiezan la resolución algebraica-analítica de la integral, al parecer de forma individual.

[VE3]-6-|01:39:43|
M3: A mi no me daba cero.
H3: ¿La de coseno por seno? Mira es esto, esto, esto y esto ((señalando las regiones de la gráfica)). El argumento lo de los valores geométricos se ve que da cero.
M3: Déjame hacerlo (incomprensible, 1)
H3: “M3” ((se refiere a M3 por su nombre)) checa la grafiquirri.
M3: Sí, ahorita veo la grafiquirri (3) sí, sí da cero.
H3: (Incomprensible, 2) es que mira, aquí también se ve, ¿no? Aquí está ((se escucha un sonido como señalando en la pantalla de la computadora))
M3: Sí, esa madre.
H3: Y la otra también ((se escucha un sonido como señalando en la pantalla de la computadora))</td>
<td>[VG]-6-|02:48:23|
H3: Cero.
P: Cero ¿qué estrategia usaron?
H1: Integrales ((varios estudiantes responden a la vez)).
P: Integraron directo, ¿verdad? ¿Cómo lo pueden ver con la gráfica?

[VG]-6-|02:48:33|- los estudiantes, varios a la vez, explica que se pueden hacer corresponder las regiones para darse cuenta que el área bajo la curva es igual a cero, en ambos casos.</td>
</tr>
<tr>
<td>Pregunta c</td>
<td>Según la applet, y la función $y = a_1 \mathrm{Cos}\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\mathrm{Cos}\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)$, el área bajo la curva es $A = a_1\frac{p}{2}$ para el caso k=1, luego, para k>1, el área es cero.
Mientras que para la función $y = a_1 \mathrm{Cos}\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\mathrm{Sen}\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)$ el área bajo la curva es cero para todo k.</td>
<td></td>
<td><table><tr><th>k</th><th>cos cos</th><th>cos sen</th></tr><tr><td>1</td><td>$\frac{a_1 p}{2}$</td><td>0</td></tr><tr><td>2</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>3</td><td>0</td><td>0</td></tr></table></td>
<td>En todos los casos valen cero, excepto por el área bajo la curva de $y = a_1\cos^2\left(\frac{2\pi}{p}\right)$, este razonamiento incluye literalmente a todos los demás términos.</td>
<td>De acuerdo al Applet, para $k \neq 1$ en los términos del Cose, todas las áreas son cero. Para la g´rafica de Seno y Coseno, las áreas son cero $\forall k \in \mathbb{Z}$</td>
<td>[VE3]-6-|01:44:39|- Se ve en la pantalla de H3 que para responder primero manipula el applet variando los valores de k y en algunos casos se nota como el cursor va sobre las áreas sombreadas comparando unas con otras.

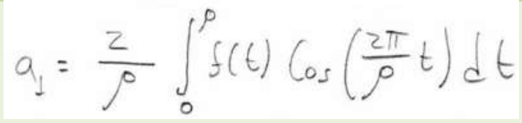
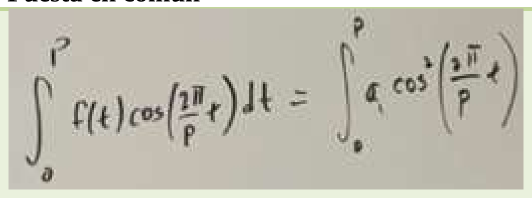
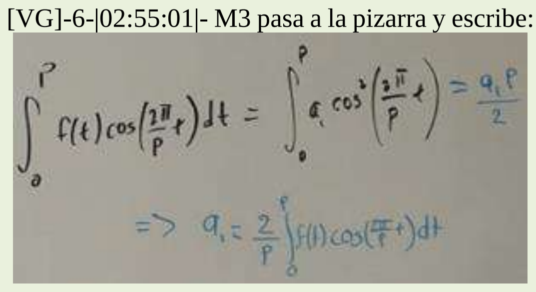
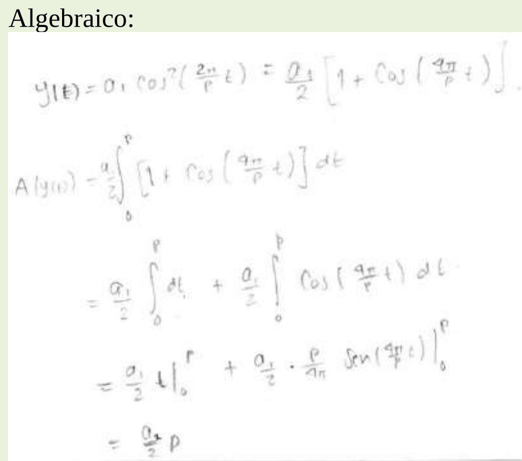
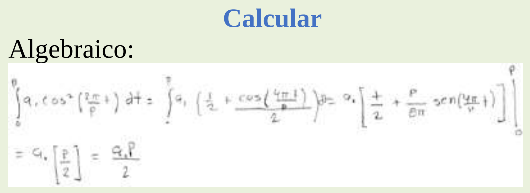
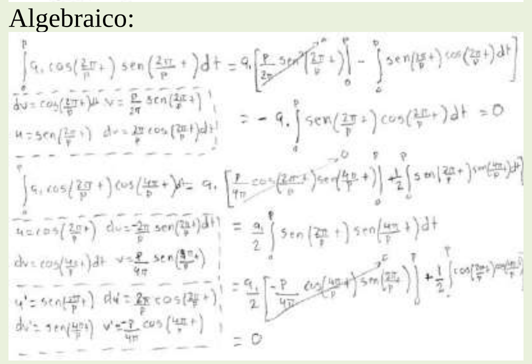
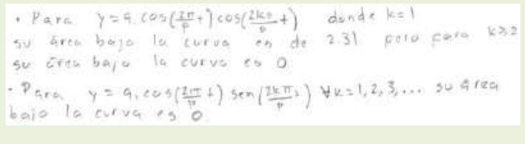
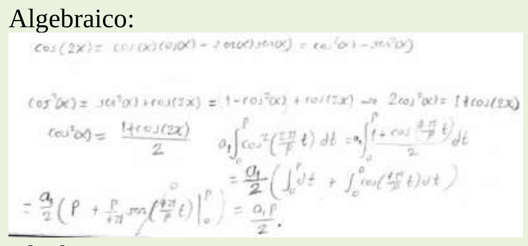
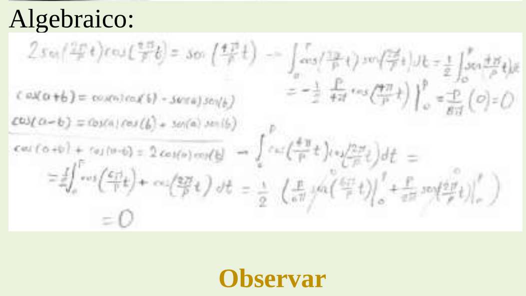
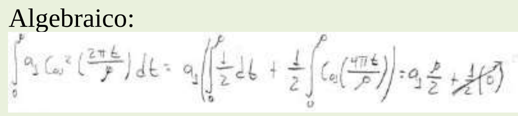
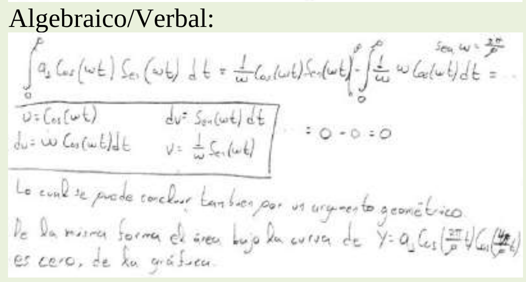
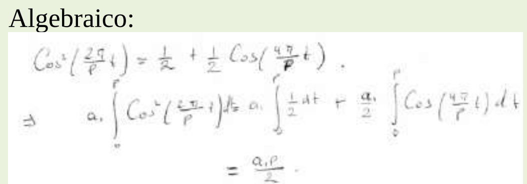
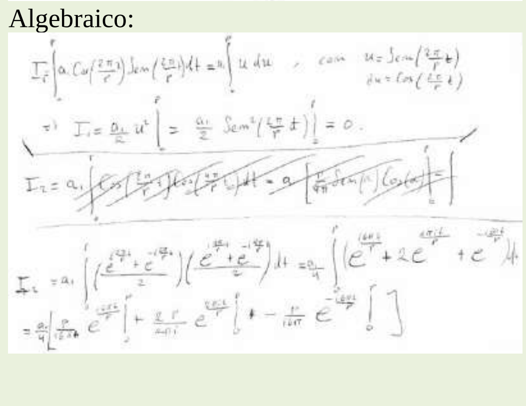
[VE3]-6-|01:46:55|
M3: Todos valen cero.
(6)
H3: Ah no manches, es que por ejemplo, esta ((se ve en la pantalla de M3 que colocan $k = 1$)), esta área no vale cero.
M3: ¿Porqué no vale cero?
H3: Mira=
M3: =Ah::: por que esta no tiene parte negativa. En todas las demás ya sí.
(8) ((se ve en la pantalla de H3 que cambia los valores de k))
H3: Ah sí es cierto, mira en esta ((se refiere a la curva se coseno por seno)) también.
M3: No esa desde ahí ((se ve en la pantalla de H3 que colocan $k = 1$)) ya daba cero.</td>
<td>[VG]-6-|02:49:53|
H6: Pues, cuando k es igual a 1 da lo mismo, a_1 sobre 2 por p. Y para k distinto, bueno los demás k esos son cero. En
P: Todos son cero.
H6: En el caso de la morada es cero para cualquier k.

[VG]-6-|02:50:31|
P: ¿Calcularon las integrales?
H6: No ((la mayoría responde lo mismo)).
P: ¿O lo vieron con el:::
H3: Lo vimos de ahí ((señalando el applet)).</td>
</tr>
<tr>
<td>Pregunta d</td>
<td>Las áreas son iguales
</td>
<td></td>
<td>Las áreas son iguales. Ya que los demás términos de la expansión trigonométrica se anulan.</td>
<td></td>
<td></td>
<td>[VE3]-6-|01:51:57|
M3: Estas se van a ir a cero, ¿no?
H3: Todas menos esta.
M3: Menos esta y la de a_0 dos.
H3: Esa tampoco.
M3: Ah no, sí, esta también vale cero, por que es el coseno de:::
H3: De una función entre el periodo, ¿no? Digo, de un coseno en su periodo.
M3: A parte no hemos calculado el coseno de esta, ¿no?
H3: ¿A poco?
M3: Sí, a bueno eso da cero.

[VE3]-6-|01:51:57|
M3: Estas se van a ir a cero, ¿no?
H3: Todas menos esta.</td>
<td>[VG]-6-|02:51:49|- el profesor escribe en la pizarra:

[VG]-6-|02:53:18|
P: A partir de eso, dice ¿cuál es la relación entre el área bajo la curva de esta ((señalando el $f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$)) y el área bajo la curva de esta ((señalando el $a_1\cos^2\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$))?
M2: Es la misma ((varios alumnos responden junto con ella)).
P: Es la misma, ¿por qué?
H6: Porque las áreas se hacen cero.
H4: Si uno los integra, se van anulando los términos que no tienen coseno cuadrado. O sea, todos los que no tiene coseno cuadrado se anulan, por todo lo que ya vimos arriba.</td>
</tr>
<tr>
<td>Pregunta e</td>
<td>$a_1 = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\,\mathrm{Cos}\left(\frac{2\pi}{p}t\right)dt$</td>
<td></td>
<td>$a_1 = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\,\mathrm{Cos}\left(\frac{2\pi}{p}t\right)dt$</td>
<td></td>
<td>$a_1 = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\,\mathrm{Cos}\left(\frac{2\pi}{p}t\right)dt$</td>
<td>No hubo interacción al responder esta pregunta.</td>
<td>[VG]-6-|02:51:49|- el profesor indica que a partir de la pregunta anterior se tiene lo siguiente:</td>
</tr>
</table>

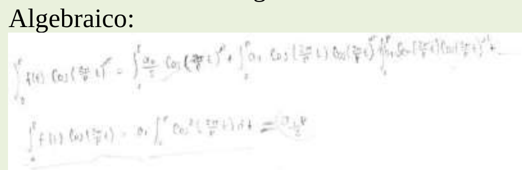
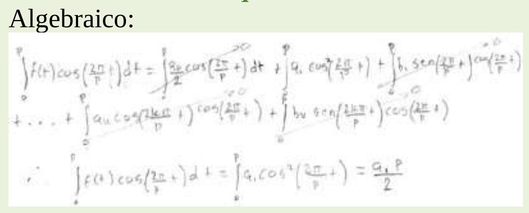
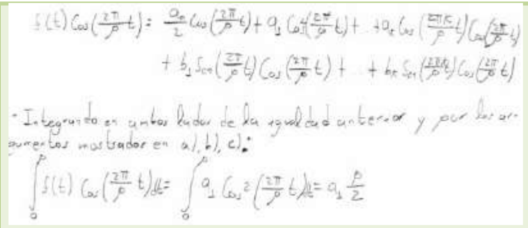
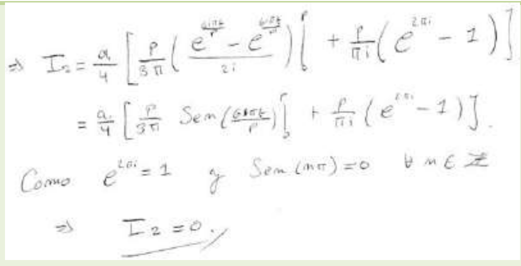
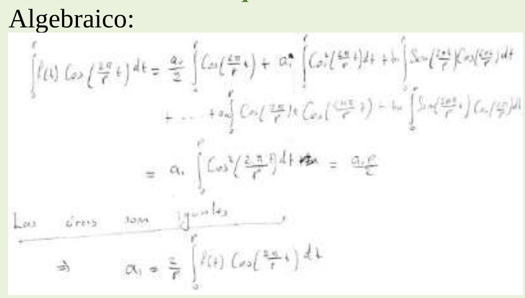
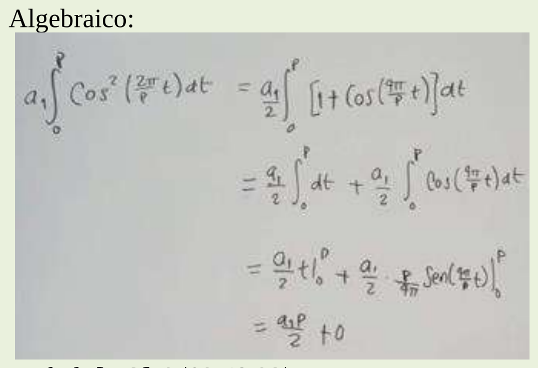
Parte II. **El cálculo de a_k**

Intención: Significar el cálculo del coeficiente de Fourier $\boldsymbol{a_k}$, a partir de la articulación de los registros geométrico-analítico y algebraico, para validar el segundo en el primero.

Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
							 [VG]-6-|02:55:01|- M3 pasa a la pizarra y escribe:  [VG]-6-|02:55:53|- el profesor plantea la pregunta de cómo se interpreta el coeficiente a_1 geométricamente. [VG]-6-|02:57:08| H4: Con las gráficas. P: Ujú, ¿qué? H4: Por ejemplo, tendríamos la gráfica de $f(t)$ por $\cos\left(\frac{2\pi}{p}\right)$ y medimos el área de esa gráfica y luego tenemos la gráfica de a_1 por cosenos cuadrado (x)de p, ¿no? Entonces medimos el área, las comparamos.
Intencionalidad	Se espera que el estudiante signifique geométricamente la ortogonalidad de las funciones trigonométricas y que utilice este hecho para calcular el valor de a_1 pues, será capaz de identificar que la multiplicación de $\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ por cualquier otro término de la serie —excepto el término $\boldsymbol{a_1}\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$— tendrá área bajo la curva igual a cero, y a partir de ellos que el valor de $\frac{a_1p}{2}$ corresponde al área bajo la curva que resulta de multiplicar la función $f(t)$ por $\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$. Lo que permite determinar el valor de a_1 en términos de $f(t)$, la función conocida.						
¿Sobre qué objetos lo hace?	**Comparar** Las regiones sombreadas. **Calcular** El área bajo la curva. **Observar** Las gráficas para distintos valores de k en los applets. **Equivaler** La igualdad: $f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)+b_k\,\text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$	**Comparar** Las regiones sombreadas. **Calcular** El área bajo la curva. **Observar** Las gráficas para distintos valores de k en los applets. **Equivaler** La igualdad: $f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)+b_k\,\text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$	**Comparar** Las regiones sombreadas. **Calcular** El área bajo la curva. **Observar** Las gráficas para distintos valores de k en los applets. **Equivaler** La igualdad: $f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)+b_k\,\text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$	**Comparar** Las regiones sombreadas. **Calcular** El área bajo la curva. **Observar** Las gráficas para distintos valores de k en los applets. **Equivaler** La igualdad: $f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)+b_k\,\text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$	**Comparar** Las regiones sombreadas. **Calcular** El área bajo la curva. **Observar** Las gráficas para distintos valores de k en los applets. **Equivaler** La igualdad: $f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)+b_k\,\text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$	**Comparar** Las regiones sombreadas. **Calcular** El área bajo la curva. **Observar** Las gráficas para distintos valores de k en los applets. **Equivaler** La igualdad: $f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)+b_k\,\text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$	**Comparar** Las regiones sombreadas. **Geometrizar** La región bajo la curva $y=a_1\cos^2\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ en el intervalo $[0,p]$. **Calcular** El área bajo la curva. **Observar** Las gráficas para distintos valores de k en los applets. **Equivaler** La igualdad: $f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)+b_k\,\text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$
¿Sobre qué relaciones lo hace?	**Comparar** Las regiones sombreadas tienen la misma área. **Calcular** El valor del área bajo la curva en un intervalo de tamaño p es igual al valor de la integral definida sobre ese intervalo de la curva dada. El valor del área bajo la curva en un intervalo de tamaño p es igual a la suma de las áreas de las regiones sobre el eje X, menos la suma de las áreas de las regiones bajo el eje X, en ese intervalo. **Observar** Cuando $k=1$, la curva $y=a_1\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\cos\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)$, tiene área bajo la curva no nula. cuando $k>1$ su área bajo la curva es 0. El área bajo la curva $y=a_1\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\text{sen}\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)$ es 0, para cualquier valor de k. **Equivaler** El área bajo la curva $y=f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva $y=a_1\cos^2\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$, en un intervalo de tamaño p.	**Comparar** Las regiones sombreadas tienen la misma área. **Calcular** El valor del área bajo la curva en un intervalo de tamaño p es igual al valor de la integral definida sobre ese intervalo de la curva dada. **Observar** Cuando $k=1$, la curva $y=a_1\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\cos\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)$, tiene área bajo la curva no nula. cuando $k>1$ su área bajo la curva es 0. El área bajo la curva $y=a_1\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\text{sen}\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)$ es 0, para cualquier valor de k. **Equivaler** El área bajo la curva $y=f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva $y=a_1\cos^2\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$, en un intervalo de tamaño p.	**Comparar** Las regiones sombreadas tienen la misma área. **Calcular** El valor del área bajo la curva en un intervalo de tamaño p es igual al valor de la integral definida sobre ese intervalo de la curva dada. **Observar** Cuando $k=1$, la curva $y=a_1\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\cos\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)$, tiene área bajo la curva no nula. cuando $k>1$ su área bajo la curva es 0. El área bajo la curva $y=a_1\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\text{sen}\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)$ es 0, para cualquier valor de k. **Equivaler** El área bajo la curva $y=f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva $y=a_1\cos^2\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$, en un intervalo de tamaño p.	**Comparar** Las regiones sombreadas tienen la misma área. **Calcular** El valor del área bajo la curva en un intervalo de tamaño p es igual al valor de la integral definida sobre ese intervalo de la curva dada. **Observar** Cuando $k=1$, la curva $y=a_1\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\cos\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)$, tiene área bajo la curva no nula. cuando $k>1$ su área bajo la curva es 0. El área bajo la curva $y=a_1\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\text{sen}\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)$ es 0, para cualquier valor de k. **Equivaler** El área bajo la curva $y=f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva $y=a_1\cos^2\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$, en un intervalo de tamaño p.	**Comparar** Las regiones sombreadas tienen la misma área. **Calcular** El valor del área bajo la curva en un intervalo de tamaño p es igual al valor de la integral definida sobre ese intervalo de la curva dada. **Observar** Cuando $k=1$, la curva $y=a_1\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\cos\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)$, tiene área bajo la curva no nula. cuando $k>1$ su área bajo la curva es 0. El área bajo la curva $y=a_1\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\text{sen}\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)$ es 0, para cualquier valor de k. **Equivaler** El área bajo la curva $y=f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva $y=a_1\cos^2\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$, en un intervalo de tamaño p.	**Comparar** Las regiones sombreadas tienen la misma área. **Calcular** El valor del área bajo la curva en un intervalo de tamaño p es igual al valor de la integral definida sobre ese intervalo de la curva dada. El valor del área bajo la curva en un intervalo de tamaño p es igual a la suma de las áreas de las regiones sobre el eje X, menos la suma de las áreas de las regiones bajo el eje X, en ese intervalo. **Observar** Cuando $k=1$, la curva $y=a_1\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\cos\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)$, tiene área bajo la curva no nula. cuando $k>1$ su área bajo la curva es 0. El área bajo la curva $y=a_1\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\text{sen}\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)$ es 0, para cualquier valor de k. **Equivaler** El área bajo la curva $y=f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva $y=a_1\cos^2\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$, en un intervalo de tamaño p.	**Comparar** Las regiones sombreadas tienen la misma área. **Geometrizar** La región bajo la curva $y=a_1\cos^2\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ en el intervalo $[0,p]$ es igual a la mitad del área del rectángulo cuyos lados miden p y a_1. **Calcular** El valor del área bajo la curva en un intervalo de tamaño p es igual al valor de la integral definida sobre ese intervalo de la curva dada. El valor del área bajo la curva en un intervalo de tamaño p es igual a la suma de las áreas de las regiones sobre el eje X, menos la suma de las áreas de las regiones bajo el eje X, en ese intervalo. **Observar** Cuando $k=1$, la curva $y=a_1\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\cos\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)$, tiene área bajo la curva no nula. cuando $k>1$ su área bajo la curva es 0. El área bajo la curva $y=a_1\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\text{sen}\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)$ es 0, para cualquier valor de k. **Equivaler** El área bajo la curva $y=f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva $y=a_1\cos^2\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$, en un intervalo de tamaño p.
¿Por medio de qué lo hace?	**Comparar** Verbal: Las áreas sombreadas son iguales. **Calcular** Verbal: Por simetría, el área bajo la curva en cada caso es cero. Algebraico:  **Observar** Verbal: Según el applet, para la función $y=a_1\,\text{Cos}\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\text{Cos}\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)$, el área bajo la curva es $A=a_1\frac{p}{2}$ para el caso k=1, luego, para k>1, el área	**Comparar** Verbal: El área es la misma. **Calcular** Algebraico:  Algebraico:  **Observar** Verbal: 	**Comparar** Verbal: Las áreas sombreadas son iguales, por simetría. **Calcular** Algebraico:  Algebraico:  **Observar** Algebraico: <table><tr><td>k</td><td>cos cos</td><td>cos sen</td></tr><tr><td>1</td><td>$\frac{a_1p}{2}$</td><td>0</td></tr><tr><td>2</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>	**Comparar** Verbal: Tienen el mismo valor. **Calcular** Algebraico:  Algebraico/Verbal:  **Observar** Verbal: En todos los casos valen cero, excepto por el área bajo la curva de $y=a_1\cos^2\left(\frac{2\pi}{p}\right)$, este razonamiento incluye literalmente a todos los demás términos. **Equivaler** Algebraico:	**Comparar** Verbal: La suma de las áreas del doble achurado es la misma que la suma de las áreas del achurado simple. **Calcular** Algebraico:  Algebraico: 	**Comparar** Verbal: [VE3]-6-|01:28:48| M3: ¿Cuál es la relación entre las áreas sombreadas? Eh::: el área es la misma, ¿no? **Calcular** Verbal: [VE3]-6-|01:29:41| M3: ¿Cuál es el valor del área bajo la cur-? Uh::: a ver, vamos a integrar. Verbal: [VE3]-6-|01:39:43| M3: A mi no me daba cero. H3: ¿La de coseno por seno? Mira es esto, esto, esto y esto ((señalando las regiones de la gráfica)). El argumento lo de los valores geométricos se ve que da cero. **Observar** Verbal: [VE3]-6-|01:46:55| M3: Todos valen cero. (6) H3: Ah no manches, es que por ejemplo, esta ((se ve en la pantalla de M3 que colocan $k=1$)), esta área no vale cero. M3: ¿Porqué no vale cero? H3: Mira=	**Comparar** Verbal: [VG]-6-|02:43:02| P: ¿Cuál es la relación entre las áreas sombreadas? Acá está esta rayadita así y la cuadriculada, ¿verdad? Entonces cuál es la relación. H4: La cuadriculada es la misma que la rayadita. P: Son lo mismo, ¿verdad? ((los estudiantes asienten con la cabeza)) Ahí lo pueden ver, ¿verdad? Como que este con este es uno de estos, ¿verdad? ((señalando las regiones sombreadas)) H6: Por simetría. **Geometrizar** Verbal: [VG]-6-|02:45:54| P: ¿Todos lo hicieron de esa manera? H9: También se:::, si es por simetría queda el área igual a la misma, entonces calcular nada más el área del rectángulo y lo dividís entre 2. **Calcular** Verbal: [VG]-6-|02:43:25|

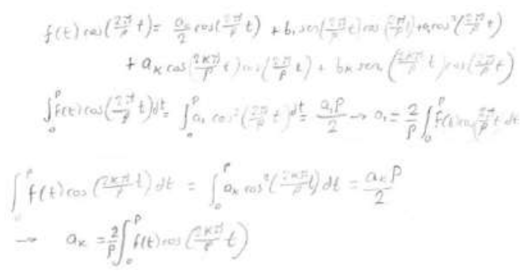
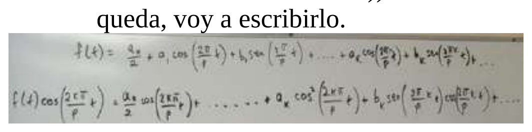
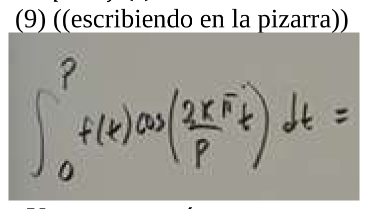
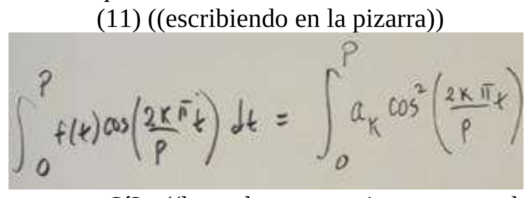
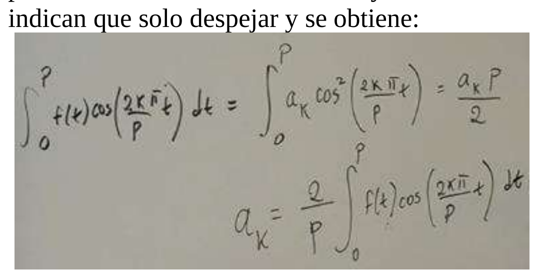
Parte II. **El cálculo de a_k**

Intención: Significar el cálculo del coeficiente de Fourier $\boldsymbol{a_k}$, a partir de la articulación de los registros geométrico-analítico y algebraico, para validar el segundo en el primero.

Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
	es cero. Mientras que para la función $y = a_1 \operatorname{Cos}\left(\frac{2\pi}{p}t\right) \operatorname{Sen}\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)$ el área bajo la curva es cero para todo k. **Equivaler** Verbal: Las áreas son iguales. Algebraico: 	**Equivaler** Algebraico: 	3 | 0 | 0 **Equivaler** Verbal: Las áreas son iguales. Ya que los demás términos de la expansión trigonométrica se anulan.		 **Observar** Verbal: De acuerdo con el applet, para $k \neq 1$ en los términos del coseno, todas las áreas son cero. Para la gráfica de seno y coseno, las áreas son cero $\forall k \in \mathbb{Z}$. **Equivaler** Algebraico: 	M3: =Ah::: por que esta no tiene parte negativa. En todas las demás ya sí. (8) ((se ve en la pantalla de H3 que cambia los valores de k)) H3: Ah sí es cierto, mira en esta ((se refiere a la curva se coseno por seno)) también. M3: No esa desde ahí ((se ve en la pantalla de H3 que colocan $k = 1$)) ya daba cero. **Equivaler** Verbal: [VE3]-6-|01:51:57| M3: Estas se van a ir a cero, ¿no? H3: Todas menos esta. M3: Menos esta y la de a_0 dos. H3: Esa tampoco. M3: Ah no, sí, esta también vale cero, por que es el coseno de::: H3: De una función entre el periodo, ¿no? Digo, de un coseno en su periodo. M3: A parte no hemos calculado el coseno de esta, ¿no? H3: ¿A poco? M3: Sí, a bueno eso da cero.	P: ¿Cuál es el valor del área bajo la curva y igual a_1 coseno cuadrado, en un intervalo de longitud p? H4: a_1 por $\frac{p}{2}$. P: a_1 por $\frac{p}{2}$ y cómo lo::: M2: Integrando. Algebraico:  Verbal: [VG]-6-|02:48:23| H3: Cero. P: Cero ¿qué estrategia usaron? H1: Integrales ((varios estudiantes responden a la vez)). Verbal: [VG]-6-|02:48:33|- los estudiantes, varios a la vez, explica que se pueden hacer corresponder las regiones para darse cuenta que el área bajo la curva es igual a cero, en ambos casos. **Observar** Verbal: [VG]-6-|02:49:53| H6: Pues, cuando k es igual a 1 da lo mismo, a_1 sobre 2 por p. Y para k distinto, bueno los demás k esos son cero. En P: Todos son cero. H6: En el caso de la morada es cero para cualquier k. Verbal: [VG]-6-|02:50:31| P: ¿Calcularon las integrales? H6: No ((la mayoría responde lo mismo)). P: ¿O lo vieron con el::: H3: Lo vimos de ahí ((señalando el applet)). **Equivaler** Verbal: [VG]-6-|02:53:18| P: A partir de eso, dice ¿cuál es la relación entre el área bajo la curva de esta ((señalando el $f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$)) y el área bajo la curva de esta ((señalando el $a_1\cos^2\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$))? M2: Es la misma ((varios alumnos responden junto con ella)). P: Es la misma, ¿por qué? H6: Porque las áreas se hacen cero. H4: Si uno los integra, se van anulando los términos que no tienen coseno cuadrado. O sea, todos los que no tiene coseno cuadrado se anulan, por todo lo que ya vimos arriba.
Invariantes de Acciones	- Las regiones sombreadas tienen la misma área. - El valor del área bajo la curva en un intervalo de tamaño p es igual al valor de la integral definida sobre ese intervalo de la curva dada. - El valor del área bajo la curva en un intervalo de tamaño p es igual a la suma de las áreas de las regiones sobre el eje X, menos la suma de las áreas de las regiones bajo el eje X, en ese intervalo. - Cuando $k = 1$, la curva $y = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\cos\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)$, tiene área bajo la curva no nula. cuando $k > 1$ su área bajo la curva es 0. - El área bajo la curva $y = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)$ es 0, para cualquier valor de k. - El área bajo la curva $y = f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva $y = a_1 \cos^2\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$, en un intervalo de tamaño p.						
Pregunta f	Para la función $y = a_k \operatorname{Cos}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\operatorname{Cos}\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$, según la applet, el área bajo la curva es $A = a_k\frac{p}{2}$ cuando k=m, y cero en cualquier otro caso. Para la función $y = a_k \operatorname{Cos}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\operatorname{Sen}\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$, el área bajo la curva es cero en cualquier caso.	En la primera expresión de "y" si k=m el valor del área bajo la curva es a_k2.1, mientras que en la segunda expresión de "y" si k=m el valor del área bajo la curva es 0. Ahora bien para la primera expresión de "y" si k y m son distintos el valor del área bajo la curva es 0, mientras que en la segunda expresión de "y" si k y m son distintos el área bajo la curva es 0.	En y cos cos el área es $\frac{a_k p}{2}$ si m=k y 0 si m diferente de k. En y sen cos el área siempre es 0 para todo m y k.	La función que contiene el seno por el coseno siempre tiene un área de bajo de ella igual a cero en un periodo. La función coseno por coseno tiene un área bajo la curva igual a cero si $m \neq n$, Solo cuando $m = n$ el área bajo la curva tiene un valor distinto de cero, más aun, para cualquier $k \in \mathbb{N}$ el área bajo la curva queda dada por $a_k\frac{p}{2}$	Cuando $k = m \; \forall k, m \in \mathbb{Z}$, el área es $A = \frac{a_k p}{2}$, en el caso contrario $k \neq m$, $A = 0$, siendo A el área bajo las curvas	[VE3]-6-|01:59:39|- Se ve en las pantallas de M3 y H3 que para responder primero manipulan el applet variando los valores de m y k. [VE3]-6-|02:00:22| H3: Cuando son iguales eso, solo cuando no se vale tu camote ((refiriéndose al valor de k)), ¿no? Cuando son distintas siempre vale cero. M3: Ah no ma-, a ver, dices tu que cuando son iguales es cuando sí va, hay valor principal, ¿no? No ma-, y ya ¿y todas valen 2.1 te has dado cuenta? H3: ¡Ajá:::! Valen lo mismo, entonces valen lo mismo que la que habíamos calculado, ¿no? Ah, sabiendo que (incomprensible, 3) M3: O sea, podríamos decir que, ah bueno, pero ¿y de esto? ((se refiere a las funciones que son coseno por seno)) [VE3]-6-|02:01:12| H3: Para la del coseno por seno, siempre están, ese siempre vale cero. M3: Sí. [VE3]-6-|02:05:10| H3: Pero::: por ejemplo cuando k tenga un valor mayor que 1, esto valga exactamente a_k´s por p's. M3: ¿En dónde? H3: Aquí. (Incomprensible, 1) Cuando son iguales, si vale lo mismo, pero estas viendo la pura cantidad, te falta multiplicar por la amplitud. M3: Pero es una constante. Cuando integras al fina de cuentas la amplitud siempre la sacas. H3: Entonces si queda (x)el coeficiente a subíndice k por p sobre 2, ¿no? M3: Pues sí, es una constante esto. Acuérdate que la, que integrar es una transformada bilineal.	[VG]-6-|02:59:20| P: Hablemos de esta primero, coseno por coseno. H6: Si k es igual a m, el área es a_m sobre 2 por p. [VG]-6-|03:00:22| P: ¿Y si son distintos k y m? H3: Cero ((varios estudiantes responden con él)). P: Y lo vieron del::: H3: De ahí ((señalando el applet)) [VG]-6-|03:01:01| P: ¿Con este qué pasa? ((refiriéndose a las curvas coseno por seno)) M3: Cero ((varios estudiantes responden con ella)). P: Siempre es cero, ¿verdad? ((los estudiantes asienten con la cabeza))

Parte II. **El cálculo de a_k**

Intención: Significar el cálculo del coeficiente de Fourier $\boldsymbol{a_k}$, a partir de la articulación de los registros geométrico-analítico y algebraico, para validar el segundo en el primero.

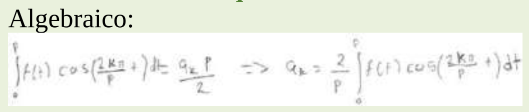
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
						H3: O sea, sí, sí, sí, pero lo que digo es que integrando coseno cuadrado de cualquier cosa siempre te va a dar esto, p sobre 2. No lo *wacho*. Eso es lo que no *wacho*.	
Pregunta g	$a_k=\frac{2}{p}\int_0^p f(t)\,\mathrm{Cos}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)dt$	$\int_0^p f(t)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)dt=\frac{a_k p}{2} \Rightarrow a_k=\frac{2}{p}\int_0^p f(t)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)dt$	$a_k=\frac{2}{p}\int_0^p f(t)\,\mathrm{Cos}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)dt$ 	$a_k=\frac{2}{p}\int_0^p f(t)\,\mathrm{Cos}\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)dt$	$a_k=\frac{2}{p}\int_0^p f(t)\,\mathrm{Cos}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)dt$	No hubo interacción al responder esta pregunta.	[VG]-6-|03:01:45| P: ¿Qué argumento utilizaron? M2: Lo hicimos similar a como lo hicimos para calcular a_1. P: Ujú, entonces ¿qué habría que hacer? H6: Multiplicar por $\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ ((los estudiantes asientes con la cabeza)). P: Ajá. Entonces sí, cómo que si quiero encontrar el coeficiente de a_k multiplico por::: M2: El coseno. P: Su respectivo coseno ((los estudiantes asienten con la cabeza)) Entonces e queda, voy a escribirlo.  [VG]-6-|03:02:54| P: ¿Y ahora? M2: Ahora integra todos, bueno integramos (incomprensible, 2). P: ¿Solo integramos así? (3) ¿o integramos de 0 a p? ((los alumnos asienten con la cabeza y ríen)) Sí, el área bajo la curva, ¿verdad? Entonces sería aquí integral de 0 a p de $f(t)$ (9) ((escribiendo en la pizarra))  ¿Y entonces qué pasa con estos, los que son seno por coseno? H3: Cero ((varios estudiantes responden junto con él)). P: Todos dan cero, por lo anterior. ¿Y los que son coseno por coseno? M2: Cero ((varios estudiantes asienten con al cabeza)). P: Todos dan cero, salvo el caso de coseno cuadrado que es el k por k, ¿verdad? k igual m. ¿Y este? ((señalando el término $a_0\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$)). M3: Da cero ((varios estudiantes responden junto con ella)). P: También da cero, ¿verdad? Entonces nos queda de este lado (11) ((escribiendo en la pizarra))  ¿Sí? ((los alumnos asienten con la cabeza)) ¿Y esta da? M3: $a_k p$ sobre 2 ((H3 responde junto con ella)). [VG]-6-|03:04:22|- el profesor pregunta que falta para dar la fórmula solicitada y los alumnos indican que solo despejar y se obtiene: 
Pregunta h	Si tomamos k=0 se llega a la fórmula propuesta anteriormente.	Se puede decir que la formula de a_k es la generalidad y la formula de a_0 es una particularidad.	Es más general la última que la primera.	El caso de a_0, se observa que es un caso específico de la expresión encontrada en el inciso anterior cuando $k=0$.	Esta necesita que se le multplique el término $\mathrm{Cos}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$.	[VE3]-6-|02:11:48| H3: Lo que sí se vale es que es casi lo mismo, encuentras el área bajo la curva, pero de esta función. Es el área bajo la curva de la función, pero multiplicada por la función coseno. M3: Sí, echémosle eso ((no muy convencida)). [VE3]-6-|03:02:21|- Tanto M3 como H3 cambian su respuesta después de la puesta en común.	[VG]-6-|03:04:59| M2: Es un caso particular, cuando k igual a cero.
Intencionalidad	Las preguntas de esta parte tienen la misma intención que las propuestas para el cálculo de $\boldsymbol{a_1}$, la idea es que utilicen argumentos similares para concluir que el valor de $\boldsymbol{a_k}$ está dado por la fórmula: $\frac{2}{p}\int_0^p f(t)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)dt$, cuyo significado esté asociado al área bajo la curva.						
¿Sobre qué objetos lo hace?	**Observar** Las gráficas para distintos valores de k y m en los applets. **Equivaler** La igualdad: $f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)+b_k\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$	**Observar** Las gráficas para distintos valores de k y m en los applets. **Equivaler** La igualdad: $f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)+b_k\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$	**Observar** Las gráficas para distintos valores de k y m en los applets. **Equivaler** La igualdad: $f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)+b_k\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$	**Observar** Las gráficas para distintos valores de k y m en los applets. **Equivaler** La igualdad: $f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)+b_k\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$	**Observar** Las gráficas para distintos valores de k y m en los applets. **Equivaler** La igualdad: $f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)+b_k\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$	**Observar** Las gráficas para distintos valores de k y m en los applets.	**Observar** Las gráficas para distintos valores de k y m en los applets. **Equivaler** La igualdad: $f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)+b_k\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$
¿Sobre qué relaciones lo hace?	**Observar** Cuando $k=m$, la curva $y=a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$, tiene área bajo la curva no nula, cuando $k\neq m$ su área bajo la curva es 0. El área bajo la curva $y=b_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\mathrm{sen}\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$ es 0, para cualquier valor de k y m. **Equivaler**	**Observar** Cuando $k=m$, la curva $y=a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$, tiene área bajo la curva no nula, cuando $k\neq m$ su área bajo la curva es 0. El área bajo la curva $y=b_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\mathrm{sen}\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$ es 0, para cualquier valor de k y m. **Equivaler**	**Observar** Cuando $k=m$, la curva $y=a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$, tiene área bajo la curva no nula, cuando $k\neq m$ su área bajo la curva es 0. El área bajo la curva $y=b_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\mathrm{sen}\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$ es 0, para cualquier valor de k y m. **Equivaler**	**Observar** Cuando $k=m$, la curva $y=a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$, tiene área bajo la curva no nula, cuando $k\neq m$ su área bajo la curva es 0. El área bajo la curva $y=b_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\mathrm{sen}\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$ es 0, para cualquier valor de k y m. **Equivaler**	**Observar** Cuando $k=m$, la curva $y=a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$, tiene área bajo la curva no nula, cuando $k\neq m$ su área bajo la curva es 0. El área bajo la curva $y=b_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\mathrm{sen}\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$ es 0, para cualquier valor de k y m. **Equivaler**	**Observar** Cuando $k=m$, la curva $y=a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$, tiene área bajo la curva no nula, cuando $k\neq m$ su área bajo la curva es 0. El área bajo la curva $y=b_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\mathrm{sen}\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$ es 0, para cualquier valor de k y m.	**Observar** Cuando $k=m$, la curva $y=a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$, tiene área bajo la curva no nula, cuando $k\neq m$ su área bajo la curva es 0. El área bajo la curva $y=b_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\mathrm{sen}\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$ es 0, para cualquier valor de k y m. **Equivaler**

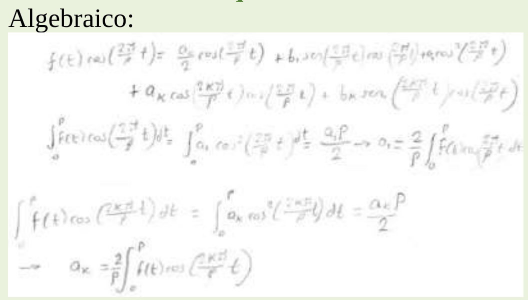
Parte II. **El cálculo de a_k**

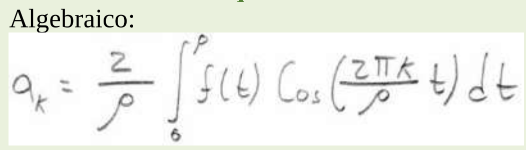
Intención: Significar el cálculo del coeficiente de Fourier $\boldsymbol{a_k}$, a partir de la articulación de los registros geométrico-analítico y algebraico, para validar el segundo en el primero.

<table>
<tr><th>Estudiante</th><th>M2</th><th>M3</th><th>H1</th><th>H3</th><th>H4</th><th>Equipo 3</th><th>Puesta en común</th></tr>
<tr><td></td>
<td>El área bajo la curva $y = f(t)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva $y = a_k\cos^2\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$, en un intervalo de tamaño p.</td>
<td>El área bajo la curva $y = f(t)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva $y = a_k\cos^2\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$, en un intervalo de tamaño p.</td>
<td>El área bajo la curva $y = f(t)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva $y = a_k\cos^2\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$, en un intervalo de tamaño p.</td>
<td>El área bajo la curva $y = f(t)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva $y = a_k\cos^2\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$, en un intervalo de tamaño p.</td>
<td>El área bajo la curva $y = f(t)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva $y = a_k\cos^2\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$, en un intervalo de tamaño p.</td>
<td></td>
<td>El área bajo la curva $y = f(t)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva $y = a_k\cos^2\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$, en un intervalo de tamaño p.</td></tr>
<tr><td>¿Por medio de qué lo hace?</td>
<td>Observar
Verbal/Algebraico: Para la función $y = a_k\,\mathrm{Cos}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\mathrm{Cos}\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$, según el applet, el área bajo la curva es $A = a_k\frac{p}{2}$ cuando $k = m$, y cero en cualquier otro caso. Para la función $y = a_k\,\mathrm{Cos}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\mathrm{Sen}\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$, el área bajo la curva es cero, en cualquier caso.

Equivaler
Algebraico: $a_k = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\,\mathrm{Cos}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)dt$.</td>
<td>Observar
Verbal/Algebraico: En la primera expresión de "y" si k=m el valor del área bajo la curva es a_k2.1, mientras que en la segunda expresión de "y" si k=m el valor del área bajo la curva es 0. Ahora bien, para la primera expresión de "y" si k y m son distintos el valor del área bajo la curva es 0, mientras que en la segunda expresión de "y" si k y m son distintos el área bajo la curva es 0.

Equivaler
Algebraico:
</td>
<td>Observar
Verbal/Algebraico: En y cos cos el área es $\frac{a_k p}{2}$ si $m = k$ y 0 si m diferente de k. En y sen cos el área siempre es 0 para todo m y k.

Equivaler
Algebraico:
</td>
<td>Observar
Verbal/Algebraico: La función que contiene el seno por el coseno siempre tiene un área de bajo de ella igual a cero en un periodo. La función coseno por coseno tiene un área bajo la curva igual a cero si $m \neq n$, solo cuando $m = n$ el área bajo la curva tiene un valor distinto de cero, más aún, para cualquier $k \in \mathbb{N}$ el área bajo la curva queda dada por $a_k\frac{p}{2}$.

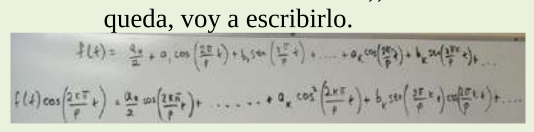
Equivaler
Algebraico:

</td>
<td>Observar
Verbal/Algebraico: Cuando $k = m\ \forall k, m \in \mathbb{Z}$, el área es $A = \frac{a_k p}{2}$, en el caso contrario $k \neq m$, $A = 0$, siendo A el área bajo las curvas.

Equivaler
Algebraico: $a_k = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\,\mathrm{Cos}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)dt$.</td>
<td>Observar
Verbal: [VE3]-6-|02:00:22|
H3: Cuando son iguales eso, solo cuando no se vale tu camote ((refiriéndose al valor de k)), ¿no? Cuando son distintas siempre vale cero.

Verbal: [VE3]-6-|02:01:12|
H3: Para la del coseno por seno, siempre están, ese siempre vale cero.
M3: Sí.</td>
<td>Observar
Verbal: [VG]-6-|02:59:20|
P: Hablemos de esta primero, coseno por coseno.
H6: Si k es igual a m, el área es a_m sobre 2 por p.

Verbal: [VG]-6-|03:00:22|
P: ¿Y si son distintos k y m?
H3: Cero ((varios estudiantes responden con él)).
P: Y lo vieron del:::
H3: De ahí ((señalando el applet))

Verbal: [VG]-6-|03:01:01|
P: ¿Con este qué pasa? ((refiriéndose a las curvas coseno por seno))
M3: Cero ((varios estudiantes responden con ella)).
P: Siempre es cero, ¿verdad? ((los estudiantes asienten con la cabeza))

Equivaler
Verbal: [VG]-6-|03:01:45|
P: ¿Qué argumento utilizaron?
M2: Lo hicimos similar a como lo hicimos para calcular a_1.
P: Ujú, entonces ¿qué habría que hacer?
H6: Multiplicar por $\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ ((los estudiantes asientes con la cabeza)).
P: Ajá. Entonces sí, cómo que si quiero encontrar el coeficiente de a_k multiplico por:::
M2: El coseno.
P: Su respectivo coseno ((los estudiantes asienten con la cabeza)) Entonces e queda, voy a escribirlo.


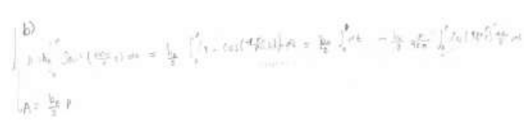
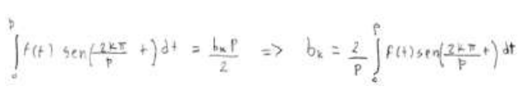
Verbal: [VG]-6-|03:02:54|
P: ¿Y ahora?
M2: Ahora integra todos, bueno integramos (incomprensible, 2).</td></tr>
<tr><td>Invariantes de Acciones</td>
<td colspan="7">- Cuando $k = m$, la curva $y = a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$, tiene área bajo la curva no nula, cuando $k \neq m$ su área bajo la curva es 0.
- El área bajo la curva $y = b_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\mathrm{sen}\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$ es 0, para cualquier valor de k y m.
- El área bajo la curva $y = f(t)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva $y = a_k\cos^2\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$, en un intervalo de tamaño p.</td></tr>
</table>

Parte III. **El cálculo de b_k**

Intención: Significar el cálculo del coeficiente de Fourier $\boldsymbol{b_k}$, a partir de la articulación de los registros geométrico-analítico y algebraico, para validar el segundo en el primero.

<table>
<tr><th>Estudiante</th><th>M2</th><th>M3</th><th>H1</th><th>H3</th><th>H4</th><th>Equipo 3</th><th>Puesta en común</th></tr>
<tr><td>Pregunta a</td>
<td>Para la función $y = b_k\,\mathrm{Sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\mathrm{Sen}\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$ el área bajo la curva es $A = \frac{p}{2}b_k$ cuando k=m, y cero en otro caso, mientras que para la función $y = b_k\,\mathrm{Sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\mathrm{Cos}\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$ es cero para cualquier</td>
<td>En la primera expresión de "y" si k=m el valor del área bajo la curva es b_k3.16, mientras que en la segunda expresión de "y" si k=m el valor del área bajo la curva es 0.

Ahora bien para la primera expresión de "y" si k y m son distintos el valor del área bajo la curva es 0, mientras que en la segunda expresión de "y" si k y m son distintos el área bajo la curva es 0.</td>
<td>Para y=sen sen el área es $\frac{b_k p}{2}\delta_{km}$.
Para y=sen cos el área es o para toda k,m.</td>
<td>En esta ocasión, la función que contiene seno por seno es cero siempre que $m \neq k$ y el área bajo la curva vale $a_k\frac{p}{2}$ cuando $m = n$.
El el caso de las funciones que contienen seno por coseno, de nuevo, el valor del área bajo la curva es igual a cero en todos los casos.</td>
<td>Para el caso de $k = m$, $A = \frac{b_k p}{2}$, en el caso en que $k \neq m \forall k, m \epsilon \mathbb{Z}$, A=0, donde A es el área bajo las curvas.</td>
<td>[VE3]-6-|02:15:20|
M3: Ay va a ser lo mismo, seguramente va a dar.
H3: Lo mismo, pero con seno, ¿no?
M3: No tiene sentido. Ay, ya sé que voy a hacer ((se va a la Parte II pregunta f)), porque me da weba escribir todo esto otra vez, lo voy a copiar y después le voy a cambiar eso.

[VE3]-6-|02:15:55|
M3: Es lo mismo, ¿no? (Incomprensible, 1) Se ve claramente.</td>
<td>[VG]-6-|03:12:47|
P: Entonces cuando k igual a m, ¿entonces el área da?
H3: b_k
P: b_k
H3: Periodo p entre 2.
P: Por p entre 2. Ajá, por el periodo entre 2. ¿Y cuando k es distinto de m?
M3: Cero.
P: Cero ¿y en el caso de sen por coseno?
H3: Siempre vale cero.</td></tr>
<tr><td>Pregunta b</td>
<td>$b_k = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\,\mathrm{Sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)dt$
</td>
<td></td>
<td>$b_k = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)dt$</td>
<td>$b_k = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)dt$</td>
<td>$b_k = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\,\mathrm{Sen}\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)dt$</td>
<td>[VE3]-6-|01:31:06|- M3 revisa la identidad $\mathrm{sen}^2 u = \frac{1-\cos(2u)}{2}$ y le indica a M3 que va a valer lo mismo (refiriéndose a lo obtenido en la Parte II).</td>
<td>[VG]-6-|03:13:20|- se pone en común que el razonamiento es similar al utilizado en la Parte II para calcular a_k, con la diferencia de que se debe multiplicar por $\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ para luego integrar de 0 a p. Al final se despeja el valor de b_k para obtener la fórmula solicitada.</td></tr>
<tr><td>Intencionalidad</td>
<td colspan="7">Se busca que el estudiante utilice estrategias similares a las utilizadas para calcular $\boldsymbol{a_k}$, y de esta manera concluir que $b_k = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)dt$.</td></tr>
<tr><td>¿Sobre qué objetos lo hace?</td>
<td>Observar
Las gráficas para distintos valores de k y m en los applets.

Equivaler
La igualdad:
$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$</td>
<td>Observar
Las gráficas para distintos valores de k y m en los applets.

Equivaler
La igualdad:
$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$</td>
<td>Observar
Las gráficas para distintos valores de k y m en los applets.

Equivaler
La igualdad:
$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$</td>
<td>Observar
Las gráficas para distintos valores de k y m en los applets.

Equivaler
La igualdad:
$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$</td>
<td>Observar
Las gráficas para distintos valores de k y m en los applets.

Equivaler
La igualdad:
$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$</td>
<td>Observar
Las gráficas para distintos valores de k y m en los applets.</td>
<td>Observar
Las gráficas para distintos valores de k y m en los applets.

Equivaler
La igualdad:
$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$</td></tr>
<tr><td>¿Sobre qué relaciones lo hace?</td>
<td>Observar
Cuando $k = m$, la curva $y = b_k\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$, tiene área bajo la curva no nula, cuando $k \neq m$ su área bajo la curva es 0. El área bajo la curva $y = b_k\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\cos\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$ es 0, para cualquier valor de k y m.

Equivaler
El área bajo la curva $y = f(t)\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva $y = b_k\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$, en un intervalo de tamaño p.</td>
<td>Observar
Cuando $k = m$, la curva $y = b_k\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$, tiene área bajo la curva no nula, cuando $k \neq m$ su área bajo la curva es 0. El área bajo la curva $y = b_k\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\cos\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$ es 0, para cualquier valor de k y m.

Equivaler
El área bajo la curva $y = f(t)\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva $y = b_k\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$, en un intervalo de tamaño p.</td>
<td>Observar
Cuando $k = m$, la curva $y = b_k\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$, tiene área bajo la curva no nula, cuando $k \neq m$ su área bajo la curva es 0. El área bajo la curva $y = b_k\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\cos\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$ es 0, para cualquier valor de k y m.

Equivaler
El área bajo la curva $y = f(t)\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva $y = b_k\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$, en un intervalo de tamaño p.</td>
<td>Observar
Cuando $k = m$, la curva $y = b_k\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$, tiene área bajo la curva no nula, cuando $k \neq m$ su área bajo la curva es 0. El área bajo la curva $y = b_k\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\cos\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$ es 0, para cualquier valor de k y m.

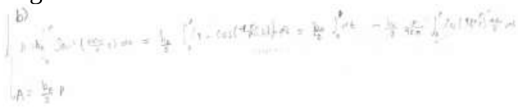
Equivaler
El área bajo la curva $y = f(t)\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva $y = b_k\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$, en un intervalo de tamaño p.</td>
<td>Observar
Cuando $k = m$, la curva $y = b_k\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$, tiene área bajo la curva no nula, cuando $k \neq m$ su área bajo la curva es 0. El área bajo la curva $y = b_k\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\cos\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$ es 0, para cualquier valor de k y m.

Equivaler
El área bajo la curva $y = f(t)\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva $y = b_k\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$, en un intervalo de tamaño p.</td>
<td>Observar
Cuando $k = m$, la curva $y = b_k\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$, tiene área bajo la curva no nula, cuando $k \neq m$ su área bajo la curva es 0. El área bajo la curva $y = b_k\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\cos\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$ es 0, para cualquier valor de k y m.</td>
<td>Observar
Cuando $k = m$, la curva $y = b_k\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$, tiene área bajo la curva no nula, cuando $k \neq m$ su área bajo la curva es 0. El área bajo la curva $y = b_k\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\cos\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$ es 0, para cualquier valor de k y m.

Equivaler
El área bajo la curva $y = f(t)\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva $y = b_k\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$, en un intervalo de tamaño p.</td></tr>
<tr><td>¿Por medio de qué lo hace?</td>
<td>Observar
Verbal/Algebraico: Para la función $y = b_k\,\mathrm{Sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\mathrm{Sen}\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$ el área bajo la curva es $A = \frac{p}{2}b_k$ cuando $k = m$, y cero en otro caso,</td>
<td>Observar
Verbal/Algebraico: En la primera expresión de "y" si $k = m$ el valor del área bajo la curva es b_k3.16, mientras que en la segunda expresión de "y" si $k = m$ el valor del área bajo la curva es 0.</td>
<td>Observar
Verbal/Algebraico: Para y=sen sen el área es $\frac{b_k p}{2}\delta_{km}$. Para y=sen cos el área es 0 para toda k, m.</td>
<td>Observar
Verbal/Algebraico: En esta ocasión, la función que contiene seno por seno es cero siempre que $m \neq k$ y el área bajo la curva vale $a_k\frac{p}{2}$ cuando $m = n$. El el caso de las funciones que contienen</td>
<td>Observar
Verbal/Algebraico: Para el caso de $k = m$, $A = \frac{b_k p}{2}$, en el caso en que $k \neq m \forall k, m \epsilon \mathbb{Z}$, A=0, donde A es el área bajo las curvas.</td>
<td>Observar
Verbal: [VE3]-6-|02:15:20|
M3: Ay va a ser lo mismo, seguramente va a dar.
H3: Lo mismo, pero con seno, ¿no?</td>
<td>Observar
Verbal: [VG]-6-|03:12:47|
P: Entonces cuando k igual a m, ¿entonces el área da?
H3: b_k
P: b_k</td></tr>
</table>

Parte III. **El cálculo de $\boldsymbol{b_k}$**

Intención: Significar el cálculo del coeficiente de Fourier $\boldsymbol{b_k}$, a partir de la articulación de los registros geométrico-analítico y algebraico, para validar el segundo en el primero.

Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
	mientras que para la función $y = b_k \operatorname{Sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\operatorname{Cos}\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$ es cero para cualquier. **Equivaler** Algebraico: 	Ahora bien, para la primera expresión de "y" si k y m son distintos el valor del área bajo la curva es 0, mientras que en la segunda expresión de "y" si k y m son distintos el área bajo la curva es 0. **Equivaler** Algebraico: $\int_0^p f(t)\,\operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)dt = \frac{b_k p}{2} \Rightarrow b_k = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)dt$	**Equivaler** Algebraico: $b_k = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)dt$.	seno por coseno, de nuevo, el valor del área bajo la curva es igual a cero en todos los casos. **Equivaler** Algebraico: $b_k = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)dt$.	**Equivaler** Algebraico: $b_k = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\operatorname{Sen}\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)dt$.	[VE3]-6-|02:15:55| M3: Es lo mismo, ¿no? (Incomprensible, 1) Se ve claramente.	H3: Periodo p entre 2. P: Por p entre 2. Ajá, por el periodo entre 2. ¿Y cuando k es distinto de m? M3: Cero. P: Cero ¿y en el caso de sen por coseno? H3: Siempre vale cero. **Equivaler** Verbal: [VG]-6-|03:13:20|- se pone en común que el razonamiento es similar al utilizado en la Parte II para calcular a_k, con la diferencia de que se debe multiplicar por $\operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ para luego integrar de 0 a p. Al final se despeja el valor de b_k para obtener la fórmula solicitada.
Invariantes de Acciones	- Cuando $k = m$, la curva $y = b_k \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$, tiene área bajo la curva no nula, cuando $k \neq m$ su área bajo la curva es 0. - El área bajo la curva $y = b_k \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\cos\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$ es 0, para cualquier valor de k y m. - El área bajo la curva $y = f(t)\operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva $y = b_k \operatorname{sen}^2\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$, en un intervalo de tamaño p.						