CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemática Educativa

RAZONAMIENTO COVARIACIONAL DE ESTUDIANTES DE BACHILLERATO SURGIDO EN RESPUESTA A TAREAS EN SITUACIONES GEOMÉTRICAS DINÁMICAS COMO UN ACERCAMIENTO AL CONCEPTO DE FUNCIÓN

Tesis que presenta

César Briseño Miranda

Para obtener el grado de Doctor en Ciencias,

en la especialidad de Matemática Educativa

Director de la Tesis:

Dr. Ernesto Alonso Sánchez Sánchez

Ciudad de México　　　　Julio, 2020

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) el apoyo financiero brindado a través de la beca otorgada durante mis estudios.

Becario No. 28091

AGRADECIMIENTOS

A Dios por las bendiciones que he tenido a lo largo de mi vida y la oportunidad de ser feliz.

A mi esposa Olivia por su apoyo incondicional para conseguir este objetivo. Este trabajo es muestra del esfuerzo de ambos ante la adversidad. Gracias por estar a mi lado en todo momento y llenar mi vida. *Simplemente Te amo.*

A mis hijos Karen y Carlos quienes me dan fortaleza día con día. Gracias por tenerlos conmigo y hacer mi vida dichosa. Espero que este trabajo les muestre que las cosas no son fáciles, pero pueden lograr sus objetivos con base en el esfuerzo, constancia y dedicación. Siempre estaré a su lado para apoyarlos. *Los amo y gracias por llenar mi vida*.

A mis padres Patricia y Prospero por su guía en el camino y porque he logrado ser la persona que soy gracias a ellos. *Con cariño para ustedes.*

A mis hermanos Roberto, Rosa Isela y Diana porque sé que cuento con ustedes y estoy orgulloso de ser su hermano. *Gracias hermanos, los quiero*.

A mis sobrinos Daniel y Gustavo para que este trabajo muestre que a pesar de las dificultades podemos salir adelante de cualquier situación y que pueden contar con mi apoyo incondicional. *Los quiero mucho.*

A mis amigos de toda la vida Julio y Edgar, porque a pesar del tiempo seguimos unidos. A mis amigos de la preparatoria Omar, Miguel, Jaime y Conrado, por brindarme su amistad incondicional.

A mi director de tesis, el Dr. Ernesto Sánchez por su asesoría y confianza, ya que este trabajo se logró gracias a su guía. Agradezco infinitamente su apoyo en esta etapa académica.

A mis sinodales, Dra. Asuman Oktaç, Dr. Luis Enrique Moreno Armella, Dr. David Alfonso Paez y Dra. Martha Leticia García, por la confianza brindada a este trabajo y por sus sugerencias para enriquecerlo.

Al Dr. José Guzmán ✞ por creer desde un inicio en este trabajo y apoyarme para el ingreso al Doctorado. QDEP.

A mis compañeros, amigos, profesores y personal del Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN quienes han hecho placentera esta etapa de mi vida.

ÍNDICE

Capítulo 3

Marco conceptual

Capítulo 4

Método

Capítulo 5

Análisis de datos: primer momento de las Actividades

Capítulo 6

Análisis de datos: segundo momento de las Actividades

Capítulo 7

Conclusiones

RESUMEN

Este proyecto de investigación tiene como objetivo analizar el razonamiento de estudiantes de bachillerato acerca del concepto de función, el cual es introducido desde un enfoque de la covariación cuando abordan situaciones, con y sin el uso de la tecnología digital. En este trabajo nos preguntamos: ¿Cómo razonan los estudiantes mientras participan en actividades cuyo foco es promover el concepto de función cuadrática y de función radical? ¿Qué caracterizaciones asociadas con el razonamiento de covariación llevan a cabo los estudiantes cuando resuelven situaciones geométricas? Y, finalmente, ¿qué tipo de tareas favorecen el razonamiento sobre la covariación y, en consecuencia, el razonamiento funcional? La investigación es de tipo cualitativa, y está basada en los principios y procedimientos de la *teoría fundamentada* (Glaser y Strauss, 1967/2008; Birks y Mills, 2011). Sus producciones fueron analizadas buscando patrones de respuesta para que nos informaran de sus razonamientos. Para dar respuesta a estas preguntas se diseñaron situaciones con dos fines, por un lado, propiciar la reflexión de los estudiantes sobre la covariación y, por otro, inducirlos a escribir sus razonamientos acerca de esta. Así, se observaron y caracterizaron los diferentes niveles de razonamiento que los estudiantes desarrollaron en el proceso de resolver las situaciones, lo que proporcionó información e ideas para avanzar en la respuesta a las preguntas, mismas que constituyen la aportación de la investigación.

ABSTRACT

This research project aims to analyze the reasoning of high-school students on the concept of function. The concept is introduced from a covariation approach when the students face situations with and without the use of digital technology. In this work we ask: How do students reason while participating in activities focused on promoting the concept of quadratic function and radical function? Which characterizations associated to the reasoning on covariation do students carry out when they solve geometric situations? Finally, which type of tasks promote the reasoning on covariation, and consequently, functional reasoning? This is a qualitative research based on the principles and procedures of the *grounded theory* (Glaser & Strauss, 1967/2008; Birks & Mills, 2011). Its products were analyzed looking for response patterns that shed light on the students' reasonings. To answer these questions, situations were designed; on one hand they aimed to promote the students' reflection upon covariation, and on the other hand, they sought to induce students to write their reasonings on covariation. Then, we observed and characterized the different levels of reasoning that the students developed in the process of solving the situation. This provided information and ideas to move forward and answer the questions that integrate the contribution of the research.

PRESENTACIÓN

En el presente documento se expone un estudio que pretende analizar el razonamiento de estudiantes de bachillerato acerca del concepto de función con el enfoque de covariación cuando afrontan situaciones geométricas dinámicas (SGD) en ambientes de lápiz y papel y tecnológico digital. Para analizar las manifestaciones del razonamiento de covariación, el estudio se apoya en el marco conceptual surgido de los principios y procedimientos de la teoría fundamentada y se explica el papel de los ambientes de trabajo (lápiz y papel y tecnológico digital) para la comprensión del concepto de función desde la perspectiva de la covariación

Este documento consta de siete capítulos. Los primeros tres capítulos se relacionan con las características, los propósitos y el sustento de la presente investigación, mientras que los siguientes cuatro aluden al método, el análisis de datos y la discusión de resultados del estudio.

En el capítulo 1, se plantea el problema de la investigación, los objetivos de ésta y se expone una aclaración sobre el nuevo rumbo al que se dirigió este trabajo a partir del documento predoctoral. Además, en este capítulo se plantean las preguntas que guían la presente investigación y se complementa con la justificación del trabajo.

En el capítulo 2, se exponen los antecedentes de la investigación y se incluye la revisión de la literatura relacionada con los conceptos involucrados (*e.g.*, pensamiento, razonamiento, el concepto de función, la covariación, el álgebra y su relación con la geometría y el ambiente tecnológico digital).

En el capítulo 3 se aborda el marco conceptual que involucra los temas relacionados con los conceptos implicados (*e.g.*, el concepto de función como covariación, el movimiento de un punto y el concepto de variable, las situaciones geométricas dinámicas, la mediación en el desarrollo de conceptos). Además, como parte principal de este capítulo, se presentan las bases teóricas que dan sustento a la presente investigación integradas en el marco para la organización del razonamiento de covariación que especifican las componentes para el análisis de datos del estudio final.

El capítulo 4 describe el método empleado para llevar a cabo la presente investigación. Se incluyen las características de los sujetos participantes, el tipo de investigación, el diseño, la implementación de las situaciones para realizar el acopio de datos y se describen las fases realizadas en este estudio.

Los capítulos 5 y 6 exponen los resultados en los dos momentos de resolución de las situaciones geométricas dinámicas en ambiente de lápiz y papel y tecnológico digital, respectivamente. El análisis de datos y la discusión de resultados se basan en el marco conceptual descrito en el capítulo anterior e incluyen los componentes relacionados con las caracterizaciones del razonamiento de covariación, los cuales son: (i) ignorancia de la covariación, (ii) consideración de la covariación; (iii) análisis previo de la covariación; (iv) representación de la covariación; y (v) consecuencias de la covariación.

El capítulo 7 incluye las conclusiones surgidas del análisis y la discusión de resultados; así como las respuestas a las preguntas de investigación y exposición de algunas consideraciones del trabajo.

Finalmente, se agregan las referencias bibliográficas citadas en el presente trabajo y se incluye el apéndice con los anexos relacionados con las actividades implementadas.

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. INTRODUCCIÓN

En el presente capítulo se da a conocer la problemática que se abordó en esta investigación, la cual tiene como objetivo principal analizar el razonamiento de *alumnos*[1] de bachillerato acerca del concepto de función, desde el punto de vista de la covariación surgido a partir de la resolución de *Actividades*[2] que involucran *situaciones geométricas dinámicas* (SGD)[3]. En este capítulo se acota y formula el problema de investigación, y se plantean tanto los objetivos como las preguntas de investigación que servirán de guía en el presente documento. Se continúa con ciertas aclaraciones sobre la relación del contenido del presente documento con el documento predoctoral para finalizar con algunas consideraciones que justifican el presente estudio.

---

[1] Los vocablos *alumno, participante* y *estudiante* se usan como sinónimos en este documento.

[2] Para efectos de esta investigación, la palabra *Actividad* (escrita con "a" mayúscula) se refiere a la implementación de una tarea o un conjunto de tareas estructuradas con la finalidad de favorecer determinados procesos de aprendizaje por parte de los participantes.

[3] Entiéndase como *situaciones geométricas dinámicas* (SGD), para este estudio, aquellas construcciones geométricas que cambian de manera previsible, pero mantienen su configuración geométrica cuando un punto se desplaza a lo largo de un segmento. Las *situaciones geométricas dinámicas* son definidas en el capítulo 3 de este documento (véase parágrafo 3.3.).

1.2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El concepto de función es importante en matemáticas y ciencias. Dentro de las matemáticas este concepto desempeña un papel central e integrador; las funciones se utilizan en cálculo, en topología, en estructuras algebraicas y en espacios vectoriales, sólo por mencionar algunas de las ramas de la matemática donde se presentan. Por otro lado, el tema es fundamental en diversas áreas relacionadas con las ciencias pues uno de sus usos más importantes es el de modelar aspectos relevantes de fenómenos del mundo físico y social; entre ellos, el movimiento es quizás el más importante (Selden y Selden, 1992).

La importancia de las funciones dentro de las matemáticas avanzadas y en aplicaciones científicas tuvo, en la Alemania de 1908, una influencia en el currículo de matemáticas y en el contenido matemático escolar; se presentó bajo la forma de *pensamiento funcional* (Krüger 2019). Sierpinska (1992) opina que el pensamiento funcional impregna todas las matemáticas y en la escuela, los estudiantes deberían dedicar tiempo para desarrollar y adquirir este tipo de pensamiento. La formación de un pensamiento funcional como objetivo de aprendizaje debería ser parte del currículo de matemáticas de la educación básica (Akkoc y Tall, 2005; Carlson, 1998; Hansson, 2006).

Como ocurre con otros conceptos matemáticos complejos, los estudiantes tienen una variedad de dificultades para apropiarse y utilizar adecuadamente el concepto de función (Dubinsky y Harel, 1992). Se han reportado dificultades de los estudiantes en entender el lenguaje de las funciones, en percibir la relación entre funciones y relaciones, en distinguir entre funciones y las que no lo son, y explicar por qué son diferentes, además, en la conversión de funciones de una representación a otra (Walde, 2017) y, muy importante para nosotros, en que los estudiantes comprendan en qué sentido una función modela el movimiento y, más en general, la covariación.

En efecto, Carlson (1998) enumera ocho dificultades o falsas concepciones en el razonamiento con y acerca del concepto de función de estudiantes talentosos al final de un primer curso universitario de álgebra, entre éstas se deben destacar las siguientes tres que se refieren a la covariación subyacente en el concepto de función. Gran parte de los estudiantes talentosos:

1. No saben cómo representar relaciones funcionales del mundo real utilizando representaciones algebraicas o gráficas de funciones
2. No interpretan adecuadamente información de gráficas que representan fenómenos dinámicos
3. No representan gráficamente aspectos covariantes de situaciones del mundo real.

Carlson, Oehrtman y Engelke (2010) señalan que la investigación realizada en educación matemática sobre el concepto de función sugiere que las intervenciones para enseñar el concepto deben promover una visión de la función como una entidad que acepta entradas y produce salidas, y que permite razonar sobre contenido matemático dinámico y en contextos científicos. Además, recomienda que los métodos y procedimientos algebraicos que aprenden los estudiantes se conecten más con el concepto de función y otros conceptos del cálculo. En consecuencia, sugieren que desde los cursos de álgebra el estudio de la función tenga un enfoque hacia la covariación.

El papel de las múltiples representaciones de los objetos matemáticos ha sido objeto de investigación en educación matemática con la convicción de que puede abrir caminos para revertir algunas de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas (Goldin y Shteingold, 2001). De acuerdo con Duval (2006), los conceptos matemáticos no son accesibles si no es a través de sus representaciones; además, una evidencia de que un estudiante entiende un concepto matemático es que sea capaz de representarlo de dos o más formas distintas y operar con él en cualquiera de ellas. Estas ideas son aplicables al concepto de función.

En los softwares dinámicos de matemáticas, como Geogebra, se ha materializado la posibilidad de explorar conceptos matemáticos teniendo acceso a más de una de sus representaciones y sus transformaciones respectivas. Se puede vincular una función dada algebraicamente con su gráfica y su tabla, así como realizar transformaciones en alguna de esas representaciones y observar de manera automática lo que ocurre con las otras. No obstante, y aunque se ha avanzado mucho, hace falta aclarar más cómo explotar estas posibilidades en el salón de clase con el concepto de función y evaluar los avances reales en el aprendizaje de los estudiantes.

Una aportación importante de los softwares dinámicos es la de vincular las representaciones con el movimiento de puntos o figuras; en efecto, al mover un punto se puede seguir el rastro de otro objeto (otro punto, una figura o una magnitud) que se desplazan de manera coordinada con el punto inicial. Esta posibilidad brinda un ambiente propicio para que los estudiantes desarrollen, en primer lugar, la idea de variable, que es difícil incluso para estudiantes universitarios (Trigueros y Ursini, 1991; Ursini y Trigueros, 2001); y, en segundo lugar, la idea de función como covariación. Se debe considerar que hay varios acercamientos o definiciones del concepto de función; por ejemplo, como parejas ordenadas con cierta propiedad o como una fórmula algebraica, pero pierde su connotación de movimiento (Selden y Selden, 1992).

Un enfoque de la función como covariación para la enseñanza fue propuesto por Confrey y Smith (1994a; 1994b), quien caracterizó la covariación en términos de coordinación de dos variables de manera que al cambiar los números que toma una variable cambian de manera predecible los números de la otra variable. Thompson (2011) propuso a su vez, un enfoque de covariación, pero lo definió en términos de conceptualizar variables individuales como cantidades y luego conceptualizar dos o más variables como cantidades que cambian simultáneamente. Carlson *et al.* (2002, p. 354) también han impulsado la idea de función como covariación definiendo el razonamiento covariacional como "las actividades cognitivas involucradas en la coordinación de dos cantidades variables mientras se presta atención a las formas en que cambian entre sí". Se han realizado diversos estudios centrados en el enfoque covariacional (*e.g.*, Carlson *et al.*, 2002; Hitt y González-Martin, 2015; Jacobson, 2014; Johnson *et al.*, 2017; Moritz, 2003; Saldanha y Thompson, 1998; Thompson, 2011) y algunos de éstos han puesto énfasis en la incorporación de la tecnología para la comprensión de este concepto (*e.g.*, León, 2017; Lagrange, 2014; Madison *et al.*, 2015; Thompson y Carlson, 2017; Villa, 2012; Weber y Thompson, 2014). Sin embargo, son necesarios más estudios en los que se haga uso de herramientas digitales y cuyo foco sea la covariación.

Un enfoque de la covariación con uso de tecnología no implica el abandono de las técnicas de lápiz y papel. Es razonable pensar que mientras los matemáticos sigan teniendo como forma principal de comunicación de sus resultados las exposiciones escritas con simbología matemática, en la enseñanza se debe seguir promoviendo que los estudiantes aprendan a usar lápiz y papel para simbolizar, explorar y comunicar ideas matemáticas. Un problema que ha emergido a partir del advenimiento y disponibilidad de la tecnología es aclarar cómo el uso de herramientas tecnológicas se relaciona con las habilidades técnicas que se desarrollan con papel y lápiz. Kieran y Drijvers, (2006) hicieron un estudio para entender la relación entre el desarrollo de un pensamiento teórico matemático de los estudiantes en relación con el uso de *Computer Assisted Systems* (CAS) y técnicas de lápiz y papel. Estos autores concluyeron que las actividades de lápiz y papel y el uso de la tecnología se complementan para desarrollar el pensamiento teórico de los estudiantes.

Thompson y Carlson (2017) ofrecen una amplia argumentación para apoyar la recomendación de enfocar el estudio de las funciones desde una perspectiva covariacional. Mencionan, con base en trabajos de Boyer (1946) y de Kleiner (1989) que en la evolución de la idea de función en matemáticas se pueden distinguir cuatro épocas: proporción, ecuación y función (esta se subdivide en dos). En la época de la proporción se caracterizó por la atención al movimiento y su representación geométrica; en la época de la ecuación sobresalen las representaciones algebraicas y las ecuaciones que contenían variables. La tercera época se caracterizó por "la representación explícita de relaciones entre valores de dos cantidades de manera que los valores de una cantidad determinan los valores de la otra" (Thompson y Carlson, 2017, p. 422). La notación de función surgió durante la tercera época. La cuarta época fue inaugurada por Dirichlet en la que se caracterizó una función por una ley precisa de correspondencia entre dos conjuntos de valores (Boyer, 1946). Los autores hacen notar que en las primeras tres épocas una concepción de cantidades que covarían continuamente fue central en el desarrollo de la idea matemática de función; en cambio, en la última caracterización la idea central no está basada en la variación continua: "las formas de pensamiento variacional se volvieron menos importantes hasta tal punto que se consideran formas de pensar heredadas que no deberían fomentarse en la actualidad" (Thompson y Carlson, 2017, p. 422). Infortunadamente —a decir de los autores— se ha vuelto popular la definición conjuntista de función en los cursos escolares de álgebra y cálculo, y en los libros de texto correspondientes.

Basados en las ideas de Thomspon y Carlson (2017), en el presente estudio consideramos que en el proceso de construcción de la noción de función por parte de los estudiantes juega un papel importante —incluso necesario— para promover experiencias cuya idea sea la covariación continua de variables. En particular, retomamos el comentario de Thompson y Carlson (2017, p. 422) relacionado con la primera época de la idea de función, la cual es muy sugerente para nuestra investigación, “La época de la proporción se caracterizó por la atención al movimiento; pero la gente representaba relaciones entre cantidades de manera geométrica capturando la generalidad por medio de la semejanza. Sin embargo, ya que las representaciones eran geométricas, no podían representar el movimiento explícitamente, y así ellas expresaban relaciones estáticamente”. Con base en el comentario de Thomspon y Carlson (2017) emergió la idea de diseñar una secuencia de aprendizaje para propiciar el surgimiento de la noción de función basada en la conexión de los conocimientos geométricos y algebraicos —de los estudiantes— con una configuración que dependiera del movimiento de un punto a lo largo de un segmento, es decir, que incluyera la covariación. La posibilidad de desarrollar estas actividades también con ayuda de un software educativo resultó alentadora. Con base en la idea anterior formulamos las siguientes preguntas de investigación.

1.3. PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

1. ¿Cómo razonan los estudiantes cuando se involucran en tareas cuyo objetivo es formar el concepto de función desde un enfoque de covariación?

2. ¿Qué niveles de razonamiento sobre la covariación emergen del análisis de las respuestas de los estudiantes a preguntas que involucran situaciones geométricas dinámicas para avanzar en la formación del concepto de función cuadrática y con radical?

3. ¿Qué caracterizaciones asociadas con el razonamiento de covariación llevan a cabo los estudiantes de bachillerato cuando abordan situaciones geométricas dinámicas?

4. ¿Qué tipo de tareas promueven un acercamiento al concepto de función desde la perspectiva de la covariación?

1.4. OBJETIVO GENERAL

Producir y describir conocimientos acerca de los razonamientos de los estudiantes de bachillerato sobre función cuadrática y función radical, desde una perspectiva covariacional, mediante el análisis de sus respuestas a tareas que forman parte de Actividades de exploración de situaciones geométricas dinámicas, llevadas a cabo tanto en un contexto de lápiz y papel, como en un contexto tecnológico digital. En particular, también se propone identificar y describir los niveles de razonamiento presentes en sus respuestas, además, distinguir características de las tareas que pueden favorecer el desarrollo del razonamiento funcional.

1.4.1. Objetivos específicos

a) Analizar y documentar cómo los estudiantes razonan ante situaciones geométricas que propician la percepción de la covariación y con ello la formación del concepto de función cuadrática y radical.
b) Caracterizar los patrones de razonamientos sobre la covariación de los estudiantes al resolver situaciones geométricas dinámicas.
c) Evidenciar que el diseño de tareas que involucran la utilización de los ambientes lápiz y papel y/o tecnológico digital promueven el razonamiento de covariación en los estudiantes de bachillerato.

1.5. ACLARACIONES SOBRE EL NUEVO RUMBO DEL TRABAJO

El objetivo del proyecto formulado en el documento predoctoral pretendía documentar cómo surgen, evolucionan y se consolidan los procesos de abstracción de los estudiantes en torno al concepto de área, a partir de la visualización de algunas de sus representaciones semióticas. Aquel estudio fue supervisado por el Dr. José Guzmán quien infortunadamente falleció antes de que el trabajo fuera concluido. En la investigación inicial, se adoptó el modelo de acciones epistémicas anidadas (Modelo RBC+C) de Dreyfus, Hershkowitz y Schwarz (2015), cuyo marco teórico es conocido como *Abstracción en Contexto* (AiC). Este marco teórico permitió —con ayuda de la herramienta metodológica o modelo RBC— analizar los procesos de abstracción de los estudiantes a través de tres acciones epistémicas observables [Reconocimiento (R), Edificando-con (B) y Construcción (C)]; las cuales orientaron el diseño y la implementación de situaciones basadas en problemas geométricos que dan lugar a una relación funcional. Las acciones epistémicas emergieron de una manera cuando las tareas se resolvieron en ambiente tradicional (lápiz y papel) y de otra cuando se empleó el ambiente tecnológico digital (software Geogebra).

Debido a que el Dr. José Guzmán falleció en marzo de 2016, la dirección de mi trabajo quedó a cargo del Dr. Ernesto Sánchez, quien respaldó el trabajo elaborado bajo la dirección del Dr. José Guzmán y me apoyó para presentar el examen predoctoral en agosto de 2016; no obstante, ya no fue posible continuar con los objetivos de investigación previstos en dicho documento. El cambio de asesor e importantes observaciones que recibí de los sinodales en el examen predoctoral, en particular de la Dra. Asuman, provocaron un giro importante en la metodología y en el tema central de la investigación.

Con el cambio en la metodología, recomendación del Dr. Sánchez, se realizó un nuevo análisis a las actividades implementadas y diseñadas previamente, basado en el método de comparación constante, sugerido en la *teoría fundamentada* (Birks y Bills, 2011), para codificar patrones de razonamiento de los estudiantes percibidos en las respuestas a las preguntas de la actividad. La aplicación de este método significó el abandono del modelo de las acciones epistémicas anidadas y el marco de *Abstracción en Contexto* (Dreyfus, *et al*. 2017) para adoptar una técnica más bien inductiva, sin el compromiso de guiar el análisis a la luz de un marco teórico preestablecido.

Por otro lado, en relación con el tema central de la investigación, y atendiendo a las recomendaciones de la Dra. Asuman en el examen predoctoral, se consideró pertinente asumir como foco de atención los temas de covariación y función, y no los de área y abstracción que habían sido concebidos inicialmente. Con base en el análisis surgido del método de comparación constante se identificó que las actividades debían ajustarse y basarse en tareas de optimización de funciones centrando el estudio en el enfoque de covariación. Este cambio de enfoque fue significativo, ya que el concepto de función es fundamental en matemáticas y tiene una mayor riqueza que el concepto de área.

1.5.1. Comparación de algunos rasgos entre el estudio predoctoral y el doctoral

Hay otras diferencias entre el estudio predoctoral y el presente trabajo que se indican en la Tabla 1.1. En contraste, la experiencia del estudio predoctoral fue de vital importancia para generar varios aspectos que son tomados en cuenta en la actual investigación. En primer lugar, los problemas son abordados en ambientes de lápiz y papel y tecnológico digital; la manera de conducir la resolución de las tareas en el salón de clase y la técnica de recolección de datos prácticamente no se modificaron. En segundo lugar, el contenido de las actividades ya diseñadas desde la perspectiva del estudio predoctoral, se modificó y se basó en problemas de optimización manteniendo el interés por observar las representaciones que desarrollan los estudiantes al responder las preguntas guía.

Tabla 1.1.
Comparación de algunos aspectos entre los estudios predoctoral y doctoral

Aspectos	**Estudio predoctoral**	**Estudio doctoral**
Tema matemático	Área	Función como covariación
Actividad cognitiva	Abstracción	Razonamiento
Marco	Abstracción en contexto	Comparación constante
Datos	De un equipo	De todos los equipos
Representación gráfica	Lineal	Cuadrática y radical
Análisis	Búsqueda de acciones epistémicas	Identificación de patrones y categorías emergentes

1.6. JUSTIFICACIÓN DEL ESTUDIO

El enfoque covariacional es reconocido la educación matemática por su importancia para promover el desarrollo del *pensamiento funcional* (Carlson *et al.*, 2002; Lagrange, 2014; Madison *et al.*, 2015; Thompson y Carlson, 2017; Villa, 2012; Weber y Thompson, 2014). Entiéndase por el enfoque de covariación a la formulación y el tratamiento de enunciados referidos a dos variables que covarían, así como a la formación de argumentos con dichos enunciados. Entre los diversos enfoques disponibles para enseñar el concepto de función, el que subraya la covariación parece promisorio para desarrollar un razonamiento funcional, pues aparte de que se relaciona con las raíces históricas del concepto, también prepara a los estudiantes para razonar en los problemas que incluyen movimiento, mismos que van a estudiar en sus cursos de cálculo diferencial e integral. No obstante, aún se sabe poco acerca de cómo razonan los estudiantes de bachillerato en situaciones de covariación (véase capítulo 2: Antecedentes) y cómo pueden desarrollar ante tales situaciones un razonamiento funcional, por esta razón es importante el objetivo de este trabajo, que se resume enseguida:

> Proponer conocimientos acerca de los razonamientos de los estudiantes de bachillerato sobre función cuadrática y función radical, desde una perspectiva covariacional.

Los datos que conviene reunir para lograr este objetivo son las respuestas de los estudiantes a tareas en las que perciban y representen la covariación en situaciones dinámicas, tanto en contextos de lápiz y papel como en un contexto tecnológico digital; ambos en el ambiente del salón de clase. El análisis de sus respuestas a dichas situaciones debe consistir en revelar los patrones de razonamiento que ponen en juego sobre la covariación.

Los conocimientos que se pretende aportar en el presente trabajo podrían ser útiles para profesores de bachillerato, quienes deben cubrir el tema de funciones, para los que elaboran programas de estudio y quieran introducir el concepto de función en cursos de álgebra, para autores de textos a quienes las actividades aquí propuestas podrían sugerirles ideas para el desarrollo de sus materiales. Los conceptos utilizados en este trabajo y los resultados obtenidos también podrían propiciar discusiones con otros investigadores para mejorar y ampliar investigaciones con los mismos objetivos u otros similares.

CAPÍTULO 2

ANTECEDENTES

2.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se abordan los antecedentes relacionados tanto con el problema de investigación propuesto como con los conceptos asociados, los cuales son temas fundamentales de este trabajo, entre los que se destacan: (i) pensamiento y razonamiento; (ii) el concepto de función y las implicaciones en su enseñanza y aprendizaje; (iii) la covariación; (iv) el álgebra y su relación con la geometría; y (v) el ambiente tecnológico digital y su influencia en la enseñanza de las matemáticas. En el presente capítulo se establecen las bases que permitirán identificar los elementos esenciales en torno al razonamiento de covariación, el cual será tratado en el capítulo siguiente, con base en la importancia y vínculo con el concepto de función, así como la influencia que tiene el ambiente tecnológico digital en el desarrollo del trabajo matemático.

2.2. PENSAMIENTO Y RAZONAMIENTO

2.2.1. Pensamiento

Se considera que el *pensamiento*[4] es la actividad intelectual que realiza el ser humano a través de la cual entiende, comprende y capta alguna necesidad de lo que lo rodea; por ello no se puede definir totalmente este concepto debido a su amplitud ya que unas veces se relaciona con la conducta y otras para diferenciar a los seres humanos de los animales. El pensamiento actúa como una capacidad mental para poder solucionar problemas; que se manifiestan por signos y símbolos, asociada con el proceso de comprensión, y la capacidad de recordar y comunicar. Cuando pensamos formamos conceptos, resolvemos problemas, tomamos decisiones y emitimos juicios. El pensamiento se caracteriza porque: (i) emplea conceptos y razonamientos; (ii) tiene patrones en los que se identifican un comienzo y un final; el pensamiento ocurre en milésimas de segundos, miles de comienzos y finales hacen de esto un pensamiento lógico, éste depende del medio exterior y para estar en constante contacto con el dependemos de los cinco sentidos; (iii) el pensamiento siempre responde a una motivación; (iv) sigue una determinada dirección, la cual va en busca de una conclusión o la solución de un problema, y no siempre sigue una línea recta, sino que a manera de zigzag, tiene avances paradas y hasta retrocesos (Gómez, 2010, p. 54)

El pensamiento es el producto de la mente que se origina gracias a la actividad intelectual y puede surgir de abstracciones propias de la imaginación, así como, de las actividades intelectuales racionales. Por un lado, Vygotsky (1979) afirma que el pensamiento es dirigido por el entorno o contexto. Por otro lado, Piaget (1977, p. 43) asegura que:

> El pensamiento dirigido es consciente, es decir, persigue un objetivo que está presente en la mente del que piensa; es inteligente, lo que significa que se adapta a la realidad e intenta influir en ella; es susceptible de ser verdadero o falso (empírica o lógicamente verdadero) y se puede comunicar mediante el lenguaje.

Siguiendo a Gómez (2010), es innegable que cada persona es capaz de pensar por sí misma, así como cada uno adquiere su forma de pensar utilizando diferentes modos, que pueden ser una herencia cultural y no sólo están vinculados a los ámbitos de una actividad

---

[4] La palabra *pensamiento,* según el Diccionario de la lengua española de la Real Académica Española (RAE) (2019), está relacionada con el término *pensar* cuyo significado es formar o combinar ideas o juicios en la mente; en su segunda acepción significa “Examinar mentalmente algo con atención para formar un juicio”.

de disciplinas científicas, sino también al arte, la literatura, el teatro e incluso a las actividades económicas, políticas y de ocio, que van a desarrollar nuestro modo de pensar actual. Este autor afirma que los profesores deben revisar las concepciones sobre el pensamiento, el lenguaje[5], la acción, la enseñanza y el aprendizaje, pues algunas de ellas constituyen obstáculos no sólo para la correcta comprensión de las relaciones que existen entre las diversas actividades sino, sobre todo, para el logro de algunos objetivos educativos y sociales fundamentales.

2.2.1.1. El pensamiento funcional

El pensamiento funcional es un componente del pensamiento matemático basado en la construcción, descripción y razonamiento, con y sobre las funciones (Cañadas y Molina, 2016; Ellis, 2011), que abarca desde relaciones específicas hasta la generalización de las relaciones entre dos (o más) variables (Smith, 2008). De acuerdo con Cuevas, Martínez y Pluvinage (2017, p. 32) el pensamiento funcional y el concepto de función se desarrollan después de promover tres tipos de pensamiento en los estudiantes: (i) *numeracy* conocimiento de los números y operaciones aritméticas (*razonamiento aritmético*); (ii) *rationacy* conocimiento numérico (*razonamiento proporcional*), aunque más avanzado; a partir de concepciones meramente multiplicativas, contiene las proporciones y el manejo de fracciones; incluye también conocimiento de magnitudes y elementos de razonamiento lógico; y (iii) *algebracy* conocimientos que abarcan resolución de ecuaciones y manejo de expresiones que incluyen variables y/o parámetros (*razonamiento algebraico*). La comprensión de la función es un aspecto crítico del razonamiento algebraico, y la construcción de relaciones funcionales es una actividad que debe aprovechar el poder de las capacidades de los estudiantes para razonar acerca de las cantidades y el uso de múltiples representaciones, con la finalidad de fomentar una comprensión profunda de la función (Ellis, 2011; Kieran, 1992). La enseñanza y el aprendizaje del concepto de función está fuertemente relacionado con el sentido del símbolo y las habilidades algebraicas. El tratamiento de las funciones depende y soporta las variables de comprensión, la manipulación de fórmulas y la relación de representaciones tales como tablas, gráficos y

[5] En la matemática educativa, el lenguaje es concebido como un elemento integrador para hablar, escribir, producir e interpretar símbolos (a través de sus representaciones semióticas como símbolos, expresiones, gráficas, tablas, descripciones verbales, entre otras) en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. El lenguaje es comprendido como una herramienta y es mediador entre el sujeto y el objeto para la producción de significado matemático.

fórmulas (Doorman y Drijvers, 2011). Hitt (1996, p. 195) asegura que "uno de los objetivos de la enseñanza en el nivel medio superior es que los alumnos logren tener un buen conocimiento de las distintas formas de representar una función". Por lo anterior, es trascendental el rol que desempeñan los distintos registros de representación en la comprensión de este concepto. El concepto de función visto desde la educación está involucrado de diversas maneras; desde contar en aritmética, operar en álgebra, las transformaciones en geometría y el cálculo están basados en este concepto.

El desarrollo del pensamiento funcional depende de la formación e integración con otros conceptos matemáticos, como el trabajo con variables en álgebra. El trabajo de Ursini, Escareño, Montes y Trigueros (2005, p. 34) reconoce algunos elementos necesarios que promueven, en los estudiantes, el pensamiento funcional a través del uso de variables, entre los que se distingue: (1) la capacidad de reconocer que en ciertas situaciones están involucradas cantidades cuyos valores se relacionan y que la variación de una cantidad afecta la variación de la otra; (2) la información se puede representar de manera verbal, mediante una tabla, una gráfica o en forma analítica. Para cada una de estas representaciones es importante que el alumno reconozca que existe una correspondencia entre dos variables y que estas varían de manera relacionada. Reconocer la relación entre las dos variables implica además darse cuenta de que cada una puede tomar distintos valores dentro del intervalo en el cual está definida la relación; (3) identificar la correspondencia, lo cual implica que deben ser capaces de asignar valores a una de las variables y determinar, en correspondencia, el valor de la otra; (4) trabajar con la variación, lo cual está relacionado con desarrollar la capacidad para determinar los intervalos de variación de una de las variables, dados los de la otra; determinar dónde una función crece o decrece; determinar en qué puntos alcanza un valor máximo o mínimo; cuándo sus valores son positivos o negativos, y cuándo su valor permanece constante; (5) es necesario que el alumno pueda representar una relación funcional de distintas maneras y pasar de una a otra. En cada una de las representaciones están involucradas las variables y es necesario que pueda interpretarlas de manera adecuada; (6) es de suma importancia que los estudiantes puedan simbolizar una relación funcional de manera analítica, estableciendo una relación simbólica entre las variables involucradas, independientemente de cómo se les proporcione la información (verbal, tabla, gráfica); (7) es indispensable que el alumno distinga entre una expresión simbólica que representa una relación funcional, y otras. Por ejemplo, los números generales aparecen en expresiones abiertas (*e.g.*, $4x + 7$), en *tautologías*[6] ($3 + x = x + 3$), en fórmulas generales ($A = b \times h$), como parámetros en las ecuaciones ($3x^2 + 5mx + 7 = 0$) y en las ecuaciones generales ($ax + b = cx + d$). Es necesario que el alumno los interprete como cantidades generales y logre distinguirlos de las variables simbólicas, que representan cantidades desconocidas pero específicas. Por ejemplo, en la expresión $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ la letra n es un número general. En la expresión $2x + 3 = 0$, la variable x representa una cantidad desconocida y en la ecuación $3x + y = 9$ los símbolos x y y son variables y se establece una relación entre ellas.

La relación funcional es un concepto enriquecido e integrado por una red de representaciones (fórmulas, gráficas cartesianas, tablas, figuras geométricas) y conceptos entrelazados (área, longitud, medida, ángulos, congruencia), por lo cual, se debe presentar este concepto de múltiples maneras —sin depender de un solo modo— y proporcionar a los estudiantes las transiciones adecuadas entre estos registros de representación. El uso de distintos registros permite a los estudiantes hacer conexiones entre los registros de representación, identificar y conectar sus propiedades con el fin de adquirir una comprensión más completa y versátil del concepto involucrado (Kieran, 2004; Doorman y Drijvers, 2011; Duval, 1999, 2003, 2006; Sierpinska, 1992; Smith, 2008).

2.2.1.2. El pensamiento variacional

El pensamiento variacional constituye una línea de investigación en educación matemática que tiene su génesis en el análisis y la reflexión de los trabajos de cálculo infinitesimal de Newton, Leibniz y de sus antecesores en los que el cambio se consideró un punto medular en aras de responder a diferentes necesidades de la época, de brindar solución a problemas de movimiento que relacionaban aritmética, geometría y mecánica, entre otras áreas. El estudio de la variación representa una vía para atender algunas de las dificultades que los estudiantes presentan en el establecimiento de conexiones entre aquellos conceptos de fuertes componentes dinámicos, sus representaciones gráficas y el movimiento real de los objetos en

[6] El término *tautología* alude a la repetición de un pensamiento expresándolo con las mismas o similares palabras. Según el *Diccionario de la lengua española* de la RAE (2019) en su primera acepción se refiere a la "Acumulación reiterativa de un significado ya aportado desde el primer término de una enunciación, como en *persona humana*".

sus contextos (Carlson *et al*., 2002; Carlson, Oehrtman y Engelke, 2010; Ayalon, Watson y Lerman, 2016; Johnson, McClintock, Hornbein, Gardner y Grieser, 2017; Johnson y McClintock, 2018; Thompson y Carlson, 2017).

El enfoque de variación, según la *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) (2000), no es exclusivo de los grados octavo y noveno, por el contrario, debe movilizarse a lo largo de todo el ciclo escolar, desde el grado primero hasta el grado undécimo. Según los Estándares de Matemáticas de la UNAM (2017), el estudio del cambio se puede hacer a través del análisis de fenómenos de variación, que posteriormente puede ser representado en gráficas y tablas. Es por ello, que se podría tener un acercamiento al desarrollo del pensamiento variacional y al concepto de función, entendido no como una relación de correspondencia sino como una relación de dependencia, inmerso en fenómenos dinámicos. “Este pensamiento [variacional] cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas” (MEN, 2006).

Ahora bien, dentro de los conceptos propios del pensamiento variacional están: constante, variable, razón, dependencia e independencia de una variable respecto a la otra; es decir, la función está necesariamente permeada por cantidades que pueden estar cambiando o covariando. En este sentido, Doorman y Gravemeijer (2009) afirman que la mayoría de las dificultades de los estudiantes en los cursos de cálculo son consecuencia del poco trabajo significativo en términos del adecuado desarrollo del pensamiento variacional desde la educación secundaria. Kaput (1994) argumentó que las concepciones emergentes de valores de cantidades que variaban continuamente eran centrales para la aparición del cálculo como un cuerpo de pensamiento. Las investigaciones ya citadas consideran que el concepto de función es uno de los contenidos principales en el desarrollo del pensamiento variacional. Además, dicho concepto se considera soporte fundamental y básico para la adecuada comprensión de otros conceptos asociados al cálculo diferencial e integral.

2.2.2. Razonamiento

El pensamiento humano a través de la historia ha tenido transformaciones de tipo conceptual dependiendo de los cambios de los tiempos y la adaptación que se hace de este en los diferentes contextos sociales, políticos, religiosos, etc. Por tanto, hablar de estructura mental o lógica es ir a la par con la necesidad del hombre primitivo o el moderno en cuanto a la proyección cognoscitiva y aplicabilidad del saber en los diferentes contextos. El *razonamiento*[7] es la facultad humana que permite resolver problemas. Según Smith (2011) el término "razonamiento" es el punto de separación entre el instinto y el pensamiento, el instinto es la reacción de cualquier ser vivo, ya que el razonar nos hace analizar, y desarrollar un criterio propio. El razonamiento, según Vygotsky (1979), en la solución de problemas posee la característica de realizarse dentro de un sistema lógico determinado por las condiciones propias del problema que alcanzan su máximo nivel en las operaciones lógico-verbales, siempre y cuando esto ocurra al interior de un sistema lógico-cerrado. A continuación, se mencionan dos tipos de razonamientos: deductivo e inductivo.

2.2.2.1. Razonamiento deductivo e inductivo

El *razonamiento deductivo*[8] es un encadenamiento lógico de dos o más juicios de los cuales el ultimo es la consecuencia de las anteriores; para todo razonamiento se necesita dos o más juicios, pero para que exista un razonamiento debe tener una relación: un nexo lógico que relacione el juicio o los juicios con uno desconocido que es la conclusión, por ejemplo (a) todos los niños son personas; (b) todos los estudiantes de la clase son niños; (c) luego, todos los estudiantes de la clase son personas. De dos verdades se deduce una conclusión, las dos primeras oraciones forman lo que se llama lógica y se le conoce con el nombre de premisas o antecedentes. La conclusión es la consecuencia; y la consecuencia es el nexo existente entre las dos premisas y la conclusión (Sáinz y Argos, 1998). No es el antecedente ni consecuente, es la relación lógica que se percibe por medio del razonamiento, con el nexo o la palabra "luego" o "por lo tanto" que son las palabras claves para el razonamiento. Piaget (1977, p. 60) afirma que:

> Para empezar todos los razonamientos matemáticos son formales [deductivos] […] Cada vez que se dice a un niño: "Sea un triángulo", o "una pieza de género cuesta 12 francos", etc., etc., se le fuerza a *razonar conforme a premisas meramente dadas*, es decir sin cuidarse de la realidad, apartando incluso los recuerdos y las observaciones reales que podrían inferir en el razonamiento. Ese razonamiento se

---

[7] De acuerdo con el *Diccionario de la lengua española* de la Real Academia Española (2019), la palabra razonamiento está asociada con el término razonar cuyo significado es "Exponer razones para explicar o demostrar algo"; en su tercera acepción significa "Exponer razones o argumentos".

[8] El termino *deductivo*, de acuerdo con el *Diccionario de la lengua española*, es relativo o perteneciente a la *deducción*. La palabra *deducir*, de acuerdo con la Real Academia Española (2019), se refiere en su tercera acepción a "Extraer una verdad particular a partir de un principio general".

> hace sobre puras hipótesis. Suponiendo que la enseñanza sea concreta y que los problemas dados al niño se acompañen de medidas y de observaciones efectivas, el razonamiento pedido no será menos formal en el sentido de que el niño deberá recordar una cantidad de reglas y definiciones independientes de su observación inmediata.

En el razonamiento deductivo se extrae una conclusión a partir de un conjunto de premisas. La conclusión puede no ser una consecuencia lógica de las premisas y aun así dar lugar a un razonamiento, ya que un mal razonamiento aún es un razonamiento en sentido amplio, no en el sentido de la lógica. Los razonamientos pueden ser válidos correctos o no válidos incorrectos. En general, se considera válido un razonamiento cuando sus premisas ofrecen soporte suficiente a su conclusión (Hernández y Parra, 2013; Sáinz y Argos, 1998). El razonamiento deductivo es usado en la lógica y en las matemáticas, y permite verificar información existente basada en ciertas premisas, por ejemplo: si $a < b$ y $b < c$, por lo tanto, $a < c$.

El *razonamiento inductivo*[9], según Barrera, Castro y Cañadas (2009), se caracteriza por el hecho de trabajar desde observaciones específicas y llegar a generalizaciones. En este razonamiento se extraen conclusiones basadas en probabilidades o en la intuición a partir de determinadas observaciones o experiencias particulares. En el razonamiento inductivo se genera nuevo contenido porque la información posee más información de la que existe en las premisas e involucran un grado de validez: son probables o poco probables y no poseen una base lógica, la validez de las premisas no garantizan la conclusión. El razonamiento inductivo es útil en la ciencia ya que permite formular nuevas hipótesis a través de datos empíricos (Barrera *et al*., 2009). Este razonamiento es aplicado en matemáticas cuando, en estadística, se analiza una muestra representativa de una población y se hacen inferencias, otro ejemplo del razonamiento inductivo es la identificación de patrones para definir los componentes de una serie.

Diversos autores (Hernández y Parra, 2013; Barrera *et al*., 2009; Sáinz y Argos, 1998) coinciden, por un lado, en que la caracterización del razonamiento inductivo *va* de lo particular o lo específico a lo general, lo cual significa que, si algo es verdadero en determinadas circunstancias, también lo será en otros momentos siempre y cuando se

---

[9] El termino *inductivo*, de acuerdo con el *Diccionario de la lengua española*, es relativo o perteneciente a la *inducción*. La palabra *inducir*, de acuerdo con este diccionario, se refiere en su tercera acepción a “Extraer, a partir de determinadas observaciones o experiencias particulares, el principio general que en ellas está implícito”.

mantengan las circunstancias. Por otro lado, el razonamiento deductivo *va* de lo general a lo particular y fundamento lógico se sustenta en que sólo hay dos valores que se pueden encontrar en una premisa: falso o verdadero.

Sin embargo, Hernández y Parra (2013) aseguran que las caracterizaciones de los dos tipos de razonamientos resultan insatisfactorias, ya que no todos los razonamientos inductivos parten de premisas particulares para llegar a una conclusión general ni pasan de la parte al todo y de manera similar, tampoco todos los razonamientos deductivos parten de premisas generales y llegan a conclusiones particulares. Sin embargo, estos autores aseguran que algunos razonamientos deductivos parten de premisas particulares y llegan a conclusiones particulares; otros, parten de premisas generales para llegar a conclusiones generales; y, otros más, parten de premisas particulares para llegar a conclusiones generales. En general, ambos tipos de razonamientos son esenciales para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

2.2.2.2. Distinción entre pensamiento y razonamiento

Existen muchos aspectos que se relacionan con el pensamiento, por ende, definirlo resulta algo difícil. De las muchas definiciones, algunas lo consideran una actividad mental no rutinaria que requiere esfuerzo. “El pensamiento implica una actividad global del sistema cognitivo con la intervención de los mecanismos de memoria, comprensión, y aprendizaje. El pensamiento es la actividad y creación de la mente; es decir todo aquello que es traído a la existencia mediante la actividad del intelecto” (Sánchez, 2002, p. 67). El término razonamiento se define de diferente manera según el contexto, normalmente se refiere a un conjunto de actividades mentales consistentes en conectar unas ideas con otras de acuerdo con ciertas reglas o también puede referirse al estudio de ese proceso. Razonar consiste en establecer conexiones válidas entre proposiciones y comprobar la verdad de la conclusión.

Se entiende por razonamiento la facultad humana que permite resolver problemas o al resultado de la actividad mental de razonar, es decir, un conjunto de proposiciones enlazadas entre sí que dan apoyo o justifican una idea. Según Feldman (1998), el pensamiento se desarrolla a través de la persona cuando tiene la cognición de que algo existe o al ser consciente de su pensamiento, de las imágenes y de los conceptos. El razonamiento es el procedimiento lógico mediante el cual se relacionan esas imágenes y conceptos para alcanzar una conclusión o se puede responder una pregunta. Por ello, el pensamiento difiere del razonamiento, en que este último es una actividad del pensamiento, que lleva a conclusiones, a la resolución de problemas, la adopción de decisiones y la representación de la realidad (Feldman, 1998).

2.2.2.3. Razonamiento cuantitativo

El razonamiento cuantitativo, según Weber y Thompson (2014), se refiere a una forma de pensar que enfatiza el desarrollo cognitivo de los objetos conceptuales de un estudiante con el que razona sobre situaciones matemáticas específicas. Las cantidades, en la descripción de Thompson (1994) son concepciones de cosas que pueden medirse, como la distancia o el tiempo. La medida de una cantidad tiene una unidad definida y un proceso para asignar un número que representa la relación proporcional entre un valor particular de la cantidad y la unidad. Thompson (2011) definió la cuantificación como el proceso de conceptualizar un objeto y un atributo del objeto, por lo que el atributo tiene una unidad de medida. Por ello, el razonamiento cuantitativo es diferente del razonamiento numérico porque el primero implica una imagen mental clara de cómo se relacionan las cantidades (Thompson 2011). El razonamiento cuantitativo es un recurso clave para los estudiantes que están aprendiendo a usar el álgebra para modelar relaciones entre cantidades que varían. Para asignar valores a los atributos de un objeto, un estudiante ya debe haber construido los atributos de una situación que imagina que tiene medidas. Un valor entonces es el resultado numérico de la cuantificación de una cantidad construida.

Según Weber y Thompson (2014), para que un estudiante imagine que una gráfica de una función de dos variables es una representación de la relación entre tres cantidades, el estudiante debe construir esas cantidades, ya sea a partir de un contexto aplicado o una expresión matemática abstracta. De esta manera la gráfica de una función de dos variables requiere que el estudiante conciba al menos tres cantidades, dos o más de las cuales determinan la tercera mediante una operación cuantitativa. Por supuesto, es casi imposible para un estudiante novato concebir simultáneamente una relación entre tres cantidades. En cambio, un estudiante puede pensar cómo la cantidad 1 varía con la cantidad 2 (con la cantidad 3 fija), cómo la cantidad 2 varía con la cantidad 3 (con la cantidad 1 fija) y cómo la cantidad 1 varía con la cantidad 3 (con la cantidad 2 fija). Esto permite al estudiante extender una noción de una relación entre dos cantidades para pensar en sistemas más complejos. Estas concepciones sobre la cantidad son la base del razonamiento cuantitativo y el preámbulo del razonamiento de covariación.

Jacobson (2014) menciona dos tipos de razonamiento cuantitativo que tienen relevancia para los estudiantes principiantes de álgebra: (i) la perspectiva de correspondencia, la cual se enfoca en la manera en cómo se relaciona una cantidad con otra a través de una regla que relaciona cantidades (regla de correspondencia); y (ii) la visión del razonamiento de covariación, el cual está centrado en cómo cambia una cantidad cuando cambia otra. Por ello, una comprensión de la covariación se centraría en cómo las cantidades cambian juntas, es decir, una cantidad aumenta o disminuye a medida que la otra cambia. Los dos tipos de razonamiento son objetivos importantes en el desarrollo conceptual de los estudiantes de secundaria. La correspondencia es una pieza fundamental del razonamiento maduro acerca de las funciones, y la covariación es fundamental para desarrollar otros conceptos más profundos (*e.g.,* tasa de cambio); los estudiantes que no logran conceptualizar las cantidades en un problema de palabras y cómo varían juntas no tienen una base para construir las reglas o gráficos de funciones, así como, interpretar lo que los gráficos transmiten en un intervalo del dominio de una función (Madison, Carlson, Oehrtman y Tallman, 2015). Las investigaciones muestran (Madison *et al.*, 2015) que la covariación es un punto de entrada común en el álgebra para los estudiantes, pero los enfoques tradicionales para enseñar álgebra enfatizan la correspondencia y, a menudo, tienen poco o ningún tratamiento de la covariación (Jacobson, 2014).

2.3. El concepto de función

En las últimas décadas, se han realizado diversas investigaciones en torno a la enseñanza y el aprendizaje del concepto de función, el cual es considerado un concepto fundamental que promueve la comprensión de conceptos matemáticos avanzados (Courant y Robbins, 1996; Freudenthal, 1983; Lagrange, 2014; Eisenberg, 1992; Doorman y Drijvers, 2011; Kaput, 2008; Sierpinska, 1992), ya que este concepto está interrelacionado con una red de conceptos matemáticos que fomentan el razonamiento (Carlson y Oehrtman, 2005; Hitt y González-Martín, 2015; Best y Bikner-Ahsbahs, 2017; Waisman, Leikin, Shaul y Leikin, 2014; Weber, 2014). Diversos autores aseguran que las funciones se encuentran entre las nociones más potentes y útiles en todas las matemáticas (Cañadas y Molina, 2016; Courant y Robbins, 1996; Ellis, 2011; Freudenthal, 1983; Doorman y Drijvers, 2011; Weigand y Weller, 2001). El concepto de función es uno de los más usados tanto en matemáticas como en sus aplicaciones y va más allá de los cursos establecidos en los programas de estudio en cualquier nivel educativo (Eisenberg, 1992; Carlson y Oehrtman, 2005; Doorman y Drijvers, 2011; Kaput, 1994; Hitt y González-Martín, 2015; Best y Bikner-Ahsbahs, 2017; Weber, 2014; Waisman *et al*., 2014).

Las funciones se hacen presentes para describir algunos movimientos en mecánica, en la economía con el crecimiento de intereses, en los fenómenos relacionados con la sociología, la biología, etc. Diversos libros de matemáticas destacan la importancia de este concepto, entre ellos, Spivak (1978) en su libro *Calculus* afirma que "el concepto más importante de todas las matemáticas es, sin dudarlo, el de función: en casi todas las ramas de la matemática moderna, la investigación se centra en el estudio de las funciones". Courant y Robbins (1996, p. 287) en su libro *What is Mathematics?,* aseguran que "El concepto de función es de capital importancia no sólo en la matemática pura, sino también en las aplicaciones prácticas". El primer matemático en utilizar la palabra *función* fue Leibniz (1646-1716) y para los matemáticos del siglo XVIII, el concepto de relación funcional estaba más o menos identificado por la existencia de una fórmula matemática sencilla que expresara la naturaleza de esa relación (Courant y Robbins, 1996). El concepto de función es muy amplio, por ello a continuación se dará un panorama general desde la visión de las matemáticas, y la educación matemática, además, se aborda su enseñanza y aprendizaje, y las dificultades que muestran los estudiantes ante la comprensión de este concepto.

2.3.1. La función en matemáticas

Los enfoques tradicionales de la función se basan en una correspondencia o relación fija entre los miembros de dos conjuntos (Smith 2008). Farenga y Ness (2005, p. 62) ofrecen una definición de función de correspondencia típica: "Una cantidad, *y*, es una función de otra, *x*, si cada valor de *x* tiene un valor único de *y* asociado con ella. Escrita como $y = f(x)$, donde *f* es el nombre de la función". Por su parte, Apostol (1967, p. 42) menciona que "una función F es un conjunto de pares ordenados (x, y) ninguno de los cuales tienen el mismo primer elemento. Esto es, si (x, y) pertenece a F y (x, z) pertenece a F, entonces $y=z$". Spivak (1967, p. 60) afirma que "una función es una colección de parejas de números con la siguiente propiedad: Si (a, b) y (a, c) están ambas en la colección, entonces b=c. En otras palabras, la colección no puede contener dos parejas distintas con la misma primera coordenada”. Por otro lado, Stewart (2001, p. 11) asegura que:

> una función f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto D exactamente un elemento, llamado $f(x)$ de un conjunto E. A menudo se consideran funciones para las cuales D y E son conjuntos de números reales. El conjunto D se llama dominio de la función. El número $f(x)$ es el valor de f en x y se lee “f de x”. El rango de f es el conjunto de todos los valores posibles de $f(x)$ conforme x varía en todo el dominio. Un símbolo que representa un número arbitrario en el dominio de una función f se llama variable independiente. Un símbolo que representa un símbolo en el rango de f se llama variable dependiente. En el ejemplo, A [el área de A de un círculo depende de su radio r], r es la variable independiente y A es la dependiente.

Las definiciones anteriores acerca del concepto de función son demasiado formales, extremadamente generales y con un lenguaje matemático sofisticado y riguroso; lo que significa que existan diversas dificultades en su enseñanza y aprendizaje ya que en las definiciones mostradas predomina una visión estática y que se encuentra en gran parte de las matemáticas escolares. Las razones por las cuales los estudiantes tienen dificultades con el concepto de función parecen centrarse en su complejidad y generalidad, ya que dicho concepto presenta muchas facetas y contiene una multiplicidad de representaciones (Cuevas *et al.*, 2017). Sierpinska (1992) menciona que los libros de texto de álgebra y cálculo utilizados en las escuelas y universidades ofrecen diferentes versiones del concepto de función que generalmente dan origen a interpretaciones que dejan de lado características importantes del concepto.

De acuerdo con Freudenthal (1983, p. 496), “la función es un tipo especial de dependencia, es decir, entre variables que se distinguen como dependientes e independientes”. Este autor resalta la importancia fenomenológica de la función, considerando que es la relación de elementos que varían libremente a elementos que varía bajo restricción. Estas relaciones de dependencia pueden ejemplificarse en los procesos dinámicos como el movimiento, el crecimiento, la desintegración, la velocidad y la tendencia, donde el tiempo puede considerarse la variable independiente. Sin embargo, también existen otras tantas relaciones entre variables muy usadas como: el área de un círculo, la cual es una función de su radio expresada como $A = \pi r^2$ o en física la ley de

Ohm que corresponde a la diferencia de potencial, la resistencia e intensidad de la corriente, la cuales se relacionan mediante la expresión $V = Ri$ (Doorman y Drijvers, 2011, p. 121).

Para Freudenthal (1983, p. 484), "el propio origen de la función se basa en declarar, postular, producir y reproducir dependencia o conexiones entre variables que tienen lugar en y entre los mundos físico, social y mental". Según Cañadas y Molina (2016, p. 211) el trabajo con funciones depende de la comprensión sobre las variables, la manipulación de fórmulas y la relación entre diferentes representaciones. Por su parte, Courant y Robbins (1996, p. 288) aseguran que "una función matemática no es más que una ley que regula la interdependencia de cantidades variables". Las representaciones algebraicas, para Doorman y Drijvers (2011, p 121), permiten identificar la relación entre variables al asignar un valor numérico a la variable independiente. Una ventaja de emplear representaciones algebraicas, cuando se trabaja con funciones, es que se puede sustituir fácilmente un valor numérico para la variable independiente, con el fin de calcular el valor de salida correspondiente o variable dependiente. En tal actividad, la imagen conceptual de la función es la vista de entrada-salida, en la que la "máquina de función" calcula los valores de salida de acuerdo con un procedimiento escalonado. En este contexto, el pensamiento algebraico desempeña un papel clave en la investigación sobre álgebra escolar, ya que implica el desarrollo de la capacidad de analizar relaciones entre cantidades, identificar patrones generales y usar símbolos para representar ideas, entre otros (Kaput, 2008; Kieran, 2004).

En diversos estudios, relacionados con el tema de función, se busca comprender el pensamiento conceptual acerca de funciones basadas en identificar patrones de cambio (Carlson *et al.*, 2002; Doorman y Drijvers, 2011; Lagrange, 2014; Doorman y Gravemeijer, 2009; Jacobson, 2014; Kaput, 2008; Kieran, 2004; Weigand y Weller, 2001); por ello, el NCTM (2000) menciona que los estudiantes deben ser capaces de analizar patrones de cambio en varios contextos. Existen otros elementos que están integrados al concepto de función como el dominio, el rango, los intervalos crecientes o decrecientes, la relación o coordinación del valor de una variable con los cambios en otra y la razón de cambio, entre otros, pero el concepto principal de función ha perdido su verdadera potencialidad en procesos de modelación y en fenómenos dinámicos (Carlson *et al.*, 2002). El significado del concepto de función, según Freundenthal (1983), se ha oscurecido al pasar de su carácter variacional hacia una acción de correspondencia entre variables y ha perdido su carácter dinámico para transformarse en algo puramente estático (p. 497).

En esta revisión, acerca del concepto de función, se distinguen dos enfoques: el primero, centrado en la importancia del carácter algebraico de las funciones y el segundo, enfocado en su carácter variacional. Ambos enfoques son importantes para el desarrollo del concepto de función, sin embargo, una gran parte de las investigaciones se centran en el enfoque algebraico, por ello, es necesario realizar nuevas investigaciones cuyo foco de atención sea el carácter variacional (en nuestro caso el covariacional) y se complemente con el enfoque algebraico para robustecer el desarrollo de este concepto. En el siguiente capítulo se proporcionan más elementos en torno al concepto de función centrado en la covariación de variables.

2.3.2. El concepto de función en matemática educativa

El concepto de función es fundamental para las matemáticas de diversos niveles, particularmente para generar sentido en las expresiones algebraicas y su relación directa con el precálculo y el cálculo, además, de ser esenciales en múltiples áreas relacionadas de las ciencias (Carlson y Oehrtman, 2005; Cañadas y Molina, 2016; Courant y Robbins, 1996; Johnson *et al.*, 2017; Johnson y McClintock, 2018; Ellis, 2011; Freudenthal, 1983; Doorman y Drijvers, 2011; Weigand y Weller, 2001). Una comprensión sólida del concepto de función es esencial para cualquier estudiante que desee entender el cálculo, el cual es un curso crítico para el desarrollo de futuros científicos, ingenieros y matemáticos (Carlson y Oehrtman, 2005; Courant y Robbins, 1996; Freudenthal, 1983; Eisenberg, 1992; Doorman y Drijvers, 2011; Kaput, 2008; Sierpinska, 1992; Waisman *et al.*, 2014). Sin embargo, diversos estudios (Carlson, 1998; Carlson y Oehrtman, 2005; Kaput, 1994; Eisenberg, 1992; Doorman y Drijvers, 2011; Kaput, 1994; Hitt y González-Martín, 2015; Best y Bikner-Ahsbahs, 2017; Weber, 2014; Weisman *et al.*, 2014; Thompson, 1994) han revelado que el aprendizaje del concepto de función es complejo, ya que aun los estudiantes de alto rendimiento poseen conocimientos limitados asociados con funciones (Carlson, 1998; Courant y Robbins, 1996; Freudenthal, 1983; Eisenberg, 1992; Doorman y Drijvers, 2011; Kaput, 2008; Sierpinska, 1992; Madison *et al.*, 2015; Weber, 2014; Weber y Thompson, 2014).

En la actualidad, se ha comprendido que las concepciones y los patrones de razonamiento necesarios para una comprensión sólida y flexible de las funciones son más complejos de lo que los currículos y la instrucción proponen (Carlson, 1998; Carlson y Oehrtman, 2005; Thompson, 1994). Debido a que los planes de estudio de matemáticas asociados con los cursos de cálculo están centrados en que los alumnos manipulen expresiones algebraicas y determinen resultados algebraicos basados en procedimientos para distintos tipos de preguntas (*e.g.*, evaluación de una función en un punto, obtención de límites, cálculo de puntos máximos, mínimos o puntos de inflexión) existen limitantes en el desarrollo de este concepto (Kaput, 2008; Sierpinska, 1992; Madison *et al.*, 2015; Weber, 2014). La comprensión empobrecida que los estudiantes poseen acerca de las funciones es insuficiente para sentar las bases de un desarrollo conceptual más rico y necesario en las matemáticas más avanzadas (Carlson y Oehrtman, 2005; Kaput, 2008; Sierpinska, 1992; Madison *et al*., 2015). El énfasis en la parte procedimental no ha resultado efectivo para que los alumnos construyan conceptos de funciones de manera integral, que deben caracterizarse por una adecuada interpretación, aplicación y uso de las funciones en diversos entornos que incorporen múltiples situaciones representativas, sin embargo, entender las funciones en términos de entrada y salida puede ser un gran desafío para la mayoría de los estudiantes (Carlson y Oehrtman, 2005).

Matemáticos y educadores matemáticos saben que la apropiación de este concepto, por parte de los estudiantes, es difícil y su aprendizaje suele ser lento, fragmentario y generador de falsas concepciones. Es por ello que este tema ha sido foco de interés para los investigadores en educación matemática; además, las investigaciones se han diversificado en exploraciones sobre su aprendizaje en todos los niveles escolares, abarcando diferentes marcos teóricos y metodológicos (Carraher y Schliemann, 2007; Kieran, 2007; Thompson y Carlson, 2017; Carlson y Oehrtman, 2005; Cañadas y Molina, 2016; Courant y Robbins, 1996; Arnon *et al.*, 2014; Dubinsky y Wilson, 2013; Ellis, 2011; Freudenthal, 1983; Doorman y Drijvers, 2011; Weigand y Weller, 2001). Sin embargo, es de suma trascendencia destacar que no hay una sola concepción de función para la enseñanza, pues se puede caracterizar de diferentes maneras según el aspecto en que se quiera enfatizar (Carlson y Oehrtman, 2005; Freudenthal, 1983).

Por ejemplo, de acuerdo con el estudio de Weber (2014) al preguntar a profesores acerca de qué es función, se generaron múltiples respuestas entre las que se destacan: la función vista como una máquina a la que se le da una entrada y se produce una salida (*e.g.*, visión de la caja negra); una conexión entre elementos que cambian que se pueden definir simbólicamente (*e.g.*, y y $3x$); una relación entre elementos que se pueden graficar (*e.g.*, peso y altura); una relación definida entre dos elementos que están cambiando (*e.g.*, la distancia y el tiempo); un cambio en un elemento cuando ocurre un cambio en otro y ese cambio ocurre de la misma manera en otro momento a la vez (*e.g.*, duplicación de bacterias cada minuto); un objeto utilizado para calcular pares ordenados que se pueden graficar (*e.g.*, cómo obtener los pares de x y y para graficar); conexión de dos elementos que están directamente relacionadas pero a veces parecen ocurrir independientemente (*e.g.*, presión del pie sobre el acelerador y la velocidad; ingresos y prosperidad económica).

Best y Bikner-Ahsbahs (2017) afirman que aprender acerca de las funciones requiere la integración de varios aspectos, entre los que se destacan, funciones como correspondencia, covariación y objeto. Los estudiantes deben estar familiarizados con todos estos aspectos si quieren interpretar representaciones funcionales. La covariación es crucial para el desarrollo del concepto de función, pero específicamente difícil de detener (Johnson y McClintock, 2018). Como se ha mencionado, la función se puede caracterizar de diferentes maneras; por ejemplo: como regla de correspondencia, como parejas ordenadas, como una curva en el plano cartesiano o como covariación de cantidades. La presente investigación está centrada en la primera y última caracterización.

2.3.3. Enseñanza y aprendizaje del concepto de función

En diversas investigaciones (Carlson *et al.*, 2002; Hitt, 1996; Leinhardt, Zaslavsky y Stein, 1990; Doorman y Drijvers, 2011; Kaput, 2008; Kieran, 2004; Oehrtman, Carlson y Thompson, 2008; Moschkovich, 2004; Sierpinska, 1992; Vinner, 1991) se ha documentado que existen distintas dificultades que tienen los estudiantes al abordar el concepto de función, ya que se privilegia su estudio desde una perspectiva algebraica, proporcionando la fórmula o expresión de función y se remplazan valores de entrada para obtener valores de salida que pueden ser resumidos en el llenado de tablas y que a su vez pueden ser representados en el plano cartesiano. La mayor parte de los currículos están centrados en generar tablas y gráficas a partir de fórmulas o funciones explícitas desligadas de los verdaderos contextos de interpretación y análisis, basadas en situaciones estáticas y algorítmicas, las cuales limitan la comprensión del concepto.

La "definición" de una función está basada en la consideración de conjuntos y es el punto de partida para la enseñanza del concepto, sin embargo, este enfoque limita y esconde el carácter variacional que poseen. La génesis histórica del concepto función debe ser referente de cómo se construye el concepto para que sea comprendido por los estudiantes y cómo se desarrollan sus concepciones. En ocasiones, los alumnos son capaces de reconocer las variables que intervienen en un fenómeno, pero no pueden describir un fenómeno de carácter variacional. En síntesis, es necesario considerar los aspectos cognitivos, epistemológicos y didácticos para el aprendizaje de funciones, en actividades y experiencias que promuevan el lenguaje y el pensamiento variacional, la visualización y la modelación de situaciones o fenómenos.

En diversos trabajos (Carlson *et al*., 2002; Hitt, 1996; Leinhardt *et al*., 1990; Doorman y Drijvers, 2011; Kaput, 2008; Kieran, 2004; Moschkovich, 2004; Oehrtman *et al*., 2008; Sierpinska, 1992; Vinner, 1991) sobre la comprensión que tienen los estudiantes del tema de funciones, tanto en el nivel preuniversitario como en el superior, se han documentado dificultades para modelar relaciones funcionales de situaciones que involucran la razón de cambio de una variable cuando ésta varía continuamente en una relación dependiente con otra variable. El que los estudiantes sean capaces de interpretar razones de cambio entre dos variables es esencial para interpretar modelos de eventos dinámicos (Carlson *et al*., 2002; Kaput, 1994) y fundamental para comprender los conceptos principales del cálculo (Kaput, 1994; Moschkovich, 2004; Oehrtman *et al*., 2008; Sierpinska, 1992; Zandieh, 2000).

La enseñanza del concepto de función está centrada desde una perspectiva de correspondencia o de asignación, y no se privilegia la perspectiva de relación entre variables y de dependencia, es decir, es poca o nula la importancia de la relación que hay entre los patrones de variación y del comportamiento de los cambios (Best y Bikner-Ahsbahs, 2017; Moritz, 2003; Weber y Thompson 2014). A partir de la perspectiva de enseñanza, el trabajo en el aula está delimitado por procesos estáticos basados en algoritmos que ocultan la importancia de las relaciones de dependencia y el estudio serio y detallado de los cambios de magnitudes involucradas (Ayalon *et al*., 2016; Hitt y González-Martín, 2015; Johnson *et al*., 2017; Johnson y McClintock, 2018).

En la enseñanza del concepto de función, de acuerdo con López y Sosa (2008), existe una secuencia no estipulada pero sí marcada que los profesores adoptan al tratar este concepto, siguiendo los tres pasos descritos a continuación:

> 1. Presentación del concepto de función mediante conjuntos. Es común que el primer paso para definir "función" a los alumnos sea por medio de la representación de dos conjuntos unidos por una flecha, la cual recibe el nombre de función y es denotada por la letra *f*, en la que el profesor dicta la definición dada por Dirichlet. En la enseñanza de funciones, suele tratarse solamente su definición como correspondencia entre dos conjuntos, con poco énfasis en la regla mediante la cual se establece dicha relación de correspondencia entre los conjuntos dados; su definición como relación entre variables y las ideas de variación no se desarrollan en el ámbito escolar.
>
> 2. Expresión analítica de una función. Después, se denota una función como una expresión algebraica de la forma "$f(x) = \ldots$"
>
> 3. Gráfica de una función. La función es representada en el plano cartesiano, mediante pares ordenados de puntos, obtenidos a partir de la tabulación de los valores de las variables independiente y dependiente (p. 311).

Además, los profesores al enseñar este concepto no hacen explícito el carácter unívoco de las funciones y llevan a cabo un manejo algorítmico y operacional del tema sin distinguir las funciones de las ecuaciones, provocando que en el aula no se dé prioridad a la comprensión de conceptos matemáticos y de sus significados, generando en los alumnos muchas concepciones que no son congruentes con las aceptadas por las matemáticas (Ayalon *et al*., 2016; López y Sosa, 2008; Hitt y González-Martín, 2015; Trigueros y Martínez, 2010; Weber, 2014).

Existen diversas dificultades que influyen en el aprendizaje del concepto de función por parte de los estudiantes, según López y Sosa (2008, p. 313); entre éstas se pueden mencionar: (i) lograr distinguir una variable de una incógnita, lo cual permitiría al alumno discernir entre funciones y ecuaciones, ya que las literales empleadas tanto en las ecuaciones como en las funciones suelen ser las mismas, por lo que es necesario presentar problemas en los que el uso de las literales tengan significados distintos, como variables en unos y como incógnitas en otros; (ii) lograr enunciar fenómenos o situaciones que permitan obtener una expresión analítica o gráfica de una función, así como ser capaz de relacionar las variables en cuestión; (iii) enunciar la regla de correspondencia que relaciona los elementos de dos conjuntos sobre los que se define una función; (iv) la diversidad de elementos y los múltiples registros de representación en la enseñanza de funciones (dominio, rango, gráficas, tablas, diagramas, etc.) se trabajan de forma aislada o sin conexión, lo cual no favorece la construcción del concepto, dada la confusión que esto causa en el estudiante al mirar muchos objetos ahí donde el matemático no ve más que uno (Ruiz, 2000); (v) análisis del comportamiento e interpretación de la gráfica de una función; (vi) ser capaces de percibir, por sí solos, durante la resolución de problemas o situaciones, el carácter unívoco de las funciones, ya que normalmente esta característica tiene que hacerse explícita, ya sea por medio de actividades, problemas o por el profesor mismo; (vii) la enseñanza del concepto de función actualmente gira alrededor del registro algebraico, la interacción de este registro con otros, como el gráfico, suele ser limitada a una simple ejemplificación, entre otras.

Algunas de las dificultades antes mencionadas parecen estar asociadas con el especial énfasis que se presta en las aulas escolares a los desarrollos procedimentales basados en manipulaciones algebraicas, descuidando sus aspectos conceptuales y las conexiones con otras áreas del conocimiento. En este sentido, Doorman y Gravemeijer (2009) afirman que muchas de las dificultades de los estudiantes, particularmente en los cursos de cálculo, surgen de su poca familiarización con la construcción de modelos, sus propósitos, convenciones, representaciones y sus significados en términos de las situaciones que se representan y el tipo de problemas que pueden resolverse.

Desde principios de la década de 1990, de acuerdo con Carlson y Oehrtman (2005), se han propuesto reformas curriculares orientadas a fortalecer el aprendizaje del concepto de función. Estos trabajos han guiado el camino de las investigaciones educativas en esta área e intervenido en adecuaciones curriculares para ayudar a los estudiantes a desarrollar una concepción integral de función, desde una concepción que incluye una visión de la función como una entidad que acepta aportes y produce resultados y permite razonar sobre contenidos matemáticos dinámicos y contextos científicos.

La investigación de Carlson y Oehrtman (2005) sugiere que el enfoque predominante de la instrucción de cálculo no está logrando los entendimientos fundamentales ni las conductas de resolución de problemas que se necesitan para el desarrollo matemático continuo de los estudiantes. Según estos autores, la comunidad matemática está lista para un replanteamiento cuidadoso del plan de estudios de precálculo y cálculo, impulsado por el trabajo pasado de matemáticos, así como por el amplio cuerpo de investigación sobre la función del conocimiento y el aprendizaje, y los conceptos principales de cálculo. Además, aseguran que, si los métodos algebraicos y de procedimiento estuvieran más conectados con el aprendizaje conceptual, los estudiantes estarían mejor equipados para aplicar sus técnicas algebraicas de manera adecuada en la resolución de problemas y tareas novedosas.

De acuerdo con Best y Bikner-Ahsbahs (2017, p. 865), cuando se trabaja con funciones en el salón de clase, "comúnmente se aborda el tema de forma agrupada o aislada, por ejemplo, como gráficos, descripciones verbales y tablas de relaciones funcionales o como relaciones proporcionales de magnitudes, como funciones lineales o cuadráticas". Durante la etapa inicial de la escuela secundaria, grado 11 en los Estados Unidos, estos conceptos de funciones se combinan para construir un concepto más integral que permita a los estudiantes usar funciones nuevas y familiares de manera flexible tanto para el cálculo como para cursos posteriores. Sin embargo, estos autores afirman que los estudiantes a menudo llevan consigo sólo un tipo de vista fragmentada de las funciones que conducen a varios problemas, algunos de ellos ya documentados en el campo.

De acuerdo con el NCTM (2000, p. 301) cada representación de función tiene elementos útiles y durante la enseñanza de este concepto los profesores deberían ayudar a los alumnos a tomar en cuenta que las distintas formas de representación son más o menos útiles dependiendo de lo que se desea saber. Por ejemplo, una tabla puede ser lo más conveniente para representar inicialmente una función de primer grado. A pesar de poder leer directamente un valor, en la tabla puede ser difícil apreciar la periodicidad del fenómeno, que sí es posible percibir claramente cuando la función se representa gráfica o simbólicamente. De manera semejante, aunque los alumnos pueden elaborar inicialmente tablas de diversas situaciones, las representaciones gráfica y simbólica pueden ayudar a comprender la naturaleza del comportamiento del fenómeno.

El concepto de función está relacionado con el manejo de diversos registros de representación como tablas, gráficas, reglas verbales y simbólicas, por ello es fundamental interpretar cada registro. El NCTM (2000, p.301) sugiere que los alumnos de secundaria deberían tener la oportunidad de profundizar en su comprensión de las relaciones y funciones, y de ampliar su repertorio de funciones familiares, además, de utilizar herramientas tecnológicas para representar y estudiar el comportamiento de funciones y expresarlas de forma equivalente; de esta manera llegarán a comprender el concepto de función, y a aprender las características de diversos tipos de funciones.

De acuerdo con Weber (2014), los Estándares Comunes Estatales Básicos para Matemáticas (CCSSM, por sus siglas en inglés) se refieren a una función como una regla que asigna a cada entrada exactamente una salida y sugieren que los estudiantes de octavo grado deben emplear las funciones para modelar relaciones entre cantidades. Sin embargo, según el autor, los estudiantes conciben el concepto de función de manera desconectada tanto del concepto descrito como de sus usos previstos (*e.g.*, modelado). Un motivo de esa desconexión puede ser que la noción de función como una regla de asignación (entrada-salida o máquina de función) no es necesariamente productiva para los estudiantes que conciben relaciones entre cantidades porque no implica una imagen de dos cantidades que varíen entre sí. Es decir, si el requisito para que un objeto sea una función es que actúe como una máquina y tenga una imagen de un gráfico asociado, no hay un sentido de función que represente la variación entre cantidades (Weber, 2014).

El trabajo con funciones no sólo debe estar asociado en términos de manipulaciones simbólicas y técnicas de procedimientos disociados de diversos tipos de representaciones (*e.g.*, una curva en el plano vista como un objeto fijo), ya que esta visión produce limitantes en el desarrollo del concepto. Por ello, es de suma importancia que los estudiantes sean capaces de conceptualizar las funciones como un proceso en el que se imaginen un continuo de valores de entrada en el dominio de la función generando un continuo de valores de salida (Carlson *et al.*, 2002). La falta de comprensión de las funciones y las altas orientaciones procedimentales parecen contribuir para que los estudiantes no desarrollen la habilidad de construir una fórmula algebraica que caracterice cómo dos cantidades varían en una determinada situación o contexto (Carlson, 1998).

Gran parte de la investigación reciente sobre el aprendizaje de las matemáticas se ha centrado en la capacidad de los estudiantes para utilizar los conocimientos adquiridos previamente a fin de avanzar en la solución de problemas nuevos. Un avance importante en esta área ha sido la apreciación de que la calidad del conocimiento que los estudiantes adquieren puede tener una influencia significativa para la búsqueda de soluciones a los problemas A medida que aumentan las experiencias de los estudiantes con un concepto o un conjunto de conceptos, construyen más nodos y enlaces que dan lugar a "lazos" que les permiten desarrollar elementos para la comprensión de estos nuevos conceptos.

2.3.4. Dificultades en la comprensión del concepto de función

Las dificultades que tienen los estudiantes para desarrollar —de manera efectiva— el concepto de función se encuentran documentadas en diversas investigaciones (Best y Bikner-Ahsbahs, 2017; Carlson *et al*., 2010; Cañadas y Molina, 2016; Ellis, 2011; Dubinsky y Wilson, 2013; Oktaç & Vivier, 2016; Doorman y Drijvers, 2011; Sierpinska, 1992; Yerushalmy, 1997; Weber, 2014; Weber y Thompson, 2014, entre otros), en las cuales se destaca la necesidad de mejorar la comprensión de conceptos interrelacionados con el concepto en cuestión, ya que éstos conforman los elementos esenciales para el desarrollo del razonamiento funcional (Cuevas *et al*., 2017). Por un lado, algunas investigaciones (*e.g.* Cañadas y Molina, 2016; Doorman y Drijvers, 2011; Ellis, 2011; Sierpinska, 1992; Kieran, 2004) concluyen que los estudiantes demuestran una visión limitada del concepto de función, a pesar de que algunos sean capaces de detectar patrones, ya que es posible que no formalicen esos patrones correctamente por medio de ecuaciones o expresiones algebraicas apropiadas (Ayalon *et al*., 2016; Ellis, 2011; Kieran, 2004; Gray, Loud y Sokolowski, 2009). Por otro lado, los estudiantes tienen problemas para interrelacionar correctamente las representaciones tabulares, gráficas y algebraicas de las relaciones funcionales y pueden volverse excesivamente dependientes de un tipo de registro; se restringen a una manipulación algebraica que produce una limitación en el desarrollo de este concepto —es decir, no pueden hacer una conexión adecuada entre las distintas representaciones— (Carlson *et al*., 2010; Duval, 2003, 2006; Ellis, 2011; Doorman y Drijvers, 2011; Oktaç y Vivier, 2016); la falta de conciencia algebraica hace que el razonamiento con funciones sea complejo (Kieran, 2004). Carlson *et al*. (2010) afirman que el razonamiento de los estudiantes de precálculo está dominado por una imagen estática de cálculos aritméticos utilizados para evaluar una función en un valor numérico determinado, lo cual centra su atención en la concepción de función en términos de manipulaciones simbólicas y técnicas de procedimientos asociados a valores de entrada y salida, y provoca que los estudiantes sean incapaces de conceptualizar una función como una relación de conceptos interrelacionados, ya que limita el uso de manera efectiva del concepto en problemas contextualizados.

Doorman y Drijvers (2011) aseguran que para referirse a una función se utilizan diferentes notaciones, cada una resalta aspectos específicos del concepto de función asociado y esta representación es usada en situaciones particulares; además, las principales representaciones funcionales son descripciones verbales, tablas, gráficos y fórmulas algebraicas. Estos autores afirman que todas estas representaciones forman parte de la imagen conceptual de los estudiantes. Según Eisenberg (1991), algunas de las limitaciones que los estudiantes muestran para desarrollar la relación funcional son: (a) que los profesores restringen exclusivamente la enseñanza a manipulaciones algebraicas; (b) no se fomentan tareas que permitan al estudiante conectar diferentes representaciones del concepto, ya que la mayoría de los profesores no lo consideran fundamental en el desarrollo del esquema de función; (c) la comprensión del concepto de función se reduce al trazado de gráficas dada una expresión algebraica y no se promueve el uso de otras representaciones.

Algunos investigadores (Ellis, 2011; Eisenberg, 1992; Freudenthal, 1983; Kaput, 2008; Kieran, 2004; Sierpinska, 1992) afirman que para lograr razonar y comunicarse en torno al tema de funciones se requiere conocer y emplear de manera adecuada su notación[10]. Para referirse a una función, se utilizan diferentes notaciones, cada una resalta aspectos específicos del concepto de función y se usan en situaciones particulares. Una de las notaciones más comunes en matemáticas es la "notación de ecuación", por ejemplo, $f(x) = (x - 3)^2 + 5$; en esta expresión el significado del signo igual puede ser ambiguo. No está claro si la fórmula anterior es una definición de una función f, o si f ya se ha definido anteriormente y el signo igual indica una ecuación; ¿para qué valor de x es $f(x)$ igual que $(x - 3)^2 + 5$? Por lo general, esta ambigüedad conduce a confusión en el contexto de la situación problemática. La ambigüedad puede ser evitada usando ":=" para las definiciones y "=" para las ecuaciones, pero esto puede ser demasiado formalista (Doorman y Drijvers, 2011).

[10] La matemática se apoya en un lenguaje simbólico formal, la notación matemática, que sigue una serie de convenciones propias. Los símbolos representan un concepto, una relación, una operación o una fórmula matemática según ciertas reglas.

Otra notación relacionada con función es $y =$, por ejemplo, $y = (x-3)^2 + 5$. En comparación con la anterior, esta notación dificulta la distinción entre variables independientes y dependientes; incluso cuando *y* se considera una función de *x*, esto no se hace explícito añadiendo un argumento a *y* como fue el caso de la notación *f(x)*. Además, las literales x y y pueden estar asociadas con los ejes en el plano cartesiano, y como tal, esta notación tiene una fuerte asociación con la representación gráfica de una función. La notación $y =$ también puede transformarse en una forma implícita, como $(x-3)^2 - y = 5$. En esta forma implícita no se define qué variable obtendrá el papel de independiente, y cuál se considera dependiente. En estas anotaciones, se pueden distinguir las funciones a través de diferentes nombres o subíndices, como *f*, *g*, *h* o f_1, f_2, f_3 o, como es común en algunas calculadoras gráficas, y_1, y_2, y_3 (Doorman y Drijvers, 2011).

Además de las diferentes notaciones, las funciones tienen distintas representaciones; las principales representaciones funcionales son descripciones verbales, tablas, gráficos y fórmulas algebraicas. Todas estas representaciones forman parte de la imagen conceptual de los estudiantes, las cuales conforman un concepto de función integral, versátil y rico (Doorman y Drijvers, 2011, p. 125). Por tanto, otra de las dificultades que tienen los estudiantes para comprender el concepto de función es la complicación de hacer un vínculo y relacionar las diferentes representaciones de este concepto y su manipulación simbólica, con la cual se relacionan las funciones como: $f(x)$, $x \rightarrow y$, $sen(x+t)$, etc. El lenguaje relacionado con funciones no ayuda por su complejidad, ya que en situaciones espontáneas los estudiantes usan diferentes simbolismos y diferente lenguaje (Sierpinska, 1992, p. 25). Además, otra problemática en torno a la comprensión del concepto de función está relacionada con las actitudes, creencias y convicciones vinculados con los esquemas que posee el estudiante, la forma de enfocarse a los problemas, la interpretación de las situaciones y la socialización, los cuales se relacionan con la manera como se resuelven los problemas y cómo pueden ser explicados los contenidos (Sierpinska, 1992, p. 27).

Las matemáticas y la ciencia tienen diferentes tradiciones en cuanto a la manera de denotar las funciones (Freudenthal, 1983), y también, los sistemas educativos muestran diferentes preferencias y opciones. En matemáticas, caracteres como *f, g, h*, ..., se utilizan como nombres de función, mientras que *x*, *y*, z, …, representan las variables de entrada y salida, y *a*, *b*, *c*, ..., los parámetros de una función, los cuales a menudo se desprenden de su significado. En cinemática, *s*, *v* y *a* son cantidades físicas que implícitamente representan funciones, es decir, funciones del tiempo. Los estudiantes deben ser conscientes de las diferentes convenciones, y estar alertos ante posibles confusiones. Por ejemplo, en un curso de matemáticas $d(m)$ puede referirse a una función d de m, mientras que en ciencia $d(m)$ puede indicar una distancia *d* expresada en metros como unidad de longitud. Por tanto, es importante distinguir que existen diferentes notaciones y tradiciones a fin de evitar confusiones y reforzar las características generales del concepto de función (Doorman y Drijvers, 2011; Sierpinska, 1992).

La naturaleza multidimensional de las funciones representa un desafío en la enseñanza y el aprendizaje de este concepto. Durante la enseñanza de este concepto, el uso de las distintas representaciones de función es un hecho que los profesores dan por evidente, sin embargo, se requiere que el estudiante genere su propia concepción a partir de la relación de cada representación con cada subconcepto (*e.g.*, como variables independientes y dependientes, valor de una función en su representación gráfica o tabular, entre otras). Por un lado, existen acercamientos al concepto de función que se centran en aspectos procedimentales sin dominar realmente el concepto subyacente de lo que una función compuesta representa (*e.g.*, función compuesta del tipo $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 1$, así que $f\big(g(x)\big) = (x + 1)^2$). Chinnappan y Thomas (2003) consideran que esta visión limita el desarrollo del concepto. Por otro lado, existe una red de relaciones entre el concepto de función con los conceptos subsidiarios o interrelacionados, los algoritmos (o procedimientos), los distintos registros de representación y los ejemplos que permiten la integración de la estructura conceptual. Como se ha mencionado, un concepto central (en este caso el concepto de función) tendrá subconceptos asociados, junto con algoritmos para llevar a cabo ciertas acciones con ellos, o sobre ellos, y estos algoritmos generalmente estarán basados en distintos registros de representación. Es necesario que el concepto no se limite a una sola representación, sino que se consideren las distintas manifestaciones, cada una de ellas con sus propios algoritmos asociados (Chinnappan y Thomas, 2003)

Diversos autores (Courant y Robbins, 1996; Doorman y Drijvers, 2011; Ellis, 2011; Freudenthal, 1983; Eisenberg, 1992; Kaput, 2008; Kieran, 2004; Sierpinska, 1992; Waisman *et al*., 2014) han expuesto los diferentes elementos que intervienen en el desarrollo del concepto de función, sin embargo, se destacan tres elementos principales en la imagen conceptual de función de los estudiantes (Kieran, 2004; Doorman y Drijvers, 2011; Sierpinska, 1992; Smith, 2008), los cuales están relacionados con: (i) la función como una relación de entrada-salida, la cual facilita la organización y el proceso de cálculo entre variables. Esta idea inicialmente es algo vaga y gradualmente obtiene más matices cuando se identifica cómo depende la salida de la entrada; (ii) la función como proceso dinámico de covariación, en la cual se refiere a la noción de cómo la variable independiente —mientras se ejecuta a través del conjunto de dominio— hace que la variable dependiente se ejecute a través del codominio; la variable dependiente covaría con la independiente; (iii) la función como un objeto matemático, la cual puede representarse de diferentes formas, tales como pares ordenados, tablas, gráficos, fórmulas, frases, cada uno proporciona una vista diferente en el mismo objeto. La imagen conceptual o concepción es una noción de función integrada, que permite razonar con funciones a nivel global.

Además, en investigaciones acerca del concepto de función (Eisenberg, 1992; Hitt y González-Martín, 2015; Kaput, 1994; Leinhardt *et al*., 1990; Ozel y Ozel, 2013; Waisman *et al*., 2014) se considera que uno de los principales componentes para desarrollar el sentido de función en los estudiantes es la habilidad para vincular sus representaciones gráficas y analíticas. Un aspecto importante de la riqueza en el concepto de función es la capacidad no sólo de comprender y utilizar cada una de las representaciones de funciones, sino también de relacionarlas, traducir propiedades de una representación en propiedades de otra y, de esta manera, conectar las diferentes representaciones; las tablas, los gráficos y el simbolismo algebraico son sistemas de representación clave para este contenido matemático (Doorman y Drijvers, 2011, p. 125). Mediante el estudio de las funciones, los alumnos pueden establecer conexiones entre representaciones simbólicas (ecuaciones), gráficas (gráficas en el plano cartesiano), verbales (descriptivas) y numéricas (tablas) de funciones (Waisman *et al.*, 2014). Kaput (2008) argumentó que las fuentes de construcción de significado matemático se encuentran en las traducciones entre los sistemas de representación.

El uso de múltiples registros de representación en la educación matemática puede ayudar a cambiar el enfoque de una comprensión mecánica o de procedimientos a una comprensión más completa de las matemáticas utilizando el razonamiento lógico, la generalización, la abstracción y la prueba formal; diversas investigaciones han demostrado la efectividad de las representaciones múltiples para mejorar la comprensión conceptual de los conceptos matemáticos por parte de los estudiantes (Ozel y Ozel, 2013). La capacidad de convertir una representación del concepto de función a otra —cambio de registros de representación— está relacionado con procesos psicológicos, los cuales permiten a los individuos resolver problemas de forma rápida y precisa (Leinhardt *et al*., 1990). Con la finalidad de promover el desarrollo del concepto de función, se debe estimular a los estudiantes en la construcción de conceptos y la red de vínculos entre ellos con otros subconceptos involucrados a través de varias representaciones (Chinnappan y Thomas, 2003). Incluir diversos enfoques en la enseñanza del concepto de función (*e.g.*, relación de entrada-salida, covariación, como objeto matemático que puede representarse de múltiples formas) permite superar diversas dificultades en su aprendizaje, ya que al instituir distintas relaciones en torno al concepto de función se logrará establecer la interconexión entre conceptos involucrados y evitar centrarse en la manipulación asociada a expresiones simbólicas o relacionarlas únicamente con un objeto fijo como su representación gráfica o simbólica, respectivamente (Carlson *et al*., 2010). Para desarrollar en los estudiantes el sentido de función se debe promover la habilidad de visualizar gráficas de funciones, sin embargo, la mayor parte de los estudiantes no pueden conectar la gráfica de la función con su descripción analítica ya que se requieren habilidades de nivel superior en el análisis y el desarrollo del argumento cognitivo que el procesamiento visual de ideas matemáticas necesita para identificar esa interconexión (Eisenberg, 1992, p. 174).

En educación, los profesores deben ser conscientes de las distintas connotaciones de este concepto (véase parágrafo 2.3.2) y diseñar actividades algebraicas para proporcionar a los estudiantes un repertorio amplio de connotaciones a través de la relación con los distintos registros de representación que permitan tomar decisiones apropiadas de sus relaciones entre éstas; cada una de ellas ofrece vistas específicas sobre el concepto en cuestión (Doorman y Drijvers, 2011). Para promover el desarrollo del concepto y disminuir su baja comprensión, las investigaciones sugieren tratamientos alternativos del concepto, como el numérico, el geométrico, el representacional, etc., con especial énfasis en el aspecto discursivo para la resolución de problemas y la modelación de fenómenos que integren las diversas características y perspectivas mencionadas.

El diseño de actividades de enseñanza que supone promover la comprensión de función, según Sierpinska (1992, p. 25), debe basarse en las tareas, la reflexión acerca de las mismas y la comprensión de los conceptos involucrados, lo cual —de acuerdo con Thompson y Carlson (2017)— se produce a través de los razonamientos que los estudiantes llevan a cabo durante el uso y comprensión de los conceptos. Para favorecer la comprensión del concepto de función, los estudiantes deben integrar con la ayuda de una serie de actividades: el uso de distintas representaciones, explorar variaciones entre cantidades, expandir contenidos numéricos para la identificación de dominio y codominio de variables, desarrollar la capacidad de generalización entre otros (Cañadas y Molina, 2016). El pensamiento funcional promueve en los estudiantes la identificación de patrones y la generalización mediante las relaciones funcionales, lo que fomenta el razonamiento inductivo y, como consecuencia, facilita herramientas a los estudiantes para la adquisición de conocimiento matemático (Cañadas y Molina, 2016). Para Chinnappan y Thomas (2003) es necesario para la comprensión del concepto de función incluir un enfoque inter-representacional, el uso de computadoras y calculadoras gráficas a fin de promover enlaces representacionales para conceptos funcionales e integrarlos en un contexto real que dan lugar a ejemplos de modelización de funciones. De acuerdo con el NCTM (2000), se debe fomentar en los alumnos de bachillerato la identificación y comprensión de patrones con la finalidad de representarlos con tablas, gráficas, reglas verbales y simbólicas e interpretar la relación entre los registros de representación, para dar elementos que permitan profundizar en la comprensión de las relaciones y funciones, y de ampliar su repertorio de funciones familiares, además de hacer uso de las herramientas tecnológicas digitales para representar y estudiar el comportamiento de funciones.

2.4. LA COVARIACIÓN

Durante la enseñanza del concepto de función se puede constatar que la mayor parte de los profesores consideran una perspectiva procedimental cuando se busca que los estudiantes comiencen el desarrollo del concepto de función a partir de una representación simbólica, sobre la cual operan y que generalmente propicia que los alumnos designen valores y obtengan sus respectivos resultados (Chinnappan y Thomas, 2003). Sin embargo, existen otras perspectivas que señalan que los estudiantes deben ser capaces de imaginar cómo cambia una variable al imaginar cambios en la otra (Carlson y Oehrtman, 2005), o aquellas perspectivas en que los alumnos identifican una función como una relación entre cantidades covariantes. Estas perspectivas son trascendentales para reconocer la importancia de las matemáticas del cambio. El enfoque de covariación puede alentar a los estudiantes en la búsqueda de patrones con base en la manera en que se relacionan, lo cual proporciona un elemento crítico, pero no considerado en la mayor parte del currículo (Ellis, 2011). Confiar en situaciones que involucran cantidades a las que los estudiantes pueden dar sentido, que pueden manipular, experimentar e investigar fomenta sus habilidades para razonar de manera flexible sobre eventos dinámicamente cambiantes.

Para Best y Bikner-Ahsbahs (2017), la covariación significa cómo los cambios en una magnitud producen un cambio de la magnitud dependiente; para estos autores, la covariación se aborda mediante oraciones como "cuanto más aumenta x, aumenta también y". Por ejemplo, la covariación de una función lineal está determinada por su pendiente y puede describirse mediante un aumento constante de la variable dependiente cuando la variable independiente aumenta en el mismo tamaño. En cambio, la variación centra la atención en el cambio, primero se determina lo que varía y se identifican patrones de regularidad, y después se establece una relación entre magnitudes para reproducir covariaciones entre ellas; es por ello que la variación implica la covariación (Vasco, 2006).

Conviene considerar aquí la diferencia entre variación y covariación como la entendemos a partir de interpretar a Confrey y Smith (1994a). La *variación* es el cambio que se produce en la variable independiente por cada unidad de la variable dependiente. En cambio, la *covariación* es el cambio simultáneo que se produce en dos variables cada una con su propia variación. Confrey y Smith definieron la noción de covariación de una función a partir de la idea de correspondencia:

> Un enfoque de covariación […] implica poder moverse operacionalmente de y_m a y_{m+1} de manera coordinada con el movimiento de x_m a x_{m+1}. Para las tablas, implica la coordinación de la variación en dos o más columnas a medida que uno se mueve hacia abajo (o hacia arriba) en la tabla. (Confrey y Smith, 1994a, p. 137)

Para aclarar lo anterior, se puede partir del siguiente ejemplo, en el cual se consideran las siguientes dos sucesiones:

A: 1, 4, 7, 10, … cuya variación es $+3$ y su expresión generadora es: $3n - 2$

B: 4, 8, 16, 32, … cuya variación es $\times\ 2$ y su expresión generadora es: 2^{n+1}

Una covariación se forma con la superposición de ambas sucesiones, como se muestra en la Figura 2.1.

	x	y	
$+3$	1	4	$\times 2$
$+3$	4	8	$\times 2$
$+3$	7	16	$\times 2$
	10	32	
	$\vdots$	$\vdots$	
	$3n-2$	2^{n+1}	

Figura. 2.1. Covariación basada en la superposición de las sucesiones A y B.

Es de hecho un sistema de ecuaciones que depende del parámetro n (donde $n\epsilon N$):

$$\begin{matrix} x = 3n - 2 \\ y = 2^{n+1} \end{matrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ (1)$$

Es claro que la variación implica la covariación, por ejemplo, las ecuaciones (1) se pueden reducir a la siguiente: $y = 2^{\frac{x+5}{3}}$, para toda $x\epsilon N$. No obstante, para ciertos fines las ecuaciones (1) puede manejarse mejor y permitir producir más significado. Thompson "caracterizó la covarianza en términos de conceptualizar los valores de cantidades individuales como una variable y luego conceptualizar dos o más cantidades como variando simultáneamente" (Thompson y Carlson, 2017, p. 424).

Saldanha y Thompson (1998, p. 2) describieron el razonamiento covariacional como aquel asociado con la relación existente cuando dos cantidades cambiaban entre sí; si cualquiera de las cantidades tiene diferentes valores en distintas instancias, cambiaba de una a otra al asumir todos los valores intermedios. El pensamiento covariacional, desde el punto de vista de León (2017), es el fundamento para construir el concepto de función y de ahí su importancia para la comprensión de matemáticas más avanzadas (*e.g.*, para el desarrollo de resultados relevantes del cálculo como el límite o la integral). El estudio de la covariación no debe limitarse a un curso o etapa particular y debe estar presente en los contenidos, además de relacionarse con otros tipos de pensamiento como el geométrico o el numérico. El estudio de la covariación comienza a temprana edad con actividades cuyo foco es la variación, basadas en patrones repetitivos de figuras o en relaciones numéricas que cambian y que propician que el estudiante construya estrategias en torno a cómo determinar un patrón (Thompson y Carlson, 2017; Kieran, 2007).

Otro tipo de actividades que pueden servir para evidenciar un estudio de la covariación se presenta en otras áreas que pueden acompañar el proceso en matemáticas. Por ejemplo, de acuerdo con León (2017), el registro del crecimiento de una planta en la clase de ciencias es un ejercicio muy común, donde el estudiante debe registrar los cambios que va presentando la planta a lo largo de los días. Este tipo de actividades tiene una gran importancia desde los significados que les dan los estudiantes a las magnitudes que van cambiando; en este caso, el tiempo y la altura son medidas que se hacen más significativas para el estudiante debido a que él mismo las realiza y el estudio de su comportamiento tiene relación con las condiciones del experimento, como el tipo de planta o la temperatura. Este tipo de actividades contextualiza el pensamiento covariacional y demuestra su importancia en otras áreas del conocimiento que llegan a convertirse en generadoras de problemas que implican la modelación de algún fenómeno físico y donde, para la visualización de los comportamientos, se cuenta con una gran variedad de representaciones como gráficas, tablas, esquemas y hasta lo verbal, lo que implica la gran relación que existe entre el pensamiento covariacional y los sistemas de representación. Los estudiantes pueden hacer una tabla, una gráfica o describir con palabras el comportamiento del crecimiento de la planta.

Cuando hay una relación de dependencia entre dos magnitudes, según Carlson *et al.* (2002), la covariación debe entenderse como el estudio de los cambios de una magnitud atendiendo a los cambios de la otra. Estos investigadores desarrollaron la noción de razonamiento de covariación como las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia respecto a la otra. Este razonamiento de covariación es visto como un refinamiento y una extensión de una visión de proceso de las funciones en el que se imagina y se describe la manera en que dos cantidades covarían. Como resultado de su investigación, Carlson y sus colegas proponen un marco conceptual para el estudio del razonamiento covariacional, el cual incorpora cinco acciones mentales y cinco niveles de covariación (véase parágrafo

2.4.1.1). Para dar más detalles de la covariación, a continuación, se describirán los estudios que se han realizado relacionados con este tema y las dificultades encontradas para la comprensión que deben tener los estudiantes acerca de la covariación.

2.4.1. Estudios de la covariación

Los investigadores (Carlson, 1998; Carlson *et al*., 2002; Hitt y González-Martín, 2015; Johnson *et al*., 2017; Moritz, 2003; Johnson y McClintock, 2018) han demostrado que los estudiantes se benefician de las oportunidades de utilizar una perspectiva de covariación cuando estudian la función. Hitt y González-Martín (2015) afirman que la noción de covariación entre variables facilitaría la inducción en la representación gráfica de funciones. Estos investigadores basan su afirmación en actividades que permiten mostrar la idea de representación gráfica y covariación; las secuencias que diseñaron pretendían introducir gradualmente la covariación como un requisito previo del concepto de función, incluido un enfoque algebraico.

El razonamiento sobre la covariación debe ser considerado como una habilidad crucial para la adquisición de conocimientos matemáticos más avanzados (Jacobson, 2014). De acuerdo con Jacobson (2014, p. 518), "desarrollar la capacidad de razonar de manera clara y explícita acerca de las cantidades que están cambiando juntas ayudará a los estudiantes a comenzar el álgebra y sentará las bases para el éxito posterior en matemáticas". Este autor afirma que los estudiantes que utilizan de manera intuitiva la covariación para pensar cómo cambian las cantidades pueden no tener acceso a un lenguaje simple e inequívoco para describir su pensamiento, sin embargo, el papel del profesor es crucial ya que puede apoyar al alumno a describir, explicar, comparar y relacionar las variables que intervienen (covariación) para desarrollar la comprensión de las funciones.

Saldanha y Thompson (1998) argumentaron que la clave para una perspectiva de covariación es la concepción de variación entre cantidades, es decir, un estudiante que usa una perspectiva de covariación podría concebir las funciones como relaciones especializadas entre cantidades. Para brindar a los estudiantes oportunidades de utilizar una perspectiva de covariación sobre la función, los investigadores han incorporado tareas que involucran gráficos cartesianos dinámicos y estáticos (*e.g.*, Ellis, 2011; Hitt y González-Martín, 2015; Johnson y McClintock, 2018, Carlson *et al*, 2002). Sin embargo, los estudiantes pueden interpretar los gráficos en términos de algo distinto a la covariación, lo que puede restringir la utilidad de ciertas tareas que involucran gráficos cartesianos (Johnson y McClintock, 2018).

Carlson (1998) reportó otra dificultad común en los estudiantes cuando intentan distinguir entre los atributos visuales de una situación física y atributos similares de la gráfica de una función que modela la situación. Esta investigadora identificó diversos tipos de errores para combinar la forma de un gráfico con los atributos visuales de la situación; esta autora afirma que en la escuela secundaria, se enseña a los estudiantes a prestar atención a las características cada vez más sutiles de las representaciones gráficas de funciones, que van desde los puntos críticos hasta la concavidad, los puntos de inflexión y la curvatura, pero cuando se trata de funciones que modelan situaciones concretas estas características físicas a menudo crean confusión, incluso para los estudiantes con una sólida comprensión de la función. Los estudiantes piensan en la gráfica de una función como una imagen de una situación física en lugar de una asignación de un conjunto de valores de entrada a un conjunto de valores de salida. Tales entendimientos débiles y orientaciones altamente procedimentales a menudo se muestran en la incapacidad de moverse fluidamente entre varias representaciones de funciones, como la incapacidad de construir una fórmula dada una situación de función descrita en palabras. Carlson (1998) concluye en su estudio que si se desarrolla en los estudiantes una comprensión de la función en situaciones del mundo real que modelan el cambio dinámico forjarán un puente importante para el éxito en matemáticas avanzadas.

Dada la prevalencia de ideas en ciencias y matemáticas que requieren representar múltiples relaciones usando funciones y sus representaciones simultáneamente, se han realizado estudios para entender cómo los estudiantes generan e interpretan representaciones de funciones asociadas con fenómenos físicos. Un ejemplo de estos estudios es el realizado por Weber y Thompson (2014), quienes diseñaron preguntas para llevar a los estudiantes a emplear una imagen de la representación gráfica de una función como representación de la covariación; esta imagen conlleva a una relación invariante entre las magnitudes de dos o más cantidades a medida que varían. Los autores emplean la noción del gráfico de una función para construir una trayectoria hipotética de aprendizaje (HTL, por sus siglas en inglés) y explicar cómo podrían los estudiantes generalizar su comprensión de gráficos de funciones de una variable a gráficos de funciones de dos variables.

Los autores se basan en la descripción del razonamiento cuantitativo y covariacional para describir la gráfica $y = f(x)$ y su extensión a funciones de dos variables. Entre las preguntas que realizaron en su estudio se destacan las relacionadas con la representación de los valores de x, y y de los ejes coordenados asociados con la situación; el punto en el plano cartesiano asociado con los valores de las dos cantidades simultáneamente; la representación gráfica en el plano cartesiano como el trazado de ese punto que representa simultáneamente el valor de x y y. La intención de crear este esquema gráfico es que los estudiantes piensen en el gráfico como representación de la covariación de las variables y de esta manera desarrollen su capacidad de usar este esquema para comprender los gráficos de funciones; se busca que los alumnos empleen el esquema de covariación para imaginar la construcción de la gráfica mediante un trazado (es decir, de la forma simbólica a la gráfica) e imaginar que el gráfico determinado fue generado por un rastreo (es decir, imaginar que el gráfico se creó mediante un punto que se traza de acuerdo con una relación entre las cantidades definidas en forma simbólica). Weber y Thompson (2014) afirman que esta reversibilidad es clave para la construcción e interpretación de las superficies en el espacio por parte de los estudiantes.

2.4.1.1. Enfoque covariacional del grupo de Carlson

El enfoque covariacional desarrollado por el grupo de investigación de Marilyn Carlson en la Universidad de Arizona está basado en sus investigaciones, en las que se define el razonamiento covariacional y se propone un marco conceptual para la covariación. Este marco conceptual incluye acciones mentales con la intención de definir el comportamiento, oral y escrito, de los estudiantes cuando se involucra una situación dinámica. Durante sus primeras investigaciones Carlson (1998) se interesa por estudiar cómo los estudiantes desarrollan el concepto de función y adquieren un entendimiento profundo de él, a través de un problema que relaciona el llenado con agua de un matraz de fondo redondo y la representación gráfica de la altura del agua con la cantidad de agua que hay en la botella. En este estudio Carlson reporta que la mayoría de los estudiantes entrevistados mostraron poca habilidad en comprender los aspectos covariantes del evento, ya que tuvieron dificultad en identificar el impacto del cambio que tiene una variable respecto a la otra; por ello, no lograron interpretar y representar los aspectos covariantes de la situación.

Carlson *et al*. (2002) en su investigación con estudiantes universitarios, proponen un marco conceptual para estudiar el razonamiento covariacional, el cual incorpora cinco acciones mentales (véase Tabla 2.1) y cinco niveles de la covariación (véase Tabla 2.2.) cuando los estudiantes razonan cuando se enfrentan a eventos dinámicos. En dicho marco, los autores ubican su estudio sobre función en el contexto del razonamiento covariacional y lo definen como:

> […] definimos *razonamiento covariacional* a las actividades cognitivas involucradas en la coordinación de dos cantidades que varían atendiendo a las formas en que cambian una en relación con la otra (Carlson *et al*., 2002, p. 354).

Tabla 2.1.
Acciones mentales del marco conceptual para la covariación.

Acción mental	*Descripción de la acción mental*	*Comportamiento*
AM1	Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.	Designación de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables (*e.g.*, y cambia con cambios en *x*).
AM2	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Construcción de una línea recta creciente. Verbalización de la consciencia de la dirección del cambio del valor de salida, mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM3	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios de la otra.	Localización de puntos/construcción de rectas secantes. Verbalización de la conciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM4	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.	Construcción de rectas secantes contiguas para el dominio. Verbalización de la conciencia de la razón de cambio del valor de salida (respecto al valor de entrada) mientras se consideran los incrementos uniformes del valor de entrada.
AM5	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función, con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.	Construcción de una curva suave con indicaciones claras de los cambios de concavidad. Verbalización de la conciencia de los cambios instantáneos en la razón de cambio para todo el dominio de la función (los puntos de inflexión y la dirección de las concavidades son correctos).

Extraído de Carlson *et al*. (2002, p. 128).

El marco conceptual en mención considera las imágenes de covariación como evolutivas, en los términos de Piaget (1991), y que por tanto son susceptibles de describirse mediante niveles que emergen en sucesión ordenada (Villa, 2012). El enfoque de Carlson *et al*. (2002) está constituido por cinco acciones mentales, sin embargo, las acciones mentales con mayor nivel están definidas en términos de los conceptos de razón de cambio promedio y razón de cambio instantáneo; para considerar que un estudiante alcanza uno de los niveles más altos debe ser capaz de explicar en términos de la acción mental estas características de cada nivel. Carlson y su equipo afirman que estudiantes que no poseen conocimientos en cálculo pueden resolver actividades de manera exitosa si desarrollan habilidades de razonamiento covariacional. Con base en estas acciones mentales, Carlson y sus colegas clasifican a los estudiantes en niveles (véase Tabla 2.2), de acuerdo con la imagen global que parece sustentar a las varias acciones mentales que esa persona exhibe en el contexto de un problema o tarea.

De esta manera, Carlson *et al.* (2002) proponen en dicha investigación algunos puntos de discusión como los siguientes: (1) existen estudiantes con un destacado desempeño (inclusive en cursos de cálculo) pero con una comprensión superficial de ideas y conceptos fundamentales que son prerrequisitos para futuros cursos en matemáticas y ciencias; (2) el fracaso para monitorear esas comprensiones y habilidades de razonamiento presagia consecuencias negativas para los estudiantes; (3) los resultados subrayan la necesidad de que los estudiantes tengan oportunidades de pensar sobre la naturaleza covariacional de las funciones en eventos dinámicos de la vida real; (4) los currículos en los niveles secundarios y universitarios deberían tener en cuenta la complejidad de adquirir el conocimiento relacionado con la razón instantánea y deberían proveer experiencias curriculares que sustenten y promuevan esta concepción por medio del razonamiento covariacional ; (5) la investigación ha revelado que la idea básica de covariación es accesible a los niños desde los niveles elementales y medio (Confrey y Smith, 1994b).

Carlson *et al.* (2002) afirman que los estudiantes ingresan a la educación universitaria con dificultades de comprensión del concepto de función y que incluso, aquellos estudiantes que han reportado buen desempeño escolar en la escuela secundaria también muestran dificultades cuando se enfrentan a situaciones dinámicas de fenómenos de cambio. Igualmente, las investigaciones de Kaput (1994), Moschkovich *et al*. (1993), Villa

(2012), Thompson (2011), Yerushalmy (1997), Weber y Thompson (2014) y Zandieh (2000) llaman la atención sobre la importancia de modelación de relaciones funcionales para la interpretación de modelos de eventos dinámicos y para la comprensión de los conceptos principales del cálculo. Todas estas investigaciones convergen en la importancia del estudio del razonamiento de covariación como base para el desarrollo en los estudiantes de conceptos matemáticos más complejos, en particular el de función.

Tabla 2.2.
Marco conceptual para los niveles de la covariación.

Niveles	*Características*
Nivel 1 (N1) Coordinación	En el nivel de coordinación, las imágenes de covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable (AM1).
Nivel 2 (N2) Dirección	En el nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1 y AM2 son sustentadas por imágenes de N2.
Nivel 3 (N3) Coordinación cuantitativa	En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1, AM2 y AM3 son sustentadas por las imágenes N3.
Nivel 4 (N4) Razón promedio	En el nivel de la razón promedio, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada. Las acciones mentales identificadas como AM1 hasta AM4 son sustentadas por imágenes N4.
Nivel 5 (N5) Razón de cambio instantánea	En el nivel de la razón instantánea, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable entrada. Este nivel incluye una consciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos más y más pequeños en la razón de cambio promedio. También incluye la consciencia de que el punto de inflexión es aquel en el que la razón de cambio pasa de ser creciente a decreciente o al contrario. Las acciones mentales identificadas como AM1 a AM5 son sustentadas por las imágenes de N5.

Extraído de Carlson *et al*. (2002, p. 129).

2.4.1.2. Modelo híbrido para funciones

Weber (2014) explora un modelo híbrido para funciones en el que se combinan las nociones de entrada-salida y covariación basado en los resultados de un estudio realizado con doce docentes de secundaria, durante las observaciones de su enseñanza y las discusiones con los alumnos en el aula. Como parte de las conclusiones del estudio, Weber reporta que los profesores no creyeron que promover el razonamiento de covariación en los estudiantes fuera tan difícil, sobre todo porque los alumnos mostraron diversas dificultades para determinar cantidades o variables. Entre las propuestas para mejorar el desarrollo de este razonamiento está la de crear actividades que atiendan explícitamente a la variable y las unidades de la variable. Las caracterizaciones surgidas del estudio de Weber se muestran en la Tabla 2.3 y están compuestas por categorías que relacionan el desarrollo del razonamiento de covariación surgidos de las prácticas de los docentes participantes y muestran rasgos del razonamiento covariacional que caracterizan los estudiantes durante las discusiones en el aula.

Adicional a las investigaciones de Carlson *et al.* (2002) y Weber (2014) se pueden citar otras, en torno a la enseñanza de los cursos de cálculo desde la perspectiva de covariación, que ponen en evidencia que estos cursos se desarrollan en torno al estudio de propiedades o aspectos asociados al concepto función (tales como: tipos de funciones, dominio, rango, derivada de una función, operaciones con funciones, etc.), pero no se brinda la suficiente importancia a la modelación de situaciones y fenómenos, y mucho menos al enfoque de covariación. De acuerdo con lo mencionado, es necesario conocer y entender las causas que propician la falta de comprensión del concepto de función por parte de los estudiantes, basados en el enfoque covariacional, para tener un panorama general de cuáles son los aspectos que se deben tener en cuenta en el diseño y aplicación de experiencias significativas que promuevan el desarrollo de este concepto desde la visión de la covariación.

Tabla 2.3.
Caracterizaciones del modelo híbrido para funciones

Categoría	*Característica*
1. *Necesidad del razonamiento de covariación.*	En esta categoría se hace evidente que los estudiantes están acostumbrados a comenzar con una entrada y determinar la salida resultante. Esta situación atrae automáticamente la atención de los estudiantes para pensar que una función es una relación fija entre cantidades. Las respuestas de este tipo ayudaron a los maestros a determinar que era importante hacer preguntas que obligaban a los alumnos a pensar en cantidades que variaban juntas.
2. *Enfoque en las gráficas de funciones como una forma de enfatizar el razonamiento covariable.*	Una dificultad que se presentó fue cómo integrar el razonamiento covariacional en los gráficos de funciones, para ello se buscó una manera natural de abordar este problema a través de la construcción de un gráfico con base en la covariación de cantidades, enfatizando que si una cantidad varía la otra también. Se debe percibir que si el punto se mueve, al trazar todas las ubicaciones del punto, se genera un gráfico para cualquier tipo de función continua. En este ejemplo, puede visualizarse teniendo en cuenta una relación entre cantidades y su relación con cualquier punto individual en el plano cartesiano.
3. *Usar entrada-salida cuando hay un vínculo causal entre las cantidades.*	La perspectiva de entrada-salida de las funciones sólo es aplicable para los estudiantes en situaciones en las que consideraron plausible que existiera una relación real entre las dos cantidades consideradas. La actividad propuesta por una docente fue el salario y automáticamente se enlaza con el tiempo, sin embargo, se crea conflictos para la representación gráfica, pero es más intuitiva.
4. *Enfoque en unidades de cantidades y lo que se mide.*	Las experiencias sugirieron que los estudiantes tenían dificultades para razonar sobre las cantidades y sus medidas, una noción que está bien documentada en la literatura de investigación. Como lo sugiere la literatura, la atención a las unidades de medida de cantidades es vital para razonar acerca de la covariación.

Adaptado de Weber (2014, pp. 523-525).

2.4.2. Dificultades en la comprensión de la covariación

Diversos estudios (Ayalon *et al*., 2016; Carlson, 1998; Hitt y González-Martín, 2015; Kaput, 1994, 1995, 2008; Johnson *et al*., 2017; Moritz, 2003; Johnson y McClintock, 2018) afirman que para mejorar el desarrollo del concepto de función es indispensable que los estudiantes comprendan el papel de las variables y cómo éstas (variable dependiente y variable independiente) se relacionan entre sí. Por ello, según Ayalon *et al*. (2016), hay dos enfoques generales para crear y conceptualizar relaciones funcionales: covariacional y correspondencia. Se puede comprender la perspectiva de la covariación cuando se logra identificar la relación entre las variables dependientes e independientes y la manera en que cambian juntas; el cambio de la variable dependiente y_m a y_{m+1} se coordina con el cambio de x_m a x_{m+1}. En las tablas de valores implica la coordinación de la variación en dos o más columnas a medida que una se mueve hacia abajo (o hacia arriba) de la tabla; a su vez, en un gráfico, implica comprender los cambios en el valor vertical cuando uno se mueve horizontalmente. Este enfoque de covariación puede contrastarse con un enfoque de correspondencia para conectar valores x y y particulares y describir la conexión como una regla. Con base en lo expuesto, diferentes autores (Ayalon *et al*., 2016; Bikner-Ahsbahs *et al*., 2015; Weber y Thompson, 2014; Thompson, 1994; Weber, 2014; Yerushalmy, 1997) consideran importante incluir tareas que podrían abordarse utilizando distintos enfoques (*e.g.*, por correspondencia y covariacional).

Moore y Thompson (2015) introdujeron las construcciones del pensamiento de formas estáticas y emergentes para explicar las operaciones conceptuales que subyacen en la interpretación de los gráficos de los estudiantes. Un estudiante involucrado en el pensamiento visto de manera estática interpretaría un gráfico como una forma manipulable (por ejemplo, un gráfico de una función de valor absoluto como una V), pero no necesariamente de manera icónica como en el llenado de una botella con un líquido (por ejemplo, un gráfico que representa el cambio en el volumen de la botella con respecto a la altura del líquido contenido en el recipiente) (Jacobson, 2014). En contraste, un estudiante involucrado en el pensamiento de forma emergente interpretaría una gráfica como una traza que representa una relación entre cantidades covariables. Al interpretar gráficos, es deseable que los estudiantes utilicen una perspectiva de covariación que implique imágenes de cambio suaves (Castillo-Garsow *et al*., 2013). Por lo tanto, es deseable promover el uso por parte de los estudiantes del pensamiento de forma emergente para comprender situaciones dinámicas, en lugar de centrarse en problemas estáticos o de interpretación de gráficos (Moore y Thompson, 2015).

2.5. El álgebra y su relación con la geometría

La matemática es considerada una ciencia, de acuerdo con Wussing (1998), ya que todas las demás áreas se han valido de ella y han empleado sus conceptos para generar nuevos conocimientos. Aunque es habitual clasificar las matemáticas en áreas independientes, tales como aritmética, álgebra, geometría y demás, esta clasificación se debe más a la conveniencia humana que a la verdadera estructura de la disciplina. Sin embargo, en matemáticas no hay fronteras rígidas y claras entre áreas aparentemente distintas, y problemas que parecen pertenecer a un área pueden ser resueltos utilizando métodos de otra; los mayores avances se suelen producir cuando se establece alguna conexión inesperada entre temas que antes parecían distintos (Wussing, 1998). Por un lado, el álgebra es sin duda la base prioritaria de conocimientos superiores de distintas áreas, por su nivel de abstracción, su simbología y la simplificación de procedimientos. Freudenthal (1978) caracterizó el álgebra escolar e incluyó no sólo la resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas sino también el pensamiento algebraico, que involucra la capacidad de describir relaciones y resolver procedimientos de una manera general. Por otro lado, la geometría es considerada una parte de las matemáticas que modela objetos y relaciones abstraídas del mundo visual real e implica el conocimiento tanto de cantidades abstractas como de figuras intuitivas. Las cantidades y las figuras son interdependientes en el estudio de la geometría, en particular para resolver problemas que involucran cálculos complicados (con coordenadas y cantidades algebraicas como en geometría analítica), realizar razonamiento automático (para lo cual los métodos algebraicos son los más poderosos) y representar figuras en la pantalla de la computadora (que se encuentran en los sistemas de coordenadas) (Chen, Huang y Wang, 2011).

De acuerdo con Wussing (1998), Fermat y Descartes descubrieron una notable conexión entre álgebra y geometría; de hecho, demostraron que cada una de estas áreas puede convertirse en la otra utilizando un sistema coordenado. La relación entre el álgebra y la geometría, establecida por Descartes, se describe en su método denominado geometría analítica, en el cual se resuelven problemas geométricos con la ayuda del álgebra. El simbolismo es central para Descartes, quien representa todas las líneas por medio de literales y establece de manera explícita que se debe mostrar estas relaciones. Las relaciones, que tiene en mente Descartes, son aquellas que conducen a ecuaciones, las cuales privilegian el álgebra, pero su importancia va más allá. La prioridad para Descartes no es hacer distinción entre líneas conocidas y desconocidas (medidas de las líneas denominadas constantes y variables, respectivamente), sino que son las relaciones entre ellas lo que importa, ya que esas relaciones pueden tomar diferentes formas: la ecuación y la proporción son las principales formas de relación. En el contexto que ahora llamamos geometría analítica. las literales representan líneas. Las líneas representadas por literales no son las líneas reales sino, como indica Descartes, representan las medidas de las líneas geométricas. Por lo tanto, su álgebra es un álgebra basada en la medida de las magnitudes geométricas y las relaciones entre estas medidas (Charbonneau, 1996).

De acuerdo con lo descrito por Descartes, en lo relativo a que si la geometría puede remplazarse por el álgebra, se podría cuestionar la necesidad de la geometría; sin embargo, cada área tiene su punto de vista característico, ya que en ocasiones es mejor pensar geométricamente y a veces es superior el pensamiento algebraico. Además, la teoría intuitiva de la medida, que permite el uso de argumentos geométricos para probar reglas numéricas, se usa muy a menudo para resolver numéricamente problemas geométricos. Para resolver algebraicamente algunos problemas geométricos, es indispensable establecer relaciones entre segmentos hasta que sea posible expresar una cantidad única de dos maneras distintas, que permite establecer una relación entre magnitudes y medidas, aunque esta identificación no está bien definida (Charbonneau, 1996, p. 31).

Es común que los estudiantes, durante la enseñanza del álgebra, escuchen que las diferentes literales (*e.g.*, x, z, a, b, c) pueden representar cualquier cantidad y comportarse como números, pero se debe hacer énfasis en que los números ocultan el hecho de que muchos otros objetos matemáticos también se comportan como esos símbolos algebraicos, o mejor dicho, que los símbolos algebraicos tienen características de otros objetos matemáticos (por ejemplo, segmentos, áreas y volúmenes están de alguna manera más cerca de los símbolos algebraicos que los números). Cuando se suman dos números uno al otro, el resultado es un nuevo número representado por un símbolo completamente nuevo; los dos números originales se han desvanecido en el proceso. Sin embargo, con magnitudes geométricas es diferente ya que al juntar dos segmentos, uno después del otro, se crea un segmento nuevo. Pero si se emplea una línea como la representación de este nuevo segmento se debe considerar que éste tiene la representación de los dos segmentos originales. Si uno usa una literal, entonces la literal que representa el nuevo segmento no tiene un significado en sí misma y, por tanto, no puede interpretarse sin referencias específicas al segmento original (Charbonneau, 1996, p. 34).

El simbolismo es fundamental para el álgebra, ya que se puede relacionar como una manera de sintetizar la representación de un argumento. El simbolismo es entonces un lenguaje, ya que permite nombrar algo que no tiene nombre por sí mismo. Está demostrado que dar un nombre es importante en la forma analítica de abordar un problema; sin embargo, el simbolismo no es todo en álgebra. En este sentido, François Viète (1540-1603)[11] considerado uno de los precursores del álgebra emplea el simbolismo como una herramienta, la cual no tiene un objetivo en sí misma sino que es un medio para resolver problemas. Por medio de estas relaciones, Viète logra el análisis de un problema, a pesar de que el simbolismo utilizado fuese bastante rudimentario; la ventaja del álgebra de Viète es que las operaciones con literales se definen de manera operacional pero no semánticamente. Para ser eficiente, el simbolismo debe ubicarse en un contexto amplio con objetivos teóricos más amplios que los cálculos simbólicos (Charbonneau, 1996, p. 35).

El álgebra es ante todo un medio para manipular las relaciones, sin embargo, se tuvieron que desarrollar formas de representar las relaciones entre los números o entre las magnitudes, o entre la aritmética de los números y la aritmética de las magnitudes. Al hacerlo, se desarrolló poco a poco la noción moderna de número. Un número es una representación de una relación entre dos magnitudes. En ese sentido, las literales en álgebra y los números se comportan de manera similar, dificilmente los estudiantes son capaces de identificar esta relación. Por tal razón, no debe sorprender que el álgebra emerja como un campo de conocimiento en un momento en que los números decimales comienzan a usarse en el cálculo y cuando las mediciones se vuelven fundamentales para las ciencias físicas (Charbonneau,

[11] François Viète cuyo nombre latino es Franciscus Vieta, fue el primero en representar los parámetros de una ecuación mediante literales, siendo un destacado precursor de la utilización del álgebra en criptografía. Así, la geometría parecía ser un instrumento seguro y potente para resolver cuestiones algebraicas, pero la utilización del álgebra para resolver problemas geométricos parecía más complicada (Wussing, 1998). En 1591, publicó su trabajo matemático denominado *Logística especiosa* (de *specis*: símbolo) o arte del cálculo sobre símbolos, en el cual utiliza un simbolismo adecuado y resume el problema planteado a una expresión en forma de ecuación (Charbonneau, 1996, p. 32).

1996, p. 36). El álgebra puede ser vista como una representación de ideas aritméticas y geométricas, y su enseñanza debe buscar equivalencias entre varias representaciones. Para construir significados de formas algebraicas, el estudiante deberá desarrollar elementos de conocimiento acerca de aritmética y geometría, los cuales le permitirán asimilar conceptos aplicados globalmente o interrelacionados (Herscovics, 1980).

En geometría, cuando se resuelven problemas, el análisis gira en torno a la búsqueda de lo conocido entre lo que parece ser desconocido. En una expresión algebraica, aquello desconocido y los coeficientes se manipulan de la misma manera. El álgebra y todas las ramas de las matemáticas que se apoyan en sus contenidos se interrelacionan por medio de los registros de representación, los cuales vinculan los signos aritméticos a un nivel más abstracto y general (algebraico). El cambio de un sistema a otro, vínculo entre relaciones, provoca modificaciones en la manera de concebir tanto las operaciones como los objetos geométricos y da cabida a nuevas operaciones con otro tipo de objetos, como las variables o incógnitas, así como nuevas concepciones de los nuevos objetos; por lo que son necesarias herramientas didácticas que intervengan en la relación de tales cambios (Charbonneau, 1996, p. 36).

Debido a que el simbolismo es fundamental para relacionar la geometría con el álgebra, diversos autores (Kieran y Drijvers, 2006; Kaput, 1994, 1995; Kieran, 1992, 2004, 2007) afirman que para promover el uso simbólico del álgebra le debe anteceder una actividad apoyada en tareas que privilegien contenidos que no estén comprometidos con el uso de la simbología y sus procedimientos, los cuales son una base para el desarrollo del pensamiento algebraico. De acuerdo con el NCTM (2000, p. 301), durante la enseñanza del álgebra se deberían proporcionar ideas a los estudiantes sobre las estructuras matemáticas y desarrollar la comprensión de propiedades algebraicas que rigen la manipulación de los símbolos en las expresiones empleadas. El papel de los símbolos desempeña un rol importante en la comprensión de los objetos matemáticos estudiados, ya que sirven para representar situaciones (expresar la generalidad a partir de reglas que gobiernan las relaciones numéricas), manipular literales [a través de reglas de reducción o tratamiento —en el sentido de Duval (1999)—] y como herramientas para la resolución de problemas, modelado o estudio del cambio.

2.5.1. Usos de la variable

Durante la enseñanza del álgebra, en el ámbito escolar, se introducen símbolos llamados variables para representar números. A pesar de que los estudiantes están familiarizados con el uso de literales cuando trabajan (por ejemplo, con fórmulas geométricas) esto no es una interpretación algebraica, sino que en realidad etiquetan o se refieren a entidades específicas de acuerdo con el inicio de la palabra (por ejemplo, suele usarse la b para referirse a la “base”; la A para el “área”; h para la “altura” —height en inglés—, etc.). A medida que se avanza en los niveles educativos, las literales aparecen con mayor frecuencia en contextos no geométricos y se espera que los alumnos comiencen a interpretarlas como incógnitas o números indeterminados, dependiendo de la expresión o la situación en la que aparezcan. En problemas que involucran tablas se pretende que el alumno comprenda que las literales no representan un valor específico, sino cualquier valor, y que se les puede asignar los valores indicados en las tablas. Además, se espera que los alumnos sean capaces de sustituir los valores dados en la columna de la derecha de la tabla, y calcular el valor correspondiente; lo anterior implica suponer que el estudiante se da cuenta de que el valor de la expresión depende del valor de x (Ursini *et al.*, 2005).

En problemas que involucran trabajar con una relación funcional $f(x)$ (*e.g.*, $f(x) = 2x - 3$) en la que se asignan valores a x, y en correspondencia, se encuentran los valores de $f(x)$, se suele pedir encontrar el valor específico de x, dado el valor de la expresión. Para ello, el estudiante debe plantear, explícitamente o no, una ecuación (considerando que x representa la incógnita) y resolverla; por tanto, en este ejercicio tan simple están involucrados diversos usos de la variable y se espera que el estudiante sea capaz de interpretar el mismo símbolo de manera distintas. Por consiguiente, el estudiante debe ser capaz de distinguir la pregunta que se le formula y emplear de manera adecuada la variable o las variables definiendo el sentido que se les da (vistas como un número en general al que se le puede asignar cualquier valor arbitrario, o como una incógnita cuyo valor específico hay que determinar o identificar una relación funcional entre el valor de la variable y el de la expresión) (Ursini *et al.*, 2005, p.13).

Adicional a los usos de la variable mencionados, en diversas situaciones es necesario identificar patrones (*e.g.*, 3, 6, 9, 12, 15, …), lo que implica reconocer el patrón y distinguir lo que varía y lo que permanece constante; para ello, en múltiples ocasiones, es necesario simbolizar con una literal lo que varía, e indicar su multiplicación por un valor fijo. De manera general, la lista de números se puede representar, por ejemplo, con $3n$. Sin embargo, el patrón se puede percibir como “sumar tres al número anterior”. Esta percepción no permite llegar a la expresión que representa la lista, a menos que se añadan ciertas condiciones iniciales (Ursini *et al.*, 2005, p.13). En la enseñanza de las matemáticas, pueden formarse alumnos que en pruebas de álgebra estandarizadas obtengan muy buenos resultados, sin que necesariamente tales resultados signifiquen que los estudiantes han comprendido lo que están haciendo y por qué lo hacen, ya que en la mayoría de los casos han memorizado lo que se les enseñó, pero sin comprenderlo.

Dado que en la enseñanza actual no se encaminan esfuerzos para tratar de que los alumnos logren una comprensión de los distintos usos de la variable, y puedan diferenciar entre ellos con la finalidad de entender por qué en unos casos hay que calcular su valor, en otros hay que asignar un valor y en otros más hay que despreocuparse del valor que representa, es común que los estudiantes encuentren tantas dificultades y cometan tantos errores; estas dificultades y errores surgen desde el preámbulo al estudio del álgebra, y se van arrastrando hasta los niveles universitarios. Para promover la comprensión del pensamiento algebraico, Ursini *et al*. (2005) sugieren distinguir entre los usos que se le da a la variable y encaminar acciones apropiadas para cada caso con la finalidad de que los alumnos desarrollen la capacidad de interpretar, simbolizar y manipular la variable de manera adecuada. El trabajo de Ursini *et al*. (2005) sintetiza los aspectos que caracterizan a cada uno de los tres usos de la variable descritos anteriormente que conforman el denominado *Modelo 3UV* (Tres Usos de la Variable). La Tabla 2.4 muestra de manera sintética, los aspectos que el Modelo 3UV integra respecto al uso de la variable.

De acuerdo con Ursini *et al*. (2005), se hace notar que los aspectos F2 y F3 implican el aspecto I4 (determinación del valor de la incógnita), pero no son equivalentes, puesto que para determinar los valores de una variable en función de los valores de otra es necesario, primero, sustituir un valor en una de las variables y convertir de este modo una expresión que involucra una relación funcional en una ecuación, es decir, los aspectos están interrelacionados entre sí. Ursini *et al*. (2005) afirman que privilegiar un solo uso de la variable limita el desarrollo y la capacidad de relacionar los distintos registros de representación y no mejora sustancialmente la comprensión de ese uso particular; por lo tanto, el aprendizaje del álgebra en estos casos resulta muy limitado.

Tabla 2.4.
Modelo 3UV. Tres usos de la variable

Uso de la variable	*Características*
Incógnita (I)	I1. Reconocer e identificar, en una situación problemática, la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema. I2. Interpretar la variable simbólica que aparece en una ecuación, como la representación de valores específicos. I3. Sustituir la variable por el valor o los valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero. I4. Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas, realizando operaciones algebraicas, aritméticas o de ambos tipos. I5. Simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica y utilizarlas para plantear ecuaciones.
Número general (G)	G1. Reconocer patrones y percibir reglas y métodos, en secuencias y en familias de problemas. G2. Interpretar la variable simbólica como la representación de una entidad general, indeterminada, que puede asumir cualquier valor. G3. Deducir reglas y métodos generales, en secuencias y en familias de problemas. G4. Manipular (simplificar, desarrollar) la variable simbólica. G5. Simbolizar enunciados, reglas o métodos generales.
Relación funcional (F)	F1. Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas). F2. Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la independiente. F3. Determinar los valores de la variable independiente, dados los valores de la dependiente. F4. Reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación funcional, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas). F5. Determinar los intervalos de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra. F6. Simbolizar una relación funcional, con base en el análisis de los datos de un problema.

Extraído de Ursini *et al.* (2005, p. 35).

Dado el carácter multifacético de la variable, sin importar el uso que se privilegie o el enfoque que se elija, el estudiante tiene que enfrentarse también a los otros usos; de hecho, en casi todos los problemas algebraicos la variable se presenta en su carácter multifacético y es indispensable desarrollar la capacidad de trabajar con los tres tipos de usos que ésta tiene. Una buena comprensión del concepto de variable es fundamental para comprender el álgebra y las matemáticas en general. Sin embargo, dada la complejidad de este concepto, no se puede esperar que los alumnos logren comprenderlo aceptablemente sin una enseñanza explícita y deliberada que resalte los distintos usos y que los ayude a moverse con flexibilidad entre ellos.

2.6. EL AMBIENTE TECNOLÓGICO DIGITAL

Debido al desarrollo de las herramientas informáticas se pueden incorporar programas que faciliten el trabajo con las diferentes representaciones matemáticas (Arcavi 2003; Presmeg, 2006; Rivera, 2011; Zimmermann y Cunningham, 1991). El ambiente tecnológico digital —ambiente dinámico— hace posible el acceso a representaciones matemáticas de una manera diferente del ambiente de lápiz y papel —ambiente tradicional—, ya que permite estrechar *el lazo* entre las representaciones y los objetos matemáticos involucrados (Phillips *et al*., 2012; Rivera, 2011; Zimmermann y Cunningham, 1991). Sin embargo, los estudiantes necesitan instrucciones explícitas sobre el uso y la interpretación de los objetos matemáticos, ya sean estáticos o dinámicos (Phillips *et al*., 2012, p. 119).

Mediante el uso de las herramientas tecnológicas digitales, en matemática educativa, los estudiantes pueden explorar y comunicar conceptos matemáticos de diversas maneras, usando, por ejemplo, las representaciones gráficas de esos conceptos matemáticos, surgidos de procedimientos relacionados con la interpretación de tales conceptos y así obtener una mejor comprensión de ellos (Arcavi y Hadas, 2000; Rivera, 2011; Phillips *et al*., 2012; Waisman *et al*., 2014; Zimmermann y Cunningham, 1991). De acuerdo con el NCTM (2000, p. 11), la herramienta tecnológica es esencial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, ya que influye en la manera en cómo las matemáticas se enseñan y potencia el aprendizaje. Por medio de los ambientes dinámicos se permite a los estudiantes la interacción entre los distintos registros de representación y el usuario, lo cual promueve en el estudiante la búsqueda de propiedades que le permiten proponer conjeturas y validarlas

(Arcavi, 2003; Presmeg, 2006; Rivera, 2011). La interacción está basada en la percepción visual de una *representación dinámica*,[12] es decir, una representación en la cual se pueden desplazar ciertos elementos para obtener nuevas representaciones con las mismas propiedades que la representación original; el software interpreta las acciones del alumno y devuelve información sobre su producción, información que el alumno puede utilizar a su vez para continuar progresando en la construcción de conocimientos (Arcavi y Hadas, 2000; Rivera, 2011; Phillips *et al.*, 2012).

Arcavi y Hadas (2000, p. 25) mencionan que "los ambientes computarizados dinámicos constituyen laboratorios virtuales en los cuales los estudiantes pueden jugar, investigar y aprender matemáticas". Es importante mencionar que el uso de ambientes tecnológicos digitales cambia de forma inevitable la manera en que se aprenden las matemáticas. Según con Arcavi (2003, p. 216) "las herramientas tecnológicas permiten desarrollar medios visuales para una mejor comprensión de conceptos e ideas matemáticas". Weigand y Weller (2001) aseguran que los objetos mentales y sus representaciones en un ambiente de trabajo digital están inseparablemente conectados, y que estas representaciones desarrollan nuestra capacidad mental o pensamiento sobre los objetos matemáticos en cuestión. A través de las herramientas tecnológicas se puede identificar el comportamiento general de una representación cuando se modifican algunos parámetros manteniendo sus propiedades estructurales y características. Phillips *et al*. (2012) indican que la representación gráfica de un objeto dinámico vuelve evidente los límites tradicionales de las representaciones posibles de registros figurales; de esta manera, se reduce la *brecha* entre la representación física —a través de la representación del objeto matemático por medio de la pantalla de la computadora— y la representación de las imágenes mentales. La tecnología apoya el desarrollo de conceptos, basado en la potencialización de las concepciones e imágenes mentales que los estudiantes promueven a través de su pensamiento (Drijvers, Boon y Van Reeuwijk, 2010).

De acuerdo con Jones *et al*. (2009), una de las ventajas de emplear un software de geometría dinámica de los que existe en la actualidad (*e.g.*, Geogebra) es que éstos

[12] Se considera una *representación dinámica* a aquella representación (*e.g.*, simbólica, geométrica o gráfica) que de acuerdo con sus características, cambia alguno o algunos de sus elementos cuando el usuario manipula la herramienta que se encuentre vinculada con dicha representación.

proporcionan una conexión más estrecha entre la manipulación simbólica, empleada en los *Computer Algebra Systems* (CAS) y la variabilidad dinámica de las representaciones dadas por los programas de geometría dinámica. La importancia del uso de las herramientas tecnológicas en el aprendizaje de las matemáticas se menciona en los *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000, p. 26): “la tecnología puede ayudar a los estudiantes a aprender matemáticas. Por ejemplo, mediante calculadoras y computadoras [los estudiantes] pueden examinar más representaciones o ejemplos que los que son posibles a mano, y así, pueden formular conjeturas fácilmente”. Arcavi (2003) afirma que:

> Los ambientes dinámicos no sólo permiten a los estudiantes construir figuras con ciertas propiedades y visualizarlas, sino que también les permiten transformar esas construcciones en tiempo real. Este dinamismo puede contribuir en la formación de hábitos para transformar (mentalmente o por medio de una herramienta) una instancia particular, para estudiar variaciones, invariantes visuales, y posiblemente proveer bases intuitivas para justificaciones formales de conjeturas y proposiciones (p. 26).

Cuando se trabaja con representaciones matemáticas en ambiente tradicional (lápiz y papel) —si la representación es geométrica se tratará de una *figura geométrica estática*[13]—la representación se presenta en forma estática. Este tipo de figuras provocan en el alumno dificultades para descubrir relaciones estructurales (explícitas e implícitas) de los objetos geométricos (Phillips *et al*., 2012). Al analizar representaciones geométricas estáticas mediante un software de geometría dinámica, el alumno puede generar las representaciones estructurales y no sólo identificar sus propiedades, sino que puede interactuar y transformar esas construcciones a través de las herramientas con que cuenta el software (Jones *et al*., 2009). Los softwares de geometría dinámica ayudan a crear un ambiente de aprendizaje donde los estudiantes pueden experimentar, observar la permanencia de las propiedades matemáticas, y verificar las conjeturas mucho más fácilmente que en otros ambientes computacionales y que en el entorno de lápiz y papel (Marrades y Gutiérrez, 2000).

[13] Se considera una *figura geométrica estática* a aquella representación geométrica que de acuerdo con las condiciones de su composición no presenta ninguna variación, es decir, no sufre cambios en su forma ni en su dimensión.

La principal característica del software de geometría dinámica es la capacidad de adaptación que se refleja en la operación de *arrastre*,[14] la cual permite la manipulación directa y continua de los objetos matemáticos (Talmon y Yerushalmy, 2004). La operación de arrastre introduce algunos aspectos que no aparecen cuando se trabaja en ambiente de lápiz y papel, y que puede ser aprovechada por los alumnos de diferentes maneras. El arrastre brinda a los softwares de geometría dinámica su poder matemático y estético, y realza la complejidad de una situación específica de aprendizaje. Larios (2005) se refiere al software de geometría dinámica como:

> Un medio para explorar y generar diferentes casos de las construcciones realizadas. Un espacio para observar propiedades que resultan invariantes a pesar del cambio de la forma, lo cual está relacionado con el punto anterior, pero que implica un desarrollo cognitivo mayor. Un medio para determinar si una construcción está bien realizada por medio del examen de arrastre. Una utilización como herramienta externa o física que proporciona la posibilidad de dibujar a "mano alzada" una construcción o "acomodar" sus elementos para que el resultado en la pantalla visualmente cumpla con los requisitos pedidos en la tarea llevada a cabo (p. 145).

Mediante un software de geometría dinámica es posible construir significados de los objetos geométricos a través de la transformación continua de las representaciones, las cuales son diferentes de los significados construidos al utilizar el ambiente tradicional; esta herramienta usada de esta manera se convierte en un mediador semiótico entre el conocimiento geométrico, algebraico y el usuario (Talmon y Yerushalmy, 2004). Los softwares de geometría dinámica permiten la manipulación de las representaciones de los objetos geométricos; en éstos el usuario lleva a cabo el estudio con representaciones dinámicas de los objetos geométricos, las cuales pueden ser modificadas con cierta libertad y conservar las relaciones matemáticas establecidas (Jones *et al*., 2009; Talmon y Yerushalmy, 2004). Los estudiantes mismos pueden realizar estas representaciones a través de actividades dirigidas, o bien proporcionadas por los profesores e investigadores en función del objetivo de investigación y enseñanza. Es importante mencionar que, para lograr un mejor éxito en la comprensión de conceptos matemáticos, limitarse al simple uso de la tecnología no es

[14] El arrastre es conocido en lengua inglesa como *dragging*, se refiere a la acción de mover mediante el cursor objetos. Los objetos arrastrados en los softwares de geometría dinámica son habitualmente puntos y rectas, pero también pueden arrastrarse otros tipos de objetos. Mediante el arrastre se deforman las figuras, y de acuerdo con su construcción pueden mantener sus relaciones estructurales.

suficiente, se necesita el diseño de actividades adecuadas y el conocimiento del contenido matemático para que la incorporación de la herramienta tecnológica en el aula sea efectiva (Koyuncu, Akyuz y Cakiroglu, 2015, p. 837).

Según Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990, p. 12), la construcción de representaciones gráficas es un acto de generar algo nuevo a partir de determinados datos (una regla de correspondencia o una tabla). En su sentido más amplio, la construcción puede implicar construir una representación gráfica basado en el proceso de selección y etiquetado de ejes, selección de escala, identificación de unidad y trazado, la cual, en el ambiente tradicional ha sido una tarea bastante tediosa de llevar a cabo, ya que se realiza punto por punto. Con el advenimiento de la tecnología, sin embargo, partes de estas acciones pueden ser realizadas por una computadora de una manera más global, y no necesitan ser la tarea del alumno. De hecho, el dominio de tareas de gráficos y funciones se presta bien a las nuevas tecnologías gráficas interactivas. Estas tecnologías le permiten al estudiante examinar muchos más gráficos más rápidamente con un grado extremadamente alto de precisión. Sin embargo, es importante notar que liberar al estudiante de la construcción de un gráfico desde cero en ambiente de lápiz y papel altera enormemente el dominio de la tarea. Por ejemplo, el enfoque matemático para resolver problemas cambia. Además, la dirección de la actividad se mueve hacia la interpretación del comportamiento global de un gráfico y hacia la generalización de una parte visible particular de un gráfico a otras partes del mismo, o de una serie de gráficos que comparten una característica común a una clase más amplia de funciones de las cuales son instancias. Cabe mencionar que la parte del gráfico que se muestra en la pantalla puede ser engañosa para predecir el comportamiento de todo el gráfico.

2.6.1. El papel del ambiente tecnológico digital y la enseñanza del concepto de función

En distintos ambientes de trabajo, el proceso de interpretación y conversión entre representaciones no es automático es bastante complicado y difiere en los participantes con diferentes niveles de logros matemáticos. Una de las características centrales del concepto de función que lo hace tan central para el proceso de aprendizaje es su naturaleza de representaciones múltiples (Waisman *et al.*, 2014). El uso de ambientes tecnológicos digitales promueve la interconexión entre conceptos, ya que permite generar ejemplos que invitan a la clasificación, el reconocimiento de patrones, la generalización y la indagación de relaciones (Drijvers *et al*., 2010). El uso de herramientas digitales, según Drijvers *et al.* (2010), permite evocar la imagen conceptual de una función como un objeto matemático con diferentes representaciones interrelacionadas. El software puede advertir cómo la entrada es variable, y esta variación hace que la salida varíe también. Además, proporciona una idea acerca de la función como una máquina de entrada-salida y las diferentes representaciones de funciones aparecen en la pantalla como tablas, gráficos o fórmulas algebraicas, las cuales están conectadas entre sí; por ejemplo, en la tabla se puede observar cómo cambian los valores de salida al modificar los valores de entrada y la manera en cómo se ve afectada la posición del punto en el gráfico.

Experimentar con las diferentes representaciones de forma directa permite a los estudiantes crear diferentes puntos de vista acerca del mismo objeto matemático. La herramienta digital proporciona un entorno que permite el desarrollo de un concepto de función integrando sus diversas representaciones en un mismo ambiente; es decir, diversos entornos tecnológicos ofrecen medios para analizar simultáneamente diferentes representaciones funcionales y para estudiar los efectos de los cambios entre representaciones (Drijvers *et al*., 2010). El uso de herramientas digitales para el trabajo con funciones ha propiciado que la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas sean más interesantes y con mayor impacto porque fomenta las relaciones significativas entre las diferentes representaciones (Ferrara, Pratt y Robutti, 2006).

Diversos problemas (*e.g.*, búsqueda de patrones, relaciones físicas de distancia vs tiempo, entre otras), los cuales están estrechamente relacionados con el concepto de función, pueden tratarse mediante el uso de herramientas digitales, ya que las situaciones de problemas algebraicos promueven una visión funcional cuando el problema se puede describir en términos de procesos de entrada-salida aplicado a relaciones de dependencia en las que la variable independiente cambia y evoca la covariación. La visión funcional está conectada con patrones, fórmulas y cadenas de restricción, incluso si las expresiones y las fórmulas algebraicas son formas importantes de representar funciones, la perspectiva de la función es diferente debido a su perspectiva de dependencia dinámica y sus herramientas de representación (Doorman y Drijvers, 2011; Drijvers *et al*., 2010).

Debido a las numerosas representaciones geométricas surgidas en la resolución de tareas de esta disciplina, el uso de lápiz y papel y de herramientas tecnológicas digitales se vuelve necesario —para los alumnos— con la finalidad de promover la identificación de características y propiedades de éstas (Duval, 2003, 2006; Doorman y Drijvers, 2011; Heid y Blume, 2008). Weigand y Weller (2001) consideran que la utilización de herramientas tecnológicas permite relacionar las distintas representaciones (*e.g.*, numéricas, gráficas y simbólicas) con un mínimo de esfuerzo por parte del usuario, lo cual da una gran posibilidad de trabajar experimentalmente y hacer conjeturas sobre soluciones a través de procesos de búsqueda sistemática.

Ferrara *et al*. (2006) enlistan las funciones didácticas de la tecnología para el aprendizaje del álgebra: (i) *Como herramienta para externalizar los procedimientos algebraicos mientras se hace álgebra*. Para desempeñar este papel didáctico de herramienta para el álgebra, la tecnología debe cumplir varios criterios, como la solidez y la corrección matemáticas, así como el apoyo flexible de las notaciones, representaciones y operaciones algebraicas convencionales. (ii) *Como ambiente para la práctica*. La tecnología ofrece varias opciones para practicar habilidades algebraicas; a través de retroalimentación inteligente y diagnóstica, el entorno tecnológico puede responder inmediatamente a las soluciones y estrategias de los estudiantes. (iii) *Uso para el desarrollo de conceptos y modelos mentales.* El objetivo es evocar procesos de pensamiento específicos y guiar el desarrollo del pensamiento algebraico de los alumnos. Esta tercera funcionalidad didáctica es la más compleja de las tres descritas. El papel de la tecnología desempeña un rol importante en la comprensión y desarrollo de significados.

La utilización de la tecnología requiere un análisis didáctico cuidadoso para obtener una adecuada relación entre el uso de la herramienta con sus representaciones y técnicas, por un lado, y el pensamiento matemático y las habilidades que los estudiantes deben adquirir, por el otro. Basados en los resultados de algunas de sus investigaciones, Ursini *et al*. (2005) mencionan que los ambientes tecnológicos digitales sugieren acercamientos no tradicionales cuando los estudiantes inician el estudio del álgebra con los diferentes usos de la variable. Por ejemplo, las herramientas digitales ayudan a visualizar un concepto o presentarlo de una manera dinámica, lo que puede conducir a una comprensión conceptual más versátil y profunda del objeto matemático o procedimiento (por ejemplo, en el uso de fórmulas de área durante la realización de la tarea). Además, el entorno dinámico puede funcionar como un generador de ejemplos, lo que provoca la curiosidad de los estudiantes e invita a la generalización o investigación de relaciones o propiedades (Drijvers *et al.*, 2010). Esta relación es sutil y compleja: un desajuste entre los dos puede hacer que el beneficio del trabajo con la tecnología sea nulo (Drijvers *et al.*, 2010).

CAPÍTULO 3

MARCO CONCEPTUAL

3.1. INTRODUCCIÓN

La noción de marco conceptual que aquí se utiliza se define como los principales conceptos, y los argumentos basados en ellos, que permiten ubicar, entender y esclarecer la investigación. Cuando un marco conceptual se puede representar mediante una figura o un esquema en el cual están contenidas las representaciones de los conceptos y sus relaciones se puede fomentar una mejor comprensión del tema involucrado (Miles y Huberman, 1994). El presente marco permite dar explicación al estudio a partir de algunos conceptos —el concepto de función desde la perspectiva de covariación, las situaciones geométricas dinámicas (SGD), el concepto de variable, la mediación en la formación de conceptos, entre otros— que forman parte de un conjunto más amplio y que permiten aclarar las interrelaciones existentes. El marco conceptual proporciona elementos básicos que permiten explicar cómo está constituido y cómo se construye el contenido conceptual basado en las manifestaciones del razonamiento de covariación que realizan los estudiantes ante situaciones geométricas dinámicas y que son resueltas en un contexto específico.

3.1. EL CONCEPTO DE FUNCIÓN COMO COVARIACIÓN

El foco del trabajo que aquí se presenta es el razonamiento de los estudiantes de bachillerato acerca, y con, el concepto de función, por ello, es importante comentar sobre la manera en que se entiende desde su perspectiva de covariación. Definir un concepto —en particular, el concepto de función— es tan complejo por la propia concepción que lleva a cabo el alumno y debido a que forma parte de un proceso más amplio. Existen diferentes perspectivas referentes a lo que se entiende por concepto. Por un lado, Skemp (1980) asegura que un concepto no es algo definido con principio y fin, sino que el alumno va desarrollando paulatinamente y cada vez que se llevan a cabo procesos para su comprensión, el significado del concepto de función que posee el individuo se va desarrollando y se complementa con las concepciones previas. De acuerdo con este autor un concepto requiere para su formación de un cierto número de experiencias que posean algo en común y capacidad, por parte de quien aprende, para aislar mentalmente y considerar por separado, la característica o características comunes que tengan dichas experiencias; es esta actividad de abstracción la que permite la formación del concepto. Skemp (1980, p. 36) asegura que para formar un concepto nuevo es necesario el trabajo con ejemplos, los cuales son invariablemente otros conceptos que a su vez deben asegurarse de que ya se encuentran formados en la mente del individuo.

Por otro lado, Tall y Vinner (1981) distinguen entre *definición del concepto* e *imagen del concepto* y resaltan la diferencia entre conocer la definición de un concepto y entender el concepto, pues esto implica manejar varios de sus aspectos relacionados:

> Usaremos el término *imagen del concepto* para describir la estructura cognitiva que está asociada con el concepto, que incluye todas las imágenes mentales y los procesos y propiedades asociadas. Se construye a lo largo de años mediante experiencias de todo tipo y cambia cuando el sujeto se encuentra con nuevos estímulos … (Tall y Vinner, 1981, p. 152).

Vinner (1991) considera la existencia de dos lugares diferentes en nuestra estructura cognitiva: uno para la definición del concepto y el otro para la imagen del concepto, donde puede haber interacción entre los dos, aunque se pueden formar de manera independiente. De acuerdo con Skemp (1980, p .36) “los conceptos de un orden más elevado, diferentes a aquellos que una persona ya tiene, no le pueden ser comunicados mediante una definición, sino solamente permiten prepararla para enfrentarse a una colección adecuada de ejemplos”. Los conceptos en matemáticas —por ejemplo, el concepto de función— son el resultado de tantas abstracciones, derivadas de abstracciones, derivadas de más abstracciones, y así sucesivamente; por lo cual, es posible tener y utilizar un concepto a un nivel intuitivo sin comprenderlo conscientemente (Skemp, 1980).

Por otra parte, para el análisis teórico de un concepto, el grupo de investigación dirigido por Ed Dubinsky propuso un modelo cognitivo que describe las construcciones mentales específicas que un estudiante podría elaborar con el fin de desarrollar su comprensión de un concepto. Esta teoría (Arnon *et al*., 2014; Oktaç y Vivier, 2016) conocida en inglés como APOS —*Action, Process, Object, Schema*— describe la construcción del conocimiento matemático, en términos generales, como una progresión de estructuras mentales lograda a través de las Acciones que son manipulaciones de Objetos ya existentes, realizadas de manera externa por el sujeto. Un individuo en la etapa de Acción actúa sobre un objeto previamente construido, como un número, como resultado de estímulos externos de una fórmula o un algoritmo. Al repetir Acciones y reflexionar sobre ellas, un individuo las interioriza en Procesos, los cuales pueden ser obtenidos a partir de Acciones, o de otros Procesos. La encapsulación se refiere al mecanismo con el que se logra aplicar Acciones a lo que antes era un Proceso, con ella los Procesos dejan de ser Acciones interiorizadas y llegan a ser entes por sí mismos, Objetos.

Cuando se ve el Proceso como un todo, al cual se le pueden aplicar Acciones, y se construyen estas Acciones para aplicarlas de manera externa o mental, se dice que el Proceso ha sido encapsulado en un Objeto. Para el caso de función, la encapsulación permite realizar que una función está asociada con un fenómeno en particular que puede tener diferentes representaciones. Los Esquemas son estructuras que, de cierto modo, se encuentran en un nivel más elevado que las tres recién mencionadas. Un Esquema es una colección de otras estructuras que incluye descripciones, organizaciones y ejemplos de las Acciones, Procesos, Objetos y posiblemente otros Esquemas que un individuo ha construido alrededor de un concepto matemático. Un esquema de función puede construirse como una colección de construcciones mentales relacionadas con el concepto de función cuya coherencia estaría determinada por la capacidad del individuo para decidir si una situación problemática dada puede resolverse usando funciones (Arnon *et al*., 2014; Oktaç y Vivier, 2016).

Arnon *et al*. (2014, p. 18) aseguran que "para una pieza particular de contenido matemático, una concepción se desarrolla como resultado de actividad reflexiva. El término concepto se refiere al entendimiento colectivo de tal contenido por la comunidad de matemáticos". En esta investigación se distinguen los términos "concepto" y "concepción", que pueden referirse al mismo contenido matemático. En este trabajo adoptaremos esta perspectiva, en la que para nosotros el término concepto corresponde al significado aceptado comúnmente por la comunidad matemática para tal contenido y la concepción es la construcción personal de algún sujeto. Thompson y Carlson (2017, p. 421) afirman que la concepción de función que tiene un estudiante no será tan desarrollada como la de un matemático, y la concepción de un matemático puede no incluir información detallada que tenga un investigador de educación matemática; por lo que no hay una concepción integral o ideal que un individuo pueda poseer acerca del concepto de función.

La manera de pensar desde la concepción de diferentes individuos o grupos provoca que existen varios significados acerca del concepto de función, así que se debe evitar hablar como si existiera un significado de función estándar, generalmente aceptado, con el que otros deberían compararse (Thompson y Carlson, 2017). La concepción del concepto de función son características del conocimiento que adquiere un alumno sobre este concepto y generalmente es instruido en matemáticas; esta concepción está en transición o en el proceso de desarrollo hasta llegar a su plena realización o capacidad —esta concepción puede seguir evolucionando— por ello las concepciones a veces pueden parecer frágiles o mal aplicadas a la situación (Leinhardt, Zaslavsky y Stein, 1990).

Carlson *et al*. (2010) afirman que la ineficiente comprensión de los estudiantes acerca del concepto de función se debe a la incapacidad de interpretar y expresar relaciones contextuales con símbolos algebraicos. Sin embargo, centrarse en un tipo de perspectiva para el estudio de función limitaría la comprensión global de dicho concepto. Selden y Selden (1992) mencionan las principales caracterizaciones del concepto de función que en matemáticas y/o en educación matemática se han presentado en diferentes momentos o lugares. Por ejemplo, como: (a) correspondencia entre dos conjuntos (Drichlet, 1837); (b) conjunto de parejas ordenadas (Bourbaki, 1939); (c) una expresión algebraica (Hitt, 1996); (d) dos cantidades que covarían (Carlson *et al*., 2002); (e) una gráfica (Leinhardt *et al*., 1990). Para introducir a los estudiantes al concepto de función se suelen utilizar las tres últimas caracterizaciones de la lista y en ellas nos apoyaremos en este trabajo.

El objetivo de este trabajo es desarrollar las concepciones en los estudiantes acerca del concepto de función surgidas de su razonamiento; las cuales son características del conocimiento de un alumno sobre un contenido específico o ideas significativas que desarrollan los estudiantes y que son la base para alcanzar niveles de comprensión más profundos y más integradores. Carlson *et al*. (2002) han enfatizado la importancia de acercarse al concepto de función desde la perspectiva de cantidades que covarían, por lo tanto, para promover la comprensión de este concepto —en esta investigación— se propone que los estudiantes afronten situaciones en las que puedan relacionar al menos dos cantidades que varían dependiendo una de otra. Además, algunas de las consideraciones para fomentar el estudio de las funciones, siguiendo a Leinhardt *et al*. (1990), es la interconexión entre múltiples conceptos; por ejemplo, ni las funciones ni los gráficos se pueden tratar como conceptos aislados, ya que son sistemas interconectados que permiten la construcción y organización de ideas matemáticas. Por lo tanto, es trascendental involucrar en el trabajo matemático tanto expresiones algebraicas como representaciones gráficas dentro del currículo escolar como parte de las principales representaciones de funciones elementales (Carlson, 2002; Carlson y Oehrtman, 2005; Courant y Robbins, 1996; Freudenthal, 1983; Eisenberg, 1992; Hitt y González-Martín, 2015; Best y Bikner-Ahsbahs, 2017; Weber, 2014; Weisman *et al*., 2014; Thompson, 1994; Doorman y Drijvers, 2011; Kaput, 2008; Sierpinska, 1992; Waisman *et al*., 2014).

Villa (2012) asegura que es importante la manipulación repetida de las cantidades que se relacionan entre sí [covarían], lo que permite al estudiante la refutación o validación de sus propias aseveraciones a través de la experimentación. Por lo anterior, este trabajo tiene como uno de sus propósitos que los estudiantes relacionen diversas caracterizaciones del concepto de función, basados en el razonamiento de covariación, y las exterioricen con base en sus conocimientos previos y guiados por las tareas solicitadas con la finalidad de promover dicho concepto. Esta característica impone al alumno la generación de nuevas ideas [concepciones], el uso de distintos conceptos y sus respectivas correspondencias simbólicas, y sirve de puente [cognitivo] entre razonamiento concreto y abstracto (Leinhardt *et al*.,1990). Además, para promover el concepto de función es importante incluir tareas que puedan abordarse utilizando distintos enfoques, por ejemplo, por correspondencia o covariacional (Ayalon *et al*., 2016; Weber y Thompson, 2014; Weber, 2014). El enfoque de covariación puede complementarse con un enfoque de correspondencia en el que se entrelazan los valores particulares de x y y, y se describe la conexión por medio de una regla de correspondencia.

3.2. EL MOVIMIENTO DE UN PUNTO Y EL CONCEPTO DE VARIABLE

En diversas investigaciones (Carlson *et al.*, 2002; Johnson y McClintock, 2018; Johnson *et al*., 2017; Hitt y González-Martín, 2015; Moritz, 2003; Weber y Thompson, 2014) se da a conocer que los estudiantes comprenden de manera más *fácil* —al parecer— la idea de mover un punto a lo largo de una curva contenida en un plano; esta metáfora permite relacionar el álgebra con el movimiento del punto que genera dicha curva y en la cual se encuentra implícita "la covariación". Este recurso —de desplazar un punto a lo largo de una curva—resulta frecuente en la enseñanza, por ejemplo, cuando se introduce el concepto de límite o el de derivada de una función. Para traducir la idea geométrica de mover un punto sobre un segmento de recta al lenguaje del álgebra, el estudiante requiere varias consideraciones, en particular, la comprensión del concepto de variable. De acuerdo con el Modelo 3UV (Ursini *et al*., 2005), uno de los usos de la variable vista como *número general* consiste en interpretar dicha variable de manera simbólica como la representación de una entidad general, indeterminada, que puede asumir cualquier valor. Para establecer el uso de la variable siguiendo la idea geométrica de desplazamiento de un punto se requiere inscribir el segmento que involucra al punto en una recta numérica, asociando el cero al punto donde comienza el movimiento y la variable (por ejemplo, x) a la distancia de cero a donde se encuentre el punto. A pesar de que los estudiantes están familiarizados con el uso de literales y que a medida que avanzan en los niveles educativos, éstas aparecen con mayor frecuencia, el supuesto de que los estudiantes de bachillerato hacen espontáneamente esas consideraciones —de asignar una variable asociada con la longitud del segmento— parece poco probable; a este trabajo matemático lo denominamos *conceptualización algebraica*, el cual exponemos a continuación.

3.2.1. Conceptualización algebraica

Se puede entender que el estudiante conceptualiza la covariación cuando la expresa con lenguaje algebraico como una función independiente de la situación que le dio origen. En este trabajo, la covariación es analizada desde el punto de vista geométrico y está asociada, en un primer momento, a una medida de una configuración geométrica. Por ejemplo, en la secuencia de la Figura 3.1, se puede observar la relación existente entre dos variables "lado del cuadrado" y su "área". La relación entre variables es directa ya que al aumentar una aumenta la otra. En la primera figura existen rasgos surgidos de la figura geométrica —cuadrado *ABCD*— que basados en sus características y propiedades, su área puede expresarse como el cuadrado de la longitud de uno de sus lados; dicha longitud mantiene características geométricas y es vista como segmento (lado del cuadrado "$\overline{AB}$"). Esta representación de la covariación es denominada en esta investigación como *notación geométrica*. La expresión anterior cambia su manera de representarse al asignar nuevas variables a las definidas de manera geométrica (lado del cuadrado "l"); a esta nueva manera de representar las cantidades involucradas —nada evidente para los estudiantes— lo denominamos representación de la covariación con *notación algebraica*. Finalmente, la expresión $y = x^2$ es vista como una relación funcional, y cuya representación simbólica es algebraica pero no conserva rastros del mecanismo que reveló la covariación, los cuales surgen del contexto geométrico. Para generar un sentido de la expresión algebraica basado en el mecanismo que produce la covariación es necesario que el estudiante interrelacione la representación simbólica con sus características que emergen de su origen geométrico.

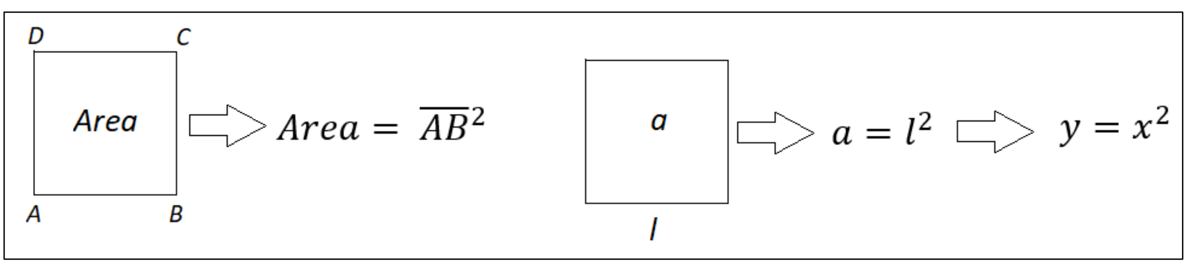


Figura. 3.1. Ejemplo de la contextualización geométrica.

Cuando se obtienen consecuencias de la representación algebraica (*e.g.*, obtención e identificación de características de la representación gráfica) y, además, se logra que la función desempeñe roles en situaciones distintas con las asociadas al área de un cuadrado, entonces se consolida la representación algebraica de la covariación, y por tanto, su conceptualización algebraica. El caso del cuadrado es muy simple —pero poco evidente para los estudiantes—; si las configuraciones se vuelven más complejas y se conceptualizan de manera similar, el estudiante tendrá una base firme para construir el concepto de función como una expresión algebraica que representa una covariación de cantidades. En consecuencia, conviene explorar si hay clases de situaciones que los ayuden a comprender dicha conceptualización.

3.3. Situaciones geométricas dinámicas (SGD)

Una *situación geométrica dinámica* (SGD) es una construcción en un plano que depende de un punto contenido en una curva. La construcción cambia cuando se desplaza el punto a lo largo de la curva de manera previsible, pero mantiene su configuración geométrica. Una situación geométrica dinámica, desde la visión de este trabajo, puede ser considerada como aquella representación en el plano geométrico euclidiano en la que el estudiante emplea diversas imágenes mentales para visualizar [desde el punto de vista de Duval (2003, 2006)] el cambio ocurrido en la figura cuando un punto que genera la configuración geométrica se desplaza sobre la curva. Para los fines de introducir a los estudiantes de bachillerato el concepto de función desde la perspectiva de la covariación conviene considerar SGD en la que el punto que genera la configuración geométrica se mueve a lo largo de un segmento. En un nivel más avanzado, el punto podría moverse a lo largo de un círculo y otra curva más sofisticada. Pero nuestra exploración se redujo a SGD en que el punto se desplaza en un segmento de recta.

Cuando se inscribe el segmento en una escala numérica *se puede asignar una cantidad a cada punto del segmento*[15] y si, además, se obtiene alguna medida de las configuraciones geométricas (*e.g.*, el perímetro, el área, la medida de otro(s) segmento(s), entre otros) se establece una covariación entre dos cantidades. Una figura en el plano no puede ser considerada situación geométrica dinámica si no se puede vislumbrar que al desplazar un punto perteneciente a su configuración geométrica se genera un cambio en su forma, pero mantiene características de su estructura original, es decir, el cambio [que no es percibido de manera directa] en la figura geométrica es producido por el

[15] Se asocia la longitud del segmento con una cantidad vista como número general y se interpreta dicha variable de manera simbólica como la representación de una entidad general, indeterminada, que puede asumir cualquier valor.

desplazamiento del punto [que aparentemente está fijo]. Estos cambios no pueden percibirse de manera directa a menos que se visualicen diversos momentos en los cuales el punto se desplaza y provoca el cambio en la figura.

Una situación geométrica es denominada dinámica cuando para comprender dicha situación se requiere vislumbrar diversas imágenes de la configuración y visualizar que ésta cambia a medida que el punto se desplaza [a pesar de que la imagen analizada sea estática]; en este trabajo, a esta idea la nombramos *percepción discreta de la covariación*. En una situación geométrica dinámica se puede tener acceso de manera directa a las múltiples configuraciones geométricas que muestran cómo un punto que se desplaza sobre un segmento; esto se logra a través de las herramientas digitales que tiene el software de geometría dinámica; a esta posibilidad de percibir directamente el cambio de una figura producido por un punto lo denominamos *percepción simultánea de la covariación*. Debido a que la construcción de una situación geométrica dinámica se realiza mediante procedimientos geométricos conocidos, se puede describir el mecanismo que produce o explica la covariación, es decir, las pautas que explican cómo se obtienen los valores de la función a partir de un punto, lo cual apoya para la construcción de la regla de correspondencia que establece la relación entre las dos cantidades. Es importante mencionar que no en toda situación de covariación se vuelve explícito el mecanismo que produce la covariación y, menos aún que ésta sea accesible a los estudiantes. Por ejemplo, pensemos en el fenómeno de la caída libre de los cuerpos; es claro que hay covariación entre las variables tiempo y distancia del móvil al punto de partida, pero si no se conoce de antemano la ley de la gravitación universal, en la situación no se revela el mecanismo que produce o explica la covariación.

Por un lado, se debe tener en cuenta que los estudiantes de bachillerato están en una etapa de su formación en la que recientemente han comenzado a adquirir los conocimientos de álgebra y geometría analítica. Por otro lado, el contenido de los primeros cursos de esas asignaturas está enfocado principalmente en situaciones estáticas, sin enfrentar a los estudiantes a problemas en situaciones dinámicas. Por este motivo, parece razonable entonces que las investigaciones cuyo objetivo es entender cómo mejorar la comprensión y el desempeño de los alumnos en lo relativo al concepto de función, exploren el cómo ofrecer a los estudiantes oportunidades para que analicen la relación entre el concepto de variable y la idea de mover un punto a lo largo de un segmento. En consecuencia, para promover el tema de funciones se deben llevar a cabo actividades surgidas del contexto de la geometría que coordinen ambas nociones aumentando otra dimensión geométrica para que el movimiento del punto tenga implicaciones en el plano o en el espacio, es decir, producir una covariación (Thompson y Carlson, 2017).

3.4. LA MEDIACIÓN EN EL DESARROLLO DE CONCEPTOS

De acuerdo con Vygotsky (1998) cuando un niño emplea una palabra con el propósito de comunicarse, antes de que tenga un entendimiento completo y desarrollado de esa palabra, el resultado de este uso en la comunicación provoca que el significado de dicha palabra (es decir, el concepto) evoluciona para el niño. El uso de los signos para referirse a un objeto matemático antes de su comprensión "completa" hace pensar en cómo un nuevo objeto matemático es significativo para el individuo (Berger, 2005). En la práctica, el estudiante comienza a comunicarse con sus compañeros y con los profesores al hacer uso de los signos del nuevo objeto matemático antes de que tenga una comprensión completa del mismo. El uso de los signos, durante la comunicación, da acceso inicial al nuevo objeto, por lo cual, un individuo se *acerca* [desde el punto de vista cognitivo] al significado de un concepto —consciente o inconscientemente— antes de tenerlos totalmente claros (Berger, 2005). Vygotsky (1998) argumenta que el niño no desarrolla de manera espontánea conceptos independientes de su significado en el mundo social, ya que los significados dependen de la concepción social. Además, el significado de un concepto no se asimila en una forma inmediata, sino se desarrolla a medida que el signo es usado para su comunicación con otros aceptados por la comunidad matemática.

Durante el aprendizaje de las matemáticas, se espera que un estudiante construya un concepto cuyo uso y significado sea compatible con el uso que tiene en la comunidad matemática, ya que dicha construcción del concepto se regula socialmente y para ello utiliza instrumentos psicológicos llamados "mediadores", los cuales permiten actuar sobre la realidad para adaptarse a ella, transformándola y transformándose a sí mismo. Los educadores matemáticos consideran el uso adecuado de un signo matemático como evidencia suficiente de la comprensión de un estudiante del concepto matemático relevante. El papel del mediador lo desempeña una herramienta o signo psicológico, como palabras (lenguaje), gráficos, símbolos de álgebra o una herramienta física (recursos y herramientas "lápiz y papel y computadora"). Según Vygotsky (1979), el uso de los signos es una parte necesaria para la formación de conceptos, ya que se establece un vínculo entre las actividades matemáticas y los conceptos. En el estudio de las matemáticas es común que se espere que un individuo construya las propiedades de un objeto a partir de su definición; sin embargo, el estudiante utiliza los mediadores como herramientas para dar sentido y significado a los objetos matemáticos con los que trabaja sin tener pleno entendimiento del concepto, ya que al interpretar y razonar con estos objetos está involucrado de alguna manera para acercarse paulatinamente a la comprensión del concepto. La mediación da forma a los procesos internos del individuo y dota de significado a los objetos con los que se trabaja.

3.4.1. El papel de la interacción social

Vygotsky (1979) consideraba todas las funciones mentales humanas superiores como productos de la actividad mediada. La mediación es una actividad "interactiva", es decir, es un conjunto de acciones culturalmente determinadas y contextualizadas que se lleva a cabo en cooperación con otros, y la actividad del sujeto en desarrollo, es una actividad mediada socialmente (Berger, 2005). Vygotsky vio la acción mediada por signos (lenguaje o símbolos) como el mecanismo fundamental que vincula el mundo social externo con los procesos mentales humanos internos. De acuerdo con Berger (2005), el acceso inicial a la definición del objeto matemático es a través de palabras o símbolos —denominados "signos" — y asegura que el papel de los "signos" es crucial en la regulación y constitución social del conocimiento matemático. Además, este autor afirma que la mediación como mecanismo de aprendizaje es una visión apropiada para la comprensión de los conceptos asociada con la noción del uso funcional del signo. La formación de conceptos sólo es posible porque el objeto matemático se puede expresar y comunicar a través de signos cuyo significado ya está establecido socialmente. Los mismos signos matemáticos median en dos procesos: el desarrollo de un concepto matemático en el individuo y la interacción de ese individuo con el mundo matemático. El conocimiento matemático del individuo está constituido tanto cognitiva como socialmente.

3.4.2. Representaciones de funciones

Diversas investigaciones (Dubinky y Harel, 1992; Hitt, 1996; Sierpinska, 1992; Presmeg, Radford, Roth y Kadunz, 2018; Thomas, 2003; Dubinsky y Wilson, 2013; Goldin y Kaput, 1996; Oktaç y Vivier, 2016; Thompson, 1994; Yerushalmy, 1997) enfatizan la importancia de las representaciones para la comprensión del concepto de función; la comprensión de las funciones por parte de los estudiantes no parece ser fácil, debido a la diversidad de representaciones asociadas con este concepto y las dificultades presentadas en los procesos de articulación de los sistemas de representación apropiados que se involucran en la resolución de problemas. Las tablas, gráficos y expresiones pueden ser representaciones múltiples de funciones para los profesores, pero no hay evidencia de que sean representaciones múltiples de algo para los estudiantes (Thompson, 1994). Thomas (2003) asegura que los estudiantes muestran dificultades para vincular de manera flexible diferentes representaciones y encontrar un vínculo con enfoques puntuales y globales para los problemas funcionales.

Las funciones desde el punto de vista del registro simbólico y su representación gráfica son consideradas uno de los primeros puntos de las matemáticas en el que un estudiante usa un sistema simbólico para expandir y comprender otro (Leinhardt *et al*., 1990). Yerushalmy (1997) afirma que las representaciones múltiples permiten a los estudiantes utilizar un rico conjunto de operaciones, algunas de las cuales operan en funciones simbólicamente y otras gráficamente, lo que construye una comprensión más profunda y rica de las matemáticas. Al reconocer el importante papel que desempeñan las representaciones múltiples en el desarrollo matemático de los estudiantes, el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000) enfatiza que los alumnos deberían ser capaces de: (1) crear y usar representaciones para organizar, registrar y comunicar ideas matemáticas; (2) seleccionar, aplicar y traducir entre representaciones matemáticas para resolver problemas; y (3) usar representaciones para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos. Del mismo modo, en las principales investigaciones en educación matemática han reconocido las representaciones múltiples como una idea central en el aprendizaje de conceptos más avanzados (Kaput, 1994; Madison *et al.*, 2015; Dubinky y Harel, 1992; Hitt, 1996; Sierpinska, 1992; Presmeg *et al.*, 2018; Thomas, 2003; Dubinsky y Wilson, 2013; Goldin y Kaput, 1996; Oktaç y Vivier, 2016; Thompson, 1994; Yerushalmy, 1997).

De acuerdo con Moschkovich *et al*. (1993), el trabajo competente en el dominio de las funciones involucra un pensamiento a lo largo de dos dimensiones, una se refiere a los medios de *representación* simbólica disponibles (algebraica, tabular y gráfica) y la otra la *perspectiva* desde la cual es manipulada y concebida (proceso u objeto). En la Tabla 3.1 se puede observar el marco para la caracterización esquemática del pensamiento involucrado en el trabajo con funciones.

Tabla 3.1.
Perspectiva de la representación

Perspectiva	*Tabular*	*Algebraica*	*Gráfica*
Proceso			
Objeto			

Algunas soluciones a tareas o problemas podrían ubicarse sólo dentro de una celda de la tabla o podrían moverse horizontalmente entre las diferentes representaciones dentro de una misma perspectiva o a través de las dos perspectivas en un solo modo de representación. Pero el objetivo para alcanzar una compresión amplia del concepto de función es la habilidad para moverse en ambos sentidos, horizontal y verticalmente. Los ejemplos de funciones lineales que utilizan Moschkovich *et al*. (1993) ilustran la perspectiva proceso con las acciones que se enfocan a encontrar valores de y correspondientes a diferentes valores de x.

> El enfoque es sobre los valores de x y y, y las relaciones entre ellos, sobre las variables de la ecuación que los representa o en el conjunto de puntos individuales en el plano cartesiano que colectivamente constituyen la recta (p. 79).

La perspectiva objeto la ilustran con ejemplos en los que una ecuación lineal se trabaja como un elemento que puede ser comparado con otra ecuación lineal descubriendo la transformación que lleva de una a la otra, por ejemplo, estableciendo una relación lineal entre ellas como $f(x) = A \cdot g(x) + B$, donde $f(x)$ y $g(x)$ son funciones lineales y A y B números reales. En nuestro caso, la perspectiva de función como proceso la asociamos con la covariación de cantidades que cambian de manera continua; en particular, la concepción del proceso de mover un punto a lo largo de un segmento y de describir el movimiento de su correspondiente variable dependiente. Este procedimiento tiene un mayor grado de dificultad que la coordinación punto a punto y se aproxima de manera más convergente a la perspectiva objeto. En la presente investigación resalta la transición entre proceso y objeto, desde la visión de Moschkovich *et al*. (1993), cuando los estudiantes representan la covariación mediante una expresión algebraica que ya no depende de los rasgos geométricos del contexto mediante el que se determinó la covariación, y además, pueden sacar consecuencias de dicha expresión.

3.4.3. Mecanismo que produce la covariación

El *mecanismo que produce la covariación* es una aportación e idea surgida de la presente investigación, y se refiere a la comprensión del cómo y por qué dos variables están relacionadas. El comprender el mecanismo que produce la covariación en una situación contextualizada (para este trabajo a través de situaciones geométricas) fomenta la facultad de esclarecer la relación entre variables que covarían, con la finalidad de generar una expresión [regla de correspondencia] que represente esta relación. La covariación se puede percibir en diversas situaciones, por ejemplo, en la caída libre de un cuerpo, en el llenado de un envase o en el aumento o disminución de temperatura a lo largo del día. Sin embargo, en estas situaciones lo más común es que sólo se pueda percibir la covariación de manera cualitativa. Por ejemplo, para llegar a establecer la regla de asociación en el caso de la caída libre Galileo Galilei requirió de dispositivos experimentales para medir las variables empíricamente, pues no existía la teoría de la caída libre de los cuerpos que él mismo propuso. En el caso del llenado de un recipiente no es posible dar la regla de correspondencia de la altura del agua en función del tiempo si no se tiene un conocimiento preciso de las ecuaciones del contorno y superficie del recipiente. Las causas que influyen en la variación de la temperatura son demasiado complejas para que se pueda deducir de ellas la regla de correspondencia que dé cuenta de la temperatura en función del tiempo de determinado lugar. En estos casos, el mecanismo de la covariación no es fácilmente —si acaso lo es— accesible.

Por ello, en esta investigación el *mecanismo que produce la covariación* o *mecanismo de covariación* se entiende como la descripción de la situación que permite identificar, de manera clara, las causas por la que dos variables están relacionadas, y de esta manera fomentar su relación y la obtención de la regla de correspondencia que las relaciona. El acceso [desde el punto de vista cognitivo] para comprender las causas que producen la relación entre variables (en este trabajo, movimiento de un punto sobre un segmento y el valor de área de una figura geométrica) se establece a través del mecanismo de covariación, y se identificará cuando el alumno desarrolle plena conciencia de que la relación entre variables se puede establecer a través de una expresión simbólica o regla de correspondencia generada de la relación existente.

3.4.4. Influencia de los ambientes de trabajo como herramientas mediadoras

En matemáticas, hoy en día, los procesos de enseñanza y de aprendizaje tradicionales han sido influidos por el uso de tecnología (ambiente tecnológico digital). Así, en la educación matemática, es posible consultar diversas investigaciones (*e.g.*, Arcavi y Hadas 2000; Sierpinska, 1992; NCTM, 2000; Doorman y Gravemeijer, 2009; Heid y Blume, 2008; Presmeg *et al*., 2018; Rivera, 2011; Phillips *et al*., 2012) en las que se muestra la conveniencia de emplear ambientes tecnológicos en la enseñanza de conceptos matemáticos. En ausencia de un escenario de tecnología digital, es común que cuando los estudiantes resuelven actividades matemáticas en ambiente de lápiz y papel —ambiente tradicional— dediquen mucho tiempo a la comprensión de los conceptos matemáticos abordados dentro y fuera del aula. Ello responde, claro está, a que el trabajo matemático en ambiente tradicional se considera una actividad que privilegia el aprendizaje, a través de la cual, se puede "aclarar, aplicar o movilizar" los conceptos. Sin embargo, el uso de este ambiente de trabajo (tradicional) provoca que los estudiantes comprendan de forma limitada los conceptos cuando trabajan sólo de modo práctico (mediante ejemplos y ejercicios), lo cual dificulta la comprensión de dichos conceptos; por ejemplo, la comprensión que tienen los estudiantes para relacionar las expresiones simbólicas (ecuaciones) con las representaciones gráficas de una función es poco evidente y representa un obstáculo considerable para el entendimiento de este concepto (Clement, 1989).

El uso de un ambiente de lápiz y papel es trascendental para generar en el estudiante un razonamiento acerca del objeto matemático en cuestión, sin embargo, desde la perspectiva cognitiva si el estudiante no es guiado (por el profesor o la actividad misma) y se aísla sin la posibilidad de comunicarse con sus pares (interacción social) se presentarán obstáculos que se materializarán en la falta de comprensión entre los registros, sus significados y su interrelación del objeto matemático analizado (Kieran y

Drijvers, 2006). Cuando el trabajo matemático se realiza en ambiente tradicional y se dan elementos para que los estudiantes trabajen con objetos matemáticos que permitan atribuir significado por medio de problemas de variación —por ejemplo, mediante relaciones físicas de llenado de botellas— (Carlson *et al.*, 2002; Carlson y Oehrtman, 2005; Thompson, Byerley y Hatfield, 2013) logran dotar de significado si dichos objetos se interrelacionan con otros registros de representación —tabular, gráfico o simbólico— (Freudenthal, 1983; Eisenberg, 1992; Hitt y González-Martín, 2015; Thompson, 1994; Doorman y Drijvers, 2011; Kaput, 2008; Sierpinska, 1992) evitando a los estudiantes quedar atrapados en la rutina del quehacer algebraico sin considerar el significado dado por el objeto matemático en cuestión (Clement, 1989); el dotar de significados a los objetos matemáticos en ambiente de lápiz y papel es una actividad matemática que se debe llevar a cabo de manera paulatina y no es inmediata.

Según Carlsen (2009) en situaciones educativas, particularmente en contextos de resolución de problemas, el trabajo con lápiz y papel permite a los estudiantes generar inscripciones hechas a sí mismos y que funcionan como dispositivos de mediación. Estas inscripciones hacen que su pensamiento individual o colectivo sea visible y público, y proporcionan elementos para la coordinación sucesiva del razonamiento durante un proceso de resolución de problemas. Es importante enfatizar que el uso de inscripciones de los estudiantes, como gráficos, tablas y dibujos en el razonamiento, es un componente del proceso de apropiación. Las inscripciones no son meras adiciones o ilustraciones. Más bien, son ejemplos materialmente externados del pensamiento colectivo e individual de los estudiantes, y en este sentido se promueve el trabajo para la apropiación del concepto por parte de los estudiantes (Carlsen, 2009).

Lagrange (2000) menciona que con el uso de las herramientas digitales se genera en los estudiantes la incorporación de nuevas técnicas, las cuales, según este autor son novedosas y de menos tiempo que las técnicas habituales en el ambiente de lápiz y papel. Sin embargo, el uso de técnicas habituales al emplear ambientes tradicionales (lápiz y papel) no desaparece de la actividad de los estudiantes por que puede ser un soporte para la reflexión teórica sobre los objetos que se manipulan (Kieran, 1992; Kieran y Drijvers, 2006). Por un lado, Kieran y Drijvers (2006) aseguran que desde la perspectiva de los estudiantes —generalmente— no está claro cómo el uso de las herramientas tecnológicas se relaciona con las habilidades requeridas en lápiz y papel, sin embargo, es evidente que el ambiente digital potencializa las técnicas realizadas por los estudiantes en ambiente tradicional (Kieran, 1992). Por otro lado, el beneficio original del uso de la tecnología para la enseñanza y el aprendizaje de conceptos matemáticos está en discusión. El tema de cómo la tecnología cambia la relación entre las habilidades técnicas y la comprensión conceptual es particularmente pertinente en la educación matemática y debe ser estudiado (Kieran y Drijvers, 2006).

Una de las aplicaciones de la tecnología para el aprendizaje y la enseñanza es ser intermediaria entre el estudiante y los conceptos matemáticos, ofreciendo a ellos, la oportunidad de manipular objetos que integran entidades y procedimientos abstractos. El trabajo de Kieran y Drijvers (2006) mostró que el uso del ambiente digital provocó que los estudiantes reflexionaran de maneras que habrían sido mucho más difíciles de lograr sólo con lápiz y papel. Sin embargo, el valor epistémico de las técnicas de lápiz y papel parece desempeñar un papel complementario, pero esencial. En diversas investigaciones, se ha analizado la influencia que han tenido los entornos tecnológicos en el desarrollo de conceptos matemáticos, pero se ha prestado menos atención al papel que tiene el ambiente tradicional (lápiz y papel) para promover el crecimiento teórico y la comprensión desde una perspectiva que integre el uso del ambiente de lápiz y papel y sea complementado con la incorporación de herramientas digitales.

3.5. INTEGRACIÓN DEL MARCO PARA LA ORGANIZACIÓN DEL RAZONAMIENTO DE COVARIACIÓN

De acuerdo con lo mencionado a lo largo de este capítulo, para promover las caracterizaciones del concepto de función basadas en el razonamiento de covariación y favorecer la comprensión de dicho concepto, es necesario adoptar una postura amplia que integre todos los elementos mencionados, en la cual aparece una gran variedad de objetos y conceptos matemáticos, así como, elementos externos entre los que se destaca el contexto social y el ambiente de trabajo, los cuales por su naturaleza se consideran de distinta índole, pero fundamentales para reflexionar acerca del razonamiento de covariación. A continuación, se enlistan las manifestaciones del razonamiento de covariación que serán considerados para llevar a cabo la investigación: (a) reconocimiento de relaciones aritméticas surgidas de situaciones geométricas dinámicas; (b) identificación de la variación conjunta; (c) representación de la variación por medio de símbolos y asignación de variables; (d) relaciones de la covariación en distintos registros; (e) extracción de características de la covariación basadas en la situación; entre otros.

Además, existen algunos factores externos asociados con el desarrollo de este razonamiento que están relacionados con: (*i*) los conocimientos previos, los cuales son esenciales para promover el razonamiento covariacional; (*ii*) los ambientes de trabajo en donde se resuelve la tarea, a saber, ambiente tradicional (lápiz y papel) o ambiente dinámico (tecnológico digital); (*iii*) el contexto social, en el cual existe algún tipo de interacción entre pares o con un especialista, quien guía y orienta para promover el razonamiento de covariación; (*iv*) la Actividad o conjunto de tareas que guían y promueven el razonamiento de covariación con la finalidad de encaminar hacia el desarrollo del concepto de función.

Es necesario desarrollar una visión integral del razonamiento de covariación que involucre la estructura conceptual por medio de una situación geométrica dinámica que se encuentra inmersa en las tareas, que interrelacione diversos conceptos y conduzca a la identificación de la variación conjunta entre variables independiente y dependiente para promover el uso de distintas representaciones de la covariación (*e.g.*, simbólicas, tabulares, pares ordenados y gráficas). Los factores antes mencionados pueden potencializar las caracterizaciones de razonamiento de covariación basados en los dominios que posee el estudiante, como parte de su interacción social y a través del ambiente de trabajo, los cuales están mediados por las tareas.

Con base en las caracterizaciones del razonamiento de covariación se establecen cinco componentes denominados: I. Ignorancia de la covariación. II. Consideración de la covariación. III. Análisis previo de la covariación. IV. Representación de la covariación, y V. Consecuencias de la covariación. Estos componentes emergen a partir de las respuestas que los estudiantes llevan a cabo, las cuales son analizadas desde el punto de vista de Glaser y Strauss (1967/2008) y Birks y Mills (2011) y se obtienen caracterizaciones del razonamiento de covariación (véase Figura 3.2). Los componentes que conforman el marco para la organización de razonamiento covariacional, para esta investigación, son originales y emergen del análisis de datos; cada componente se encuentra entrelazado con otra, ya que cada nivel es consecuencia del nivel anterior, lo cual está representado en la Figura 3.2 por medio de las flechas que a medida que se avanza en las componentes, estas son más grandes ya que cada componente superior involucra, el o los niveles anteriores.

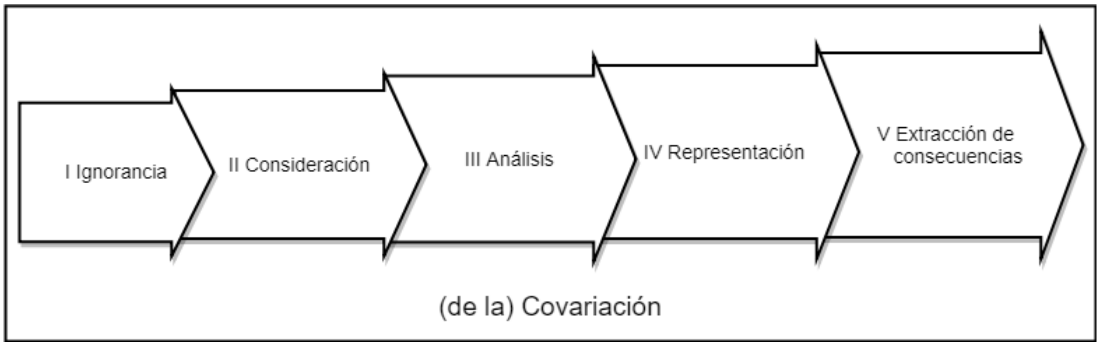


Figura 3.2. Componentes identificados en el marco inicial de razonamiento covariacional.

Con base en las líneas anteriores, se detallan en la Tabla 3.2 los componentes que integran el Marco Inicial de Razonamiento Covariacional. Estos componentes sirven para generar la discusión de los datos recopilados durante la fase final de la presente investigación.

Tabla 3.2.
Descripción de los componentes del marco inicial de razonamiento covariacional

Componentes	*Descripción*	*Niveles distintivos*
I. *Ignorancia de la covariación*	Se analiza la situación dinámica de manera estática, es decir, fijando una posición; las expresiones simbólicas se muestran como relaciones estáticas entonces se realizan cálculos con cantidades fijas o se opera con literales concebidas como números generales.	*Nivel 1.* Se realizan cálculos aritméticos para casos particulares *Nivel 2.* Se calcula el área de la figura geométrica con base en fórmulas preestablecidas. Se relacionan cambios en la figura geométrica debido a modificaciones en las subfiguras que la conforman y la situación dinámica es vista de manera estática. *Nivel 3.* Se calcula el área y se integran algún o algunos elementos de la figura geométrica que permiten simplificar la expresión simbólica y se identifica cambio o variación en una variable.
II. *Consideración de la covariación*	Se verbaliza el aspecto dinámico de la situación describiendo cómo el cambio de un objeto (punto, cantidad o variable) produce un cambio en otro (figura, longitud, área o volumen). .	*Nivel 1.* Se percibe el cambio en las subfiguras que conforman la figura geométrica central al cambiar un punto: la variable dependiente está relacionada con las subfiguras que conforman la figura central. *Nivel 2.* Se percibe la relación en el cambio de área de la figura geométrica central cuando se desplaza un punto o hay un cambio en una cantidad. *Nivel 3.* Se reconoce que el cambio en el área de la figura central se produce por el cambio en la distancia que recorre un punto (longitud del segmento); se identifica que el área de la figura depende de donde se coloque el punto P
III. *Análisis previo de la covariación*	Se establece una coordinación entre variables dependiente e independiente y se describe el mecanismo que produce la covariación (*mecanismo de covariación*),[16] además se reconocen los recorridos de las variables.	*Nivel 1.* Se infiere el cambio de área producido en la situación geométrica al desplazarse el punto P y se alude el mecanismo que produce la covariación que permite simplificar el cálculo de área de la figura geométrica con base en operaciones aritméticas. *Nivel 2.* Se alude el mecanismo que produce covariación y se establece una relación del área en la situación geométrica y el desplazamiento de un punto, que permite simplificar el cálculo de área a partir de una expresión con múltiples variables.

[16] Entiéndase como *mecanismo que explica la covariación* a la descripción de la situación geométrica dinámica que permite identificar, de manera clara, las causas por la que dos variables están relacionadas, y de esta manera fomentar su relación y la obtención de la regla de correspondencia que las relaciona (véase parágrafo 3.4.3).

		Nivel 3. Se describe el mecanismo que produce la covariación, se identifican los comportamientos y características de los valores asociados con las variables, que permite simplificar el cálculo de área a partir de una expresión con dos variables.
IV. Representación de la covariación	Se representa simbólicamente la regla de correspondencia [registro simbólico]. Las representaciones van de las que utilizan notación geométrica hasta las que se escriben en notación puramente algebraica; se da sentido a la expresión proporcionando significado a las variables que representan la situación geométrica.	Para representar la regla de correspondencia, en cada nivel distingue un tipo de notación: *Nivel 1. Notación geométrica*. Las variables son vistas como segmentos (*e.g.*, $\overline{AE}, \overline{BE}, \overline{CD}$). *Nivel 2. Notación mixta*. Se emplea una combinación de variables *geométricas* (*e.g.*, $\overline{AE}, \overline{BE}, \overline{CD}$) y/o *algebraicas* (*e.g.*, x, h, A) *y/o* lenguaje natural para representar una cantidad desconocida (*e.g.*, *área*, *área del rectángulo*). *Nivel 3. Notación algebraica*. Se emplean variables tradicionales (*e.g.*, x, y, z), literales (*e.g.*, a, b, h) u otros símbolos (*e.g.*, $A, alpha$).
V. *Consecuencias de la covariación*	Se establece una relación entre la regla de correspondencia [registro simbólico] con otros registros de representación [gráfico, tabular, geométrico]. Se determinan los intervalos de variación: (*i*) respecto a la variable independiente; (*ii*) respecto a la variable dependiente. Se proporcionan características involucradas en la situación geométrica dinámica. (*e.g*, valor máximo o mínimo).	*Nivel 1.* Se coordina la relación entre la regla de correspondencia y el registro gráfico de manera intuitiva. Se menciona el intervalo de variación para una de las variables identificadas. *Nivel 2.* Se coordina la relación con un registro tabular y la regla de correspondencia que no representa la situación en cuestión. Se expresa el intervalo de variación para las variables que no corresponden a la situación y se indica la ubicación del punto máximo o mínimo. *Nivel 3.* Se coordina la relación entre los registros de representación basados en la regla de correspondencia que cumple con las condiciones de la situación. Se expresa el intervalo de variación para las variables dependiente e independiente, las cuales corresponden a la situación planteada y se dan detalles tanto de la posición del punto máximo o mínimo como del comportamiento general de la representación gráfica.

CAPÍTULO 4

MÉTODO

4.1. INTRODUCCIÓN

Con base en el problema de investigación, en este capítulo se describe el método que permitió guiar el estudio reportado en el presente documento; el cual, según Smith (2011) es un elemento de un estudio empírico y define su diseño, la muestra, la instrumentación y el procedimiento. En primer lugar, se abordan el tipo de estudio y las características de los sujetos participantes. En segundo, se especifican las fases de estudio, las cuales incluyen el diseño de las tareas implementadas, la selección de los instrumentos usados para el desarrollo de la investigación, así como su descripción y un análisis *a priori* correspondiente con la Actividad 1. A lo largo de las fases de estudio se describe el proceso de implementación de las situaciones geométricas dinámicas (SGD) y el acopio de datos utilizados. Las actividades, propuestas en esta investigación, tienen el propósito de mostrar cuáles son los componentes que integran las caracterizaciones del razonamiento de covariación en estudiantes de bachillerato cuando abordan SGD con base en los momentos de resolución (primer momento: al hacer uso del ambiente de lápiz y papel y segundo momento: al hacer uso del ambiente tecnológico digital como complemento del de lápiz y papel).

4.2. TIPO DE INVESTIGACIÓN

El presente trabajo de investigación es de tipo cualitativo; de acuerdo con Miles y Huberman (1994), en este tipo de investigación se utiliza una fuente de descripciones bien fundamentadas y de explicaciones de procesos en un contexto local identificable, por ello la investigación es descriptiva. En este estudio, es trascendental considerar el escenario en el cual se llevó a cabo la experimentación, las explicaciones de procesos en un contexto local identificable, así como, las personas o grupos de personas participantes. Este estudio está basado en principios teóricos que emplean métodos de recolección de datos, con el propósito de identificar los elementos característicos que emerjan de los datos y permitan describir las situaciones tal como la experimentan sus correspondientes protagonistas (Miles y Huberman, 1994; Quecedo y Castaño, 2002). La elección de una perspectiva de investigación cualitativa es la adecuada para los fines antes expuestos; más precisamente, para analizar el tipo de caracterizaciones de razonamiento de covariación que emplean los estudiantes de bachillerato al trabajar Actividades que involucran el cálculo de áreas de figuras geométricas como una aproximación al concepto de función en diversos ambientes de trabajo. Quecedo y Castaño (2002) aseguran que los estudios cualitativos cumplen con los siguientes aspectos:

> Comprenden y desarrollan conceptos partiendo de pautas de los datos, y no recogiendo datos para evaluar hipótesis o teorías preconcebidas (p. 7).
> Las personas, los contextos o los grupos no son reducidos a variables, sino considerados como un todo.
> En la observación tratan de no interferir en la estructura; en las entrevistas en profundidad, siguen el modelo de una conversación normal, y no de un intercambio formal de preguntas y respuestas.
> Tratan de identificarse con las personas que estudian para comprender cómo experimentan la realidad.
> Busca aprehender el proceso interpretativo permaneciendo distanciado como un observador objetivo y rechazando el papel de unidad actuante.
> El estudio cualitativo es una investigación sistemática y rigurosa, no estandarizada, que controla los datos que registra. No obstante, al pretender producir estudios válidos del mundo real no es posible lograr una confiabilidad perfecta.
> El estudio cualitativo permite conocer el aspecto personal, la vida interior, las perspectivas, creencias, conceptos [...], éxitos y fracasos, la lucha moral, los esfuerzos [...] (p. 8).

Esta investigación es descriptiva en cuanto a su finalidad; como se evidencia en los siguientes capítulos, se narra con detalle el trabajo realizado por los estudiantes ante las SGD propuestas. A partir de esta descripción, se analizan las respuestas dadas por los alumnos, se interpretan y, en su momento, se trata de dar explicaciones del porqué de éstas con base en el marco conceptual (véase capítulo 3), que darán el fundamento para su análisis y categorizar sus respuestas.

En toda investigación son fundamentales los procesos de acopio, representación, manipulación e interpretación de los datos, según Schoenfeld (2007, p. 82), y la investigación será válida en el medio si cumple con los siguientes criterios: (*i*) *generalidad* (o alcance) referente al contexto en el que se lleva a cabo la investigación, así como la amplitud y alcance de los resultados; (*ii*) *importancia*, la cual corresponde a la justificación de la importancia del estudio (si de éste son pertinentes los resultados obtenidos) y a su contribución a la disciplina; y (*iii*) *fiabilidad*, el cual alude a la credibilidad de las afirmaciones hechas por los autores de la investigación. Conforme al propósito de la investigación, se busca comparar, describir y explicar el procesamiento cognitivo de los estudiantes ante la situación sometida a estudio; también, la investigación es de naturaleza comparativa, descriptiva e interpretativa. Como se explicó en los párrafos anteriores, el presente trabajo es de tipo cualitativo, el cual permite determinar la cantidad y variedad de respuestas encontradas con base en la *teoría fundamentada* (Glaser y Strauss, 1967/2008; Birks y Mills, 2011).

4.3. DESCRIPCIÓN Y SELECCIÓN DE LA POBLACIÓN

El presente trabajo de investigación se llevó a cabo con un grupo de 16 alumnos de bachillerato, quienes se encontraban inscritos en la asignatura de Matemáticas VI (cálculo diferencial e integral) y cursaban el sexto año [quinto semestre] con orientación a las carreras universitarias del área de fisicomatemáticas. Los participantes se encontraban inscritos en grupos diferentes con profesores de matemáticas distintos (diez de ellos estaban inscritos en un grupo y seis alumnos pertenecían a otro grupo) y como conocimientos previos habían cursado álgebra, trigonometría y geometría analítica. La selección de los participantes se realizó por medio de una invitación directa del profesor del grupo y del investigador, quienes solicitaron la participación de los alumnos más entusiastas, interesados en formar parte de este estudio, con disposición para trabajar en equipo, cuya participación fuera voluntaria, y que mostraran compromiso, dedicación e iniciativa para participar de manera activa en las sesiones de trabajo.

Con los alumnos participantes se formaron ocho equipos de dos integrantes cada uno; las parejas fueron conformadas por ellos mismos, ya que el investigador dio la oportunidad de que los alumnos eligieran a otro participante con quien abordarían las situaciones diseñadas. Para referirse a cada uno de los ocho equipos se adoptó la nomenclatura E1, E2, E3, …, E8; los equipos E1, E2, E3, E4 y E5 estaban conformados por los alumnos de uno de los grupos, mientras que los equipos E6, E7 y E8 estaban integrados por los alumnos del segundo grupo. La edad de los participantes oscilaba entre los 17 y 18 años. El trabajo con los estudiantes se llevó a cabo en nueve sesiones de una hora con treinta minutos cada una; ocho sesiones fueron utilizadas para el desarrollo de las actividades propuestas y durante una sesión se instruyó —de manera breve y concisa— a los participantes sobre el uso básico de la herramienta tecnológica digital [Geogebra] (véase Tabla 4.1).

Los estudiantes no contaban con experiencia en el uso de programas informáticos enfocados a la enseñanza de las matemáticas, en particular con software de geometría dinámica. Por tal motivo, la sesión de instrucción en torno al uso de Geogebra (véase Tabla 4.1) se condujo para la familiarizarlos con las herramientas de las que dispone el software a fin de dotar a los participantes de elementos que les permitieran hacer un uso adecuado de éstas para la resolución de cada una de las situaciones diseñadas. La razón por la cual se eligió una población de este nivel educativo se debe a que, en esta etapa, han adquirido conocimientos matemáticos relacionados con el álgebra y la geometría. Sin embargo, como se ha comentado a lo largo del presente trabajo, existen diferentes dificultades que muestran los estudiantes aún en niveles universitarios entre ellas: el uso adecuado de la variable para diferentes contextos (Ursini *et al.*, 2005), el papel del simbolismo que involucra la producción o interpretación de fórmulas para describir un fenómeno que depende de un número variable (Ellis, 2011; Kieran, 2007; Kaput, 2008), reconocimiento, interpretación y trabajo con relaciones funcionales y su conversión en otros registros de representación (Duval, 1999; 2006; Sierpinska, 1992; Dubinsky y Wilson, 2013; Eisenberg, 1992; Hitt, 1996), entre otras. Además, según Carlson *et al*. (2002) la mayor parte de los estudiantes de nivel universitario muestran poca habilidad para comprender los aspectos de covariación, lo cual da énfasis a la realización de esta investigación. Muchas de estas dificultades mostradas por los estudiantes son ocasionadas por que los cursos están enfocados principalmente en situaciones estáticas, sin enfrentar a los estudiantes a problemas en situaciones dinámicas; por ello, esta investigación aborda ambas perspectivas.

4.4. FASES DE ESTUDIO

Para cumplir los objetivos y dar respuesta a las preguntas de investigación (véase capítulo 1), el presente estudio se realizó en dos fases: en ambiente de lápiz y papel y con ayuda del ambiente digital. Para la etapa final de este estudio se diseñaron e implementaron nuevas SGD con el objetivo de identificar las caracterizaciones del razonamiento de covariación basado en situaciones que involucran problemas de optimización. Las SGD fueron rediseñadas e incorporadas en el presente trabajo de investigación con base en los comentarios expuestos por los sinodales durante el examen predoctoral. En seguida, se implementó la experimentación y se llevó a cabo el acopio de los datos, los cuales son analizados en los siguientes dos capítulos basados en el marco teórico propuesto en el capítulo anterior.

4.4.1. Diseño de las situaciones geométricas dinámicas

Para diseñar actividades que promuevan las concepciones que sobre función tienen los estudiantes es necesario, según Madison *et. al.* (2015), considerar el razonamiento tanto cuantitativo como covariacional de manera que se permita a los estudiantes describir y representar patrones de cambio en diversos tipos de función (*e.g.*, cuadrática y radical). A pesar de que los estudiantes han aprendido conceptos matemáticos básicos que permiten integrar conceptos más complejos (*e.g.,* el de función), por lo general no los usan para resolver problemas con los que pueden obtener una relación funcional o relación entre dos variables. El problema mejor documentado en esta área es que los estudiantes en sus primeros cursos de cálculo han aprendido a operar con funciones ya establecidas, pero les cuesta mucho trabajo o no son capaces de establecer una relación entre dos variables a partir de problemas específicos. En este trabajo, por medio de estas actividades, se espera que los estudiantes a partir de las SGD desarrollen el razonamiento de covariación y se acerquen [cognitivamente] de manera intuitiva al concepto de función. El desafío es, por lo tanto, que los estudiantes comprendan la SGD para estimular la generación de caracterizaciones de razonamiento de covariación a partir de la asignación —de manera natural— de las variables que se relacionan con el problema planteado y logren el vínculo entre los distintos registros de representación que involucran la covariación de las variables identificadas con la finalidad de promover el concepto de función.

Muchos libros de texto de matemáticas en diferentes niveles para bachillerato abordan listas de temas que, en conjunto, integran un grupo de herramientas con el que los estudiantes pueden resolver problemas, principalmente de cálculo. En el bachillerato, por ejemplo, se introducen temas que permiten a los estudiantes el uso y designación de variables, trabajo con conjuntos, uso de gráficos y tablas de representación, etc. Y, en niveles superiores, los estudiantes deberían integrar todas las herramientas anteriores para resolver problemas más complejos. Entre las propuestas dadas por el NCTM (2000), para promover el concepto de función, se sugiere proporcionar una mayor coherencia en el currículum e integrar, por medio de argumentos, las múltiples representaciones, las cuales deben enseñarse en relación mutua. Desde nuestra perspectiva, una manera de apoyar la propuesta anterior es a través de problemas específicos (SGD), por medio de los cuales se pretende que los estudiantes desarrollen el sentido de covariación, propongan variables y las integren en sus múltiples representaciones con la finalidad de que sirva de plataforma para desarrollar conceptos más complejos, entre los que se destaca el concepto de función desde la perspectiva del estudiante.

4.4.1.1. Las Actividades

Para cumplir con los objetivos de esta investigación es necesario desarrollar métodos que promuevan en los estudiantes las caracterizaciones de razonamiento de covariación —propuesto en esta investigación— (véase parágrafo 3.5) tomando en cuenta la integración de variables y de los distintos registros de representación que contempla las diversas dificultades descritas en la comprensión del concepto de función (véase parágrafo 2.3.4). Las situaciones propuestas deben integrar diversos temas y dar a los estudiantes acceso a conceptos que a menudo se consideran demasiado difíciles para ellos, en particular, la covariación.

Leinhardt *et al*. (1990) afirman que se pueden analizar las tareas de interpretación desde una perspectiva cuantitativa hasta una cualitativa. Una interpretación cualitativa de un gráfico en su sentido más completo requiere mirar todo el gráfico (o parte de él) y obtener significado sobre la relación entre las dos variables y, en particular, su patrón de covariación. En cambio, la perspectiva cuantitativa se centra en los valores que toma el gráfico en uno o varios puntos específicos. Aunque las características globales se pueden interpretar de forma cualitativa es más común centrarse en aspectos cuantitativos o interpretaciones locales que presenta un gráfico (*e.g.*, los máximos, los mínimos, los puntos de inflexión, la intersección con los ejes coordenados, entre otros). Otras tareas que se centran en particular en la interpretación cualitativa de gráficos son aquellas que surgen de entornos informáticos; en ellas la computadora libera a los estudiantes de gran parte del trabajo computacional y técnico, lo que les permite enfocarse en características más cualitativas y globales del gráfico (Leinhardt *et al*., 1990, p.11).

Por lo tanto, el diseño de las actividades —en este estudio— se basa en la asignación de variables involucradas, en la comprensión del mecanismo que produce la covariación, en la relación de distintos registros de representación surgidos de situaciones geométricas dinámicas que dan lugar a la covariación, y a la integración y análisis de las consecuencias de la covariación que emerge desde su visión como función. Las situaciones están diseñadas para que los estudiantes propongan una expresión simbólica general que permita calcular el área de una figura geométrica específica que varía cuando un punto —que forma parte de la estructura geométrica— cambia [covariación]; para ello, es necesaria la identificación y la designación de variables, sin embargo, la actividad no sugiere el uso de ninguna variable dando la posibilidad de que en los estudiantes surja la necesidad de emplear aquella que con base en sus conocimientos previos sea la variable más adecuada para calcular el área de la figura solicitada.

El proceso que se pretende seguir a lo largo de las situaciones busca promover, en el estudiante, la identificación de las variables que se relacionan durante el cálculo de área de una figura geométrica en una situación dinámica y su tránsito desde lo general hacia lo particular y de lo particular a lo general, con la finalidad de desarrollar la idea de covariación. Se pretende que, a partir de la identificación de variables, relacionadas con la situación geométrica, los participantes propongan una expresión simbólica que represente esta relación y con base en esta covariación, identifiquen e integren otros registros de representación basados en el mecanismo que produce la covariación al abordar las SGD en dos ambientes de trabajo (lápiz y papel y tecnológico digital).

La resolución de las situaciones geométricas dinámicas que guían las actividades se realiza en dos momentos: el primero, al hacer uso únicamente del ambiente de lápiz y papel y el segundo, cuando se emplea la herramienta tecnológica digital como complemento del trabajo de lápiz y papel. El uso de la herramienta tecnológica digital, durante el segundo momento, pretende ser un elemento esencial que permita validar los resultados propuestos y permita, en caso de no lograr la relación adecuada entre variables, generar nuevos elementos para ajustar sus resultados. Durante la resolución de las situaciones, para ambos momentos, los participantes deben relacionar las variables involucradas por medio de una expresión simbólica con otras representaciones [tabular y grafica], y determinar elementos y características de la covariación, como la relación existente entre la expresión simbólica y los ejes coordenados, así como el valor máximo o mínimo asociado con el cálculo de área [función de área]. Las situaciones están enfocadas a la identificación de la relación existente entre las variables involucradas y las múltiples representaciones asociadas con el cálculo de área de una figura geométrica con la finalidad de que los participantes descubran invariantes, describan y conjeturen su comportamiento general en ambos ambientes de trabajo.

Por un lado, al incorporar la herramienta tecnológica se pretende que, por su característica dinámica, se vislumbre la relación entre las variables involucradas en la situación y se reconozca su variación conjunta a partir de las características de la figura geométrica. Por otro lado, uno de los retos en el diseño de las actividades fue involucrar problemáticas o situaciones que despierten el interés de los estudiantes y promuevan la interacción, el intercambio de opiniones y conocimientos que permitan la reflexión sobre los objetos matemáticos involucrados. Para integrar los factores que permitan promover los razonamientos de los estudiantes en torno a la variación conjunta es preciso tomar en cuenta que las actividades propuestas deben estar basadas en sus conocimientos previos, que puedan incorporarse distintos ambientes de trabajo durante su resolución y se permita la interacción entre los participantes (contexto social) que dé lugar a un intercambio de ideas y la reflexión.

4.4.1.2. Propósito de las situaciones

Una manera de fomentar en los estudiantes la comprensión de las matemáticas del cambio es mediante la introducción de situaciones ricas que los alienten a construir relaciones significativas entre cantidades; la adopción de esta perspectiva puede ser accesible incluso para los estudiantes de álgebra inicial en el nivel secundaria (Ellis, 2011). La manera en que los estudiantes comunican su forma de pensar a través de los registros de representación en torno a actividades relacionadas con las SGD es parte fundamental de esta investigación y es el medio por el cual puede comprenderse su razonamiento en torno al sentido de relación entre variables (Drijvers *et al*., 2010). Las situaciones diseñadas para esta investigación tienen como propósito que los participantes asignen variables y comprendan que si cambia una la otra también se modifica, analicen los elementos que producen la covariación y los integren por medio de un registro simbólico que permita analizar otros registros de representación como elementos esenciales de la covariación.

Las situaciones diseñadas para esta investigación tienen el propósito de explorar y analizar los razonamientos de los estudiantes al trabajar actividades en torno a problemas de figuras geométricas que den por resultado o manifiesten la relación entre variables y representen la situación en cuestión. La finalidad de las actividades es proporcionar a los estudiantes la oportunidad de expresar sus propios conocimientos a partir de situaciones que involucran el cálculo de área de figuras geométricas con base en la relación entre variables que da lugar al enfoque de covariación y que es la base para que los estudiantes puedan desarrollar una visión acerca del sentido de los fenómenos y sus relaciones de dependencia, causalidad, interacción y correlación entre cantidades.

4.4.2. Implementación de la experimentación (acopio de datos)

La implementación de las actividades y el acopio de datos se realizó durante ocho sesiones de 90 minutos cada una, aproximadamente, y una sesión para la instrucción acerca del uso básico de la herramienta tecnológica digital [Geogebra] (véase Tabla 4.1). Para llevar a cabo la resolución de las tareas, los estudiantes trabajaron en equipos de dos integrantes cada uno —ocho equipos en total para esta investigación— (véase parágrafo 4.3). El objetivo de realizar las actividades en pareja fue propiciar en ellos un trabajo interactivo —contexto social— que permitiera discutir, explicar y justificar sus contribuciones a las respuestas de las preguntas planteadas en cada situación. Cada grupo de alumnos participantes tuvo acceso a las actividades mediante hojas de trabajo impresas y en las sesiones en que se requirió, hicieron uso de una computadora, en la cual se instaló el software Geogebra. Además, durante las sesiones de trabajo se empleó una cámara de video para evidenciar el trabajo oral y escrito de cada pareja durante la resolución de las Actividades. Los instrumentos utilizados para el acopio de datos dieron evidencias del trabajo de cada uno de los equipos participantes en esta investigación.

Tabla 4.1
Sesiones de trabajo

Número de sesión	*Actividad realizada*	*Ambiente de trabajo*
Sesión 1	Actividad 1 Área de cuadrados en un segmento	Lápiz y papel
Sesión 2	Actividad 2 Área del rectángulo inscrito en un triángulo	Lápiz y papel
Sesión 3	Actividad (NR)* Cuadrilátero inscrito en un cuadrado	Lápiz y papel
Sesión 4	Instrucción acerca del uso básico de la herramienta tecnológica digital Geogebra	Tecnológico digital
Sesión 5	Actividad 1 Área de cuadrados en un segmento	Tecnológico digital como complemento del ambiente de lápiz y papel
Sesión 6	Actividad 2 Área del rectángulo inscrito en un Triángulo	Tecnológico digital como complemento del ambiente de lápiz y papel
Sesión 7	Actividad (NR)* Cuadrilátero inscrito en un cuadrado	Tecnológico digital como complemento del ambiente de lápiz y papel
Sesión 8	Actividad 3 Rectángulo inscrito en una semicircunferencia	Lápiz y papel
Sesión 9	Actividad 3 Rectángulo inscrito en una semicircunferencia	Tecnológico digital como complemento del ambiente de lápiz y papel

*NR Actividad no reportada en la presente investigación, ya que los resultados obtenidos en esta actividad mostraron características similares a las obtenidas en las Actividades 1 y 2. Debido a la poca aportación y extenso análisis se optó por ser omitida.

El papel del investigador en cada una de las sesiones consistió en apoyar a los alumnos participantes respecto a las indicaciones de las tareas y propiciar preguntas que les permitieran reflexionar —a los estudiantes— sobre la comprensión de la situación, y la expresión tanto de ideas como de procedimientos de solución. Durante la implementación de la experimentación, los alumnos trabajaron fuera de su horario habitual de clase en el aula denominada *taller de matemáticas*[17]. Se eligió esta aula porque cuenta con la

[17] El taller de matemáticas es un espacio físico con el que cuenta la preparatoria, donde fueron implementadas las Actividades. Esta aula es utilizada tanto para asesorías como para clases especiales en las

infraestructura necesaria para la toma de datos; que se llevó a cabo entre los meses de noviembre de 2018 y enero de 2019.

4.4.2.1. Los instrumentos de acopio de datos

Para lograr los objetivos de este estudio se recurrió a diferentes instrumentos de acopio de datos, como: (*a*) *Actividades*: diseñadas en torno a tareas que involucran una familia de problemas geométricos que dan lugar a una relación funcional basados en el cálculo de área de una figura y que evidencie el mecanismo que produce la covariación para generar la relación entre distintos registros de representación (véase Apéndice); (*b*) *Registro escrito de las Actividades*: permitió observar las respuestas de los participantes en este estudio con respecto al conjunto de tareas planteadas; (*c*) *Videograbaciones*: las intervenciones durante cada sesión de trabajo fueron grabadas mediante una cámara de video operada por el investigador, la cual enfocaba lo que hacían y decían los estudiantes. Para el análisis de datos se observaron las entrevistas a los participantes —que fueron registradas a través de las videograbaciones— y se examinaron con cautela; (*d*) *Notas de campo del investigador*: este instrumento proveerá información adicional y complementaria que el investigador juzgue importante.

4.4.3. Consideraciones acerca de la implementación y el diseño de las actividades

El diseño de las actividades se enfocó en que los alumnos identificaran las propiedades específicas que se encuentran implícitas en distintas figuras geométricas y por medio de su cálculo de área se promoviera la identificación de la relación entre variables, particularmente la existente entre el área y un punto que se desplaza sobre un segmento —covariación— el cual modificaba algunas características de la figura, pero mantenía sus propiedades geométricas originales (mecanismo que produce la covariación). Para identificar la relación entre variables, los participantes deben generalizar el comportamiento para el cálculo de área y representarlo de manera simbólica. Una vez, representadas simbólicamente la relación entre variables se pretende que el estudiante haga uso de otros registros de representación (*e.g.*, tabular, gráfico) que le permitan establecer la interrelación entre la figura geométrica, la representación simbólica, el registro tabular y la representación gráfica, con la finalidad de construir distintas manifestaciones del

---

que se requiera el uso de las herramientas computacionales; en general, es un espacio dedicado a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

razonamiento —caracterizaciones del razonamiento de covariación— (véase parágrafo 3.5) que vincule e interconecte los conceptos empleados con otros (*e.g.*, función).

Para promover las caracterizaciones del razonamiento de covariación, a través de la identificación de variables y la relación de distintos registros de representación en torno a una familia de problemas geométricos que dan lugar a la covariación, es indispensable considerar un entorno adecuado y cubrir cada una de las influencias existentes, las cuales se mencionan a continuación: (*a*) la *Actividad* en la que trabajan los estudiantes: *tareas o conjunto de tareas*; (*b*) el ambiente de trabajo usados para resolver la actividad: *tradicional (lápiz y papel) y tecnológico digital (Geogebra)*; (*c*) las historias personales de los estudiantes: *conocimientos previos*; y (*d*) el entorno social en el cual se resuelve la tarea: *trabajo en equipo*.

4.4.3.1. Selección de la herramienta tecnológica digital

Para seleccionar una herramienta tecnológica digital adecuada es recomendable que cumpla las siguientes características: (*a*) que sea gratuita —no se requiere adquirir una licencia para su uso—; (*b*) fácil de usar —que sea intuitiva—; (*c*) que presente características propias de los software de geometría dinámica; (*d*) con accesibilidad a los distintos registros de representación de los objetos matemáticos involucrados —interconexión entre representaciones geométricas, algebraicas y gráficas en el plano cartesiano—. Una de las herramientas tecnológicas que cumple cabalmente con las características principales es Geogebra. Este software combina de una manera dinámica geometría, álgebra, análisis y estadística en un único conjunto tan sencillo a nivel operativo.

Geogebra ofrece representaciones diversas de los objetos matemáticos desde cada una de sus posibles perspectivas: vistas gráficas, algebraicas, estadísticas y de organización en tablas y planillas, y hojas de datos dinámicamente vinculadas. También, permite realizar construcciones de manera fácil y rápida, con una representación “más próxima” al comportamiento de la función y en tiempo real, que —además— revela las relaciones existentes con otras representaciones, y permite la transformación dinámica de elementos que las componen. La importancia del uso de Geogebra para esta investigación es que permite abordar distintos registros de representación de forma dinámica e interactiva, los cuales ayudan a los estudiantes a vislumbrar el comportamiento de objetos matemáticos complicados de afrontar surgidos en un ambiente tradicional.

4.4.4.3. Relación entre las soluciones de las actividades en los dos ambientes

El diseño y la implementación de las actividades propuestas para este estudio permite la reflexión de los estudiantes durante la interacción social (alumno-alumno, alumno-investigador), desde que leen las instrucciones de la actividad hasta asentar su respuesta por escrito. Se pretende que los estudiantes justifiquen sus respuestas, con base en sus conocimientos previos, a partir de las hipótesis conocidas por medio de razonamientos y características identificadas en la figura geométrica e incluso propongan conjeturas que den certeza a los resultados que afirman y noten la influencia de los ambientes de trabajo en los que se resuelven las tareas.

La herramienta tecnológica digital (Geogebra), por medio de la herramienta *arrastre* y *deslizador,* brinda la posibilidad de razonar de manera distinta de la que se puede hacer cuando se usa ambiente de lápiz y papel, ya que permite una mejor interpretación tanto de los procesos de cambio y variación como de la interconexión entre los distintos registros de representación, los cuales son importante para generar manifestaciones del razonamiento de covariación. A diferencia del ambiente de lápiz y papel, el uso de la herramienta tecnológica digital permite: (*i*) generar y explorar la figura geométrica manteniendo sus características y propiedades intrínsecas según la situación dinámica planteada y analizarla en un mismo escenario; (*ii*) descubrir propiedades que no siempre son posibles detectar en el dibujo estático; (*iii*) vincular los distintos registros de representación entre sí (simbólico-tabular-gráfico).

A pesar de las bondades que brinda el software, es importante no dejar por un lado el trabajo en ambiente de lápiz y papel, ya que éste permite que los estudiantes analicen y comprendan la situación geométrica planteada y, con base en sus conocimientos previos, adopten la perspectiva de covariación para para la búsqueda de la solución al problema planteado. Basados en la perspectiva de covariación, los estudiantes podrán plantear soluciones empleando el lenguaje simbólico que represente el área de una figura de manera generalizada y la vinculen con otros registros de representación e interpreten su solución como un problema de optimización de áreas. Por lo anterior, las actividades serán abordadas empleando los ambientes de lápiz y papel y tecnológico digital.

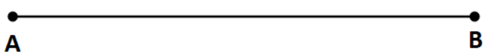
4.4.4. Solución a priori de una de las Actividades implementadas durante la fase final

Como parte de la investigación, es necesario exponer las posibles soluciones [desde el punto de vista del investigador] que se consideran sean respuesta de los estudiantes a las situaciones planteadas. A continuación, se expone una de las actividades implementadas para este estudio —*Actividad 1*— y sus respectivos resultados esperados; se muestra el trabajo que se podría desarrollar por los alumnos en el primer momento de la Actividad 1 con resolución en ambiente de trabajo tradicional, es decir, lápiz y papel y durante el segundo momento de la Actividad 1, cuya resolución es en ambiente tecnológico digital como complemento del ambiente de lápiz y papel. Cada uno de los momentos de la Actividad 1 está dividido en cuatro partes: (*i*) *Primera parte. Identificación de características en la figura.* Esta parte involucra el cálculo de área de manera general para el problema geométrico; (*ii*) *Segunda parte. Cálculo de área del polígono ABEFCD (casos particulares).* Esta parte involucra el cálculo de diversas áreas establecidas con base en el problema geométrico planteado (casos particulares). (*iii*) *Tercera parte. Generalización de área de rectángulos inscritos en un triángulo.* En ésta, se pretende que con base en las partes anteriores (primera y segunda parte) se defina una expresión simbólica —representación de la covariación— que represente la relación entre las variables involucradas en torno al cálculo de área de una figura geométrica. (*iv*) *Cuarta parte. Representación gráfica del área del polígono ABEFCD.* Se pretende graficar la expresión simbólica —representación de la covariación— obtenida en la parte previa (tercera parte), de tal manera que el estudiante identifique las variables involucradas, comprenda el mecanismo que produce la covariación, interrelacione los diversos registros de representación e identifique las características y elementos surgidos de estos registros. El objetivo general de la Actividad 1 consiste en que el estudiante obtenga la representación de la covariación entre el área de la figura geométrica y el punto que se desplaza por un segmento surgida de la situación geométrica dinámica y plantee la relación entre estas variables y otros registros de representación.

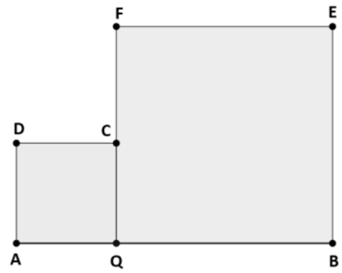
Actividad 1: Área de cuadrados en un segmento

4.4.4.1. Primer momento: Actividad 1. Lápiz y papel

1.1.1. La siguiente figura muestra el segmento $\overline{AB}$ cuya longitud es 10 unidades. Coloca un punto Q sobre el segmento $\overline{AB}$. Dibuja el cuadrado *AQCD* cuya longitud de sus lados es la del segmento $\overline{AQ}$. Enseguida, dibuja el cuadrado *QBEF* cuya longitud de sus lados es la del segmento $\overline{QB}$. Con base en las características de la figura, determina el área del polígono *ABEFCD.* Explica tu procedimiento.



Respuesta y explicación de los posibles resultados al calcular el área del polígono ABEFCD



De acuerdo con las indicaciones se genera la figura geométrica de la izquierda y para calcular el área del polígono *ABEFCD*, los estudiantes pueden responder de las siguientes maneras:

(1) $A = (5)^2 + (5)^2 = 50$ o $A = \overline{AQ}^2 + \overline{QB}^2$

Consideración: El área del polígono se obtiene para un caso particular (por ejemplo, cuando el segmento está dividido en dos partes en su punto medio) o es vista como la suma del cuadrado de dos segmentos. Se percibe la situación de manera estática.

(2) $A = q^2 + (\overline{AB} - q)^2$ o $A = q^2 + (10 - q)^2$

Consideración: El área del polígono se expresa mediante una combinación de segmentos y variables algebraicas; se agregan elementos implícitos en la figura y se percibe el cambio en la longitud de los lados de los cuadrados que conforman el polígono *ABEFCD.*

(3) $y = x^2 + (\overline{AB} - x)^2$ ó $y = x^2 + (10 - x)^2$

Consideración: El área del polígono se expresa con variables algebraicas; se percibe la relación entre variables, se asocian los valores de los segmentos con variables algebraicas y el problema es visto desde el punto de vista de la covariación.

1.1.2. Suponiendo que un punto P se desplaza a lo largo del segmento $\overline{AB}$ y se forman distintos polígonos *ABEFCD* con las características mencionadas en el inciso 1.1.1. ¿El área del polígono *ABEFCD* es constante? Explica tu razonamiento.

Respuesta y explicación para el comportamiento del área del polígono

El área del polígono *ABEFCD* no es constante, ya que el segmento $\overline{AP}$ cambia de longitud cuando se desplaza sobre el segmento $\overline{AB}$, y por consiguiente se obtienen diferentes cuadrados *APCD* y *PBEF* con diversas longitudes cuyas áreas son distintas cuando el punto P se desplaza sobre el segmento $\overline{AB}$. Se puede suponer que a medida que el punto P se desplaza sobre el segmento $\overline{AB}$, el área del polígono varía o es mayor cuando el punto P está más cerca de los extremos y será menor cuando el punto P esté cerca de la mitad del segmento $\overline{AB}$.

Consideración: Se percibe la relación entre el punto P (longitud del segmento $\overline{AP}$) y el área del rectángulo ABEFCD, lo que da lugar a verbalizar el aspecto dinámico de la situación describiendo cómo el cambio de un objeto produce un cambio en otro.

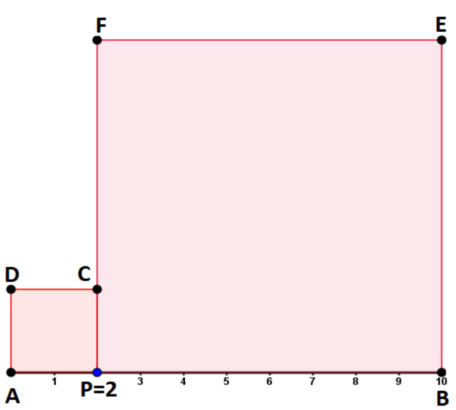
1.1.3. ¿De qué depende el valor del área del polígono *ABEFCD*? Justifica tu respuesta

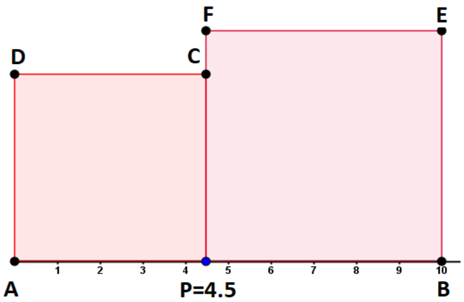
Respuesta y explicación para definir de qué depende el área del polígono ABEFCD Cuando se desplaza el punto P sobre el segmento $\overline{AB}$ el área del polígono cambia y este cambio de valor en su área puede ser identificado por los alumnos de dos maneras: (i) El área del polígono *ABEFCD* depende de la posición del punto P; el valor de área del polígono *ABEFCD* es vista como variable dependiente y la posición del punto P es vista como variable independiente. En este sentido, el cambio en el valor del área estará relacionado con una variable algebraica. (ii) El área del polígono *ABEFCD* depende del valor asignado al segmento $\overline{AP}$; el valor de área del polígono *ABEFCD* es vista como variable dependiente y la posición del punto P es vista como variable independiente. En este sentido, el cambio en el valor del área estará relacionado con una variable geométrica. *Consideración:* Se identifica la covariación y se realiza un análisis de la situación en la que se identifica la relación entre las variables longitud del segmento $\overline{AP}$ asociada con la posición del punto P y el área del rectángulo *ABEFCD*.

1.1.4. ¿Existe un valor mínimo para el área del polígono *ABEFCD* cuando se desplaza el punto P sobre el segmento $\overline{AB}$? En caso afirmativo ¿en qué posición se encuentra el valor mínimo de área del polígono *ABEFCD*? Explica tu razonamiento.

Respuesta y explicación para definir si existe un valor mínimo de área del polígono ABEFCD cuando se desplaza el punto P sobre el segmento AB Si se desplaza el punto P sobre el segmento $\overline{AB}$ se forman diferentes polígonos *ABEFCD* (conformados por los cuadrados *APCD* y *PBEF*) cuyo valor de área cambia en función de la posición del punto P (visto como variable algebraica) o por el valor del segmento $\overline{AP}$ (visto como variable geométrica). A medida que el punto P se acerca a la mitad del segmento $\overline{AB}$ el área del polígono *ABEFCD* va disminuyendo y al colocarse el punto P justo en la mitad del segmento $\overline{AB}$ se tendrá el área mínima del polígono *ABEFCD*, ya que al colocar el punto P entre la mitad y uno de los extremos segmento $\overline{AB}$ comenzará a aumentar el valor del área del polígono *ABEFCD*. *Consideración:* Se establece la covariación y se realiza un análisis de la situación en la que se identifican características del comportamiento que muestran las variables involucradas.

1.1.5. Para las siguientes figuras, calcula el área del polígono *ABEFCD*. Considera que el punto P se ubica en distintas posiciones sobre el segmento $\overline{AB}$, cuya medida es 10 unidades. Muestra tu procedimiento.

Figuras	*Cálculo usando lápiz y papel*
	*Respuesta y explicación de los posibles resultados al calcular el área del polígono ABEFCD* Los estudiantes pueden responder de tres maneras distintas: (1) $A=(\overline{AP})^2+(\overline{PB})^2=(2)^2+(8)^2=(4)+(64)=68$ [u^2] El área del polígono se obtiene a partir de una expresión con variables geométricas, ya que se representa mediante el uso de segmentos. (2) $A=p^2+(\overline{AB}-p)^2=(2)^2+(10-2)^2=68$ [u^2] El área del polígono se expresa mediante una combinación de longitudes de segmentos y variables algebraicas. (3) $y=x^2+(10-x)^2=(2)^2+(10-2)^2=68$ [u^2] El área del polígono se expresa con variables algebraicas. *Consideración:* Se calcula el área del polígono *ABEFCD* y todos los resultados son de tipo aritmético basados en las expresiones simbólicas propuestas de los incisos 1.1.1 y 1.1.2. Se establece una relación de correspondencia entre el punto P y el área del polígono.



Respuesta y explicación de los posibles resultados al calcular el área del polígono ABEFCD

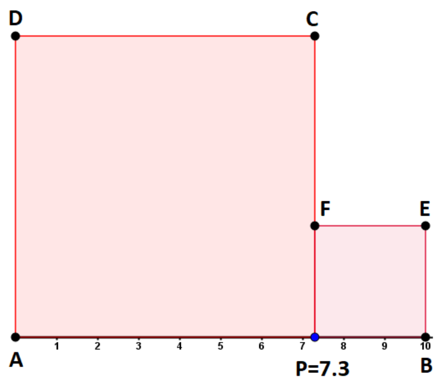
Los estudiantes pueden responder de tres maneras distintas:

(1) $A=(\overline{AP})^2+(\overline{PB})^2=(4.5)^2+(5.5)^2=50.5$ [u^2] El área del polígono se obtiene a partir de una expresión con variables geométricas, ya que se representa mediante el uso de segmentos.

(2) $A=p^2+(\overline{AB}-p)^2=(4.5)^2+(10-4.5)^2=50.5$ [u^2] El área del polígono se expresa mediante una combinación de longitudes de segmentos y variables algebraicas.

(3) $y=x^2+(10-x)^2=(4.5)^2+(10-4.5)^2=50.5$ [u^2] El área del polígono se expresa con variables algebraicas.

Consideración: Se calcula el área del polígono *ABEFCD* y todos los resultados son de tipo aritmético basados en las expresiones simbólicas propuestas de los incisos 1.1.1 y 1.1.2. Se establece una relación de correspondencia entre el punto P y el área del polígono.



Respuesta y explicación de los posibles resultados al calcular el área del polígono ABEFCD

Los estudiantes pueden responder de tres maneras distintas:

(1) $A=(\overline{AP})^2+(\overline{PB})^2=(7.3)^2+(3.7)^2=60.58$ [u^2] El área del polígono se obtiene a partir de una expresión con variables geométricas, ya que se representa mediante el uso de segmentos.

(2) $A=p^2+(\overline{AB}-p)^2=(7.3)^2+(10-7.3)^2=60.58$ [u^2] El área del polígono se expresan mediante una combinación de longitudes de segmentos y variables algebraicas.

(3) $y=x^2+(10-x)^2=(7.3)^2+(10-7.3)^2=60.58$ [u^2] El área del polígono se expresa con notación algebraica, se emplean variables algebraicas.

Consideración: Se calcula el área del polígono *ABEFCD* y todos los resultados son de tipo aritmético basados en las expresiones simbólicas propuestas de los incisos 1.1.1 y 1.1.2. Se establece una relación de correspondencia entre el punto P y el área del polígono.

1.1.6. Explica, ¿qué variables intervienen cuando el punto P se desplaza sobre el segmento $\overline{AB}$ manteniendo la configuración geométrica?

Respuesta y explicación de las variables que intervienen cuando se desplaza el punto P sobre el segmento $\overline{AB}$ basado en la situación geométrica dinámica

Con base en los resultados propuestos al determinar una expresión simbólica que permita calcular el área del polígono *ABEFCD*, los participantes pueden identificar las siguientes variables:

(i) *La longitud del segmento $\overline{AP}$*, vista como variable independiente, la cual está vinculada con la posición del punto P sobre el segmento $\overline{AB}$;

(ii) *El área del polígono ABEFCD*, vista como variable dependiente, la cual cambia dependiendo de la posición del punto P.

(iii) *La longitud del segmento $\overline{AB}$*, vista como valor definido de 10 unidades de longitud o “constante”.

Consideración: Se reafirma la relación de correspondencia entre el punto P y el área del polígono, al identificar el papel de las variables independiente y dependiente basados en la expresión simbólica propuesta en el inciso anterior.

1.1.7. ¿Qué expresión permite determinar el área del polígono *ABEFCD* para cualquier punto P ubicado en el segmento $\overline{AB}$? Justifica tu respuesta.

Respuesta y explicación de los posibles resultados al determinar el área del polígono ABEFCD

Los estudiantes pueden responder de tres maneras distintas:

(1) $A=(\overline{AP})^2+(\overline{PB})^2$ o $A=\overline{AP}^2+(10-\overline{AP})^2$ El área del polígono se generaliza con base en una expresión que involucra variables geométricas, ya que se representa mediante el uso de segmentos.

(2) $A=p^2+(\overline{AB}-p)^2$ o $A=x^2+(\overline{AB}-x)^2$ El área del polígono se generaliza mediante una expresión que combina segmentos y variables algebraicas.

(3) $A=p^2+(10-p)^2$ o $y=x^2+(10-x)^2$ El área del polígono se generaliza mediante una expresión que involucra variables algebraicas.

Consideración: Se propone una expresión simbólica que generaliza el cálculo de área del polígono *ABEFCD*, todas las operaciones y los resultados son de tipo aritmético basados en las expresiones simbólicas propuestas de los incisos 1.1.1, 1.1.2, 1.1.6 y 1.1.7 y se establece la relación de correspondencia entre el punto P y el área del polígono de manera explícita

1.1.8. La expresión simbólica propuesta en el inciso 1.1.6. ¿puede representarse gráficamente? En caso afirmativo, ¿qué tipo de gráfica se obtendrá? Explica tu razonamiento

Respuesta y explicación de los posibles resultados acerca de si se puede graficar la expresión propuesta en el inciso 1.1.6

Con base en los resultados de la expresión simbólica para el cálculo de área del polígono *ABEFCD* (véase inciso 1.1.8), los estudiantes pueden proponer las siguientes consideraciones:

(1) $A=\overline{AP}^2+\overline{PB}^2$ Esta expresión no se puede representar gráficamente, ya que involucra longitudes de segmentos vistas como variables y no se vislumbra la relación existente entre el punto P y el área *ABEFCD*.

(2) $A=\overline{AP}^2+(10-\overline{AP})^2$ o $y=x^2+(10-x)^2$ Esta expresión puede representarse de manera gráfica si se considera como variable independiente la longitud del segmento $\overline{AP}$ o x y como variable dependiente el área del polígono *A o y*; en el plano cartesiano su representación sería una curva.

(3) $A=p^2+(\overline{AB}-p)^2$ o $y=x^2+(\overline{AB}-x)^2$ Esta expresión puede representarse de manera gráfica si se asigna el valor establecido a la longitud del segmento $\overline{AB}$, el cual es constante $\overline{AB}=10$, y además, se considera como variable independiente a p o x y como variable dependiente el área del polígono *A o y*; en el plano cartesiano su representación sería una curva.

Consideración: Se identifica que la expresión simbólica puede representarse gráficamente como una curva en el plano cartesiano si se expresa en términos de una variable y se identifica o se sustituye el parámetro $\overline{AB}$. En caso de que el área del polígono *ABEFCD* esté en términos de dos variables puede dificultarse el vislumbrar el comportamiento gráfico y se podría considerar que no es posible establecer una relación entre la expresión simbólica y el plano cartesiano.

1.1.9. De acuerdo con los resultados del inciso 1.1.5, elabora una tabla que relacione la longitud el segmento $\overline{AP}$ con el área del polígono *ABEFCD*. Después, dibuja la representación gráfica que relaciona los valores obtenidos de la tabla.

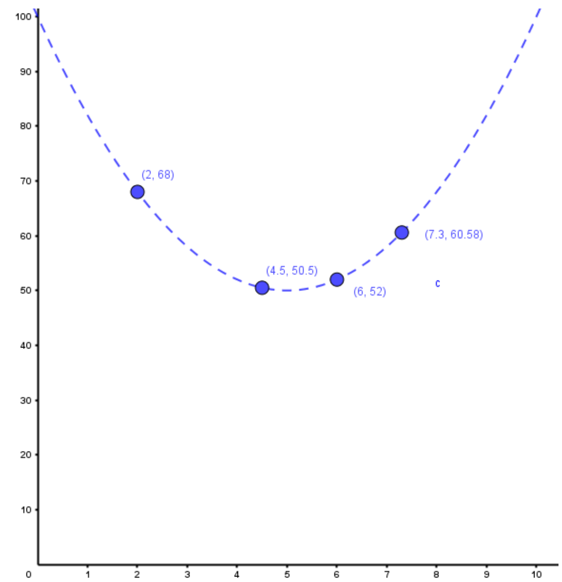
Respuesta y explicación de la obtención de los valores de la tabla

Segmento $\overline{AP}$ [u]	Área $_{ABEFCD}$ (A) [u^2]
2	68
4.5	50.5
7.3	60.58
6*	52

Consideración: Se identifica de manera explícita la relación entre el valor del segmento $\overline{AP}$ y el área del polígono *ABEFCD*. Para completar la tabla se registran los valores obtenidos en los incisos 1.1.6 y 1.1.7, con los cuales se generan pares ordenados que son representados en el plano cartesiano de la derecha y se ubican en forma de puntos, que relacionan la medida del segmento $\overline{AP}$ y el área del polígono *ABEFCD* en el plano cartesiano. Los alumnos deben de inferir que el comportamiento de la gráfica es una parábola.

*El valor 6 no está asignado, pero los estudiantes pueden elegir libremente el valor de la variable independiente para obtener el que corresponde a la variable dependiente.

Gráfica



1.1.10. ¿Cuál es el intervalo de variación para cada una de las variables identificadas?

Respuesta y explicación del intervalo de variación para cada variable

La variable independiente está relacionada con la asignación del punto P y también está relacionada con el dominio de la función, el cual puede asignarse de dos maneras: (*i*) *longitud del segmento* $\overline{AP}$, esta variable es vista de manera geométrica y los valores asignados están entre 0 y 10; la variación se expresa como $0 \leq \overline{AP} \leq 10$; (*ii*) La variable independiente está asociada con la magnitud del punto P (p) y se designa una variable algebraica y los valores asignados están entre 0 y 10, se expresa como $0 \leq p \leq 10$.
La variable dependiente está relacionada con el área del polígono *ABEFCD* asociada con el rango de la función y se expresa como una variable algebraica cuyos valores asignados están entre 50 y 100; expresada como $50 \leq A \leq 100$.

Consideración: Al identificar dos o más variables relacionadas con la situación geométrica dinámica se hace referencia a la covariación entre variables dependiente e independiente y particularmente se reconocen los rasgos que intervienen entre las variables.

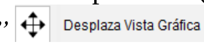
1.1.11. En caso de existir un valor mínimo para el área del polígono *ABEFCD*, ¿cuál será? Explica tu razonamiento.

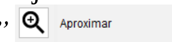
Respuesta y explicación acerca de la existencia de un valor mínimo para el área del polígono ABEFCD

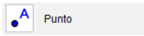
Cuando la longitud del segmento $\overline{AP}$ es muy próxima a cero, el área del polígono *ABEFCD* es la máxima equivalente a un cuadrado de 10 unidades de lado; el valor máximo de área del polígono se repite cuando la longitud del segmento $\overline{AP}$ es el mismo valor del segmento $\overline{AB}$ (10 unidades). El valor máximo de área para esta situación se debe considerar aquel valor de área que se obtiene cuando el punto P está en cualquier extremo del segmento $\overline{AB}$. Sin embargo, si la longitud del segmento $\overline{AP}$ es cero y va aumentando paulatinamente, el valor del área del polígono *ABEFCD* va disminuyendo hasta llegar a su valor mínimo [50 u^2], el cual se obtiene cuando la longitud del segmento $\overline{AP}$ está justo a la mitad del segmento $\overline{AB}$.

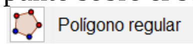
Consideración: Se coordina la relación entre la representación gráfica y la regla de correspondencia y se proporcionan detalles de las características y el comportamiento general del gráfico, así como de la posición del punto mínimo que corresponde a la situación planteada, estos rasgos identificados son esenciales y están asociados con elementos de la covariación.

4.4.4.2. Segundo momento: Actividad 1. Geogebra

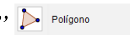
1.2.1. Abre un archivo nuevo en el software de Geogebra. Ubica los puntos $A(0,0)$ y $B(10,0)$. Ajusta la visión del triángulo *ABC* con las herramientas *"Desplaza vista gráfica"* 

y *"Aproximar"* 

. Con la herramienta "Punto" 

coloca un punto sobre el segmento $\overline{AB}$ y renómbralo como P (véase Figura 1.1.a). Con ayuda de la herramienta "Polígono regular" 

selecciona el segmento $\overline{AP}$ y elije cuatro vértices para dibujar el cuadrado *APCD*. De la misma manera, con ayuda de la herramienta "Polígono regular" 

selecciona el segmento $\overline{PB}$ y elije cuatro vértices para dibujar el cuadrado *PBEF*. Los puntos A, B, E, F, C y D forman el polígono *ABEFCD*, con ayuda de la herramienta *"Polígono"* 

dibuja el polígono *ABEFCD* (véase Figura 1.1.b) y renómbralo como *ABEFCD*. Para visualizar los valores del área del polígono *ABEFCD*, desplaza los valores de área del polígono desde la vista algebraica hasta la vista gráfica.

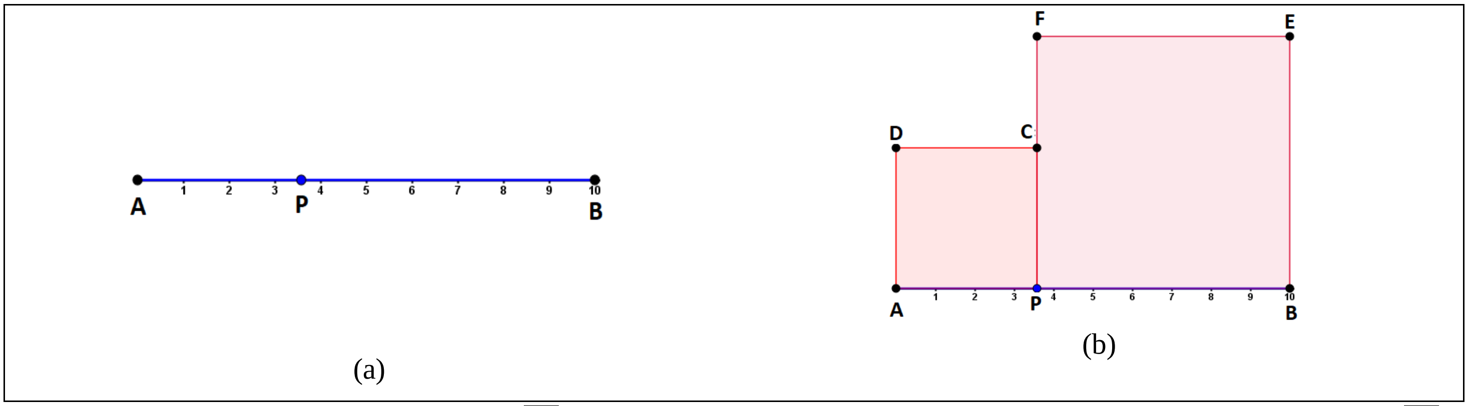


Figura 1.1. Polígono *ABEFCD*: (a) Segmento $\overline{AB}$ con longitud de 10 unidades; (b) Polígono *ABEFCD* formado por el segmento $\overline{AB}$.

1.2.2. Mueve el punto P sobre el segmento $\overline{AB}$: observa los valores involucrados en la "Vista gráfica" y contesta: ¿qué sucede al mover el punto? ¿cómo se comporta el polígono *ABEFCD*? Explica tu razonamiento.

Respuesta y explicación acerca del comportamiento del polígono ABEFCD cuando se mueve el punto P sobre el segmento $\overline{AB}$

Al mover el punto P sobre el segmento $\overline{AB}$ se generan dos cuadrados cuyos lados son $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$, respectivamente. En todo momento el polígono *ABEFCD*, el cual está formado por los cuadrados *APCD* y *PBEF* mantiene su configuración geométrica y algunas de sus propiedades. Cuando la longitud del segmento $\overline{AP}$ es muy próxima a cero, se tiene que el área del polígono *ABEFCD* es la máxima equivalente a un cuadrado de 10 unidades de lado ($\overline{PB}$). A medida que la longitud del segmento $\overline{AP}$ aumenta, el valor del área del polígono *ABEFCD* disminuye hasta su valor mínimo (50 u^2); este valor se obtiene cuando el punto P está exactamente a la mitad del segmento $\overline{AB}$. Si la longitud del segmento $\overline{AP}$ excede la mitad de la longitud del segmento $\overline{AB}$, el área del polígono *ABEFCD* aumenta y se aproximará de nuevo a su área máxima cuando el punto P se coloque sobre el extremo opuesto del segmento $\overline{AB}$ (punto B).

Consideración: La herramienta tecnológica (Geogebra) permite vislumbrar la relación entre las variables involucradas (punto P y área del polígono *ABEFCD*). Esta manera de analizar las representaciones gráficas promueve la comprensión de la situación y destaca la relación covariacional que se da entre las variables.

1.2.3. De acuerdo con la configuración del polígono *ABEFCD*, calcula su área para cualquier punto P que se coloque sobre el segmento $\overline{AB}$. Explica tu procedimiento.

Respuesta y explicación de los posibles resultados al calcular el área del polígono ABEFCD

Se puede responder de la siguiente manera:

1. $A=(5)^2+(5)^2=50$ o $A=\overline{AQ}^2+\overline{QB}^2$

   Consideración: El área del polígono se obtiene para un caso particular (cuando el segmento está dividido en dos partes en su punto medio) o es vista como la suma del cuadrado de dos segmentos. Se percibe la situación de manera estática.

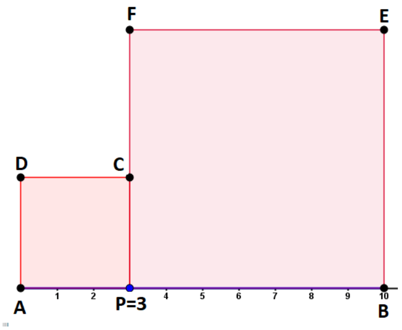
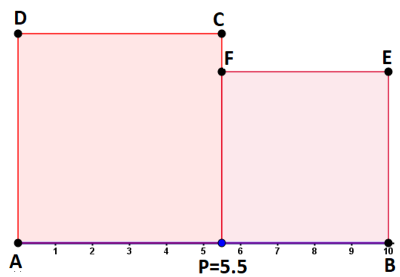
2. $A=q^2+(\overline{AB}-q)^2$ o $A=q^2+(10-q)^2$

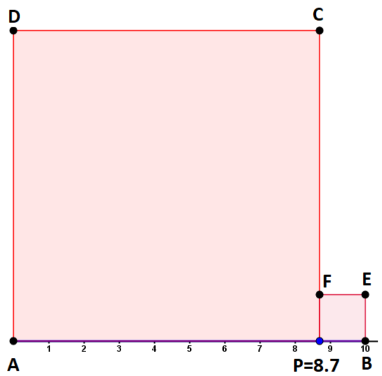
   Consideración: El área del polígono se expresa mediante una combinación de segmentos y variables algebraicas; se agregan elementos implícitos en la figura y se percibe el cambio en la longitud de los lados de los cuadrados que conforman el polígono *ABEFCD*.

3. $y=x^2+(\overline{AB}-x)^2$ o $y=x^2+(10-x)^2$

   Consideración: El área del polígono se expresa con variables algebraicas, se percibe la relación entre variables, se asocian los valores de los segmentos con variables algebraicas y el problema es visto desde el punto de vista de la covariación.

1.2.4. Calcula el área de los polígonos *ABEFCD* que se encuentran en las siguientes figuras. Anota los resultados en la primera columna (resultados en ambiente de lápiz y papel). En la segunda columna anota el valor del área del polígono *ABEFCD* dado por el software (resultados dados por Geogebra). Si, para una fila dada, los resultados dados por Geogebra y en ambiente de lápiz y papel difieren, reajústalos usando manipulaciones algebraicas, y escribe tus resultados en la última columna.

Figuras	Resultados propuestos en ambiente de lápiz y papel	Resultados dados por Geogebra	Cálculos algebraicos para reajustarlas (si es necesario)
	*Respuesta y explicación de los posibles resultados al calcular el área del polígono ABEFCD* Los estudiantes pueden responder de tres maneras distintas: (1) $A=(\overline{AP})^2+(\overline{PB})^2=(3)^2+(7)^2=58$ [u^2] El área del polígono se obtiene a partir de una expresión con variables geométricas, ya que se representa mediante el uso de segmentos. (2) $A=p^2+(\overline{AB}-p)^2=(3)^2+(10-3)^2=58$ [u^2] El área del polígono se expresa mediante una combinación de segmentos y variables algebraicas. (3) $y=x^2+(10-x)^2=(3)^2+(10-3)^2=58$ [u^2] El área del polígono se expresa con variables algebraicas. *Consideración:* Se calcula el área del polígono *ABEFCD* y todos los resultados son de tipo aritmético basados en las expresiones simbólicas propuestas del inciso 1.2.3. Se establece una relación de correspondencia entre el punto P y el área del polígono *ABEFCD.*	Resultados esperados: El resultado dado por el software en la vista algebraica o empleando el valor del polígono que es 58 [u^2]. *Consideración*: Se compararán los resultados y se valida la expresión propuesta que establece la covariación.	En caso de que los resultados no coincidan es necesario ajustar los cálculos en lápiz y papel para obtener el dado por el software. Es posible que los cálculos iniciales contengan errores y no se obtenga el resultado que brinda el software, en este caso es necesario reformular el cálculo de área de la figura y anotar los procedimientos en esta columna. Este ajuste permite generar elementos para representar la covariación de otra manera.
	*Respuesta y explicación de los posibles resultados al calcular el área del polígono ABEFCD* Los estudiantes pueden responder de tres maneras distintas: (1) $A=(\overline{AP})^2+(\overline{PB})^2=(5.5.)^2+(4.5)^2=50.5$ [u^2] El área del polígono se obtiene a partir de una expresión con variables geométricas, ya que se representa mediante el uso de segmentos. (2) $A=p^2+(\overline{AB}-p)^2=(5.5)^2+(10-5.5)^2=50.5$ [u^2] El área del polígono se expresa mediante una combinación de segmentos y variables algebraicas. (3) $y=x^2+(10-x)^2=(5.5)^2+(10-5.5)^2=50.5$ [u^2] El área del polígono se expresa con variables algebraicas.	Resultados esperados: El resultado dado por el software en la vista algebraica o empleando el valor del polígono que es 50.5 [u^2]. *Consideración*: Se compararán los resultados y se valida la expresión propuesta que establece la	En caso de que los resultados no coincidan es necesario ajustar los cálculos en lápiz y papel para obtener el dado por el software. Es posible que los cálculos iniciales contengan errores y no se obtenga el resultado que brinda el software, en este caso es necesario reformular el cálculo de área de la figura y anotar los procedimientos en esta columna. Este ajuste permite generar elementos para representar la covariación de otra manera.

	Consideración: Se calcula el área del polígono *ABEFCD* y todos los resultados son de tipo aritmético basados en las expresiones simbólicas propuestas del inciso 1.2.3. Se establece una relación de correspondencia entre el punto P y el área del polígono *ABEFCD.*	covariación	
	*Respuesta y explicación de los posibles resultados al calcular el área del polígono ABEFCD* Los estudiantes pueden responder de tres maneras distintas: (1) $A=(\overline{AP})^2+(\overline{PB})^2=(8.7)^2+(1.3)^2=77.38$ [u^2] El área del polígono se obtiene a partir de una expresión con variables geométricas, ya que se representa mediante el uso de segmentos. (2) $A=p^2+(\overline{AB}-p)^2=(8.7)^2+(10-8.7)^2=77.38$ [u^2] El área del polígono se expresa mediante una combinación de segmentos y variables algebraicas. (3) $y=x^2+(10-x)^2=(8.7)^2+(10-8.7)^2=77.38$ [u^2] El área del polígono se expresa con variables algebraicas. *Consideración:* Se calcula el área del polígono *ABEFCD* y todos los resultados son de tipo aritmético basados en la expresión simbólicas propuestas en el inciso 1.2.3. Se establece una relación de correspondencia entre el punto P y el área del polígono *ABEFCD.*	Resultados esperados: El resultado dado por el software en la vista algebraica o empleando el valor del polígono que es 77.38 [u^2]. *Consideración*: Se compararán los resultados y se valida la expresión propuesta que establece la covariación	En caso de que los resultados no coincidan es necesario ajustar los cálculos en lápiz y papel para obtener el dado por el software. Es posible que los cálculos iniciales contengan errores y no se obtenga el resultado que brinda el software, en este caso es necesario reformular el cálculo de área de la figura y anotar los procedimientos en esta columna. Este ajuste permite generar elementos para representar la covariación de otra manera.

1.2.5. ¿Qué expresión permite calcular el área del polígono *ABEFCD* para cualquier punto P ubicado en el segmento $\overline{AB}$? Justifica tu respuesta.

Respuesta y explicación de los posibles resultados al calcular el área del polígono ABEFCD

Se puede responder de la siguiente manera:

1. $A = \overline{AQ}^2 + \overline{QB}^2$
   Consideración: El área del polígono es vista como la suma del cuadrado de las longitudes de los dos segmentos. Se percibe la situación de manera estática.

2. $A = p^2 + (\overline{AB} - p)^2$ *o* $A = p^2 + (10 - p)^2$
   Consideración: El área del polígono se expresan mediante una combinación de longitudes de segmentos y variables algebraicas; se agregan elementos implícitos en la figura y se percibe el cambio en la longitud de los lados de los cuadrados que conforman el polígono *ABEFCD*.
3. $y = x^2 + (\overline{AB} - x)^2$ *o* $y = x^2 + (10 - x)^2$
   Consideración: El área del polígono se expresa con variables algebraicas, se percibe la relación entre variables, se asocian los valores de los segmentos con variables algebraicas y el problema es visto desde el punto de vista de la covariación.

1.2.6. ¿De qué manera se puede simplificar la expresión simbólica obtenida en el inciso anterior? Se sugiere nombrar *x* a la medida del segmento $\overline{AP}$, expresar la medida de otros segmentos en términos de *x* y representar el área del polígono *ABEFCD* como *y*. Registra tu procedimiento y comenta tu respuesta.

Respuesta y explicación de los posibles resultados al calcular el área del polígono ABEFCD

De acuerdo con el resultado para el cálculo de área del polígono *ABEFCD* del inciso anterior (inciso 1.2.7), los estudiantes renombran las variables según el tipo de variable (independiente y dependiente) y obtienen las expresiones: Si el área del polígono se obtiene por variables geométricas, el cambio de variable asignado para cada caso podrá ser:

(i) $A = \overline{AQ}^2 + \overline{QB}^2$, para este cambio de variable la expresión se representa como y= $x^2 + (\overline{PB})^2$

(ii) $A = \overline{AP}^2 + (10 - \overline{AP})^2$, $A = p^2 + (\overline{AB} - p)^2$, $A = \overline{AP}^2 + (\overline{AB} - \overline{AP})^2$ para este cambio de variable la expresión se representa como $y = x^2 + (10 - x)^2$

(iii) $A = p^2 + (10 - p)^2$, para este cambio de variable la expresión se representa como $y = x^2 + (10 - x)^2$

Consideración: Dado que el área del polígono *ABEFCD* está relacionada con la variable "*y*" y la variable independiente se define con la variable "*x*", entonces la expresión simbólica del área del polígono es $y = x^2 + (10 - x)^2$. Esta notación facilita la identificación de la relación entre variables (representación de la covariación).

1.2.7. Explica, ¿qué variables intervienen cuando el punto P se desplaza sobre el segmento $\overline{AB}$ manteniendo la configuración geométrica?

Respuesta y explicación acerca de las variables que intervienen en el problema

Con base en los resultados propuestos al determinar una expresión simbólica que permita calcular el área del polígono *ABEFCD*, se pueden identificar las siguientes variables:

(i) *La longitud del segmento* $\overline{AP}$, vista como variable independiente, la cual está vinculada con la posición del punto P sobre el segmento $\overline{AB}$;

(ii) *El área del polígono ABEFCD*, vista como variable dependiente, que cambia dependiendo de la posición del punto P.

(iii) *La longitud del segmento* $\overline{AB}$, vista como valor definido de 10 unidades de longitud o "constante".

Consideración: Se reafirma la relación de correspondencia entre el punto P y el área del polígono *ABEFCD*, al identificar el papel de las variables independiente y dependiente basados en la expresión simbólica propuesta.

1.2.8. La expresión simbólica propuesta en el inciso 1.2.6. ¿puede representarse gráficamente? En caso afirmativo, ¿qué tipo de gráfica se obtendrá? Explica tu razonamiento

Respuesta y explicación acerca de qué puede representar gráficamente la expresión propuesta

Con base en las expresiones simbólicas expuestas en el inciso 1.2.8 se tienen dos posibles representaciones gráficas que pueden obtenerse:

(i) $y = x^2 + (\overline{PB})^2$ esta expresión vincula tres variables (una de tipo geométrico [$\overline{PB}$] y dos de tipo algebraico *x* y *y*).

(ii) $y = x^2 + (10 - x)^2$ esta expresión vincula dos variables algebraicas (variables tradicionales *x* y *y*).

Consideración: Es probable que los participantes no puedan representar en el plano cartesiano la expresión simbólica del inciso (i), ya que deben relacionar el valor del segmento $\overline{PB}$ con las características y propiedades de la figura; y para la expresión simbólica del inciso (ii) se facilitaría el paso a una representación gráfica ya que existe una relación explícita con la expresión desde el punto de vista de relación funcional). La gráfica de la expresión representa una curva denominada parábola cuyo eje focal es paralelo al eje *y*.

1.2.9. De acuerdo con los resultados del inciso 1.2.4, elabora una tabla que relacione la longitud del segmento $\overline{AP}$ con el área del polígono *ABEFCD*. Después, dibuja la representación gráfica que relaciona los valores obtenidos de la tabla.

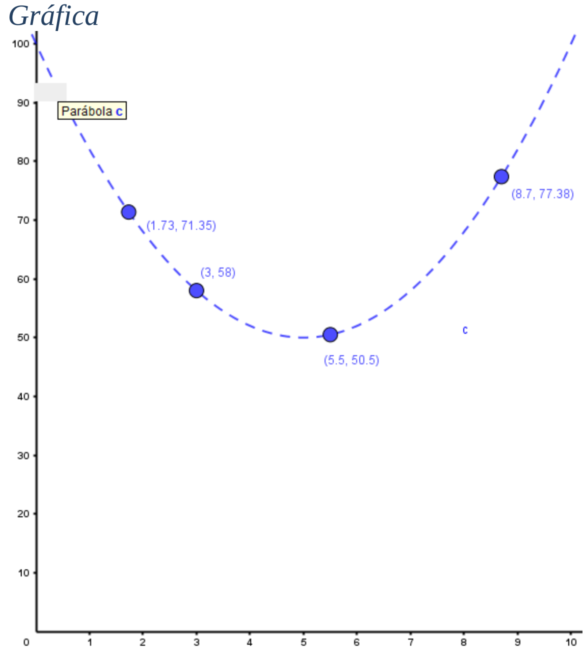
Respuesta y explicación de la obtención de los valores de la tabla

Segmento *AP* ($\overline{AP}$) [u]	Área $_{ABEFCD}$ (A) [u^2]
3	58
5.5	50.5
8.7	77.38
$\sqrt{3}$**	71.35

Consideración: Se identifica de manera explícita la relación entre el valor del segmento $\overline{AP}$ y el área del polígono *ABEFCD*. Para completar la tabla se registran los valores obtenidos en los incisos 1.2.4 y 1.2.6, con los cuales se generan pares ordenados que son representados en el plano cartesiano de la derecha y se ubican en forma de puntos, los cuales relacionan la medida del segmento $\overline{AP}$ y el área del polígono *ABEFCD* en el plano cartesiano. Los alumnos deben inferir que el comportamiento de la gráfica es una parábola.

**El valor $\sqrt{3}$ no está asignado, pero los estudiantes pueden elegir libremente el valor de la variable independiente para obtener el que corresponde a la variable dependiente.

Gráfica



1.2.10. ¿Cuál es el intervalo de variación para cada una de las variables identificadas?

Respuesta y explicación del intervalo de variación para cada variable

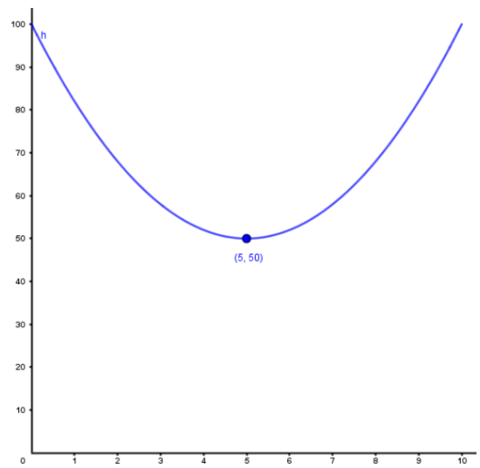
La variable independiente está relacionada con la asignación del punto P y asociada con el dominio de la función, denominado *x* y cuyos valores varían entre 0 y 10, expresada como $0 \le x \le 10$.
La variable dependiente está relacionada con el área del polígono *ABEFCD* y vinculada con el rango de la función denominado *y* y los valores asignados están entre 50 y 100; expresada como $50 \le y \le 100$.

Consideración: Al identificar dos o más variables relacionadas con la situación geométrica dinámica se hace referencia a la covariación entre variables dependiente e independiente y particularmente se reconocen los rasgos que intervienen entre las variables.

1.2.11. ¿En qué valor del punto P se tiene el valor mínimo para el área del polígono *ABEFCD*? ¿A qué se debe? Justifica tu respuesta.

Respuesta y explicación acerca del valor mínimo para el área del polígono ABEFCD

De acuerdo con la configuración geométrica dada por el software, la variable independiente está relacionada con la longitud del segmento $\overline{AP}$; esta longitud cambia según la posición del punto P sobre el segmento $\overline{AB}$. Cuando la longitud del segmento $\overline{AP}$ es muy próxima a cero, el área del polígono *ABEFCD* es la máxima equivalente a un cuadrado de lado 10 unidades (área máxima de 100 u^2); esta situación se presenta de la misma manera cuando la longitud del segmento $\overline{AP}$ es muy próxima al valor total del segmento $\overline{AB}$, mide 10 unidades (área máxima de 100 u^2). Sin embargo, si la longitud del segmento $\overline{AP}$ es cero y va aumentando paulatinamente, el valor del área del polígono va disminuyendo hasta llegar a su valor mínimo (50 u^2), el cual se obtiene cuando la longitud del segmento $\overline{AP}$ está exactamente a la mitad del segmento $\overline{AB}$. Por las características del problema, sólo se pide explicar el comportamiento del área y que el alumno sea capaz de identificar que este valor depende de la posición del punto P o de la longitud del segmento $\overline{AP}$.



El valor mínimo se obtiene de la siguiente manera: basados en la expresión de área obtenida en el inciso 1.2.8 $y = x^2 + (10 - x)^2$, de la cual al desarrollar el binomio al cuadrado y simplificar se obtiene la expresión
$y = 2x^2 - 20x + 100$
Al tratarse de una ecuación de segundo grado, representa gráficamente una parábola cuya posición del vértice es el valor mínimo buscado, por lo que se identifican los valores y se relacionan con la expresión del vértice para ecuaciones de segundo grado como:
$a = 2 \quad b = -20 \quad c = 100$

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-20}{2(2)} = 5$$

Para hallar el valor mínimo de área del polígono ABEFCD se sustituye en la expresión simplificada el valor de $x = 5$:
$y = 2(5)^2 - 20(5) + 100 = 2(25) - 100 + 100 = 50$ [u^2]

El vértice de la parábola se encuentra en la posición (5, 100), estos valores se relacionan con la figura geométrica, ya que la posición del punto P es 5 unidades y el área mínima del polígono ABEFCD es 50 [u^2].
Consideración: Se coordina la relación entre la representación gráfica, la regla de correspondencia y se proporcionan detalles de las características y comportamiento general del gráfico como de la posición del punto mínimo que corresponde a la situación planteada, estos rasgos identificados son esenciales y están asociados con elementos de la covariación.

1.2.12. ¿Cuál será la expresión algebraica para cualquier longitud del segmento $\overline{AB}$? ¿Cómo se vería afectada la gráfica? Justifica tu respuesta.

Respuesta y explicación acerca de la expresión algebraica y el comportamiento de la representación gráfica para cualquier longitud del segmento $\overline{AB}$

Con base en las expresiones simbólicas expuestas en el inciso 1.2.8 se tienen diferentes posibilidades para representar simbólicamente las expresiones que representen el área del polígono *ABEFCD*:

(i) $y = x^2 + (\overline{AB} - x)^2$ esta expresión vincula tres variables (una de tipo geométrico [$\overline{AB}$] y dos de tipo algebraico *x* y *y*). La variable $\overline{AB}$, toma la consideración de un valor definido (parámetro).

(ii) $y = x^2 + (a - x)^2$ esta expresión vincula tres variables de tipo algebraico *a*, *x* y *y*; sin embargo, *a* es tomada como parámetro y puede ser representada por cualquier otra literal o símbolo algebraico.

En los casos anteriores, la gráfica está relacionada con una parábola con eje focal paralelo al eje *y* y su punto mínimo siempre estará en la mitad del valor asignado a la variable que se relaciona con la longitud del segmento $\overline{AB}$ (parámetro).

Consideración: Dado que el área del polígono *ABEFCD* está relacionado con la variable *y* y la variable independiente se define con la variable *x*, entonces la expresión simbólica del área del polígono es $y = x^2 + (a - x)^2$. Esta notación facilita la identificación de la relación entre variables (representación de la covariación) y un parámetro *a* o $\overline{AB}$.

La situación geométrica dinámica involucrada tanto en la Actividad 1 como en las otras Actividades, se basan en figuras geométricas que cambian cuando un punto se mueve sobre un segmento. El diseño de estas Actividades está encaminado a caracterizar los razonamientos de covariación que tienen los estudiantes con la finalidad de acercar [desde la visión cognitiva] al concepto de función. El motivo por el que se incluyeron, en el diseño de tareas, los dos momentos de resolución de cada Actividad (primer momento: al hacer uso del ambiente de lápiz y papel y segundo momento: al emplear el ambiente tecnológico digital como complemento del ambiente tradicional) fue para indagar cómo afrontan las tareas y que tipo de razonamiento de covariación muestran los participantes ante las situaciones planteadas al hacer uso de cada ambiente de trabajo. Por ello, durante el segundo momento de resolución, se puede identificar de qué manera influye el uso de la herramienta digital al resolver la misma situación planteada en ambiente tradicional. Además, se puede indagar si este medio tecnológico promueve nuevos tipos de razonamiento de covariación en comparación con el primer momento de resolución y se puede analizar el papel que la herramienta tecnológica desempeña al motivar el desarrollo de concepto de función desde el punto de vista de la covariación.

En cada Actividad se parte de ideas generales y se dirigen hacia particulares. La visión general se presenta desde la identificación de características para el cálculo de área de la figura y se encamina a la visión particular cuando se calcula el área de la figura basada en casos específicos. La idea de dirigir el trabajo de lo general a lo particular se invierte en la tercera parte de las Actividades y esta visión cambia, cuando se parte de la visión particular hacia la visión general. La visión particular surge a partir del cálculo de área para los casos específicos que dan elementos para la generalización, por ello. se pretende dirigir a la visión general cuando se determina la representación simbólica que relaciona la covariación. Esta visión hacia lo general es el punto trascendental de la covariación porque es aquí donde el participante designa variables surgidas del contexto geométrico de la situación, que permiten representar la covariación de manera simbólica y a partir de ésta obtener las consecuencias de la covariación. Se considera que cada momento de resolución en los ambientes de trabajo, lápiz y papel y tecnológico digital, brindará una visión estática y dinámica, respectivamente, de la resolución de la situación geométrica en cuestión.

CAPÍTULO 5

ANÁLISIS DE DATOS: PRIMER MOMENTO DE LAS ACTIVIDADES

5.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se muestran los elementos con los cuales se analizarán y discutirán los datos surgidos de las respuestas de los estudiantes a las Actividades durante el primer momento de resolución empleando el ambiente de lápiz y papel, a partir de situaciones en las que los participantes calculan el área de una figura geométrica que cambia al desplazarse un punto sobre un segmento. Asimismo, se exponen las categorías para el análisis de datos basadas en el *marco para la organización del razonamiento de covariación* (véase parágrafo 3.5) y las consideraciones para su análisis. El estudio final se llevó a cabo según los lineamientos metodológicos descritos en el capítulo 4; en el que participaron 16 alumnos de bachillerato que fueron videograbados durante la implementación de las situaciones cuyo registro tanto escrito como en video sirvió de evidencia para fundamentar el presente análisis de datos.

5.2. ANÁLISIS DE DATOS

Los resultados obtenidos durante la implementación de las actividades se integraron en cinco componentes de acuerdo con los principios y procedimientos de la *teoría fundamentada* (Glaser y Strauss, 1967/2008; Birks y Mills, 2011). El objetivo de esta teoría es generar a partir de los datos, teorías locales que emergen de la codificación y agrupación de rasgos similares identificados en las respuestas; en esta investigación, los datos que se analizaron son las respuestas a las preguntas formuladas y que los estudiantes escribieron en sus hojas de trabajo. Éstas se transcribieron a archivos electrónicos para poder manipularlas, y se codificaron comparando las respuestas entre sí y agrupándolas cuando se identificaron rasgos similares. Mediante este proceso se conformó el marco local denominado *marco para la organización del razonamiento de covariación*, conformado por cinco componentes con las siguientes características generales y cuyos detalles se pueden revisar en la Tabla 3.2.

(*i*) *Ignorancia de la covariación,* relacionada con situaciones dinámicas vistas de manera estática, ya que no se reconocen características de covariación. Una situación dinámica se puede y se suele modelar fijándola en un momento determinado para analizar su estructura. Ignorar la covariación significa llevar a cabo un análisis estático de la situación, que con frecuencia es el primer paso de una estrategia para modelar dichas situaciones.

(*ii*) *Consideración de la covariación,* relacionada con la identificación de aspectos de la situación que describen cambios de un objeto producido por otro. En esta categoría se incluyen las manifestaciones de los estudiantes que permiten reconocer la situación como dinámica y con ello, aluden a la noción de variable. Pueden expresar la idea de covariación en términos discretos, por ejemplo, cuando los participantes identifican que para diferentes valores de un segmento se obtienen figuras geométricas con propiedades semejantes, pero con diversas longitudes o diferentes valores de su área, o bien, cuando ellos son capaces de expresar implícitamente la continuidad de la relación.

(*iii*) *Análisis previo de la covariación,* en este componente se identifican las variables dependiente e independiente y se describe el mecanismo que produce la covariación. Los elementos básicos que integran la covariación son: variables independiente y dependiente, regla de correspondencia y recorridos de ambas variables. Cuando el estudiante identifica algunos o todos estos elementos decimos que ha hecho un análisis previo de la covariación.

(*iv*) *Representación de la covariación*, en ésta se indica simbólicamente la regla de correspondencia. El objetivo de modelar las *situaciones geométricas dinámicas* (SGD) se alcanza cuando se obtiene la expresión algebraica correspondiente. Las actividades descritas en las categorías anteriores sólo coadyuvan a la actividad de representación simbólica (de forma algebraica) de la covariación y se subsumen en ella. Un estudiante que avanza adecuadamente, a lo largo de las actividades, en las categorías anteriores tiene buenas posibilidades de escribir la representación simbólica correspondiente y darle un sentido relacionado con su aspecto dinámico.

(*v*) *Consecuencias de la covariación,* en este componente se muestra la relación entre la regla de correspondencia y otras representaciones como la tabular y la gráfica, además, se determinan rangos de variación de las variables involucradas y se prevén máximos o mínimos. El proceso de modelación consiste en representar una situación para estudiar sus propiedades y consecuencias; así, el fin no es sólo representar la covariación sino sacar consecuencias de ella y, una inmediata, aunque no sencilla, es su representación gráfica cartesiana. La gráfica, a su vez, permite obtener más consecuencias de la covariación. Otros enfoques sobre el concepto de función se centran en el paso de una situación, o de un conjunto de datos, a la gráfica, y luego en la interpretación de ésta (Leinhardt, Zaslavky y Stein, 1990); una consecuencia, en este caso, sería basarse en representaciones simbólicas, gráficas o tabulares para identificar intervalos de variación y comportamientos generales de la situación analizada.

5.2.1. Consideraciones para el análisis de datos

El análisis de los datos obtenidos, relacionados con las situaciones, corresponde a cada una de las reflexiones y respuestas escritas de los participantes. En este capítulo se describen los resultados de las actividades al modelar cada situación utilizando sólo lápiz y papel, y en el siguiente capítulo se analizan las respuestas al involucrar el ambiente tecnológico digital con el objeto de analizar las respuestas dadas en cada momento de aplicación y la obtención de conclusiones acerca de la familia de funciones en cuestión; en ambos casos se tomaron en cuenta los registros escritos. El análisis de los datos contiene información sobre el trabajo en equipo basado en las respuestas escritas y las transcripciones de los diálogos de los participantes durante la resolución de las Actividades, información que aporta evidencias de la manera en que se promueve en ellos el razonamiento de covariación y su correspondencia con otros conceptos asociados con situaciones de optimización.

5.2.1.1. Identificación de las Actividades

Las Actividades incluyen, de manera implícita, tareas que buscan promover las manifestaciones del razonamiento de covariación, las cuales se asocian con los componentes descritos en la Tabla 3.2. A lo largo del análisis de datos se muestran las tareas asignadas en cada una de las Actividades propuestas para cada uno de los momentos: (*a*) *Primer momento de la Actividad*, cuya resolución es en ambiente de lápiz y papel; (*b*) *Segundo momento de la Actividad*, cuya resolución involucra el uso del ambiente tecnológico digital como complemento del ambiente de lápiz y papel.

Es importante destacar que una pregunta puede involucrar distintos tipos de manifestaciones de razonamiento de covariación, por consiguiente, los componentes que integran el marco propuesto están interconectados y se complementan para desarrollar una descripción más acabada del objeto de estudio. Para referirse a las preguntas correspondientes a cada tarea se requieren tres números: el primero relacionado con la Actividad en cuestión; el segundo con el tipo de ambiente de trabajo ("1" para lápiz y papel y "2" si la resolución involucra el ambiente tecnológico digital); y el tercero está relacionado con el número de pregunta. Por ejemplo, si se trabaja con la tarea 1.2.10, ésta se relaciona de la siguiente manera: el número "1" con la Actividad 1, el número "2" con el ambiente de trabajo tecnológico digital y el número "10" representa el número de pregunta.

5.2.1.2. Niveles de respuestas

Mediante el análisis de las respuestas se determinaron las descripciones de tres niveles de respuesta Nivel 1, Nivel 2 y Nivel 3. A partir de estos tres niveles de respuesta se analizan las producciones de los estudiantes. Se clasifican en el Nivel 1 aquellas de menor calidad desde una perspectiva de generalización, mientras que las del Nivel 2 muestran rasgos mejorados o que involucran otros elementos en su respuesta. Finalmente, las respuestas asociadas con el Nivel 3 incorporan rasgos más integrados y las respuestas son aún mejores que las anteriores. Ninguna de las respuestas de los tres niveles se debe considerar incorrecta, ya que son las producciones utilizadas por los estudiantes para explicar la manera de razonar ante las preguntas. Cada Nivel puede contener dos tipos de respuesta que mantienen características de ese Nivel, pero la respuesta se distingue en que una de ellas puede incorporar datos o no de la situación. Por ejemplo, si se comparan las expresiones $A = \overline{AP}^2 + \overline{PB}^2$ y $A = \overline{AP}^2 + (10 - \overline{AP})^2$ se tienen dos respuestas con características similares, ya que ambas están escritas empleando notación geométrica —véase Tabla 3.2—, pero la segunda incorpora el dato de la situación $\overline{PB} = 10 - \overline{AP}$, por ello, la expresión está representada en términos de una variable. Se debe resaltar que ambos resultados se encuentran en el Nivel 1 de respuesta asociado con el componente *IV. Representación de la covariación*, ya que las expresiones mantienen rasgos del contexto geométrico del cual surgieron, pero se diferencian por la incorporación de los datos de la situación.

Además, es importante resaltar que cuando se relaciona una respuesta con cada Nivel dependerá del componente con el que esté asociado. Por ejemplo, en el componente *II. Consideración de la covariación* se puede generar un acercamiento a la covariación identificando que el área de la figura cambia. Un tipo de respuesta puede darse por intuición y otro tipo de respuesta se genera al asignar dos valores diferentes a la longitud del segmento $\overline{AP}$; estas dos respuestas son distintas. pero se asocian con el Nivel 1, ya que aquellas de Nivel 2 muestran elementos de la variación, pero se centran en el cambio de una variable. En las respuestas de Nivel 3 se describe el comportamiento de la covariación, ya que se genera conciencia de que una variable cambia cuando la otra lo hace y se pueden incluir aspectos específicos como intervalos de crecimiento o decrecimiento o valor máximo o mínimo de área. La Tabla 5.1 muestra los rasgos generales asociados con cada Nivel de respuesta.

A continuación, se muestran los resultados de las Actividades con base en las componentes del marco propuesto y los niveles de respuesta descritos previamente. Los resultados surgen de las respuestas dadas por los participantes a las situaciones geométricas dinámicas en el primer momento de resolución. En cada nivel de respuesta, para cada una de las Actividades reportadas, está asociado un número que aparece entre corchetes y que corresponde a la cantidad de respuestas relacionadas con el número de producciones de cada equipo y que se asocian a ese nivel. Por ejemplo, Nivel 1 [2] significa que las respuestas de dos equipos están asociadas con el Nivel 1 de respuesta.

Tabla 5.1.
Rasgos generales asociados con cada Nivel de respuesta

Nivel de respuesta	***Características***
Nivel 1	Se asignan valores particulares relacionados con la longitud del segmento. Se establecen expresiones simbólicas basadas en fórmulas preestablecidas surgidas del contexto geométrico, por ello se tiene un apego al contexto geométrico. Se percibe una visión estática de la situación. Las expresiones simbólicas son representadas con notación geométrica. La representación gráfica de la covariación se realiza de manera intuitiva.
Nivel 2	Se tiene conciencia de la variación o cambio de una variable. Se reconoce la covariación, pero se destaca un solo aspecto como recorrido de una variable. Se generan expresiones que integran algunas propiedades y que mantienen rasgos geométricos, pero incluyen símbolos algebraicos. Se generan expresiones basadas en formulas preestablecidas o se emplean expresiones que no están representadas en forma de ecuación, porque no incluyen el signo igual. Las expresiones simbólicas son representadas con notación mixta. Se establece una visión de correspondencia, pero no se distingue la covariación de cantidades. La representación gráfica representa parcialmente la covariación (a veces con errores).
Nivel 3	Se identifica cómo una variable cambia cuando la otra cambia (covariación). Se reconoce la covariación, y se destacan aspectos como recorridos de las dos variables. Se genera conciencia de la relación entre variables a partir de la covariación de cantidades. Las expresiones simbólicas contienen rasgos más detallados del comportamiento de la situación e incorporan datos del contexto. Las expresiones simbólicas son representadas con notación algebraica. La representación gráfica representa la covariación y se coordina la relación entre distintos registros.

5.3. ACTIVIDAD 1: PRIMERA SITUACIÓN GEOMÉTRICA DINÁMICA

En este apartado se expone el análisis de las respuestas de los estudiantes a la Actividad 1, en el primer momento de la aplicación, con uso del ambiente de lápiz y papel. Conviene recordar que la población fue de 16 estudiantes divididos en ocho parejas de estudiantes, también nos referiremos a ellas como equipos. Las respuestas de los estudiantes en el primer momento son analizadas con base en el marco para la organización del razonamiento de covariación expuesto previamente y desarrollado en el capítulo 3. La siguiente es la primera situación geométrica dinámica que enfrentaron los estudiantes.

En la Figura 5.1.a se muestra el segmento $\overline{AB}$ cuya longitud es 10 unidades. Coloca un punto Q sobre el segmento $\overline{AB}$. Dibuja el cuadrado *AQCD* cuya longitud de sus lados es la medida del segmento $\overline{AQ}$. Enseguida, dibuja el cuadrado *QBEF* cuya longitud de sus lados es la medida del segmento $\overline{QB}$.

Observen el polígono *ABEFCD*[18] (véase Figura 5.1.b). Con base en las características de la figura geométrica se pretende que los alumnos respondan una serie de preguntas encaminadas a promover diversas manifestaciones del razonamiento de covariación. Las preguntas y su asociación con el marco establecido que sirvieron de base para el análisis se detallan a continuación considerando el primer momento de aplicación.

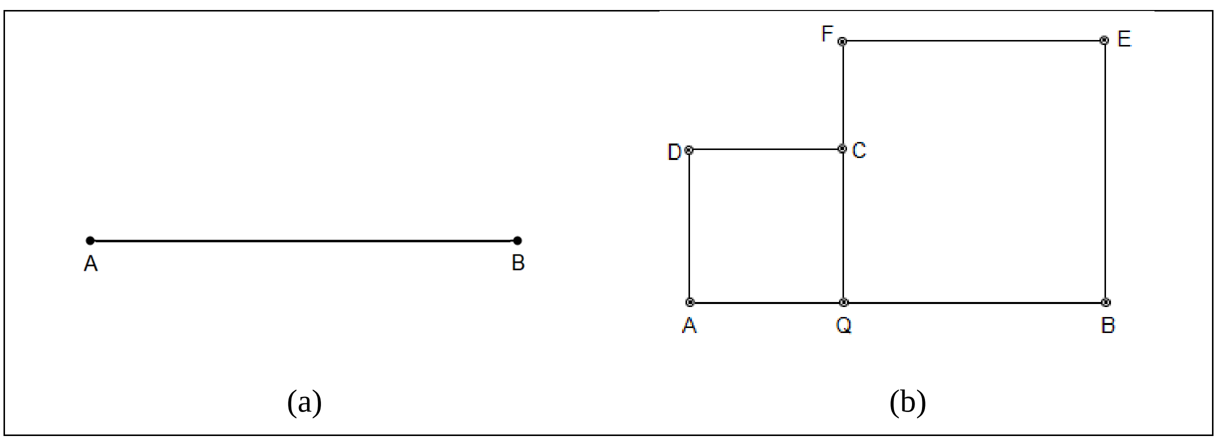


Figura 5.1. Primera SGD. (a) Segmento $\overline{AB}$ inicial; (b) construcción geométrica que integra la situación geométrica dinámica.

[18] El polígono *ABEFCD* no es visible para los participantes, ya que son ellos quienes deben construirlo siguiendo las indicaciones dadas en la tarea. Por medio de la construcción de la figura geométrica se pretende que los participantes identifiquen características implícitas en ella que permitan describir el mecanismo de la covariación.

5.4. PRIMER MOMENTO: ACTIVIDAD 1 EN AMBIENTE DE LÁPIZ Y PAPEL

La presentación de los resultados se dispone con base en el marco para la organización del razonamiento covariacional expuesto en el capítulo 3 (véase parágrafo 3.5), formado por los cinco componentes que integran dicho marco: (*i*) ignorancia de la covariación; (*ii*) consideración de la covariación; (*iii*) análisis previo de la covariación; (*iv*) representación de la covariación; y (*v*) consecuencias de la covariación. Cada uno de los componentes mencionados se relaciona con alguna de las preguntas de esta actividad, en el sentido de que las respuestas representativas de cada componente fueron motivadas o guiadas por una de las preguntas formuladas. A su vez, los componentes del marco orientaron a los investigadores sobre los aspectos que se deben atender al analizar las respuestas.

1. Ignorancia de la covariación. 1.1.1. Con base en las características de la figura, determina el área del polígono *ABEFCD*.

2. Consideración de la covariación. 1.1.2. Suponiendo que un punto P se desplaza a lo largo del segmento $\overline{AB}$ y se forman distintos polígonos *ABEFCD* con las características mencionadas en el inciso 1.1.1., ¿el área del polígono *ABEFCD* es constante?

3. *Análisis previo de la covariación.* 1.1.3. ¿De qué depende el valor del área del polígono *ABEFCD*? 1.1.4. ¿Existe un valor mínimo para el área del polígono *ABEFCD* cuando el punto P se desplaza sobre el segmento $\overline{AB}$? En caso afirmativo ¿en qué posición se encuentra el valor mínimo de área del polígono *ABEFCD*? 1.1.5. Para las siguientes figuras, calcula el área del polígono *ABEFCD*. Considera que el punto P se ubica en diferentes posiciones (*e.g.*, 2, 4.5, 7.3) sobre el segmento $\overline{AB}$, cuya medida es 10 unidades. 1.1.6. Explica, ¿Qué variables intervienen cuando el punto P se desplaza sobre el segmento $\overline{AB}$ manteniendo la configuración geométrica?

4. Representación de la covariación. 1.1.7. ¿Qué expresión permite calcular el área del polígono *ABEFCD* para cualquier punto P ubicado sobre el segmento $\overline{AB}$ 1.1.8. Se puede representar gráficamente la expresión simbólica propuesta en el inciso 1.1.7? En caso afirmativo, ¿qué tipo de gráfica se obtendrá?

5. *Consecuencias de la covariación.* 1.1.9. Elabora una tabla que relacione la longitud del segmento $\overline{AP}$ con el área del polígono *ABEFCD*. Después, traza la representación gráfica que relaciona los valores obtenidos de la tabla. 1.1.10. ¿Cuál es el intervalo de

variación para cada una de las variables identificadas? 1.1.11. En caso de existir un valor mínimo para el área del polígono *ABEFCD*, ¿cuál será?

5.4.1. Niveles de respuesta durante el primer momento: Actividad 1

A continuación, se enlistan los niveles de respuesta asociados con cada una de las preguntas descritas previamente. Como se mencionó anteriormente, cada Nivel de respuesta está acompañado de un valor entre corchetes que corresponde al número de producciones de los equipos participantes asociadas a ese nivel y que se sintetizan en la Tabla 5.2.

5.4.1.1. Ignorancia de la covariación

1.1.1. Con base en las características de la figura, determina el área del polígono *ABEFCD*.

Nivel 1 [2]. Se elige o se asigna un valor numérico particular para la longitud del segmento $\overline{AQ}$ y se calcula el área correspondiente

Nivel 2. [2]. Se genera una expresión que representa el área del polígono *ABEFCD* basada en fórmulas preestablecidas. Otras producciones pueden no estar representadas en forma de ecuación, es decir, no se utiliza el signo de igualdad.

Nivel 3 [4]. Se escribe una ecuación cuyo miembro izquierdo se asocia con el área del polígono *ABEFCD* y el miembro derecho integra elementos de la figura geométrica a partir del segmento $\overline{AB}$.

5.4.1.2. *Consideración de la covariación*

1.1.2. Suponiendo que un punto P se desplaza a lo largo del segmento AB y se forman distintos polígonos *ABEFCD* con las características mencionadas en el inciso 1.1.1., ¿el área del polígono *ABEFCD* es constante?

Nivel 1 [2]. Se consideran dos tipos de respuesta: (a) la que reconoce que el área no es constante y muestra una percepción simultánea de la covariación, pero en sus argumentos incluyen afirmaciones falsas, (b) la que asigna dos longitudes diferentes al segmento $\overline{AP}$ y muestra que las áreas respectivas son diferentes.

Nivel 2 [2]. Se ofrece una descripción general del comportamiento de la covariación precisando sólo un aspecto de la covariación como recorrido de la variable o intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Nivel 3 [0]. Se ofrece una descripción del comportamiento de la covariación precisando dos o más aspectos como recorrido de la variable, intervalos de crecimiento y decrecimiento o posición del valor mínimo de área del polígono *ABEFCD*.

5.4.1.3. Análisis previo de la covariación

1.1.3. ¿De qué depende el valor del área del polígono *ABEFCD*?

Nivel 1 [2]. Depende de la configuración geométrica.

Nivel 2 [3]. Depende de la posición del punto P o de los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$.

Nivel 3 [3]. Depende de la longitud del segmento $\overline{AP}$.

1.1.4. ¿Existe un valor mínimo para el área del polígono *ABEFCD* cuando el punto P se desplaza sobre el segmento $\overline{AB}$? En caso afirmativo ¿en qué posición se encuentra el valor mínimo de área del polígono *ABEFCD*?

Nivel 1 [1]. Se infiere el cambio que da indicios de la covariación, pero no se especifica acerca del valor mínimo de área del polígono.

Nivel 2 [4]. Se percibe la covariación y se hace explícita la posición del punto P en la que se tiene el valor mínimo de área.

Nivel 3 [3]. Se hace evidente la covariación y se describe su comportamiento a través de la relación entre variables, además, se detalla la ubicación del punto mínimo de área.

1.1.5. Para las siguientes figuras, calcula el área del polígono *ABEFCD*. Considera que el punto P se ubica en diferentes posiciones (*e.g.*, 2, 4.5, 7.3) sobre el segmento $\overline{AB}$, cuya medida es 10 unidades.

Nivel 1 [3]. Se calcula el área del polígono con base en los valores particulares, pero no se infiere una expresión general para el cálculo de área.

Nivel 2 [5]. Se calcula el área del polígono para cada caso particular basados en una expresión que involucra únicamente los segmentos que conforman la figura geométrica.

Nivel 3 [0]. Se calcula el área del polígono para cada caso particular basándose en una expresión que incluye características o elementos de la figura geométrica.

1.1.6. Explica, qué variables intervienen cuando el punto P se desplaza sobre el segmento $\overline{AB}$ manteniendo la configuración geométrica.

Nivel 1 [3]. Se identifica parcialmente la covariación al mencionar únicamente la variable independiente asociada con el punto geométrico P.

Nivel 2 [3]. Se identifica parcialmente la covariación y se relaciona la única variable como independiente asociada con la distancia del segmento $\overline{AP}$.

Nivel 3 [2]. Se hace alusión a la covariación y se mencionan las dos variables: dependiente (área del polígono *ABEFCD*) e independiente (asociada con la longitud del segmento $\overline{AP}$).

5.4.1.4. Representación de la covariación

1.1.7. ¿Qué expresión permite calcular el área del polígono *ABEFCD* para cualquier punto P ubicado sobre el segmento $\overline{AB}$?

Nivel 1 [3]. Representa la covariación con una expresión usando notación geométrica.

(i) No incorpora todos los datos.

(ii) Incorpora todos los datos de la situación geométrica planteada.

Nivel 2 [4]. Representa la covariación con una expresión usando notación mixta.

(i) No incorpora todos los datos.

(ii) Incorpora todos los datos de la situación geométrica planteada.

Nivel 3 [1]. Representa la covariación con una expresión con notación algebraica

(i) No incorpora todos los datos.

(ii) Incorpora todos los datos de la situación geométrica planteada.

1.1.8. ¿Se puede representar gráficamente la expresión simbólica propuesta en el inciso 1.1.7? En caso afirmativo, ¿qué tipo de gráfica se obtendrá?

Nivel 1 [4]. Se infiere que no hay coordinación de las variables en el plano cartesiano.

Nivel 2 [3]. Se infiere la relación entre variables en el plano cartesiano sin indicar detalles de la correspondencia entre éstas.

Nivel 3 [1]. Se infiere la relación entre variables, se indican características de la representación en el plano cartesiano que corresponden a la situación planteada.

5.4.1.5. Consecuencias de la covariación

1.1.9. Elabora una tabla que relacione la longitud del segmento $\overline{AP}$ con el área del polígono *ABEFCD*. Después, traza la representación gráfica que relaciona los valores obtenidos de la tabla.

Nivel 1 [1]. Coordina la relación entre la regla de correspondencia y el registro gráfico de manera intuitiva. La gráfica bosquejada no representa la covariación.

Nivel 2 [2]. Coordina la relación con un registro tabular y la regla de correspondencia que no representa de manera gráfica la situación en cuestión. La gráfica representa parcialmente (a veces con errores) la covariación.

Nivel 3 [5]. Coordina la relación entre el registro tabular y la regla de correspondencia que cumple tanto con las características de la gráfica como con las condiciones de la situación. La gráfica representa adecuadamente la covariación.

1.1.10. ¿Cuál es el intervalo de variación para cada una de las variables identificadas?

Nivel 1 [4]. Se menciona el intervalo de variación para una de las variables identificadas; no vislumbra la variación conjunta.

Nivel 2 [2]. Se expresa el intervalo de variación para las variables dependiente e independiente que no corresponden a la situación planteada.

Nivel 3 [2]. Se expresa el intervalo de variación para las variables dependiente e independiente, las cuales corresponden a la situación planteada.

1.1.11. En caso de existir un valor mínimo para el área del polígono *ABEFCD*, ¿cuál será?

Nivel 1 [1]. Infieren el cambio de área al modificarse el punto P pero no reconocen que exista un valor mínimo por ignorancia u omisión.

Nivel 2 [7]. Indican la ubicación del punto mínimo.

Nivel 3 [0]. A través de la relación entre variables detallan la ubicación del punto mínimo y proporcionan características del registro gráfico, por ejemplo, intervalos donde la gráfica es creciente o decreciente.

Los niveles de respuesta descritos en los párrafos previos están asociados con las respuestas dadas por los participantes a la Actividad 1 durante el primer momento. En la Tabla 5.2 se muestra el número de pregunta, cuyas respuestas están incluidas en el marco para la organización del razonamiento de covariación. Los niveles de respuesta descritos previamente sirven para organizar cada una de las producciones dadas por los equipos que permiten identificar aquellas cuyos rasgos están mejorados o que involucran mejores elementos en sus respuestas. La Tabla 5.2 evidencia la manera en que cada pregunta está asociada con una componente del marco empleado y permite identificar cómo los participantes a medida que van avanzando en la actividad logran pasar a otro componente. Por ejemplo, los participantes inician en el primer componente (*I. Ignorancia de la covariación*) asociado con la primera pregunta (*pregunta 1.1.1*) y a medida que pasan a otra pregunta avanzan o se mantienen en el componente inicial (*e.g.*, véase preguntas 1.1.2 y 1.1.3 de la Tabla 5.2). Al finalizar la Actividad 1 durante el primer momento, los participantes avanzan al último componente (*V. Consecuencias de la covariación*), ya que las preguntas buscan promover el razonamiento de covariación basado en la descripción de características asociadas con este componente (*e.g.*, preguntas 1.1.8 y 1.1.9 de la Tabla 5.2).

Tabla 5.2
Resultados de los niveles de respuesta para el primer momento: Actividad 1.

	Componente	**I. Ignorancia de la covariación**			**II. Consideración de la covariación**			**III. Análisis previo de la covariación**			**IV. Representación de la covariación**			**V. Consecuencias de la covariación**		
	Nivel de respuesta	*N1*	*N2*	*N3*	*N1*	*N2*	*N3*	*N1*	*N2*	*N3*	*N1*	*N2*	*N3*	*N1*	*N2*	*N3*
Pregunta	1.1.1.	2	2	4												
	1.1.2.	2	2	0	1	2	1									
	1.1.3.							2	3	3						
	1.1.4.							1	4	3						
	1.1.5.							3	5	0						
	1.1.6.							3	3	2						
	1.1.7.										3	4	1			
	1.1.8.										4	3	1			
	1.1.9.													1	2	5
	1.1.10.													4	2	2
	1.1.11.													1	7	0

5.4.2. Ejemplos de los niveles de respuesta durante el primer momento: Actividad 1

En seguida se ofrecen ejemplos de cada nivel de respuesta durante el primer momento de la Actividad 1, asociados con cada componente descrito en el marco para la organización del razonamiento de covariación, y se exponen algunos conceptos emergentes del análisis de las respuestas.

5.4.2.1. Ignorancia de la covariación

Durante la primera pregunta de esta actividad, los estudiantes calcularon el área del polígono *ABEFCD* generado a partir de la ubicación de un punto Q sobre un segmento $\overline{AB}$ de 10 unidades de longitud. En esta sección se exponen los ejemplos de cada uno de los tres niveles en que se agruparon las respuestas a esta pregunta. Las respuestas del Nivel 1 son aquellas en las que las parejas calcularon el área del polígono empleando valores numéricos para un caso particular. Esta respuesta se basa en la asignación de un valor numérico al segmento $\overline{AQ}$ y el cálculo del área correspondiente; las parejas E6 y E8 así lo hicieron (Figura 5.2.a).

Las respuestas del Nivel 2 son aquellas producciones en las que las parejas construyen la figura geométrica y proponen una expresión general del área empleando notación de segmentos (notación geométrica). Las respuestas de las parejas E1 y E2 son de este nivel, una de ellas es: $\overline{DA} \cdot \overline{AQ} + \overline{FQ} \cdot \overline{QB}$, la cual no tiene forma de ecuación, es decir, no utilizan el signo de igualdad (véase Figura 5.2.b). Finalmente, en las respuestas del Nivel 3, los participantes ofrecen una ecuación cuyo miembro izquierdo indica la variable área, y el de la derecha, la manera de calcularla a partir de elementos del segmento $\overline{AB}$. Se clasifican en este nivel las respuestas de cuatro parejas (E3, E4, E5, E7) quienes proponen la expresión $A = \overline{AQ}^2 + \overline{QB}^2$; ninguna pareja incorpora en la expresión los datos $\overline{AB} = 10$ y $\overline{AB} = \overline{AQ} + \overline{QB}$. En particular, el equipo 4 propone dos maneras de representar el área del polígono *ABEFCD*: una de ellas como $A = \overline{AQ}^2 + \overline{QB}^2$ y la otra manera es $A = (\overline{BF})(\overline{AB}) - (\overline{DC})(\overline{CE})$ (véase Figura 5.2.c).

Cuando se pregunta si el área del polígono *ABEFCD* es constante suponiendo que un punto P se desplaza a lo largo del segmento $\overline{AB}$ y se forman distintos polígonos *ABEFCD* manteniendo la configuración geométrica en este momento se hace alusión a la situación geométrica dinámica; por tanto, esta pregunta está asociada con el componente *II. Consideración de la covariación*. Sin embargo, las respuestas de algunos participantes dan testimonio del componente *I. Ignorancia de la covariación*, por ejemplo, la respuesta de Nivel 1 relacionada con este componente se asocia con el cálculo de área para casos particulares. Dos parejas (E3 y E7) realizan cálculos para casos particulares y perciben la situación de manera estática. E7 manifiesta: "El área del polígono [*ABEFCD*] no es constante ya que el área es $50\ \mathrm{u}^2 \neq 52\ \mathrm{u}^2$", la pareja se refiere a que el valor de área para dos casos particulares distintos no es el mismo y, por tanto, no es constante. En las respuestas del Nivel 2 se hace evidente que la situación se percibe de manera estática ya que dos equipos (E1, E8) mencionan que los cuadrados no tienen las mismas áreas; E8 responde: "No [se refieren a que el área del polígono *ABEFCD* no es constante], ya que son áreas distintas". En el Nivel de respuesta 3 no se generaron producciones con elementos basados en la percepción de la figura de manera estática, que incluya una expresión que justifique que el valor de área no es constante.

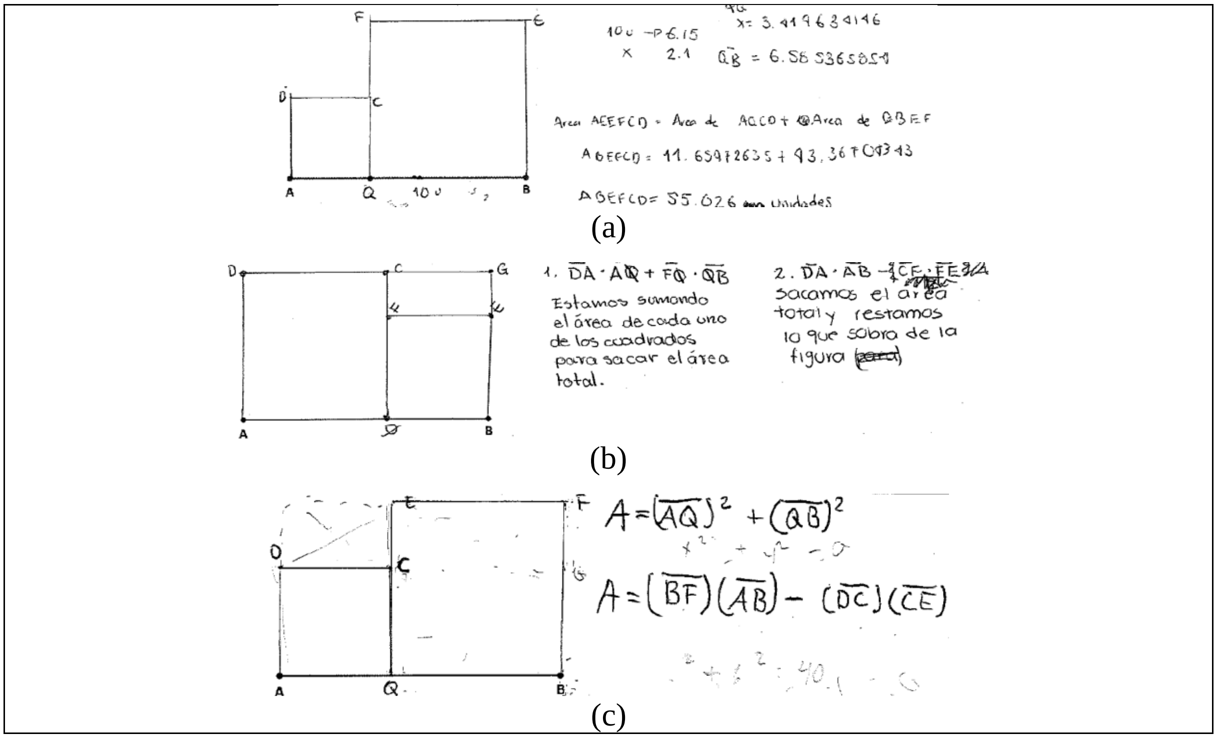


Figura 5.2. Cálculo de área del polígono *ABEFCD.* (a) Respuesta de E6 [Nivel 1]; (b) Respuesta de E2 [Nivel 2]; (c) Respuesta de E4 [Nivel 3].

Cuando los estudiantes enfrentan por primera vez un problema que involucra una situación geométrica dinámica, la perciben como una situación estática e ignoran la covariación. Con base en la primera pregunta se puede observar que todos perciben la situación de manera estática, en parte, por la forma de la propia pregunta y por la naturaleza misma de la situación que no proporciona indicios, al comienzo de la actividad, de un problema que involucra variación conjunta. Por esta razón, se puede identificar que las respuestas de los participantes no ofrecen rasgos que vislumbren la situación como dinámica. No obstante, hay una diferencia importante en las estrategias que siguen, por ejemplo, quienes utilizan casos particulares tendrán más dificultades para construir la representación algebraica de la covariación, mientras que los que utilizan símbolos pueden generar más indicios que les permitirán acercarse cognitivamente a dicha representación.

En este punto, se comienzan a distinguir rasgos en las estrategias de los estudiantes que llevan a los conceptos de *percepción discreta y percepción simultánea de la covariación*. Se puede suponer que los participantes que siguen la estrategia de elegir un valor particular para calcular el área del polígono se acercan a una *percepción discreta de la covariación*. Los participantes que calculan el área del polígono empleando literales y signos basados en fórmulas preestablecidas tendrán la posibilidad de acercarse de mejor manera a una percepción simultánea de la covariación.

5.4.2.2. Consideración de la covariación

Para motivar a los estudiantes a considerar la covariación se formuló la pregunta 1.1.2. a la que deben responder si el área del polígono *ABEFCD* es constante, y deben suponer que un punto P se desplaza a lo largo del segmento $\overline{AB}$ y se forman distintos polígonos *ABEFCD* que mantienen su configuración geométrica. En seguida se muestran ejemplos de los tres niveles de respuesta que se han propuesto. En el Nivel 1, se han considerado dos tipos de respuestas: (*i*) cuando los participantes reconocen que el área no es constante y muestran una percepción simultánea de la covariación, pero en sus argumentos incluyen afirmaciones falsas. Por ejemplo: “No es constante ya que a medida que uno de los puntos se desplaza sobre el segmento $\overline{AB}$ el área crece [aumenta], siendo no constante; mientras que un cuadrado se agranda su área también lo hace”. La transcripción de lo dicho por los estudiantes da muestra —quizá sin que los estudiantes sean conscientes de ello— de que consideran que el área siempre crece al desplazarse el punto hacia la derecha, pero en realidad primero decrece y luego crece. Se considera que tienen una percepción simultánea de la covariación por la expresión: “[…] uno de los puntos se desplaza […]”. (*ii*) En el Nivel 1, también se agrupan las respuestas que eligen valores particulares, por ejemplo, la respuesta: “El área del polígono [*ABEFCD*] no es constante ya que el área es $50\ \mathrm{u}^2 \neq 52\ \mathrm{u}^2$”. Las respuestas de este tipo reflejan una percepción discreta de la covariación.

En el Nivel 2, se consideran las respuestas que ofrecen una descripción general del comportamiento de la covariación mostrando una percepción simultánea de la covariación, ya que identifican que el área disminuye cuando el punto P va del extremo izquierdo al centro y luego aumenta cuando va del centro al extremo derecho. Por ejemplo, E2 afirma que el área no es constante y argumentan: “Cuando Q se encuentra en el centro [mitad del segmento $\overline{AB}$], el área de los polígonos es igual [se refiere al área de los cuadrados que conforman el polígono]. Cuando Q está en el centro es el área más pequeña que se va a conseguir de ambos polígonos. Si P va de A al centro del segmento $\overline{AB}$ el área va disminuyendo y si va del centro a B el área va aumentando”. E5 argumenta lo siguiente: “Si

P está en el punto medio del segmento $\overline{AB}$, las áreas serán equivalentes. Si $\overline{\mathrm{AP}} > \overline{\mathrm{PB}}$ entonces, su área va de un valor máximo a uno mínimo, pasando esta constante crecerá de la misma manera del lado opuesto hasta volver a tener su altura máxima”. Los estudiantes de este equipo tratan de describir la covariación observando la variación de los cuadrados que forman el polígono, por ello estas respuestas tienen una percepción simultánea de la covariación (véase Figura 5.3).

En el Nivel 3 se agrupan respuestas con características del Nivel 2 pero se precisan además dos o más aspectos del registro gráfico como: los recorridos de las variables, intervalos de crecimiento y decrecimiento, posición o valor mínimo de área del polígono *ABEFCD*. Por ejemplo, E4 expone que el punto P está limitado por el segmento $\overline{AB}$ y siempre será positivo, además, este equipo menciona que el área es proporcional a la distancia que recorre el punto P, es decir, que existe una relación entre el punto P y el área del polígono; a pesar de que la proporción no es lineal, en la respuesta se identifica la relación entre las variables y se tiene una percepción simultánea de la covariación.

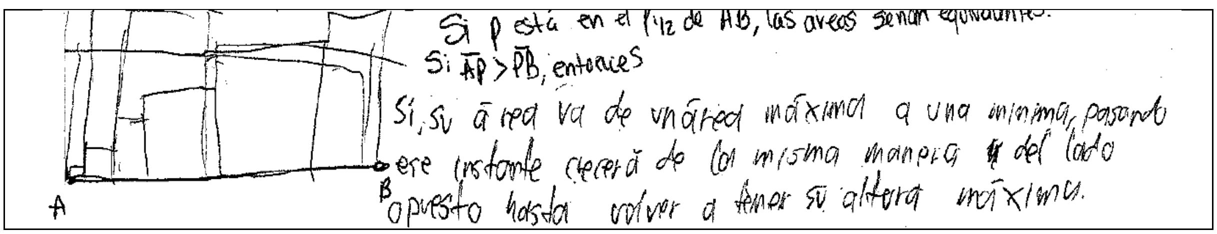
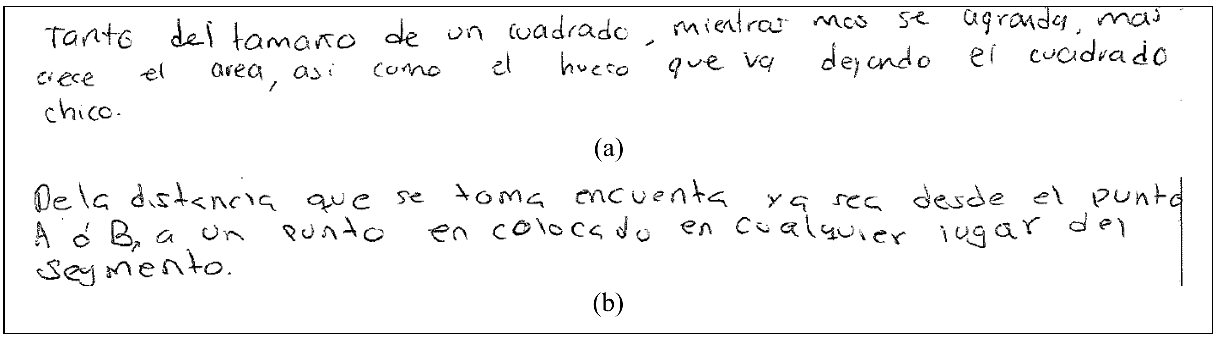


Figura 5.3. Identificación del comportamiento para el área del polígono por E5.

5.4.2.3. Análisis previo de la covariación

Para motivar a los estudiantes a considerar aspectos de la covariación se formuló la pregunta: 1.1.3. ¿De qué depende el valor del área del polígono *ABEFCD*? En el Nivel 1, se agrupan las respuestas que establecen que el área del polígono sólo depende de la configuración, las cuales se caracterizan por no reconocer directamente la variable independiente. Por ejemplo, E6 y E8 consideran que el área del polígono depende del comportamiento de los cuadrados y de la manera en que se divide el segmento $\overline{AB}$, respectivamente (véase Figura 5.4.a). En el Nivel 2, se consideran las respuestas que mencionan la posición del punto P o de los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$, éstos ven una variable independiente geométrica. Por ejemplo, tres equipos (E1, E2, E7) indican que el área del polígono depende del punto donde inicie la división de los polígonos, el cual corta al segmento $\overline{AB}$. En este nivel las respuestas se mantienen en el contexto geométrico.

En el Nivel 3, se reúnen las respuestas que afirman que el área depende de la longitud del segmento $\overline{AP}$. Tres equipos (E3, E4, E5) identifican que el área del polígono cambia dependiendo dónde se coloque el punto P y está relacionada con la longitud del segmento AP. E3 y E4 mencionan que el área depende de la distancia de un extremo del segmento al punto P (véase Figura 5.4.b) y E5 establece que la relación del área del polígono es por medio de la magnitud del punto P, en realidad este equipo se refiere a la longitud del segmento $\overline{AP}$. En general, en este nivel los participantes identifican el cambio de área o forma del polígono a partir de la modificación del punto P.


Tanto del tamaño de un cuadrado, mientras mas se agranda, mas crece el area, asi como el hueco que va dejando el cuadrado chico.

(a)

De la distancia que se toma encuenta ya sea desde el punto A ó B, a un punto en colocado en cualquier lugar del segmento.

(b)

Figura 5.4. Respuesta de la dependencia del valor de área del polígono *ABEFCD.* (a) Respuesta dada por E6; (b) Respuesta dada por E3.

Otra pregunta que propicia el análisis previo de la covariación es: 1.1.6 ¿Qué variables intervienen cuando el punto P se desplaza sobre el segmento $\overline{AB}$ manteniendo la configuración geométrica? En el Nivel 1, se agrupan las respuestas que identifican como única variable el punto P visto como posición; por ejemplo, la respuesta de E3 indica: “La única variable es P ya que los dos segmentos internos dependen de la posición de P” (véase Figura 5.5.a). En el Nivel 2, identifican la variable independiente como un segmento o su longitud, por ejemplo, E5 escribe: “Los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$, ya que la longitud de los segmentos cambia”; E7 indica que las variables que intervienen son “la longitud de los segmentos AB, AP y PB”. En el Nivel 3, se identifica la variable independiente como magnitud y se asocia un símbolo algebraico; E4 menciona que “P es igual a la distancia recorrida en $\overline{\text{AP}}$” (véase Figura 5.5.b). Esta pregunta propicia que los estudiantes se refieran a las variables que a su juicio intervienen en la situación geométrica dinámica y se debe destacar que ninguna pareja menciona ambas variables ($x = \overline{AB}$ y $a =$

$área\ de\ ABEFCD$) . Además, ningún equipo hace referencia a alguna variable como x. Al parecer, los estudiantes interpretaron el término *variable* como variable independiente, es posible que este resultado puede deberse a la manera de formular la pregunta ya que el verbo "intervenir" se asocia con una causa, es decir, la variable independiente.

La única variable es "P", ya que los dos segmentos internos dependen de la posición de "P".	P=distancia recorrida en $\overline{AP}$.
(a)	(b)

Figura 5.5. Variable asociada con la SGD. (a) Respuesta de E3; (b) Respuesta de E4.

Para promover en los participantes la comprensión del mecanismo de la covariación se requirió analizar la covariación desde su percepción discreta, a partir del cálculo de área del polígono *ABEFCD* para casos particulares (véase Figura 5.6.a). Ante la pregunta 1.1.5 relacionada con el cálculo de área del polígono para diferentes posiciones del punto P (*e.g.*, 2, 4.5, 7.3) sobre el segmento $\overline{AB}$ cuya medida es 10 unidades, los participantes llevan a cabo el análisis previo de la covariación y estos resultados son la base para generar el siguiente componente. En el Nivel 1, se agrupan respuestas en las que no se infiere una expresión general para el cálculo de área, las cuales se basan en los valores establecidos. En el Nivel 2, los cálculos de área para los casos particulares se basan únicamente en los segmentos que conforman la figura geométrica. El Equipo 2 expresa el área de cada cuadrado como el producto de dos de sus lados $\overline{DA} \cdot \overline{AP}$ y $\overline{FP} \cdot \overline{PB}$ (véase Figura 5.6.b).

El Nivel 3, involucra las características del Nivel 2, pero se incluyen elementos de la figura geométrica que permiten simplificar la expresión. Por ejemplo, E4 asigna las variables *x* y *y* como la longitud de los lados de cada cuadrado y expresa el área del polígono como la suma de las áreas de los cuadrados (véase Figura 5.6.c). Esta pregunta es fundamental en la Actividad, ya que los participantes vislumbran el mecanismo que produce la covariación basados en casos particulares desde el punto de vista de la percepción discreta de la covariación y por el diseño de la pregunta se pretende motivarlos para que designen variables, las cuales son fundamentales para lograr un primer acercamiento hacia la percepción simultánea de la covariación.

5.4.2.4. Representación de la covariación

La categoría de representación de la covariación se promueve ante la pregunta: 1.1.7. ¿Qué expresión permite calcular el área del polígono *ABEFCD* para cualquier punto P ubicado en el segmento $\overline{AB}$? En las representaciones de los estudiantes se observa alguno de estos tres tipos de notación:

- *Notación geométrica* [G]: se escriben literales mayúsculas para indicar puntos y parejas de literales mayúsculas (con una raya arriba) para indicar segmentos.
- *Notación mixta* [M]: se utiliza notación geométrica combinada con literales que representan números generalizados o variables.
- *Notación algebraica* [A] se escriben literales que representan cantidades variables o números generalizados (véase Tabla 5.3).

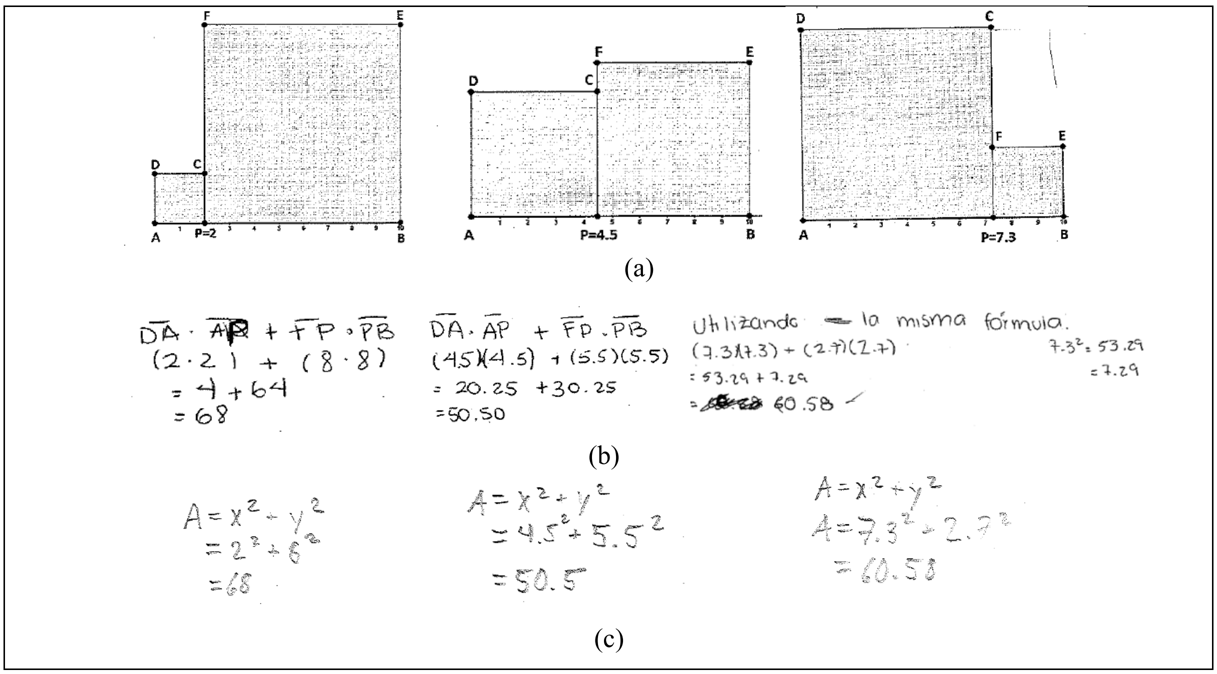


Figura 5.6. Cálculo de casos particulares; (a) Registros geométricos particulares; (b) Respuestas dadas por E4; (c) Respuestas dadas por E7.

En sus representaciones es importante observar si integran o no los siguientes datos referidos a la situación: $\overline{AB} = 10$ y $\overline{AB} = \overline{AQ} + \overline{QB}$. En las respuestas a esta pregunta se advierte que la mayoría de los equipos mantiene en sus representaciones rasgos del contexto geométrico en el que se formuló el problema. En el Nivel 1, se agrupan las respuestas que representan la covariación por medio de una expresión con notación geométrica, pero se distinguen dos variantes: las que no incorporan los datos; las respuestas de los equipos E1, E2, y E3 están en este nivel, ya que el área total del polígono *ABEFCD* es representada como la suma de las áreas de los cuadrados que conforman la figura y responden que $a = \overline{AP}^2 + \overline{AB}^2$ (véase Tabla 5.3 referencia N1), en la cual hemos conjeturado que la literal a se utiliza como una etiqueta y no como una variable.[19] En dicha representación no incorporan los dos datos referidos, por lo que se asocia con el Nivel 1 de respuesta.

En el Nivel 2, se agrupan las respuestas que emplean notación mixta. Los equipos E6, E7 y E8 dan una respuesta que se clasifica en este nivel por que involucra lenguaje natural y/o variables geométricas y/o algebraicas. Por ejemplo, E6 escribe su respuesta como: "$f(p) = p^2 + (\overline{AB} - p)^2$" (véase Tabla 5.3 referencia N2); este equipo no incorpora el dato: $\overline{AB} = 10$. Finalmente, en el Nivel 3 se clasifican las respuestas que ofrecen una expresión en notación algebraica; los equipos E4 y E5 expresan el área del polígono en términos de una sola variable, aunque en su expresión no hacen uso de literales convencionales (x y y), por ejemplo, la respuesta de E4 es: "$p^2 + (10 - p)^2 = a$" (véase Tabla 5.3 referencia N3).

Tabla 5.3.
Respuestas asociadas con el componente representación de la covariación: primer momento de la Actividad 1

Nivel de respuesta	Respuesta	Notación	Características	Equipo
N1	$a = \overline{AP}^2 + \overline{PB}^2$	Geométrica [G]	Las variables son vistas como segmentos	E1
N2	Área $ABEFCD = (\overline{AP})^2 + (\overline{AB} - \overline{AP})$ $f(p) = p^2 + (\overline{AB} - p)^2$	Mixta [M]	Se emplea una combinación de variables geométricas y/o algebraicas y/o lenguaje natural	E8 E6
N3	$F(p) = p^2 + (10 - p)^2$ $p^2 + (10 - p)^2 = a$	Algebraica [A]	Se emplean variables algebraicas o literales	E4 E5

En la Tabla 5.3 se integran las respuestas asociadas con la representación de la covariación para el primer momento de la Actividad 1. Es importante destacar que dos equipos (E4, E5) dieron de manera espontánea una expresión algebraica, aunque aún con

[19] Se debe recordar que en la sección de *Análisis de la covariación* ningún estudiante identificó el *área* como una variable (véase parágrafo 5.4.2.3).

alusiones al contexto al utilizar las variables p y a o *F(p)*, en lugar de x y y, respectivamente. La resistencia a separar la expresión que representa la covariación del contexto geométrico en el cual está planteada la SGD se ve más acentuada en los demás equipos, ya que la representación de la covariación que ellos proponen mantiene rasgos y elementos pertenecientes a la notación geométrica o notación mixta. Además, en estas respuestas se acentúa que pasan por alto o no dan importancia a la incorporación de los datos en la expresión.

5.4.2.5. Consecuencias de la covariación

Las respuestas en esta categoría fueron motivadas por la consigna: 1.1.9. De acuerdo con los resultados del inciso 1.1.5,[20] elabora una tabla que relacione la longitud del segmento $\overline{AP}$ con el área del polígono *ABEFCD*. Después dibuja la representación gráfica que relaciona los alores obtenidos en la tabla. Los participantes se basan en la regla de correspondencia que obtuvieron previamente para elaborar una tabla con varias parejas de valores de la función, ubicar los puntos en un plano cartesiano y bosquejar su gráfica. Las respuestas en el Nivel 1, consisten en bosquejos de gráficas que no se asemejan a una parábola o contienen elementos que no corresponden a la situación. Por ejemplo, E7 hace una gráfica de la relación entre las variables que corresponden a las longitudes de los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$, pero no incluye la variable área del polígono *ABEFCD* (véase Figura 5.7.a).

En el Nivel 2, se incluyen respuestas cuyas gráficas representan parcialmente la covariación, pero con errores ya que se coordina la relación entre el registro tabular y el registro gráfico, basados en la regla de correspondencia obtenida previamente, pero no corresponde a la situación planteada. Por ejemplo, E8 cambia la expresión simbólica propuesta previamente en notación mixta $\left[Área_{ABEFCD} = (\overline{AP})^2 + (\overline{AB} - \overline{AP})^2\right]$ (véase Tabla 5.2), por una expresión con notación algebraica $[y = a^2 + (x - a)^2]$ en la cual a y x representan la longitud de un segmento (donde $a + x = 10$) y y está relacionada con el área del polígono *ABEFCD*. Sin embargo, al evaluar la función para ciertos valores específicos cometen errores aritméticos que provocan que la representación gráfica no corresponda con la situación geométrica (véase Figura 5.7.b). En el Nivel 3, las gráficas

[20] La pregunta 1.1.5 está relacionada con el cálculo de área del polígono *ABEFCD* cuando se considera que el punto P se ubica en diferentes posiciones (*e.g.*, 2, 4.5, 7.3) sobre el segmento $\overline{AB}$, cuya medida es 10 unidades.

bosquejadas representan adecuadamente la covariación de la situación planteada, asociadas con las respuestas de cinco equipos (E2, E3, E4, E5, E6) que relacionan adecuadamente los valores de la longitud del segmento $\overline{AP}$ (variable independiente) y el área del polígono *ABEFCD* (variable dependiente) (véase Figura 4.6.c).

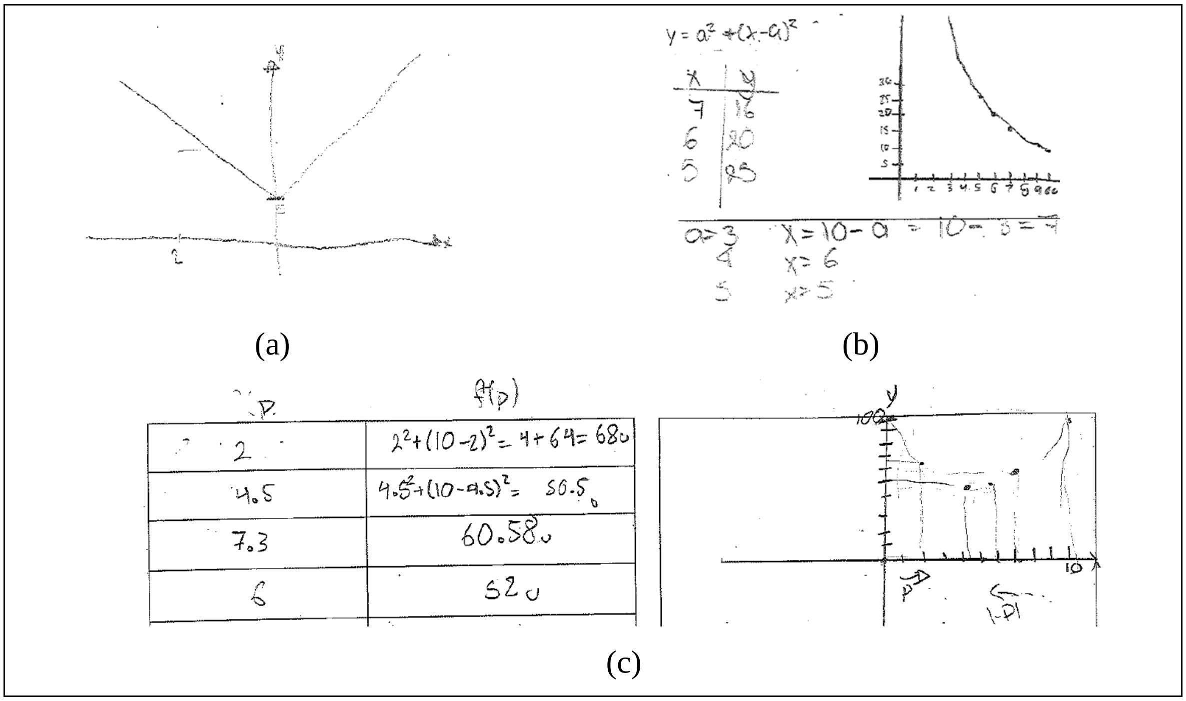


Figura 5.7. Representaciones gráficas trazadas por los estudiantes; (a) Respuesta de E7; (b) Respuesta de E8; (c) Respuesta de E2.

Ante la pregunta, 1.1.10. ¿Cuál es el intervalo de variación para cada una de las variables identificadas? En el Nivel 1, se menciona el intervalo de variación para una única variable. Por ejemplo, E3 responde: "Es de 0-10 [se refiere a la longitud del segmento $\overline{AP}$], ya que la distancia máxima de $\overline{\mathrm{AB}}$ es 10"; en esta respuesta se resalta que los participantes no expresan la variación conjunta de las variables. En el Nivel 2, se expresa el intervalo de variación para las variables dependiente e independiente, pero no corresponden a la situación planteada. Por ejemplo, E1 menciona que el intervalo de variación para la variable dependiente está entre 50 u^2 y 111.58 u^2 relacionada con el área del polígono *ABEFCD*, y para la variable independiente, relacionada con la longitud del segmento $\overline{AP}$, entre 2 y 7.3 unidades, que corresponden parcialmente al intervalo de variación conjunta. Los valores asignados a la variable independiente se basan en los valores sugeridos de los casos particulares (pregunta 1.1.5). En el Nivel 3, se expresa el intervalo de variación para las variables dependiente e independiente que corresponde a la SGD planteada; E5 relaciona el intervalo de variación de la variable independiente con la longitud del segmento $\overline{AP}$, la cual mencionan que varía de 0 a 10 unidades y el intervalo de variación de la variable dependiente (área del polígono *ABEFCD*), indica que está entre 50 u^2 y 100 u^2.

Al plantear la pregunta: 1.1.10. ¿Cuál es valor mínimo de área para el polígono *ABEFCD*? El Nivel 1 está asociado con la descripción que no hace explícita la existencia de un valor mínimo por ignorancia u omisión. Por ejemplo, E1 infiere el cambio de área del polígono cuando el punto P se desplaza, pero no reconoce que existe un valor mínimo de área. Las respuestas del Nivel 2, son aquellas en las que se identifica que el valor mínimo de área para el polígono es 50 u^2 y se localiza cuando el punto P está en la mitad del segmento $\overline{AB}$. Por ejemplo, el Equipo 3 en su respuesta menciona que el valor mínimo de área del polígono *ABEFCD* "sería 50 u^2 porque es el vértice de la parábola que está en función de *p*". Ningún equipo alcanzó una respuesta de Nivel 3, para ello, se debían proporcionar más detalles o características del registro gráfico, por ejemplo, punto mínimo e intervalos creciente o decreciente de la representación gráfica.

5.5. ACTIVIDAD 2: SEGUNDA SITUACIÓN GEOMÉTRICA DINÁMICA

La siguiente es la segunda situación geométrica dinámica que enfrentaron los estudiantes.

En la Figura 5.8.a muestra el triángulo isósceles *ABC*; sus dos lados iguales son los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ cuya longitud es la unidad. Coloca un punto Q sobre el lado AB y traza la recta perpendicular al segmento $\overline{AB}$ que pasa por Q; dicha recta interseca al lado *BC* del triángulo en el punto D. En seguida, traza la recta perpendicular al segmento $\overline{AC}$ que pasa por el punto D, la cual interseca al lado AC del triángulo en el punto E. Los puntos A, Q, D y E forman el rectángulo *AQDE*. Calcula el área del rectángulo *AQDE*[21] (véase Figura 5.8.b). Con base en las características de la figura geométrica se pretende que los alumnos respondan una serie de preguntas encaminadas a promover el razonamiento de covariación. A continuación, se exponen las preguntas que están asociadas con el marco establecido y que sirvieron de base para analizar el primer momento de aplicación para la Actividad 2.

[21] El rectángulo *AQDE* no es visible para los participantes, ya que son ellos quienes deben construirlo siguiendo las indicaciones dadas en la tarea. Por medio de la construcción de la figura geométrica se pretende que los participantes identifiquen características implícitas en ella que permitan describir el mecanismo de la covariación.

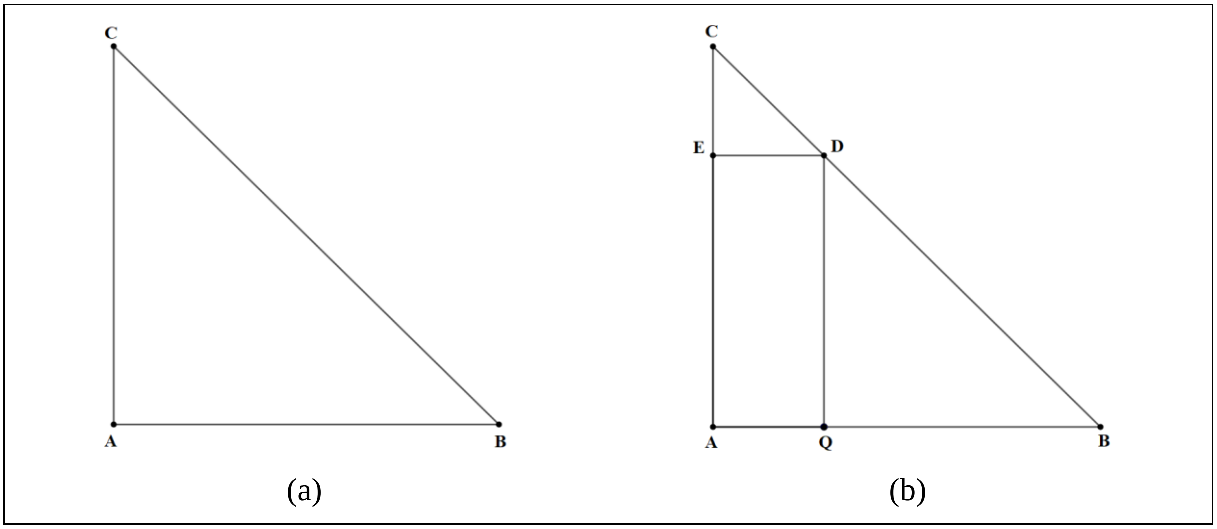


Figura 5.8. Segunda SGD. (a) Triángulo isósceles *ABC*; (b) Construcción del rectángulo *AQDE* que integra la SGD.

5.6. PRIMER MOMENTO: ACTIVIDAD 2 EN AMBIENTE DE LÁPIZ Y PAPEL

La presentación de los resultados se organiza con base en el marco para la organización del razonamiento covariacional, formado por los cinco componentes descritos en el capítulo 3 (véase parágrafo 3.5), los cuales están vinculados con las preguntas de esta actividad. A continuación, se exponen los componentes que conforman el marco y las preguntas que se relacionan con cada una de éstos.

1. Ignorancia de la covariación. 2.1.1. Con base en las características de la figura, calcula el área del rectángulo *AQDE*.

2. Consideración de la covariación. 2.1.2. Suponiendo que un punto P se desplaza a lo largo del lado $\overline{AB}$ del triángulo *ABC* y se forman distintos rectángulos *APDE* con las características mencionadas en el inciso 2.1.1, ¿el área de los rectángulos *APDE* es constante?

3. *Análisis previo de la covariación.* 2.1.3. ¿De qué depende el valor del área del rectángulo *APDE*? 2.1.4. ¿Existe un valor máximo para el área del rectángulo *APDE* cuando se desplaza el punto P sobre el lado $\overline{AB}$? En caso afirmativo, ¿en qué posición se encuentra el valor máximo de área del rectángulo *APDE*? 2.1.5. Para las siguientes figuras, calcula el área del rectángulo *AQDE*. Considera que el punto P se ubica en diferentes posiciones (*e.g.*, 0.1, 0.4, 0.7) sobre el lado $\overline{AB}$, además, debes tener presente que el triángulo *ABC* es isósceles y la medida de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ es la unidad. 2.1.6. Explica,

¿qué variables intervienen cuando el punto P se desplaza sobre el lado $\overline{AB}$ manteniendo la configuración geométrica?

4. Representación de la covariación. 2.1.7. ¿Qué expresión permite calcular el área del rectángulo *APDE* para cualquier punto P ubicado sobre el lado $\overline{AB}$? 2.1.8. Se puede representar gráficamente la expresión simbólica propuesta en el inciso 2.1.7? En caso afirmativo, ¿qué tipo de gráfica se obtendrá?

5. *Consecuencias de la covariación.* 2.1.9. Elabora una tabla que relacione la longitud del segmento $\overline{AP}$ con el área del rectángulo *APDE*. Después, traza la representación gráfica que relaciona los valores obtenidos de la tabla. 2.1.10. ¿Cuál es el intervalo de variación para cada una de las variables identificadas? 2.1.11. En caso de existir un valor máximo para el área del rectángulo *APDE*, ¿cuál será?

5.6.1. Niveles de respuesta durante el primer momento: Actividad 2

Con base en la descripción realizada en el parágrafo 5.2.1.2 se establecieron tres niveles de respuesta asociados con cada pregunta, los cuales permiten analizar las producciones de los estudiantes. Es importante resaltar que cada una de las respuestas de los tres niveles no debe ser considerada incorrecta y que las respuestas ubicadas en el Nivel 3 contienen mayor grado de abstracción en comparación con las respuestas en niveles inferiores. A continuación, se enlistan los niveles de respuesta asociados con cada una de las preguntas descritas previamente.

5.6.1.1. Ignorancia de la covariación

2.1.1. Con base en las características de la figura, calcula el área del rectángulo *AQDE*.

Nivel 1 [2]. Se elige o se asigna un valor numérico particular para la longitud del segmento AQ y se calcula el área correspondiente

Nivel 2 [5]. Se genera una expresión que representa el área del rectángulo *AQDE* basado en fórmulas preestablecidas relacionadas con las áreas de figuras geométricas. Otras producciones pueden no estar representadas en forma de ecuación, es decir, no se utiliza el signo de igualdad.

Nivel 3 [1]. Se escribe una ecuación cuyo miembro izquierdo se asocia con el área del rectángulo *AQDE* y el miembro derecho integra elementos de la figura geométrica a partir del lado $\overline{AB}$.

5.6.1.2. *Consideración de la covariación*

2.1.2. Suponiendo que un punto P se desplaza a lo largo del lado $\overline{AB}$ del triángulo *ABC* y se forman distintos rectángulos *APDE* con las características mencionadas en el inciso 2.1.1, ¿el área de los rectángulos *APDE* es constante?

Nivel 1 [2]. Se consideran dos tipos de respuesta: (a) la que reconoce que el área no es constante y muestra una percepción simultánea de la covariación, pero en sus argumentos incluyen afirmaciones falsas; (b) la que asigna dos longitudes diferentes al segmento $\overline{AP}$ y se muestra que las áreas respectivas son diferentes.

Nivel 2 [2]. Se ofrece una descripción general del comportamiento de la covariación precisando sólo un aspecto de la covariación como recorrido de la variable o intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Nivel 3 [4]. Se ofrece una descripción del comportamiento de la covariación precisando dos o más aspectos como recorrido de la variable, intervalos de crecimiento y decrecimiento o posición del valor mínimo de área del rectángulo *AQDE*.

5.6.1.3. Análisis previo de la covariación

2.1.3. ¿De qué depende el valor del área del rectángulo *APDE*?

Nivel 1 [3]. Depende de la configuración geométrica.

Nivel 2 [4]. Depende de la posición del punto P o de dos segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$.

Nivel 3 [1]. Depende de la longitud del segmento $\overline{AP}$.

2.1.4. ¿Existe un valor máximo para el área del rectángulo *APDE* cuando el punto P se desplaza sobre el lado $\overline{AB}$? En caso afirmativo, ¿en qué posición se encuentra el valor máximo de área del rectángulo *APDE*?

Nivel 1 [1]. Se infiere el cambio que da indicios de la covariación, pero no se especifica acerca del valor máximo de área del rectángulo.

Nivel 2 [6]. Se percibe la covariación y se hace explícita la posición del punto P en la que se tiene el valor máximo de área.

Nivel 3 [1]. Se hace evidente la covariación y se describe su comportamiento a través de la relación entre variables, además, se detalla la ubicación del punto máximo de área.

2.1.5. Para las siguientes figuras, calcula el área del rectángulo *AQDE*. Considera que el punto P se ubica en diferentes posiciones (*e.g.*, 0.1, 0.4, 0.7) sobre el lado $\overline{AB}$, además, debes tener presente que el triángulo *ABC* es isósceles y la medida de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ es la unidad.

Nivel 1 [4]. Se calcula el área del rectángulo con base en los valores particulares, pero en su respuesta no se infiere una manera de identificar la expresión general para el cálculo de área del rectángulo.

Nivel 2 [2]. Se calcula el área del rectángulo para cada caso particular con base en una expresión que involucra únicamente los segmentos que conforman la figura geométrica.

Nivel 3 [2]. Se calcula el área del rectángulo para cada caso particular con base en una expresión que incluye características o elementos de la figura geométrica.

2.1.6. Explica, qué variables intervienen cuando el punto P se desplaza sobre el lado $\overline{AB}$ manteniendo la configuración geométrica.

Nivel 1 [2]. Se identifica parcialmente la covariación al mencionar únicamente la variable independiente asociada con el punto geométrico P.

Nivel 2 [5]. Se identifica parcialmente la covariación y se relaciona la única variable como independiente asociada con la distancia $\overline{AP}$.

Nivel 3 [1]. Se hace alusión a la covariación y se mencionan las dos variables dependiente área del polígono *ABEFCD* e independiente asociada con la longitud del segmento $\overline{AP}$.

5.6.1.4. Representación de la covariación

2.1.7. ¿Qué expresión permite calcular el área del rectángulo *APDE* para cualquier punto P ubicado sobre el lado $\overline{AB}$?

Nivel 1 [7]. Representa la covariación con una expresión usando notación geométrica.

(i) No incorpora todos los datos.

(ii) Incorpora todos los datos de la situación geométrica planteada.

Nivel 2 [1]. Representa la covariación con una expresión usando notación mixta.

(i) No incorpora todos los datos.

(ii) Incorpora todos los datos de la situación geométrica planteada.

Nivel 3 [0]. Representan la covariación con una expresión con notación algebraica

(i) No incorpora todos los datos.

(ii) Incorpora todos los datos de la situación geométrica planteada.

2.1.8. ¿Se puede representar gráficamente la expresión simbólica propuesta en el inciso 2.1.7? En caso afirmativo, ¿qué tipo de gráfica se obtendrá?

Nivel 1 [5]. Se infiere que no hay coordinación de las variables en el plano cartesiano.

Nivel 2 [2]. Se infiere la relación entre variables en el plano cartesiano sin indicar detalles de la correspondencia entre éstas.

Nivel 3 [1]. Se infiere la relación entre variables, se indican características de la representación en el plano cartesiano que corresponden a la situación planteada.

5.6.1.5. Consecuencias de la covariación

2.1.9. Elabora una tabla que relacione la longitud del segmento $\overline{AP}$ con el área del rectángulo *APDE*. Después, traza la representación gráfica que relaciona los valores obtenidos de la tabla.

Nivel 1 [1]. Coordina la relación entre la regla de correspondencia y el registro gráfico de manera intuitiva. La gráfica bosquejada no se aproxima a la covariación.

Nivel 2 [1]. Coordina la relación con un registro tabular y la regla de correspondencia que no representa de manera gráfica la situación en cuestión. La gráfica representa parcialmente la covariación a veces con errores.

Nivel 3 [6]. Coordina la relación entre el registro tabular y la regla de correspondencia que cumple tanto con las características de la gráfica como con las condiciones de la situación. La gráfica representa adecuadamente la covariación.

2.1.10. ¿Cuál es el intervalo de variación para cada una de las variables identificadas?

Nivel 1 [2]. Se menciona el intervalo de variación para una de las variables identificadas; no distingue la variación conjunta.

Nivel 2 [2]. Se expresa el intervalo de variación para las variables dependiente e independiente que no corresponden a la situación planteada.

Nivel 3 [4]. Se expresa el intervalo de variación para las variables dependiente e independiente (covariación), las cuales corresponden a la situación planteada.

2.1.11. En caso de existir un valor máximo para el área del rectángulo *APDE*, ¿cuál será?

Nivel 1 [2]. Se infiere el cambio de área al modificarse el punto P, pero no reconocen que exista un valor máximo por ignorancia u omisión.

Nivel 2 [2]. Se indica la ubicación del punto máximo que corresponde a la situación.

Nivel 3 [4]. A través de la relación entre variables detallan la ubicación del punto máximo y proporcionan características del registro gráfico, por ejemplo, intervalos donde la gráfica es creciente o decreciente.

Los niveles de respuesta descritos en los párrafos previos están asociados con las respuestas dadas por los participantes a la Actividad 2 durante el primer momento. Los niveles de respuesta descritos previamente sirven para organizar cada una de las producciones dadas por los equipos que permiten identificar aquellas cuyos rasgos están mejorados o que involucran mejores elementos en sus respuestas comparadas con aquellas de menor nivel. La Tabla 5.4 permite evidenciar la manera en que cada pregunta está asociada con una componente del marco para la organización del razonamiento de covariación.

Tabla 5.4
Resultados de los niveles de respuesta para el primer momento: Actividad 2.

Componente		**I. Ignorancia de la covariación**			**II. Consideración de la covariación**			**III. Análisis previo de la covariación**			**IV. Representación de la covariación**			**V. Consecuencias de la covariación**		
Nivel de respuesta		*N1*	*N2*	*N3*	*N1*	*N2*	*N3*	*N1*	*N2*	*N3*	*N1*	*N2*	*N3*	*N1*	*N2*	*N3*
Pregunta	2.1.1.	2	5	1												
	2.1.2.				2	2	4									
	2.1.3.							3	4	1						
	2.1.4.							1	6	1						
	2.1.5.							4	2	2						
	2.1.6.										2	5	1			
	2.1.7.							7	1	0						
	2.1.8.										5	2	1			
	2.1.9.													1	1	6
	2.1.10.													2	2	4
	2.1.11.													2	2	4

5.6.2 Ejemplos de los niveles de respuesta durante el primer momento: Actividad 2

A continuación, se ofrecen ejemplos de cada nivel de respuesta durante el primer momento de la Actividad 2 y se exponen algunos conceptos emergentes del análisis de las respuestas asociados con cada componente descrito en el marco para la organización del razonamiento de covariación.

5.6.2.1. Ignorancia de la covariación

Durante la primera pregunta de la Actividad (pregunta 2.1.1), los estudiantes calcularon el área del rectángulo *AQDE*, construido en el interior de un triángulo isósceles *ABC*, cuyos dos lados iguales son los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ de una unidad de longitud. En seguida, se exponen ejemplos de cada uno de los tres niveles en que se agruparon las respuestas a esta pregunta. Las respuestas del Nivel 1 son aquellas en las que las parejas calcularon el área del rectángulo *AQDE* a partir de valores numéricos para un caso particular. Esta respuesta se basa en la asignación de un valor numérico al segmento $\overline{AQ}$ y calcular el área correspondiente; las parejas E6 y E7 así lo hicieron (Figura 5.9.a).

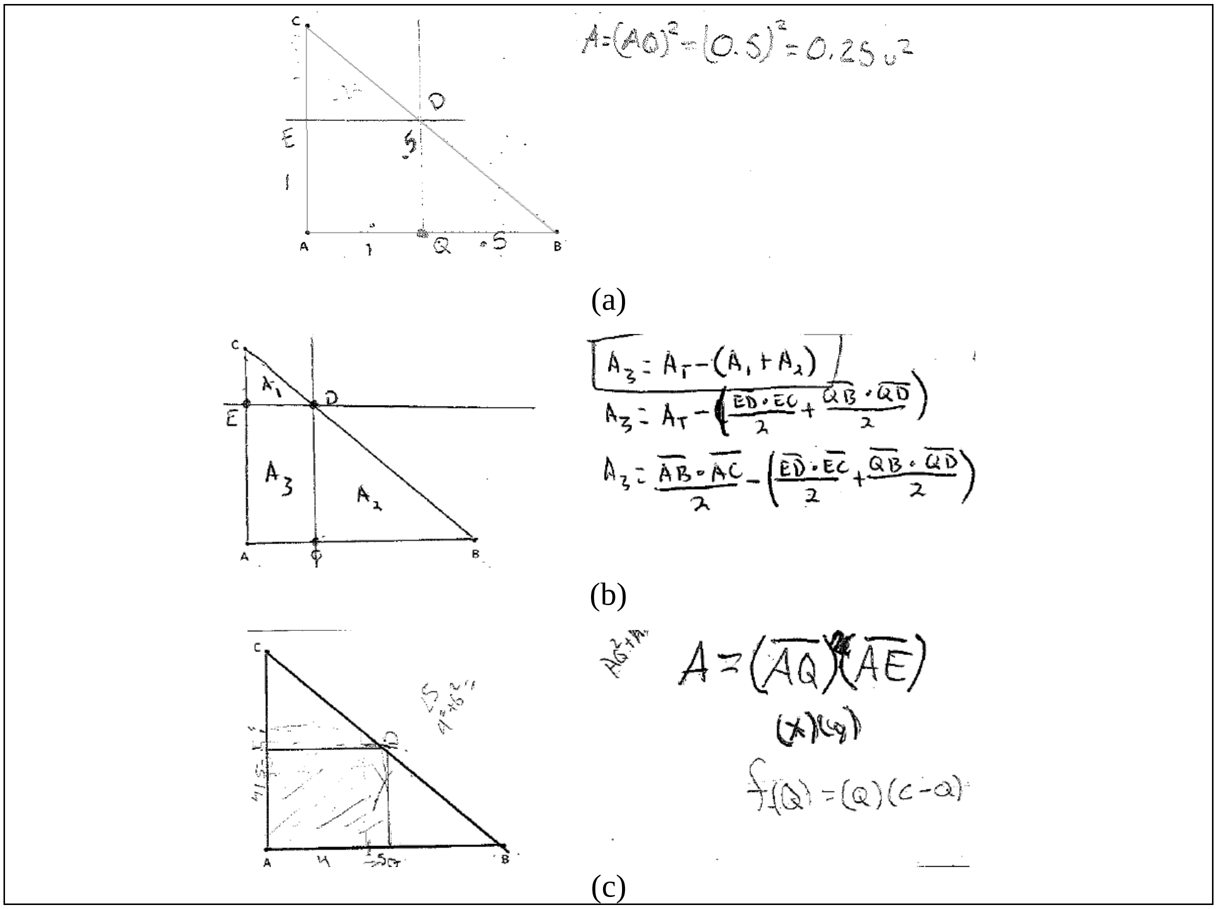


Figura 5.9. Cálculo de área del rectángulo *AQDE.* (a) Respuesta de E7 [Nivel 1]; (b) Respuesta de E3 [Nivel 2]; (c) Respuesta de E4 [Nivel 3].

Las respuestas del Nivel 2 están asociadas con producciones en que las parejas construyen la figura geométrica y proponen una expresión general del área empleando notación de segmentos (notación geométrica) basadas en fórmulas prestablecidas; por ejemplo, E3 considera que el área del rectángulo *AQDE* se obtiene restando las áreas de los triángulos *EDC* y *QBD*, las cuales son subfiguras del triángulo *ABC* (véase Figura 5.9.b). Finalmente, en las respuestas del Nivel 3, los participantes ofrecen una ecuación cuyo miembro izquierdo indica la variable área o se expresa en función de una variable; por ejemplo, el Equipo 4 integra elementos para simplificar la expresión $A = (\overline{AQ})(\overline{AC})$ como $f(Q) = (Q)(C - Q)$ (véase Figura 5.9.c).

Las expresiones simbólicas, relacionadas con esta categoría, se muestran como relaciones estáticas. En los primeros dos niveles, los participantes calculan el área del rectángulo *AQDE* sin considerar que el punto Q puede desplazarse sobre el lado $\overline{AB}$ del triángulo *ABC* y que se genera una figura con características similares, pero con otro valor de área. En el Nivel 1, se operan con cantidades fijas (véase Figura 5.9.a). En el Nivel 2, el cálculo del área del rectángulo *AQDE* está en términos de diversos segmentos que surge de fórmulas de área preestablecidas (véase Figura 5.9.b). En el Nivel 3, se parte de la fórmula para determinar el área del rectángulo *AQDE* y se integran elementos de la figura, pero no hay referencia de que el desplazamiento del punto P provoca el cambio en el área del polígono, ya que la expresión está en función de dos variables (Q y *c*) (véase Figura 5.9.c). En los tres niveles de respuesta se entiende la situación geométrica de manera estática, por lo que, se tiene una percepción discreta de la covariación.

5.6.2.2. Consideración de la covariación

Para motivar a los estudiantes a considerar la covariación se planteó la consigna 2.1.2. Suponiendo que un punto P se desplaza a lo largo del lado $\overline{AB}$, del triángulo isósceles *ABC* y se forman distintos rectángulos *APDE* con las características mencionadas en el inciso 2.1.1, ¿el área de los rectángulos *APDE* es constante? En seguida, se muestran los ejemplos de los tres niveles de respuesta que se han propuesto. En el Nivel 1 se han considerado dos tipos de respuesta: (*i*) cuando se asignaron valores particulares para la medida del lado $\overline{AP}$, percepción discreta de la covariación, cuyas respuestas no fueron registradas por ninguna de las parejas; y (*ii*) cuando se considera el cambio de área del rectángulo *APDE* basado en el cambio de las longitudes de sus lados, en la cual se genera una percepción simultánea de la covariación, pero no es deseada para describir la SGD. Por ejemplo, E7 afirma que el área del rectángulo *APDE* "no es contante ya que al mover el punto P, no nos da una base y alturas iguales"; ellos identifican que hay cambio en las longitudes de la base y la altura del rectángulo *APDE* y, por tanto, notan la percepción simultánea de la covariación.

En el Nivel 2, se consideran las respuestas que ofrecen una descripción general del comportamiento de la covariación, en ellas se identifica que el área del rectángulo va en aumento cuando el punto P se desplaza desde el extremo izquierdo (punto A) al punto medio del lado $\overline{AB}$ y disminuye cuando se desplaza de dicho punto medio al extremo derecho del lado $\overline{AB}$ (punto B). Por ejemplo, E2 argumenta que el área del triángulo *ABC* no es constante *"*porque a medida que P se desplaza [sobre el lado $\overline{AB}$] obtenemos un área diferente que aumenta, pero luego disminuye*"*. En el Nivel de respuesta 3 se agrupan respuestas con características del Nivel 2 pero se precisan además dos o más aspectos del registro gráfico (*e.g.*, recorridos de las variables, intervalos de crecimiento y decrecimiento, posición o valor máximo). Por ejemplo, por un lado, E3 menciona que el área del triángulo *ABC* no es constante ya que "entre más alejado del centro en el segmento *AB*, el área del rectángulo será menor". Por otro lado, E5 muestra indicios del valor máximo de área del rectángulo *APDE* al responder que el área del triángulo *ABC* no es constante "ya que el área va cambiando según el desplazamiento del punto P. El área se presenta a partir de la mitad del [segmento] $\overline{AB}$ y a partir de ello disminuye" (véase Figura 5.10). Las respuestas de ambos niveles muestran rasgos que permiten identificar la percepción simultánea de la covariación, pero integran de manera implícita la identificación del valor máximo de área del rectángulo *APDE*. Es importante resaltar que el primer nivel de respuesta asocia el cambio entre los lados del rectángulo *APDE* respecto a su área, y en los niveles de respuesta 2 y 3 se considera una relación entre el área del rectángulo *APDE* y el punto P, con diferencias en las características descritas entre estos niveles.

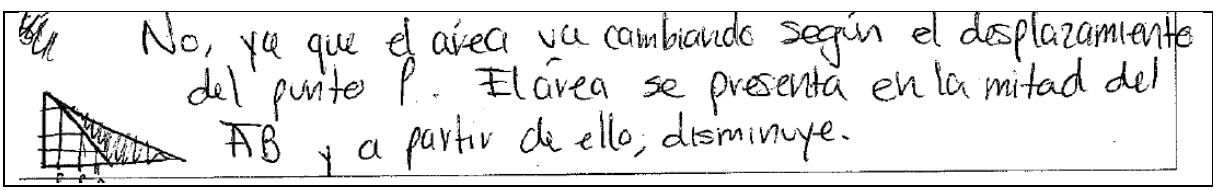


Figura 5.10. Identificación del comportamiento de área del rectángulo *APDE* por E5.

5.6.2.3. Análisis previo de la covariación

Para motivar a los estudiantes a considerar aspectos de la covariación se formuló la pregunta: 2.1.3. ¿De qué depende el valor del área del rectángulo *APDE*? En el Nivel 1, se agrupan las respuestas que establecen que el área del rectángulo *APDE* sólo depende de la configuración y no se reconoce la variable independiente. Tres equipos (E1, E5, E7) consideran que el área del rectángulo *APDE* depende del comportamiento de sus lados y de la manera en que el punto P divide al lado $\overline{AB}$. Por ejemplo, E7 afirma que el área del rectángulo *APDE* depende de “donde se traza el punto P y D, ya que a partir de éstos se obtendrá la base y la altura”. En el Nivel 2, se incluyen las respuestas que indican que el área del rectángulo *APDE* depende del punto P asociado con su posición en el lado $\overline{AB}$. E8 menciona que el área del rectángulo *APDE* “depende de la posición en la que se divida el segmento $\overline{\text{AB}}$” (véase Figura 5.11.a). Las respuestas de los niveles 1 y 2 vislumbran que el área del rectángulo *APDE* cambia dependiendo en qué lugar, sobre el segmento $\overline{AB}$, se coloque el punto P, donde las respuestas mantienen características del contexto geométrico.

En las respuestas del Nivel 3, se reúnen aquellas que afirman que el área depende de la longitud del segmento $\overline{AP}$. Por ejemplo, un equipo (E3) considera que el área del rectángulo *APDE* depende del valor asociado con el punto P y establece que la relación con el área es por medio de la magnitud del punto P, que está relacionada con la longitud del segmento *AP*; E3 afirma que el área del rectángulo *APDE* depende “del valor o la posición adquirida en P”; es importante aclarar que *el valor del punto P* se entiende como longitud del segmento $\overline{AP}$, por ello se ubica en este nivel de respuesta (véase Figura 5.11.b). En general en esta pregunta, los participantes identifican el cambio de área o forma del polígono a partir de la modificación del punto P, por lo que se identifica una percepción simultánea de la covariación.

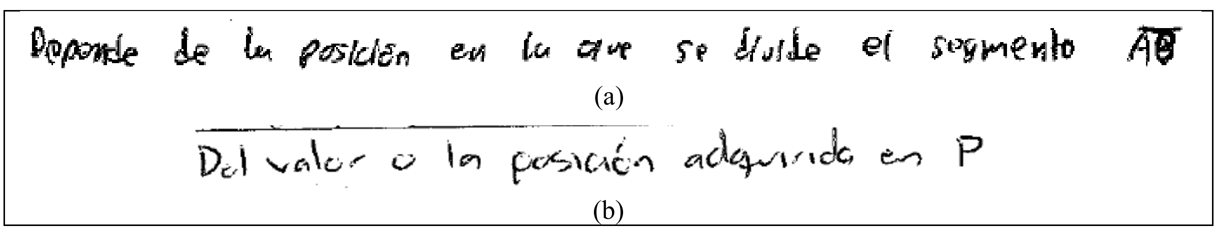


Figura 5.11. Respuesta de la dependencia del valor de área del polígono *ABEFCD.* (a) Respuesta dada por E8 [N2]; (b) Respuesta dada por E3 [N3].

Otra pregunta que propicia el análisis previo de la covariación es: 2.1.6. ¿Qué variables intervienen cuando el punto P se desplaza sobre el segmento $\overline{AB}$ manteniendo la configuración geométrica? En el Nivel 1, se agrupan las respuestas que identifican como única variable al punto P vista como posición; E1 menciona que “depende del punto P”. En el Nivel 2, se identifica la variable independiente como un segmento; por ejemplo, E6 menciona que la variable que interviene es $\overline{AP}$. En el Nivel 3, se considera la variable independiente como magnitud y se asocia con un símbolo algebraico. Por un lado, E5 afirma que el área del rectángulo *APDE* depende de “las longitudes de la base y de la altura" (véase Figura 5.12.a). Por otro lado, E2 identifica la variable independiente como la base del rectángulo *APDE*, para ello asocia la variable b para representar la longitud del segmento, además, considera como otra variable el área del rectángulo *APDE* (véase Figura 5.12.b). Esta pregunta propicia que los estudiantes se refieran a las variables que a su juicio intervienen en la SGD y se debe destacar que sólo una pareja (E2) menciona como variables a la longitud del segmento $\overline{AP}$ representada como $b = \overline{AP}$ y el área del rectángulo *APDE*. Es de suma trascendencia mencionar que no hay registro de que algún equipo se refiera a x para definir la variable independiente; al parecer, la mayoría de los estudiantes interpretó el término *variable* como variable independiente, esta respuesta está influenciada por el diseño de la pregunta, por lo que el análisis de la covariación es parcial en todos los casos. Estas respuestas posiblemente obedecen a la manera de formular la pregunta.

Las longitudes de la base y de la altura.

(a)

b = base
área del rectángulo.

(b)

Figura 5.12. Variable asociada con la SGD. (a) Respuesta de E5; (b) Respuesta de E2.

Para promover en los participantes la comprensión del mecanismo de la covariación se requirió analizar la covariación desde su percepción discreta, ante la consigna 2.1.5 relacionada con el cálculo de área del rectángulo *APDE* para casos particulares (véase Figura 5.13.a). Al realizar los cálculos de área del rectángulo *APDE* cuando el punto P se ubica en diferentes posiciones sobre el lado $\overline{AB}$ del triángulo *ABC* (*e.g.*, 0.1, 0.4, 0.7), los participantes llevan a cabo el análisis previo de la covariación y los resultados muestran que el total de los equipos expresan el área del rectángulo *APDE* como el producto de su base y su altura; estos cálculos son esenciales para generar el siguiente componente a partir de la percepción discreta de la covariación.

En el Nivel 1, se agrupan las respuestas que no infieren una expresión general para el cálculo de área del rectángulo *APDE* y sólo se basan en valores establecidos. En el Nivel 2, el cálculo de área del rectángulo *APDE* se basa en los segmentos que conforman la figura geométrica a partir de los casos particulares. Por ejemplo, E2 expresa el área del rectángulo como el producto de la base por su altura "$area\ del\ rectángulo = \overline{AP} \cdot \overline{AE}$ (*sic*)" (véase Figura 5.13.b). El Nivel 3 involucra características del Nivel 2, pero se incluyen elementos de la figura geométrica que permiten simplificar la expresión. Por ejemplo, E4 asigna la variable p como la longitud de la base del rectángulo *APDE* y $\overline{AC} - p$ como su altura (véase Figura 5.13.c). Esta pregunta es fundamental para que los participantes comprendan el mecanismo que produce la covariación, a partir del cálculo de área del rectángulo *APDE* basados en casos particulares que establecen la percepción discreta de la covariación. Las respuestas a esta pregunta motivan a la designación de variables que es trascendental para el primer acercamiento hacia la percepción simultánea de la covariación.

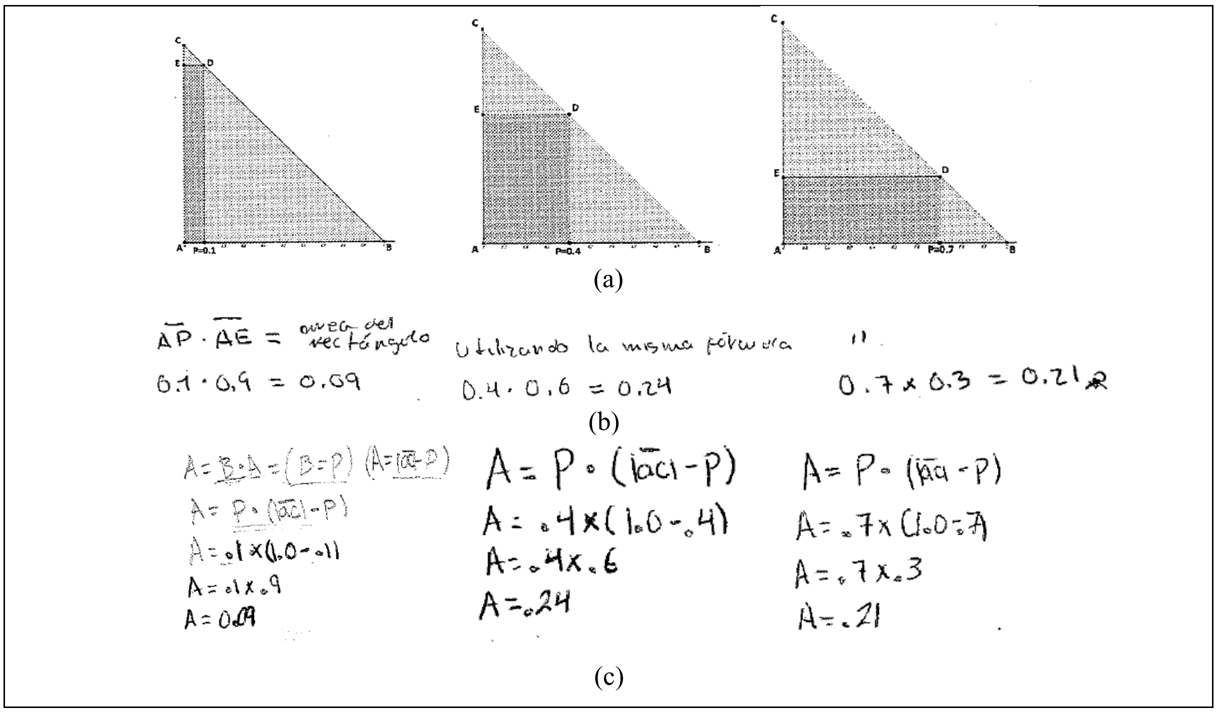


Figura 5.13. Cálculo de área del rectángulo *APDE* para casos particulares; (a) Registros geométricos particulares; (b) Respuestas dadas por E2; (c) Respuestas dadas por E4.

5.6.2.4. Representación de la covariación

La categoría de representación de la covariación se promueve con la pregunta: 2.1.7. ¿Qué expresión permite calcular el área del rectángulo *APDE* para cualquier punto P ubicado en el lado *AB*? De esta manera, los participantes se ven en la necesidad de proponer una representación simbólica que vincule el punto P con el área del rectángulo *APDE* y las respuestas se distinguen por el tipo de notación empleada: geométrica [G], se escriben literales mayúsculas para indicar puntos y parejas de literales mayúsculas (con una raya arriba) para indicar segmentos; mixta [M], se utiliza notación geométrica combinada con literales que representan números generalizados o variables; algebraica [A], se escriben literales que representan cantidades variables o números generalizados (véase Tabla 5.5).

En sus representaciones es importante observar si los participantes integran o no los siguientes datos que se infieren de la situación: $\overline{AB} = \overline{AC} = 1$, $\overline{AB} = \overline{AP} + \overline{PB}$ y $\overline{AC} = \overline{AE} + \overline{EC}$. En las respuestas a esta pregunta se advierte que la mayoría de los equipos mantiene en sus representaciones rasgos de elementos tanto geométricos como algebraicos por lo que se asocian con la notación mixta [M] (véase Tabla 5.5).

Tabla 5.5
Respuestas asociadas con la representación de la covariación: primer momento de la Actividad 2

Nivel de respuesta	Respuesta	Notación	Elementos	Equipo
N1	$a = (AP)(AC-AP)$ $(\overline{AB}-\overline{PB})(\overline{PB}) = a = \overline{AB}\,\overline{PB} - \overline{PB}^2 = \overline{PB} - \overline{PB}^2$	Geométrica [G]	Las variables son vistas como segmentos	E1 E5
N2	$A_p = ?$ P = Punto en $\overline{AB}$ $\overline{PB}$ = Distancia de "P" a "B" $A_p = P(\overline{PB})$ $A_p = P(\overline{AB} - P)$ $A_p = P \cdot \overline{AB} - P^2$ $f(p) = P(AB-P)$ Es usar la distancia del punto P como base y restar su distancia a la distancia del $\overline{AB}$ para sacar la altura. $(b \times h)$	Mixta [M]	Se emplea una combinación de variables geométricas y/o algebraicas y/o lenguaje natural	E3 E6
N3	$A = b \times h$ $\overline{AB} - \overline{PB} = \overline{AP}$ $\overline{AC} - \overline{CE} = \overline{AE}$ $A = (\overline{AP})(\overline{AE})$ $b = x$ $h = (x-1) \Rightarrow (1-x)$ $y = -x^2 + x$ $y = A$ $y = (x)(1-x)$ $y = x - x^2$	Algebraica [A]	Se emplean variables algebraicas o literales	E7

En el Nivel 1, se agrupan las respuestas que representan la covariación por medio de una expresión con notación geométrica, pero se distinguen dos variantes: los que incorporan o no los datos. Por ejemplo, E1 menciona que el área total del rectángulo *APDE* es el producto de la longitud de la base por su altura, expresada como $a = (AP)(AC - AP)$ y $a = \overline{PB} - \overline{PB}^2$ (véase Tabla 5.5 referencia N1); con base en esta respuesta se puede suponer que la literal a se utiliza como una etiqueta y no como una variable[22]. Las respuestas anteriores incorporan algunos datos referidos, pero se asocian con el Nivel 1 por no despegarse del contexto geométrico. En el Nivel 2, se agrupan las respuestas que emplean notación mixta, porque involucran lenguaje natural y/o variables geométricas y/o algebraicas.

[22] Se debe recordar que en la sección de Análisis de la covariación solo un Equipo (E2) logró identificar al *área* como una variable (véase parágrafo 5.6.2.3).

Por ejemplo, E2 escribe su respuesta como "$area\ del\ rectángulo = (b-1)\cdot b$ (*sic*)" y E3 utiliza la expresión $A_p = p\cdot\overline{AB} - p^2$; ellos incorporan el dato: $\overline{AB} = 1$ y $\overline{AB} = \overline{AP} + \overline{PB}$ (véase Tabla 5.5 referencia N2). Finalmente, en el Nivel 3 se clasifican las respuestas que se muestran en notación algebraica, ya que se emplean variables algebraicas. Por ejemplo, E7 expresa el área del rectángulo *APDE* como $y = x - x^2$; es importante destacar que este equipo dio de manera espontánea una expresión algebraica, que incluyó el uso de variables convencionales x y y (véase Tabla 5.5 referencia N3). La Tabla 5.5 integra las respuestas asociadas con la representación de la covariación para el primer momento de la Actividad 2 y se destaca que continúa la resistencia a separar la expresión del contexto, la cual se ve más acentuada en los equipos que utilizan notación geométrica o mixta. Sin embargo, se percibe un avance, con respecto a la Actividad 1, ya que varias parejas dan mayor importancia a la incorporación de los datos en la expresión.

5.6.2.5. Consecuencias de la covariación

Las respuestas en esta categoría fueron motivadas por la consigna: 2.1.8. De acuerdo con los resultados del inciso 2.1.7, elabora una tabla que relacione la longitud del segmento $\overline{AP}$ con el área del rectángulo *APDE.*[23] En esta categoría los estudiantes establecen una relación entre el registro simbólico obtenido previamente con otros registros de representación [tabular y/o gráfico]. En el Nivel 1, se coordina la relación entre la regla de correspondencia y el registro gráfico de manera intuitiva. Por ejemplo, E1 interpreta que la variable involucrada es la longitud de uno de los segmentos que forma parte de los lados del rectángulo *APDE* y su área; el resultado muestra la relación covariacional entre las variables *a* [segmento] y *A* [área del rectángulo *APDE*], y se puede interpretar desde la gráfica que mientras la longitud del segmento aumenta, el área disminuye y después aumenta (véase Figura 5.14.a). En el Nivel 2, las respuestas gráficas representan parcialmente la covariación, pero involucran algunas inconsistencias, ya que se coordina la relación entre el registro tabular y el registro gráfico basados en el registro simbólico que no corresponde a la situación planteada. Por un lado, E4 emplea como variables *p* y *f(p)* pero utiliza 10 unidades (correspondiente con la Actividad 1) como longitud del lado $\overline{AB}$ en lugar de la unidad, lo que provoca que los

[23] La pregunta 2.1.5 está relacionada con el cálculo de área del rectángulo *APDE* cuando se considera que el punto *P* se ubica en diferentes posiciones (*e.g.*, 0.1, 0.4, 0.7) sobre el lado $\overline{AB}$, y considerar que el triángulo *ABC* es isósceles y la medida de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ es la unidad.

valores asociados con la variable independiente puedan variar entre 0 unidades y 10 unidades y los valores de área del rectángulo *APDE* oscilen entre 0 u^2 y 25 u^2. Se puede notar en la gráfica de E4, que la primera idea de los participantes fue relacionar la gráfica de la situación con la obtenida en la Actividad 1, por ello dibujan una reflexión de la parábola con respecto al eje *x* (véase Figura 5.14.b).

En el Nivel 3, las gráficas bosquejadas representan la covariación de la situación geométrica planteada. En este nivel, los equipos emplean la variable independiente, asociada con el área del rectángulo *APDE*, como un elemento trascendental de la covariación y se enfatiza al representar la covariación de manera tabular y en el plano cartesiano. La representación gráfica corresponde a las características de la situación geométrica planteada (véase Figura 5.14.c).

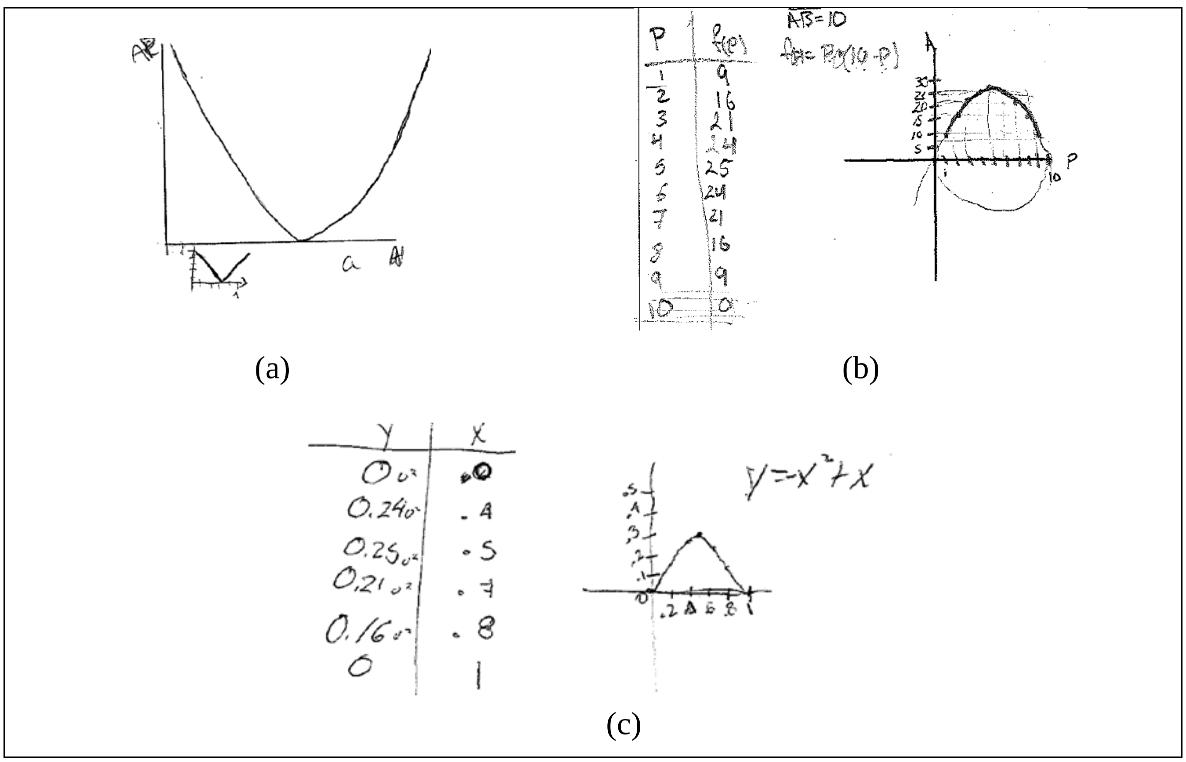
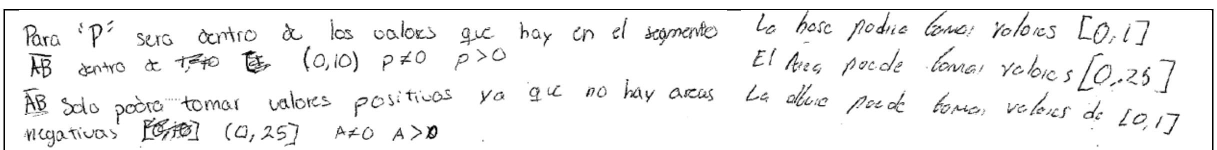


Figura 5.14. Representaciones gráficas trazadas por los estudiantes; (a) Respuesta de E1; (b) Respuesta de E4; (c) Respuesta de E7.

Ante la pregunta: 2.1.10. ¿Cuál es el intervalo de variación para cada una de las variables identificadas? En el Nivel 1, se hace mención del intervalo de variación para una de las variables identificadas. Por ejemplo, E1 expone que varía de “0 a 1”; se entiende que se refiere a la medida del lado $\overline{AP}$. En estas respuestas los participantes no expresan la variación conjunta. En el Nivel 2, se expresa el intervalo de variación para las variables dependiente e independiente que no corresponden a la situación planteada. E4 afirma acerca de la variación "para P será dentro de los valores que hay en el segmento $\overline{AB}$ dentro de $(0{,}10)$ $p \neq 0$ $p > 0$ y $\overline{AB}$ sólo podrá tomar valores positivos ya que no hay áreas negativas $(0{,}25]$ $A \neq 0$ $A > 0$" (véase Figura 5.15.a). Se puede notar que los intervalos de variación no corresponden a los dados por la situación, ya que el segmento $\overline{AB}$ (lado *AB* del triángulo *ABC*) es la unidad; la confusión en la medida de la longitud del lado $\overline{AB}$ se podría deber a las medidas del segmento $\overline{AB}$ asignado en la Actividad 1. En el Nivel 3, el intervalo de variación para las variables dependiente e independiente corresponde a la situación planteada. E7 reconoce que el intervalo de variación para la variable independiente (longitud de la base del rectángulo *APDE*) es 0 u a 1 u y la variable dependiente (área del rectángulo *APDE*) es 0 u^2 a 0.25 u^2 (véase Figura 5.15.b).


Para 'P' sera dentro de los valores que hay en el segmento $\overline{AB}$ dentro de ~~1,~~ (0,10) $p \neq 0$ $p > 0$ $\overline{AB}$ solo podra tomar valores positivos ya que no hay areas negativas ~~[0,10]~~ (0,25] $A \neq 0$ $A > 0$

La base podria tomar valores [0,1] El Area puede tomar valores [0,.25] La altura puede tomar valores de [0,1]

(a) (b)

Figura 5.15. Intervalos de variación para las variables identificadas; (a) Respuesta de E4; (b) Respuesta de E7.

Al plantear la pregunta: 2.1.11. En caso de existir un valor máximo para el área del rectángulo *APDE*, ¿cuál será? En el Nivel 1, se considera la posición del punto máximo de manera intuitiva y no corresponde a la situación planteada. E1 menciona que el punto máximo está ubicado cuando la gráfica "tienda a 1"; esta respuesta está apoyada en la representación gráfica previa (véase Figura 5.14.a). En el Nivel 2, se identifica que existe un valor máximo de área, pero su ubicación no está del todo detallada. El Equipo 5 menciona que el valor máximo de área se localiza cuando el punto P está en la mitad de lado $\overline{AB}$ (0.5 unidades) pero no determinan cuál es ese valor. En el Nivel 3, se proporciona la ubicación del valor máximo de área y se mencionan características adicionales. E7 responde que "sería en $(0.25\ u^2)$ ya que es el valor máximo del producto de $(0.5)(0.5)$ que representan la base y la altura del rectángulo"; mientras que E2 afirma que "su valor máximo de área es 0.25, porque es cuando P corta al segmento $\overline{AB}$ justo a la mitad y sus lados miden lo mismo".

5.7. ACTIVIDAD 3: TERCERA SITUACIÓN GEOMÉTRICA DINÁMICA

La siguiente es la tercera situación geométrica dinámica que enfrentaron los estudiantes.

La Figura 5.16.a muestra una semicircunferencia con centro en el punto O y radio igual a la unidad. Coloca los puntos A y B, los cuales forman el diámetro de la circunferencia. Enseguida, coloca un punto P sobre el segmento $\overline{OB}$. Traza la recta perpendicular a $\overline{OB}$ que pasa por P, la cual interseca a la semicircunferencia en el punto Q. Ahora, traza la recta perpendicular al segmento $\overline{PQ}$ que pasa por el punto Q; esta recta interseca a la circunferencia en el punto R. De la misma manera, traza la recta perpendicular al segmento $\overline{QR}$ que pasa por R, la cual interseca al segmento $\overline{AB}$ en el punto S. Los puntos P, Q, R y S forman el rectángulo *PQRS*. Con base en las características de la figura, calcula el área del rectángulo *PQRS*[24] (véase Figura 5.16.b). Con base en la construcción de la figura geométrica se pretende que los alumnos respondan una serie de preguntas encaminadas a promover el razonamiento de covariación. A continuación, se muestran los resultados surgidos del primer momento de aplicación de la Actividad 3.

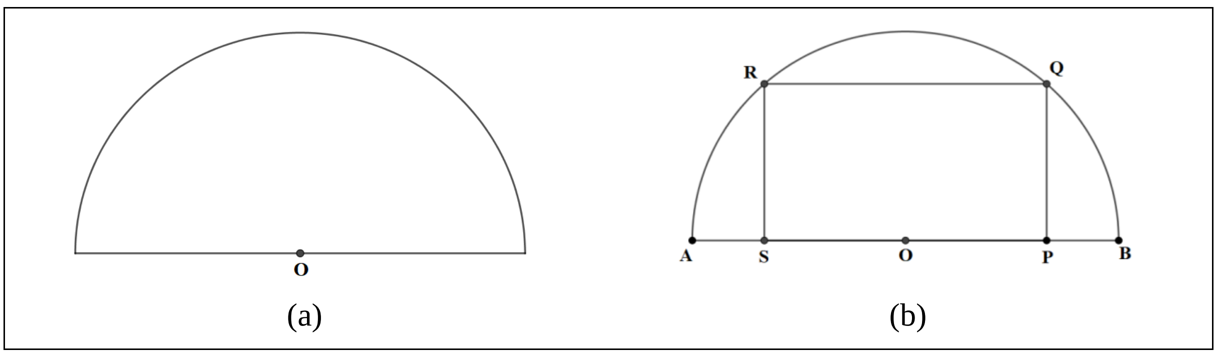


Figura 5.16. Tercera SGD. (a) Semicircunferencia de radio unitario; (b) Construcción del rectángulo *PQRS* que integra la SGD.

5.8. PRIMER MOMENTO: ACTIVIDAD 3 EN AMBIENTE DE LÁPIZ Y PAPEL

La presentación de los resultados se organiza con base en el *marco* para la organización del razonamiento covariacional expuesto en el capítulo 3 (véase parágrafo 3.5). La Actividad 3 fue modificada en comparación con las Actividades 1 y 2, ya que se incluyeron únicamente siete incisos que son considerados más importantes para esta investigación y que involucran los componentes descritos en el marco a excepción del *II. Consideración de la covariación*, ya que

[24] El rectángulo *PQRS* no es visible para los participantes, ya que son ellos quienes deben construirlo siguiendo las indicaciones dadas en la tarea. Por medio de la construcción de la figura geométrica se pretende que los participantes identifiquen características implícitas en ella que permitan describir el mecanismo de la covariación.

con base en las experiencias adquiridas durante la resolución de las Actividades 1 y 2, se identifica que los participantes perciben la situación geométrica como dinámica. A continuación, se exponen los componentes que conforman el marco y las preguntas que se relacionan con cada uno de sus componentes.

1. Ignorancia de la covariación. 3.1.1. Con base en las características de la figura, calcula el área del rectángulo *PQRS.*

2. Consideración de la covariación. Como parte de la Actividad 3 se da por entendida la consideración de la covariación, ya que las preguntas asociadas a este componente en las Actividades 1 y 2, están enfocadas al cambio en el área de la figura producido por el recorrido del punto sobre un segmento. Debido a la experiencia en la resolución de situaciones geométricas dinámicas se asienta que los participantes afrontaran una situación dinámica que produce un cambio en el área de la figura geométrica provocado por el desplazamiento de un punto sobre un segmento. De tal manera que se excluye la pregunta asociada con este componente.

3. *Análisis previo de la covariación.* 3.1.2. ¿Existe un valor máximo para el área del rectángulo *PQRS* cuando se desplaza el punto P sobre el lado *AB*? En caso afirmativo ¿en qué posición se encuentra el punto P para que el rectángulo *PQRS* tenga el valor máximo de área? 3.1.3. Para las siguientes figuras, calcula el área del rectángulo *PQRS*. Considera que el punto P se ubica en distintas posiciones (*e.g.*, 0.3, 0.4, 0.7) sobre el segmento $\overline{AB}$; recuerda que la semicircunferencia tiene radio unitario. 3.1.4. Explica, ¿qué variables intervienen cuando el punto P se desplaza sobre el segmento $\overline{AB}$ manteniendo la configuración geométrica?

4. Representación de la covariación. 3.1.5. ¿Qué expresión permite calcular el área del rectángulo *PQRS* para cualquier punto P ubicado sobre el segmento $\overline{AB}$?

5. *Consecuencias de la covariación.* 3.1.6. Con base en el inciso anterior, elabora la representación gráfica de la expresión simbólica obtenida. 3.1.7. En caso de existir un valor máximo para el área del rectángulo *PQRS*, ¿cuál es la posición del punto P en la que se obtiene el máximo valor de su área?

5.8.1. Niveles de respuesta durante el primer momento: Actividad 3

Como se ha mencionado en las Actividades 1 y 2, es importante resaltar que cada una de las respuestas de los tres niveles,establecidos en el parágrafo 5.2.1.2, no debe ser considerada incorrecta, ya que son las producciones que emplean los estudiantes para explicar la manera de razonar ante las preguntas. A continuación, se enlistan los niveles de respuesta asociados con cada una de las preguntas descritas previamente y que permiten analizar las producciones de los estudiantes.

5.8.1.1. Ignorancia de la covariación

3.1.1. Con base en las características de la figura, calcula el área del rectángulo *PQRS*.

Nivel 1 [2]. Se elige o se asigna un valor numérico particular para la longitud del segmento $\overline{OP}$ y se calcula el área correspondiente

Nivel 2 [5]. Se genera una expresión que representa el área del rectángulo *PQRS* basado en fórmulas preestablecidas, o bien, producciones que no están representadas en forma de ecuación, es decir, no se utiliza el signo de igualdad.

Nivel 3 [1]. Se escribe una ecuación cuyo miembro izquierdo se asocia con el área del rectángulo *PQRS* y el miembro derecho integra elementos de la figura geométrica a partir del segmento $\overline{OP}$.

5.8.1.2. Consideración de la covariación

A este componente no se le asocia ninguna pregunta ya que, con base en la resolución de las SGD previas, se da por entendido que la situación es examinada desde el punto de vista dinámico, por lo que es percibida por los participantes como una situación de covariación.

5.8.1.3. Análisis previo de la covariación

3.1.2. ¿Existe un valor máximo para el área del rectángulo *PQRS* cuando se desplaza el punto P sobre el lado $\overline{AB}$? En caso afirmativo, ¿en qué posición se encuentra el punto P para que el rectángulo *PQRS* tenga el valor máximo de área?

Nivel 1 [0]. Se infiere el cambio que da indicios de la covariación, pero no se especifica acerca del valor máximo de área del rectángulo *PQRS*.

Nivel 2 [6]. Se percibe la covariación y se hace explícita la posición del punto P en la que se tiene el valor máximo de área del rectángulo *PQRS*.

Nivel 3 [2]. Se hace evidente la covariación y se describe su comportamiento a través de la relación entre variables; además, se detalla la ubicación del punto máximo de área del rectángulo *PQRS*.

3.1.3. Para las siguientes figuras, calcula el área del rectángulo *PQRS*. Considera que el punto P se ubica en distintas posiciones (*e.g.*, 0.3, 0.4, 0.7) sobre el segmento $\overline{OB}$; recuerda que la semicircunferencia tiene radio unitario.

Nivel 1 [0]. Se calcula el área del rectángulo *PQRS* con base en los valores particulares, pero no se infiere una expresión general para el cálculo de área.

Nivel 2 [2]. Se calcula el área del rectángulo *PQRS* para cada caso particular con base en una expresión que no cumple con las características de la configuración geométrica

Nivel 3 [6]. Se calcula el área del rectángulo *PQRS* para cada caso particular, cuya base es una expresión que incluye características o elementos de la figura geométrica.

3.1.4. Explica, qué variables intervienen cuando el punto P se desplaza sobre el segmento $\overline{AB}$ manteniendo la configuración geométrica.

Nivel 1 [1]. Se identifica parcialmente la covariación al mencionar únicamente la variable independiente asociada con el punto geométrico P.

Nivel 2 [5]. Se identifican las variables que establecen la covariación, pero no se proporcionan los intervalos de variación de éstas.

Nivel 3 [2]. Se identifican las variables que establecen la covariación y se proporcionan los intervalos de variación de éstas.

5.8.1.4. Representación de la covariación

3.1.5. ¿Qué expresión permite calcular el área del rectángulo *PQRS* para cualquier punto P ubicado sobre el segmento $\overline{AB}$?

Nivel 1 [2]. Representa la covariación con una expresión usando notación geométrica.

(i) No incorpora todos los datos.

(ii) Incorpora todos los datos de la situación geométrica planteada.

Nivel 2 [0]. Representa la covariación con una expresión usando notación mixta.

(i) No incorpora todos los datos.

(ii) Incorpora todos los datos de la situación geométrica planteada.

Nivel 3 [6]. Representan la covariación con una expresión con notación algebraica

(i) No incorpora todos los datos.

(ii) Incorpora todos los datos de la situación geométrica planteada.

5.8.1.5. Consecuencias de la covariación

3.1.6. Elabora la representación gráfica de la expresión simbólica obtenida en el inciso 3.1.5.

Nivel 1 [0]. Coordina la relación entre la regla de correspondencia y el registro gráfico de manera intuitiva. La gráfica bosquejada no se aproxima a la covariación.

Nivel 2 [4]. Coordina la relación con un registro tabular y la regla de correspondencia que no representa de manera gráfica la situación en cuestión. La gráfica representa parcialmente la covariación a veces con errores.

Nivel 3 [4]. Coordina la relación entre el registro tabular y la regla de correspondencia que cumple tanto con las características de la gráfica como con las condiciones de la situación. La gráfica representa adecuadamente la covariación.

3.1.7. En caso de existir un valor máximo para el área del rectángulo *PQRS*, ¿cuál es la posición del punto P en la que se obtiene el máximo valor de su área?

Nivel 1 [0]. Se indica la ubicación del punto máximo de manera intuitiva pero no corresponde a la situación planteada.

Nivel 2 [2]. Se indica la ubicación del punto máximo que corresponde a la situación.

Nivel 3 [6]. A través de la relación entre variables se detalla la ubicación del punto máximo y se proporcionan características del registro gráfico, por ejemplo, intervalos donde la gráfica es creciente o decreciente.

En la Tabla 5.6 se muestra el número de pregunta y los niveles de respuesta que sirven para organizar cada una de las producciones dadas por los equipos y permiten identificar aquellas cuyos rasgos están mejorados o que integran datos del problema o proporcionan mejores elementos en sus respuestas en comparación con los niveles de respuesta de las Actividades 1 y 2 (véanse Tablas 5.2 y 5.4, respectivamente). Cada una de las respuestas son producciones, generadas por los participantes, que están referidas en el marco para la organización del razonamiento de covariación y se evidencia el avance de los participantes hacia otro componente. Se debe destacar que no hay preguntas asociadas con el componente II. *Consideración de la covariación*¸ ya que, con base en la experiencia de los participantes en la resolución de las situaciones geométricas dinámicas de las Actividades 1 y 2, se da por entendido que la situación planteada es percibida como dinámica.

Tabla 5.6
Resultados de los niveles de respuesta para el primer momento: Actividad 3.

	Componente	**I. Ignorancia de la covariación**			**II. Consideración de la covariación**			**III. Análisis previo de la covariación**			**IV. Representación de la covariación**			**V. Consecuencias de la covariación**		
	Nivel de respuesta	*N1*	*N2*	*N3*	*N1*	*N2*	*N3*	*N1*	*N2*	*N3*	*N1*	*N2*	*N3*	*N1*	*N2*	*N3*
Pregunta	3.1.1.	2	5	1												
	3.1.2.							0	6	2						
	3.1.3.							0	2	6						
	3.1.4.							1	5	2						
	3.1.5.										2	0	6			
	3.1.6.													0	4	4
	3.1.7.													0	2	6

Como se observa en la Tabla 5.6, los participantes inician en el primer componente (*I. Ignorancia de la covariación*) asociado con la primera pregunta (pregunta 3.1.1), y a medida que pasan a otra pregunta avanzan al tercer componente (pregunta 3.1.2). Al finalizar el primer momento de la Actividad 2, los participantes alcanzan el último componente (*V. Consecuencias de la covariación*) (véase pregunta 3.1.7).

5.8.2 Ejemplos de los niveles de respuesta durante el primer momento: Actividad 3

En este apartado se ofrecen ejemplos de cada nivel de respuesta durante el primer momento de la Actividad 3, asociados con cada componente descrito en el marco para la organización del razonamiento de covariación. Se debe destacar que la resolución de la Actividad 3 corresponde a la sesión 8 referida en las sesiones de trabajo (véase Tabla 3.1), por lo que los participantes ya contaban con experiencia previa en la resolución de SGD. A continuación, se describen los resultados asociados con cada componente.

5.8.2.1. Ignorancia de la covariación

En la pregunta 3.1.1, de esta Actividad, los estudiantes calcularon el área del rectángulo $PQRS$ generado a partir de la ubicación del punto P sobre el segmento $\overline{AB}$ que representa el diámetro de la semicircunferencia. En seguida, se exponen los resultados asociados con los tres niveles de respuesta. Las respuestas del Nivel 1 son aquellas en las que las parejas calcularon el área del rectángulo $PQRS$ para un valor específico. Por ejemplo, E7 calcula el área del rectángulo asignando un valor numérico al segmento $\overline{OP}$ y genera el trazo de la configuración correspondiente sin centrar la atención en las propiedades de la figura geométrica (véase Figura 5.17.a).

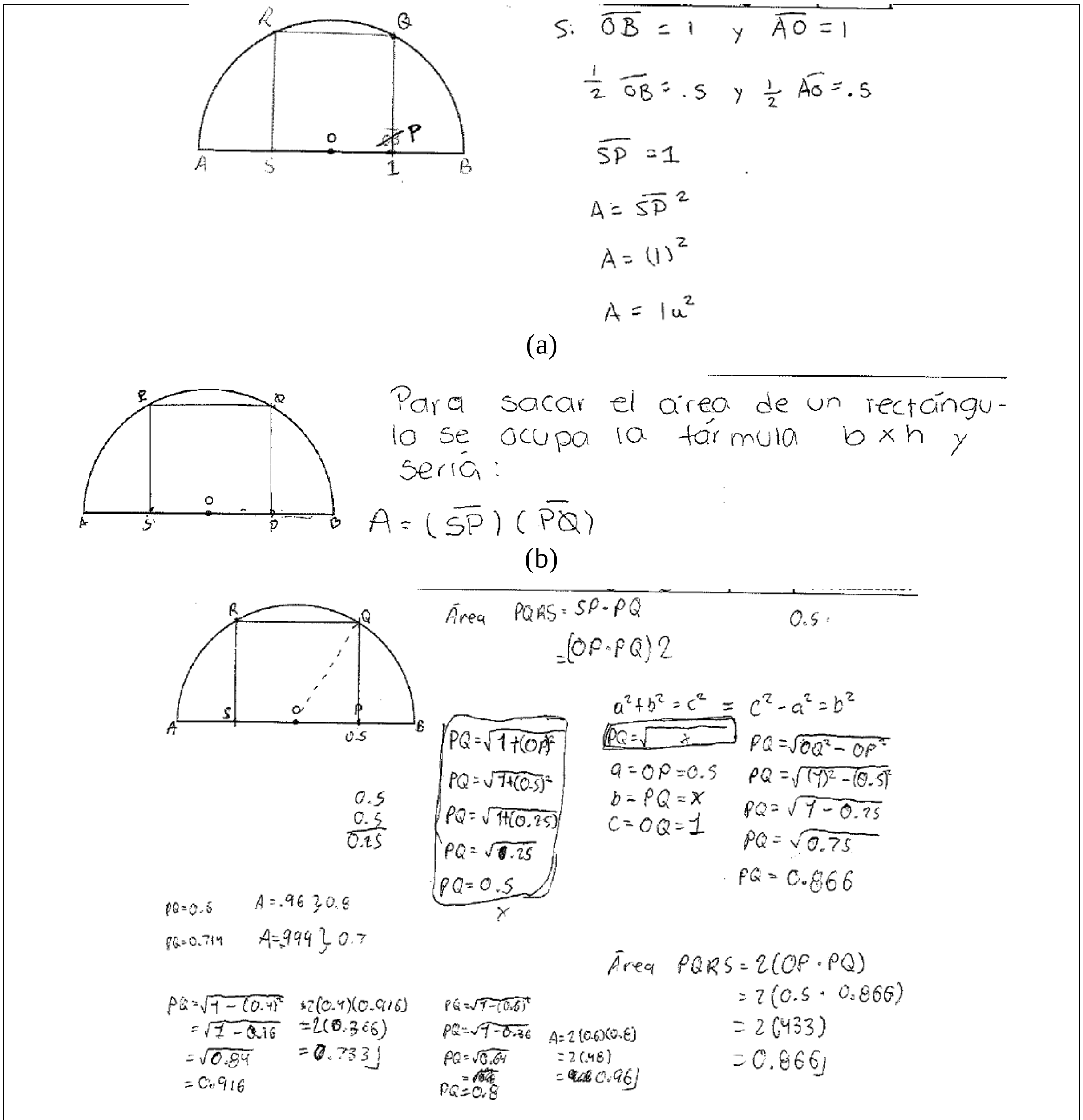


Figura 5.17. Cálculo de área del rectángulo *PQRS.* (a) Respuesta de E7 [N1]; (b) Respuesta de E2 [N2]; (c) Respuesta de E8 [N3].

Las respuestas de Nivel 2 son aquellas en las que las parejas se basan en fórmulas preestablecidas para expresar el área del rectángulo *PQRS*. Por ejemplo, E2 considera que el área del rectángulo *PQRS* inscrito en la semicircunferencia se obtiene con base en la fórmula de área del rectángulo expresada como el producto de su base por su altura, los cuales son vistos como segmentos (véase Figura 5.17.b). Finalmente, el Nivel 3 de respuesta integra algunos elementos de la figura geométrica para simplificar la expresión; por ejemplo, E8 integra una expresión general de manera implícita en su respuesta: "$AreaPQRS = SP \cdot PQ \ = (OP \cdot PQ)2$ y $PQ = \sqrt{(OQ)^2(OP)^2}$ (*sic*)", pero centra su atención en el cálculo para un caso particular (véase Figura 5.17.c).

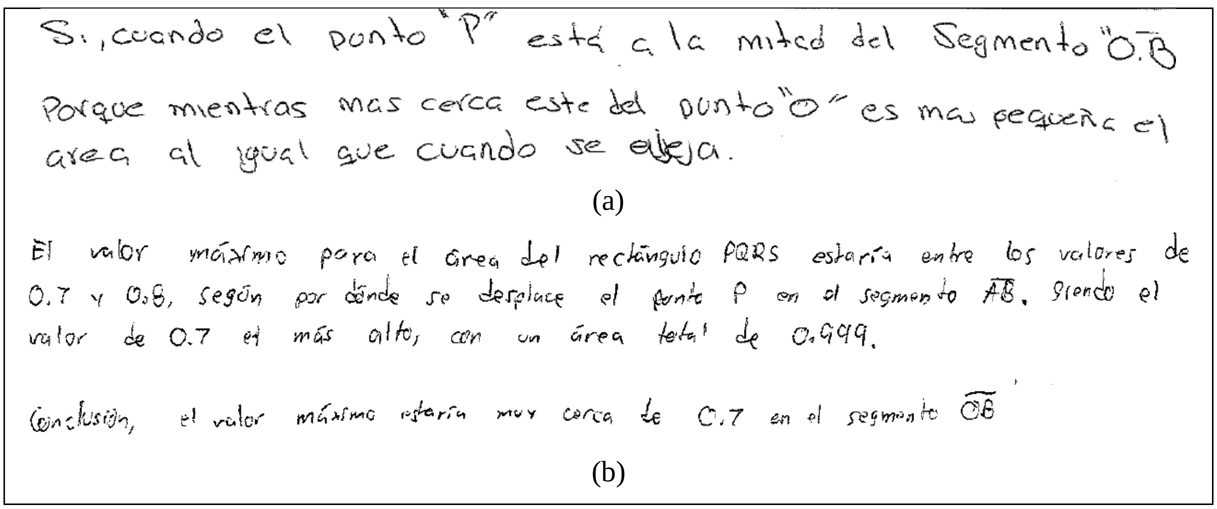
Se debe resaltar que para expresar el área del rectángulo $PQRS$, los participantes emplean las variables a y A y las longitudes $\overline{OP}$, $\overline{SP}$, $\overline{PQ}$, $\overline{SR}$, $\overline{OQ}$, $\overline{AB}$ y $\overline{OB}$ que se utilizan para representar los lados de las subfiguras que conforman el rectángulo. Las expresiones simbólicas, vinculadas con esta categoría, se muestran como relaciones estáticas. En los primeros dos niveles, los participantes calculan el área del rectángulo *PQRS* sin considerar que el punto P puede desplazarse sobre el segmento $\overline{OB}$ y generar una familia de figuras con características similares, pero con área distinta. En el Nivel 1, se operan con cantidades fijas (véase Figura 5.17.a); en el Nivel 2 se emplean fórmulas de área preestablecidas en términos de segmentos (véase Figura 5.17.b), pero en ambos casos se percibe la situación geométrica de manera estática. En el Nivel 3 se parte de la fórmula para determinar el área del rectángulo *PQRS* y se integran elementos de la figura, sin embargo, se puede identificar que hay referencia del cambio en el punto P. En la respuesta de E8 se observa el cálculo de área para tres valores específicos (*e.g.*, 0.5, 0.4 y 0.6) (véase Figura 5.17.c) y a pesar de que se podría pensar en una percepción simultánea de la covariación no se distingue que la expresión simbólica esté en términos de variables algebraicas; por ello la situación es percibida de manera estática. En los tres niveles de respuesta se tiene una percepción discreta de la covariación, ya que el análisis del área del rectángulo *PQRS* se realiza para casos específicos y se nota en las respuestas un análisis estático.

5.8.2.2. Consideración de la covariación

Durante la resolución de esta actividad, las respuestas de los participantes no fueron asociadas con este componente, ya que en las preguntas se dio por entendido que la situación es dinámica y que se tiene la idea de la covariación o identificación de la relación conjunta entre la longitud de los lados del rectángulo *PQRS* o el punto *P* y su área. Las respuestas a la pregunta 3.1.2, se agrupa en la siguiente categoría.

5.8.2.3. Análisis previo de la covariación

Después de calcular el área del rectángulo *PQRS* se pidió a los participantes responder a la pregunta: 3.1.2. ¿Existe un valor máximo para el área del rectángulo *PQRS* cuando se desplaza el punto P sobre el lado $\overline{AB}$? En caso afirmativo, ¿en qué posición se encuentra el punto P para que el rectángulo *PQRS* tenga el valor máximo de área? Los resultados indican que todas las parejas consideran la existencia de un valor máximo de área del rectángulo *PQRS,* por ello ninguna respuesta se asocia con el Nivel 1; en este nivel de respuesta se omite o no se considera la existencia de un valor máximo de área. En el Nivel 2, se hace explícita la posición del punto P en la que se tiene el valor máximo de área del rectángulo *PQRS.* E3 considera que el valor máximo de área del rectángulo *PQRS* se localiza cuando el punto P está en la mitad del segmento $\overline{OB}$; esta pareja escribe "Si *(sic.),* [se refiere a que existe un valor máximo] cuando el punto P está a la mitad del segmento $\overline{OB}$, porque mientras más cerca este *(sic.)* del punto "O" es más pequeña el área del rectángulo al igual que cuando se aleja" (véase Figura 5.18.a).


Si, cuando el punto "P" está a la mitad del Segmento "O.B"
Porque mientras mas cerca este del punto "O" es mas pequeña el area al igual que cuando se aleja.

(a)

El valor máximo para el área del rectángulo PQRS estaría entre los valores de 0.7 y 0.8, según por dónde se desplace el punto P en el segmento $\overline{AB}$, siendo el valor de 0.7 el más alto, con un área total de 0.999.

Conclusión, el valor máximo estaría muy cerca de 0.7 en el segmento $\overline{OB}$

(b)

Figura 5.18. Ubicación del área máxima del rectángulo *PQRS*: (a) Respuesta de E3; (b) Respuesta de E8.

En el Nivel 3, se describe el comportamiento de las variables a través de su relación; además, se detalla la ubicación del punto máximo de área del rectángulo *PQRS.* La respuesta de E8 se basa en cálculos específicos que le permiten inferir que el valor máximo de área del rectángulo *PQRS* se encuentra cuando el punto P está cerca de 0.7 sobre el segmento $\overline{OB}$; esta pareja afirma que "el valor máximo para el área del rectángulo *PQRS* estaría entre los valores de 0.7 y 0.8, según por dónde se desplace el punto P en el segmento

$\overline{\text{AB}}$. Siendo el valor de 0.7 el más alto, con un área total de 0.999. Conclusión, el valor máximo estaría muy cerca de 0.7 en el segmento $\overline{\text{OB}}$" (véase Figura 5.18.b). En los tres niveles de respuesta se hace evidente la covariación de variables.

Para promover en las parejas la comprensión del mecanismo de la covariación se requirió analizar la situación desde su percepción discreta, relacionada con la pregunta 3.1.3 que consiste en calcular el área del rectángulo $PQRS$ si se considera que el punto P se ubica en distintas posiciones (*e.g.*, 0.3, 0.4, 0.7) sobre el segmento $\overline{OB}$ (Figura 5.19.a). Con base en la interpretación de los casos particulares se pretende que los alumnos analicen la covariación basados en cálculos numéricos e interpreten los resultados para determinar una expresión simbólica que los generaliza; esta expresión es la base para el desarrollo del siguiente componente (*IV. Representación de la covariación*). Debido a que todos los equipos calcularon el área del rectángulo $PQRS$ basados en los valores establecidos y exponen una expresión simbólica, ninguna respuesta se relaciona con el Nivel 1. En el Nivel 2, se calcula el área del rectángulo $PQRS$ para cada caso particular basados en una expresión que no cumple con las características de la configuración geométrica. Por ejemplo, el Equipo 1 representa el área del rectángulo $PQRS$ como el producto de dos segmentos asociados con su base y altura, y considera que $\overline{SP} = 2p$ y $\overline{PQ} = 1 - p$ [la pareja se basa en las SGD resueltas previamente para determinar la altura del rectángulo ($\overline{PQ}$) como la diferencia del radio de la semicircunferencia y la medida del segmento $\overline{OP}$]. La expresión de área queda representada como $A = (2p)(1 - p)$; la respuesta está asociada con el Nivel 2, ya que se agregan elementos de la figura geométrica que no corresponden a la situación del problema (véase Figura 5.19.b).

Finalmente, en el Nivel 3 se calcula el área del rectángulo $PQRS$ para cada caso particular basados en una expresión que incluye características o elementos de la figura geométrica. El Equipo 8 expresa el área del rectángulo $PQRS$ como el producto de su base por su altura, pero incorporan los datos $PQRS = 2\,(\overline{OP} \cdot \overline{PQ})$ [$PQRS$ se refiere al área del rectángulo] y $\overline{PQ} = \sqrt{\overline{OQ}^2 - \overline{OP}^2}$. Es importante mencionar que la notación utilizada se basa en el contexto geométrico del problema y que se distingue la dificultad que presentan los alumnos a separarse cognitivamente del contexto de la situación (véase Figura 5.19.c). En todas las respuestas se percibe que la situación es analizada desde el punto de vista de la percepción discreta de la covariación.

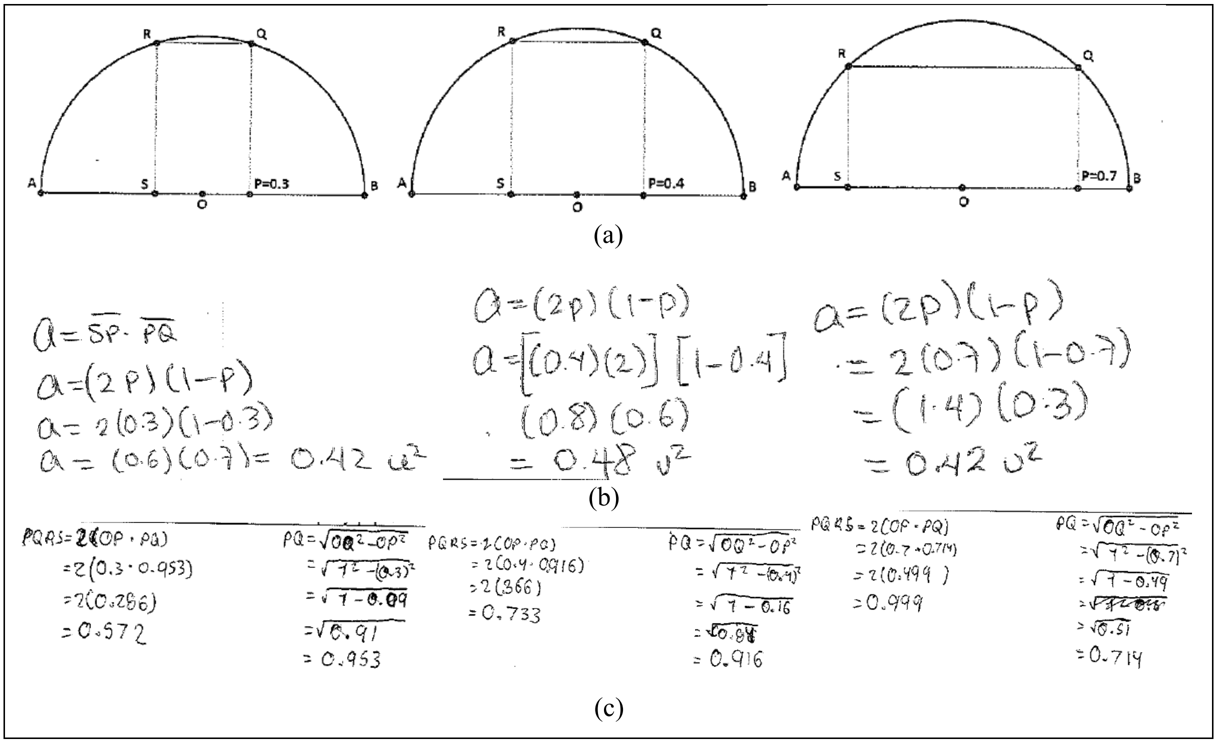


Figura 5.19. Cálculo de casos particulares; (a) Registros geométricos particulares; (b) Respuestas dadas por E1; (c) Respuestas dadas por E8.

Ante las preguntas: 3.1.4. ¿Qué variables intervienen cuando el punto P se desplaza sobre el segmento $\overline{OB}$ manteniendo la configuración geométrica? Y ¿cuál es el intervalo de variación para cada una de las variables identificadas? En el Nivel 1, se identifica parcialmente la covariación al mencionar únicamente la variable independiente asociada con el punto geométrico P. Por ejemplo, el equipo 3 considera que la variación depende de la posición del punto P ubicada sobre el segmento $\overline{AB}$; esta pareja menciona que "la variación [del punto P] va de -1 a 1". Esta respuesta no muestra indicios de la covariación a pesar de que el cálculo de área del rectángulo *PQRS* para los casos particulares muestra la covariación de manera implícita, por lo que el análisis de la covariación es parcial. En el Nivel 2, se considera que hay diversas variables involucradas en el problema basados en el desplazamiento del punto P que se relaciona con la base del rectángulo, su altura, así como su área, pero no se proporcionan los intervalos de variación. Por ejemplo, el equipo 4 afirma que las variables que intervienen son "distancia del segmento $\overline{OP}$ y la distancia $\overline{RS}$, ángulos internos y el área y perímetro del rectángulo [*PQRS*]" (véase Figura 5.20.a).

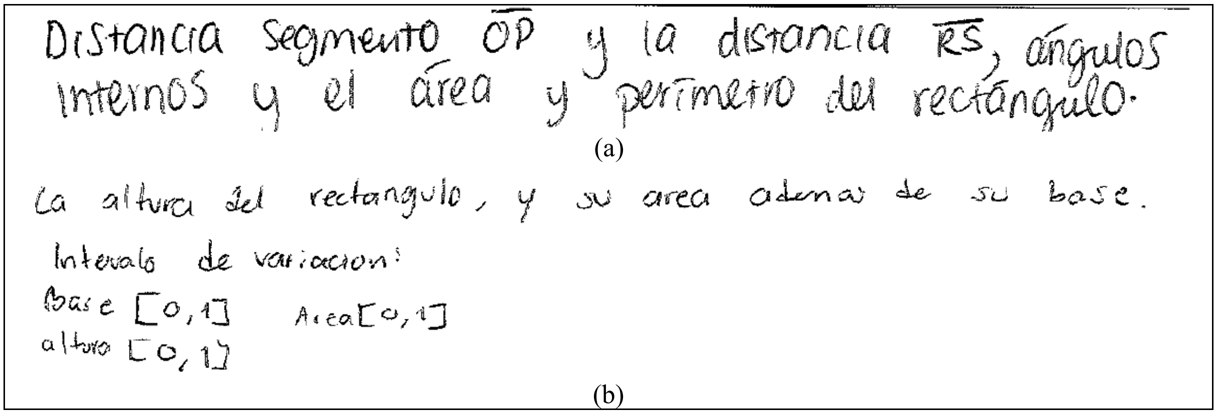


Figura 5.20. Variables asociadas a la SGD (a) Respuesta dada por E4; (b) Respuesta dada por E6.

En el Nivel 3, se identifican las variables que establecen la covariación y se proporcionan los intervalos de variación de éstas. E6 menciona que las variables que intervienen en la situación son "la altura del rectángulo [$PQRS$] y su área, además de su base. Intervalo de variación: Base [0,1], altura [0,1] y área [0,1]" (véase Figura 5.20.b). Esta pregunta propicia que los estudiantes se refieran a las variables que a su juicio intervienen en la SGD. Se debe destacar que dos parejas (E3, E6) consideran la base del rectángulo $PQRS$, su altura y su área como variables que intervienen en la situación y dan a conocer el intervalo de cambio para cada una. A pesar de que los participantes han trabajado con otras situaciones geométricas previamente, conviene atender que ningún equipo hace referencia a alguna variable como x y y, lo que hace suponer que el contexto geométrico en el que se desarrolla la situación influye en el apego para la asignación de variables.

5.8.2.4. Representación de la covariación

La categoría de representación de la covariación se promueve ante la pregunta: 3.1.5. ¿Qué expresión permite calcular el área del rectángulo $PQRS$ para cualquier punto P ubicado en el segmento $\overline{AB}$? Por medio de esta pregunta se pretende que los participantes generen la necesidad de proponer una representación simbólica que vincule el punto P con el área del rectángulo $PQRS$; las respuestas se distinguen por el tipo de notación empleada: geométrica [G], mixta [M] y algebraica [A] (véase Tabla 5.7) y por la integración en la expresión simbólica de los datos: $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OQ} = \overline{OR} = 1$, $\overline{OP} = \overline{SO}$, $\overline{OQ}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PQ}^2$ y $\overline{SP} = \overline{OP} + \overline{SO} = 2 \cdot \overline{OP}$.

En el Nivel 1, se agrupan las respuestas que representan la covariación por medio de una expresión con notación geométrica. Por ejemplo, los resultados de los equipos 4 y 8 emplean notación geométrica para representar el área del rectángulo *PQRS* como el producto de la base ($2\cdot\overline{OP}$) por su altura $\left(\sqrt{(\overline{OB}^2-\overline{OP}^2)}\right)$ (véase Tabla 5.7, referencia N1). Debido a que ningún equipo expresa el área del rectángulo *PQRS* con notación mixta no hay ninguna respuesta asociada con el Nivel 2.

Tabla 5.7
Respuestas asociadas con la representación de la covariación: primer momento de la Actividad 3

Nivel de respuesta	**Respuesta**	**Notación**	**Elementos**	**Equipo**
N1	$A_{\square} = \underbrace{\left(2\,\overline{OP}\right)}\left(\sqrt{(\overline{OB}-\overline{OP})''}\right)$	Geométrica [G]	Las variables son vistas como segmentos	E4
	$PQRS = 2\left[OP\left(\sqrt{\cancel{} - op^2}\right)\right]$ $= 2\left[OP\left(\sqrt{OQ^2-op^2}\right)\right]$			E8
N3	$a=(2p)(1-p) = 2p-2p^2$ Dado que P vale una determinada cantidad y que es el mismo valor que en lado opuesto y tomando en cuenta que $a=1$ entonces $(2p)(1-p)$	Algebraica [A]	Se emplean variables algebraicas o literales	E1
	$A_T=(P)(\overline{PQ})$ $P=(2-PB)$ $PQ=\sqrt{(\overline{OQ})^2-(\overline{OP})^2}$ $A_T=(2P)(\overline{PQ})$ $PQ=\sqrt{1-(P)^2}$ $A_T=(2P)(\sqrt{1-(P)^2})$ $y=$ Ya			E3
	$xy=A$ $y=1-x^2$ $2x(1-x^2)=A$ $2x$			E7

Ninguna respuesta de los participantes mostró características de notación mixta [M] asociada con el Nivel 2.

En el Nivel 3, se representa la covariación mediante una expresión que involucra la notación algebraica. Seis parejas proporcionan una respuesta asociada con este nivel; de ellas, durante el cálculo de la altura del rectángulo *PQRS*, dos equipos (E1, E7) omiten la raíz cuadrada cuando aplican el teorema de Pitágoras y cuatro equipos (E2, E3, E5, E6) integran en la expresión este dato (véase Tabla 5.7 referencia N3). Al analizar las respuestas a esta pregunta se puede advertir que la mitad de los equipos mantienen elementos geométricos al iniciar el análisis de la situación surgidos del contexto en el que se formuló el problema, y después recurren a elementos algebraicos que —suponemos— se deben a la familiarización que se hizo al abordar las SGD previas.

De acuerdo con las respuestas anteriores, en este momento se reconoce la literal a o A como variable dependiente y el equipo (E7) es el único que emplea la literal y para distinguir esta variable. La manera de representar la variable dependiente muestra que es reconocida como tal y no como etiqueta —a excepción del Equipo 8, que nombra $PQRS$ al área del rectángulo— por la manera en que es asignada. Los datos que integran todas las parejas al representar el área del rectángulo $PQRS$ son $\overline{OB} = \overline{OQ} = 1$, $\overline{OQ}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PQ}^2$ y $\overline{SP} = 2 \cdot \overline{OP}$. Sin embargo, E1 considera que $\overline{SP} = 2 \cdot p$ y $\overline{PQ} = 1 - p$, por lo que expresan el área del rectángulo $PQRS$ como $a = (2p)(1 - p)$ y E7 representa el área del rectángulo $PQRS$ como $A = 2x(1 - x^2)$ en términos de dos variables: x para la base del rectángulo $PQRS$ (segmento $\overline{OP}$) y y para su altura $\overline{PQ} = 1 - x^2$ (véase Tabla 5.7 referencia N3).

Las respuestas que se muestran en la Tabla 5.7 son las representativas de cada nivel relacionadas con la representación de la covariación durante el primer momento de la Actividad 3; no se incluyen las respuestas del total de los equipos para evitar ser redundantes. Se debe destacar que sólo dos parejas (E4, E8) representan la expresión simbólica con notación geométrica en términos de variables geométricas ($\overline{OP}$ y $\overline{OB}$ para el equipo 4 y $\overline{OP}\ y\ \overline{OQ}$ para el equipo 8). Además, seis equipos emplean notación algebraica; de ellos, cuatro representan la variable independiente con la literal p y dos equipos con x. En este momento, con la experiencia en las Actividades anteriores, la mayor parte de los participantes tienden a separarse del contexto geométrico al emplear expresiones que representan la situación usando variables algebraicas y tienden a darle mayor importancia a la incorporación de los datos en la expresión.

5.8.2.5. Consecuencias de la covariación

En este componente los participantes establecen una relación entre el registro simbólico [regla de correspondencia] obtenido previamente y otros registros de representación [tabular y/o gráfico]. La consigna que promueve este componente es: 3.1.6. Elabora la representación gráfica de la expresión simbólica obtenida en el inciso 3.1.5.[25] Debido a que ninguna producción relacionó la regla de correspondencia con el registro gráfico de manera

[25] La pregunta 3.1.5 está centrada en la obtención de la expresión que permite calcular el área del rectángulo PQRS para cualquier punto P ubicado sobre el segmento $\overline{OB}$.

intuitiva no se registraron respuestas asociadas con el Nivel 1. En el Nivel 2, la representación gráfica está asociada parcialmente con la covariación ya que contiene elementos que no corresponden a la situación. En este nivel, cuatro equipos coordinan la relación entre el registro tabular y el registro gráfico, basados en la regla de correspondencia, pero la gráfica no corresponde con la situación planteada. Por un lado, dos equipos (E1, E7) emplean una expresión que no incorpora la raíz cuadrada; E7 se basa en la expresión $A = 2x(1 - x^2)$ para representar el área del rectángulo $PQRS$, por lo tanto, la representación gráfica está asociada a una relación funcional cúbica (véase Figura 5.20.a). Por otro lado, dos equipos (E2, E4) emplean al teorema de Pitágoras para obtener la altura $\overline{PQ}$ del rectángulo $PQRS$ y calcular su área, pero omiten elevar al cuadrado cada término del radicando; E4 se basa en la expresión $f(x) = (2x)\left(\sqrt{1 - x}\right)$ para obtener una curva con características similares, pero que no corresponde a la buscada (véase Figura 5.20.b).

En el Nivel 3, se tiene una coordinación entre los registros de representación [tabular y gráfico] basados en la regla de correspondencia que cumple con las condiciones de la situación. Los resultados dan evidencia de que cuatro equipos relacionan los valores de la posición del punto P —asociada con una longitud— con el valor del área del rectángulo $PQRS$; por ejemplo, E5 se basa en la expresión $A = \left(\sqrt{1 - p^2}\right)(2p)$ y coordinan la relación entre p como variable independiente y el área del rectángulo A como variable dependiente. En este nivel, la representación gráfica corresponde a las características de la situación geométrica planteada (véase Figura 5.20.c).

Ante las preguntas: 3.1.4. ¿Qué variables intervienen cuando el punto P se desplaza sobre el segmento $\overline{AB}$ manteniendo la configuración geométrica? Y ¿cuál es el intervalo de variación para cada una de las variables identificadas? Las respuestas asociadas con el Nivel 1 corresponden a aquellos equipos que omiten la variación conjunta de variables y sólo incluyen el intervalo de variación para una de ellas (véase Figura 5.21.a).

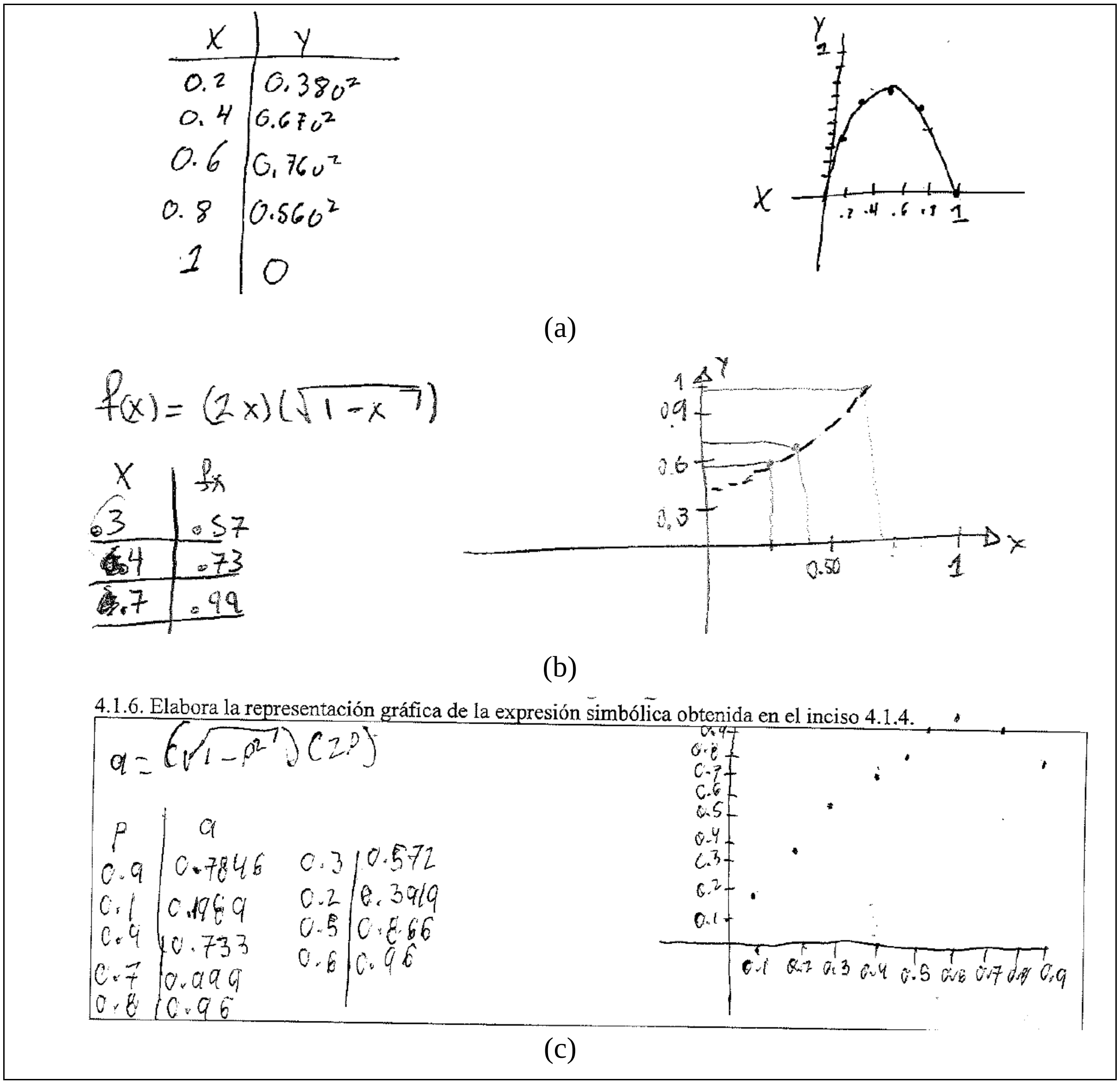


Figura 5.20. Representaciones gráficas trazadas por los estudiantes; (a) Respuesta de E1; (b) Respuesta de E4; (c) Respuesta de E5.

En el Nivel 2, se agrupan las producciones que consideran la variación conjunta entre dos o más variables sin detallar los intervalos de variación para cada una; por ejemplo, E4 considera la variación de los segmentos $\overline{OP}$ y $\overline{RS}$, así como, el área y el perímetro del rectángulo *PQRS* (véase Figura 5.21.b). Finalmente, en el Nivel 3 se tienen aquellas producciones en las que se reconoce que el intervalo de variación para la variable independiente (base del rectángulo *PQRS*) es entre 0 u y 1 u, y la variable dependiente (área del rectángulo *PQRS*) está entre 0 u^2 y 1 u^2 (véase Figura 5.21.c).

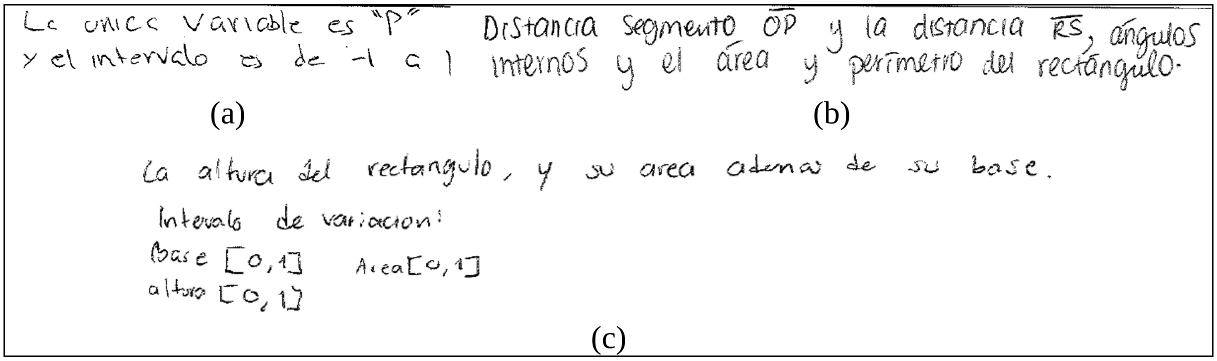


Figura 5.21. Intervalos de variación para las variables identificadas; (a) Respuesta de E3; (b) Respuesta de E4; (c) Respuesta de E7.

Ante la consigna: 3.1.7. En caso de existir un valor máximo para el área del rectángulo PQRS, ¿cuál es la posición del punto P en la que se obtiene el máximo valor de su área? En el Nivel 1, se indica la existencia del punto máximo, pero no corresponde a la situación planteada. Por un lado, E1 identifica que el valor máximo se localiza cuando el punto P está en la mitad del segmento $\overline{OP}$ (0.5 unidades). Por otro lado, E7 menciona que se aproxima a 0.59 (véase Figura 5.22.a). En el Nivel 2, se ubica el punto máximo por medio de una aproximación que corresponde con la situación planteada; por ejemplo, E4 considera que el valor máximo de área del rectángulo *PQRS* se aproxima a 0.7 unidades cuadradas (véase Figura 5.22.b). Finalmente, en el Nivel 3, se relacionan las variables y se detalla la ubicación del valor máximo de área del rectángulo *PQRS*, además, se proporcionan las características del registro gráfico. Las respuestas de tres equipos (E3, E6, E8) relacionan la posición del punto P con un valor determinado; $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\sqrt{0.5}$, respectivamente (véase Figura 5.22.c).

Con base en el análisis de que se realizó a lo largo de este capítulo, se puede distinguir que cuando los estudiantes abordan SGD en ambiente tradicional, difícilmente puede ser vista cada situación como dinámica debido a las características que proporciona el mismo ambiente. El análisis muestra la evidencia de que para lograr una visión de la covariación se debe partir desde una percepción discreta de la covariación, que está implícita en el cálculo de áreas de figuras geométricas a partir de casos particulares. La percepción discreta brinda la posibilidad de establecer una representación de la covariación por medio de una expresión simbólica. Esta representación simbólica de la covariación en la mayor parte de los casos mantiene rasgos del contexto geométrico en que fue obtenido y dificulta relacionar con otros registros de representación (*e.g.*, tabular y/o gráfico). A medida que se genera experiencia en el trabajo con SGD, los participantes reconocen la importancia de emplear expresiones algebraicas que permitan establecer las consecuencias de la covariación de manera más efectiva. En el siguiente capítulo se discute el análisis de las tres SGD expuestas en este capítulo, cuando se incorporan las herramientas digitales en la resolución de las situaciones.

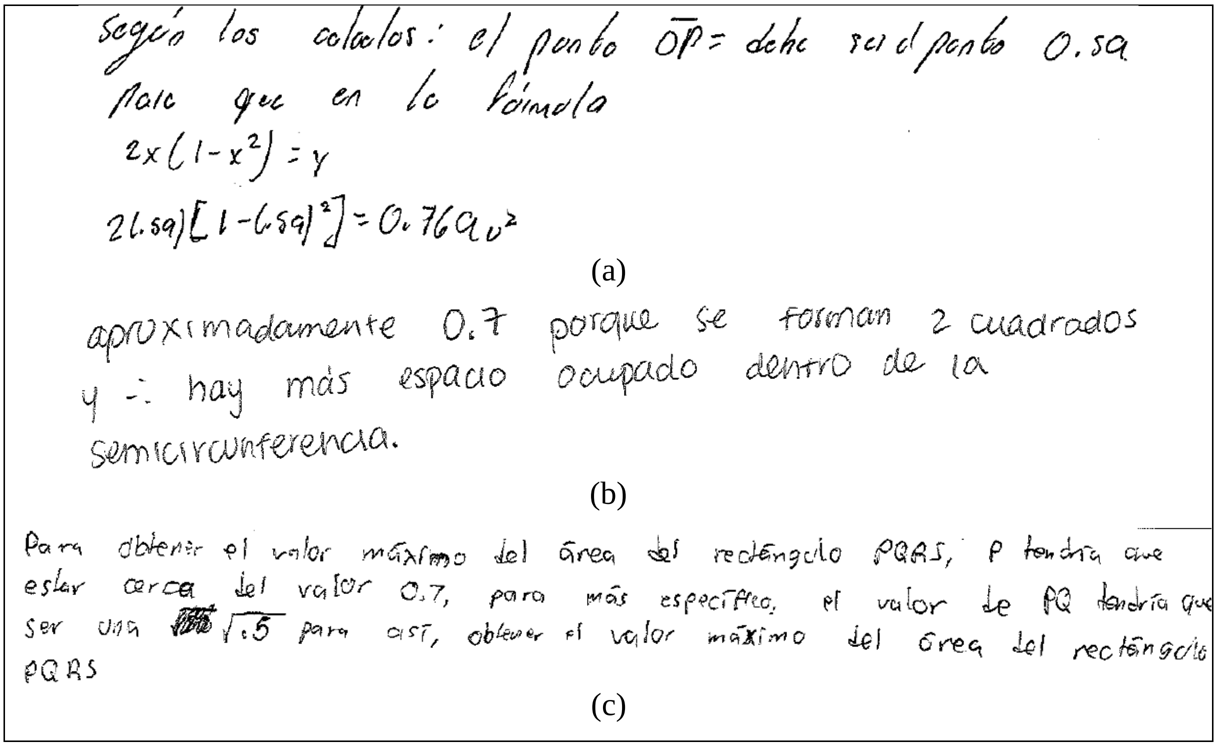


Figura 5.22. Valor máximo de área del rectángulo PQRS; (a) Respuesta de E7; (b) Respuesta E4; (c) Respuesta de E8.

CAPÍTULO 6

ANÁLISIS DE DATOS: SEGUNDO MOMENTO DE LAS ACTIVIDADES

6.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se exponen los resultados del análisis de las Actividades durante el segundo momento de la exploración de las situaciones geométricas dinámicas (SGD) que consistieron en: (1) generar, con ayuda del ambiente tecnológico digital, las SGD ya consideradas en el primer momento; (2) responder las mismas preguntas ya formuladas en el contexto de lápiz y papel; y, (3) emplear el software para generar la gráfica de las representaciones simbólicas propuestas, analizar la covariación y explorar algunas generalizaciones de cada SGD. En esta etapa del estudio, hubo interacción entre el investigador y los estudiantes, quienes por medio de preguntas lograron aclarar o ampliar algunas de las respuestas que dieron a las Actividades. Las Actividades que se describen en este capítulo ya habían sido abordadas previamente por los estudiantes en ambiente de lápiz y papel. Sin embargo, al involucrar el ambiente tecnológico digital como complemento del ambiente tradicional se promovió el sentido de covariación desde que se abordan las situaciones, lo que permitió a los participantes que percibir los problemas planteados como situaciones dinámicas al ser abordadas.

6.2. ANÁLISIS DE DATOS

El análisis de datos durante el segundo momento de la investigación está dirigido a responder la pregunta: ¿Qué aportan las actividades con el software para la formación del concepto de función? Exactamente, ¿qué se consigue al hacer uso de la herramienta tecnológica digital a diferencia de lo obtenido en el ambiente de lápiz y papel (primer momento de las Actividades)? Antes de comenzar la exposición, conviene aclarar que en este trabajo entendemos por *plano euclidiano dinámico* y *plano cartesiano dinámico* a las dos maneras diferentes en que se utiliza la pantalla de la computadora como representantes, ya sea del plano euclidiano o como plano cartesiano cuando se emplean coordenadas. Al representar un objeto en el plano euclidiano mediante las propiedades geométricas que lo definen, el objeto está formado por elementos independientes que el usuario puede mover y elementos dependientes que el software mueve conservando las propiedades y leyes propias de la geometría euclidiana. El usuario no necesita ser consciente de tales leyes, sin embargo, puede observar, y debe asumir, sus consecuencias cuando manipula los objetos inmersos en el ambiente. En el plano cartesiano dinámico se incorporan ejes coordenados al plano geométrico euclidiano por lo que se puede trabajar con expresiones algebraicas y sus gráficas. En este plano los objetos están asociados a un espacio en el que rigen las leyes tanto de la geometría como del álgebra.

El segundo momento de resolución consta de las tres situaciones ya tratadas en el ambiente de lápiz y papel (véase capítulo 5) y que son abordadas empleando el plano euclidiano dinámico e incorporando en su resolución el plano cartesiano dinámico. El uso del plano cartesiano dinámico comienza cuando se les pide a los estudiantes introducir en el software la expresión simbólica que representa la covariación y que dedujeron de la situación. A lo largo de la resolución el investigador realiza preguntas a los equipos con la finalidad de que ellos reflexionen sus respuestas escritas, y expliquen o amplíen algunas de sus ideas matemáticas que subyacen de la resolución de la SGD.

Los resultados obtenidos durante el segundo momento de las Actividades se integraron en tres de los cinco componentes descritos en el *marco para la organización del razonamiento de covariación* (véase parágrafo 3.5). El tercer componente de este marco (*III. Análisis previo de la covariación*) es el punto de partida para el análisis de los resultados expuestos más adelante. Se debe destacar que a partir de que los participantes abordaron las

Actividades con uso de la herramienta digital —en el segundo momento— éstas fueron percibidas por ellos como situaciones dinámicas, ya que en la primera tarea de cada Actividad debían construir, empleando las herramientas que posee el software, la estructura geométrica que representa la situación, promoviendo la percepción simultánea de la covariación; con ello se omitieron los dos primeros componentes del marco al percibirse la situación como dinámica. A continuación, se mencionan los tres componentes que surgen del análisis de datos para el segundo momento de las Actividades.

(*iii*) *Análisis previo de la covariación*, en este componente se identifican las variables dependiente e independiente y se describe el mecanismo de la covariación. Los elementos básicos que integran la covariación son: variables independiente y dependiente, regla de correspondencia y recorridos de ambas variables.

(*iv*) *Representación de la covariación*, en este se indica simbólicamente la regla de correspondencia, por ello el modelar las situaciones dinámicas se alcanza cuando se obtiene la expresión algebraica correspondiente y generar un sentido en ésta relacionado con su aspecto dinámico.

(*v*) *Consecuencias de la covariación*, en este componente se muestra la relación entre la regla de correspondencia y otras representaciones como la tabular y la gráfica, además, se determinan rangos de variación de las variables involucradas y se predicen y obtienen los máximos o mínimos de la función.

6.2.1. Consideraciones para el análisis

Para analizar los datos recabados se deben caracterizar las manifestaciones de razonamiento de covariación surgidas al resolver las situaciones y analizar las reflexiones, las interacciones y las respuestas escritas. Además, es esencial considerar el entorno social donde se realiza la Actividad, el rol que existe entre las interacciones alumno-alumno y alumno-investigador y el papel de la herramienta tecnológica digital para la resolución de la situación. Por ello, cada participación tanto de los estudiantes como del investigador se caracteriza mediante líneas (*e.g.*, [1], [2], [3], etc.), las cuales indican la ocasión en la que cada uno intervino. Para aclarar las intervenciones de los participantes, en caso de ser necesario, en cada línea se escribieron con letra cursiva y entre corchetes. Los puntos suspensivos (…) se utilizan para indicar breves pausas hechas por los estudiantes durante sus participaciones. Cuando se utilizan tres puntos ([…]) se pretende indicar que el estudiante mencionó algo que no se registró en dicha línea, o palabras aclaratorias que sirven para dar coherencia a lo dicho por cada participante. Se debe recordar que, en cada nivel de respuesta de cada Actividad, está asociado un número que aparece entre corchetes y que corresponde a la cantidad de respuestas relacionadas con el número de producciones de cada equipo asociadas a ese nivel. Por ejemplo, Nivel 2 [3] significa que las respuestas de tres equipos están asociadas con el Nivel 2 de respuesta.

A continuación, se muestran los resultados de las Actividades con base en las categorías descritas previamente, surgidas de las respuestas dadas por los participantes a las situaciones geométricas dinámicas durante el segundo momento de resolución.

6.3. Observaciones sobre la Actividad 1 en ambiente tecnológico digital

La primera Actividad que los estudiantes realizaron en el ambiente tecnológico digital consistió en representar, por medio del software Geogebra, la situación geométrica dinámica de la Actividad 1 que ya habían trabajado en ambiente de lápiz y papel. La Figura 6.1 ilustra la representación que los estudiantes obtendrían en la pantalla de la computadora.

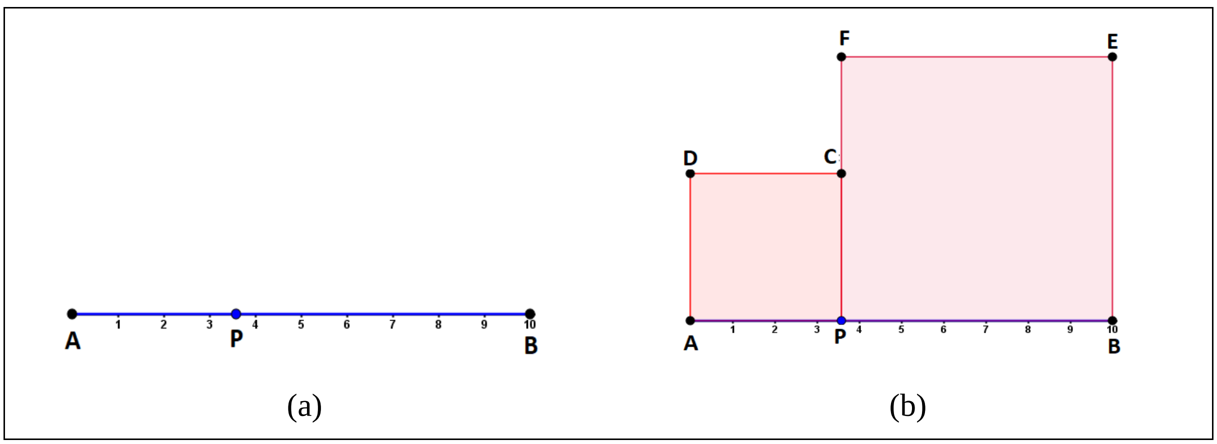


Figura 6.1. Primera SGD en Geogebra. (a) Segmento $\overline{AB}$; (b) Construcción del polígono *ABEFCD* empleando Geogebra.

Las preguntas que respondieron los estudiantes en esta Actividad fueron las mismas que las propuestas en ambiente de lápiz y papel y se puede percibir que al finalizar la Actividad 1 durante el segundo momento, los participantes avanzan hacia el último componente (*V. Consecuencias de la covariación*), pero cuando representan la expresión simbólica que permite determinar el caso general para el cálculo de área del polígono para cualquier segmento $\overline{AB}$ se asocia con el componente *IV. Representación de la covariación*, podría aludir a un retroceso en el desarrollo del razonamiento covariacional, sin embargo, por la formulación de la propia pregunta se establece el trabajo en dicho componente. En la Tabla 6.1 se muestra la manera en que cada pregunta está asociada con un componente del marco propuesto y las producciones relacionadas con cada nivel de respuesta.

Tabla 6.1
Resultados de los niveles de respuesta para el segundo momento: Actividad 1.

Componente		**I. Ignorancia de la covariación**			**II. Consideración de la covariación**			**III. Análisis previo de la covariación**			**IV. Representación de la covariación**			**V. Consecuencias de la covariación**		
Nivel de respuesta		*N1*	*N2*	*N3*	*N1*	*N2*	*N3*	*N1*	*N2*	*N3*	*N1*	*N2*	*N3*	*N1*	*N2*	*N3*
Pregunta	1.2.2.							3	3	2						
	1.2.3.										2	2	4			
	1.2.4.										1	4	3			
	1.2.5.										2	2	4			
	1.2.6.										0	1	7			
	1.2.7.										2	6	0			
	1.2.8.										6	0	2			
	1.2.9.													0	0	8
	1.2.10													2	0	6
	1.2.11.													0	8	0
	1.2.12.										0	4	4			

Debido a que las respuestas de la Actividad 1 están relacionadas en mayor medida con los últimos dos componentes del marco, se debe resaltar que en esta sección del trabajo de investigación se pretende responder: ¿Qué observaciones relevantes manifiestan los estudiantes en sus respuestas al resolver la Actividad con apoyo del ambiente tecnológico digital? Por ello, para no ser redundantes en la manera de analizar cada una de las preguntas cuyos rasgos son similares a los dados en el primer momento de la Actividad se destacarán las respuestas más trascendentales al hacer uso del software Geogebra.

6.3.1. Análisis previo de la covariación

Al finalizar la construcción de la situación dinámica —en el software— se pidió a los participantes responder la siguiente pregunta:

1.2.2. Mueve el punto P sobre el segmento $\overline{AB}$: observa los valores involucrados en la "Vista gráfica" y contesta ¿qué sucede al mover el punto?, ¿cómo se comporta el polígono *ABEFCD*?

Las respuestas de los estudiantes se vuelven a distinguir por el nivel de abstracción de los objetos matemáticos que mencionan con relación al contexto geométrico. Se pueden definir tres niveles en las cuales se pueden agrupar las respuestas:

Nivel 1 [3]. Se pone atención a la configuración geométrica (véase Figura 6.2.a).

Nivel 2 [3]. Se percibe que el cambio en el punto y/o segmento produce el cambio en el área del polígono (véase Figura 6.2.b).

Nivel 3 [2]. Se reconoce que el área del polígono depende de los valores asociados con el punto P vistos como una cantidad (véase Figura 6.2.c).

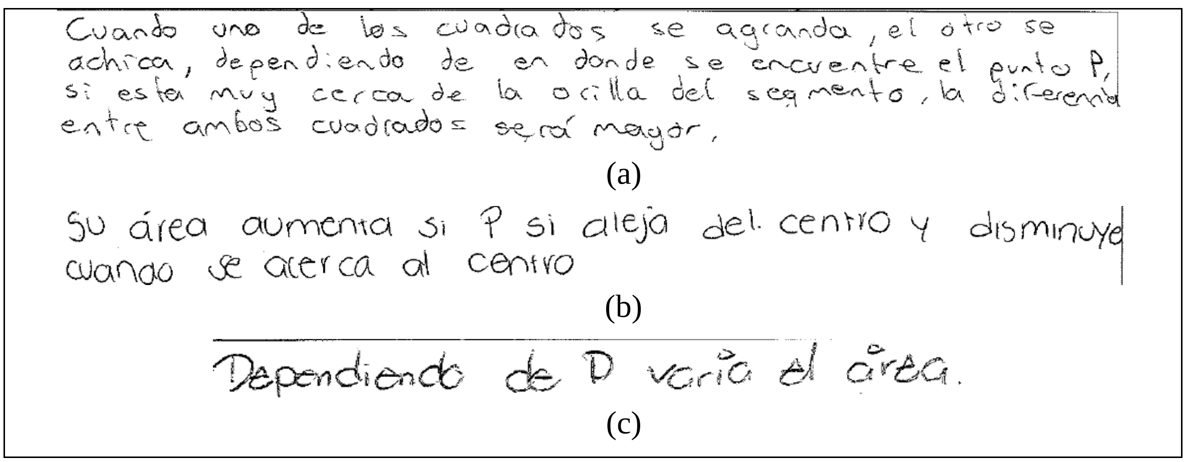
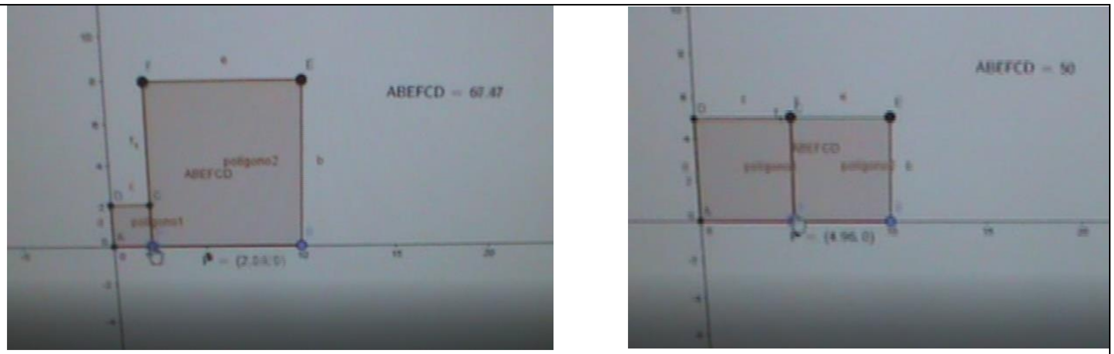


Figura 6.2. Descripción del comportamiento del área para el polígono *ABEFCD* cuando se desplaza P sobre el segmento $\overline{AB}$; (a) Respuesta de E6; (b) Respuesta de E2; (c) Respuesta de E1.

La representación de la situación en la pantalla de la computadora con el software dinámico se vuelve un lugar de experimentación en el que los estudiantes verifican manipulando el punto sobre la pantalla las predicciones que habían imaginado con lápiz y papel y, además, obtienen datos precisos como el valor exacto del polígono *ABEFCD* o el área mínima. Como ilustración de esto, transcribimos un fragmento de una interacción del investigador con el equipo 2 [conformado por el alumno 2A y alumno 2B] cuando exploraban en la representación.

[1] Investigador: ¿Qué sucede cuando mueven el punto P?
[2] Alumno 2A: Pues… las áreas de los polígonos [*se refiere a las áreas de los cuadrados*] cambian ¿no? Bueno, disminuyen o aumentan (véase Figura 6.3.a).

[3] Alumno 2B: Dependiendo dónde corte P al segmento $\overline{AB}$. Y cuando se corta justo en medio es el área mínima la que se va a tener del polígono [*ABEFCD*].
[4] Investigador: ¿Cómo saben que es el área mínima?
[5] Alumno 2B: Porque es el valor mínimo, llega al 50 justo cuando está ahí (véase Figura 6.3.b).



(a) (b)

Figura 6.3. Desplazamiento del punto P sobre el segmento $\overline{AB}$, por parte del E2: (a) identifican cómo cambia el área del polígono; (b) el área mínima del polígono se localiza en el punto medio del segmento $\overline{AB}$.

6.3.2. Representación de la covariación

Aunque los estudiantes representaron la situación geométrica dinámica en la pantalla con ayuda del software y tenían la posibilidad de mover el punto y ver automáticamente la configuración y el área, el software no les proporciona la expresión simbólica que da cuenta de la covariación. Por esto, se les pide otra vez que representen simbólicamente la situación mediante la consigna:

1.2.3. De acuerdo con la configuración geométrica, calcula el área del polígono *ABEFCD* para cualquier punto P que se coloque sobre el segmento $\overline{AB}$.

Las respuestas de los estudiantes vuelven a tener los mismos rasgos que sus respuestas en el ambiente de lápiz y papel, por lo que se clasifican en tres niveles de acuerdo con el grado de abstracción de la notación simbólica que utilizan respecto al contexto geométrico:

Nivel 1 [2]. Representa la covariación con una expresión usando notación geométrica.

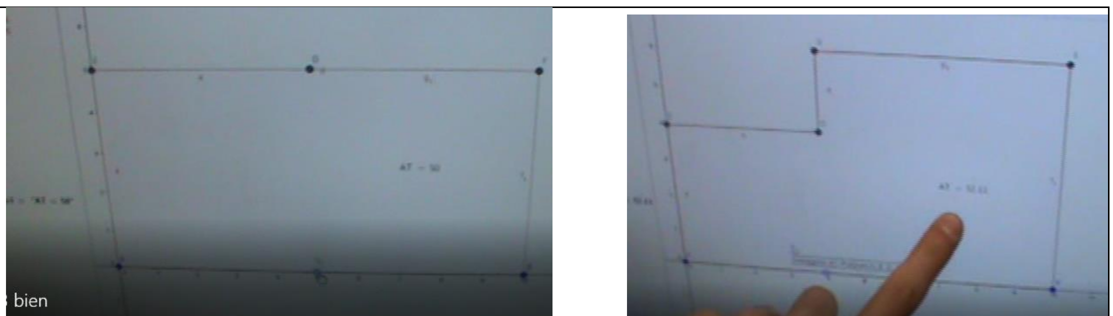
Nivel 2 [2]. Representa la covariación con una expresión usando notación mixta.

Nivel 3 [4]. Representa la covariación con una expresión notación algebraica.

En las respuestas a esta pregunta cuatro equipos responden con una expresión simbólica con notación algebraica. Es claro, que la representación de la situación en el software no contribuye a que los estudiantes se alejen de la situación geométrica, pues en la pantalla de la computadora se recrea el contexto geométrico. No obstante, en la siguiente interacción de los estudiantes del equipo E3 con el investigador se puede apreciar en la línea 9 que el alumno 3A describe el mecanismo de la covariación e indica que sustituye el segmento $\overline{AP}$ por la variable p, y explica cómo llega a la expresión algebraica: $A_t = p^2 + (10 - p)^2$.

[6] Investigador: Pueden mover el punto P. ¿Qué es lo que pasa con el polígono?

[7] Alumno 3A: Cuando el punto está más cerca del punto medio que aquí es cinco [*unidades*], el área del polígono va a ser la más pequeña mientras se acerca [*al punto medio del segmento* $\overline{AB}$] (véase Figura 6.4.a). Y mientras se aleja va a ser más grande por los dos lados [*se refiere a los dos extremos del segmento* $\overline{AB}$], porque son las mismas longitudes [*se refiere a que el polígono se convierte en cuadrado cuyo lado es la longitud del segmento* $\overline{AB}$] (véase Figura 6.4.b).



(a) (b)

Figura 6.4. Desplazamiento del punto P sobre el segmento $\overline{AB}$, por parte del equipo 3: (a) el área mínima del polígono se localiza en el punto medio del segmento $\overline{AB}$; (b) identificación de cómo el área del polígono cambia.

[8] Investigador: Y la forma de expresar el área. ¿Cómo llegaron a esta manera de expresarla? [*Señala la expresión en la hoja de trabajo*].

[9] Alumno 3A: El área total es igual al área uno más el área dos. La de este cuadrado sería área uno y la de este cuadrado sería área dos. Entonces el área uno está dado por AP^2, o sea el segmento $\overline{AP}$ al cuadrado. Pero $\overline{AP}$ es lo mismo que p , por lo tanto, el área uno va a ser igual a p cuadrada. Y el área dos es el segmento $\overline{PB}$ al cuadrado, pero el segmento $\overline{PB}$ podemos representarlo como diez que es la longitud total menos el segmento $\overline{AP}$. Si le quitamos esto, queda este segmento [*señala en la pantalla de la computadora los segmentos*], entonces queda diez menos p al cuadrado. Entonces, el área total [*área del polígono ABEFCD*] queda $A_t = p^2 + (10 - p)^2$ y ya desarrollándolo queda un trinomio cuadrado perfecto y queda esta expresión [*al simplificar*] (véase Tabla 6.2, referencia E3 primer acercamiento).

En el dialogo [9] conviene destacar que la sustitución del segmento $\overline{AP}$ por la variable p posiblemente estuvo motivada por la posibilidad que tiene el estudiante de variar la longitud del segmento $\overline{AP}$. En cualquier caso, de lo que se puede estar seguro es que estos estudiantes conciben la p en la expresión dada, como una variable que encapsula el movimiento del punto, y no sólo como incógnita o número general.

Sólo después de que los estudiantes han propuesto una expresión algebraica se les pide encontrar el área de la configuración para valores particulares de la variable y representarlos en una tabla. Esto se hizo mediante la pregunta:

> 1.2.4. Calcular el área de los polígonos *ABEFCD* que se encuentran en las siguientes figuras (cuando el punto P se ubica en 3, 5.5. y 8.7 unidades). Anota los resultados en la primera columna de la tabla dada. En la segunda columna anota el valor del área del polígono *ABEFCD* dado por el software. Si alguno de los resultados dados por Geogebra y el ambiente de lápiz y papel difieren, reajústalos usando manipulaciones algebraicas y escribe los resultados en la última columna.

Esta pregunta sirvió para que compararan los valores que encontraron sustituyendo en las expresiones simbólicas que propusieron en el ambiente de lápiz y papel con los valores correspondientes dados por las expresiones simbólicas que propusieron en el ambiente con tecnología. Así, los equipos (E1 y E4) notaron que los valores del área del polígono encontrados con lápiz y papel no coincidían con los que determinaron en el ambiente tecnológico. En el siguiente extracto de entrevista entre el equipo 4 y el investigador, el estudiante explica cómo se dio cuenta de que debía corregir la expresión que hizo en el ambiente de lápiz y papel:

[10] Investigador:	Explíquenme por qué motivo llegaron a estos resultados, que difirieron [*se refiere a que los resultados en el ambiente de lápiz y papel y el tecnológico digital fueron diferentes*] y cómo se dieron cuenta de que los cálculos [*propuestos originalmente*] no eran correctos.
[11] Alumno 4A:	En un principio teníamos una fórmula que era $2p \cdot 2(10 - p)$. Después de ver que nuestros resultados eran diferentes a los del software, nos dimos cuenta de que estaban mal, nos dimos cuenta de que para un cuadrado no era un dos [*multiplicar por dos (el doble)*] sino era un cuadrado; como su nombre lo dice tenemos que elevar p al cuadrado y al igual que este dos [*señala, en el ambiente de lápiz y papel, el término que representa el área del segundo cuadrado*] tenía que volverse cuadrado, porque eran segmentos. Nuestro segundo error fue que estábamos multiplicando nuestra primera variable por nuestra segunda variable [*cada variable representa el área de un cuadrado*] cuando en realidad lo que tenemos que hacer es sumarlos y fue nuestra siguiente corrección.
[12] Investigador:	¿Y con eso, llegaron a los mismos resultados que da el software?
[13] Alumno 4A:	¡Sí!
[14] Investigador:	Entonces, ¿ésta es la forma en que expresarían el área de cualquier polígono [*ABEFCD*] con esas características?

[15] Alumno 4A: ¡Ajá! [*Señalan la expresión* $p^2 + (10 - p)^2$ *en ambiente de lápiz y papel ubicada en la tercera columna*] (véase Figura 6.5).

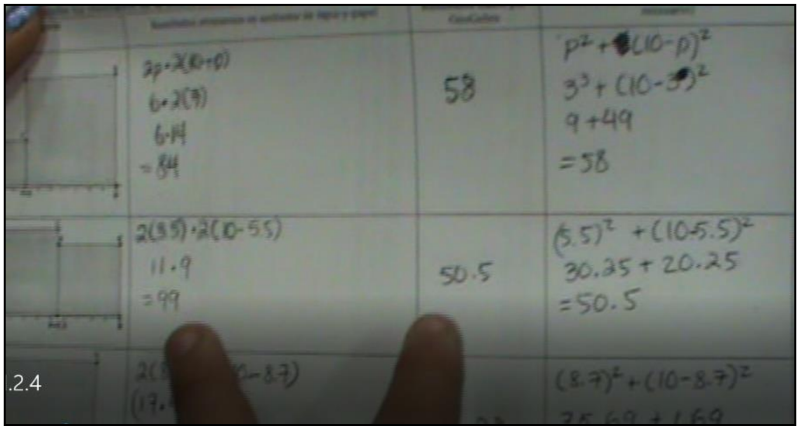


Figura 6.5. Respuestas del equipo 4, cuando comparan los resultados propuestos en lápiz y papel respecto a los dados por el software.

El siguiente paso después de que los estudiantes han propuesto representaciones simbólicas de la covariación es utilizar la pantalla de la computadora para representarla en el plano cartesiano, es decir, dibujar su gráfica. Aunque la representación de la situación en el plano euclidiano dinámico hace más transparente la covariación, no ayuda a que los estudiantes utilicen la notación tradicional (x y y) en sus representaciones simbólicas; los más avanzados que propusieron una expresión algebraica utilizaron los símbolos A para el área y p para la variable independiente. Por esta razón fue necesario pedirles que resolvieran la siguiente tarea:

1.2.6. ¿De qué manera se puede simplificar la expresión simbólica obtenida previamente? Se sugiere nombrar x a la medida del segmento $\overline{AP}$, expresar la medida de otros segmentos en términos de x y representar el área del polígono *ABEFCD* como y.

Esta pregunta es importante y necesaria para que las expresiones propuestas contengan las literales x y y (notación tradicional), ya que se pretende generar una expresión que pueda ingresarse a Geogebra, que sea reconocida y pueda ser representada por esta herramienta digital. Es importante mencionar que, de no llevarse a cabo el cambio para utilizar en las expresiones con notación tradicional, el software no podrá representar gráficamente la expresión, ya que las literales diferentes a x y y deben ser definidas previamente, de otra manera el software no las reconoce.

En las respuestas se pueden distinguir dos niveles que llamaremos Nivel 2 y Nivel 3 para que sean consistentes con los niveles ya definidos. Éstos son:

Nivel 2. Notación mixta. Utilizan las literales x y y, pero también al menos un símbolo geométrico; por ejemplo: E4 muestra la expresión $y = x^2 + (\overline{AB} - x)^2$ (véase Figura 6.6.a)

Nivel 3. Notación algebraica. En este nivel de respuesta se presentan dos tipos de registro: (i) aquellos que representan el área del polígono *ABEFCD* en términos de una sola variable (véase Figura 6.6.b) y (ii) aquellos que involucran un parámetro y no incorporan el dato $\overline{AB} = 10$. Por ejemplo, E8 utiliza la literal a que asocia con la longitud del segmento $\overline{AB}$, por lo que proponen la expresión $y = x^2 + (a - x)^2$ (véase Figura 6.6.c).

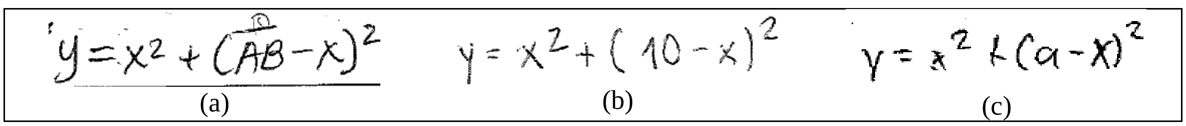


Figura 6.6. Cálculo de área del polígono en términos de x y y. (a) Respuesta de E4; (b) Respuesta de E1; (c) Respuesta de E8.

La Tabla 6.2 muestra las expresiones simbólicas que proporcionaron algunos equipos tanto en la actividad previa con lápiz y papel como en el ambiente con tecnología; debe notarse que en el caso de los equipos 6, 4 y 3 se incluye sus representaciones de ambos momentos, por lo que se puede ver la evolución de sus representaciones. En el caso de E4 hubo un claro avance.

Para identificar si la expresión propuesta puede representarse gráficamente se realizó la siguiente consigna:

1.2.8. ¿La expresión simbólica propuesta previamente puede representarse gráficamente? En caso afirmativo, ¿qué tipo de gráfica se obtendrá? [La respuesta a esta pregunta es para que se responda con lápiz y papel antes de introducir la función en el software].

El Nivel 1 no se relaciona con ninguna respuesta, ya que ningún equipo indicó que no puede representarse la expresión simbólica en el plano cartesiano. En el Nivel 2, quedó de manifiesto que la expresión simbólica en términos de x y y representaba una parábola; por ejemplo, E4 responde que “se parece a la función de una parábola, por lo tanto, se infiere que será una parábola”. En el Nivel 3, se dice con certeza que la expresión simbólica es una parábola y se dan detalles o características de su representación gráfica; por ejemplo, E3 responde que “Sí [*se puede representarse gráficamente*] y es una parábola que abre hacia arriba y tiene un vértice en 50”.

La última pregunta está asociada con la representación de la covariación, ya que se les pidió a los participantes responder:

> 1.2.12. ¿Cuál será la expresión algebraica para cualquier longitud del segmento $\overline{AB}$? ¿Cómo se verá afectada su gráfica? [La respuesta a esta pregunta es para que se responda con lápiz y papel antes de introducir la función en el software]

Las respuestas dadas a esta pregunta se ubicaron en los Niveles 2 y 3, ya que los participantes emplean notación mixta y notación algebraica, respectivamente, para representar el área de cualquier polígono *ABEFCD* con base en un segmento $\overline{AB}$ de longitud cualquiera. En el Nivel 2, se genera una expresión simbólica que involucra variables algebraicas y geométricas, por ejemplo, $f(x) = x^2 + (\overline{AB} - x)^2$ (véase Figura 6.7.a) o $A = p^2 + (\overline{AB} - p)^2$ (véase Figura 6.7.b). En el Nivel 3, se expresa el área del polígono en términos de una sola variable x y un parámetro n, z, b. Por ejemplo: $y = x^2 + (n - x)^2$ (véase Figura 6.7.c) o $y = x^2 + (z - x)^2$ (véase Figura 6.7.d).

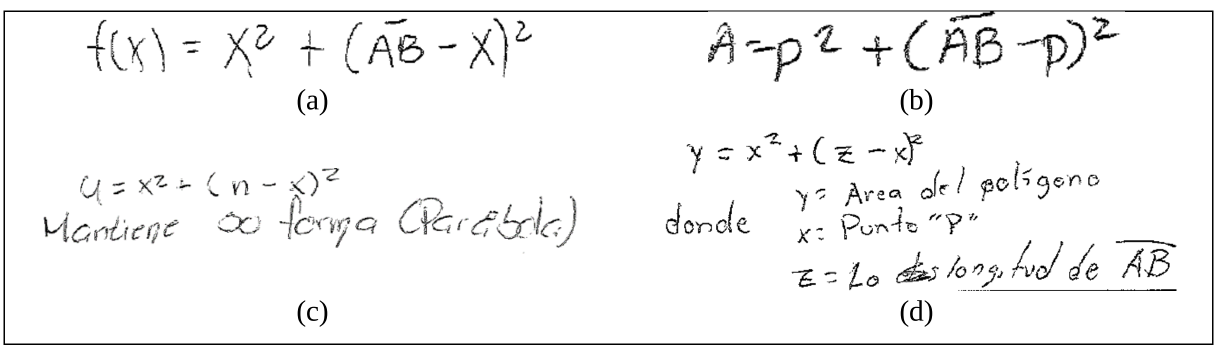


Figura 6.7. Representación simbólica para cualquier valor del segmento $\overline{AB}$: (a) Respuesta dada por E2. (b) Respuesta dada por E4. (c) Respuesta dada por E1; (d) Respuesta dada por E7.

Cuando se entrevista a los participantes, explican que para los diferentes valores del segmento $\overline{AB}$ se mantendrá la forma parabólica que representa el cambio del área del polígono cuando la variable independiente x cambie (véase Figura 6.7.c). En general, con base en la expresión simbólica que se obtuvo, cada equipo explicó, cuando la longitud del segmento $\overline{AB}$ cambia, la gráfica se comporta con características similares a la gráfica de la SGD original.

Tabla 6.2

Respuestas asociadas con la representación de la covariación. Segundo momento de la Actividad 1.

Nivel de respuesta	Notación	Elementos	Respuesta	Equipo	Respuesta	Equipo
			Primer acercamiento		Segundo acercamiento	
N1	Geométrica [G]	Las variables son vistas como segmentos	$AT_p = \overline{AP}^2 + \overline{PB}^2$	E2	$a = (\overline{AP})^2 + (\overline{AB} - \overline{AP})^2$	E5
N2	Mixta [M]	Se emplea una combinación de variables geométricas y/o algebraicas y/o lenguaje natural	Área $ABEFCD = AP^2 + PB^2$ $ABEFCD = AP^2 + (AB - AP)^2$	E8	$A = p^2 + (\overline{AB} - p)^2$	E4
			$f(p) = p^2 + (\overline{AB} - p)^2$	E6	$f(p) = p^2 + (\overline{AB} - p)^2$	E6
N3	Algebraica [A]	Se emplean variables algebraicas o literales	$= 2p \cdot 2(10 - p)$ Porque "p" es la variable y es la distancia que se desplaza & modifica el área.	E4	$a = p^2 + (10 - p)^2$	E4
			$A_1 = p^2$ $A_2 = (10 - p)^2$ $\therefore$ $A_T = p^2 + (10 - p)^2$ $A_T = p^2 + (100 - 20p + p^2)$ $A_T = 2p^2 - 20p + 100$	E3	$A_T = 2p^2 - 20p + 100$	E3

6.3.3. Consecuencias de la covariación

En este componente se establece una relación entre la regla de correspondencia [registro simbólico] asociada con la representación de la covariación y otros registros de representación [tabular y gráfico] relacionados con el actual componente. Las respuestas en este componente fueron motivadas por la consigna:

> 1.2.9. De acuerdo con los resultados del inciso 1.2.4[26], elabora una tabla que relacione la longitud del segmento $\overline{AP}$ con el área del polígono *ABEFCD*. Después dibuja la representación gráfica que relaciona los valores obtenidos en la tabla.

Los participantes se basan en los cálculos realizados previamente para elaborar una tabla, ubicar los puntos en la tabla y trazar la gráfica. Los resultados muestran que no tienen dificultades para ubicar los puntos en el plano cartesiano a partir de la tabla, para ello retoman los valores obtenidos previamente durante el cálculo del área del polígono para los casos particulares; por esto, ningún resultado se asocia con el Nivel 1. En el Nivel 2, se incluyen aquellas representaciones gráficas que son parcialmente correctas, ya que la gráfica no considera los valores extremos del segmento $\overline{AB}$, es decir 0 y 10 unidades (véase Figura 6.8.a). En el Nivel 3, se consideran las gráficas que representan la covariación de manera continua con variación entre 0 y 10 unidades para la variable independiente (véase Figura 6.8.b).

La siguiente pregunta va encaminada a la identificación de la variación de cada variable, es por ello que se atiende la consigna:

> 1.2.10. ¿Cuál es el intervalo de variación para cada una de las variables identificadas?

En el Nivel 1, se menciona el intervalo de variación para una de las variables identificadas. Por ejemplo, E3 menciona que "el valor sería entre $[0, 10]$"; éste es el intervalo de variación de la variable independiente, por lo que omiten la variación conjunta de variables (véase Figura 6.9.a). En el Nivel 2, ningún equipo expresa el intervalo de variación para las variables dependiente e independiente que integre alguna discrepancia o inconsistencia, por ello no hay registros asociados con este nivel. Finalmente, en el Nivel 3,

[26] La pregunta 1.2.4 está relacionada con el cálculo de área del polígono *ABEFCD* cuando se considera que el punto P se ubica en diferentes posiciones (*e.g.*, 3, 5.5, 8.7) sobre el segmento $\overline{AB}$, cuya medida es 10 unidades.

se considera el intervalo de variación de ambas variables, los cuales se corresponden con la situación planteada (véase Figuras 6.9.b y 6.9.c).

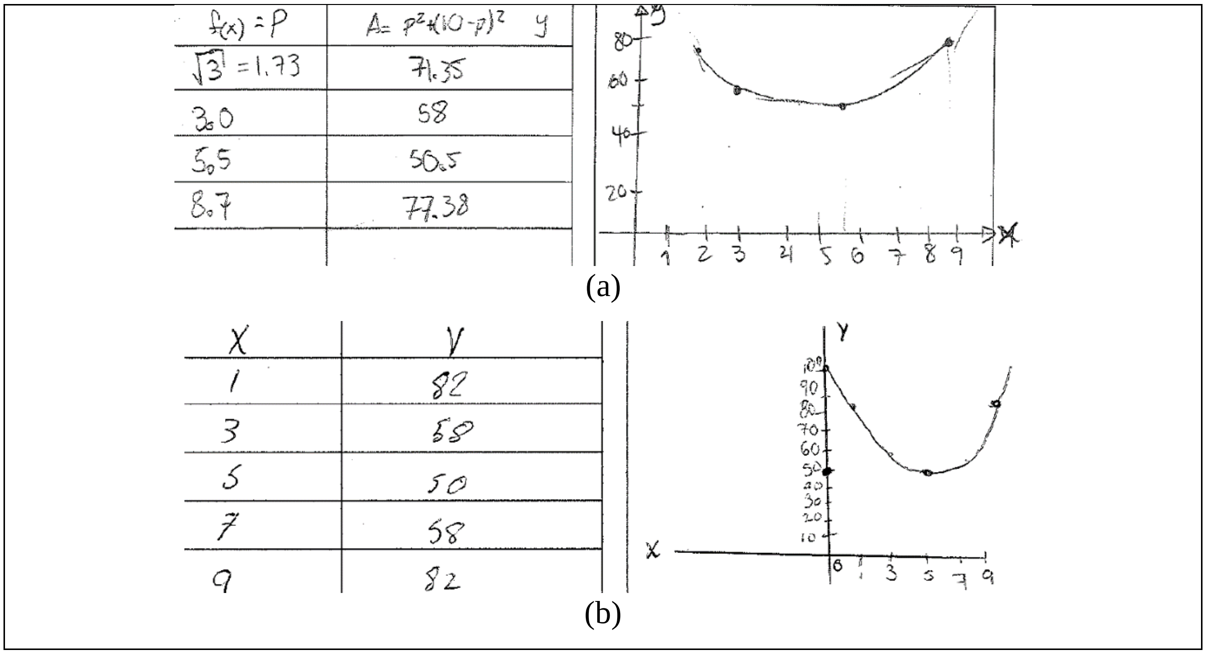


Figura 6.8. Representación gráfica de la expresión simbólica obtenida previamente. (a) Respuesta dada por E4. (b) Respuesta dada por E7.

Para fomentar otra de las consecuencias de la covariación se formula la pregunta:

1.2.11. ¿En qué valor del punto P se tiene el valor mínimo para el área del polígono *ABEFCD*? ¿A qué se debe?

El total de las parejas reconocen la existencia de un valor mínimo de área del polígono, por ello ningún resultado se asocia con el Nivel 1. En el Nivel 2, se agrupan aquellas respuestas que mencionan que el valor mínimo de área del polígono se localiza cuando P está en la mitad del segmento $\overline{AB}$. El total de parejas justifica la existencia del punto mínimo; E8 menciona que “cuando P se coloca a la mitad del segmento $\overline{AB}$, o sea cuando P es 5, es cuando el polígono se encuentra en el mínimo de su área…ya que se obtendrían dos sub–polígonos con las mismas medidas y éstas serían las mínimas”. Ningún resultado se asocia con el Nivel 3, debido a que ningún equipo proporciona características adicionales del registro gráfico, por ejemplo, ubicación del punto mínimo, descripción de los intervalos donde la gráfica es creciente o decreciente.

sería cualquier valor real entre el 0 y 10

$\therefore [0, 10]$

(a)

el intervalo de variacion va de 50 hasta 100 para el area o "y" y para x es de 0 a 10.

(b)

De $(0,0)$ a $(5,0) = [100, 50]$

De $(5,0)$ a $(0,10) = [50, 100]$

(c)

Figura 6.9. Intervalos de variación de la SGD. (a) Respuesta dada por E3; (b) Respuesta dada por E6; (c) Respuesta dada por E7.

A continuación, se transcribe lo mencionado por el equipo 4 al expresar el área del polígono *ABEFCD* cuando el punto P se desplaza sobre el segmento $\overline{AB}$ en el ambiente de lápiz y papel después de generar una expresión simbólica que validaron con el software Geogebra:

[16] Investigador: ¿Me pueden indicar, cómo llegaron la expresión del área [*del polígono ABEFCD*]? [*señala la expresión en lápiz y papel* $A = p^2 + (\overline{AB} - p)^2$].

[17] Alumno 4A: En un principio, en vez de p le habíamos dado [*asignado*] x y todo esto era y [*señala el término* $(\overline{AB} - p)^2$. *La idea original de este equipo fue* $A = x^2 + y^2$]. Entonces como sabíamos que sólo teníamos una variable que sería p cambiamos nuestra expresión en términos de p. Y bueno, aquí lo único que varía es nuestro segmento $\overline{AB}$, que si $\overline{AB}$ es más grande habría más distancia que se recorre dentro de este mismo segmento; y p es la distancia que se recorre dentro de $\overline{AB}$.

[18] Investigador: Y cuando hicieron el cambio de notación ¿qué notaron? [*Se refiere a nombrar x a la medida del segmento $\overline{AB}$ y y al área del polígono ABEFCD*].

[19] Alumno 4A: Bueno, en sí no notamos que varía mucho, solamente cambiamos p por x; sabemos que como son variables no afecta en nada. Nuestro segmento $\overline{AB}$ sigue siendo como una constante y el área es igual a y; como una función (véase Figura 6.10.b).

[20] Investigador: La gráfica que obtuvieron en lápiz y papel fue de esta manera (véase Figura 6.10.a), y la que da el software la pudieron verificar con la expresión algebraica (véase Figura 6.10.b). ¿Cómo son las gráficas y qué notaron?

[21] Alumno 4B: Las gráficas son así [*señalan la gráfica en lápiz y papel*], pero pensamos que podría subir para ser una parábola [*señala con el lápiz la continuación de la línea en la representación gráfica*] (véase Figura 6.10.a), pero también llegamos a pensar que podría ser una hipérbola. Y, aquí sustituimos los valores que teníamos en la otra hoja [*se refiere a la representación tabular*] y al ponerlos en la gráfica nos dio aproximadamente esta gráfica. Y cuando metimos [*en el software*] la fórmula… la de p^2 es igual a…

[22] Alumno 4A: La tienes atrás [*se refiere a la otra hoja*].

[23] Alumno 4B: …ésta, la metimos en el software [*señala la expresión*] (véase Figura 6.10.b).

[24] Investigador: ¿Por qué en el software no pueden poner ésta [*se refiere a* $A = p^2 + (10 - p)^2$], y tienen que meter ésta? [$y = x^2 + (\overline{AB} - x)^2$].

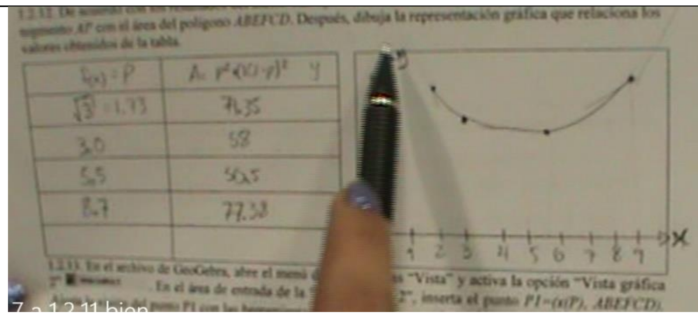
[25] Alumno 4B: Ah… tuvimos el mismo valor, teníamos un punto llamado F, que se confundía con F de función, entonces nos salía que marcaba error porqué decía que era una función circular y después lo que hicimos fue cambiar el término de F, lo renombramos a "y". Entonces cuando metimos la función con y ya nos salió una parábola y pudimos confirmar que era una parábola.

[26] Investigador: ¿Cuál es el punto mínimo?

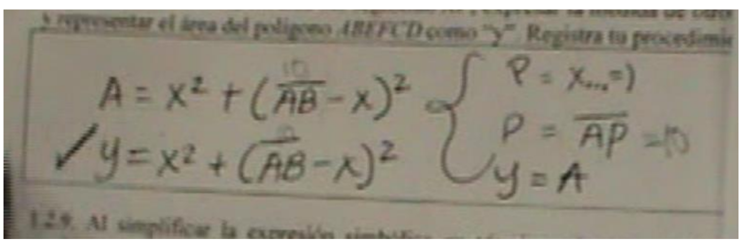
[27] Alumno 4A: El punto mínimo es 5, es cuando…de hecho aquí lo marcamos [*señala la hoja de trabajo*].

[28] Investigador: ¿El área mínima?

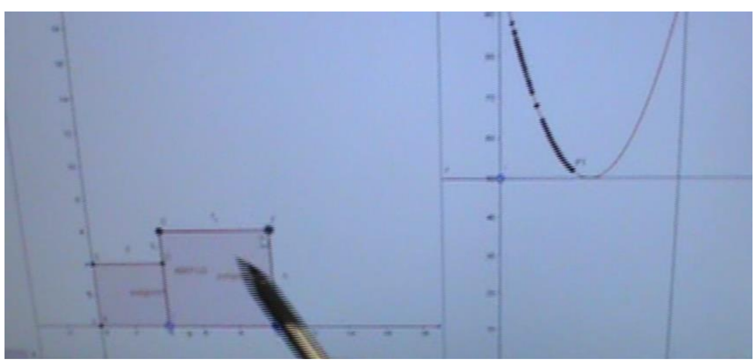
[29]Alumno 4A: Es nuestra área de 50 [u^2], nuestra área máxima sería 100 [u^2] (véase Figura 6.10.c).



(a)



(b)



(c)

Figura 6.10. Respuestas del equipo 4, cuando comparan la representación gráfica propuesta en lápiz y papel con la dada por el software: (a) representación gráfica basada en los casos particulares; (b) expresión simbólica del área del polígono; (c) gráfica dada por el software.

6.3.4. Papel de la herramienta digital en la resolución de la Actividad 1

En el segundo momento de resolución de la Actividad 1, el uso del software Geogebra no sólo permitió a los participantes construir —por medio de las herramientas con que cuenta el software— la figura geométrica con las características y propiedades que están implícitas en la situación sino que permitió analizar la covariación desde muchos niveles; por ejemplo, de manera cuantitativa a través de los valores numéricos asociados con las variables analizadas o de manera cualitativa al identificar dependencia de variables, cuya expresión típica es “al mover algo también se mueve otra cosa”, o bien, cuando se describe verbalmente el mecanismo de la covariación, por ejemplo, “al mover el punto un cuadrado aumenta su área y el otro la disminuye, hasta determinado punto, luego se invierte el proceso”. Sin embargo, el momento trascendental se presenta cuando la covariación es representada simbólicamente —ya sea con notación geométrica, mixta o algebraica— debido a que la expresión simbólica encapsula la percepción simultánea de la covariación. Esta representación simbólica con ayuda del software evoluciona, ya que la expresión no puede validarse si no se emplean variables tradicionales (x y y) que sean reconocidas por la herramienta digital y que el alumno asocia con las variables de la situación (punto P y área del polígono *ABEFCD*). Finalmente, la representación gráfica integra el conjunto de representaciones anteriores (figura geométrica y expresión simbólica) y forma parte de la representación analítica de la covariación, en la que se analizan sus consecuencias.

Una manera de consolidar la representación de la covariación es hacerla parte de una familia de funciones relacionada con la estructura de la situación. Esta familia de funciones se obtiene a partir de la asignación de un parámetro asociado con el segmento inicial del problema ($\overline{AB} = 10$) empleando un símbolo que generalizará el área del polígono *ABEFCD* para cualquier longitud del segmento $\overline{AB}$ (véase Figura 6.12).

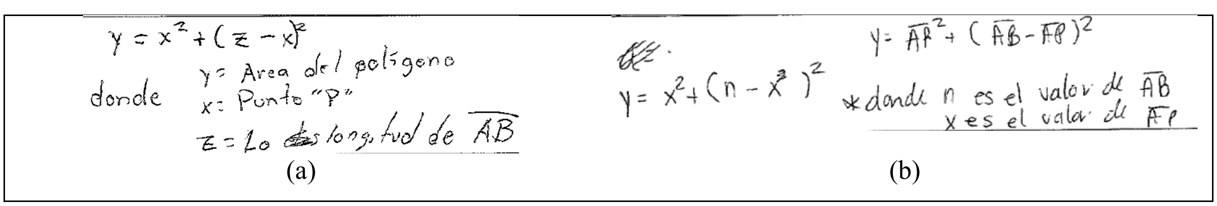


Figura 6.12. Representación simbólica para cualquier valor del segmento $\overline{AB}$: (a) respuesta dada por E7; respuesta E5.

Por medio de la expresión general propuesta en lápiz y papel, la cual involucraba la longitud del segmento $\overline{AB}$ expuesta como parámetro, los estudiantes interpretan la covariación como la relación entre la representación simbólica y la representación gráfica (plano cartesiano dinámico) con ayuda del software y que se relaciona de manera directa con el mecanismo que produce la covariación a partir de la representación de la figura geométrica (plano euclidiano dinámico). Cuando se pide explicar lo que sucede al aumentar al doble el valor del segmento $\overline{AB}$, cuatro equipos (E2, E3, E4, E5) indican que el valor de área del polígono *ABEFCD* aumenta cuando el segmento $\overline{AB}$ se incrementa y tres equipos (E6, E7, E8) mencionan que la representación gráfica tiene características similares a la original ($\overline{AB} = 10$) cuando el segmento $\overline{AB}$ se incrementa, pero cambia el intervalo de variación de las variables. Se debe destacar la respuesta del equipo 5 que en su expresión simbólica emplea notación algebraica para representar el área del polígono y generaliza el valor del segmento $\overline{AB}$ con la literal n [$y = x^2 + (n - x)^2$] (véase 6.12.b). Con ayuda de la herramienta del software llamada deslizador[27], el equipo 5 analiza la covariación desde el componente *V. Consecuencias de la covariación* y determina intervalos de variación de las variables involucradas, así como, la localización del valor mínimo de área.

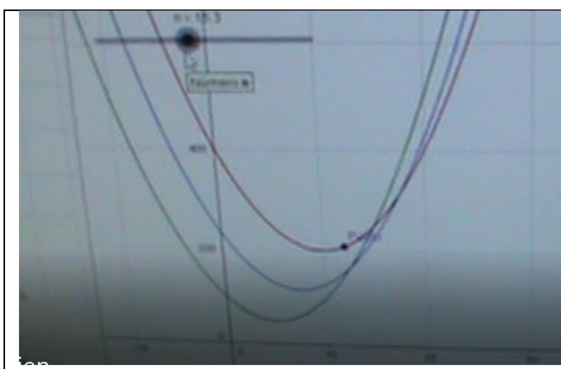
A continuación, se expone la explicación del equipo 5 cuando generalizan el comportamiento de la representación gráfica:

[30] Investigador:	Ustedes pusieron un deslizador que llamaron n [*en el software emplean una herramienta denominada "Deslizador"*]. Puedes mover n [*pide a uno de los alumnos que modifique el valor del deslizador y en la pantalla la parábola modifica sus características*]. ¿Qué pasa cuando el segmento [$\overline{AB}$] disminuye [*su longitud*]? ¿Cómo se comporta la gráfica?
[31] Alumno 5B:	Se va desplazando lo que es el vértice, pero la gráfica es igual o sea no varía ni cambia (véase Figura 6.13.a).
[32] Alumno 5A:	Y también donde corta al eje de las y, el valor máximo que puede tomar como área de tener un número menor se va haciendo más …
[33] Investigador:	Entonces, cuando iniciamos e hicieron la figura de 10, el segmento de 10 unidades [*corrige*], ¿dónde estaba el valor mínimo [*de área*]?
[34] Alumno 5A:	El valor mínimo en 50 [u^2].
[35] Investigador:	Y en el segmento $\overline{AB}$, ¿dónde estaba el valor mínimo [*de área*]?
[36] Alumno 5B:	Estaba en 100 [u^2].
[37] Investigador:	De aquí acá [*señala el segmento* $\overline{AB}$], cuando estaba en 10 [*se refiere que valía 10 unidades el segmento* $\overline{AB}$] ¿Dónde estaba el mínimo?
[38] Alumno 5B:	¡Ah! Estaba en 5 [*unidades*]. En 5 [*unidades*] era el valor mínimo.

[27] La herramienta *deslizador*, en Geogebra, permite asociar un conjunto de valores numéricos a una literal, cuando se manipula de manera gráfica ésta toma un valor específico. Esta herramienta fue mostrada durante la sesión 4 denominada "Instrucción acerca del uso básico de la herramienta tecnológica digital Geogebra" (véase Tabla 3.1).

[39] Investigador: ¿Y cuándo vale 20? ¿En dónde está el valor mínimo?
[40] Alumno 5A: En 10 [*unidades*]
[41] Investigador: Si estuviera en 100 [*medida del segmento* $\overline{AB}$] ¿Dónde estaría el valor mínimo?
[42] Alumno 5A: En 50 [*unidades*].
[43] Investigador: Entonces, ¿dónde se va a encontrar el valor mínimo o el vértice [*de la parábola*]?
[44] Alumno 5A: Siempre va a estar a la mitad del segmento $\overline{AB}$ (véase Figura 6.13.b).

A lo largo de esta sección, en los episodios [30] a [44] se identifican diversos componentes de la covariación y particularmente se debe distinguir la interconexión entre estos componentes por medio de la interrelación de las representaciones simbólica y gráfica, relacionadas con los componentes Representación de la covariación y Consecuencias de la covariación, respectivamente. El analizar y generar relaciones en torno al comportamiento de valores que están asociados tanto con la figura geométrica como con la representación gráfica es fundamental para la comprensión de la percepción simultánea de la covariación. Las manifestaciones del razonamiento covariacional está interconectada y permite a los participantes concebir conceptos más complejos con la finalidad de favorecer la comprensión de esta red de conceptos involucrados. Cuando el estudiante es consciente de que la covariación observada en el problema está integrada y se relaciona con sus distintas representaciones, las cuales forman parte de una familia de funciones cuyas expresiones algebraicas tiene una estructura similar y sus gráficas son parábolas podemos decir que se ha formado el concepto de función cuadrática.


(a)

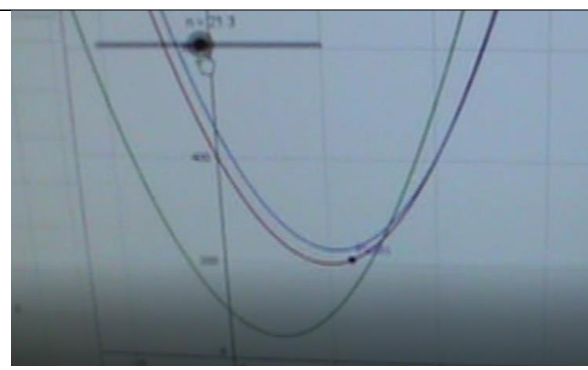
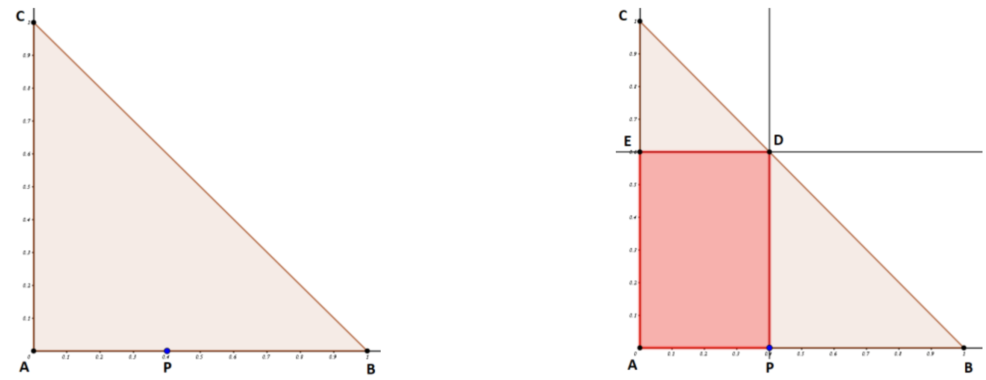

(b)

Figura 6.13. Modificación del valor asignado al deslizador n, empleado por E5.

6.4. OBSERVACIONES SOBRE LA ACTIVIDAD 2 EN AMBIENTE TECNOLÓGICO DIGITAL

La segunda situación que los estudiantes realizaron en el ambiente tecnológico digital consistió en representar por medio de las herramientas con que cuenta el software Geogebra, la SGD de la Actividad 2 que había sido trabajada previamente en lápiz y papel consistente en determinar el área (función de área) del rectángulo *APDE* inscrito en el triángulo isósceles ABC cuya longitud de sus lados iguales $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ es la unidad. La Figura 6.14 ilustra la representación geométrica que los estudiantes obtendrían en la pantalla de la computadora (plano euclidiano dinámico).



(a) (b)

Figura 6.14. Segunda SGD en Geogebra: rectángulo inscrito en un triángulo: (a) triángulo isósceles *ABC*; (b) rectángulo *APDE* inscrito en el triángulo isósceles.

La Tabla 6.3 muestra los resultados obtenidos en el segundo momento de la Actividad 2. Debido a que las respuestas de la Actividad 2 se relacionan en mayor medida con los últimos componentes del marco, se debe resaltar que en esta sección del trabajo se exponen las observaciones más relevantes que los participantes manifiestan en sus respuestas al resolver la SGD con ayuda de la herramienta tecnológica digital.

Tabla 6.3
Resultados de los niveles de respuesta para el segundo momento: Actividad 2.

Componente		**I. Ignorancia de la covariación**			**II. Consideración de la covariación**			**III. Análisis previo de la covariación**			**IV. Representación de la covariación**			**V. Consecuencias de la covariación**		
Nivel de respuesta		*N1*	*N2*	*N3*	*N1*	*N2*	*N3*	*N1*	*N2*	*N3*	*N1*	*N2*	*N3*	*N1*	*N2*	*N3*
Pregunta	2.2.2.							3	3	2						
	2.2.3.										1	4	3			
	2.2.4.										2	4	2			
	2.2.5.										0	1	7			
	2.2.6.										5	3	0			
	2.2.7.													0	1	7
	2.2.8.													3	0	5
	2.2.9.													0	4	4
	2.2.10.										0	3	5			

Las preguntas que respondieron los estudiantes en el segundo momento de esta Actividad fueron las mismas que las propuestas en lápiz y papel y se puede notar (al igual que en la Actividad 1) que con el uso de la herramienta digital en la Actividad 2 se promueve el razonamiento de covariación, por ello, los participantes avanzan hacia el último componente (*V. Consecuencias de la covariación*), pero la representación de la expresión simbólica que permite determinar el caso general para el cálculo de área del rectángulo *APDE* inscrito en el triángulo *ABC* dado cualquier lado *AB* se asocia con el componente *IV. Representación de la covariación*. Este cambio en componentes puede interpretarse como un retroceso en el desarrollo del razonamiento de covariación, sin embargo, por la formulación de la propia pregunta se establece el trabajo en el componente mencionado (véase Tabla 6.3). Se debe recordar que, en cada nivel de respuesta de cada Actividad, está asociado un número que aparece entre corchetes y que corresponde a la cantidad de respuestas relacionadas con el número de producciones de cada equipo asociadas a ese nivel.

6.4.1. Análisis previo de la covariación

Al finalizar la construcción de la situación —por medio del software— se solicitó a los participantes responder la consigna:

> 2.2.2. Mueve el punto P sobre el segmento $\overline{AB}$ y observa los valores involucrados en la vista gráfica y contesta: ¿qué sucede al mover el punto P? ¿cómo se comporta el área del rectángulo *APDE*?

Las respuestas de los estudiantes se vuelven a distinguir por el nivel de abstracción de los objetos matemáticos que mencionan con relación al contexto geométrico. Con base en las respuestas dadas a esta pregunta, se pueden definir tres niveles de respuesta:

Nivel 1 [3]. Se pone atención a la configuración geométrica (véase Figura 6.15.a).

Nivel 2 [3]. Se percibe que el cambio en el punto y/o segmento y produce el cambio en el área del polígono (véase Figura 6.15.b).

Nivel 3 [2]. Se reconoce que el área del polígono depende de los valores asociados con el punto P vistos como una cantidad y se indica el comportamiento de los valores asociados (véase Figura 6.15.c).

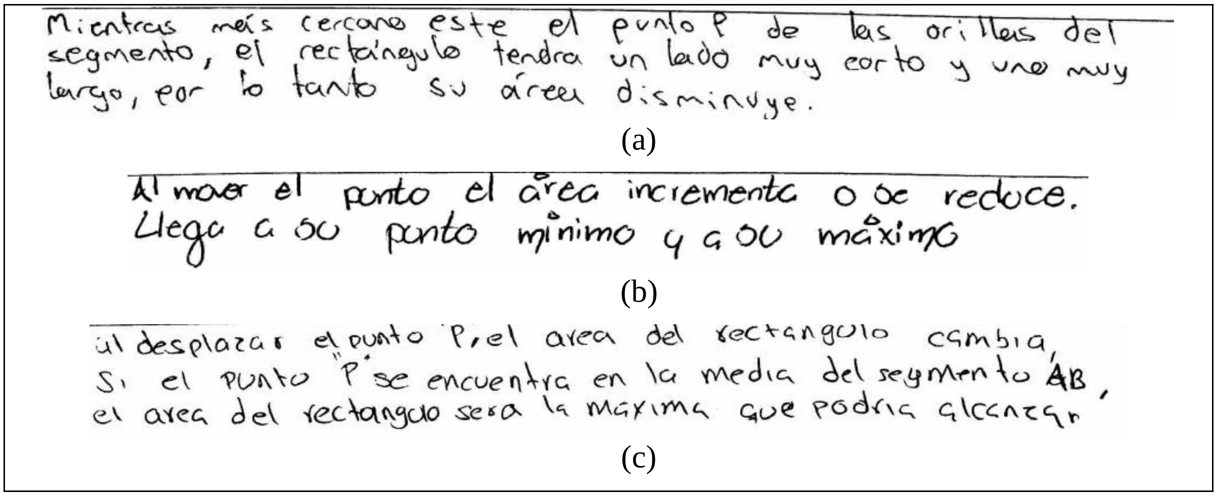
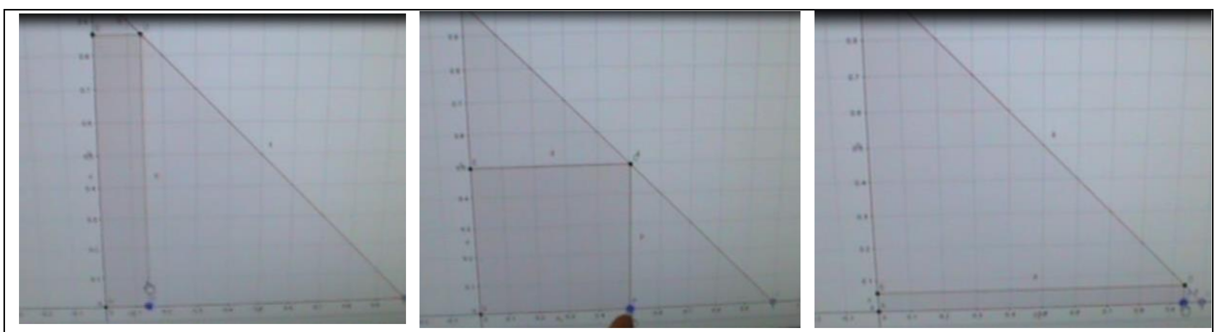


Figura 6.15. Representaciones gráficas trazadas por los estudiantes; (a) Respuesta de E6; (b) Respuesta de E2; (c) Respuesta de E1.

A continuación, se transcribe lo dicho por el equipo 7 después de elaborar la representación geométrica con ayuda del software e identificar cómo se comporta el área del rectángulo *APDE*:

[45] Investigador: Si desplazan el punto [*P*] en su construcción, ¿cómo se comporta el área del rectángulo [*APDE*]?

[46] Alumno 7A: Bueno, por ejemplo, si empieza de cero a 0.5 [*se refiere a la posición del punto P sobre el segmento* $\overline{AB}$] va a ir creciendo [*aumenta su área*] (véase Figura 6.16.a) y va a llegar a 0.5 [*unidades*] donde ahí se va a quedar [*se refiere a que se obtiene el valor máximo de área del rectángulo APDE*] (véase Figura 6.16.b). Y luego, si la empieza a mover [*se refiere a desplazar el punto P sobre el lado* $\overline{AB}$ *hacia el vértice B*] ahí va a empezar a decrecer [*disminuye el área del rectángulo*] (véase Figura 6.16.c).



(a) (b) (c)

Figura 6.16. Configuración geométrica elaborada por el equipo 7, con ayuda de Geogebra: (a) el punto P se aproxima al vértice A sobre el lado *AB*; (b) el punto P se encuentra en el punto medio del lado $\overline{AB}$; (c) el punto P se aproxima al vértice B sobre el lado $\overline{AB}$.

De acuerdo con la respuesta dada por el equipo 7, diálogo [46] se identifica el componente *III. Análisis previo de la covariación*, debido a que se expresa el comportamiento que tienen los valores de área del rectángulo *APDE*. El ambiente tecnológico digital influyó para que esta pareja promoviera el razonamiento de covariación con base en los valores numéricos explícitos en la pantalla, ya que se percibe la relación entre las variables (longitud del lado $\overline{AP}$ y área del rectángulo *APDE*). Por medio de la herramienta digital se logró establecer la relación entre el punto P y el área del rectángulo; esta fue la base para inferir el comportamiento general del área del rectángulo *APDE* y establecer la percepción simultánea de la covariación.

6.4.2. Representación de la covariación

A pesar de que los estudiantes representaron la situación geométrica dinámica en la pantalla con ayuda de Geogebra, que brindó la posibilidad de mover el punto y analizar la configuración geométrica y el valor de área del rectángulo, el software no les proporciona la expresión simbólica que da cuenta de la covariación. Por esto, se les pide que representen simbólicamente la situación mediante la consigna:

> 2.2.3. De acuerdo con la configuración geométrica, calcula el área del rectángulo *APDE* para cualquier punto P que se coloque sobre el lado $\overline{AB}$ del triángulo *ABC*.

Las respuestas de los estudiantes vuelven a tener los mismos rasgos que sus respuestas en el ambiente de lápiz y papel, por lo que se clasifican en tres niveles según el grado de abstracción de la notación simbólica que utilizan respecto al contexto geométrico (véase Tabla 6.4, referencia primer acercamiento):

Nivel 1 [1]. Representa la covariación con una expresión usando notación geométrica.

Nivel 2 [4]. Representa la covariación con una expresión usando notación mixta.

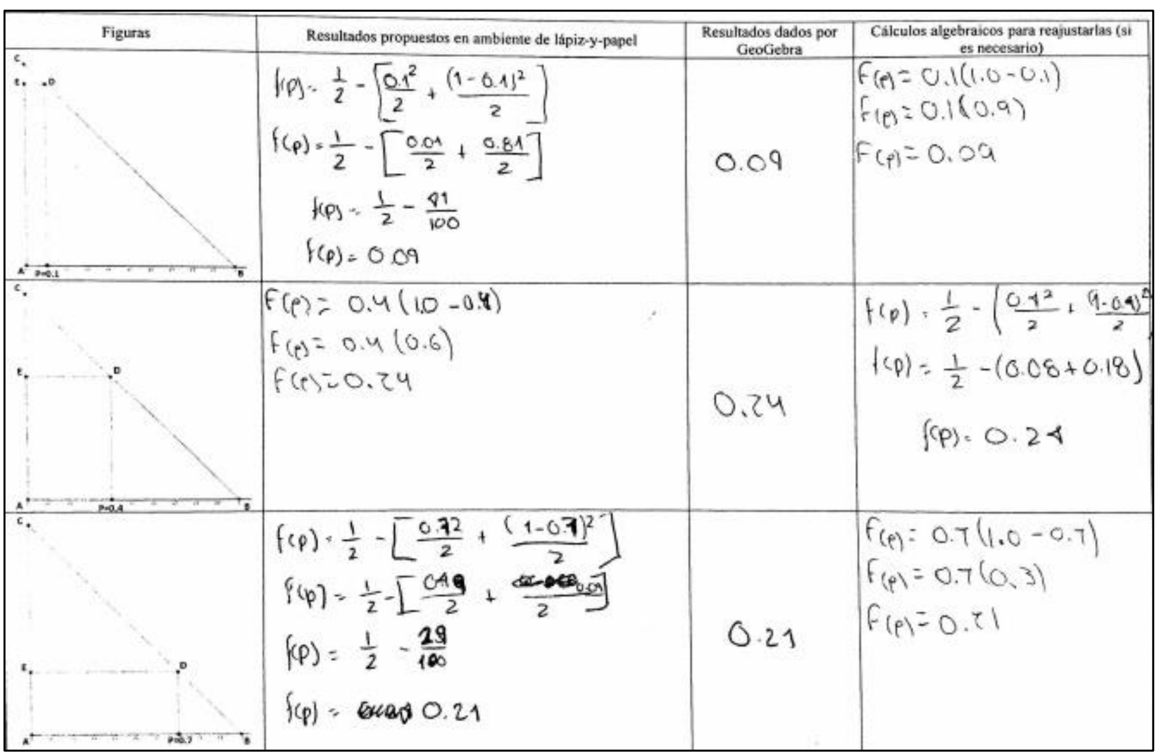
Nivel 3 [3]. Representa la covariación con una expresión con notación algebraica.

En las respuestas a esta pregunta únicamente tres equipos responden con una expresión simbólica con notación algebraica. Como puede notarse, la representación de la situación en el software no contribuye a que los estudiantes se alejen de la situación geométrica, pues en la pantalla de la computadora se recrea el contexto geométrico (plano euclidiano dinámico).

La siguiente consigna que enfrentaron los participantes fue:

2.2.4. Calcula el área de los rectángulos *APDE* que se encuentran en las siguientes figuras (cuando el punto P se ubica en 0.1, 0.4. y 0.7 unidades). Anota los resultados en la primera columna. En la segunda columna anota el valor del rectángulo *APDE* dado por el software. Si para una fila dada los resultados dados por Geogebra y el ambiente de lápiz y papel difieren, reajústalos usando manipulaciones algebraicas y escribe tus resultados en la última columna.

En esta tarea se debe destacar la necesidad de comparar las soluciones propuestas con las dadas por el software, con la finalidad de ajustar (en caso necesario) los cálculos para obtener los mismos valores numéricos que ofrece Geogebra. Como parte de los resultados se debe mencionar que los ocho equipos validaron los resultados propuestos para los casos particulares basados en las expresiones formuladas en el paso anterior, pero sólo el equipo 6 utiliza la tercera columna de la tabla para fundamentar los resultados dados por las dos expresiones formuladas; $f(p) = \frac{1}{2} - \left(\frac{p^2}{2} + \frac{(\overline{AB}-p)^2}{2}\right)$ y $f(p) = (p)(\overline{AB} - p)$, las cuales se encuentran en término de la variable p y el parámetro $\overline{AB}$ (véase Figura 6.17).



Figuras	Resultados propuestos en ambiente de lápiz-y-papel	Resultados dados por GeoGebra	Cálculos algebraicos para reajustarlas (si es necesario)
	$f(p) = \frac{1}{2} - \left[\frac{0.1^2}{2} + \frac{(1-0.1)^2}{2}\right]$ $f(p) = \frac{1}{2} - \left[\frac{0.01}{2} + \frac{0.81}{2}\right]$ $f(p) = \frac{1}{2} - \frac{41}{100}$ $f(p) = 0.09$	0.09	$F(p) = 0.1(1.0-0.1)$ $F(p) = 0.1(0.9)$ $F(p) = 0.09$
	$F(p) = 0.4(1.0-0.4)$ $F(p) = 0.4(0.6)$ $F(p) = 0.24$	0.24	$f(p) = \frac{1}{2} - \left(\frac{0.4^2}{2} + \frac{(1-0.4)^2}{2}\right)$ $f(p) = \frac{1}{2} - (0.08 + 0.18)$ $f(p) = 0.24$
	$f(p) = \frac{1}{2} - \left[\frac{0.7^2}{2} + \frac{(1-0.7)^2}{2}\right]$ $f(p) = \frac{1}{2} - \left[\frac{0.49}{2} + \frac{0.09}{2}\right]$ $f(p) = \frac{1}{2} - \frac{29}{100}$ $f(p) = 0.21$	0.21	$F(p) = 0.7(1.0-0.7)$ $F(p) = 0.7(0.3)$ $F(p) = 0.21$

Figura 6.17. Validación de las dos expresiones simbólicas propuestas por el equipo 6.

Las expresiones formuladas por el equipo 6, están basadas en la comprensión del mecanismo que produce la covariación, ya que se generan dos expresiones equivalentes a partir de la comprensión de la situación. La primera expresión se obtiene cuando se restan al triángulo *ABC* (área total de la figura) los triángulos *PBD* y *EDC* y la segunda expresión surge a partir de la fórmula prestablecida como el producto de la base del rectángulo *APDE* por su altura (véase Figura 6.18).

Las respuestas dadas por los participantes muestran la interconexión entre los componentes *III. Análisis previo de la covariación* y *IV. Representación de la covariación*, ya que se requiere el análisis de la situación dinámica para integrar los elementos que permiten formular una expresión simbólica que cumpla con las condiciones establecidas. La herramienta digital es usada por los participantes como un instrumento que permite validar los resultados obtenidos de las expresiones propuestas (véase Figuras 6.17).

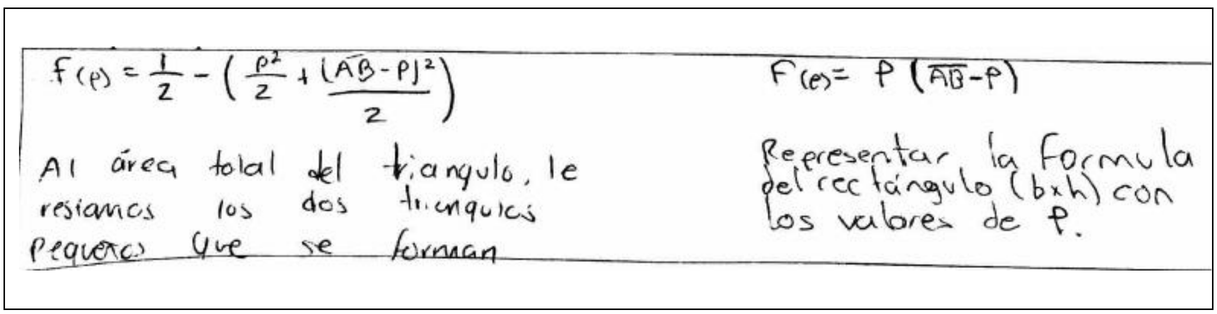


Figura 6.18. Expresiones propuestas por E6 para el cálculo de área del rectángulo *APDE*.

Aunque la representación de la situación en el plano euclidiano dinámico hace más transparente la covariación, no ayuda a que los estudiantes utilicen la notación tradicional (x y y) en sus representaciones simbólicas; los más avanzados que propusieron una expresión algebraica utilizaron los símbolos $f(p)$ para el área y p para la variable independiente. Por esta razón fue necesario pedirles que resolvieran la siguiente tarea:

2.2.6. ¿De qué manera se puede simplificar la expresión simbólica obtenida previamente? Se sugiere nombrar x a la medida del segmento $\overline{AP}$, expresar la medida de otros segmentos en términos de x y representar el área del rectángulo *APDE* como y.

Como se ha mencionado en la Actividad 1, esta pregunta es de suma importancia para que las expresiones propuestas contengan las literales tradicionales (x y y), ya que se pretende generar una expresión que pueda ingresarse a Geogebra, que sea reconocida y pueda ser representada por esta herramienta digital. Se debe destacar que de no llevase a cabo el cambio para utilizar en las expresiones con literales tradicionales, el software no podrá reconocerlas y por lo tanto la expresión propuesta por los participantes no podrá ser representada gráficamente a través de la herramienta digital. En las respuestas se pueden distinguir dos niveles que son consistentes con los niveles ya definidos, estos son:

Nivel 2 [1]. Notación mixta. Utilizan las literales x y y, pero también al menos un símbolo geométrico; por ejemplo: el equipo 3 muestra la expresión $y = -(x^2) + (x \cdot \overline{AB})$ (véase Figura 6.19.a)

Nivel 3. Notación algebraica. En este nivel de respuesta se presentan tres tipos de registros en términos de dos variable: (i) aquellos que representan el área del polígono *ABEFCD* como *y* en términos de *x*, por ejemplo, $y = x(1-x)$ o $y = -x^2 + x$ (véase Figura 6.19.b); (ii) aquellos que incorporan un parámetro a y su expresión es $y = x(a-x)$ (véase Figura 6.19.c); y (iii) aquellos que utilizan una función de manera explícita para representar el área del rectángulo como $f(x) = x - x^2$ o $f(x) = x(1-x)$ (véase Figura 6.19.d).

Todas las expresiones anteriores están relacionadas con el componente *IV. Representación de la covariación* e involucran diversas variantes, sin embargo, en este momento es cuando la mayor parte de los participantes se separan del contexto geométrico de la situación y proponen expresiones simbólicas que involucran variables tradicionales.

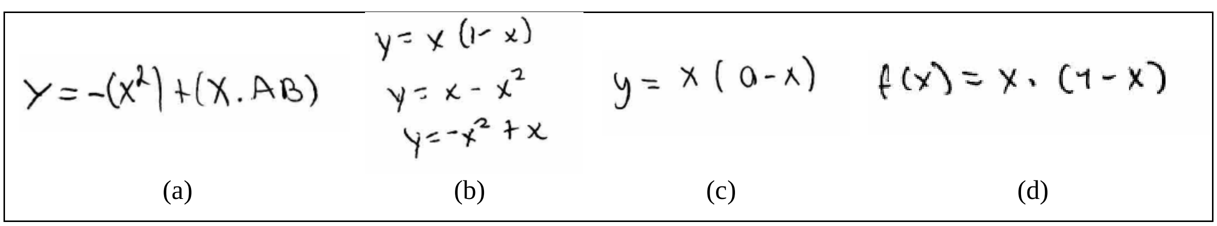
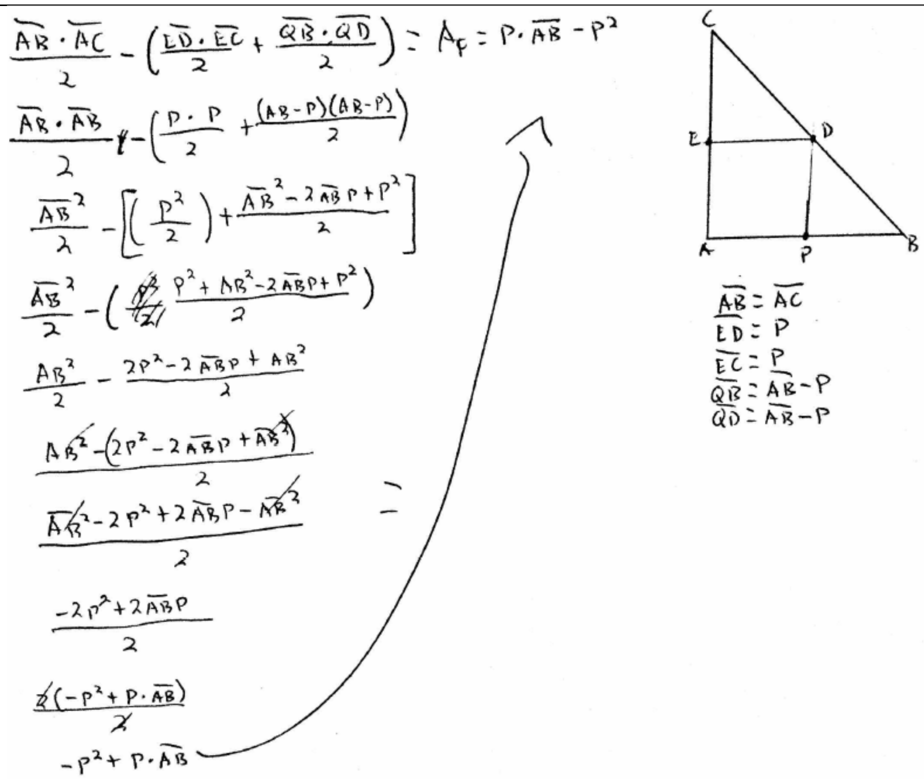


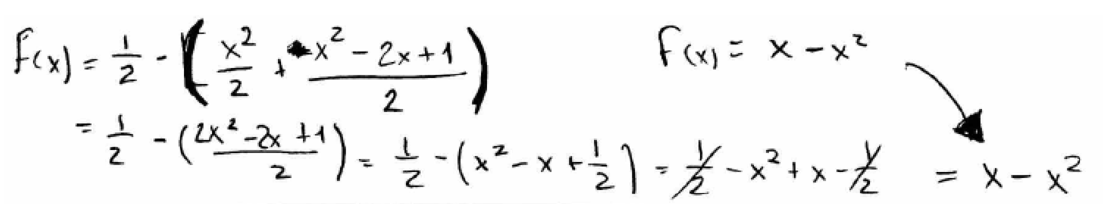
Figura 6.19. Cálculo de área del polígono en términos de x y y. (a) Respuesta de E3; (b) Respuesta de E7; (c) Respuesta de E8; (d) Respuesta de E2.

Una de las respuestas trascendentales relacionadas con el componente representación de la covariación fue la dada por el equipo 3, quienes representaron la covariación de dos maneras diferentes y se dieron tiempo para concluir que las expresiones propuestas son equivalentes. Las expresiones propuestas por el equipo 3 son las siguientes: $A_P = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{2} - \left(\frac{\overline{AD} \cdot \overline{EC}}{2} + \frac{\overline{QB} \cdot \overline{QD}}{2}\right)$ y $A_P = p \cdot \overline{AB} - p^2$ (véase Figura

6.20.a). Al analizar las expresiones propuestas, la pareja 3 determinó que las representaciones a simple vista no poseen los mismos elementos, sin embargo, están asociadas con el mismo objeto matemático, que representa la covariación de la situación. Por un lado, este equipo no se despega del contexto geométrico y representa la covariación con notación mixta en las dos opciones de respuesta.



(a)



(b)

Figura 6.20. Identificación que las expresiones propuestas son equivalentes; (a) Respuesta de E3; (b) Respuesta de E6.

El equipo 6, también propuso dos expresiones para el cálculo de área del rectángulo *APDE* y determinó que las dos maneras de representar simbólicamente la covariación son equivalentes a partir del cambio de variables en términos de x y y, y el desarrollo y simplificación de una de ellas por medio de manipulaciones algebraicas (véase Figura

6.20.b). El componente *IV. Representación de la covariación* se destaca por la variedad de expresiones asociadas a la covariación de la situación, las cuales no son únicas ya que pueden tener diversas formas según el contexto y el significado asignado a las variables de la situación.

La Tabla 6.4 muestra las expresiones simbólicas que proporcionaron algunos equipos tanto en la actividad previa con lápiz y papel como en el ambiente con tecnología; debe notarse que en el caso de los equipos 1, 5 y 6 se incluye sus representaciones de ambos momentos, por lo que se puede ver la evolución que éstas tuvieron. En el caso del equipo 5 se manifestó un claro avance en las expresiones simbólicas propuestas, pero no se desligaron del contexto geométrico hasta que se les pidió de manera explícita el cambio a variables tradicionales.

Para identificar si la expresión propuesta puede representarse gráficamente se realizó la siguiente consigna: 2.2.7. ¿La expresión simbólica propuesta previamente puede representarse gráficamente? En caso afirmativo, ¿qué tipo de gráfica se obtendrá?

En esta pregunta ningún equipo indicó que no puede representarse la expresión simbólica en el plano cartesiano; por ello no hubo respuestas asociadas con el Nivel 1. En el Nivel 2, se infiere la relación entre variables sin indicar detalles o características de la representación en el plano cartesiano. Por un lado, E6 responde que “sí [se refiere a que se puede graficar], suponemos que se trata de una parábola que abre hacia abajo”. Por otro lado, E1 afirma que “sí puede graficarse y se obtendrá una gráfica de tipo V dos rectas lineales”. En el Nivel 3, se da certeza de que la expresión simbólica está asociada con una curva en el plano cartesiano y se dan detalles o características de la representación gráfica; E2 menciona que “Sí se puede [se refiere a realizar la gráfica]. Se obtiene una parábola, ya que el área va de 0 a 0.25 y luego de 0.25 a 0”. En las respuestas se distingue elementos característicos de cada nivel, ya que se puede incluir una frase que muestre detalles de la afirmación que lo agrupa en un nivel más alto de respuesta.

La última pregunta está asociada con el actual componente analizado, y se pidió a los participantes responder:

2.2.12. ¿Cuál será la expresión algebraica para cualquier longitud del segmento $\overline{AB}$ si la configuración geométrica se mantiene $\overline{AB} = \overline{AC}$? ¿Cómo se verá afectada su gráfica?

Por un lado, no hubo respuestas expresadas con notación geométrica; por lo que ninguna respuesta se asoció con el Nivel 1. Por otro lado, en el Nivel 2 se emplea notación mixta para representar el área del rectángulo $APDE$ y se usan variables geométricas y algebraicas expresadas como: $A = p(\overline{AB} - p)$ (véase Figura 6.21.a), $y = x(\overline{AB} - x)$ (véase Figura 6.21.b) o $\left[f(x) = \frac{1}{2} - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^2 - 2\overline{AB} \cdot x + \overline{AB}^2}{2}\right) \text{ y } f(x) = \overline{AB}x - x^2\right]$ (véase Figura 6.21.c). En el Nivel 3, se utiliza notación algebraica para expresar el área del polígono en términos de una sola variable x independiente, pero puede agregarse un parámetro como n, z, b, a. Por ejemplo: $a = (n - p)(p)$ (véase Figura 6.21.d), $f(x) = x(B - x)$, $A = -x^2 + (x \cdot a)$, $y = x(a - x)$ o $y = -x^2 + z \cdot x$ (véase Figura 6.21.e)

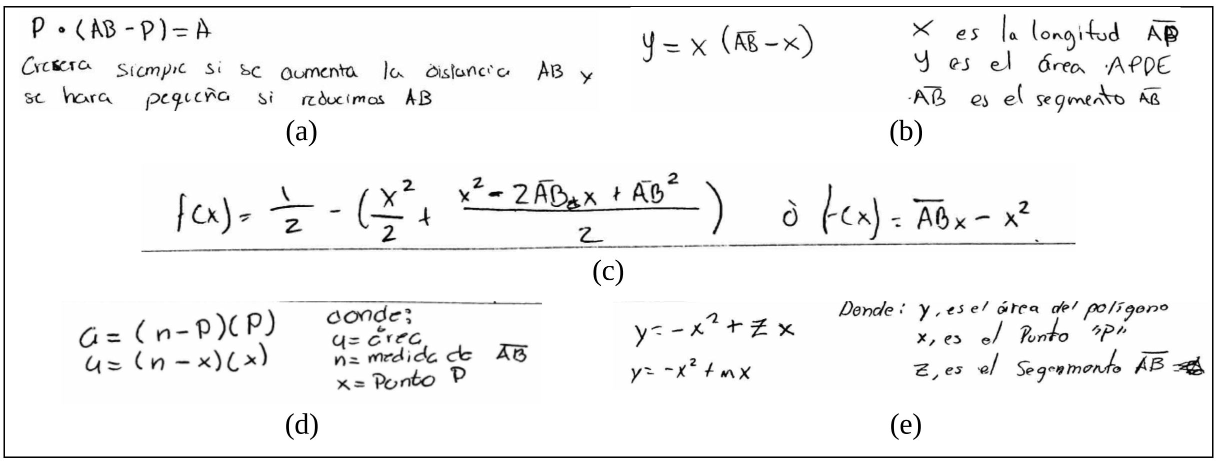


Figura 6.21. Representación simbólica para cualquier valor del segmento $\overline{AB}$: (a) Respuesta dada por E4. (b) Respuesta dada por E5. (c) Respuesta dada por E6; (d) Respuesta dada por E1; (e) Respuesta dada por E7.

En estas respuestas, la representación simbólica para cualquier longitud del lado $\overline{AB}$ del triángulo ABC pueden notarse como los participantes emplean diversas variables, pero todas hacen alusión a la representación de la covariación, ya que ellos les da significado de acuerdo con el contexto del problema. Cuando se entrevista a los participantes, explican que para los diferentes valores de $\overline{AB}$, la representación gráfica mantendrá su forma parabólica y ésta representa la variación del área del rectángulo $APDE$ cuando cambia la variable independiente x o p. En general, con base en la expresión simbólica obtenida por cada equipo, se explicó cómo al cambiar la longitud del lado $\overline{AB}$, la representación gráfica se mantiene y está asociada con una parábola que posee características similares a la original (cuando el lado $\overline{AB}$ tiene por longitud la unidad). En este momento se genera una interconexión entre los componentes, ya que ninguno está aislado y cada uno robustece y promueve al otro, es decir, los componentes de la covariación están enlazados entre sí.

Tabla 6.4

Respuestas asociadas con la representación de la covariación. Segundo momento de la Actividad 2.

Nivel de respuesta	Notación	Elementos	Respuesta (Primer acercamiento)	Equipo	Respuesta (Segundo acercamiento)	Equipo
N1	Geométrica [G]	Las variables son vistas como segmentos	$A=(\overline{AP})(\overline{PD})$	E5	$A=(\overline{AP})(\overline{PD})$ $\overline{PD}=\overline{AB}-\overline{AP}$ $A=(\overline{AP})(\overline{AB}-\overline{AP})$	E5
N2	Mixta [M]	Se emplea una combinación de variables geométricas y/o algebraicas y/o lenguaje natural	Área de APDE = $AD \times PB$	E8	$A=(\overline{AP})(1-\overline{AP})$ $A=-(\overline{AP})^2+\overline{AP}$	E7
			$f(p)=\frac{1}{2}-\left(\frac{p^2}{2}+\frac{(\overline{AB}-p)^2}{2}\right)$ Al área total del triangulo, le restamos los dos triangulos pequeños que se forman $F(p)=p(\overline{AB}-p)$ Representar la formula del rectángulo (b×h) con los valores de p.	E6	$F(p)=\frac{1}{2}-\left(\frac{p^2}{2}+\frac{(\overline{AB}-p)^2}{2}\right)$ $F(p)=p(\overline{AB}-p)$	E6
N3	Algebraica [A]	Se emplean variables algebraicas o literales	Triangulo $a=\frac{bh}{2}$ Rectangulo $a=bh$ $a=bh$ $a=(1-P)(P)$	E1	$a=(1-P)(P) \Rightarrow a=bh$	E1
			$y=(x)(1-x)$ $y=x-x^2$ $y=-x^2+x$ y= Area x= Punto "P" Sea x=.5	E7	$A_r = P\cdot(1-P)$	E2

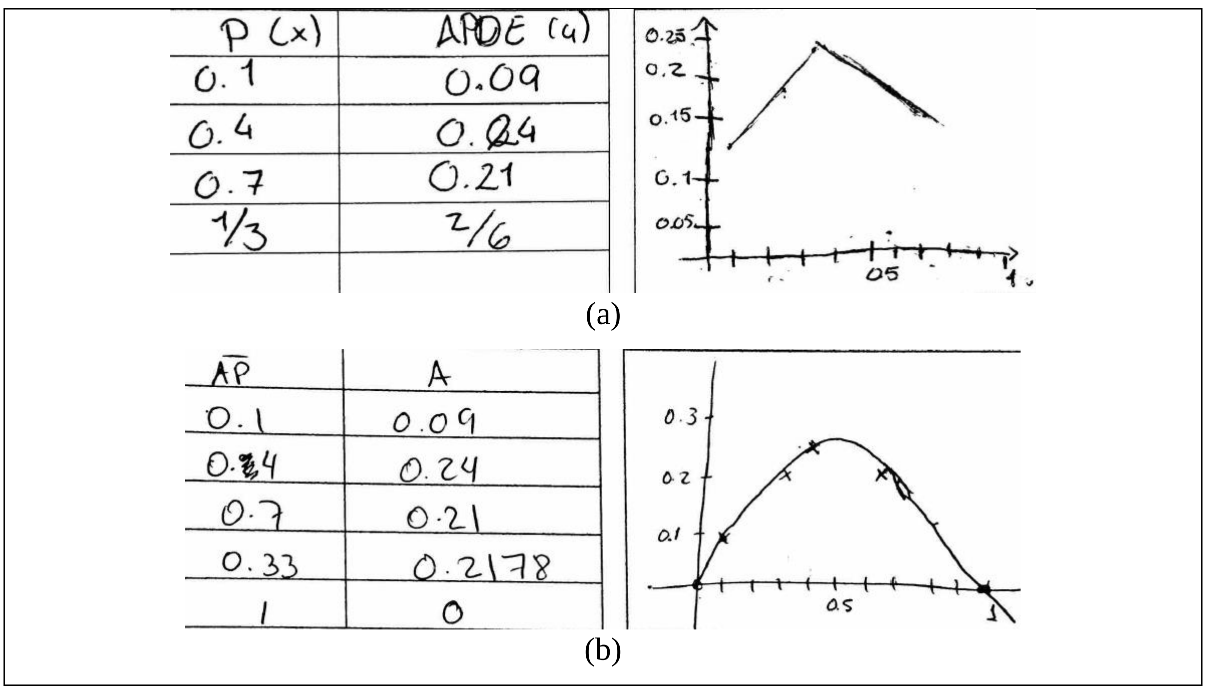
6.4.3. Consecuencias de la covariación

En este componente se establece una relación entre la regla de correspondencia [registro simbólico] asociado con el componente Representación de la covariación y otros registros de representación [tabular y gráfico] asociados con el componente actual. Las respuestas de este componente fueron motivadas por la consigna:

> 2.2.9. De acuerdo con los resultados del inciso 2.2.4,[28] elabora una tabla que relacione la longitud del segmento $\overline{AP}$ con el área del rectángulo *APDE*.

Los resultados se asocian con tres niveles de respuesta:

> Nivel 1 [0]. Se coordina la relación entre la regla de correspondencia y el registro gráfico de manera intuitiva
>
> Nivel 2 [4]. Se muestran aquellas representaciones gráficas que fueron parcialmente correctas (véase Figura 6.22.a).
>
> Nivel 3 [4]. La representación gráfica corresponde a la situación planteada (véase Figura 6.22.b).



(a)

(b)

Figura 6.22. Representación gráfica de la expresión simbólica obtenida previamente. (a) Respuesta dada por E1. (b) Respuesta dada por E5.

[28] La pregunta 2.2.4 está relacionada con el cálculo de área del rectángulo *APDE* cuando se considera que el punto P se ubica en diferentes posiciones (*e.g.*, 0.1, 0.4, 0.7) sobre el lado $\overline{AB}$ del triángulo isósceles *ABC*.

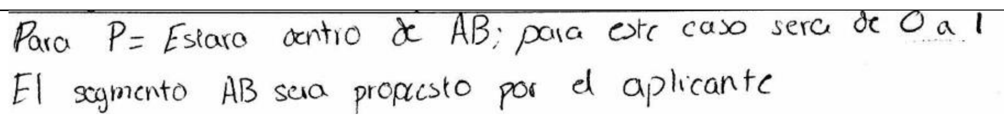
En estos resultados se debe destacar que el total de parejas relaciona el valor asociado con el punto P —longitud del segmento $\overline{AP}$— visto como variable independiente, con el valor de área del rectángulo *APDE* (variable dependiente). Para promover la identificación de los intervalos de variación se realiza la siguiente pregunta:

2.2.10. ¿Cuál es el intervalo de variación para cada una de las variables identificadas?

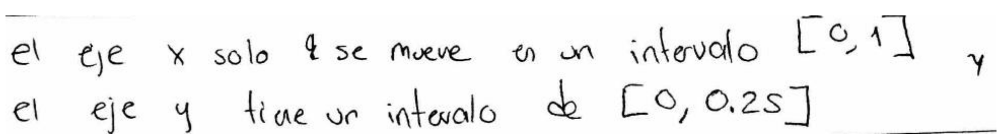
Nivel 1 [3]. Se menciona el intervalo de variación para una de las variables identificadas (véase Figura 6.23.a).

Nivel 2 [0]. El intervalo de variación para las variables dependiente e independiente que no corresponde a la situación planteada.

Nivel 3 [5]. Se considera el intervalo de variación para las variables dependiente e independiente (covariación), los cuales corresponden a la situación planteada (véase Figura 6.23.b).


Para P= Estara dentro de AB; para este caso sera de 0 a 1
El segmento AB sera propuesto por el aplicante

(a)


el eje x solo se mueve en un intervalo [0, 1] y
el eje y tiene un intervalo de [0, 0.25]

(b)

Figura 6.23. Intervalos de variación de la segunda SGD. (a) Respuesta dada por E4; (b) Respuesta dada por E6.

Ante la consigna: 2.2.11. ¿En qué valor del punto P se tiene el valor máximo para el área del rectángulo *APDE*? ¿A qué se debe?

Nivel 1 [0]. Se desconoce por omisión o ignorancia la existencia de un punto máximo.

Nivel 2 [4]. Se menciona la ubicación del punto máximo. Por ejemplo, E4 menciona que "En el punto medio del segmento [se refiere al segmento $\overline{AB}$] puesto que será donde hay más área ocupada dentro del triángulo [se refiere al triángulo isósceles *ABC*]".

Nivel 3 [4]. Se indica la ubicación del valor máximo de área y se proporcionan características del registro gráfico. Por ejemplo, E3 menciona que "en la media del segmento

$\overline{AB}$ [se refiere al punto medio del segmento $\overline{AB}$] en este caso es 0.5 y es el mayor [rectángulo de mayor área] pues es un cuadrado con área 0.25 u^2”.

Como parte de este componente, los participantes establecen la interrelación entre los registros simbólicos, tabulares y gráficos para identificar características de la covariación entre las variables, por ejemplo, ubicación del punto máximo, descripción de los intervalos donde la gráfica es creciente o decreciente, entre otros. A continuación, se transcribe lo mencionado por el equipo 7 cuando identifican que la representación gráfica de la expresión simbólica $y = -x^2 + x$ propuesta en ambiente de lápiz y papel (véase Figura 6.24.a) muestra las mismas características que la gráfica dada por el software cuando ingresan la misma expresión a Geogebra (véase Figura 6.24.b):

[47] Investigador: Cuando ingresaron la ecuación, obtuvieron todo eso [*señalan la parábola mostrada en el monitor de la computadora*] (véase Figura 6.24.b). Entonces, mencionaste que… [*se dirige a uno de los participantes*].

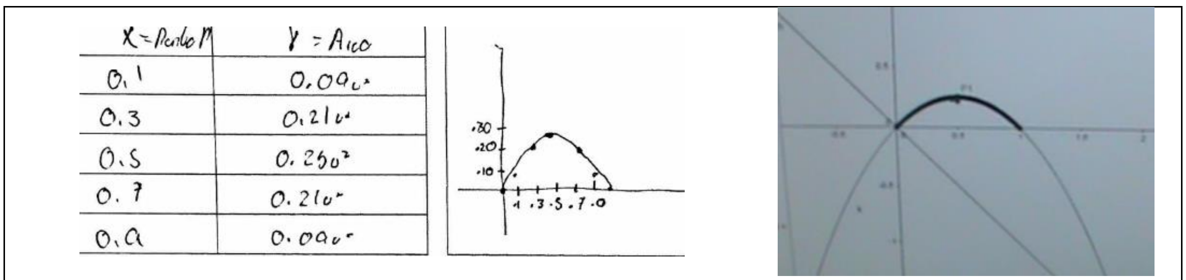
[48] Alumno 7A: Nada más se va a tomar en cuenta esto [*señala con los dedos el intervalo de cero a uno en el eje X*], porque no estamos tomando en cuenta valores negativos.

[49] Investigador: ¿Por qué nada más se toma en cuenta esta parte? [*Señala el rastro del punto P ubicado en el primer cuadrante*].

[50] Alumno 7B: Porque ese es el valor del segmento $\overline{AB}$. El segmento $\overline{AB}$ va a determinar el límite del dominio de la gráfica... El segmento $\overline{AB}$ determina el dominio de la gráfica.

[51] Investigador: El dominio de la gráfica, es decir, ¿no va a ser toda completa?

[52] Alumno 7B: No, en este caso como $\overline{AB}$ es igual a uno [*la unidad*], sólo va a tener elementos de cero a uno.



(a) (b)

Figura 6.24. Representación gráfica basada en la expresión simbólica en los ambientes de: (a) lápiz y papel; (b) tecnológico.

[53] Investigador: ¿Qué pasaría si el segmento… si el segmento $\overline{AB}$ crece al doble? ¿Cómo se va a comportar? [*Se refiere al comportamiento de la gráfica al aumentar al doble el lado del triángulo isósceles*]. ¿La gráfica… cómo se va a comportar?

[54] Alumno 7B: ¡Ah, bueno! Prácticamente, va a ser…

[55] Alumno 7A: Va a ser lo mismo, pero que nada más va a llegar hasta […] en vez de que aquí que llegaba hasta 0.25 [u^2], acá va a llegar a uno [*se refiere al área del rectángulo que aumenta hasta la unidad*] (véase Figura 6.25).

[56] Alumno 7B: Todos sus elementos se van a duplicar.

[57] Investigador: Entonces… el máximo [*valor de área del rectángulo*] estaría en ¿dónde va a estar siempre?

[58] Alumno 7B: Su área máxima va a ser uno y el punto [*se refiere al punto P*] donde se va a encontrar su área máxima va a ser uno [*la unidad*] (véase Figura 6.25).

[59] Investigador: Entonces… si el punto B se recorriera hasta diez [*unidades*], ¿dónde se va a encontrar el área máxima?

[60] Alumno 7B: Sería cinco [*u*], [*se refiere al valor de la variable independiente*].

[61] Alumno 7A: Sería veinticinco hasta acá arriba [*señala el eje Y*] (…) sería hasta veinticinco [u^2] y se va a formar [*con el dedo señala el comportamiento de una parábola con las características de la mostrada en la pantalla, pero con punto máximo en el eje Y de veinticinco*]. Aquí [*señala el punto máximo*] sólo llega hasta uno, pero si fuera de diez [*unidades*]…sería hasta veinticinco [*se refiere al valor máximo*].

La herramienta tecnológica digital permite a los participantes validar los resultados propuestos en ambiente de lápiz y papel. En los diálogos [47] a [52] se expone la importancia de comprender la situación cuando se hace referencia al primer cuadrante de la representación gráfica; la pareja expone que "…no se están tomando en cuenta valores negativos…", se entiende que ellos comprenden que los valores negativos para el área del rectángulo *APDE* no tienen sentido en la situación. Lo anterior, es un punto de partida para proponer el intervalo de variación de las variables denominada por los participantes como dominio de la función (diálogos [53] a [56]). A través del software Geogebra se asocia el componente Representación de la covariación con el componente Consecuencia de la covariación, promovidos al inferir el comportamiento general de la gráfica cartesiana, expresada en los diálogos [57] a [61], y de sus características como su comportamiento y valor máximo de área del rectángulo *APDE* (véase Figura 6.25).

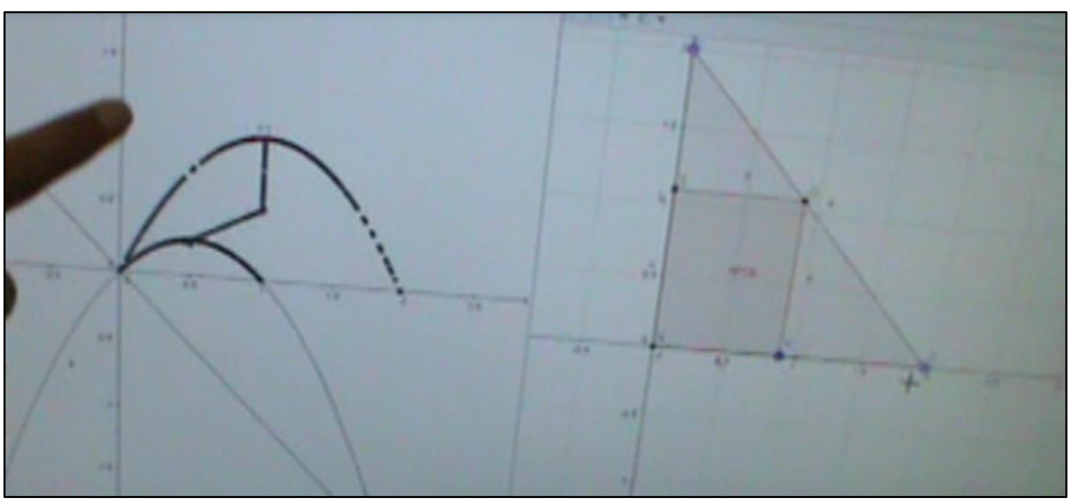


Figura 6.25. Modificación de la longitud de los lados del triángulo $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ al doble.

6.4.4. Papel de la herramienta digital en la resolución de la Actividad 2

El uso del software Geogebra, en la resolución del segundo momento de la Actividad 2 no sólo permitió a los participantes construir la figura geométrica con las características de la situación, sino que brindó la oportunidad de analizar la covariación desde el punto de vista cuantitativo por medio de los valores numéricos de las variables involucradas y de manera cualitativa al identificar la dependencia de variables. Pero uno de los componentes que tienen mayor peso específico es la Representación de la covariación, ya que por medio de la representación simbólica se encapsula el mecanismo que produce la covariación. Esta representación simbólica —representada con notación geométrica, mixta o algebraica— debe transformarse e incluir variables tradicionales para que sean reconocidas por la herramienta digital. Finalmente, la representación gráfica integra el conjunto de representaciones anteriores (figura geométrica y expresión simbólica) y forma parte de la representación analítica de la covariación, en la que se analizan sus consecuencias y se interrelacionan las múltiples representaciones de la covariación.

Durante la resolución de la Actividad 2, los participantes validaron sus resultados propuestos en ambiente de lápiz y papel a partir de los dados por el software para el cálculo de área del rectángulo $APDE$. Con ayuda del ambiente tecnológico digital se logra la relación entre los distintos componentes de la covariación que se vinculan con la figura geométrica desde la pantalla de la computadora (plano euclidiano dinámico), lo cual permite mejorar en los participantes, la comprensión del mecanismo que produce la covariación. A continuación, se describe lo comentado por el equipo 4 cuando aumentan la longitud del lado $\overline{AB}$ (segmento $\overline{AB}$) del triángulo ABC e identifican que el área máxima del rectángulo $APDE$ se obtendrá cuando el punto P este ubicado a la mitad del segmento $\overline{AB}$ (si $\overline{AP}$ mide la unidad) (véase Figura 6.26.a):

[62] Investigador:	¿Qué pasaría si el segmento [$\overline{AB}$] aumentara a diez [*unidades*]? ¿Dónde estaría el punto máximo?
[63] Alumno 4A:	En la mitad del segmento [$\overline{AB}$]; si fuera 10 [*se refiere al segmento* $\overline{\ }$ *de 10 unidades*] sería 5 [*unidades*].
[64] Investigador:	¿Siempre va a estar a la mitad [*del segmento* $\overline{AB}$]?
[65] Alumno 4A:	¡Si! Siempre está a la mitad, porque es donde hay más espacio ocupado dentro del triángulo [*se refiere al rectángulo APDE*]. Porque si moviéramos P a otro punto [*el punto P sobre el segmento* $\overline{AB}$] habría más espacio desperdiciado, más espacio vacío dentro del triángulo [*ABC*] (véase Figura 6.26.a).

[66] Investigador: Entonces la expresión que tienen… la expresión general que modela el comportamiento de área [*del rectángulo APDE*] sería ésta [$A = P \cdot (AB - P)$]. (véase Figura 6.26.b). ¿Qué representa cada una de las variables?

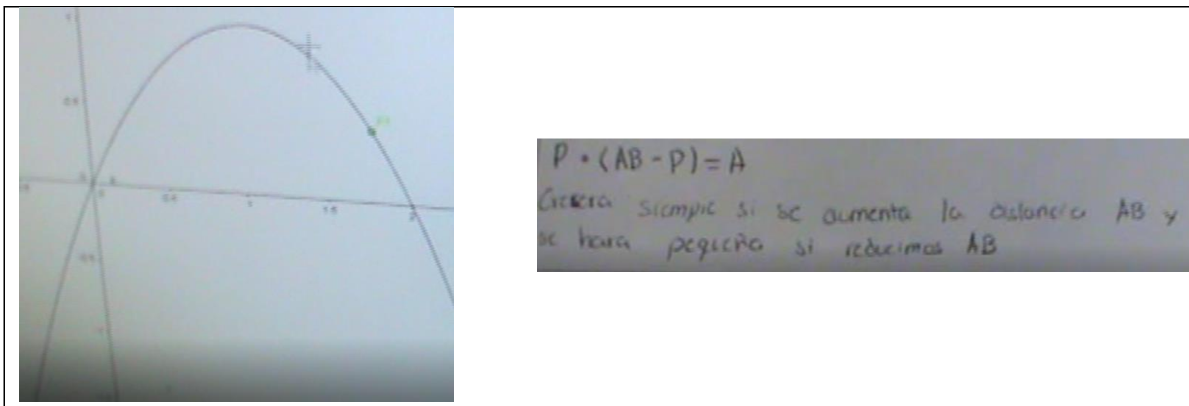
[67] Alumno 4A: Claro, P representa nuestra distancia que recorre nuestro punto [*se refiere al punto P*] dentro del segmento $\overline{AB}$. $\overline{AB}$ es nuestro segmento que puede ser cualquier distancia, cualquier número, mientras sea positivo porque no hay distancias negativas y P, al igual que acá, es la distancia que recorre [*el punto P*].

[68] Investigador: [*En la gráfica que muestra el software*]. ¿Qué parte de la parábola se toma y por qué no es toda? [S*e refiere a ¿por qué el rastro sólo está marcado en el primer cuadrante?*]

[69] Alumno 4A: Sólo se toma la parte positiva porque no hay distancias negativas, no hay un área negativa y sólo se toma nuestro intervalo $\overline{AB}$ porque sólo sería nuestra distancia, porque la parte que se encuentra abajo [*desplaza la gráfica en Geogebra al tercer cuadrante*] es [*representa*] una distancia negativa, son áreas negativas y no existen áreas negativas y de este lado tampoco porque están en el cuadrante cuatro [*cuarto cuadrante*], tampoco, son puros negativos.

[70] Investigador: El eje X, ¿qué representa? Y el eje Y, ¿qué representa?

[71] Alumno 4A: Mi eje X representa la distancia que recorre P dentro del segmento $\overline{AB}$ y Y [*el eje Y*] representa el área [*se refiere al área del rectángulo APDE*] cuando P está en cierto punto.



(a) (b)

Figura 6.26. Generalización del comportamiento de área del rectángulo *APDE*, respuesta del equipo 4: (a) el punto B se desplaza para obtener el doble del segmento $\overline{AB}$ y se genera la gráfica a partir del desplazamiento del punto P; (b) expresión simbólica en términos del punto P y el segmento $\overline{AB}$.

En los diálogos [62] a [71] se vislumbran dos elementos importantes: el primero relacionado con la noción de variable (diálogo [67]) que los participantes relacionan primero con un segmento representado por una variable geométrica, luego con la posición de un punto sobre un segmento, y finalmente, una magnitud representada por una variable algebraica; el segundo, por la interpretación de la situación geométrica y la interrelación entre componentes del marco de covariación: Representación de la covariación y Consecuencias de la covariación, ya que por medio de la herramienta digital se promueve la relación entre variables (diálogos [66] a [69]) y las características obtenidas producto de las consecuencias de la covariación como el valor máximo.

Otro ejemplo de cómo la herramienta tecnológica digital favorece la conexión entre los componentes del marco de razonamiento de covariación se muestra en las respuestas del equipo 8, cuando se pide a los participantes obtener una expresión que represente el área del rectángulo *APDE* basados en las expresiones $APDE = \overline{AP} \times (\overline{AB} - \overline{AP})$ y $y = x \cdot (a - x)$. Cuando los participantes explican qué sucede cuando el lado $\overline{AB}$ del triángulo *ABC* aumenta al doble, la pareja 8, representa el área del rectángulo *APDE* como $2AP \times 2PB$ (véase Figura 6.27). Para determinar si la expresión anterior es correcta, comienza la interacción entre investigador y alumnos, por ello, el investigador pide que le expliquen cómo obtuvieron la expresión y los alumnos analizan y concluyen que la expresión es incorrecta. Por lo tanto, el entrevistador pide a los alumnos escribir una nueva forma de representar el área del rectángulo cuando el lado $\overline{AB}$ del rectángulo *ABC* aumenta al doble y ellos anotan la expresión $2(AP \times (AB - AP))$ (véase Figura 6.27). En seguida, se pide a los alumnos escribir la expresión anterior en términos de x y y, para que pueda ser ingresada al software Geogebra y pueda validarse la expresión por medio del rastro, por ello, los alumnos cambian la expresión a $y = x \cdot (2a - x)$ y consideran que el segmento $\overline{AB}$ es 10 [*unidades*], por tal motivo ingresan la expresión en el área de entrada del software como $y = x \cdot (20 - x)$ (véase Figura 6.27).

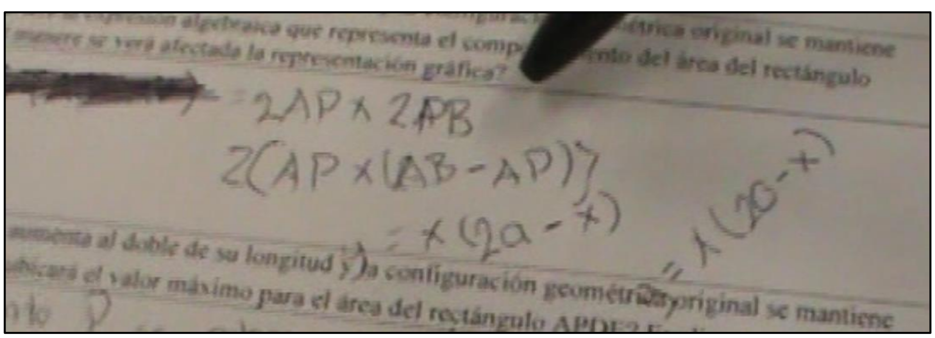


Figura 6.27. Elaboración de la expresión simbólica de área del rectángulo cuando la longitud del segmento $\overline{AB}$ aumenta al doble.

Cuando los participantes ingresaron la expresión $y = x \cdot (20 - x)$ en el área de entrada del software Geogebra, ellos notaron que la gráfica no coincide con el rastro generado por el punto P [*observan parte de la parábola que se trazó junto al eje Y*] (véase Figura 6.28.a). Durante la entrevista los participantes se dan cuenta de que el doble de la longitud del lado $\overline{AB}$ debe ser 2 [unidades]. Por esta razón, modifican la expresión e identifican que la gráfica coincide con el rastro del punto P (véase Figura 6.28.b). A continuación, se transcribe parte del diálogo con los participantes cuando identifican que la gráfica coincide con la expresión simbólica ingresada en el software:

[72] Investigador: ¡Entonces! ¿Qué pasó? [Se refiere a qué observan cuando modificaron a 2 unidades el segmento $\overline{AB}$ en la expresión simbólica ingresada en el software].

[73] Alumno 8B: Pues generó una parábola más grande, del mismo tipo.

[74] Alumno 8A: ¡Sí, es esta negra! [señala la parábola cuya línea es más gruesa] (véase Figura 6.28.b).

[75] Alumno 8B: Es del mismo tipo que la otra [se refiere a la expresión del problema original $y = x \cdot (1 - x)$], sólo que cambia el intervalo de las variables de x y y.

[76] Investigador: ¿Por qué cambia?

[77] Alumno 8B: Porque… se aumentó el valor de $\overline{AB}$ para que se mantuviera la configuración geométrica de la figura. Entonces, tenemos un rango más amplio para poner el punto P, y ya no sería 0.5 [*unidades*] en donde se encontraría el punto máximo del área.

[78] Investigador: ¿En dónde se encontraría?

[79] Alumno 8B: En el punto uno [*se refiere a P igual a uno*] que sería la mitad del segmento $\overline{AB}$.

[80] Investigador: ¿Siempre va a estar a la mitad del segmento $\overline{AB}$, el punto máximo?

[81] Alumno 8B: ¡Ajá! El punto máximo [*afirma que siempre se encuentra el máximo valor de área cuando el punto P se encuentra en el punto medio del segmento* $\overline{AB}$].

[82] Investigador: Entonces, si el segmento $\overline{AB}$ aumentara a 100 [*unidades*]. ¿Dónde se encontraría el punto [*máximo*]?

[83] Alumno 8B: El punto máximo se encontraría cuando P valiera 50 [*unidades*].

(a) (b)

Figura 6.28. Representación gráfica dada por el software: (a) la gráfica no coincide con el rastro generado por el punto P; (b) se modifica la expresión y coincide con el rastro generado por el punto P.

[84] Investigador: La forma como generalizaron [*la expresión simbólica*] ustedes, la generalizaron [*a la expresión*] de esta manera [*señala la expresión* $y = x(a - x)$] (véase Figura 6.29). ¿Qué representa cada una de las variables?

[85] Alumno 8B: "y" representa el área del polígono [*se refiere al rectángulo APDE*], "a" representa el valor de $\overline{AB}$ [*longitud del segmento* $\overline{AB}$] cualquiera que se le dé, y "x" es el valor de $\overline{AP}$ [*se refiere a la longitud del segmento* $\overline{AP}$].
[86] Investigador: Entonces, ¿cuáles son las variables dependientes e independientes?
[87] Alumno 8B: La independiente sería x y y sería la dependiente, ya que depende de qué valores …bueno, también podría ser independiente a, ya que dependiendo del valor que se le den a a, x y y va a cambiar su valor podría ser más alto o más bajo.
[88] Investigador: Aunque a tiene una característica ¿no?
[89] Alumno 8B: Sería constante, para hacer una tabulación sería un valor constante.

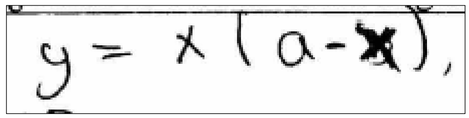


Figura 6.29. Expresión simbólica que generaliza el comportamiento para el área del rectángulo *APDE*.

Las respuestas del equipo 8 dan evidencia de la interconexión entre los componentes Representación de la covariación y Consecuencias de la covariación, ya que la herramienta digital requiere variables algebraicas tradicionales para representar gráficas a partir de una expresión simbólica (diálogos [72] a [83]), y se fomenta la identificación de las características de la representación relacionadas con el componente Consecuencias de la covariación, como valor máximo identificado por medio de la regla de correspondencia (diálogos [80] a [83]). Además, se muestra el significado que los participantes dan a las variables involucradas, así como, la dependencia e independencia de variables de acuerdo con la expresión simbólica (diálogos [84] a [89]). Los diálogos analizados, son respuestas que muestran manifestaciones de la covariación y la herramienta tecnológica digital permite integrar, con base en la representación de la covariación, las características que se pueden identificar como parte de las consecuencias de la covariación surgidas de la situación planteada, en la cual se generaliza la forma cuadrática de la función.

Una manera de potencializar, el razonamiento de covariación en los estudiantes, a través del software Geogebra surge del análisis de la expresión simbólica general, por ejemplo, el equipo 8 expresa el área del rectángulo *APDE*, de manera general, como $y = x \cdot (a - x)$ (véase Figura 6.29) y utiliza la herramienta *deslizador* para definir la literal a de tal manera que pueda asignársele un valor establecido que puede cambiar según se desee con ayuda de la herramienta digital. A continuación, se menciona lo dicho por el equipo 8:

[90] Investigador: ¿Qué pasa cuando mueves el deslizador?
[91] Alumno 8B: La parábola crece, dependiendo del valor que se le dé a a [*valor del deslizador*].

[92] Investigador: ¿Dependiendo del valor que se le dé a a? ¿Cuándo vale en uno [*se refiere cuando la longitud del segmento* $\overline{AP}$ *es la unidad*] qué característica tiene?

[93] Alumno 8B: Es qué… el valor máximo se encuentra cuando P de aquí [*posición del punto P*] valga 0.5 [*unidades*].

[94] Investigador: ¿Qué representa a en la configuración geométrica?

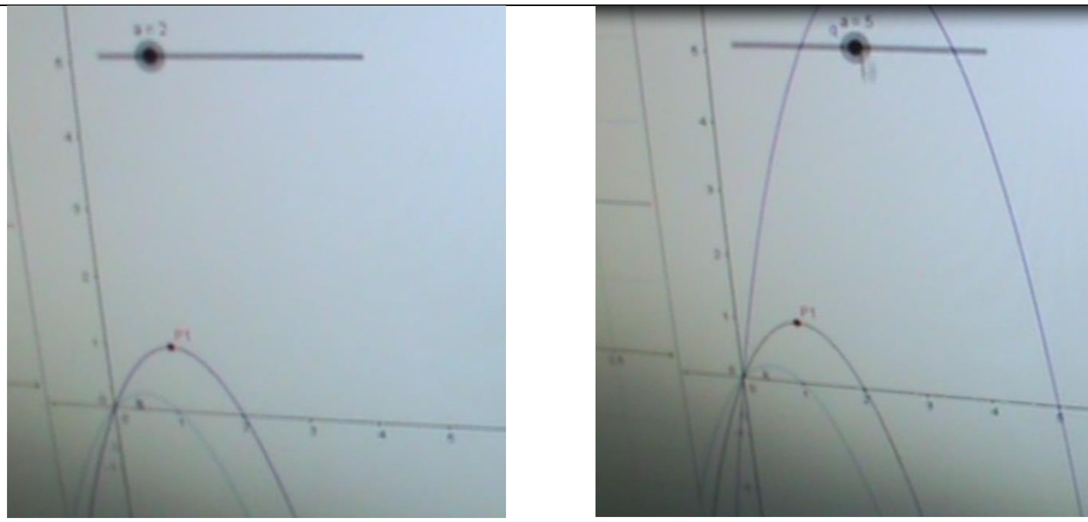
[95] Alumno 8B: a representa el valor de A a B [*se refiere a la longitud del segmento AB*]; los dos lados iguales del triángulo isósceles [*triángulo ABC*].

[96] Investigador: Entonces, si el segmento $\overline{AB}$ aumenta a dos [*unidades*], ¿qué pasa con la parábola?

[97] Alumno 8B: La parábola igual creció. Sigue siendo del mismo tipo…ahora el valor máximo se encuentra cuando el punto P, se coloca en uno (véase Figura 6.30.a).

[98] Investigador: Y cuando esté en cinco [*unidades*], por ejemplo, ¿dónde va a ser el punto máximo?

[99] Alumno 8B: En 2.5 [*unidades*], la mitad de cinco (véase Figura 6.30.b).



(a) (b)

Figura 6.30. Uso de la herramienta *deslizador* cuando: (a) a es igual que 1; (b) a es igual que 5.

Los diálogos [90] a [99] muestran cómo los estudiantes asocian la representación simbólica generalizada con el registro gráfico e infieren su comportamiento a medida que se asignan valores al parámetro a por medio del deslizador generado por las herramientas con las que cuenta el software. Cuando los participantes generalizan el comportamiento de la representación gráfica asociada con el registro simbólico y euclidiano (figura geométrica) se promueve la percepción simultánea de la covariación y se relaciona la familia de funciones asociadas al parámetro definido que permitirá reconocer si el alumno está desarrollando el concepto de función.

La resolución de la SGD con ayuda del software brindó la oportunidad de interactuar con los objetos matemáticos representados, para promover el razonamiento de covariación. Las herramientas con que cuenta Geogebra permitieron, a los participantes, analizar la situación, desde un punto de vista dinámico para hacer más perceptible el mecanismo de covariación. A través de las actividades en las que se hizo uso del software Geogebra se promovió la identificación de la relación entre las variables involucradas (posición del punto P y área del rectángulo *APDE*) y el vínculo existente entre los distintos registros de representación de la covariación, lo cual fue la base para que lograran aludir el mecanismo que produce la covariación.

6.5. Observaciones sobre la actividad 3 en ambiente tecnológico digital

La primera tarea que los estudiantes realizaron como parte de la Actividad 3 consistió en representar, por medio del software Geogebra, la situación geométrica dinámica que ya habían trabajado en ambiente de lápiz y papel. La Figura 6.31 ilustra la representación que los estudiantes obtendrían en la pantalla de la computadora.

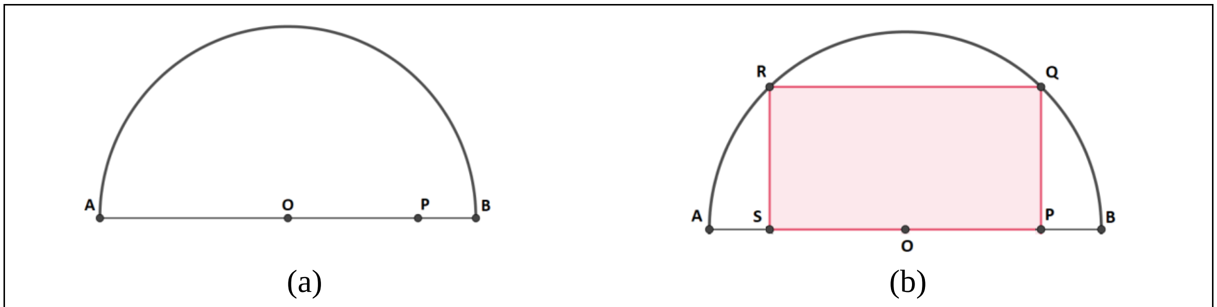


Figura 6.31. Tercera SGD en Geogebra: (a) ubicación del punto P sobre el segmento $\overline{AB}$; (b) rectángulo *PQRS* formado a partir del punto P.

Las preguntas que respondieron los estudiantes en esta actividad fueron las mismas que las propuestas en ambiente de lápiz y papel y se puede percibir que al finalizar la Actividad 3 durante el segundo momento, los participantes avanzan hacia el último componente (*V. Consecuencias de la covariación*). Pero cuando representan la expresión simbólica que permite determinar el caso general para el cálculo de área del rectángulo *PQRS* de cualquier radio o segmento $\overline{OP}$, la pregunta se asocia con el componente *IV. Representación* de la covariación, y puede dar alusión a un retroceso en el desarrollo del razonamiento de covariación, sin embargo, por la formulación de la propia pregunta se establece el trabajo en la componente previa. Es importante destacar que en el momento de resolución de esta actividad ya se habían abordado cuatro situaciones geométricas dinámicas en ambiente de lápiz y papel y tres en ambiente tecnológico digital.

La Tabla 6.5 muestra la manera en que cada pregunta está asociada con un componente del marco propuesto y las producciones relacionadas con cada nivel de respuesta. Debido a que las respuestas de la Actividad 3 están relacionadas en mayor medida con los últimos dos componentes del marco, se destacará el papel de la herramienta tecnológica digital en la resolución dichos componentes. Se debe recordar que, en cada nivel de respuesta de cada Actividad, está asociado un número que aparece entre corchetes y que corresponde a la cantidad de respuestas relacionadas con el número de producciones de cada equipo asociadas a ese nivel.

Tabla 6.5
Resultados de los niveles de respuesta para el segundo momento: Actividad 3.

	Componente	**I. Ignorancia de la covariación**			**II. Consideración de la covariación**			**III. Análisis previo de la covariación**			**IV. Representación de la covariación**			**V. Consecuencias de la covariación**		
	Nivel de respuesta	*N1*	*N2*	*N3*	*N1*	*N2*	*N3*	*N1*	*N2*	*N3*	*N1*	*N2*	*N3*	*N1*	*N2*	*N3*
Pregunta	3.2.1.							0	0	8						
	3.2.2.							1	0	7						
	3.2.3.										1	0	7			
	3.2.4.										0	0	8			
	3.2.5.													0	2	6
	3.2.6.													2	2	4
	3.2.7.													0	6	2
	3.2.8.										0	2	6			
	3.2.9.													2	2	4

6.5.1. Análisis previo de la covariación

Después de construir la configuración geométrica de la situación, con ayuda del software, se solicitó a los participantes responder la siguiente pregunta:

3.2.1. Mueve el punto P sobre el segmento $\overline{AB}$: observa los valores involucrados en la vista gráfica y contesta ¿qué sucede al mover el punto? ¿cómo se comporta el área del rectángulo *PQRS*?

Todas las respuestas de los estudiantes se encuentran en el nivel 3, ya que el software les permite identificar la situación desde el punto de vista de la percepción dinámica de la covariación.

Nivel 3 [8]. En esta categoría se establece una coordinación entre los valores de la variable independiente (punto P) y la dependiente (área del rectángulo *PQRS*); se identifica que al cambiar uno se modifica el otro. El total de los equipos reconocieron la covariación y notaron que el área del rectángulo $APDE$ depende de los valores asociados con el punto P.

Cuando se pregunta acerca del comportamiento del área del rectángulo $PQRS$ cuando se desplaza el punto P sobre el segmento $\overline{OB}$, el total de los equipos consideraron que el valor máximo de área del rectángulo $PQRS$ se localiza cuando el punto P está cerca del valor 0.7 unidades. A continuación, se transcribe lo mencionado por el equipo 8 durante las videograbaciones después de generar la construcción geométrica y analizar el comportamiento de área del rectángulo en ambiente tecnológico digital:

[100] Investigador: ¿En qué posición del punto P se ubica el valor máximo de área del rectángulo? Y ¿cómo lo notaron?

[101] Alumno 8A: Pues…notamos que el punto máximo está entre las coordenadas…se encuentra entre las coordenadas 0.6 y 0.8 [*unidades*], o sea, en 0.7 [*unidades*] ya tiene un valor de uno [u^2] que sería el valor máximo. Y lo determinamos de esta manera ya que al mover el punto P en todo el segmento $\overline{AB}$, pues en el software me queda el área total del polígono [*rectángulo PQRS*], pues al moverlo pude determinar que en esos puntos es donde se tiene el valor máximo (véase Figura 6.32.a).

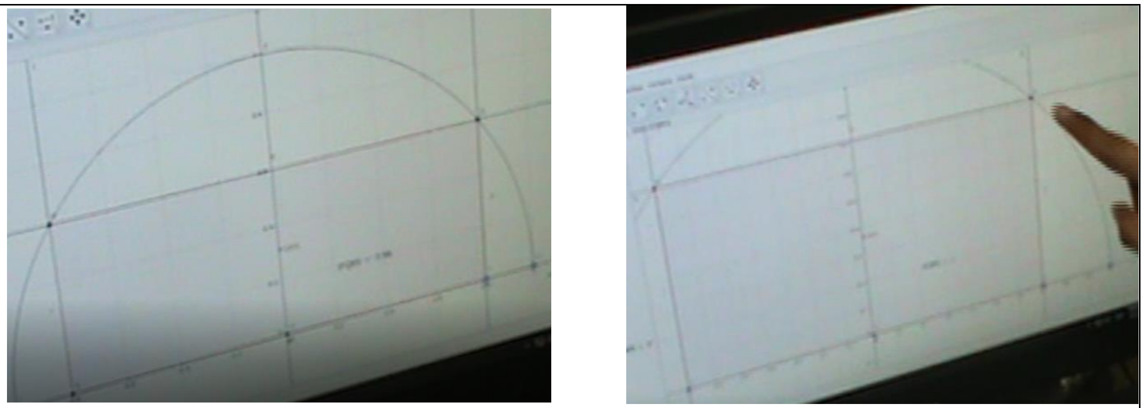
[102] Investigador: Si representamos gráficamente el comportamiento de área [*del rectángulo PQRS*]. ¿Cuál sería? ¿Cómo sería? [*Se refiere a su gráfica*].

[103] Alumno 8A: Tendría un comportamiento de una parábola porque el punto máximo se encuentra entre los extremos entonces al mover el punto P pues los valores van a ir desde cero hasta uno [u^2] y de nuevo a cero [u^2].

[104] Investigador: Me puedes señalar con tu dedo, ¿cómo será el comportamiento de la parábola? *[El alumno asemeja el movimiento del dedo índice sobre la pantalla de la computadora una parábola con eje focal paralelo al eje Y que abre hacia abajo]*.

[105] Alumno 8A: No quedaría de una manera una parábola exacta porque el valor máximo no se encuentra justo en medio [*se refiere a la mitad del segmento* $\overline{OB}$], entonces eso daría que el punto máximo estaría más hacia un lado que hacia el otro y pues sería como algo así más o menos [*el alumno asemeja el movimiento del dedo índice al comportamiento del área del rectángulo*] (véase Figura 6.32.b).

Los diálogos [100] a [105] se asocian con dos componentes: Análisis previo de la covariación cuando se identifica el comportamiento que tienen los valores de área del rectángulo $PQRS$ al desplazar el punto P y Consecuencias de la covariación ya que de manera explícita se menciona una parábola no uniforme (dialogo [103]). El ambiente tecnológico digital influyó que el equipo 8 promoviera el razonamiento de covariación con base en el valor de área del rectángulo, el cual cambia cuando se desplaza el punto P; estos valores son explícitos por medio del software y permiten inferir el comportamiento de la representación gráfica (diálogos [100] a [103]).



(a) (b)

Figura 6.32. Respuestas de E8, cuando los alumnos interactúan con el software; (a) desplazamiento del punto P e identificación de que el valor máximo de área se encuentra cerca de 0.7 [*unidades*]; (b) el participante asemeja el movimiento del dedo índice al comportamiento del área del rectángulo.

6.5.2. Representación de la covariación

Aunque los estudiantes representaron la situación geométrica dinámica en la pantalla con ayuda del software y tenían la posibilidad de mover el punto y analizar la configuración geométrica de la situación y el comportamiento del área del rectángulo, el software no les proporciona la expresión simbólica que da cuenta de la covariación. Por esto, se les pide otra vez que representen simbólicamente la situación mediante la consigna:

> 3.2.2. De acuerdo con la configuración del rectángulo *PQRS*, calcula su área para cualquier punto P que se coloque sobre el segmento $\overline{AB}$.
>
> Nivel 1 [1]. Representa la covariación con una expresión usando notación geométrica.
>
> Nivel 2 [0]. Representa la covariación con una expresión usando notación mixta.
>
> Nivel 3 [7]. Representa la covariación con una expresión con notación algebraica.

Un equipo (E8) representa la covariación con una expresión que emplea notación geométrica como el producto de la base (2 $\overline{OP}$) por su altura $\left(\sqrt{(\overline{OQ}^2-\overline{OP}^2)}\right)$ cuya expresión es $A = 2\left(\overline{OP}\cdot\sqrt{\overline{OQ}^2-\overline{OP}^2}\right)$ (véase Tabla 6.6 referencia primer acercamiento N1). Ningún equipo representa la expresión empleando notación mixta asociada con el Nivel 2. La notación algebraica es utilizada por siete equipos: dos equipos (E1, E7) expresan el área del rectángulo *PQRS* como el producto de su base por su altura: $a = 2p(1-p)$ y $y =$

$2x(1-x^2)$, respectivamente; cuatro equipos (E3, E4, E5, E6) utilizan una variación de la expresión $a = 2p\left(\sqrt{1-p^2}\right)$ y un equipo (E2) emplea la expresión $f(x) = \left(\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\right)x$. En las respuestas a esta pregunta, se advierte que, la mayoría de los equipos utilizan variables algebraicas para representar la situación. Se hace evidente que la experiencia de los participantes en la resolución de las situaciones geométricas dinámicas promueve la integración de elementos algebraicos, debido a que deben ingresar estas expresiones al software, lo cual permite separarse del contexto geométrico de la situación inicial.

Como parte de la siguiente tarea se solicitó calcular el área del rectángulo para casos particulares (percepción discreta de la covariación), con la consigna: 3.2.3. Calcula el área de los rectángulos *PQRS* que se encuentran en las siguientes figuras (cuando el punto P se ubica en 0.2, 0.5. y 0.8 unidades). Anota los resultados en la primera columna. En la segunda columna anota el valor del rectángulo *PQRS* dado por el software. Si para una fila dada los resultados dados por Geogebra y el ambiente de lápiz y papel difieren, reajústalos usando manipulaciones algebraicas y escribe tus resultados en la última columna.

En esta tarea, los equipos 1 y 7, dan cuenta de que los resultados propuestos originalmente no corresponden a la solución dada por el software y ajustan las operaciones para obtener una expresión que cumpla con los valores de área del rectángulo solicitado. La Figura 6.33 muestra cómo el equipo 1, durante el primer acercamiento a la representación de la covariación, se basa en la experiencia que les brindó las SGD resueltas en sesiones previas y considera la igualdad de las longitudes de los segmentos: $\overline{PB} = \overline{PQ}$, por lo que establece que $\overline{PB} = 1 - p$, y por esa razón obtiene la expresión $a = 2p(1-p)$. Este equipo ajustó su respuesta y empleó el teorema de Pitágoras para obtener el segmento $\overline{PQ}$ [altura del rectángulo *PQRS*]. El resto de los equipos validaron las expresiones propuestas y no necesitaron la tercera columna para ajustar los resultados.

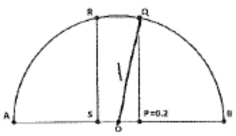
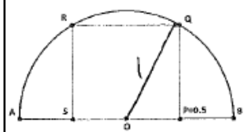
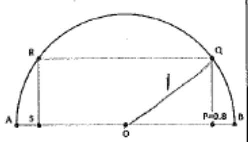
Figuras	Resultados propuestos en ambiente de lápiz-y-papel	Resultados dados por GeoGebra	Cálculos algebraicos para reajustarlas (si es necesario)
	$a = 2p(1-p)$ $a = 2(0.2)(1-0.2)$ $a = (0.4)(0.8)$ $a = 0.32\ u^2$	0.39	$a^2+b^2=1$ $0.2^2+b^2=1$ $b^2=1-0.04$ $a=2p(\sqrt{1-p^2})$ $a = 0.4\ (0.97) = 0.39$
	$a = 2p(1-p)$ $a = 2(05)(1-05)$ $a = 1\ (0.5)$ $a = 05\ u^2$	0.86	$a=2p(\sqrt{1-p^2})$ $a = 2(0.5)(\sqrt{1-0.5^2})$ $a = 1\ (\sqrt{1-0.25})$ $a = 1\ (\sqrt{0.75})$ $a = 0.86$
	$a = 2p(1-p)$ $a = 2(0.8)(1-0.8)$ $a = (1.6)(0.2)$ $a = 0.32\ u^2$	0.96	$a=2p(\sqrt{1-p^2})$ $a = 2(0.8)\ (\sqrt{1-0.8^2})$ $= 1.6(\sqrt{0.36})$ $= 1.6\ (0.6)$ $= 0.96$

Figura 6.33. Validación de resultados obtenidos por E1 basados en las expresiones propuestas.

En seguida se solicita a los participantes atender la pregunta:

3.2.4. ¿De qué manera se puede simplificar la expresión simbólica obtenida previamente? Se sugiere nombrar x a la medida del segmento $\overline{OP}$, expresar la medida de otros segmentos en términos de x y representar el área del rectángulo *PQRS* como y.

El total de los equipos representan la covariación con una expresión con notación algebraica, por ello todas las respuestas se encuentran en el Nivel 3. Seis equipos (E1, E2, E4, E6, E7, E8) expresan el área del rectángulo como $y = 2x\left(\sqrt{1-x^2}\right)$ (véase Figura 6.34.a); dos equipos (E3, E5) incluyen en su expresión el valor absoluto, ya que consideran que al área no pueden asignársele valores negativos $y = \left|2x\left(\sqrt{1-x^2}\right)\right|$ (véase Figura 6.34.b) y un equipo (E2) expresa de dos maneras distintas el área del rectángulo *PQRS* como $y = \left(\sqrt{1-x^2}\right)(2x)$ y $f(x) = x\left(\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\right)$ (véase Figura 6.34.c).

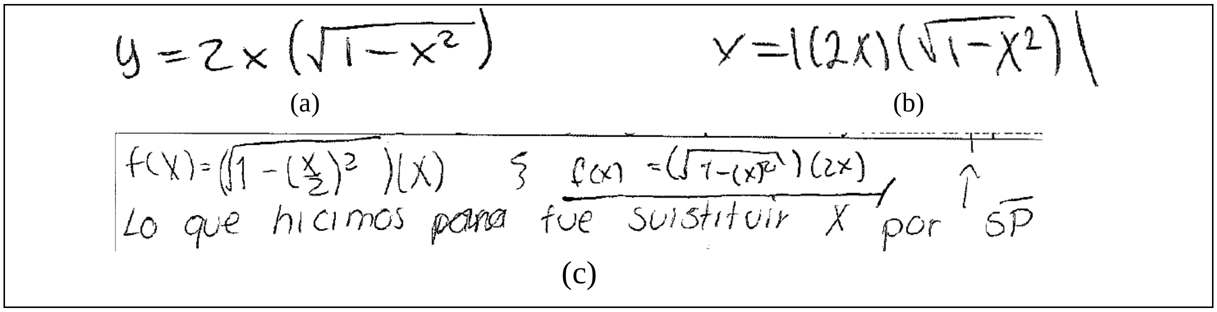


Figura 6.34. Cálculo de área del polígono en términos de x y y. (a) Respuesta de E1; (b) Respuesta de E3; (c) Respuesta de E2.

Ante la pregunta:

3.2.8. ¿Cuál será la expresión algebraica para cualquier longitud del radio de la semicircunferencia? ¿Cómo se verá afectada su gráfica?

En las respuestas de los participantes no se registró ninguna en el Nivel 1, ya que en ninguna expresión se utilizó notación geométrica.

Nivel 2 [2]. Representan la covariación con una expresión con notación mixta. Las respuestas de este nivel son: $Area = (2x)\left(\sqrt{\overline{AB} - x^2}\right)$ y $PQRS = 2\left(OP \cdot \sqrt{r^2 - OP^2}\right)$, dadas por los equipos 4 y 8, respectivamente (véase Figura 6.35.a).

Nivel 3 [6]. Representan la covariación con una expresión con notación algebraica. Las respuestas de este nivel involucran un parámetro definido como: p, x, r, m n, entre las que se destacan: $A = (2p)\left(\sqrt{r^2 - p^2}\right)$, $f(x) = \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)(2x)$, $f(p) = \left(\sqrt{r^2 - p^2}\right)(2p)$ (véase Figura 6.35.b), $A = \left|(2p)\left(\sqrt{r^2 - p^2}\right)\right|$ (véase Figura 6.35.c) y $y = 2x\left(\sqrt{m^2 - x^2}\right)$.

Con base en las respuestas anteriores, los participantes explican que cuando el radio de la semicircunferencia cambia (longitud del segmento $\overline{OB}$), entonces la gráfica se sigue comportando con características similares a la original. Es en este momento que se ratifica la correspondencia entre los componentes Representación de la covariación y Consecuencias de la covariación, la cual se analiza a continuación.

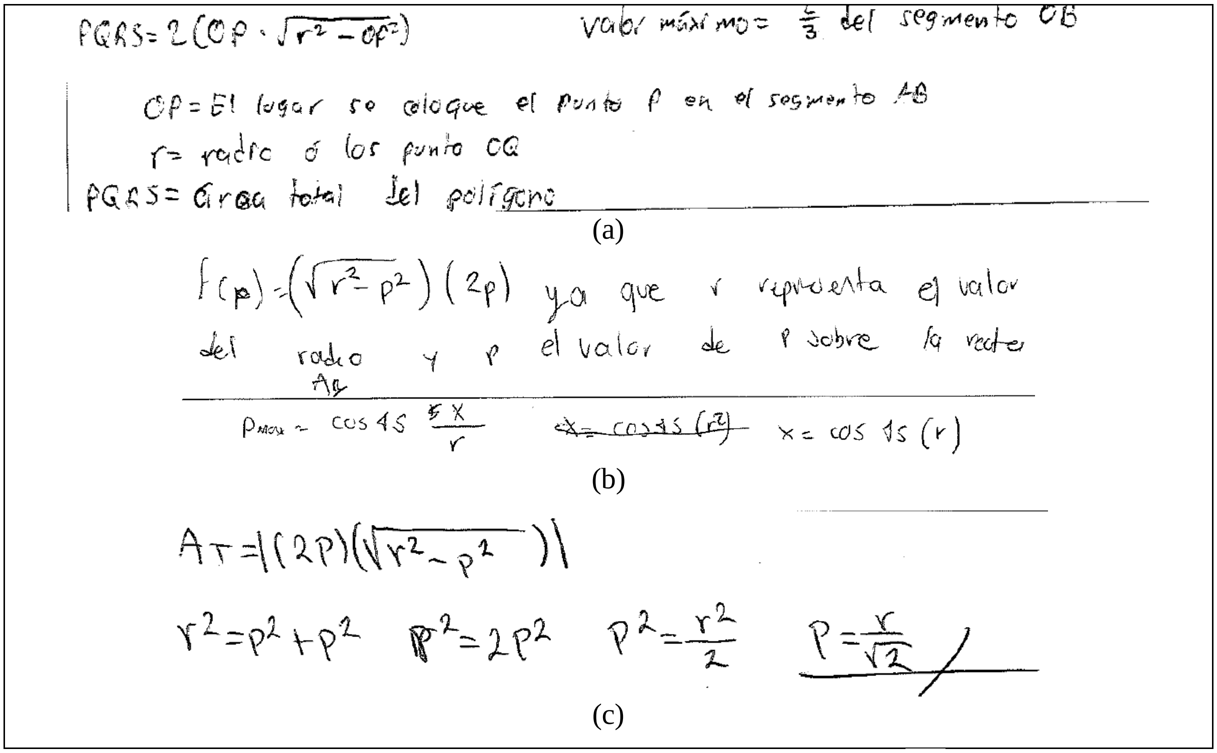


Figura 6.35. Representación simbólica para cualquier valor del segmento $\overline{OB}$: (a) Respuesta dada por E8; (b) Respuesta dada por E6; (c) Respuesta dada por E3.

Tabla 6.6

Respuestas asociadas con la representación de la covariación en el segundo momento de la Actividad 3: Geogebra

Nivel distintivo	Notación	Elementos	Respuesta	Equipo	Respuesta	Equipo
			Primer Acercamiento		Segundo Acercamiento	
N1	Geométrica [NG]	Las variables son vistas como segmentos	Área $PQRS = 2(OP \cdot \sqrt{OQ^2 OP^2})$ $= 2(OP \cdot \sqrt{OQ^2 - OP^2})$	E8	$PQRS = 2(OP \cdot \sqrt{OQ^2 - OP^2})$	E5
N3	Algebraica [NA]	Se emplean variables algebraicas o literales	$a = bh$ $\quad \overline{OP} = P$ $a = 2\,\overline{OP} \cdot \overline{PQ}$ $\quad \overline{PQ} = 1-P$ $a = 2P(1-P)$	E1	$a = 2p(\sqrt{1-p^2})$	E1
			$2x(1-x^2) = y$ $2x$ = representa la distancia de $\overline{OP}$, y es el doble, porque se necesita encontrar el el segmento $\overline{SO}$ y = es el área de Poligono $(1-x^2)$ = Uno es el radio de la circunferencia, x^2 = representa la distancia de $\overline{OP}$ al cuadrado	E7	$2x(\sqrt{1^2 - x^2}) = y$	E7
			$A_T = \lvert(2P)(\sqrt{1-p^2})\rvert$	E3	$A_T = \lvert(2P)(\sqrt{1-p^2})\rvert$	E3
			$f(x) = (\sqrt{1-x^2})(2x)$ utilicamos el para calcular la altura y multiplic por dos para calcular la base y ambos variables	E6	$F(x) = \sqrt{1-x^2}(2x)$	E6

*Ninguna respuesta de los participantes mostró características de notación mixta asociada con el Nivel 2.

6.5.3. Consecuencias de la covariación

En este componente se establece una relación entre la regla de correspondencia [registro simbólico] obtenida en el componente anterior y otros registros de representación [tabular y/o gráfico]. Para promover este componente se pidió a los participantes responder la consigna:

> 3.2.5. De acuerdo con los resultados del inciso 3.2.3, elabora una tabla que relacione la longitud del segmento $\overline{OP}$ con el área del rectángulo *PQRS*. Después dibuja la representación gráfica que relaciona los valores obtenidos en la tabla.

Nivel 2 [2]. La representación gráfica no corresponde a la situación analizada. Por ejemplo, el equipo 2 utiliza la regla de correspondencia en la cual la variable x es considera la base del rectángulo $PQRS$ (lado $\overline{SP}$) expresada como $f(x) = x\left(\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\right)$ y muestra una parte de la gráfica que incluye valores hasta 1.6 unidades asignados a la variable independiente (véase Figura 6.36.a); la representación gráfica del equipo 4 muestra los valores de forma creciente basados en la tabla, pero interpreta que estos continúan aumentando para valores mayores que 0.8 unidades (véase Figura 6.36.b).

Nivel 3 [6]. La representación gráfica corresponde a la situación analizada. Cinco equipos (E1, E5, E6, E7, E8) representan la situación para valores de la variable dependiente entre cero y la unidad (véase Figura 6.36.c). Por otro lado, únicamente el equipo 3 representa los valores de la tabla en el plano cartesiano basados en el análisis inicial de la expresión simbólica $y = \left|(2x)\left(\sqrt{1-x^2}\right)\right|$ y determina que el punto máximo se localiza —según la gráfica— en $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ [*unidades*] (véase la Figura 6.36.d).

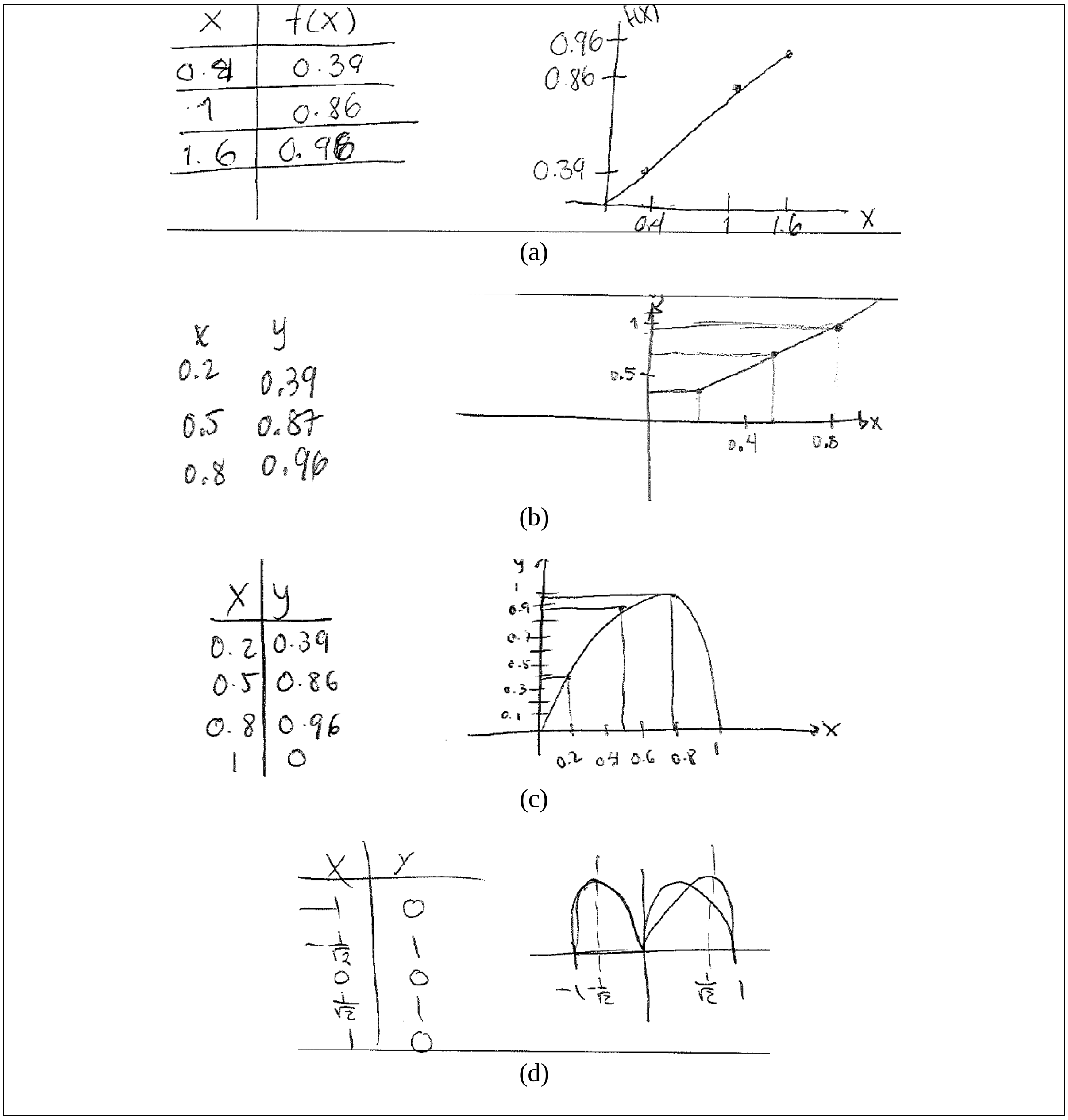


Figura 6.36. Representación gráfica de la expresión simbólica obtenida previamente. (a) Respuesta dada por E2; (b) Respuesta dada por E4; (c) Respuesta dada por E1; (d) Respuesta dada por E3.

Ante la pregunta:

3.2.6. ¿Cuál es el intervalo de variación para cada una de las variables identificadas?

Nivel 1 [2]. Omiten la variación conjunta de variables y sólo mencionan el intervalo de variación para una de ellas. El equipo 3 menciona que “La única variable es p y el [su] intervalo de variación es de -1 a 1” (véase Figura 6.37.a).

Nivel 2 [2]. Contemplan la variación conjunta entre dos o más variables sin detallar los intervalos de variación para cada una. El equipo 4 considera la variación de los segmentos $\overline{OP}$, $\overline{RS}$, así como, del área y perímetro del rectángulo y el equipo 8 menciona que el área "depende del lugar donde se coloque el punto P en el segmento $\overline{AB}$, mientras más cercano esté del extremo, el área será menor a que si el punto P se localiza en medio del segmento $\overline{AB}$. El intervalo de variación (depende) varía según donde se coloque el punto P" (véase Figura 6.37.b).

Nivel 3 [4]. Se consideran los intervalos de variación para las variables dependiente e independiente (covariación) y estos intervalos corresponden a la situación planteada. El equipo 6 afirma que "el área del polígono, la recta de la base y la recta de la altura [se refiere a los lados que corresponden a la base y la altura del rectángulo *PQRS*] en todos los casos el intervalo de variación es de [0 a 1]" (véase Figura 6.37.c); el equipo 2 menciona que el área del rectángulo y su altura varían entre cero y la unidad, y su base en el intervalo de $[-1, 1]$ (véase Figura 6.37.d). Los resultados muestran que la mayor parte de los equipos están familiarizados con la covariación, pero sólo la mitad de ellos considera los intervalos de variación para las variables involucradas.

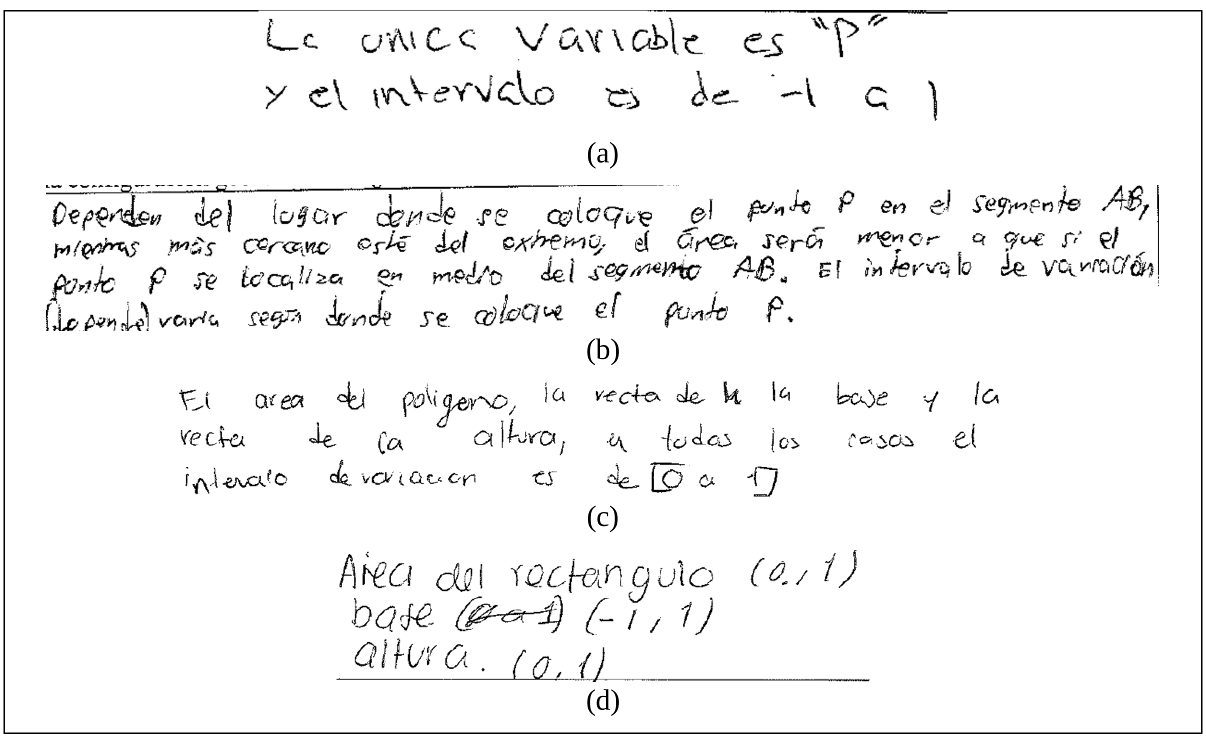


Figura 6.37. Intervalos de variación de la situación geométrica; (a) Respuesta dada por E3; (b) Respuesta dada por E8; (c) Respuesta dada por E6; (d) Respuesta dada por E2.

Ante la pregunta:

3.2.8. En caso de existir un valor máximo para el área del rectángulo *PQRS*, ¿cuál es la posición del punto P en la que se tiene el máximo valor de su área?

Las respuestas de los equipos se asocian con los siguientes niveles:

Nivel 2 [6]. Se indica de manera aproximada la posición del punto P, en la cual se tiene el valor máximo de área del rectángulo. Seis equipos identifican que el valor máximo de área se obtiene cuando el punto P se acerca a la posición 0.7; esta afirmación se basa en la aproximación tanto por la representación tabular como la dada por el software. El equipo 3 afirma que "el valor máximo se encuentra cuando P está en 0.7 y es 1 [la unidad]" y el equipo 7 responde que "si *(sic.)* [se refiere a la existencia de un punto máximo], sería el punto $\overline{\mathrm{OP}} = 0.74$ ya que al utilizar la fórmula $2\mathrm{x}\left(\sqrt{1-\mathrm{x}^2}\right) = \mathrm{y}$ [y sustituir se tiene] $2(.74)\left(\sqrt{1-(.74)^2}\right) = 1\ \mathrm{u}^2$" (véase Figura 6.38.a).

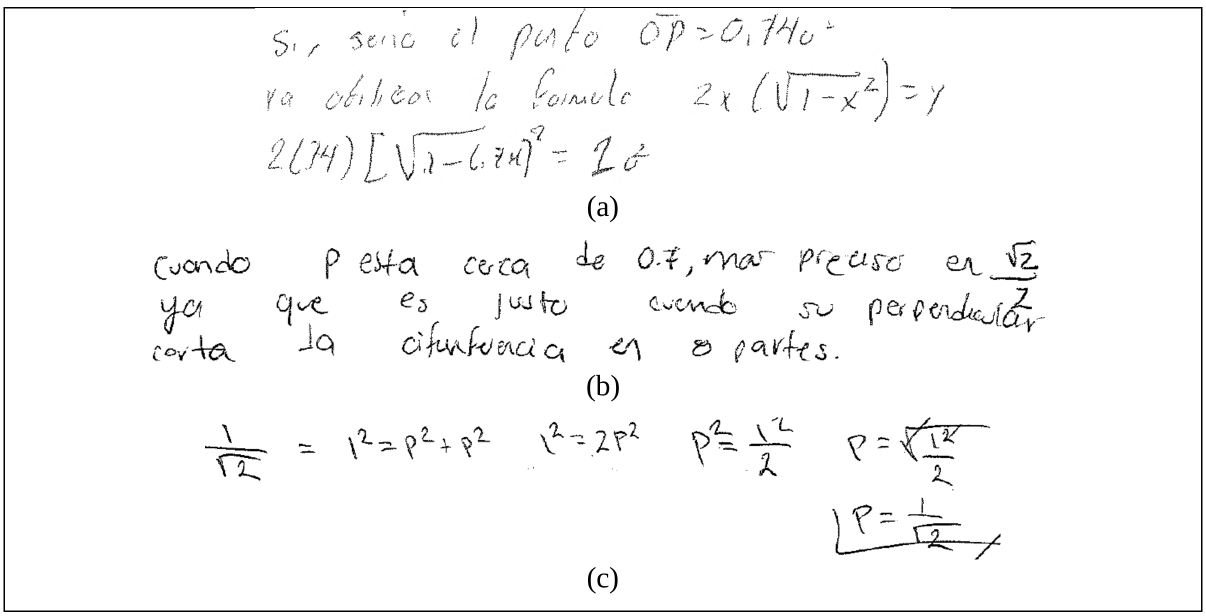


Figura 6.38. Posición del valor máximo de área; (a) Respuesta dada por E7; (b) Respuesta dada por E6; Respuesta dada por E3.

Nivel 3 [2]. Se detalla la ubicación del punto máximo. Por un lado, el equipo 6 indica que el punto máximo se encuentra cuando $p = \frac{\sqrt{2}}{2}$; este valor se obtiene al identificar que el rectángulo *PQRS* de máxima área inscrito en la semicircunferencia está conformado por dos cuadrados, cuyo lado recto se divide en ángulos iguales (45°) y relacionan uno de los lados de dicho cuadrado con la razón trigonométrica $\cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (véase Figura 6.38.b). Por otro lado, el equipo 3 identifica que se forma un cuadrado en el lado derecho del rectángulo de área máxima y determina el valor de p empleando el teorema de Pitágoras (véase Figura 6.38.c).

Durante la interacción con el software y con la intención de validar los resultados obtenidos, el equipo 8 ingresó la expresión simbólica $y = 2\left(x \cdot \sqrt{1 - x^2}\right)$ asociada con el área del rectángulo *PQRS* en Geogebra. A continuación, se transcribe lo dicho por el equipo 8 cuando validan el comportamiento del área del rectángulo *PQRS*:

[105] Investigador: ¿Qué es lo que pasa cuando mueves el punto [P]?

[106] Alumno 8A: Pues… la marca [*se refiere al rastro del punto*] en la vista gráfica 2 toma la misma trayectoria que la fórmula que ingresé [*en el área de entrada del software*]. Al mover el punto P en la vista gráfica 1, en el segmento $\overline{AB}$, pues sí, el comportamiento del punto uno [*se refiere al punto que deja el rastro en la vista gráfica 2*] es el mismo que la fórmula (véase Figura 6.39).

[107] Investigador: Y el valor máximo, ¿en qué posición de P se encuentra? ¿Si se encuentra en donde lo proponías?

[108] Alumno 8A: Pues… se encuentra cerca… del lugar 0.7 [*unidades*].

La herramienta tecnológica digital permite a los participantes validar las expresiones simbólicas propuestas en ambiente de lápiz y papel (*IV. Representación de la covariación*) que se asocian con su representación gráfica (*V. Consecuencias de la covariación*) en el plano cartesiano dinámico (diálogos [105] a [108]).

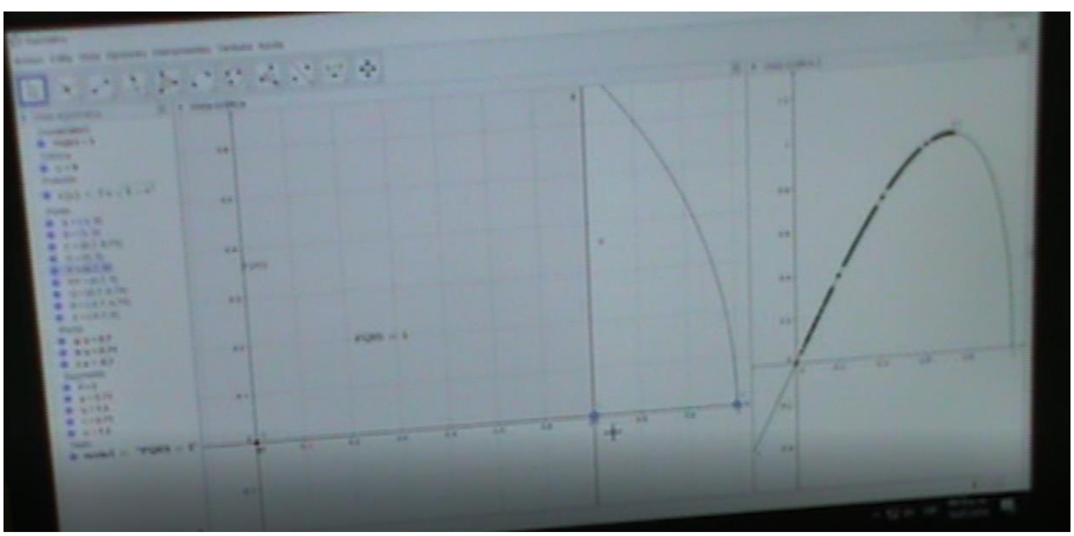


Figura 6.39. Identificación del valor máximo a partir del rastro que deja el punto P cuando se desplaza sobre el diámetro $\overline{AB}$, respuesta de E8.

Como parte del último inciso se formulan tres preguntas, a saber:

3.2.8. ¿Cuál será la expresión algebraica para cualquier longitud del radio de la semicircunferencia? ¿Cómo se verá afectada la gráfica? ¿Cuál es la posición de P en la que se obtiene el máximo valor de su área?

La primera parte de la pregunta, relacionada con la expresión algebraica para cualquier longitud de radio de la semicircunferencia se analizó en el componente Representación de la covariación (véase parágrafo anterior). A continuación, se muestran los resultados asociados con la posición de P para obtener el valor máximo de área del rectángulo *PQRS*.

Nivel 1 [2]. Se propone una expresión general para la obtención del valor máximo de área que no corresponde a la situación planteada o se omite la respuesta.

Nivel 2 [2]. Se estima la posición de la variable independiente para obtener el valor máximo de área como una aproximación. El equipo 4 propone la expresión $AB = \sqrt{\frac{x}{2}}$, al parecer *x* lo relacionan el radio de la semicircunferencia, pero no fueron capaces de explicar cómo se les ocurrió dicha expresión (véase Figura 6.40.a) y el equipo 8 considera que la posición del punto P debe estar a $\frac{2}{3}$ partes del segmento $\overline{OB}$ (véase Figura 6.40.b).

Nivel 3 [4]. Se da el valor exacto para la ubicación del punto máximo. El equipo 6 indica que el punto máximo se encuentra cuando $x = \cos 45°(r)$. El valor se obtiene al identificar que el rectángulo *PQRS* de máxima área inscrito en la semicircunferencia está conformado por dos cuadrados, cuyo lado recto se divide en ángulos iguales (45°) y relacionar uno de los lados de dicho cuadrado con la razón trigonométrica $\cos(45°) = \frac{x}{r}$, por lo que, $x = \cos 45°(r)$ (véase Figura 6.40.c). El equipo 3 identifica que el rectángulo *PQRS* de mayor área está formado por dos cuadrados y se basa en el teorema de Pitágoras para obtener la medida de los lados (valor de P) (véase Figura 6.40.d).

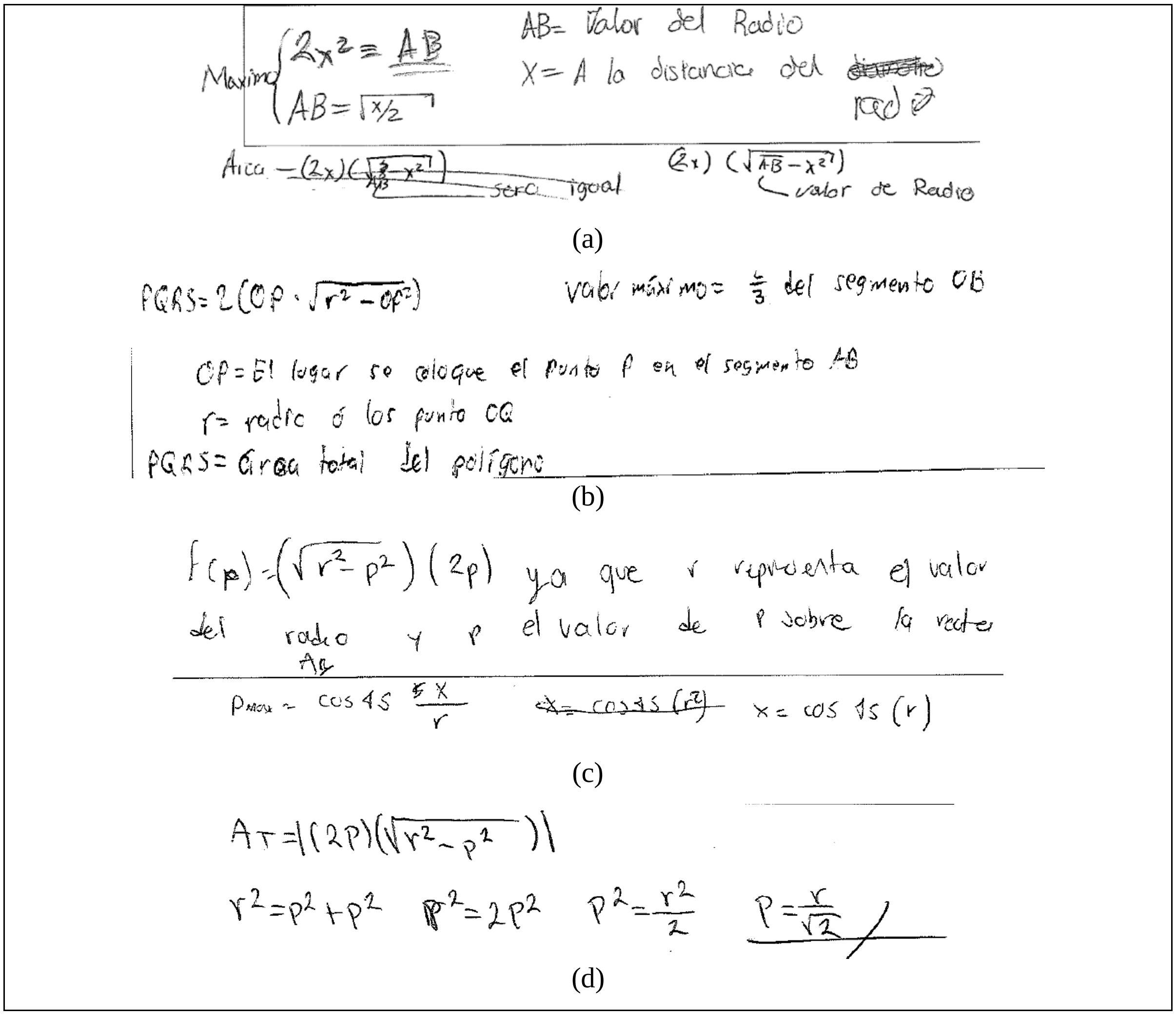


Figura 6.40. Posición del punto P para obtener el valor máximo de área del rectángulo para cualquier radio de la semicircunferencia; (a) Respuesta dada por E4; (b) Respuesta dada por E8; (c) Respuesta dada por E6; (d) Respuesta dada por E3.

A continuación, se expone parte de la participación del equipo 3, al explicar los detalles de la expresión $A_T = \left|(2p)(\sqrt{r^2 - p^2})\right|$ (véase Figura 6.40.d) cuando es analizada con Geogebra y comparada con la gráfica propuesta en lápiz y papel:

[109] Investigador: Inserten la expresión en Geogebra [*se refiere a* $A_T = \left|(2p)(\sqrt{3^2 - p^2})\right|$ *empleando las variables tradicionales* x *y* y].

Los alumnos insertan la expresión simbólica en el área de entrada del software y el profesor recomienda utilizar un valor numérico, para definir el parámetro r. El software muestra la representación gráfica $A_T = (2x)(\sqrt{9 - x^2})$ (véase Figura 6.41.a) y los estudiantes indican que falta agregar el valor absoluto. Enseguida, los alumnos agregan el valor absoluto a la expresión:

[110] Investigador: ¿Sí coincidió con lo que tenían? [*Se refiere a la expresión simbólica con la gráfica propuesta*]. ¿Qué es lo que pasa? ¿Me pueden explicar?

[111] Alumno 3A: Pues… para cualquier valor que tome p va [a] tomar un valor el área, aquí en la vista gráfica 2, que sí coincide con la expresión que establecimos.

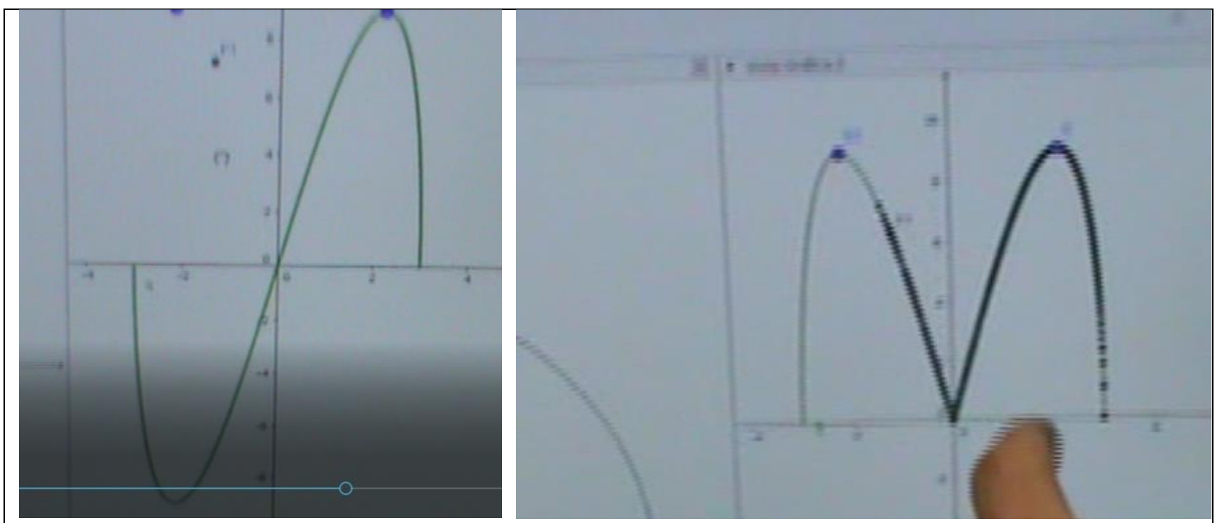
[112] Investigador: ¿Por qué no hay valores abajo del eje X?

[113] Alumno 3A: Porque no hay áreas negativas [*se refiere al área como una magnitud*], por eso le pusimos el valor absoluto… De hecho, si le aplicamos el rastro al punto en la vista gráfica 2, va a quedar puros valores positivos y coincide con la gráfica [*dada por el software*] (véase Figura 6.41.b).

[114] Investigador: Entonces, el punto máximo para cualquier radio [*de la semicircunferencia*], ¿en dónde va a estar ubicado? ¿En qué posición de "p"?

[115] Alumno 3A: Va a ser $\frac{r}{\sqrt{2}}$, explicado con este procedimiento [*se refiere a* $r^2 = p^2 + p^2$] (véase Figura 6.40.d).

La herramienta tecnológica digital permite a los participantes validar los resultados propuestos en ambiente de lápiz y papel (diálogos [109] a [111]). El software Geogebra promueve la interrelación entre los componentes, Representación de la covariación y Consecuencias de la covariación, que permitieron a los participantes inferir el comportamiento general de la gráfica cartesiana (diálogos [112] y [115]) y extraer propiedades de la figura para la obtención de las características asociadas con el valor máximo de área del rectángulo *PQRS* basados en el plano euclidiano dinámico (diálogos [113] a [115]).



(a) (b)

Figura 6.41. Representación gráfica dada por el software al insertar las expresiones simbólicas: (a) sin considerar el valor absoluto de la función; (b) considerando el valor absoluto de la función.

6.5.4. Papel de la herramienta digital en la resolución de la Actividad 3

Durante la resolución de la Actividad 3 con uso de la herramienta tecnológica digital, los participantes lograron construir la configuración geométrica en el plano euclidiano dinámico, lo cual permitió la identificación de las propiedades de la figura y hacer explícito el mecanismo de la covariación. Pero, es importante mencionar que, el software no genera la expresión simbólica; esta tarea es de los participantes, quienes —a través del mecanismo que genera la covariación— deben encapsular por medio de una representación simbólica la percepción simultánea y representarla empleando la notación simbólica —geométrica, mixta o algebraica— para posteriormente validar los resultados desde el punto de vista de la percepción discreta de la covariación. La representación de la covariación evoluciona hasta que integra variables tradicionales (x y y), las cuales son reconocidas por el software y que el alumno debe relacionar con las variables de la situación. La representación gráfica es el punto culminante del problema, ya que integra las representaciones anteriores (figura geométrica y expresión simbólica) y forma parte de la representación analítica de la covariación, en la que se analizan sus consecuencias.

La consolidación de la representación de la covariación es integrarla como parte de una familia de funciones con las características de la situación involucrando un parámetro asociado con el segmento inicial del problema ($\overline{OB} = 1$) relacionado con una literal para generalizar el área del rectángulo *PQRS*. Durante la resolución de la Actividad 3, los participantes validaron sus resultados a partir de los resultados arrojados por el software y con ayuda del ambiente tecnológico digital logran interrelacionar las distintas manifestaciones del razonamiento de covariación con la figura geométrica desde el plano euclidiano dinámico. A continuación, se describe lo comentado por el equipo 4, después de generar —con ayuda del software Geogebra— el rectángulo *PQRS* inscrito en la semicircunferencia de radio unitario y analizar los cambios identificados en la expresión simbólica [basados en la expresión $y = 2x\left(\sqrt{1 - x^2}\right)$ cuando el radio de la semicircunferencia aumenta] y en la figura geométrica:

[116] Investigador: Cuando el radio vale el triple [*del radio original*] llegaron a esta expresión [*señala la expresión de área* $2x(\sqrt{3^2 - x^2})$]. ¿Cómo encontrarían el valor máximo [*de área*]?

[117] Alumno 4A: Para encontrar el valor máximo lo único que logramos encontrar fue que las distancias de $\overline{OP}$ y $\overline{PQ}$ tienen que ser iguales para formar dos cuadrados y ése es el máximo siempre. Y bueno, también un ángulo de 45° que es para formar este cuadrado que está aquí [*señala en la pantalla de la computadora el cuadrado*] (véase Figura 6.42), y bueno lo multiplicamos por dos y éste es nuestro máximo. Esto es lo único que logramos encontrar no sabemos cómo determinarlo.

[118] Investigador: ¿Podrían estimarlo? ¿Dar un estimado entre qué valores podría estar? [*se refiere a la posición del punto P para obtener el valor máximo de área*].

[119] Alumno 4A: Sí, depende… cuando esto aumentaba a tres [*se refiere al radio de la circunferencia*] venía desde…

[120] Alumno 4B: Punto cinco, uno punto…, dos punto…dos punto…

[121] Alumno 4A: No…desde 2.1 [*unidades*]. ¡Ajá! Desde 2.1 hasta 2.14 [*unidades*], era el estimado, pero no sabemos cómo llegar a esos valores. Sólo sabemos que esta distancia [*señala el segmento* $\overline{OP}$ *en la pantalla de computadora*] tiene que ser igual a ésta [*señala el segmento* $\overline{PQ}$ *en la pantalla de la computadora*] para encontrar nuestro valor máximo (véase Figura 6.42).

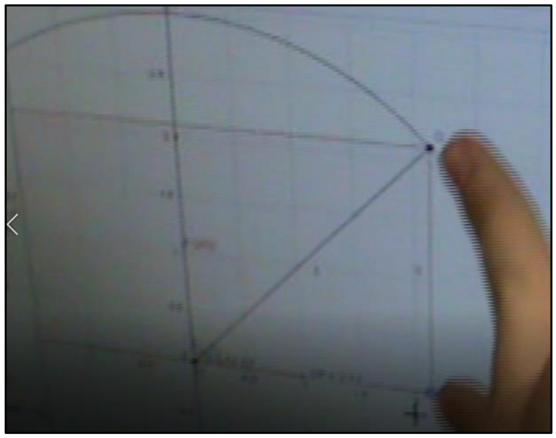


Figura 6.42. Identificación de que el área máxima del rectángulo *PQRS* se obtiene cuando dicho rectángulo está conformado por dos cuadrados.

En los diálogos [116] a [121] se identifican diversos componentes de la covariación. Entre los que destaca la estimación del área máxima del rectángulo *PQRS* a partir de la identificación de características de la figura geométrica, en la cual el rectángulo de área máxima se obtiene cuando está conformado por dos cuadrados con la misma longitud de sus lados; esta manifestación está relacionada con el componente Consecuencia de la covariación. La herramienta tecnológica digital permitió a los participantes promover el pensamiento de covariación, ya que hace explícita la relación entre las variables involucradas (posición del punto P y área del rectángulo *PQRS*) y la interrelación existente entre los distintos registros de representación de la covariación que es la base para lograr aludir el mecanismo de la covariación.

Por su parte, el equipo 6 —apoyado por la herramienta tecnológica— emplea diversos componentes de la covariación, comenzando con el análisis previo de la covariación al identificar que el comportamiento de área del rectángulo *PQRS* en ambiente tecnológico digital es similar al propuesto por ellos en ambiente de lápiz y papel. Sin embargo, al desplazar el punto P sobre el diámetro de la semicircunferencia *AB* —mediante el software Geogebra— obtiene la representación gráfica que involucra dos puntos máximos (véase Figura 6.43). A continuación, se transcribe lo mencionado por el equipo 6 cuando se les pregunta acerca del comportamiento de área del rectángulo *PQRS*:

[122] Alumno 6B: Cuando graficamos [*se refiere a cuando desplazaron el punto P sobre el diámetro* $\overline{AB}$ *de la semicircunferencia*] se creó como otra parábola, pero para el segmento $\overline{AB}$, como aquí está en la parte negativa [*señala la parte izquierda del rectángulo en la representación geométrica*] tendría que crear la forma negativa [*considera que la parte izquierda de la gráfica debe ser negativa*] (véase Figura 6.41.a).

[123] Investigador: ¿Se tendría que crear de forma negativa? ¿Y por qué se creó por arriba por encima [del eje X]?

[124] Alumno 6A: Porque afecta la misma área nada más que… bueno lógicamente serían valores negativos los que le das a x pero para y no se podrían dar negativos porque el área no puede ser negativa (véase Figura 6.43).

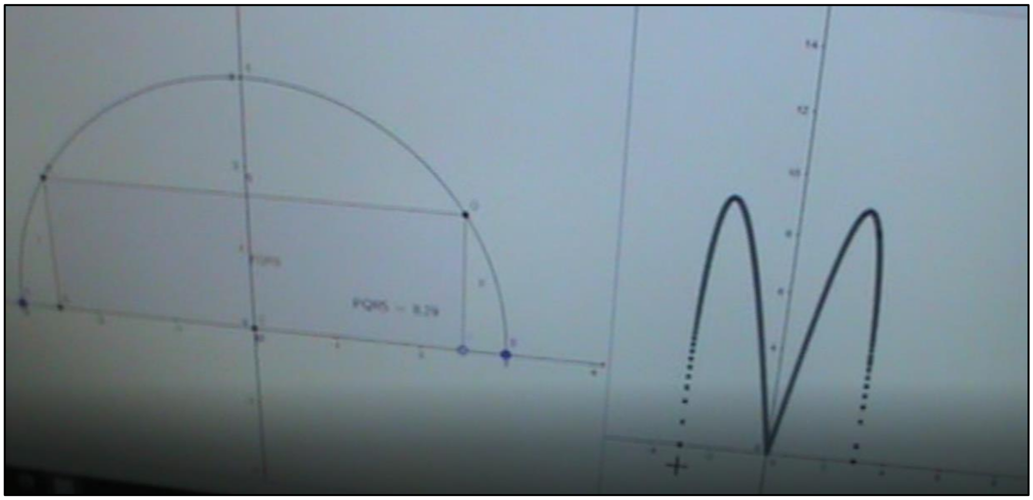


Figura 6.43. Representación gráfica dada por el software cuando se desplaza el punto P sobre el segmento $\overline{AB}$ que forma el diámetro de la semicircunferencia.

Los diálogos [122] a [124] muestran elementos incluidos en el componente Consecuencia de la covariación cuando se identifican características relacionadas con las variables dependiente e independientes asociadas con la situación en cuestión y con la identificación del área máxima del rectángulo *PQRS* y su relación con la representación gráfica en el plano cartesiano. Este ejemplo da muestra de que los componentes están entrelazados; el análisis previo de la covariación —análisis del comportamiento de las variables en el plano euclidiano dinámico— está interrelacionado con la representación de la covariación —expresión simbólica— y esta a su vez da cuenta de las consecuencias de la covariación —análisis de la representación gráfica— representada en el plano cartesiano dinámico.

Otro ejemplo de la interrelación entre los componentes del marco de razonamiento de covariación, se muestra cuando se solicita a los alumnos proponer la expresión simbólica que permite el cálculo del área del rectángulo *PQRS* cuando el radio de la semicircunferencia aumenta al triple ($r = 3$). A continuación, se transcribe lo mencionado por el equipo 6, cuando explica la generalización en la expresión $f(p) = \left(\sqrt{3 - p^2}\right)(2p)$:

[125] Investigador: Si el radio vale el triple [*del original*] ésta es la expresión que están proponiendo [*señala la expresión* $f(p) = \left(\sqrt{3 - p^2}\right)(2p)$] (véase Figura 6.45.b). ¿Dónde estaría [*ubicado*] el punto máximo?

[126] Alumno 6B: El punto máximo estaría en 2.14 [*unidades*] [*se refiere a la posición del punto P*] porque al hacer la fórmula da el área total 9 [u^2] que sería el punto máximo del área posible.

[127] Investigador: ¿Lo podrían generalizar de alguna manera?

[128] Alumno 6A: Sí lo podríamos generalizar usando la fórmula que teníamos de $cos45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ pero en vez de utilizar la hipotenusa con valor de uno la utilizamos con valor de tres.

[129] Investigador: Cuando se les pide que obtengan una expresión de área [*del rectángulo PQRS*] que sea el triple del radio original [*se refiere a la expresión de área del rectángulo cuyo radio de la semicircunferencia es el triple del radio original*] llegaron a esta simbología [*señala la expresión*] (véase Figura 6.45.b). ¿Por qué lo expresaron así?

[130] Alumno 6B: Bueno, porque se puede decir que fue como la fórmula del teorema de Pitágoras, pero ya simplificada.

[131] Alumno 6A: En total serían las dos multiplicaciones, ésta [*señala la expresión* $\sqrt{3 - p^2}$] equivaldría a sacar el área del rectángulo [*se refiere a la altura del rectángulo*] y ésta a la base [$(2p)$] (véase Figura 6.45.b).

[132] Investigador: Para obtener el valor máximo, ¿cómo calcularon el valor máximo para esa función?

[133] Alumno 6A: Como ya sabemos que el valor máximo está justo cuando el radio cortaba a la circunferencia en ocho partes sería el equivalente a un ángulo de 45°. Utilizamos el coseno para relacionar la hipotenusa que ya tenemos el valor del radio, sería lo mismo, y utilizamos una incógnita que sería el valor de *p*, en el triángulo sería como el cateto adyacente. Entonces utilizamos el $cos45° = \frac{x}{3}$ que vendría siendo la hipotenusa y despejamos y nos quedaría el punto máximo que seria $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (véase Figura 6.44.a).

[134] Investigador: ¿Y ya de manera general?

[135] Alumno 6A: ¡Ah! Nos queda que $x = \cos 45° \,(r)$ (véase Figura 6.44.b).

[136] Investigador: ¿Siempre va a estar ahí el valor máximo?

[137] Alumno 6B: ¡Sí!

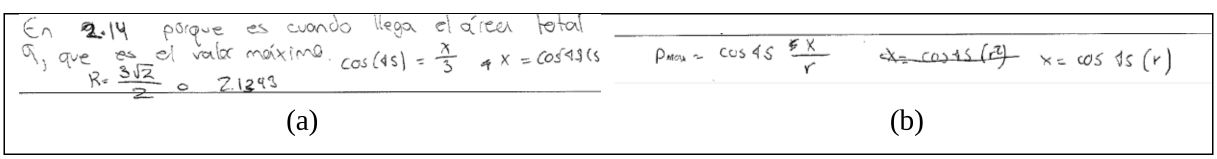


Figura 6.44. Respuesta del equipo 6, cuando proponen una expresión para la identificación del punto máximo; (a) cuando el radio de la semicircunferencia aumenta al triple; (b) generalización para ubicación del punto máximo.

[138] Investigador: Esta expresión la insertaron en Geogebra [*señala la expresión simbólica*] (véase Figura 6.45.b) y se dieron cuenta de que el área no coincidía con los puntos [*rastro del punto P*] (véase Figura 6.45.a). ¿Cómo se dieron cuenta de que la expresión [simbólica] estaba incorrecta? ¿Qué notaron?

[139] Alumno 6A: Nos olvidamos que como era un teorema de Pitágoras el tres tenía que estar al cuadrado al igual que la p [*señala la expresión* $f(p) = \sqrt{3 - p^2}\,(2p)$] (véase

Figura 6.45.b)., nada más que como antes lo habíamos hecho con uno nos saltamos el paso del cuadrado [*se refiere a la expresión* $f(x) = \sqrt{1-x^2}(2x)$].

[140] Investigador: Entonces a esta expresión [*señala la expresión simbólica*] (véase Figura 6.45.b) ¿qué le cambiarían para que fuera correcta?

[141] Alumno 6A: Cambiaríamos el tres por… [*elevan al cuadrado el número tres*] (véase Figura 6.45.d).

[142] Investigador: Entonces, si ustedes la modifican [*se refiere a la expresión*] aquí [*señala la vista algebraica en el software Geogebra*], ¿cómo quedaría?

[143] Alumno 6A: Quedaría como… [*escriben la expresión* $\sqrt{9-x^2}(2x)$] (véase Figura 6.45.c).

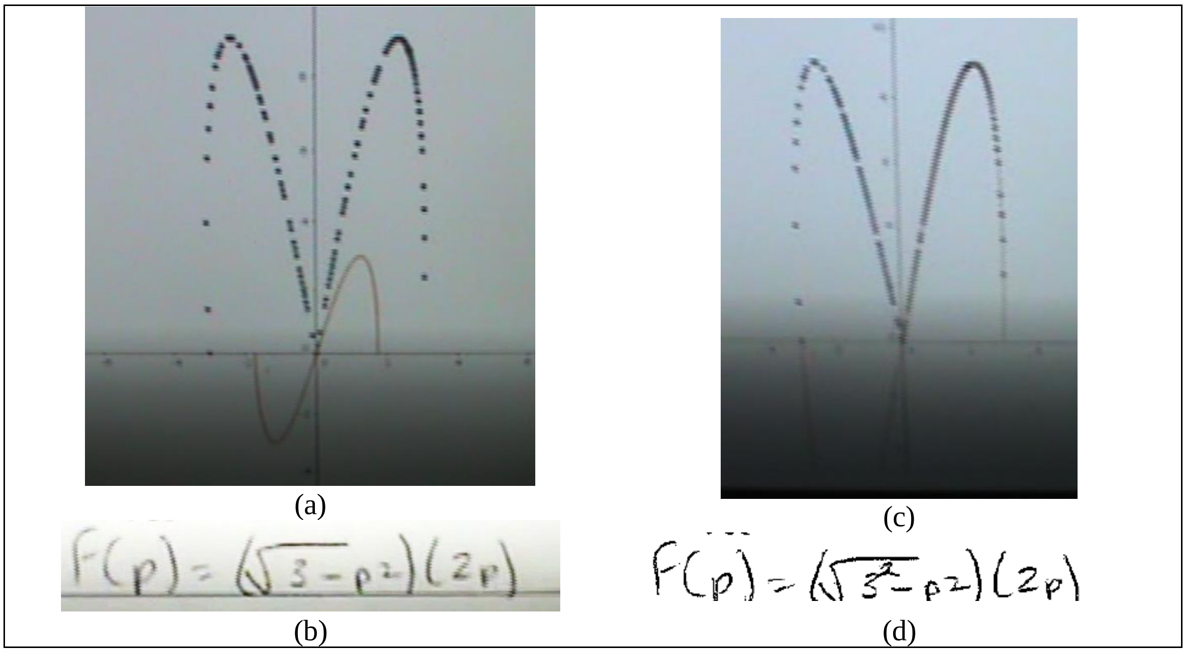


Figura 6.45. Respuestas del equipo 6, cuando los alumnos interactúan con el software; (a) representación gráfica de la expresión simbólica del inciso (b); (c) representación gráfica de la expresión simbólica del inciso (d). En ambas gráficas se considera que el radio de la semicircunferencia aumenta al triple.

Los diálogos [125] a [143] dan muestra de la relación entre los distintos componentes del marco de razonamiento de covariación, ya que con base en el análisis previo de la covariación se vislumbra el mecanismo que produce la covariación, que es el fundamento para proponer una expresión simbólica integrada en el componente Representación de la covariación (diálogos [125] a [136]). La representación gráfica promueve el que se desarrollen las consecuencias de la covariación (diálogos [132] a [137]). Por medio de la representación de la covariación se establece una relación entre la regla de correspondencia y las consecuencias de la covariación se perciben cuando la representación gráfica es validada modificándose el registro simbólico lo que genera cambios en el registro gráfico cuando el parámetro cambia [radio de la semicircunferencia]; la modificación de la representación gráfica genera cambios en las consecuencias de la covariación y por lo tanto se modifica la ubicación del valor máximo de área del rectángulo *PQRS* (diálogos [138] a [143]). La validación que permite el software por medio de las representaciones gráficas en el plano cartesiano dinámico brinda a los participantes la posibilidad de generar una reflexión y promover un nuevo análisis que motive a realizar ajustes en la representación de la covariación basada en la expresión previamente establecida y proponer nuevas características o modificaciones que cumplan la nueva situación (diálogos [138] a [143]). Para que un estudiante imagine que una gráfica de una función de dos variables es una representación de la relación entre dos cantidades y un parámetro, este debe asociar esas cantidades y el parámetro mantenerlo constante, de manera que se vislumbre la relación entre dos variables y no considere una expresión con tres variables o incógnitas.

Otro ejemplo de cómo el ambiente tecnológico digital promueve la reflexión en torno a las manifestaciones del razonamiento covariacional, se muestra en los resultados del equipo 7 cuando éste genera la representación de la covariación que integra el valor del radio cualquiera y su relación con la obtención del valor máximo de área del rectángulo *PQRS*. Este equipo se basa en los resultados previos y considera que la expresión que representa el área del rectángulo *PQRS* cuando se aumenta el radio al triple es $y = 2x\left(\sqrt{3^2 - x^2}\right)$ (véase Figura 6.46.a), y considera que el punto máximo estaría ubicado cuando el punto P esté en la abscisa con valor de $\sqrt{\frac{A}{2}}$ (véase Figura 6.46.b). A continuación, se transcribe lo mencionado por el equipo 7 cuando justifican la posición del punto máximo:

[144] Investigador:	¿En qué posición de P estaría el punto máximo?
[145] Alumno 7A:	Bueno, para encontrar el punto máximo…bueno para que el punto P del [*valor*] máximo de área, tenemos que dividir el área máxima, bueno el cuadrado del radio entre dos y sacarle la raíz cuadrada (véase Figura 6.46.b).
[146] Investigador:	¿Cómo lo obtuvieron? ¿Cómo saben que ese es el resultado?
[147] Alumno 7A:	Este…a partir de aquí [*señala la expresión*] (véase Figura 6.46.b), si ya sabemos que el área máxima va a ser siempre el cuadrado del radio vamos a despejar a partir de nuestra fórmula inicial (véase Figura 6.46.a) cómo sacar ese máximo de área. Entonces, simplemente como la raíz cuadrada está…el radio está…simplemente tenemos que pasar este dos dividiendo al cuadrado de tres y le sacamos su raíz cuadrada para encontrar el punto máximo de P.
[148] Investigador:	Entonces, ¿esta expresión sí se cumple para todos [*los casos de manera general*]?
[149] Alumno 7A:	Sí, ya estuvimos viendo.
[150] Investigador:	Entonces, de manera general, [*la ubicación de*] el punto [*P*] de manera general, ¿cuál sería? ¿La puedes escribir, la posición de P de manera que se obtenga el área máxima?

[151] Alumno 7A: Sería… [*el alumno escribe la expresión* $x = \sqrt{\frac{y}{2}}$]. La raíz cuadrada del área entre dos (véase Figura 6.46.c).

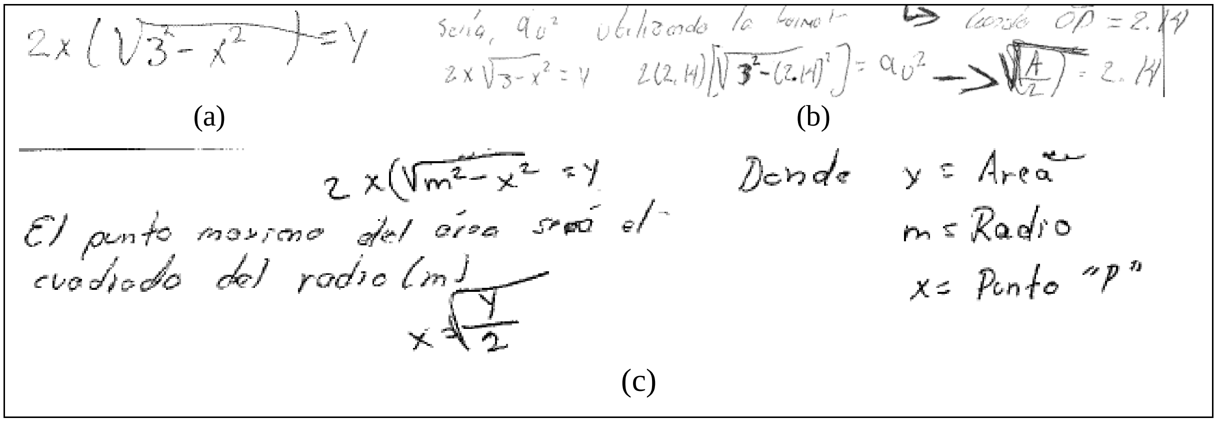


Figura 6.46. Respuesta del equipo 6, cuando generaliza el comportamiento de la figura: (a) expresión simbólica de área del rectángulo; (b) identificación para la posición del punto P en el cual se obtiene el valor máximo de área; (c) expresión general para el área del rectángulo y posición del punto P denotada por x.

Los diálogos [144] a [151] muestran ejemplos que incluyen la relación existente entre los componentes Representación de la covariación y Consecuencias de la covariación al identificar características relacionadas con la posición del punto P para obtener el área máxima del rectángulo *PQRS* y su relación con la representación simbólica. A continuación, se transcribe la explicación dada por el equipo 7 cuando validan la expresión simbólica propuesta:

[152] Investigador: Si ahora el radio fuera 5 [*unidades*], el valor máximo de área, ¿es cuánto?
[153] Alumno 7B: 25 [u^2].
[154] Investigador: 25 [u^2], y la posición del punto P, ¿en dónde estaría ubicado utilizando su expresión [*obtenida*]? [*Señala la expresión* $x = \sqrt{\frac{y}{2}}$] (véase Figura 4.64.c).
[155] Alumno 7B: Sería 25 entre 2, sería 12.5 y raíz de eso… [*aproximadamente*] 3.53 [*unidades*].
[156] Investigador: Podemos verificarlo hacia acá [*se refiere a verificar el resultado con el software*].
[157] Alumno 7A: Sería 25 entre 2, sería 12.5 y raíz de eso… [aproximadamente] 3.53 [*unidades*].

Con ayuda de la herramienta tecnológica, los participantes definen el radio de la semicircunferencia empleando la herramienta *deslizador* y asignan el valor de 5 [radio de 5 unidades]. En seguida se ajusta la vista gráfica con las herramientas de *zoom*, para mejorar la visión de la posición del punto P apoyados por la vista algebraica y se interpreta la gráfica de acuerdo con el valor del radio asignado al *deslizador* (véase Figura 6.47). El equipo 7 argumenta la obtención de la expresión que permite determinar el máximo de área del rectángulo *PQRS*:

[158] Alumno 7A: Notamos de que el radio al cuadrado va a ser siempre el área máxima del polígono [*se refiere al rectángulo PQRS*]… básicamente a partir de aquí [*basado en el primer ejemplo cuando el radio de la semicircunferencia es la unidad*] empecé a notar en qué punto daba el área máxima uno y a partir de ahí solo saqué como coherencia que se tiene que hacer para que cualquier punto que sea me dé el área máxima y me salió eso [se refiere a la expresión $x = \sqrt{\frac{y}{2}}$] (véase Figura 6.46.c).

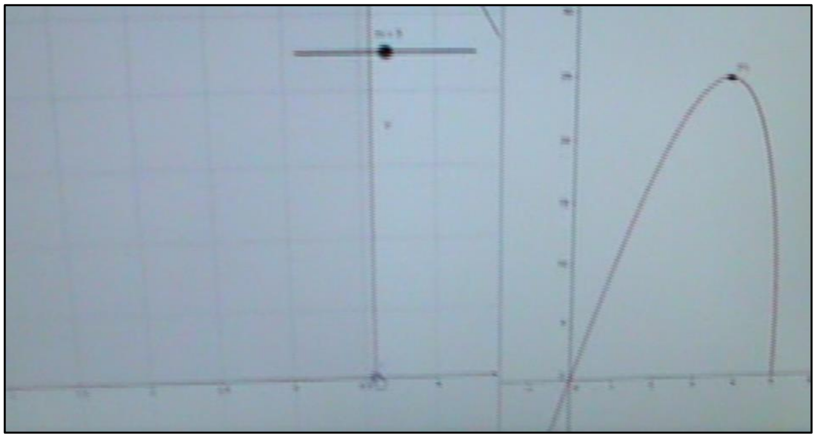


Figura 6.47. El equipo 7 infiere la posición del punto P, al obtener el valor máximo de área del rectángulo cuando el radio de la semicircunferencia es 5 [*unidades*].

Los diálogos [152] a [158] muestran la interacción que tienen los participantes con la herramienta tecnológica, y la manera en que ésta promueve la reflexión acerca de los componentes del marco para el razonamiento de covariación durante la resolución de la situación. De nueva cuenta, el componente Consecuencia de la covariación se distingue en los diálogos [152] a [158] al asociar la expresión simbólica que permite determinar el valor máximo de área y su representación gráfica previendo sus elementos y características cuando cambia algún elemento de la situación original; para este ejemplo, el radio de la semicircunferencia.

De acuerdo con el análisis que se realizó a lo largo de este capítulo, se puede asegurar que cuando los estudiantes abordan SGD en ambiente tecnológico digital logran una percepción simultánea de la covariación, ya que la manipulación de objetos en el software (en particular, cuando se desplaza el punto P sobre el segmento) produce un cambio en el área de las figuras y es más evidente, para los participantes, identificar que estos covarían. El trabajo con software hace alusión al mecanismo que produce la covariación por medio de la manipulación de los objetos geométricos, en el plano cartesiano euclidiano dinámico, ya que, por medio de este, los estudiantes pueden identificar las propiedades y características que tiene la figura geométrica que ayude a proponer una representación de la covariación que coincida con las condiciones de la situación o permita una reflexión para su obtención. Es importante destacar que para lograr establecer una adecuada comprensión de la situación es necesario el trabajo en lápiz y papel, ya que este ambiente permite al estudiante razonar de desde una perspectiva discreta de la covariación que es indispensable para lograr el éxito [parcial] en la formulación de la representación de la covariación por medio de una representación simbólica. Durante la resolución de las Actividades se da evidencia que la experiencia adquirida por los participantes para abordarlas SGD incentiva un cambio en la manera de representar la covariación por medio de una expresión simbólica que involucre notación algebraica, ya que esta puede ingresarse al software y se pueden explorar nuevas maneras de representar la covariación. Sin embargo, el participante debe dar significado a los símbolos, ya que esta nueva manera de representar la covariación está desligada del contexto que la originó. En términos generales, el ambiente tecnológico brinda la posibilidad de explorar distintos registros de representación a la vez (geométrico, simbólico, tabular y gráfico) lo que permite a los participantes la integración de diversos componentes de la covariación que son necesarios para el desarrollo del concepto de función.

CAPÍTULO 7

CONCLUSIONES

7.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se describen las conclusiones de la presente investigación, que son el producto del análisis y la discusión de los resultados recabados mediante los instrumentos de recolección de datos empleados para este trabajo. En primer lugar, se toman en cuenta las preguntas de investigación que guiaron el estudio y cuyas respuestas describen que los objetivos se hayan cumplido; en segundo lugar, se hace una reflexión en torno al papel de la tecnología para el desarrollo del concepto de función; y en tercer lugar, se reportan las contribuciones de la investigación, en las que se incluye una reflexión acerca de la investigación, se plantean características que deben tener las tareas para fomentar el concepto de función desde una perspectiva de covariación, así como, las implicaciones que tienen el concepto de variable y el uso del ambiente tecnológico digital en el desarrollo del concepto de función. Al final del capítulo, se establecen algunas limitaciones y perspectivas hacia el futuro para fomentar el desarrollo de la actividad matemática relacionada con el razonamiento covariacional.

7.2. CONCLUSIONES RESPECTO A LAS PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

Los resultados analizados y discutidos en los capítulos anteriores permiten, en primer lugar, identificar y clasificar las manifestaciones del razonamiento de covariación, así como, analizar la influencia de las *situaciones geométricas dinámicas* (SGD) que promueven el desarrollo e integración del concepto de función. En segundo, de acuerdo con las preguntas de esta investigación expuestas en el parágrafo 1.3, los resultados recabados contienen evidencias que permiten identificar las caracterizaciones del razonamiento de covariación que llevan a cabo los estudiantes de bachillerato cuando abordan situaciones geométricas dinámicas, así como, el tipo de condiciones y tareas que promueven dicho razonamiento.

Con base en el análisis de los datos y discusión de resultados (véase capítulos 5 y 6, de este trabajo), se da respuesta a las preguntas que guiaron la presente investigación.

7.2.1. ¿Cómo razonan los estudiantes cuando se involucran en tareas cuyo objetivo es formar el concepto de función desde un enfoque de covariación?

Con base en el análisis de datos se identificaron tres niveles de desarrollo del razonamiento frente a situaciones geométricas dinámicas. Los niveles los describimos considerando tres *sujetos ideales*, que representan cada nivel, compuestos con rasgos característicos de los observados. Es decir, las descripciones de cada nivel se presentan como si fueran de un sujeto o como si todos los sujetos del mismo nivel se comportaran igual, pero en realidad, cada descripción se ha compuesto con rasgos frecuentes que emergieron del análisis, de manera tal que cada descripción representa un “sujeto promedio” de cada nivel.

Los niveles y los rasgos se caracterizan por el grado de abstracción de sus respuestas respecto a la situación geométrica propuesta; concretamente, el Nivel 1 es el más cercano a la situación geométrica mientras que el Nivel 3 se aleja de ella. En otras palabras, en el Nivel 1 se tiene mayor tendencia a no separarse del contexto geométrico de la situación o se involucran respuestas menos desarrolladas y/o fundamentadas. Mientras que en el Nivel 3 se define la covariación en términos algebraicos, independientemente de los elementos geométricos de la situación, por lo tanto, las respuestas de los participantes están más desarrolladas y fundamentadas en relación con las de menor nivel. Los rasgos que se indican en cada nivel corresponden a una pregunta o tarea que se les pide a los estudiantes responder o hacer. No se describen todos los rasgos de las respuestas proporcionadas pues son muy variadas y complejas. El propósito de asociarla con el marco es mostrar cómo la secuencia de preguntas y actividades influyó en los rasgos que se manifestaron en las respuestas.

7.2.1.1 Rasgos generales de los niveles observados en las respuestas

Nivel 1. Aritmético/geométrico

En este nivel, los estudiantes asignan valores numéricos y con base en fórmulas preestablecidas (*e.g.*, área de un rectángulo) calculan el área de la configuración geométrica. En la descripción general de la covariación ofrecen inconsistencias y algunas veces afirmaciones falsas. Al abordar SGD interpretan el movimiento del punto P basados en casos particulares (percepción discreta de la covariación) a partir de posiciones específicas del punto P y asociándoles una cantidad definida. Los participantes atienden a aspectos particulares de los cambios de la configuración geométrica, por ejemplo, cuando "mueven" un punto P no interpretan la relación con la variable dependiente (área de la figura geométrica).

Aunado a lo anterior, los participantes mencionan que el área depende de la configuración geométrica sin considerar la variable independiente. Al describir verbalmente la covariación, los estudiantes no mencionan el punto crítico ni el valor del área en dicho punto. Cuando se les pregunta por las variables de la situación sólo mencionan a la variable independiente asociada al punto que se mueve, pero no mencionan a la variable dependiente. Cuando los participantes representan simbólicamente la covariación no se desprenden del contexto geométrico y utilizan notación geométrica sin incorporar los datos de la situación. Al representar gráficamente la covariación, los estudiantes mencionan que no es posible representar la situación de manera gráfica o bosquejan la gráfica que no corresponde a la situación planteada, por lo que no identifican la gráfica asociada con el problema.

Nivel 2. Geométrico/simbólico.

En este nivel, los participantes calculan el área de la figura geométrica basados en fórmulas preestablecidas (*e.g.*, área de un rectángulo) e integran elementos y símbolos que se relacionan con la configuración geométrica de la situación (probablemente conciben tales números como número general), pero la expresión simbólica está basada en una fórmula general que, en algunos casos, no describe una ecuación; es decir, no representan la variable dependiente o hay más de una variable o no se incluye el signo de igualdad. En este nivel, los participantes visualizan el movimiento del punto de manera continua (percepción simultánea de la covariación) describiendo cómo se mueve la configuración. Las respuestas de este nivel describen la covariación, pero mencionan un sólo elemento (*e.g.*, el punto crítico, el recorrido de crecimiento o decrecimiento de la variable). Los estudiantes consideran que la dependencia del área se debe a la posición del punto P o del segmento asociado con ese punto (*e.g.*, $\overline{AP}$), sin mencionar una longitud o una variable p o x. Cuando se pregunta, a los estudiantes, acerca del punto crítico, lo identifican y calculan el área en dicho punto, pero sólo identifican una de las variables que intervienen en la situación relacionada, a saber, con la variable independiente (no reconocen el área como variable dependiente). En este nivel, la representación simbólica de la covariación es mediante una expresión que involucra notación mixta y no se incorporan todos los datos en la expresión por lo que ésta involucra dos o más literales. La representación gráfica de la covariación está basada en una tabla de valores y bosquejan parcialmente la gráfica de la situación correspondiente.

Nivel 3. Simbólico/algebraico.

En este nivel, el área de la figura geométrica se representa a través de una ecuación en la que el miembro izquierdo es la variable “área o A” y el derecho una expresión con símbolos que dependen del punto. Los participantes visualizan el desplazamiento del punto a lo largo del segmento de manera continua (percepción simultánea de la covariación) y describen cómo cambia el área a medida que el punto se aleja o acerca respecto un punto de referencia sobre el segmento. Describen la covariación, pero mencionan sólo un elemento distintivo, como el punto crítico, o el recorrido de decrecimiento o crecimiento de la variable. Cuando se les pregunta de qué depende el área comentan que del segmento $\overline{AP}$ y sobre la existencia de un punto crítico son capaces de encontrarlo junto con el valor de la función en ese punto. Los estudiantes en este nivel son capaces de distinguir las dos variables que intervienen en la situación (independiente y dependiente). Además, representan la covariación con notación algebraica e incorporan en su representación los datos de la situación; y también, efectúan sustituciones adecuadas al incorporar datos implícitos en el mecanismo de la covariación. En este nivel, los estudiantes elaboran una tabla que permite bosquejar mediante punteo la gráfica de la función en el plano cartesiano que corresponde con la situación analizada.

7.2.2. ¿Qué niveles de razonamiento sobre la covariación se pueden determinar del análisis de las respuestas de los estudiantes a preguntas relacionadas con una situación geométrica dinámica para avanzar en la formación del concepto de función cuadrática y con radical?

De acuerdo con el análisis de datos se identificaron rasgos característicos de cada componente descrito en el *marco para la organización del razonamiento de la covariación,* los cuales se integran con los niveles de razonamiento identificados previamente (Nivel 1. Aritmético/geométrico, Nivel 2 Geométrico/ simbólico, Nivel 3 Simbólico/algebraico) para dar explicación de la manera de razonar de los estudiantes ante situaciones geométricas dinámicas. A continuación, se describen los rasgos observados por componente de acuerdo con el marco para la organización del razonamiento de la covariación.

7.2.2.2. Rasgos generales de los niveles observados por componente del marco de referencia

(*i*) Ignorancia de la covariación

Cuando se aborda una SGD, el primer paso en una estrategia para describir y representar la covariación consiste en fijar una posición de la situación e ignorar la covariación. En las actividades, para propiciar la ignorancia de la covariación, se pide a los participantes calcular el área de la configuración geométrica de la situación cuando se fija el punto P. En las respuestas a esta petición se presentan tres niveles:

Nivel 1. Fijan un punto asignando un valor, operan apoyándose en fórmulas y encuentran un número que es el área de la configuración para el valor particular.

Nivel 2. Fijan una posición del punto y le asignan un símbolo con notación de segmento a la posición del punto, operando con el símbolo y, con el apoyo de fórmulas, encuentran una expresión en notación geométrica para calcular el área de la figura geométrica.

Nivel 3. Fijan una posición del punto, le asignan una literal, y operan con ésta; con el apoyo de fórmulas, encuentran una expresión en notación algebraica que permite calcular el área de la figura geométrica.

(*ii*) Consideración de la covariación

Después de analizar la estructura de la situación en una posición, conviene que los estudiantes consideren cómo el movimiento de un punto afecta a otros elementos, en particular, al área. Para propiciar que consideren la covariación se les pregunta qué pasa cuando el punto se mueve a lo largo de un segmento. En un aspecto de sus respuestas identificamos tres niveles:

Nivel 1. Describen diferentes posiciones de la configuración (sin considerar su área) dependiendo de posiciones discretas del punto.

Nivel 2. Describen cómo cambia la configuración (sin considerar el área) cuando se mueve el punto a lo largo del segmento.

Nivel 3. Describen cómo cambia el área de la configuración cuando se mueve el punto a lo largo del segmento.

(*iii*) Análisis previo de la covariación

Para avanzar en la identificación de la covariación conviene que los estudiantes descubran peculiaridades o propiedades de dicha covariación. Para propiciar que hagan explícitas tales propiedades se les pregunta acerca de la dependencia del área de la configuración correspondiente, las variables que intervienen y se sugiere el cálculo del área para valores específicos (percepción discreta de la covariación) a fin de vislumbrar el mecanismo que describe la covariación. Los niveles de respuesta se describen a continuación:

Nivel 1. El área depende de la configuración geométrica. Sólo mencionan una variable, a saber, el punto P.

Nivel 2. El área depende del punto o de un segmento. Sólo mencionan una variable, a saber, la longitud de un segmento.

Nivel 3. El área depende de la longitud de un segmento. Mencionan dos variables, la longitud del segmento y el área de la figura geométrica.

(*iv*) Representación de la covariación

Un conocimiento adecuado de la covariación debe pasar por su representación algebraica. Esto implica haber percibido, mediante las actividades anteriores, el mecanismo de la covariación y saberlo traducir a una expresión simbólica. Para propiciar este paso se pidió a los estudiantes que escribieran una expresión para el área de la configuración de la situación. Enfocándonos en la notación que utilizaron se identificaron los tres niveles:

Nivel 1. Notación geométrica. En la expresión simbólica que proponen utilizan la notación geométrica de puntos y segmentos. No incorporan los datos de la situación.

Nivel 2. Notación mixta. En su expresión simbólica utilizan tanto notación geométrica combinada como literales que representan números generalizados o variables. Incorporan parcialmente los datos de la situación.

Nivel 3. Notación algebraica. En su expresión simbólica utilizan sólo literales y números constantes. Incorporan todos los datos de la situación.

(*v*) Consecuencias de la covariación

Para que la expresión simbólica de la covariación se consolide, es fundamental su representación analítica en el plano cartesiano. Esta representación revela de manera visual las propiedades de la covariación desde una nueva perspectiva que no depende de la configuración de la situación que la originó y permite ubicar la covariación particular dentro de una familia de funciones, a saber, las funciones cuadráticas y radical. Los rasgos de las respuestas en cada nivel son:

Nivel 1. No logran representar adecuadamente en el plano cartesiano un bosquejo de la gráfica que corresponde a su representación simbólica, por lo que no identifican la función.

Nivel 2. Elaboran una tabla de valores con base en la expresión simbólica que proponen y bosquejan parcialmente la función correspondiente.

Nivel 3. Elaboran una tabla y bosquejan mediante punteo la gráfica de la función en el plano cartesiano.

7.2.1.3. Resumen de los rasgos característicos por categoría del marco

En la Tabla 7.1 se resumen los rasgos por categoría del marco para la organización del razonamiento de covariación. Esta tabla revela que el cambio de los rasgos del Nivel 1 al Nivel 3 se puede organizar en tres dimensiones, a saber, la representación, el contexto y la relación discreto/continuo. Los niveles de representación van de proponer valores particulares (aritmético/geométrico) o, puntos y segmentos (geométrico/simbólico) a utilizar literales (simbólico/algebraico). Los niveles de contexto van de centrarse en partes de la configuración (puntos segmentos, cuadrados) a las cantidades (longitud de un segmento, área de la configuración representados con literales). La relación de discreto/continuo (de la percepción discreta de la covariación a la percepción simultánea de la covariación) se presenta cuando se avanza de analizar casos particulares asignando posiciones determinadas al punto, a ver el movimiento del punto de manera continua.

Tabla 7.1.
Resumen de rasgos por categoría del marco

Nivel de respuesta	I. Ignorancia de la covariación	II. Consideración de la covariación	III. Análisis previo de la covariación	IV. Representación de la covariación	V. Consecuencias de la covariación
Nivel 1	Calculan un número para el área de la figura	Eligen posiciones del punto y calculan el área	El área depende de la configuración	Notación geométrica	Trazan una curva espuria
Nivel 2	Ofrecen una expresión en términos geométricos	Mueven un punto y distinguen la variación de la configuración	El área depende de un punto o de un segmento	Notación mixta	Trazan una curva que es parte de la función, la cual no es identificada
Nivel 3	Ofrecen una expresión con literales	Varían longitud para identificar la variación del área	El área depende de una la longitud de un segmento	Notación algebraica	Trazan e identifica la función

7.2.3. ¿Qué caracterizaciones asociadas con el razonamiento de covariación llevan a cabo los estudiantes de bachillerato cuando abordan situaciones geométricas dinámicas?

Los resultados expuestos en los capítulos anteriores describen cómo surgen diversas caracterizaciones del razonamiento de covariación que permiten comprender, mejor y ampliamente, las diferentes maneras en que los estudiantes afrontan SGD. Las caracterizaciones que emergen del análisis de las respuestas a cada actividad son: (*i*) mecanismo que produce la covariación; (*ii*) percepción discreta y continua de la covariación; y (*iii*) vínculo inherente al contexto geométrico de la situación. A continuación, se detallan tanto las características que surgen de las SGD como los rasgos y elementos relacionados con el razonamiento de covariación:

7.2.3.1. Consciencia del mecanismo que produce la covariación

En las investigaciones sobre el desarrollo del pensamiento científico de los niños (Zimmerman, 2008) un tema importante es la covariación. En situaciones en las que los niños deben evaluar si hay covariación entre eventos a partir de un conjunto de datos, resulta crucial si pueden percibir o imaginar el mecanismo causal que explica la covariación. Percibirlo les proporciona una explicación de la covariación y les permite resolver tareas de predicción. De manera análoga, en el caso de situaciones geométricas dinámicas (propuestas en esta investigación), el mecanismo de la covariación sirve de referente y explicación de la covariación, y además, permite establecer la correspondencia entre dos variables involucradas en la situación. Hay que tener en cuenta que en muchas situaciones dinámicas se puede percibir la covariación de forma cualitativa sin tener acceso al mecanismo que la genera; un ejemplo es la caída libre de los cuerpos. El mecanismo que produce la covariación es la explicación de la situación geométrica dinámica que permite identificar, de manera clara, las causas por la que dos variables están relacionadas. Por medio de la comprensión de este mecanismo, los estudiantes podrán aludir la relación entre variables y es un factor esencial para fomentar la obtención de la regla de correspondencia que las relaciona. El contexto geométrico influye de varias maneras en el razonamiento de covariación de los estudiantes. Para lograr la comprensión del mecanismo que produce la covariación, en el contexto geométrico, es necesario que se identifiquen los comportamientos y las características de los valores asociados con las variables, los motivos por los que éstas cambian relacionados con aspectos geométricos y llevar a cabo un análisis de las características y propiedades generales que integran la figura geométrica con la finalidad de establecer una expresión que relacione dos variables, que es la base para precisar la regla de correspondencia.

El mecanismo de la covariación se puede pensar como un dispositivo dinámico del que se deriva directamente una expresión algebraica. Clasificamos las respuestas de los estudiantes como *consciencia del mecanismo de la covariación* cuando hacen una descripción verbal de la manera en que se mueve una parte del dispositivo cuando se mueve el otro. Hemos visto a lo largo de las experiencias que el uso de SGD es trascendental para establecer la covariación y que el mecanismo que la explica está al alcance [desde el punto de vista cognitivo] de los participantes, ya que puede ser comprendido a través del trabajo en el contexto geométrico. En general, si los participantes comprenden la estructura geométrica de la situación se dice que han adquirido consciencia del mecanismo de la covariación. Esto quiere decir que no sólo ven que al mover un punto se mueve una configuración, sino que pueden describir cómo un movimiento del punto afecta a la configuración, de manera que pueden determinar el área de la configuración a partir de asociarle un número a la posición del punto.

7.2.3.2. El proceso de representación

Un indicio de la consciencia de la covariación es la descripción verbal del mecanismo que la produce, por ejemplo "al mover el punto P a lo largo del segmento, el área primero aumenta y luego disminuye", pero el desarrollo de la noción de covariación implica la producción de su representación simbólica. Así, ésta no es un ente en sí mismo sino una consecuencia de un mecanismo que la produce y explica; los estudiantes están utilizando símbolos, cuyo funcionamiento y uso ya conocen (en algunos casos sólo precariamente) de otras experiencias en el contexto geométrico o algebraico, junto con sus conocimientos básicos de geometría o álgebra, para transitar de la descripción del mecanismo a su representación simbólica. En efecto, los participantes transitan de descripciones cualitativas a operaciones numéricas y luego a expresiones con segmentos y/o literales, es decir, generalizan los procedimientos aritméticos que les sirven para calcular el área con ayuda de símbolos que ocupan el lugar de cantidades. En este tránsito, utilizan el recurso de fijar una posición estática, pero indican las dimensiones con la representación de un segmento o con una literal concebidas, en ambos casos, como número general. Varios estudiantes en su actividad ensayan primero con varios casos particulares para después proponer la expresión simbólica. Las representaciones que producen los estudiantes, en general, corresponden adecuadamente a la situación. Sin embargo, hay dos rasgos con los que se pueden ordenar, a saber, el tipo de representación que utilizan y el grado en que incorporan los datos de la situación en la expresión simbólica que proponen.

Las producciones relacionadas con el primer rasgo se pueden ordenar en tres niveles de acuerdo con el grado de desprendimiento de la notación geométrica en dirección de la notación algebraica. Las representaciones en el primer nivel contienen sólo notación simbólica geométrica, las del segundo nivel tienen notación mixta, es decir, en parte geométrica y en parte algebraica, mientras que las representaciones del tercer nivel contienen sólo notación algebraica. Se descartan las representaciones aritméticas ya que siempre evolucionan a alguna de las anteriores. Con relación al segundo rasgo, se consideran dos niveles, en el primero están las respuestas que ofrecen una expresión simbólica con más de dos segmentos o variables, dos de las cuales no son independientes, y las que incorporan los datos del enunciado de manera que la expresión sólo depende de dos variables.

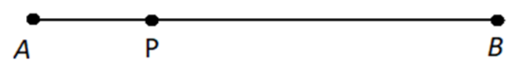
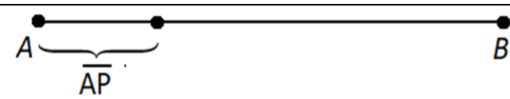
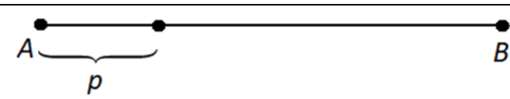
7.2.3.3. El concepto de variable

El concepto de variable es fundamental en álgebra y posteriormente en cálculo. En varios estudios de educación matemática centrados en álgebra se han determinado varias formas en que se entiende la noción de variable; por ejemplo, se han distinguido los siguientes pares de conceptos cuyo término izquierdo indica una noción cercana pero distinta a la variable: literales y variables, incógnitas y variables, marcadores de posición y variables (Janvier, 1987). Una definición de variable que la distingue de esas nociones cercanas la proporciona Küchemann (1981), en términos de una relación funcional: "[…] se considera que la letra representa un rango de valores no especificados y se ve que existe una relación sistemática entre dos conjuntos de valores". A partir de ésta, Nie, Cai y Moyer (2009) definen una variable en relación funcional como una "cosa que varía", en la que se "señala principalmente que la letra puede representar un rango de valores no especificados, incluso si la relación sistemática aún no se representa explícitamente".

La caracterización de variable de Nie *et al.* (2009), aunque está clara para cualquier persona algo entrenada en matemáticas, se puede prestar a confusión para los estudiantes que requieren aprenderla. Se sabe que los estudiantes tienden a confundir el contenido de un concepto con su representación (Duval, 1999, 2006), en consecuencia, cuando esto ocurre, puede ser contradictorio para ellos que una letra x que permanece invariante sea una "cosa que varía". Por otro lado, la idea de que "la literal puede representar un rango de valores…" no es muy diferente de A como un conjunto, o de I como un intervalo; en los tres casos, el símbolo representa un rango de valores, pero ni A ni I son variables. Estos comentarios muestran que el aprendizaje del concepto de variable no puede lograrse mediante una definición, sino más bien se alcanza poco a poco mediante actividades que lleven a los estudiantes a construir y utilizar variables antes de definirla.

Las Actividades propuestas en este trabajo avanzan en dicha construcción. En efecto, en las respuestas de los estudiantes se encuentran rasgos que hacen suponer que son conscientes de que las representaciones simbólicas encierran o encapsulan el movimiento, es decir, la covariación. En particular, se muestra el uso de una literal como variable cuando los estudiantes la asocian a un punto que se mueve a lo largo de un segmento, es decir, como un ente que toma todos los valores a lo largo de un segmento; un *slider* o *deslizador* en los softwares. En las actividades de SGD que realizaron los estudiantes era necesaria dicha asignación. No obstante, se percibieron tres niveles en sus representaciones del objeto que varía, y solamente en el tercer nivel se aprecia una variable algebraica propiamente dicha. Los tres niveles son: (a) Nivel 1, como punto, (b) Nivel 2, como segmento, y (c) Nivel 3, como variable; en los tres casos su representación se mantuvo ligada al contexto geométrico. En la Tabla 7.2 se muestran gráficamente los tres niveles de representación.

Tabla 7.2.
Niveles de representación del objeto que varía

Nivel de representación	**Característica**	**Representación**
Nivel 1	Punto	
Nivel 2	Segmento	
Nivel 3	Variable=Cantidad	

7.2.3.4. La técnica de lápiz y papel

Un problema que ha emergido a partir del advenimiento y la disponibilidad de la tecnología es aclarar cómo el uso de herramientas tecnológicas se relaciona con las habilidades técnicas que se desarrollan con lápiz y papel. Kieran y Drijvers (2006) llevaron a cabo un estudio para entender la relación entre el desarrollo de un pensamiento teórico matemático de los estudiantes en relación con el uso de *Computer Assisted Systems* (CAS) y técnicas de lápiz y papel. Estos investigadores llegaron a la conclusión de que las actividades de lápiz y papel y el uso de la tecnología se complementan para desarrollar el pensamiento teórico de los estudiantes. Por ello, la idea asociada a técnicas de lápiz y papel fue retomada y adaptada en el presente trabajo. En esta investigación, el rol que juega el ambiente de lápiz y papel es fundamental para que los participantes analicen y comprendan las situaciones geométricas dinámicas planteadas.

En este ambiente, los estudiantes indagaron y propusieron expresiones simbólicas que permitían calcular el área de las figuras geométricas basados en sus observaciones, para posteriormente tratar de generalizar su comportamiento. Sin embargo, alcanzan con limitantes los componentes de Representación de la covariación y Consecuencias de la covariación, lo cual significa que efectúan cálculos de áreas de manera adecuada, pero algunos muestran dificultades al tratar de representar simbólicamente el razonamiento de covariación surgido de la situación. Durante el trabajo en ambiente de lápiz y papel, las expresiones simbólicas que los participantes sugieren están limitadas por la poca percepción simultánea de la covariación y por las características propias de las SGD, que no muestran de manera directa la configuración geométrica apropiada para su exploración simbólica (en un sentido algebraico).

Como se ha descrito a lo largo del documento, los estudiantes logran producir representaciones simbólicas limitadas a la situación, a partir de sus conocimientos básicos de geometría, apoyados en su manera de representar y utilizar símbolos (puntos, segmentos, literales). Además, entienden también la relación de las expresiones simbólicas con la aritmética, por lo que saben utilizar la operación de sustitución de valores particulares para obtener el valor de la función. Por lo tanto, en las respuestas de los participantes en los niveles 1 y 2 del componente Representación de la covariación sustituyen algunas expresiones simbólicas por otras con fines de simplificación y algunos involucran datos de la situación. Sin embargo, los intentos de representar dichas expresiones simbólicas en el plano cartesiano con lápiz y papel fueron precarias y poco estructuradas de modo que aún no son suficientes para que perciban que una función (parábola o con radical) es otra representación de la covariación. Cuando se abordan SGD se comienza con una configuración geométrica, se sigue con una representación algebraica para elaborar una representación gráfica de la covariación; no obstante, para los participantes fue difícil lograr una representación gráfica satisfactoria sólo con técnicas de lápiz y papel, pero el ambiente tecnológico digital será un espacio para validar, corregir o precisar el trabajo en ambiente de lápiz y papel que permitirá desarrollar y consolidar las ideas de covariación.

7.2.4. ¿Qué tipo de tareas promueven un acercamiento al concepto de función desde la perspectiva de la covariación?

Cuando se trabaja con el tema de funciones en el salón de clase, comúnmente se aborda el tema privilegiando la visión de correspondencia; en esta visión se tratan las funciones basadas en manipulaciones algebraicas y se integra una perspectiva gráfica a partir de tablas. Durante la etapa inicial del trabajo con tema de función, estas concepciones acerca de funciones se combinan para construir una concepción más integral, que permite a los estudiantes el trabajo con funciones nuevas y conocidas de manera flexible tanto para el cálculo como para cursos posteriores. Sin embargo, según Best y Bikner-Ahsbahs (2017, p. 865) los estudiantes a menudo llevan consigo solo un tipo de vista fragmentada de las funciones que conducen a varios problemas, algunos de ellos ya documentados en la educación matemática. Por ello, para promover el razonamiento de covariación se debe entender el desarrollo del concepto de función no como una relación de correspondencia sino como una relación de dependencia, inmerso en fenómenos dinámicos. Para fomentar el discernimiento de los estudiantes sobre la variación en el cambio unidireccional, se deben diseñar tareas que brinden oportunidades para que los alumnos conciban atributos que varían y que sean capaces de medirlos.

Con la finalidad de promover el razonamiento de covariación es necesario llevar a cabo tareas que integren la relación entre variables, ya que en ésta se puede identificar cómo cambia el valor de una variable cuando se modifica la otra. Esta característica sienta la base para el desarrollo y comprensión de la covariación y es esencial para el acercamiento [desde el punto de vista cognitivo] a conceptos más avanzados como el de función. En esta investigación se muestra la importancia del diseño de un conjunto de tareas [Actividad] que permitan establecer una relación sustantiva con las ideas ya existentes —conocimientos previos— con la finalidad de promover el razonamiento de covariación. La construcción de la representación gráfica en ambos ambientes es fundamental para el sentido que los estudiantes dan a las representaciones. Las Actividades que integran los elementos antes discutidos son denominadas situaciones geométricas dinámicas e involucran situaciones que son potencialmente significativas, ya que permiten establecer la conexión, de manera no arbitraria, entre la estructura cognitiva del sujeto y la idea de covariación.

Según Leinhardt *et al*., (1990) hay algunos tipos de tarea en la que la interpretación también se produce fuera del gráfico y es cuando el gráfico describe una situación específica. En este caso, interpretarlo implica pasar de la representación gráfica a la situación en sí misma; es por ello que la actividad de interpretación requiere gráficos que representen situaciones. Dado un gráfico específico que representa una situación, hay una variedad de preguntas que se pueden hacer al respecto, pero todas involucran la interpretación. Dependiendo de las preguntas formuladas, la interpretación puede ser un proceso local (por ejemplo, uno con respecto a la atención punto por punto) o uno más global (por ejemplo, detección de tendencia). Hay muchas características globales de un gráfico que pueden interpretarse. Estas incluyen la forma general de la gráfica, intervalos de aumento o disminución e intervalos de aumento o disminución extremos. Cabe señalar que se puede prestar atención a las características globales de un gráfico, ya sea que el gráfico represente una situación específica o si representa una relación funcional abstracta.

Por tal motivo, las tareas que se sugieren deben incluir, en su diseño, la integración de diversos elementos entre los que se destacan el mecanismo que produce la covariación, la idea de la percepción discreta y continua de la covariación y la posibilidad de desvincularse del contexto en el que se resuelve la situación. En este trabajo, el diseño de las tareas fue trascendental para establecer una relación sustantiva con los conocimientos previos de los participantes, así como, interconexiones entre el mecanismo que explica la covariación y su relación con otros registros de representación. Este uso de múltiples representaciones y el significado asociado con las mismas, permitió en los términos de Weigand y Weller (2001) desarrollar un conocimiento básico integral, el cual está ligado con la capacidad de reconocer funciones que muestran “lo general en lo particular”. La idea anterior es una de las bases de las Actividades de esta investigación, las cuales buscan promover el manejo de sistemas simbólicos y sus múltiples representaciones de manera que dicho manejo se desarrolle en los estudiantes a partir de cálculos particulares que infundan la idea de la covariación y sentido general de la función generando significado de los objetos matemáticos involucrados.

7.3. El papel de la tecnología en el desarrollo del concepto de función

Cuando se abordan situaciones geométricas dinámicas empleando herramientas digitales se establecen relaciones matemáticas entre la aritmética, la geometría y el álgebra, y emergen cinco ideas generales que promueve este ambiente de trabajo, las cuales surgieron a partir del análisis y la comprensión de cómo se dieron a lugar las respuestas de los estudiantes al resolver las Actividades. Estas ideas o categorizaciones emergen por la manera en que los estudiantes afrontan las SGD con el uso de la herramienta tecnológica, ya que para lograr el éxito [parcial] durante la resolución de las Actividades, se identificaron cinco elementos esenciales que brindaron apoyo cognitivo para promover el razonamiento de covariación. Estos elementos son: (*i*) representación y exploración; (*ii*) mecanismo de la covariación; (*iii*) recurso de validación; (*iv*) nueva representación de la covariación; y (*v*) percepción simultánea de la covariación. A continuación, se describe cada una de las caracterizaciones antes mencionadas:

7.3.1. Representación y exploración

Los estudiantes representan la situación en la pantalla de la computadora mediante la traducción de las condiciones de la situación con los correspondientes comandos del software dinámico; al hacerlo, se crea un espacio de experimentación en el que pueden mover un objeto (el punto) y notar las consecuencias en la configuración a partir de las representaciones que brinda el software (*plano euclidiano dinámico*).

7.3.2. Mecanismo de la covariación

Los participantes vislumbran de manera concreta el mecanismo de la covariación, es decir, observan cómo se mueve la configuración que resulta de la construcción de la figura geométrica —en el plano euclidiano dinámico— a partir del movimiento de un punto. Con los comandos de medidas del software, los estudiantes pueden notar cómo cambia el área de la configuración en función de la longitud del segmento y comenzar a percibir sus propiedades. La identificación de los elementos que intervienen en el mecanismo de la covariación es primordial para generar una representación simbólica que encapsule la covariación.

7.3.3. Recurso de validación

Aunque el software no proporciona, a los participantes, la expresión simbólica de la covariación, permite validar si la expresión propuesta, en efecto, describe la covariación percibida. La validación de la expresión simbólica motiva a que los estudiantes desarrollen su habilidad de simbolizar toda vez que pueden verificar la pertinencia de una expresión y, en su caso, corregirla.

7.3.4. Nueva representación de la covariación

El software construye, con mayor exactitud, la representación gráfica de la covariación y ésta se convierte en una manera nueva de analizar la covariación. Además, los estudiantes amplían su sentido de la covariación al definir y percibir una familia de funciones a la que pertenece la covariación de la situación inicial; de hecho, todos utilizan el término parábola para describirla. Esta nueva representación de la covariación abre la posibilidad de exploración hacia nuevas situaciones o tareas.

7.3.5. Percepción simultánea de la covariación

La herramienta tecnológica digital permite a los participantes analizar la covariación desde una perspectiva de cambio continuo, es decir, cuando el punto P se desplaza cambia la longitud del segmento asociado con su posición y, por lo tanto, cambia el valor de área del polígono; este cambio es percibido por los participantes como un flujo continuo de estímulos perceptivos a través de la interacción con el software y la relación entre las cantidades.

7.4. CONTRIBUCIONES DE LA PRESENTE INVESTIGACIÓN

Para describir las contribuciones que brinda la presente investigación, conviene tratar de responder la pregunta: ¿qué conocimientos nuevos se han descubierto o producido como resultado del presente trabajo? Por ello, primero, se debe hacer mención del papel de la investigación en la enseñanza y aprendizaje del concepto de función desde la perspectiva de la covariación. En segundo lugar, se debe destacar el tipo de las tareas que se sugieren sean incorporadas para la comprensión de los conceptos involucrados. En tercer lugar, se debe resaltar uno de los conceptos que destacan por su importancia, en este trabajo, y sin el cual se puede dar lugar a la representación de la covariación, este es el concepto de variable. Por último, se menciona la importancia de incorporar herramientas digitales para promover el desarrollo de los conceptos. A continuación, se abordan cada una de las contribuciones que se generan en el presente trabajo.

7.4.1. Acerca del papel de la investigación en la enseñanza y aprendizaje del concepto de función desde la perspectiva de la covariación

De acuerdo con los resultados obtenidos en la investigación aquí reportada, es posible sugerir diferentes implicaciones relacionadas, sobre todo, con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de función desde su perspectiva de la covariación. Como se ha mencionado a lo largo del documento, el concepto de función es uno de los conceptos más importantes de las matemáticas, porque está conformado por una red de conceptos entrelazados (*e.g.*, uso de la variable, la variación, la covariación, el modelado, la medida, los registros de representación, entre otros) y brinda a los estudiantes un *soporte cognitivo* para avanzar en la comprensión de conceptos más complejos. La enseñanza y aprendizaje de este concepto implica múltiples dificultades, entre ellas, se destacan: (i) la identificación de qué es una función; (ii) la unificación de los diversos registros de representación; (iii) la integración modos de pensamiento numérico y algebraico; (iv) la conexión entre la manipulación simbólica y el lenguaje; (v) la modelación de situaciones contextualizadas; (vi) el análisis e interpretación del comportamiento de una gráfica (Freudenthal, 1983; Eisenberg, 1992; Goldin y Kaput, 1996; Hitt, 1996; Hercovics, 1980; Kaput, 1994; Krüger, 2019; Lagrange, 2014; López y Sosa, 2008; Madison *et al.*, 2015; Moore y Thompson, 2015; Moschkovich, 2004; Oehrtman, 2008; Selden y Selden, 1992; Sierpinska, 1992; Smith, 2008; Dubinsky y Wilson, 2013; Thompson, 2011; Thomas, 2003; Vasco, 2006; Walde, 2017; Weber, 2014; Weber y Thompson, 2014, Yerushalmy, 1997; Zandieh, 2000).

En el presente trabajo, queda constatado que el enfoque covariacional es un punto clave para la construcción del concepto de función por parte de los estudiantes, y es a partir de esta visión que se pueden subsanar algunas de las dificultades antes mencionadas para el desarrollo de dicho concepto. Las manifestaciones del razonamiento de covariación surgidas de las situaciones geométricas dinámicas, propuestas en esta investigación, involucran el trabajo matemático sobre algunas de las dificultades antes mencionadas. Por ejemplo, el uso de la variable es fundamental para poder establecer una expresión simbólica que represente la covariación; la integración del modo de pensamiento numérico y algebraico se distingue cuando a partir del cálculo de área para casos particulares (percepción discreta de la covariación) se establece una relación para la asignación de variables que dan lugar a la expresión simbólica; la unificación de los diversos registros de representación que se reconoce por la interconexión entre las representaciones (*e.g.*, simbólica, tabular, geométrica, gráfica); la modelación de situaciones se muestra cuando se comprende el mecanismo que produce la covariación y se representa a través de los diversos registros, además, se da significado a las representaciones basadas en el contexto de la situación; el análisis e interpretación del comportamiento de una gráfica es abordado cuando se analiza el registro gráfico no solo para la identificación de máximos y mínimos sino desde que se interpreta cómo se comportan las variables involucradas (cómo covarían).

Aunado a lo anterior, es importante destacar el *avance cognitivo* que mostraron los estudiantes a medida que avanzaron en las Actividades. Este *avance cognitivo* se puede constatar basado en las tablas de resultados relacionadas con los niveles de respuesta que dan los participantes a cada Actividad en los dos momentos de solución (véanse Tablas 5.2, 5.4, 5.6, 6.1, 6.3 y 6.5). Por mencionar un ejemplo se analizan los resultados de los niveles de respuesta correspondientes a la Actividad 2 durante el primer momento de resolución en ambiente de lápiz y papel (véase Tabla 5.4). En los resultados de la Tabla 5.4 se puede observar que la componente *III. Análisis previo de la covariación* es la de mayor incidencia, lo que significa que la mayor parte del trabajo cognitivo se centró en identificar la dependencia de las variables y cómo estas se relacionan. Al comparar los resultados de la Actividad 2 durante el segundo momento de resolución en ambiente tecnológico digital (véase Tabla 6.3) se puede identificar que la componente *IV. Representación de la covariación* es la de mayor incidencia, lo que significa que se avanzó el razonamiento de covariación hacia una componente. Además, si se revisan los niveles de respuesta durante el primer momento de la Actividad 2, se puede constatar que hay más respuestas asociadas con los niveles 1 y 2; en cambio, durante el segundo momento de la Actividad 2 hay mayor número de respuestas asociadas con el Nivel 3. Con base en los resultados de las Tablas 5.4 y 6.3 para los dos momentos de la Actividad 2, se puede afirmar que los estudiantes logran un *avance cognitivo* en el desarrollo del razonamiento de covariación. Esta afirmación se puede sustentar comparando los resultados de los niveles de respuesta asociados con las Actividades 1 y 3 (véanse Tablas 5.2, 5.6, 6.1 y 6.5), los cuales su comportamiento es similar al descrito en la Actividad 2.

Para promover el razonamiento covariacional, se deben conjuntar condiciones (*e.g.*, la posibilidad de interactuar con otras personas, los conocimientos matemáticos que posee el alumno, entre otros) y tareas (Actividades) que favorezcan el trabajo matemático. El papel del contexto social —relacionado con las interacciones alumno-alumno y alumno-investigador— en el que se desarrolla la Actividad es trascendental para generar reflexiones acerca de la misma. Además, los conocimientos previos son esenciales para que el participante tenga la posibilidad de desarrollar el razonamiento de covariación, ya que estos son la base del trabajo con los conceptos matemáticos involucrados. Por medio de los conocimientos previos, la mayor parte de los estudiantes desarrollaron nuevas estructuras de conocimiento a partir de la identificación de la variación conjunta surgidas de la situación, lo que permitió el desarrollo de estrategias exitosas durante la resolución de tareas matemáticas. En esta investigación, la clave para el desarrollo del razonamiento de covariación está en la relación que se pueda establecer entre las Actividades y las ideas ya existentes en la estructura cognitiva de los estudiantes denominados conocimientos previos, los cuales fueron la base para generar significado del razonamiento de covariación que se les da a los nuevos objetos matemáticos que surgieron de la situación. A continuación, se detallan las condiciones y tareas que favorecen el desarrollo del razonamiento de covariación:

Los conocimientos previos

Los conocimientos matemáticos previos permiten desarrollar capacidades para afrontar las situaciones geométricas dinámicas y son la base para que los estudiantes efectúen razonamientos más profundos y los vinculen con otros conceptos (en particular el de función). Con base en el análisis de datos, los participantes con mejores respuestas desarrollaron una mejor percepción e identificación de la relación conjunta de variables que fue vinculada de manera significativa con conocimientos anteriores. El conocimiento [de acuerdo con Chen *et al.* (2011), quienes se refieren en particular, al conocimiento geométrico] se expande introduciendo nuevos conceptos usando los conceptos ya definidos previamente, los cuales permiten obtener propiedades sobre nuevos conceptos y probar o descubrir teoremas que relacionan los conceptos [concepciones] antiguos y nuevos.

Las interacciones sociales

Durante la resolución de las Actividades, el contexto social jugó un papel importante con la finalidad de fomentar la interacción alumno-alumno y alumno-investigador. La agrupación de los alumnos en pareja propició en ellos un trabajo interactivo (entorno social), el cual permitió y fomentó la oportunidad de discutir, explicar y justificar sus contribuciones a las respuestas de las preguntas planteadas en cada Actividad. Además, la interacción entre los alumnos y el investigador sirvió para reorientar y promover la reflexión de los alumnos en torno a la solución de las Actividades; estas intervenciones del investigador se dieron, sobre todo, cuando les solicitaba a los estudiantes que recurrieran a sus conocimientos previos para resolver una tarea determinada, o bien, reflexionaran sobre sus resultados propuestos. El trabajo en pareja motivó la interacción y fomentó la discusión para explicar y justificar las respuestas a las preguntas planteadas.

Las Actividades

En este trabajo, el diseño de las Actividades fue fundamental para establecer una relación sustantiva con los conocimientos e ideas ya existentes de los participantes, con la finalidad de promover el razonamiento de covariación e integrar conexiones de los conceptos para acercar —de manera cognitiva— al estudiante al concepto de función. Se debe distinguir que las situaciones de optimización, de las dos primeras Actividades, y sus resultados fueron descubiertas por los estudiantes con facilidad, ya que el comportamiento del área de la figura geométrica en dichos problemas permitió inferir de manera *rápida* el lugar donde se encontraba el área máxima o mínima. Cuando los participantes identifican que en el punto medio se alcanza el nivel óptimo de área (mínima o máxima) muestra que han comprendido la situación. En la Actividad 3, el valor máximo de área del rectángulo inscrito en la semicircunferencia no es evidente, ya que la mayoría de los participantes solo logró estimar dicho valor basados en la covariación de cantidades y determinando un acercamiento según su comportamiento de área. Las Actividades estaban enfocadas en involucrar problemáticas o situaciones que despierten el interés de los estudiantes y promuevan la interacción, el intercambio de opiniones y conocimientos que permitan la reflexión sobre los objetos matemáticos involucrados.

7..4.1. Acerca de tareas para fomentar el concepto de función

Desde la publicación de los estándares curriculares (NCTM, 2000) se ha desarrollado la idea de fomentar en el aula las conexiones entre diferentes áreas o ramas de la matemática. En particular, Steketee y Scher (2016) han propuesto ideas para relacionar la geometría con el concepto de función, aunque se restringen a las transformaciones geométricas rígidas. En el presente trabajo ofrecemos otro acercamiento para relacionar las funciones con la geometría y es mediante actividades con situaciones geométrica dinámicas. Aunque la obtención de funciones mediante la modelación de situaciones dinámicas no es, desde luego, nada nuevo, nuestra contribución consiste en destacar el concepto del *mecanismo de la covariación* y agregar esta propiedad a las restricciones para elegir la SGD y promover en los estudiantes el concepto de función. De esta manera la actividad les permite descubrir el mecanismo de la covariación, ya que hay múltiples situaciones que se utilizan tradicionalmente en cálculo, en particular en los ejercicios del tema de máximos y mínimos, pero ahí se asume que los estudiantes ya saben hacerlo e interpretar problemas contextualizados. La idea de las SGD es que los estudiantes mediante sus conocimientos geométricos sean capaces de inferir la regla de correspondencia, que no ocurre en diversos problemas sugeridos en la literatura, por ejemplo, en tareas basadas en situaciones de llenado de recipientes (Carlson *et al.*, 2002; Thompson *et al*., 2013). En la Figura 7.1, se propone una tarea consistente en bosquejar el comportamiento de la gráfica que relaciona la altura y el volumen del recipiente cuando se llena dada una razón constante; esta situación no es viable para que un estudiante de bachillerato determine la regla de correspondencia de la función que modela el fenómeno.

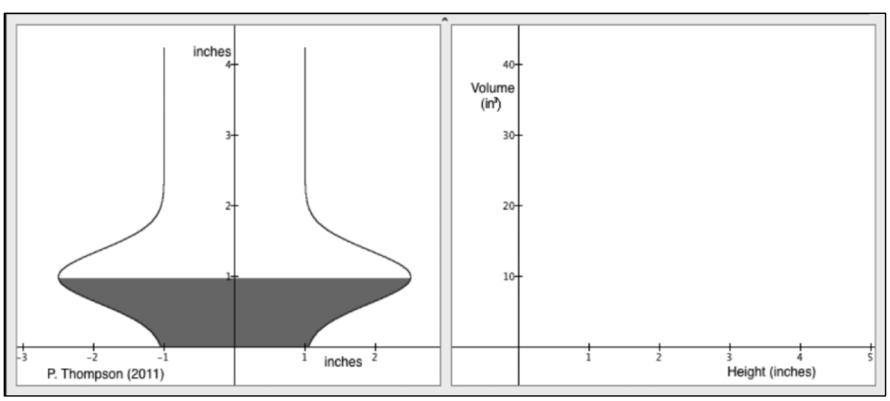


Figura 7.1. Situación relacionada con el llenado de un recipiente. Extraído de Thompson *et al*. (2013, p. 130).

La tarea del llenado de un recipiente que consiste en bosquejar una gráfica cuyo comportamiento cumpla con las características de la situación, implica la covariación, ya que se coordinan algunas cantidades de manera precisa. Sin embargo, la gráfica que se obtendría sólo reflejaría cualitativamente el fenómeno; es muy poco probable que un estudiante lograra encontrar una expresión algebraica apropiada, debido a que no es transparente el mecanismo que produce la covariación.

El diseño de nuevas situaciones geométricas dinámicas que puedan ser contextualizadas desde la perspectiva de la variación conjunta puede basarse en problemas con perímetros, áreas o volúmenes, y cuyo punto de partida sean cálculos particulares que puedan ser resueltos diversos ambientes de trabajo (lápiz y papel y tecnológico digital). El razonamiento con cantidades puede apoyar directamente un enfoque de covariación de la función, al tiempo que proporciona una base para el razonamiento más flexible con relaciones funcionales más adelante; además se deben considerar propuestas en las que los conocimientos previos sean el punto de partida y se permita la interacción entre los participantes que dé lugar al intercambio de ideas y la reflexión.

7.4.2. Acerca del concepto de variable

Aunque teóricamente el concepto de *variable* es previo al de función, consideramos que en la práctica los estudiantes se apropian de él paralelamente al de función y pueden desarrollarlo de manera natural al abordar SGD. La idea es que tienen la oportunidad de ver un símbolo como p o x como una representación que encapsula el movimiento de un punto a lo largo de un segmento. La noción de variable nace en la resolución de tareas de situaciones dinámicas en ambiente de lápiz y papel, durante el proceso que va de solicitar a los estudiantes que imaginen y describan lo que pasa con el área o con la configuración de una figura geométrica cuando el punto P se mueve a lo largo de una curva hasta pedirles que propongan su representación simbólica y gráfica.

El desarrollo y consolidación de este concepto se obtiene con el uso de un software, en el cual la herramienta *deslizador* o *slider* es otra representación de dicha idea. Consideramos entonces que las actividades basadas en las SGD permiten el desarrollo de la noción de variable. Este resultado es importante en la medida en que se ha demostrado que incluso estudiantes universitarios tienen dificultades con el concepto de variable (Trigueros y Jacobs, 2008).

7.4.3. Acerca del uso de la herramienta tecnológica

Para promover el razonamiento de la covariación, es necesario aludir al mecanismo que la produce, el cual la herramienta tecnológica digital hace evidente dicho mecanismo al mostrar cómo el cambio en un objeto matemático produce el cambio en otro. El uso del ambiente tecnológico digital influye para que los participantes identifiquen la variación conjunta. Es esta acción la que, desde nuestra visión, promueve el razonamiento de covariación, ya que se hace explícita la relación existente entre ambas variables. Además, la herramienta digital hace alusión al mecanismo que produce la covariación, ya que permite la comprensión de la estructura geométrica que posee la figura geométrica en el plano euclidiano dinámico y brinda la posibilidad de revelar —con base en los casos particulares (perspectiva discreta de la covariación)— la relación entre variables por medio de una regla de correspondencia asociada con el componente Representación de la covariación (perspectiva continua de la covariación).

En futuras investigaciones es fundamental considerar el trabajo en ambientes digitales ya que cumple con diversas funciones mediadoras, entre las que se destacan: se puede usar como herramienta de validación de resultados; promueve la interrelación de los registros de representación [registros: figural, simbólicos, tabular y gráfico] relacionados con el razonamiento de covariación; y por otro lado, permite llevar a cabo exploraciones con parámetros (en el plano cartesiano dinámico), las cuales generan familias de funciones que hacen posible establecer y validar conjeturas, como parte del proceso de solución de las SGD.

El ambiente tecnológico digital es empleado, por los estudiantes, como un espacio para validar, corregir o precisar el trabajo en ambiente de lápiz y papel. El uso del software dinámico, en el aprendizaje acerca de las relaciones entre variables, promueve el interés en la manera en cómo los estudiantes razonan en torno a los conceptos involucrados a diferencia del trabajo en ambiente de lápiz y papel, el cual limita la relación entre representaciones, sin embargo, este ambiente fue la base para la comprensión de la SGD. La modalidad dinámica de representar los objetos matemáticos y su interrelación por medio del ambiente tecnológico digital permite a los estudiantes integrar diversas manifestaciones de razonamiento de covariación con el fin de generar ideas y dar sentido a los objetos matemáticos involucrados.

7.5. LIMITACIONES DE ESTA INVESTIGACIÓN Y PERSPECTIVAS HACIA EL FUTURO

Una limitación del presente estudio fue no considerar muestras de diferentes poblaciones con relación a la edad. La muestra estuvo formada por 16 estudiantes de bachillerato, quienes se encontraban inscritos en la asignatura de Matemáticas VI (cálculo diferencial e integral). Es decir, los alumnos ya deberían saber lo que aprendieron en la Actividad, aunque lo cierto es que mostraron deficiencias que fueron mejorando a lo largo de las situaciones. Por esta razón, conviene hacer un estudio similar con muestras de estudiantes de menor edad ubicando las exploraciones en diferentes grados escolares, por ejemplo, una dentro de su curso de álgebra y otra dentro del curso de geometría analítica. La idea sería ubicar con mayor precisión el momento en que los estudiantes pueden desarrollar de manera óptima las habilidades de tratamiento de situaciones geométricas dinámicas y sacar provecho de ellas, con el objetivo de integrar conceptos que se trabajan en el álgebra y la geometría, los cuales, al ser vinculados, robustecerán el bagaje matemático que poseen los estudiantes y sirva como conocimiento base para cursos superiores.

Las tareas propuestas se centraron en el objetivo de la representación algebraica y gráfica de la SGD, con el fin de que los estudiantes formaran el concepto de función cuadrática y con radical. Una limitación importante de estas tareas es que no se centraron en la solución de problemas en los que se muestre la potencia de la representación obtenida, por ejemplo, en problemas contextualizados de máximos y mínimos. Hemos visto que la traducción de la SGD a su representación algebraica y gráfica es en sí misma problemática, pero para que los estudiantes tengan más oportunidad de apreciar el esfuerzo de realizar dicha representación convendría que resolvieran problemas en otros contextos de aplicación, tanto matemáticos como extra-matemáticos. Hay algo de redundancia en la manera en que fueron realizadas las actividades y parece viable conseguir resultados similares simplificando algunos aspectos. En combinación con la observación previa, se podría determinar si se alcanzan buenos resultados con una o dos actividades encajadas en problemas matemáticos o extra-matemáticos.

El uso de la tecnología en las actividades realizadas ha sido complementario y posterior al trabajo de lápiz y papel. En este estudio se ha visto que los estudiantes avanzan bastante utilizando sólo lápiz y papel. Otra posición, sin embargo, podría sugerir que una inmersión total en un ambiente de tecnología digital podría basarse en las formas de representación del software y potenciar más las posibilidades de resolver problemas. Surge la pregunta ¿cómo hacer un diseño en el que la tecnología se utilice desde un principio y tenga un papel más importante, pero que no inhiba la actividad con lápiz y papel?

Finalmente, los resultados de la presente investigación se mantienen aún en un plano descriptivo, aunque se han hecho esfuerzos por conceptualizar rasgos vistos en las respuestas de los estudiantes a las Actividades, sin embargo, no ha sido posible integrar aún una teoría local que ofrezca explicaciones convincentes acerca del desarrollo del razonamiento de los estudiantes en torno al concepto de función y los elementos de diseño.

REFERENCIAS

Akkoç, H. & Tall, D. (2005). A mismatch between curriculum design and student learning: the case of the function concept. In D. Hewitt & A. Noyes (Eds), *Proceedings of the sixth British Congress of Mathematics Education held at the University of Warwick*, 1-8.

Apostol, T. M. (1967). *Calculus 1*. John Wiley & Sons, Inc.

Arcavi, A. & Hadas, N. (2000) Computer mediated learning: An example of an approach. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 5 (1), 25-45.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *52*, 215-224.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). *APOS Theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. New York: Springer.

Ayalon, M., Watson, A. y Lerman, S. (2016). Reasoning about variables in 11 to 18 year old: informal, schooled and formal expression in learning about functions. *Mathematics Education Research Journal*, 28 (3), 379-404.

Barrera, V. J., Castro, E. y Cañadas, M. C. (2009). Cuaderno de trabajo sobre razonamiento inductivo para profesores de primaria en formación. En M.J. González; M. T. González; J. Murillo (Eds.): *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XIII Simposio de la SEIEM. Santander.*

Berger, M. (2005). Vygotsky's theory of concept formation and mathematics education. In H.L. Chick & J.L. Vincent (Eds.), *Proc. 29th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 153-160). Melbourne, Australia: PME.

Best, M. & Bikner-Ahsbahs, A. (2017). The function concept at the transition to upper secondary school level: tasks for a situation of change. *ZDM Mathematics Education*. 49(6), 865-880

Birks, M. & Mills, J. (2011). *Grounded Theory. A Practical Guide.* Los Angeles CA: Sage.

Bourbaki, N. (1939). Éléments de mathématique. Paris: Hermann.

Boyer, C. B. (1946). Proportion, equation, function: Three steps in the development of a concept. *Scripta Mathematica*, 12, 5–13.

Cañadas, M. C. & Molina, M. (2016). Approach to the conceptual framework and background of functional thinking in early years. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en educación matemática*. Homenaje a Luis Rico (pp. 209-218). Granada, España: Comares.

Castillo-Garsow, C. (2013). The role of multiple modeling perspectives in students' learning of exponential growth. *Mathematical Biosciences & Engineering*, 10 (5-6), 1437-1453.

Carlsen, M. (2009). Reasoning with paper and pencil: The role of inscriptions in student learning of geometric series. *Mathematics Education Research Journal*. 21 (1), 54-84.

Carlson, M. P. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics* *education, III* (CBMS Issues in Mathematics Education, Vol. 7, pp. 114–162). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe. E., Larsen, S. & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education* 33(5), 352-378.

Carlson, M., & Oehrtman, M. (2005). Key aspects of knowing and learning the concept of function [Versión electrónica]. *Mathematical Association of America*. Research Sampler. Extraído de http://www.maa.org/t_and_l/sampler/rs_9.html [Ingresado el 20 de octubre de 2019].

Carlson, M., Oehrtman, M. & Engelke, N. (2010). The Precalculus Concept Assesment: ATool for Assessing Student's Reasoning Abilities and Understanding. *Cognition and Instruction*, 28(2), 113–145.

Carraher, D. W. & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 669-705), Charlotte NC: National Council of Teachers of Mathematics & Information Age Publishing.

Charbonneau, L. (1996). From Euclid to Descartes: algebra and its relation to geometry. En N. Bednarz, C. Kieran, L. Lee (Eds.). *Approaches to Algebra*. Kluwer Academic 15-37.

Chen, X., Huang, Y. & Wang, D. (2011). On the Design and Implementation of a Geometric Knowledge Base. In: T. Sturm, C. Zengler (Eds) *Automated Deduction in Geometry. ADG 2008. Lecture Notes in Computer Science*, vol 6301. Springer, Berlin, Heidelberg 22-41.

Chinnappan, M. (1998). The accessing of geometry schemas by high school students. *Mathematics Education Research Journal*, 10(2), 27-45.

Chinnappan, M. & Thomas, M. (2003). Teachers function schemas and their role in modelling. *Mathematics Education Research Journal*, 15 (2), 151-170.

Clement, J. (1989). The Concept of Variation and Misconceptions in Cartesian Graphing. *Focus on Learning Problems in Mathematics. 11 (1), 77-88.*

Confrey, J., Smith, E. (1994a). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 135-164.

Confrey, J., Smith, E. (1994b). Multiplicative structures and the development of logarithms: What was lost by the invention of function? En G. Harel, J. Confrey (Eds.), *Multiplicative reasoning in the learning of mathematics*. Albany, NY: State University of New York Press.

Courant, R., & Robbins, H. (1996). *What is mathematics?* New York: Oxford University Press.

Cuevas, C. A., Martínez, M. & Pluvinage, F. (2017). Revisitando la noción de función real. *El Cálculo y su Enseñanza, Enseñanza de las Ciencias y la Matemática*. México: Cinvestav-IPN, 8:31-48

Doorman, L.M. & Gravemeijer, K.P.E. (2009). Emergent modeling: discrete graphs to support the understanding of change and velocity. *ZDM Mathematics Education* 41(1),199-211.

Doorman, M. & Drijvers, P. (2011). Algebra in function. *Secondary Algebra Education: Revisiting Topics and Themes and Exploring the Unknown.* Rotterdam: SensePublishers. 119–135.

Dreyfus, T., Hershkowitz, R. & Schwarz B. (2015) The Nested Epistemic Actions Model for Abstraction in Context: Theory as Methodological Tool and Methodological Tool as Theory. En A. Bikner-Ahsbahs *et al*. (eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Advances in Mathematics Education*, 185-217. Dordrecht Heidelberg New York London: Springer.

Drijvers, P., Boon, P., & Van Reeuwijk, M. (2010). Algebra and technology. In P. Drijvers (Ed.), *Secondary algebra education. Revisiting topics and themes and exploring the unknown* (pp. 179–202). Rotterdam: Sense.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for Learning (Plenary address). In F. Hitt and M. Santos (Ed.) *Proceeding 21st PME-NA Conference*, 1 (pp. 3–26). Cuernavaca, Morelos, Mexico.

Duval, R. (2003). *"Voir"* en Mathématiques. En Filloy, E. (Ed.), *Matemática educativa: aspectos de la investigación actual* (pp. 41-76). México: Fondo de Cultura Económica.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61 (1), 103–131.

Dubinky E. & Harel G. (1992). The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy. USA: *Mathematical Association of America* (MMA).

Dubinsky, E., & Wilson, R. T. (2013). High school students' understanding of the function concept. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(1), 83-101.

Ellis, A. B. (2011). Algebra in the Middle School: Developing Functional Relationships Through Quantitative Reasoning. Early Algebraization, *Advances in Mathematics Education*. Springer.

Eisenberg, T. (1992). On the development of a sense for functions. *The Concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*. Mathematical Association of America. Notes Series, Vol. 25, pp. 153-174.

Farenga, S. J., & Ness, D. (2005). Algebraic thinking part II: The use of functions in scientific inquiry. *Science Scope*, *29* (1), 62–64.

Feldman, R. (1998). *Psicología*. México: McGraw-Hill.

Ferrara, F., Pratt, D., & Robutta, O. (2006). The role and uses of technologies for the teaching of algebra and calculus. In A. Gutiérrez, & P. Boero (Eds.). *Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future* (pp. 237–273). Rotterdam: Sense Publishers.

Freudenthal, H. (1978). Weeding and sowing. Dordrech: Reibel Pub. Co.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel. (Traducción de Luis Puig, publicada en Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados. México: CINVESTAV, 2001).

Glaser, B. G. & Strauss, A. L. (1967/2008). *The Discovery of Grounded Theory: Strategies for Qualitative Research*. New Brunswick, USA: Aldine Transactions.

Gray, S., Loud B. J. & Sokolowski C. P. (2009) Calculus Students' Use and Interpretation of Variables: Algebraic vs. Arithmetic Thinking. Canadian Journal of Science, *Mathematics and Technology Education*, 9(2), 59-72.

Goldin, G. & Kaput, J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. *Theories of Mathematical Learning* (pp. 397-430). Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. In A. Cuoco & F. Curcio (Eds.), *Roles of representations in school mathematics* [2001 Yearbook], 1-23. Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Gómez, G. (2010). Habilidades del pensamiento. Cengage Learning Editores. Santa Fe. Biblioteca UPS.

Hansson, Ö. (2006). *Studying the views of preservice teachers on the concept of function*. Doctoral dissertation. Department of Mathematics, Luleå University of Technology

Hitt, F. (1996). Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa* (pp. 245-264) México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Hitt, F., & González-Martín, A. S. (2015). Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method. *Educational Studies in Mathematics*, *88*(2), 201–219.

Heid, M. K., & Blume, G. W. (2008). Technology and the development of algebraic understanding. In M. K. Heid & G. W. Blume (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Syntheses, cases, and perspectives*. Vol. 1: Research syntheses (pp. 55–108). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Hernández, H. & Parra, R. (2013). Problemas sobre la distinción entre razonamientos deductivos e inductivos y su enseñanza. *Innovación educativa (México, DF)*, 13(63), 61-73.

Herscovics, N. (1980). Constructing meaning for linear equations: a problem of representation. *Recherché en Didactique des Mathematics*, 1(3), 351-385.

Jacobson, E. (2014). Using Covariation Reasoning to Support Mathematical Modeling. *The Mathematics Teacher*, 107(7), 515-519.

Referencias

Janvier, C. (1987). Translation processes in mathematics education. In C. Janvier (Ed.) *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 27-32). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Johnson, H. L., McClintock, E., Hornbein, P., Gardner, A., & Grieser, D. (2017). *When a critical aspect is a conception: Using multiple theories to design dynamic computer environments and tasks to foster students' discernment of covariation*. 10th Congress of European Research in Mathematics Education, Dublin, Ireland.

Johnson, H. L. & McClintock, E. (2018) A link between students' discernment of variation in unidirectional change and their use of quantitative variational reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 97(3), 299-316.

Jones, K., Lavicza, Z., Hohenwarter, M., Lu, A., Dawes, M., Parish, A., Borcherds, M. (2009). *Establishing a professional development network to support teachers using dynamic mathematics software Geogebra.* In M. Joubert (Ed.) Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics. 29(1): 97-102.

Kaput, J. J. (1994). Democratizing access to calculus: New routes to old roots. En A.H. Schoenfeld (Ed.), *Mathematics and cognitive science* (pp. 77-156). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Kaput, J. J. (1995). A research base supporting long term algebra reform? En D. T. Owens, M. K. Reed & G. M. Millsaps (Eds.), *Proceedings of the 7th PME-NA Annual Meeting* 1, 71-94.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carreher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5-17). New York: Routledge.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390- 419). New York: Macmillan.

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? *The Mathematics Educator*, 18(1), 139-151.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (707-762), Charlotte NC: National Council of Teachers of Mathematics & Information Age Publishing.

Kieran, C., & Drijvers, P. (2006). The co-emergence of machine techniques, paper-and-pencil techniques, and theoretical reflection: A study of CAS use in secondary school algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 11, 205–263.

Kleiner, I. (1989). Evolution of the function concept: A brief survey. *College Mathematics Journal*, 20, 282–300.

Koyuncu, I., Akyuz, D. & Cakiroglu, E. (2015). Investigating plane geometry problemsolvingstrategies of prospective mathematics teachers in technology and paper-and-pencil environments. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 13: 837-862.

Krüger, K. (2019). Functional thinking: The history of a didactical principle. H.-G. Weigand *et al*. (eds.), *The Legacy of Felix Klein*, ICME-13 Monographs. New York: Springer.

Küchemann, D. (1981). Algebra. In K. M. Hart (Ed.). *Children's Understanding of Mathematics:* 11-16 (pp. 102-119). London: John Murray.

Lagrange, J. (2000). L'integration d'instruments informatiques dans lénseignement: une approche par les techniques. *Educational Studies in Mathematics*, 43(1), 1-30.

Lagrange, J.-B. (2014). A functional perspective on the teaching of algebra: current challenges and the contribution of technology. *The International Journal for Technology in Mathematics Education*, 21(1), 3-10.

Larios, V. (2005). Fenómenos cognitivos presentes en la construcción de argumentos en un ambiente de Geometría Dinámica. Tesis doctoral no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, México.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. (1990). Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research*, 60(1), 1-64.

León, C. (2017). El pensamiento covariacional y Geogebra: herramientas para la explicación científica de algunas realidades. *Tecné, Episteme y Didaxis*, ted, 42, 159-171

López, J., & Sosa, L. (2008). Dificultades conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de funciones en estudiantes de bachillerato. En Lestón, P. (Ed.). (2008). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 21. pp. 308-318. México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Madison B. L., Carlson M., Oehrtman M. & Tallman M. (2015). Conceptual Precalculus: Strengthening Students' Quantitative and Covariational Reasoning. *The Mathematics Teacher*, 109(1), 54-59.

Marrades, R. & Gutierréz, A. (2000). Proofs produced by Secondary School Students Learning Geometry in a Dynamic Computer Enviroment. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1-2): 87-125.

Miles, M. B., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis* (2nd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.

Ministerio de Educación Nacional (MEN) (2006). Estándares básicos de competencias. Bogotá: Magisterio.

Moore, K. C., & Thompson, P. W. (2015). Shape thinking and students' graphing activity. In T. Fukawa-Connelly, N. E. Infante, K. Keene, & M. Zandieh (Eds.), *Proceedings of the 18th Meeting of the MAA Special Interest*.

Moritz, J. (2003). Constructing coordinate graphs: Representing corresponding ordered values with variation in two-dimensional space. *Mathematics Education Research Journal*, 15(3), 226-251.

Moschkovich, J., Schoenfeld, A., & Arcavi, A. (1993). Aspects of understanding: On multiple perspectives and representations of linear relations and connections among them. In T. Romberg, E. Fennema, & T. Carpenter (Eds.), *Integrating research on the graphical representation of function* (pp. 69-100). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Moschkovich, J. N. (2004). Appropriating mathematical practices: A case study of learning to use and explore functions through interaction with a tutor. *Educational Studies in Mathematics*, 55, 49–80.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standardsfor school mathematics*. Reston, VA: The Council.

Nie, B., Cai, J., & Moyer, J. C. (2009). How a standards-based mathematics curriculum differs from a traditional curriculum: With a focus on intended treatments of the ideas of variable. ZDM (*International Journal on Mathematics Education*), 41(6), 777–792

Oehrtman, M.C., Carlson, M.P., & Thompson, P.W. (2008). Foundational Reasoning Abilities that Promote Coherence in Student's Function Understanding. In M.P. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and practice in undergraduate mathematics* (pp. 27-42). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Oktaç, A., & Vivier, L. (2016). Conversion, change, transition… In BR Hodgson, A. Kuzniak, J.-B. Lagrange (eds.), (pp. 87-122) *The Didactics of Mathematics: Approaches and Issues. A Hommage to Michèle Artigue.*

Ozel, S., & Ozel, Z. Y. (2013). Symbolic mathematics. *Salem Press Encyclopedia of Science*.

Phillips, L. M., Norris, S. P., & Macnab, J. S. (2012). Visualizations and visualization in mathematics education. En Phillips, L. M. (Ed), *Reading for Evidence and Interpreting Visualizations in Mathematics and Science Education* (pp. 62-95). Rotterdam: Sense publishers.

Piaget, J. (1991). *Introducción a la epistemología genética: El pensamiento matemático*. México: Paidós.

Piaget, J. (1977). *El juicio y el razonamiento en el niño*. Buenos Aires: Guadalupe.

Pólya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Tecnos. Madrid.

Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. In A. Gutiérrez & P. Boero (eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, Present and Future* (pp. 205–235). Rotterdam: Sense Publishers.

Presmeg N., Radford L., Roth WM. & Kadunz G. (2018) Introduction: Signs of Signification. Semiotics in Mathematics Education Research. En Presmeg N., Radford L., Roth WM., Kadunz G. (eds) *Signs of Signification*. ICME-13 Monographs, pp.1-20. Springer, Cham.

Referencias

Quecedo, R. & Castaño, C. (2002). Introducción a la metodología de investigación cualitativa. *Revista de Psicodidáctica*, 14, 5-40.

Real Academia Española. RAE. (2019). En Diccionario de la lengua española (23.a ed.). Madrid: Espasa.

Rivera, F. (2011). Toward a visually-oriented school mathematics curriculum. New York: Springer.

Saldanha, L., & Thompson, P. W. (1998). *Re-thinking co-variation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation*. Paper presented at the Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education - North America, Raleigh, NC.

Sánchez, M. (2002). *Desarrollo de habilidades del pensamiento procesos básicos del pensamiento*. México: Trillas.

Sáinz, M. C. & Argos, J. (1998). *Educación Infantil Contenidos, Procesos y Experiencias*. Madrid. Narcea.

Selden, A. & Selden, J. (1992). Research perspectives on conceptions of function: Summary and overview. En G. Harel, E. Dubinsky (Ed), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* (1-16). USA: Mathematical Association of America.

Schoenfeld, A. (2007). Method. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on the mathematics teaching and learning* (pp. 69-109). USA: Information Age.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. In G. Harel and E. Dubinsky (Eds.), *The Concept of Function, Aspects of Epistemology and Pedagogy*, (Vol. 25, pp. 25-58). USA: Mathematical Association of America.

Skemp, R. (1980). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid. Morata.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 133-163). New York, NY: Lawrence Erlbaum.

Smith, L. (2011). Razonamiento, Razones y Respuestas. En L. M. Rodríguez-Salazar, R. Quintero-Zazueta & A. R. Hernández-Ulloa (Coords.). *Razonamiento Matemático, Epistemología de la Imaginación: (Re)pensando el papel de la Epistemología en la Matemática Educativa* (pp. 193-215). Editorial Gedisa, Barcelona y Cinvestav, México.

Spivak, M. (1978). Calculus. Reverte.

Steketee & Scher, (2016). Connecting Functions in Geometry and Algebra. *The Mathematics Teacher*. 109 (6) 448-455.

Stewart, J. (2001). Cálculo de una variable. Trascendentes Tempranas. México: Thomson Learning.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*. 12 (2), 151-169.

Talmon, V., & Yerushalmy, M. (2004). Understanding dynamic behavior: Parent–child relations in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics*, 57(1), 91-119.

Thompson, Byerley & Hatfield (2013). A Conceptual Approach to Calculus Made Possible by Technology. *Computers in the Schools*, 30:124–147.

Thompson, P. W. (1994). Students, functions, and the undergraduate curriculum. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education, 1 (Issues in Mathematics Education* Vol. 4, pp. 21-44). Providence, RI: American Mathematical Society.

Thompson, P. W. (2011). Quantitative reasoning and mathematical modeling. In L. L. Hatfield, S. Chamberlain & S. Belbase (Eds.), *New perspectives and directions for collaborative research in mathematics education. WISDOMe Mongraphs* (Vol. 1, pp. 33- 57). Laramie, WY: University of Wyoming.

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Thomas, M. (2003). The role of representation in teacher understanding of function. In N. Pateman, B. Dougherty & J. Ziliox (Eds.), *Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PMENA* (Vol. 4, pp. 291-298). Honolulu: University of Hawaii.

Trigueros, M., & Ursini, S. (1999). Does the understanding of variable evolve through schooling? In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the International Group for the Psychology of Education* (Vol. 4, pp. 273–280). Haifa, Israel: PME.

Trigueros, M. & Martinez-Planell, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two-variable functions. *Educational Studies in Mathematics*, 73(1), 3–19.

Trigueros, M., & Jacobs, S. (2008). On developing a rich conception of variable. In M. P. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics education* (Vol. 73, pp. 3–13). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) (2017). Estándares de Matemáticas de la UNAM. México: Universidad Nacional Autónoma de México.

Ursini, S., & Trigueros, M. (2001). A model for the uses of variable in elementary algebra. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 254–261). Lahti, Finland: PME.

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D. y Trigueros, M. (2005). *Enseñanza del Algebra Elemental. Una propuesta alternativa*. México. Trillas.

Vasco, C. (2006). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. En C. Ruiz *et al*. (Eds.), *Memorias del XVI Encuentro de Geometría y sus aplicaciones IV Encuentro de Aritmética* (Bogotá, junio 23-24-25 de 2005, vol. 1, pp. 101-112). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Villa, J. A. (2012). Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (31), pp. 9-25.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed): *Advanced Mathematical Thinking*, 65-81. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Vygotsky, L. S (1979). *Pensamiento y lenguaje*. México: Ediciones quinto sol.

Vygotsky, L. S. (1998). The collected works of L.S. Vygotsky. Child psychology R. W. Reiber (Ed.). New York, NY: Plenum (5).

Waisman, I., Leikin, M., Shaul, S., & Leikin, R. (2014). Brain activity associated with translation between graphical and symbolic representations of functions in generally gifted and excelling in mathematics adolescents. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *12*(3), 669–696.

Walde, G. S. (2017). Difficulties of concept of function: The case of general secondary school students of Ethiopia. *International Journal of Scientific & Engineering Research, 8*(4), 1-10.

Weber, E. (2014). A Hybrid Perspective on Functions. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 19 (9), 520-525.

Weber, E. & Thompson, P.W. (2014). Students' images of two-variable functions and their graphs. *Educational Studies in Mathematics*, 87:1, 67–85.

Weigand, H. G. & Weller, H. (2001). Changes of Working Styles in a Computer Algebra Environment –The Case of Functions. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*. 6: 87–111.

Wussing, Hans (1998). *Lecciones de historia de las matemáticas*. España: Siglo XXI.

Yerushalmy, M. (1997). Designing representations: Reasoning about functions of two variables. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(4), 431–466.

Zandieh, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. En E. Dubinsky, A.H. Schoenfeld y J.J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate mathematics education, IV* (vol. 8, pp. 103-127). Providence, RI: American Mathematical Society.

Zimmermann, W. & Cunningham, S. (1991). What is mathematical visualization? En W. Zimmermann & S. Cunningham, (Eds), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 1-8). USA: Matematical Asociation of America.

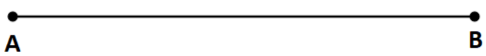
Referencias

APÉNDICE

Actividad 1: Área de cuadrados en un segmento

Trabajo en ambiente de lápiz-y-papel

1.1.1. La siguiente figura muestra el segmento $\overline{AB}$ cuya longitud es 10 unidades. Coloca un punto Q sobre el segmento $\overline{AB}$. Dibuja el cuadrado *AQCD* cuya longitud de sus lados es la del segmento $\overline{AQ}$. Enseguida, dibuja el cuadrado *QBEF* cuya longitud de sus lados es la del segmento $\overline{QB}$. Con base en las características de la figura, determina el área del polígono *ABEFCD.* Explica tu procedimiento.



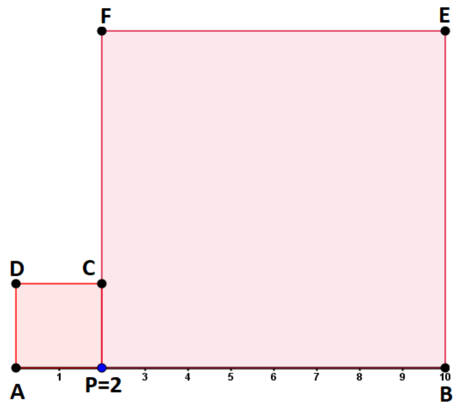
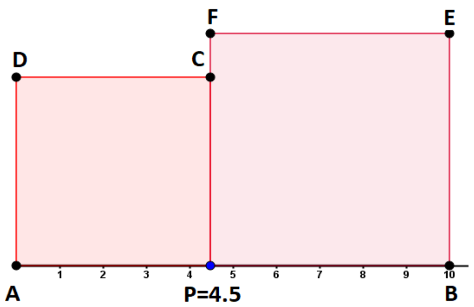
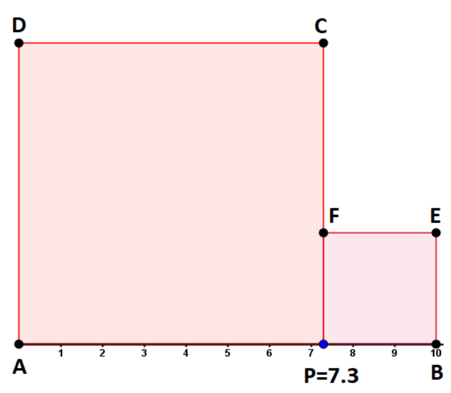
1.1.2. Suponiendo que un punto P se desplaza a lo largo del segmento $\overline{AB}$ y se forman distintos polígonos *ABEFCD* con las características mencionadas en el inciso 1.1.1. ¿El área del polígono *ABEFCD* es constante? Explica tu razonamiento.

1.1.3. ¿De qué depende el valor del área del polígono *ABEFCD*? Justifica tu respuesta

1.1.4. ¿Existe un valor mínimo para el área del polígono *ABEFCD* cuando se desplaza el punto P sobre el segmento $\overline{AB}$? En caso afirmativo ¿en qué posición se encuentra el valor mínimo de área del polígono *ABEFCD*? Explica tu razonamiento.

Apéndice

1.1.5. Para las siguientes figuras, calcula el área del polígono *ABEFCD*. Considera que el punto P se ubica en distintas posiciones sobre el segmento $\overline{AB}$, cuya medida es 10 unidades. Muestra tu procedimiento.

Figuras	*Cálculo usando lápiz y papel*
	
	
	

1.1.6. Explica, ¿qué variables intervienen cuando el punto P se desplaza sobre el segmento $\overline{AB}$ manteniendo la configuración geométrica?

1.1.7. ¿Qué expresión permite determinar el área del polígono *ABEFCD* para cualquier punto P ubicado en el segmento $\overline{AB}$? Justifica tu respuesta.

1.1.8. La expresión simbólica propuesta en el inciso 1.1.6. ¿puede representarse gráficamente? En caso afirmativo, ¿qué tipo de gráfica se obtendrá? Explica tu razonamiento

1.1.9. De acuerdo con los resultados del inciso 1.1.5, elabora una tabla que relacione la longitud el segmento $\overline{AP}$ con el área del polígono *ABEFCD*. Después, dibuja la representación gráfica que relaciona los valores obtenidos de la tabla.

Segmento $\overline{AP}$ [u]	Área $_{ABEFCD}$ (A) [u^2]

Gráfica

1.1.10. ¿Cuál es el intervalo de variación para cada una de las variables identificadas?

1.1.11. En caso de existir un valor mínimo para el área del polígono *ABEFCD*, ¿cuál será? Explica tu razonamiento.

Apéndice

Actividad 1: Área de cuadrados en un segmento

Trabajo en ambiente tecnológico como complemento del ambiente de lápiz-y-papel

1.2.1. Abre un archivo nuevo en el software de Geogebra. Ubica los puntos $A(0,0)$ y $B(10,0)$. Ajusta la visión del triángulo *ABC* con las herramientas *"Desplaza vista gráfica"* Desplaza Vista Gráfica y *"Aproximar"* Aproximar. Con la herramienta "Punto" Punto coloca un punto sobre el segmento $\overline{AB}$ y renómbralo como P (véase Figura 1.1.a). Con ayuda de la herramienta "Polígono regular" Polígono regular selecciona el segmento $\overline{AP}$ y elije cuatro vértices para dibujar el cuadrado *APCD*. De la misma manera, con ayuda de la herramienta "Polígono regular" Polígono regular selecciona el segmento $\overline{PB}$ y elije cuatro vértices para dibujar el cuadrado *PBEF*. Los puntos A, B, E, F, C y D forman el polígono *ABEFCD*, con ayuda de la herramienta *"Polígono"* Polígono dibuja el polígono *ABEFCD* (véase Figura 1.1.b) y renómbralo como *ABEFCD*. Para visualizar los valores del área del polígono *ABEFCD*, desplaza los valores de área del polígono desde la vista algebraica hasta la vista gráfica.

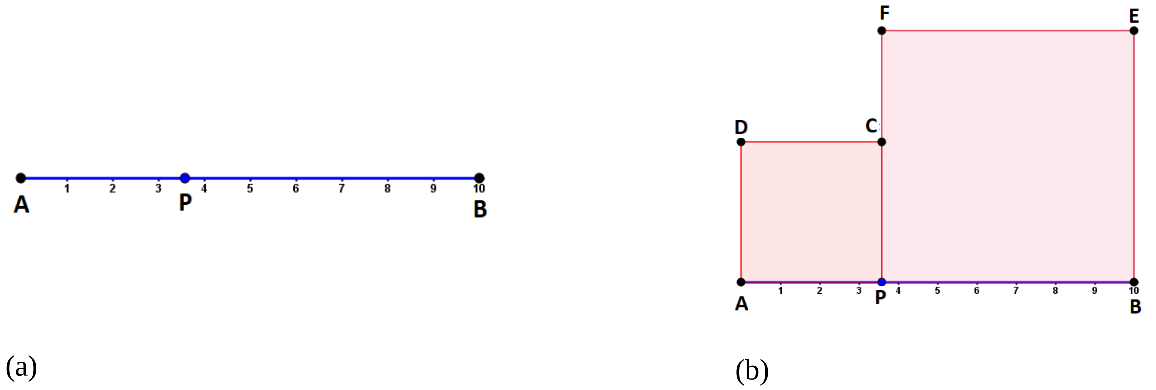
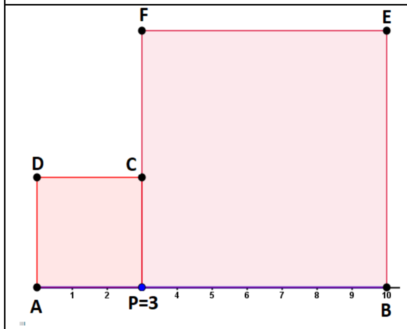
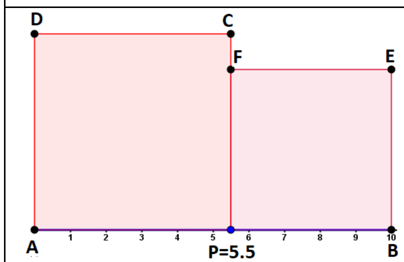
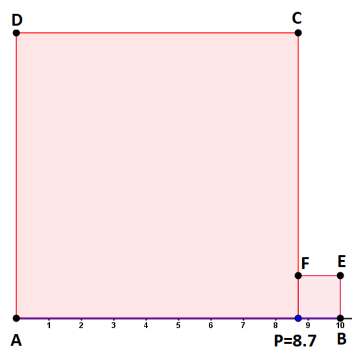


Figura 1.1. Polígono *ABEFCD*: (a) Segmento $\overline{AB}$ con longitud de 10 unidades; (b) Polígono *ABEFCD* formado por el segmento $\overline{AB}$.

1.2.2. Mueve el punto P sobre el segmento $\overline{AB}$: observa los valores involucrados en la "Vista gráfica" y contesta: ¿qué sucede al mover el punto? ¿cómo se comporta el polígono *ABEFCD*? Explica tu razonamiento.

1.2.3. De acuerdo con la configuración del polígono *ABEFCD*, calcula su área para cualquier punto P que se coloque sobre el segmento $\overline{AB}$. Explica tu procedimiento.

1.2.4. Calcula el área de los polígonos *ABEFCD* que se encuentran en las siguientes figuras. Anota los resultados en la primera columna (resultados en ambiente de lápiz y papel). En la segunda columna anota el valor del área del polígono *ABEFCD* dado por el software (resultados dados por Geogebra). Si, para una fila dada, los resultados dados por Geogebra y en ambiente de lápiz y papel difieren, reajústalos usando manipulaciones algebraicas, y escribe tus resultados en la última columna.

Figuras	Resultados propuestos en ambiente de lápiz y papel	Resultados dados por Geogebra	Cálculos algebraicos para reajustarlas (si es necesario)
			
			
			

1.2.5. ¿Qué expresión permite calcular el área del polígono *ABEFCD* para cualquier punto P ubicado en el segmento $\overline{AB}$? Justifica tu respuesta.

1.2.6. ¿De qué manera se puede simplificar la expresión simbólica obtenida en el inciso anterior? Se sugiere nombrar x a la medida del segmento $\overline{AP}$, expresar la medida de otros segmentos en términos de x y representar el área del polígono *ABEFCD* como y. Registra tu procedimiento y comenta tu respuesta.

1.2.7. Explica, ¿qué variables intervienen cuando el punto P se desplaza sobre el segmento $\overline{AB}$ manteniendo la configuración geométrica?

1.2.8. La expresión simbólica propuesta en el inciso 1.2.6. ¿puede representarse gráficamente? En caso afirmativo, ¿qué tipo de gráfica se obtendrá? Explica tu razonamiento

1.2.9. De acuerdo con los resultados del inciso 1.2.4, elabora una tabla que relacione la longitud del segmento $\overline{AP}$ con el área del polígono *ABEFCD*. Después, dibuja la representación gráfica que relaciona los valores obtenidos de la tabla.

Respuesta y explicación de la obtención de los valores de la tabla	
Segmento *AP* ($\overline{AP}$) [u]	Área $_{ABEFCD}$ (A) [u^2]

Gráfica

1.2.10. ¿Cuál es el intervalo de variación para cada una de las variables identificadas?

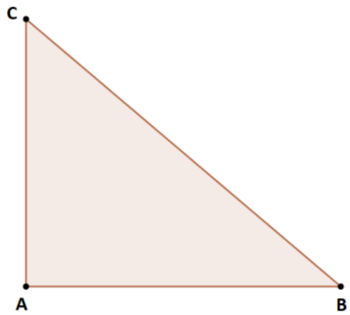
1.2.11. ¿En qué valor del punto P se tiene el valor mínimo para el área del polígono *ABEFCD*? ¿A qué se debe? Justifica tu respuesta.

1.2.12. ¿Cuál será la expresión algebraica para cualquier longitud del segmento $\overline{AB}$? ¿Cómo se vería afectada la gráfica? Justifica tu respuesta.

Actividad 2: Área del Rectángulo Inscrito en un Triángulo

Trabajo en ambiente de lápiz-y-papel

2.1.1. La siguiente figura muestra el triángulo isósceles ABC; sus dos lados iguales son los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ cuya longitud es la unidad. Coloca un punto Q sobre el lado AB y traza la recta perpendicular al segmento $\overline{AB}$ que pasa por Q; dicha recta interseca al lado BC del triángulo en el punto D. En seguida, traza la recta perpendicular al segmento $\overline{AC}$ que pasa por el punto D, la cual interseca al lado AC del triángulo en el punto E. Los puntos A, Q, D y E forman el rectángulo *AQDE*. Calcula el área del rectángulo *AQDE*. Explica tu procedimiento.



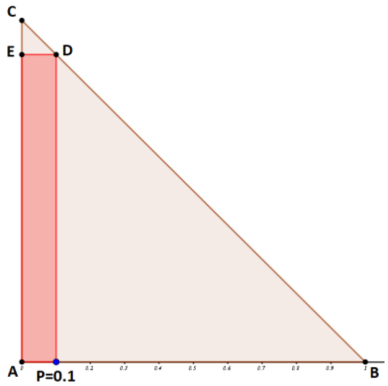
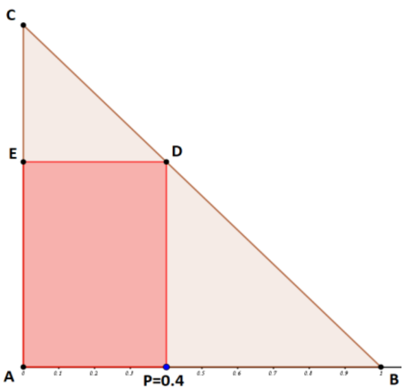
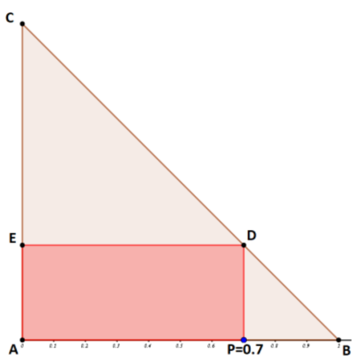
2.1.2. Suponiendo que un punto P se desplaza a lo largo del lado AB del triángulo isósceles y se forman distintos rectángulos *APDE* con las características mencionadas en el inciso 2.1.1, ¿El área de los rectángulos es constante? Explica tu razonamiento.

2.1.3. ¿De qué depende el valor del área del rectángulo *APDE*? Justifica tu respuesta

2.1.4. ¿Existe un valor máximo para el área del rectángulo *APDE* cuando se desplaza el punto P sobre el segmento $\overline{AB}$? En caso afirmativo ¿en qué posición se encuentra el valor máximo de área del rectángulo *APDE*? Explica tu razonamiento.

Apéndice

2.1.5. Para las siguientes figuras, calcula el área del rectángulo *APDE*. Considera que el punto P se ubica en distintas posiciones dentro del segmento $\overline{AB}$. Recuerda que en el triángulo ABC es isósceles y la medida de lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ es la unidad. Muestra tu procedimiento.

Figuras	Calculo usando lápiz-y-papel
	
	
	

2.1.6. Explica, ¿qué variables intervienen cuando se desplaza el punto P sobre el lado AB manteniendo la configuración geométrica?

2.1.7. ¿Qué expresión simbólica permite calcular el área del rectángulo *APDE* para cualquier punto P ubicado en el segmento AB? Justifica tu respuesta.

2.1.8. Se puede representar gráficamente la expresión simbólica propuesta en el inciso 2.1.7? En caso afirmativo, ¿qué tipo de gráfica se obtendrá? Explica tu razonamiento

2.1.9. Elabora una tabla que relacione la longitud del segmento $\overline{AP}$ con el área del rectángulo *APDE.* Después traza la representación gráfica que relaciona los valores obtenidos de la tabla.

2.1.10. ¿Cuál es el intervalo de variación para cada una de las variables identificadas?

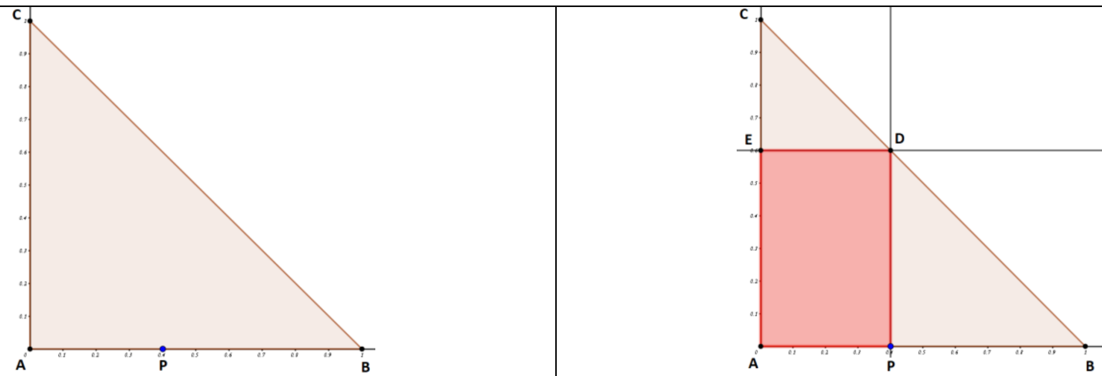
2.1.11. En caso de existir un valor máximo para el área del rectángulo APDE, ¿cuál será? Explica tu razonamiento.

Apéndice

Actividad 2: Área del Rectángulo Inscrito en un Triángulo

Trabajo en ambiente tecnológico como complemento del ambiente de lápiz-y-papel

2.2.1. Abre un archivo nuevo en el software de GeoGebra. Ubica los puntos A(0,0), B(1,0) y C(0,1) y con ayuda de la herramienta *"Polígono"* dibuja el triángulo isósceles *ABC*. Ajusta la visión del triángulo *ABC* con las herramientas *"Desplaza vista gráfica"* y *"Aproximar"*. Con la herramienta punto coloca un punto sobre el segmento $\overline{AB}$ y renómbralo como P (véase Figura 2.1.a). Traza la recta perpendicular al segmento $\overline{AB}$ que pasa por P con la herramienta *"Perpendicular"*; con ayuda de la herramienta *"Intersección"* ubica el punto que interseca la recta anterior con el lado *BC* del triángulo y renómbralo como D. En seguida, con la herramienta *"Perpendicular"*, traza la recta perpendicular al segmento $\overline{AC}$ que pasa por el punto D. Con ayuda de la herramienta *"Intersección"*, ubica el punto que interseca al lado *AC* del triángulo con la recta perpendicular que pasa por D y renómbralo como E. Los puntos A, P, D y E forman el rectángulo *APDE*, con ayuda de la herramienta *"Polígono"* muestra el rectángulo formado y renómbralo como *APDE* (véase 2.1.b). Para visualizar los valores del área del rectángulo *APDE*, desplaza los valores de área del polígono desde la vista algebraica hasta la vista gráfica.



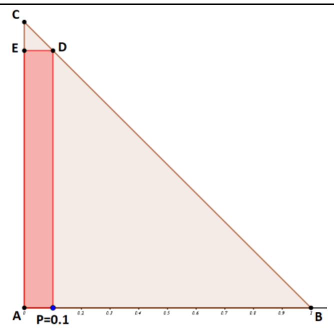
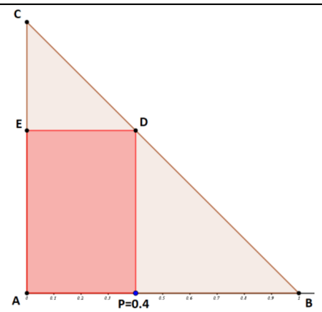
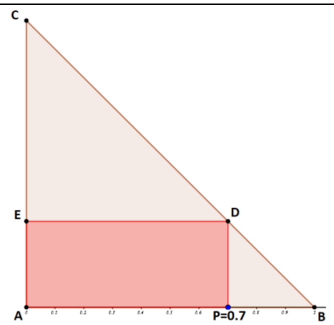
(a) (b)

Figura 2.1. Rectángulo inscrito en un triángulo: (a) Triángulo isósceles ABC; (b) Rectángulo APDE inscrito en un triángulo isósceles.

2.2.2. Mueve el punto P sobre el segmento *AB*: observa los valores involucrados en la "Vista algebraica" y contesta ¿qué sucede al mover el punto? ¿cómo se comporta el área del rectángulo *APDE*? Explica tu razonamiento.

2.2.3. De acuerdo con la configuración del rectángulo *APDE*, calcula su área para cualquier punto P que se coloque sobre el lado del triángulo *AB*. Explica tu procedimiento.

2.2.4. Calcula las áreas de los rectángulos *APDE* que se encuentran en las siguientes figuras. Anota los resultados en la primera columna (resultados en ambiente de lápiz-y-papel). En la segunda columna anota el resultado dado por el software para el área del rectángulo *APDE* (resultados dados por GeoGebra). Si, para una fila dada, los resultados dados por GeoGebra y en ambiente de lápiz-y-papel difieren, reajústalos usando manipulaciones algebraicas, y escribe tus resultados en la última columna.

Figuras	Resultados propuestos en ambiente de lápiz-y-papel	Resultados dados por GeoGebra	Cálculos algebraicos para reajustarlas (si es necesario)
			
			
			

2.2.5. ¿Qué expresión permite calcular el área del rectángulo *APDE* para cualquier punto P ubicado en el segmento $\overline{AB}$? Justifica tu respuesta.

2.2.6. ¿De qué manera se puede simplificar la expresión simbólica obtenida en el inciso anterior? Se sugiere nombrar como "x" a la medida del segmento $\overline{AP}$, expresar la medida de otros segmentos en términos de "x" y representar el área del rectángulo *APDE* como "y". Registra tu procedimiento y comenta tu respuesta.

2.2.7. Explica, ¿qué variables intervienen cuando el punto P se desplaza sobre el segmento $\overline{AB}$ manteniendo la configuración geométrica?

2.2.8. La expresión simbólica propuesta en el inciso 2.2.6. ¿puede representarse gráficamente? En caso afirmativo, ¿qué tipo de gráfica se obtendrá? Explica tu razonamiento

2.2.9. De acuerdo con los resultados del inciso 1.2.4, elabora una tabla que relacione la longitud el segmento $\overline{AP}$ con el área del rectángulo *APDE*. Después, dibuja la representación gráfica que relaciona los valores obtenidos de la tabla.

2.2.10. ¿Cuál es el intervalo de variación para cada una de las variables identificadas?

2.2.11. ¿En qué valor del punto P se tiene el valor máximo para el área del rectángulo *APDE*? ¿A qué se debe? Justifica tu respuesta.

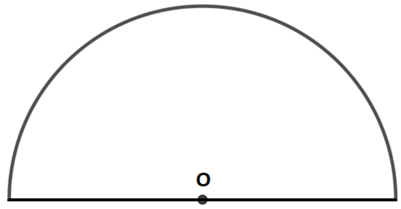
2.2.12. ¿Cuál será la expresión algebraica para cualquier longitud del segmento $\overline{AB}$y y la configuración geométrica original se mantiene $\overline{AB} = \overline{AC}$? ¿Cómo se verá afectada la gráfica? Justifica tu respuesta

Apéndice

Actividad 3: Rectángulo inscrito en una semicircunferencia

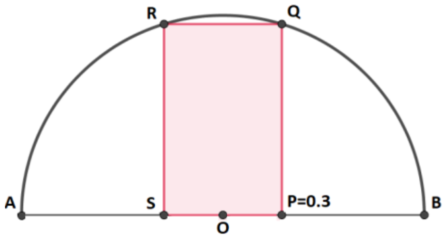
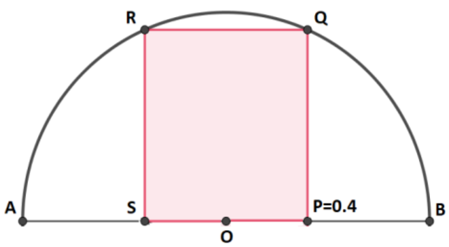
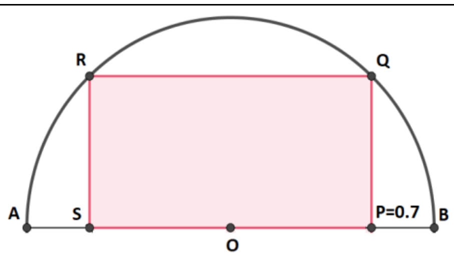
Trabajo en ambiente de lápiz-y-papel

3.1.1. La siguiente figura muestra una semicircunferencia con centro en el punto O y radio igual a la unidad. Coloca los puntos A y B, los cuales forman el diámetro de la circunferencia. Enseguida, coloca un punto P sobre el segmento $\overline{OB}$. Traza la recta perpendicular a $\overline{OB}$ que pasa por P, la cual interseca a la semicircunferencia en el punto Q. Ahora, traza la recta perpendicular al segmento $\overline{PQ}$ que pasa por el punto Q; esta recta interseca a la circunferencia en el punto R. De la misma manera, traza la recta perpendicular al segmento $\overline{QR}$ que pasa por R, la cual interseca al segmento $\overline{AB}$ en el punto S. Los puntos P, Q, R y S forman el rectángulo *PQRS*. Con base en las características de la figura, calcula el área del rectángulo *PQRS*. Explica tu procedimiento.



3.1.2. ¿Existe un valor máximo para el área del rectángulo *PQRS* cuando se desplaza el punto P sobre el segmento $\overline{AB}$? En caso afirmativo, ¿en qué posición se encuentra el punto P para que el rectángulo *PQRS* tenga máximo valor de área? Explica tu procedimiento.

3.1.3. Para las siguientes figuras, calcula el área del rectángulo *PQRS*. Considera que el punto P se ubica en distintas posiciones sobre el segmento $\overline{AB}$ y el punto O es el punto de referencia; recuerda que la circunferencia tiene radio unitario. Justifica tu respuesta.

Figuras	Calculo usando lápiz-y-papel
	
	
	

3.1.4. Explica, ¿qué variables intervienen cuando el punto P se desplaza sobre el segmento $\overline{AB}$ manteniendo la configuración geométrica? Y ¿cuál es el intervalo de variación para cada una de las variables identificadas?

3.1.5. ¿Qué expresión permite calcular el área del rectángulo *PQRS* para cualquier punto P ubicado sobre el segmento $\overline{AB}$? Justifica tu respuesta.

3.1.6. Con base en el inciso anterior, elabora la representación gráfica de la expresión simbólica obtenida.

3.1.7. En caso de existir un valor máximo para el área del rectángulo *PQRS*, ¿cuál es la posición del punto P en la que se obtiene el máximo valor de su área? Explica tu razonamiento.

Actividad 3: Rectángulo inscrito en una semicircunferencia

Trabajo en ambiente tecnológico como complemento del ambiente de lápiz-y-papel

3.2.1. Abre un archivo nuevo en el software de GeoGebra. Ubica los puntos $A(-1,0)$ y $B(1,0)$ y con la herramienta "*Semicircunferencia*", traza la semicircunferencia desde el punto A hasta el punto B. Ubica el centro de la semicircunferencia (0,0) y renómbralo como O. Ajusta la visión de la semicircunferencia con las herramientas *"Desplaza vista gráfica"* y *"Aproximar"*. Con la herramienta *"Segmento"* traza el diámetro $\overline{AB}$ de la semicircunferencia. Enseguida, con la herramienta *"Punto"* coloca un punto sobre el segmento $\overline{OB}$ y renómbralo como P (véase Figura 3.1.a). Con ayuda de la herramienta "Perpendicular" traza la recta que pasa por P y es perpendicular al segmento $\overline{AB}$; esta recta interseca a la semicircunferencia en el punto Q, con ayuda de la herramienta *"Intersección"* ubica dicho punto y renómbralo como Q. Enseguida, traza la recta perpendicular, con ayuda de la herramienta "Perpendicular", al segmento $\overline{PQ}$ que pasa por el punto Q; esta recta interseca a la semicircunferencia en el punto R, con ayuda de la herramienta *"Intersección"*, ubica dicho punto y renómbralo como R. Por último, con ayuda de la herramienta "Perpendicular" traza la recta que pasa por R y es perpendicular al segmento $\overline{RQ}$; esta recta interseca al segmento $\overline{AB}$ en el punto S, con ayuda de la herramienta *"Intersección"* ubica dicho punto y renómbralo como S. Finalmente, dibuja el rectángulo *PQRS*, con ayuda de la herramienta *"Polígono"* y renómbralo como *PQRS*. Desactiva la opción "Objeto visible" para ocultar los trazos auxiliares (véase Figura 3.1.b). Desplaza el valor de área del rectángulo *PQRS* desde la vista algebraica a la vista gráfica, para visualizar el valor de su área.

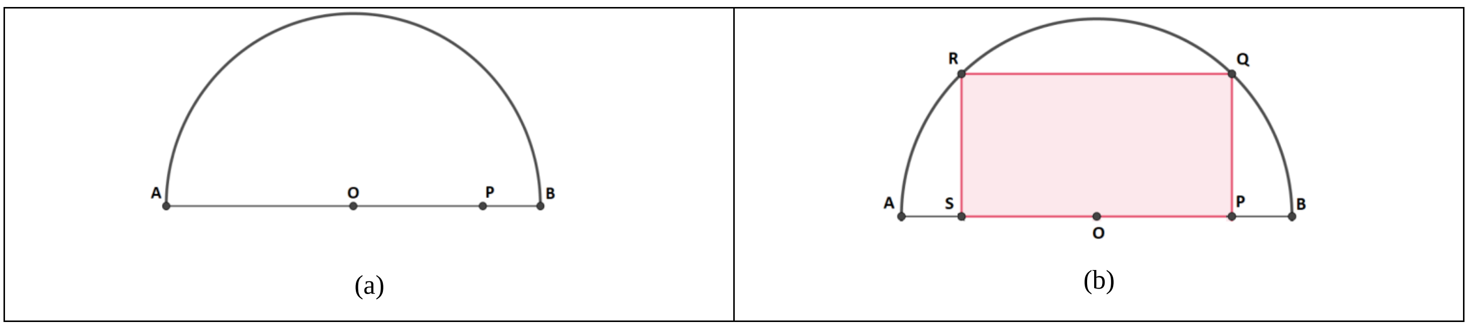
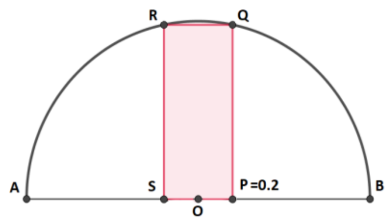
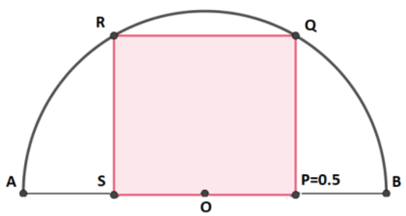
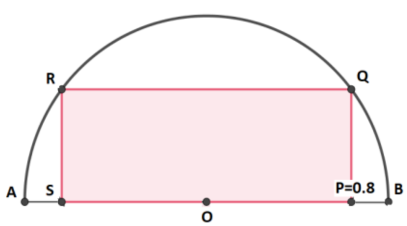


Figura 3.1. Construcción del rectángulo *PQRS*: (a) Ubicación del punto P sobre el segmento *AB*; (b) rectángulo *PQRS* formado a partir del punto P.

3.2.2. De acuerdo con la configuración del rectángulo *PQRS*, calcula su área para cualquier punto P que se coloque sobre el segmento $\overline{AB}$. Explica tu procedimiento.

3.2.3. Calcula el área de los rectángulos *PQRS* que se encuentran inscritos en la semicircunferencia de radio unitario. Considera que el punto P se ubica en distintas posiciones sobre el segmento $\overline{AB}$ y el punto O es el punto de referencia. Anota los resultados en la primera columna (resultados en ambiente de lápiz-y-papel). En la segunda columna anota el valor del área del rectángulo *PQRS* dado por el software (resultados dados por GeoGebra). Si, para una fila dada, los resultados dados por GeoGebra y en ambiente de lápiz-y-papel difieren, reajústalos usando manipulaciones algebraicas, y escribe tus resultados en la última columna.

Figuras	Resultados propuestos en ambiente de lápiz-y-papel	Resultados dados por GeoGebra	Cálculos algebraicos para reajustarlas (si es necesario)
			
			
			

3.2.4. ¿Qué expresión permite calcular el área del rectángulo *PQRS* para cualquier punto P ubicado en el segmento $\overline{AB}$ de la semicircunferencia de radio con centro en O? Justifica tu respuesta.

3.2.5. ¿De qué manera se puede simplificar la expresión simbólica obtenida en el inciso anterior? Se sugiere nombrar como “x” a la medida del segmento $\overline{OP}$, expresar la medida de otros segmentos en términos de “x” y representar el área del rectángulo *PQRS* como “y”. Registra tu procedimiento y comenta tu respuesta.

3.2.6. De acuerdo con los resultados del inciso 4.2.3, elabora una tabla que relacione la longitud el segmento $\overline{OP}$ con el área del cuadrilátero *RSTU*. Después, dibuja la representación gráfica que relaciona los valores obtenidos de la tabla.

3.2.7. Explica, ¿qué variables intervienen cuando el punto P se desplaza sobre el segmento $\overline{AB}$ manteniendo la configuración geométrica? Y ¿cuál es el intervalo de variación para cada una de las variables identificadas?

3.2.8. ¿Cuál será la expresión algebraica para cualquier longitud del radio de la circunferencia? ¿Cómo se verá afectada la gráfica? ¿Cuál es la posición del punto P en la que se obtiene el máximo valor de su área Justifica tu respuesta

3.2.9. En caso de existir un valor máximo para el área del rectángulo *PQRS*, ¿cuál es la posición del punto P en la que se obtiene el máximo valor de su área? Explica tu razonamiento.