CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

# El uso de objetos geométricos: proyecciones de mapas, navegación y Socioepistemología

Tesis que presenta

**Julieta Tejería Russi**

Para obtener el grado de

**Maestra en Ciencias**

En la especialidad de

**Matemática Educativa**

Director de la Tesis

**Dr. Ricardo Arnoldo Cantoral Uriza**

Ciudad de México Noviembre, 2021

Como estudiante extranjera, agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt) de México por el fundamental apoyo brindado para la realización de esta investigación.

Julieta Tejería Russi

CVU 1017486

# Agradecimientos

Agradezco a mis padres. Marcelino y Verónica, por todas las enseñanzas, por ser sostén, por creer en mí y acompañarme en cada momento. A mis hermanos; Ismael, Delfina y Joaquín por ser amigos y apoyarme en todo. ¡Siempre cerca!

A Maximiliano, mi gran compañero. Por cada momento compartido en esta etapa de aprendizaje. De Uruguay a México, de México a Uruguay. Por soñar juntos.

Muchas gracias al Dr. Ricardo Cantoral, por creer en las ideas y apostar a ellas, por cultivar nuestra creatividad y guiar nuestro aprendizaje. Por recibirnos con calidez y ser parte fundamental de este proceso.

Al Dr. Francisco Cordero, por las enseñanzas en estos dos años, por acercarnos también a la teoría y transmitirnos su cosmovisión. A la Dra. Rosa María Farfán, y a la Dra. Gisela Montiel, por su constante apoyo y por los seminarios de maestría compartidos que fueron de mucho aprendizaje.

Agradezco muchísimo a Rodolfo y Selvin, por recibirnos desde el primer día. Por cada momento compartido, por cada risa, por cada historia juntos que tenemos para contar.

A Eleany, por estar y compartir, por hacer de estas circunstancias que nos tocaron vivir, una experiencia mucho más linda.

¡Gracias Enrique y Piña! Por todo lo compartido, por todo el apoyo bien de cerca en este tiempo.

Un especial agradecimiento a los colegas y compañeros del seminario de Construcción Social del Conocimiento Matemático: Rebeca, Rodolfo, Selvin, Cristian, Wendolyne, Viridiana, Abraham, Eleany, Melisa e Itacuishi, por las reflexiones y diálogos que ayudaron a robustecer este trabajo, por construir y por todo lo compartido.

A todo el personal del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional de México, especialmente a Adriana del departamento de Matemática Educativa y a Iván del departamento de Becas y Estímulos.

Agradezco al personal del Centro Médico Nacional “20 de noviembre” del ISSSTE por su amabilidad, en especial al Dr. Cortés y al Dr. López.

Agradezco profundamente a México, por hacerme sentir como en casa desde el primer momento, por lo hermoso y cálido de su gente, por cada lugar conocido, por la oportunidad y el apoyo.

Julieta.

# Índice

# Resumen

Esta investigación surge a partir de nuestro interés por evidenciar el uso de los objetos geométricos en contextos que difieran de los que se proponen típicamente en la matemática escolar, buscando escenarios en los que estos objetos se signifiquen mediante el uso. Las proyecciones de mapas, como transformación de la esfera al plano, y sus distorsiones nos brindaron un camino por dónde empezar a investigar. Nos enfocamos particularmente en la proyección de Mercator, que es ampliamente divulgada hasta la actualidad a pesar de sus grandes distorsiones de áreas, y su origen se debió a la intención de mejorar las técnicas de navegación en el siglo XVI, a partir de conservar ciertas propiedades geométricas. Es decir, surge a partir de la necesidad de resolver un problema de la época: construir un mapa en el que las líneas de rumbo para la navegación -curvas loxodrómicas- se dibujen como líneas rectas.

Realizamos una *problematización del saber*, en el marco de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, con la intención de reconocer cómo este se hace presente en un contexto en el que se usa con cierta intención. El saber se historiza y dialectiza, para esto se lleva a cabo un análisis de contenido de una obra original "*Certaine Errors in Navigation*" cuyo autor es el geómetra inglés, Edward Wright, y en 1599 expone errores que identifica en la interpretación del mapa que se utilizaba para la navegación y se propone solucionarlos, para esto realiza la primera explicación de la proyección de Mercator.

Como resultados de esta investigación se identificaron usos de objetos geométricos en la obra analizada, que nos permitió configurar una epistemología de prácticas en torno a la *compensación* de distorsiones necesaria para la elaboración del mapa. Así como evidenciar la incidencia de la intencionalidad didáctica de Wright (1599), su *racionalidad contextualizada* que reconocemos se conforma a partir de dos epistemologías que conciben el saber de manera diferente, en la construcción social del conocimiento.

Implementamos un diseño exploratorio que tuvo la intención de acercar algunos aspectos del contexto de la navegación a profesoras de educación secundaria de Uruguay y analizar cómo ponen en uso objetos típicamente escolares, todo esto con la finalidad de robustecer la problematización y recuperar elementos para un diseño de intervención más fino.

# Abstract

This research arises from our interest in evidencing the use of geometric objects in contexts that differ from those typically proposed in school mathematics, looking for scenarios in which these objects are signified through their use. Map projections, as a transformation from sphere to plane, and their distortions provided us a way to start this investigation. We focus particularly on the Mercator projection, as it is widely used until today despite its large area distortions. Its origin is due to the intention of improving navigation techniques in the sixteenth century, by preserving certain geometric properties. This mean that it arise from the need to solve a problem of the epoch: to construct a map in which the course lines of navigation - loxodromic curves - were drawn as straight lines.

We carry out a problematization of knowledge, within the framework of the Socioepistemological Theory of Educational Mathematics, with the intention of recognizing how this knowledge becomes present in a context in which it is used with a certain intention. Knowledge is historicized and dialecticized, for this purpose, a content analysis of an original work "Certaine Errors in Navigation" is carried out, whose author is the English geometer Edward Wright, and in 1599, based on his knowledge, he exposed errors he identifies in the interpretation of the map used for navigation and proposes to solve them, for this purpose he made the first explanation of Mercator's projection.

As a result of this research, we identified uses of geometric objects in the analyzed work, which allowed us to configure an epistemology of practices around the compensation of distortions necessary for the elaboration of the map. As well as evidencing the incidence of the didactic intentionality of Wright (1599), its contextualized rationality that we recognize is shaped from two epistemologies that conceive knowledge in a specific way, in the social construction of knowledge.

We implemented an exploratory design that had the intention of approaching some aspects of the context of navigation to secondary school teachers in Uruguay and to analyze how they use typical school objects, all this with the purpose of strengthening the problematization and recovering elements for a more refined intervention design.

# Introducción

La investigación que reportamos es un estudio socioepistemológico que analiza el papel de los objetos geométricos para dar solución a un problema real que se presenta en el siglo XVI en el contexto de la práctica de la navegación: realizar un mapa que optimice las técnicas haciendo que las curvas loxodrómicas se muestren como líneas rectas. A partir de una exploración libre sobre las proyecciones de mapas reconocemos a la de Mercator como de interés debido a que se sigue utilizando hasta la actualidad a pesar de sus grandes distorsiones de áreas, y su construcción se dio en el contexto de la navegación.

Identificamos la obra que publicó el geómetra inglés Edward Wright en 1599 de relevancia ya que en esta se encuentra la primera explicación de ese mapa para la navegación. Establece un contraste entre la proyección equidistante que se utilizaba hasta el momento, que generaba problemas en la navegación por su mala interpretación, y la proyección de Mercator, que los resolvía. Nos planteamos a partir del análisis de esta obra original reconocer una epistemología de prácticas vinculada a la compensación de distorsiones, con base en el uso de los objetos geométricos.

Analizamos los programas de estudio de educación secundaria uruguaya y de la formación de los profesores de esos niveles, que nos da insumos sobre cómo es tratada la Geometría en estos y del *discurso Matemático Escolar* (*dME*) que la permea. Desde nuestro marco teórico consideramos de relevancia para una intervención en el sistema educativo, identificar epistemologías de usos de los objetos geométricos que no son incluidas en el *dME*.

Este documento de tesis se estructura en seis capítulos que describiremos a continuación.

El Capítulo 1 concierne al planteamiento de la problemática de investigación. Exponemos las motivaciones personales que la consolidaron, así como nuestro primer acercamiento a las proyecciones de mapas, y la decisión de profundizar en el análisis de la Proyección de Mercator debido a la intencionalidad con la que se construyó en el siglo XVI. Mostramos cómo todo esto permitió la delimitación de los objetivos y preguntas de la investigación.

El marco teórico de esta investigación es la Teoría Socioepistemológica de la matemática educativa. Describimos en el Capítulo 2 los constructos de esta que fueron cimiento de la investigación y nos permitieron dar respuestas a nuestras preguntas.

En el Capítulo 3 sobre las consideraciones metodológicas, se explica la *problematización del saber* que realizamos como metodología en el marco de la Teoría Socioepistemológica, así como los métodos que seleccionamos para el análisis de contenido cualitativo de la obra original.

Realizamos una revisión de programas de estudio de educación secundaria uruguaya y sobre la formación de profesores para esos niveles, que mostramos en el Capítulo 4. La intención fue identificar qué lineamientos didácticos aparecen y el tratamiento que se le da, como parte del *dME* que norma la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría.

En el Capítulo 5 exponemos el análisis de contenido de la obra original que seleccionamos: "*Certaine Errors in Navigation*", escrita por el geómetra inglés Edward Wright en 1599. En esta se realiza la primera explicación a la proyección de Mercator. Para este análisis consideramos aspectos de tipo textual y contextual para lo que tuvimos en cuenta una caracterización del período, de la práctica de la navegación en el siglo XVI, y algunos otros geómetras que se involucraron en la resolución de problemas que involucraban dicha práctica. Creímos relevante mostrar el contraste entre la proyección equidistante que se utilizaba hasta ese momento para navegar con la proyección de Mercator que facilita las técnicas. Además, incorporamos explicaciones actuales de la última que nos permitió el entendimiento más profundo de esta. Como resultados del análisis, postulamos una epistemología de prácticas en torno a la compensación de distorsiones necesaria para la construcción del mapa, que emerge del uso de los objetos geométricos.

El Capítulo 6 está destinado a la implementación de un diseño exploratorio que configuramos a partir de algunos aspectos sobre el contexto de la navegación y la proyección de mapa equidistante que se utilizaba en la práctica. Se implementó con profesoras de educación secundaria de Uruguay, con la intencionalidad de que sirva como primer acercamiento de dicho contexto, que nos permitió obtener información para un diseño de intervención más fino a futuro.

# **Capítulo 1.** Planteamiento de la Problemática de Investigación

En este capítulo se plantean las motivaciones que dieron origen a este proyecto de investigación, y el camino recorrido para la consolidación de la problemática. Reconocemos en la enseñanza de la Geometría en la educación media de Uruguay y en la formación de los profesores de estos niveles, a partir de la revisión de programas de estudio y sus lineamientos didácticos, un *discurso Matemático Escolar*[1] *(dME)* que norma lo que se debe enseñar y cómo se debe enseñar, cuáles son los argumentos y los tipos de problemas que se privilegian en el aula con respecto a esta rama de la matemática.

Exponemos cómo a partir de motivaciones personales, desembocamos en la búsqueda de contextos en los que los objetos geométricos sean significados mediante el uso. Presentamos las proyecciones de mapas y sus distorsiones como un escenario de posibilidades para este fin. Con base en esto y enmarcados en nuestro enfoque teórico, nos interesó reconocer las proyecciones de mapas como parte de la historia y situadas en un contexto específico, en el que su creación tiene una funcionalidad. Identificamos la oportunidad de analizar cómo se construyó el mapa de Mercator en 1569, y cómo los objetos geométricos en el siglo XVI fueron una herramienta fundamental para dar solución al problema de representar la Tierra esférica en el plano con propósitos de navegación.

## 1.1. Motivaciones personales y búsqueda de contextos: Proyecciones de Mapas

Realizamos una revisión de los programas de estudio de educación secundaria uruguaya y de la formación de los profesores de esos niveles, que involucran temáticas relacionadas con la Geometría, y reconocimos aspectos que norman la enseñanza y el aprendizaje de esta.[2] Identificamos que estos contenidos se encuentran presentes a lo largo de toda la escolarización de estudiantes de estos niveles,

[1] Este constructo teórico se abordará con mayor profundidad en el Capítulo 3.
[2] En el Capítulo 4 se muestra de forma detallada este análisis.

y se le asigna una importante carga horaria en los cursos. Existe una secuenciación de los contenidos, lo aprendido en cada curso repercute en el siguiente siendo base fundamental para nuevos conocimientos. Se destaca también un abordaje de la Geometría que comienza en los primeros niveles con un tratamiento intuitivo y experimental, derivando de forma progresiva en el rigor de la formalidad y las demostraciones.

A partir de cuestionar cómo se presenta en el ámbito escolar la Geometría, nos adentramos a la búsqueda de contextos en los que los objetos geométricos ya no aparezcan como acabados y solamente al servicio de la propia matemática, sino que se signifiquen mediante su *uso*. Comenzamos preguntándonos ¿cómo se usa el conocimiento geométrico? ¿Dónde vive ese conocimiento geométrico? ¿Existen escenarios donde se signifiquen mediante el uso que se les da? ¿La Geometría que se enseña en la escuela se significa en otras disciplinas?

En mi formación como profesora de matemática de educación secundaria en el Instituto de Profesores Artigas de Montevideo, tuve la oportunidad en el último año de cursar la asignatura "Profundización en Geometría"[3], y me resultó de gran interés, porque si bien, estaba centrado en los objetos, trataba temáticas que permitían profundizar los conocimientos del futuro profesor sobre las distintas geometrías. Se abordaron tópicos diversos, el que llamó mi atención y por el que este proyecto empieza a consolidarse fue: la inversión geométrica, ya que, como transformación, ponía en juego objetos geométricos típicamente escolares. Desde mi experiencia en el aula como profesora de matemática de educación secundaria, el tratamiento que se le dio a la Geometría en este curso se correspondía a una forma de pensamiento matemático que me movilizaba como estudiante a querer aprender y como profesora a querer enseñar.

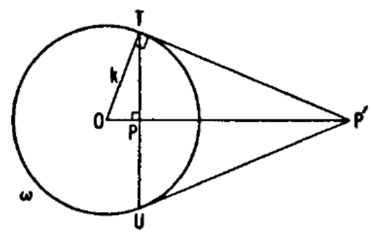
Se revisaron algunos libros de texto recomendados para los cursos de formación de profesores, se buscó la temática inversión geométrica y encontramos un vínculo con las proyecciones de mapas. Coxeter y Greitzer (1967) definen esta transformación de la siguiente forma y se acompaña de las imágenes que se muestran en la figura 1.1:

[3] El programa de estudios de este curso se describe en el Capítulo 4.

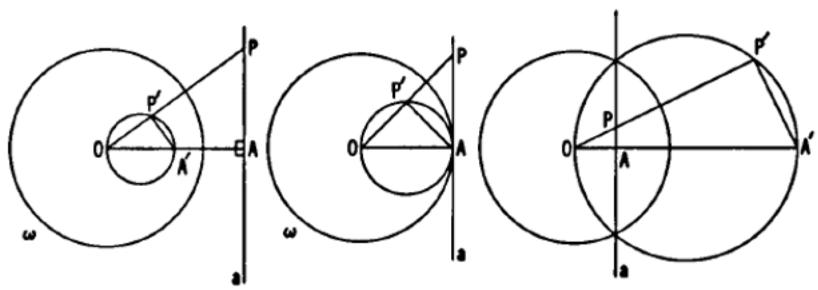
Dada una circunferencia ω con centro O y radio *k*, y un punto P distinto de O, definimos el inverso de P como el punto P', en la semirrecta OP, cuya distancia a O satisface que: *OP x OP ´= k*$^2$. (p. 108) [Traducción propia][4]

**Figura 1.1.** Inversión geométrica.

a)




b)




Nota: Imagen extraída de Coxeter y Greitzer (1967, pp. 108-109).

Estos autores refieren a que la inversión geométrica en el círculo se puede generalizar de forma sencilla a una inversión en la esfera, y proponen a la proyección estereográfica como ejemplo particular de esta inversión. Lo explican a partir de la imagen que se encuentra en el centro de la figura 1.1b.

Al incrustar el plano de la figura 5.3B [figura 1.1b] en un espacio tridimensional, y girar alrededor de la línea de centros OA, vemos enseguida que las esferas (incluidos los planos como esferas de radio infinito) se invierten en esferas. En particular (véase la parte central de la figura 5.3B [figura 1.1b]), si *a* es el plano tangente en A a la esfera de inversión ω, entonces la inversa *a′* de *a* es la esfera de radio OA como diámetro. Los puntos inversos de *a* y *a′* pueden derivarse entre sí sin referencia a O. (Coxeter y Greitzer, 1967, p. 151) [Aclaraciones agregadas]

[4] Todas las traducciones de este documento son propias.

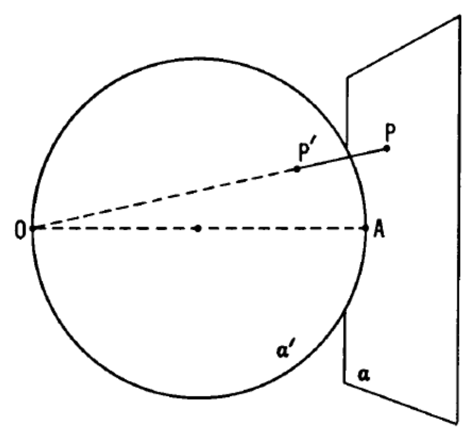
Refiriéndose precisamente a la proyección estereográfica como inversión en la esfera, la figura 1.2 ayuda a comprender la transformación y la explican de la siguiente forma:

> Dado P en el plano *a*, podemos construir el punto correspondiente P′ como la segunda intersección de la recta OP con la esfera *a′*. A la inversa, dado P′, en cualquier lugar de *a′* excepto en O, podemos construir el punto correspondiente P como la sección de la recta OP′ por el plano *a*. Nuestro deseo natural de evitar la excepción nos obliga a cambiar a en un plano inverso añadiendo un único punto en el infinito que será la posición de P cuando P′ esté en O. (Coxeter y Greitzer, 1967, p. 151)

Considerando que este mapeo de la esfera al plano está dado por un tipo de inversión geométrica particular, la proyección estereográfica, describen cómo se corresponden algunas figuras.

> Si observamos que este tipo de proyección es una inversión particular, podemos ver fácilmente que los círculos se proyectan en círculos. En efecto, dado que las esferas se invierten en esferas (o planos), y que cualquier círculo puede considerarse como la curva de intersección de dos esferas, se deduce que los círculos (en cualquier lugar del espacio, y por tanto, en particular, en a’) se invierten en círculos. (Coxeter y Greitzer, 1967, p. 151)

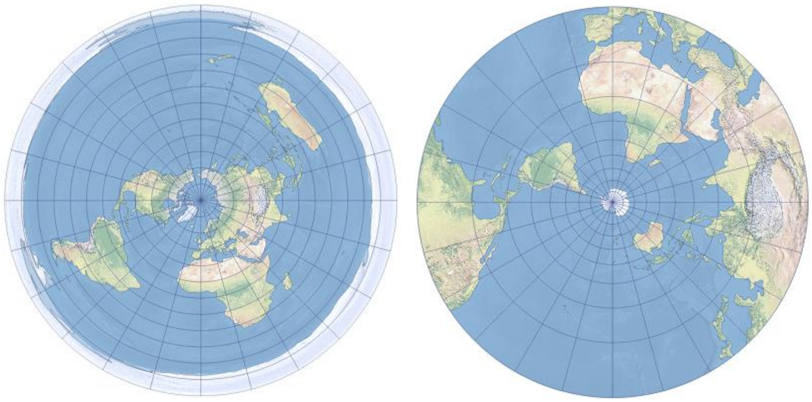
**Figura 1.2.** Proyección estereográfica como inversión de la esfera.




Nota: Imagen extraída de Coxeter y Greitzer (1967, p. 152).

Se afirma que esta proyección tiene como ventaja la conservación del ángulo entre dos direcciones a partir de un punto, y esto provoca que las formas de islas pequeñas, por ejemplo, se muestren con distorsión mínima, pero que no es ideal para la elaboración de mapas prácticos. Se muestra en la figura 1.3 esta proyección de la Tierra, con los planos tangentes en cada polo.

**Figura 1.3.** Proyección estereográfica.



Nota: Imagen extraída de https://pro.arcgis.com/es/pro-app/latest/help/mapping/properties/stereographic.htm

Las proyecciones de mapas nos mostraron un posible escenario en el que investigar sobre el *uso* de los objetos geométricos, y nos preguntábamos, ¿Cómo se significan los objetos geométricos al ser utilizados en un escenario que se relaciona con las representaciones que tenemos del mundo?

A la Geometría en el *discurso Matemático Escolar* se le otorga la responsabilidad reiteradas veces de ayudar a describir y comprender el mundo en que vivimos. El tratamiento escolar que se le da, ¿brinda herramientas para poder interpretar de mejor forma el mundo?, podríamos plantearnos mejor, ¿cómo poner en uso esos conocimientos a favor de la comprensión de la representación del mundo? La forma en la que se presentan los objetos matemáticos desprovistos de diferentes significaciones, ¿nos permitiría ponerlos en uso si se nos presenta una situación que ponga en conflicto las diferentes proyecciones de mapas del mundo?

Con base en todos estos cuestionamientos es que consideramos a las proyecciones de mapas como posible camino para continuar indagando. Lapaine y Usery (2017), presentan el libro "*Choosing a Map Projection*" con varios capítulos escritos por diferentes autores, dedicados a la explicación de las diversas proyecciones, poniendo énfasis en la distorsión que presentan y cómo los mapas que acostumbramos a considerar representativos de la realidad nos hacen generar una imagen distorsionada de la Tierra. La representación más fiel de esta es el globo terráqueo, en él se conservan todas las magnitudes útiles para diferentes fines. Pero no es la representación de la Tierra más práctica o eficiente de utilizar, ya que, por ejemplo, cuando lo vemos solo nos muestra un hemisferio de este. Es por esto, que surgen a lo largo de la historia diferentes formas de representar a la Tierra en un mapa, transformando la esfera en un plano. Esta variedad de proyecciones está dada por las distintas características geométricas que se desean conservar, construidas con un propósito.

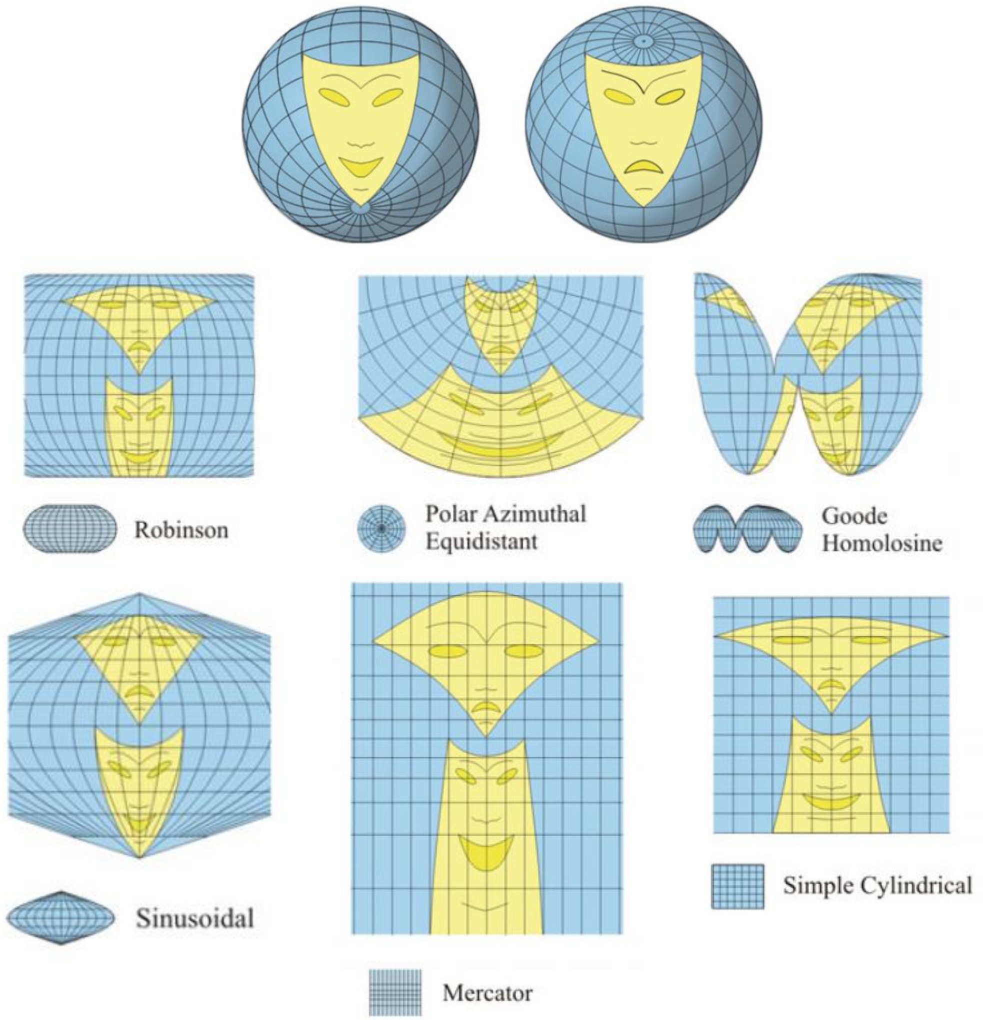
> Una proyección de mapa mal elegida puede ser realmente dañina. Tendemos a creer lo que vemos, y cuando las relaciones geográficas fundamentales, como las formas, tamaños, direcciones, etc., están muy distorsionadas, nos inclinamos a aceptarlas como un hecho si las vemos así en los mapas. Esto puede llevar a impresiones muy equivocadas, por ejemplo, que la ruta de Chicago a Roma se debe al este o de San Francisco a Tokio se debe al oeste, o que América del Norte es más grande que África. (Robinson, 2017a, p. 2)

Ser conscientes de las diferentes distorsiones que tienen los mapas, dependiendo de qué conservan nos hace reconocerlos de forma crítica. En la figura 1.4 se muestran ejemplos de las distorsiones que generan diferentes proyecciones, tomando como referencia dos imágenes que son popularmente conocidas, las máscaras que representan la comedia y la tragedia. Robinson (2017b) menciona que se distorsiona en al menos dos o tres de las siguientes formas:

> El tamaño de las regiones parece más grande o pequeño que en el globo, las distancias entre los puntos se muestran más largas o cortas que en el globo y, las rutas directas entre puntos no se muestran cómo líneas rectas. (p. 4)

El autor sostiene que todas las distorsiones en el mapa (formas, distancias, direcciones y áreas), son necesarias para lograr algo que es de mayor importancia: la continuidad, y pone el ejemplo que se muestra en la figura 1.5, como muestra de la discontinuidad que genera “pelar” el globo de forma que la distorsión sea mínima y tener un mapamundi verdadero.

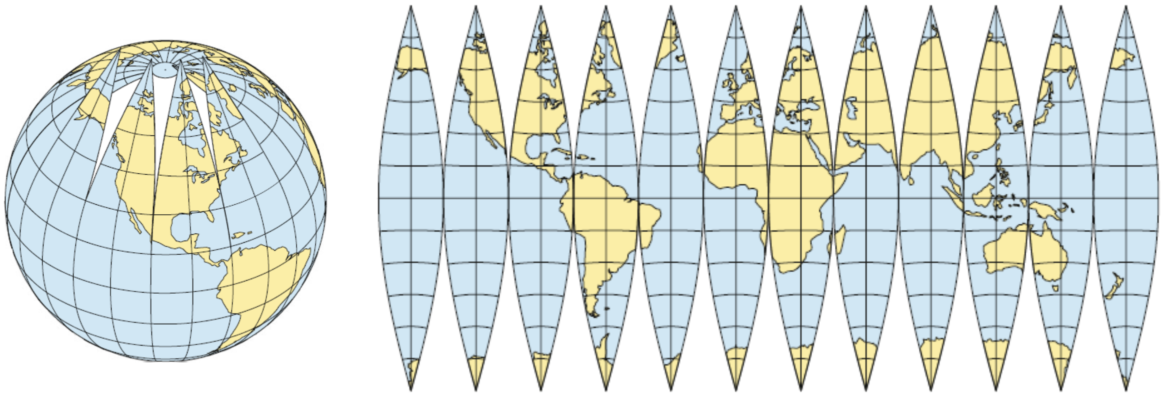
**Figura 1.4.** Ejemplos de distorsión de diferentes proyecciones.




Nota: Imagen extraída de Robinson (2017b, pp. 46-47).

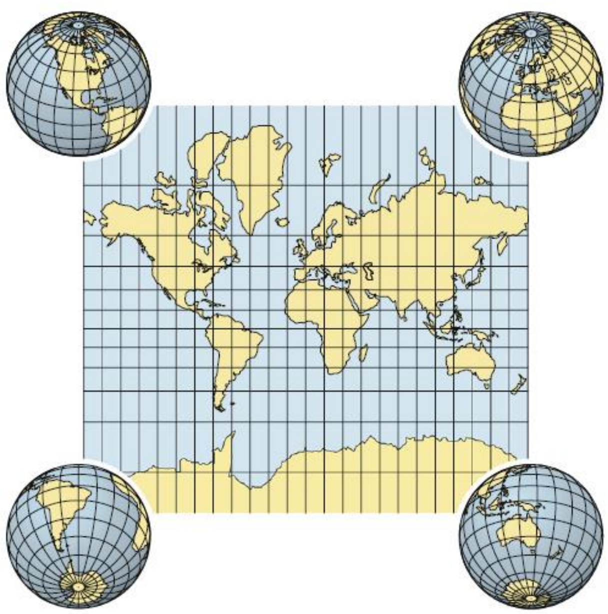
Otro aspecto importante que señala en cuanto a los mapas es la finalidad para la que fueron construidos, aparece el ejemplo del mapa de Mercator. Su finalidad era facilitar las técnicas de navegación en el contexto del siglo XVI, y se expone en la actualidad frecuentemente como representación de la Tierra. En la figura 1.6 se muestra dicho mapa, así como un globo terráqueo de referencia para que se pueda visualizar la distorsión.

**Figura 1.5.** Planisferio que se obtiene al "pelar" el globo en forma de gajos.



Nota: Imagen extraída de Robinson (2017b, p. 17).

**Figura 1.6.** Mapa de Mercator y globo terráqueo de referencia.



Nota: Imagen extraída de Robinson (2017a, p. 10).

Nos interesa resaltar que existen una infinidad de proyecciones de mapas, y no pueden realizarse sin algún tipo de distorsión como mencionamos anteriormente. Snyder (1987) señala que las características que se deben tener en cuenta para elegir una proyección son: área, forma, escala, dirección y lo que nombra características especiales. En cuanto a las proyecciones de igual área afirma que "una moneda de cualquier tamaño, por ejemplo, en una parte del mapa cubre exactamente la misma área de la Tierra real que la misma moneda en cualquier otra parte del mapa" (p. 4). Las proyecciones que conservan las formas reciben el nombre de conforme y "normalmente los ángulos locales relativos sobre cada punto del mapa se muestran correctamente" (p. 4). Además,

> Un resultado importante de la conformidad es que la escala local en todas las direcciones alrededor de un punto es constante. Debido a que los ángulos locales son correctos, los meridianos intersecan los paralelos en ángulos rectos (90°) en una proyección conformada, tal como lo hacen en la Tierra. (Snyder, 1987, p. 4)

En cuanto a la escala, "Ninguna proyección del mapa muestra la escala correctamente en todo el mapa, pero normalmente hay una o más líneas en el mapa a lo largo de las cuales la escala permanece verdadera" (Snyder, 1987, p. 4). Al referirse a la dirección Snyder (1987) menciona:

> Mientras que los mapas conformes dan las direcciones locales relativas correctamente en cualquier punto dado, hay un grupo de proyecciones de mapa frecuentemente utilizado, llamado acimutal[5], en el que las direcciones o acimuts de todos los puntos del mapa se muestran correctamente con respecto al centro. (p. 4)

Cuando refiere a características especiales que conservan los mapas, ejemplifica con la proyección de Mercator, ya que muestra las curvas loxodrómicas como rectas. Así mismo, la proyección Gnomónica muestra como líneas rectas las trayectorias por círculos máximos. Por último, en la estereográfica todos los círculos menores y los círculos máximos se muestran como círculos en el mapa (Snyder, 1987, p. 4).

Kessler et al. (2017) en su capítulo de Lapaine y Usery (2017) refieren a la enseñanza de las proyecciones de mapas, y a algunas investigaciones que se han llevado a cabo sobre cómo se aprenden debido a que el hecho de entenderlas nos permitiría analizar la distorsión. Olson (2006) sostiene que se debe cuestionar qué creer y qué no cuando miramos un mapa, así como ser capaces de seleccionar mapas apropiados según las necesidades. Afirma que debemos desaprender lo que conocemos de los mapas, ya que por el desconocimiento de las distorsiones que poseen, aprendemos de forma incorrecta. Propone identificar si un mapa conserva área, si es conforme o ninguno de los dos, reconociendo

---

[5] 1. m. Astron. Ángulo que con el meridiano forma el círculo vertical que pasa por un punto de la esfera celeste o del globo terráqueo. Extraído de https://dle.rae.es/acimut

visualmente qué tipo de distorsión tiene. Dicha visualización basada en una serie de aspectos útiles sobre las líneas de latitud y longitud (paralelos y meridianos) en el globo, como herramienta que permitiría reconocer la distorsión del mapa.

Por su parte, Battersby y Kessler (2012) proponen encontrar métodos que mejoren la enseñanza de la distorsión en las diferentes proyecciones y evitar la codificación errónea de la información que el mapa brinda, a partir de detectar los errores cognitivos y la forma en que se identifica e interpreta la distorsión. Para esto evalúan los argumentos utilizados por estudiantes universitarios (con y sin formación en geografía) cuando evalúan la distorsión en las proyecciones de mapas a escala mundial. Sostienen que se desarrolla la capacidad de identificar visualmente que ciertos mapas están distorsionados, pero que esto no es generalizable y suficiente como para aplicarlo a proyecciones desconocidas. Es por esto por lo que se reconoce que el mapa de Mercator está distorsionado porque escolarmente es el que se muestra como ejemplo de distorsión, pero no se comprende cómo lo está ni por qué.

Delgado (2002) propone la forma en que el estudio de los mapas contribuye a la enseñanza de la historia como herramienta didáctica, debido a su existencia a lo largo de la historia y su vínculo con la cultura humana, brinda información sobre cómo el humano percibe a su entorno y al planeta. Define al mapa como "un documento que representa una relación del hombre con el espacio" (p. 333).

> El mapa a pesar de ser una antigua manifestación cultural del hombre, no ha transformado su objetivo. Lo que ha variado a lo largo del tiempo han sido los materiales y los métodos de elaborarlo. Las culturas antiguas fabricaron estos documentos con el afán de vaciar en él el mundo conocido y hacerlo accesible a todos. Conforme ese mundo ampliaba sus fronteras, el mapa se ajustaba a esta nueva realidad y el ensanchamiento del mundo, entendido como un proceso constante, se ha visto representado en los mapas. (p. 334)

El mapa aparece como portador de información de una época, de los avances tecnológicos que existen en esta, y de los conocimientos que se tenían sobre los territorios. En este sentido, Delgado (2002) sostiene:

> Un documento cartográfico, antiguo o moderno, es producto de una época y, por tanto, es un testigo de la misma; es también un objeto de arte y responde igualmente a un avance científico

determinado. A este se agrega que, si bien el mapa es una representación gráfica de un territorio, es también un documento mediador entre un mundo físico y uno mental y ayuda al desenvolvimiento humano cuando éste extiende sus sentidos en el universo que habita. (p. 340)

Esto no sólo involucra a la historia como disciplina que puede utilizar al mapa como herramienta de aprendizaje, sino que además nos afirma la idea de que los mapas surgen en determinado momento histórico, con ciertos objetivos que tienen que ver con los intereses de las sociedades de esa época. La proyección que consideramos para nuestra investigación nos da indicios de un ejemplo sobre cómo el contexto en el que surge ese mapa lo determina, y a su vez cómo el mapa brinda información acerca de una determinada época histórica.

Con base en lo mencionado anteriormente acerca de la finalidad del mapa de Mercator es que comienza a presentarse la posibilidad de estudiar esta proyección en particular, con la intención de que los objetos geométricos se signifiquen en la comprensión de la distorsión que tiene el mapa, y poder darle una explicación a lo que podemos reconocer como distorsionado. Consideramos la importancia de analizar el contexto histórico y sociocultural en el que fue creado ya que su fin era la navegación. Nos preguntamos, ¿cómo en su construcción la Geometría aparece puesta en uso? ¿Qué papel tiene la Geometría en el contexto de la navegación como herramienta que permite explicar mejor, por ejemplo, el mapa?

## La proyección de Mercator y su distorsión

Realizamos una exploración libre sobre proyecciones de mapas, tomando referencias propias de la cartografía. Entre estas se destacan: Snyder (1987), Snyder y Voxland (1989), Bugayevskiy y Snyder (1995) y Maling (1992), y buscamos específicamente en ellos sobre la proyección de Mercator y su distorsión.

Snyder (1987) y Snyder y Voxland (1989) describen la proyección de Mercator de forma muy similar, la única diferencia radica en que el primero hace énfasis en la explicación matemática de la proyección para la esfera y el elipsoide, de forma similar que Bugayevskiy y Snyder (1995) y Maling (1992), mientras el segundo hace un listado de propiedades y datos descriptivos, enfatizando en la distorsión del mapa. La explicación matemática de la proyección se atenderá en el capítulo 5, por lo que en esta sección nos limitaremos a los enfoques descriptivos. Snyder (1987) y Snyder y Voxland (1989) la clasifican como una proyección cilíndrica conforme, y como la más reconocida entre las cilíndricas. Los paralelos se muestran como rectas paralelas espaciadas de forma desigual, que intersecan a los meridianos en ángulos rectos y estos aparecen como rectas paralelas igualmente separadas. Los polos dada la naturaleza de la proyección no es posible verlos en el mapa. La finalidad del mapa era la mejora de las técnicas de navegación en el siglo XVI y la describen de la siguiente forma:

> La principal característica de navegación de la proyección se encuentra en el hecho de que una ruta de navegación entre dos puntos se muestra como una línea recta, si la dirección o acimut del barco se mantiene constante con respecto al norte. Este tipo de ruta se denomina loxodrómica o línea de rumbo y suele ser más larga que la ruta del gran círculo (que es la ruta más corta posible en la esfera). Sólo tiene la misma longitud que un círculo máximo si sigue el Ecuador o un meridiano. (Snyder, 1987, p. 39)

Contraponen esta virtud para la navegación con lo inapropiado de su uso para representar la Tierra por sus grandes distorsiones.

> Diseñado y recomendado para la navegación debido a las líneas de rumbo rectas; estándar para las cartas marinas. Es recomendado y utilizado para la cartografía conforme de las regiones que bordean predominantemente el Ecuador, a menudo e inapropiadamente utilizado como mapa del mundo en los atlas y para las cartas murales. Presenta una visión engañosa del mundo debido a la excesiva distorsión del área. (Snyder y Voxland, 1989, p. 10)

En este sentido Snyder (1987) sostiene que esa distorsión hace que se generen conceptos erróneos si es la mayormente utilizada como representación de la Tierra en el proceso de escolarización. Y afirma "La comparación clásica de áreas es entre Groenlandia y Sudamérica. Groenlandia parece más grande, aunque sólo tiene una octava parte del tamaño de Sudamérica" (p. 41).

La página web "*The true size*"[6] muestra la distorsión y su comportamiento en el mapa de Mercator debido a que permite variar los países a diferentes lugares del mapa, mostrando el cambio en

[6] www.thetruesize.com

su área dependiendo de la zona a la que se mueva. En la figura 1.7 aparece esa típica comparación entre el área de Groenlandia y América del Sur que permite visualizar ese contraste por la gran distorsión.

Snyder y Voxland (1989) para mostrar la distorsión del mapa recurren al concepto desarrollado por el cartógrafo y matemático francés Nicolas Tissot (1824-1897) en el siglo XIX y que se conoce como "La indicatriz de Tissot".

> ... muestra la forma de círculos infinitesimales en la Tierra tal y como aparecen cuando se trazan utilizando una escala finita fija en los mismos lugares de un mapa. Cada círculo se traza como un círculo o una elipse o, en casos extremos, como una línea recta. (Snyder y Voxland, 1989, p. 8)

**Figura 1.7.** Comparación de Groenlandia y América del Sur en la proyección de Mercator.


Nota*:* Imagen extraída de www.thetruesize.com

Esta indicatriz se diferencia en las distintas proyecciones, cambiando su forma dependiendo de las características que conservan y que distorsionan.

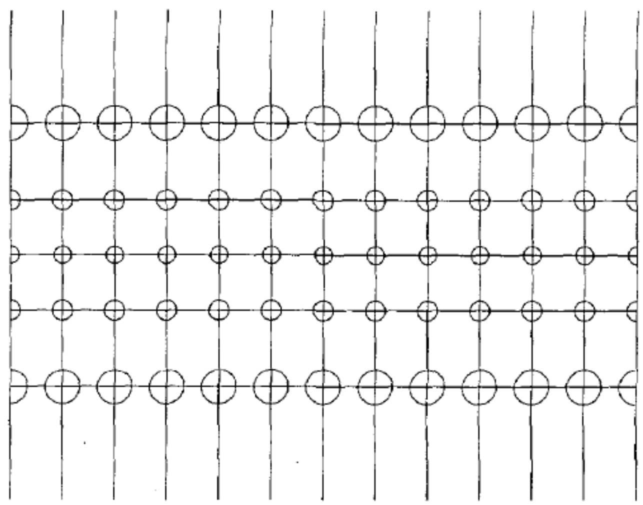
> En una proyección de igual área, todas estas elipses y círculos se muestran como si tuvieran la misma área. El aplanamiento de la elipse muestra la extensión de la distorsión local de la forma y cuánto cambia la escala y en qué dirección. En las proyecciones de mapas conformes, todas las

indicatrices siguen siendo círculos, pero las áreas cambian. En otras proyecciones, tanto las áreas como las formas de las indicatrices cambian. (Snyder y Voxland, 1989, p. 8)

Proporcionan como ejemplo de estas indicatrices, la proyección de Mercator de la siguiente forma y acompañan con la figura 1.8 que lo ilustra.

Por ejemplo, para la proyección Mercator conforme, todas las indicatrices son círculos. La escala es constante a lo largo de todos los paralelos; por lo tanto, todos los círculos a lo largo de un determinado paralelo tienen el mismo tamaño. Por otra parte, cuanto más alejado esté el paralelo del Ecuador, mayor será el tamaño del círculo. (Snyder y Voxland, 1989, p. 8)

**Figura 1.8.** Indicatriz de Tissot en la proyección de Mercator.



Nota: Imagen extraída de Snyder y Voxland (1989, p. 10).

## 1.2. Problemática de la investigación.

Reconocemos en la enseñanza de la Geometría a partir de la revisión de los programas de estudio, un *dME* que se centra en objetos geométricos, en los que los problemas que se plantean a los estudiantes son de construcciones, experimentales, hasta llegar al rigor de la formalidad de las demostraciones. Aparecen contextos puramente geométricos y no se muestra de forma clara cómo se puede dar el diálogo con otras disciplinas. Se presentan sin historia, carentes de uso y desde nuestra postura teórica consideramos que para que el conocimiento se vuelva saber este debe ser puesto en uso, dotándolo de significados en diferentes contextos. Por esto, creemos que buscar escenarios alternativos en los que los objetos geométricos se presenten, brinda contextos de significancia que sería importante integrar a la escuela. Es por esto por lo que nos proponemos investigar acerca de la proyección de Mercator que es ampliamente divulgada hasta la actualidad, y que surge en un contexto social y cultural, con el objetivo de mejorar los instrumentos para la navegación en el contexto del siglo XVI.

## Objetivos y preguntas de investigación

El objetivo general de nuestra investigación es:

Analizar el *valor de uso* de los objetos geométricos en el contexto de las proyecciones de mapas, particularmente la proyección de Mercator de 1569, en el que aparecen como una herramienta fundamental para dar solución al problema de representar la Tierra esférica en un mapa plano y conservar ciertas características para así mejorar las técnicas de navegación en el siglo XVI, problematizando su construcción desde el contexto histórico y sociocultural.

Para esto, nos planteamos dos objetivos específicos:

- Analizar la obra de Wright (1599) que realiza la primera explicación de la proyección de Mercator, con la finalidad de rescatar los *usos* de los objetos geométricos en dicha explicación de la construcción del mapa, considerando su *racionalidad contextualizada* como un aspecto importante para tener en cuenta.
- Implementar un diseño exploratorio que nos permita acercar a profesores de educación secundaria de Uruguay algunos aspectos del contexto de la navegación y analizar cómo esto provoca el uso de objetos geométricos. Todo esto con la intencionalidad de que nos sirva para recuperar información para un diseño de intervención más fino a futuro.

Esto nos lleva a formular las preguntas que guían esta investigación: ¿Cómo la creación de un mapa para la navegación en el siglo XVI proporciona un contexto en el que se ponen en *uso* objetos geométricos? ¿Cómo se significan los objetos geométricos mediante el *uso* en este contexto?

# **Capítulo 2.** Consideraciones Teóricas

En este capítulo se exponen los constructos de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (*TSME*) que serán sustento de nuestra investigación y que nos permiten dar respuestas a nuestra problemática.

El enfoque teórico aparece intrincado en todo este reporte, ya que determina nuestra forma de entender al *saber* y a las problemáticas que atiende la Matemática Educativa. Reconocer que el conocimiento matemático es una construcción social y analizarlo considerando la complejidad y lo sistémico de sus dimensiones, permite plantear una visión alternativa a la que predomina en la matemática escolar. Los objetos geométricos viven, se construyen, se significan en otros escenarios, atendiendo a problemáticas contemplando aspectos histórico, cultural y social.

## 2.1. Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa

La Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (*TSME*) tiene por objeto de estudio la *construcción social del conocimiento matemático* y su *difusión institucional*, se caracteriza por ser una teoría *contextualizada*, *relativista*, *pragmática* y *funcional* (Cantoral, 2016, p. 143). Con la intención de democratizar el aprendizaje de las matemáticas, confronta la idea de la matemática como creación individual de personas con ciertas capacidades, para pasar a pensarla como construcciones normadas por *prácticas sociales*.

> La pregunta central en este ámbito de ideas es si podríamos construir una explicación alternativa a la invención individual, una explicación centrada en los procesos de construcción social de conocimiento matemático, pues de ser esto posible, tendríamos en ello un camino para democratizar al aprendizaje de las Matemáticas entre la población. (Cantoral, 2016, pp. 24-25)

En este sentido, se requiere de indagar en diversas formas de pensamiento matemático, que exceden el ámbito escolar y que posibiliten su difusión socialmente, permitiendo que sean funcionales a la población.

> La *Socioepistemología*, como sistema teórico para la investigación en *Matemática Educativa*, se ocupa específicamente del problema que plantea la conformación del *saber matemático*. Es importante precisar que en este enfoque asumimos la legitimidad de toda forma de saber, sea este popular, técnico o culto, pues en su conjunto constituyen la *sabiduría humana*. (Cantoral, 2016, p. 30)

Esta postura teórica reconoce como parte de la sabiduría humana toda forma de saber, por lo que no es propio de la disciplina matemática, sino que este vive, se significa, se construye, y se usa en diversos contextos históricos, culturales y sociales. La actividad matemática se reconoce como parte de la actividad humana, y permite descubrir la naturaleza del conocimiento matemático en esta.

> Poner una mayor atención en la construcción social del conocimiento, aunque esto significara perder, en un cierto sentido, el ámbito propiamente escolar y adicionar al campo de la Matemática Educativa otras prácticas de referencia como la del tecnólogo, ingeniero, etc., lo que implicó en su momento, un cambio conceptual de centración. No mirar los conceptos y sus diferentes estructuraciones conceptuales en forma aislada, sino tratar con las prácticas que producen o favorecen la necesidad de tales conceptos. Del concepto a las prácticas, el nuevo reto. (Cantoral y Farfán 2003, p. 34, como se citó en Cantoral, 2016, p. 48)

## El discurso Matemático Escolar (dME)

La *TSME* cuestiona no sólo cómo se debe enseñar, sino que pone énfasis en qué matemática es la que se debería enseñar. Por lo que no es el profesor que no logra que los estudiantes aprendan y no es el estudiante que no tiene las capacidades para aprender ciertos contenidos, sino que es el contenido matemático que se lleva a la escuela, centrado en objetos, que provoca la exclusión de la construcción social del conocimiento. El *discurso Matemático Escolar* es la ideología que da validez a la selección y organización de lo que debe ser enseñado, es decir, conocimiento matemático escolar. Permea la manera en que se enseña y por tanto en cómo se aprende. El conocimiento matemático de la escuela es el causal de los problemas de enseñanza y aprendizaje, es una variable didáctica que puede tocarse, se vale romper el paradigma. Ese conocimiento tiene una historia y está situado.

En cuanto a este constructo de la *TSME* Cordero et al. (2015) lo definen como "un sistema de razón que norma las prácticas y las representaciones sociales de los agentes del sistema educativo. Este sistema se comporta como un mapa que delinea lo que queda dentro o fuera de la razón" (p. 63). Atribuyéndole así a la *matemática escolar* y a ese discurso que la norma, la responsabilidad de lo que sucede en el aula, despersonificando el problema. Cantoral (2016) afirma que:

> Enfatizamos que la estructuración del *discurso Matemático Escolar* no se reduce a la organización temática de los contenidos, ni a su función declarativa como vehículo lingüístico en el aula a fin de lograr una instrucción que sea recordada y ensayada por las alumnas, sino que se extiende en tanto más allá, al llegar al establecimiento de bases de comunicación y a la formación de consensos, así como a la construcción de significados compartidos de los objetos y los procesos matemáticos, a su función normativa. En términos llanos, el *discurso Matemático Escolar* es el *paradigma educativo* que norma y regula las matemáticas escolares. (p. 68)

Es en este contexto en el que se privilegian ciertos conocimientos, argumentos, ejemplos, problemas, métodos, por encima de otros, soslayando en gran medida la construcción de conocimientos por parte de los estudiantes. La matemática en el ámbito escolar se plantea ajena a los estudiantes, como intocable, algo ya construido por otros, un conocimiento que se debe adquirir. No se la puede trastocar, no se reconoce el contexto social, histórico y cultural en el que emerge y los significados que se le asocian, así como tampoco, que puede vivir al servicio de otras disciplinas, en las que se resignifica.

> Al momento de introducir el *saber* al aula se producen *discursos* que facilitan la comunicación de conceptos y procedimientos matemáticos y en consecuencia el saber se *despersonaliza* y *descontextualiza*. Este proceso permite la formación de consensos sobre qué y cómo enseñar, que se alcanzan a costa de una pérdida en el sentido y el significado original del saber, reduciéndolo a temas aislados, cuidadosamente secuenciados, denominados "contenidos" o "unidades temáticas" de una asignatura. (Cantoral, 2016, p. 30)

Soto (2010) plantea una caracterización del *dME* en la que identifica:

- Su ***carácter hegemónico***: predomina un solo tipo de argumentaciones, significaciones y procedimientos. No tienen relevancia aquellos que resultan del uso del conocimiento matemático en otros contextos, ni en su construcción.
- La ***atomización en los conceptos***: centrado en los objetos matemáticos, desprovistos de contexto histórico, social o cultural.
- La ***falta de marcos de referencia***: no se considera que la matemática pueda ser utilizada en otros escenarios, en otras disciplinas en donde puede adquirir otros significados.
- La ***concepción de que la matemática es un conocimiento acabado y continuo***: no tienen cabida otros argumentos o significados porque la matemática se presenta de forma lineal, y no es posible trastocarla.
- Su ***carácter utilitario***: el conocimiento matemático está al servicio de la propia actividad matemática, no se reconoce su carácter funcional. El conocimiento matemático se aprende, se conoce, o se incorpora, no se construye.

Reconociendo que el conocimiento matemático vive en otros escenarios y disciplinas en donde se significa mediante su uso, Cantoral (2016) expresa que:

> Dado que este conocimiento se ha constituido socialmente en ámbitos no escolares, su difusión hacia y desde el sistema de enseñanza le obliga a una serie de modificaciones que afectan directamente su estructura y su funcionamiento, de manera que afectan también a las relaciones que se establecen entre estudiantes y profesor. (p. 66)

Es por esto por lo que se propone desde esta postura teórica para hacer frente al *dME*, una racionalidad alternativa a la que domina en este, con base en la acumulación de evidencia empírica que se ha producido mediante la investigación: una epistemología de la construcción social del conocimiento matemático, basada en prácticas. Desde la *TSME* se propone el rediseño del *dME* planteando el "examen del conocimiento matemático social, histórica y culturalmente situado, problematizándolo a la luz de las circunstancias de su construcción y difusión" (Cantoral, 2016, p. 66).

### Principios de la *TSME*

Los principios de la teoría son los medios por los cuáles esta dará respuesta a la pregunta de partida acerca de la construcción social del conocimiento matemático y su difusión institucional. En este sentido, tratando de responder a la pregunta sobre la existencia de una forma de pensar matemáticamente que pueda ser difundida socialmente, es decir, que tenga como fin democratizar el aprendizaje de las matemáticas. La TSME tiene como cimiento cuatro principios fundamentales, que no cuentan con una jerarquización o una secuenciación lineal, sino que forman una red nodal. Estos se describen a continuación tomando como referencia a (Cantoral, 2016).

- **Principio de la Racionalidad Contextualizada.** La relación del sujeto con el saber es una función del contexto. La racionalidad con la que se actúa depende del contexto en el que el individuo se encuentre en un momento y lugar determinado (Espinoza, 2009 como se citó en Cantoral, 2016, p. 163).
- **Principio del Relativismo Epistemológico.** Validez subjetiva o relativa a diferentes marcos de referencia. En este sentido, los puntos de vista no tienen validez ni verdad universal, el valor de verdad tiene que ver con quien, y dónde lo experimenta, es decir, el saber es una multitud de saberes con verdades relativas a comunidades que usan ese conocimiento. Los argumentos son válidos según su racionalidad.
- **Principio de la Resignificación Progresiva.** El significado del objeto dependerá en gran medida del escenario sociocultural. Este primer significado, es puesto en funcionamiento en situaciones nuevas, en las que se resignifica, produciendo conocimientos. El saber se enriquece con la resignificación, en la cual se construirán más argumentaciones, espacios de uso, procedimientos y todo aquello que rodea a un saber.
- **Principio Normativo de la Práctica Social.** Las prácticas sociales son la base y orientación en los procesos de construcción del conocimiento, se constituyen, por así decirlo, en las generadoras del conocimiento. La práctica social se la entiende como normativa de toda actividad humana en su conjunto, no es lo que el individuo hace en sí, sino lo que lo hace hacer lo que hace, es lo que norma su accionar. Con respecto a esto, Cantoral (2016) afirma:

> El punto de partida para la construcción de saberes es la *actividad* normada por *emergentes* de naturaleza social que denominamos *prácticas sociales*. Éstas regulan el ejercicio de *prácticas socialmente compartidas* a través de las cuales, los sujetos (individuales o colectivos) nos relacionamos intra a ínter psicológicamente. En este sentido, los saberes son las diferentes formas de comprender y explicar las realidades y se encuentran vinculados con las *prácticas socialmente compartidas*, las que a su vez están normadas por las *prácticas sociales*. (p. 52)

## Modelo de anidación de prácticas

Desde esta postura teórica se afirma que las prácticas anteceden y acompañan al objeto, siendo sustento clave de la construcción social del conocimiento matemático. En este sentido se refiere a la descentración del objeto, esto no es olvidarse de este, sino que considerar con la misma relevancia, los atributos de las prácticas que lo anteceden y acompañan.

> Esto abonó al cambio de centración del objeto a la práctica y, en este sentido, al análisis centrado en la actividad humana en contextos socioculturales, de modo que buscamos mostrar cómo el ejercicio intencional de prácticas normadas, antecede y acompaña a la producción de objetos. (p. 152)

Se plantea la organización de estas prácticas, que se ha nombrado *Modelo de Anidación de Prácticas* de la *TSME* y comienza con la *acción,* entendiéndola como la intervención activa del sujeto sobre el objeto o sobre otras acciones que realizó este con el objetivo de adaptarse al entorno. Tomando como referencia, la epistemología genética de Piaget, Cantoral (2016) afirma que "las acciones ejecutadas por el sujeto constituyen la sustancia o la materia prima de toda adaptación intelectual y perceptual" (p. 339). La ejecución de una acción con intencionalidad es lo que se define como *actividad* en este modelo, y es "el elemento vinculante del desarrollo humano al desarrollo cultural y consiste en la *actividad práctica e instrumental mediada* (no individual, sino en cooperación social) *para la formación de funciones psicológicas superiores*, a fin de modificar la naturaleza" (p. 340). La reiteración y la intencionalidad de la articulación de *acciones* y *actividades* conforman la *práctica socialmente compartida*, regulada por el contexto. Las *prácticas de referencia* significan y orientan a las prácticas, "es la expresión material e ideológica de un paradigma (ideológico, disciplinar y cultural), las que a su vez son normadas mediante sus cuatro funciones por la *práctica social* (normativa, identitaria, pragmática y discursiva-reflexiva)" (p. 160).

> Esta secuencia permite explicar empírica y teóricamente el proceso de construcción del sujeto individual, el sujeto colectivo y el sujeto histórico. A la vez que permite intervenir prácticamente y transformar los procesos didácticos a fin de favorecer la construcción social del conocimiento matemático. En síntesis, permiten la emergencia del saber. (Cantoral, 2016, p. 160)

**Figura 2.1.** Modelo de anidación de prácticas de la *TSME*.


Nota: Elaboración propia con base en Cantoral (2016).

## Dimensiones del saber

La *TSME* pone su atención en el *saber* como construcción social del conocimiento, considerando la complejidad de su naturaleza, generando una oportunidad de intervención en el sistema didáctico, estudiándolo con una perspectiva sistémica desde cada una de sus dimensiones: sociocultural, epistemológica, cognitiva y didáctica.

La **dimensión didáctica** del saber involucra los procesos de difusión del conocimiento, que no tienen que ver exclusivamente con el ámbito escolar, sino que toma en cuenta la intencionalidad de enseñanza del saber, la acción de construcción de significados compartidos. Esta dimensión del saber se reconoce en toda actividad humana cuando se pretende enseñar, en cualquier escenario. Esta consideración de la dimensión ampliada a otros ámbitos implica la enseñanza en *aula extendida*.

La **dimensión epistemológica** del saber refiere al tipo de relaciones del sujeto con el objeto, es decir, las formas en que el saber matemático puede ser conocido. Involucra el análisis de las circunstancias que posibilitaron la construcción del conocimiento matemático. Desde esta dimensión es que en los años 90 se realizaron investigaciones, analizando: "lo que hacen, lo que dicen que hacen y lo que otros dicen que hacen" (Cantoral, 2016, p. 152). Estos cuestionamientos fueron claves para el pasaje de la centración del objeto a las prácticas, "el análisis centrado en la actividad humana en contextos socioculturales, de modo que buscamos mostrar cómo el ejercicio intencional de las prácticas normadas antecede y acompaña a la producción de objetos" (Cantoral, 2016, p. 152).

La **dimensión cognitiva** del saber "analiza las formas de apropiación y significación progresivas que experimentan quienes se encuentran en situación de construcción del conocimiento" (Cantoral, 2016, p. 152). Desde este enfoque "la cognición es entendida como la capacidad de 'hacer emerger' significados a partir de retroalimentaciones sucesivas entre actores y un medio ambiente próximo, tanto físico como cultural, a partir de una interacción 'dialéctica' entre protagonistas" (Cantoral, 2016, p. 153).

La **dimensión social** del saber "se ocupa de los usos del saber en situaciones específicas. La introducción explícita de esta dimensión en el modelo produjo reinterpretaciones de las otras tres" (Cantoral, 2016, pp. 153-154). El enfoque socioepistemológico aborda el dilema de la representación de otra forma: "no busca discurrir teóricamente sobre la acción de representar al objeto mediante artefactos, herramientas o signos. Sino que se ubica al nivel de las prácticas y de la forma que éstas se norman por prácticas sociales" (Cantoral, 2016, p. 154). Una de las contribuciones de este enfoque radica en concebir que: "la práctica social no es lo que hacemos, sino lo que nos hace hacer lo que hacemos" (Cantoral, 2016, p. 113).

### Uso: Del conocimiento al saber

La *TSME* asume al *saber* cómo *conocimiento en uso*. En este sentido, "Se asume que la práctica social es un emergente social del ejercicio intencional de prácticas que tienen como característica coadyuvar al *tránsito del conocimiento al saber* a través de una funcionalidad con *valor de uso"* (Cantoral, 2016, p. 26).

El conocimiento matemático se *usa* en diversos escenarios, forma parte de toda la actividad humana desde sus acciones más básicas, y podríamos dar una gran cantidad de ejemplos diversos, entendiendo a la actividad matemática como parte de esta. Desde nuestra investigación hemos encontrado en la práctica de la navegación del siglo XVI, que permeaba la sociedad europea de la época, y particularmente en las técnicas e instrumentos que se utilizaban, un escenario en el que el *uso* de los objetos geométricos permite dar explicaciones, argumentar, y mejorar esta práctica. Esto nos permite analizar, identificar y reconocer la naturaleza del conocimiento matemático en *uso* en este contexto, que a su vez está permeando la forma en que piensan las personas que se interesan por identificar, caracterizar o modelar conceptos y procesos propiamente matemáticos en ese ámbito.

Las investigaciones enmarcadas en este enfoque teórico han permitido indagar las necesidades de carácter fundamental que requiere ese tránsito del *conocimiento* al *saber*. Con respecto a esto, "la *descentración*, como elección metodológica, enriquecía mediante las prácticas nuestro entendimiento del concepto matemático y de sus propiedades. En esta medida lo hacía una *entidad funcional* con **valor de uso"** (Cantoral, 2016, p. 50). Desde esta perspectiva, los objetos matemáticos están situados cultural e históricamente por su condición de creación humana, y el estudio del *saber* desde nuestra postura teórica "se realiza entonces centrado en los *usos* del conocimiento matemático ante situaciones que provienen de prácticas situadas y compartidas por la comunidad estudiada" (Cantoral, 2016, p. 45).

Es por esto por lo que Cantoral (2016) sostiene que:

> ... las *prácticas sociales* han tenido un rol fundamental en este programa, pues establecieron la forma en que se explican las normativas del funcionamiento social (función normativa) y la exigencia a las matemáticas escolares para que adquieran un *valor de uso* y sean funcionales para los sujetos –en su designación individual o colectiva- en su comunidad (función pragmática). De esta forma, las prácticas sociales permiten los procesos de comunicación y constituyen identidades entre sus miembros (función discursiva y función identitaria). (p. 45)

Los significados de los objetos son consecuencia de un *valor de uso*, creados en el ejercicio de prácticas normadas.

> En síntesis, diríamos desde el programa socioepistemológico que los conocimientos desde el punto de vista de su contenido conceptual y su contenido factual, para ser objetivables, requieren del uso que da sentido al conocimiento, de herramientas y argumentos que tipifican al usuario y a las situaciones de aprendizaje, escolares o no, pero ligadas a la vida real donde se ponga en uso a dicho conocimiento, es decir, se construya saber. Requieren para ser objetivables, de una construcción activa del sujeto (individual o colectivo), que al ser social, se constituye en saber. El paso del conocimiento al saber es entonces, una expresión del aprendizaje, como construcción social del conocimiento. (p. 149)

Con la *problematización* como metodología, nuestro objetivo será develar cómo los objetos geométricos en uso en el contexto de la creación de un mapa para la navegación del siglo XVI se significan y adquieren valor. Localizar estos usos, y *problematizar el saber* desde un contexto donde es funcional a una intencionalidad concreta, nos permitirá con base en la *TSME* un avance hacia el *rediseño del dME*.

# **Capítulo 3.** Consideraciones Metodológicas

En este capítulo se detallan las decisiones metodológicas realizadas durante el proceso de la investigación con la intención de atender a nuestros objetivos de partida. Se explican los métodos que utilizamos, así como la selección de los documentos que fundamentan este trabajo.

## 3.1. Problematización del Saber Matemático

En los orígenes de la *TSME*, se realizaron investigaciones como Cantoral (1990), Cordero (1994) y Farfán (1993) que mostraron un camino hacia una metodología que acercaba la problemática de fenómenos relativos a la *construcción social del conocimiento matemático* y su *difusión institucional*. A partir de dichas investigaciones se comenzó a asumir que, para analizar fenómenos didácticos ligados a la matemática, no bastaba con ver las relaciones entre estudiantes, profesores y conocimiento escolar, así como tampoco las restricciones pedagógicas institucionales, era necesario hacer un análisis minucioso del saber, abordándolo desde todas sus dimensiones.

Cantoral (2016) señala que "para el análisis del saber, este debe de problematizarse (*historizarse* y *dialectizarse*)" (p. 57). Con *historizar*, no se hace únicamente referencia a un análisis sintético en donde solamente se identifiquen determinados sucesos de interés y se los ordene cronológicamente. Este acto de *historizar*, debe de alcanzar otros niveles de profundidad. Esto es coherente con la concepción dinámica del *saber* antes planteada, en donde éste se entiende en un constante en procesos de resignificación. ¿Cómo sería posible concebir el saber de esta manera, pero estudiarlo e intentar comprenderlo aislado en el tiempo y fuera de contexto? Es necesario brindarle carácter histórico, es decir, descubrir y comprender las distintas significaciones que ha tenido históricamente y que ha caracterizado a las epistemologías que lo involucran, analizándolas en un sentido plenamente crítico, e intentando comprenderlas en cada contexto de construcción social del conocimiento.

Por otro lado, "la expresión *dialectizada*, proviene de la Dialéctica como parte de la Filosofía" (Cantoral, 2016, p. 57), y es un proceso que busca mostrar la contradicción que se ha instaurado en algún sistema siéndole funcional al mismo. "Algo que se dialectiza reconoce la contradicción, no como mera errata o falla" (p. 57). Por ejemplo, entendemos que, el *dME* es un sistema de razón que sistemáticamente norma las prácticas de los individuos con los que interactúa, y que mantiene grandes contradicciones que le son funcionales para su continuidad.

Con el objetivo del rediseño del *dME*, en Cantoral (2016), se mencionan cinco elementos que conforman un enfoque metodológico característico de la TSME, que estructuran un camino posible para la *problematización del saber matemático (psm)*. Este se caracteriza por cinco elementos: La *génesis histórica*, la *didáctica de antaño*, la *fenomenología intrínseca*, los *constructos característicos* y la *praxis educativa*.

- La *Génesis Histórica* plantea el estudio de los conceptos y los procesos asociados a este, interpretando el contexto social del momento y dotándolo de una epistemología situada. Se analizan los aspectos culturales y relativos a la institucionalidad que propició la construcción de cierto conocimiento a lo largo de su historia. "Se estudia la génesis de las prácticas, o más precisamente, la epistemología de prácticas" (p. 132).
- El estudio de la *Didáctica de antaño* asume *a priori* que el saber es una producción social y que no surge de una inspiración espontánea de un autor destacado, siendo importante analizar las características de la educación de la época en cuestión, para así identificar los "acercamientos, métodos y las concepciones" (p. 132) que propiciaron el surgimiento de un saber.
- El análisis de la *Fenomenología intrínseca* asume que los conceptos tienen una fenomenología propia, esto es, "significados que la noción adquirió en su génesis histórica". El estudio de estos implica identificar procesos y conceptos involucrados que muchas veces se mantienen ocultos en las obras, o incluso podrían "haber quedado sepultados por una

tradición educativa lo suficientemente fuerte" (p. 133). Se requiere de una inferencia ya que se está buscando algo que posiblemente no ha de ser evidente.

- Los *Constructos Característicos* son todos los recursos cognitivos necesarios de quien aprende, a fin de poder construir conocimiento. Entendemos que este proceso identifica una estructura cognoscitiva, que posibilitará la adquisición del conocimiento emergente, a través de una dinámica constructiva, desde un concepto como esquema, a concepto como modelo y finalmente a ser concebido como teoría.
- La necesidad de una *Praxis Educativa* establece una relación recíproca entre la investigación en Matemática Educativa con la realidad educativa, y así promover el aprendizaje en matemáticas por parte de los estudiantes. Entendiendo como necesario, el rediseño del *dME*.

Estos cinco elementos, como un camino para la *problematización del saber matemático*, plantean un análisis en profundidad que se volverá fundamental para las investigaciones enmarcadas en la *TSME*. Ésta, concibe que el saber es una construcción social, y que este al ser dinámico no puede comprenderse en profundidad si no es historizado. Los procesos anteriormente mencionados, que se plantean como una guía para dicha problematización, involucran y permiten el análisis desde las cuatro dimensiones de saber.

El método socioepistemológico es de naturaleza sistémica, pues permite tratar los fenómenos de producción y de difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple, al estudiar la interacción entre epistemología, dimensión sociocultural, procesos cognitivos asociados y mecanismos de institucionalización vía la enseñanza. Plantea el estudio del conocimiento social, histórica y culturalmente situado (Cantoral, 2016, p. 144).

Es importante señalar que estas cuatro dimensiones no pueden estudiarse de manera aislada ya que conviven y están en constante interacción. Por cuestiones de métodos pueden analizarse por separado, pero todas conforman el saber que se problematiza de forma transversal. Así y todo, en algunos casos es dificultoso generar un análisis por separado debido a la complejidad de establecer límites entre estas dimensiones (Cantoral, 2016).

Desde nuestra investigación estamos problematizando el saber desde su funcionalidad, nos importa ver cómo se significan los objetos geométricos en el contexto de la construcción del mapa y de las explicaciones de éste para la navegación. Cómo los objetos geométricos son funcionales en el contexto y acordes a una intencionalidad. La práctica de la navegación determina un *uso* de esos objetos geométricos en ese contexto configurando una epistemología de prácticas.

Identificamos las proyecciones de mapas, más precisamente la proyección de Mercator, como un escenario en el que los objetos geométricos se ponen en uso, que nos llevó a ubicarla histórica y culturalmente, siendo estas circunstancias determinantes en su creación. Consideramos relevante destacar la *racionalidad contextualizada* y el *relativismo epistemológico* de la época. Así mismo, como parte de esta *psm* construimos un diseño exploratorio que retoma elementos de la problematización en cuanto al papel del contexto de la navegación y se implementó con profesores de forma que nos permitió seguir robusteciendo la *psm*.

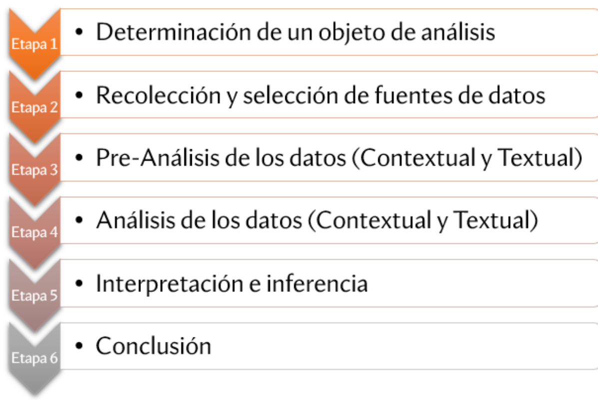
## Método de análisis de contenido

El método que utilizamos para analizar las fuentes fue el **análisis de contenido cualitativo** y nos basamos en lo propuesto por Cruz-Márquez (2018) quien a partir de Andréu (2000), Cáceres (2003) y Mayring (2015) genera su propio método de análisis cualitativo de contenido para una investigación enmarcada en la *TSME* en el campo de la Matemática Educativa. Plantea seis etapas que se describen a continuación y se muestran en la figura 3.1:

- *Determinación de un objeto de análisis.* Seleccionar un objeto de análisis ya sea un fenómeno o una comunicación concreta.
- *Recolección y selección de fuentes de datos.* Reunir todas las fuentes que proporcionarán datos sobre el objeto de análisis seleccionado.
- *Pre-Análisis de los datos (contextual y textual).* Organización de los datos, codificación, determinar en de qué forma serán analizados los datos.
- *Análisis de datos (contextual y textual).* Etapa de "comprensión de los datos, así como de establecimiento de causalidades, correspondencias y vínculos entre los mismos" (Cruz-Márquez, 2018, p. 51).

- *Interpretación e inferencia.* Concretar todo el esfuerzo reflexivo y crítico en el descubrimiento de lazos, causas y de su conveniente interpretación (Cáceres, 2003, como se citó en Cruz-Márquez, 2018).
- *Conclusión.* Comunicación de los fundamentos, métodos y resultados del análisis de contenido realizado.

**Figura 3.1.** Etapas del análisis de contenido.




Nota: Elaboración propia a partir de propuesto en Cruz-Márquez (2018).

Para el análisis contextual, refiere a lo propuesto por Espinoza (2009), con base en el principio de *racionalidad contextualizada* de la *TSME*, propone tres ejes para el análisis de una obra original teniendo en cuenta que la relación de quien escribe con el *saber* se dará en función del contexto. Estos son:

- **Una producción con historia.** Se busca entender las circunstancias individuales y colectivas en las que se produjo la obra, así como el contexto sociopolítico. El autor es un sujeto con historia y es representante del escenario histórico al cual pertenece. Se quiere entender las condiciones de producción de la obra y las intencionalidades subyacentes de este proceso, para tener elementos que nos permitan caracterizar la racionalidad involucrada. En relación con esto se indaga acerca de su vida personal, su formación profesional y las características relevantes de la época histórica, cultural y social. (Espinoza, 2009, p. 31)
- **Un objeto de difusión.** La obra tiene la intencionalidad de difundir un conocimiento a alguien, y esto permeará el pensamiento del autor y se podrá ver en esta. Como no podemos estudiar directamente al autor produciendo conocimiento, debemos estudiar el significado que él le

atribuye a su obra. Estas intencionalidades pueden ser, por ejemplo, los intereses de cierta comunidad a la que se comunica, una intención de difusión o didáctica, entre otras. Para esto, se analizan fuentes que proporcionen elementos pertenecientes a las condiciones de difusión de la obra. Para poder entender esto, necesitamos entender también una visión general del periodo histórico considerado. (Espinoza, 2009, pp. 31-32)

- **Parte de una expresión intelectual más global.** Entender el encadenamiento, la evolución y la relevancia de las ideas del autor y la relevancia o causalidad de sus producciones. Para desarrollar esto, además de la obra estudiada, consideraremos las obras con temas relacionados a la obra estudiada y las obras más relevantes de la producción científica del autor. (Espinoza, 2009, p. 33)

Mostraremos el recorrido que se siguió en la recolección de fuentes primarias, aquellas que son originales del autor, y secundarias, entendiéndolas como fuentes que son interpretaciones que hacen referencia explícita a su obra desde diferentes visiones, posturas e incluso disciplinas.

## Delimitación del objeto de análisis y selección de fuentes

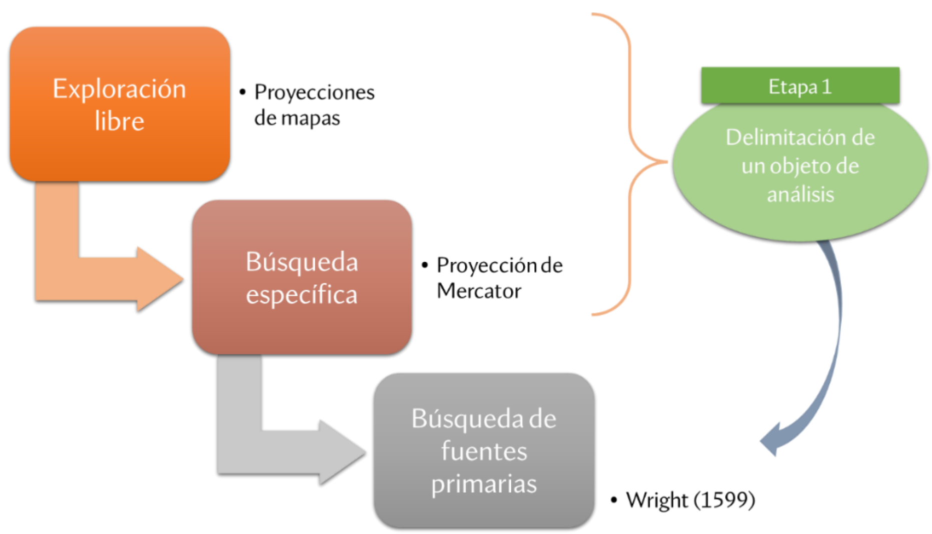
Comenzamos realizando una exploración libre en buscadores académicos considerando como palabras claves “proyecciones de mapas” y “distorsión”, y sus correspondientes traducciones en inglés. En este primer momento, nos acercamos a fuentes que se vinculaban con cartografía, geografía, enseñanza de la geografía, el tratamiento de la distorsión de los mapas y las intenciones con las que se crearon. Esta exploración nos llevó a centrar nuestra atención en la proyección de Mercator particularmente. Nos dedicamos a realizar una búsqueda de forma más específica acerca de esta proyección, teniendo consideración sobre aquellas fuentes con enfoques de carácter social que permitieran dar cuenta del contexto en el que emerge, así como fuentes sobre explicaciones actuales de esta. Como principal antecedente del mapa de Mercator reconocemos a Pedro Nunes, geómetra portugués que en 1537 menciona por primera vez la curva loxodrómica, y de Edward Wright geómetra inglés que realiza la primera explicación en 1599 sobre la proyección del mapa de Mercator.

Todo esto nos permitió delimitar nuestro objeto de análisis (figura 3.2), la creación del mapa de Mercator en 1569 para la navegación con el objetivo de analizar el uso de los objetos geométricos en él. A partir del entendimiento de la proyección, realizamos la búsqueda de la obra original de Edward

Wright. No existe evidencia escrita por Mercator sobre el fundamento geométrico detrás de su mapa, solo fuentes secundarias que refieren a algunas escrituras en este.

Una vez seleccionada la obra original a analizar, "*Certaine Errors in Navigation*" publicada por Edward Wright en 1599, realizamos una búsqueda de fuentes secundarias, con la intención de caracterizar el período y sobre todo de la práctica de la navegación de la época que es lo que motiva la construcción y la explicación del fundamento del mapa, con la intención de atender a los ejes de análisis propuestos por Espinoza (2009). De nuestra búsqueda de fuentes consideramos que los límites entre los ejes en nuestro caso no están del todo claro, sino que conviven como parte del contexto en el que se produjo la obra analizada, aportando a cada eje, a la vez que dialoga con los otros (figura 3.3).

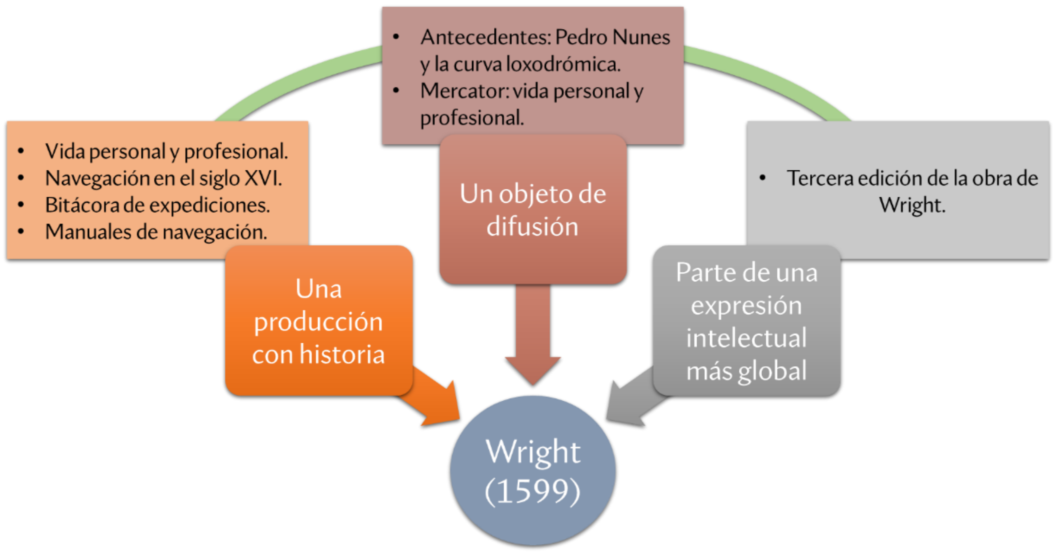
**Figura 3.2.** Delimitación del objeto de análisis.




En lo que respecta a la obra original analizada de Wright, al ser una obra de 1599 escrita en inglés de la época, requirió de una primera lectura en la que se identificaron palabras que podrían prestarse a confusión, por la propia escritura, y por modificaciones que sufrieron con el tiempo. Luego, realizamos una traducción, con la intención de mejorar el entendimiento, y en el capítulo 5 donde exponemos fragmentos de esta, recurrimos a la traducción para facilitar la lectura. Además, en el anexo 1 mostramos los fragmentos en inglés en el orden de aparición de estos en nuestro análisis.

El análisis contextual se realiza a partir de la articulación de las fuentes que seleccionamos con el objetivo de atender a los tres ejes. En cuanto al análisis textual de la obra de Wright, exponemos diez episodios en los que la dividimos, con el fin de abordar nuestro objetivo en cuanto al uso de los objetos geométricos en el contexto de la creación de un mapa para la navegación. Respondemos a las preguntas: ¿Qué objetos geométricos usa en sus argumentos? ¿Cómo los usa? ¿Para qué los usa?

**Figura 3.3.** Selección de fuentes y los tres ejes de análisis.




## Diseño exploratorio

Como parte de nuestra *problematización del saber matemático* proponemos la implementación de un diseño exploratorio que tiene como objetivo acercar ciertos elementos rescatados del contexto de la construcción del mapa para la navegación que surgen del análisis de la obra original. Por ejemplo, cómo la esfera influye en esa práctica, algunos rumbos conocidos, relación entre ángulos de longitud y determinadas trayectorias, y la interpretación de la distorsión en la proyección de mapa equidistante.

La población objetivo son profesores de enseñanza secundaria de Uruguay, en ejercicio, con experiencia de algunos años en aula, y con ciertas características en cuanto a preferencias personales sobre su formación y las temáticas a enseñar. Se seleccionaron mediante un cuestionario en línea (Anexo 2). La implementación se lleva a cabo a través de una entrevista individual por Zoom con dos profesoras seleccionadas. Esto nos permite contribuir a la problematización a partir de identificar en el análisis de lo ocurrido en la implementación, aspectos que servirán para un diseño de intervención más fino.

# **Capítulo 4.** Geometría y discurso Matemático Escolar

En este capítulo se contextualiza la enseñanza de la Geometría en la educación secundaria uruguaya, y en la formación de profesores de esos niveles. Exponemos ciertos criterios que se tiene al fundamentar la enseñanza de la Geometría, evidenciando el *dME* que la norma. Reconocemos qué tipos de argumentos se privilegian, los contextos en los que se presentan los objetos geométricos, así como la forma en que se considera el diálogo de la matemática escolar con otras disciplinas, con base en los programas de estudio de los diferentes cursos.

## 4.1. Geometría en la educación secundaria de Uruguay

La educación secundaria uruguaya se divide en dos etapas de tres años cada una: Ciclo Básico y Bachillerato. Curricularmente se le otorga un papel importante a la Geometría en sus programas de estudio, está presente a lo largo de toda la escolaridad, de diferentes formas, y se le asigna gran porcentaje de tiempo en los cursos. Para acercarnos al tratamiento y lugar que se le da a la Geometría en estos, se presentan los programas de estudios de educación secundaria, y los programas de cursos de Geometría para la formación de profesores, tratando de evidenciar lo que es considerado desde nuestra postura teórica como *discurso Matemático Escolar* (*dME*), que permea toda la enseñanza y aprendizaje de la matemática en el ámbito escolar, normándola, estableciendo qué se debe enseñar y cómo, así como los desempeños de los actores involucrados en el sistema educativo.

### Geometría en Programas de Estudio de Ciclo Básico

Se realizó una revisión de los programas de estudios de Ciclo Básico de educación secundaria de Uruguay (estudiantes de 12-15 años aproximadamente), con la intención de resaltar cómo se propone abordar la enseñanza de la Geometría, analizando las recomendaciones didácticas. Se acompaña con la tabla 4.1 en la que aparecen los contenidos a desarrollar en las unidades de Geometría de cada año y el tiempo destinado a estas.

Los cursos de Ciclo Básico de matemática son anuales, constan de aproximadamente ocho meses de clases, y se le destina cinco horas semanales. En los tres programas de matemática de estos niveles, se establece *Geometría* como bloque temático y se le designa un tiempo que se aclara es tentativo y queda a criterio del plan de curso del profesor. En primer año, acompañado de *Número*, en segundo año el otro bloque temático es *Álgebra*, en ambos se hace énfasis en que se le dedica un tiempo equilibrado a esos bloques. En tercer año se agrega a los de segundo, *Estadística y Probabilidad*, siendo *Geometría* el que tiene mayor tiempo asignado.

Identificamos ciertas recomendaciones didácticas para los bloques temáticos de *Geometría* que forman parte de los tres cursos. Se enfatiza en el enfoque de resolución de problemas para abordarlos, haciendo distinción en que el primero será experimental e intuitivo, dándole protagonismo a las construcciones geométricas con regla y compás, en el segundo se continúa de esa forma, pero aparecen algunas conjeturas y demostraciones, y en el tercero se centra en propiedades y demostraciones, haciendo hincapié en la formalización. Refiriéndose al enfoque de resolución de problemas, el Consejo de educación secundaria (CES, 2010c) sostiene que “Otra innovación, respecto del anterior programa de tercer año, es la introducción explícita de un capítulo dedicado a resolución de problemas de Geometría en el plano y otro a resolución de problemas de Geometría en el espacio” (p. 1).

Se aconseja un tratamiento interrelacionado de los contenidos matemáticos de los programas, así como el vínculo con otras disciplinas que abone a la interdisciplinariedad. Con respecto a esto, CES (2010c) plantea que “es deseable un tratamiento de contenidos que ponga en evidencia las conexiones matemáticas internas entre los mismos” (p. 1), CES (2010a) establece que “Otra posibilidad de enriquecimiento del aprendizaje es acompañar con lecturas que informen acerca de quién, cómo, cuándo y por qué surgieron las ideas matemáticas. Al respecto la Web proporciona amplio material que puede ser motivo de trabajo interdisciplinar” (p. 1), y CES (2010b) promueve “Apreciar la Geometría en ámbitos como el arte, la ciencia, la vida” (p. 2).

Se destaca en los programas la importancia de la concordancia secuencial de los temas abordados año tras año. CES (2010a) refiere a conocimientos que los estudiantes deben poseer de la educación primaria de la siguiente manera: "Los conceptos geométricos ya conocidos desde la escuela, como mediatriz, bisectriz, paralelas no constituirán objeto de estudio en sí mismos, sino que serán utilizados en forma transversal, en resolución de problemas y a medida que se van introduciendo las isometrías" (p. 5). En cuanto a su correlación con el curso anterior y el siguiente, por ser el intermedio CES (2010b) afirma que "Se pretende, en consecuencia, consolidar y profundizar los conocimientos adquiridos en el curso anterior y a la vez avanzar en la presentación de nuevas metodologías y formas de pensamiento matemático, que serán reforzadas en el curso siguiente" (p. 1).

**Tabla 4.1.** *Contenidos de los bloques temáticos de Geometría en Ciclo Básico.*

| PRIMER AÑO – CICLO BÁSICO Reformulación 2006 – Ajuste 2010 | |
|---|---|
| Geometría (16 semanas) | |
| **Unidad** | **Nociones de Geometría** |
| Introducción a la Geometría en el Plano. Simetrías (13 semanas) | • Resolución de problemas que involucren el uso de conceptos geométricos, de instrumentos de dibujo y de medida.<br>• Simetría axial. Simetría central. Aplicaciones. |
| Geometría en el espacio (3 semanas) | • Rectas y planos en el espacio.<br>• Descripción y representación de prisma, cilindro, pirámide y cono. |
| **SEGUNDO AÑO – CICLO BÁSICO Reformulación 2006 – Ajuste 2010** | |
| Geometría (13 semanas) | |
| **Unidad** | **Nociones de Geometría** |
| Geometría del triángulo (5 semanas) | • Figuras convexas, ejemplos. Intersección de figuras convexas.<br>• Triángulos. Definición como figura convexa. Revisión de clasificación.<br>• Relaciones entre los elementos del triángulo: entre ángulos, entre lados y entre lados y ángulos.<br>• Líneas y puntos notables en el triángulo. Mediatrices, bisectrices, medianas y alturas. Circuncentro, incentro, baricentro y ortocentro.<br>•Construcción de triángulos. |
| Funciones del plano en el plano (4 semanas) | • no isométricas: homotecia.<br>• isométricas: traslación (cuadriláteros, paralelogramos), rotación. |
| Geometría del Espacio (4 semanas) | • Revisión de las posiciones relativas entre rectas, rectas y planos, y entre planos.<br>• Paralelismo. Definiciones y estudio de algunas de sus propiedades.<br>• Perpendicularidad. Relaciones de perpendicularidad entre rectas, rectas y planos y entre planos.<br>• Definiciones y estudio con demostración de alguna de sus propiedades.<br>• Noción de ortogonalidad. Relaciones de ortogonalidad en el cubo y en pirámides regulares. |
| **TERCER AÑO – CICLO BÁSICO Reformulación 2006 – Ajuste 2010** | |

| Geometría (16 semanas) | |
|---|---|
| **Unidad** | **Nociones de Geometría** |
| Resolución de problemas sobre triángulos y paralelogramos (4 semanas) | Aplicaciones de las transformaciones y propiedades de triángulos y paralelogramos estudiadas en años anteriores a la resolución de problemas.<br>Se insistirá en la justificación de la resolución y en la discusión del problema. La resolución de problemas será sustento para la profundización en demostraciones. |
| Teorema de Thales. Teorema de Pitágoras (5 semanas) | • Proporcionalidad directa: criterio general. Teorema de Thales.<br>•Triángulo rectángulo. Teorema de Pitágoras.<br>•Proporcionalidad en el triángulo. Puntos medios y paralela media.<br>Como aplicaciones se podrá demostrar los teoremas de la paralela media y del baricentro de un triángulo. |
| Trigonometría (3 semanas) | • Relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo.<br>El estudio se limitará a las relaciones seno, coseno y tangente de un ángulo agudo, las que serán aplicadas en ejercicios de cálculo de medidas de segmentos y ángulos. Las aplicaciones se referirán a resolución de problemas de convergencia disciplinar. |
| Geometría del Espacio (4 semanas) | • Prisma recto. Cubo. Pirámide.<br>Resolución de problemas. |

Fuente: Elaboración propia a partir de CES (2010a, 2010b, 2010c).

Respecto a la Geometría particularmente se refiere de la siguiente forma:

> A una visión intuitiva de la Geometría realizada en el curso anterior, en la que se observaron propiedades de figuras y algunas relaciones básicas, seguirá en este curso un tratamiento experimental de las mismas, pero con fundamentación racional mediante conjeturas y argumentaciones para las cuales el profesor fijará su alcance. (CES, 2010b, p. 1)

Del análisis descriptivo de los programas de esta primera etapa escolar de educación secundaria, notamos que el tratamiento que se le da a la Geometría es en un principio intuitivo y experimental, para luego desembocar en el rigor de la formalidad. En los dos primeros años, es claro ese tratamiento intuitivo, relacionado con la construcción de figuras geométricas con instrumentos de medidas, dejando ver primeras formalizaciones en el segundo. En el tercer año se quiere que lo aprendido en cursos anteriores sirva para comenzar a inferir propiedades, conjeturar, y demostrar, develando así un tratamiento más riguroso en cuanto a formalidades. Resaltamos la secuenciación de los conocimientos curso tras curso, lo que se aprende en el curso anterior es base para aplicarlo en el nuevo.

## Geometría en Programas de Estudio de Bachillerato

Se realizó una revisión de los programas de estudios de los cursos de los tres niveles de Bachillerato de educación secundaria de Uruguay (estudiantes de 15-18 años aproximadamente). El primer año de Bachillerato cuenta con cuatro horas semanales de matemática. El segundo se divide según diversificaciones: Científica *(DC)*, Biológica *(DB)*, Humanística *(DH)* y Arte y Expresión *(DAE)*, contando las cuatro con un curso de matemática como parte del núcleo común con cinco horas semanales y la *DC* con un curso específico más de matemática con la misma carga horaria. El tercer año, también diversificado, cuenta con las opciones: Arte y Expresión *(AyE)*, Ciencias-Agrarias *(C-A)*, Social-Humanística *(S-H)*, Ciencias Biológicas *(C-B)*, Social-Económica *(S-E)*, Físico-Matemática *(F-M)*, y Matemática-Diseño *(M-D)*.

La opción *(AyE)* no cuenta con la asignatura matemática, las opciones *(C-A)*, *(S-H)* y *(C-B)* tienen matemática como asignatura con cinco y seis horas semanales, destinada al Análisis Matemático, Estadística y Probabilidad, y Álgebra Financiera en algunos casos. *(S-E)* y *(F-M)*, cuentan con esa asignatura, pero además se agrega en cada opción una matemática más, Matemática III y Matemática II respectivamente, que abordan temas de Geometría. En cuanto a la opción *(M-D)*, es la única que cuenta con dos matemáticas (I y IV) en las que se incluye Geometría. Se muestra en la tabla 4.2 los contenidos geométricos que se abordan en los programas de estudio que cuentan con Geometría como parte de sus bloques temáticos, con la finalidad de identificar los lineamientos didácticos sobre la enseñanza de esta en estos niveles.

Reconocemos también en estos niveles, la secuenciación de los conocimientos matemáticos, haciéndose explícito en CES (2010d) que se considera como el curso que articula las dos etapas de escolarización en educación secundaria, de la siguiente forma:

> Se sugiere desarrollarlo considerando, por un lado la necesidad de afianzar conocimientos del alumno adquiridos en cursos anteriores a través de nuevos contenidos, teniendo en cuenta, además, que corresponde al primer año de Bachillerato y es un curso de articulación entre el Ciclo Básico y los cursos posteriores de Bachillerato. (p. 1)

En este sentido, CES (2010e) que forma parte de todos los cursos de segundo año de Bachillerato se afirma que:

> El programa se estructura sobre cuatro Bloques temáticos: Geometría, Funciones, Números y Probabilidad, cada uno de los cuales está concebido como síntesis de estudios anteriores, a la vez que abre caminos para estudios en las respectivas temáticas en mayor profundidad. (p. 1)

Por su parte, CES (2010f) que es un curso específico de la *(DC)*, refiere a esto concretamente en la temática que es de nuestro interés: "En Geometría del espacio se pretende formalizar las relaciones de paralelismo y perpendicularidad que ya han visto en ciclo básico y aplicarlas a resolución de problemas" (p. 1).

En cuanto a los cursos específicos de las opciones *(S-E)* y *(F-M)* de tercer año de Bachillerato, (CES, 2006a) se refiere a esto en el bloque temático de Geometría, regiones en el plano y programación lineal, ya que pretende ser una conexión entre los conocimientos geométricos del curso anterior y la programación lineal. Así mismo, CES (2006b) reconoce que este curso es parte de la etapa de culminación de los estudios secundarios de los estudiantes y afirma que "el contenido de los programas debe tener coherencia con los conocimientos adquiridos por los estudiantes en cursos anteriores y a su vez debe ofrecer nuevos contenidos que amplíen la concepción que tienen los alumnos de la Matemática" (p. 1). Debido a la opción *(F-M)* a la que pertenecen y a su interés por la disciplina matemática, "el curso de Geometría pretende seguir profundizando en los métodos de trabajo de la Geometría sintética y de la analítica ya comenzados en cursos anteriores" (p. 1), enfatizando que "En esta etapa se pretende enfrentar al alumno con un método de trabajo más riguroso que el realizado en cursos anteriores" (p. 1), promoviendo el abordaje por medio de conjeturas y demostraciones. Además, "Todas las propiedades geométricas que se enunciaron y o demostraron en cursos anteriores, se aplicarán a la resolución de problemas y no se demostrarán" (p. 4).

Las sugerencias didácticas para abordar las temáticas relacionadas con Geometría en el primer curso de Bachillerato son nuevamente como en el ciclo anterior, a través de resolución de problemas. Se enfatiza especialmente en las construcciones con regla y compás y en la escritura con lenguaje matemático y notación correctos del algoritmo de construcción. Se reconocen conocimientos previos de los estudiantes como base de los problemas a resolver en este nivel. Al reconocerlo como articulación de las etapas de escolarización, es en el único que se hace referencia a un enfoque un tanto más intuitivo, seguido de los siguientes por un enfoque más teórico. CES (2010f) enfatiza en la demostración de teoremas, por ejemplo, la condición necesaria y suficiente de paralelismo entre recta y plano. CES (2006c) reconoce este enfoque también y se considera "enfrentar al alumno con un método de trabajo más riguroso que el realizado en cursos anteriores, fomentando una participación activa en la resolución de problemas donde se estimulará la experimentación, elaboración de conjeturas y demostración de las mismas" (p. 1). CES (2006b) refiere casi de igual forma a lo anterior, agregando "Se deberá procurar que la actividad de validar y/o demostrar proposiciones, sea el resultado del trabajo de cada estudiante, evitando la memorización y repetición rutinaria" (p. 1). Además,

> La demostración debe considerarse en un sentido amplio, el énfasis debe estar en la argumentación más que en el rigor y en los detalles. La demostración en este sentido no puede ser tratada de una vez en un curso, los alumnos deben vivirla a lo largo de todo el currículum. (p.3)

La interdisciplinariedad vuelve a ser una recomendación didáctica en el abordaje de la Geometría en los programas de esta etapa escolar. En este sentido se pretende "Desarrollar la sensibilidad ante las cualidades estéticas de las figuras geométricas, reconociendo su presencia en la naturaleza, en el arte y en la técnica" (CES, 2006c, p. 2). Reafirmando este punto, CES (2006d) afirma que "Punto, figura, proyección, imagen, espacio, modelo son, entre otros, atributos comunes al Arte, al Diseño y a la Arquitectura. La Matemática a través de la Geometría, dispone de una herramienta potente para su estímulo y desarrollo" (p. 1). También refiere a la conexión entre la Geometría euclidiana y el espacio físico, determinando así lo que se conoce como Matemática Aplicada.

En ese curso también se refiere explícitamente al trabajo de forma transversal con docentes de dibujo u otras asignaturas, en proyectos en los que la Geometría aparezca aplicada al diseño. Por último, se sugiere el empleo de recursos tecnológicos en todos los niveles, para el bloque temático de Geometría.

Toda esta descripción de la concepción de la Geometría y su desarrollo en estos cursos más avanzados en los que cobra otro rigor su estudio y trabajo por parte de los estudiantes, reconocemos aspectos que también forman parte del ciclo anterior, como lo son la secuenciación de conocimientos, el abordaje de forma progresiva desde la intuición a la formalidad de la deducción, la interdisciplinariedad como estrategia didáctica, así como los recursos informáticos. Consideramos que los lineamientos se realizan de forma general, dándole al docente la responsabilidad de cumplir con el programa, pero también adecuarlo a su propio plan de trabajo.

**Tabla 4.1.** *Contenidos de los bloques temáticos de Geometría en Bachillerato.*

| PRIMER AÑO – BACHILLERATO Reformulación 2006 – Ajuste 2010 | |
|---|---|
| **Unidad** | **Nociones de Geometría** |
| Método de los lugares geométricos (10 semanas) | • Ángulos en la circunferencia.<br>• Arco capaz.<br>• Intersección de lugares geométricos y aplicaciones a la construcción de triángulos y polígonos. |
| **SEGUNDO AÑO – BACHILLERATO Reformulación 2006 – Ajuste 2010 – NÚCLEO COMÚN** | |
| **Unidad** | **Nociones de Geometría** |
| Geometría Analítica en el plano. (6 semanas) | • Coordenadas cartesianas en el plano. Ecuación cartesiana de la recta. Semiplano. Se justificará utilizando el teorema de Thales.<br>• Distancia entre dos puntos.<br>• Ecuación de la circunferencia. Círculo. Intersección de recta y circunferencia.<br>• Resolución gráfica de sistemas de inecuaciones lineales en el plano. |
| Geometría Analítica en el Espacio (2 semanas) | • Coordenadas cartesianas en el espacio<br>• Ecuación cartesiana del plano.<br>• Sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas. Escalerización. Interpretación geométrica de las soluciones: planos paralelos, planos con un único punto en común y eventualmente otras situaciones. |
| **SEGUNDO AÑO – BACHILLERATO Reformulación 2006 – Ajuste 2010 – DIVERSIFICACIÓN CIENTÍFICA** | |
| **Unidad** | **Nociones de Geometría** |
| Geometría sintética en el plano. (6 semanas) | • Teorema de Thales.<br>• Homotecia. Definición y propiedades. Aplicación a la resolución de problemas.<br>• Semejanza. Definición. Polígonos semejantes. Definición. Enunciados de semejanza de triángulos. Aplicación de la semejanza a la resolución de problemas. |
| Geometría sintética en el espacio. (4 semanas) | • Rectas y planos en el espacio. Relaciones de paralelismo, perpendicularidad y ortogonalidad.<br>• Secciones planas de poliedros. |
| **TERCER AÑO – BACHILLERATO Reformulación 2006 – Matemática I – *DC/DAE* – Opción *M-D*** | |
| **Unidad** | **Nociones de Geometría** |
| Construcciones Geométricas (12 horas) | • Fractales.<br>• Construcción de curvas.<br>• Construcciones de segmentos cuya medida es un número irracional. |
| Geometría Analítica (48 horas) | • Ecuación de la tangente a una circunferencia.<br>• Intersecciones de una superficie cónica con un plano.<br>• Parábola, Elipse, Hipérbola. Propiedades.<br>• Tangentes a una cónica. Ecuación de la tangente. |
| **TERCER AÑO – BACHILLERATO Reformulación 2006 – Matemática III – *DCS* – Opción *S-M*** | |
| **Unidad** | **Nociones de Geometría** |
| Profundización en Geometría analítica (72 horas) | • Regiones del plano: inecuaciones del semiplano y del círculo. Aplicaciones a la programación lineal.<br>• Parábola, elipse e hipérbola. Definición. Propiedades. Ecuaciones. |
| Geometría Analítica (48 horas) | • Ecuación de la tangente a una circunferencia.<br>• Intersecciones de una superficie cónica con un plano.<br>• Parábola, Elipse, Hipérbola. Propiedades. Tangentes a una cónica. Ecuación de la tangente. |

| TERCER AÑO – BACHILLERATO Reformulación 2006 - Matemática IV – *DC* – Opción *M-D* | |
|---|---|
| **Unidad** | **Nociones de Geometría** |
| Geometría del espacio<br>(30 %)<br>(18 horas) | • Rectas no coplanares. Aplicaciones. Perpendicularidad entre recta y plano. Rectas ortogonales.<br>• Perpendicularidad entre planos. Paralelismo entre recta y plano. Paralelismo entre planos. Propiedades que relacionan perpendicularidad y paralelismo.<br>• Poliedros regulares. Estudio de propiedades métricas del tetraedro, hexaedro y octaedro. |
| Geometría Descriptiva<br>(70%)<br>(72 horas) | • Forma representativa para la Geometría euclidiana del espacio: el modelo descriptivo de<br>Gaspar Monge. Proyecciones ortogonales. Propiedades.<br>• Representación del punto y la recta. Verdadera magnitud de un segmento.<br>• Representación del plano. Trazas de un plano. Intersección de planos y de recta y plano. Perpendicularidad entre rectas y de rectas con planos.<br>• Método de abatimientos. Propiedades. Aplicaciones.<br>• Ángulos de rectas y planos con los planos de proyección.<br>• Representación de poliedros: prismas, pirámides y poliedros regulares. |
| **TERCER AÑO – BACHILLERATO Reformulación 2006 - Matemática II – *DC* – Opción *F-M*** | |
| **Unidad** | **Nociones de Geometría** |
| Resolución de problemas geométricos (30 %)<br>(36 horas) | • El estudio de la demostración.<br>• Cuadriláteros. Clasificación y propiedades. Paralelogramos.<br>• Construcciones de segmentos cuya medida sea un número irracional.<br>• Semejanza de triángulos.<br>• Geometría del Espacio. |
| Geometría Analítica (70%)<br>(84 horas) | • Familia de rectas. Haces de rectas.<br>• Ecuación de la tangente a una circunferencia.<br>• Lugares geométricos. Recta y circunferencia. Resolución de problemas geométricos, utilizando método analítico y/o sintético.<br>• Cónicas. Intersecciones de una superficie cónica con un plano. Parábola. Elipse. Hipérbola.<br>• Tangentes a una cónica. Ecuación de la tangente. Familias de rectas. Reconocimiento de cónicas. |

Fuente: Elaboración propia a partir de CES (2006a, 2006b, 2006c, 2006d, 2010d, 2010e, 2010f).

El análisis de estos programas de estudio nos da un panorama general del tratamiento y el lugar que se le da a la Geometría y su enseñanza. Para poder evidenciar aún más cómo esto llega al aula, a partir de cómo el profesor abordará las diferentes temáticas, creemos conveniente el análisis de los programas de estudio de la formación docente que se vinculan con la Geometría.

## 4.2. Geometría en la formación de profesores de matemática de educación secundaria

La formación de profesores para educación secundaria en Uruguay cuenta con un curso de Geometría en el primer año, Álgebra lineal y Geometría en segundo, y con otro de Profundización en Geometría opcional en el cuarto año como parte de la formación específica.[7] Se presentan los programas con la intención de proporcionar una breve descripción de la formación de profesores, así como del *dME* que la permea.

### Geometría I

Es un curso anual de ocho horas semanales. Se fundamenta su inclusión en el programa de estudios porque se requiere que el futuro profesor:

> Conozca un conjunto de definiciones y teoremas y sus respectivas demostraciones organizados en forma de sistema deductivo. Incorpore procesos propios del quehacer matemático como la resolución de problemas, el reconocimiento de invariantes, el razonamiento inductivo, analógico y en especial el deductivo, la formulación de definiciones, la elaboración de pruebas y demostraciones, la generalización, la comunicación. (Consejo de Formación en Educación [CFE], 2008a, p. 1)

Como objetivos del curso se quiere que los estudiantes reconozcan a la Geometría Euclidiana como un amplio sistema deductivo, que desarrolle un pensamiento deductivo y que pueda expresarlo de forma oral y escrita. Que comprenda lo que es una demostración matemática y pueda elaborarlas. Incorporar procesos propios de la actividad matemática: conjeturar, descubrir, formular, clasificar, definir, refutar, demostrar, generalizar (CFE, 2008a).

Se enfatiza metodológicamente que es necesario que los estudiantes de profesorado se involucren en procesos propios del "quehacer matemático". Se retoma la investigación de Hadas, Hershkowitz y Schwarz (2000) acerca del fracaso de la enseñanza de la demostración geométrica en

---

[7] Los programas de los cursos de formación de profesores se pueden consultar en http://www.depdematematica.org/ipa/sitio/file.php/1/portada/Programas_Especialidad_Matemtica.pdf

Bachillerato, debido al alto rigor con el que se presenta a los estudiantes y se propone que para que el profesor contrarreste esto, debe involucrarse en su formación al “quehacer matemático” para que luego su concepción sobre la Geometría afecte positivamente en el desempeño de los estudiantes. No se precisa a qué se hace alusión con el término “quehacer matemático” y se menciona de forma reiterada a lo largo del programa, podemos interpretarlo como la actividad propia de un matemático.

Se toma como referencia en el programa el trabajo de Van Hiele y sus niveles de razonamiento, y que estos sean fundamento de cómo el futuro profesor desarrolle su pensamiento geométrico, así como que propicien luego en sus estudiantes este pasaje por niveles.

Aparecen los softwares de Geometría dinámica como un recurso que favorecerá el desempeño de los futuros profesores porque permite un enfoque experimental de la Geometría, y abordar problemas que de otra forma no se podrían.

Se presenta a continuación en la tabla 4.3, la secuencia de contenidos a abordar en este curso, que empatan con los contenidos abordados en los programas descritos anteriormente de Ciclo Básico. Resulta interesante vincular cómo la formación del profesor y la manera de abordar el curso de Geometría I en la formación docente repercute en la enseñanza a estudiantes. En este programa no se menciona ningún señalamiento acerca de cómo se debe enseñar la Geometría, sino es cómo el profesor debe aprenderla, y creemos que esto condicionará su accionar en el aula.

Identificamos una centración en objetos en la formación del profesor de matemáticas, enfatizando el rigor deductivo y axiomático de la Geometría. La necesidad que se menciona de que el profesor se apropie de procesos del “quehacer matemático”, se puede considerar que desde la formación de la matemática hay una concepción de ésta más cercano a lo que se cree que hace un matemático con la matemática, y no tanto a cómo esa matemática debería ser enseñada. Este programa habla de forma muy general del curso, quedando a cargo de quien lo imparta la forma de hacerlo.

No se hace referencia al tipo de problemas que se le propondrán al futuro profesor, a partir de esto surgen las preguntas ¿Se plantearán situaciones en la que los objetos geométricos aparezcan puestos en uso con contextos de otras disciplinas? ¿Cómo aportaría a la formación del profesor enfrentarse a situaciones en las que los objetos matemáticos sean parte de un *contexto de significancia*?

Desde nuestra postura teórica, y desde esta investigación, consideramos que plantearle al futuro profesor problemas cuyos contextos sean reales, podrían hacer que signifique los conocimientos mediante el uso.

**Tabla 4.2.** *Secuencia de contenidos del programa de Geometría I.*

| GEOMETRÍA I | |
|---|---|
| **Secuencia de contenidos** | |
| Unidad 1 | A partir de un conjunto de premisas explicitadas se abordará el estudio de las propiedades de las principales figuras de la Geometría euclidiana elemental.<br>• Polígonos<br>Suma de ángulos interiores y externos. ¿Cómo definir ángulo externo en polígono no convexo? ¿Cómo demostrar?<br>Problema de la teselación del plano (con polígonos iguales, con polígonos regulares de distinto tipo).<br>Problema abierto en matemática.<br>Problema isoperimétrico en polígonos.<br>Problema de construcción de polígonos regulares (Gauss).<br>• Cuadriláteros<br>Definición y clasificación: distintas posibilidades.<br>Elaboración de pruebas para sus propiedades.<br>• Rectas y puntos notables en el triángulo<br>Concurrencia (circuncentro, incentro-excentros, ortocentro, baricentro). Alineación (recta de Euler). Paralela media. Desigualdades. Disección<br>• Problema de la cuadratura de un polígono (equivalencia de áreas de Euclides).<br>• Teorema de Pitágoras y su recíproco<br>• Ángulos en la circunferencia<br>• Problema isoperimétrico (solución de Steiner al problema).<br>• Lugares geométricos<br>• Construcciones |
| Unidad 2 | • Conceptos primitivos y axiomas. Isometrías. Homotecias. Semejanzas. Inversión. Cónicas. |
| Unidad 3 | • Representación de figuras tridimensionales en el plano.<br>• Posiciones de rectas y planos. Paralelismo y perpendicularidad.<br>• Ortogonalidad. Secciones. Prismas. Pirámides. Poliedros platónicos. Poliedros arquimedianos.<br>• V + C = A + 2 (Euler).<br>• Volumen de la esfera (Arquímedes). |

Fuente: Elaboración propia a partir de lo propuesto por CFE (2008a).

## Álgebra lineal y Geometría

Este curso corresponde al segundo año de formación y consta de ocho horas semanales. Su fundamentación se debe a que "El Álgebra lineal es una poderosa herramienta de múltiples aplicaciones tanto dentro como fuera de la matemática, y es, además, sostén teórico de la Geometría. Es una asignatura ineludible del currículo de la formación de Profesores" (CES, 2008b, p. 1). Entre los objetivos del curso se espera que los estudiantes: "Se apropien de un modelo ineludible en la matemática y la ciencia actual, que les permita acercarse a la ciencia y sus aplicaciones", "Estudien un desarrollo preciso y sin ambigüedades de la Geometría analítica", Incorporen un enfoque algebraico de las transformaciones vistas en Geometría desde el punto de vista sintético; no para sustituir esa visión sino para enriquecerse incorporando otra perspectiva", y que "Puedan apreciar un modelo para la Geometría euclidiana" (p. 1). Se sugiere que "La metodología a emplear en clase asumirá múltiples formas, desde la posición del docente tradicional hasta la de centrar el protagonismo en el alumno" (p. 2).

## Profundización en Geometría

En el cuarto año de formación, el futuro profesor deberá elegir entre tres opciones para el curso de profundización: Análisis, Álgebra y Geometría. Esto quiere decir que el programa que se muestra a continuación puede hacer parte o no de la formación del profesor. Como es interés en esta investigación se detallará únicamente el de Geometría. Es un curso anual, que consta de seis horas semanales. En cuanto a la fundamentación sobre el curso, se afirma que:

> Este curso en el último año de la formación inicial de Profesores procura que el estudiante adquiera una perspectiva más general de la Matemática, a través del estudio de nuevas Geometrías. Esta asignatura le permitirá al futuro profesor, ampliar la concepción de esta rama de la Matemática y su estudio contribuirá a su formación. (CFE, 2008c, p. 4)

Como objetivos del curso se propone:

> Proporcionar al estudiante del profesorado de Matemática una visión de la Geometría como se entiende hoy día y que le permita situarla en el marco global que debe tener de la Matemática. Consecuentemente, propender a que el estudiante mejore su comprensión de las estructuras fundamentales de la Matemática actual y que también logre un refinamiento en su intuición

geométrica. Darle una visión panorámica que le permita mejorar su futuro accionar en el aula. (CFE, 2008c, p. 4)

Se da la libertad a quien imparta el curso que utilice la metodología que le parezca conveniente, teniendo en cuenta los intereses de los estudiantes, y se plantea dos opciones (A y B) de posibles temas a seguir en el curso, que se exponen en la tabla 4.4.

**Tabla 4.3.** *Secuencia de contenidos del programa de Profundización en Geometría.*

| PROFUNDIZACIÓN EN GEOMETRÍA | |
|---|---|
| **Opción A - Geometría Diferencial** | **Opción B - Geometrías no euclidianas y otras Geometrías** |
| Curvas en el plano y en el espacio<br>Propiedades globales de las curvas.<br>Superficies.<br>Primera forma fundamental.<br>Curvatura de superficies.<br>Geodésicas.<br>Teorema de Gauss-Bonnet. | Geometrías no euclidianas. La Geometría parabólica. La Geometría circular. La Geometría hiperbólica. La Geometría elíptica.<br>Fundamentos de Geometría. Geometría Axiomática.<br>Geometrías Finitas.<br>Teoría del Caos. Fractales. Geometría fractal. |

Fuente: Elaboración propia a partir de lo propuesto por CFE (2008c).

# **Capítulo 5.** La proyección de Mercator y la explicación de Wright

En este capítulo se presenta la proyección que proporciona en 1569 Gerard Mercator de la que se habló a grandes rasgos en el planteamiento de la problemática. Describimos el contexto en el que surge el mapa y el del propio autor. Mencionamos el trabajo de Pedro Nunes, geómetra portugués que se considera un antecedente de relevancia para la construcción del mapa, debido a que es quien hace referencia por primera vez sobre las curvas loxodrómicas y la navegación.

Para complementar el análisis sobre esta proyección, exponemos una explicación matemática actual sobre la transformación detrás de la construcción del mapa, destacando la importancia de la curva loxodrómica y el contexto de la navegación para su creación.

Se presenta el análisis de la obra "*Certaine Errors in Navigation*" escrita por Edward Wright en 1599, geómetra inglés que realiza la primera explicación escrita sobre los fundamentos matemáticos de la construcción del mapa, basado en sus conocimientos geométricos. Nos importa retomar aspectos contextuales del surgimiento de la obra y cómo estos influyen en el uso de los objetos geométricos.

## 5.1. Gerard Mercator y su Proyección

Los intereses a lo largo de la vida de Gerard Mercator (1512-1594) fueron variados y abarcaron varias ramas de conocimiento, no sólo la cartografía, sino también la astronomía, matemática, cosmografía[8], magnetismo terrestre, filosofía y teología. Se destacó como calígrafo, grabador, fabricante de instrumentos científicos y editor.

[8] Descripción astronómica del mundo, o astronomía descriptiva. https://www.rae.es/drae2001/cosmograf%C3%ADa

(...) el registro histórico revela a Mercator como una persona introspectiva y enérgica que era competente en ciencia, honesto y querido, técnicamente inteligente y listo con sus manos, curioso sobre el mundo que lo rodeaba, exitoso como empresario y bien posicionado para hacer algunas contribuciones sustanciales a la cartografía. (Monmonier, 2004, p. 31)

Se muestra en la figura 5.1 una imagen basada en un retrato grabado de 1574, en la que se ve a Gerard Mercator midiendo un globo terráqueo, que denota la relevancia que tomó él como cartógrafo, imponiéndose como una referencia para la disciplina. Dicho retrato se imprimió por primera vez en su edición de 1584 de la Geografía de Ptolomeo. También apareció en la edición de 1595 del Atlas de Mercator (Monmonier, 2004, p. 40).

**Figura 5.1.** Gerard Mercator.


Nota: Imagen extraída de https://www.britannica.com/biography/Gerardus-Mercator

Mercator nació el 5 de marzo de 1512 en Rupelmonde, Flandes, parte norte de la actual Bélgica, y vivió una vida larga para la época, 82 años. Monmonier (2004) afirma que la primera biografía que se conoce sobre Mercator se publica junto con una nueva edición de su mapa en 1595, por el menor de sus seis hijos, quien era su representante en Inglaterra. A los quince años lo inscriben en una escuela que aceptaba estudiantes brillantes con bajos recursos cuyo interés fuera formarse para el sacerdocio. Se especializó en la copia de textos sagrados, y en la caligrafía. Aprendió teología cristiana y latín, pero su mayor interés práctico fue el de aplicar la escritura en cursiva para su utilización en mapas. En 1540 publicó un breve manual sobre cómo escribir las letras latinas en cursiva, y tuvo que ver con el desarrollo de este estilo de letra para la cartografía.

Gerardus Mercator Rupelmundanus (Gerardo Mercator de Rupelmonde), fue el nombre en latín con el que se matriculó en la Universidad de Lovaina en 1530, ya que estaba bien visto en la élite de Europa nombrarse de esa forma. Sin embargo, hay debate alrededor de su apellido, debido a que Mercator es la versión latina de Kramer, que se le asignaba a comerciantes en Alemania, y Cremer es su equivalente en holandés. Entre sus referentes se destaca Gemma Frisius (1508-1555) matemático y astrónomo belga, ya que tuvo la posibilidad de acercarse a sus conferencias en Lovaina donde Mercator estudió humanidades y filosofía, y recibió una maestría en 1532. Frisius además lo instruyó en geografía y astronomía, lo acercó a un orfebre y grabador local con el que ambos colaboraron en proyectos sobre mapas e instrumentos quirúrgicos, destacándose en las tareas de grabador, calígrafo, y la fabricación de instrumentos científicos (Monmonier, 2004, pp. 33-34).

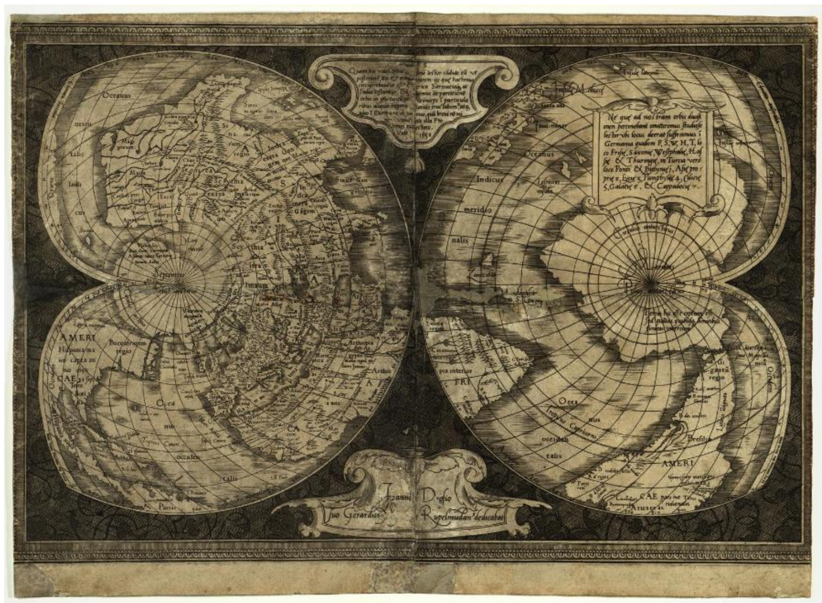
> Mercator, que aprendió con energía, progresó rápidamente de los globos terráqueos a los mapas planos y del grabado a la autoría plena. En 1536 grabó la letra cursiva del globo terrestre de Frisius, que se ensambló pegando doce gajos impresos en una carcasa esférica de papel maché de casi 15 pulgadas (37 cm) de diámetro. Su rol se amplió de grabador a coautor con la publicación, un año después, del globo celeste de Frisius, de tamaño y fabricación similares. En 1537 también fue autor y publicó su propio mapa, un retrato cartográfico de Palestina de 43 por 98 cm (17 por 39 pulgadas) grabado en cobre e impreso en seis hojas, que formaban un mapa del tamaño de la pared cuando se pegaban. (pp. 34-35)

Por cuestiones relacionadas a su religión, y los conflictos entre protestantes y tradicionalistas católicos, lo encarcelan en marzo de 1544 por siete meses. Aun así, los mecenas católicos continuaron patrocinando sus proyectos y comprando sus mapas.

Fue nombrado para enseñar matemáticas en Duisburgo en 1559 y diseñó un curso de tres años cuya secuencia abarcaba agrimensura, Geometría y astronomía matemática, puesto que luego de enseñar por un ciclo, heredó su segundo hijo. En 1564 lo nombran cosmógrafo del duque Jülich, Cleve y Berg, lo que lo lleva a incursionar en trabajos sobre geografía, historia y cosmografía. Se afirma que estos sucesos motivaron la creación de su célebre mapa (Monmonier, 2004, p. 39).

Es amplia la lista de contribuciones de Mercator en el campo de la cartografía. En 1538 publicó un mapamundi de 36 por 55 centímetros, con la proyección de doble cordiforme (doble corazón), que se muestra en la figura 5.2. En este se puede apreciar la influencia de Frisius por su contenido, aunque la proyección fue creada por el matemático francés Oronce Finé (1494-1555) en 1531.

**Figura 5.2.** Mapamundi con proyección cordiforme publicado por Mercator en 1538.



Nota: Imagen extraída de https://www.wdl.org/es/item/6766/

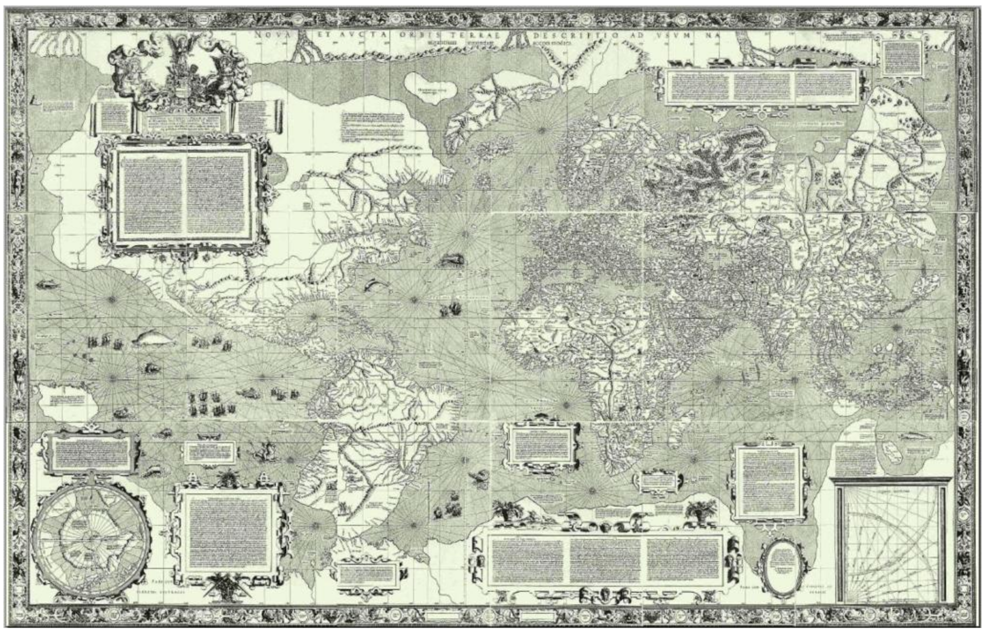
Otros aportes relevantes tienen que ver con la cartografía de Europa, en 1540 publica un mapa detallado de Flandes de 87 por 117 centímetros. En 1554 realiza un mapa de Europa impreso en quince hojas separadas, grabado en cobre que midió 120 por 147 centímetros. Se identifica la dificultad de conseguir información geográfica sobre Gran Bretaña por ser un territorio con temor a la invasión en su retrato de esta zona. Se cree que Mercator tomó como referencia mapas ya existentes, y se destaca la influencia de John Dee que vivió en Lovaina de 1538 a 1540 y fue un reconocido astrónomo y matemático británico. Sin embargo, sorprende la precisión del mapa que realiza en 1564 de Inglaterra, Escocia e Irlanda con un tamaño de 88 por 127 centímetros (Monmonier, 2004).

> Mercator publicó una versión auténtica de la Geografía de Ptolomeo (...) El objetivo de Mercator era un retrato exacto de la visión del mundo de Ptolomeo del siglo II. Para entender el presente, creía el cartógrafo, uno debe apreciar el pasado. El atlas, publicado en 1578, incluía los veintisiete mapas de Ptolomeo, cuidadosamente restaurados, bellamente grabados y complementados por

un índice de nombres de lugares y un mapa ampliado de los límites del Delta del Nilo. (Monmonier, 2004, p. 39)

Si bien sus contribuciones fueron amplias y en diferentes disciplinas, la obra por la que se lo recuerda globalmente es el mapa que crea en 1569 a partir de una proyección que facilita la navegación (figura 5.3). La explicación de esta se realiza más adelante luego de retomar algunos antecedentes que consideramos de importancia para aportar a la contextualización de su obra.

**Figura 5.3.** Mapa de Mercator de 1569.



Nota: Imagen extraída de https://es.wikipedia.org/wiki/Proyecci%C3%B3n_de_Mercator#/media/Archivo:Mercator_1569.png

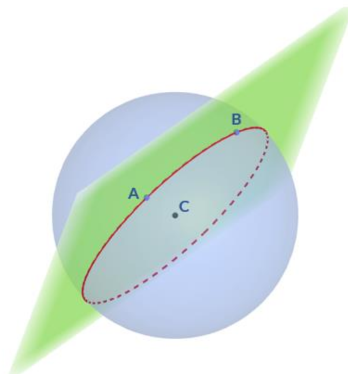
Mercator murió el 2 de diciembre de 1594, dejando algunos trabajos a su hijo Rumond y sus nietos para terminar.

## 5.2. Un antecedente: Curvas loxodrómicas, Pedro Nunes y la Navegación

La trayectoria más corta en distancia para llegar de un punto a otro en la esfera la determina el círculo máximo que pase por ellos. Este se define por la intersección de la esfera con el plano que contiene esos puntos y el centro de esta, como se muestra en la figura 5.4. Sin embargo, no era la trayectoria evidente o más práctica para la navegación en el siglo XVI con los instrumentos con los que contaban en esa época.

Es por esto por lo que toma relevancia otro tipo de curva que determina una trayectoria entre dos puntos de la esfera: la loxodrómica.

**Figura 5.4.** Círculo máximo por los puntos A y B.



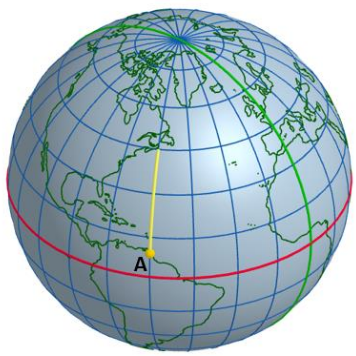

## Curva loxodrómica

La loxodrómica es una curva en la superficie de la esfera que tiene la particularidad de cruzar todos los meridianos con el mismo ángulo. En el contexto de la navegación, este ángulo cobra relevancia ya que indica un rumbo determinado en la brújula que se mantendrá a lo largo de todo el viaje, debido a que los meridianos indican la dirección Norte-Sur. En este sentido, enfatizando la importancia para la navegación, Fenna (2006) las define como: “Las loxodrómicas -líneas de rumbo para el navegante- son líneas de rumbo constante. Es decir, representan los lugares sucesivos por los que se debe viajar/navegar manteniendo un rumbo específico de la brújula” (p. 87).

Si tomamos como ejemplo los cuatro puntos cardinales: Norte, Sur, Oeste y Este, las trayectorias por las que se debieran navegar siguiendo un rumbo constante tienen cierta singularidad. Si se está en un punto de partida A como el que se indica en la figura 5.5a, y se quiere navegar hacia el Norte, se seguirá la trayectoria por el mismo meridiano, siendo esta no sólo una curva loxodrómica, sino además un círculo máximo. Por lo que, si se navega en esa dirección Norte, se recorre la distancia más corta entre el punto de partida y de llegada. De forma análoga se procede si se quiere navegar hacia una dirección Sur.

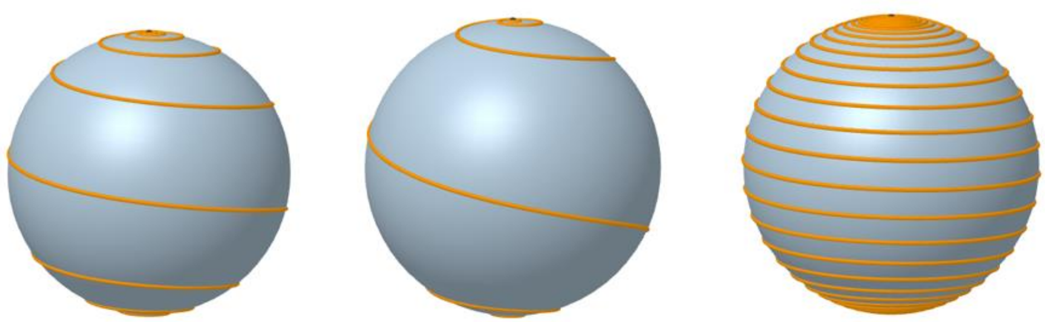
En el caso de la dirección Este-Oeste, se seguirá la trayectoria con rumbo constante por un paralelo de latitud, ya que estos son perpendiculares a los meridianos. En este caso, son círculos menores, por lo que no es la distancia más corta. Se muestra en la figura 5.5b la trayectoria a seguir partiendo del punto B, hacia el Oeste por un paralelo. La única situación en la que se navega en dirección Este-Oeste y se recorre un círculo máximo es si se encuentra en el ecuador.

**Figura 5.5.** a) Trayectoria loxodrómica por un meridiano hacia el Norte desde el punto A.
b) Trayectoria loxodrómica por un paralelo hacia el Oeste desde el punto B.




La forma de este tipo de curvas cambia si se quiere navegar siguiendo otro ángulo de rumbo, describiendo una espiral. Se muestra en la figura 5.6 ejemplos de diferentes loxodrómicas, que dependen del ángulo de rumbo.

**Figura 5.6.** Ejemplos de curvas loxodrómicas.



## Pedro Nunes y la Navegación

Pedro Nunes (1502-1578) nació en 1502 en Alcácer do Sal, Portugal. No se tiene información sobre su familia o sus años de infancia y juventud (Leitão, 2003). Se graduó de médico en la tercera década del siglo XVI en la Universidad de Salamanca. Almeida (2011) lo describe como:

> Médico, matemático, astrónomo o cosmógrafo, Nunes fue en su época el ejemplo del investigador teórico (a pesar de todo) preocupado por dar a su trabajo el énfasis de una

experiencia y una práctica basada en la interpretación matemática del mundo real. Sus estudios abarcan la astronomía, las matemáticas, la navegación, la mecánica, la fabricación de instrumentos científicos y la cartografía. (p. 15)

En 1529 es nombrado cosmógrafo por el rey João III. En 1544 se desempeñó como profesor de matemática en la Universidad de Coímbra, y en 1547 fue nombrado cosmógrafo real. Murió en Coímbra en 1578. Wright (1599) lo menciona en su trabajo como uno de los principales influyentes y antecedentes. Nos basaremos en fuentes secundarias para realizar un recorrido por su trabajo.

Leitão y Gaspar (2014) plantean a Nunes como antecedente de la proyección de Mercator, ya que en 1537 es el primero en hacer referencia al concepto de líneas de rumbo, luego llamadas curvas loxodrómicas, y atender su importancia para la navegación. En 1541 Mercator construye un globo en el que añade estas curvas, a su vez Gemma Frisius (1508–1555), profesor de este, se refiere a estas curvas y revela que las representó en su mapamundi de 1540, que se perdió.

Almeida (2018) menciona que su obra destacada acerca de la navegación es: El "*Tratado da Sphera*" (1537), el "*Manuscrito de Florencia*" (hacia 1540) y la "*Petri Nonii Salaciensis Opera*" (1566). Siendo el primero con el que "se inició al uso de herramientas matemáticas para resolver problemas de navegación" (Almeida, 2012, p. 20). Su finalidad tiene que ver con dar explicación a problemas que surgían desde la práctica de la navegación, así como explicar los instrumentos y procedimientos utilizados. A pesar de las preocupaciones de Nunes que motivaron su obra, Almeida (2018) refiere a que debido a la dificultad de la matemática involucrada y al alto grado de analfabetismo de quienes navegaban, no lograba que sus escritos fueran comprendidos con facilidad.

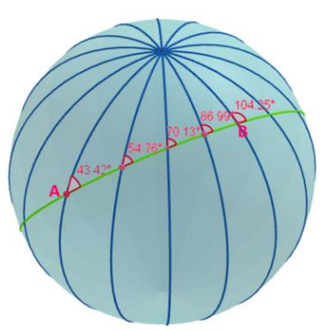
En cuanto a los problemas en la navegación, la utilización de los mapas en esa época era uno de los más destacados. En este sentido Randles (1997) afirma que no tener en cuenta la convergencia de los meridianos para construir y usar un mapa, llevaba a los marineros a caer en ciertas complicaciones. Una de éstas es planteada a este matemático portugués y realiza una explicación acerca de la curva loxodrómica para poder dar solución. Además, refiere a las diferencias de navegar en círculos máximos y este tipo de curvas. En su "*Tratado da Sphera*" publicado en 1537, plantea dificultades que el navegante Martin Alonso da Sousa advierte al navegar de regreso de Brasil a Portugal en 1530-2 y que le pide resolver. Es importante remarcar que Nunes lo hace desde sus conocimientos matemáticos, ya que no tiene experiencia como navegante. El problema planteado era el siguiente:

> A propósito de uno de ellos, Martim Afonso de Sousa preguntó a Nunes por qué "... con el Sol sobre el ecuador, es decir, en el equinoccio", [...] "si navegamos hacia el Este o hacia el Oeste, seguimos siempre un paralelo en la misma latitud sin poder alcanzar nunca el ecuador hacia el que hemos puesto nuestro barco en rumbo magnético Este". (Randles, 1997, p. 85)

Según el autor Nunes reconoce que, para estar teniendo este problema, debe haber un conflicto entre la navegación por una trayectoria cuyo ángulo de rumbo fijado en el punto de partida es dado por un círculo máximo. Si se fija el ángulo de rumbo de partida de esa forma, y se toma como un rumbo constante a seguir, entonces no se seguirá la trayectoria de ese círculo máximo. Para lograrlo, se deberá cambiar constantemente el ángulo de rumbo, porque los círculos máximos, con excepción del ecuador, intersecan en ángulos diferentes a cada meridiano. Aparece el supuesto de que, para estar incidiendo en esa complicación, el ángulo de rumbo de partida lo deberían estar fijando en un globo terráqueo y no en el mapa plano. Esto debido a que, en el mapa, no sería posible partir de un rumbo este y cruzar el ecuador. Se podía justificar el uso del globo terráqueo con base en que el mapa y su construcción generaba problemas a quien lo usa.

Ahora, quien fije su ángulo de rumbo de partida por un círculo máximo, y quiera seguirlo, se dará cuenta de que, si navega por este, el rumbo con el que partió cambiará, y seguirá cambiando a medida que se avance en la trayectoria de ese círculo máximo, como se muestra en la figura 5.7. Existe una dificultad para los navegantes en comprender que los círculos máximos no describen trayectorias con rumbos de brújula fijos, sino que los rumbos fijos describen curvas loxodrómicas.

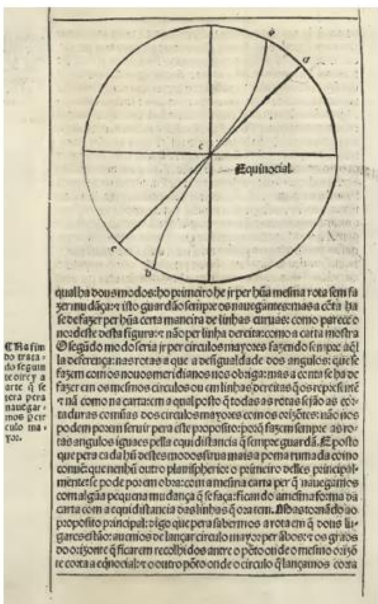
**Figura 5.7.** Círculo máximo y meridianos.



Randles (1997) cita la explicación de Nunes sobre la navegación por círculos máximos, su intersección con los meridianos en diferentes ángulos y cómo creer que esta trayectoria es de rumbo fijo, los lleva a navegar en realidad por una curva loxodrómica, compuesta por intervalos de grandes círculos. En la figura 5.8 se muestra una imagen que Randles (1997) toma de la obra de Nunes y cita lo que dice al respecto de esta diferencia entre las trayectorias. Se traduce de la siguiente manera:

> “Fig. 1. El diagrama de Pedro Nunes para ilustrar la curva loxodrómica que comenta de la siguiente manera: "El noreste hacia el que creen que van es la línea d.c.e de esta figura, pero la pista que realmente siguen es la línea curva a.c.b. que no es un [gran] círculo. Pedro Nunes, 'Tratado [...] sobre certas dúvidas da navegação', en op. cit. ed. cit. vol. i, p. 168.”. (p. 88)

**Figura 5.8.** Diferencia entre círculo máximo y curva loxodrómica: Nunes.



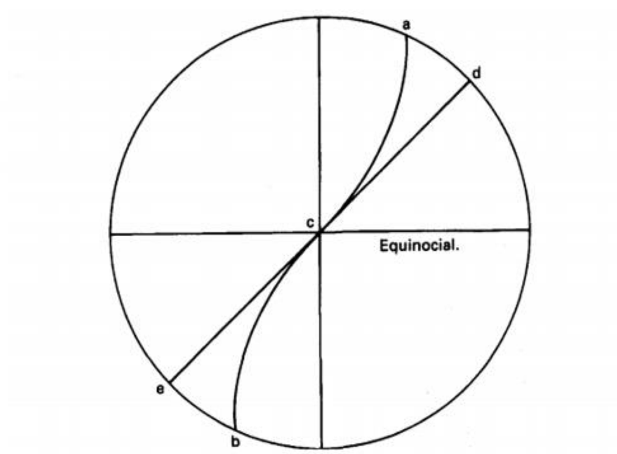



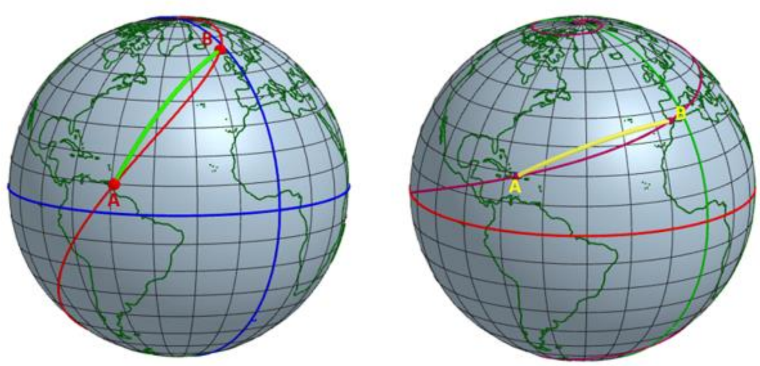

Fig. 1. Pedro Nunes' diagram to illustrate the loxodromic curve which he comments on as follows: 'The North-East towards which they think they are going is the line d.c.e. in this figure, but the track which they truly follow is the curved line a.c.b. which is not a [great] circle.' Pedro Nunes, 'Tratado [...] sobre certas duvidas da navegação', in *op. cit. ed. cit.* vol. 1, p. 168.

Nota: Imágenes extraídas de Nunes (1537) y Randles (1997, p. 88).

Existe un conflicto al fijar el ángulo de rumbo de salida sobre una trayectoria dada por un círculo máximo. Por un lado, si se sigue esa trayectoria de círculo máximo con ese ángulo de rumbo de partida, sucederá que este no se mantendrá constante, sino que cambiará con cada meridiano. Por otro lado, si se determina ese ángulo de partida en un círculo máximo y el timonel hace todo por mantenerlo, se seguirá un rumbo fijo, pero no se navegará por un círculo máximo, sino por una curva loxodrómica. En la figura 5.9 se muestra la navegación del punto A al punto B por ambas trayectorias. En este sentido, Randles (1997) refiere a otro fragmento de la obra de Nunes, en la que hace referencia a la navegación por un círculo máximo y a cómo si las condiciones se dieran (vientos, clima, mar, etc.), esa trayectoria haría que el ángulo de rumbo cambie.

> (...) a medida que avance, comprobará que el rumbo Este no coincide con la dirección hacia la que apunta el barco, y después de avanzar lo suficiente para que esa diferencia sea perceptible, comprobará que está dirigiéndose hacia otro rumbo del que partió. Y entonces el timonel, sin entender por qué lo hace, inmediatamente 'corrige' su rumbo [como] si quisiera mantener la misma latitud. Y esto sucede de tal manera que, si tuviéramos que dirigirnos hacia el Este [determinado en el punto de partida] y si atáramos el timón para que no pudiera moverse y si el mar estuviera en calma, y si nada más obstaculizara nuestro curso, y si, sobre todo, y si el viento estuviera a nuestro favor, y si soplara en la dirección en la que habíamos fijado nuestro rumbo, aun así, si procediéramos así, durante una distancia determinada, y si miráramos la brújula, encontraríamos que no estábamos navegando hacia el Este [en un curso de gran círculo para cruzar el ecuador]. (Nunes 1537, como se citó en Randles, 1997)

**Figura 5.9.** Comparación de trayectoria de punto A al B por círculo máximo y curva loxodrómica.




Nunes reconoce y explica la ventaja de navegar por el círculo máximo debido a que es la trayectoria más corta, y genera un método que se explica matemáticamente con fundamentos en la Geometría esférica. Esta explicación y algunas críticas a su trabajo dan cuenta de que con los instrumentos que se tenían en la época, era prácticamente imposible que esta explicación fuera llevada a la práctica, por lo que aleja su trabajo de quienes navegaban. En su solución al problema de navegar por un círculo máximo, Nunes muestra la manera de corregir el ángulo de rumbo de forma que se mantenga lo más cercano a la trayectoria del círculo máximo. El funcionamiento de este método dependía de la corrección del ángulo por cada grado de latitud, aproximando el círculo máximo por arcos de curvas loxodrómicas, impensado para los instrumentos que se tenían, por lo que en esa época no fue utilizado por los marineros.

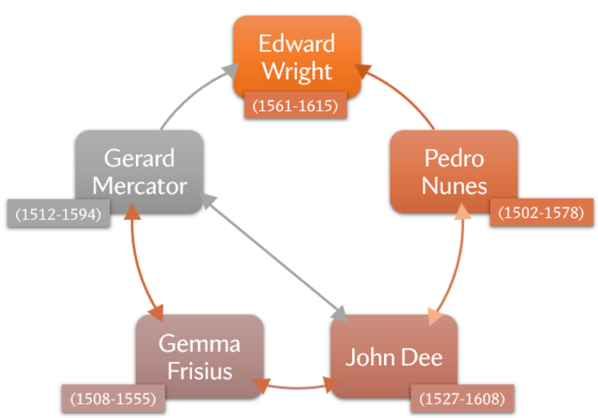
Randles (1997), Almeida (2018) y Leitão y Gaspar (2014) refieren a la influencia que tuvo el trabajo de Nunes en Europa, particularmente nos interesará la influencia en Inglaterra. Entre las personas cuyos intereses eran la cosmografía y la matemática se destaca a John Dee (1527-1609) como quien realizó la difusión del trabajo de Nunes en esta nación. Almeida (2012) realiza un recorrido por diferentes historiadores que abordan el vínculo entre Dee y Nunes, y afirma que el inglés lo consideraba uno de los más destacados de la época, e incluso existe evidencia de esta opinión en correspondencia escrita con Mercator, con quien tenía cercanía e incluso dedica su primera obra en 1558. Además, Dee pide a Nunes que sea él quien continúe su obra, incluso que la tome como propia si algo le sucede.

La influencia de Nunes en la obra de Wright (1599) se hace evidente debido a que él mismo lo menciona como antecedente dentro de su tratado. Primero, toma un ejemplo concreto sobre un error que se comete en la navegación con el mapa que se utilizaba en ese momento, y luego al referirse a las tablas de rumbo que plantea, y que afirma mejorar.

## Influencias en el contexto del siglo XVI

A partir de lo descrito en este capítulo configuramos una red de influencias entre estos matemáticos, cartógrafos, astrónomos, que exponemos en la figura 5.10 y muestra la conexión entre ellos.

**Figura 5.10.** Influencias de este período.



## 5.3. La Proyección de Mercator y la Proyección Equidistante

Mercator titula su mapa de 1569 como "*Nova et Aucta Orbis Terrae Descriptio ad Usum Navigantium Emendate Accommodata*", cuya traducción es "*Una nueva y ampliada descripción de la Tierra con correcciones para su uso en la navegación*", dejando en evidencia la finalidad de su creación. Si bien no hay registros escritos por el propio Mercator que indiquen cuáles fueron los fundamentos matemáticos en los que basó la construcción de su mapa, Snyder (1987) cita un fragmento de lo que Mercator escribió en este en 1569, en relación con su proyección:

> En esta cartografía del mundo hemos [deseado] extender la superficie del globo en un plano en el que los lugares estén situados adecuadamente en todas partes, no sólo con respecto a su verdadera dirección y distancia, unos de otros, sino también de acuerdo con su debida longitud y latitud; y además, que la forma de las tierras, tal como aparecen en el globo, se conserve en la medida de lo posible.
>
> Para ello era necesaria una nueva disposición y colocación de los meridianos, de manera que se convirtieran en paralelos, ya que los mapas elaborados hasta ahora por los geógrafos son, a causa de la curvatura y la inclinación de los meridianos, inadecuados para la navegación ... Teniendo todo esto en cuenta, hemos aumentado un poco los grados de latitud hacia cada polo, en proporción al aumento de los paralelos más allá de la relación que realmente tienen con el ecuador. (Fite y Freeman, 1926, p. 77-78, como se citó en Snyder, 1987)

En esta cita se expresa la esencia de la proyección en cuanto a su conformidad ya que afirma que conserva las formas de las tierras como se ven en el globo, y, además, que esto se logra a partir de una separación de los paralelos que será proporcional a lo que aumentan en medida que se alejan del ecuador. Además, afirma que la finalidad del mapa es su uso para la navegación. Si bien Mercator no dice de forma explícita cómo fundamenta su mapa, puede ser el indicio de lo que luego Wright (1599) explica con todos los detalles.

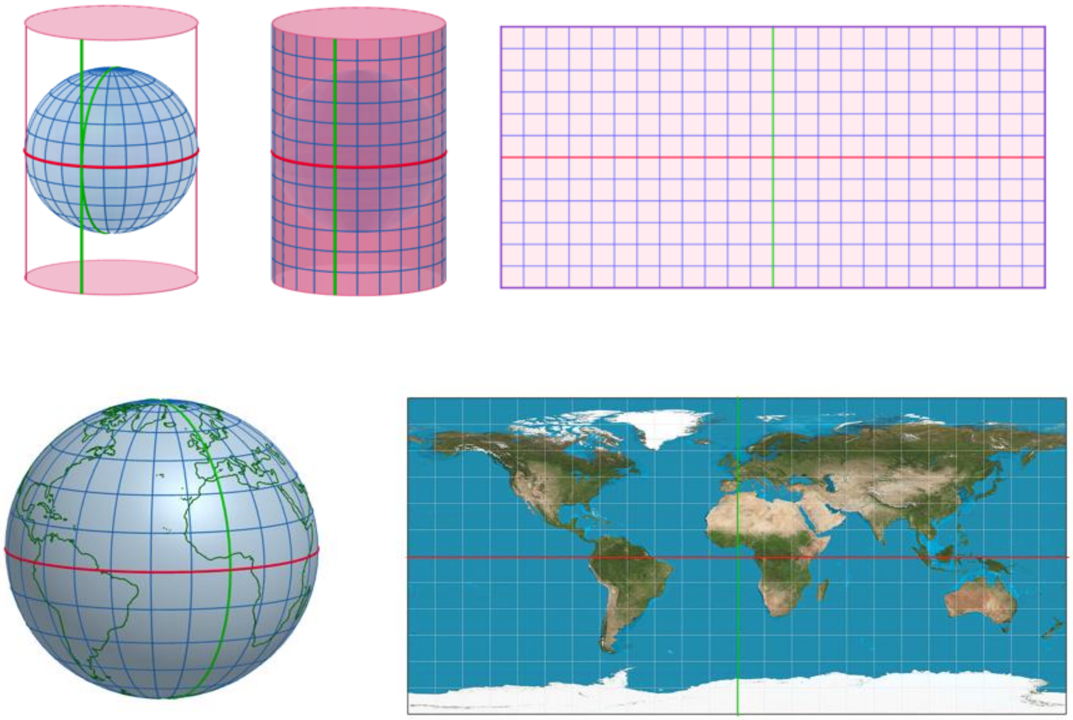
Leitão y Gaspar (2014) plantean que es posible que su proyección esté basada en el uso de tablas de rumbo que ya existían en esa época y diferentes matemáticos y cartógrafos habían trabajado en ellas. Esta creencia se debe a que identifican que los errores que Mercator comete en su mapa se pueden corresponder con el uso de este tipo de tablas. Consideran que su conocimiento sobre las líneas de rumbo en el globo terráqueo le puede haber permitido trasladarlas al plano y con ayuda de las tablas, lograr que se representen como líneas rectas. Determinando de forma clara que la finalidad de este mapa era la de representar la Tierra para poder navegarla. Permite hallar el ángulo de rumbo de cualquier dirección, y seguirla con la brújula determinando en el mapa de Mercator el ángulo que forma la línea de rumbo con los meridianos que indican la dirección al norte.

Monmonier (2004) afirma que Mercator en 1569 cuando presenta su mapa del mundo revoluciona la navegación al transformar en líneas rectas las curvas loxodrómicas en un mapa plano, no solo los meridianos y paralelos como en mapas anteriores, sino que cualquier rumbo que pudiera trazar un marinero. Aquí se enfatiza esta diferencia, ya que los mapas que eran utilizados hasta el momento se trataban de proyecciones en las que, los paralelos y meridianos se mostraban como rectas equidistantes, lo que llevaba a los marineros a incurrir en errores si marcaban su rumbo con líneas rectas porque no llegaban al destino deseado. En este tipo de mapas, las curvas loxodrómicas aparecen como líneas curvas, lo que hace que sea muy dificultoso su trazado.

Esta proyección que se utilizaba es llamada actualmente cilíndrica equidistante y se muestra en la figura 5.11. En ella los meridianos aparecen equidistantes y mantienen su medida siendo esta la mitad que el ecuador, que también la mantiene en esta proyección. Los paralelos se muestran todos con la medida del ecuador y con la misma distancia entre ellos que la que tienen los meridianos. La escala es verdadera a lo largo del ecuador y de todos los meridianos, debido a que estos conservan su medida. También es constante en cada paralelo e igual en el paralelo simétrico con respecto al ecuador, ya que el estiramiento es el mismo, aunque cada vez más exagerada cuanto más cerca de los polos (Snyder y Voxland, 1989). Si consideramos la esfera de radio uno, cada paralelo de latitud $\theta$ es una circunferencia con radio $\cos\theta$, por lo que el factor de estiramiento estará dado por $\sec\theta$.

Parsons y Morris (1939) exponen una comparación sobre la cuadrícula de los mapas que se utilizaban antes de Mercator (que se describió anteriormente), y las ventajas que aportan a la navegación, los cambios que éste propone. Plantean que con esta nueva proyección podrían convertir el ángulo de rumbo de la brújula en rumbos verdaderos en el mapa, dados por líneas rectas. También, si se ha navegado en determinada dirección, se podría determinar en el mapa el curso que han seguido, así como conocer con precisión las coordenadas de un lugar desconocido al que se llegara. Permite establecer de antemano la línea de rumbo a seguir y determinar la dirección de la brújula con la que debían navegar para llegar al destino deseado.

**Figura 5.11.** Proyección cilíndrica equidistante.

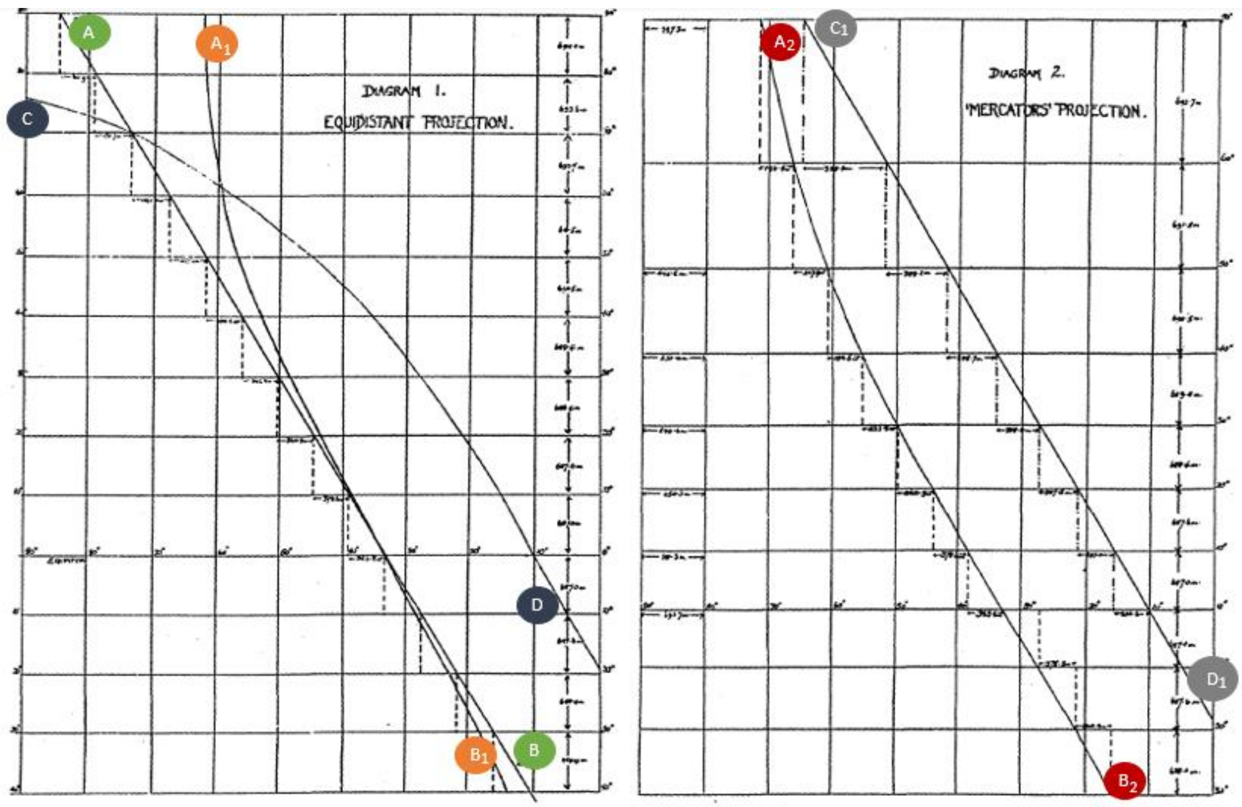


Se muestra en la figura 5.12 la comparación de ambas cuadrículas que realizan estos autores y cómo se ven las curvas loxodrómicas. Por un lado, la del mapa equidistante que muestra los paralelos como líneas separadas todas con la misma distancia, y por otro, la del mapa de Mercator, que los separa de forma desigual, corrigiendo la distorsión verticalmente. En el diagrama 1 de la figura 5.12 en el que se está representando la proyección equidistante, se dibujan tres curvas: AB, $A_1B_1$ y CD. La primera es una línea recta que se trazó del punto A al punto B, podría representar lo que un marinero trazaría como línea de rumbo constante (si no conoce con detalle la proyección del mapa), que cruza al ecuador con un ángulo de 60° y por tanto a los meridianos con uno de 30°. Ahora, los autores afirman que:

> Cuando un barco navega con rumbo constante no solo debe cruzar sucesivos meridianos con el mismo ángulo, sino que también debe, en su avance, mantener constantemente la relación entre el Norte-Sur y Este-Oeste. Si, por ejemplo, al principio del curso en el que el barco está

navegando, está haciendo dos millas de norte por cada una de oeste, esta proporción debe ser mantenida si su curso va a permanecer igual. Una línea recta, que represente tal curso debe cumplir con ambas condiciones. (Parsons y Morris, 1939, p. 64)

**Figura 5.12.** Comparación de la representación de la línea de rumbo en la proyección equidistante y en la proyección de Mercator.

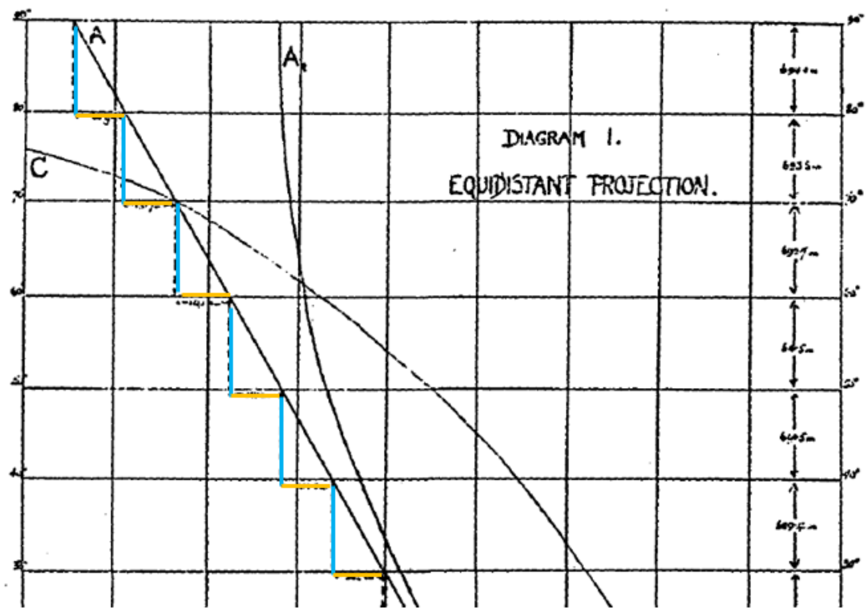



Nota: Imagen extraída de Parsons y Morris (1939, pp. 65-66).

Se puede observar que esto no sucede con la línea AB, siendo que "la cantidad relativa del este-oeste se hace cada vez menor, de modo que un barco que navega a lo largo de ese curso representado por tal línea gira gradualmente cada vez más hacia el norte" (p. 64), por lo que la línea $A_1B_1$ es la que representa la dirección real de AB.

Respecto a esto, en la figura 5.13 se expone esa relación entre Norte-Sur y Este-Oeste. Por un lado, en color azul se representa la distancia recorrida en dirección Norte-Sur, que será siempre la misma, debido a que esa medida no cambia en la proyección, es decir, todos esos segmentos en la esfera y en el mapa representan la misma distancia. Por otro lado, en color amarillo se indica la distancia en dirección Este-Oeste, que debido a la proyección del mapa se representan por segmentos de la misma medida, pero que en la esfera representan distancias cada vez menores cuanto más al Norte se ubique, porque la medida de cada uno estará multiplicada por cosθ, siendo θ el ángulo de latitud de cada paralelo.

**Figura 5.13.** Proyección equidistante y relación Norte-Sur, Este-Oeste.




Nota: Imagen extraída de Parsons y Morris (1939, p. 65).

La tercera línea CD que se muestra en la figura 5.12, representa a la loxodrómica de 60°. Todo esto tenía implicación práctica para la navegación, "Cualquier marinero que usara una carta como esta se encontraría muy lejos de su cálculo si imaginara que una línea recta en ella es una línea de rumbo" (p. 64). En este sentido, si bien se podría comprender ese error por la carta, no era trivial dibujar en ella líneas de rumbo por la forma y los cálculos que se necesitaban para lograrlo. Por lo que "las cartas de mar de este tipo no eran de gran utilidad práctica para los marineros, excepto para viajes cortos" (p. 64).

Se confrontan estas líneas en la proyección de Mercator, como se ve en el diagrama 2 de la figura 4.12. En este aparecen dibujadas dos líneas $C_1D_1$ y $A_2B_2$, que son las representaciones de la CD y $A_1B_1$ respectivamente. En cuanto a $C_1D_1$, Parsons y Morris (1939) sostienen que "Forma un ángulo de 60° con el ecuador, y cruza todos los meridianos en un ángulo de 30°. Además, las proporciones entre las distancias Norte-Sur y Este-Oeste que se hacen al cruzar los sucesivos paralelos son las mismas" (p. 66), por lo que representa una loxodrómica. Un barco siguiendo esta línea navegaría con rumbo constante de

30°. De la misma forma, se muestra como $A_2B_2$ que representa AB, no se muestra como línea recta en la proyección de Mercator, por lo que no es una loxodrómica.

### Explicaciones actuales sobre la Proyección de Mercator

Se presenta un enfoque en el que se utilizan herramientas del Cálculo para dar explicación a la proyección de Mercator, presentado por Daners (2012). Si bien probablemente dista de los objetos matemáticos que Mercator utilizó en el momento de hacer el mapa, son explicaciones actuales que dejan ver cómo se comporta la proyección. Snyder (1987), por su parte describe su comportamiento de la siguiente forma:

> Los meridianos de longitud de la proyección de Mercator son líneas verticales paralelas igualmente espaciadas, cortadas en ángulo recto por paralelos horizontales rectos cada vez más espaciados hacia cada polo, de modo que exista conformidad. El espaciamiento de los paralelos en una determinada latitud de la esfera es proporcional a la secante de la latitud. (pp. 38-39)

Como ya se expuso anteriormente, Mercator tiene como premisa desarrollar un mapa en el que las líneas de rumbo se representen como líneas rectas. Para lograr su objetivo, aumentó progresivamente la separación de los paralelos. En el globo los paralelos se presentan como circunferencias que tienen todas perímetro diferente, haciéndose éste cada vez menor a medida que nos acercamos al polo, y en el mapa de Mercator aparecen todos con la medida del ecuador. Esto hace que el estiramiento de los paralelos, en la dirección Este-Oeste (horizontal), se deba hacer igual en la dirección Norte-Sur (vertical), como se muestra en la figura 5.14.

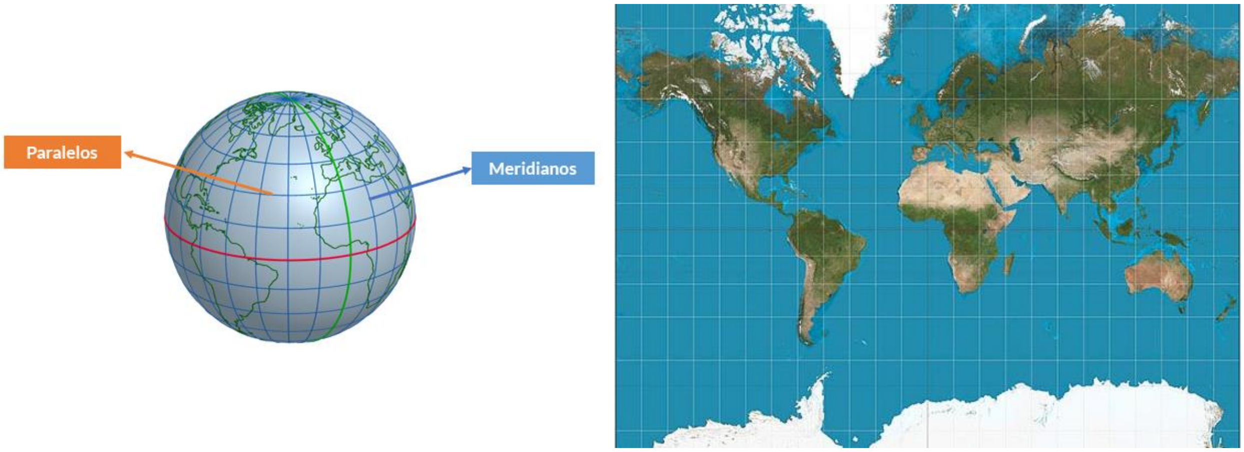
Además, en su proyección los meridianos aparecen como rectas paralelas (no convergen como en el globo hacia los polos), por lo que Mercator expandió las distancias entre los paralelos progresivamente hacia el polo para igualar la velocidad en la que se distanciaron los meridianos, al hacerlos paralelos, con la finalidad de que su mapa sea conforme.

Daners (2012) afirma que, para lograr esta proyección, se quiere que al transformar la esfera al plano se cumplan las siguientes propiedades:

- La dirección Sur-Norte es la dirección vertical.
- La dirección Oeste-Este es la dirección horizontal conservando la longitud del ecuador.

- Todas las trayectorias de igual brújula (curvas loxodrómicas) se muestran con líneas rectas.

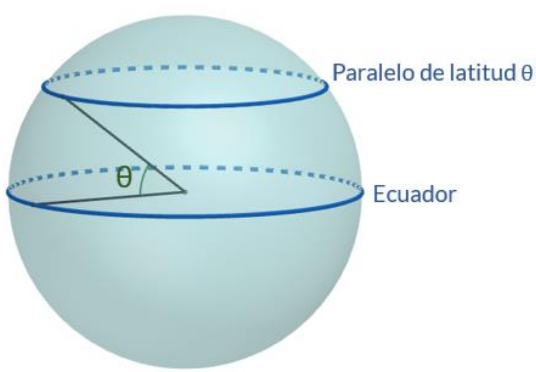
**Figura 5.14.** Paralelos y meridianos en el globo y en el mapa de Mercator.




En cada punto el grado de distorsión en la dirección Sur-Norte debe ser igual al grado de distorsión Oeste-Este, para que las formas permanezcan iguales localmente. Se considera la esfera de radio igual a uno para simplificar la notación.

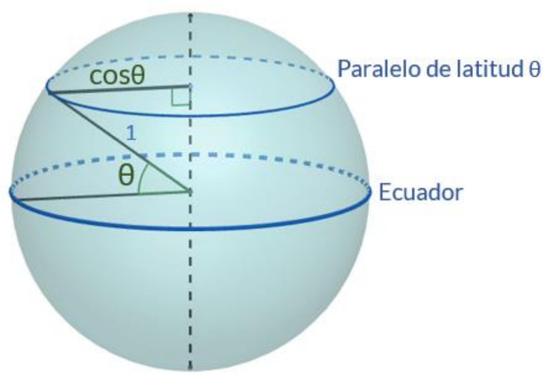
Los paralelos son las circunferencias que se determinan al intersecar la esfera con planos paralelos al plano que contiene el ecuador, es decir, perpendiculares al eje que contiene los polos. La latitud en cada paralelo estará determinada como se indica en la figura 5.15, por el ángulo θ, con $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

**Figura 5.15.** Ejemplo de paralelo de latitud θ, y el ángulo que lo determina.



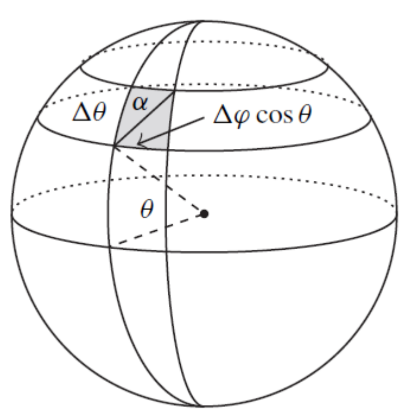
Las medidas de las circunferencias que representan los paralelos en la esfera disminuyen conforme la latitud aumenta y es cero en los polos. El radio de cada una de esas circunferencias depende del ángulo de latitud y es igual a cosθ, como se muestra en la figura 5.16. En el mapa de Mercator, los paralelos aparecen como líneas rectas horizontales y de igual medida que la del ecuador. El grado de distorsión Oeste-Este depende entonces de la latitud, a mayor latitud mayor estiramiento para llegar a la longitud deseada.

**Figura 5.16.** Radio del paralelo de latitud θ.




Daners (2012) considera una línea con ángulo α constante en la esfera, quiere decir que corta a todos los meridianos con el mismo ángulo. Se centra en el rectángulo esférico sombreado en la figura 5.17. La circunferencia que determina el paralelo de latitud θ, tendrá radio cosθ (esto comprime la circunferencia cuando la latitud aumenta), el radio será cada vez menor.

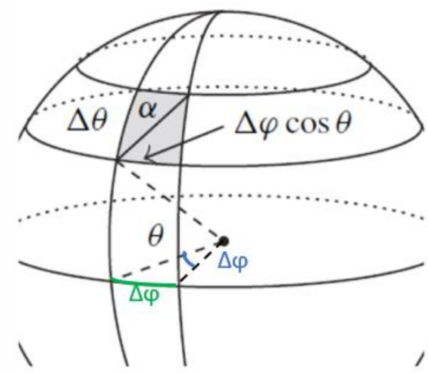
**Figura 5.17.** Pequeño rectángulo en la esfera.




Nota: Imagen extraída de Daners (2012, p. 201).

El borde del rectángulo esférico que pertenece a ese paralelo está determinado por el arco de circunferencia que determinan los meridianos en el paralelo de latitud θ, y su medida estará dada por: $\Delta\varphi\cos\theta$, siendo $\Delta\varphi$ el ángulo comprendido entre los meridianos. El borde correspondiente al meridiano será $\Delta\theta$, ya que los meridianos son circunferencias de radio uno. Esto se muestra con mayor detalle en la figura 5.18.

**Figura 5.18.** Énfasis en el ángulo entre los meridianos y el arco de circunferencia que determinan en el ecuador.




Se plantea la siguiente relación en la esfera:

$$\cot\alpha \approx \frac{\Delta\theta}{\Delta\varphi\cos\theta} \quad (1)$$

Se muestra en la figura 5.19 cómo se corresponde el rectángulo de la esfera, en el mapa. Se tiene que todos los paralelos, sea cual sea su latitud, tienen la medida del ecuador en el mapa. Todos están estirados excepto el Ecuador. Por lo tanto, el arco del rectángulo en la esfera que mide $\Delta\phi\cos\theta$, se estirará hasta medir $\Delta\phi$, que es la medida del arco de circunferencia que se forma entre los meridianos en el Ecuador, debido a que el ángulo entre los planos que contienen a los meridianos es $\Delta\phi$ y el radio del ecuador es uno. Entonces, cada arco de circunferencia de los paralelos entre esos meridianos, se estirarán para medir esa longitud. Si se mira ahora el rectángulo correspondiente en el mapa, $\Delta\phi=\Delta u$, que es la segunda de las condiciones que se le pide al mapa.

Ahora, si centramos la atención en el mapa, se tiene que:

$$\cot\alpha \approx \frac{\Delta v}{\Delta u} \ (2)$$

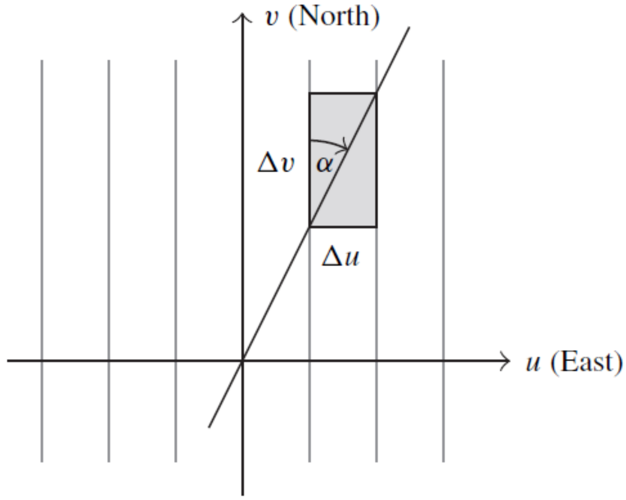
Y por la condición anterior:

$$\cot\alpha \approx \frac{\Delta v}{\Delta u} = \frac{\Delta v}{\Delta \varphi} \ (3)$$

Para que se cumpla la tercera condición, el ángulo α deberá ser el mismo en la esfera y en el mapa, para que esto se cumpla, (1) y (3) deberán ser iguales.

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta\varphi\cos\theta} = \frac{\Delta v}{\Delta\varphi} \ (4)$$

**Figura 5.19.** Cuadrícula de la proyección de Mercator.




Nota: Imagen extraída de Daners (2012, p. 202).

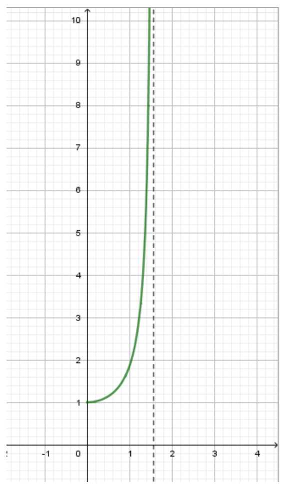
Se tiene que: $\frac{\Delta\theta}{\cos\theta} = \Delta\theta sec\theta \approx \Delta v \ (5)$

$\Delta\theta$ es la diferencia entre los ángulos de latitud de dos paralelos y el ángulo que se está utilizando para calcular su secante es el $\theta$ del paralelo que se encuentra más cerca del ecuador, por lo que esto nos está dando una aproximación del Δ*v*. Si $\Delta\theta$ es muy grande, entonces esta aproximación será menos precisa. Ahora, si se hace que ese $\Delta\theta$ sea más pequeño, entonces mejorará la aproximación y nos acercaremos a comprender qué está sucediendo en el paralelo de latitud $\theta$.

$$\text{Si } \Delta\theta \to 0, \ \frac{dv}{d\theta} = sec\theta \ \ (6)$$

Se plantea entonces el estiramiento vertical que sufre el mapa de Mercator representado en una expresión con diferenciales. Resulta interesante la pregunta sobre cómo cambia *v* cuando varía θ, y cómo se significa esa relación en el mapa. Aparece la derivada significada como la variación de la función v(θ) que determina el estiramiento sur-norte en el mapa. Permite comprender cómo se da la distorsión en esta proyección, y significar esa variación en el mapa. El cambio de la distancia $\nu$ en el mapa entonces, dependerá del ángulo θ, y de su secante. Se muestra en la figura 5.20 el gráfico de la función secante de θ.

**Figura 5.20.** Gráfica de la función secθ.

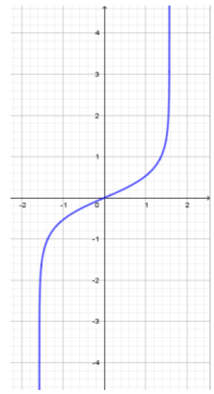



Nos interesa el comportamiento de la función en el intervalo $[0;\frac{\pi}{2}]$ ya que son los valores que podrá tomar el ángulo θ, en el ecuador θ=0, y en el polo $\theta = \frac{\pi}{2}$. Cuando θ→ $\frac{\pi}{2}$, secθ→ ∞, por lo que las distancias $\Delta\nu$ crecerán más rápido a medida que aumenta el ángulo θ. Esto da cuenta de por qué en el mapa de Mercator las áreas están tan distorsionadas al alejarnos del ecuador, haciendo que cerca de los polos aparezcan exageradamente grandes, y continuadas al infinito.

Al integrar la expresión (6) se obtiene la función $v(\theta)$ cuyo gráfico se muestra en la figura 5.21:

$$v(\theta) = \log(tan\theta + sec\theta) + C$$

**Figura 5.21.** Gráfica de la función v(θ)=log(tanθ+secθ).



## 5.4. Historia de la Matemática y Cartografía

En este apartado intentamos identificar el papel que se le da a la cartografía y a las proyecciones de mapas a lo largo de la historia desde la matemática, como disciplina reconocida en la que se utilizan conocimientos matemáticos, identificar cuál es la relevancia que se le da a la conexión entre estas disciplinas. Se seleccionaron los libros más reconocidos sobre la historia de la matemática y se buscaron en ellos secciones que traten sobre cartografía, proyecciones de mapas, específicamente la proyección de Mercator, y el trabajo de Wright.

Boyer (1986) en el capítulo XV "El renacimiento" (pp. 347-384) de su libro *"Historia de la Matemática"* (vol. 2) destina el apartado 21 a la cartografía. En este se destaca la importancia de las transformaciones geométricas para satisfacer la necesidad de crear mejores mapas debido a que las exploraciones geográficas de la época así lo requerían. Se resalta al geógrafo Mercator, quien confronta los mapas utilizados hasta el momento, que seguían la tradición de Ptolomeo, rectangulares con una cuadrícula equidistante, formada por paralelos y meridianos, cuya distorsión era causa de permanentes errores por parte de los navegantes. Con el objetivo de "poner un poco más de acuerdo la teoría y la práctica" (p. 381) es que crea su proyección que ha sido fundamental para la cartografía. Se menciona una explicación de la proyección de Mercator como el pasaje de la esfera a un cilindro indefinidamente largo, generando grandes distorsiones lejos del ecuador. Se menciona a Wright quien "desarrolló las bases teóricas de la proyección de Mercator" (p. 381) determinando la separación entre el ecuador y los paralelos.

Struik (1998) en la edición en español de su libro "*Historia concisa de las matemáticas*" considera oportuno hacer un agregado destacando especialmente algún episodio de la historia de la matemática en Portugal y España. En este sentido refiere al trabajo de Pedro Nunes, y sus aportes en cuanto a la navegación, principalmente a la diferencia entre la navegación por curvas loxodrómicas y círculos máximos en la esfera, destacando que fueron los viajes transatlánticos los que despertaron la creación de su obra. Resulta lógico vincularlo con Gerard Mercator, ya que es quien realiza el mapa que representa estas curvas de rumbo constante como líneas rectas. El autor reconoce que los logros de estas dos naciones estuvieron de la mano del desarrollo de la navegación, por lo que destaca trabajos como los de Pedro de Medina y Martín Cortés, y reconoce la influencia del trabajo de Nunes sobre las curvas loxodrómicas en Inglaterra, Flandes y Holanda. Retoma también otra faceta del trabajo de Nunes, haciendo referencia a que en 1567 publica un libro de álgebra.

Suzuki (2009) en su libro "*Mathematics in the historical context*" pretende mostrar "cómo las matemáticas, la sociedad y los matemáticos interactuaban entre sí" (p. vii). En el capítulo dedicado a la Europa Moderna, hace un recorrido por Francia, Países Bajos y Gran Bretaña. En este último destaca la relevancia del reinado de Isabel en el desarrollo de la navegación y la expansión.

> El reinado de Isabel también fue testigo de la expansión británica en el Nuevo Mundo. Los primeros exploradores y explotadores de las Américas fueron españoles, portugueses e italianos; el interés inglés fue mínimo hasta que John Hawkins llevó un cargamento de esclavos de África Occidental a las Indias Occidentales españolas en 1563; esto resultó tan rentable que en su segundo viaje (1564-1565) tuvo muchos partidarios, incluida la propia reina. (Suzuki, 2009, p. 215)

España no estaba dispuesta a compartir el comercio de esclavos por lo redituable que era, por lo que comienzan a atacar flotas inglesas. Es a partir de estos ataques que se menciona el nombre de Drake, como navegante que estaba decidido a tomar venganza de algunos ataques, "y en 1572, Drake comenzó a asaltar el comercio español con el consentimiento de la Reina" (p. 215). Estas aventuras en la navegación hacen que Richard Hakluyt, historiador, traductor y escritor inglés de la época, se dedique a dar conferencias sobre estas temáticas. Es en referencia a este hecho que Suzuki (2009) menciona a Mercator, ya que Hakluyt se vuelve conocedor de su trabajo.

> A pesar de las depredaciones de Drake en el comercio español, el mayor peligro para los barcos españoles del tesoro que transportaban plata del Nuevo Mundo era, con mucho, la mala navegación, y no era raro que toda una flota encallara porque el navegante no sabía dónde estaba. El problema era crear un mapa plano que representara con precisión la superficie curva de la Tierra. (Suzuki, 2009, p. 216)

Dicho esto, se destaca la contribución en este sentido de Mercator, ya que su mapa dio solución a los problemas que enfrentaban los navegantes, y que eran de gran interés en ese contexto europeo.

## 5.5. Acerca de la Obra original de Wright "*Certaine Errors in Navigation*" (1599)

### 5.5.1. Wright y el contexto de la navegación en Inglaterra

Wright nació en Garveston, un pueblo de Norfolk, Inglaterra en 1561. Se desconoce sobre su educación temprana. En 1576 fue enviado a Cambridge y se matriculó en el *Gonville and Caius College*, se graduó de licenciatura en artes en 1581 y obtuvo una maestría en 1584. En 1597 recibe una beca para investigación y se dedicó al trabajo en problemas de cosmografía y se destacó como matemático. (Parsons y Morris, 1939, p. 61 y Monmonier, 2004, p. 63)

Con el fin de contextualizar la obra de Wright (1599), nos interesará describir de manera general la importancia de la navegación en su época y la forma en que era abordada por las personas que se dedicaban a la navegación, así como los aportes que se le hacían a esta desde la disciplina matemática, y la relación de las personas vinculadas al poder en la motivación al desarrollo de esta actividad.

Cotter (1983) expone los principales trabajos sobre la navegación en Inglaterra, partiendo del primero, el *"Arte de la Navegación"* de Eden en 1561, que pretendía ser un material para los navegantes, a pesar de que su estilo de escritura era académico.

> Proporcionaba al navegante descripciones ilustradas sobre el uso y la construcción de la brújula magnética, la carta de navegación, el cuadrante marino, el astrolabio y la cruceta; proporcionaba las tablas matemáticas y astronómicas necesarias (aunque rudimentarias) para encontrar la latitud y la hora; y ofrecía un relato detallado de la navegación por punto muerto. El libro

> proporciona el conjunto de conocimientos necesarios para que un marino pueda navegar en alta mar con la mayor eficacia posible. (Cotter, 1983, p. 239)

Se vislumbra un interés por transmitir la práctica de la navegación de forma que sea útil para su aplicación. Existía una preocupación por hacer entender a nuevos marineros las técnicas y el uso de los instrumentos. Siguiendo en el repaso de los manuales de navegación, Cotter (1983) destaca la importancia del trabajo de John Davis que fue el primero en ser escrito por un marinero inglés en 1594. Davis (1595) dedica su trabajo que llamó *"The Seaman ´s Secrets"* al Lord Charles Haward, y destaca el papel importante de Inglaterra en la navegación. En él responde una serie de preguntas que serían de ayuda para quien quiera practicarla: ¿Qué es la navegación? ¿Qué instrumentos son necesarios para la ejecución de esta excelente habilidad? ¿Qué es la brújula de mar? ¿Para qué sirven los 32 puntos de la brújula?, entre muchas otras.

> Me permito presentar a su señoría este pequeño tratado de navegación, que es una breve recopilación de las prácticas que he recogido por experiencia en mis viajes, entre las que se encuentran mis tres intentos de descifrar el paso del noroeste, con el fin de encontrar un camino corto y fácil hacia los países ricos y famosos de Cathayo, China, Pegu, las islas de Molucan y Phillipina, para que de este modo, para el gran e inestimable beneficio de nuestro país, se pueda conseguir un comercio rico y abundante entre nosotros y dichas naciones en poco tiempo, y con gran seguridad en el camino. (Davis, 1595, pp. 1-2)[9]

En el contexto de este artículo (Cotter, 1983) destinado a las producciones destacadas relacionadas a la navegación en Inglaterra, se menciona el trabajo de Wright publicado en 1599, y su vínculo con John Davis a quien conoce en 1589 cuando el primero tuvo la oportunidad de formar parte de la expedición del Conde de Cumberland a las islas Azores, cuya finalidad era aprovecharse del comercio español.

Wright escribió una bitácora del viaje que agrega al final de su obra *"Certaine Errors in Navigation"* en 1599. Wright (1599) relata que la expedición contó con cuatro barcos (uno de ellos *"Victory"* de la Reina), aproximadamente con 400 hombres entre caballeros, soldados y marineros, y

[9] Esta obra es de 1595 y no están numeradas sus páginas. Se considera una numeración de acuerdo con las páginas del documento.

partió de Plymouth el 18 de junio de 1589. La observación y el conocimiento práctico lo motivaron a publicar dicha obra en 1599, en la que brindó solución a algunos problemas que enfrentaban los marineros con el uso de los instrumentos al navegar. De esta experiencia que duró entre seis y siete meses, Wright (1599) relata las peripecias que vivieron: los enfrentamientos que atravesaron principalmente con portugueses y españoles, así como los vientos que complicaban su llegada a la costa y la escasez de agua dulce que dificultó el final del viaje y conllevó a la pérdida de vidas. En cuanto a esto afirma que:

> Estas tormentas eran tan terribles, que había algunos en nuestra compañía, que confesaron que habían ido a los mares por el espacio de 20 años, y nunca habían visto algo similar, y juraron que si volvían a casa sanos y salvos, nunca más vendrían al mar. (p. 23)[10]

Cabe destacar también que Wright (1599) en la primera parte de su trabajo, la epístola y su dedicatoria refiere al Conde de Cumberland, lo que nos da elementos sobre la situación sociocultural y política de la época debido a que está dirigida a este, por haber apoyado su trabajo.

> Muy Honorable, y mi buen Señor, habiendo sido inducido por primera vez, por ocasión de que sus Señorías me emplearan en el mar, a aplicar mis estudios matemáticos al uso de la navegación. Pensé que estos primeros frutos de mis trabajos en el mar, no podrían ser más justos a nadie, que a usted. Como por cuya mano beneficiosa, han sido principalmente alimentados, para crecer tan lejos para guardar su madurez. (Wright, 1599, p. 1)[11]

También le pide su protección, ya que él fue testigo del intento de robo de su trabajo o parte de este, motivándolo a su temprana publicación. En referencia a esto, Wright (1599) menciona que se apura a terminar su trabajo y publicarlo, aunque no de la forma que el quisiera, para que no aparezca luego con el nombre de otro. Refiriéndose a él sostiene:

> Por lo tanto, habiendo suplido (como pude por el momento) las necesidades que había en ese libro, pensé que lo mejor era seguir vuestro consejo, más bien publicándolo yo mismo, para reconocer mis propios defectos, que un tiempo más tranquilo y un mayor tiempo libre (en el que

---

[10] Wright en su obra *"Certaine Errors in Navigation"* en 1599 agrega al final la bitácora del viaje, nombrada como *"The Voyage of the right Ho. George Earl of Cumberl. To the Azores"*, y numera exclusivamente esta parte del 1 al 29.

[11] La epístola y dedicatoria de (Wright, 1599) consta de tres páginas (1-3) que no están numeradas en el original.

> rara vez he tenido menos) podrían haber enmendado: entonces, o bien tenerlo desmembrado por un pecador, o bien desafiarlo sin más por algún otro hombre como propio: y así exponerlo a la vista de todos los hombres, mucho peor de lo que lo hice. Deseando, por tanto, que vuestro Lo. me garantice la fama y la seguridad de vuestra honorable protección. (Wright, 1599, pp. 2-3)

Pumfrey y Dawbarn (2004) destacan la cultura de patrocinio en Inglaterra en el período de 1570 a 1625, correspondientes a los reinados de Isabel y Jacob. Se realiza una distinción entre dos formas reconocidas de patrocinio que fungen como extremos de un espectro: fomentar un trabajo utilitario o uno ostentoso, reconociendo que en Inglaterra primaba el utilitario. Por lo que argumentan que de esta nación no se reconocen en esa época individuos de éxito ostentoso, pero sí de reputación internacional entre los que se destacan Wright, Dee y Harriot. La destreza en la navegación por parte de esta nación era de gran importancia en el reinado de Isabel ya que vivían una gran amenaza de invasión española, por lo que los mecenas[12] requerían que quienes tenían conocimientos matemáticos los utilizaran en beneficio de la navegación.

> ... la investigación realizada hasta ahora sugiere que los mecenas ingleses tenían intereses predominantemente utilitarios. Los cortesanos y políticos isabelinos y, en menor medida, los jacobinos, estaban preocupados por cuestiones de defensa y control en el país, la expansión imperial en el extranjero y la autosuficiencia y prosperidad económicas. (Pumfrey y Dawbarn, 2004, p. 149)

En este sentido, en cuanto a este aspecto de patrocinio, la segunda edición de *"Certaine Errors in Navigation"* en 1610 se lo dedica al Príncipe Enrique, quien estaba interesado en la ciencia de la navegación, y nombra a Wright en 1608-9 su tutor en matemáticas (Parsons y Morris, 1939).

### 5.5.2. Sobre "*Certaine Errors in Navigation*" (Wright, 1599)

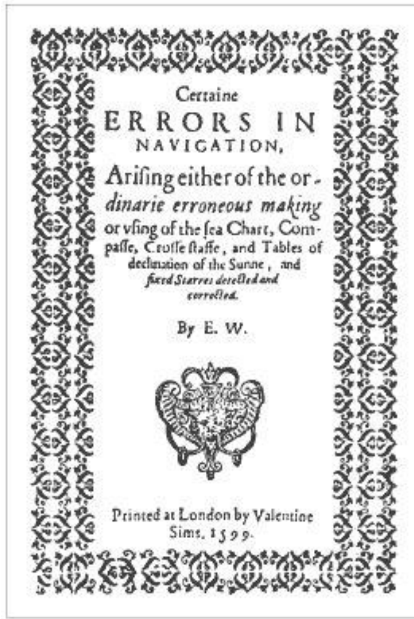
La obra de Wright (1599), cuya portada se muestra en la figura 5.22, se divide de la siguiente forma:

- La epístola – Dedicatoria.
- El prefacio para el lector.

[12] Persona que patrocina las letras o las artes. Extraída de https://dle.rae.es/mecenas

- Un resumen del tratado.

**Figura 5.22.** Portada de Wright (1599).


Certaine
ERRORS IN
NAVIGATION,
Arising either of the ordinarie erroneous making
or vsing of the sea Chart, Compasse, Crosse staffe, and Tables of
declination of the Sunne, and
fixed Starres detected and
corrected.

By E. W.

Printed at London by Valentine
Sims. 1599.

Nota: Imagen extraída de Wright (1599).

El tratado consta de cuatro partes: *Hidrográfica*, *Magnética*, *Geométrica* y *Astronómica*. Se detalla en la tabla 5.1 los contenidos de la primera que será la que analizaremos en esta investigación ya que en esta Wright (1599) expone los errores que generaba la mala interpretación del mapa que se utilizaba para la navegación. Además, se propone corregirlos, confecciona una tabla que determina la separación de los paralelos para la construcción de un mapa cuyo fin era hacer más eficiente la navegación con los instrumentos que se tenían en ese momento, el mapa que en 1569 presenta Mercator.

Se realizará una descripción y análisis del tratado, tomando en cuenta los aspectos contextuales que son de nuestro interés, las intenciones del autor, y el análisis del uso de objetos geométricos. Se exponen ejemplos de este uso en las explicaciones de Wright (1599) a lo largo de esta primera parte del tratado, *Hidrográfica*. Con nuestro objetivo en mente, analizamos particularmente: *¿Qué objetos geométricos usa en sus explicaciones y argumentaciones? ¿Cómo los usa? ¿Para qué los usa? ¿Cómo aparecen en la estructura de su razonamiento? ¿Qué relación tienen con la navegación?*

**Tabla 5.1.** *Contenidos de la primera parte de Wright (1599): Hidrográfica.*

| HIDROGRÁFICA | |
|---|---|
| Detección de errores en la carta marítima | **Capítulo 1**. Fallas en la Carta del Mar común, con Rumbos expresados por líneas rectas, y grados de Latitud, cada vez igual. |
| Corrección de errores en la carta marítima | **Capítulo 2.** Cómo se pueden evitar los errores anteriores.<br>**Capítulo 3**. El uso de la tabla anterior.<br>**Capítulo 4.** Una Demostración muy clara y sensata de la concordancia de este Planisferio náutico, con el Globo, y de la discordancia de la carta de mar común a ambos.<br>**Capítulo 5.** El uso de este planisferio. |

Nota: Se traducen de la obra original los nombres de los capítulos.
Fuente: Elaboración propia.

### **Episodio 1 (E1)**. Las dos epistemologías: marineros y geómetras

Según lo que declara Wright (1599), en el "*Prefacio al lector*"[13], le preocupaban las críticas a su trabajo por parte de quienes estaban expuestos en el mar: los marineros. Hace alusión en esta parte del documento, a los que pueden llegar a cuestionar de su trabajo, y para apoyar sus fundamentos refiere al trabajo de Pedro Nunes quien también expuso errores en la navegación. Wright reconoce esos errores y se propone solucionarlos a partir de sus conocimientos sobre Geometría.

> No sé, pues, si alguien se dedica a una iniciativa tan buena, para darle el mejor impulso, por qué ha de correr el riesgo de ser reprendido por su trabajo. Sin embargo, es posible que algunos me culpen de ser un buscador de faltas demasiado ocupado. Porque cuando vean sus Cartas y otros instrumentos controlados que durante tanto tiempo han ido por la corriente, algunos de ellos tal vez apenas lo soporten con paciencia. Pero puede que se apacigüen, si no por el bien que se ha producido, al menos hacia mí, porque los errores que señalo en la Carta han sido señalados hasta ahora por otros, especialmente por Pedro Nunes, de quien se ha traducido casi palabra por palabra la mayor parte del primer capítulo del Tratado siguiente; yo, por mi parte, desearía más

[13] El prefacio al lector de (Wright, 1599) que se cita en esta sección se numera de 1-14, ya que no está numerado en la obra original.

bien que las fallas sean encontradas por otros que por mí mismo, y trabajo mucho más, ya que es mucho mejor, y mucho más necesario y provechoso ser un reparador de fallas, que un buscador de fallas. (Wright, 1599, p. 7)[14]

Parte de la crítica podría tener origen en que sus explicaciones las realiza con base matemática, específicamente geométrica y podrían resultar complejas para los marineros. Confrontándose así dos posturas entre algunos de estos que se mostraban cerrados a este tipo de ayuda ya que sus conocimientos se fundamentaban en su propia experiencia, y otros que entendían necesario mejorar sus técnicas de navegación prestando atención a quienes podían dar explicaciones con sustento matemático, por ejemplo, del funcionamiento del mapa. Con respecto a esto, Wright (1599) menciona:

> O de lo contrario, se me puede criticar mucho más, porque al tratar de enmendar, algunos pensarán que me hago cargo de demasiado. Porque algunos dirán, y quizás de aquellos que han estado empleados en asuntos de mar toda su vida, que todo esto lo hacemos más de lo necesario. Porque ellos, sin tanto ruido, han desempeñado siempre su cargo con buen éxito, y son ya demasiado viejos para dar oídos a estas innovaciones. Pero otros hombres de mar, que reconocen la necesidad de esto se avergüenzan por la aventura de recibir (por así decirlo) o la corrección de las instituciones, o la dirección de la tierra y por lo tanto se adhieren a no condenar a las Universidades y todo en comparación de sus múltiples experimentos. (p. 8)

Cuestionando a quienes se cierran a la ayuda, apoya su trabajo en dos anteriores: Mercator y Hondius. Destacando cómo el primero con su mapa ya corrigió algunos errores, siendo esta la primera referencia a su trabajo.

> ¿Por qué, pues, cuando hay peligro de extravío, han de negar la ayuda a cualquiera que esté dispuesto a mostrar un camino mejor? Pero para llegar a los que pueden objetar, sólo hay que actuar de acuerdo, no haciendo más de lo que ya hizo Gerardus Mercator, en su mapa universal hace muchos años, y publicando algo ya publicado por Jodocus Hondius en su mapa mayor del mundo y de Europa, ahora de forma reciente. Debo responder que, en efecto, con motivo de ese

[14] Las citas son traducciones propias de (Wright, 1599) y (Wright, 1657), se encuentran en su idioma original en el Anexo 1.

> mapa de Mercator, pensé por primera vez en corregir tantos y tan groseros errores y absurdos, como los que a continuación se muestran en la carta marina, aumentando las distancias de los paralelos, desde el equinoccio hacia los polos, de tal manera que en cada punto de latitud de la carta, una parte del meridiano pudiera tener la misma proporción con la parte similar del paralelo, que tiene en el globo. (Wright, 1599, p. 9)

Wright (1599) reconoce que podría haber resistencia hacia su trabajo porque no es un navegante quien lo escribe, sino un matemático. Pero identifica y defiende que los conocimientos que posee en la disciplina matemática son útiles y necesarios para mejorar las técnicas de la navegación, por ejemplo, reconocer cómo la forma esférica de la Tierra afecta la navegación.

> Ahora bien, si alguien piensa que está más allá de la habilidad de un hombre de tierra, encontrar defectos en asuntos que pertenecen al arte y la profesión del hombre de mar, debe saber, si aún no ha aprendido, que uno que no está más que razonablemente familiarizado con los conceptos geométricos, puede tan bien, si no mejor, que la mayoría de los hombres de mar, conocer la naturaleza y las propiedades de la forma esférica de la tierra y el mar, con todas las consecuencias y dependencias de la misma. (...) Así, con toda probabilidad, será el caso de este pobre Tratado mío, que si hubiera salido a la vista del público, desde el seno (como una vez fue) de un maestro en el mar, de gran excelencia reputada, sin duda habría encontrado entonces el favor, que como ahora le faltará: todos los vientos entonces lo habrían soplado dulcemente en el más agradable puerto de todos los hombres (al menos de todos los hombres de mar) de entretenimiento favorable. (Wright, 1599, p. 11)

En este sentido, identificamos una intención de Wright de acercar la disciplina matemática a la navegación, para mejorar sus técnicas. Existe a lo largo de su discurso (se verá más adelante), una constante referencia a los geómetras y el rigor de su trabajo, conviviendo con la intención de que este pueda ser aplicado por quienes navegan. Se puede inferir de (Wright, 1599) que viven en el autor dos epistemologías: la de los marineros y la de los matemáticos. En su trabajo pone a la matemática al servicio de la navegación, y pretende que su trabajo sea aceptado por quienes navegan, pero a la vez toma recaudo desde el punto de vista del rigor matemático para satisfacer la opinión de quienes nombra como "los geómetras". No podemos olvidarnos que la experiencia de formar parte de una expedición fue lo que le permite observar sus prácticas, que lo motiva a escribir este tratado.

### **Episodio 2 (E2)**. Sobre lo que Wright resume del tratado.

Wright (1599) en el apartado "*Un resumen del tratado*"[15] realiza una breve descripción de los cuatro puntos que se abordan en este tratado: *Hidrográfica*, *Magnética*, *Geométrica* y *Astronómica*.

En cuanto a la primera parte del tratado "*Hidrográfica*", que es la que analizaremos en esta investigación, Wright (1599) plantea que, se exponen los errores que ocurren con el uso de la carta marina de ese momento, y muestra geométricamente cómo se pueden arreglar. Con esa intención propone una tabla que permitirá construir un mapa, cuya finalidad era facilitar las técnicas de navegación, y contrarrestar dichos errores.

A la tabla mencionada anteriormente, se le suma una Tabla de Rumbos. Nuevamente aparece una asociación al trabajo de Pedro Nunes, y a la tabla de rumbos que expone. Wright (1599) lo retoma, asumiendo que mejora las técnicas dándole precisión y facilitando el trazado.

> A la que se adjunta, como surgida de ella, la Tabla de Rumbos que indica por qué puntos de longitud y latitud debe trazarse cada Rumbo desde el equinoccio, hasta llegar a un minuto del polo: con la ayuda de esta Tabla, los Rumbos pueden describirse en cualquier carta, mapa o globo terráqueo, mucho más verdaderamente que por esos medios mecánicos publicados hace tiempo por Petrus Nonius, o practicados últimamente por algunos fabricantes de globos terráqueos en Inglaterra. (Wright, 1599, p. 1)

En cuanto al final de esta primera parte del tratado (Capítulos 4 y 5), menciona que se muestra la correspondencia entre el globo y los dos mapas en cuestión, el que Wright (1599) reconocía que se utilizaba para navegar en ese momento que generaba conflictos a quienes navegaban, y el que propone construir él a partir de la tabla. Además, propone un método aritmético por el cual hallar la distancia

[15] El resumen del tratado de (Wright, 1599) que se cita en esta sección se numerará de 1-3, ya que no está numerado en la obra original.

entre dos puntos conociendo su latitud y longitud, ya sea por una línea de rumbo o un círculo máximo, basándose en fundamentos geométricos.

La segunda parte del tratado la llama "*Magnética*", porque refiere a la variación magnética de la brújula, y a como hallarla en el mar, conociendo la latitud, mediante la brújula, la observación de la altura del sol y la ayuda de un Globo o Astrolabio. Todo esto, con base en una tabla que construyó mediante observaciones que realizó en el viaje a las Islas Azores realizado en 1589, y como no es práctico utilizar estos instrumentos en el mar, propone una forma de hacerlo matemáticamente.

La tercera parte la llama "*Geométrica*", y alude a cómo evitar los errores en el uso de un instrumento de navegación: "Cross-Staff", que en el mar se utilizaba para observar las altitudes del sol o de las estrellas, que les permitía conocer con mayor seguridad la latitud.

En cuanto a la cuarta y última parte del tratado, "*Astronómica*", corrige los errores que hay en las tablas de declinación del sol y de las estrellas fijas, aludiendo a observaciones que realizó. Aparece nuevamente su preocupación por el entendimiento de los marineros y que tal vez, la matemática utilizada en esta parte exceda su comprensión.

Se apoya en trabajos anteriores a los que hace referencia (Nunes, Mercator y Hondius). Identificamos una intencionalidad por parte de Wright (1599) de querer transmitir esos conocimientos para quienes los van a usar de forma práctica, quienes navegan, y de su preocupación por lograr ese cometido, que su trabajo sea comprendido y utilizado. Este aspecto didáctico de la obra de Wright, intentaremos rescatarlo a lo largo del análisis de su trabajo.

> Ahora bien, si alguien piensa que la mayor parte de esta cuarta parte que va antes de este regimiento, podría haberse omitido, por ser impertinente para el uso de los marineros, y por exceder su capacidad: Respondo que no era mi propósito, ni podía en todos los lugares, aplicarme a la mayor parte de la capacidad de los marineros: conociendo a muchos que no se contentarían con este regimiento solamente, sino que deseaban más conocer la raíz de donde crecía este producto: cuyo deseo también estaba dispuesto a satisfacer como pudiera por el momento, habiendo tenido rara vez una temporada más inconveniente para tal propósito. (Wright, 1599, p. 3)

## **Episodio 3 (E3).** La mala interpretación del mapa

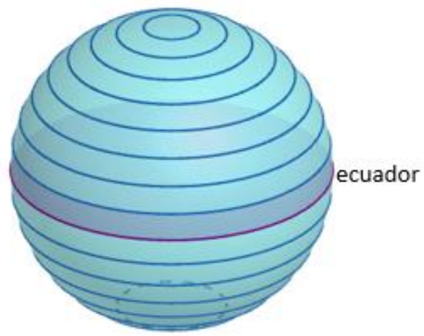
Wright (1599) en el primer capítulo al que nombra "*Fallas en la Carta del Mar común, con Rumbos expresados por líneas rectas, y grados de latitud, cada vez igual*" explica los errores que surgen cuando se utiliza la carta marina común de la época sin considerar la proyección que hay detrás. Para esto, proporciona ejemplos, explicándolos a partir de conocimientos desde la experiencia en la navegación, y la utilización de la Geometría. En este sentido, comienza el capítulo con la siguiente afirmación: "Como la Carta del Mar es uno de los Instrumentos especiales que tienen los Marineros para su dirección en la navegación, no hay ningún otro lugar en el que haya errores tan grandes y peligrosos" (p. 1), que da cuenta de lo importante que considera atender al mapa y su proyección.

Este peligro se debe a cómo el mapa muestra los lugares en relación con el globo. Para explicar la transformación, utiliza la proporción entre las medidas de paralelos y meridianos para hacer referencia a lo que varía del pasaje de la esfera al plano, cómo cambia esa proporción con respecto al primer escenario. En la esfera, la medida de los paralelos cambia según el ángulo de latitud, siendo menor a mayor ángulo, como se muestra en la figura 5.23. En cuanto a la carta marina afirma:

> Porque, en primer lugar, cualesquiera que sean los lugares descritos en ella, la longitud de estos (de Este a Oeste) tiene una mayor proporción con respecto a la amplitud (desde el Norte o el Sur) de lo que en realidad debería tener (a menos que sea en el equinoccio[16]). Y este error aumenta tanto más cuanto más distantes están esos lugares del equinoccio: así como la proporción del Meridiano al Paralelo, aumenta tanto más cuanto más cerca se está de cualquiera de los dos Polos. (Wright, 1599, p. 1)

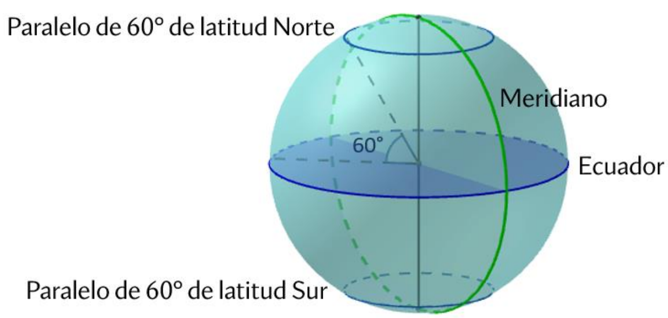
[16] Wright refiere al ecuador de esta forma a lo largo de su trabajo.

**Figura 5.23.** Esfera con el ecuador y los paralelos de latitud separados por 10° representados.




En el mapa, todos los meridianos guardan su proporción con el globo, mientras que los paralelos, únicamente el ecuador, los demás se estiran hasta medir lo mismo que este. Wright (1599) proporciona un ejemplo concreto para mostrar esa proporción: el paralelo de 60° de latitud (figura 5.24). En el mapa ese paralelo aparece estirado al doble de su medida. Por lo tanto, afirma que: "la proporción entre la longitud y la amplitud es dos veces mayor de lo que debería ser." (p. 2)

**Figura 5.24.** Esfera con paralelos de 60° de latitud Norte y Sur, ecuador y un meridiano.




Para reafirmar esto, proporciona un ejemplo concreto de un lugar conocido, Frisia que se ubica en ese paralelo.

> Por ejemplo: en la carta marina común, la proporción de la longitud de Frisia con respecto a su amplitud es dos veces mayor que en el globo terráqueo (que muestra la verdadera proporción de la longitud con respecto a la amplitud) porque el meridiano es doble con respecto al paralelo de esa isla. (Wright, 1599, p. 2)

Además, toma como ejemplo Groenlandia y Grocland, una isla que se creía ubicada al este de Groenlandia. En este caso esa proporción es cuatro veces mayor.

> En las islas de Groenlandia y Grocland, la proporción entre la longitud y la anchura es cuatro veces mayor en la carta marina común que en el globo terráqueo, porque el meridiano es cuatro veces mayor que el paralelo de esos lugares. (Wright, 1599, p. 2)

En esta primera parte del capítulo 1, Wright (1599) comienza a explicar la transformación que da lugar a la construcción del mapa y el problema que genera la mala interpretación de este. Expone ejemplos concretos, y su preocupación por el entendimiento de sus afirmaciones, confirman su intencionalidad didáctica. Utiliza como referencia la proporción entre paralelos y meridianos para exponer cómo afecta la proyección la medida de los primeros, y la compara en ambos escenarios. En los ejemplos esa proporción cambia al doble y al cuádruple, mostrando que ese cambio dependerá del paralelo de latitud. Además, en su discurso refiere a que ese error aumenta cuanto más cerca se esté del polo, por lo que también reafirma esta idea de que el cambio depende de la posición en la que se esté (latitud).

### **Episodio 4 (E4).** Cálculo de la diferencia de longitudes

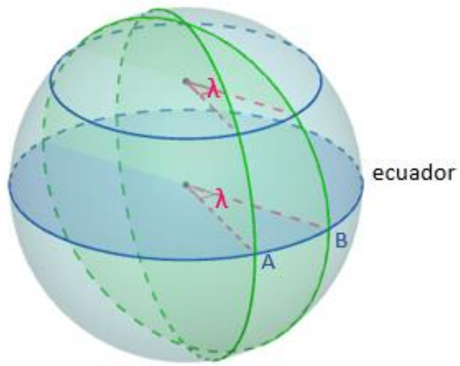
Con base en lo anterior, continúa fortaleciendo la idea de cómo la proyección estira los paralelos, y a la vez, cómo no considerar esto hace que se incurra en errores por parte de quien lo usa. Presenta el error cometido en el cálculo de la diferencia de longitudes entre dos puntos en el mapa, para mostrar cómo afecta no tener en cuenta su construcción al utilizarlo.

La diferencia de longitud entre dos puntos es el ángulo $\lambda$ que se forma entre los planos que contienen los meridianos en los que se ubican, como se muestra en la Figura 5.25. Si dos lugares se encuentran en un mismo paralelo, como es el caso de A y B, ese ángulo está estrechamente relacionado con el arco de circunferencia (de paralelo), y es esta una trayectoria que importaba para navegar. En el mapa equidistante, esos arcos de circunferencia que en la esfera son de diferente medida, se estiran todos para tener la misma medida que el arco el ecuador comprendido entre esos meridianos. Sobre esto, Wright (1599) sostiene que:

> El modo de averiguar la diferencia de longitud, por la Carta marítima común, es verdadero sólo en el equinoccio, y cerca del mismo puede usarse sin error sensible: porque solo allí el meridiano y el paralelo son iguales. Pero a este lado o más allá del equinoccio se comete un error

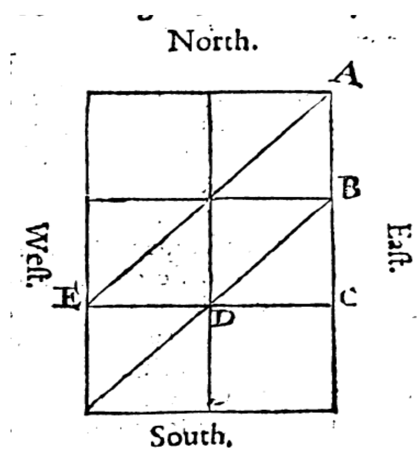
proporcional a la diferencia del meridiano y del paralelo, por lo que la diferencia de longitud hallada por la carta tiene la misma proporción con la verdadera diferencia de longitud que el paralelo tiene con el meridiano. (p. 2)

**Figura 4.25.** Diferencia de longitud λ.




Wright (1599) sintetiza esto en un ejemplo, nuevamente en el paralelo de 60° de latitud, en el que se visualiza el efecto del estiramiento de los paralelos en el mapa y su relación con el cálculo de la diferencia de longitud. Lo acompaña con la imagen que se muestra en la figura 5.26.

**Figura 5.26.** Ejemplo de paralelo 60°.




Nota: Imagen extraída de Wright (1599, p. 3).

Plantea que para ir del punto D al B se hace desde el suroeste al noreste, y que difieren de latitud tanto como de longitud, debido a que son rumbos de 45° que en el mapa equidistante muestra misma variación vertical que horizontal. Por esto, BC y DC en la figura 5.26 están representando ambos 1° de latitud y longitud respectivamente. Al comparar la medida del paralelo y el meridiano en la esfera, el autor afirma que la primera es la mitad que la segunda. Por lo que, un grado de meridiano abarca un arco de circunferencia que es el doble en medida del arco de circunferencia que abarca un grado de paralelo.

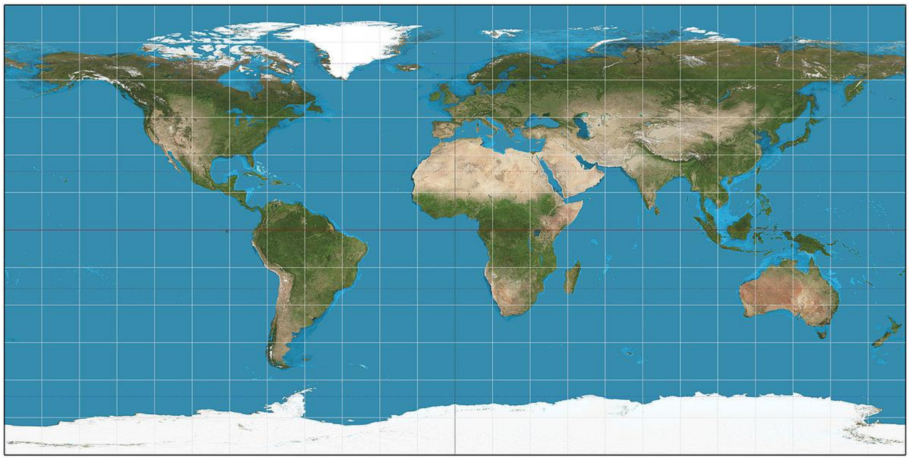
En el mapa aparecen representados ambos con la misma medida, por lo que el paralelo de 60° de latitud se estiró al doble de su medida en el globo. Como D difiere un grado de latitud de B, éste deberá ser colocado entonces dos veces más lejos de C, en A. Lo que se estira el paralelo de forma horizontal se debe estirar el meridiano en el sentido vertical, separándolo dos unidades. Por lo que AC representa un grado de meridiano.

> Como por ejemplo: en el paralelo de 60 grados en la Carta marina común (en la que los grados de los meridianos, y los paralelos son iguales) admitir BD ser dos lugares que llevan cada uno de otros suroeste y noreste que difieren en la latitud tanto como en el arco del meridiano BC, que por ejemplo vamos a suponer que es en un grado, por lo tanto por las cartas ordinarias la diferencia de longitud CD, será igualmente un grado. Pero sin embargo, en verdad, porque el meridiano es doble al paralelo, y en consecuencia, un grado del meridiano doble a un grado del paralelo, por lo tanto B difiriendo un grado en latitud de D debe ser colocado dos veces tan lejos de C, es decir en A, para que A B C pueda ser todo contado para un grado del meridiano, y así ser igual a dos grados del paralelo, de lo que debería seguirse que E C debería ser la diferencia de longitud, es decir, dos grados, como la verdad en el globo, mientras que la Carta Marina común mostraba que la diferencia de longitud era sólo la mitad. (Wright, 1599, p. 3)

Si bien Wright (1599) toma de ejemplo el paralelo de 60° de latitud, aclara que esto varía según esta y que más cerca del polo, será mayor la proporción, por lo que el error aumentará. “Y, sin embargo, si te acercas a los polos, con su carta te equivocarás bastante más, ya que la proporción del meridiano con respecto al paralelo aumenta cada vez más” (p. 3).

Con este ejemplo en el paralelo de 60° de latitud, Wright (1599) explica la distorsión del mapa. Esta estira únicamente de forma horizontal, por lo que hay relaciones en las posiciones de los lugares que no se muestran de igual forma que en la esfera, provocando errores. Sugiriendo que la forma de corregirlo requerirá de un estiramiento vertical.

**Figura 5.27.** Mapa equidistante.



Una vez explicado esto, retoma un ejemplo del trabajo de Pedro Nunes (1537), que le ayuda a argumentar aún más su punto, a partir de conocimientos que se tienen desde la experiencia: el error que se comete al calcular la diferencia de longitud entre dos lugares en ese mapa usual. Se explica de forma descriptiva el ejemplo que propone Wright, y se acompañan de imágenes que no aparecen en el documento original, así como también de algunos cálculos matemáticos que este no realiza, pero que ayudarán al análisis y el entendimiento.

Wright (1599) explica dicho cálculo para dos lugares que se encuentran ambos aproximadamente en el paralelo 39° Norte de latitud: Isla Terceira y Lisboa. Toma otro punto de referencia en las trayectorias: Isla Madeira. Sus ubicaciones actuales se muestran en la figura 5.28.

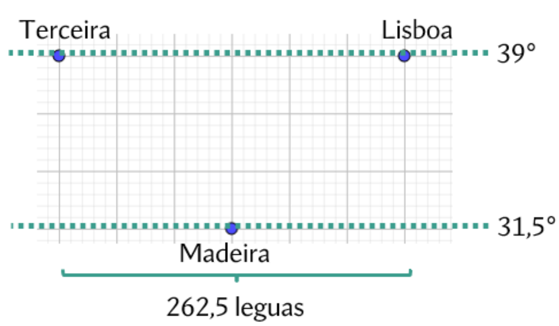
Anteriormente definimos la diferencia de longitud entre dos puntos como el ángulo que forman los planos que contienen los meridianos en los que estos se ubiquen. En este ejemplo, ese ángulo está estrechamente relacionado con el arco de circunferencia (de paralelo), ya que es la trayectoria que importaba para navegar. Hacerlo en el mismo paralelo con la brújula, asegura el intersecar en ángulo recto a los meridianos (que indican la dirección Norte-Sur). En el mapa equidistante, esos arcos de circunferencia (paralelos) que en la esfera son de diferente medida, aparecen representados iguales.

Figura 5.28. Ubicación actual de Isla Terceira, Isla Madeira y Lisboa.


Nota: Imagen extraída de Google Maps.

Basando sus argumentos en la experiencia de navegación, Wright (1599) afirma que es sabido que el recorrido de Lisboa a Terceira es de 262,5 leguas y además que cada grado de círculo máximo equivale a 17,5 leguas. Las latitudes de Isla Terceira y Lisboa son ambas aproximadamente de 39° Norte, y además Isla Madeira tiene latitud 31,5° Norte, como se muestra en la figura 5.29. Conoce también, los rumbos a seguir de Lisboa a Madeira (suroeste) y de Madeira a Terceira (noroeste), ambos formando un ángulo de 45° con los meridianos. Toda esta es información de partida conocida por la experiencia de navegación.

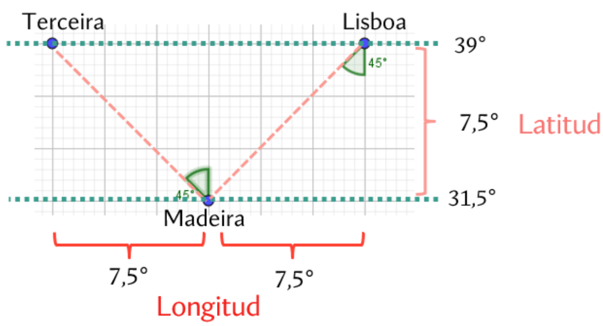
Figura 5.29. Representación de la ubicación en el mapa equidistante de Isla Terceira, Isla Madeira y Lisboa.




Partiendo de esto y considerando el mapa equidistante se obtiene que:

El ángulo de 45° en el mapa indica que varía lo mismo de latitud que de longitud, por lo que si varía 7,5° de latitud entre Lisboa y Madeira verticalmente, igual lo hará en longitud de forma horizontal. De manera análoga si lo hacemos de Madeira a Terceira, por lo que el mapa arroja una diferencia de longitud de 15°, la suma de las dos de 7,5° como se muestra en la Figura 5.30.

**Figura 5.30.** Diferencias de longitud y latitud mostradas por el mapa equidistante.




Una vez encontrada esa diferencia de longitud en el mapa, Wright (1599) haciendo referencia a la relación entre ese ángulo con la medida del arco de circunferencia en el paralelo afirma que:

> Pero en el paralelo que pasa por el grado 39 de latitud, en el que se encuentran (casi) Lisboa y la Terceira, hay más grados en el mismo espacio, según la proporción en que el meridiano es mayor que dicho paralelo. Por lo tanto, la verdadera diferencia de longitud entre Lisboa y Terceira, es decir, el arco del paralelo o Equinoccio contenido entre los meridianos de esos lugares será así averiguada. (pp. 4-5)

Wright (1599), utilizando la relación entre los elementos del círculo (arco de circunferencia, radio y ángulo), expone la forma de calcular la diferencia de longitud entre esos dos puntos en la esfera, lo que llama "la verdadera diferencia de longitud".

> Es una regla en Geometría, que los diámetros y perímetros, y consecuentemente los semidiámetros, y arcos semejantes de los círculos tienen la misma proporción. También es manifiesto que el seno del complemento de la distancia de cualquier paralelo desde el Equinoccio es el semidiámetro del mismo paralelo. (Wright, 1599, p. 5)

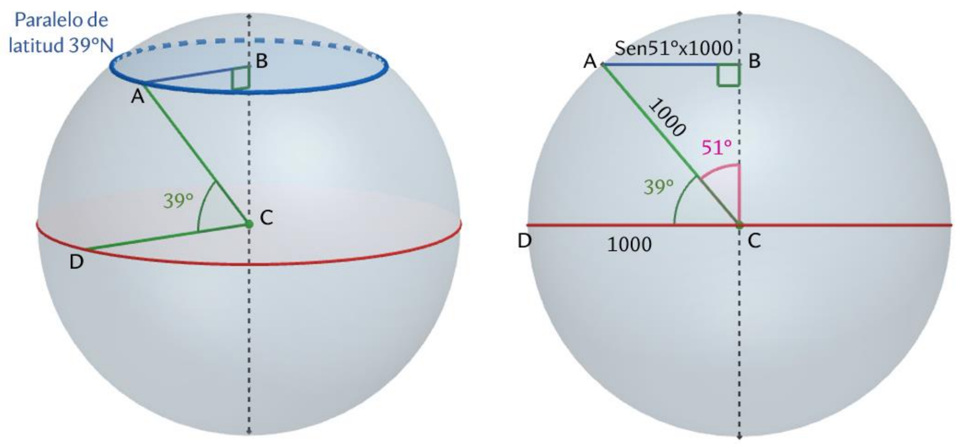
Considera la esfera de radio 1000, el paralelo de 39° Norte de latitud es una circunferencia cuyo radio AB lo podemos calcular a partir del triángulo rectángulo ABC que se muestra en la figura 5.31 como:

AB=sen51°x1000=777,

que si quisiéramos relacionarlo directamente con el ángulo de latitud será:

AB=cos39°x1000=777.

**Figura 5.31.** Cálculo del radio de la circunferencia que representa el paralelo de latitud 39°.




Haciendo uso de la fórmula que relaciona el arco de una circunferencia, el ángulo comprendido y el radio, conociendo por la experiencia la medida del arco (262,5 leguas), y el radio calculado (777),

$$777.\alpha = 262{,}5$$

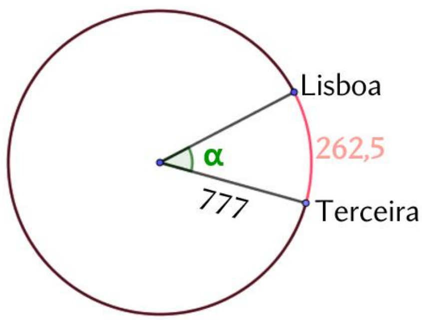
Obtiene la diferencia de longitud, representada por el ángulo α en la figura 5.32:

$$\alpha = 0{,}378... \approx 19°18´$$

Llegando así a una contradicción con el cálculo a partir del mapa que había dado como resultado una diferencia de longitud de 15°. Los objetos geométricos aquí aparecen todos significados con un elemento del contexto, en un ejemplo de la realidad, y su funcionalidad en la argumentación resaltan esa contradicción.

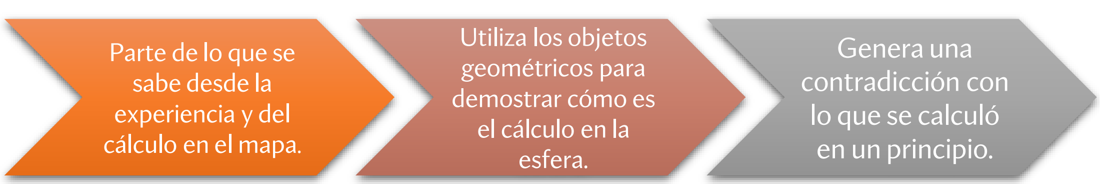
Ahora bien, la distancia del paralelo de Lisboa y Terceira del Equinoccio es de unos 39 grados, cuyo complemento es de 51 grados: cuyo seno es de 777, que es el semidiámetro del citado paralelo, en cuyas partes el seno entero contenía 1000, que es el semidiámetro del meridiano. Por tanto, por la regla de la proporción invertida, si 262 leguas españolas hacen 15 grados en el meridiano, cuyo semidiámetro es de 1000 partes, entonces en el paralelo cuyo semidiámetro es de 777, de las mismas partes, harán 19 grados y 237/777 partes de un grado, es decir, 18 min. y poco más: lo cual (si es cierto que el rumbo de Lisboa a Madeira es suroeste, y de Madeira es 31 grados 30 min., y la latitud de Lisboa y Terceira 39 grados) será la diferencia de longitud entre Lisboa y Terceira. (Wright, 1599, p. 5)

**Figura 5.32.** Diferencia de longitud en la esfera entre Isla Terceira y Lisboa en el paralelo 39°N.




Wright (1599) plantea la contradicción que se genera al usar el mapa equidistante para calcular la diferencia de longitudes entre dos puntos, si no se comprende la transformación que hay detrás de su construcción. En este escenario los objetos geométricos aparecen para dar cuenta de dicha contradicción. Son una herramienta que permite demostrar por qué no es correcto considerarlo así. En este ejemplo identificamos en el argumento de Wright la siguiente estructura, que se muestra en la figura 5.33: toma como cierto el mapa y realiza el cálculo con los datos que surgen de este, utiliza los objetos geométricos para realizar ese mismo cálculo en la esfera y, por último, evidencia una contradicción con el cálculo inicial.

**Figura 5.33.** Estructura del argumento de Wright en este ejemplo.



En congruencia con el objetivo que nos planteamos en esta investigación se presenta la tabla 5.2, en la que se resume el papel de los objetos geométricos en este ejemplo concreto del cálculo de la diferencia de longitud entre dos puntos.

**Tabla 5.2.** *Uso de objetos geométricos: E4.*

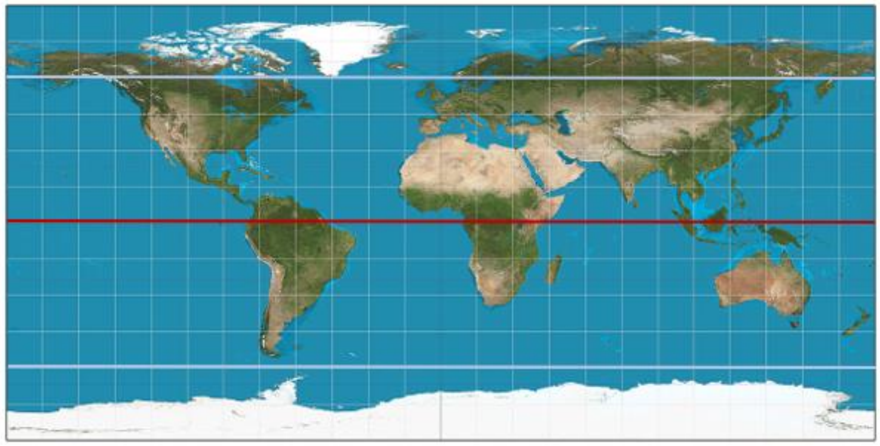
| Uso de objetos geométricos: E4 | |
|---|---|
| ¿Qué objetos geométricos usa en sus argumentaciones? | Ángulos de 45°.<br>Triángulo rectángulo.<br>Razón trigonométrica en triángulo rectángulo: seno.<br>Relación entre elementos del círculo: arco de circunferencia, ángulo y radio. |
| ¿Cómo los usa? | Aparecen relacionados directamente con elementos del mapa, de la esfera y rumbos de la navegación. Los usa como herramienta para calcular distancias necesarias (radios), medidas de ángulos. Diferencias de latitud y longitud. |
| ¿Para qué los usa? | Para matematizar el ejemplo: cálculos en el mapa y luego en la esfera.<br>Para mostrar una contradicción entre el uso del mapa y lo que sucede en la esfera.<br>Evidenciar por qué se llega a un error por no conocer la transformación con la que se construye el mapa. |

## **Episodio 5 (E5).** Distancia entre lugares en el mapa

Para mostrar otro error que se comete en el uso del mapa, Wright (1599) proporciona un ejemplo de cálculo de distancias entre dos lugares en el mapa, que se encuentran en un mismo paralelo. En la figura 5.34 se muestra cómo se ve el arco de circunferencia correspondiente al paralelo de 60° de latitud en el globo, y la comparación con el ecuador, y cómo en el mapa se muestran de igual medida.

> Si se imagina que dos barcos están bajo el Equinoccio a 100 leguas de distancia, y que cada uno de ellos navega desde allí hacia el Norte o el Sur bajo su Meridiano, hasta que llegan al paralelo de 60 grados: no estarían allí más que a 50 leguas de distancia, porque en ese paralelo los meridianos distan entre sí la mitad que en el Equinoccio, como puede verse claramente en el globo terráqueo; y sin embargo, la carta mostrará que esos dos barcos tienen la misma distancia de 100 leguas, estando bajo el paralelo 60, que tenían antes, estando bajo el Equinoccio. (Wright, 1599, pp. 7-8)

**Figura 5.34.** Se muestra en el globo el recorrido de los barcos desde los puntos A y B, y en el mapa, se señala los paralelos de 60° N-S.

Este ejemplo ayuda a seguir explicando la idea de la distorsión del mapa que Wright (1599) quiere transmitir, remarcando otro posible error que el uso del mapa, sin considerar la transformación, puede generar. Confronta la Geometría en la esfera, en la que los meridianos convergen, con la Geometría en el plano, en la que se muestran como líneas paralelas.

### **Episodio 6 (E6).** Navegación por curvas loxodrómicas y círculos máximos

Por último, en este primer capítulo, Wright (1599) describe la navegación por curvas que forman siempre los mismos ángulos con los meridianos, por ejemplo, navegar por un paralelo (que los marineros reconocen como el rumbo más seguro) siempre hace que se formen ángulos rectos con los meridianos, por lo que la brújula mantiene el ángulo de rumbo. Aparece en juego para esta última parte, la racionalidad del marinero, y estrategias de navegación que utilizaban, así como ventajas y desventajas de navegar por estas curvas, o por los círculos máximos.

> Queda aún otro error (aunque todos los anteriores fueron evitados), que se suscitó aquí, porque por la dirección de la brújula doblan, y giran el barco, en tal fuerza, que lo obligan a hacer siempre los mismos ángulos con el Meridiano. Como cuando navegan desde Ushent hasta el Cabo Raso, ambos situados bajo el mismo paralelo, guían la nave con tal fuerza, que siempre hace ángulos rectos con el Meridiano, y así manteniendo su curso hacia el Oeste, se mantienen siempre bajo el mismo paralelo, mientras que, no obstante, hay un curso más certero, por el cual pueden ir de

un lugar a otro, sin esa pérdida de camino, que deben hacer necesariamente los que se mantienen siempre bajo el mismo paralelo. (Wright, 1599, p. 8)

En referencia a esto, Wright (1599) en el prefacio al lector ya hacía referencia a este tipo de navegación seguida por los marineros experimentados, debido a que reconocen errores en los rumbos que la carta les indicaba.

> Y en cuanto a los rumbos de un lugar a otro, he observado que algunos de nuestros maestros toman un rumbo más inteligente, al no confiar en los rumbos que les indican sus cartas. Sino que primero se colocan en la altura o paralelo del lugar al que se dirigen, y con todo, sabiendo con seguridad si están más al este o al oeste que ese lugar, entonces proceden siempre con cuidado manteniéndose bajo ese paralelo hasta que llegan al lugar deseado. Por lo tanto, no hay ninguna manera de decir que sea más segura y factible para encontrar el lugar asignado, pero tiene esta incógnita que hace que el camino sea más largo de lo debiera ser, si se mantuviera el curso recto. (Wright, 1599, p. 3-4)[17]

El autor compara esta trayectoria con la navegación por un círculo máximo, que es el menor trayecto que se puede recorrer entre dos puntos en la esfera. Fundamenta esta comparación entre lo que sería la distancia más corta entre dos puntos y cualquier otra curva que los una haciendo una analogía con la Geometría en el plano:

> Pero este camino no ha de ser definido por ninguno de los círculos menores, sino por un círculo máximo que ha de ser trazado por esos dos lugares, y el arco de ese círculo máximo contenido entre los mismos lugares es menor que el arco del paralelo que está entre ellos, como puede concluirse por una razón evidente y necesaria de los principios de la Geometría: así como la línea recta es más corta que la torcida, siendo ambas extendidas entre las mismas puntas. (Wright, 1599, pp. 8-9)

Si bien aclara que el círculo máximo es el camino más corto entre dos puntos para navegarlo, remarcando el interés de quien navega, plantea la diferencia en el uso de la brújula que se necesita, lo que determinará cuál es más funcional en el contexto de la navegación. Quien navega por un círculo

[17] Esta cita corresponde al prefacio al lector.

máximo deberá cambiar el rumbo de la brújula no solo una vez, sino muy seguido, debido a que corta los meridianos todos con ángulos distintos (excepto si se hace por un meridiano o el ecuador). El navegar por la curva loxodrómica hace que el rumbo sea constante, la brújula mantenga la dirección, pero no será el camino más corto. Hace énfasis en esta diferencia que, si bien tiene un fundamento matemático el camino óptimo en cuanto a distancia, en referencia a la práctica en el que el uso de la brújula es más certero y sencillo, el camino más largo termina siendo el funcional. En este sentido afirma:

> Por lo tanto, también se adjunta esta razón, que al navegar por un círculo máximo, el camino es más corto, y compendioso. Pero el que entró en este curso de la navegación, debe saber, que debe cambiar el punto de la brújula (con lo que guio el barco) no sólo una vez, sino muy a menudo: debido a la variable, y la desigualdad inconstante de los ángulos, que ese círculo máximo hace con cada nuevo meridiano. (Wright, 1599, p. 9)

Wright (1599) hace referencia a lo que al marinero le será conveniente para navegar, que los meridianos en el mapa aparezcan como líneas rectas equidistantes, (que son quienes indican la dirección Norte-Sur), haciendo que las líneas de rumbo sean rectas. Esto, fundamentado por las proposiciones 27 y 28 del libro I de Euclides. Sin embargo, en el mapa equidistante esta condición se cumple, pero como el estiramiento es en dirección horizontal únicamente, no serán las líneas rectas en el mapa representaciones de líneas de rumbo con ángulos de brújula constantes.

> Consideramos no sólo como verdadero, sino también como lo más simple y conveniente para el uso común de los marineros, que los meridianos en la carta marina deben ser cada vez equidistantes entre sí, y en consecuencia que los rumbos deben ser líneas rectas por estas causas. (Wright, 1599, p. 10)

Como en el mapa usual equidistante, los meridianos cumplían esa condición, habría que ver qué más hay que tener en cuenta, para que lo que se representa como líneas rectas sean efectivamente las curvas loxodrómicas en el globo. En cuanto a esto, antes de pasar a solucionarlo, Wright (1599) termina este primer capítulo haciendo alusión al mapa que se propondrá construir para facilitar la navegación.

> Tanto en la confección como en el uso de la carta náutica, con meridianos equidistantes y rumbos rectilíneos, debería ser preferida antes que cualquier otro instrumento publicado hasta ahora con ese fin para el uso común del marinero, especialmente en el mar. Y aunque el globo

> terráqueo es alabado por algunos como el más absoluto y perfecto para todos los rumbos y climas, sin embargo, debido a la variabilidad de este, a su molesto transporte, a su estiba y a su tedioso uso en la mayoría de los casos en la navegación, seguir cualquier otro rumbo, salvo una parte, se considera poco adecuado y engorroso, y no hay nada tan adecuado y preparado para el uso común de los marineros como el planisferio náutico verdaderamente fabricado. (p. 11)

En cuanto al uso por parte de Wright (1599) de las proposiciones 27 y 28 de Euclides:

- ❖ Proposición I.27: Si una recta al caer sobre dos rectas hace ángulos alternos internos iguales entre sí, entonces tales rectas serán paralelas entre sí.
- ❖ Proposición I.28: Si una recta al caer sobre dos rectas hace el ángulo externo igual al ángulo interno y opuesto del mismo lado, o los dos ángulos internos del mismo lado suman dos ángulos rectos, entonces las rectas serán paralelas entre sí.

Conviene prestarle particular atención. En ambos mapas, los meridianos aparecen representados como líneas rectas paralelas y equidistantes, y, por tanto, cualquier recta que se trace, formará ángulos iguales con ellos. Ahora, estos mapas se construyen con base en una determinada proyección, la pregunta que conviene hacerse es ¿qué representan esas líneas rectas en la esfera?, entonces deberíamos preguntarnos qué transformación hay detrás que permite que esos ángulos además de ser constantes representan en la esfera curvas loxodrómicas, que son las que servirían para la navegación de la época, ya que mantienen la inclinación de la brújula constante.

**Tabla 5.3.** *Uso de los objetos geométricos: E6.*

| **Uso de objetos geométricos: E6** | |
|---|---|
| **¿Qué objetos geométricos usa en sus argumentaciones?** | Ángulos.<br>Círculo máximo (esfera) – Segmento (plano).<br>Proposiciones de Euclides. |
| **¿Cómo los usa?** | Como rumbos de la brújula. Navegar por un paralelo hace referencia a ángulos rectos de corte con los meridianos.<br>Como comparación de los escenarios.<br>Como justificación de las construcciones de los dos mapas. Para compararlos. |
| **¿Para qué los usa?** | Para hacer referencia a rumbos en la navegación por curvas loxodrómicas o círculos máximos.<br>Confrontar esfera-plano.<br>Para dar cuenta de las proyecciones. |

## **Episodio 7 (E7).** Cómo Wright corrige los errores con la separación de los paralelos

Wright (1599) comienza el segundo capítulo del tratado que es llamado “Cómo se pueden evitar los errores anteriores”, haciendo referencia a quienes ya habían notado estos errores, y los expusieron en sus trabajos: Pedro Nunes y Martín Cortés, así como Gerard Mercator en su mapa, pero que ninguno de ellos explica cómo arreglarlos. Hace referencia a lo que estos pueden provocar en la navegación.

> Sin embargo, ninguno de ellos enseña de manera segura cómo enmendar tales faltas graves, por lo que el pobre marinero puede ser engañado muchas veces un punto entero de la brújula, sí, a veces dos o tres puntos y más, al juzgar por su carta ordinaria cómo un lugar se lleva a otro: especialmente si navega hacia el norte, o hacia el sur, por lo que podemos fácilmente averiguar, cómo un curso indirecto que hará para llegar al puerto deseado, que seguirá tan falsa y errónea dirección con gran peligro (por lo menos) muchas veces para perder el barco, los bienes, las vidas y todo. (p. 12)

Haciendo referencia a la carta, afirma que el motivo de esos errores radica en sus fundamentos geométricos, ya que los paralelos no están bien separados, siendo la distancia entre ellos siempre la misma, igual a la que se separan los meridianos en el ecuador. Con respecto a esta separación Wright (1599) plantea:

> Pero la omisión en la que reside toda la dificultad, es decir, cuánto o en qué proporción deben aumentar esos espacios. Lo cual, para que pueda ser mejor percibido, no creo que sea improcedente mostrar primero por qué tipo de proyección (o extensión más bien) el planisferio náutico no puede ser concebido inadecuadamente para ser hecho geométricamente de esta manera. (p. 13)

Con el fin de que se comprenda esta transformación que lleva la esfera al plano, Wright (1599) presenta un modelo para visualizarla describiendo el pasaje de la esfera a un cilindro, y de éste al plano. Partiendo de una esfera con toda su descripción hidrográfica (aguas de la Tierra) inscripta en ella, así como meridianos, paralelos, y rumbos. Se inscribe en un cilindro cuyos ejes coinciden. Luego, explica cómo se pasa de la esfera al cilindro:

> Que esta superficie esférica se infle como una cámara de aire, (mientras está soplando) siempre por igual en cada parte de ella (es decir, tanto en longitud como en latitud) hasta que se aplique, y se agrande (alrededor, y todo a lo largo también hacia cualquiera de los polos) a la superficie cóncava del cilindro: cada paralelo sobre esta superficie esférica aumenta sucesivamente desde el equinoccio hacia cualquiera de los polos, hasta que llega a tener el mismo diámetro que el cilindro, y por consiguiente los meridianos siguen ensanchándose, hasta que llegan a estar tan distantes unos de otros como lo están en el equinoccio. (Wright, 1599, p. 13)

Es importante destacar cómo describe que se infla la esfera, lo hace de igual forma en todos sus puntos, tanto en latitud como en longitud. No se menciona que el cilindro tenga "tapas", porque de ser así esta transformación tendría tope, y no se podría cumplir con la condición de inflarse por igual hasta aplicarse en el cilindro. La esfera queda aplicada en la superficie del cilindro. Como en latitudes muy altas esta transformación genera una gran distorsión, se desprecia esta parte del cilindro para así obtener un paralelogramo, que pueda transformarse en un mapa.

> Así pues, el planisferio náutico puede definirse como un paralelogramo formado por las superficies esféricas de un globo hidrográfico inscrito en un cilindro cóncavo, en el que sus dos ejes coinciden en uno y las superficies esféricas se hinchan en cada parte por igual en longitud y en latitud, hasta que cada uno de los paralelos se inscribe en el cilindro (cada paralelo crece como el equinoccio) o hasta que toda la superficie esférica, se toca y se aplica en todas partes a la concavidad del cilindro. (Wright, 1599, p. 14)

El mapa concebido mediante esta transformación en la que se infla la esfera de forma igual en todos los puntos tanto longitud como latitud, deberá mostrar todos los lugares en su correcta ubicación en cuanto al paralelo, meridiano y rumbos. Wright (1599) explica esta proyección, mediante esta visualización. Con base en esto, afirma que al hincharse de esta forma la esfera, y todos los paralelos tener la medida del ecuador, los meridianos deberán quedar como líneas rectas y paralelas, por lo que los rumbos, al ser curvas en la esfera que cruzan todos los meridianos con el mismo ángulo, deberán mostrarse necesariamente como líneas rectas. Nuevamente aparece la fundamentación en la proposición 27 del libro I de Euclides. Pero en este caso, fue la transformación la que hizo que eso suceda, cómo se transformó la esfera en un cilindro, y luego en un plano, es lo que hace que esas líneas de rumbo sean rectas. Esos ángulos aparecen significados aquí porque lo estaban ya en la esfera, y la transformación es tal que hace que se mantengan.

> Por lo tanto, en primer lugar, en este planisferio, debido a que los paralelos son en todas partes iguales entre sí (ya que cada uno de ellos es igual al equinoccio o a la circunferencia del cilindro circunscripto), los meridianos también deben ser necesariamente líneas paralelas y rectas y, en consecuencia, los rumbos (que forman ángulos iguales con cada meridiano) también deben ser líneas rectas. (Wright, 1599, p. 15)

Con respecto a la transformación además sostiene:

> En segundo lugar, porque la superficie esférica de la que se ha concebido este planisferio, se hincha en cada una de sus partes por igual, es decir, tanto en latitud como en longitud, es decir, se aplica a sí misma alrededor, a la concavidad del cilindro: por lo tanto, en cada punto de latitud en este planisferio, una parte del meridiano, mantuvo la misma proporción a la parte similar del paralelo, que las partes similares del meridiano, y el paralelo tienen entre sí en el globo, sin error explicable. (Wright, 1599, p. 15)

Wright (1599) insiste con la idea de que ese cambio en igual proporción en latitud y longitud como se ve en el globo hace que se mantengan las proporciones que tenían en él. Podemos ver en sus argumentos, que hace alusión a esta relación que guarda la proporción entre paralelos y meridianos en la esfera y el plano, pero la diferencia de manera puntual de cómo cambia dependiendo de la posición de cada uno de ellos.

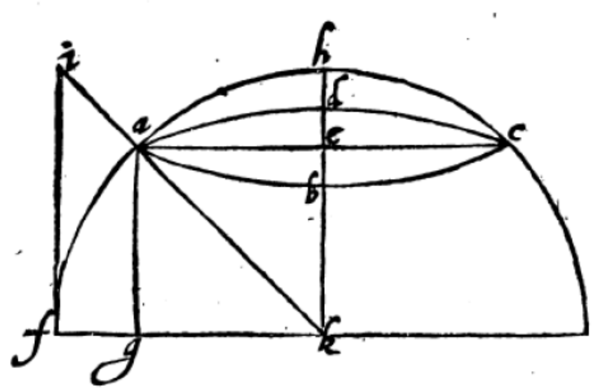
> Ahora bien, como las partes semejantes de los conjuntos guardan la misma proporción que tienen sus conjuntos, por lo tanto, la parte semejante de cualquier paralelo y meridiano del globo tiene la misma proporción que tienen el mismo paralelo y meridiano. (p. 16)

### **Episodio 8 (E8).** Factor de estiramiento

Wright (1599) encuentra el factor de estiramiento de cada paralelo en la construcción del mapa para la navegación. Sostiene que el motivo de todos los ejemplos de errores que menciona (excepto el último), es no comprender el fundamento geométrico con el que se construye el mapa equidistante. Afirma que, para fines de navegación, en este los meridianos no están bien divididos (por los paralelos), siendo las divisiones iguales en todos los lugares y los paralelos no están correctamente separados ya que tienen la misma distancia entre sí que los meridianos en el ecuador. En la construcción de este mapa no se está considerando el estiramiento vertical. Asegura que los espacios entre los paralelos deben aumentar más y más a medida que nos acercamos al polo, y resalta que la dificultad es encontrar cuánto o en qué proporción esos espacios deben aumentar, proponiéndose encontrarla.

Acompaña su razonamiento con la imagen que se muestra en la figura 5.35, en la que se representa el ecuador, un paralelo *abcd* y triángulos auxiliares que serán base de su explicación. Presentaremos dicha explicación y luego exponemos la misma con lenguaje moderno.

**Figura 5.35.** Cálculo del factor de estiramiento.




Nota: Imagen extraída de Wright (1599, p. 16).

Wright (1599) comienza definiendo el radio de la circunferencia que determina el paralelo *abcd*, a partir de considerar ciertos ángulos que nombra como arcos: "Como aquí se ve, *ae* el seno de *ah* el complemento de *af* la latitud de distancia del paralelo *abcd*, desde el equinoccio, es el semidiámetro de este paralelo *abcd*" (p. 16).

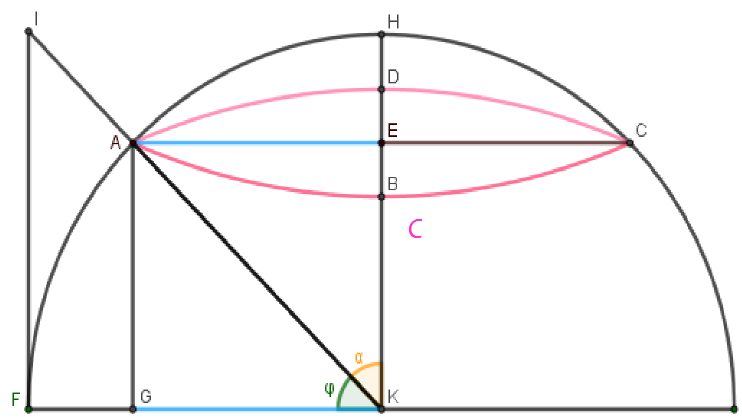
Luego, plantea una relación de semejanza de triángulos para encontrar cuánto se estira el radio del paralelo para llegar a ser igual que la medida del radio del ecuador, que será en la misma proporción que el estiramiento del paralelo. Esto a partir de hallar la proporción entre los radios (semidiámetros) del paralelo y del ecuador (que es igual al meridiano).

> Y como el semidiámetro del meridiano (o el seno completo) es al semidiámetro del paralelo, como la secante, o Hipotenusa de la latitud de los paralelos (o de la distancia de los paralelos

desde el equinoccial) es al semidiámetro del meridiano, o el seno completo; como *fk* (que es) *ak*, a *ac* (que es) *gk*; así es *ik*, a *kf*. (Wright, 1599, pp. 16-17)

Ahora, si consideramos la figura 5.36, haremos una explicación con nomenclatura actual de la situación que propone Wright (1599). Primero reconoce el radio de la circunferencia *C* que representa el paralelo de latitud φ, como el seno del ángulo α, que es el complemento del ángulo de latitud (90°- φ). Se tiene que $\overline{\mathrm{AE}} = \mathrm{sen}\alpha$. El radio del ecuador o de cualquier meridiano es igual a uno, lo llama "seno entero".

**Figura 5.36.** Explicación con la simbología actual.




Plantea una razón de semejanza fundamentada en los triángulos IKF y AKG, ambos rectángulos con los ángulos $\widehat{\mathrm{IKF}} = \widehat{\mathrm{AKG}}$.

$$\frac{\mathrm{FK}}{\mathrm{GK}} = \frac{\mathrm{IK}}{\mathrm{AK}}$$

Ahora, $\overline{\mathrm{FK}} = \overline{\mathrm{AK}}$ por ser ambos radios de la esfera, $\overline{\mathrm{GK}} = \overline{\mathrm{AE}}$ (por cómo está definido G). Por lo que se puede reescribir esa razón de la siguiente forma:

$$\frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{AE}} = \frac{\mathrm{IK}}{\mathrm{KF}}$$

Si miramos el triángulo IKF, IK es la hipotenusa, KF el cateto adyacente al ángulo de latitud. Por lo que,

$$\frac{\text{AK}}{\text{AE}} = \frac{1}{\cos \varphi} = \sec \varphi$$

Siendo este el factor de estiramiento de cada uno de los paralelos. Como en el mapa todos se muestran con la medida del ecuador, ese estiramiento que se les hace será el que determine su separación, aumentando en esa misma proporción, generando así un estiramiento vertical proporcional, dado por la secante del ángulo de latitud. Encontrar este factor de estiramiento de los paralelos, y la idea de que la separación de estos genera uno vertical, es la base para la construcción de una tabla que permita la elaboración del mapa.

> Por lo tanto, en su planisferio náutico, siendo el semidiámetro de cada paralelo igual al semidiámetro del equinoccio (es decir) al seno entero, las partes del meridiano en cada punto de latitud deben aumentar necesariamente con la misma proporción con la que aumentan las secantes, interceptadas entre esos puntos de latitud y el equinoccio. (Wright, 1599, p. 17)

Antes de pasar a la construcción de la tabla con la que Wright (1599) propone la elaboración del mapa para navegar, nos interesa resaltar el uso de objetos geométricos en esta explicación del autor, que se muestra en la tabla 5.4, ya que aparecen como parte de sus argumentos para hallar el factor de estiramiento que será de gran importancia para lo que sigue.

**Tabla 5.4.** *Factor de estiramiento.*

| Uso de objetos geométricos: E7 | |
|---|---|
| **¿Qué objetos geométricos usa en sus argumentaciones?** | Razón trigonométrica: seno.<br>Triángulos semejantes.<br>Razón trigonométrica: secante. |
| **¿Cómo los usa?** | Como herramienta para encontrar un ángulo.<br>Como herramienta para hallar la medida del lado del triángulo que es el radio de la circunferencia.<br>Como vínculo entre segmentos entre los que quiere hallar una proporción.<br>Como medida de un segmento: la hipotenusa del triángulo IKF. |
| **¿Para qué los usa?** | Encontrar el radio que será de interés debido a su proporción con el perímetro de la circunferencia.<br>Establecer una relación de semejanza.<br>Para poder aplicar razones trigonométricas.<br>Para encontrar la medida de un lado. |

| | |
|---|---|
| | Establecer una proporción entre el radio del paralelo y el radio del ecuador, que será a su vez proporcional al estiramiento del paralelo para llegar a la medida del ecuador. Explicar el estiramiento que se le aplica a cada paralelo.<br>Para poder encontrar el factor de estiramiento de los paralelos, y argumentar que este coincide con la secante del ángulo de latitud. |

## Episodio 9 (E9). Cómo se construye la tabla y su uso para la elaboración del mapa

Todo lo expuesto hasta aquí por Wright (1599) nos prepara para la construcción de una tabla que permite elaborar el mapa para la navegación. En esta se observa cómo la separación de los paralelos genera un estiramiento de forma vertical, de la misma manera que el estiramiento que se le hace a cada paralelo horizontalmente, para que las proporciones horizontal y vertical entre paralelos y meridianos se mantengan como en el globo.

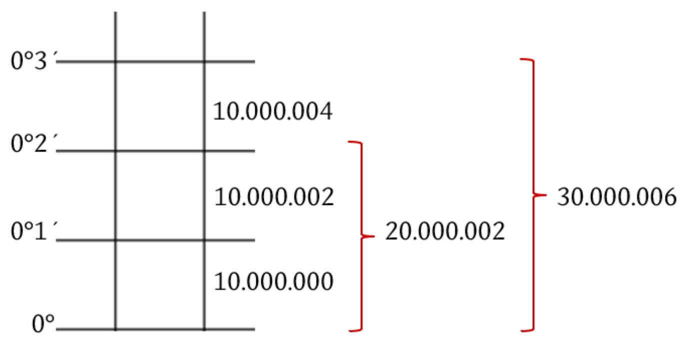
A partir del factor de estiramiento dado por la secante del ángulo de latitud que encontró para cada paralelo, en esta tabla indica cuánto se deben separar, provocando el estiramiento de los meridianos. Para esto, plantea la adición de esas secantes considerando la separación de dos paralelos dada por la secante del que se encuentre más alejado del ecuador. A su vez, su posición en el mapa estará dada por la suma de todas las separaciones anteriores, como se muestra en la figura 5.36.

> Porque (suponiendo que la distancia de cada punto de latitud, o de cada paralelo de otro, contenga tantas partes como la secante de la latitud de cada punto o paralelo contenga) por adición perpetua de las secantes correspondientes a las latitudes de cada punto o paralelo a la suma compuesta de todas las secantes anteriores, comenzando por la secante del primer paralelo de latitud, y añadiendo a ésta la secante del segundo paralelo de latitud, y a la suma de ambas la secante del tercer paralelo de latitud, y así sucesivamente en todos los demás, podemos hacer una tabla que muestre las secciones y puntos de latitud en los meridianos del planisferio náutico: por cuyas secciones, los paralelos han de ser trazados. (Wright, 1599, pp. 17-18)

Wright (1599) propone para la construcción de la tabla, que la distancia entre los paralelos se considere de un minuto, y que su separación esté dada por la secante del que esté más alejado del ecuador. Considera la separación dos a dos, pero en la tabla, presenta la suma de las separaciones para determinar la posición respecto del ecuador de cada paralelo. Plantea un ejemplo con los primeros tres paralelos como se muestra en la figura 5.37.

> Como, por ejemplo, el secante de un minuto es 10.000.000, que también mostró la sección de un minuto del meridiano desde el equinoccio en el planisferio náutico. A lo que hay que añadir la sección de 2 minutos, que es de 10.000. 002, la suma es de 20.000.002 que representa la sección del segundo minuto del meridiano desde el equinoccio en el planisferio: a esta suma hay que añadir la sección de 3 minutos, que es de 10.000.004, la suma será de 30.000.006 que representa la sección del tercer minuto del meridiano desde el equinoccio. del meridiano desde el equinoccial: y así sucesivamente en todo lo demás. (Wright, 1599, p. 18)

**Figura 5.37.** Suma de las secantes para los primeros tres paralelos.




Wright hace referencia a que no tendrá en cuenta las últimas tres cifras de la secante, ya que, para fines prácticos de construcción del mapa, será suficiente y no provocará errores considerables. Aparecen aquí nuevamente las dos epistemologías: la del marinero y la de los geómetras, que conviven en el discurso del autor. Por un lado, la practicidad de su tabla para la construcción del mapa para quien navega, y por otro, la aclaración de cómo encontrar mayor precisión en sus cálculos para quien tenga una concepción formal sobre la Geometría.

> Aquel que quiera ser más preciso puede hacer la misma tabla de décadas o decenas de segundos de *Ioachimus Rhaticus su Canon magnus triangulorum*.[18] Sin embargo, el geómetra que desea la verdad exacta, no puede estar satisfecho tampoco, para cuya falsa y mayor satisfacción, pensé

[18] Refiere a las tablas trigonométricas para triángulos rectángulos que se tenían en esa época.

> que no estaba de más adjuntar también este concepto geométrico de dividir un meridiano del planisferio náutico. (Wright, 1599, p. 19)

Vuelve a hacer referencia, para hablar de la verdadera división de los meridianos dada por la separación de los paralelos, al modelo de visualización planteado anteriormente, en el que la esfera se infla de igual forma en todos los puntos, aplicándose en un cilindro. Supone en esa esfera un meridiano con sus divisiones en grados, minutos y segundos que indican latitudes. Al inflarse la esfera y aplicarse ese meridiano en el cilindro mediante esta transformación que propone, se obtiene la verdadera división del meridiano en este mapa. Entendiendo que está sostenida sobre argumentos que harán que el geómetra se satisfaga. Actualmente sabemos que para que teóricamente sea correcto, se necesita el infinitesimal.

> Que el equinoccio y un meridiano sean dibujados en un Globo: Que el meridiano (dividido en grados, minutos y segundos) se desplace sobre una línea recta que comience en el equinoccio, y que el globo terráqueo se hinche de tal manera que su semidiámetro sea siempre igual a la secante del ángulo o arco contenido entre el equinoccio y el semidiámetro que forme un ángulo recto con la línea recta anterior: Los grados, min, segundos del meridiano anotados en la línea recta a medida que llegan a tocar el mismo, son las divisiones del meridiano en el planisferio náutico. Y esta idea de dividir el meridiano del planisferio náutico puede satisfacer la curiosa exactitud del geómetra: pero para el uso mecánico, la tabla antes mencionada que sigue a continuación puede ser suficiente. (Wright, 1599, p. 19)

Wright (1599) plantea la explicación de la construcción de su tabla considerando intervalos de un minuto, determinando así 5400 intervalos, ya que del ecuador a cada Polo hay 90° de latitud (90x60). Sin embargo, no es la tabla que se muestra en esta primera edición de su trabajo. Justifica su recorte por razones editoriales y fines prácticos. La tabla aquí publicada cuenta con 540 intervalos, tomándolos de 10 minutos iniciando en el ecuador (90x6), como se muestra en la figura 5.38.

Menciona que los cálculos los hace hasta un minuto antes del polo, el paralelo con latitud 89°59´ (89 grados 59 minutos), en la tabla que se muestra en esta edición, será el paralelo 89°50´ (89 grados 50 minutos), haciendo corresponder a los 90° con "Infinite" como se muestra en la figura 5.39, evidenciando su conocimiento sobre la transformación geométrica que hay detrás de la construcción del mapa.

**Figura 5.38.** Tabla para la verdadera división de los meridianos, de 0° a 15°.

*A Table for the true diuiding*

| 1 Col. | | 2 Col. | 1. Col. | | 2. Col. | 1 Col. | | 2 Col. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| De | Mi | | De | Mi | | De | Mi | |
| 0 | 10 | 100 | 5 | 10 | 3104 | 10 | 10 | 6132 |
| 0 | 20 | 200 | 5 | 20 | 3205 | 10 | 20 | 6234 |
| 0 | 30 | 300 | 5 | 30 | 3305 | 10 | 30 | 6335 |
| 0 | 40 | 400 | 5 | 40 | 3405 | 10 | 40 | 6437 |
| 0 | 50 | 500 | 5 | 50 | 3506 | 10 | 50 | 6539 |
| 1 | 0 | 600 | 6 | 0 | 3606 | 11 | 0 | 6641 |
| 1 | 10 | 700 | 6 | 10 | 3707 | 11 | 10 | 6743 |
| 1 | 20 | 800 | 6 | 20 | 3808 | 11 | 20 | 6845 |
| 1 | 30 | 900 | 6 | 30 | 3908 | 11 | 30 | 6947 |
| 1 | 40 | 1000 | 6 | 40 | 4009 | 11 | 40 | 7049 |
| 1 | 50 | 1100 | 6 | 50 | 4110 | 11 | 50 | 7151 |
| 2 | 0 | 1200 | 7 | 0 | 4210 | 12 | 0 | 7253 |
| 2 | 10 | 1300 | 7 | 10 | 4311 | 12 | 40 | 7355 |
| 2 | 20 | 1400 | 7 | 20 | 4412 | 12 | 20 | 7458 |
| 2 | 30 | 1500 | 7 | 30 | 4513 | 12 | 30 | 7560 |
| 2 | 40 | 1601 | 7 | 40 | 4614 | 12 | 40 | 7662 |
| 2 | 50 | 1701 | 7 | 50 | 4715 | 12 | 50 | 7765 |
| 3 | 0 | 1801 | 8 | 0 | 4815 | 13 | 0 | 7868 |
| 3 | 10 | 1901 | 8 | 10 | 4916 | 13 | 10 | 7970 |
| 3 | 20 | 2001 | 8 | 20 | 5018 | 13 | 20 | 8073 |
| 3 | 30 | 2101 | 8 | 30 | 5119 | 13 | 30 | 8176 |
| 3 | 40 | 2201 | 8 | 40 | 5220 | 13 | 40 | 8279 |
| 3 | 50 | 2302 | 8 | 50 | 5321 | 13 | 50 | 8382 |
| 4 | 0 | 2402 | 9 | 0 | 5422 | 14 | 0 | 8485 |
| 4 | 10 | 2502 | 9 | 10 | 5523 | 14 | 10 | 8588 |
| 4 | 20 | 2602 | 9 | 20 | 5625 | 14 | 20 | 8691 |
| 4 | 30 | 2703 | 9 | 30 | 5726 | 14 | 30 | 8794 |
| 4 | 40 | 2803 | 9 | 40 | 5827 | 14 | 40 | 8897 |
| 4 | 50 | 2903 | 9 | 50 | 5929 | 14 | 50 | 9001 |
| 5 | 0 | 3004 | 10 | 0 | 6030 | 15 | 0 | 9104 |

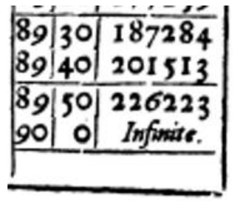
E

Nota: Imagen extraída de Wright (1599, p. 21).

La tabla está dividida en dos columnas, la primera está dividida a su vez en grados (“De”) y minutos (“Mi”), y la segunda indica la posición del paralelo dada por la suma de las separaciones de todos los paralelos anteriores. Inmediatamente después de la tabla Wright (1599) proporciona recomendaciones para la construcción del mapa a partir de ésta.

> El uso de esta tabla para hacer la carta del mar, es el siguiente: sobre la mitad del plano, donde dibujarás los lineamientos de la carta, describirás una línea recta, (representando el círculo equinoccial) que dividirás en 360 partes de grados, y cruzarás la misma con líneas rectas, por cada quinto o décimo grado. (p. 27)

**Figura 5.39.** Infinito.



| | | |
|---|---|---|
| 89 | 30 | 187284 |
| 89 | 40 | 201513 |
| 89 | 50 | 226223 |
| 90 | 0 | *Infinite.* |

Nota: Imagen extraída de Wright (1599, p. 26).

Luego, describe la escala que se tendrá en cuenta a lo largo de los meridianos y que está relacionada con la medida de la línea que representa el ecuador.

> Luego tomad con vuestro compás la longitud hasta la mitad del equinoccio, (es decir, 180 grados) y poniendo un pie de vuestros compases en la intersección mutua del equinoccio, con la perpendicular o meridiano que pasa por cada extremo del equinoccio, con el otro pie haced una marca en la misma perpendicular o meridiano: el espacio contenido entre esta marca y el equinoccio, divídelo primero en tres, de modo que tengas nueve en total: y de nuevo cada una de estas en tres, de modo que tengas 27 partes, y cada una de estas partes divídela en cuatro, de modo que tengas 108 partes. Y de nuevo (si hay espacio suficiente) divide cada una de estas en 10 o 100, así tendrás 1080 o 10800 partes. (Wright, 1599, p. 27)

Lo que se describe para la construcción del mapa, se hace para una parte del planisferio, desde el ecuador al norte, porque lo mismo se realizaría para la parte del sur. Luego explica la forma de ubicar los paralelos en el mapa. Este planisferio se muestra en la figura 5.40.

> Luego mira los números que se encuentran frente a cada grado en esta Tabla (omitiendo siempre una o dos de las primeras cifras hacia la mano derecha) y en los mismos números de partes en las perpendiculares, haz pinchazos a cada lado del equinoccio: por los cuales (pinchazos) traza líneas rectas equidistantes del equinoccio, pues serán los paralelos del planisferio náutico. (Wright, 1599, p. 27)

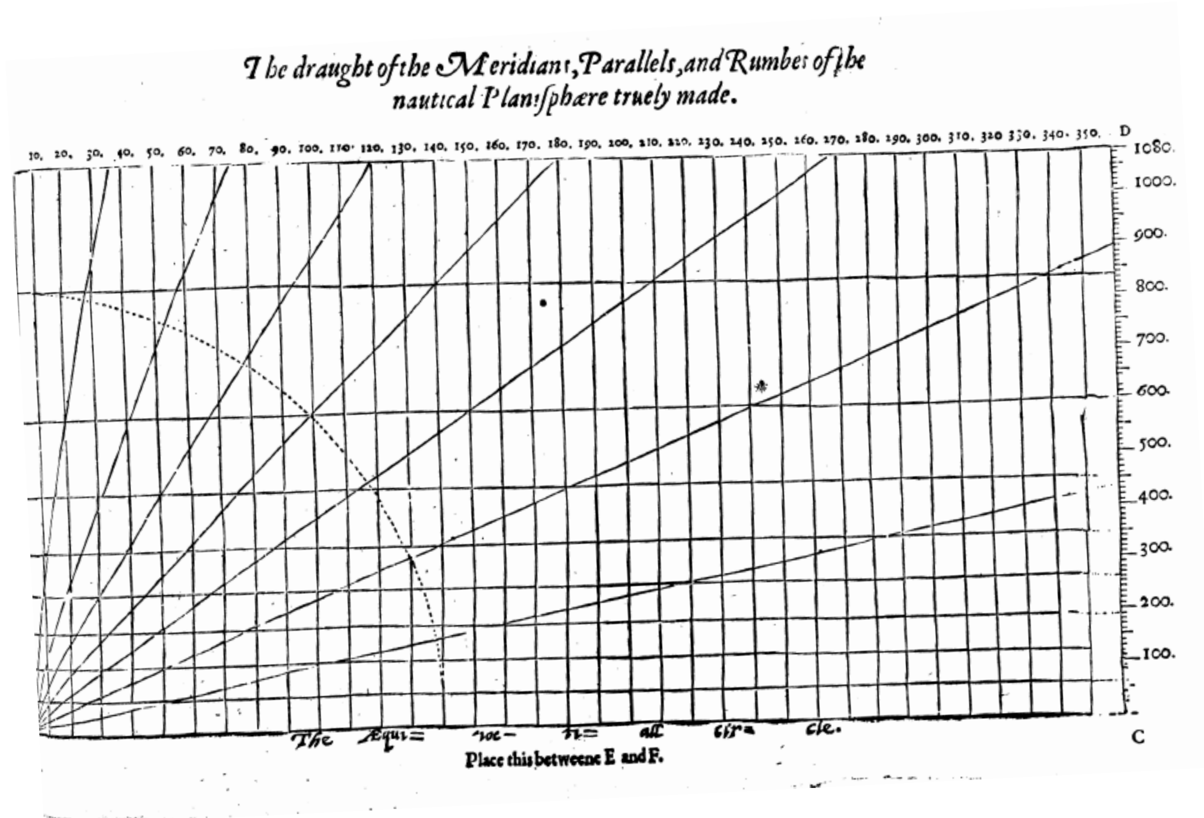
En esta parte, aparece nuevamente la referencia a la precisión del mapa y de los cálculos que realiza Wright (1599). Menciona que habrá un error por cómo se realiza la tabla, es decir, por la cantidad de intervalos que eligió para realizar el cálculo. Ese error va a ser acumulativo, y será mayor más lejos del ecuador. Aunque, asume que para fines prácticos de construcción y con los instrumentos que se construye, no será perceptible dicho error. Aparece nuevamente la convivencia de las epistemologías: la practicidad necesaria para la navegación y la precisión requerida por parte de los geómetras.

> Este error podría ser menor si la tabla anterior se hubiera hecho primero en partes más pequeñas y luego en minutos. Pero esto sería un asunto más curioso que necesario, ya que la tabla aquí expuesta está tan cerca de la verdad, que no es posible, por medio de las reglas o instrumentos de navegación, descubrir ningún error sensible en la carta marítima, en la medida en que se haga de acuerdo con ella. (Wright, 1599, p. 28)

Presenta un ejemplo sobre cómo ubicar el paralelo de 10° de latitud y de forma análoga se procede con los demás. Todo esto, aparece acompañado de la imagen del mapa construido por él que se muestra en la figura 5.40.

> Como, por ejemplo: en la tabla, el número para 10 grados, es 60 (quitando las dos primeras cifras hacia la mano derecha) por lo tanto miro 60 en la línea CD y por esa parte dibujo el paralelo de 10 grados de distancia del equinoccial. (Wright, 1599, p. 30)

**Figura 5.40.** Mapa construido por Wright (1599) a partir de la tabla.

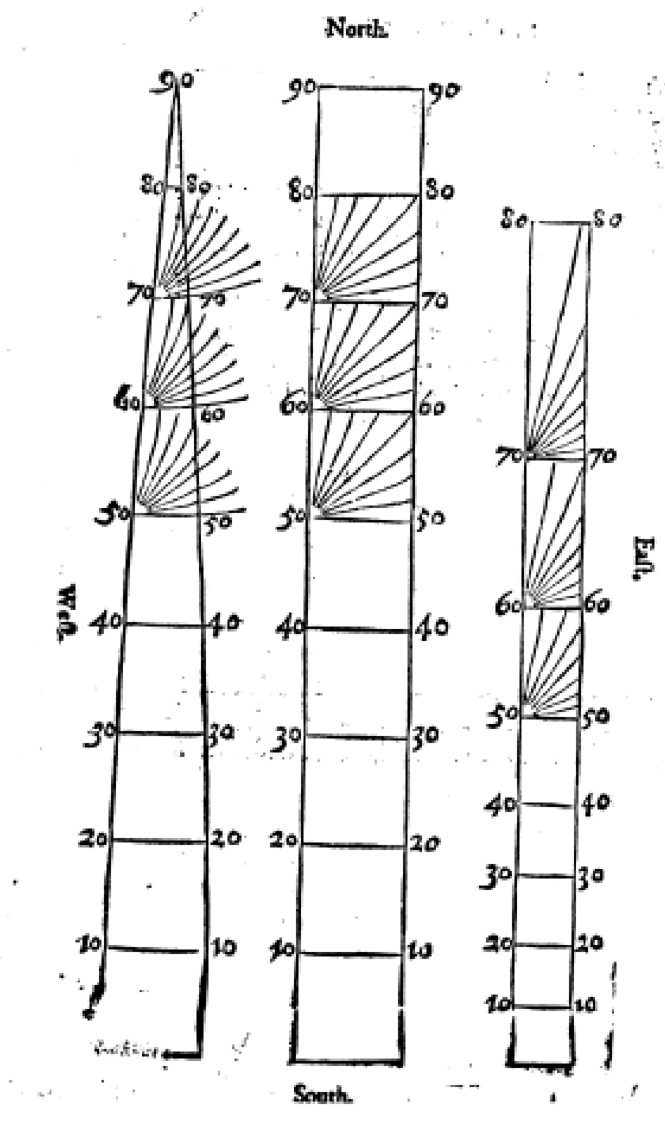



Nota: Titulado como "El trazado de los meridianos, paralelos y rumbos del planisferio náutico verdaderamente realizado"
Fuente: Imagen extraída de Wright (1599, p. 29).

## Episodio 10 (E10). Comparación de los tres escenarios: la esfera y los dos mapas.

El cuarto capítulo de (Wright, 1599), llamado "*Una Demostración muy clara y sensata de la concordancia de este Planisferio náutico, con el Globo, y de la discordancia de la carta de mar común a ambos*" muestra cómo el mapa construido a partir de su tabla concuerda mejor con la esfera que la carta para fines de navegación que se utilizaba en ese momento, y que criticó en el primer capítulo de su trabajo. Acompaña su demostración con la imagen que se muestra en la figura 5.41.

**Figura 5.41.** Comparación de los tres escenarios: los mapas y la esfera.




Nota: Imagen extraída de Wright (1599, p. 57).

He aquí estas tres figuras siguientes, de las cuales la primera responde en todos los puntos a una parte de una superficie esférica, contenida entre dos meridianos, que difieren en 10 grados de longitud, y que se extienden desde el equinoccio hasta el polo. La segunda contenía 10 grados de longitud, y 90 grados del equinoccio en latitud, de la carta marítima común con meridianos equidistantes y grados de latitud todos iguales. La tercera contenía 10 grados de longitud y 80 grados de latitud del planisferio náutico, descrito verdaderamente con meridianos equidistantes

> en todos los lugares, y grados de latitud que aumentaban proporcionalmente hacia el polo, como antes hemos mostrado. (Wright, 1599, p. 54)

Se destaca que Wright (1599), en cuanto al mapa que plantea para la navegación, lo considera suficiente hasta los 80° de latitud, ya que de su discurso se desprende que la distorsión se vuelve mayor cerca de los polos, y que sería suficiente esa latitud para fines prácticos de la navegación. Además, aclara que muestra estas partes de los tres escenarios a comparar, ya que son representativas del total. Para esta comparación toma la esfera de referencia, se va a fijar qué se mantiene igual y qué cambia con respecto de la esfera en los mapas.

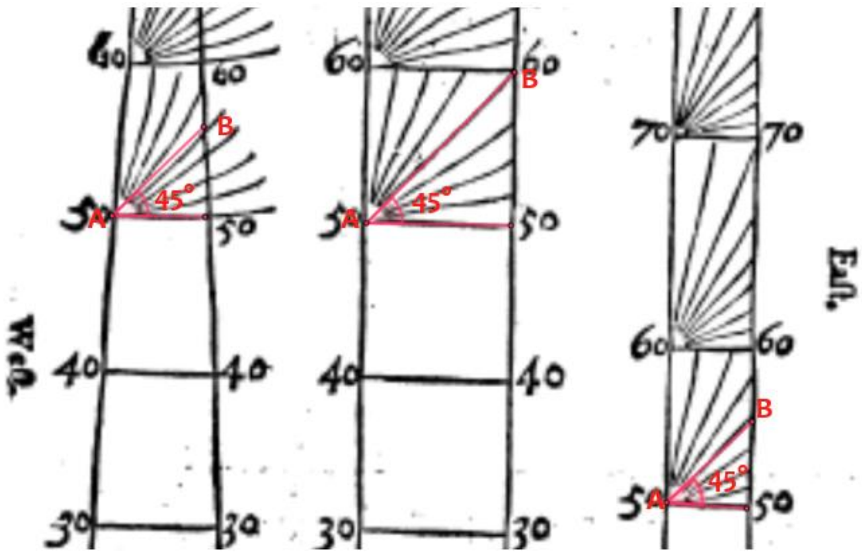
> La primera figura es una parte del globo, y por lo tanto en todas las cosas mostradas es la más verdadera: por lo tanto, hacemos la regla para examinar el resto, porque en la medida en que están de acuerdo con ella, son verdaderas, y en la medida en que difieren de ella, son falsas. Ahora, pues, sometámoslas a examen. (Wright, 1599, pp. 54-55)

Para realizar esta comparación entre los tres escenarios, Wright (1599) propone un ejemplo de ángulos de rumbo entre los paralelos de 50° y 60° de latitud, como se ilustra en la figura 5.42. Establece dos lugares que difieren en 10 grados de latitud y longitud a los que llamamos A y B, y concluye que, en el mapa equidistante, esa diferencia hace que los lugares estén conectados por un ángulo de 45°, mientras que en los otros dos el ángulo es mayor. En la figura 5.42 se muestra cómo se vería el ángulo de rumbo de 45° en estos dos. Además, hace referencia de que esto en el primero y el tercero varía según la latitud, mientras que, en el mapa equidistante, sin importar la latitud en la que estén ubicados los puntos, se mostrará igual.

> Si hay dos lugares que difieren en longitud y latitud 10 grados (el que tiene la mayor latitud está más hacia el este) la segunda figura, como ves, los hace estar cada uno de los otros al noreste y suroeste, en cualquier latitud que estén situados, ya sea más cerca o más lejos del equinoccio, como en 50 y 60, o en 60 y 70, o en 70 y 80 grados de latitud. Pero en la primera y tercera figura, estos lugares estarán casi al noreste y suroeste cada uno de los otros, en el equinoccio solamente. (Wright, 1599, p. 55)

Reconocemos que Wright (1599) en la imagen que plantea para comparar estos tres escenarios, deja en evidencia el error al que hace referencia cuando construye su tabla para la construcción del mapa, así como al énfasis de que ese error será mayor en latitudes más altas. En la figura 5.43 se muestra cómo no coincide totalmente en la esfera y en su mapa lo que se representa en el intervalo entre 70° y 80° de latitud, haciendo que en el mapa no coincida el segmento representado con el vértice del rectángulo que representa esas latitudes, mientras que en la esfera sí. Consideramos que eso lo hace de forma coherente con el error que señaló por la falta de precisión en sus cálculos por no tomar intervalos más pequeños.

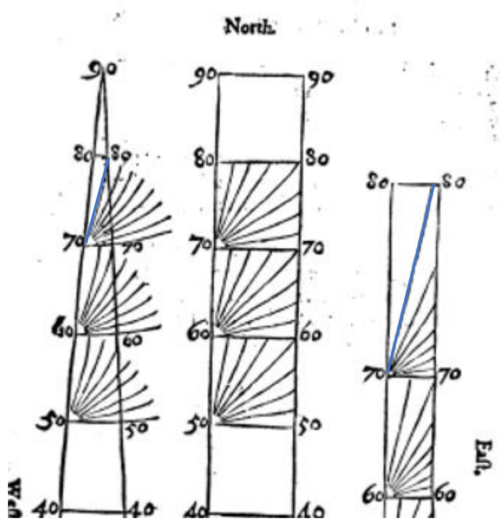
**Figura 5.42.** Comparación de ángulos en la esfera, el mapa usual y el mapa que se construye en Wright (1599).




Lo relaciona directamente con las complicaciones en el uso de la brújula para navegar a partir de la información que brindan estos mapas. Haciendo referencia a los rumbos en la esfera y en el mapa que construye que se muestran iguales, y cómo sea cual sea la situación el mapa equidistante los mostrará siempre a 45°.

> Y estando un lugar situado en 50, y el otro en 60 grados de latitud, estarán el uno del otro al noreste y por el norte, y casi medio punto al norte. En 60 y 70 grados de latitud se sitúan casi al noreste; en 70 y 80 se alejan el uno del otro apenas al norte y al este. Por lo tanto, la carta marítima común, al mostrar cómo uno de esos lugares se aleja de otro, se equivoca en el primero, un punto de la brújula y casi, pero en el tercero, más de tres puntos enteros casi. (Wright, 1599, pp. 55-56)

**Figura 5.43.** Cómo representa Wright el error en el mapa por la falta de precisión en sus cálculos.




En esta demostración que plantea Wright (1599) sobre las diferencias que hay entre ambos mapas y el globo, sigue remarcando la idea que desarrolla a lo largo de todo el texto: los errores que se podían cometer por el uso de la carta marina si no se tenía conocimiento de cómo se distorsionan las propiedades de la esfera al transformarla en un plano. En cuanto al mapa que propone afirma:

> Pero en este planisferio náutico descrito anteriormente, se evitan todos estos errores, tanto en las longitudes y latitudes, como en las distancias direccionales y situaciones respectivas de todos los lugares, cada uno de ellos según los puntos de la brújula, como por comparación similar con el globo terráqueo, será más evidente. (Wright, 1599, pp. 55-56)

Aparece la visualización como estrategia utilizada por Wright para que sus argumentos sobre los pros y contras de los mapas se comprendan mejor, resaltando la intención didáctica de su trabajo. Los rumbos, que están relacionados estrechamente con los ángulos, aparecen como justificación de lo que está bien o no en el mapa, evidenciando otro uso de objetos geométricos en este contexto.

### 5.5.3. Motivos de la publicación de 1657 y diferencias: comparación de las tablas

A partir de la lectura y el análisis de la primera edición de "*Certaine Errors in Navigation*" de Wright, publicada en 1599, y su discurso en esta, consideramos pertinente acercarnos a otra edición de dicha obra. Debido a que esta es parte del trabajo de Wright, y nos interesa ver qué cambió en el discurso del autor, y que se mantuvo, en su racionalidad.

Es por esto, que se analizará la tercera edición, que no es más que la segunda edición de 1610 publicada años después de su muerte en 1657 por Joseph Moxon como editor, quien considera que al ser una obra de relevancia para la navegación no debe morir junto con su autor, sino que debe ser difundida. Éste la dedica "Al venerable capitán Thomas Whetstone Esquire" y pide su patrocinio debido a sus intereses en matemática y navegación, mencionando la importancia del trabajo de Wright, y lo necesario de que siga vivo. Todo esto, como parte de una sección escrita por el editor antes de dar lugar a la obra de Wright propiamente, lo que se llama el Prefacio del editor.[19] Moxon sostiene:

> Y con todo, Señor, conociendo su buen afecto y perfección en las Ciencias Matemáticas, y especialmente en la rama más necesaria, más provechosa y honorable, la Navegación; me atrevo a dedicar esta tercera edición de la Corrección de Errores en el Arte de la Navegación del Sr. Edward Wright, a la aceptación y patrocinio de su muy honorable Señor. (Wright, 1657, p. 1)

Esta edición es publicada 42 años luego del fallecimiento del autor, y su editor destaca la relevancia de este trabajo para la navegación.

> Cuando consideré los elaborados esfuerzos de ese hábil matemático, el Sr. Edward Wright, pensé que era muy poco recomendable para nuestra nación inglesa que su libro tan útil (por así decirlo) durmiera hasta morir; y por lo tanto, en beneficio de los hombres de mar, he impreso una tercera impresión. (Wright, 1657, p. 3)

Se presenta a continuación en la Tabla 5.5 los contenidos de esta edición de la primera parte, *Hidrográfica*, que se analiza en este trabajo, subrayando los capítulos del 4 al 9 que no aparecen en la primera edición, y que tienen que ver con el uso de la tabla para la construcción del mapa. En este sentido, reconocemos que es la tabla que propone Wright para la separación de los paralelos el principal cambio, y se agregan capítulos que tiene que ver con la explicación de esta.

[19] Esta parte de la obra es un agregado del editor, y las páginas no están numeradas, para fines de citas en este trabajo, se numerará exclusivamente ese prefacio del editor de 1-5.

**Tabla 5.5.** *Contenidos de la primera parte de Wright (1657).*

| HIDROGRÁFICA | |
|---|---|
| **Detección de errores en la carta marítima** | Capítulo 1. Fallas en la Carta del Mar común, con Rumbos expresados por líneas rectas, y grados de Latitud, cada vez igual. |
| **Corrección de errores en la carta marítima** | Capítulo 2. Cómo se pueden evitar los errores anteriores.<br>Capítulo 3. El uso de las dos primeras columnas de la Tabla de Latitudes, para graduar un Meridiano en la Carta de Mar general.<br>**Capítulo 4.** Forma de graduar el meridiano de una carta de mar general.<br>**Capítulo 5.** El uso de la tabla de Latitudes para la graduación verdadera de una Carta de Mar particular.<br>**Capítulo 6.** Dada la anchura de una carta particular, dividirla en los grados y minutos contenidos en la diferencia de las menores y mayores Latitudes que en ella se expresan.<br>**Capítulo 7.** El uso de la tercera columna de la tabla de Latitudes.<br>**Capítulo 8.** Cómo describir mecánicamente los rumbos en cualquier carta marina, globo terráqueo o mapa de cualquier forma.<br>**Capítulo 9.** El uso de la tabla de Latitudes para hacer la tabla de Rumbos.<br>Capítulo 10. El uso de esta Tabla de Rumbos.<br>Capítulo 11. Una Demostración muy clara y sensata de la concordancia de este Planisferio náutico, con el Globo, y de la discordancia de la carta de mar común a ambos.<br>Capítulo 12. El uso de este planisferio. |

Nota: Se traducen de la obra original los nombres de los capítulos.

A partir de la explicación de Wright (1599) sobre la construcción de la tabla, se desprende que la que presenta en esa edición tiene base en otra que implica una mayor extensión y precisión, que es la que se publica en su segunda edición en 1610 y luego en 1657. Se presenta la tabla más extensa, con la intención de relacionarla con la primera publicada, ver qué cambia y cómo para comprender por qué su decisión de agregar la tabla ampliada.

En la tercera edición de "*Certaine Errors in Navigation*" se expone la tabla que menciona Wright (1599) en su explicación, en la que los paralelos están distanciados por un minuto de latitud y que se muestra en la figura 5.44. Se reitera la explicación que se da en la primera edición en cuanto a la suma de las secantes, se ejemplifica con los primeros tres paralelos (1, 2 y 3 minutos de latitud), y se agrega la argumentación sobre cada columna de la tabla, ya que se adiciona una columna que muestra la secante de cada ángulo de latitud que es lo que se le suma en cada intervalo para la separación de los paralelos.

**Figura 5.44.** Tabla ampliada para la verdadera división de los meridianos.

14 *A Table of Latitudes &c.*

| Minut. | 0 Degr. Equal parts of a Merid. | Difference of equ. par. | 1 Degr. Equal parts of a Merid. | Difference of equ. par. | 2 Degr. Equal parts of a Merid. | Difference of equ. par. | 3 Degr. Equal parts of a Merid. | Difference of equ. par. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 00.000 | 10.000 | 600.012 | 10.001 | 1.200.196 | 10.006 | 1.800.749 | 10.013 |
| 1 | 10.000 | 10.000 | 610.013 | 10.001 | 1.210.202 | 10.006 | 1.810.762 | 10.014 |
| 2 | 20.000 | 10.000 | 620.014 | 10.001 | 1.220.208 | 10.006 | 1.820.776 | 10.014 |
| 3 | 30.000 | 10.000 | 630.015 | 10.001 | 1.230.214 | 10.006 | 1.830.790 | 10.014 |
| 4 | 40.000 | 10.000 | 640.016 | 10.001 | 1.240.220 | 10.006 | 1.840.804 | 10.014 |
| 5 | 50.000 | 10.000 | 650.017 | 10.001 | 1.250.226 | 10.006 | 1.850.818 | 10.014 |
| 6 | 60.000 | 10.000 | 660.018 | 10.001 | 1.260.232 | 10.006 | 1.860.832 | 10.014 |
| 7 | 70.000 | 10.000 | 670.019 | 10.001 | 1.270.238 | 10.006 | 1.870.846 | 10.014 |
| 8 | 80.000 | 10.000 | 680.020 | 10.002 | 1.280.244 | 10.007 | 1.888.860 | 10.015 |
| 9 | 90.000 | 10.000 | 690.022 | 10.002 | 1.290.251 | 10.007 | 1.890.875 | 10.015 |
| 10 | 100.000 | 10.000 | 700.024 | 10.002 | 1.300.258 | 10.007 | 1.900.890 | 10.015 |
| 11 | 110.000 | 10.000 | 710.026 | 10.002 | 1.310.265 | 10.007 | 1.910.905 | 10.015 |
| 12 | 120.000 | 10.000 | 720.028 | 10.002 | 1.320.272 | 10.007 | 1.910.920 | 10.015 |
| 13 | 130.000 | 10.000 | 730.030 | 10.002 | 1.330.279 | 10.007 | 1.931.935 | 10.015 |
| 14 | 140.000 | 10.000 | 740.032 | 10.002 | 1.340.286 | 10.007 | 1.940.950 | 10.016 |
| 15 | 150.000 | 10.000 | 750.034 | 10.002 | 1.350.293 | 10.007 | 1.950.966 | 10.016 |
| 16 | 160.000 | 10.000 | 760.036 | 10.002 | 1.360.300 | 10.007 | 1.960.982 | 10.016 |
| 17 | 170.000 | 10.000 | 770.038 | 10.002 | 1.370.307 | 10.008 | 1.970.998 | 10.016 |
| 18 | 180.000 | 10.000 | 780.040 | 10.002 | 1.380.315 | 10.008 | 1.981.014 | 10.016 |
| 19 | 190.000 | 10.000 | 790.042 | 10.002 | 1.390.323 | 10.008 | 1.991.030 | 10.016 |
| 20 | 200.000 | 10.000 | 800.044 | 10.002 | 1.400.331 | 10.008 | 2.001.046 | 10.017 |
| 21 | 210.000 | 10.000 | 810.046 | 10.002 | 1.410.339 | 10.008 | 2.011.063 | 10.017 |
| 22 | 220.000 | 10.000 | 820.048 | 10.002 | 1.420.347 | 10.008 | 2.021.080 | 10.017 |
| 23 | 230.000 | 10.000 | 830.050 | 10.002 | 1.420.355 | 10.008 | 2.031.097 | 10.017 |
| 24 | 240.000 | 10.000 | 840.052 | 10.003 | 1.440.363 | 10.008 | 2.041.114 | 10.017 |
| 25 | 250.000 | [illegible] | 850.055 | [illegible] | 1.450.371 | [illegible] | 2.051.131 | [illegible] |

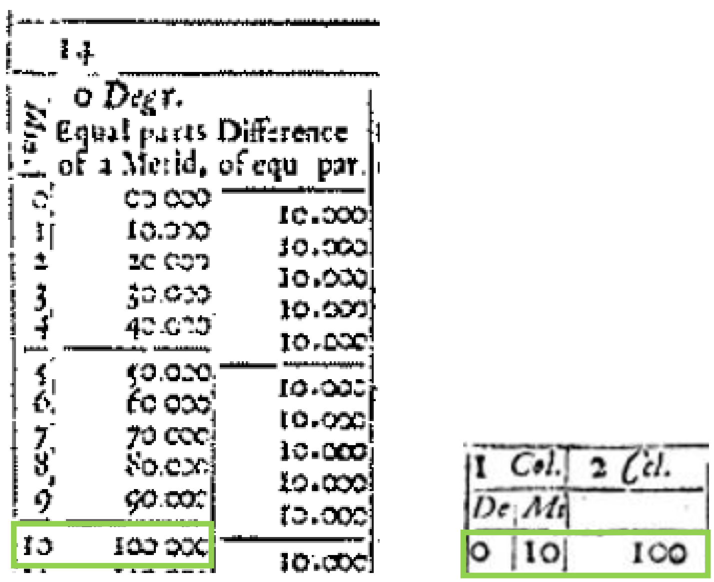
Nota: Imagen extraída de Wright (1657, p. 15).

Esta tabla está dividida en tres columnas, de las cuales la primera contiene, en la parte superior, los grados, y en el resto de la columna, los minutos de un meridiano del planisferio náutico, comenzando en la línea equinoccial. En la segunda columna se colocan partes iguales del mismo Meridiano, comenzando igualmente a ser numeradas desde el Equinoccio (de las cuales se supone que cada minuto del Equinoccio contiene 10.000) y muestra cuántas de estas partes debe distar cada minuto de latitud en la Carta del Mar del Equinoccio. La tercera columna muestra las diferencias de los números establecidos en la segunda columna. (Wright, 1657, p. 13)

## ¿Cómo se relacionan las tablas?

Wright (1599), realiza la explicación a partir de la distancia entre dos paralelos de un minuto, que es la situación que se presenta en la tabla de la tercera edición en 1657. Justifica su abreviación para su publicación en 1599 por fines prácticos y editoriales debido a su extensión. Wright (1599) hace referencia a que se desprecian las últimas tres cifras de la secante, por lo que por ejemplo para 1 minuto era 10.000.000, quedando entonces 10.000, a lo que además agrega que se desprecia también, para poder acortar esta tabla, las tres últimas cifras dando lugar a la segunda columna, a partir de la columna de la tabla pensada de un minuto: "*Equal parts of a Meridian*", que se muestra en la figura 5.45.

**Figura 5.45.** Comparación de las tablas de las ediciones 1599 y 1657.



14

0 Degr.

| Min. | Equal parts of a Merid. | Difference of equ par. |
|---|---|---|
| 0 | 00 000 | 10.000 |
| 1 | 10.000 | 10.000 |
| 2 | 20 000 | 10.000 |
| 3 | 30.000 | 10.000 |
| 4 | 40.000 | 10.000 |
| 5 | 50.000 | 10.000 |
| 6 | 60 000 | 10.000 |
| 7 | 70 000 | 10.000 |
| 8 | 80.000 | 10.000 |
| 9 | 90.000 | 10.000 |
| 10 | 100 000 | 10.000 |

| 1 Col. | | 2 Col. |
|---|---|---|
| De | Mi | |
| 0 | 10 | 100 |

Nota: Imágenes extraídas de Wright (1657, p. 15) y Wright, (1599, p. 21) respectivamente.

En esta figura se muestra la parte de la tabla presentada por Wright (1657), para los paralelos de latitudes que van de 0 a 10 minutos, de uno en uno, correspondiéndole al paralelo de 10 minutos, 100.000, siendo esto la suma de todas las anteriores, 10.000 por cada paralelo anterior, como se muestra en la tercera columna de la tabla. Al acortarla a intervalos de 10 minutos, y además quitarle las últimas tres cifras es que se obtiene la tabla resumida, de 100.000 se pasa a 100, ese contraste de las dos ediciones se muestra en la figura 5.45 y permite comprender con mayor claridad el porqué del 100 en la tabla de (Wright, 1599).

En la tabla de Wright (1657), al agregar la tercera columna, está mostrando la separación de cada paralelo respecto al anterior, por lo que muestra cómo varía la secante en intervalos de un minuto. Y será esto lo que se le sume a todos los anteriores. Dedica el capítulo 7 a explicar por qué agrega esta última columna a la tabla, en principio afirma que es como tener una tabla de la secante, por lo que se podría utilizar para cualquier fin que se utilice comúnmente. Además de servir para la construcción de la segunda columna, es fácil corregir algún error de cuentas si se la tiene a la mano. Wright (1657) afirma que:

> Por lo tanto, también se puede saber con exactitud la proporción de cualquier paralelo con el Equinoccio. Porque la proporción que tiene la diferencia que responde a cualquier grado y minuto en esta tabla con respecto a 10.000, es la misma proporción que tiene el Equinoccio con respecto al paralelo que responde a ese grado y minuto. (Wright, 1657, p. 43)

A partir de esto, Wright (1657) plantea una forma de calcular las leguas en un grado de cualquier paralelo de latitud, a partir de esta diferencia de la tabla (secante), debido a que expresa la proporción del paralelo con el ecuador.

> Y por consiguiente, como las partes semejantes de los círculos son proporcionales a sus enteros, por la presente puedes averiguar muy fácilmente y con verdad cuántas leguas contiene cualquier arco de cualquier Paralelo: porque como la diferencia que responde a la Latitud del Paralelo es a 10.000, así los minutos contenidos en ese arco son a las millas de este; que divididas por 3, dan las leguas. (p. 44)

Utiliza aquí la equivalencia entre millas y leguas de distancia, una legua es igual a tres millas, y que el arco correspondiente a un minuto de círculo máximo mide una milla. Varía de la edición anterior la medida de un grado de círculo máximo que era 17,5 leguas, ahora la toma como 20 leguas. Proporciona un ejemplo para el cálculo de leguas para un grado del paralelo que pasa por Londres, a partir de la tercera columna de la tabla, la correspondiente a la secante que facilita estos cálculos porque indica la proporción en que se estira cada paralelo.

> Por ejemplo, si se quiere saber cuántas leguas componen un grado en el Paralelo de Londres, cuya Latitud es de 51 grados 32 minutos: como 16.075 la diferencia que responde a esa Latitud

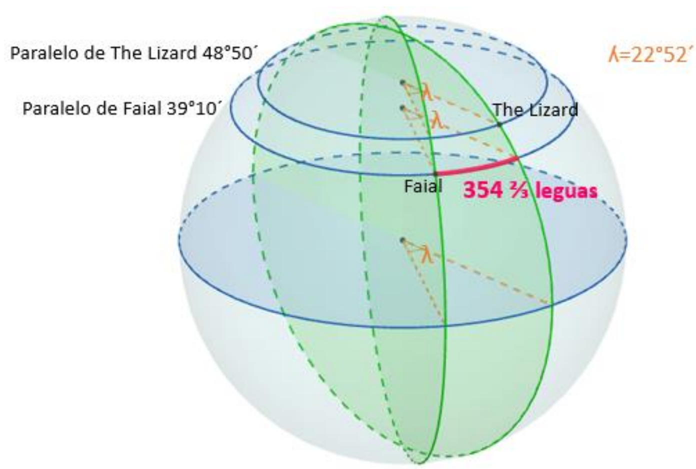
es a 10.000, así es 20 (el número de leguas contenidas en un grado del Equinoccial) a 12 284/643 el número de leguas que hacen un grado en el Paralelo de Londres. (Wright, 1657, p. 44)

$$12\frac{284}{643} = \frac{20x10.000}{16.075}$$

Y este cálculo se relaciona estrechamente con la diferencia de longitud que Wright (1599, 1657) atiende en el primer capítulo de su tratado, tomándolo como un error frecuente por no considerar esta proporción de estiramiento de los paralelos. Conociendo la diferencia de longitud en grados entre dos puntos en un mismo paralelo, y las leguas por grado de este, su producto dará la distancia en leguas de esos dos puntos. Wright (1657) sostiene que existe otra forma que se podría calcular de manera más sencilla esa diferencia de longitud entre dos puntos, y propone dos que no se encuentran en el mismo paralelo, pero que toma como referencia el que pasa por uno de ellos. Se acompaña este planteo de Wright (1657) con la figura 5.46.

Como por ejemplo: admitir que la diferencia de Longitud entre The Lizard y Faial sea de 22 grados 52 minutos, es decir, 1372 minutos, que multiplicados por 10.000, hacen 13.720.000: y esto dividido por 12.898 (que es la diferencia de las partes iguales que responden a 39 grados 10 minutos, la latitud de la esquina noreste de la Isla Faial) os dará 1064 millas casi, es decir 354 ⅔ leguas, la diferencia de sus Longitudes contadas en el Paralelo de Faial. (Wright, 1657, p. 44)

**Figura 5.46.** Cálculo de la diferencia de longitud en leguas entre The Lizard y Faial.



Estos cálculos que Wright (1657) realiza con base en la tercera columna de la tabla, afirma que tienen origen en el cálculo del factor de estiramiento que realiza en ambas ediciones en el capítulo 2, y que se describió en este trabajo anteriormente.

## 5.6. Algunas reflexiones y Resultados

Reconocemos a partir del análisis de la obra de Wright, que su intencionalidad es construir un mapa en el que las curvas loxodrómicas se mostraran como líneas rectas, ya que eran relevantes para la navegación. Para lograr esto identificamos que el uso de objetos geométricos le permite explicar la proyección con la que este se construye, por lo que son funcionales a su intención.

Este mapa que propone influye de forma directa la práctica de la navegación, por lo que destacamos además su intencionalidad didáctica. En este sentido, los objetos geométricos aparecen con valor de uso, ya que dan sustento sólido a sus argumentaciones.

### Compensación y la distorsión del mapa

En el análisis de la obra de Wright, identificamos que él reconoce que existe un problema al utilizar los mapas. Este debido a que no se comprendía el fundamento matemático de la proyección y porque la propia práctica de la navegación se lo indicaba, se perdían cuando consideraban como líneas rectas trayectorias con ángulos de rumbo constante en el mapa equidistante. A partir de esto el autor propone una ***compensación*** de la distorsión de forma vertical, que en el mapa equidistante es únicamente horizontal. Esto permite que las líneas rectas en el mapa que propone representen curvas loxodrómicas que determinan una trayectoria con ángulo de rumbo constante en la esfera. Este tipo de curvas que no son parte de la matemática escolar, emergen del contexto de la navegación con la brújula, y es parte de la racionalidad de quienes navegan, dejando en evidencia la intencionalidad con la que se elabora el mapa que explica Wright en su tratado.

Luego de la identificación del *uso* de los objetos geométricos de Wright en su obra analizada, proponemos que la ***compensación*** es central para su explicación y razonamiento, siendo funcional para *equivaler* la distorsión horizontal con una vertical que permita que se conserven los ángulos, de forma tal que las curvas loxodrómicas se representen como líneas de rumbo rectas en el mapa.

Estamos entendiendo por *compensar*: Determinar la magnitud que debe estirar verticalmente para que cuando compare con la horizontal, se mantenga la proporción entre meridiano y paralelo que se tiene en el globo. Dicha *compensación* es necesaria para el objetivo final, hacer que las curvas loxodrómicas se representen como rectas.

Para poder *compensar*, Wright primero *compara* la proporción entre paralelo y meridiano en la esfera, con esa misma proporción en el mapa equidistante, reconociendo que no son iguales. La *compensación* estará dada entonces por determinar en qué magnitud se estiró el paralelo en la proyección, para distorsionar en la misma medida de forma vertical. Es decir, *equivaler* mediante esa *compensación* las distorsiones en dirección vertical y horizontal, de forma que la proporción entre paralelo y meridiano se mantenga igual que en la esfera. Con respecto a esto, inferimos que la epistemología de prácticas que se articula en la elaboración de este mapa para la navegación estará dada por: *comparar*, *compensar* y *equivaler*, como se muestra en la figura 5.47.

La estructura que organiza la explicación de Wright es la siguiente: expone las razones por las que la mala interpretación del mapa que se utilizaba para la navegación genera errores, muestra algunos ejemplos concretos que los hace evidentes, y propone cómo corregirlos. Rescataremos entonces elementos para la corrección de esos errores que desembocan en la construcción de un mapa en el que se necesita de la *compensación* de la distorsión.

**Figura 5.47.** Comparar-compensar-equivaler.


Desde el principio de su trabajo, Wright alude a que los errores en la interpretación del mapa que se utiliza para la navegación tienen que ver con no contemplar cómo influye la distorsión en sentido horizontal. En el **E1** al mencionar los trabajos previos que ya expusieron dichos errores, refiere a que esos se corrigen con un aumento en la distancia de separación de los paralelos, de forma que se mantenga la proporción entre paralelo y meridiano que tienen en la esfera.

> Debo responder que, en efecto, con motivo de ese mapa de Mercator, pensé por primera vez en corregir tantos y tan groseros errores y absurdos, como los que a continuación se muestran en la carta marina, aumentando las distancias de los paralelos, desde el equinoccio hacia los polos, de tal manera que en cada punto de latitud de la carta, una parte del meridiano pudiera tener la misma proporción con la parte similar del paralelo, que tiene en el globo. (Wright, 1599, p. 9)

Mantener igual esa proporción en la esfera y en el mapa es lo que hará que el ángulo de rumbo se conserve en el mapa a lo largo de una línea recta, por lo que la navegación por dichas líneas hace que cobre sentido esa *compensación*. Expone en el **E3** evidencia de cómo se distorsiona únicamente en la dirección de los paralelos, siendo las medidas de los meridianos iguales en ambos escenarios y reconociendo que dicha proporción dependerá de la posición de cada paralelo.

> Porque, en primer lugar, cualesquiera que sean los lugares descritos en ella, la longitud de estos (de Este a Oeste) tiene una mayor proporción con respecto a la amplitud (desde el Norte o el Sur) de lo que en realidad debería tener (a menos que sea en el equinoccio). Y este error aumenta tanto más cuanto más distantes están esos lugares del equinoccio: así como la proporción del Meridiano al Paralelo, aumenta tanto más cuanto más cerca se está de cualquiera de los dos Polos. (Wright, 1599, p. 1)

Expone un ejemplo en el paralelo de 60° de latitud, que se estira al doble de su medida, comparando los dos escenarios, tomando como referencia la proporción de la esfera, de la siguiente forma: "la proporción entre la longitud y la amplitud es dos veces mayor de lo que debería ser" (p. 2). Así mismo, refiere a un ejemplo en el que esa diferencia se hace cuatro veces mayor, en Groenlandia aludiendo también a que en cada paralelo esa proporción cambia.

Otro aspecto para resaltar es que considera al ecuador como referencia de lo que se mantiene igual en ambos escenarios. En este esa proporción que le interesa conservar se mantiene igual que en la esfera. Mostramos en el **E4** el ejemplo que propone Wright sobre el error en el cálculo de la diferencia del ángulo de longitud en el mapa. Menciona que ese cálculo sólo es verdadero en el ecuador, y lo utiliza además para *comparar* las distorsiones en otros paralelos, expresando que cuanto más lejos del ecuador se encuentre el paralelo, mayor será la diferencia entre esas proporciones en la esfera y el mapa.

Este ejemplo que exponemos en el **E4**, ubicado en el paralelo de 60° de latitud, lo acompaña con la imagen que se muestra en la figura 5.48, y que hace evidente esa *compensación* de distorsiones, así como en la explicación que realiza de esta. Este paralelo se estiró en el plano al doble de su medida en la esfera, por lo que establece dónde debería ubicarse un punto si esa distorsión se *compensara*.

Wright describe la situación de la siguiente forma:

> Como por ejemplo: en el paralelo de 60 grados en la Carta marina común (en la que los grados de los meridianos, y los paralelos son iguales) admitir BD ser dos lugares que llevan cada uno de otros suroeste y noreste que difieren en la latitud tanto como en el arco del meridiano BC, que por ejemplo vamos a suponer que es en un grado, por lo tanto por las cartas ordinarias la diferencia de longitud CD, será igualmente un grado. (Wright, 1599, p. 3)

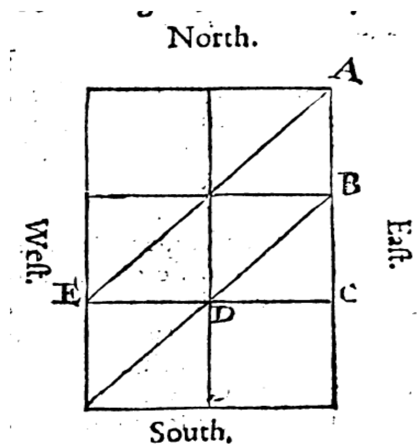
Haciendo referencia a dónde debiera ser ubicado el punto D, si se *compensara* la distorsión horizontal, de forma que se mantenga la proporción de la esfera. Este ejemplo deja en evidencia que primero se realiza ese estiramiento horizontal y luego, se *compensa* verticalmente.

> Pero sin embargo, en verdad, porque el meridiano es doble al paralelo, y en consecuencia, un grado del meridiano doble a un grado del paralelo, por lo tanto B difiriendo un grado en latitud de D debe ser colocado dos veces tan lejos de C, es decir en A, para que A B C pueda ser todo contado para un grado del meridiano, y así ser igual a dos grados del paralelo, de lo que debería seguirse que E C debería ser la diferencia de longitud, es decir, dos grados, como la verdad en el globo, mientras que la Carta Marina común mostraba que la diferencia de longitud era sólo la mitad. (Wright, 1599, p. 3)

La imagen misma muestra esta *compensación*, coloca el punto más arriba para dar cuenta de que un grado de meridiano ahí debería representarse dos veces más grande como se hace con el paralelo, denotando que el estiramiento del meridiano se debe realizar en proporción al del paralelo. Una vez expuesto este ejemplo, refiere a que la distorsión será diferente en cada paralelo y mayor a medida que se aleja del ecuador y se acerca al polo. Reafirmando este punto propone un ejemplo en el paralelo de

39° de latitud con una trayectoria de navegación conocida entre Lisboa y las islas Terceira y Madeira, en el que el cálculo del ángulo de diferencia de longitud en el mapa indicará un ángulo menor al que es en realidad.

**Figura 5.48.** Compensación en la imagen que presenta Wright.




Nota: Imagen extraída de Wright (1599, p. 3).

En el **E7** Wright refiere a la transformación detrás de la proyección de Mercator a partir de un modelo en el que se pasa de la esfera a un cilindro y luego al plano. Reconocemos que, en esta explicación, la forma de inflarse de la esfera está asumiendo implícitamente que esa distorsión de los paralelos sea *compensada* por el estiramiento de los meridianos.

> Que esta superficie esférica se infle como una cámara de aire, (mientras está soplando) siempre por igual en cada parte de ella (es decir, tanto en longitud como en latitud) hasta que se aplique, y se agrande (alrededor, y todo a lo largo también hacia cualquiera de los polos) a la superficie cóncava del cilindro: cada paralelo sobre esta superficie esférica aumenta sucesivamente desde el equinoccio hacia cualquiera de los polos, hasta que llega a tener el mismo diámetro que el cilindro, y por consiguiente los meridianos siguen ensanchándose, hasta que llegan a estar tan distantes unos de otros como lo están en el equinoccio. (Wright, 1599, p. 13)

Según este modelo, la esfera se infla por igual en cada parte, describiendo que cada paralelo desde el ecuador al polo se estira hasta tener el diámetro del cilindro, y como consecuencia de esto los meridianos son rectas paralelas y equidistantes, siendo la medida que los separa, la distancia que tenían en el ecuador. En esta descripción se confirma la *compensación* que postulamos, ya que, al estirarse los paralelos, en la misma proporción lo hacen los meridianos, debido a que se infla igual en cada punto. Reafirmando esta idea, se hincha en cada parte por igual en latitud y longitud, lo que hace que se distorsione en ambas direcciones. Como dijimos anteriormente, la *compensación* está implícita, el modelo que propone considera la distorsión simultáneamente en las dos direcciones.

> Así pues, el planisferio náutico puede definirse como un paralelogramo formado por las superficies esféricas de un globo hidrográfico inscrito en un cilindro cóncavo, en el que sus dos ejes coinciden en uno y las superficies esféricas se hinchan en cada parte por igual en longitud y en latitud, hasta que cada uno de los paralelos se inscribe en el cilindro (cada paralelo crece como el equinoccio) o hasta que toda la superficie esférica, se toca y se aplica en todas partes a la concavidad del cilindro. (Wright, 1599, p. 14)

Si bien reconocemos esa *compensación*, Wright expresa y deja en claro que esta transformación que plantea permite conservar esa proporción entre paralelo y meridiano que existía en la esfera.

> En segundo lugar, porque la superficie esférica de la que se ha concebido este planisferio, se hincha en cada una de sus partes por igual, es decir, tanto en latitud como en longitud, es decir, se aplica a sí misma alrededor, a la concavidad del cilindro: por lo tanto, en cada punto de latitud en este planisferio, una parte del meridiano, mantuvo la misma proporción a la parte similar del paralelo, que las partes similares del meridiano, y el paralelo tienen entre sí en el globo, sin error explicable. (Wright, 1599, p. 15)

En el **E8**, al hallar el factor de estiramiento específico de cada paralelo, que está dado por la secante del ángulo de latitud, Wright menciona que ese estiramiento es el que se *compensará* verticalmente.

> Por lo tanto, en su planisferio náutico, siendo el semidiámetro de cada paralelo igual al semidiámetro del equinoccio (es decir) al seno entero, las partes del meridiano en cada punto de latitud deben aumentar necesariamente con la misma proporción con la que aumentan las secantes, interceptadas entre esos puntos de latitud y el equinoccio. (Wright, 1599, p. 17)

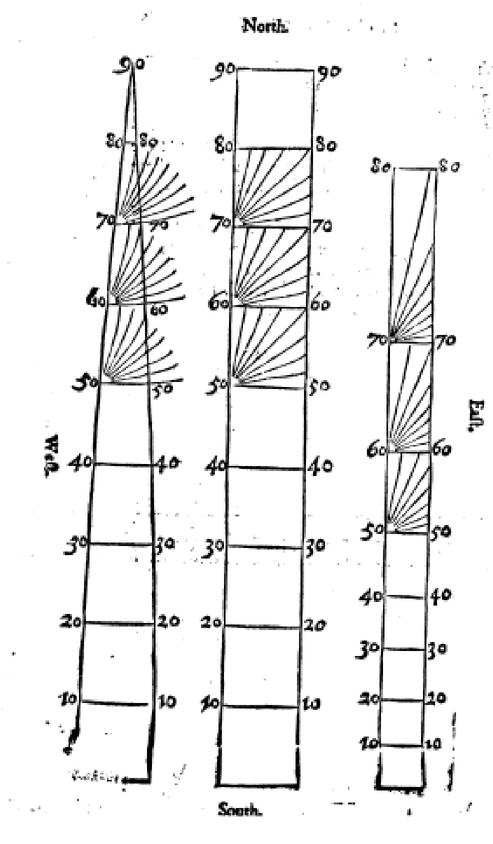
En el **E9** se expone la explicación de Wright acerca de la tabla que permite la construcción del mapa. Wright argumenta como corrige el error, separando los paralelos, de forma que el espacio entre ellos ya no sea igual entre todos, sino que dependerá de la secante del ángulo de latitud que determinó el estiramiento de dicho paralelo, de forma de *compensar* esa distorsión verticalmente, con la intención de que sean iguales en ambos sentidos. Esa *compensación* estará dada por la suma de la secante de cada paralelo.

> Porque (suponiendo que la distancia de cada punto de latitud, o de cada paralelo de otro, contenga tantas partes como la secante de la latitud de cada punto o paralelo contenga) por adición perpetua de las secantes correspondientes a las latitudes de cada punto o paralelo a la suma compuesta de todas las secantes anteriores, comenzando por la secante del primer paralelo de latitud, y añadiendo a ésta la secante del segundo paralelo de latitud, y a la suma de ambas la secante del tercer paralelo de latitud, y así sucesivamente en todos los demás, podemos hacer una tabla que muestre las secciones y puntos de latitud en los meridianos del planisferio náutico: por cuyas secciones, los paralelos han de ser trazados. (Wright, 1599, pp. 17-18)

Wright propone considerar para esto, paralelos separados a un minuto de latitud, y en la edición de 1599 se muestra una tabla de con intervalos de diez minutos. Inferimos de sus explicaciones acerca de la precisión de la tabla, que la *compensación* de esas distorsiones se realiza de mejor forma cuanto mayor sea la cantidad de intervalos que considere.

En el **E10** se hace evidente la *compensación* de las distorsiones en la figura que presenta Wright, ésta es un claro resumen de todo lo que fue explicando y argumentando a lo largo de los capítulos anteriores. En esa, al confrontar los tres escenarios: los dos mapas y la esfera, muestra cómo concuerdan la esfera y el mapa para la navegación, dejando en evidencia los errores que se comente con el mapa equidistante. Todo lo explicado se condensa en esta imagen que se muestra en la figura 5.49. Así mismo, aparece recién en este sentido la referencia explícita al ángulo de rumbo en los mapas, y los toma como referencia para la comparación. Hasta ahora habló de compensar distorsiones horizontales con verticales para que las proporciones entre meridianos y paralelos sean equivalentes a las de la esfera, sin decir explícitamente el hecho de que esa equivalencia lo que lograba era representar los ángulos de rumbo como líneas rectas, que es lo que está haciendo que este mapa sea construido. En esta imagen, los ángulos de rumbo son los que muestran esa concordancia entre esfera y mapa de Mercator, y discordancia entre esfera y mapa equidistante.

**Figura 5.49.** Compensación y los tres escenarios.




Nota: Imagen extraída de Wright (1599, p. 57).

La relevancia del ángulo de rumbo como forma de comparación entre los escenarios genera que la *compensación* de las distorsiones sea funcional a la intencionalidad original, lograr que las loxodrómicas se expresen como líneas rectas. Que estas sean proporcionales incide en que la línea de rumbo sea representada como línea recta, y el contraste entre lo que sucede con estas en la esfera y ambos mapas, muestra explícitamente la concordancia entre la esfera y el mapa pensado para la navegación. La actividad humana, en este caso la práctica de la navegación está normando el quehacer de Wright como geómetra que pone en uso sus conocimientos de la disciplina matemática para hacer más accesible las técnicas para quienes navegaban. Todo lo expuesto es un ejemplo de cómo la matemática es parte de un contexto, vive en otra disciplina y se resignifica y adquiere sentido al dar solución a un problema real, que tuvo lugar en el siglo XVI.

## Intencionalidad didáctica y cscm

A partir del análisis contextual y textual, consideramos relevante señalar cómo la dimensión didáctica del *saber* influye en la *construcción social de conocimiento*. Esta dimensión del *saber* está presente en cualquier actividad humana, cuando se pretende enseñar o divulgar un conocimiento.

Wright a partir de los conocimientos matemáticos que posee, explica la construcción de un mapa para la navegación con base en fundamentos geométricos. Además, no sólo expone estos fundamentos, sino que tiene una intencionalidad didáctica en su trabajo. De lo contrario, podría haber expuesto únicamente la fundamentación matemática con el que se construye el mapa. Pero Wright quiere que su trabajo llegue al marinero para mejorar así las técnicas de navegación. Él lo hace explicito, y además lo reconocemos cuando usa argumentos geométricos articulados con elementos fundamentales del contexto.

Consideramos que dicha intencionalidad didáctica se puede observar en sus reflexiones y argumentaciones desde dos epistemologías: marineros y geómetras. Wright las articula como consecuencia de conocimientos que posee como parte de su propia experiencia, debido a que, por ser conocedor de la Geometría es enviado por la Reina a navegar con el Conde de Cumberland, con la finalidad de observar y mejorar las técnicas de navegación. La relación de Wright con el *saber* está en función del contexto, es decir, su forma de actuar está influenciada por el contexto histórico, social y cultural en el que está inmerso, lo que desde la *TSME* se entiende como *racionalidad contextualizada*. Es dicha práctica la que determina que el mapa que se quiere elaborar sea de esa forma y no de otra, y este está influenciado por la epistemología de prácticas de los marineros.

En contraposición, el trabajo realizado por Nunes y que consideramos como parte de nuestro análisis contextual, no muestra esa articulación de las epistemologías, sino que tiene exclusivamente la epistemología del geómetra, y el no reconocer la del marinero hace que no se transmita ese conocimiento hacia esa comunidad, es decir que sus explicaciones no transcienden porque carecen de funcionalidad para la intención. Por ejemplo, propone un método por el cual se podría navegar aproximando la trayectoria de un círculo máximo que sería la óptima si se quiere recorrer la distancia más corta, a partir de segmentos de curvas loxodrómicas, pero que distaba mucho de las posibilidades de llevarlo a cabo por los instrumentos y las técnicas de navegación de la época.

Consideramos que la *racionalidad contextualizada* de ambos autores nos permite explicar estos dos ejemplos concretos, de dos geómetras involucrados en resolver problemas sobre la navegación, uno con conocimiento práctico y el otro únicamente el conocimiento teórico. Es decir, por un lado, Nunes era exclusivamente geómetra y no había tenido experiencia en la navegación, y por otro Wright articula las epistemologías. Esta diferencia determina cómo es su relación con el saber, y la forma en que lo transmiten. Planteamos que en este caso no basta para evidenciar el *uso* de los objetos geométricos en este contexto con mirar solo el saber sabio, sino que el *uso* necesita de otro tipo de saberes, popular, técnico, es decir, de una aproximación centrada en la sabiduría humana. Con base en esto, en el E6 del análisis de Wright se muestra cómo él considera esa diferencia entre navegar por una curva loxodrómica o por un círculo máximo. Reconocemos la epistemología del marinero, ya que la navegación por el círculo máximo era imposible en esa época, por lo que le importaba que en el mapa las curvas accesibles sean las loxodrómicas.

Según el análisis de la obra, daremos evidencias de la articulación de esas epistemologías, con ejemplos que propone conocidos por la experiencia de la navegación. Esto hace que Wright genere un saber que por cómo lo expresa se puede interpretar desde la TSME como una descentración del objeto, y esto le permite al autor dotar de valor funcional a los objetos, y por tanto de significados.

Comenzaremos destacando que la forma en la que Wright estructuró esta primera parte del tratado es evidencia de esa intencionalidad. Primero expone los errores que se cometen por la mala interpretación del mapa, errores que él y los marineros conocen por su propia experiencia, y lo hace desde ejemplos concretos en donde brinda argumentaciones sostenidas sobre argumentos matemáticos. Luego, muestra cómo se corrigen esos errores, y, por último, explica cómo se construye un mapa que los soluciona.

En el **E1** mostramos como Wright reconoce que poner en uso los conocimientos geométricos que poseía, específicamente sobre la forma de la esfera y cómo ésta afectaba a la navegación y a la construcción del mapa, podía ser beneficioso para quienes estaban en el mar haciendo uso de ese mapa. Esto le daba posibilidades de acercar una mejor explicación o solución a los problemas que tenían, y lo expone para que consideren su trabajo como herramienta.

> Ahora bien, si alguien piensa que está más allá de la habilidad de un hombre de tierra, encontrar defectos en asuntos que pertenecen al arte y la profesión del hombre de mar, debe saber, si aún no ha aprendido, que uno que no está más que razonablemente familiarizado con los conceptos geométricos, puede tan bien, si no mejor, que la mayoría de los hombres de mar, conocer la naturaleza y las propiedades de la forma esférica de la tierra y el mar, con todas las consecuencias y dependencias de la misma. (Wright, 1599, p. 11)

En el **E2** reconocemos la epistemología del marinero como parte de su racionalidad contextualizada y menciona la intención de que su trabajo llegue a éste y a su práctica.

> Ahora bien, si alguien piensa que la mayor parte de esta cuarta parte que va antes de este regimiento, podría haberse omitido, por ser impertinente para el uso de los marineros, y por exceder su capacidad: Respondo que no era mi propósito, ni podía en todos los lugares, aplicarme a la mayor parte de la capacidad de los marineros: conociendo a muchos que no se contentarían con este regimiento solamente, sino que deseaban más conocer la raíz de donde crecía este producto: cuyo deseo también estaba dispuesto a satisfacer como pudiera por el momento, habiendo tenido rara vez una temporada más inconveniente para tal propósito. (Wright, 1599, p. 3).

Proporciona ejemplos concretos de la experiencia en la navegación para hacer referencia a cómo la distorsión horizontal del mapa influye a cometer errores por no considerarla en su interpretación. En el **E4** con el cálculo de la diferencia del ángulo de longitud en dos puntos que se encuentran en el paralelo de 39° de latitud, en el **E5** con el cálculo de distancias entre lugares. Estos ejemplos se relacionan de forma directa con trayectorias y ángulos de rumbos conocidos desde la experiencia, es decir que son parte de la epistemología de los marineros que reconocemos en Wright.

En el **E6** toma en cuenta aspectos desde la experiencia de navegantes sobre las rutas de navegación que se seguían por ser más seguras, evidenciando la racionalidad del navegante. Expone cómo genera conflictos en la práctica la transformación que fundamenta el mapa, ya que no conserva ángulos. Aborda el mismo problema que planteó Nunes, la diferencia entre navegar por un círculo máximo o una curva loxodrómica en la esfera, y en su propuesta de la elaboración del mapa reconocemos la articulación entre las epistemologías del marinero y geómetra que configuran su racionalidad.

En el E9 del análisis mostramos como propone la corrección de tales problemas con la elaboración de un mapa para la navegación. Si bien, desde su racionalidad de geómetra tiene ciertas consideraciones en cuanto a la precisión de sus cálculos, sabe que en la práctica de la navegación ciertas aproximaciones o consideraciones no la afectarían, y harían que el mapa les sea funcional para el fin de navegar. Esto se muestra en el siguiente fragmento:

> Aquel que quiera ser más preciso puede hacer la misma tabla de décadas o decenas de segundos de *Ioachimus Rhaticus su Canon magnus triangulorum*. Sin embargo, el geómetra que desea la verdad exacta no puede estar satisfecho tampoco, para cuya falsa y mayor satisfacción, pensé que no estaba de más adjuntar también este concepto geométrico de dividir un meridiano del planisferio náutico. (Wright, 1599, p. 19)

El error que le atribuye a la tabla se relaciona con la epistemología del geómetra, no con la del marinero, porque para fines prácticos la precisión con la que la realiza es más que suficiente de acuerdo con los instrumentos que se tienen en ese contexto.

> Este error podría ser menor si la tabla anterior se hubiera hecho primero en partes más pequeñas y luego en minutos. Pero esto sería un asunto más curioso que necesario, ya que la tabla aquí expuesta está tan cerca de la verdad, que no es posible, por medio de las reglas o instrumentos de navegación, descubrir ningún error sensible en la carta marítima, en la medida en que se haga de acuerdo con ella. (Wright, 1599, p. 28)

Con respecto a lo expuesto, planteamos que localizar el *uso* de los objetos geométricos en este caso, exige de atender los diferentes saberes, es decir, no es posible reconstruir solo con base en el saber sabio, sino que expresa una racionalidad que considera que la resolución de los problemas de navegación se obtendrá únicamente de comprender los elementos del contexto. Mostramos cómo la *racionalidad contextualizada* provoca diferentes formas de transmitir los conocimientos. Por un lado, Wright con una epistemología que toma en cuenta la diversidad de saberes y los articula, por otro Nunes que se centra en el saber sabio.

Sostenemos con base en la evidencia que una aproximación centrada en la sabiduría humana, es decir, en las diferentes formas del saber en contraste con una aproximación centrada en una dominante, generan argumentos diferenciados, y esto para efectos didácticos será de relevancia porque la escuela centra la atención en el sabio. Considerar entonces la *racionalidad contextualizada* robustece las posibles intervenciones didácticas a partir de esa diferencia mostrada entre estos autores.

### Valor de uso

Con base en el análisis que realizamos, afirmamos que para Wright los objetos geométricos viven en dos escenarios: en el escenario académico y en el escenario de la navegación. Es decir, domina el conocimiento geométrico tanto en la práctica como en la teoría. Él refiere en su obra a los objetos geométricos vinculándolos a un uso específico en el contexto. Reconocemos que Wright identifica en el contexto el significado de objetos geométricos que conoce en el uso formal de la propia disciplina. Con respecto a esto, toma en cuenta los objetos geométricos en contexto con una intencionalidad y funcionalidad. El *valor de uso* es aquello que adquiere el objeto al brindarle un funcionamiento por una intencionalidad. En este caso, en el contexto de la creación de un mapa para la navegación, los objetos geométricos son funcionales para la elaboración de argumentos sólidos. A Wright, la Geometría le permite dar sustento a sus argumentos, pero a su vez, reconoce que la epistemología de los marineros es imprescindible para que lo que plantea sea llevado a la práctica. Por lo que, el valor de uso de estos objetos en el contexto se relaciona de forma directa con la intención didáctica de Wright de que su trabajo sea atendido por quienes estaban a cargo de la navegación.

Consideramos entonces que la epistemología de Wright da cuentas de que no está centrado en los objetos, sino que se articula con una epistemología de prácticas, y es esta articulación que hace que el uso de esos objetos geométricos tenga funcionalidad en el contexto. La descentración del objeto de Wright jerarquiza de forma horizontal los saberes, haciendo fundamental su articulación. El contexto provoca que emerja la curva loxodrómica que necesitará del uso de objetos geométricos para explicarla, así mismo, la transformación de la esfera al plano requerirá de poner en uso objetos geométricos de forma tal que estas líneas de rumbo que surgen de la práctica se puedan representar como líneas rectas y que facilite la navegación.

El uso de los objetos geométricos es funcional a la intencionalidad de mejorar la práctica de la navegación, a partir de conservar cierta propiedad geométrica en la construcción del mapa. Estos aparecen jugando un rol protagónico en ambos escenarios simultáneamente, en la esfera y en el plano, y comprender qué conserva el mapa dependiendo de la transformación que está detrás hará que se signifiquen los objetos geométricos en ese uso concreto. ¿Cómo se transforma la esfera en un plano y conservo ciertas propiedades que serán funcionales a una intencionalidad?

En este sentido, la imagen que muestra Wright que confronta los tres escenarios (figura 4.49), resume cómo el *valor de uso* que adquieren los objetos está determinado exclusivamente por la práctica de la navegación, específicamente un mapa que la haga más eficiente.

El valor de uso que adquieren los objetos desde lo que la *TSME* propone como su descentración, es decir considerar a las prácticas como parte fundamental en la construcción del saber, se contrapone al rol que desempeñan en el *dME*, en el que se jerarquiza el saber sabio por encima de los otros saberes, desprovisto de todos los atributos que mostramos que la epistemología de prácticas le brinda. Creemos que no es lo mismo un enfoque centrado en objetos, que reconocerlos con valor de uso. Por ejemplo, la curva loxodrómica que mantiene un ángulo de rumbo constante, como un objeto que emerge de un contexto. Entonces cuando se le atribuye la intencionalidad de la navegación, el objeto geométrico que es parte del *dME* se pone en uso con la intencionalidad de conservar el ángulo de rumbo que le es funcional al contexto.

# **Capítulo 6.** Diseño exploratorio

En este capítulo presentamos el diseño exploratorio y la implementación con profesoras de educación secundaria uruguaya. Rescatamos algunos elementos del análisis contextual y textual de la obra de Wright. El objetivo de este es que nos sirva como un primer acercamiento del contexto de la navegación del siglo XVI y las proyecciones de mapas a las profesoras, tratando de identificar si ponen en uso conocimientos geométricos que ya tienen desde su formación, al abordar una situación que no es típicamente escolar. Esta implementación nos dará insumos para robustecer la problematización, y considerar aspectos a tener en cuenta para desarrollar un diseño de intervención más fino luego. Nos preguntamos, *¿Cómo los profesores ponen en uso sus conocimientos geométricos en un diseño que no es típicamente escolar? ¿La distorsión de la proyección del mapa es un contexto en el que se ponen en uso objetos geométricos y que se puede considerar como objeto de enseñanza?*

Comenzamos con una descripción de la población de interés, explicamos cómo se construyeron las tareas del diseño exploratorio[20], la implementación con los profesores, resultados y conclusiones de esta.

## 6.1. Población Objetivo

El Instituto de Profesores "Artigas" de la Administración Nacional de Educación Pública de Uruguay[21], fundado por Ley Nro. 11.285 del 2 de julio de 1949, tiene por cometido la formación especializada de docentes de educación media, mediante un régimen de estudios de nivel terciario. La duración de los estudios que se imparten en esta institución ha sido y es actualmente de cuatro años, excepto en el período de 1977-1985, que se redujo a tres.

[20] El diseño se muestra en el Anexo 4.
[21] http://ipa.cfe.edu.uy/index.php

La formación de profesores se estructura en tres Núcleos Formativos: Núcleo de Formación Profesional Común (*NFPC*), Específico (*E*) y Didáctica/Práctica Docente (*D/PD*), y se rige actualmente por el Plan 2008[22]. Las asignaturas son anuales, excepto los Seminarios que son semestrales. En cuanto a estos núcleos formativos, el profesor de matemática cuenta a lo largo de su carrera con 18 cursos del *NFPC*, 11 del *E* y 4 de *D/PD*, con la carga horaria semanal que se muestra en la tabla 6.1.

**Tabla 6.1.** *Carga horaria semanal de cada Núcleo Formativo.*

| | *NFPC* | *E* | *D/PD* |
|---|---|---|---|
| **Primer año** | 15hs | 16hs<br>Geometría I (8)<br>Fundamentos de la Matemática (8) | 2hs |
| **Segundo año** | 12hs | 15hs<br>Álgebra Lineal y Geometría (8)<br>Análisis I (7) | 10hs<br>Teóricas (3)<br>Prácticas (7) |
| **Tercer año** | 9hs | 17hs<br>Probabilidad y Estadística (6)<br>Análisis II (6)<br>Topología (5) | 10hs<br>Teóricas (3)<br>Prácticas (7) |
| **Cuarto año** | 9hs | 18hs<br>Profundización (6)<br>Análisis del Discurso Matemático Escolar (5)<br>Física (4)<br>Historia de la Matemática (3) | 10hs<br>Teóricas (4)<br>Prácticas (6) |

## Selección de la población

Se realizó un diagnóstico que nos brindó información acerca de los perfiles de los profesores, y permitió la selección de estos para la implementación del diseño exploratorio. Se les envió un formulario en línea, que se muestra en el Anexo 2, y a partir de sus respuestas, que se exponen en el Anexo 3, se realizó la selección de los profesores. El formulario tiene diversidad de modalidad de respuestas a las diferentes preguntas: *varias opciones* -el profesor deberá marcar una sola opción-; *casilla* -puede marcar

[22] http://cfe.edu.uy/index.php/planes-y-programas/planes-vigentes-para-profesorado/44-planes-y-programas/profesorado-2008/380-matematica

todas las opciones que considere necesario-; *respuesta corta* -puede escribir su respuesta-; *párrafo* -puede escribir su respuesta y desarrollar una explicación-.

Se dividió en cuatro secciones. La primera concerniente a *información profesional* con la intencionalidad de reconocer el perfil del profesor en cuanto a su formación. Se pregunta su grado de formación, considerando de base que los profesores a los que se les envió el formulario son egresados de la carrera de profesorado del Instituto de Profesores Artigas de Montevideo, Uruguay. Se cuestiona acerca de los cursos de la formación y la relevancia que consideran tienen en su labor docente.

La segunda sección es relativa a sus preferencias en el aula y en relación con el currículo. Tiene la finalidad de identificar aspectos referidos a los años de experiencia, cursos en los que se desempeña como profesor actualmente, preferencias sobre cursos y currículo.

En la tercera sección se tiene por objetivo reconocer con qué tipo de respuesta a un problema se sienten identificados, a partir de la comparación de tres soluciones abordadas por argumentos diferentes, así como rescatar elementos de la justificación de esa elección.

La cuarta y última sección de este diagnóstico tiene como propósito analizar si los profesores poseen conocimientos sobre proyecciones de mapas, y cuáles son. Se realiza una pregunta abierta en la que tienen que comparar cuatro proyecciones de mapas. Se quiere contrastar diferentes proyecciones, con la representación de la Tierra que cada profesor reconoce como familiar, y que ha sido construida de acuerdo con su acercamiento a las diferentes proyecciones. Se escogieron cuatro imágenes que pongan en contraste dicha representación con otras que no son las que se conocen típicamente, y que puedan expresar qué tan cerca o lejos está de la representación que reconocen como familiar. Se opta por no preguntar directamente, sino que desde la confrontación de varias podremos obtener información acerca de conocimientos previos que tienen o no sobre la temática, así como sobre el reconocimiento de las distorsiones en los diferentes mapas.

Se seleccionaron las cuatro proyecciones que se describen a continuación porque se visualizan diferencias con la de Mercator, y pueden permitir identificar si reconocen a esta como familiar, así como su distorsión.

1. **Proyección de igual área de Gall-Peters.** La igualdad de áreas dentro del rectángulo determinado por el uso de paralelos estándar de 45° (aquel en el que no hay distorsión y las distancias coinciden con la escala especificada) hace que las regiones ecuatoriales se alarguen mucho verticalmente y se compriman horizontalmente, mientras que las latitudes más altas se alargan mucho horizontalmente y se comprimen verticalmente. (Robinson, 2017a, p. 12)

2. **Homolosena de Goode interrumpida, proyección de igual área.** Se trata de una combinación de la sección ecuatorial mejor formada de la proyección sinusoidal y de la sección polar menos comprimida de la proyección Mollweide. Además, cada segmento continental está centrado en su propio meridiano central, utilizando así las secciones menos distorsionadas de las proyecciones para las zonas terrestres. (Robinson, 2017a, p. 6)

3. **Proyección de Mercator.** Cilíndrica. Conforme, conserva ángulos y su objetivo es la navegación con la brújula, pero tiene grandes distorsiones de áreas en las zonas de latitudes altas.

4. **Proyección equidistante.** Los meridianos son rectas paralelas equidistantes que miden la mitad de la longitud del Ecuador. Los paralelos aparecen como líneas rectas paralelas igualmente espaciadas equidistantes, perpendiculares y con el mismo espaciamiento que los meridianos (Snyder y Voxland, 1989, p. 22).

Se plantea una pregunta sobre la distancia que representan dos segmentos en el mapa construido con la proyección equidistante, con la intención de identificar si reconocen que los mapas están distorsionados por ser una transformación de la esfera al plano, así como confrontar luego su respuesta con el diseño exploratorio.

Con base en las respuestas recibidas se seleccionaron dos profesoras (que nombraremos Profesora A y Profesora B) debido a su formación, su cantidad de años en ejercicio y algunas de sus respuestas. Ambas profesoras cursaron Profundización en Geometría como parte de su formación, son egresadas del Instituto de Profesores Artigas, tienen 5 y 6 años de experiencia de trabajo en aula y se encuentran actualmente en ejercicio.

La **Profesora A** reconoce Profundización en Geometría como un curso de relevancia en su formación, además destaca como temáticas que prefiere abordar en clase la Geometría métrica y analítica. En cuanto a las proyecciones de mapas, identifica a la proyección de Mercator como la más familiar, mencionando que el hemisferio norte por lo general se representa más grande que el hemisferio sur, denotando una intencionalidad política detrás. En cuanto a las distancias representadas en la proyección equidistante, las reconoce como igual en el mapa, pero afirma que no es lo que sucede en la esfera, dando cuentas de que tiene cierto conocimiento sobre la distorsión del mapa.

La **Profesora B** reconoce el curso de Geometría como relevante en su formación. En cuanto a las proyecciones de mapas, realizó una reflexión sobre cómo afecta la forma de la esfera las medidas que representan esos segmentos, identifica que el mapa tiene determinada distorsión y se cuestiona sobre qué implicancias tiene la transformación de la esfera al plano.

## 6.2. Diseño exploratorio

La estructura del diseño exploratorio se muestra en la Tabla 6.2 y estará dividida en tres *momentos*. El primero tendrá por objetivo familiarizar a los profesores con las coordenadas geográficas de un punto en la esfera y su relación con los ángulos de latitud y longitud. En el segundo, se cuestiona acerca de la naturaleza de la esfera y cómo su forma afecta la navegación, a partir de preguntas que tienen que ver con la navegación siguiendo la trayectoria por paralelos y meridianos, rescatados del análisis de (Wright, 1599). El tercero estará destinado a dar explicación a la proyección equidistante con la que se construía el mapa con el que se navegaba, y cuestionar acerca de su distorsión y cómo esta afecta las distancias. Se exponen a continuación los diferentes momentos de la tarea, su justificación a partir de la *problematización del saber matemático* y se explicará la intención de cada una.

**Tabla 6.2.** *Momentos del diseño exploratorio.*

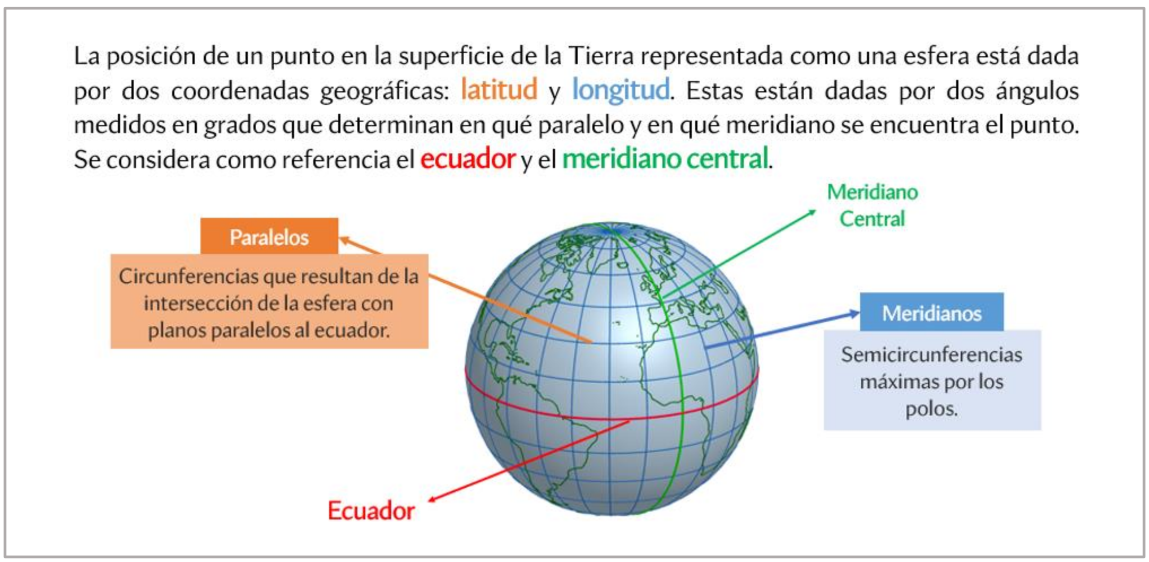
| DISEÑO EXPLORATORIO | |
|---|---|
| Momento 1 | Introducción. Se definen las coordenadas geográficas. Posición de los paralelos y meridianos. Ángulos de latitud y longitud. Se ejemplifica. |
| Momento 2 | Navegación en la esfera. Se cuestiona cómo afecta la forma esférica de la Tierra determinadas situaciones de navegación. Principalmente se apela a ejemplos con trayectorias por paralelos y meridianos. |

| | |
|---|---|
| Momento 3 | Proyección equidistante. Reconocimiento de los efectos que genera la proyección con la que se construye el mapa en las distancias representadas y sus relaciones con los ángulos de latitud y longitud. |

## Momento 1: Introducción

En este primer *momento* del diseño exploratorio se introducen las coordenadas geográficas. Es un conocimiento que pueden no poseer los profesores o no recordar, por lo que se les acercará para comenzar a familiarizarse con el contexto de la esfera. Se presenta una definición de los paralelos y meridianos, como se muestra en la figura 6.1, y se identificarán como referencia relevante el ecuador y el meridiano principal.

**Figura 6.1.** Momento 1. Introducción.




Se indica la relación de los paralelos y meridianos con los ángulos de latitud y longitud, como se muestra en la figura 6.2. El ángulo de latitud proporciona información sobre el paralelo en el que se ubica un punto, y el ángulo de longitud del meridiano. Se muestra un ejemplo, el punto P con sus coordenadas $\theta$ y $\lambda$ de latitud y longitud respectivamente. Además, se presenta un punto R con sus coordenadas geográficas, que se muestra en la figura 6.3.

Figura 6.2. Coordenadas geográficas del punto P.

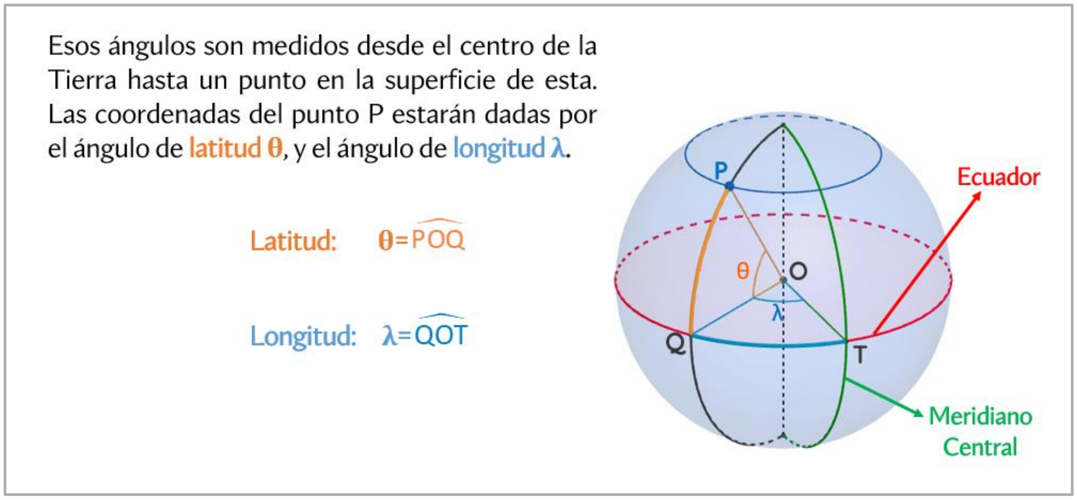
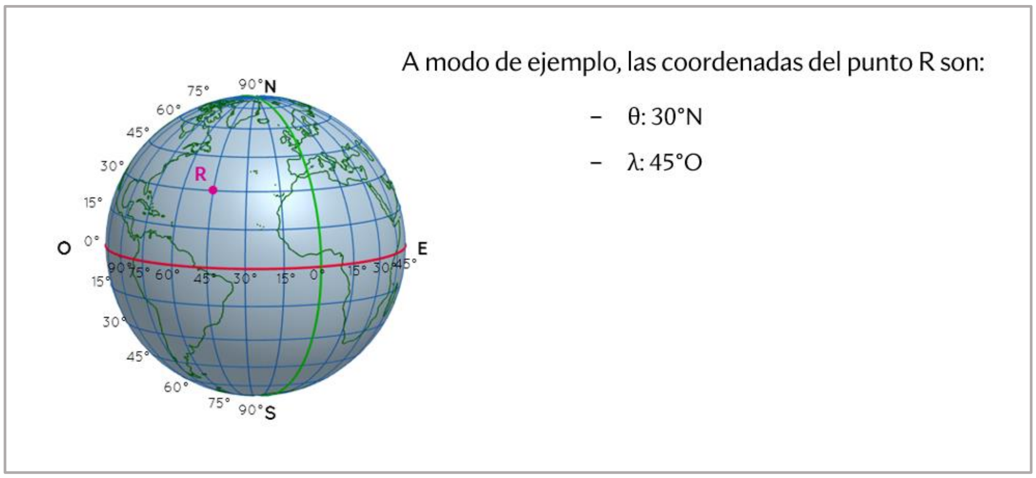



Figura 6.3. Coordenadas geográficas del punto R.




## Momento 2: Navegación en la esfera

Este momento consta de tres partes, y tiene la finalidad de familiarizar a los profesores con la esfera y cómo su forma afecta a la navegación. Cuestionar cómo se lleva a cabo la navegación considerando a la esfera, tomando como ejemplos los paralelos y meridianos, para que se confronte luego con la transformación de ésta al plano. Se quiere evidenciar que los paralelos son circunferencias con diferentes medidas en la esfera y que ésta depende del ángulo de latitud, así como cuestionar acerca de la medida de distancias en la esfera y su relación con los ángulos de latitud y longitud. Todo esto con base en el análisis que hicimos y en cómo Wright reconoce la importancia de conocer la esfera para comprender la navegación en ella y la transformación al mostrarla en un plano, que se expone en el **E1**.

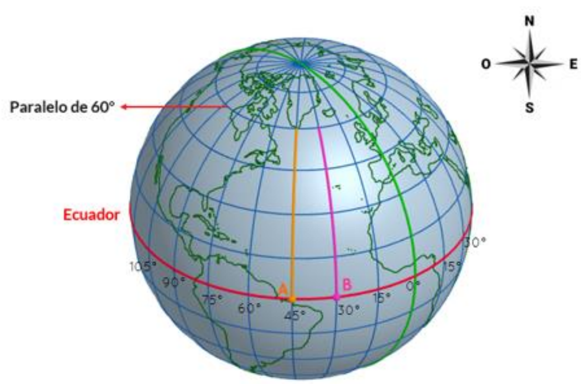
Además, en las explicaciones que realiza Wright sobre las causas de los errores por la mala interpretación del mapa, refiere a la esfera y compara con ésta el mapa equidistante.

## Momento 2, Parte A (M2-A)

Esta parte del *momento* 2 se muestra en la figura 6.4, tiene por objetivo cuestionar cómo afecta la convergencia de los meridianos en la esfera a las medidas de los paralelos, y a las distancias que se pueden medir en ellos, tomando como contexto la navegación. La distancia en kilómetros entre dos meridianos recorrida en cada paralelo disminuye al ser más cercana a los polos. Nos basamos para esta parte del diseño en el **E5** de nuestro análisis, que cuestiona este punto y Wright lo expone como un punto clave de confrontación entre esfera y plano, por lo que consideramos que comprenderlo en la esfera será luego relevante al abordar la proyección del mapa.

**Figura 6.4.** Momento 2, Parte A (M2-A).

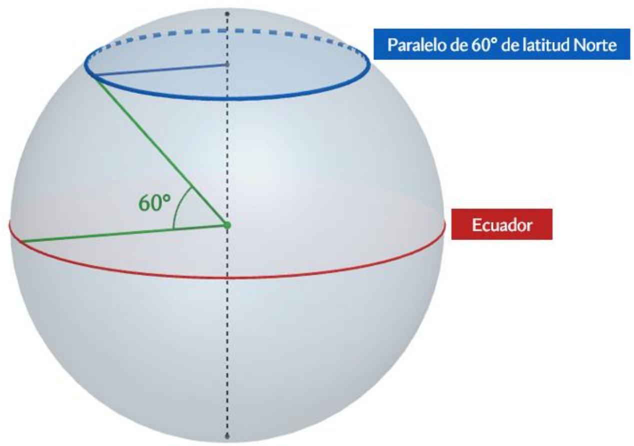
Supongamos que dos barcos parten del ecuador de los puntos A y B, con una distancia entre ellos de aproximadamente 1670 km, con dirección Norte, como se muestra en la figura. Si al llegar al paralelo de 60° de latitud Norte, el barco que partió de A frena y el barco que partió de B lo quiere alcanzar navegando hacia el Oeste por ese mismo paralelo, ¿Cuál sería la distancia que recorrería? ¿Por qué?




En esta parte se esperaba que los profesores puedan dar una respuesta a partir de reconocer que la trayectoria la realizaron cada barco por el mismo meridiano, determinando que el ángulo de longitud de los puntos A y B será el mismo que los puntos de llegada al final del recorrido, en el paralelo de 60°. Los barcos no cambian su posición en cuanto al meridiano, pero sí de posición con respecto al paralelo. Ese cambio de posición, hace que la distancia recorrida por el paralelo al que llegan sea menor que la que tenían en un comienzo, debido a que se considera la forma de la esfera.

Para hallar esa distancia en el paralelo de 60° de latitud para que el barco B alcance al barco A, se debe reconocer a dicho paralelo como una circunferencia, como se muestra en la figura 6.5. Para hallar la medida del arco de esa circunferencia que determina el recorrido, es necesario conocer el radio de esta. Luego conociendo el ángulo que abarca dicho arco de circunferencia, se podrá dar respuesta, relacionando los elementos del círculo.

**Figura 6.5.** Paralelo 60° de latitud Norte en la esfera.



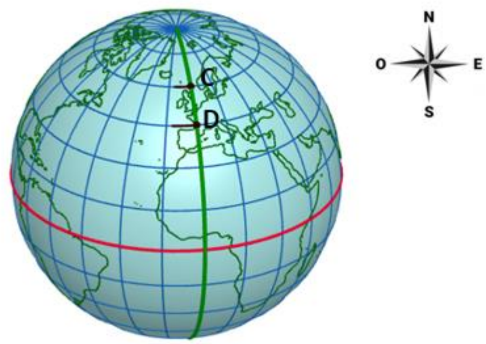

No se dice de forma explícita en la consigna cuánto mide el radio de la esfera, que representa a la Tierra. Se considerará de 6378 km, y de ser requerido, se les proporcionó esa información. El radio de la circunferencia que representa al paralelo de 60° de latitud se puede hallar a partir del radio de la esfera y el ángulo de latitud, siendo este r=6378.cos60°=3189. Concluyendo que el perímetro de la circunferencia que representa dicho paralelo es la mitad que la del ecuador, por lo tanto, la distancia que recorrerá el barco que partió de B, será de 835 kilómetros.

## Momento 2, Parte B (M2-B)

Esta parte del diseño exploratorio se muestra en la figura 6.6, y tiene por objetivo relacionar las distancias recorridas en los paralelos con los ángulos de longitud. Se recorre una misma distancia en dos paralelos distintos, por lo que el ángulo de longitud recorrido no será el mismo en ambas situaciones. En el paralelo que tenga mayor latitud y por tanto medida menor, se abarcará un ángulo mayor. Basamos esta parte del diseño en los E4 y E8 del análisis de la obra de Wright.

**Figura 6.6.** Momento 2, Parte B.

Si suponemos que dos barcos parten de los puntos C y D manteniendo un rumbo Oeste, en el mismo paralelo, y ambos recorren una distancia de 1000km, ¿cuál es el ángulo de longitud de los puntos de llegada?




Para dar respuesta se debe reconocer los paralelos de 45° y 60° de latitud Norte como circunferencias con diferentes medidas. El paralelo de 60° de latitud fue utilizado en el razonamiento de la parte A, por lo que ya se podría conocer su radio. De forma análoga, se procede con el paralelo de 45° de latitud y se encuentra su radio. En este caso, se conocen las medidas de los radios y de los arcos de circunferencias recorridos en cada caso, el objetivo es hallar el ángulo que abarca, que en este caso es el ángulo de longitud. El punto de llegada del barco que parte de C, tendrá un ángulo de longitud de 17°58´ y el ángulo de longitud del punto de llegada del barco que parte de D será de 12°42´.

## Momento 2, Parte C (M2-C)

En esta última parte del *momento 2* que se muestra en la figura 5.7, se presenta lo que desde el contexto de la navegación Wright (1599) presenta como un "*rumbo seguro*" que seguían algunos marineros experimentados, expuesto en el E6. La intención es ver qué pueden identificar de ese rumbo, por qué podría afirmar ser seguro para los marineros navegar por paralelos y meridianos con los instrumentos que poseían en la época. Identificar si las partes A y B permiten dar respuesta. En caso de que no se pueda, no se indagará más allá de lo que se responda por parte de los profesores.

**Figura 6.7.** Momento 2, Parte C.

En el contexto del siglo XVI, la navegación tenía un papel importante para el comercio y la expansión de las naciones europeas. Los instrumentos que tenían para la navegación en esa época permitían saber la posición según el paralelo en el que se ubicaban, es decir, la latitud; con la brújula en particular determinaban la dirección del Norte.

Se presenta lo que los navegantes experimentados luego de varias pruebas y errores reconocían como un "*rumbo seguro*" del punto A al B.
¿Por qué crees que ese rumbo lo reconocían como seguro?

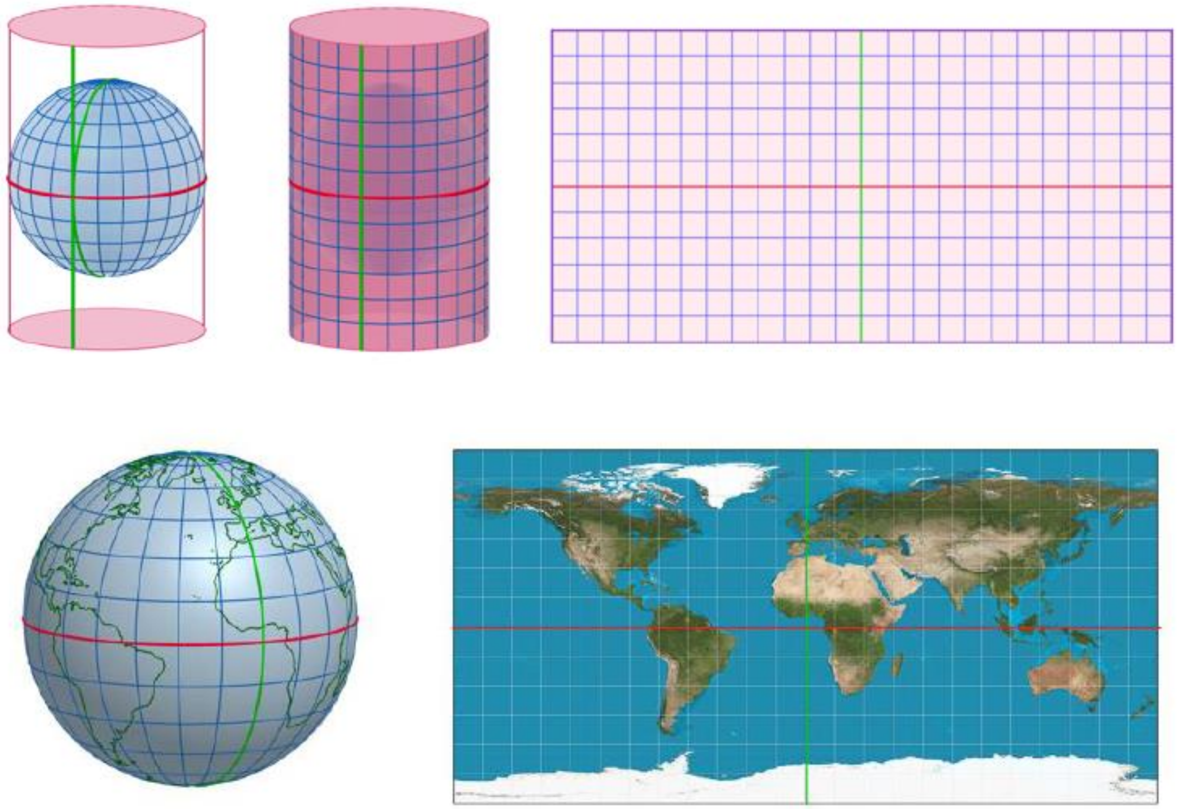

## Momento 3: Proyección equidistante

Se realiza una explicación cualitativa sobre la proyección equidistante con la que se quiere mostrar cómo se transforma la esfera al plano. Esta proyección es la que Wright (1599) describe que se utilizaba para construir el mapa para navegar, y que utilizarlo como instrumento sin comprender la proyección detrás hacía que se incurra en errores que él expone. Se presenta la siguiente explicación:

El mapa que se utilizaba en el siglo XVI para la navegación estaba construido con la proyección equidistante. En esta, el ecuador mantiene la misma medida que en el globo terráqueo que se tome como referencia para construirlo, así como los meridianos que miden la mitad del ecuador. Por su parte, todos los paralelos que en la esfera son circunferencias que tienen diferentes medidas, se representan paralelos al ecuador y con la misma medida de este.

Se acompaña esta con las imágenes que se muestran en la figura 6.8, en la que primero se explica la transformación mediante el pasaje de la esfera al cilindro, y luego al plano, para que se comprenda de forma visual cómo es la proyección. Además, se muestra una imagen del globo terráqueo y el mapa.

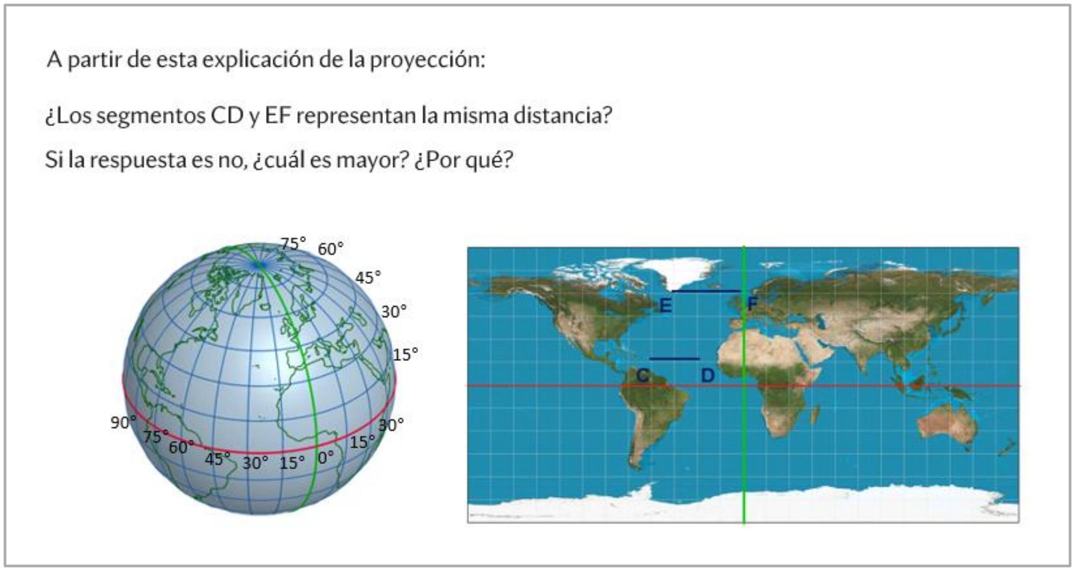
**Figura 6.8.** Momento 3. Proyección equidistante.



Una vez realizada la explicación se plantea la pregunta que se muestra en la figura 6.9, en la que se cuestiona acerca de cómo están interpretando los profesores esa proyección. Se pretende investigar si lo que se reflexionó en los demás momentos del diseño se pone en juego en este tercer momento, en el que tienen que confrontar los dos escenarios: la esfera y el plano.

En este caso se muestran dos segmentos que representan distancias diferentes, el segmento CD abarca dos unidades de la cuadrícula y se ubica en el paralelo de latitud 60° Norte, y el segmento EF abarca dos unidades de la cuadrícula y se ubica en el paralelo de latitud 15° Norte. En este caso, no se presentan segmentos que abarquen la misma cantidad de cuadrícula como en el diagnóstico porque consideramos que después del *momento 2* del diseño exploratorio la respuesta se puede volver más evidente.

**Figura 6.9.** Momento 3, Parte B.




## 6.3. Descripción-Análisis y Resultados

El diseño exploratorio se implementó con dos profesoras de matemáticas, que llamaremos Profesora A ($P_A$) y Profesora B ($P_B$), mediante dos sesiones de Zoom individuales, que tuvieron una duración de 47 minutos ($P_A$) y 132 minutos ($P_B$). En estas se les presentó el diseño y se les pidió que resolvieran los problemas planteados, y que explicaran cómo procedieron. Realizaremos una breve descripción sobre el trabajo de cada una de las profesoras en las diferentes partes del diseño, se harán comentarios que servirán para el análisis, y luego se expondrán resultados.

En la introducción acerca de las coordenadas geográficas ambas profesoras dieron cuenta de que estaban comprendiéndolas. La única aclaración que la $P_A$ pidió fue si los meridianos se consideran semicircunferencias máximas.

### Descripción - Análisis y Resultados: (M2-A)

Esta parte del diseño fue la que requirió más tiempo en los dos casos, al ser la primera, necesitaron familiarizarse con la propuesta de trabajo. Describiremos los momentos por los que transitó cada una de las profesoras para llegar a sus respuestas.

## PROFESORA A:

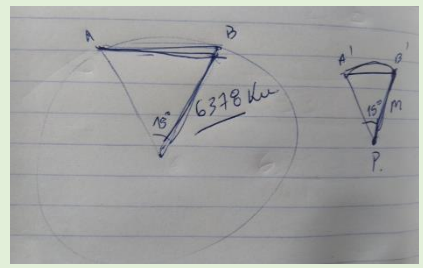
La Profesora A para dar solución a esta primera parte del diseño, pone en juego conocimientos geométricos que posee de la Geometría euclidiana. Reconoce triángulos semejantes en esas dos circunferencias, mismos ángulos y las medidas de los lados menores en el paralelo 60°, identificando cómo afecta a las distancias el contexto de la esfera. Para encontrar esa proporción reconoce triángulos rectángulos a partir de considerar el ángulo de latitud $\theta$, y utiliza la razón trigonométrica seno. Luego, la proporción entre esos triángulos, la traslada a los arcos de circunferencia que abarcan la distancia inicial entre los barcos, y la distancia a la que quedan luego del recorrido. No hace explícita la forma en que esos triángulos se relacionan con el arco de circunferencia que recorre el barco. Se expone en la tabla 6.3 el uso de los objetos geométricos en esta parte del diseño que vincula aspectos del contexto de la navegación.

**Tabla 6.3.** *Resultado M2-A, Profesora A.*

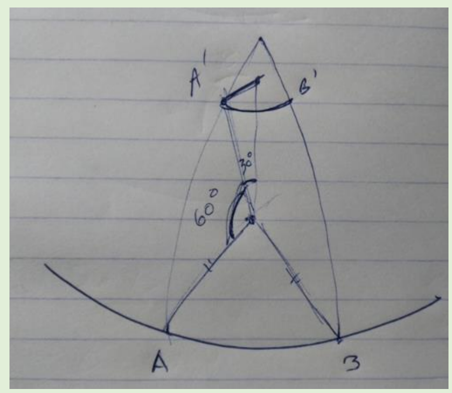
<table>
<tr><th colspan="5">M2-A: PROFESORA A</th></tr>
<tr><td>¿Qué objetos geométricos usa?</td><td>Triángulos isósceles en planos paralelos.</td><td>Triángulos semejantes.</td><td>Ángulos complementarios.</td><td>Razón trigonométrica: seno</td></tr>
<tr><td>¿Cómo los usa?</td><td>Como estrategia para vincular la distancia entre los puntos de partida y los de llegada.</td><td>Como relación entre el radio de la Tierra y el radio del paralelo de 60° de latitud.</td><td>Como conexión entre el ángulo de latitud θ y el que forma parte del triángulo que está considerando.</td><td>Herramienta para hallar la medida de un lado del triángulo.</td></tr>
<tr><td>¿Para qué los usa?</td><td>Para relacionarlos y encontrar semejanza.</td><td>Para encontrar una proporción entre los lados de los triángulos.</td><td>Para determinar qué razón trigonométrica relaciona los datos que conoce.</td><td>Hallar la proporción entre los triángulos semejantes.</td></tr>
<tr><td>Contexto</td><td colspan="4">Refiere a la distancia entre los barcos considerando cómo la forma de la esfera la afecta. Refiere al contexto en el momento de dar respuesta al problema.</td></tr>
<tr><td>dME</td><td colspan="4">Hace referencia a la dificultad de trabajar en la esfera y que estaba pensando en “posibilidades planas”. Si bien dio respuesta a la pregunta planteada, no hay evidencia explícita sobre cómo vincula esos triángulos con el arco de circunferencia que recorre el barco al navegar por el paralelo de 60° de latitud.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Descripción</td></tr>
</table>

Identifica que la distancia que se recorrerá es menor que la que tenían originalmente los barcos, dando cuenta de que reconoce la forma de la esfera.
Comienza a trabajar con dos triángulos. El primero con vértices A, B y el centro de la Tierra (que nombra O), y el segundo los puntos de llegada (a los que nombra A´ y B´), y O. Los reconoce a ambos como triángulos isósceles. Dibuja dicha situación.


Considera el triángulo que está incluido en el plano que contiene al paralelo de 60° de latitud Norte, que tendrá como vértices A´, B´ y el punto de intersección entre dicho plano y el eje de la Tierra, que lo nombra P. Reconoce la semejanza entre esos dos triángulos. Afirma que conociendo el radio de la Tierra que es un dato, y calculando la medida del segmento que va de un punto de llegada a P, se puede hallar la proporción de los lados de esos triángulos. Afirma que con trigonometría ese segmento que le falta, lo podría calcular. Menciona que, si halla *m*, puede encontrar la proporción.




Identifica el ángulo de latitud θ, de 60°. Considera el ángulo complementario de 30° que se forma con el eje de la Tierra, y aplicando la razón trigonométrica seno de 30° en ese triángulo rectángulo obtiene la medida que busca.
Halla la medida del lado *m* de ese triángulo que considera, concluyendo que la proporción entre ese y su correspondiente en el triángulo ABO, es un medio. Por lo que su respuesta es que los barcos se encuentran a la mitad de la distancia que la inicial. La mitad de 1670 kilómetros.



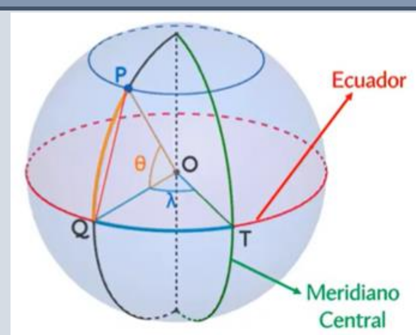

**$P_A$**: Perfecto, ese (haciendo referencia a la imagen que se le muestra). El angulito verde es 60, entonces lo otro debería ser 30, y ahí tenemos un triángulo rectángulo para hacer trigonometría y sacar el segmento, ese sería el camino. Por ahí.
**I**: Si querés yo te ayudo con los cálculos, yo te voy haciendo el cálculo que necesites, tengo la calculadora acá preparada.
**$P_A$:** Excelente. Entonces tendríamos que hacer seno de 30, ¿no? Ah, no, pero la hipotenusa no la tengo, tangente, ah no, pero tampoco tengo la... ¿o sí? Ah no, claro, tengo la hipotenusa que es el, que es el centro de la Tierra, 6378. Ta, entonces seno de 30... ¿cuánto es?
**I:** 0.5, un medio.
**$P_A$:** Bueno, entonces, 0.5 por 6378.
**I:** 3.189.

**$P_A$**: Perfecto, 3.189. Entonces 3189 mide ese segmentito azul, que es el correspondiente en la semejanza de, el centro de la tierra, del otro, o sea que es la mitad, es la mitad de la distancia. A´, B´, los barcos quedan a la mitad de la distancia. La mitad de no me acuerdo cuando era, de mil... ¿cuánto era?

## PROFESORA B:

Identificamos en lo realizado por la Profesora B una intención de querer utilizar objetos matemáticos típicos del *dME* que se relacionan con triángulos. En este sentido consideramos que se genera una confrontación entre el *dME* que norma a esta profesora y el contexto del diseño, siendo posible que nos de información sobre cómo se está comprendiendo el contexto.

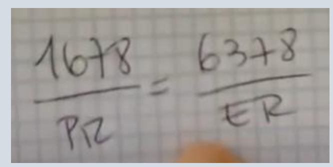
**Tabla 6.4.** *Resultado M2-A, Profesora B.*

<table>
<tr><th colspan="3">M2-A: PROFESORA A</th></tr>
<tr><td>¿Qué objetos geométricos usa?</td><td>Planos paralelos.</td><td>Triángulos semejantes.</td></tr>
<tr><td>¿Cómo los usa?</td><td>Como ubicación de los triángulos.</td><td>Como relación entre el radio de la Tierra y el radio del paralelo.</td></tr>
<tr><td>¿Para qué los usa?</td><td>Para encontrar un vínculo entre ellos.</td><td>Para encontrar una proporción entre los lados de los triángulos.</td></tr>
<tr><td>Contexto</td><td colspan="2">No relaciona los objetos con el contexto.</td></tr>
<tr><td>dME</td><td colspan="2">Sacándole lo curvo. Menciona posibles conocimientos a utilizar relacionados con triángulos: trigonometría, teorema de Tales y de Pitágoras.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Descripción</td></tr>
<tr><td colspan="3">


Identifica los datos proporcionados con elementos de la esfera. Afirma que está “sacándole lo curvo”, y piensa en el triángulo OPQ. Considera luego el triángulo con ángulo lambda OQT. Llama R al punto de intersección entre el paralelo de 60° de latitud con el meridiano que contiene a T. Identifica el triángulo POR, pero no está segura de que ese triángulo tenga el ángulo lambda que ella desea involucrar. Prueba con otro triángulo con vértices en P, R y el polo Norte, y lo descarta. Menciona a Tales como posible recurso. Reconoce la relación de semejanza de los triángulos, y quiere hallar la medida que le falta utilizando el teorema de Pitágoras.<br>
Se le proporciona la medida del radio de la Tierra. Reconoce los triángulos que nombra como QOT y EPR, siendo R el punto de intersección del paralelo y meridiano central, y E el punto de intersección del plano que contiene el paralelo y el eje de la Tierra. Establece una relación de semejanza entre la medida de los lados de los triángulos, y afirma que le faltan datos, pero que podría calcularlo, como tiene triángulos generándose uno rectángulo a partir del triángulo isósceles, considerando la altura y utilizando el teorema de Pitágoras.
</td></tr>
</table>

I: ¿Pitágoras en cuál triángulo?, perdón.
$P_B$: En ... Igual me estoy dando cuenta que me faltan, ¿cuál me falta? ... el OR lo tengo, PR, ese es el que no sé. Lo estoy pensando en ER y ahí en él PER, ese es isósceles, la mitad ahí me queda un triángulo rectángulo, pero igual no, me falta data [información], me falta data, porque, ah bueno, pero lo anoto como esto sobre 2. Ya sé a ver, por Pitágoras esto es, el triangulito en E es 7,5 grados, este de acá, voy a hacer la cuenta discúlpame. [Aclaración]

Sostiene que lo clave de su razonamiento es la relación de semejanza entre esos triángulos.
Menciona el ángulo de 60° y lo reconoce en la figura como “el naranja”, afirma entonces que el otro es de 30°. Si bien reconoce esos elementos en la esfera, insiste con el teorema de Pitágoras, generándose un conflicto y pidiendo ayuda a la investigadora.
La investigadora procede a dibujar el triángulo PEO, que es el que ella reconoce con el ángulo de 30°, señala el ángulo recto, y que la medida del segmento PO es 6378 km por ser radio de la Tierra. Reconoce que podría utilizar la razón trigonométrica seno para hallar la medida del segmento PE.




$P_B$: Un medio, seno de 30, o sea que seno de 30 es opuesto sobre hipotenusa, opuesto es el que quiero, hipotenusa tengo, o sea que un medio por esto o esto sobre dos. 6378 dividido 2, 3189. ¡Bien! o sea que ese pedacito es 3.189, o sea que acá me queda despejar en la última está que te había mostrado, bien, hice bien, hice bien (Piensa un momento y hace cálculos en su hoja). Bueno, ¿839 puede ser?

No lo relaciona directamente con la distancia original entre los barcos. Se le pregunta si encuentra relación y afirma que cree que es la mitad. Reconoce un conflicto, porque ella encontró esa medida a partir de pensar en triángulos, no trasladó el resultado al arco de circunferencia, lo consideró como parte del triángulo.

$P_B$: ¡No podés creer! Porque yo miro claro, claro, yo miro y son cuatro cuadraditos entre comillas y lo que se corre en realidad sería un cuadradito, entonces claro, (no se entiende que dice) ni cerca. Igual viste que a mí me genera dudas como esto de que tipo yo usé triángulos de lados rectos. Si ahí no pierdo como cosas, como información que estoy perdiendo.

## Descripción- Análisis y Resultados: Momento 2, Parte B (M2-B)

### PROFESORA A:

En esta parte, la profesora no calcula la respuesta exacta a la pregunta, reconoce que esos ángulos no serán iguales, y se puede inferir que eso tiene que ver con la relación que identifica entre las medidas de las circunferencias, las reconoce una con mayor perímetro que la otra, por lo que recorrer la misma medida en esas dos circunferencias, abarcan ángulos distintos. En este problema, la estrategia de buscar la proporción a partir de triángulos semejantes no la lleva a determinar el resultado.

**Tabla 6.5.** *Resultado M2-B, Profesora A.*

<table>
<tr><th colspan="3">M2-B: PROFESORA A</th></tr>
<tr><td>**¿Qué objetos geométricos usa?**</td><td>Triángulos semejantes.</td><td>Triángulos isósceles.</td></tr>
<tr><td>**¿Cómo los usa?**</td><td>Como estrategia para confrontar su idea.</td><td>Como relación entre el recorrido y el ángulo.</td></tr>
<tr><td>**¿Para qué los usa?**</td><td>Para determinar que en realidad no lo son, y poder decir para que sí lo sean que deberían cumplir.</td><td>Para hallar el ángulo de longitud buscado.</td></tr>
<tr><td>**Contexto**</td><td colspan="2">No hace referencia concreta al contexto, no da respuesta sobre el ángulo de longitud.</td></tr>
<tr><td>**dME**</td><td colspan="2">Sigue tomando argumentos a partir de pensar en el plano con triángulos. Considera los arcos de circunferencia como segmentos de 1000km.</td></tr>
<tr><td colspan="3">**Descripción**</td></tr>
<tr><td colspan="3">Afirma que el ángulo que forme el barco que parte de C va a ser mayor que el ángulo que forme el barco que sale del punto D. Para dar explicación quiere recurrir a los triángulos semejantes de la parte anterior, y los considera a cada uno en el plano de cada paralelo, con vértices en los puntos de partida y de llegada y la intersección de dichos planos con el eje de la Tierra. Se da cuenta de que no van a ser semejantes, porque ese ángulo dado por la longitud de los puntos de llegada en ambos casos es diferente.<br>Plantea que el ángulo de longitud de C es mayor, hace referencia a cómo debería ser dicho ángulo para que sean triángulos semejantes.<br>$P_A$: Tendrían igual un lado, claro, no son semejantes, estaba pensando al revés. Queda el ángulo del barco C mayor, porque para que sean semejantes tendríamos, tendría que moverse menos.<br><br>Reconoce que las distancias de los puntos C y D al punto de intersección de cada plano que contiene a cada paralelo, es menor la de C, que la de D. Identifica cómo son las medidas de esos paralelos en la esfera. Menciona que, si piensa en triángulos como en la parte anterior, son triángulos isósceles con los lados que tiene medidas iguales, uno menor que el otro, por lo que, si el tercer lado es igual, entonces debería ser mayor el ángulo en el que tiene lados más chicos.</td></tr>
</table>

### PROFESORA B:

En esta parte, la profesora reconoce elementos del contexto como parte del problema y como información relevante para dar su respuesta. Si bien ambos barcos recorren la misma distancia, ella refiere a que visualmente el que se encuentra en la circunferencia con perímetro menor, pareciera que se mueve más. Consideramos en este sentido que lo está vinculando con el ángulo de longitud abarcado.

**Tabla 6.6.** *Resultado M2-B, Profesora B.*

| M2-B: PROFESORA B | | | |
|---|---|---|---|
| **¿Qué objetos geométricos usa?** | Circunferencias. | Arcos de circunferencia. | Triángulos isósceles. |
| **¿Cómo los usa?** | Como representación de los paralelos. | Como recorridos en cada paralelo. | Como relación entre distancia recorrida y el ángulo abarcado. |
| **¿Para qué los usa?** | Para comparar sus medidas. | Para comparar esos recorridos de 1000 km en circunferencias de diferente medida. | Para hallar los ángulos de longitud. |
| **Contexto** | Relaciona los elementos del problema con los de la esfera.<br>Paralelos los identifica como circunferencias de diferentes medidas.<br>Establece una relación mediante la visualización del recorrido del barco con el ángulo que abarca. "No se movió tanto" relacionado con el ángulo menor porque el perímetro de la circunferencia es mayor. | | |
| **dME** | Refiere nuevamente a que no está considerando la curva. | | |
| **Descripción** | | | |
| Relaciona el ángulo de longitud de los puntos de llegada que debe averiguar con el meridiano al que pertenece cada punto de llegada. Solicita volver a la diapositiva que tiene la esfera con los ángulos de latitud theta y de longitud lambda señalados.<br>Afirma que le da la sensación de que no serán los mismos ángulos. Hace referencia a que cada barco se encuentra en un paralelo distinto y que son uno menor que el otro en medida, y que eso le da la sensación visual de que no será el mismo ángulo de los puntos de llegada.<br>I: ¿Va a ser el mismo ángulo lambda?<br>PB: ¿Para ambos? Y no, me da la sensación de que no.<br>I: Y, ¿por qué tenes esa sensación?<br>PB: Y, porque uno está más abajo que el otro, por lo tanto, en la circunferencia es más grande, por lo tanto, los 1000 kilómetros el otro va a llegar visualmente antes.<br>Relaciona al ángulo de longitud, con lo que a ella le parece visualmente más lejos o más cerca, dependiendo de si la circunferencia tiene un perímetro mayor o menor.<br>La investigadora solicita cómo podría afirmar qué tan grande es el ángulo de longitud del punto de llegada de C con respecto al de D, y procede a considerar triángulos isósceles, considerando los 1000 kilómetros que reconoce son en la circunferencia como una aproximación recta.<br><br>$P_B$: Y recorra 1000, también todo pensando en triángulos, me olvido de la curva, la curva la transformo en mil, ahí ya problemas, y bueno ahí reconsiderarme qué bueno eso termina así, puedo pensarlo como triángulo isósceles, y ahí ver y tengo, bueno isósceles entonces, me puedo generar ahí dos iguales con | | | |

ángulo recto donde tengo ahí la mitad, que es 500 500, ese angulito lambda y ahí tendría que considerar de una cosita más, pero por ahí. Mi idea va en doblar la curva de la circunferencia.

## Descripción-Análisis y Resultados: Momento 2, Parte C (M2-C)

Esta parte del diseño tenía por intención analizar qué interpretaciones hacían las profesoras acerca de los aspectos de la navegación en la esfera y su relación con la forma de esta.

### PROFESORA A:

Reconoce la navegación hacia el Norte como seguir el meridiano, y luego los ángulos en la esfera que forman meridianos y paralelos, de 90°. Asocia navegar por el paralelo como seguir un ángulo de 90° con el Norte. Identifica la dificultad de hallar el ángulo entre A y B en la esfera.

**$P_A$:** Eh... Y creo que el instrumento, brújula que indica el norte, entonces si yo camino digamos hacia, en esa dirección, este... este... es válido digamos, voy, voy en dirección a donde indica él, como es, la agujita imantada, después, los 90 grados que es fácil de reconocer visualmente, creo que el ángulo ese que hay entre A y B y el norte es mucho más difícil de reconocer visualmente que el ángulo de 90. Entonces ta, cuando llego a... bueno no sé cómo reconocerían igual en qué momento doblar...

**I:** Ellos podían saber en qué latitud estaban, o sea en qué paralelo estaban, lo sabían. Entonces lo que deberían conocer sería como...

**$P_A$:** Recorre la distancia que tengo de A hasta la latitud en la cual se encuentra B y ahí 90 grados hasta cruzarme con B.

### PROFESORA B:

Relaciona viajar hacia el Norte con la dirección que indica la brújula. Luego al reconocer la latitud del punto de llegada, doblarían.

**$P_B$:** De A hasta B, claro. Porque seguro, si estaban en A lo que seguro sabían era ir al norte, o sea, ahí marcaban el norte e iban (señalando con la mano hasta arriba), después lo que tenían era la latitud, ¿latitud era?, ese ángulo que me imagino que en algún momento les diría: bueno estás tanto de latitud, y ahí pegarían la vuelta, doblarían, no sé cómo eso, supongo.

De las respuestas de ambas profesoras podemos resaltar que ambas comprendieron el contexto de la navegación y la relación de la brújula con los rumbos. La profesora A comenta además que deberían ser rumbos de navegación fáciles de reconocer por los ángulos que forman con el Norte, haciendo referencia al ángulo recto entre paralelos y meridianos. Además, comenta que establecer el ángulo desde A a B directo debería ser difícil.

### Descripción- Análisis y Resultados: Momento 3, Parte A (M3-A)

Se describe la proyección equidistante y se pregunta si se comprendió. En este apartado se muestran comentarios de las profesoras acerca del entendimiento de la proyección, y cómo reconocen la distorsión que esta provoca.

#### PROFESORA A:

Hace referencia a que, en la proyección, al estirar los paralelos hay partes del mapa que son "inventadas".

**$P_A$:** Ese comentario, ¿no? del problema de la ampliación de los paralelos, qué pasa en cómo se amplía, qué hay en esos huecos que inventamos, si agua o tierra.

#### PROFESORA B:

Explica cómo entiende la proyección haciendo uso de una representación visual: pelar una naranja. Hace referencia a la distorsión del mapa, y a cómo esas partes que se agregan al mapa hacen que las distancias se representen de medidas que no son en la realidad.

**$P_B$:** P: Sí, sí, sí, sí se entendió. Es como, me imagino yo, la naranja la abro, pero después esto lo termino inventando como estirando así lo otro que en realidad no. Y ahí imagino que esos puntos son los que hacen que a mí me parezca que está más cerca, pero está más lejos,

**I:** ¿Cómo es eso? Ahí me perdí.

**$P_B$:** No, ahí, qué eh... que cuando haces así (haciendo el gesto de estirar un paralelo o de "inventar" esas partes que no están cuando se abre la naranja), pero lo haces a la medida del ecuador, ahí es donde esos puntos que están cercanos en cuanto a lo que yo miro, tienden a ser más lejanos.

Cuando se les cuestiona sobre cómo están comprendiendo la proyección, ambas refieren a espacios huecos o inventados, a partir de la ampliación de los paralelos. Podría ser que en estas explicaciones no estén pensando en una transformación continua, nos da indicios de que podrían estar pensando en lugares que quedan vacíos y que se deben rellenar. En relación con esto, la profesora B refiere directamente a pelar una naranja como recurso para explicarse, y concluye con la distorsión en las distancias del mapa, los puntos que en la esfera están cercanos, tienden a ser más lejanos. Podemos inferir que esta reflexión da cuenta de que la distorsión es mayor cerca de los polos, circunferencias con perímetro más pequeño se estiran para medir lo mismo que el ecuador.

### Descripción- Análisis y Resultados: Momento 3, Parte B (M3-B)

En esta última parte del diseño exploratorio, con base en todas las partes anteriores, se quiere identificar cómo reconocen la distorsión del mapa, y cómo la interpretan, a la vez que confronta con la pregunta que se les realizó en el diagnóstico.

### PROFESORA A:

**Tabla 6.7.** *Resultado M3-B, Profesora A.*

| M3-B: PROFESORA A | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **¿Qué objetos geométricos usa?** | Arcos de circunferencia en la esfera. | Triángulos semejantes. | Ángulos de longitud. | Ángulos complementarios. | Razón trigonométrica: seno |
| **¿Cómo los usa?** | Como pasaje del plano a la esfera de los segmentos. | Hallar la proporción entre ecuador y paralelo como en el M2-A. | Vínculo entre arcos de circunferencia ubicados en paralelo y ecuador. | Como conexión entre el ángulo de latitud 15° y el que tiene como lado el radio del paralelo. | Herramienta para hallar la medida de un lado del triángulo. |
| **¿Para qué los usa?** | Para contrastar los segmentos en el mapa, y sus correspondientes en la esfera. Reconoce que la proyección está cambiando sus medidas. | A partir del ángulo que abarcan los arcos encontrar su correspondiente en el ecuador. | Establecer proporción entre ellos. | Para determinar qué razón trigonométrica relaciona los datos que conoce. | Hallar la proporción entre los triángulos semejantes. |
| **Contexto** | Al hallar las medidas de los segmentos CD y EF, reconoce la distorsión y hace referencia a cómo el mapa no muestra esa diferencia tan grande de distancias. | | | | |
| **dME** | Utiliza conocimientos del *dME* para dar respuesta. | | | | |
| **Descripción** | | | | | |

Comenta que para poder responder debería volver a la esfera, y hace referencia a la distorsión que está reconociendo en el plano, y a la comparación de esos segmentos si el plano lo tomamos como realidad.
Sostiene que la estrategia a utilizar sería, representar esos segmentos en la esfera y utilizar los triángulos de la parte M2-A para hallar las verdaderas medidas, y poder dar respuesta. Sin embargo, dando cuenta de cómo está comprendiendo la distorsión que genera la proyección, reconoce sin dudas, que EF no es más grande. Toma como referencia de la distorsión a la superficie que abarca Antártida en el mapa.
Realiza una comparación con el ecuador y el paralelo de 60° de latitud, que ya lo utilizó en el M2-A. Reconoce que la medida de EF será la mitad que un arco de ecuador que abarque el ángulo correspondiente a la diferencia de longitud de esos puntos, es decir, 45°.
Lo descarta por el momento, porque el otro segmento no se encuentra en el ecuador, sino en el paralelo de 15° de latitud. Dice que podría hacer lo mismo que hizo en el M2-A, pero trabajar ahora con dicho paralelo.
Comienza pensando en el paralelo de 60° de latitud, y reconoce que tendría un triángulo cuyos vértices serían E, F, y la intersección del plano que contiene dicho paralelo con el eje de la Tierra. Recuerda que los lados de ese triángulo son la mitad del radio de la esfera, y dice que es un triángulo entonces con dos lados iguales a 3189 y un ángulo al centro de 45°. Tomando en cuenta la proporción de ese paralelo con el ecuador, pregunta si se le puede proporcionar la medida del ecuador. Con esa medida encuentra el arco de circunferencia que abarca 45° en el ecuador, dividiendo la medida de este entre ocho. Luego, dice que la medida de EF es la mitad, o sea que un dieciseisavo de la medida del ecuador.

**I:** ¿Precisarías la longitud del ecuador?
**$P_A$:** Claro.
**I:** Te la digo, 40.075 km
**$P_A$:** Porque ahí lo divido entre 8 y saco la distancia entre, del semejante digamos.
**I:** ¿Por qué entre 8?
**$P_A$:** Porque son 8 segmentitos de 45, ¿está bien?
**I:** Si, está bien.
**$P_A$:** Entonces del mediano central al punto que estaría ahí en... no sé, ¿vos ves mi mouse?
**I:** No.
**$P_A$:** En el ecuador y 45 grados.
**I:** ¿Acá? (Señalando en la esfera el punto de latitud 0 y longitud 45° oeste).
**$P_A$:** Claro, hallamos un triángulo semejante entre ese punto el 0, 0 y el centro de la Tierra que es semejante al otro de arriba.
**I:** Bárbaro.
**$P_A$:** Con un medio de razón de semejanza, la mitad de... un dieciseisavo del ecuador digamos mediría el segmento EF.
**I:** 2.505 kilómetros.

Para llevar ese razonamiento al paralelo de 15° de latitud en el que se encuentra CD, recurre a la estrategia que utilizó en M2-A, utilizando seno de 75° que es el complementario de 15°, halla la medida del radio de la circunferencia que representa ese paralelo, 6161 kilómetros.
Divide la medida del ecuador entre 12, para encontrar el semejante en el ecuador al arco de circunferencia CD que quiere hallar. Esto es 3339 kilómetros.

| |
|---|
| Reconoce la semejanza entre esos arcos de circunferencia y los radios, y plantea esa razón para hallar la medida de CD.<br><br>**P$_A$:** Bien, y entonces habría que hacer la razón de semejanza entre el 6.161 y el centro de la Tierra, que era no me acuerdo cuánto. Para, porque 6378 sobre 6.161 tiene que ser igual a 3.339 sobre x y ahí hallamos ese x, o al revés las razones, como quieras.<br>**I:** Eso da, o sea, hice eso que vos me estás planteando en la razón esa, 3.225 con 9<br>**P$_A$:** O sea que es mayor el segmento CD que el EF, bastante mayor.<br>Al llegar a una respuesta, realiza una reflexión.<br><br>**P$_A$:** Qué interesante, qué demás, para trabajar con los gurises. (Así se les llama a los estudiantes)<br>**I:** Bueno, esto ¿Cómo?<br>**P$_A$:** Que interesante eso, darse cuenta de que es tanta la diferencia de lo real al plano, cuánta cantidad de tierra o de agua inventamos cuando lo pasamos al plano.<br>**I:** (Se hace un breve comentario sobre cómo la matemática escolar en uso podría explicar las distorsiones de las proyecciones de mapas, volviéndose un objeto de enseñanza. Haciendo referencia ahora sí a la investigación en curso).<br>**P$_A$:** Sí, sacar la ingenuidad de la matemática como una cosa objetiva y pura que está ahí y si no que las decisiones que tomamos para comprender el mundo son decisiones subjetivas y colectivas. |

## PROFESORA B:

**Tabla 6.8.** *Resultado M3-B, Profesora B.*

| M3-B: PROFESORA B | |
|---|---|
| **Contexto** | La profesora no da respuestas acerca de las medidas de los segmentos, pero sí utiliza elementos de las partes anteriores y del contexto de la navegación de los barcos, y su relación con los ángulos de longitud que permiten confrontar algunas ideas que en principio consideraba correctas y que esto le hace repensarlas. |
| **dME** | No reconoce qué conocimientos debe utilizar para dar respuesta, pero indica cómo sería un posible camino de resolución a partir de seguir pensando en triángulos, es decir, considerando a la curva como recta. |
| **Descripción** | |
| Refiere primero al plano, y a los cuadrados que ocupan cada uno en el mapa, CD dos y EF tres. Así mismo refiere a la transformación, afirmando que el paralelo en el que se encuentra EF está más “intervenido” que el paralelo en el que se encuentra CD.<br>**P$_B$:** P: Si CD y EF, ahí va. Y ... Y ahora con esto podría ser, podría ser, igual uno ocupa dos cuadraditos, y el otro ocupa tres. Pero como este paralelo fue intervenido y que fue intervenido, eso ahí quedó como, como que podría llegar a ser, y el CD, ese paralelo no fue tan intervenido como el otro, de ahí es que en esta proporción puede llegar a que sí represente en la misma distancia. Pero no sé... | |

Se le cuestiona acerca de qué información necesitaría para poder dar respuesta, y menciona que necesita conocer el diámetro de ambas circunferencias o los perímetros.

Hace referencia al M2-A, y al contexto de los barcos, identificando esos segmentos como similares a los recorridos de los barcos en esa parte del diseño.

En su explicación se presenta un conflicto y es que comienza a relacionar las medidas de los arcos de circunferencia que representan los segmentos CD y EF, con el ángulo de la diferencia de longitud entre esos puntos, y se cuestiona cómo debe ser ese ángulo para que las medidas sean las mismas, diciendo que debería ser el mismo. En ese momento, confronta con lo que se pensó en M2-A y M2-B, y con lo que le dificulta dejar de pensar en la Geometría en el plano.

**$P_B$:** Y bueno, el ángulo ese que tiene vértice en el eje de la tierra ¿sería?, el ángulo ese, me va a dar de uno y del otro, tendrían, ¿y como tendrían que ser esos dos ángulos para que estas distancias sean las mismas? Y, tendría que ser el mismo.

**I**: ¿Cómo fue eso? El mismo ángulo, o sea si pensamos que CD es un arco de circunferencia y EF es otro arco de circunferencia acá (refiriéndose a la esfera), para que midan lo mismo, ¿decís que deben abarcar el mismo ángulo?

$P_B$: Eh, que los lambdas sean iguales. Imagino. Pero pasa que ahí, igual eso tiene que ver con, como que arranca, no bueno no sé. (Piensa y murmura) Bueno ahora me quedé pensando, si tienen que ser el mismo, me parece que no sé ahora. Como me jugó la euclidiana, porque claro no, no tienen por qué ser el mismo, justamente por las dos actividades anteriores.

Para continuar su explicación acerca de cómo las tareas anteriores ayudan a confrontar esa primera respuesta que dio, menciona el ejemplo de los dos barcos saliendo del meridiano central y navegando mil kilómetros.

**$P_B$:** Eh... Bueno en la anterior, eh... eran los dos, los barcos, que en este caso podría ser uno que está en F y otro que está en D, ta, ahora uno está más corrido para allá, pero ponerle que salen los dos del meridiano verde.

**I:** Si.

**$P_B$:** Ahí los dos corrían mil, y claramente el de más arriba, visualmente, parecía que avanzaba más porque la circunferencia era más pequeña en cuanto a diámetro. Y el otro, al contrario, porque la circunferencia era más grande respecto al diámetro, entonces parecía menos, entonces ahí te va a quedar en meridianos distintos, por eso ese angulito no va a ser el mismo. Ta, retiro lo dicho, no va a ser el mismo ángulo, para nada.

Para seguir con lo que viene explicando, se le cuestiona qué respondería si EF abarcara dos cuadrados en lugar de tres. Responde sin problema que CD sería mayor.

Identifica en qué paralelo se encuentra cada segmento y reconoce el ángulo dado por la diferencia de longitud entre los puntos. El segmento EF abarca 45° y el CD 30°.

Referencia a lo que realizó en el M2-A, pero no da una respuesta exacta.

**$P_B$:** Cuando se ve en los meridianos está en 45, sí. Y después sí, ta, todo EF está en el 60. Y el otro, CD está todo en el paralelo 15, y ellos van desde el 30 hasta el 60, o sea que acá hay 30 y acá hay 45. Si necesito alguna información para poder responder esta pregunta, si estos son de la misma distancia (murmura). Yo iría por algún razonamiento parecido al de la primera actividad. Pero no sé ahora si suponiendo que son iguales y hago todo lo que serían los cálculos y eso, con el radio de la Tierra y por ahí podría ser.

## 6.4. Algunas Reflexiones luego de la implementación

Nuestra intención fue acercar a profesores de educación secundaria uruguaya, un diseño en el que aparecen elementos del contexto de la navegación identificados en nuestra *problematización*, y analizar cómo ponían en uso conocimientos que los profesores tienen. Si bien como parte de nuestro análisis y resultados, reconocemos de importancia fundamental la *racionalidad contextualizada* de Wright que hace que emerjan en él usos de objetos geométricos como parte de su epistemología al resolver un problema de la época en ese contexto, queríamos ver cómo con el diseño podíamos transmitir ciertos elementos del contexto que hicieran emerger algunos usos en los profesores para dar respuesta. Reconocimos en Wright la articulación de las epistemologías del marinero y del geómetra como un aspecto clave en su forma de construir conocimiento, como parte de su racionalidad.

Partimos de la base de que la racionalidad de los profesores estará influenciada por el *dME*, es decir, su forma de vincularse con el conocimiento en su formación y luego, en su práctica como profesores, está normada por el *dME*. Identificamos en principio una dificultad y un cierto rechazo a trabajar en la esfera, ya que ambas profesoras refieren a que están pensando en posibilidades de solución en la Geometría plana. Con respecto a esto, quieren reconocer en los elementos del diseño conocimientos típicamente escolares, incluso si el contexto no le da sentido. En algunos casos aparece la intención de reconocer triángulos, y a partir de esto aplicar todo lo que el *dME* relaciona con el tratamiento de este objeto geométrico, es decir, teorema de Pitágoras, Tales o trigonometría. Sin duda esos conocimientos serían útiles para dar respuesta, pero se ve una discordancia entre esos objetos y con qué motivo usarlos. Las relaciones de semejanza entre las figuras geométricas fueron elementos clave para abordar los momentos planteados, y se vinculan de manera directa con la forma de la esfera. Una vez encontrada esa relación entre paralelos y ecuador, pudieron trasladarlo a otros problemas, dando cuenta de que se comprendía la manera en que la forma de la esfera afecta a los perímetros de las circunferencias que representan los paralelos.

Consideramos que el diseño fue útil como primer acercamiento, y que deberíamos contemplar más aún cómo se le plantea este contexto de la navegación a los profesores, para confrontar al *dME*. Es en este sentido que pensamos en el diseño como una parte de la problematización del saber, ya que nos permite seguir explorando, con mejores herramientas.

En cuanto al reconocimiento de la distorsión del mapa equidistante, nos parece relevante destacar que podemos notar indicios de que no reconocen la proyección como una transformación continua, y este es un elemento para considerar en próximas intervenciones. Además, identificamos que utilizan el ecuador como referencia para comparar las distorsiones en los diferentes paralelos, reconociendo que es lo que se mantiene igual en ambos escenarios. Esto nos habilita una posibilidad de intervención en el aula, reconocer las distorsiones de los mapas a partir de dar explicación de éstas poniendo en uso objetos de la matemática escolar.

# Conclusiones

A partir de nuestro análisis, identificamos el valor de uso de los objetos geométricos en la explicación que se realiza en 1599 sobre la proyección de Mercator. La intencionalidad era mostrar las curvas loxodrómicas, relevantes para la navegación, como líneas rectas. Dichos objetos son funcionales a la intencionalidad de la construcción del mapa, ya que le permiten al autor dar explicación y solidez a sus argumentaciones.

La *problematización del saber* realizada en esta investigación, así como los métodos utilizados para el análisis de contenido nos permitieron configurar una epistemología de prácticas de los objetos geométricos en uso con una funcionalidad acorde a la intencionalidad. En la matemática escolar estos objetos aparecen desprovistos de contextos y carentes de uso lo que limita su significación. El análisis de las prácticas, nos permite postular un posible camino de intervención con profesores de matemática de enseñanza secundaria, en los que estos objetos se signifiquen.

Del análisis de la obra original identificamos en uso objetos geométricos que son parte de la matemática escolar, como pueden ser: circunferencias, ángulos, triángulos semejantes, etc. En este escenario, son funcionales a la explicación de la construcción del mapa para la navegación. Las curvas loxodrómicas como objeto geométrico no son parte de la matemática escolar, sino que emergen de la práctica de la navegación. Estas aparecen implícitas en el mapa de Mercator en donde son representadas como líneas rectas.

Con respecto a esto, la epistemología de prácticas de la *compensación* de distorsiones permite la construcción del mapa. Los objetos geométricos que son parte del *dME* son puestos en uso con la intencionalidad de conservar el ángulo de rumbo que es funcional en el contexto de la navegación. Esto expresa una epistemología que se diferencia de la epistemología centrada en objetos característica del *dME*. La *racionalidad contextualizada* de Wright hace que emerjan en él usos de objetos geométricos que expresan su epistemología.

Con el diseño exploratorio buscamos transmitir ciertos elementos del contexto de la navegación e indagar en las respuestas de las profesoras que asumimos tienen una epistemología diferente a la de

Wright. Hemos reconocido al *dME* influenciando estas respuestas, pero consideramos que esta primera exploración nos aporta información, para realizar diseños más finos basados en epistemologías de prácticas. Como prospectivas, consideramos que estos futuros diseños permitirían contrastar las epistemologías del *dME*, con otras que están opacadas en este.

# Referencias


Almeida, B. (2011). *A influência da obra de Pedro Nunes na náutica dos séculos XVI e XVII: um estudo de transmissão de conhecimento* Tesis de doctorado. Portugal. Repositorio institucional https://repositorio.ul.pt/handle/10451/6699

Almeida, B. (2012). On the origins of Dee's mathematical programme: The John Dee–Pedro Nunes connection. *Studies in History and Philosophy of Science Part A, 43(3),* 460-469. https://doi.org/10.1016/j.shpsa.2011.12.004

Almeida, B. (2018). Transmitting nautical and cosmographical knowledge in the 16th and 17th centuries: The case of Pedro Nunes. *Centaurus, 60(3),* 216-229. https://doi.org/10.1111/1600-0498.12186

Andréu, J. (2000). Las técnicas de análisis de contenido: una revisión actualizada. *Fundación Centro Estudios Andaluces, Universidad de Granada, 10(2),* 1-34.

Battersby, S. E., y Kessler, F. C. (2012). Cues for interpreting distortion in map projections. *Journal of Geography, 111(3),* 93-101.

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*. (Martínez, M. trad.) Alianza Editorial. (Obra original publicada en 1968).

Bugayevskiy, L. M., & Snyder, J. (1995). *Map projections: A reference manual.* CRC Press.

Cáceres, P. (2003). Análisis cualitativo de contenido: Una alternativa metodológica alcanzable. *Psicoperspectivas. Individuo y Sociedad, 2(1),* 53-82.

Cantoral, R. (1990). *Categorías Relativas a la apropiación de una base de significaciones para conceptos y procesos matemáticos de la Teoría elemental de las funciones Analíticas. Simbiosis y Predación entre las nociones de "el Prædiciere" y "lo Analítico".* Tesis doctoral. México.

Cantoral, R. (2016). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. (2da edición). Gedisa.

Cantoral, R., y Farfán, R. M. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 6(1),* 27-40.

Consejo de Educación Secundaria (CES) (2006a). *Programa de matemática III – Opción social y matemática – Tercer año de Bachillerato reformulación 2006.* Recuperado de: https://www.ces.edu.uy/files/Planes%20y%20programas/Ref%202006%20Bach/6to%20Social%20Economica/mat3socecon6.pdf

Consejo de Educación Secundaria (CES) (2006b). *Programa de matemática II – Opción físico matemática – Tercer año de Bachillerato reformulación 2006.* Recuperado de: https://www.ces.edu.uy/files/Planes%20y%20programas/Ref%202006%20Bach/fisico%20matematica/matii6fismat.pdf

Consejo de Educación Secundaria (CES) (2006c). *Programa de matemática I – Opción matemática y diseño – Tercer año de Bachillerato reformulación 2006.* Recuperado de: https://www.ces.edu.uy/files/Planes%20y%20programas/Ref%202006%20Bach/6to%20matematica%20dise%C3%B1o/mat1matdise6.pdf

Consejo de Educación Secundaria (CES) (2006d). *Programa de matemática IV – Opción matemática y diseño – Tercer año de Bachillerato reformulación 2006.* Recuperado de: https://www.ces.edu.uy/files/Planes%20y%20programas/Ref%202006%20Bach/6to%20matematica%20dise%C3%B1o/mat4matdis6.pdf

Consejo de Educación Secundaria (CES) (2010a). *Programa de matemática primer año - Ciclo Básico reformulación 2006 - ajuste 2010.* Recuperado de: https://www.ces.edu.uy/files/Planes%20y%20programas/ref%202006%20CB/1ero/Programa_1_CB_ajustes2010progmat1cbref2006.pdf

Consejo de Educación Secundaria (CES) (2010b). *Programa de matemática segundo año - Ciclo Básico reformulación 2006 - ajuste 2010.* Recuperado de:

https://www.ces.edu.uy/files/Planes%20y%20programas/ref%202006%20CB/2do/matematica.pdf

Consejo de Educación Secundaria (CES) (2010c). *Programa de matemática tercer año - Ciclo Básico reformulación 2006 - ajuste 2010.* Recuperado de: https://www.ces.edu.uy/files/Planes%20y%20programas/ref%202006%20CB/3ero/matematica.pdf

Consejo de Educación Secundaria (CES) (2010d). *Programa de matemática primer año - Bachillerato reformulación 2006 - ajuste 2010.* Recuperado de: https://www.ces.edu.uy/files/Planes%20y%20programas/ref%202006%20CB/programa%204to%20a%C3%B1o/matematica.pdf

Consejo de Educación Secundaria (CES) (2010e). *Programa de matemática núcleo común – Segundo de Bachillerato reformulación 2006 - ajuste 2010.* Recuperado de: https://www.ces.edu.uy/files/Planes%20y%20programas/Ref%202006%20Bach/5to%20nucleo%20comun/matematica_5.pdf

Consejo de Educación Secundaria (CES) (2010f). *Programa de matemática – Diversificación científica – Segundo año de Bachillerato reformulación 2006 - ajuste 2010.* Recuperado de: https://www.ces.edu.uy/files/Planes%20y%20programas/Ref%202006%20Bach/5to%20cientifico/mat5cient.pdf

Consejo de formación en Educación (CFE) (2008a). *Programa de Geometría I - Plan 2008 - Profesor de Educación Media.* Recuperado de: http://www.cfe.edu.uy/images/stories/pdfs/planes_programas/profesorado/plan_2008/matematica/primero/geometria_I.pdf

Consejo de formación en Educación (CFE) (2008b). *Programa de Álgebra lineal y Geometría - Plan 2008 - Profesor de Educación Media.* Recuperado de: http://cfe.edu.uy/images/stories/pdfs/planes_programas/profesorado/plan_2008/matematica/segundo/geom_algeb_lin.pdf

Consejo de formación en Educación (CFE) (2008c). *Programa de Profundización en Geometría - Plan 2008 - Profesor de Educación Media.* Recuperado de: http://www.cfe.edu.uy/images/stories/pdfs/planes_programas/profesorado/plan_2008/matematica/cuarto/profund_geo_anal_alge.pdf

Cordero, F. (1994). *Cognición de la integral y la construcción de sus significados: un estudio del Discurso Matemático Escolar.* Tesis doctoral. México.

Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci, H., y Soto, D. (2015). *El discurso matemático escolar: la adherencia, la exclusión y la opacidad.* Barcelona, Gedisa.

Cotter, C. H. (1983). A Brief Historical Survey of British Navigation Manuals. *Journal of Navigation, 36(2)*, 237–249. https://doi.org/10.1017/S0373463300024954

Coxeter, H.S.M y Greitzer, S.M. (1967). *Geometry Revisited*. The Mathematical Association of America (Inc.)

Cruz-Márquez, G. (2018). *De Sirio a Ptolomeo: una problematización de las nociones trigonométricas.* (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Daners, D. (2012). The Mercator and stereographic projections, and many in between. *The American Mathematical Monthly, 119(3)*, 199-210. https://doi.org/10.4169/amer.math.monthly.119.03.199

Davis, J. (1595). *The Seamans Secrets, Devided into 2. Partes, wherein is taught the three kindes of Sayling, Horixontall, Paradoxall, and sayling upon a great circle.* Londres.

Delgado, E. (2002). El mapa: importante medio de apoyo para la enseñanza de la historia. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 7(15)*, 331-356.

Espinoza, L. (2009). *Una evolución de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio Socioepistemológico.* (Tesis de Maestría no publicada). Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados. México.

Farfán, R. M., (1993). *Construcción de la noción de convergencia en ámbitos fenomenológicos vinculados a la ingeniería. Estudio de caso.* Tesis de doctorado. México.

Fenna, D. (2006). *Cartographic science: a compendium of map projections, with derivations*. CRC Press.

Hadas, N., Hershkowitz, R., y Schwarz, B. (2000). The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments. *Educational studies in Mathematics, 44(1)*, 127-150.

Kessler, F. C., Battersby, S. E., Finn, M. P., y Clarke, K. C. (2017). Map Projections and the Internet. En En Lapaine, M., y Usery, E. L. (Eds.). *Choosing a Map Projection* (pp. 117-148). Springer, Cham.

Lapaine, M., y Usery, E. L. (Eds.). (2017). *Choosing a map projection*. Springer International Publishing.

Leitão, H. (2003). Para uma biografia de Pedro Nunes: O surgimento de um matemático, 1502-1542. *Cadernos de Estudos Sefarditas, 3*, 45-82.

Leitão, H., y Gaspar, J. A. (2014). Globes, Rhumb Tables, and the Pre-History of the Mercator Projection. *Imago Mundi, 66(2)*, 180-195. https://doi.org/10.1080/03085694.2014.902580

Maling, D. H. (1992). *Coordinate systems and map projections*. Elsevier.

Mayring, P. (2015). Qualitative content analysis: Theoretical background and procedures. En A., Bikner-Ahsbahs, C., Knipping y N., Presmeg, (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Examples of Methodology and Methods*, 365-380. Dordrecht: Springer Netherlands.

Monmonier, M. (2004). *Rhumb lines and Map Wars. A Social History of Mercator´s Projection.* The University of Chicago Press.

Nunes, P. (1537). *Tratado da sphera com a theorica do sol e da lua.* Lisboa. Recuperado de https://purl.pt/14445/1/index.html#/1/html

Olson, J. M. (2006). Map projections and the visual detective: How to tell if a map is equal-area, conformal, or neither. *Journal of Geography, 105(1),* 13-32.

Parsons, E. J. S., y Morris, W. F. (1939). Edward Wright and his work. *Imago Mundi, 3(1),* 61-71. 10.1080/03085693908591862

Pumfrey, S., y Dawbarn, F. (2004). Science and patronage in England, 1570–1625: A preliminary study. *History of Science, 42(2),* 137–188. https://doi.org/10.1177/007327530404200201

Randles, W. (1997). Pedro Nunes' Discovery of the Loxodromic Curve (1537). How Portuguese Sailors in the Early Sixteenth Century, Navigating with Globes, had Failed to Solve the Difficulties Encountered with the Plane Chart. *Journal of Navigation, 50(1),* 85-96. https://doi.org/10.1017/S0373463300023614

Robinson, A. H. (2017a). Which Map Is Best? En Lapaine, M., y Usery, E. L. (Eds.). *Choosing a Map Projection* (pp. 1-14). Springer, Cham.

Robinson, A. H. (2017b). Choosing a World Map. En En Lapaine, M., y Usery, E. L. (Eds.). *Choosing a Map Projection* (pp. 15-48). Springer, Cham.

Snyder, J. P. (1987). *Map projections--A working manual (Vol. 1395).* US Government Printing Office.

Snyder, J. P., y Voxland, P. M. (1989). *An album of map projections (No. 1453).* US Government Printing Office.

Soto, D. (2010). *El Discurso Matemático Escolar y la Exclusión. Una visión Socioepistemológica*. (Tesis de Maestría no publicada). Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados. México.

Struik, D. J. (1998). *Historia concisa de las matemáticas.* (Lezama y Noriega, P., trad.). Instituto Politécnico Nacional. (Obra original publicada en 1948).

Suzuki, J. (2009). *Mathematics in Historical Context.* United States of America Mathematical Association of America.

Wright, E. (1599). *Certaine Errors in Navigation.* Londres.

Wright, E. (1657). *Certain errors in navigation detected and corrected by Edw. Wright; with many additions that were not in the former editions.* Londres. Impreso por Joseph Moxon.

# ANEXO 1

I know not then if any and be unto so excellent an enterprise drawn on, to give the best furtherance in him lye, why he should for his labor fall into any danger of reprehension at all. Yet it may be, I shall be blamed by some, as being too busy a faultfinder myself. For when they shall, see their Charts and other instruments controlled which so long time have gone for current, some of them perhaps will scarcely with patience endure it. But they may be pacified, if not by reason of the good that ensued hereupon, yet towards me at the least because the errors I point at in the chart, have been heretofore pointed out by others, especially by Petrus Nonius, out of whom most part of the first chapter of Treatise following is almost word for word translated; I for my part desiring rather that faults should be found by others then by myself and laboring much more, as for a thing much better, and fare more needful, and profitable to be a fault mender, then a fault finder (Wright, 1599, p. 7).

Or else I may so much the more be mishked, because in seeking to amend, some will think I take upon me too much. For some will say, and of those perhaps that have been employed in sea affairs all their life long, that all this we go about it more than needs. For they without all this ado, have ever performed their charge with good success, and are now too old to give ear to these innovations. But other seafaring men, who acknowledge the need hereof are ashamed per adventure to receive (as it were) either correction from the schools, or direction from the land and therefore stick not to condemn Universities and all in comparison of their manifold experiments. (Wright, 1599, p. 8).

Why then should they where there is danger of wandering, refuse help of any that willing to shew a better course. But to come unto those that may object do but act agree, in doing no more than hath been done already by Gerardus Mercator, in his universal map many years since: and in publishing something already published by Jodocus Hondius in his greater map of the world and of Europe, now of late: I must answer, that indeed by occasion of that map of Mercator, I first thought of correcting so many and grosses errors and absurdities, as hereafter are shewed in the sea chart, by increasing the distances of the Parallels, from equinoctial towards the poles, in such sort, that at every point of latitude in the chart, a part of the Meridian might have the same proportion to the like part of the Parallel, that it hath in the globe. (Wright, 1599, p. 9).

Now if any shall think it to be beyond and land man's skill, to find faults in matters belonging to the sea man's art and profession they must know if they be yet to learn, that one that is but reasonably acquainted with Geometrical conceits, may as well, if not better than most sea men, know the nature and properties of the spherical form of the earth and sea, with all consequents and dependences thereof. (...) So by all likelihood, the case will stand with this poor Treatise of mine, which if it had come forth unto public view, from out of the bosom (as once it was like) of a master at sea, of great reputed excellency, it had no doubt then found the favor, which like enough now shall want: all winds then would have sweetly blown it into the pleasantest haven of every mans (at leastwise of every sea mans) favorable entertainment. (Wright, 1599, p. 11).

Whereto is adjoined as arising from thence the Table of Rumbes shewing by what points of longitude, and latitude each Rumbe is to be drawn from the equinoctial, till you come within a minute of the pole: with help of which Table, the Rumbes may in any charts, Map, or globe, much more truly be described, then by those mechanical ways long since published by Petrus Nonius, or lately practiced by some globe-makers in England. (Wright, 1599, p. 1).

Now if any shall think that most of this fourth part going before this regiment, might have been omitted, as being impertinent to the use of mariners, and exceeding their capacity: I answer, that it was not my purpose, neither could I in all places, apply myself to the most part of seamen's capacity: knowing many that would not be content with this regiment alone, but that desired more to know the root from whence this fruit grew: whose desire I was also willing to satisfy as I could for the present, having seldom had a more inconvenient season for such a purpose. (Wright, 1599, p. 3).

Faults in the common Sea Chart, with rumbes expressed by right lines and degrees of latitude, everywhere equall. (Wright, 1599)

As the Sea Chart is one of the especial Instruments that Mariners have for their direction in sailing, so there is not any wherein there are so great and dangerous errors. (Wright, 1599, p. 1).

For first, what places soever are described therein, the length of them (from East to West) hath a greater proportion to the bredth (from North or South) than indeed it ought to have (except it be at the equinoctial). And so much the more this error increased, by howe much the further distant those places are from the equinoctial: even as the proportion of the Meridian to the Parallel, increased the more, the nearer you come to either Pole. (Wright, 1599, p. 1).

“the proportion of the length to the breadth is twice greater than indeed it should be”. (Wright, 1599, p. 2).

As for example: in the common sea Chart, the proportion of the length of Friesland, to the bredth thereof, is two-fold greater than in the globe (which shewed the true proportion of the length to the breadth) because the meridian is double to the parallel of that Island. (Wright, 1599, p. 2).

In the Islands of Groenlant and Groclant, the length to the bredth hath a four-fold greater proportion in the common Mariners chart, than it hath in the globe; because the meridian is fourfold greater than the parallel of those places. (Wright, 1599, p. 2).

The way to find out the difference of longitude, by the common sea Chart, is true at the equinoctial only, and near about the same may be used without sensible error: because there only the meridian and parallel are equal. But on this side or beyond the equinoctial there is error committed proportionally to the difference of the meridian, and parallel, that this, the difference of longitude found out by the Chart hath the same proportion to the true difference of longitude, that the parallel hath to the meridian. (Wright, 1599, p. 2).

As for example: at the parallel of 60 degrees in the common mariners Chart (wherein the degrees of the meridians, and parallels are equal) admit BD be two places bearing each from other south west and northeast differing in latitude so much as in the arke of the meridian BC, which for example sake we will supposed to be on degree, therefore by the ordinary Charts the difference of Longitude CD, shall be likewise one degree. But yet in truth, because the meridian is double to the parallel, and consequently, a degree of the meridian double to a degree of the parallel, therefore B differing a degree in latitude from D should be placed twice so farre from C, that is at A, so as A B C may be all counted but for one degree of the meridian, and so be equal to two degrees of the parallel, whereof should follow that E C should be the difference of longitude, that is, two degrees, as the truth in in the globe, whereas the common Mariners Chart shewed the difference of longitude to be but half so much. (Wright, 1599, p. 3).

And yet not withstanding if you go nearer to the poles, you shal erre by their Chart great deale more, even as the proportion of the meridian to the parallel increased more and more. (Wright, 1599, p. 3).

But in the parallel that pasted by the 39 degrees of latitude, wherein (almost) Lisbon and Tercera are situate, there are more degrees in the same space, according to that proportion wherewith the meridian is greater than that parallel. Therefore the true difference of longitude betwist Lisbone and Tercera, that is, the arc of the parallel or Equinoctial contained betwixt the meridians of those places shall thus be found out. (Wright, 1599, p. 4-5).

Is it a rule in Geometry, that the diameters and peripheries, and consequently the semidiameters, and like arcs of circles have the same proportion.

Also it is manifest that the sine of the complement of the distance of any parallel from the Equinoctial is the semidiameter of the same parallel. (Wright, 1599, p. 5).

Now the distance of the parallel of Lisbone and Tercera from the Equinoctiall is about 39 degrees, the complement whereof is 51 degrees: whose sine is 777 which is the semidiameter of the foresaid parallel, in such parts whereof the whole sine contained 1000, which is the semidiameter of the meridian. Therefore by the rule of proportion inversed, if 262 Spanish leagues make 15 degrees in the meridian, whose semidiameter is 1000 parts then in the parallel whose semidiameter is 777, of the same parts, they shal make 19 degrees and 237/777 parts of one degree that is, 18 min. and little more: which (if it be true that the course from Lisbone to Madera is southwest, and from Madera is 31 deg. 30 min., and the latitude of Lisbone and Tercera 39 deg.) shal the difference of longitude betwixt Lisbone and Tercera. (Wright, 1599, p. 5).

If you imagine 2 ships to be under the Equinoctial 100 leagues asunder, and that each of them should sail from thence due North or South under his Meridian, until they come to the parallel of 60 degrees: they should be there but only 50 leagues distant, because at that parallel the Meridians are distant buy half so much one from another, as they were at the Equinoctial as it may most manifestly appear by the globe:

and yet the Chart will shew, that those two ships have the self-same distance of 100 leagues, being under the 60 parallel, that they had before, being under the Equinoctial. (Wright, 1599, pp. 7-8).

There is yet another error remaining (though all the former were avoided) which raised hereof, because that by the direction on the compass they bend, and turn the ship, in such forte, that they constrain it always to make the same angles with the Meridian. As when they sail from Ushent to Cape Raso, both lying under the same parallel, they guide the ship in such forte, that it makes always right angles with the Meridian, and so holding on their course due West, they keep themselves always under the same parallel, whereas notwithstanding, there is a more certain course, whereby they may go from one place to another, without that losse of way, which they must needs make that keep themselves always under the same parallel. (Wright, 1599, p. 8).

And as concerning the courses from place to place, I have observed that some of our masters take a wise course, in not trusting to those courses which are shewed by their charts. But first getting theselves into the height or paralel of the place to which they are going: and withall, knowing assuredly wheter they be more east warder westward than that place; they then proceed always heedfully keeping themselves under that parallel till they come to the place desired. Then which way of sailing there is none indeed more certain and in allible for the sure finding of the place assigned: but it hath this inconne ience that maketh the way longer than otherwise it should be, if the streight course were kept. (Wright, 1599, p. 3-4)

But this way is not to be defined by any of the lesser circles, but a great circle which is to be drawn by those two places and the arc of that great circle contained betwixt the same places is less than the arc of the parallel which lyeth between them, as may be conclude by an evident and necessary reason out of the principles of Geometry: much like as straight line is shorts then a crooked, both being extended between the same prickes. (Wright, 1599, pp. 8-9).

Therefore this commodity is also hereunto adjoined, that in sailing by a great circle, the way is more short, and compendious. But he that entered into this course of sailing, must know, that he must change the point of the compass (whereupon he guided the ship) not once only, but very often: and that because of the variable, and inconstant inequality of the angles, which that great circle makes with every new Meridian. (Wright, 1599, p. 9).

We hold it not only as true but also as most mere and commodious for the Mariners common use, that the meridians in the sea chart should be everywhere equidistant each from other, and consequently that the rumbes should be straight lines for these causes. (Wright, 1599, p. 10).

Both in the making and using of the mariners Chart with equidistant meridians and straight-lined rumbes, it ought to be preferred before any other instrument heretofore published to that end for the common use of the mariner, at sea especially. And though the globe commended by some as most absolute and perfect for all courses and climates whatsoever: yet for the changeableness thereof, troublesome carriage, stowage and tedious usage for the most part in navigation, following any other course save part be found unmeet and cumbersome, and nothing so fit and ready for the mariners common use at as the nautical planisphere truly made. (Wright, 1599, p. 11).

How the former errors may be avoided. (Wright, 1599).

Yet none of them teacheth and certain way how to amend such grosses faults, thereby the poor Mariner may be deceived many times an whole point of the compass, yea sometimes two or three points and more, in judging by his ordinary Chart how one place beareth from another: especially if he sail fare northwards, or south wards, whereby we may easily ghesle, how indirect a course he shall make to come to the desired haven, that shall follow so false and erroneous direction with great danger (at the least) many times to lose ship, goods, lives and all. (Wright, 1599, p. 12).

But the omitted that wherein all the difficulty lied, that is, how much, or in what proportion those spaces should increase. Which, that it may the better be perceived, I think it not unmeet first to shew by what kind of projection (or extension rather) the nautical planisphere may not unfitly be conceived to be geometrically made after this manner. (Wright, 1599, p. 13).

Let this spherical superficies swell like a bladder, (whiles it is in blowing) equally always in every part thereof (that is as much in longitude as in latitude) till it apply, and ion itself (round about, and all alongst also towards either the pole) unto the concave superficies of the cylinder: each parallel upon this spherical superficies increasing successively from the equinoctial towards either pole, until it come to be of equal diameter with the cylinder, and consequently the meridians still widening themselves, till they come to be se far distant everywhere each from other as they are at the equinoctial. (Wright, 1599, p. 13).

So as the nautical planisphere may be defined to be nothing else but a parallelogram made of the spherical superficies of an Hydrographical globe inscribed into a concave cylinder, both their axes concurring in ones and the spherical superficies swelling in every part equally in longitude and latitude, till every one of the parallels thereupon be inscribed into the cylinder (each parallel growing as the equinoctial) or till the whole spherical superficies, touch and apply it self everywhere to concavity of the cylinder. (Wright, 1599, p. 14).

First therefore in this planisphere, because the parallels are everywhere equal each to other (for every one of them is equal to the equinoctial or circumference of the circumscribing cylinder) the meridians also must needs be parallel and straight lines and consequently the rumbs (making equal angles with every meridian) must likewise be straight lines. (Wright, 1599, p. 15).

Secondly, because the spherical superficies whereof this planisphere is conceived to be made, swatted in every part thereof equally, that is, as much in latitude, as in longitude, tis it apply it self-round about, to the concavity of the cylinder: therefore at every point of latitude in this planisphere, a part of the meridian, kept the same proportion to the like part of the parallel, that the like parts of the meridian, and parallel have each to other in the globe, without explicable error. (Wright, 1599, p. 15).

Now because like parts of the wholes keep the same proportion that their wholes have, therefore the like part of any parallel, and meridian of the globe have the same proportion that the same parallel and meridian have."  (Wright, 1599, p. 16).

As here you see, ae the sine of ah the complement of af the latitude of distance of the parallel *abcd*, from the equinoctiall, is the semidiameter of the same parallel *abcd*. (Wright, 1599, p. 16).

And as the semidiameter of the meridian (or the whole sine) is to the semidiameter of the parallel, so is the secant, or Hypotenuse of the parallel's latitude (or of the parallels distance from the equinoctial) to the semidiameter of the meridian, or to the whole sine; as *fk* (that is) *ak*, to *ac* (that is) *gk*; so is *ik*, to *kf*. (Wright, 1599, p. 16-17).

Therefor in his nautical planisphere, the semidiameter of each parallel being equal to the semidiameter of the equinoctial (that is) to the whole sine; the parts of the meridian at every point of latitude must needs increase with the same proportion wherewith the secants or hypotenuse of the arc, intercepted between those points of latitude and the equinoctiall do increase. (Wright, 1599, pp. 17).

For (supposing each distance of each point of latitude, or of each parallel from other, to contain so many parts as the Secant of the latitude of each point or parallel contained) by perpetual addition of the Secants answerable to the latitudes of each point or parallel unto the summe compounded of all the former secants, beginning with the secant of the first parallels latitude, and thereto adding the secant of the second parallels latitude, and to the summe of both these adjoining the secant of the third parallels latitude, and so forth in all the rest, we may make a table which shall shew the sections and points of latitude in the meridians of the nautical planisphere: by which sections, the parallels are to be drawn. (Wright, 1599, p. 17-18).

As for example, the secans of one minute is 10,000,000 which also shewed the section of one minute of the meridian from the equinoctiall in the nauticall planisphere. Whereunto adde the secans of 2 minutes, that is 10.000.002, the sume is 20.000.002 which shewed the section of second minute of the meridian from the equinoctial in the planisphere: to this summe add the secans of 3 minutes, which is 10.000.004, the summe will be 30.000.006 which shewed the section of the third min. of the meridian from the equinoctial: and so forth in all the rest. (Wright, 1599, p. 18).

He that listed to be more precise may make the like table to decades or tennes of seconds out of Ioachimus Rhaticus his Canon magnus triangulorum. Notwithstanding the Geometrician that desired exact truth, cannot be so satisfied neither, for whose fake and further satisfaction, I thought it not unmeet to adjoin also this Geometrical conceit of dividing a meridian of the nautical planisphere. (Wright, 1599, p. 19).

Let the equinoctiall and a meridian be drawn upon a Globe: Let the meridian (divided into degrees, minutes, seconds) roule upon a straight line beginning at the equinoctial, the Globe swelling in such sort as the semidiameter thereof may be always equall to the secans of the angle, or arch contained between the equinoctial and semidiameter insisting at right angles upon the foreside straight line: The degrees min, sec of the meridian noted in the straight line as they come to touch the same, are the divisions of the meridian in the nautical planisphere. And this conceit of dividing the meridian of the nautical planisphere may satisfy the curious exactness of the Geometrician: but for mechanical use, the table before mentioned which hereafter followed may suffice. (Wright, 1599, p. 19)

The use of this table for making the sea chart, is this: over thwart the midst of the plane superficies, whereupon you will draw the lineaments of the Chart, describe a right line, (representing the equinoctial circle) which you shall divide into 360 parts of degrees, and crosse the same squire wise with right lines, by every fifth or tenth degree. (Wright, 1599, p. 27).

Then take with your compass the length to half the equinoctial, (that is, 180 degrees) and setting one foot of your compasses in the mutual intersection of the equinoctial, with the perpendicular or meridian that pasted by either end of the equinoctial, with the other foot make a prickle in the same perpendicular or meridian: the space contained betwixt this prickle and the equinoctial, divide first into the three, so have you nine in all: and again every one of these into three, so have you 27 parts, and every one of these parts divide into four, so have you 108 parts. And again (if there be space enough) divide every one of these into 10 or 100 so shall you have 1080 or 10800 parts. (Wright, 1599).

Then note every fist and tenth part with black lead, and set figures at them, beginning at the equinoctial, and from thence proceeding northwards and southwards. Then look what numbers stand over against each degree in this Table (omitting always one or two of the first figures towards the right hand) and at the same numbers of parts in the perpendiculars, make prickles on either side the equinoctial: by which (pricks) draw right lines equidistant from the equinoctial, for they shall be the parallels of the nautical planisphere. (Wright, 1599, p. 27).

Which error might be something the less, if the former Table had been first made to smaller parts then minutes. But that were a matter more curious then necessary, the table here before set down being so near the truth, that it is not possible by the rules or instruments of navigation, to discover any sensible error in the sea chart, so fare foot as it shall be made according thereto. (Wright, 1599, p. 28)

As for example: in the table, the number over against to10 degrees, is 60 (casting away the two first figures towards the right hand) therefore I look 60 in the line CD and by that part I drawe the parallel of 10 degrees distance from the equinoctial. And after this manner I draw all the rest, as you may see in the former draught. (Wright, 1599, p. 30)

A most plain and sensible demonstration of the agreement of this nautical planisphere, with the globe, and of the disagreement of the common sea chart from them both. (Wright, 1599, p. 54).

...behold these three figures following, whereof the first is in all points answerable to a part of a spherical superficies, contained betwixt two meridians, differing in longitude 10 degrees, and extended from the equinoctial to the pole. The second contained 10 degrees in longitude, and 90 degrees from the equinoctial in latitude, of the common sea chart with equidistant meridians and degrees of latitude every equal. The third contained 10 degrees in longitude, and 80 degrees in latitude of the nautical planisphere, truly described with meridians in all places equidistant, and degrees of latitude increasing proportionably towards the pole, as before we have shewed. (Wright, 1599, p. 54).

The first figure is a part of the Globe, and therefore in all things shewed the very trued: therefore, we make in the rule to examine the rest by, for so fare forth as they agree with it, they are true, and as much as they differ from it, they are false. Now therefore let us bring them to examination. (Wright, 1599, pp. 54-55).

If there be two places differing in longitude and latitude 10 degrees (that which hath the greater latitude being more to the eastwards) the second figure as you see maketh them lie each from other northeast and southwest, in what latitude soever they be situate, either nearer or further from the equinoctial, as in 50 and 60, or in 60 and 70, or in 70 and 80 degrees of latitude. But in the first and third figure, these places shall be are almost northeast and southwest each from other, at the equinoctial only. (Wright, 1599, p. 55).

And one place being situate in 50, and the other in 60 degrees of latitude, they shall lie one from another northeast and by north, and almost half a point northerly. In 60 and 70 degrees of latitude they lie almost north northeast: in 70 and 80 they bear each from other scarce so much as north and by east. Therefore the common sea chart, in shewing how one of those places beareth from another, errerth in the first, one point of the compass and almost, but in the third, more then three whole points almost. (Wright, 1599, p. 55-56).

But in this nautical planisphere heretofore described, all these errors are avoided, as well in the longitudes and latitudes, as also in the directional distances and respective situations of all places, each from other according to the points of the compass, as by like comparison of it with the globe, will be most manifest. (Wright, 1599, p. 56)

And with all Sir, knowing your good affection to and perfection in Sciences Mathematical, and especially that most necessary, most profitable, and Honourable branch thereof, Navigation; I further make bold to Dedicate this the third Edition of Mr Edward Wrights Correction of errors in the Art of Navigation, to the acceptance and Patronage of you most honoured Sir. (Wright, 1657, p. 1)

When I considered the elaborate pains of that able Mathematician Mr Edward Wright, I thought it very uncommendable to our English Nation that his so usefull a book should (as it were) sleep it self to death; and therefore for the benefit of Sea-men have I printed a third Impression. (Wright, 1657, p. 3)

This Table is divided into three columnes; whereof the first containeth, in the head thereof the degrees, and in the rest of that columne, minutes of a Meridian of the nautical planisphaer, beginning at the Aequinoctial line. In the second columne are placed equal parts of the same Meridian, beginning likewise to be numbred from the Aequinoctial (of which parts each minute of the Aequinoctial is supposed to contain 10,000) and sheweth how many of these parts each minute of latitude in the Sea Chart must be distant from the Aequinoctial. The third columne sheweth the differences of the numbers set down in the second columne. (Wright, 1657, p. 13).

Partes iguales de un meridiano.

Hereby also may bee knowne very exactly the proportion of any parallel to the Equinoctiall. For what proportion the difference answerable to any degree and minute in this table hath to 10000, the same proportion hath the Equinoctiall to the parallel answering to that degree and minute. (Wright, 1657, p. 43)

And consequently, because the like parts of circles are proportional to their wholes, you may hereby very easily and truly finde out how many leagues any arch of any Parallel containeth: for as the difference answerable to the Latitude of the Parallel is to 10,000, so are the minutes contained in that arch to the miles thereof; which divided by 3, give the leagues. (Wright, 1657, p. 44)

As for example, if you would know how many leagues make a degree in the Parallel of London, whose Latitude is 51 degrees 32 minutes: as 16,075 the difference answering to that Latitude page 26 is to

10,000, so is 20 (the number of leagues contained in one degree of the Equinoctiall) to 12 284/643 the number of leagues making one degree in the Parallel of London. (Wright, 1657, p. 44)

As for example: admit the difference of Longitude betweene the Lizard and Fayal be 22 degrees 52 minutes, that is 1372 minutes, which multiplied by 10,000, make 13,720,000: and this divided by 12,898 (which is the difference of the equal parts answerable to 39 degrees 10 minutes, the latitude of the Northeast corner of Fayal Iland) shall give you 1064 miles almost, that is 354 ⅔ leagues, the difference of their Longitudes counted in the Parallel of Fayal. (Wright, 1657, p. 44)

# ANEXO 2

## Un estudio sobre la construcción social del conocimiento matemático: Proyecciones de Mapas.

Estimado profesor/a, de antemano le agradecemos su participación en esta investigación. El objetivo de este cuestionario es conocer sobre su experiencia en su formación como profesor y sus preferencias en el aula.

1. Nombre

______________________________

2. Elige la/las opciones que describan tu formación
   - ☐ Profesorado de Matemática en el Instituto de Profesores Artigas en curso.
   - ☐ Profesor/a de Matemática egresado/a del Instituto de Profesores Artigas.
   - ☐ Estudio de Posgrado en curso.
   - ☐ Estudio de Posgrado finalizado
   - ☐ Otra _______________________
3. Señale tres cursos de matemática específicos que consideras fueron fundamentales como parte de tu formación.
   - ☐ Fundamentos de la Matemática
   - ☐ Geometría I
   - ☐ Análisis I
   - ☐ Álgebra Lineal y Geometría
   - ☐ Análisis II
   - ☐ Probabilidad y Estadística
   - ☐ Topología
   - ☐ Profundización en Álgebra
   - ☐ Profundización en Análisis
   - ☐ Profundización en Geometría
4. ¿Por cuál curso de Profundización optaste en tu último año de formación?
   - o Álgebra

- Análisis
- Geometría

5. Cantidad de años de trabajo como profesor/a de educación secundaria

   ______________________________

6. Actualmente, ¿en qué cursos te desempeñas como profesor/a?
   - ☐ Primer año de Ciclo Básico
   - ☐ Segundo año de Ciclo Básico
   - ☐ Tercer año de Ciclo Básico
   - ☐ Primer año de Bachillerato
   - ☐ Segundo año de Bachillerato
   - ☐ Tercer año de Bachillerato
   - ☐ Otro
   - ☐ Ninguno
7. ¿En cuál curso prefieres trabajar?
   - ☐ Primer año de Ciclo Básico
   - ☐ Segundo año de Ciclo Básico
   - ☐ Tercer año de Ciclo Básico
   - ☐ Primer año de Bachillerato
   - ☐ Segundo año de Bachillerato
   - ☐ Tercer año de Bachillerato
8. ¿Cuál de los siguientes bloques temáticos prefieres abordar en tus clases?
   - ☐ Números
   - ☐ Geometría métrica
   - ☐ Álgebra
   - ☐ Estadística y Probabilidad
   - ☐ Análisis Matemático
   - ☐ Geometría Analítica
   - ☐ Cálculo
9. ¿Por qué?

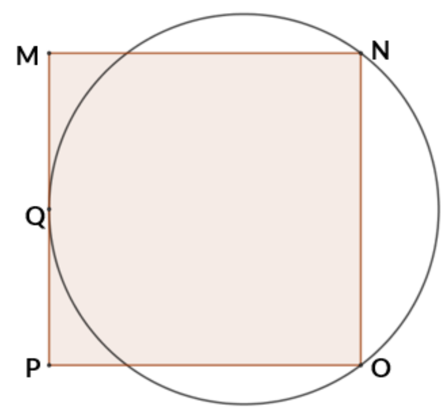
**10.** Se presentan los temas de segundo año de Ciclo Básico, si por falta de tiempo debieras omitir alguno, ¿cuál sería?

- Expresiones algebraicas
- Funciones
- Geometría del triángulo
- Funciones del plano en el plano
- Geometría del espacio
- Ninguna preferencia

**11.** ¿Por qué?

**12. Dado el siguiente problema:**

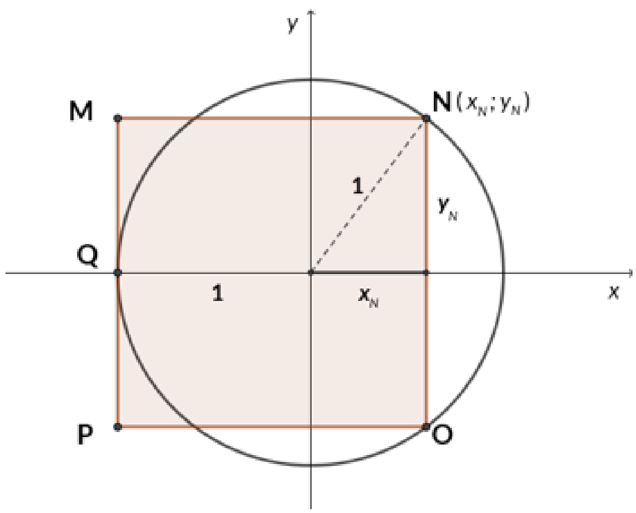
Sea MNOP un cuadrado. Q es punto medio de MP.
Sea la circunferencia que pasa por N, O y Q.
Considera el radio de la circunferencia igual a 1
¿Cuál figura tiene mayor perímetro?
¿El cuadrado o la circunferencia?




**¿Cuál de las tres soluciones expuestas es de tu preferencia?**

- Solución 1

Sea **N** $(x_N;\ y_N)$




La medida del lado del cuadrado es igual a $2y_N$

Además, $1 + x_N = 2y_N \qquad x_N = 2y_N - 1$

Por el Teorema de Pitágoras se tiene que:

$$(2y_N - 1)^2 + {y_N}^2 = 1^2$$

$$4{y_N}^2 - 4y_N + 1 + {y_N}^2 = 1$$

$$5{y_N}^2 - 4y_N = 0$$

$$y_N = 0, \qquad y_N = \frac{4}{5}$$

El perímetro del cuadrado es $\frac{32}{5}$

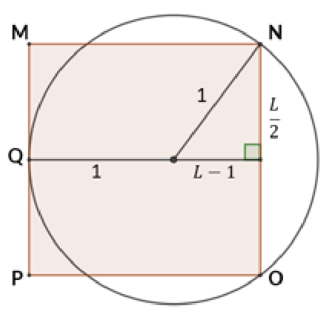
El perímetro de la circunferencia es $2\pi$

$$\frac{32}{5} > 2\pi$$

El perímetro del cuadrado es mayor que el perímetro de la circunferencia.

- Solución 2

Sea $L$ la medida del lado del cuadrado.




Por el Teorema de Pitágoras:

$$1^2 = (L-1)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$1 = L^2 - 2L + 1 + \frac{L^2}{4}$$

$$L\left(\frac{5L}{4} - 2\right) = 0$$

$$L = \frac{8}{5}, \qquad L = 0$$

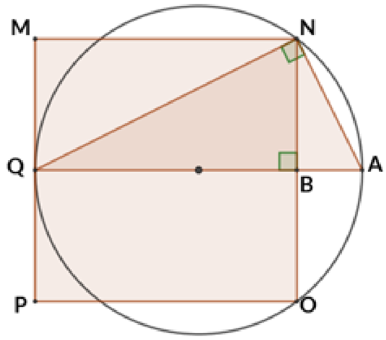
Por lo que, el perímetro del cuadrado MNOP es $\frac{32}{5}$

El perímetro de la circunferencia es $2\pi$.

$$\frac{32}{5} > 2\pi$$

El perímetro del cuadrado es mayor que el perímetro de la circunferencia.

- Solución 3




$\overline{QA} = 2$ es diámetro de la circunferencia.

Se buscará $\overline{NB}$, que es la medida de la mitad de un lado del cuadrado.

$\overline{QA} \cap \overline{ON} = \{B\}$

El ángulo $\widehat{NBQ} = \widehat{ABN} = 90°$

Los triángulos QNA, NAB y NBQ son semejantes.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Ahora, } \overline{QA} = \overline{QB} + \overline{BA} \\ \overline{QB} = 2\overline{NB} \\ \overline{BA} = \frac{1}{2}\overline{NB} \end{array}\right\} \overline{QA} = 2\overline{NB} + \frac{1}{2}\overline{NB}$$

$$\overline{QA} = 2 = \frac{5}{2}\overline{NB} \Rightarrow \overline{NB} = \frac{4}{5}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{El perímetro del cuadrado es } \frac{32}{5} \\ \text{El perímetro de la circunferencia es } 2\pi \end{array}\right\} \frac{32}{5} > 2\pi$$

El perímetro del cuadrado es mayor que el perímetro de la circunferencia.

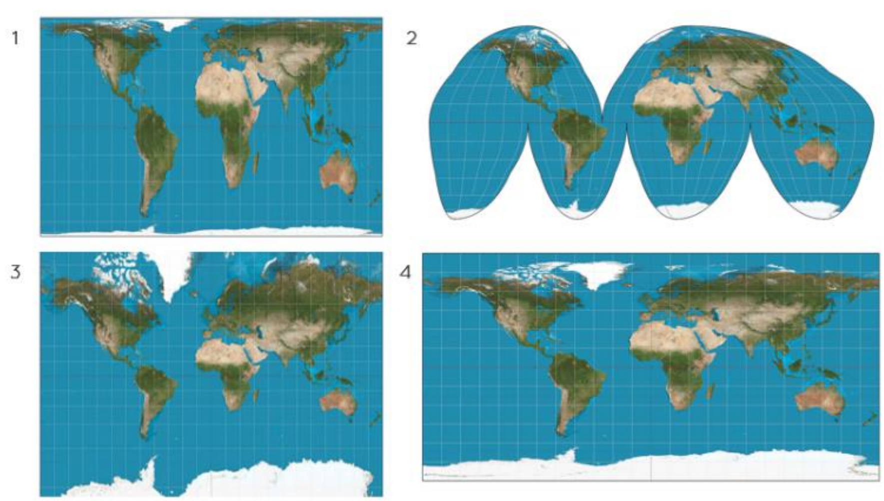
**13.** ¿Por qué?

______________________________________________________________________

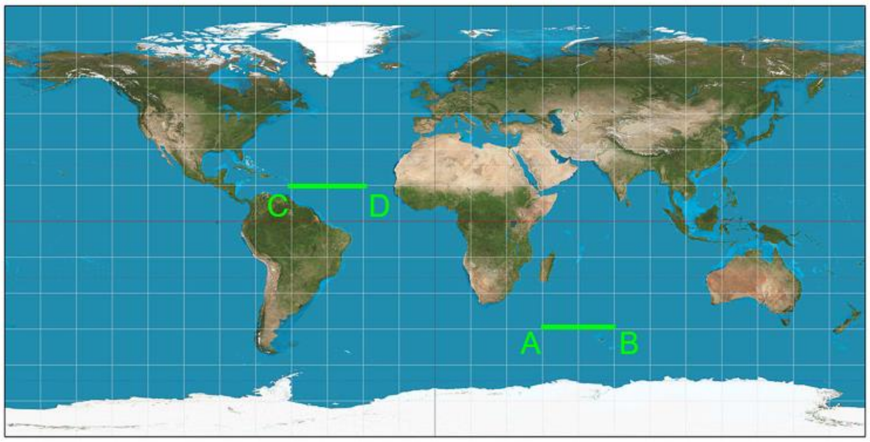
______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

**14.** ¿Cuál de las siguientes representaciones de la Tierra reconoces como familiar? ¿Cuál no? ¿Por qué?



**15.** En esta representación de la Tierra, ¿crees que los segmentos AB y CD representan la misma distancia? ¿Qué reflexión podrías compartir?



# ANEXO 3

## Respuestas de las profesoras seleccionadas

| | |
|---|---|
| **1.** | PROFESORA A |
| **2.** | Profesora de Matemática Egresada del IPA |
| **3.** | Geometría, Análisis Matemático, Topología |
| **4.** | Geometría |
| **5.** | 5 |
| **6.** | Primero, Segundo y Tercero de Ciclo Básico, Primero de Bachillerato |
| **7.** | Primer año de Bachillerato |
| **8.** | Análisis Matemático |
| **9.** | Lo selecciono por ser un tema que está en todos los programas y es necesario como concepto previo al siguiente año. También se me presenta como gran desafío el uso de las distintas representaciones de relaciones entre conjuntos, funciones. Es un tema que permite presentar actividades intra-matemáticas como extra-matemáticas, como también enfatizar en la observación, la conjetura, la argumentación, en la noción de conjuntos numéricos, la abstracción, entre otros. |
| **10.** | Geometría del espacio |
| **11.** | No haber adquirido estos conceptos no impedirán al estudiante un buen desarrollo en el siguiente curso, ya que hay un marcado énfasis en funciones y Geometría en el plano en 3er año. |
| **12.** | Estadística |
| **13.** | Siento que implica conceptos previos que la mayoría de los estudiantes no tiene adquiridos y que por lo tanto entrar en tema llevaría bastante tiempo, además, siento que no tengo tantas herramientas a nivel profesional como para profundizar en el mismo. |
| **14.** | Solución 2 |
| **15.** | No complejiza la situación, trabaja con una sola variable e involucra dos conceptos generales, manipulación de expresiones algebraicas y Pitágoras. Pienso que mis estudiantes entenderían mejor esta resolución. |
| **16.** | La 4 me parece más familiar, creo que es la que aparece en los libros que calcaba en la escuela, en cuadros y en Google Maps. La 1 porque creo que es la que he visto en menor cantidad. |
| **17.** | Como el mapa está con la cuadrícula uno tiende a pensar que si pues abarca "dos cuadraditos". Pero por la forma del planeta tierra (en 3 dimensiones) diría que AB es menor que CD, aunque no tengo muy claro cómo es la construcción de las escalas en el planisferio, me pregunto ¿cómo se representa un objeto de tres dimensiones con la característica del planeta tierra, en el plano? ¿qué papel juegan las coordenadas polares y cómo? ¿es posible un isomorfismo entre el conjunto de puntos del globo terráqueo con el plano euclidiano? |

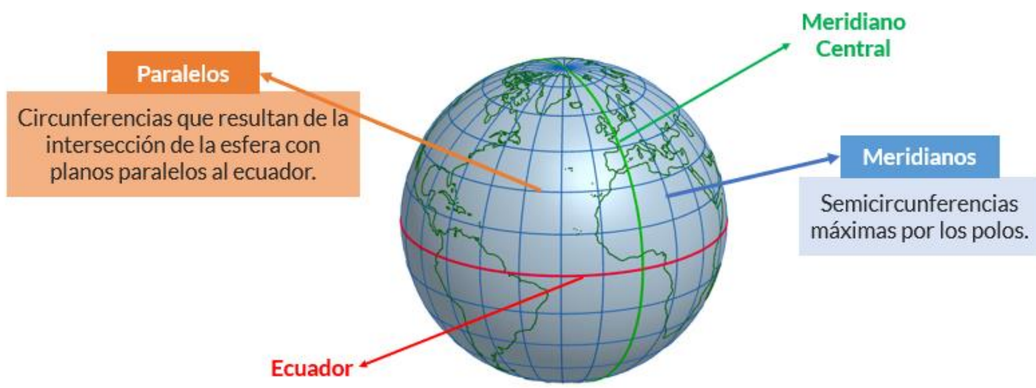
| | |
|---|---|
| **1.** | PROFESORA B |
| **2.** | Profesora de Matemática Egresada del IPA<br>Otro: Cursos cortos de posgrados IPES y formación en educación sexual en curso |
| **3.** | Análisis Matemático, Topología y Profundización en Geometría |
| **4.** | Geometría |
| **5.** | Seis |
| **6.** | Segundo año de Ciclo Básico |
| **7.** | Primero y Tercero de Ciclo Básico, Primero y segundo año de Bachillerato |
| **8.** | Análisis Matemático, Geometría Métrica y Geometría Analítica |
| **9.** | Porque son en los que me siento más preparada y en los que normalmente puedo pensar actividades más interesantes. Me costó elegir cursos y temáticas de preferencia debido a que no he tenido cursos de segundo ciclo a cargo. |
| **10.** | Geometría del triángulo |
| **11.** | Porque pienso que el resto de los temas están más interconectados y es posible un tratamiento con mirada funcional que atraviese todo el curso. |
| **12.** | Ninguna preferencia |
| **13.** | Nunca he preparado este curso |
| **14.** | Solución 2 |
| **15.** | Pienso que cada solución servirá para atender temáticas distintas. Opté por la 2 para el trabajo sobre el teorema de Pitágoras. |
| **16.** | La 3. Recuerdo haber trabajado muy pocas veces con la representación "en gajos" y casi siempre con el planisferio donde aparece Europa en el centro y el hemisferio norte más grande que el sur. Representaciones para nada casuales sino con intención clara. |
| **17.** | En esta representación sí. Lo que no se condice con las distancias sobre la esfera. |

# ANEXO 4

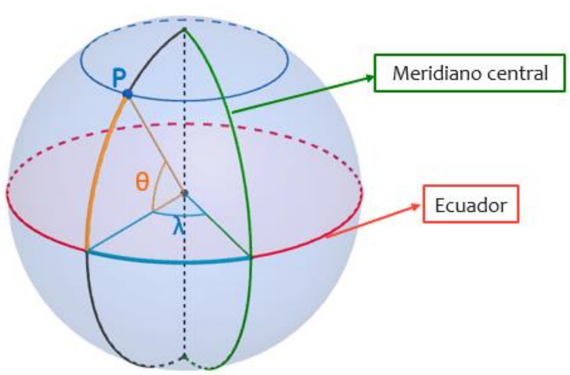
## Diseño exploratorio

### Momento 1. Introducción

La posición de un punto en la superficie de la Tierra representada como una esfera está dada por dos coordenadas geográficas: latitud y longitud. Estas son dos ángulos medidos en grados que determinan en qué paralelo y en qué meridiano se encuentra el punto. Se considera como referencia el ecuador y el meridiano central.




Esos ángulos son medidos desde el centro de la Tierra hasta un punto en la superficie de esta. Las coordenadas del punto P estarán dadas por el ángulo de latitud $\theta$, y el ángulo de longitud $\lambda$.

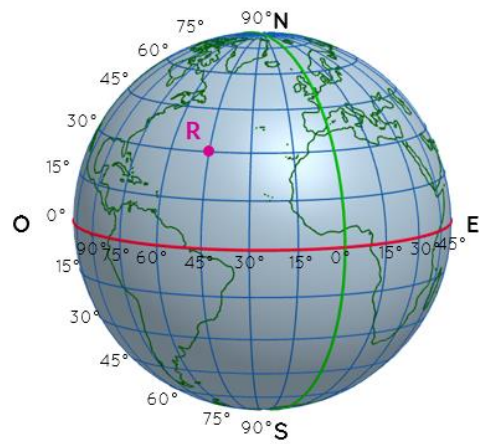



Latitud: Es el ángulo $\theta$ entre el plano del ecuador y el segmento que pasa por el centro de la Tierra y el punto P.

Longitud: Es el ángulo $\lambda$ que se forma entre el meridiano central y el meridiano en el que se ubica el punto P.

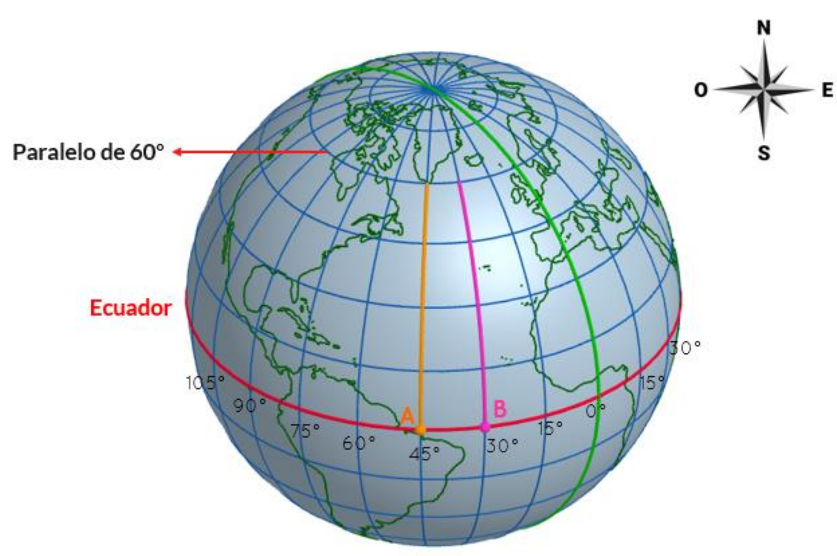
A modo de ejemplo, las coordenadas del punto R son:

- θ: 30°N
- λ: 45°O

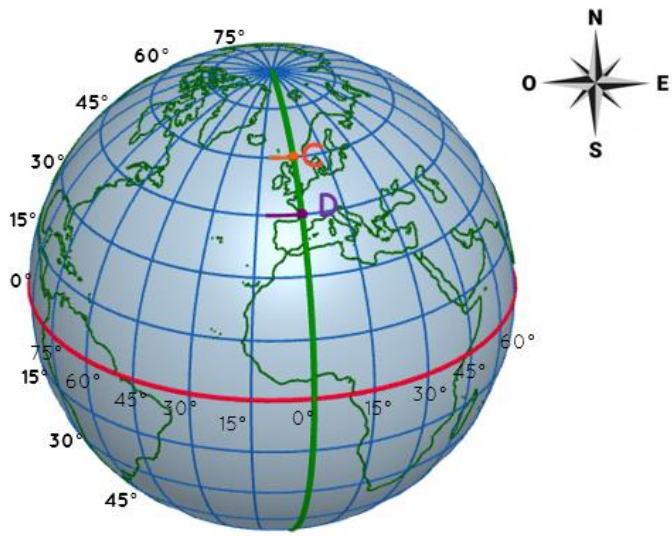



**Momento 2**

A) Supongamos que dos barcos parten del ecuador de los puntos A y B, con una distancia entre ellos de aproximadamente 1670 km, con dirección Norte, como se muestra en la figura. Si al llegar al paralelo de 60° de latitud, el barco que partió de A frena y el barco que partió de B lo quiere alcanzar navegando hacia el Oeste por ese mismo paralelo, ¿Cuál sería la distancia que recorrería? ¿Por qué?



B) Si suponemos que dos barcos parten de los puntos C y D manteniendo un rumbo Oeste, en el mismo paralelo, y ambos recorren una distancia de 1000km, ¿cuál es el ángulo longitud de los puntos de llegada?



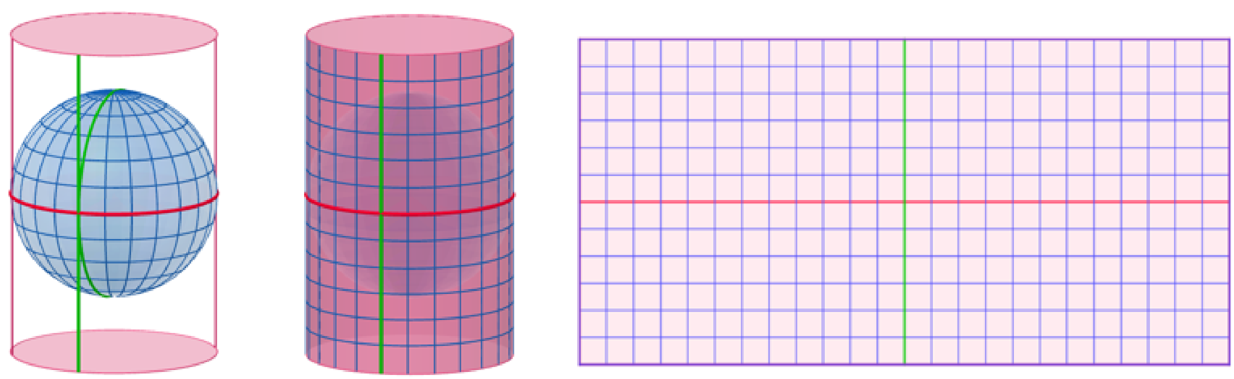

C) En el contexto del siglo XVI, la navegación tenía un papel importante para el comercio y la expansión de las naciones europeas. Los instrumentos que tenían para la navegación en esa época permitían saber la posición según el paralelo en el que se ubicaban, es decir, la latitud; con la brújula en particular determinaban la dirección del Norte.

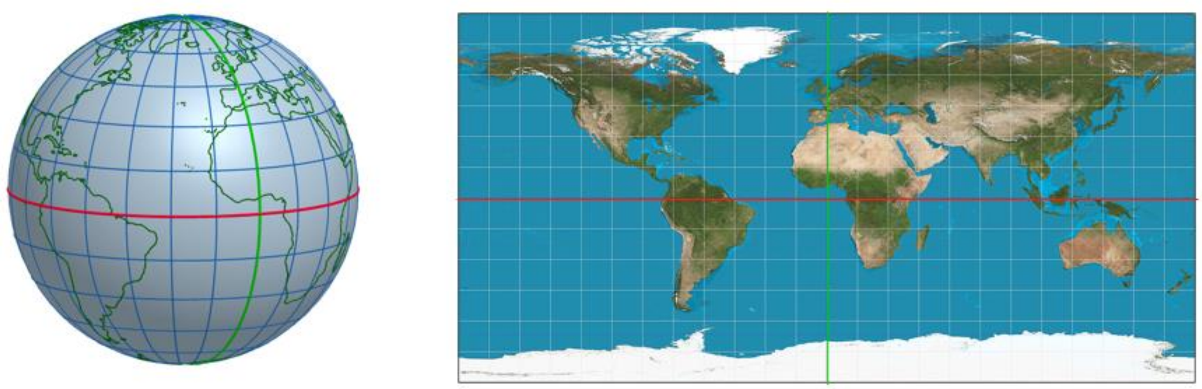
Se presenta a continuación lo que los navegantes experimentados luego de varias pruebas y errores reconocían como un “*rumbo seguro*” del punto A al B.

¿Por qué crees que ese rumbo lo reconocían como seguro?

## Momento 3

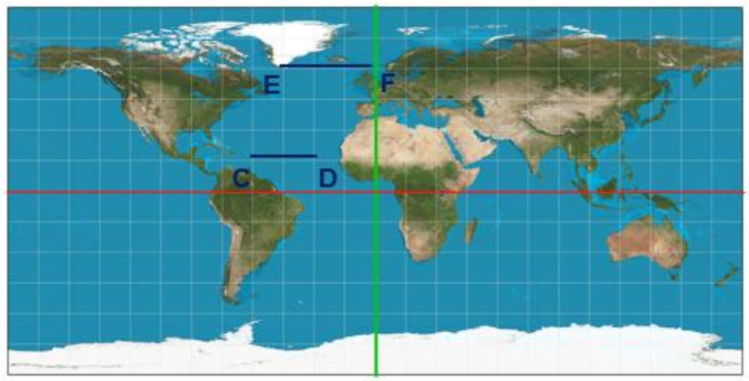
El mapa que se utilizaba en el siglo XVI para la navegación estaba construido con la *proyección equidistante*. En esta, el ecuador y los meridianos mantienen la misma medida que en el globo terráqueo que se tome como referencia para construirlo. Por su parte, todos los paralelos que en la esfera son circunferencias que tienen diferentes medidas, se representan paralelos al ecuador y con la misma medida de este.





A partir de esta explicación de la proyección, responde:

i. ¿Los segmentos CD y EF representan la misma distancia? Si la respuesta es no, ¿cuál es mayor? ¿Por qué?




ii. ¿Qué tan mayor es uno que el otro?