CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS

DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemática Educativa

Una propuesta de enseñanza de las matemáticas para alumnos de tercer año de preparatoria desde la *modelización matemática*

Tesis que presenta:

Armando Agustín Chavez Salazar

Para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias

en la especialidad de

Matemática Educativa

Director de la Tesis:

Dr. Armando Solares Rojas

Ciudad de México Julio, 2020

Dedicatoria

A mi madre Reyna

Por todo lo que me ha apoyado, escuchado, inculcado, enseñado y sobre todo por creer en mí. Por estar al pendiente mío cuando más lo he necesitado y por ese constante amor que siempre me ha mostrado, el cual, sin duda me ayudó a levantarme después de mis tropiezos y continuar hacia adelante. Te lo dije alguna vez, sin duda dios me dio a la mejor mamá. Gracias por todo jefa.

A mi padre Miguel

Por el gran apoyo que me ha dado respecto de mis decisiones y metas, y por la gran enseñanza de intentar las cosas aun si no conozco la manera. Por todo el amor de padre que me has demostrado sin ser de la misma sangre. Siempre recordare sus enseñanzas e inspiradora forma de ser.

A mi padre Agustín

Por toda la motivación que me ha dado para continuar siempre hacia delante y el gran apoyo en mis decisiones. A pesar de que no estamos cerca físicamente, yo sé que siempre podré contar con usted. Con su apoyo sé que podre dar el siguiente paso.

A mis familiares

A mi hermana Karla que procuraba escucharme siempre que podía y que continuamente me daba ánimos; a mi abuela María Esther que siempre estuvo para escucharme y animarme para seguir adelante, y a todos aquellos que participaron directa o indirectamente en la elaboración de esta tesis.

A mis amigos y compañeros

Aquellos que estuvieron conmigo a lo largo de mi formación profesional tanto en los buenos como en los malos momentos. Que me enseñaron lo importante que es saber trabajar en equipo y que es importante saber cuándo tomarse un respiro.

Aquellos que, si bien no se encontraron cerca de mí físicamente durante mi formación, me apoyaron continuamente de acuerdo con sus posibilidades y más allá. Gracias por todo.

A mis maestros

Por toda la paciencia, esfuerzo y dedicación que demostraron todos estos años y, sobre todo, por su gran apoyo y motivación para la culminación de mis estudios y en el desarrollo de este trabajo de tesis. Estoy muy orgulloso de que hayan sido mis maestros, muchas gracias por su arduo trabajo.

A mi director de tesis Armando Solares

Usted que me acompañó durante mi travesía en el posgrado, que estuvo conmigo durante todo el proceso del trabajo de tesis, con quien tuve incontables reuniones e intensas discusiones. Me gustó trabajar con usted, pero sin duda no fue fácil: terminé enfrentándome a muchos de mis puntos débiles y tuve que irlos puliendo, hubo discusiones que para ganarlas fue necesario exponer mis argumentos sin ninguna duda en mi discurso (como hubo otras en las que no salí victorioso), constantemente presionado con el tiempo de entrega y con la mentalidad de entregar el mejor trabajo posible en cada ocasión. Dicho esto, si bien el que termináramos trabajando juntos fue por azares del destino, creo que fue lo mejor que pudo haber pasado. Muchas gracias por todo.

Agradecimientos

Agradezco al Consejo nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo financiero que he recibido durante mis estudios de maestría por medio de la beca otorgada con el número de registro 633094.

Esta tesis se desarrolló en el marco del proyecto “Construcción de significados en procesos de modelación matemática. Una aproximación basada en el uso de herramientas de simulación computacional desde una perspectiva semiótica" (Conacyt A1-S-33505).

Asimismo, agradezco al Mtro. Fredy Peña y al Dr. Armando Hernández por todo su trabajo en diversas partes del trabajo de tesis, las discusiones que tuvimos sin duda fueron beneficiosas para este trabajo.

Resumen

En el presente trabajo de tesis se diseñó y aplicó una secuencia didáctica de problemas sobre el uso del lenguaje algebraico en la modelización matemática, apoyada en tecnología digital: GeoGebra. Para el diseño se partió de una secuencia de problemas de Segal y Giuliani (2008) y se realizaron un análisis previo y, luego, un levantamiento piloto, a partir de los cuales se ajustaron y cambiaron los problemas y la secuencia. El levantamiento definitivo se llevó a cabo con un grupo de sexto año de preparatoria. El análisis de resultados se realizó a partir de tres categorías de análisis: contexto, uso de tecnología e intervenciones del docente; y del análisis previo. De esta forma se logró identificar los roles que jugaron: el contexto, la tecnología y las intervenciones del docente para promover el trabajo de modelización de los estudiantes.

Palabras clave: modelización matemática, lenguaje algebraico, uso de tecnología.

Abstract

In this thesis work, a didactic sequence of problems about the use of algebraic language in mathematical modeling was designed and applied, supported by digital technology: GeoGebra. For the design, it was based on a sequence of problems by Segal and Giuliani (2008) and a preliminary analysis was carried out and then a pilot survey, from which the problems and sequence were adjusted and changed. The final survey was carried out with a group of sixth year of high school. The analysis of results was carried out based on three categories of analysis: context, use of technology and teacher interventions, and the previous analysis. In this way it was possible to identify the roles they played: the context, the technology and the interventions of the teacher to promote student modeling work.

Keywords: mathematical modeling, context, algebraic language, use of technology.

Índice

Introducción

La creencia de que las matemáticas son difíciles y poco útiles está ampliamente difundida entre los estudiantes, lo que en muchas ocasiones hace que sea difícil el proceso de enseñanza-aprendizaje. Hay muchas razones del porqué de esta creencia, entre ellas se considera el hecho de que si bien los maestros intentan cada día incorporar nuevos elementos en su enseñanza (como el uso de la tecnología), la investigación en Matemática Educativa no les ha brindado elementos suficientes para cambiar las maneras de enseñar las matemáticas en el salón de clases. Siguen siendo necesarios secuencias de enseñanza, recursos didácticos y formas de evaluación cuya funcionalidad en los salones de clases haya sido probada por parte de desarrolladores curriculares e investigadores.

Pero también siguen haciendo falta cambios en las maneras en cómo se entienden las matemáticas. Para el presente trabajo la concepción de modelización de Sadovsky (2005) resultó atractiva e interesante de aplicar pues considera las matemáticas como: un producto social, cultural e histórico. En la concepción de Sadovsky es necesario llevar el trabajo matemático al aula a través del trabajo con problemas cercanos a la realidad.

Durante el trabajo con esta concepción considero que fue cambiando la perspectiva que tenía acerca de las matemáticas. Como parte de mi formación en matemáticas aplicadas conocí el lado formal de la matemática lo que complemento mi conocimiento previo, de esta forma pase a ver la demostración y argumentación como elementos centrales en la matemática. Dicho esto, al estudiar la concepción de modelización de Sadovsky (2005) considero que esto amplió la perspectiva que tenía de las matemáticas, en primera instancia mediante su visión de las matemáticas (como un producto social, cultural e histórico); asimismo, al describir en que consiste la modelización (recortar una problemática, identificar variables, etc.) y expresar que la matemática suele ser descrita como una actividad de modelización. De esta forma pude visualizar a la matemática como algo mucho más amplio, donde la argumentación y demostración solo son una pequeña parte.

Acerca de la secuencia presentada en este trabajo, en primera instancia fue un desafío su diseño. Si bien se partió del trabajo de Segal y Giuliani (2008) fue necesario ir puliendo la comprensión que se tenía de la concepción de modelización de Sadovsky (2005) con el propósito de que la secuencia final mantuviera su esencia como una herramienta basada en dicha concepción, lo cual se considera que se logró. Respecto de la implementación de la secuencia afronte dificultades tanto en la parte de la enseñanza, debido a la falta de experiencia como docente, y respecto a la toma de datos, como un caso donde la grabadora dejo de grabar al final de una sesión y se perdió un fragmento de la parte visual de la experiencia. El análisis de los resultados, por su parte, fue muy largo y pesado de realizar y de sintetizar, dado que hubo muchas situaciones que me resultó de interés el reportar. En general la labor de escritura me fue difícil en cuanto a poder explicitar correctamente mis ideas, el sintetizar la información e identificar los resultados de mayor relevancia.

Considero que gracias a este trabajo he aprendido a ver la matemática y su enseñanza con otros ojos, por su lado la matemática no se trata solo de su lado formal, sino que hay muchas maneras de hacer matemática. Respecto de su enseñanza, he aprendido el hecho de que existen muchas propuestas/secuencias como producto de la investigación, las cuales siempre pueden ser mejoradas usando una misma teoría como base, en el caso del presente trabajo, la concepción de modelización de Sadovsky (2005).

La modelización y el uso de la tecnología son temas de actual interés en el área de matemática educativa, con esto en mente es que se vio como importante y resultó de interés el planteamiento de un trabajo de investigación centrado en dichos temas. Específicamente, en el presente trabajo de tesis se diseñó y aplicó una secuencia didáctica de problemas de modelización matemática apoyada en tecnología digital, analizándose los resultados de su implementación.

La tesis comprende seis capítulos, además de la introducción: En el capítulo 1 se presentan los trabajos de modelización matemática y uso de tecnología revisados. En el capítulo 2 se aborda la concepción de modelización de Patricia Sadovsky, central para este trabajo. En el capítulo 3 se expone de manera general la metodología utilizada. En el capítulo 4 se aborda el diseño de la secuencia didáctica implementada, así como del análisis previo de los problemas de dicha secuencia. En el capítulo 5 se presenta el análisis de los resultados, el cual se hizo considerando tres categorías: contexto, uso de tecnología e intervenciones del docente. Finalmente, en el capítulo 6 se exponen las conclusiones.

Capítulo 1 Antecedentes: Modelización y tecnología

1.1 Sobre Modelización Matemática

En este capítulo se presenta una revisión de literatura en *modelización matemática* [1] y uso de *tecnología digital*. Debido a que la concepción base de este trabajo es la modelización, se presenta a continuación la definición de Patricia Sadovsky (2005), la cual se aborda a profundidad en el capítulo 2, esto también con el propósito de ayudar con la lectura de este capítulo. De manera sintética, la modelización matemática es un proceso que se encuentra dividido en varias partes:

> En primer lugar, recortar una cierta problemática frente a una realidad generalmente compleja en la que intervienen muchos más elementos de los que uno va a considerar, identificar un conjunto de variables sobre dicha problemática, producir relaciones pertinentes entre las variables tomadas en cuenta y transformar esas relaciones utilizando algún sistema teórico-matemático, con el objetivo de producir conocimientos nuevos sobre la problemática que se estudia (Sadovsky, 2005, p.26-27).

Dicho esto, para realizar la revisión se vuelve necesario identificar los términos utilizados en la literatura para referirse a este proceso. En lo que respecta a modelización, de forma general en la literatura internacional aparecen los términos *modeling, modelling, mathematical modeling y mathematical modelling* para referirse a este proceso, siendo su interpretación la misma. *Modeling* es utilizado principalmente en Estados Unidos, mientras que *modelling* se maneja en diversos países de habla inglesa: ambos términos se usan para referirse a la misma idea; siendo sus principales traducciones *modelación* y *modelización*. En la literatura en español se usan los términos *modelación*, *modelización* y *modelización matemática* para referirse a este proceso. De esta forma se considera que el término *modelización matemática* unifica al resto.

[1] Modelización matemática y modelización se utilizan de forma indistinta en la literatura, tal es el caso que Sadovsky (2005) habla de modelización y Segal y Giuliani (2008) hablan de modelización matemática para referirse a la concepción de Sadovsky.

La revisión de la literatura se hizo considerando los términos mencionados anteriormente y a lo largo del presente trabajo se utilizaron las expresiones *modelización matemática* y *modelización* de manera sinónima.

Con el interés de abarcar de forma amplia la literatura en dicho tema se realizó una revisión de estados del arte. Esta permitió observar cómo las problemáticas y temas de interés en torno a la modelización han ido cambiando con el pasar del tiempo y varían entre regiones. Asimismo, se encontró información sobre diversos ciclos de modelización y las múltiples concepciones existentes al respecto.

Se revisaron dos números especiales de la revista en Educación Matemática de nivel internacional ZDM en los que se sintetizan algunos de los temas y problemáticas de interés más recientes en torno a la modelización matemática. Mismos que fueron importantes para el planteamiento de las preguntas de investigación.

Asimismo, se realizó la revisión de los trabajos de tesis en el departamento de Matemática Educativa del Cinvestav. Misma que permitió identificar los temas y problemáticas que han sido y que son actualmente de interés en la institución en torno a la modelización, así como aquellos que no se han estudiado.

Además, se revisaron publicaciones de Patricia Sadovsky, Silvia Segal y Carmen Sessa, autoras conocidas en el área de Educación Matemática por su trabajo en modelización matemática. Dentro de los trabajos de Segal y Giuliani (2008) se destaca su libro *Modelización matemática en el aula,* en específico el *Capítulo 1: El problema del bebedero*, cuyos problemas y propuestas fueron la base de la propuesta presentada en el presente trabajo de tesis.

Esta primera parte de la revisión permitió definir en parte la problemática a estudiar, así como las preguntas de investigación. Los diversos temas y problemáticas identificadas permitieron plantear un estudio en el que se aborda un tema de interés: el uso de la tecnología en actividades de modelización, con un enfoque en las producciones del estudiante.

Respecto del uso de *tecnología digital* se presenta una serie de trabajos enfocados en los efectos que tiene en el proceso de enseñanza-aprendizaje, estableciéndose de manera concisa la postura que se tomó respecto de esta.

1.1.1 Revisión de estados del arte sobre modelización matemática

La modelización matemática ha estado ganando una gran atención internacional, no solo en la investigación y en la parte práctica, sino también en el desarrollo de programas de estudios alrededor del mundo; en consecuencia, la literatura existente en este tema es basta. Con el propósito de abrir el panorama de este tema, se decidió comenzar con la revisión de estados del arte relativamente recientes.

De forma general la revisión se planteó con el interés de abarcar de forma amplia la literatura en modelización. Esta permitió observar cómo las problemáticas y cuestiones de interés en torno a este tema han ido cambiando con el pasar del tiempo y varían entre regiones alrededor del mundo; la existencia de diversos ciclos de modelización, así como de las múltiples concepciones existentes de este término. Considerando esto es que se presenta la revisión en el orden cronológico de publicación de los artículos.

Blum y Niss (1991) realizan una revisión amplia, siendo los temas centrales la modelización, la resolución de problemas y las aplicaciones. En lo que respecta a la modelización, en primera instancia se define modelo matemático y modelización. El primer término se refiere a la terna (S,M,R) conformado de alguna situación de problema real (real problem situation) S, una colección M de entidades matemáticas y alguna relación R mediante la cual los objetos y las relaciones de S están relacionados con los objetos y las relaciones de M. El segundo término se refiere a todo el proceso para pasar de la situación de problema real original a un modelo matemático.

Mediante la revisión los autores identificaron cinco argumentos que fundamentan la inclusión de la modelización (y otros temas) en la instrucción matemática: formativo, la “competencia crítica”, utilidad, la “imagen de las matemáticas” y la “promoción del aprendizaje matemático”; desarrollando cada uno de estos. De esta forma los autores expresan que, mediante la inclusión de la modelización en la instrucción en clase, es posible lograr lo planteado en dichos argumentos.

Esta primera revisión del estado del arte permitió al tesista observar cómo en dichos años ya se hacía notorio el interés por la modelización matemática, tanto en sentido teórico como práctico. Sobre los diversos argumentos que había a favor de la inclusión de la modelización en la instrucción matemática y sobre como desde años antes a la publicación de este trabajo de Blum y Niss (1991) ya se consideraba el uso de la tecnología para trabajar con modelos; elemento de importancia en el presente trabajo.

Borromeo (2006) se enfoca en la vista de varios ciclos de modelización con respecto a los aspectos de la diferenciación de la situación real (RS), el modelo de situación (SM), respectivamente, la representación mental de la situación (MRS), el modelo real (RM) y modelo matemático (MM) (fases de un proceso de modelización). El autor pasa a mirar la modelización desde una perspectiva psicológica-cognitiva, argumentando que esta se ha descuidado en gran medida en la discusión actual sobre la modelización. Mediante la implementación del proyecto COM^2 en tres grupos de décimo grado, se reconstruyen las fases del proceso de modelización que llevan a cabo los estudiantes, esto desde una perspectiva psicológica-cognitiva. De esta forma el autor expresa que si bien las fases son muy semejantes a las del proceso de modelización de Blum y Leiss (2005), la descripción de cada una de estas, así como la transición de una a otra, es lo que las diferencia (citado en Borromeo, 2006)

En este trabajo se identificó el término *ciclos de modelización* como sinónimo de *procedimientos de modelización*, así como grupos de ciclos de modelización y las fases que los componen. Asimismo, el trabajo de Borromeo (2006) permitió observar que la diversidad de ciclos de modelización es relativamente amplia.

Burkhardt (2006) describe el desarrollo de la modelización matemática como un elemento en los currículos y evaluaciones escolares de matemáticas. Como tal no presenta una definición exacta de la modelización, pero en su lugar ofrece la visión personal de dos matemáticos/modeladores quienes trabajan en educación matemática, siendo el autor uno de estos, acerca de lo que es la modelización y sobre sus objetivos. Todo esto con el propósito de ilustrar las actitudes matemáticas que buscan desarrollar en sus estudiantes.

El autor expresa que el problema de hacer a la modelización una realidad en cada aula está lejos de resolverse. Asimismo, señala que hay muchos desafíos para la introducción a gran escala de la modelización: identificar las técnicas que necesitan los maestros para permitir que sus estudiantes modelen con matemáticas, el diseño de actividades más ricas, lograr que coincidan los cambios educativos con los tecnológicos, entre otros. Desafíos que involucran a los sistemas educativos, los maestros, los estudiantes, la sociedad, entre otros componentes, y todas las relaciones que se pueden establecer entre estos en relación a la educación; y que, por esto, hacer de la modelización una realidad en el currículo no es un desafío que se deba tomar a la ligera.

Burkhardt (2006) aborda la modelización desde diversos ángulos, uno de los aspectos que resaltan de dicho trabajo es la inclusión de la modelización en el currículo y los desafíos que supone. Parte del trabajo que resultó interesante considerando que desde el principio se planteó la idea de la implementación de una secuencia de modelización en un grupo de estudiantes.

Kaiser y Sriraman (2006) realizan una revisión de la literatura con el fin de identificar las perspectivas en modelización dentro de la educación matemática. Esto inspirados en que la discusión internacional sobre modelización demuestra que no existe una comprensión homogénea de la modelización y sus antecedentes epistemológicos dentro del debate internacional sobre este tema. Como producto de su revisión proponen una clasificación de las investigaciones en la que identifican seis perspectivas en modelización matemática: realista, epistemológica, educacional, contextual, socio-crítica y cognitiva, explicándose cada una de estas.

La revisión de este trabajo fue de interés para el tesista en el sentido de que se muestra una clasificación de las diferentes perspectivas en modelización matemática y propicio una visión más clara sobre qué tipo de perspectiva se considera en la concepción de modelización de Sadovsky (2005).

Loiola (2010) realiza una revisión de la literatura con el objetivo de presentar el panorama actual de investigación en modelización matemática en la educación matemática brasileña al abordarla desde tres perspectivas. La primera aborda las raíces históricas de la educación matemática en Brasil, destacándose algunos foros importantes dedicados a la modelización en Brasil. La segunda consiste en una síntesis de algunos trabajos existentes también dedicados a la discusión de investigaciones y publicaciones brasileñas relacionadas con la modelización en educación matemática. La tercera perspectiva consiste en la descripción y el análisis de la investigación, en términos de los objetivos propuestos por los autores, presentados en eventos científicos nacionales recientes, que buscan caracterizar y comprender los intereses actuales que mueven la investigación en este campo

Este trabajo le permitió al tesista tener una visión del panorama de investigación en modelización matemática en la educación matemática brasileña desde años anteriores hasta la fecha de publicación del trabajo de Loiola (2010).

Frejd (2013) realiza una revisión de la literatura enfocado en la evaluación de la modelización. Su revisión es guiada por las preguntas: ¿es posible evaluar todos los aspectos de la modelización en las *National Course Tests*?; si es así, ¿cómo?; si no es posible evaluar la modelización con exámenes escritos de una manera holística, ¿qué otros modos de evaluación están siendo utilizados o sugeridos? Durante la revisión se identifican un total de 76 artículos relacionados con *modelling assessement* (evaluación de modelización) de un total de 706 revisados. Categorizados como empíricos (estudios de caso), filosóficos (basados en argumentaciones), teóricos (marcos de construcción), descripciones generales (revisiones de literatura, introducciones), descripción de la práctica (descripciones del currículo, descripciones de los cursos) y competencias. El autor señala que el estudio sugiere que se necesita una visión elaborada sobre el significado de la calidad de los modelos matemáticos para evaluar la calidad del trabajo de los estudiantes con dichos modelos.

Solares et al. (2018) realizan una revisión de 485 publicaciones internacionales sobre modelación matemática y se centraron en la producción de América Latina. Toman como base el trabajo Kaiser y Sriraman (2006) en la cual se identifican seis perspectivas de modelización matemática: realista, epistemológica, educacional, contextual, socio-crítica y cognitiva. En los resultados expresan que, en términos de la cantidad de publicaciones, la producción de América Latina es relativamente modesta. Sin embargo, la vitalidad de los temas actualmente discutidos (por ejemplo, estudios que enfatizan las influencias sociales y culturales de la educación en modelación) y la innovación de sus perspectivas dan cuenta de la importancia que tiene el trabajo desarrollado en la región. De acuerdo a la revisión, los estudios latinoamericanos también parecen contribuir en el reciente tema de debate sobre las nociones de “autenticidad” y “mundo real”.

Uniendo lo observado en las revisiones de Loiola (2010), Frejd (2013) y Solares et al. (2018) se puede apreciar como los temas de interés en torno a la modelización han ido cambiando con el pasar de los años y varían de una región a otra.

Dentro de la literatura relativamente reciente se ubica el estado del arte de Schukajlow, Kaiser y Stillman (2018) el cual se centra en estudios empíricos en modelización matemática. En específico, los autores analizan el desarrollo de estudios que se centran en los aspectos cognitivos de la promoción del modelado, es decir, la promoción de *modelling competences*. Así mismo se presenta una revisión de la literatura sobre el papel de la investigación empírica en importantes revistas de educación matemática y se analizan las actas de diversas series de conferencias sobre enseñanza y aprendizaje de *mathematical modelling* con este mismo propósito. Dicha revisión señala el predominio de los enfoques de estudio de casos y los estudios de orientación cognitiva en comparación con los estudios que utilizaron métodos de investigación cuantitativos o se centraron en temas relacionados con el afecto.

A manera de cierre, la revisión de estados del arte permitió identificar trabajos recientes en modelización matemática en el mundo; comparar la concepción de Sadovsky (2005), concepción de interés, con las diversas concepciones existentes identificadas, así como identificar similitudes y diferencias entre la primera y las demás. Lo cual permitió a su vez observar aquello que hacía “única” a la concepción de Sadovsky. Asimismo, se pudieron identificar temas de interés a lo largo de los años, como estos han ido cambiando y varían entre regiones.

Con el propósito de identificar trabajos más recientes en este tema se retomó el último artículo revisado. Hecho esto se observó que formaba parte de dos números especiales publicados en la revista de educación matemática *ZDM* titulados *Empirical research on the teaching and learning of mathematical modeling*, los cuales estaban enfocados en modelización matemática y presentaban artículos relativamente recientes. Considerando estos hechos se decidió revisar estos números con mayor profundidad.

1.1.2 Modelización matemática en ZDM: Teoría, Maestro, Alumno y Tecnología.

La revisión prosiguió con la revista de Educación Matemática ZDM, conocida por ser una de las más importantes y antiguas que continúa publicándose en esta disciplina a nivel internacional. Misma que se escogió en parte por esta razón y debido a que posee una de las publicaciones más recientes que sintetiza parte de los intereses actuales entorno a la modelización matemática: dos números titulados *Empirical research on the teaching and learning of mathematical modeling*.

Los artículos en estos números permitieron identificar las problemáticas y temas de interés actual entorno a la modelización matemática, lo que a su vez proporcionó una base para plantear la pregunta de investigación de la presente tesis.

Se observaron diversos enfoques en los artículos revisados. En primera instancia se identificaron trabajos cuyo enfoque es teórico: sobre las diferentes concepciones existentes, trabajos donde se estudia su interacción con otras teorías, estados del arte, revisiones de la literatura, trabajos recopilatorios, entre otros (Schukajlow, Kaiser y Stillman, 2018; Burkhardt, 2018; Frejd y Bergsten, 2018; Cantoral, Moreno Durazo y Caballero Pérez, 2018).

Se identificaron investigaciones enfocadas en el maestro: sobre las limitaciones institucionales que dificultan el desarrollo del modelo matemático como actividad docente normalizada; basadas en los resultados de diversos tipos de cursos sobre modelización para docentes (tanto cursos presenciales como en línea).

Respecto de los trabajos relacionados con cursos, las investigaciones se enfocan en la evaluación del proceso de desarrollo de los mismos, analizar el trabajo de los maestros, el impacto en el desarrollo profesional docente (como afecta a su enseñanza en general), sobre la comprensión y habilidades de diseño de problemas matemáticos realísticos, los esfuerzos de maestro para diseñar y evaluar actividades de modelización; y analizar el uso de la tecnología por parte del docente en las diferentes fases del proceso de modelización

(Barquero, Bosch & Romo, 2018; Brady, 2018; Galleguillos & Borba, 2018; Geiger et al. 2018; Maass & Engeln, 2018; Ng, 2018; Sevinc & Lesh, 2018; Villarreal, Esteley & Smith, 2018).

1.1.2.1 La modelización enfocada en el estudiante

El presente trabajo se concentra en el estudiante, específicamente en sus producciones, trabajo, interacciones, entre otros medios, como fuente principal de información para dar respuesta a la pregunta de investigación. Por lo tanto, la literatura de interés es aquella que coincide con estas características, misma que se presenta a continuación de forma sintetizada.

Almeida (2018) analiza información empírica de dos actividades de modelización cada una desarrollada por dos grupos de estudiantes, uno de primer año y el otro de cuarto año de una licenciatura en matemáticas, esto con el fin de contestar la incógnita ¿cómo usan los estudiantes las matemáticas en actividades de modelización? Como parte de sus resultados el autor expresa que el uso de las matemáticas que realizan los estudiantes está anclado en sus experiencias anteriores, ya sea en sus experiencias con los conceptos y herramientas de las matemáticas, o en sus experiencias con las prácticas de modelización matemática.

Degrande, Van Hoof, Verschaffel y Van Dooren (2018), presentan un estudio cuyo objetivo era investigar qué modelo usan los estudiantes (aditivo o multiplicativo), en *word problems* abiertos a ambas maneras de razonar, esto en estudiantes de quinto y sexto año de primaria. Retomando una tarea de otro artículo, se les pidió a los estudiantes que señalaran cual de dos serpientes había crecido más y que explicaran verbalmente el razonamiento detrás de su respuesta. Los resultados revelaron que el razonamiento aditivo (crecimiento absoluto) fue más utilizado que el razonamiento multiplicativo (crecimiento relativo), además de que pareció más difícil de verbalizar.

English y Watson (2018) exploran el trabajo de modelización de estudiantes de sexto año de primaria. Esencialmente los estudiantes tenían que generar modelos que les permitieran seleccionar un equipo de natación australiano para los entonces próximos juegos Olímpicos del 2016, esto utilizando datos de los tiempos de los nadadores en varios eventos anteriores. Los resultados obtenidos muestran la diversidad de variables consideradas por los estudiantes, destacándose como base para sus modelos, la variación y las tendencias en el rendimiento de los nadadores.

Krawitz y Schukajlow (2018) plantean su estudio con el objetivo de examinar: (1) si los estudiantes tienen valores diferentes y expectativas de autoeficacia con respecto a los problemas de modelado versus los problemas escritos (*word problems)* y los problemas intra-matemáticos, y (2) si el contenido matemático influye en el valor de la tarea y la autoeficacia en relación con diferentes tipos de problemas. Durante el estudio se les preguntó a 90 estudiantes de nivel medio y alto (noveno y décimo grado) cuánto valoraban los problemas de modelado, los problemas escritos y los problemas intra-matemáticos y si estaban seguros de que podrían resolver este tipo de problemas. Respecto a modelización, los resultados muestran que a los estudiantes les parece menos importante el poder resolver problemas de dicho tipo a comparación de poder resolver problemas escritos e intra-matemáticos.

Plath y Leiss (2018) se enfocan en un aspecto central sobre el proceso de modelización, la comprensión de la tarea de modelado como un prerrequisito central. En su estudio investigan los roles que juegan la competencia lingüística de los estudiantes y la redacción de las tareas de modelización, para la comprensión y la resolución exitosa de estas. Se evaluaron 634 estudiantes de escuelas integrales y se midieron sus factores sociodemográficos y su dominio del idioma. Los resultados muestran una fuerte relación entre el dominio del idioma y el logro de modelado matemático. Además, los resultados sugieren que el aumento de la complejidad lingüística de las tareas de modelización matemática tiene como consecuencia una frecuencia de resolución más baja por parte de los estudiantes.

Ärlebäck y Doerr (2018) examinan como una secuencia basada en actividades de modelización apoyó el desarrollo de las interpretaciones de los estudiantes y el razonamiento sobre fenómenos con tasas de cambio promedio negativas en diferentes fenómenos físicos, esto en distintos contextos del movimiento. La secuencia se aplicó sobre 35 estudiantes que se preparaban para estudiar ingeniería. Como se esperaba los estudiantes afrontaron diversas dificultades a la hora de interpretar y razonar tazas de cambio negativas. Los resultados obtenidos de analizar el trabajo de los estudiantes sugieren que las secuencias de actividades de modelización ofrecen un enfoque estructurado para la instrucción de contenido matemático avanzado.

Basándose en una intervención de enseñanza con actividades de modelización que involucran trabajo experimental en grupos de noveno grado, Carreira y Baioa (2018) plantean como objetivo de su estudio el descubrir cómo los estudiantes estiman la credibilidad de una tarea de modelización cuando integra un enfoque experimental práctico. Los resultados mostraron que los estudiantes vieron el evento y la meta de la tarea como creíbles; consideraron el trabajo experimental como algo necesario y que el modelo matemático obtenido era factible.

Hernandez-Martinez y Vos (2018) exploran cómo los estudiantes pueden experimentar la relevancia de las actividades de modelización matemática. En general se diseñaron diversas actividades en torno a la modelización y al final del curso se entrevistó a diez estudiantes con un amplio rango de notas finales en el curso. De acuerdo con los autores los resultados mostraron que de forma general los estudiantes percibieron las actividades de modelización como importantes y que se veían desempeñando prácticas profesionales para las cuales las matemáticas son importantes. En contra parte, el hacer matemáticas también fue juzgado como relevante solo para obtener una calificación, dejar la escuela y entrar a trabajos donde hacer matemáticas no es necesario.

Ikeda (2018) plantea en su estudio la pregunta de investigación: ¿cómo podemos evaluar los aspectos detallados de las percepciones de los estudiantes sobre los roles de las matemáticas en la sociedad? El autor desarrolló una pregunta a manera de herramienta analítica: ¿de qué manera son útiles las matemáticas cuando examinamos problemas del mundo real desde una variedad de perspectivas? Esta pregunta se planteó antes y después de la aplicación de un programa de enseñanza experimental basado en tareas de modelización. El autor expresa que los resultados de la comparación del antes y después revelaron que las percepciones de los estudiantes sobre los roles de las matemáticas en la sociedad cambiaron significativamente.

Stender (2018) basándose en investigaciones previas observó que las intervenciones de los maestros basadas en estrategias heurísticas podrían tener un alto potencial para apoyar a los estudiantes de una manera que mantenga un alto nivel de independencia. Dicho resultado lo llevó a la pregunta: ¿hasta qué punto las estrategias heurísticas conocidas de la teoría de la resolución de problemas aparecen en el proceso de modelado? Reconstruyendo los procesos de resolución de los estudiantes en el problema planteado en la investigación previa se identificaron diversas heurísticas utilizadas por los estudiantes y basándose en estas se crearon intervenciones estratégicas que podrían facilitar el proceso de modelización de los estudiantes.

1.1.2.2 Modelización y tecnología

El uso de la tecnología para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas es un tema que viene siendo estudiado desde los inicios de la Educación Matemática. Dicho esto, los artículos revisados que hacen uso de la tecnología en actividades de modelización enfocadas en el estudiante son relativamente pocos (dos de veinticinco artículos).

Orey y Rosa (2018) presentan en su estudio el uso de un *Virtual Learning Enviroment* (Entorno de Aprendizaje Virtual) diseñado para emprender un proyecto de enseñanza de modelización matemática, esto sobre 104 estudiantes de primer semestre de ocho centros educacionales. Los resultados muestran que la combinación de proyectos de modelización matemática y los recursos tecnológicos disponibles en el *VLE* permitieron a los estudiantes investigar sus temas de una manera interactiva y colaborativa, compartiendo preguntas e intercambiando información con investigadores, tutores y compañeros en los foros de discusión y conferencias web.

Greefrath, Hertleif y Siller (2018) realizan un estudio de control cuantitativo con 709 estudiantes, investigando la competencia de matematización. Comparándose el desarrollo de esta competencia en un grupo de prueba que trabajó con herramientas digitales, en particular con el software de geometría dinámica Geogebra, con un grupo de control que trabajó con papel y lápiz en las mismas tareas durante una intervención de cuatro lecciones en modelación geométrica. Encontrándose una mejora comparable de matematización en ambos grupos, pero sin ninguna diferencia significativa entre estos.

Cierre de 1.1.2

A manera de cierre, los artículos revisados abordan variedad de problemáticas y tienen diversos enfoques, por esta razón es que se optó por categorizarlos. Dado que desde el inicio del trabajo de tesis se planteó el aplicar una secuencia apoyada en tecnología para analizar el trabajo de los estudiantes, es que se dedicaron dos subsecciones a artículos enfocados en el trabajo de los estudiantes y en el uso de tecnología.

De esta forma fue posible identificar problemáticas de interés actual en modelización matemática y en específico aquellas en las que el sujeto de interés es el estudiante y se hace uso de tecnología. Lo cual a su vez permitió ir planteando y puliendo la pregunta de investigación.

El revisar estos números de la revista ZDM permitió ampliar el panorama que se obtuvo de revisar los estados del arte y al mismo tiempo observar problemáticas de interés a escala internacional. Dicho esto, con la intención de considerar el interés nacional acerca de la modelización y continuar indagando en los temas y problemáticas de interés, es que se planteó la siguiente sección.

1.1.3 Tesis del departamento de Matemática Educativa: Cinvestav

Se hizo una revisión de las tesis realizadas en el departamento de Matemática Educativa del Cinvestav con el propósito de identificar los temas y problemáticas de interés en torno a la modelización matemática a través del tiempo. Buscándose continuar ampliando y profundizando la visión otorgada por las secciones anteriores, para usar esto en el planteamiento de la pregunta de investigación.

El criterio de selección de las tesis consistió, de forma inicial, en la revisión del título y resumen de estas, buscándose identificar si su perspectiva/enfoque de investigación era la modelización matemática. Cuando esto no fue suficiente para determinar si un trabajo era de modelización se procedió a revisar la sección de marco teórico para identificar si dicho tema era parte central de la tesis. Considerando el propósito que se establece al inicio de la sección, es que los trabajos se presentan en orden cronológico.

Villanueva (1992) presenta un trabajo de modelación matemática aplicada en economía, con más precisión, una experiencia didáctica en estudiantes de educación superior, poniendo énfasis en el cálculo diferencial, junto con otras áreas de las matemáticas, aplicado a la Administración y Economía. El estudio se llevó a cabo sobre diez estudiantes del área de economía de la Universidad Autónoma Metropolitana (plantel Azcapotzalco), los cuales no tenían experiencia previa con modelación matemática, esto en todo el concepto de su formalidad. Parte de los resultados muestran que el interés de la interrelación de las matemáticas con el área económica-administrativa se incrementa en forma considerable mediante el uso, la simulación y la resolución de modelos matemáticos.

Morales (2003) basa su investigación en el análisis de una memoria posterior a La Teoría Analítica de calor, escrita por Fourier en 1827 titulada *Mémoire sur les Températures du globe Terrestre des Espaces Planétaires*. Esencialmente el autor realiza un análisis de la memoria ya mencionada, matizada con otras fuentes que se consideraron útiles para entender y puntualizar sobre algunos tópicos importantes tratados dentro del mismo documento.

Dentro de los resultados el autor destaca el valor del documento analizado. Asimismo, expresa que fue posible identificar, desde la indagación hecha, algunos elementos importantes que le permitieron a Fourier llegar a las conclusiones de la memoria, siendo quizás la más importante, el entendimiento del problema de las temperaturas terrestres desde su perspectiva como físico teórico, destacando este mismo en su obra, que de no ser de un conocimiento preciso del modelo matemático del flujo del calor en función de la temperatura, el problema del calor no sería posible de abordar.

Arrieta (2003) realiza una investigación donde las herramientas clave son actividades de modelación (viendo estas como prácticas sociales), mostrándose evidencia de como un individuo construye conocimiento al llevar a cabo este tipo de actividades. El autor plantea la implementación de dos diseños de aprendizaje aplicados en el aula. Los diseños referidos se centran, no en los contenidos matemáticos en sí o en las producciones de los participantes, sino en las prácticas sociales ejercidas por los participantes utilizando herramientas, situadas en un contexto social; en este caso, las prácticas sociales de modelación del movimiento de un móvil.

Los participantes en la puesta en escena de las secuencias fueron dos profesores y diecisiete alumnos de un grupo de tercer semestre de la carrera de Ingeniería Bioquímica del Instituto Tecnológico de Acapulco que se organizaron en tres equipos de cuatro estudiantes y un equipo de cinco.

Como parte central de las conclusiones, el autor destaca que los resultados obtenidos, junto con su argumentación, muestran evidencias con respecto a su posición establecida sobre el conocimiento, lo que es aprender y el papel de los actores en el aula. Asimismo, estos resultados evidencian el cómo los individuos construyen conocimiento en el ejercicio de prácticas sociales que involucran la modelación.

León (2006) presenta un trabajo de modelación matemática aplicada en el área de las Ciencias Naturales, esto mediante la hoja de cálculo. Se plantea como propósito del estudio el indagar el uso de la hoja electrónica de cálculo y la modelación matemática como medio para la enseñanza de algunos conceptos relacionados con Ciencias Naturales, esto a través del estudio de casos.

Las actividades se plantean en forma de un taller, haciéndose uso de parejas, el cual se realizó a lo largo de 16 sesiones experimentales, cada una con una duración de hora y media, considerándose solo ocho sesiones para el análisis y profundización de la investigación.

Entre los resultados el autor destaca que los estudiantes fueron capaces de superar las tareas propuestas y de describir los diversos conceptos de las ciencias que estaban involucrados en las actividades (velocidad, temperatura, etc.), es decir, se cumplió en parte el objetivo planteado. Asimismo, se observaron algunas dificultades entorno al anclaje con los modelos, pudiéndose convertir en un obstáculo en la comprensión de los fenómenos planteados.

Suárez (2008) plantea un estudio socioepistemológico en el que se formula una categoría para la matemática escolar, la Modelación-Graficación. La cual pasa a ser la base de las actividades planteadas, donde el área matemática central es el Cálculo.

Una vez que el autor establece la categoría de modelación-graficación este se enfoca en el tema de interés, formulando así una categoría que, de acuerdo a este, manifiesta la resignificación de la variación en situaciones de modelación del movimiento. De esta forma el autor expresa que la socioepistemología de la modelación-graficación se traduce en un diseño de situación para trabajar con los estudiantes y conforma las secuencias llamadas situaciones de modelación del movimiento (SMM), es decir las actividades centrales del estudio. Como resultado, se obtiene evidencia que respalda la hipótesis de que la variación se resignifica a través de la categoría de modelación-graficación.

Balam (2012) realiza una investigación desarrollada desde una visión socioepistemológica, presentando una caracterización referida a problematizar la matemática desde una comunidad de conocimiento de profesores. Estos participaron en un programa que se desarrolló en Cinvestav-IPN, llamado Especialización de Alto Nivel Para la Profesionalización Docente en las Matemáticas de Secundaria.

El autor ubica su trabajo como una investigación cualitativa. Una de las técnicas empleadas es el estudio de casos, de los 320 profesores que ingresaron a la especialización se trabajó con un grupo de 18 profesores, de los cuales únicamente 8 terminaron las tres fases del proyecto (presencial, en línea, reproducibilidad).

Los resultados muestran que los profesores logran problematizar la matemática, a través de discutir los usos de gráficas, las cuales pasaron de ser una simple representación, para convertirse en argumentos y en generadoras de conocimiento matemático.

La investigación de Roldán (2012) trata del desarrollo del uso de las gráficas de la elipse. Dando cuenta de las diversas problemáticas que giran en torno a este tema, el tratamiento de este, entre otros aspectos; todo en torno de la educación media superior; se plantea la elaboración de un diseño de situación con la tramoya de Arquímedes, El Taller de Arquímedes.

El autor expresa que para trabajar la modelación fue necesario un dispositivo (tramoya de Arquímedes) que permitiera a los participantes el modificar sus dimensiones y hacer simulaciones, y en ese proceso construir conocimiento respecto a la relación entre los comportamientos de la elipse, las dimensiones del artefacto y los valores de los parámetros.

Las actividades giraron en torno al uso de diversas tramoyas (de madera, virtual con GeoGebra, física-virtual mediante sensores y Logger Pro) y la variación de sus parámetros para dar cuenta de comportamientos específicos en las curvas.

Asimismo, el autor habla sobre como las gráficas del movimiento de este artefacto se convirtieron en modelos para construir conocimiento sobre la elipse. La mayoría de los participantes descubrieron las relaciones entre las características del artefacto y los elementos de la curva; lograron ajustar las dimensiones del artefacto para que trazara una gráfica con características deseables y también modificaron el movimiento frente a un sensor para obtener un cierto comportamiento de las gráficas generadas por un dispositivo transductor. El descubrimiento, los ajustes y las modificaciones fueron formuladas, por los participantes, en un contexto de justificación funcional según lo usos de las gráficas en la situación específica.

Velasco (2012) presenta una investigación en la que se plantean actividades de modelación que sugieren el uso de ecuaciones lineales. Usando como marco teórico la teoría APOE (descomposición genética); así como el marco de Modelos y Modelación.

Respecto de la metodología, se realizó una descomposición genética preliminar del concepto de ecuación lineal y se elaboraron tres instrumentos basados en dicha descomposición. Un cuestionario diagnostico que se aplicó a 30 estudiantes del IEMS plantel Otilio Montaño, Tlalpan II; un cuestionario de actividades que sugerían el uso de modelos (basado del marco de Modelación y Modelos) y una entrevista. Instrumentos que planteaban diversas situaciones reales.

El autor expresa que los resultados de la aplicación de los 3 instrumentos permitieron refinar la descomposición genética realizada de forma preliminar y esto a su vez contribuyó al diseño de una propuesta didáctica que permite motivar a los estudiantes del IEMS, plantel Otilio Montaño, Tlalpan II a modelar situaciones reales con ecuaciones lineales.

Méndez (2013) en su investigación estudia el funcionamiento de una categoría de modelación, formulada desde la teoría socioepistemológica. El autor expresa que la investigación permitió en primera instancia identificar una postura predominante de la modelación que excluye a los actores de su construcción, en tanto su función en el discurso matemático escolar (dME), en específico en el nivel medio superior. Lo que lleva a plantear su rediseño desde una perspectiva socioepistemológica.

El autor expresa que la categoría se enfoca en generar un marco de referencia que provoque una matemática funcional en un escenario escolar, mediante el desarrollo y uso de gráficas, tablas numéricas y expresiones analíticas. Para dar cuenta del funcionamiento de la categoría (recopilación de evidencias) se hizo uso de diseños de situación, los cuales plantearon una situación de experimentación y se desarrollaron con preguntas y dinámicas sustentadas por los elementos de la categoría. Entre los resultados obtenidos se destaca que la categoría de modelación es la que provoca el desarrollo en red de usos de conocimiento matemático.

Olivera (2016) investigó el diseño de un ambiente virtual para experimentar, construir y colaborar a distancia sobre fenómenos matemáticos, y desarrollar posibles procesos de aprendizaje. Siendo una de las ideas claves el paradigma del construccionismo.

Las preguntas de investigación del estudio se relacionan con investigar, en primera instancia, las posibilidades de construir un laboratorio de experimentación y colaboración virtual, en el que los estudiantes de los niveles medio superior y superior exploren ideas y problemas matemáticos a través de colaboración a distancia.

El autor expresa que en respuesta a la problemática se propuso el crear temáticas matemáticas aptas para analizarse mediante investigaciones computacionales, tales temáticas se conciben de manera que a partir de un problema general se genere discusión entre los miembros de la comunidad virtual y estas permitan el surgir de nuevos problemas.

Se trabajó con una población de 31 estudiantes de educación a distancia (mayores de 30 años) inscritos en quinto semestre de la carrera de Matemáticas en la Universidad a Distancia de México. El proyecto de investigación consistió en cinco exploraciones didácticas:

1. Movimiento rectilíneo.
2. Caída libre.
3. Análisis matemático de la encriptación (codificar mensajes).

4. Crecimiento dinámico de una población.
5. Exploraciones estadísticas.

Estas se realizaron en una plataforma educativa a través de diversas herramientas de colaboración y discusión: mensajero, red social, foros, y repositorio para almacenar diversos tipos de documentos.

Para concluir el autor expresa que considera que se logró crear un ambiente virtual en el que se dio una colaboración virtual en exploraciones matemáticas de diversos tipos, donde la modelación matemática tuvo un papel importante. Se habla sobre como una de las dificultades del estudio fue sin duda el nivel de realismo de las actividades, en general fue complicado encontrar actividades que pudieran ser verdaderamente realistas, es decir que fueran problemas auténticos de la realidad, y que se pudieran discutir en un ambiente virtual.

Pretelín (2017) plantea su trabajo buscando explorar y favorecer la manera en que estudiantes de ingeniería, ponen en práctica y desarrollan sus conocimientos relacionados con la modelación matemática de sistemas para la ingeniería. Esto mediante un conjunto de actividades enfocadas al diseño y programación de videojuegos. Idea que se fundamentó en el paradigma del construccionismo.

El autor establece como objetivo general el crear situaciones, a través de la programación de videojuegos, en las que estudiantes de ingeniería tengan que poner en práctica sus conocimientos físico-matemáticos y de modelación para resolver problemas ingenieriles. Respecto a la metodología, el autor ubica su investigación como un estudio cualitativo llevado a cabo como una Investigación de Diseño (*Design Research*). El proyecto contó de tres fases (piloto, fase 1 y fase 2). La fase piloto fue llevada a cabo con dos estudiantes, planteándoseles doce actividades, el propósito de esta fue establecer las bases para la fase 1.

En respuesta al objetivo general el autor expresa que en las actividades desarrolladas en cada una de las fases los estudiantes tuvieron que resolver problemáticas aplicando las matemáticas desde un enfoque integral y realista. Es decir, fueron problemáticas donde las matemáticas no se practicaron ni se construyeron de forma aislada, sino que se relacionaron y se complementaron con otras disciplinas tales como la física, la informática, el diseño gráfico y la ingeniería.

Cierre de 1.1.3

A manera de cierre, la revisión de las tesis permitió continuar ampliando el conocimiento acerca de los temas y problemáticas de interés en torno a la modelización matemática, en específico aquellos considerados en el Cinvestav y en cierta medida en México.

En este punto y considerando todo el panorama que ofrecen las secciones anteriores, se vuelve necesario regresar a la concepción de Modelización Matemática de Sadovsky (2005), el revisar trabajos de esta autora y de quienes han trabajado con su concepción. Considerando esto es que se plantea la siguiente sección.

1.1.4 Sadovsky, Segal y Sessa: un acercamiento a la modelización matemática

La concepción de modelización de Sadovsky es central en este trabajo, razón por la cual se decidió revisar sus trabajos. Asimismo, se revisaron publicaciones de Silvia Segal y Carmen Sessa, conocidas autoras en el área de Educación Matemática por su trabajo en modelización matemática.

Borsani, Lamela, Luna y Sessa (2014) plantean a un conjunto de estudiantes de tercer año de escuela media el interpretar una tabla de datos en la que reflejan la base, altura y área de una serie de rectángulos inscritos en un triángulo rectángulo, con base y altura de 11cm, y elegir la función que a su parecer refleja la variación de las áreas. A pesar de que el problema se plantea desde las matemáticas y no de la realidad, este es un buen ejemplo de un trabajo que implica modelización intramatemática[2], en este caso la función que han de elegir los estudiantes juega el papel de modelo matemático.

Borsani et al. (2013) exploran este mismo problema mediante el uso de geometría dinámica con Geogebra, específicamente estudian a la familia de rectángulos que se pueden crear dentro del triángulo rectángulo, es decir, desde una perspectiva matemática, se habla de un trabajo matemático más general. En este estudio Geogebra se utiliza para crear un modelo dinámico, el cual en perspectiva permite una exploración amplia, la identificación de variables acerca de la problemática, el establecimiento de relaciones entre variables y da cabida a la producción de nuevos conocimientos, lo que encaja con la concepción de modelización de Sadovsky (2005).

En estos trabajos si bien no se hace alusión al termino de modelización se puede observar claramente una conexión, mientras que en otros se trabaja con modelos por excelencia como, sistemas de ecuaciones lineales y ecuaciones lineales con dos variables, (Sessa & Cambriglia, 2007; Panizza, Sadovsky & Sessa, 1999).

[2] Chevallard (1989) usa el término *modelización intramatemática* para pensar la producción de conocimientos de un sistema matemático a través de otro sistema matemático, concepto considerado en Sadovsky (2005).

En lo que respecta al tema del uso de tecnología como parte del proceso de enseñanza-aprendizaje, este es de interés actual y se ha explorado en diversas ramas de las matemáticas. Sessa (2018) aborda la preocupación de encontrar formas significativas e implementables de introducir herramientas tecnológicas en aulas regulares para enseñar y explorar relaciones funcionales, específicamente se habla de tres productos realizados con su grupo de trabajo *Monday Group* donde en dos de estos se hace alusión del uso de Geogebra, trabajando el tema ya mencionado.

En los artículos revisados se observó cómo las autoras no incluyen explícitamente en su marco teórico la modelización matemática, sin embargo, las actividades y dinámicas planteadas pueden ser vistas como trabajo de modelización, en específico intramatemática, dado que se usa un sistema matemático para reinterpretar los problemas y así producir conocimiento acerca de estos. Pensando en esto, se considera que la revisión de estos trabajos permitió fortalecer y aplicar la concepción de Sadovsky.

1.1.4.1 Modelización matemática en el aula: Segal y Giuliani (2008)

Dentro de los trabajos de Segal y Giuliani (2008) se destaca su libro *Modelización matemática en el aula,* en específico el *Capítulo 1: El problema del bebedero*, cuyos problemas y propuestas fueron la base de la propuesta presentada en el presente trabajo de tesis.

La autora se basa en la concepción de modelización de Patricia Sadovsky y toma su misma posición respecto a la actividad matemática como el "asunto" del salón de clases. Expresa cómo la actividad de modelización reúne condiciones para realizar en el aula un trabajo semejante a la actividad científica, centrado en la producción matemática de los estudiantes y donde se rehacen los conocimientos matemáticos a partir de las propuestas del maestro.

Al mismo tiempo, al requerir que los alumnos tomen decisiones sobre la pertinencia de los recursos que ponen en juego y que se hagan responsables de sus resultados, validándolos y confrontándolos con sus pares, el trabajo de reflexión sobre los problemas le imprime a la clase de matemática un valor formativo que va más allá de la misma.

Los problemas que se presentan a lo largo del libro conllevan procesos de modelización de complejidad diversa, y los conceptos matemáticos que requieren son básicamente los señalados en los programas usuales para la escuela media. La complejidad reside fundamentalmente en la exigencia de seleccionar y usar distintas herramientas y conocimientos en forma coordinada y simultánea.

El problema presentado en el primer capítulo es el "problema del bebedero", el análisis realizado está atravesado por distintas cuestiones didácticas, tales como: los diferentes procedimientos que el problema admite y los conocimientos que éstos involucran, los posibles errores de los alumnos y las intervenciones docentes que, desde el punto de vista de los involucrados, ayudan a sostener el trabajo de los estudiantes. Así mismo se realiza el estudio de la familia de problemas que resulta de la parametrización de los datos, usando como base el problema original.

Con la intención de profundizar la mirada funcional sobre el problema, la autora plantea un trabajo de interacción entre diferentes representaciones, poniendo énfasis en lo cualitativo por sobre lo numérico.

Establecido lo anterior se proponen un par de posibles secuencias para su implementación en clase. En la primera se presentan una serie de problemas, *Problema del caminito y Problema del triángulo*, que pueden servir como previo al *Problema del bebedero*, explicándose sus contenidos. En la segunda se presenta una propuesta sistemática que busca dirigir el trabajo del estudiante en una dirección exacta, dejando poco lugar para la exploración.

Finalmente se muestran dos variantes del problema: una que trabaja con una función definida por partes, y la otra que invita a reflexionar sobre los usos y las limitaciones de un modelo.

El problema principal de la propuesta que se presenta en el presente trabajo de tesis se basa en "el problema del bebedero". Asimismo, se consideran los problemas que se plantean como previos en la primera de las propuestas. La segunda propuesta proporcionó una visión sistemática, la cual, de cierta forma asegura que el estudiante llegara a los resultados deseados. Dicho esto, ambas propuestas aportaron en la construcción de secuencia aplicada en este trabajo.

Conclusión de la sección 1.1:

Esta primera sección de la revisión permitió definir en parte la problemática a estudiar, así como las preguntas de investigación. Los diversos temas y problemáticas identificados permitieron plantear un estudio en el que se aborda un tema de interés: el uso de la tecnología en actividades de modelización, esto con enfoque en las producciones del estudiante.

En los diversos apartados se identifican trabajos de modelización que se apoyan en tecnología o que se centran en las producciones de los estudiantes, pero la intersección entre estos dos grupos parece contener una cantidad relativamente inferior de elementos, esto considerando la totalidad de artículos revisados para esta sección, lo que hace que en un principio aparezca el interés de plantear un trabajo de modelización apoyado en tecnología.

1.2 El uso de tecnología digital en la enseñanza-aprendizaje: resolución de problemas

En el presente trabajo de tesis un componente es el uso de la tecnología digital en el proceso de enseñanza-aprendizaje, por lo que en esta sección se habla de forma resumida acerca de su importancia, el tipo de consecuencias que tiene su uso y la postura que se toma acerca de este componente. Factores que influenciaron el diseño de la secuencia de actividades y de las herramientas tecnológicas.

En los últimos años el desarrollo de la tecnología ha permitido ampliamente la innovación en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Específicamente en la resolución de problemas han surgido diversas herramientas que han demostrado tener potencial como apoyo en la enseñanza del docente y en el aprendizaje del alumno: GeoGebra, Cabri Geometry, entre otras. Tal es la utilidad de las herramientas tecnológicas que en las propuestas recientes del currículum matemático de nivel preuniversitario se reconoce la importancia de que los estudiantes hagan uso de múltiples herramientas computacionales en el estudio de las matemáticas (NCTM, 2000 citado en Santos-Trigo, 2014).

Considerando esto Santos-Trigo (2006) expresa que ante la variedad de herramientas que se tiene a disposición, es necesario identificar no solo las ventajas que le pueden ofrecer al estudiante durante la comprensión de ideas matemáticas y la resolución de problemas, sino también caracterizar las representaciones, estrategias y formas de razonamiento que exhiban los estudiantes como resultado de utilizar dichas herramientas en sus experiencias de aprendizaje.

De acuerdo a Santos-Trigo (2002) un aspecto destacable en el uso de la tecnología, y con el que se está de acuerdo, es que esta permite establecer representaciones exactas de configuraciones geométricas que pueden ayudar a los estudiantes en la visualización de relaciones matemáticas. Así mismo los estudiantes tienen la oportunidad de mover parte de estas configuraciones y observar cambios o invariantes. En particular, el identificar invariantes en una representación resulta fundamental en el desarrollo de conjeturas y en el proceso de argumentación y comunicación de dichas conjeturas por parte de los estudiantes (Santos-Trigo, 2014, p.153).

Considerando lo anterior, para este trabajo se mantiene la postura de que el uso de la tecnología digital, en particular el software dinámico GeoGebra, permite el observar y establecer, de manera más sencilla, relaciones entre los diversos elementos de un problema, esto a comparación de trabajar únicamente con lápiz y papel. Esta postura se recalca en la fase de diseño de la secuencia y de las herramientas tecnológicas.

En esta tesis la modelización matemática es el concepto central que guía el diseño de la secuencia de enseñanza, y la tecnología se usa como una herramienta para facilitar y enriquecer el proceso de modelización por parte de los estudiantes, es decir, como recurso para el aprendizaje.

A continuación, se presenta el cierre del capítulo. A lo largo de este se habló sobre cómo fue que lo presentado en las diversas subsecciones ayudó a que la pregunta de investigación fuera tomando forma, por lo que esta se presenta en dicho cierre.

1.3 Pregunta de investigación y objetivos

1.3.1 Pregunta de investigación:

¿Qué papel juegan el contexto de los problemas, el uso de la tecnología y las intervenciones del docente para promover el trabajo de modelización matemática de los estudiantes?

1.3.2 Objetivos:

- Diseñar una secuencia de actividades de modelización matemática apoyada de tecnología considerando los roles del contexto, el uso de la tecnología y las intervenciones del docente.
- Aplicar dicha secuencia y analizar los resultados de la aplicación considerando tres categorías de análisis: contexto, tecnología e intervención docente.

A continuación, se presenta el marco teórico en el cual se expone la concepción de modelización de Patricia Sadovsky (2005) a un nivel mayor de profundidad.

Capítulo 2 Marco Teórico

En este capítulo se presentan diversos aspectos considerados en la concepción de modelización de Sadovsky (2005) que fueron considerados en el diseño de la secuencia de problemas producto de este trabajo de tesis. En primera instancia se establecen las bases de la concepción de modelización de Sadovsky, hablándose sobre su visión de las matemáticas y la génesis escolar del trabajo matemático, hecho esto se establece la definición de modelización de Sadovsky, central en este trabajo. Siendo “modelo” una palabra clave es que se plantea una definición por extensión de dicho término, dado que la autora no presenta ninguna definición de manera explícita. Asimismo, se destacan elementos importantes en la modelización: sobre el papel de las representaciones y técnicas, las normas y creencias de los estudiantes, sobre la posición de estos ante la actividad matemática, el espacio social en clase, entre otros. Finalmente se habla sobre el contexto, un elemento considerado de manera amplia en el trabajo de Sadovsky (2005).

Modelización matemática: Sadovsky (2005)

Una visión de la matemática

En primera instancia, para definir modelización matemática la autora establece su posición respecto de las matemáticas. Sadovsky (2005) considera una perspectiva de acuerdo a la cual la matemática es un producto cultural y social. “Cultural porque sus producciones están impregnadas en cada momento por las concepciones de la sociedad en la que emergen y condicionan aquello que la comunidad de matemáticos concibe en cada momento como posible y relevante” (p.22). Es un producto social “porque es resultado de la interacción entre personas que se reconocen como pertenecientes a una misma comunidad” (p.23). Esta perspectiva de las matemáticas es la que se considera para el presente trabajo de investigación.

La génesis escolar del trabajo matemático

En la modelización, de acuerdo con Sadovsky (2005) “*es la actividad matemática en tanto actividad de producción* la que nos interesa “producir”-que se produzca- en la escena del aula" (p.23). Se interpreta esto como uno de los objetivos de la modelización, y es con esta visión sobre la misma que se diseñó y aplicó la secuencia de actividades de la presente tesis.

Sin embargo, pensar que el quehacer de la clase es la actividad matemática (incluyendo los resultados de dicha actividad), claramente no es una postura unánimemente compartida por las personas que forman parte de la comunidad en educación matemática: hay quienes se centran en comunicar resultados a manera de discurso acabado, hay quienes toman solo una parte del conjunto de la actividad matemática (esto para la enseñanza), y conciben la enseñanza como la comunicación de técnicas aisladas (Sadovsky, 2005).

En general, quienes toman estas posturas no necesitan pensar en una *génesis escolar* que convoque a los estudiantes a una *reconstrucción* de ideas. Este término es importante para comprender la concepción de modelización matemática, por lo que resulta relevante exponerlo. Por *génesis escolar* la autora se refiere a un proceso de producción en la clase en el que:

> En primer lugar, los alumnos deberán elaborar conocimientos que −seguramente con rasgos diferentes− ya existen en la cultura. Las herramientas conceptuales de las que dispondrán para hacerlo serán diferentes de las que fueron utilizadas cuando esos conocimientos "ingresaron" en la comunidad científica de la "mano" de matemáticos profesionales. En otros términos, un matemático productor "sabe" muy distinto que un alumno de la escuela concebido como "matemático", lo cual obliga a pensar que elementos tendría un alumno para reconstruir una idea que fue elaborada con otras herramientas y desde otro marco conceptual. Por otro lado, muchos de los "objetos" que se tratan en la clase de matemática de la escuela actual, hace varios siglos que "abandonaron" su refugio original en la comunidad matemática y circulan por la sociedad "común", lo cual ha modificado una y otra vez sus sentidos. (Sadovsky, 2005, p.24)

Dicho de manera sintética, la autora expresa que hay que considerar las herramientas que los alumnos tendrán a la mano para reconstruir una idea, la cual ya fue "elaborada" hace tiempo por los matemáticos, esto con otras herramientas y desde otro marco conceptual. Idea cuyos sentidos han ido cambiando con el pasar del tiempo.

Asimismo, Sadovsky afirma:

> En segundo lugar, la escuela impone un modo de trabajo según el cual los saberes sólo pueden durar un cierto tiempo en la vida de la clase, ya que luego hay que pasar a ocuparse de otros saberes, esto implica un condicionante fuerte a la hora de pensar en procesos de reconstrucción del conocimiento en la escuela pues los tiempos de aprendizaje no se rigen por la lógica de los "trimestres" o "bimestres". Digamos finalmente que el sistema a través del cual se acreditan los aprendizajes no siempre "calza bien" con los recorridos que es necesario transitar para involucrarse verdaderamente en un proceso de producción. (Sadovsky, 2005, p.25)

Es decir, este proceso tiene en cuenta las condiciones de la institución escolar, que son fundamentalmente diferentes de las que rigen la producción de saberes en la ciencia.

Esto da a ver que, para llevar la actividad matemática al salón de clases, como una actividad de producción, es necesario considerar qué herramientas tiene disponibles el alumno, así como las diversas condiciones escolares que lo rodean, dado que estas son diferentes a las de un matemático/científico. Conectándose todo esto con la noción de modelización que establece la autora. Bajo este contexto es que se sitúa la definición de modelización matemática de Sadovsky.

Modelización Matemática

La *modelización* se refiere a un proceso que integra conocimientos de diversa naturaleza y que abarca el quehacer matemático, el cual se encuentra dividido en varias partes:

> En primer lugar, recortar una cierta problemática frente a una realidad generalmente compleja en la que intervienen muchos más elementos de los que uno va a considerar, identificar un conjunto de variables sobre dicha problemática, producir relaciones pertinentes entre las variables tomadas en cuenta y transformar esas relaciones utilizando algún sistema teórico-matemático, con el objetivo de producir conocimientos nuevos sobre la problemática que se estudia. (Sadovsky, 2005, p.26-27)

De acuerdo a Sadovsky (2005) la noción de modelización tradicionalmente se ha reservado para el estudio de sistemas no matemáticos, dicho esto, la autora cita a Chevallard (1989) quien reivindica esta noción para pensar la producción de conocimientos de un sistema matemático a través de otro sistema matemático, nombrándola *modelización intramatemática*.

La noción de modelización da la posibilidad de pensar el trabajo matemático de manera integrada, lo que pone en duda las miradas que hacen énfasis sobre algún aspecto particular priorizándolo sobre otros (los problemas son lo importante, las técnicas son lo importante, las representaciones son lo importante, entre otras). "Efectivamente, la matemática no funciona separándola en partes (problemas, técnicas, representaciones, demostraciones) sino que todas estas convergen de diferentes maneras en la tarea de modelización" (Sadovsky, 2005, p.31).

Asimismo, otro concepto importante es el de modelo, que, si bien Sadovsky no la menciona directamente en su noción de modelización, es un término utilizado al hablar de este proceso. Considerando esto es que se presenta una definición por extensión mostrando diversos extractos de la obra de Sadovsky en los que se utiliza "modelo".

Modelo

Un primer uso de este término es para hablar de la modelización intramatemática y sobre los procesos involucrados en la construcción y utilización de un modelo matemático. Se presenta el problema "un número natural excede en 22 a un múltiplo de 5. ¿Cuál es el resto de dividirlo por 3?" señalando la autora que este "es un problema numérico que admite un modelo algebraico: los números aludidos pueden presentarse con la formula $n = 5k + 22$, con k natural" (Sadovsky, 2005, p.27). Esto es, se refiere a la expresión de n como un modelo que representa el problema.

Otro ejemplo aparece cuando se habla sobre que puede ser considerado modelización, específicamente la autora expresa que:

> Se puede interpretar que el aplicar una operación aritmética para anticipar un resultado en una situación −por ejemplo, establecer cuantos objetos deben darse a

cada una de las b personas que participan de un reparto equitativo de a objetos− es aplicar el *modelo división entera* a dicha situación (Sadovsky, 2005, p.31)

Un último ejemplo aparece cuando la autora habla del papel del contexto, específicamente se trata sobre el uso de la balanza como soporte cuando se introduce el trabajo con ecuaciones.

> Con relación al uso de la balanza para "representar" las ecuaciones de primer grado con una variable, digamos en primer lugar que se trata de un modelo que restringe las ecuaciones que se pueden concebir. Efectivamente, el modelo de la balanza puede "alojar" por ejemplo la ecuación $3x + 10 = 100$ pero no puede darle cabida a la ecuación $3x + 100 = 10$, ya que esta última tiene solución negativa y el significado de la incógnita como "pesa" pierde sentido (Sadovsky, 2005, p.108).

Es considerando este manejo del término "modelo" que se utiliza este a lo largo del presente trabajo de tesis.

Ventajas didácticas

Ahora, ¿qué ventaja tiene el plantear actividades desde la modelización?, de acuerdo con la autora, además de contribuir a tener una visión más integrada de la actividad matemática, el concepto de modelización destaca el valor educativo que tiene la enseñanza de esta disciplina, dado que ofrece la posibilidad de *actuar sobre una porción de la realidad a través de un aparato teórico*. El expresar una realidad usando una teoría, ubica a quien estudia en una perspectiva de mayor generalidad, lo cual le permite apreciar el valor y la potencia del conocimiento.

Representaciones y técnicas

Dentro de la modelización se situa el papel de las tecnicas y las formas de representación (semiotica), dos elementos que se consideran en el análisis previo de los problemas de la secuencia, de esta forma se incorporan en la misma. Sadovsky (2005) expresa que por una parte las tecnicas son un conocimiento que pueden tener o no los estudiantes que se enfrenten a un trabajo de modelización. El proceso de exploración inicial del problema, previo a la elaboración del modelo, puede dar sentido a la tecnica y lugar a su emergencia, en el caso de que aun los estudiantes no dispongan de ella. El disponer de una tecnica puede permitir un tratamiento más “seguro” del problema mientras que ofrece explicaciones que la exploración no muestra, por lo que el abordar un problema con una tecnica no es lo mismo que hacerlo sin tenerla.

De esta forma el trabajo con representaciones cobra sentido cuando se aprecia su potencia para comprender ideas y producir conocimiento, y su riqueza disminuye cuando la actividad de representación se concibe en sí misma sin estar ligada en el marco de una problemática.

La posición del estudiante frente a la actividad matemática

Ante una actividad de modelización es necesario analizar la posición desde la que el estudiante enfoca dicha actividad, por lo mismo es que este componente es considerado como parte del análisis previo de la propuesta. Respecto de esto, expresa Sadovsky (2005), que no es lo mismo que un estudiante enfrente un problema habiendo identificado que pertenece a cierto tipo/categoría de problemas, que hacerlo viéndolo como un caso único y aislado que tiene un fin en sí mismo. Dicho esto, cuando un estudiante decide enfrentar un problema, no solo interviene su decisión y voluntad. Si bien el proyecto personal de un estudiante está ligado a sus decisiones, se va conformando también a través del juego de interacciones que se promueven en la clase, de las intenciones del docente, de los intercambios que se propician y de las actividades que se priorizan.

Expresado de otra forma, hay diversos componentes que influencian el cómo un estudiante aborda un problema, algunos que dependen enteramente de él y otros que dependen del docente en cierta medida. En este trabajo se considera el trabajo docente en menor medida, dado que la experiencia del tesista no es lo suficientemente amplia, en su lugar, en el análisis previo se tienen en cuenta posibles procedimientos de resolución, en donde se considera que interviene la componente de la posición del estudiante.

Normas y creencias regulando el trabajo matemático

Las normas y creencias de los estudiantes rigen en cierta medida sus procesos de resolución de problemas, por lo cual resulta importante el considerarlas como parte del análisis previo. En relación a esto expresa Sadovsky (2005) que durante la resolución de un problema matemático aquellos conocimientos que se considera que forman parte del campo teórico en el que se inserta el problema, en general implícitos, los cuales regulan el trabajo matemático como si de alguna manera dictaran lo que está permitido hacer y lo que no, lo que conviene hacer y lo que no, así como la manera de interpretar los resultados, estos conocimientos constituyen el *sistema de normas matemáticas* que un individuo a elaborado con la práctica.

La autora expresa que algunas de estas normas suelen ser conscientes, pero muchas de ellas no lo son e irrumpen de pronto a propósito de una cuestión que se está resolviendo, condicionando las estrategias que se utilizan, llevando a errores "inexplicables" para el estudiante; estas son las *creencias* de este.

Estas creencias son razonamientos y conclusiones que se forman como parte de la experiencia de tratar diversos problemas. Por ejemplo, si a un estudiante que solo sabe sumar números naturales, que fue recientemente introducido en el tema de fracciones, se le solicita que realice la suma $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}$, puede *creer* que las fracciones se suman de igual forma que los naturales, sumando numeradores con numeradores y denominadores con denominadores.

De esta forma Sadovsky (2005) habla sobre como en el trabajo matemático se usan leyes que se pueden justificar, se aplican normas cuya racionalidad se comprende, pero también se ponen en juego *creencias* cuyas razones no se llegan a cuestionar nunca. En el marco de una clase, una vez que dichas reglas emergen tiene sentido hablar de ellas explícitamente ya sea para aceptarlas, rechazarlas o para considerar sus límites.

Resolución de problemas y producción de conocimiento

Un trabajo de modelización parte de un problema real que se desea resolver, sin embargo, para poder modelizar son necesarias ciertas herramientas y al mismo tiempo se plantea que para construir dichas herramientas es necesario modelizar, una situación contradictoria, ¿cómo se procede?

La sola idea de plantear problemas no permite vislumbrar de qué manera los estudiantes podrían reconstruir ideas que les permitan plantear y llevar a cabo un proceso de modelización, por lo que es necesario pensar en el trabajo matemático, la base de este proceso. Haciendo esto se observa que un matemático trabaja siempre en alguna teoría, en algún marco, produciendo y resolviendo problemas (que le generan nuevos problemas) en dicho marco.

Considerando esto, desde un punto de vista didáctico, se piensa en el trabajo de modelización en la clase como vía para que los alumnos tengan una experiencia de producción de conocimientos en el marco de un cierto dominio matemático.

Esto exige examinar cada dominio o teoría matemática que es objeto de enseñanza, considerando los problemas que los conceptos de dicho dominio permiten abordar, las propiedades que relacionan los conceptos y que se traducen normalmente en estrategias de resolución en la medida en que permiten transformar las relaciones involucradas en un problema, las formas de representación que se prestigian.

De acuerdo con la autora, este examen debería ayudar a construir un proyecto de enseñanza en el que se considere de qué manera va a ingresar en la esfera de trabajo del alumno cada uno de los aspectos que constituyen la organización teórica que se quiere enseñar y cómo, con que herramientas del alumno, se va a validar aquello de interés (resultados, propiedades, teoremas, etc.). Trabajo que debe llevar a cabo aquel que desea emprender el proyecto de enseñanza, mismo que requiere en ocasiones de una reconstrucción por parte del profesor, que lo sitúa a este en un verdadero trabajo de producción matemática.

El espacio social de la clase

Un hecho conocido en la comunidad de educación matemática es que elaborar conocimiento en colaboración con otros da en general lugar a un intercambio que permite profundizar las ideas que están en juego en un cierto momento. Lo que lleva a considerar que es conveniente promover el trabajo en equipo de los alumnos.

Es cierto que hay ocasiones en que la interacción entre los alumnos a la hora de resolver un problema puede llevar a que las cuestiones que enfrentan estos den lugar a nuevas cuestiones para el trabajo matemático, dependiendo esto en parte de la gestión que realice el docente a partir de las primeras interacciones de los alumnos con el problema. Sadovsky (2005) expresa que en este contexto siempre se puede pensar que el docente está en condición de aportar las herramientas restantes, pero también la calidad de los aprendizajes cobra mayor espesor cuando se hace evidente que para avanzar hay que tomar decisiones de un tipo nuevo, para las cuales diferentes alumnos aportan distintos puntos de vista que es necesario concluir.

La autora expresa que en general los alumnos pueden llegar a aportar ideas que apoyen la resolución global del problema, pero también que en muchas ocasiones es mejor dar a los estudiantes un espacio "privado" para pensar y trabajar, dado que este suele ayudar al propio individuo a comprender y resolver el problema, es decir, estas elaboraciones tienen un valor productivo esencial para el estudiante. En su lugar, si se quisiera hacer público este trabajo de cada estudiante en el salón, esto podría imponer en ellos las estrategias de pensamiento de los otros, sin que haya algún fundamento que permita establecer la fertilidad de este acto.

El contexto en el que se proponen los problemas y la producción de conocimientos.

En diversos ámbitos de la Educación Matemática hay quienes sostienen que siempre que sea posible la fuente de sentido debe provenir de un contexto extramatemático (contexto externo), dado que son aquellos los que realmente le permiten al alumno comprender el funcionamiento de los conceptos. Sadovsky (2005) habla de que, si bien es cierto que el uso de contextos de este tipo tiene ciertos "beneficios", también posee "debilidades".

La autora expresa que en primera instancia *el contexto puede aportar aquello que la matemática todavía no puede*. Por ejemplo, la contextualización en una situación que los alumnos pueden comprender independientemente del conocimiento del modelo matemático que puede describirla, y acerca de la cual pueden establecer algunas relaciones, contribuye a la construcción de dicho modelo. Es decir, el contexto puede facilitar el proceso de modelización (dentro de este la construcción de los posibles modelos), aun cuando el individuo no conozca estrictamente los posibles modelos matemáticos.

En otros casos *el contexto oculta la necesidad de matematizar o la provisoriedad del conocimiento*. La cuestión es que ciertos contextos aportan una intuición que ayuda a avanzar sobre algunas ideas, dejando al margen asuntos de los que en realidad en algún momento habría que ocuparse. Es decir, el contexto muestra, pero también oculta.

La noción de provisoriedad es inherente a la concepción de conocimiento que se sostiene: un proceso de producción se arma con los conocimientos, herramientas que se tienen, y en ese caso si se quiere que se haga matemática, habrá que pensar como concebir un escenario en el que se respeten los rasgos esenciales del trabajo en la disciplina teniendo en cuenta los conocimientos de los alumnos. En este sentido, son interesantes los contextos que funcionan como sostén de algunas ideas, aunque dicho apoyo no sea muy riguroso o no pueda atrapar todas las ideas vinculadas al concepto que se quiere comunicar (Sadovsky, 2005).

El uso de problemas con un cierto contexto puede servir para trabajar una cierta temática de manera inicial, siendo conscientes de que se puede "ocultar" parte del contenido, esto para que el alumno le dé un primer sentido. Sin embargo, si una vez que el alumno hizo esto se desea que logre "capturar" el resto de las ideas esenciales, se vuelve necesario abandonar el contexto (Sadovsky, 2005)

En el proceso de enseñanza es usual que el profesor intente utilizar diversas estrategias para favorecer la comprensión del estudiante, en este intento es común que los maestros se apoyen de soportes externos a la matemática (extramatemáticos) que funcionen como referentes para pensar sobre un determinado asunto, sin embargo, existen diversos *riesgos didácticos de homologar los contextos extramatemáticos a los contextos intramatemáticos*. En ocasiones al intentar homologar un problema de contexto extramatemático a uno de contexto intramatemático, puede que el contexto del primero no evoque las mismas ideas que el segundo, cuyos contenidos son los que interesa enseñar. Es decir, que al tratar de usar un contexto extramatemático para enseñar ideas matemáticas, el conocimiento al que se puede acceder es limitado, esto en comparación con lo que se puede acceder mediante un problema homólogo de contexto intramatemático (Sadovsky, 2005).

En un problema de contexto extramatemático, una vez obtenido el modelo matemático, por ejemplo, una ecuación cuya incógnita es un peso desconocido ($3x + 10 = 100$), se pueden justificar las transformaciones hechas en esta desde una perspectiva extramatemática, “sacar de cada platillo una pesa de 10 kilos” o desde una perspectiva intramatemática “resto 10 de ambos lados de la ecuación”. Aquí la identificación de las dos justificaciones es posible para quien ya elaboró ambas, pero comprender la primera (extramatemática) no implica que se entienda la segunda (intramatemática).

Esta ilusión de identidad entre situaciones puede hacer que se pierda de vista la necesidad de un trabajo explicito por parte del docente que embarque al alumno en transformar los significados elaborados en uno de los contextos para que puedan ser reinterpretados en el otro. Se advierte del uso ingenuo de estos contextos dado que se puede alejar al alumno de las relaciones que debe elaborar (Sadovsky, 2005). Así mismo en ocasiones los problemas de contexto intramatemático pueden mostrar relaciones que los problemas de contexto extramatemático no pueden mostrar, es decir, en ocasiones lo extramatemático no aporta, sino que oculta aquello que se quiere tratar.

Otro aspecto que señala Sadovsky (2005) es que el *contexto externo abre preguntas que deben tratarse “internamente”*. Generalmente los problemas planteados desde un contexto externo no ofrecen herramientas para justificar teóricamente la validez de ciertos resultados o procesos de los alumnos, lo que hace que se queden como incógnitas. Para contestarlas es necesario recurrir a elementos fuera del contexto (argumentos matemáticos). Es decir, se debe de abandonar el contexto, aunque sigue siendo necesario para que los problemas tengan sentido. Expresa la autora que proponer problemas que requieren del contexto para ser formulados, pero que exigen el abandono de este para ser respondidos, es un modo de empujar hacia una práctica cada vez más general, asunto que forma parte del sentido de la matemática en la escuela.

Establecidos estos puntos respecto del uso del contexto Sadovsky (2005) destaca que en muchas ocasiones el profesor recurre al argumento de que “las matemáticas están en todas partes”, esto con el objetivo de convencer a sus estudiantes de la importancia de su estudio. Con esta premisa el profesor hace uso de ejemplos poco entendibles y significativos para los estudiantes, o bien se plantea un ejemplo que podría resultar interesante, pero al abordar el tema en cuestión no se vincula con el ejemplo. En general en muchas ocasiones se plantea una situación real para motivar a los alumnos, pero a continuación se despliega un estudio en el que no se establecen verdaderamente vínculos con dicha situación. Dicho de otra forma, la referencia a un contexto de uso ni aporta al estudio ni permite apreciar cómo se aplica el resultado de dicho estudio.

Cierre del capítulo 2

La autora considera diversos elementos al hablar de modelización, en el presente trabajo fue central la definición de modelización de Sadovsky (2005), la cual está influenciada por su visión de las matemáticas, así como las diversas fortalezas y debilidades que señala acerca del uso del contexto en problemas de modelización. Dicho de otra forma, sobre el papel que puede jugar este en un proceso de modelización. Elemento de importancia en la pregunta de investigación y a partir del cual se planteó una de las categorías implementadas en el capítulo de análisis (capítulo 5).

Capítulo 3 Metodología

3.1 Introducción: características generales de la investigación

La presente investigación se planteó como un estudio de tipo cualitativo. Este enfoque permitió indagar sobre los diversos procedimientos, conocimientos y concepciones evocadas por estudiantes de sexto año de la Escuela Nacional Preparatoria No. 8. En esta investigación se realizó el análisis de la implementación de una secuencia de actividades de modelización basada en una propuesta de Segal y Giuliani (2008) la cual tiene como base la concepción de modelización de Sadovsky (2005), agregándose el componente de la tecnología digital.

Respecto de la secuencia de actividades, se realizó una prueba piloto con el propósito de poner a prueba la resolución de uno de los problemas usando tecnología: los applets, la cual permitió hacer las correcciones pertinentes para el diseño y aplicación de la secuencia definitiva. Asimismo, un elemento importante tanto para la prueba piloto como la secuencia definitiva (para su diseño, implementación y análisis de resultados) fue el análisis previo de los problemas de la secuencia (ver sección 3.2).

Para la recolección principal de datos se utilizaron hojas de trabajo con la secuencia de actividades impresa e instrucciones de los applets (incluyéndose hojas blancas para procedimientos, respuestas, reflexiones, etc.) y se video/audio-grabaron la totalidad de las sesiones (prueba piloto y recolección principal). Finalmente, para el análisis de los datos se diseñaron y aplicaron tres categorías de análisis: contexto, tecnología e intervención docente, y se utilizó como apoyo el análisis previo de los problemas.

La metodología se sintetiza en el siguiente esquema (ver Figura 1):

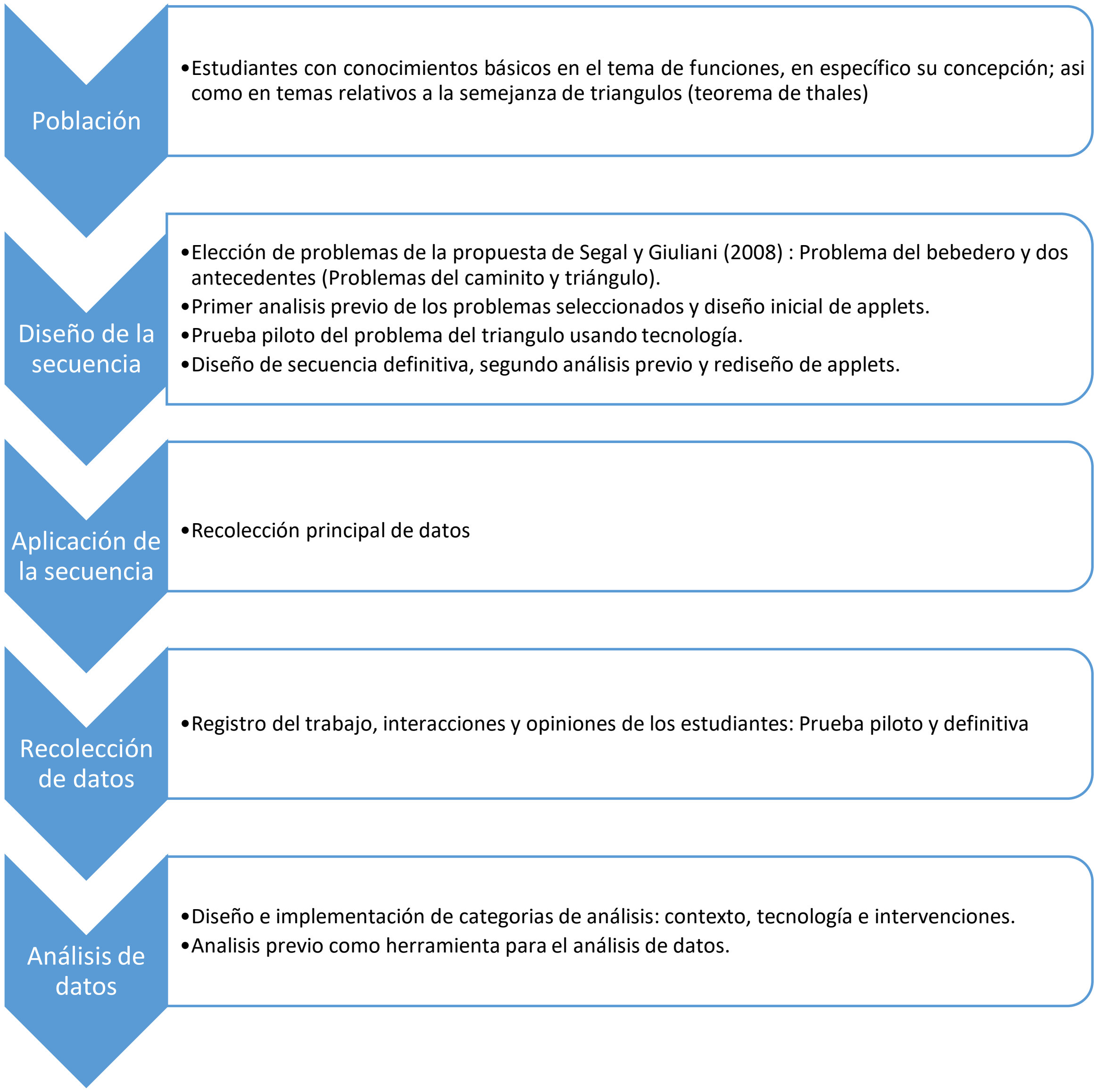


Figura 1: Diagrama de la metodología.

3.2 Análisis previo de los problemas

El análisis previo cumple en esta tesis una doble función: como un componente importante para el diseño de la secuencia didáctica y como una herramienta para el análisis de datos. Este componente se presenta de manera sintetizada en la siguiente sección del presente capítulo, abordándose aspectos generales; y es descrito con mayor profundidad en el capítulo 4. *Diseño de la secuencia*.

Los problemas que conforman la secuencia están basados en la propuesta de Segal y Giuliani (2008). Las autoras como parte de su trabajo presentan un análisis didáctico de los problemas, con énfasis en el problema del bebedero, mostrando posibles errores y dificultades de los estudiantes, contenidos matemáticos involucrados y posibles estrategias de resolución. Este análisis realizado por Segal y Giuliani (2008) se retomó y complementó en la presente tesis como una herramienta para analizar el trabajo de los estudiantes, sus reflexiones e ideas reflejadas durante la aplicación de la secuencia, por lo tanto, se optó por tomar dicho análisis y ampliarlo de forma significativa. De esta manera se realizó un *primer análisis previo* de los problemas de la secuencia en el que el análisis de cada problema se separó en: soluciones a los problemas; posibles conocimientos matemáticos involucrados en la resolución; conocimientos previos necesarios para abordar los problemas; y posibles procedimientos, errores y dificultades de los estudiantes.

Posteriormente, mediante discusiones de los problemas y la prueba piloto, esta secuencia se fue transformando hasta obtenerse la versión final que se utilizó en la aplicación definitiva (ver anexo A). Para esta versión se realizó un *segundo análisis previo*, en el cual se tuvo en consideración tanto el primer análisis como los resultados del piloto. Este segundo análisis se planteó con una estructura similar al primero. Debido a las modificaciones de los problemas y los resultados de aplicar estos es que el contenido se modificó en diversos sentidos. En específico, se destaca la incorporación del componente tecnológico: sobre las preguntas que se abren mediante el uso de la tecnología y los efectos que puede tener en el proceso de resolución de los estudiantes, entre otros aspectos.

En el capítulo 4. *Diseño de la secuencia* se presenta el segundo análisis previo, pues es el que se refiere directamente a la secuencia con la que se realizó el levantamiento principal de datos.

3.3 Implementación de la prueba piloto y de la recolección principal de datos

Los problemas que forman la secuencia de actividades: *problema del caminito*, *problema de triangulo* y *problema del bebedero*, se basaron en los problemas, con mismo nombre, planteados por Segal y Giuliani (2008), quienes señalan que los conceptos básicos necesarios para su resolución forman parte de los planes usuales de la escuela media: áreas, volúmenes, semejanza de triángulos.

Dicho esto, se aplicó la secuencia (piloto y definitiva) a estudiantes de sexto año de la Escuela Nacional Preparatoria No 8, dado que, de acuerdo con sus planes de estudios de Matemática, estos abordan nociones de función en cuarto año y semejanza de triángulos (teorema de thales) en quinto año, esto sin importar el área (I, II, III y IV). Asimismo, en ambos años se trabaja con tareas de modelación. De esta forma los estudiantes contaban, en teoría, con los antecedentes necesarios para abordar los problemas planteados.

El contacto con los estudiantes fue mediante su profesora responsable de la asignatura de matemáticas Marisol Sandoval Rojas, esto en ambos casos (prueba piloto y definitiva). En el caso de la prueba piloto la profesora hablo directamente con los estudiantes acerca de la prueba. En el caso del levantamiento principal (prueba definitiva) la profesora hablo con el grupo y tiempo después el tesista se presentó ante el grupo y explicó a los estudiantes en qué consistía el trabajo que se estaba haciendo, aceptando estos el apoyar en dicho trabajo.

Prueba piloto

La prueba piloto se llevó a cabo con 4 estudiantes de un grupo de sexto año de área III de la Escuela Nacional Preparatoria No 8 en una sesión de 50 minutos. En esta prueba se aplicó el problema del triángulo con el apoyo de un applet diseñado con GeoGebra y separando a los estudiantes en parejas (ver anexo B). El propósito del piloto fue poner a prueba la claridad y pertinencia del problema usando la herramienta tecnológica.

Dentro de los tres problemas de la propuesta de Segal y Giuliani (2008) se eligió el problema del triángulo para la prueba piloto después de considerar del análisis previo, dado que en este se observó cómo el problema del triángulo en cierta manera contenía al problema del caminito y al mismo tiempo se apreciaba como un antecedente necesario para resolver el problema del bebedero. Asimismo, como ya se había considerado que sería el segundo problema de la secuencia definitiva y el primero en el que se usara tecnología: applet, esto permitiría poner a prueba la resolución apoyada en tecnología. Estos aspectos hicieron que el problema resultara ideal para aplicar en el piloto.

La prueba fue llevada a cabo por el tesista sin intervenir en el proceso de resolución de los estudiantes. Durante la sesión se video/audio-grabó el trabajo de los estudiantes observándose su interacción con la herramienta y poniéndose atención en sus momentos de discusión; asimismo, se recogieron los resultados escritos de los estudiantes (hojas de trabajo con el problema, procedimientos y respuestas).

Al finalizar la sesión se les preguntó a los estudiantes sobre el applet: si les había resultado útil y porque, si habían detectado algún error y si tenían alguna sugerencia de modificación; recopilándose sus respuestas de forma escrita y grabándose sus impresiones.

Con base en lo observado y en la retroalimentación dada por los estudiantes se realizaron las correcciones pertinentes en las herramientas (applet y hojas de trabajo): modificar el valor límite de la altura de ***P*** en él applet, mejorar la visibilidad de los elementos de las figuras tanto en el applet como en las hojas de trabajo, entre otras modificaciones. Después de esto fue posible continuar con el diseño e implementación de la prueba definitiva.

Recolección principal de datos (prueba definitiva)

La recolección principal se llevó a cabo con un grupo de 22 estudiantes de sexto año de área I de la Escuela Nacional Preparatoria No 8 en tres sesiones de 50 minutos las cuales fueron video/audio-grabadas. En la primera sesión (día 1) se aplicaron el *problema del caminito* y el *problema del triángulo*, trabajándose en parejas y apoyado con tecnología (applet 1) el segundo problema. En la segunda y tercera sesión (día 2) se planteó la resolución del *problema del bebedero*, siendo esta tarea en parejas y con apoyo de tecnología (applet 2).

Dado que los problemas de la sesión 1: *problema del caminito* y el *problema del triángulo,* tenían el propósito de reactivar los conocimientos necesarios para abordar el problema del bebedero, esta se implementó con un apoyó mínimo del profesor-investigador (tesista), haciéndose uso de intervenciones especificas en momentos considerados clave para la resolución de los problemas. Esto buscando que sacaran sus ideas adelante, pero sin decirles el camino a seguir.

En las sesiones 2 y 3 que comprenden el *problema del bebedero*, hubo una mayor intervención por parte del profesor-investigador. En este caso, dada la cantidad de posibles procedimientos y el tiempo que se tenía, el profesor-investigador consideró necesario guiar ciertas partes del problema y dar libertad en otras. Así mismo, dada la amplia cantidad de dificultades y posibles errores identificados durante las sesiones, el profesor-investigador puso atención en los momentos de silencio de los estudiantes, dado que existía la posibilidad que se encontraran ante una posible dificultad o error en la cual podrían necesitar apoyo para continuar.

La mayor parte de las intervenciones fueron planeadas y específicas, así mismo se mencionan con mayor profundidad en el análisis previo de estas sesiones. En el caso de las intervenciones que se pensaron en el momento se habla de estas en el capítulo 5 (sobre el análisis de los resultados).

La aplicación fue llevada a cabo por el profesor-investigador con supervisión de la profesora responsable de la asignatura de matemáticas, misma que sugirió a que grupo aplicarle la secuencia. Al planteársele al grupo este pequeño proyecto, estos expresaron disposición para trabajar, lo cual hizo que se esperaran buenos resultados en general.

3.4 Recolección y análisis de datos

Para analizar el trabajo de los estudiantes se hizo uso de diversas herramientas para la recolección de datos. De esta forma se utilizaron:

1. Hojas de trabajo con los problemas impresos en las que se esperaba que los estudiantes reflejaran sus respuestas, reflexiones y procedimientos escritos.
2. Audios y videograbaciones del trabajo en clases.

Para el análisis de datos se consideraron dos componentes, en primer lugar, se hizo uso del análisis previo como herramienta de apoyo inicial para interpretar el trabajo de los estudiantes. En segundo lugar, se planteó la elaboración de categorías de análisis para clasificar los resultados obtenidos: el rol del contexto en los procedimientos de solución de los estudiantes, el uso de la tecnología y la intervención docente; planteándose en el análisis de resultados (capítulo 5) el como estos elementos favorecieron un trabajo de modelización, esto en concordancia con la pregunta de investigación.

Capítulo 4 Diseño de la secuencia de enseñanza definitiva

En este capítulo se presenta el diseño de la secuencia definitiva, la cual se incluye íntegra en el anexo A. La secuencia de enseñanza está conformada por tres problemas: el problema del caminito, el problema del triángulo y el problema del bebedero; y está diseñada para aplicarse en dicho orden. Los primeros dos problemas se aplicaron en una sesión de 50 minutos (día 1), y el tercero en dos sesiones continuas de 50 minutos cada una (día 2).

Cabe destacar que inicialmente se había planteado un número mayor de sesiones para permitir un trabajo más flexible a los estudiantes; sin embargo, por cuestiones de la disponibilidad de tiempo del grupo y la dificultad de los problemas, se redujo la cantidad de sesiones, se presentaron menos problemas, y se optó por plantear y llevar a cabo una experiencia de clase más controlada.

A continuación, para cada uno de los problemas de la secuencia, se presentan los objetivos buscados con la resolución de cada uno de ellos, los conocimientos matemáticos involucrados en su resolución, los conocimientos previos necesarios para abordarlos y los posibles procedimientos, errores y dificultades que los estudiantes pueden tener al solucionarlos.

4.1 Sesión 1: problema del caminito y problema del triangulo

4.1.1 Problema del caminito

El primer problema que se plantea en la secuencia es el *problema del caminito*. En primera instancia, este problema fue incluido en la secuencia con la intención de que los estudiantes conectaran algunos contenidos necesarios para resolver el problema del bebedero, como: ángulos internos de los triángulos y la semejanza de triángulos, herramientas clave en la resolución de los tres problemas.

4.1.1.1 Análisis previo: problema del caminito

El problema solicita encontrar el área de la sección sombreada (caminito) de la Figura 2, sugiriéndose el uso de la semejanza de triángulos (ver anexo A).

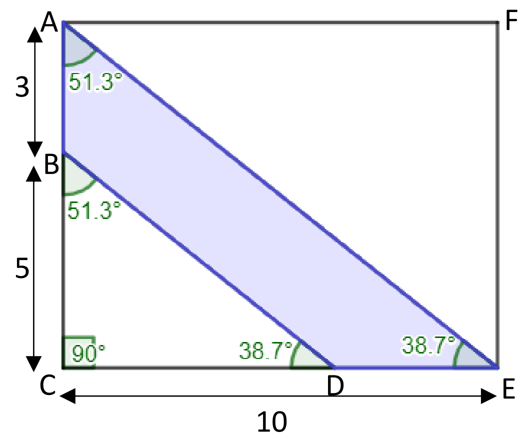


Figura 2: Representación del problema del caminito.

El objetivo de la resolución de este problema en la secuencia es que los estudiantes movilicen sus conocimientos en torno a la semejanza de triángulos; dado que estos conocimientos serán importantes para abordar el problema del bebedero (problema 3 de la secuencia).

1.- Conocimientos matemáticos involucrados en su resolución.

Los conocimientos matemáticos centrales para la solución de este problema son la semejanza de triángulos y el cálculo del área del trapecio de la figura 2.

2.- Conocimientos previos necesarios.

Establecido lo anterior, se considera que los estudiantes requieren de los conocimientos previos:

- Concepto de área: qué es, qué representa, cómo calcular áreas de figuras geométricas básicas.
- Semejanza de triángulos: criterios, concepciones, razón de semejanza, etcétera.

3.- Posibles procedimientos, errores y dificultades de los estudiantes.

Esencialmente se prevén dos posibles caminos para resolver el problema que pueden ser planteados por los estudiantes: 1) encontrar el área mediante la diferencia de las áreas de figuras, o 2) identificar que la figura es un trapecio y encontrar los elementos para obtener el área.

Cabe destacar que el procedimiento 2 es más complejo (en cuanto al cálculo de la altura del trapecio), por lo que se considera que es menos probable que lo planteen los estudiantes.

Procedimiento 1: diferencia de áreas

Esencialmente este procedimiento consiste en tomar el área del triángulo ACE y restarle la del triángulo BCD, requiriéndose encontrar la base CD. Dicho esto, el área sombreada se puede obtener planteando diversas diferencias de áreas de figuras interiores.

Dado que los ángulos interiores de los triángulos ACE y BCD son iguales se deduce que estos son semejantes, lo que implica a su vez que las razones entre sus lados correspondientes deben de ser iguales:

$$\frac{8}{10} = \frac{5}{x}, \qquad CD = x = \left(\frac{10}{8}\right)(5) = \frac{25}{4}$$

La expresión que representa la igualdad entre las razones puede ser interpretada de diversas formas: ecuación, equivalencia de fracciones, entre otras. Si es vista como ecuación puede resultar difícil su resolución, dadas las posibles dificultades que puedan tener de entrada los estudiantes en este tema; vista como equivalencia de fracciones, pueden aparecer dificultades relativas a la manipulación de estas.

Encontrado el lado CD se prosigue a calcular las áreas de los triángulos ACE (A_2) y BCD (A_1) y obtener la diferencia.

$$A_{caminito} = A_2 - A_1 = 40 - \frac{125}{8} = 40 - 15\frac{5}{8} = \frac{195}{8} = 24\frac{3}{8}$$

Procedimiento 2: cálculo del área de un trapecio

Este procedimiento consiste esencialmente en encontrar el área de la figura de forma directa mediante la fórmula del área del trapecio, la cual pueden no recordar (o incluso conocer) en el momento. En este caso que de no recuerden la fórmula, el profesor-investigador puede proporcionarla.

La fórmula para calcular el área del trapecio es:

$$Area_{trapecio} = \frac{(B + b)h}{2}$$

Tal que B es la base mayor, b es la base menor y h la altura del trapecio.

La base mayor del trapecio es la hipotenusa del triangulo ACE:

$$AE = (64 + 100)^{\frac{1}{2}} = (164)^{\frac{1}{2}} \approx 12.80$$

La base menor es la hipotenusa del triángulo BCD, la cual se puede obtener de diversas formas: usando la ley de senos o el teorema de Pitágoras, entre otras.

Para usar el teorema de Pitágoras en la búsqueda de BD se debe encontrar el lado CD, lo cual introduciría a los estudiantes en un proceso semejante al descrito en el procedimiento 1, esto es, observar que los triángulos ACE y BCD son semejantes, plantear la razón de semejanza $\frac{8}{10} = \frac{5}{CD}$ y determinar CD; restando aplicar el teorema de Pitágoras usando los valores de BC y CD para determinar BD.

La ley de senos se puede plantear de la siguiente manera:

$$\frac{BD}{\sin(90)} = \frac{5}{\sin(38.7)} \rightarrow \quad BD \approx 7.99 \approx 8$$

En general, se espera que los estudiantes lleguen hasta este punto. La razón de esto recae en que el dato restante para recurrir a la fórmula del área del trapecio es la altura, información cuyo cálculo no es sencillo de plantear. Una forma de determinar la altura del trapecio consiste en dibujar un segmento BG perpendicular al lado AE, de tal manera que se forma un triángulo rectángulo ABG interior al trapecio $ABDE$ (ver Figura 3)

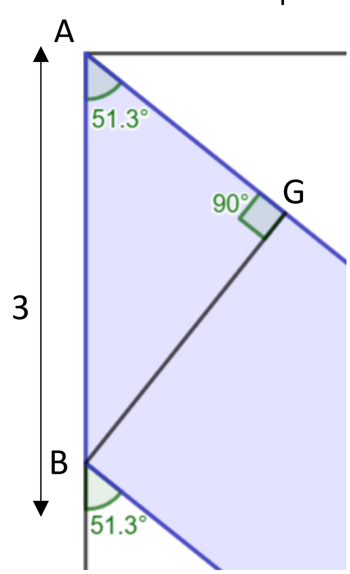


Figura 3: Triangulo ABG.

Usando los ángulos internos del triángulo ABG y el lado AB se prosigue a aplicar la ley de senos:

$$\frac{BG}{\sin(51.3)} = \frac{3}{\sin(90)} \rightarrow \quad BG \approx 2.34$$

Observándose que el segmento BG es la altura del trapecio $ABDE$. Con este dato, el valor de BD y de AE se puede calcular el área del trapecio mediante su fórmula.

Independientemente de lo que planteen los estudiantes, es importante ayudarlos a recordar la semejanza de triángulos: su definición y las razones de semejanza, por lo que se considera importante que el profesor apoye a los estudiantes en esto mediante una intervención.

4.1.2 Problema del triángulo

El segundo problema que se plantea en la secuencia es el *problema del triángulo*. Este problema fue incluido en la secuencia con la intención de que los estudiantes reactivaran nociones de variación y dependencia, importantes para abordar el problema del bebedero, y continuaran aplicando la semejanza de triángulos, herramienta clave para la resolución del problema de dicho problema.

4.1.2.1 Análisis previo: problema del triangulo

El problema solicita dos cosas: 1) determinar el área de la figura sombreada conociendo su altura: $h = 3cm$, y 2) determinar la altura de la figura sombreada conociendo su área: $24\ cm^2$, $31.5\ cm^2$ y $40\ cm^2$ (ver anexo A).

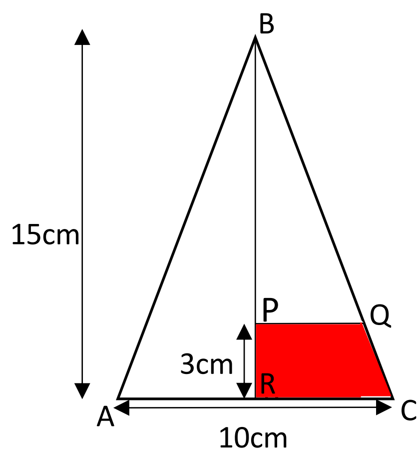


Figura 4: Representación del problema del triángulo.

El objetivo de la resolución de este problema en la secuencia es que los estudiantes cuestionen se familiaricen, exploren y cuestionen el alcance de la tecnología en la representación y resolución de problemas matemáticos.

1.- Conocimientos matemáticos involucrados en su resolución.

En la primera parte, se ponen en juego el uso de la fórmula del área del trapecio y la semejanza de triángulos es importante.

En la segunda parte, se ponen en juego conocimientos relativos a la resolución de ecuaciones cuadráticas y la interpretación de las soluciones de una ecuación cuadrática, como se muestra más abajo en la discusión de los posibles procedimientos. Además, el uso del *applet* de Geogebra moviliza algunas nociones de variación y dependencia.

2.- Conocimientos previos necesarios.

Para que los estudiantes puedan resolver el problema, se consideró que requerían de los conocimientos previos siguientes:

- Noción de área: qué es, qué representa, cómo calcular áreas de figuras geométricas básicas, entre otras.
- Semejanza de triángulos: criterios, concepciones, razón de semejanza, etcétera.
- Métodos de resolución de ecuaciones cuadráticas e interpretación de soluciones.

3.- Posibles procedimientos, errores y dificultades de los estudiantes.

Esencialmente se prevén dos caminos para resolver la primera parte del problema: 1) identificar que la figura es un trapecio y usar la fórmula de su área, o 2) encontrar el área mediante la diferencia de las áreas de figuras.

Para la segunda parte, se consideran dos procedimientos similares: 1) plantear la fórmula del área del trapecio, con la diferencia de que ahora se busca determinar h conociendo el área; y 2) plantear la diferencia de las áreas de los triángulos BRC y BPQ, donde el área de BPQ está en términos de h. De igual forma que en la primera parte, un factor clave es calcular el valor del lado PQ, el cual se puede obtener mediante la semejanza de triángulos.

A continuación, se desarrollan estos posibles procedimientos para cada parte del problema: 1) y 2), señalándose algunos de los posibles errores y dificultades de los estudiantes en cada uno de los procedimientos. Primero se presenta la parte 1 del problema.

Parte 1: "Si se marca sobre la altura un punto **P** a 3 cm de la base del triángulo, ¿cuál es el área de la parte sombreada de la figura?

Como se dijo anteriormente un factor clave en los procedimientos considerados es obtener el valor de PQ, por lo cual considerando los datos que se dan solo se visualiza una forma de determinarlo: semejanza de triángulos, en específico de los triángulos BPQ y BRC. Considerando el problema 1 como antecedente se espera que los estudiantes planteen el uso de la semejanza de los triángulos BPQ y BRC para determinar PQ:

$$\frac{BP}{PQ} = \frac{BR}{RC} \rightarrow \qquad \frac{15-3}{PQ} = \frac{15}{5} \rightarrow \qquad \frac{12}{PQ} = \frac{15}{5}$$

Despejando.

$$PQ = 4cm$$

Con esta información se puede proceder con cualquiera de los procedimientos planteados inicialmente.

Procedimiento 1: cálculo del área de un trapecio

En primera instancia es necesario que los estudiantes identifiquen a la figura sombreada como un trapecio, que, si bien las características de la figura del problema ameritan que resulte evidente, puede que para algún conjunto de estudiantes sea necesaria una explicación un poco más elaborada que los convenza. Lo cual puede representar una primera dificultad.

Una vez identificada la figura sombreada, es probable que los estudiantes intenten recordar la fórmula del área de esta figura. En caso de que la soliciten al profesor este puede darla sin problema:

$$A = \frac{(B+b)h}{2}$$

Los estudiantes pueden proceder a identificar los datos. La altura es dada en el enunciado del problema. Para determinar la base mayor los estudiantes pueden considerar el triángulo ABC, dado que en apariencia este se encuentra dividido en dos triángulos iguales y por lo tanto la base mayor B es igual a 10 sobre 2, es decir 5. El profesor puede intervenir para determinar la base mayor haciendo uso de que la línea que divide al triangulo original (ABC) es una altura, que el triángulo es isósceles y que los triángulos en que está dividida la figura original (ABR y BCR) son rectángulos; pero en general se considera que la imagen del problema debería hacer que resulte intuitivo obtener dicho valor.

Para obtener la base menor b es necesario que los estudiantes planteen la semejanza de los triángulos BPQ y BRC y obtengan una razón de semejanza que involucre la incógnita b, lo cual se comentó anteriormente:

$$\frac{12}{PQ} = \frac{15}{5}$$

La expresión de la igualdad de razones obtenida de plantear la semejanza de los triángulos BPQ y BRC puede ser interpretada de diversas formas: ecuación, equivalencia de fracciones, entre otras. Dependiendo del como sea vista la igualdad el tipo de dificultades que pueden afrontar los estudiantes.

Finalmente, los estudiantes tendrán todos los datos para sustituirlos en la fórmula del área del trapecio:

$$A = \frac{(B+b)h}{2} = \frac{(5+4)3}{2} = \frac{27}{2} cm^2$$

Es importante hacer que los estudiantes recuerden las unidades que están involucradas en la formula, dado que estas le dan significado a la respuesta del problema.

Procedimiento 2: diferencia de áreas

Los estudiantes pueden plantear la diferencia de las áreas de los triángulos BRC y BPQ, necesitando para esto el valor del lado PQ:

$$Area_{sombreada} = Area_{BRC} - Area_{BPQ} = \frac{(15*5)}{2} - \frac{(12*4)}{2} = \frac{75}{2} - \frac{48}{2} = \frac{27}{2} cm^2$$

Dado que este procedimiento implica una operación entre fracciones existe la posibilidad que aparezca algún error en cuanto a la manipulación de estas. De la misma forma que en el procedimiento anterior siempre vale la pena hacer que recuerden que unidades están involucradas.

A continuación, se presenta la parte 2 del problema desarrollándose los posibles procedimientos señalados al inicio del punto 3 de esta sección, señalándose algunos de los posibles errores y dificultades de los estudiantes en cada uno de los procedimientos.

Parte 2: Muevan el punto **P** sobre la altura para que el área sombreada mida $24\ cm^2$, $31.5\ cm^2$ y $40\ cm^2$. ¿A qué distancias de la base ubicaron al punto P para obtener las áreas pedidas?

Antes de avanzar en el problema se considera necesario que los estudiantes identifiquen que el valor de la incógnita buscada es la altura h de la figura sombreada.

Los estudiantes pueden proceder considerando que, al usar el applet, están calculando el área de los trapecios generados; también podrían trabajar con diferencia de áreas de triángulos. En general ambos procedimientos funcionan en cada uno de los casos que plantea el problema, es decir para los distintos valores del área pedida.

En primera instancia ambos procedimientos (1 y 2) se presentan para el caso 1) donde $Area = 24cm^2$, usándose estos como base para abordar los casos 2) y 3): $Area = 31.5cm^2$ y $40cm^2$.

Caso 1) $\boldsymbol{Area = 24cm^2}$

Procedimiento 1:

Si los estudiantes optan por calcular las áreas de los trapecios generados, pueden abordar el primer caso cuando $A = 24cm^2$ sustituyendo este valor en la fórmula del área del trapecio:

$$\frac{(B + b)h}{2} = 24$$

Los estudiantes pueden intentar determinar los valores de los elementos involucrados en la fórmula. Con estas consideraciones se espera que observen que el valor de la base mayor B se mantiene constante, y por lo tanto $B = 5cm$; y que intenten calcular la base menor b mediante la semejanza de triángulos, llegando a la siguiente igualdad de razones entre los lados de los triángulos BPQ y BRC:

$$\frac{BP}{PQ} = \frac{BR}{RC} \rightarrow \qquad \frac{15 - h}{b} = \frac{15}{5}$$

Despejando la incógnita b, se obtiene:

$$b = 5 - \frac{h}{3}$$

Con estos datos se puede proseguir a sustituir en la expresión del área.

$$\frac{\left(5 + \left(5 - \frac{h}{3}\right)\right)h}{2} = 24$$

$$-\frac{h^2}{6} + 5h = 24$$

Procedimiento 2:

Recurriendo a la diferencia de áreas de los triángulos BPQ y BRC se tiene que:

$$A = Area_{BRC} - Area_{BPQ} = 24$$

Para obtener el $Area_{BRC}$ se tiene que:

$$Area_{BRC} = \frac{15 * 5}{2} = \frac{75}{2}$$

Para obtener el $Area_{BPQ}$, los estudiantes pueden determinar PQ mediante semejanza de los triángulos BPQ y BRC. Planteando así la siguiente igualdad de razones entre los lados de dichos triángulos:

$$\frac{BP}{PQ} = \frac{BR}{RC} \rightarrow \qquad \frac{15 - h}{PQ} = \frac{15}{5}$$

Despejando, se obtiene la base b del triángulo BPQ:

$$b = PQ = 5 - \frac{h}{3}$$

Sobre la $altura$ del triángulo BPQ, en la parte 1 esta era $BR - BP = 15 - 3$. Considerando esto y que la altura de la figura sombreada en este caso es $BP = h$, los estudiantes pueden deducir que:

$$altura = 15 - h$$

Sustituyendo en la expresión del área del triangulo BPQ.

$$Area_{BPQ} = \frac{\left(5 - \frac{h}{3}\right)(15 - h)}{2} = \left(\frac{75}{2} + \frac{h^2}{6} - 5h\right)$$

Sustituyendo en la fórmula del área sombreada:

$$A = Area_{BRC} - Area_{BPQ} = \frac{75}{2} - \left(\frac{75}{2} + \frac{h^2}{6} - 5h\right) = 24$$

$$-\frac{h^2}{6} + 5h = 24$$

Como se observa en ambos procedimientos se llega a la misma expresión: $-\frac{h^2}{6} + 5h = 24$. A partir de aquí, los estudiantes pueden recurrir a al menos un par de métodos para encontrar la altura h de la figura sombreada, la cual es solicitada en el problema:

1) Ver la expresión como una ecuación cuadrática y resolverla, o

2) Factorizar la expresión y encontrar sus ceros.

Ambos métodos ofrecen como solución:

$$h_1 = 6, \qquad h_2 = 24$$

En este punto, los estudiantes deben interpretar estas soluciones con respecto al contexto intra-matemático del problema. Esto es, deben considerar toda la información dada por el problema (tanto la explicita como la implícita), como 1) el hecho de que el punto P esta sobre la altura BR y por lo tanto no puede superar su valor: $15cm$, 2) dado que la figura sombreada está dentro del triangulo BRC, el área de dicha figura no puede ser más grande que la del triángulo; entre otra información. De tal forma que la altura obtenida tenga sentido al considerar de que trata el problema mismo y los elementos de este.

Considerando esto, se prevén tres posibles maneras de proceder por parte de los estudiantes:

1) Que observen que la altura del triángulo original es de $15cm$ y que la del trapecio ha de ser menor porque está dentro del triángulo, concluyendo que $h_1 = 6$ es la respuesta que tiene sentido;

2) Que tomen cualquiera de los dos valores h_1 y h_2 sin cuestionarse cuál es el correcto.

3) Que se queden en duda al tener dos posibles respuestas cuando solo se les solicitó una.

Asimismo, los estudiantes pueden caer en el error de elegir la respuesta $h = 24cm$. Para confrontar este error, el profesor puede solicitarles que sustituyan dicho valor en la expresión:

$$b = 5 - \frac{h}{3}$$

Y observar que en este caso se obtiene un valor negativo para la longitud del lado, lo cual no tiene sentido. Entonces, la única respuesta sería $h = 6cm$.

Caso 2) $\boldsymbol{Area = 31.5cm^2}$

Para la siguiente parte del problema, cuando el área es $A = 31{,}5\ cm^2$ se espera que los estudiantes procedan de forma análoga: realizando todo el proceso de nuevo u observando que solo es necesario cambiar ciertos valores en sus procedimientos y después resolver.

Caso 3) $\boldsymbol{Area = 40cm^2}$

Para el último caso, cuando el área $A = 40\ cm^2$ se plantean dos posibles escenarios:

1) Que los estudiantes calculen el área del triángulo BRC = 37.5cm^2, y deduzcan que dicho triángulo no podría contener a la figura sombreada (trapecio) dado que el área

de esta sería mayor que la del triangulo BRC, lo cual no tiene sentido. Por lo que este caso no tiene solución: no existe una altura h tal que el área de la figura sombreada (trapecio) es de $40cm^2$.

2) Que los estudiantes resuelvan el problema mediante la ecuación $-\frac{h^2}{6} + 5h = 40$ y obtengan como posibles soluciones las cantidades imaginarias:

$$h_1 = 15 - i\sqrt{15}, \qquad h_2 = 15 + i\sqrt{15}$$

Deduciendo que, como dichas cantidades deben de representar alturas, no tienen sentido como respuestas. Es decir, no existe una altura h tal que el área del trapecio es de $40cm^2$.

La obtención de las soluciones imaginarias planteadas puede llegar a ser difícil. Una posibilidad es, por ejemplo, que al no ser un tipo de numero usado comúnmente los estudiantes resuelvan la ecuación y obtengan:

$$h = 15 \pm \sqrt{-15}$$

De tal forma que la cantidad $\sqrt{-15}$ no tenga sentido para ellos: que no identifiquen que dicha cantidad es un numero imaginario, sin poder llegar a la respuesta en su forma imaginaria.

Esta primera parte del análisis es enteramente matemática. A continuación, se plantea el análisis previo recurriendo al uso de la tecnología.

4.1.2.2 Uso de la tecnología

En las hojas de trabajo del problema del triángulo se introduce brevemente el applet, así como sus instrucciones de uso (ver anexo A). Esencialmente este applet consiste en una representación de la figura del problema en la que se puede manipular el punto P directamente o mediante un deslizador. La altura máxima que puede alcanzar este punto es de $17cm$, superando la altura del triángulo ABC. El applet muestra la medida de la altura del punto y el área de la figura sombreada así generada (ver figuras 5 y 6).

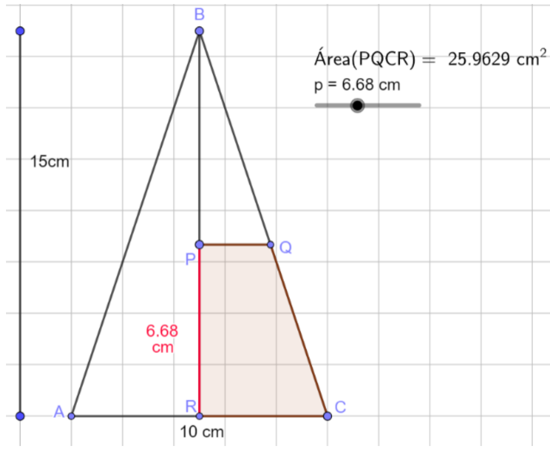


Figura 5: Representación del problema del triángulo (GeoGebra), $0 \leq p \leq 15$.

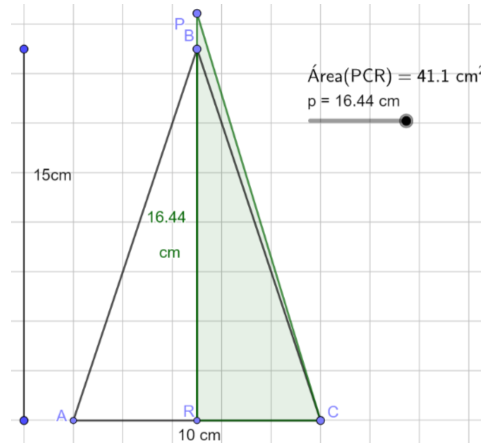


Figura 6: Representación del problema del triángulo (GeoGebra), $15 < p \leq 17$.

Mediante la manipulación de la herramienta se espera que los estudiantes obtengan aproximaciones numéricas a las respuestas buscadas (tanto en la parte 1, como en los primeros dos casos de la parte 2), manipulando el deslizador. Además, se espera que la herramienta sirva como apoyo para que observen las relaciones entre los elementos que constituyen la configuración geométrica: altura a la que se ubica el punto *P*, área de la región sombreada *PQCR*, etcétera. Asimismo, se considera que la manipulación de la herramienta en la resolución del problema puede ayudar a movilizar las nociones de variación y dependencia en los estudiantes.

A continuación, se desarrolla el análisis previo sobre el uso de la herramienta para cada parte del problema (1 y 2), recuperándose algunos de los aspectos anteriores.

Parte 1: *"*Si se marca sobre la altura un punto **P** a 3 cm de la base del triángulo, ¿cuál es el área de la parte sombreada de la figura?"

Se considera que la herramienta puede ayudar a que los estudiantes determinen que la figura sombreada es un trapecio y fomentar esto a su vez que estos planteen procedimientos para argumentar las respuestas encontradas con la herramienta.

Parte 2: *"*Muevan el punto **P** sobre la altura para que el área sombreada mida $24\ cm^2$, $31.5\ cm^2$ y $40\ cm^2$. ¿A qué distancias de la base ubicaron al punto P para obtener las áreas pedidas?"

Respecto del caso 3: $Area = 40cm^2$, como se dijo anteriormente se espera que los estudiantes manipulen la herramienta y encuentren que al valor $p = 16cm$ le corresponde $A = 40cm^2$, valor de p que supera la altura del triángulo ABC. Una vez que los estudiantes hayan llegado a este punto y observado esta situación con $p = 16cm$, se les puede cuestionar acerca de la validez de dicha respuesta y pedirles que justifiquen su postura. Mediante esta situación se considera que se puede llevar a que los estudiantes se cuestionen sobre el alcance de la tecnología en la representación y resolución de problemas matemáticos.

4.2 Sesión 2: El problema del bebedero

El problema del bebedero se considera el centro de la secuencia (ver anexo A) dado que para resolverlo se debe de hacer uso de todo aquello aplicado en los problemas anteriores (conocimientos, ideas y razonamientos).

En los resultados de la prueba piloto se observó que los estudiantes tendieron a usar la tecnología para responder las preguntas sin plantear un procedimiento escrito, situación que no se deseaba que se repitiera en la recolección principal de datos, dado que en dicha situación no había realmente un trabajo matemático que analizar. En su lugar este debía ser un problema en el que se introdujera el lenguaje algebraico para modelar una función, justificándose esto mediante el uso de un contexto extra-matemático. Un trabajo donde se plantearan procedimientos en los que los estudiantes aplicaran sus conocimientos matemáticos, entre estos, todos aquellos activados en la solución los problemas anteriores y las diversas discusiones en clase. Finalmente, esto se tradujo en que se debía encontrar una forma de favorecer/propiciar el trabajo matemático de los estudiantes y que al mismo tiempo la herramienta tecnológica (applet 2) fuera útil en la resolución del problema. Este fue un primer momento muy importante para el desarrollo de esta parte de la secuencia.

Estas situaciones detonaron dos grandes cambios en el diseño original del problema del bebedero tal como está propuesto en el primer capítulo del libro *Modelización matemática en el aula* (Segal & Guliani, 2008, pp. 13-36) El primer cambio realizado fue sobre la *estructura y forma* del problema; el segundo fue sobre el *contexto del problema*.

Respecto de la *estructura y forma*, se decidió separar las actividades del problema en dos partes. En la primera parte se presenta el problema del bebedero y se proporciona la herramienta tecnológica (applet 2), la cual no se usa en el diseño original de Segal y Guliani. En la segunda parte se promueve que los estudiantes se percaten de que las respuestas obtenidas en la primera parte usando la tecnología (applet 2) son poco “precisas”, y se les presenta una serie de subproblemas diseñados para guiarlos en la obtención de una solución “más precisa” (mediante el uso de lenguaje algebraico), lo cual es consistente con el contexto del problema.

Respecto del *contexto del problema*, si bien el problema del bebedero en la propuesta de Segal y Giuliani (2008) se presenta en un contexto real (el granjero que desea graduar un bebedero de animales), este no fue suficiente para propiciar/favorecer el trabajo matemático de los estudiantes. Considerando esto se introdujo el tema de la “precisión” como parte de la problemática a resolver: se agregó un elemento al contexto del problema en que se debía medir una cantidad precisa de medicamento desparasitante que el granjero debía poner al agua del bebedero. Mediante este elemento se logró que la exigencia de la “precisión” en la graduación de la varilla fuera central.

A partir de esta modificación del contexto, en la segunda parte de las actividades del nuevo diseño del problema del bebedero, se da a los estudiantes instrucciones y cantidades precisas a considerar para dosificar el medicamento y graduar la varilla con “precisión”. Se esperaba que esto pusiera a los estudiantes en la situación de que confrontar la precisión de los resultados obtenidos con la herramienta tecnológica, en la parte 1. Es interesante adelantar que, durante la implementación, los estudiantes se apropiaron exitosamente de esta confrontación entre el contexto y la precisión de los resultados y señalaron espontáneamente que de no suministrar cantidades precisas de medicamento “se le pueden morir sus vacas al granjero”.

La anterior es una descripción general de los aspectos que influenciaron el diseño y adaptación de las actividades que forman el problema del bebedero. Detalles específicos de estas se presentan a continuación.

4.2.1 Análisis previo

El problema del bebedero consta de dos partes:

1) determinar las alturas correspondientes a ciertos volúmenes del bebedero (100, 200, 300, … litros) y escribir las parejas de datos (altura, volumen) en una tabla, planteándose su resolución con el apoyo de tecnología (applet 2)
2) resolver el problema original a partir de una serie de subproblemas (ver anexo A).

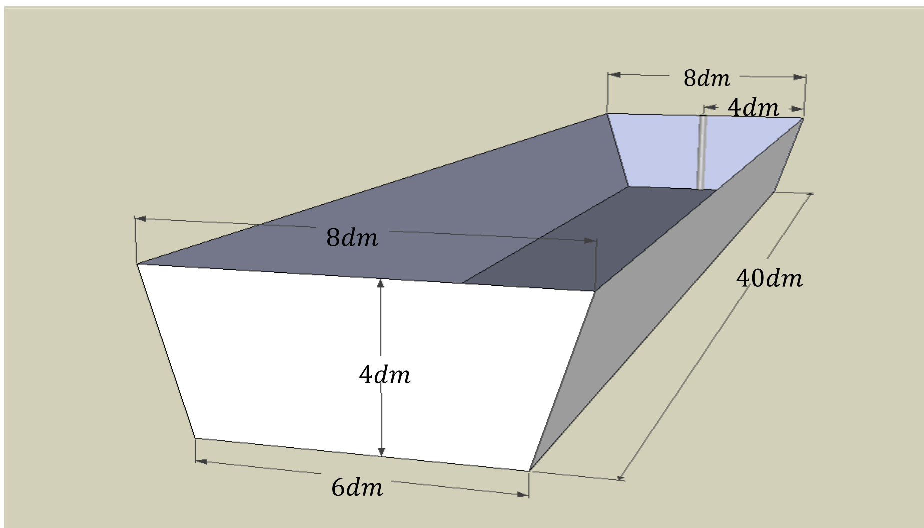


Figura 7: Representación del problema del bebedero.

El objetivo general del problema del bebedero es el lograr introducir el lenguaje algebraico para modelar una función, justificándose esto mediante el uso de un contexto extra-matemático. Asimismo, cada parte del problema tuvo su objetivo particular, respecto de la parte 2 se presenta su objetivo particular y los objetivos de cada uno de los subproblemas que componen dicha parte.

Respecto de la parte 1, el objetivo de esta es que los estudiantes cuestionen las soluciones relativamente poca precisas que se obtienen con la herramienta tecnológica y que den sentido a la introducción de la representación algebraica de la función correspondiente.

Acerca de la parte 2, el objetivo de la resolución de esta parte del problema es confrontar a los estudiantes con la “precisión” de las respuestas obtenidas en la primera parte del problema, mediante el uso del contexto. La introducción misma de esta parte busca que el estudiante comprenda que la tecnología puede ayudar a resolver problemas, pero que eso no implica que proporcionará una respuesta precisa, que tiene limitaciones; y que mediante la representación algebraica de la función que modela el problema se pueden superar dichas limitaciones. Se busca mostrar cómo, al unir, el trabajo matemático típico (aquel apoyado de lápiz, papel, los conocimientos de los estudiantes y todas aquellas acciones realizadas por estos para resolver un problema) y la tecnología, se puede obtener una solución adecuada para el problema planteado. A continuación, se presentan los objetivos individuales de cada uno de los subproblemas de la parte 2 (ver Anexo A):

- El inciso a) se plantea con la intención de establecer la relación entre las unidades dm^3 y $litros$ ($1dm^3 = 1litro$).
- En el inciso b) se espera que aparezcan nociones de variación y dependencia, las cuales son importantes para obtener la solución del problema.
- El inciso c) se plantea para apoyar a los estudiantes a corroborar lo obtenido en el inciso anterior.
- El inciso d) busca obtener una expresión algebraica que permitirá resolver el problema.
- El inciso e) se plantea como forma de resumir el trabajo hecho a lo largo de los incisos anteriores.
- Los incisos f) y g) se plantean para promover la interpretación de la expresión algebraica del volumen obtenida en términos del contexto del problema.

A continuación, se presenta el análisis previo de cada una de las partes (1 y 2) del problema. Dado que la actividad de la parte 1 está diseñada para resolverse mediante la herramienta es que su análisis es breve, mientras que el análisis de la parte 2 comprende todos los elementos considerados en los problemas previos (caminito y triángulo): 1) posibles conocimientos matemáticos involucrados en la resolución, 2) Conocimientos previos necesarios y 3) posibles procedimientos, errores y dificultades de los estudiantes.

Análisis de la parte 1: primera aproximación al problema del bebedero

En la parte 1 se introduce el problema del bebedero, así como la herramienta tecnológica. Se espera que los estudiantes manipulen la herramienta y observen que a través de ella se pueden obtener soluciones aproximadas para el problema. Además, se espera que identifiquen relaciones relevantes para la resolución de la parte 2, como que el volumen no aumenta de manera lineal conforme se aumenta el valor de la altura, por mencionar un ejemplo.

Al final de esta primera parte se cuestiona a los estudiantes sobre las respuestas encontradas, reflexionando sobre el hecho de ser respuestas aproximadas.

Análisis de la parte 2: búsqueda de una mayor precisión

El análisis de esta parte se realiza considerando de forma simultánea la parte matemática y el uso de la tecnología.

1.- Posibles conocimientos matemáticos involucrados en la resolución.

Para resolver el problema, se involucran los siguientes conocimientos:

- Función inversa a una función cuadrática y su obtención.
- Resolución de ecuaciones cuadráticas e interpretación de las soluciones de una ecuación cuadrática.
- Resolución grafica de una ecuación cuadrática.

2.- Conocimientos previos necesarios.

Establecido lo anterior, para que los estudiantes puedan comenzar a resolver el problema, se requieren de los conocimientos previos:

- Concepto de área y volumen, en específico del trapecio y el prisma respectivamente, así como el cálculo de estas cantidades.
- Nociones de variación y dependencia.
- Semejanza de triángulos (criterios, concepciones, etc.) y razón de semejanza.

3.- Posibles procedimientos, errores y dificultades de los estudiantes.

En esta segunda parte del problema se guía el trabajo de los estudiantes mediante los pasos que se presentan. A continuación, se presentan las posibles dificultades y procedimientos que los estudiantes pueden llegar a tener y plantear en cada uno de estos pasos.

Para el inciso a)

Considerando la información que se da acerca del bebedero (prisma con caras en forma de trapecio) y las fórmulas que se dan, se espera que los estudiantes no tengan problemas para determinar el volumen en dm^3. Planteando así:

$$volumen = \left(\frac{(B+b)h}{2}\right)(l) = \left(\frac{(8+6)(4)}{2}\right)(40) = 1120dm^3$$

Lo que puede no resultar sencillo es convertir el volumen a litros. Con el fin de ayudar a que los estudiantes, se plantea el dejarles resolver el problema hasta llegar a este punto y después preguntarles sobre si conocen como se relacionan dm^3 y $litros$ ($1dm^3 = 1\ litro$).

Así los estudiantes pueden deducir que:

$$Volumen = 1120\ dm^3 = 1120\ litros$$

Para el inciso b)

Este inciso se plantea con guía por parte del profesor y en este se solicita encontrar el área de la figura sombreada (azul) en términos de una altura h (ver Figura 8), permitiéndose que los estudiantes hagan sus propios planteamientos iniciales. Se espera que con apoyo de la Figura 8 y el applet los estudiantes observen como, dada una altura h (el nivel del agua), se forma en la cara transversal del bebedero otro trapecio más pequeño: la sección sombreada. Por lo que se pueden apoyar de la fórmula del área del trapecio para encontrar el área solicitada en términos de h.

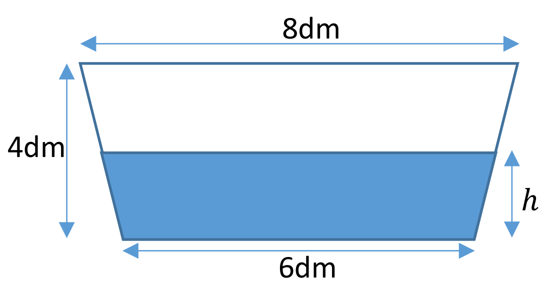


Figura 8: figura asociada al inciso b).

Con esta información es posible que los estudiantes expresen que el área de la figura sombreada es:

$$A = \frac{(B+6)h}{2}$$

En general se espera que los estudiantes noten que:

1. las longitudes de las bases mayor y menor del bebedero permanecen fijas
2. h, que corresponde a la altura del agua del bebedero, es variable (teniendo un cierto dominio).
3. La base mayor B del trapecio sombreado es variable

Esto con el apoyo de la Figura 8 y el applet.

Para ayudar a los estudiantes con esto se les puede solicitar que retomen las preguntas ubicadas al final del inciso b), sobre el uso de la herramienta. Estas preguntas buscan que identifiquen que h puede tomar cualquier valor (entre 0 y 4dm) y que la base mayor del trapecio formado por el agua "depende" de la altura h.

Para continuar, se puede sugerir a los estudiantes que activen la opción de "complementos" del applet (ver Figura 9) y preguntarles sobre los valores que toma B para los casos en que $h = 0 \ y \ h = 4$, y en otros casos.

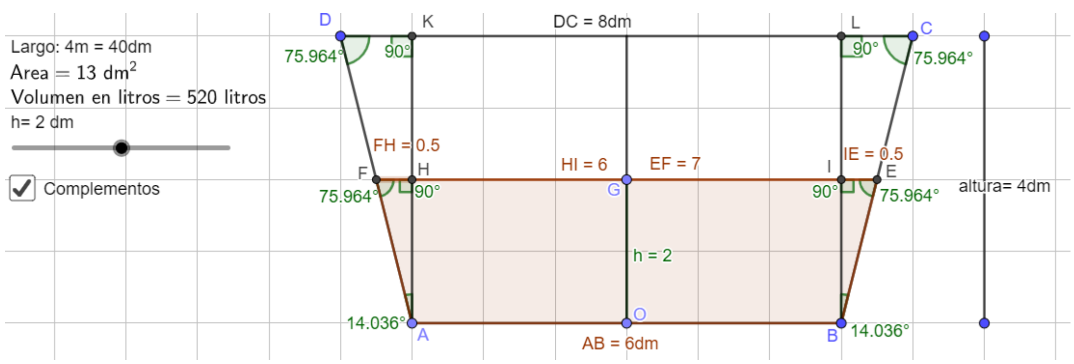


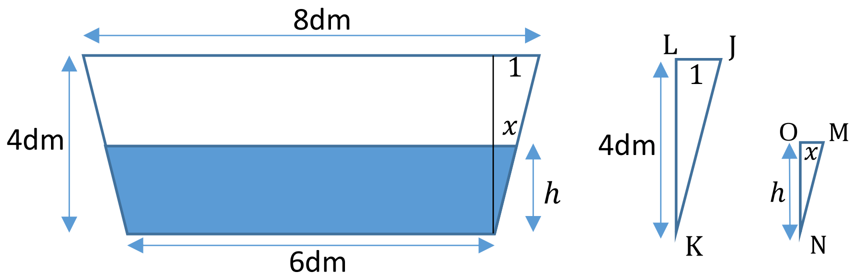
Figura 9: Applet 2 con "complementos" activados.

Con los complementos activados, el applet puede ayudar a los estudiantes a observar que la base mayor B tiene valor mínimo de $6dm$ y valor máximo $8dm$, y que el segmento que representa la base mayor se puede separar en tres partes: dos extremos que miden una cantidad desconocida x, que depende de la altura h; y una parte intermedia de $6dm$ de longitud. De aquí se puede concluir que:

$$B = 6 + 2x$$

Siendo el nuevo problema encontrar el valor de x.

A partir de semejanza de triángulos, se espera que los estudiantes planteen una razón que les permita encontrar x (ver Figura 10), considerando los triángulos JKL y MNO, como se muestra a continuación:



$$\frac{1}{4} = \frac{x}{h} \rightarrow x = \frac{h}{4}$$

Figura 10: imagen asociada al inciso b, triángulos JKL y MNO; y razón de semejanza.

Para terminar la solución de este inciso, el profesor puede recuperar el problema inicial y recordar a los estudiantes que lo buscado era el área de la figura sombreada en términos de h, restando sustituir x en la expresión de B y lo obtenido de esto en la expresión del área del trapecio:

$$B = 6 + 2x = 6 + \frac{h}{2} \rightarrow \qquad A = \frac{\big((6 + 2x) + 6\big)h}{2}$$

Para el inciso c)

En este inciso se espera que algunos estudiantes se queden con la expresión algebraica sin desarrollar y otros opten por desarrollarla. El profesor puede señalar que las expresiones de las respuestas I Y II son equivalentes.

Para el inciso d)

En este inciso se espera que los estudiantes tomen la expresión de área encontrada y la multipliquen por el largo, esto considerando el antecedente del inciso a). Obteniendo la expresión $V(h)$.

Para el inciso e)

Esta es la actividad que permite concluir con el problema por lo que es importante dar libertad de trabajo a los estudiantes. A continuación, se muestran algunos de los procedimientos que podrían plantear los estudiantes.

Procedimiento 1: despejar h en $V(h)$ mediante la completación de cuadrados.

$$V = 240h + 10h^2$$

$$V = 10(h + 12)^2 - 1440$$

$$h = -12 \pm \left(\frac{V + 1440}{10}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$h_1 = -12 + \left(\frac{V + 1440}{10}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad h_2 = -12 - \left(\frac{V + 1440}{10}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Se espera que los estudiantes observen que para cada volumen que tomen la expresión le regresara dos valores, lo que puede llevar a que se cuestionen la veracidad del modelo al que se llegó. Una manera de superar esta situación es ayudándolos a observar que en la expresión original $V(h)$ se llega a la restricción de que $0 \leq h \leq 4$ analizando el problema mismo, y observando que naturalmente h solo puede tomar esos valores dado el contexto del problema, y siguiendo esta idea, dado que h es positiva no tiene sentido tomar los valores de la expresión h_2, dado que siempre serán valores negativos.

Obteniendo una expresión $h(V)$ y restando sustituir $V = 700$ para obtener el h correspondiente.

$$h(V) = -12 + \left(\frac{V + 1440}{10}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad 0 \leq V \leq 1120$$

El conjunto de valores del volumen se espera que les resulte intuitivo a los estudiantes. Esto considerando que cuando la altura es cero el volumen también lo es y que el volumen máximo se obtiene cuando se llena el bebedero, el cual tiene una capacidad de $1120\ litros$.

Si bien puede que los estudiantes planteen este procedimiento de despeje, el cual puede ser interpretado como la obtención de la función inversa, esto no implica necesariamente que vean a $h(V)$ como tal.

Procedimiento 2:

Los estudiantes pueden plantear la resolución de una ecuación cuadrática:

$$240h + 10h^2 = 700$$

Obteniendo que:

$$h_1 = -12 + \sqrt{214} \qquad h_2 = -12 - \sqrt{214}$$

Aquí se espera que los estudiantes se cuestionen sobre cuál es la respuesta correcta y que la determinen después de considerar que el problema les pedía una altura. En caso de no poder determinar la respuesta, esto puede implicar que no se han apropiado del contexto del problema. Considerando el contexto, la respuesta es:

$$h_1 = -12 + \sqrt{214}$$

Procedimiento 3:

Tomar la función $V(h)$ con las restricciones naturales del problema, graficarla y determinar de forma aproximada el valor de h tal que $V = 700$. Es decir, esto sería el equivalente grafico a resolver una ecuación cuadrática.

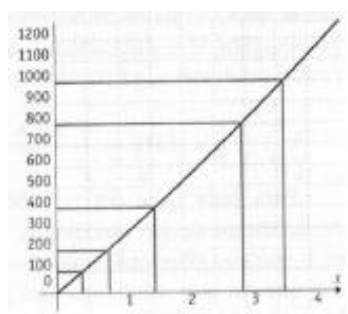


Figura 11: Imagen recuperada de la propuesta de Segal y Giuliani (2008).

En general se espera que los estudiantes se apropien del contexto del problema y reflejen una precisión mayor a la empleada de manera inicial en la parte 1, usando mínimo 4 decimales en sus respuestas: considerando el elemento del contexto introducido al inicio de la parte 2.

4.2.2 Diseño de la herramienta tecnológica

Como se mencionó a lo largo de esta sección la herramienta tecnológica favorece/propicia el trabajo matemático que los estudiantes realizan con lápiz y papel.

Esto se logra mediante un modelo geométrico dinámico en Geogebra cuyo uso en la secuencia promueve que los estudiantes movilicen algunos conocimientos clave para resolver los problemas, los cuales son: la semejanza de triángulos y nociones de variación y dependencia.

A continuación, se presentan los elementos principales que conforman la construcción de Geogebra diseñada para apoyar el trabajo en este problema (ver Figura 12). En la figura se muestra una de las caras del bebedero (trapecio $ABCD$) con las medidas de sus elementos (base menor, base mayor y altura), la figura sombreada (trapecio $ABEF$) con sus elementos, el cual representa que tan lleno está el bebedero (nivel del agua), los triángulos ADK, AHF, BCL y BEI; como apoyo para plantear la razón de semejanza del inciso b) y observar otras relaciones. Asimismo, en la parte izquierda se muestra la información del largo del bebedero, la altura h de la figura sombreada (nivel del agua), el área del trapecio sombreado $ABEF$ la cual depende de h, el volumen del bebedero el cual depende de h, un deslizador para modificar el valor de h, un punto G con el que también se puede modificar dicho valor y un botón para activar y desactivar la visión de ciertos “complementos”.

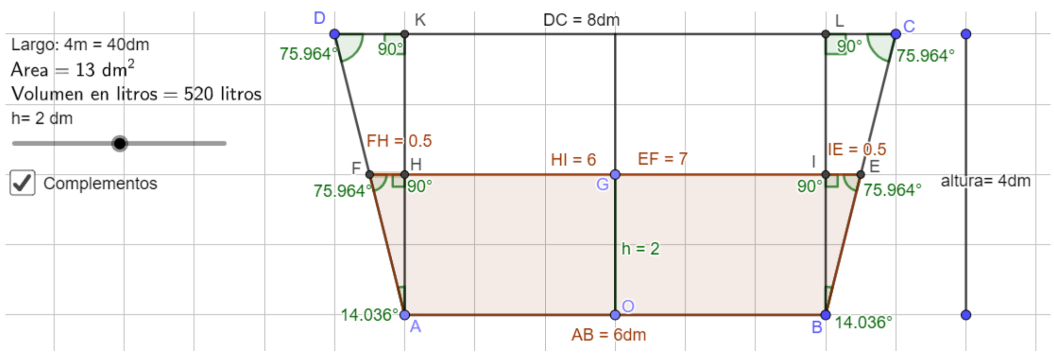


Figura 12: Applet 2 con los “complementos” activados.

Capítulo 5 Análisis de la implementación y de las producciones de los estudiantes: contexto, tecnología e intervención docente.

El análisis de la implementación y de las producciones de los estudiantes fue realizado aplicando tres categorías: contexto, tecnología e intervención docente, así como la concepción de modelización de Sadovsky (2005).

El contexto es un elemento considerado dentro de la concepción de modelización de Sadovsky (2005), la cual resalta aspectos potencialmente positivos y negativos de dicho elemento en la producción de conocimiento. La tecnología es un elemento que se introdujo como parte del rediseño de la propuesta de Segal y Giuliani (2008), por lo que es importante ver qué tipo de papel jugó en las producciones de los estudiantes. Finalmente se consideró la intervención del docente debido a que hubo momentos importantes en los que este elemento pudo influir en el trabajo de los estudiantes, esto desde la perspectiva del tesista.

En las subsecciones siguientes se presentan los tres problemas: caminito, triangulo y bebedero. Se muestran los diversos tipos de procedimientos observados, se destacan algunas de las intervenciones del tesista y momentos de uso de tecnología (applets)¸analizándose todo esto considerando las tres categorías de análisis.

5.1 Problema del caminito

El problema es de contexto intra-matemático, específicamente geométrico. Se considera que este elemento y la intervención del tesista facilitaron el planteamiento y desarrollo de procedimientos por parte de los estudiantes: parte de un trabajo de modelización; dichos métodos observados fueron clasificados en tipos y se describen en la sección siguiente. Respecto de la intervención del tesista, esta se dio después de que los estudiantes trabajaran el problema un tiempo (entre 15 y 20 minutos después de comenzar), momento que se considera de importancia, detallándose este en la sección 5.1.2.

5.1.1 Tipos de procedimientos

Se identificaron dos tipos de procedimientos: 1) Obtener el área a partir de la suma y diferencia de áreas de figuras interiores del rectángulo $ACEF$ e 2) identificar la figura como un trapecio y obtener el área mediante su fórmula. Separándose el primer tipo en dos subtipos: I) resta directa de áreas y II) suma y resta de áreas considerando un todo: rectángulo $ACEF$. Cabe destacar que los tipos de procedimientos 1 y 2 fueron considerados en el análisis preliminar en diferente medida.

Respecto del equipo grabado, este planteó los tipos de procedimientos 1 y 2, llevando a cabo de manera exitosa el primero; identificándose razonamientos interesantes en dicho procedimiento. Además, los integrantes hicieron uso del espacio de GeoGebra para reconstruir la figura mostrada en el problema, situación que resultó interesante por distintas razones: no se esperaba esta situación, lo intentaron de diversas formas y fue el único equipo que se observó usando GeoGebra para este problema. Dicho esto, se observaron dificultades en el proceso de reconstrucción, por lo que considerando esto se puede decir que fue un acierto el plantear este problema sin apoyo de GeoGebra. A continuación, se resumen los procedimientos observados en la siguiente tabla:

Tipo	Frecuencia	Descripción
Suma y diferencia de áreas	7	Procedimiento 1 (resta directa de áreas): tomar el área del triángulo ACE (o la del triángulo AEF) y restarle el área del triángulo BCD (tres casos). Procedimiento 2 (suma y resta de áreas considerando un todo-rectángulo $ACEF$): tomar el área del rectángulo $ACEF$ y restarle el area de los triangulo AEF y BCD (cuatro casos). En la mayoría de los casos usando la semejanza de triángulos para encontrar el valor de CD (cinco casos). En los casos restantes usándose criterios o formas de razonamiento poco claros (dos casos).
Área del trapecio	2	Cálculo de la altura, base menor y base mayor del trapecio $ABDE$ apoyándose de funciones trigonométricas y teorema de Pitágoras, planteamiento de la formula del área del trapecio y obtención del área (dos casos)

Tabla 1: Resumen de los tipos de procedimientos (problema 1).

En la sección siguiente se presentan los dos tipos de procedimientos en los que se clasificó los procedimientos de los estudiantes. Cabe destacar que los procedimientos presentados en el tipo 1 se dividen en dos partes: antes y después de la intervención del tesista, identificándose el punto de intervención a partir de la inclusión de la semejanza de triángulos como parte de su resolución. En el caso del procedimiento presentado en el tipo 2 no se señala ningún punto debido a que en este no se observó el uso de la semejanza de triángulos para la resolución.

5.1.1.1.- Tipo de procedimiento 1: Suma y resta de áreas

a) Procedimiento 1: resta directa de áreas

En el ejemplo mostrado las operaciones reflejadas sugieren que los estudiantes tomaron el área del triángulo AEF (que es idéntica a la del triángulo ACE) y le restaron el área del triángulo BCD, quedando en duda la razón de calcular el área del rectángulo $ACEF$; determinando así el área del caminito. En primera instancia calcularon el área del rectángulo y del triángulo AEF (ver Figura 11).

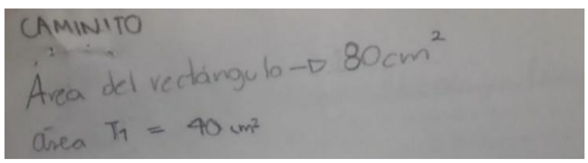


Figura 11: Calculo del área del rectángulo $ACEF$ y del triángulo AEF.

Se puede decir que calcularon el área del triángulo AEF considerando lo dibujado en sus hojas de problemas (ver Figura 12), dado que mediante estas se pudo identificar a que figuras pertenecían todas las áreas expresadas en sus hojas de trabajo. Un punto para resaltar es que no se puede apreciar explícitamente si se utilizó el área del rectángulo en algún punto.

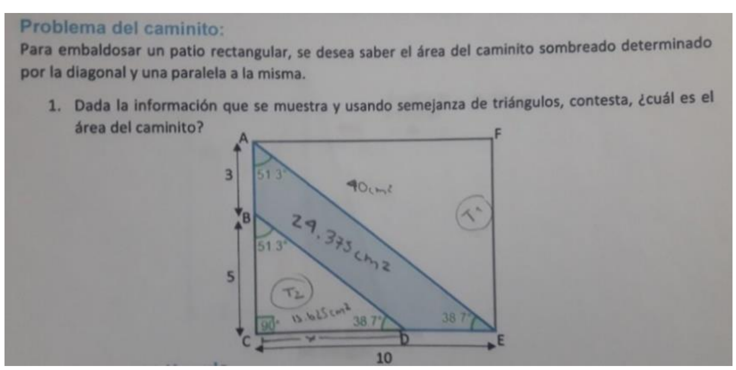


Figura 12: Figuras empleadas en el procedimiento de los estudiantes.

Punto de intervención

A continuación, los estudiantes plantearon una razón de semejanza para obtener el lado CD y calcularon el área del triángulo 2 (triangulo BCD). Con esta información calcularon el área del caminito (ver Figura 13).

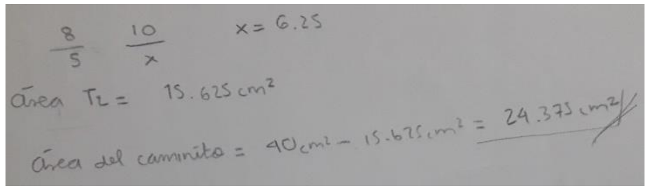


Figura 13: Razón de semejanza, área de T_2 y área del caminito.

b) Procedimiento 2: suma y resta de áreas considerando un todo (rectángulo $ACEF$)

En el ejemplo mostrado los estudiantes tomaron el área del rectángulo $ACEF$ y le restaron las áreas de los triangulo AEF y BCD, determinando de esta forma el área del caminito. Considerando lo observado en sus hojas de problemas y de trabajo, se puede decir que en primera instancia plantearon como obtener esta área de forma general (ver Figura 14) y después fueron buscando las áreas que necesitaban calcular: rectángulo $ACEF$, triangulo AEF y triangulo BCD.

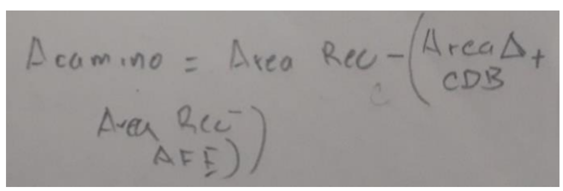


Figura 14: Planteamiento del procedimiento.

Punto de intervención

Hecho esto se puede decir que los estudiantes observaron que para obtener el área del triangulo BCD debían encontrar primero el valor del lado CD. Después procedieron a calcular las áreas que podían obtener con la información inicial dada por el problema. Para computar el área del triángulo BCD primero obtuvieron el lado CD a partir de usar semejanza de triángulos, en específico de la razón de semejanza (ver Figura 15 y 16).

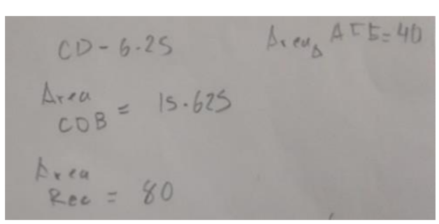


Figura 15: Área del rectángulo $ACEF$, y de los triángulos AFE y BCD.

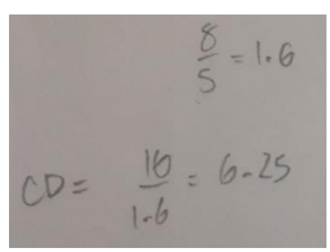


Figura 16: Uso de Razón semejanza para obtener CD.

Con esta información los estudiantes procedieron a realizar la diferencia de áreas planteadas y obtuvieron el área buscada (ver Figura 17).

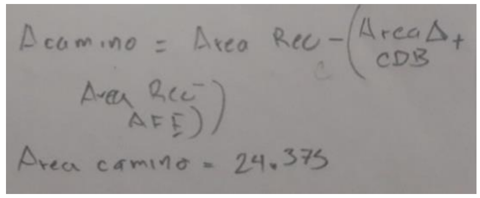


Figura 17: Cálculo del área del caminito.

5.1.1.2.- Tipo de procedimiento 2: cálculo a partir de la fórmula del área del trapecio

En el procedimiento que se muestra a continuación los estudiantes no nombraron los vértices de las figuras, pero a través de las medidas de los lados y ángulos mostrados, se dedujo que figuras representaban de la figura en la hoja del problema. En el caso del trapecio dibujado se dedujo que este representaba el caminito (trapecio $ABDE$).

En primera instancia se observó cómo los estudiantes encontraron los lados restantes de los triángulos ACE y BCD. Para el triángulo BCD calcularon CD a partir de $\tan{(51.3)}$ y BD usando el teorema de Pitágoras, obteniendo 6.24 y 8 respectivamente (ver Figura 18). Haciendo esto mismo con triangulo ACE: utilizando el teorema de Pitágoras para encontrar la hipotenusa AE (ver Figura 19).

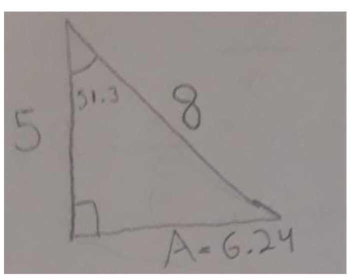


Figura 18: Triángulo BCD representado por los estudiantes.

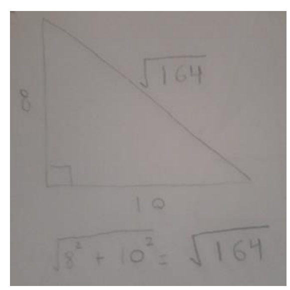


Figura 19: Triángulo ACE representado por los estudiantes y cálculo de su hipotenusa.

Después recuperaron la figura del caminito e indicaron los valores de los lados $BD = 8$, $AE = \sqrt{164}$ y $AB = 3$; plantearon un triángulo interior a este con sus ángulos (señalado en rojo) y buscaron su altura mediante funciones trigonométricas (ver Figura 20). Con esta información (bases y la altura) los estudiantes aplicaron la fórmula del área del trapecio (ver Figura 21).

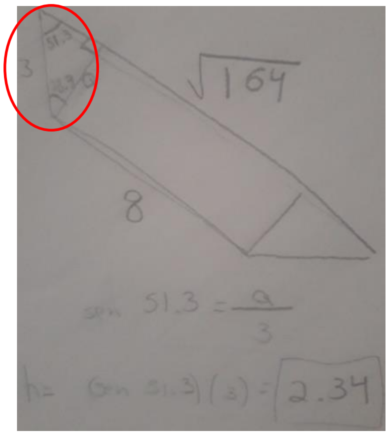


Figura 20: Caminito (Trapecio $ABDE$) y triangulo interior (círculo rojo) y altura h.

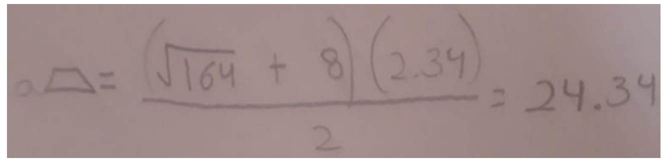


Figura 21: Calculo del área del trapecio $ABDE$ (caminito).

5.1.2 Intervención del tesista

Un momento importante fue la intervención grupal del tesista, la cual se dio entre 15 y 20 minutos después de que empezara la actividad, cuyo contenido fue la semejanza de triángulos.

Previo a este momento el tesista observó parte del trabajo de los equipos apreciándose el planteamiento y desarrollo de procedimientos sin usar la semejanza de triángulos y el planteamiento de procedimientos bien encaminados: mediante estos los estudiantes podían llegar a la respuesta, pero les faltaban datos, entre estos el lado CD. Asimismo, se les preguntó a algunas parejas sobre que sabían de la semejanza de triángulos, contestando la mayoría que no recordaban de que trataba.

La intervención comenzó con el tesista preguntándole a todo el grupo sobre la semejanza de triángulos, los estudiantes empezaron a discutir y eventualmente se le dio la palabra a un estudiante quien mencionó el teorema de Thales; señalando el tesista que efectivamente existe una relación entre dichos temas.

> **Tesista**: la semejanza de triángulos nos decía que relación comparten, en este caso dos triángulos, para llamarlos de dicha forma. Por ejemplo (el tesista dibuja dos triángulos rectángulos) este… un triángulo que conocen mucho ustedes, un triángulo rectángulo.

Dos triángulos son semejantes si por un lado todos sus ángulos correspondientes son iguales (el tesista agrega los símbolos de ángulos en el primer triangulo) estos dos son semejantes si estos ángulos que tiene este triángulo (señalando el primero) los comparte con el otro que estamos diciendo en cuestión (se escriben los mismos ángulos que en el primero, en el segundo).

Pero aparte nos da otra relación entre los dos triángulos. Nos dice que, si nosotros tomamos el valor de sus lados y sacamos los cocientes, estos cocientes son iguales, por ejemplo:

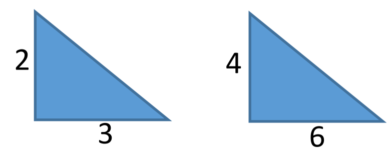


Figura 22: Triángulos dibujados por el tesista en el pizarrón.

Este lado que le corresponde a este lado (señalando la altura del primero y después la del segundo) si nosotros sacamos el cociente, ya sea el más grande sobre el más chico o viceversa, esto es (se escribe $\frac{4}{2} = 2$) este valor va a coincidir también si tomamos el otro par de lados correspondientes, en este caso 3 y 6 (se escribe $\frac{6}{3} = 2$).

O sea, sin importar el cociente que hagamos entre los respectivos lados, van a tomar… el cociente va a tomar el mismo valor, que es lo que se le llama en este caso la razón de proporcionalidad entre los dos triángulos o de semejanza, eso es esencialmente el resultado del que les habla el problema.

Los triángulos son semejantes si tienen todos son ángulos interiores iguales y además si podemos corroborar que se cumple esta igualdad entre las razones que hay entre sus correspondientes lados.

(Transcripción 1)

Se considera que la intervención del tesista fue crucial en lo que respecta a los procedimientos de tipo 1. Esto en el sentido de que, para desarrollarlos, los estudiantes necesitaban conocer el valor del lado CD, el cual se podía obtener mediante el uso de la noción de semejanza de triángulos y la razón de semejanza (contenido de la intervención). De esta forma se considera que la intervención del tesista favoreció el desarrollo de este tipo de procedimiento, sin descartarse la posibilidad de que también les facilitara el planteamiento inicial de procedimientos de dicho tipo.

De forma general se puede decir que esta intervención repercutió a lo largo de la implementación de toda la secuencia, lo cual se puede inferir después de observar los diversos tipos de procedimientos planteados en cada uno de los tres problemas y la semejanza entre algunos tipos, por ejemplo, los procedimientos de suma y resta de áreas planteados en los problemas 1 y 2.

5.1.3 Análisis de las producciones de los estudiantes: el problema del caminito

En general se observaron los tipos procedimientos considerados en el análisis previo: 1) suma y diferencia de áreas e 2) identificar la figura sombreada como un trapecio y calcular su área. Respecto de la segunda estrategia, en el análisis previo se expresó que si bien se consideró la posibilidad de su planteamiento no se esperaba que los estudiantes pudieran desarrollarlo de manera exitosa, esto por la dificultad de obtención de la altura del trapecio. Dicho esto, se observaron trazos de este procedimiento y al menos un equipo que fue capaz de desarrollarlo de manera exitosa, usando para esto funciones trigonométricas.

Los conocimientos puestos en práctica fueron diversos: teorema de Pitágoras, relaciones trigonométricas, semejanza de triángulos, entre otros. Si bien se había planteado la semejanza de triángulos como la herramienta principal para la resolución del problema, se observaron casos donde no fue así, como cuando los estudiantes recurrieron a las funciones trigonométricas como la herramienta central para la resolución, situación que no fue considerada en el análisis previo.

Respecto de los procedimientos 1 y 2 (tipo 1), se considera que su planteamiento y desarrollo por parte de los estudiantes se vio favorecido por el contexto del problema, ¿cómo es esto? Se visualizó el siguiente escenario posible acerca de sus antecedentes: los estudiantes han trabajado desde primaria con figuras geométricas (triángulos, rectángulos, cuadrados, etc.). Respecto al área, han adquirido experiencia computándola mediante distintos tipos de técnicas, por ejemplo, unir y extraer figuras para calcular el área de una figura de interés (suma y diferencia de áreas).

Teniendo en cuenta este escenario, se considera que los antecedentes de los estudiantes (acerca de las figuras geométricas y el cálculo de sus áreas) fueron evocados debido la diversidad de figuras que podían visualizar en la figura 1, elemento relacionado con el contexto del problema, lo que favoreció el planteamiento y desarrollo de los procedimientos 1 y 2 (tipo 1). Particularmente se pueden visualizar diversos triángulos, figura con la que los estudiantes, en teoría, están ampliamente familiarizados.

Acerca del tipo 2, una acción importante para su planteamiento fue identificar que la figura sombreada era un trapecio. Se considera que, dada la imagen del problema (de una calidad relativamente buena en el sentido de que favorecía la visualización de figuras interiores), los conocimientos previos de los estudiantes sobre figuras geométricas y la información dada por el problema sobre el paralelismo de AE y BD; éstos pudieron determinar que la figura $ABDE$ es un trapecio.

Teniendo en cuenta estas ideas, se puede decir que el contexto geométrico del problema favoreció el planteamiento y desarrollo de los dos tipos de procedimientos (1 y 2) por parte de los estudiantes: favoreció parte de un trabajo de modelización. Asimismo, se considera la familiaridad con este tipo de problema (en teoría por sus antecedentes) fue un elemento que propició el que intentaran plantear un procedimiento.

La intervención del tesista fue crucial en lo que respecta a los procedimientos de tipo 1. Esto en el sentido de que para desarrollarlos necesitaban conocer el valor del lado CD, el cual se podía obtener mediante el uso de la noción de semejanza de triángulos y la razón de semejanza (contenido de la intervención). De esta forma se considera que la intervención del tesista favoreció el desarrollo de este tipo de procedimiento, sin descartarse la posibilidad de que también les facilitara la parte del planteamiento.

Respecto del tipo de procedimiento 2, las herramientas centrales para la resolución fueron las funciones trigonométricas, las cuales, se piensa, fueron evocadas por los estudiantes debido a elementos relacionados con el contexto del problema como la figura 1.

Específicamente ¿cómo fue que el contexto geométrico llevó al planteamiento de funciones trigonométricas? Para poder desarrollar este tipo de procedimiento los estudiantes posiblemente se encontraron ante la situación de que necesitaban calcular información desconocida (lados y ángulos), después observaron que esta formaba parte de triángulos interiores al triángulo ABC de los cuales conocían algunos lados y ángulos, lo que provocó que los estudiantes evocaran dichas funciones. Lo anterior, puesto que son herramientas mediante las cuales se puede obtener dicha información incógnita con conocer solamente unos pocos lados y ángulos. Además, estas funciones se suelen enseñar en la materia de Geometría y Trigonometría a partir de un triángulo. De esta forma se puede decir que el contexto llevó al planteamiento/evocación/establecimiento de funciones trigonométricas.

5.2 Problema del triángulo

5.2.1 Sobre la primera parte del problema del triangulo

El problema es de contexto intra-matemático, específicamente geométrico. Se considera que este elemento y la intervención del tesista facilitaron el planteamiento y desarrollo de procedimientos por parte de los estudiantes: parte de un trabajo de modelización. Asimismo, se considera que la familiaridad con este tipo de problema (en teoría por sus antecedentes) propició que intentaran plantear un procedimiento y facilitó el que lo hicieran exitosamente. Los procedimientos observados fueron clasificados en tipos (1, 2 y 3), los cuales se describen y analizan a lo largo de la sección siguiente.

Respecto del equipo grabado, si bien se observó el planteamiento de diversos procedimientos, los estudiantes decidieron usar la respuesta obtenida mediante el applet (descartando lo obtenido de sus procedimientos). Dicho esto, se resalta que plantearon estos procedimientos a partir de información proveída por el applet del problema: se observó como el applet facilitó parte de un trabajo de modelización. Entre sus procedimientos se destacó uno en el que plantearon uno muy semejante a un procedimiento de tipo 3, aunque no lo pudieron llevar a cabo de manera satisfactoria.

A continuación, se resumen los procedimientos observados en la siguiente tabla:

Tipo de procedimiento	Frecuencia	Descripción
1.- Suma de áreas	3	Separar la figura sombreada en un triángulo y un rectángulo (mediante un segmento perpendicular a AC que parte de este segmento y con vértice en Q), cálculo de las áreas de las figuras (apoyándose de la semejanza para determinar PQ) y suma de dichas áreas para obtener el área sombreada.
2.- Diferencia de áreas	1	Cálculo de las áreas de los triángulos BRC y BPQ (apoyándose de la semejanza de triángulos para obtener PQ), tomar la primera área y restarle la segunda para obtener el área sombreada.
3.-Área del trapecio	2	Cálculo de lado PQ apoyándose de funciones trigonométricas, planteamiento de la formula del área del trapecio y obtención del área (un caso) En el segundo caso no fue posible identificar el cómo determinaron el lado PQ.
Otros	3	-Planteamiento de diversos procedimientos (que más tarde fueron descartados) y uso del applet para obtener la respuesta de manera directa (equipo grabado). -Indicios de un intento, pero sin una idea concreta (un caso). -Nada escrito (un caso)

Tabla 2: Resumen de los tipos de procedimientos (problema 2-parte 1).

5.2.1.1 Tipos de procedimientos

En primera instancia se identificaron tres tipos de procedimientos: 1) obtención del área a partir de la suma de áreas, 2) obtención del área a partir de la diferencia de áreas y 3) cálculo a partir de la fórmula del área del trapecio. Específicamente, los tipos de procedimientos 2 y 3 fueron considerados como parte del análisis preliminar.

5.2.1.1.1 Tipos de procedimiento 1 y 2: Sobre la suma y diferencia de áreas

A continuación, se presentan dos procedimientos en los que se plantea la suma y diferencia de áreas de figuras internas a la figura del problema, representando estos a los tipos 1 y 2 respectivamente.

En el procedimiento representante del tipo 1 (ver Figura 23) se puede observar cómo los estudiantes renombraron los vértices P, Q y R como N, M y F. Después hicieron uso de la semejanza de triángulos y a partir de la razón de semejanza encontraron el lado $PQ = x = 4$, después extrajeron los triángulos BFC y BMN (BRC y BPQ usando la notación de la figura original del problema) y calcularon sus áreas. Finalmente obtuvieron el área de la figura sombreada tomando el área del primer triangulo y restándole la del segundo, obteniendo 13.5.

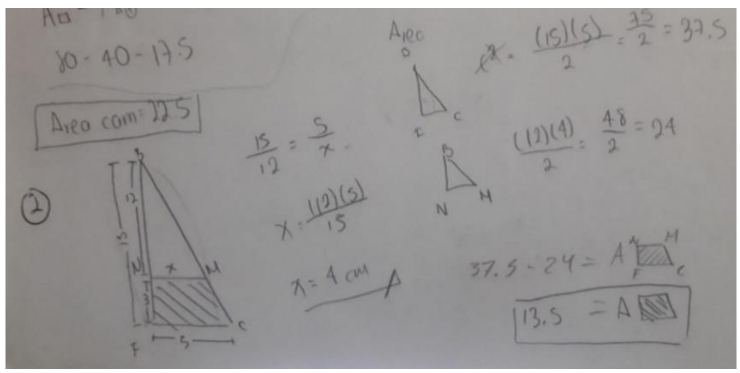


Figura 23: Diferencia de áreas.

En el tipo procedimiento 2 (Figura 24) los estudiantes separaron la figura sombreada en dos figuras: un triángulo y un rectángulo. Después hicieron uso de la semejanza de triángulos y a partir de la razón de semejanza encontraron el lado $PQ = 4$, calcularon las áreas del triángulo y del rectángulo (1.5 y 12 respectivamente) y con esta información obtuvieron el área de la figura sombreada $PQRC = 13.5cm^2$.

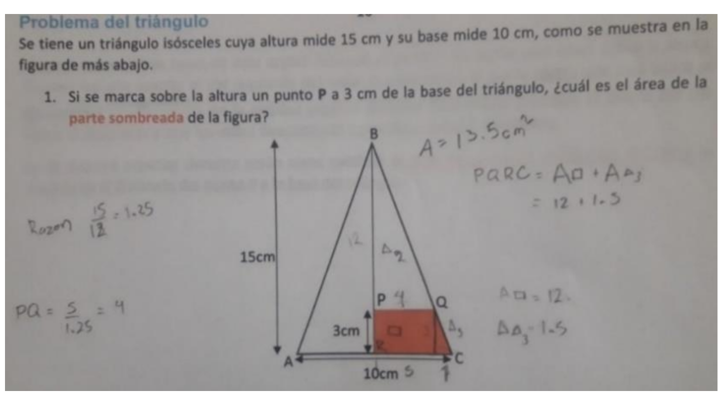


Figura 24: Suma de áreas.

5.2.1.1.2 Tipo de procedimiento 3: el cálculo del área identificando la figura como un trapecio

Respecto del procedimiento que involucra el cálculo del área del trapecio mediante su fórmula, si bien se consideró la posibilidad de su planteamiento apoyándose de la semejanza de triángulos, esto no se dio así: los estudiantes se apoyaron de las funciones trigonométricas.

En este procedimiento cabe destacar que la pareja de estudiantes no indicó los nombres de los vértices de sus figuras, pero a través de las medidas de los lados y ángulos se determinó que figuras representaban en sus hojas de trabajo. Dicho esto, se utilizó la notación de la figura del problema para describir el procedimiento (ver anexo A).

En primera instancia determinaron los ángulos del triángulo BRC, para esto utilizaron funciones trigonométricas. En específico identificaron que el θBRC era un ángulo recto, después determinaron el θBCR, nombrado como α, a partir de $\tan \alpha = \frac{15}{5}$ y de esta forma encontraron el ángulo restante B (ver Figura 25).

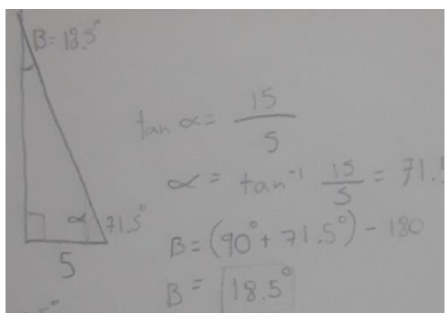


Figura 25: Obtención de los ángulos interiores del triangulo BRC.

Considerando las operaciones planteadas y las sugerencias dadas en las instrucciones generales de la actividad, se puede decir que los estudiantes se apoyaron de una calculadora para obtener el $\arctan \frac{15}{5}$.

Hecho esto recuperaron el triángulo BPQ y agregaron los ángulos obtenidos del triángulo BRC, lo que tiene sentido dado que los triángulos son semejantes: los estudiantes parecieron dar cuenta de esto y lo utilizaron. Con dichos ángulos y la altura de 12 plantearon la búsqueda de la base de dicho triangulo: b (ver Figura 26 y 27).

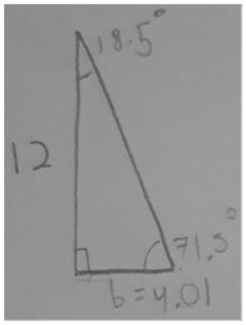


Figura 26: Triangulo BPQ.

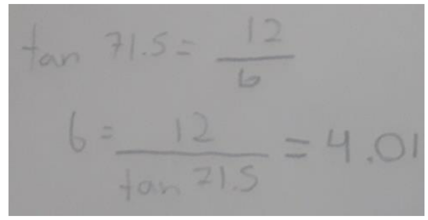


Figura 27: Obtención de la base del triangulo BPQ.

Después plantearon la figura sombreada y una fórmula para obtener su área: la fórmula del área del trapecio (ver Figura 28).

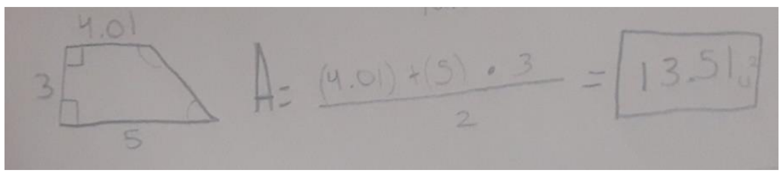


Figura 28: Obtención del área de la figura sombreada.

De esta forma obtuvieron el área solicitada. Cabe destacar que, si bien se puede decir que los estudiantes utilizaron parte de la definición de semejanza dada por el tesista, las funciones trigonométricas fueron las que jugaron un rol central en la resolución.

5.2.1.2 Análisis de las producciones de los estudiantes: primera parte del problema

Las tres categorías fueron aplicadas en el análisis de las producciones de los estudiantes para este problema, el cual tiene un contexto intra-matemático específicamente geométrico.

En esta primera parte del problema, sobre la búsqueda del área de la figura sombreada, se identificaron tres tipos de procedimientos[3]: 1) suma de áreas, 2) diferencia de áreas y 3) cálculo a partir de la fórmula del área del trapecio.

Se considera que el planteamiento y desarrollo de estos tipos de procedimientos por parte de los estudiantes se vio favorecido por el contexto del problema. Esto se reflejó de distinta manera dependiendo del método. En los procedimientos de suma y diferencia de áreas (1 y 2) se visualizó el siguiente escenario posible acerca de sus antecedentes: los estudiantes

[3] Se usarán las palabras "procedimientos" y "métodos" de manera indistinta.

han trabajado desde primaria con figuras geométricas (triángulos, rectángulos, cuadrados, etc.). Respecto al área, han adquirido experiencia computándola mediante distintos tipos de técnicas, por ejemplo, unir y extraer figuras para calcular el área de una figura de interés (suma y diferencia de áreas).

De esta forma se considera que los antecedentes de los estudiantes fueron evocados debido a la diversidad de figuras que podían visualizar en la figura del problema (ver anexo A), elemento relacionado con el contexto del problema, lo que favoreció el planteamiento y desarrollo de los procedimientos de tipo 1 y 2.

Acerca de los procedimientos de tipo 3, una acción importante para su planteamiento fue identificar que la figura sombreada era un trapecio. Se considera que, dada la imagen del problema (de una calidad relativamente buena en el sentido de que favorece la visualización de figuras interiores y la observación de diversas propiedades) y los conocimientos previos de los estudiantes sobre figuras geométricas, pudieron determinar que los lados PQ y RC de la figura $PQRC$ son paralelos mientras que los lados restantes no lo son; y de esta forma concluyeron que la figura $PQRC$ es un trapecio.

Teniendo en cuenta estas ideas, se puede decir que el contexto geométrico del problema favoreció el planteamiento y desarrollo de los tres procedimientos por parte de los estudiantes: parte de un trabajo de modelización. Asimismo, se considera que la familiaridad con este tipo de problemas (por sus antecedentes) propició que intentaran plantear un procedimiento.

Con respecto a los procedimientos de tipo 1 y 2, dado que la herramienta central utilizada por los estudiantes fue la razón de semejanza entre triángulos, es posible que la intervención del tesista durante la solución del problema 1 les favoreció de la misma forma que el contexto, como se describió con anterioridad.

En los procedimientos de tipo 3, las herramientas centrales para la resolución fueron las funciones trigonométricas, las cuales, se piensa, fueron evocadas por los estudiantes debido a elementos relacionados con el contexto del problema, en particular la figura 1. Específicamente, ¿cómo fue que el contexto geométrico llevó al planteamiento de funciones trigonométricas? Se considera que se dio de manera similar al procedimiento del trapecio expuesto en el problema 1: para desarrollar el procedimiento 3 los estudiantes posiblemente se encontraron ante la necesidad de calcular información desconocida (lados y ángulos). Después observaron que esta formaba parte de triángulos interiores al triángulo ABC, lo que provocó que los estudiantes evocaran/establecieran dichas funciones, puesto que, son herramientas mediante las cuales se puede obtener dicha información incógnita. Además, estas funciones se suelen enseñar en Geometría a partir de un triángulo. De esta forma se puede decir que el contexto llevó al planteamiento de funciones trigonométricas.

Una situación para resaltar es que hubo casos en que los estudiantes observaron que con la herramienta se puede obtener la respuesta exacta y consultaron con el tesista si podían usar dicha respuesta. Durante esta intervención el tesista les expresó que si no estaban satisfechos con esta forma de encontrar la respuesta podían plantear un procedimiento distinto para buscarla. Dado que la mayoría de los equipos intentaron plantear al menos un procedimiento, se considera que esto refleja la inconformidad de los estudiantes por obtener la respuesta de una manera “tan sencilla” (expresión utilizada por algunos de los equipos). De esta forma se puede decir que la intervención del tesista favoreció el planteamiento de procedimientos por parte de los estudiantes (trabajo matemático): parte de un proceso de modelización.

Asimismo, se observaron otras parejas de estudiantes que por iniciativa propia plantearon un procedimiento escrito después de haber encontrado la respuesta mediante el applet, esto a manera de comprobación.

En ambos casos se considera que el applet fue una forma de verificar las respuestas obtenidas mediante procedimientos escritos. Esto teniendo en cuenta que dichas respuestas fueron exactas o relativamente cercanas a la respuesta exacta.

5.2.2 Sobre la segunda parte del problema del triángulo.

En esta segunda parte el contexto continuo siendo intra-matemático geométrico. Asimismo, si bien la figura de interés central, alrededor de la que gira el problema, continuo siendo la misma, la naturaleza del problema cambio respecto de los problemas anteriores (problema 1 y primera parte del problema 2) al buscarse el valor de un lado (la altura) en lugar del área de la figura de interés. En general se observó que los estudiantes plantearon sus respuestas de manera directa: sin recurrir a ningún procedimiento matemático escrito.

5.2.2.1 Intervención del tesista

Una situación interesante inició cuando los estudiantes respondieron el tercer inciso de esta segunda parte mediante el uso de la herramienta tecnológica: la búsqueda de la altura para el área de $40cm^2$, cuya respuesta era $P = 16cm$. De entrada, para obtener esta respuesta los estudiantes tuvieron que manipular el punto P y salirse del triángulo ABC, situación que se considera que pudo provocar que los estudiantes sé preguntaran que estaba sucediendo con la representación en GeoGebra, si estaba bien el poder salirse, sobre qué área se estaba calculando al salirse, entre otras dudas.

Con el fin de que los estudiantes se enfrentaran efectivamente a esta situación de cuestionarse y esto los llevara a un momento de reflexión acerca del modelo, con el cual estaban íntimamente relacionados tanto la representación en la hoja de problemas como la observada en Geogebra (applet), es que el tesista intervino cuestionándolos acerca de la respuesta obtenida mediante el applet y su validez (Transcripción 2).

> Tesista: ¿qué encontraron ahí?
>
> En general se escuchan a todos los estudiantes queriendo opinar (haciéndose un cierto bullicio), de estas opiniones se recuperan algunas.
>
> Estudiante A: que la altura tiene que ser más… ¿grande?, pero se sale de la figura original.
>
> Tesista: que se sale, ¿alguien más?
>
> Estudiante B: el valor es 16, pero la altura máxima es 15, entonces…
>
> Tesista: entonces… ¿cuál sería la respuesta?
>
> Estudiante B y C: que no se puede.
>
> Tesista: ¿por qué no?
>
> Estudiante C: no está dentro del triángulo…

Tesista: digo se pudieron salir ¿no? de la figura, ¿no es válido ese valor?

Estudiante D: o sea es válido, pero fuera del triángulo.

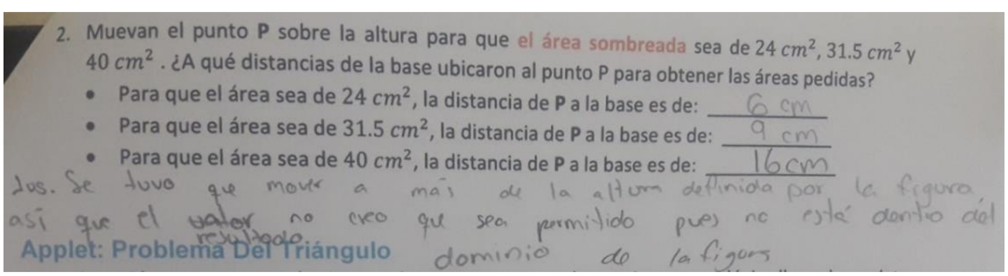
Tesista: ok, entonces para aquellos que ya llegaron a ese punto les pido que le agreguen a esa pregunta una pequeña justificación. Si están de acuerdo con el valor que está afuera díganme porque y si no están de acuerdo con ese valor también díganme porque ¿ok?

(Transcripción 2)

Mediante esta intervención se solicitó a los estudiantes justificar la validez o no validez de la respuesta obtenida mediante la herramienta tecnológica: $P = 16cm$. Cabe destacar que se esperaba que los estudiantes dieran con este valor y se planteó el hacerles este cuestionamiento acerca del valor de P como parte del inciso, sin embargo, por un error esto no se hizo así.

5.2.2.2 Sobre las justificaciones de los estudiantes

Las justificaciones de los estudiantes fueron variadas, aunque hubo puntos en común. Considerando esto es que se tomaron aquellas justificaciones que se puede decir que representan a la totalidad (ver Figura 29, 30 y 31)

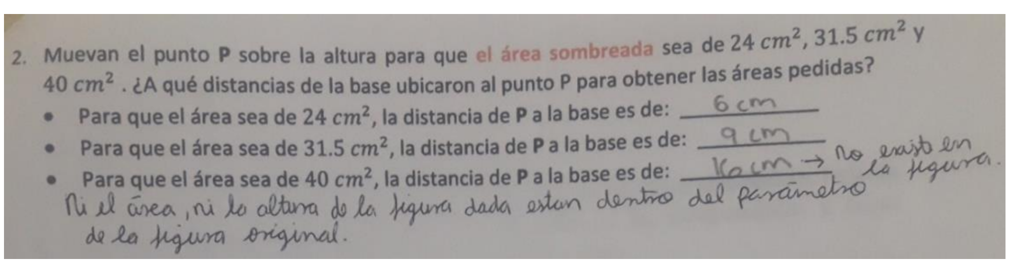


2. Muevan el punto P sobre la altura para que el área sombreada sea de 24 cm^2, 31.5 cm^2 y 40 cm^2 . ¿A qué distancias de la base ubicaron al punto P para obtener las áreas pedidas?
- Para que el área sea de 24 cm^2, la distancia de P a la base es de: 6 cm
- Para que el área sea de 31.5 cm^2, la distancia de P a la base es de: 9 cm
- Para que el área sea de 40 cm^2, la distancia de P a la base es de: 16cm

Los. Se tuvo que mover a más de la altura definida por la figura así que el ~~valor~~ resultado no creo que sea permitido pues no está dentro del dominio de la figura

Applet: Problema Del Triángulo

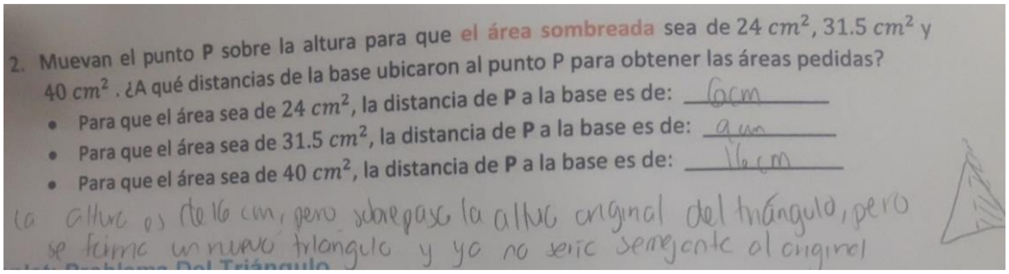
Figura 29: Justificación de los estudiantes (pareja 3).



2. Muevan el punto P sobre la altura para que el área sombreada sea de 24 cm^2, 31.5 cm^2 y 40 cm^2 . ¿A qué distancias de la base ubicaron al punto P para obtener las áreas pedidas?
- Para que el área sea de 24 cm^2, la distancia de P a la base es de: 6 cm
- Para que el área sea de 31.5 cm^2, la distancia de P a la base es de: 9 cm
- Para que el área sea de 40 cm^2, la distancia de P a la base es de: 16 cm → no existe en la figura.

Ni el área, ni la altura de la figura dada estan dentro del parámetro de la figura original.

Figura 30: Justificación de los estudiantes (pareja 5).



2. Muevan el punto P sobre la altura para que el área sombreada sea de 24 cm^2, 31.5 cm^2 y 40 cm^2 . ¿A qué distancias de la base ubicaron al punto P para obtener las áreas pedidas?
- Para que el área sea de 24 cm^2, la distancia de **P** a la base es de: 6cm
- Para que el área sea de 31.5 cm^2, la distancia de **P** a la base es de: 9 cm
- Para que el área sea de 40 cm^2, la distancia de **P** a la base es de: 16cm

La altura es de 16 cm, pero sobrepasa la altura original del triángulo, pero se forma un nuevo triángulo y ya no sería semejante al original

Figura 31: Justificación de los estudiantes (pareja 9).

Mostradas estas justificaciones y considerando la totalidad de estas es que se plantea el siguiente análisis.

5.2.2.2.1 Análisis de las justificaciones

Analizando las diversas justificaciones se puede decir que los estudiantes en general concordaron con que el valor obtenido mediante el applet ($p = 16cm$) no es válido, si bien los argumentos utilizados fueron ligeramente diferentes, tienen sus puntos en común: hicieron alusión a que la altura del punto P o el área de la figura misma rebasaban los de la figura original; también se presentaron argumentos referentes a la semejanza de triángulos: dejaban de ser semejantes.

Dentro de los términos utilizados para argumentar sobresale el uso de “dominio” y “parámetros”. Mediante el uso de estos términos los estudiantes expresaron que la falta de validez del valor encontrado recaía en que este valor no formaba parte de un conjunto de valores aceptable, viéndolo como un valor “no permitido”.

5.2.2.3 Análisis de las producciones de los estudiantes: segunda parte del problema

En esta parte se observó como los estudiantes manipularon la herramienta para obtener las respuestas, observándose únicamente estas en sus hojas de trabajo: sin ningún tipo de procedimiento escrito.

Se piensa que hay dos factores que pudieron influir en el enfoque tomado por los estudiantes de usar la herramienta tecnológica para contestar directamente. El primero fue la descripción del problema. Se cree que al hablar sobre “mover el punto P” pudo interpretarse por los estudiantes como que el problema se debía resolver solamente manipulando la herramienta. El segundo factor es acerca del tipo de problema. Si bien la búsqueda de áreas de figuras geométricas resultó familiar a los estudiantes (problema 1 y primera parte del problema 2), se considera la posibilidad de que “buscar el valor de un lado (la altura) de una figura geométrica” fue un tipo de problema menos familiar para estos y que el contexto del problema (geométrico) no fue suficiente para superar esta situación.

Respecto al trabajo realizado en el tercer inciso, la intervención del tesista fue importante para favorecer que los estudiantes se cuestionaran acerca de la validez de su respuesta y la justificaran. En general, se considera que la situación que se dio a partir de la intervención propició que los estudiantes expresaran sus ideas de manera verbal para la justificación, facilitándoles luego hacer lo mismo de manera escrita en su hoja de problemas. Es decir, la situación facilitó parte de su trabajo de modelización. En conclusión, en términos de la modelización de Sadovsky (2005) se puede afirmar que el uso de la herramienta tecnológica y la intervención del tesista facilitaron la producción de conocimiento nuevo acerca de la problemática de interés.

Respecto de las justificaciones de los estudiantes, se puede decir que estos comprendieron que había ciertas restricciones implícitas en los parámetros del problema (altura del punto p, área de la figura sombreada), y que, si bien el applet permitía hacerlas a un lado y explorar la representación del problema (triangulo ABC) en un mayor nivel, para contestar lo que se les pedía no se podían ignorar dichas restricciones; las cuales no eran otra cosa que características del modelo analítico (función) que se expresó en el análisis previo que podía ser planteado por los estudiantes, características que se podían inferir a través de la figura del problema (representación del problema o fenómeno).

Esto es, a través de trabajar con dos formas de representación del problema (figura y applet) y cuestionarlos sobre una situación particular, los estudiantes dieron cuenta de características del modelo previsto (análisis previo) que estaban detrás de dichas representaciones.

En general, en esta parte se observó cómo se compenetraron el uso de la tecnología y cómo la intervención del tesista favoreció un trabajo de modelización.

5.3.- Problema del bebedero

El contenido de la actividad puede visualizarse en el anexo A. Antes de proseguir cabe destacar que este problema se aplicó en el día 2 y que las parejas que se crearon no fueron exactamente las mismas que en el día anterior. Asimismo, en la primera parte del problema, después de presentar la figura del bebedero, se expresa “100 litros de agua por cada litro de desparasitante”. En la versión que trabajaron los estudiantes dice “fertilizante” en vez de “desparasitante” por un error, esto fue detectado por el tesista y señalado a los estudiantes antes de comenzar la actividad. En general no se observó que esto repercutiera de manera negativa en el discurso de los estudiantes: cuando expresaron ideas acerca del problema y su resolución (en los diferentes momentos/situaciones), o en sus respuestas escritas.

5.3.1 Sobre el análisis del problema

Se aplicaron las tres categorías de análisis en este problema: contexto, tecnología e intervención docente. De forma general se observó como 1) los estudiantes se apropiaron del contexto del problema: relevante en el proceso de resolución (precisión), 2) la tecnología como una primera aproximación y después como una forma de observar propiedades/características relevantes, y 3) la intervención del tesista en momentos clave de transición y para afrontar partes difíciles del problema. Observándose como las tres categorías se entrelazaron a lo largo de las diversas actividades.

En primera instancia se considera que el contexto fue de importancia tanto para los estudiantes como en sus diversos procesos de resolución en las distintas actividades, esto en distinto grado para cada actividad y en la transición de la parte 1 a la 2. Asimismo, el tema de la precisión jugó un papel importante en la apropiación del contexto por parte de los estudiantes: en que estos vieran el problema de la forma en que se les intentó presentar, como una situación real; en la introducción del trabajo matemático y en comprometer a los estudiantes en este.

La tecnología se utilizó de forma inicial en la parte 1 para obtener una primera aproximación de la solución del problema. Mientras que en la parte 2 jugó un papel importante en la observación de propiedades/características de relevancia para la comprensión y construcción de un modelo (inciso b), el cual más tarde fue utilizado para resolver una versión modificada del problema original (inciso e).

Asimismo, diversas intervenciones del tesista se dieron a lo largo de las actividades. Tanto en momentos importantes de transición entre actividades, como en partes difíciles del problema (con el propósito de ayudar a los estudiantes a afrontarlas y superarlas), entre otros casos.

5.3.2 Análisis de las producciones en la parte 1: resolución apoyada en la herramienta

Los estudiantes resolvieron la primera parte del problema apoyándose de una herramienta tecnológica (applet), trabajando aproximadamente 10 minutos. Esencialmente la tarea consistía en que llenaran la tabla de datos de la primera parte (ver anexo A) con parejas (h, V) considerando los valores $V = 100, 200, \ldots, 1100\ litros$: debían encontrar la altura correspondiente para cada uno de los volúmenes (en litros) de interés.

Revisando las tablas de los equipos se observó que usaron diferentes grados de precisión en sus respuestas, así como casos en los que redondearon. Acciones a partir de las cuales se pudieron inferir diversos criterios posibles aplicados por los estudiantes.

Uno de los aspectos clave de la secuencia incluye el uso del contexto, en específico el tema de la precisión como un medio para comprometer a los estudiantes en un trabajo matemático: parte de un proceso de modelización. Considerando esto, es que fue interesante conocer la opinión de los estudiantes respecto al tema: la importancia de la precisión, esto mediante una intervención del tesista (sección 5.3.2.3) y analizar los resultados en sus tablas de datos (secciones 5.3.2.1 y 5.3.2.2).

Se observó como los estudiantes utilizaron principalmente la herramienta para llenar la tabla de datos sin preguntar (al grupo o al tesista) sobre el contexto del problema: de lo que trataba este. Por lo que se puede decir que esta labor fue principalmente mecánica y el contexto no fue considerado como tal por los estudiantes.

Analizando las respuestas de los estudiantes, reflejadas en las tablas de datos, se observaron distintas posturas acerca del tema de la precisión de las respuestas, las cuales se reflejan en las siguientes dos secciones.

5.3.2.1 Equipo grabado

Respecto del equipo grabado (equipo 1), el tesista observó que los estudiantes comenzaron manipulando el applet de diversas maneras. El estudiante 1 modificando la altura h (introduciendo valores con el teclado) desde las propiedades del deslizador y el estudiante 2 moviendo directamente el deslizador o el punto G. Eventualmente se quedaron con el método de modificar manualmente h desde las propiedades (ver Figura 32).

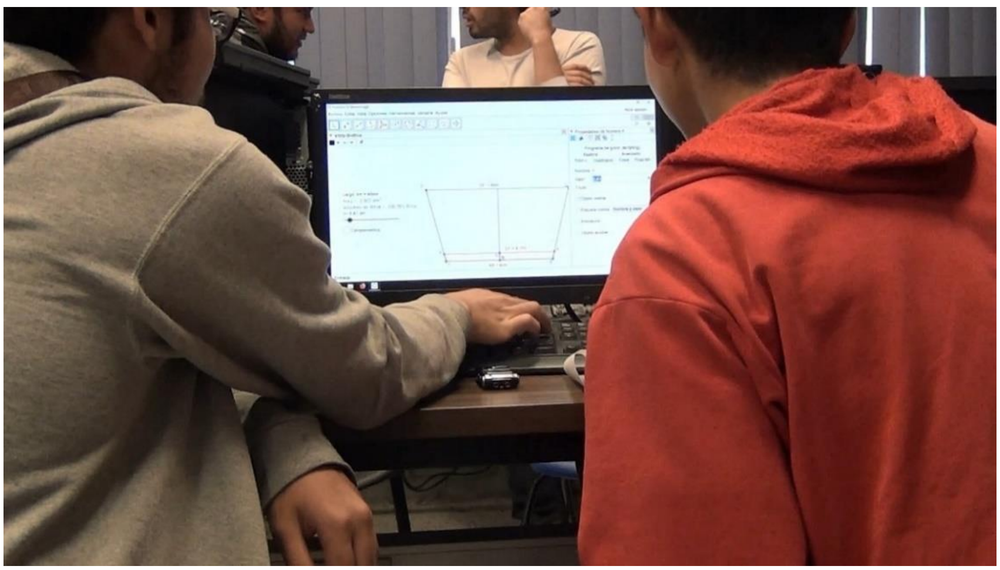


Figura 32: Estudiantes introduciendo manualmente la altura h (estudiante 1 izquierda).

El primer caso que abordaron fue el volumen de 100 litros. Se observó en las grabaciones que los estudiantes tantearon introduciendo diversas alturas en el applet (usando ocasionalmente el deslizador), buscando que el volumen mostrado en este se acercara cada vez más a dicha cantidad. Cabe destacar que fue posible observar con precisión la mayoría de los valores introducidos. Eventualmente dieron con un valor para la altura que coincidía de manera exacta con los 100 litros (el cual no se alcanzó a apreciar en su totalidad), pero observaron que dicho valor se redondeaba (Transcripción 3).

Estudiante 1: ahí está.

Estudiante 2: 100 litros

Estudiante 1: ahí está el valor (señalando en las propiedades el valor introducido).

Estudiante 2: .41dm (señala el valor en el deslizador)

Estudiante 1: bueno has lo que quieras.

Estudiante 2: es que se redondea.

(Transcripción 3)

Los estudiantes continuaron con el llenado de la tabla. Escribieron primero los valores de la columna de litros y después buscaron los valores de las alturas correspondientes mediante el applet (ver Figura 33).

En general se observó que los estudiantes continuaron introduciendo alturas h desde las propiedades (usando cantidades con más de dos decimales), pero al notar que el applet les redondeaba a dos decimales empezaron a introducir valores con esta cantidad decimales (escribiendo sus respuestas de la misma forma). Esto buscando que la cantidad de litros reflejados en el applet se acercara a los valores escritos en sus tablas, por ejemplo, para $150\ litros$ los estudiantes tomaron como respuesta la altura de $0.61dm$, a la cual, en el applet, le corresponde el volumen de $150.039\ litros$.

La mayoría de las alturas encontradas por los estudiantes corresponden con el volumen más cercano al buscado, ¿qué quiere decir esto? Usando el ejemplo anterior de $150\ litros$ y considerando que a mayor altura le corresponde un mayor volumen, si se toma la altura de $0.6dm$ en el applet, a esta le corresponde un volumen de $147.6\ litros$ que es un valor más lejano de $150\ litros$, a comparación de la distancia de este último con $150.039\ litros$, valor al que le corresponde la altura de $0.61dm$.

Ahora, considerando lo observado en sus respuestas, se puede decir que los estudiantes en general tantearon y se quedaron con la primera altura que les dio un valor “cercano” (de acuerdo con ellos) al volumen buscado. Dicho esto, cabe decir que en ningún momento se apreció que los estudiantes hicieran comparaciones con otras alturas para verificar que efectivamente tenían la altura correspondiente con el volumen más cercano al de interés.

Por ejemplo, para el caso de $400\ litros$ estos indicaron en su tabla una altura de $1.57dm$, que en el applet le corresponden $401.449\ litros$, sin embargo, a la altura $1.56dm$ le corresponde el $398.736\ litros$, valor mas cercano a $400\ litros$.

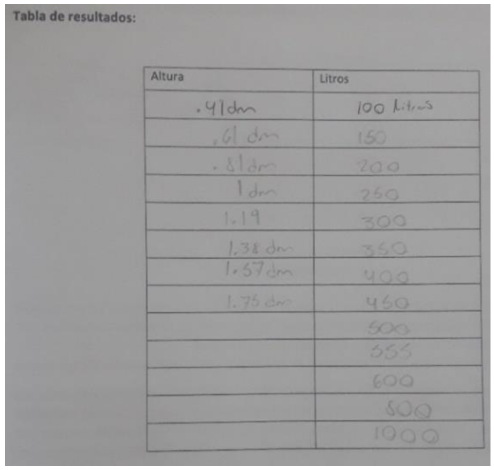


Tabla de resultados:

Altura	Litros
.41dm	100 litros
.61 dm	150
.81dm	200
1 dm	250
1.19	300
1.38 dm	350
1.57dm	400
1.75 dm	450
	500
	555
	600
	800
	1000

Figura 33: Tabla de resultados de los estudiantes grabados.

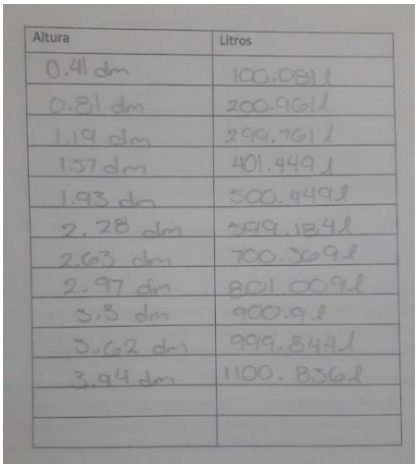
En resumen, se puede decir que los estudiantes mostraron inicialmente interés en tener respuestas precisas: buscaron una altura a la que le correspondiera exactamente el volumen de interés, sin embargo, más tarde descuidaron este aspecto cuando trabajaron únicamente con dos decimales. Un aspecto que destacar sobre su tabla es que consideraron tanto valores de volumen señalados en el problema (por ejemplo 100 y 200 litros), como otros valores fuera de los solicitados (como 150 y 555 litros).

Respecto al uso de la herramienta se puede decir que no presentaron dificultades en utilizarla para contestar dado su conocimiento previo sobre el uso de GeoGebra. Como tal los estudiantes se enfocaron en manipular la herramienta y llenar sus tablas.

Sobre el contexto del problema, no se identificó que en algún momento los estudiantes hablaran acerca de este. Asimismo, tampoco se detectó que parte de su trabajo se viera influenciado por el contexto, por lo menos no en lo que respecta al nivel de precisión utilizado para contestar.

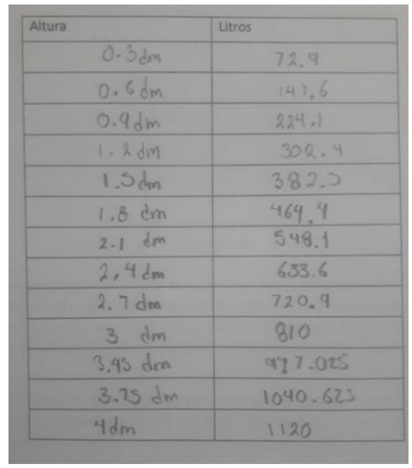
5.3.2.2 Equipos restantes

Los resultados del resto de las parejas fueron variados[4]. Hubo un equipo que lleno la tabla con los datos más precisos dados por el applet considerando los volúmenes solicitados[5] (100, 200, 300, …, 1100), salvo un caso[6] (ver Figura 34). Así como equipos en los que no fue del todo claro el porqué de su forma de llenar la tabla, esto considerando que el problema preguntaba por las alturas para una lista específica de volúmenes (ver Figura 35).



Altura	Litros
0.41 dm	100.081 l
0.81 dm	200.961 l
1.19 dm	299.761 l
1.57 dm	401.449 l
1.93 dm	500.449 l
2.28 dm	599.184 l
2.63 dm	700.369 l
2.97 dm	801.009 l
3.3 dm	900.9 l
3.62 dm	999.844 l
3.94 dm	1100. 836 l

Figura 34: Tabla de resultados (Pareja 5).



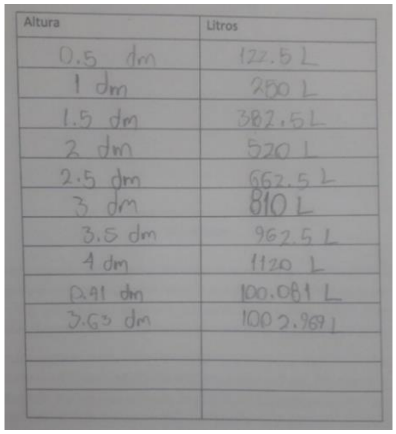
Altura	Litros
0.3 dm	72.9
0.6 dm	147.6
0.9 dm	224.1
1.2 dm	302.4
1.5 dm	382.5
1.8 dm	464.4
2.1 dm	548.1
2,4 dm	633.6
2.7 dm	720.9
3 dm	810
3.45 dm	947.025
3.75 dm	1040.625
4dm	1120

Figura 35: Tabla de resultados (Pareja 2).

Respecto de la precisión, hubo parejas de estudiantes que en sus respuestas consideraron la totalidad de decimales dados por el applet en al menos una de sus columnas de datos (altura y volumen). Dicho esto, la mayoría de las tablas de estas parejas contenían tanto algunos de los volúmenes que señalaba el problema (100, 200, 300, …, 1100 litros), como volúmenes que no formaban parte de esta lista (ver Figura 36). Particularmente se puede decir que la pareja grabada entra en este conjunto de parejas (ver Figura 33).

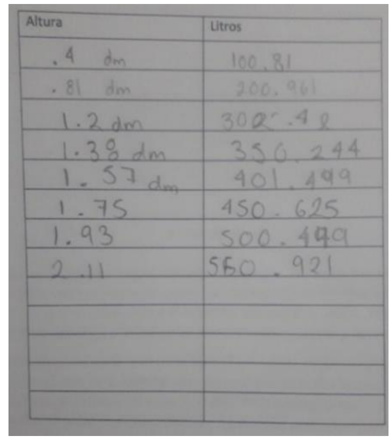
Asimismo, se observó la contraparte de esta situación: tablas en las que los estudiantes no expresaron todos los decimales que proporcionaba el applet. Además, casos donde la altura reflejada no correspondía al volumen más preciso ofrecido por el applet, respecto del volumen escrito en la tabla (ver Figura 37), como el ejemplo de los $400\ litros$ del equipo grabado en la sección 5.3.1.1.1.

[4] Una pareja dejó en blanco su tabla de resultados.
[5] El problema como tal no indicaba explícitamente que la lista de volúmenes considerados era hasta 1,100. El propósito era que los estudiantes dieran cuenta de esto al averiguar el volumen del bebedero (1,120 litros), el cual podían determinar 1) a través de manipular el applet o 2) usando los datos dados por él problema.
[6] La altura correspondiente al volumen más cercano a 400 litros era 1.56dm->398.736 litros, no 1.57dm.



Altura	Litros
0.5 dm	122.5 L
1 dm	250 L
1.5 dm	382.5 L
2 dm	520 L
2.5 dm	662.5 L
3 dm	810 L
3.5 dm	962.5 L
4 dm	1120 L
0.41 dm	100.081 L
3.63 dm	1002.9691

Figura 36: Tabla de resultados (Pareja 4).



Altura	Litros
.4 dm	100.81
.81 dm	200.961
1.2 dm	302.4 l
1.38 dm	350.244
1.57 dm	401.499
1.75	450.625
1.93	500.499
2.11	550.921

Figura 37: Tabla de resultados (Pareja 7).

Analizando en conjunto se puede decir que se observaron casos donde los estudiantes consideraron la totalidad de decimales dados por el applet en al menos una de sus columnas de datos (altura y volumen), como casos donde no (llegándose incluso a redondear respuestas). Casos donde se obtuvo la altura que corresponde con el volumen más cercano al buscado, como casos donde no. Ocasiones donde los estudiantes consideraron la mayoría de los volúmenes de interés (100, 200, …, 1100), como ocasiones en las que se consideraron volúmenes que no eran de interés. Se puede decir que los resultados fueron variados en general.

Respecto al uso de la herramienta se puede decir que se observaron parejas que se les facilitó el manejo de ésta más que a otras, por ejemplo, se observaron casos donde los estudiantes solo manipularon el deslizador para buscar sus respuestas y les costó más el encontrar respuestas precisas, esto a comparación de las parejas que usaron las teclas direccionales para manipular h o introdujeron directamente valores para la altura h en las propiedades del deslizador. Aquí se puede decir que se reflejó el nivel de experiencia previa con GeoGebra que tenían los estudiantes.

A continuación, se presenta una intervención del tesista la cual se dio después de que los estudiantes trabajaran llenando sus tablas de datos.

5.3.2.3 Intervención del tesista

Los resultados escritos de la parte 1 arrojaron evidencia sobre la importancia de la precisión para los estudiantes. Dicho esto, previo a introducir la segunda parte el tesista preguntó al grupo de estudiantes acerca de sus respuestas: 1) sobre el nivel de precisión utilizado y 2) si interesaba conocer las respuestas exactas o bastaba con las obtenidas mediante él applet, esto último dejando en claro que las respuestas proporcionadas por la computadora eran aproximaciones. Particularmente, sobre la segunda pregunta un estudiante contestó: (Transcripción 4).

> Estudiante A: la aproximación es bastante cercana a los valores que se tienen, entonces… no habría tanta… tanta diferencia.
>
> (Transcripción 4)

Así el tesista hizo uso de esta para expresar que en primera instancia era una buena respuesta y uso este momento para recordarle al grupo el contexto del problema: sobre lo que trataba este. Lo que llevó eventualmente a introducir la parte 2.

5.3.2.4 Conclusión del análisis de la parte 1

Los estudiantes trabajaron esta primera parte sin que interviniera el tesista con el grupo (salvo al final cuando ya habían contestado). En general se observó como manipularon la herramienta tecnológica y fueron llenando sus tablas de datos. Cabe destacar que en esta parte se les presentó a los estudiantes dos modelos del problema: la figura en la que se representa el bebedero, complementada con el applet (modelo geométrico) y la tabla de datos (modelo numérico); trabajando los estudiantes con él segundo.

Considerando lo observado en las tablas de datos de los estudiantes y lo que se obtuvo de la intervención del tesista, se puede concluir que al final de esta primera parte el grupo se podía dividir en quienes tenían el interés de reflejar respuestas precisas en sus tablas (siendo la mayoría) y en quienes no. Expresado de otra forma, se puede decir que esta parte permitió identificar la postura inicial de los estudiantes acerca del tema de la precisión.

5.3.3 Parte 2: resolución del problema en pasos

Esta parte consistió de siete incisos de la a) a la g) y se trabajó en esta el tiempo restante de las dos sesiones: una hora y media aproximadamente. Se destaca el trabajo en el inciso e) dado que fue en este dónde el problema inicial fue resuelto para un volumen específico, observándose diversidad de procedimientos.

Al continuar con la parte 2 se solicitó el apoyo de un estudiante para leer la introducción de esta sección, en la cual se introducía un nuevo elemento al contexto y una pregunta:

*Después de revisar las instrucciones del desparasitante de manera minuciosa, el granjero observa la siguiente advertencia "**para un uso adecuado es necesario que el recipiente utilizado este graduado con una precisión de al menos cuatro decimales**".*

Bajo este contexto ¿es suficiente la precisión reflejada en los resultados que pusieron en su tabla?"

Pregunta que recuperó el tesista y planteó a los estudiantes (Transcripción 5).

> Tesista: Yo les regreso esa pregunta a ustedes, ahora con esa nueva información ¿es suficiente la precisión que les está dando el applet?
>
> Grupo: no (contestan varios estudiantes, pero no se puede asegurar que todos).
>
> Tesista: ¿no?, ¿por qué? ¿qué pasaría?
>
> Estudiante B: porque podría matar a sus vacas.
>
> (Transcripción 5)

En general los estudiantes del grupo coincidieron con que no era suficiente la precisión de sus respuestas dado que "se le podían morir sus animales al granjero". De esta forma se puede decir que en este momento los estudiantes se apropiaron del contexto y lo vieron como relevante para contestar el problema: asimilaron el problema como una situación real (que era la intención), identificaron las repercusiones que podía tener la falta de precisión en las respuestas y de esta forma la precisión gano un cierto nivel de importancia para los estudiantes. Situación que resultó interesante, contrastando esta con los resultados obtenidos en la parte 1 acerca de la precisión y su importancia para los estudiantes.

El tesista usó este momento para continuar haciendo énfasis en el contexto, hablando sobre como el problema hablaba de un granjero, alguien sin la posibilidad de usar la tecnología.

Expresando el tesista que una persona en esa situación podría usar matemáticas para resolver el problema, herramienta de la que disponían ellos como estudiantes. Esto es, se presentó a las matemáticas como una herramienta que permite ganar precisión. De esta forma se procedió con las actividades.

5.3.2.1 Inciso a) Volumen del bebedero en decímetros cúbicos y litros.

Una vez que los estudiantes trabajaron un tiempo con la actividad se les preguntó sobre la respuesta en decímetros cúbicos y sobre cuál era la base de la figura original. En el momento en cuestión varios estudiantes concordaron con que el volumen era $1120dm^3$ y que la base era la cara en forma de trapecio.

Dicho esto, en los procedimientos reflejados en las hojas de trabajo de las parejas se observó de manera recurrente que hubo estudiantes que calcularon el área de la cara inferior del prisma (rectángulo de largo 40dm y altura 6dm), y la utilizaron como el componente $Area_{Base}$ de la formula del volumen: hubo una confusión inicial acerca de cuál era la base del bebedero (como fue el caso de la pareja grabada). Confusión que se considera que se superó después de que en el grupo se compartió cual era la base: trapecio, esto teniendo en cuenta que los estudiantes tacharon estos procedimientos erróneos (donde calcularon el área del rectángulo inferior) y plantearon después el correcto (ver Figura 38).

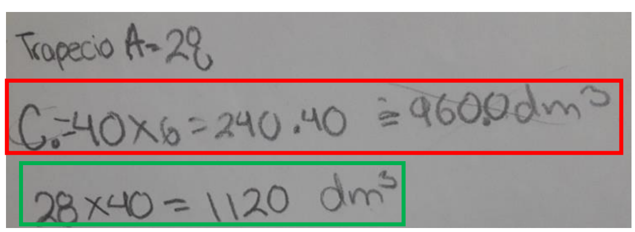


Figura 38: Procedimiento erróneo (rojo), procedimiento correcto (verde).

Considerando los procedimientos observados en este inciso se puede decir que la búsqueda del volumen del bebedero (prisma trapezoidal) no fue una tarea sencilla para los estudiantes (aun disponiendo de la fórmula del volumen de un prisma y de la fórmula del área del trapecio), específicamente el identificar que figura era la base del prisma.

Regresando a la dinámica de clase, el tesista preguntó a los estudiantes sobre la respuesta en litros, expresando algunos equipos que la respuesta era la misma. Dicho esto, un estudiante contestó (Transcripción 6):

> Estudiante C: es que lo que se saca son los litros, no el volumen; el volumen se saca en litros.
>
> (Transcripción 6)

La cual detonó una situación/momento.

5.3.2.1.1 Situación/momento

El tesista aprovechó esta respuesta para explicar a los estudiantes que el volumen como tal, a la hora de calcularlo, depende las unidades involucradas. Asimismo, después de cuestionarlos sobre las unidades involucradas estos dieron cuenta de que el volumen calculado debía escribirse en términos de dm^3. Después se cuestionó a los estudiantes sobre como pasar a litros la respuesta obtenida: $1120dm^3$, dándose la siguiente conversación (Transcripción 7).

> Estudiante 1: transformándolo a metros o a centímetros cúbicos y de ahí hacer una conversión.
>
> Tesista: ¿alguien ya planteo como hacerlo?
>
> Estudiante 1: si, un metro cubico es igual a mil litros.
>
> Estudiante D: pero según yo un decímetro cubico era igual a un litro.
>
> (Transcripción 7)

Resultado con el que algunos estudiantes estuvieron de acuerdo y otros no. Particularmente, el estudiante 1 expresó no estar de acuerdo.

Para proseguir con las ideas de los estudiantes el tesista tomó el primer resultado expresado: $1m^3 = 1000\ litros$ y lo usó como base para hacer una demostración matemática (en el pizarrón) del segundo resultado mencionado: $1dm^3 = 1\ litro$, la cual se resume como:

$$1m^3 = 1000\ litros$$

$$1(10dm)^3 = 1000\ litros$$

$$1000dm^3 = 1000\ litros$$

$$1dm^3 = 1\ litro$$

De esta forma se demostró el resultado mencionado por uno de los estudiantes y estos lo usaron para contestar la pregunta del volumen del prisma en litros.

5.3.2.1.2 Cierre del inciso a)

Cabe destacar que Segal y Giuliani (2008) no hablan del resultado previamente demostrado en el desarrollo de la actividad original, pero en el presente trabajo de tesis se consideró importante dar a conocer este resultado para poder desarrollar el problema del bebedero adecuadamente. Asimismo, los errores observados permitieron plantear cambios en la secuencia.

5.3.2.2.- Inciso b) Área de la cara sombreada en términos de h

Antes de comenzar la actividad el tesista le solicitó a uno de los estudiantes que leyera el contenido de la actividad. Después este los cuestionó sobre cuál era la figura sombreada, respondiendo estos que era un trapecio. Asimismo, se les preguntó sobre como lo justificarían, siendo algunas de las respuestas: “mida los ángulos” y “un par de lados paralelos”. Retomando la última respuesta el tesista expresó que “un trapecio por definición es una figura de cuatro lados donde dos de ellos son paralelos, en este caso la base y el tope del agua”.

A continuación, se les preguntó si sabían cómo obtener el área de la figura sombreada. Después de algunos comentarios por parte de los estudiantes, se les recordó que tenían la fórmula del área (en la hoja del problema) y una altura h que era el nivel del agua. Establecido lo anterior los estudiantes iniciaron su resolución.

De forma inicial esta actividad fue llevada a cabo por los estudiantes, se les dio un tiempo para que intentaran resolverla (aproximadamente diez minutos) y más tarde se les preguntó acerca de sus procedimientos. A partir de aquí se desarrolló una situación/momento.

5.3.2.2.1 Situación/momento

Cuando se preguntó a los estudiantes por sus respuestas y procedimientos solo un equipo decidió compartir su trabajo con el grupo, en específico uno de sus integrantes (Estudiante D). Momento que se dio de la siguiente forma (Transcripción 8).

> Estudiante D: Para empezar el área del trapecio debe de ser base mayor mas base menor por la altura sobre 2 (el tesista lo apunta en el pizarrón). Conocemos las bases que son 8 y 6.
>
> El tesista preguntó por la base menor, identificando esto que era 6dm. Después cuestionó a los estudiantes sobre la base mayor, a lo que un estudiante respondió.
>
> Estudiante E: no conocemos la base mayor porque se supone que es la que cambia según la altura de la varilla.
>
> (Transcripción 8)

Respecto de la afirmación del estudiante E el resto de los estudiantes parecieron estar de acuerdo, incluido el estudiante D.

Después de esto el tesista les habló sobre como al variar el valor de la altura la figura sombreada mantenía su forma. Asimismo, este señaló que la base mayor cambiaba conforme se modificaba la altura h, es decir, se tomó la idea del estudiante E y se sintetizó para el grupo. Apoyándose del applet para mostrar esto.

Esta idea compartida por el estudiante E fue expresada por uno de los estudiantes como "la base mayor depende de h". Dicho esto, el tesista expresó que el applet reflejaba "físicamente" dicha relación, apoyándose de este para mostrarlo.

A partir de este punto se dio una intervención prolongada del tesista para apoyar a los estudiantes a encontrar la expresión analítica para el área de la figura sombreada, decisión que fue tomada durante la clase. Esto se hizo con el propósito de apoyar a los estudiantes con esta actividad y poder avanzar sobre el resto de las actividades. Decisión que se tomó considerando la experiencia previa (prueba piloto, entre otras aplicaciones) con esta parte del problema (inciso b), la cual mostró que este poseía un alto grado de dificultad, y el tiempo estimado del resto de las actividades.

Dicho esto, al ser una parte de la experiencia con un alto nivel de intervención no se consideró pertinente reportar con detalle todo lo que sucedió durante esta. De manera resumida se puede decir que con la guía del tesista: haciendo preguntas a los estudiantes sobre lo que se podía observar en el applet respecto de la altura, base menor y base mayor, y acerca de cómo esta información podía ser utilizada en la formula del área del trapecio; los estudiantes dieron cuenta de diversas relaciones importantes, por ejemplo, el que la base mayor depende de la altura (relación mencionada anteriormente). De esta forma fue posible construir, los estudiantes y el tesista en conjunto, la expresión buscada para encontrar el área de la figura sombreada en términos de la altura h.

$$A = \frac{\left(\left(6 + \frac{h}{2}\right) + 6\right)h}{2}$$

5.3.2.2.2 Sobre los resultados escritos

Revisando los resultados en las hojas de trabajo de los estudiantes se observó un tipo de procedimiento de manera recurrente. Si bien existen pequeñas variaciones entre estos, se puede decir que los estudiantes consideraron que la figura sombreada tenía una altura fija $h = 2$ y con esta información plantearon su procedimiento para encontrar el área (ver Figura 39).

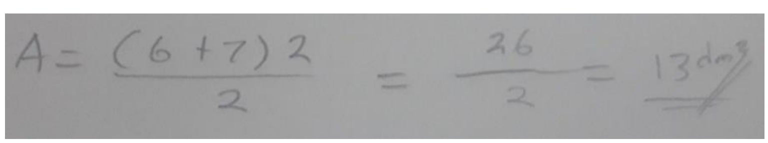


Figura 39: Cálculo del área sombreada.

Una posibilidad es que esta situación se dio porque en la imagen mostrada en el inciso b), específicamente la parte sombreada (trapecio) parece llegar a la mitad de la altura del trapecio original: los estudiantes dedujeron que la altura era $2dm$ a partir de esto y con el applet (usando los complementos) observaron que para dicha altura la base mayor era de

$7dm$. Usando estos datos y que sabían de antemano que la base menor era de $6dm$ plantearon el área del trapecio sombreado.

5.3.2.2.3 Equipo grabado

La pareja grabada discutió sus ideas en torno al inciso b). Los estudiantes plantearon que la base mayor estaba en función de la altura (relación de importancia) e identificaron a esta última como una variable. Se destaca que el planteamiento de estas ideas por parte de la pareja se dio antes de que fueran planteadas en el grupo durante la situación/momento (Transcripción 9).

> Estudiante 1: se supone que no conocemos la altura, y esto es lo de hacerlo en función de una variable, en este caso es h (el estudiante 2 se queda pensando).
>
> Estudiante 1: 6 es una constante.
>
> Estudiante 2: no.
>
> Estudiante 1: 8 varia y 4 es la capacidad de función.
>
> Estudiante 2: 8 es una constante ¿no? porque es 6.
>
> Estudiante 1: sí sí, eso es lo que esta abajo junto al agua y 8 no tiene agua, 8 solo aplica cuando estas en el tope.
>
> Estudiante 2: “sí sí yo lo estaba viendo al revés, olvídalo.
>
> Estudiante 1: así que esto está en función de la altura (señalando la base mayor del trapecio sombreado) y la altura va a ser nuestra variable.
>
> Estudiante 2: aja.
>
> (Transcripción 9)

Se puede apreciar como los estudiantes recurrieron al concepto de función, el cual no había sido mencionado hasta el momento por el tesista: los estudiantes de alguna forma asociaron la relación que observaron entre la altura y la base mayor con este concepto.

Asimismo, los estudiantes plantearon diversos procedimientos. En primer lugar, trabajaron con una expresión propuesta a partir de la fórmula del área del trapecio:

$$28 = \frac{(b + B)h}{2}$$

La cual manipularon con el propósito de despejar h (ver Figura 40), esto se dedujo de las operaciones observadas y del hecho de que los estudiantes le pidieron apoyo al tesista para despejar h en esta expresión.

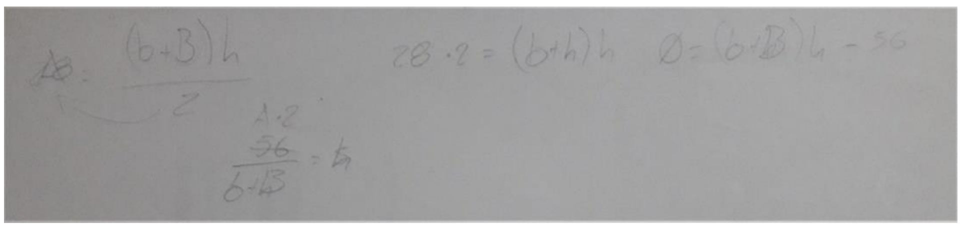


Figura 40: Despeje de la altura h.

Después, el estudiante 2 planteó la búsqueda del área sombreada a partir de la suma y diferencia de diferencia de áreas, procedimiento que se considera que se vio favorecido por el trabajo previo con los problemas 1 y 2, particularmente por el 1 dado que en este plantearon también este tipo de procedimiento: sobre suma y diferencia de áreas. Si bien esta idea fue buena, el planteamiento se hizo de forma incorrecta.

Esencialmente, usando la figura del applet con los complementos activados (ver anexo A), el estudiante 2 describió su procedimiento (Transcripción 10)

> Estudiante 2: mira, es 6 y 4, 24 ¿no? (señala las dimensiones del rectángulo $ABLK$, siendo 24 su área) menos 6 por la altura que se le vaya a dar. Esto más… dos veces esta parte (señala el triangulo ADK)… osea dos por que es uno y dos ¿no? (señala los triángulos ADK y BCL), menos dos veces esto y esto (señala los triángulos AFH y BEI).
>
> (Transcripción 10)

En sus hojas de trabajo se observó el producto de este razonamiento (ver Figura 41).

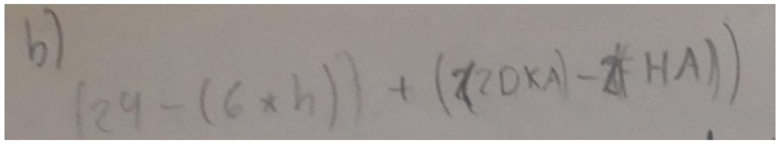


Figura 41: Expresión para determinar
el área de la figura sombreada.

5.3.2.2.4 Cierre del inciso b)

En esta parte del problema hubo una amplia intervención del tesista. Como se dijo anteriormente, esto se hizo con la intención de apoyar a los estudiantes con esta actividad y poder avanzar sobre el resto de las actividades. Decisión que se tomó considerando la experiencia previa (prueba piloto, entre otras aplicaciones) con esta parte del problema (inciso b), la cual mostró que este poseía un alto grado de dificultad, y el tiempo estimado del resto de las actividades.

Sobre el equipo grabado, resultó interesante ver que plantearan un tipo de procedimiento semejante al planteado en el problema 1: sobre suma y diferencia de áreas. Dado que de esta forma se puede decir que el problema 1 fue útil como antecedente para el problema 3.

5.3.2.3 Inciso c) La expresión que denota el área de la cara sombreada

En este inciso los estudiantes llegaron a la misma respuesta:

$$II.\ A = 6h + \frac{h^2}{4}$$

Cuando se les cuestionó sobre si era válida la respuesta I:

$$I.\ A = \left(6 + \frac{h}{4}\right)h$$

Los estudiantes coincidieron en que también lo era, hablando sobre que eran similares. Algunos expresando que desarrollando I se podía obtener II y otros que factorizando II se podía obtener I. En general los estudiantes desarrollaron la expresión obtenida grupalmente en el inciso b):

$$A = \frac{\left(\left(6 + \frac{h}{2}\right) + 6\right)h}{2}$$

5.3.2.4 Inciso d) Expresión que denota el volumen del bebedero

Los estudiantes multiplicaron expresión del área y el largo del bebedero: $40dm$, obteniendo así la expresión:

$$V = 240h + 10h^2$$

5.3.2.5 Inciso e) Problema original: sobre la altura correspondiente a un volumen dado

Este inciso consistió en resolver una versión modificada del problema original en el cual hay que encontrar la altura h correspondiente a $700\ litros$. En esta parte los estudiantes trabajaron con la siguiente expresión para resolver el problema:

$$V = 240h + 10h^2$$

Se identificaron diversas estrategias de resolución y se clasificaron en tres tipos: 1) evaluación de la expresión de volumen, 2) manipulación algebraica de la expresión con el propósito de despejar h y 3) identificar la expresión de volumen como una ecuación cuadrática, plantearla y resolverla. Los métodos que fueron exitosos se acompañan con su respuesta: el valor de h, mientras que del resto solo se muestra el procedimiento en sí.

1) En primera instancia se identificó la evaluación de la expresión de volumen:
    a. Se observó que los estudiantes introdujeron diversos valores de h en la expresión (con parte entera 2) y fueron refinando/ajustando los decimales, esto buscando acercarse al volumen de $700\ litros$ (ver Figura 42).

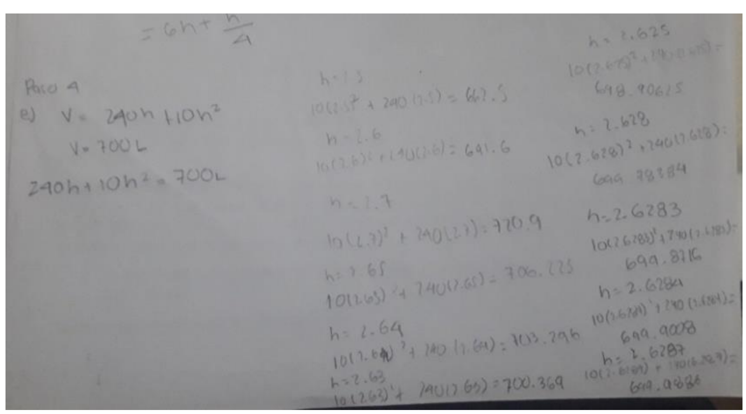


Figura 42: Evaluación de la expresión de volumen.

Esto fue realizado por dos parejas de estudiantes, las cuales plantearon como resultados $h = 2.6287$ y $h = 2.62874$, correspondiendo con los volúmenes $V = 699.9886$ y $V = 700.0003$ respectivamente.

b. Se observó otro tipo de sustitución (ver Figura 43).

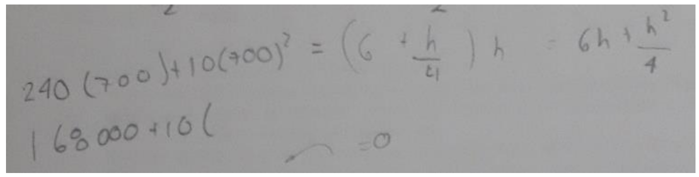


Figura 43: Sustitución de 700 en la expresión de volumen.

Esta forma de resolución es interesante teniendo en cuenta que no entraba dentro de las posibilidades consideradas en el análisis previo. Si bien durante los incisos del a) al d) del problema los estudiantes hicieron uso de la sustitución de diversas formas, en ningún momento realizaron evaluación numérica.

Respecto del inciso a. los estudiantes igualaron la expresión de volumen a 700 sin dificultad. Una situación que pudo ser interesante es el haberles preguntado a los estudiantes sobre cual respuesta era la más adecuada para contestar el problema. Asimismo, se observó como los estudiantes fueron aumentando la cantidad de decimales utilizados en las aproximaciones de la respuesta h, hasta que en su respuesta final se utilizaron al menos cuatro decimales: se puede decir que consideraron el elemento del contexto introducido al inicio de la parte 2.

En el inciso b. se observó un error: los estudiantes tomaron el volumen de 700 $litros$ y lo sustituyeron como si se tratara de una altura. Existiendo diversas razones posibles para esto, por ejemplo, el que no les haya quedado claro a los estudiantes que representaba cada elemento de la expresión o que en general tuvieran dificultades en el tema de sustituir en una expresión.

2) Se identificó el uso de manipulación algebraica de la expresión con el propósito de despejar h, esto igualando la expresión a 700.

   c. Se observaron diversas formas de despejar (ver Figuras 44 y 45):

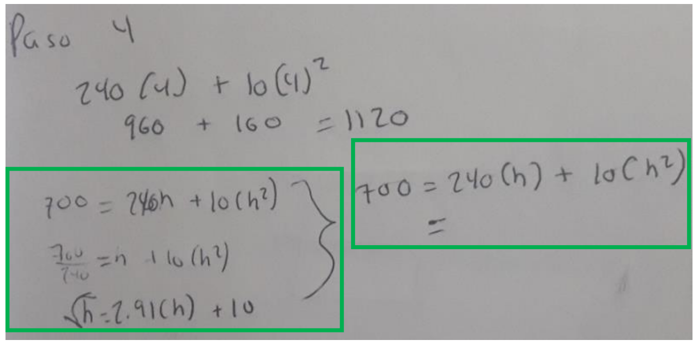


Figura 44: Manipulación algebraica-Despeje de h.

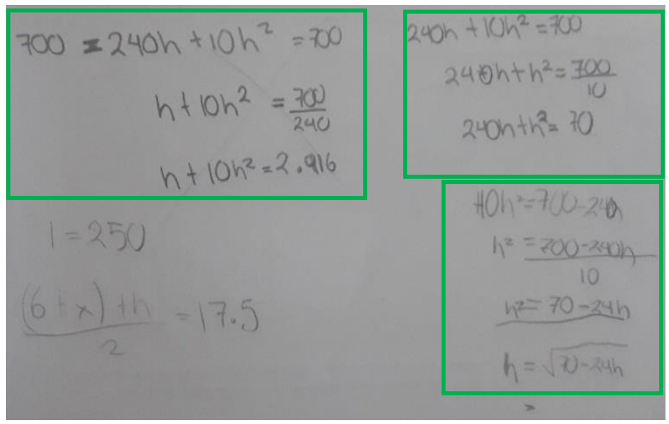


Figura 45: Manipulación algebraica-Despeje de h (verde).

En las Figuras 44 y 45 se pueden observar diversas formas de despeje y la sustitución correcta de $V = 700$, pero sin dar respuesta al inciso.

d. Completación del cuadrado perfecto (ver Figura 46):

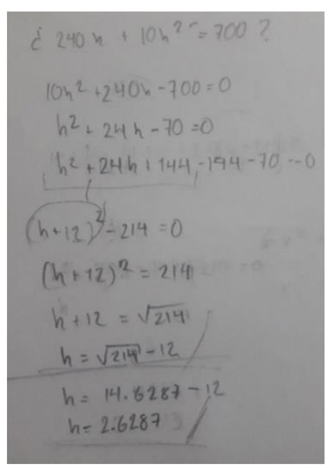


Figura 46: Completación de cuadrado.

En este caso se planteó una respuesta con cuatro decimales como se pedía implícitamente mediante el fragmento de contexto introducido al inicio de la parte 2: se pudiera decir que los estudiantes tuvieron en cuenta el contexto. Este procedimiento puede entrar en el tercer tipo, sin embargo, dado el nivel de manipulación algebraica necesario para resolver se considera que encaja mejor en el segundo tipo.

Si bien no todos los planteamientos fueron exitosos (en el sentido de que no llegaron a la respuesta o una aproximación) el razonamiento detrás de estos es el que resultó interesante. Se pudiera decir que los estudiantes comprendieron que buscaban una altura específica para un volumen especifico: $700\ litros$. Por lo que les resultó intuitivo sustituir el volumen de 700 (de forma correcta o incorrecta), para el cual deseaban encontrar la altura correspondiente, y despejar h, que representaba la altura buscada.

3) Los estudiantes reconocieron la expresión como una ecuación cuadrática, la plantearon y resolvieron. Dos parejas llegaron a esta forma de resolución, plantearon el uso de la formula general y llegaron a expresiones semejantes (ver Figuras 47 y 48).

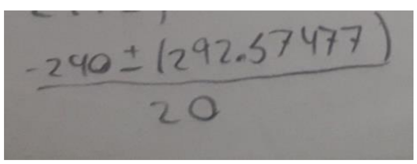


Figura 47: Aplicación de formula general (1).

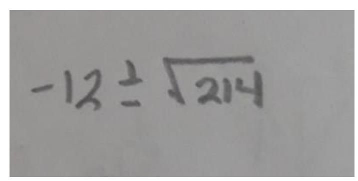


Figura 48: Aplicación de formula general (2).

En ambos casos las parejas discriminaron el caso negativo y plantearon sus respuestas (ver Figuras 49 y 50).

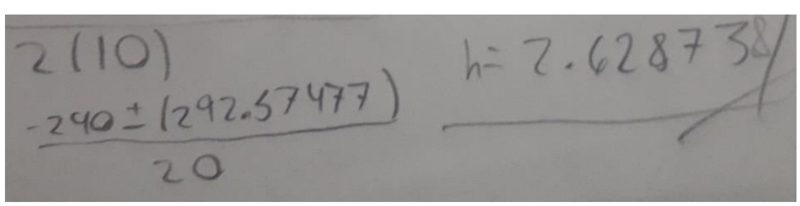


Figura 49: Resultado de formula general (1).

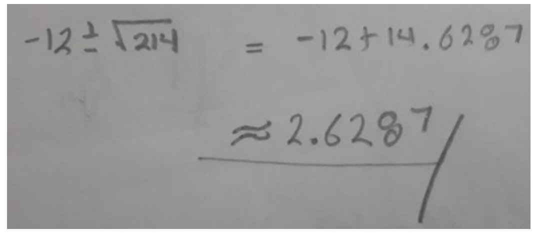


Figura 50: Resultado de formula general (2).

En ambos procedimientos y respuestas se pudo observar cómo los estudiantes descartaron el caso negativo y por ende la respuesta negativa. Considerando que a lo largo de la sesión se observó como los estudiantes se apropiaban del problema y su contexto, por ejemplo, cuando delimitaron los límites de la altura (entre 0 y 4dm) y el volumen (entre 0 y 1120 litros), se puede inferir que los estudiantes discriminaron el caso negativo dado que la altura final sería un numero negativo y esto no tendría sentido en el problema.

El equipo grabado planteó este tipo de procedimiento (Figura 47 y 49) y se pudo apreciar como razonaron el descarte del caso negativo. Por esto, se presentan a continuación transcripciones del episodio de trabajo de los estudiantes respecto del inciso e).

5.3.2.5.1 Equipo grabado

Después del trabajo realizado a lo largo de los distintos pasos de la parte 2, los estudiantes llegaron al inciso e), en el cual debían resolver una versión modificada del problema original. El equipo grabado comenzó planteando la expresión de volumen igualada a 700 para “saber la altura de la varilla”:

$$700 = 240h + 10h^2$$

En general hablaron acerca de realizar despejes: pasar restando $10h^2$, pasar -10 dividiendo, pasar 240 dividiendo, pasar h dividiendo. Dicho esto, no se observó que plantearan estas operaciones en sus hojas de trabajo.

Después se observó como el estudiante 1 manipuló la herramienta de la misma forma que con la actividad inicial (parte 1): tanteando junto a su compañero. Introduciendo diversas alturas de forma manual con el teclado hasta que se llegó al valor:

$$h = 2.62874dm$$

Resultado observado en su computadora (ver Figura 51) y reflejado en su hoja de trabajo (ver Figura 52).

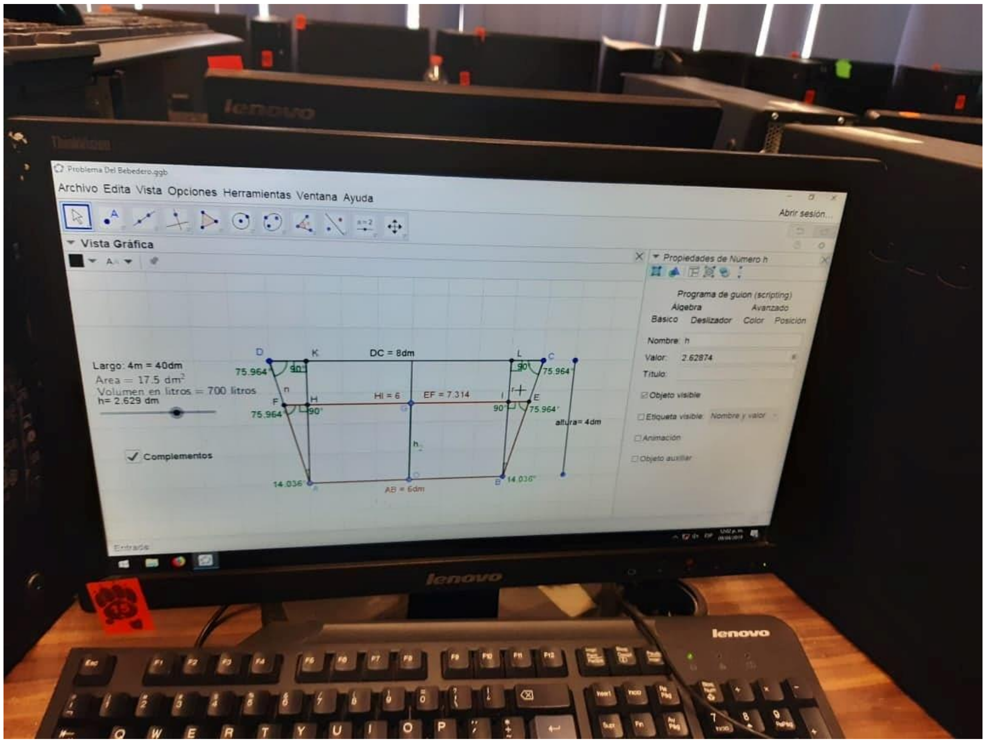
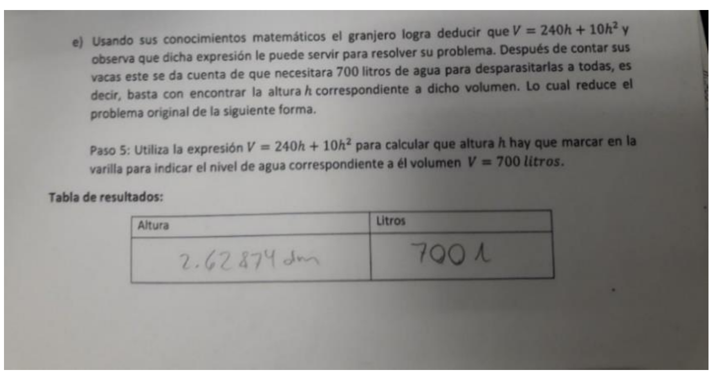


Figura 51: Trabajo de los estudiantes recuperado.



e) Usando sus conocimientos matemáticos el granjero logra deducir que $V = 240h + 10h^2$ y observa que dicha expresión le puede servir para resolver su problema. Después de contar sus vacas este se da cuenta de que necesitara 700 litros de agua para desparasitarlas a todas, es decir, basta con encontrar la altura h correspondiente a dicho volumen. Lo cual reduce el problema original de la siguiente forma.

Paso 5: Utiliza la expresión $V = 240h + 10h^2$ para calcular que altura h hay que marcar en la varilla para indicar el nivel de agua correspondiente a él volumen $V = 700\ litros$.

Tabla de resultados:

Altura	Litros
2.62874 dm	700 l

Figura 52: Respuesta en la hoja de problemas.

Por un momento los estudiantes dieron por terminada la actividad, pero mientras hablaban encontraron una nueva forma de obtener la respuesta, esto usando la expresión de volumen $V = 240h + 10h^2$ (Transcripción 11).

Estudiante 1: y ya.

Estudiante 2: aja.

Estudiante 1: casi que esto terminaba con una división bien macabra.

Estudiante 2: el volumen es igual… el volumen van a ser 700 litros ¿no?, osea:

$$700 = 240h + 10h^2$$

Estudiante 1: aaah ya sé lo que teníamos que hacer bro.

Estudiante 2: ¿qué?

Estudiante 1: no, no le quiero suponer (el estudiante escribe)

Estudiante 1: ¿a qué se parece? (mostrando lo escrito)

Estudiante 2: ¿a qué se parece?

Estudiante 1: esto también puede verse como (el estudiante describe la ecuación mientras la escribe):

$$10h^2 + 240h - 700 = 0$$

Estudiante 2: aja.

Estudiante 1: $x^2 + x$ …, por la chicharronera.

Estudiante 2: más menos… este ¿cuál era?

Estudiante 1: no la habías visto así ¿verdad?

Estudiante 2: sí, pero no se me ocurrió eso…

(Transcripción 11)

Con esto dicho, se pudo observar en sus hojas de trabajo el planteamiento de la ecuación, después el uso de la fórmula general y finalmente el cálculo de los resultados apoyados de su calculadora. Durante el cálculo de la raíz se dio la siguiente conversación (Transcripción 12).

Estudiante 1: la raíz de ocho mil que…

Estudiante 2: 8,000…, 85,600.

Estudiante 1: 600.

Estudiante 2: 292. … ¿y eso lo ponemos?

Estudiante 1: siii.

Estudiante 2: ¿hasta cuantos?, ¿los primeros cuatro?

Estudiante 1: “dos, cuatro, dale los primeros cinco”

(Transcripción 12)

En esta conversación se reflejó el interés por la precisión de la respuesta, precisión que se solicitó de manera implícita en el inicio de la segunda parte mediante la introducción del nuevo elemento del contexto. Dicho esto, desarrollaron los componentes interiores de la raíz (ver Figura 53).

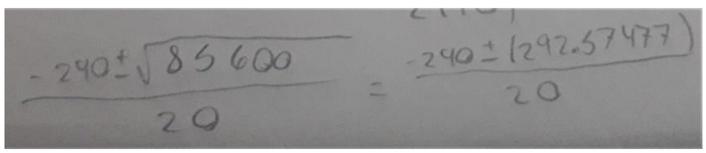


Figura 53: Desarrollo de la raíz.

Durante el cálculo de la respuesta se dio la siguiente conversación (Transcripción 13).

Estudiante 2: el primer resultado.

Estudiante 1: menos cuanto… 240, primero -240.

Estudiante 2: sobre 20… 2.62873.. yey.

Estudiante 1: yey, seemon sí salió.

Estudiante 2: … es igual 2.62873…

Estudiante 1: porque el otro no existía en el dominio y ya quedo.

(Transcripción 13)

En esta última parte se entiende que el estudiante 1 se refería al segundo valor que se podía obtener mediante la fórmula general, que al ser la suma de dos números negativos el resultado era negativo. Asimismo, dicho estudiante parece haber descartado este valor de inmediato y su compañero en primera instancia parece no tener objeción. Se infiere que esto último fue así dado que ya tenían una respuesta inicial y eran muy parecidas (la obtenida mediante el applet y la calculada con la formula general).

Los estudiantes trabajaron el resto de los incisos y regresaron al inciso e) por sugerencia del estudiante 2, el cual le preguntó a su compañero sobre un cierto valor escrito anteriormente (Transcripción 14).

> Estudiante 2: ¿cuál era después del 3? ¿ya lo borraste?, tres ocho, era un ocho. Un ocho, listo.
>
> (Transcripción 14)

Valores que coincidían con las últimas dos cifras del resultado obtenido en el inciso e) después de usar la formula general:

$$h = 2.628738$$

Lo cual es consistente con la escritura en sus hojas, dado que en esta parte se observó un ligero borrón y un 8 al final. Si bien ya tenían la cantidad de decimales suficientes, se puede decir que el estudiante 2 no se quedó conforme con el hecho de que se borrara una cifra, lo cual puede asociarse al tema de la necesidad de la precisión, enfatizado al inicio de la segunda parte (ver Figura 54).

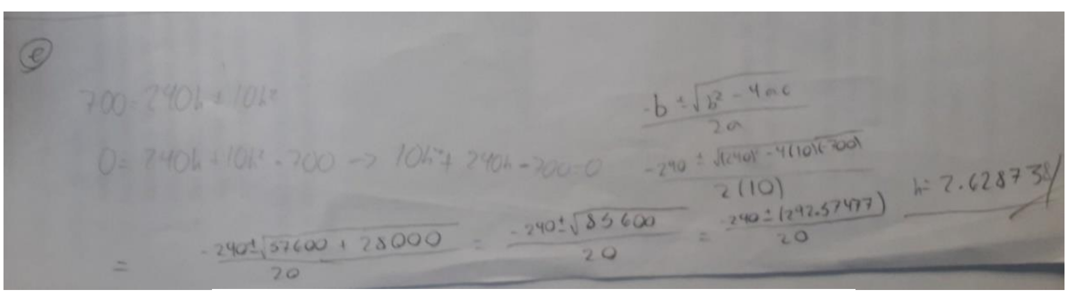


Figura 54: Planteamiento y resolución de la ecuación cuadrática. Respuesta $h = 2.628738$.

Antes de terminar la sesión los estudiantes tocaron el tema de las posibles soluciones proporcionadas por la ecuación cuadrática (Transcripción 15)

> Estudiante 2: tengo... áreas negativas.
>
> Estudiante 1: no tontuelo, en la otra, la otra área no existía en el dominio.

Estudiante 2: por eso, es área negativa.

Estudiante 1: no, es positiva, pero no existe en el dominio.

Estudiante 2: no, es negativa.

Estudiante 1: esta se está restando.

Estudiante 2: por eso, pero esta menos una resta sigue dando negativo, sobre 20 sigue dando un área negativa.

(Transcripción 15)

Aquí pareciera que los estudiantes se guiaron del valor del área para justificar si la respuesta era válida o no, aunque antes pareciera que se refieren al valor de la altura en sí (Transcripción 13). Ambos razonamientos están relacionados y son correctos, fijándose en la altura solo tiene sentido la respuesta positiva por tratarse de un problema que se presenta como real. Fijándose en el área sucede lo mismo, con la altura positiva se obtiene un área positiva, mientras que con la altura negativa (valor que no tiene sentido en el problema) se obtiene un área negativa, lo cual no tiene sentido en el contexto de un problema real o considerando la definición de área.

En el último procedimiento realizado por los estudiantes se pudo observar cómo estos fueron capaces de ver la expresión como una ecuación cuadrática y al mismo tiempo se puede inferir el estudiante 1 no se olvidó del contexto. Esto último se deduce a partir de lo expresado por este acerca de que la segunda altura posible ($h = \frac{-240-292.57477}{20}$) "no existía en el dominio", un término que ya había sido mencionado antes durante la clase. En particular este término fue mencionado por un estudiante al que se le cuestionó sobre que valores podía tomar la altura, el cual expresó que el "dominio" de h era entre 0 y 4.

5.3.2.5.2.- Cierre del inciso e)

Se observaron diversos procedimientos los cuales se pueden clasificar en tres tipos: 1) evaluación de la expresión de volumen, 2) manipulación algebraica de la expresión con el propósito de despejar h y 3) identificar la expresión de volumen como una ecuación cuadrática, plantearla y resolverla. Se observó que los estudiantes expresaron respuestas con al menos cuatro decimales: consideraron el elemento del contexto introducido al inicio de la segunda parte del problema. Expresado de otra forma, se observaron indicios de que los estudiantes se apropiaron del contexto.

Respecto de los procedimientos en los que no se llegó a la respuesta o una aproximación de esta, se pudiera decir que las ideas base eran buenas, en el sentido de que mediante estas se podía llegar a la respuesta (hacer uso de sustitución en la expresión, manipular algebraicamente la expresión buscando despejar h), sin embargo, no fueron capaces de aplicarlas correctamente y de desarrollar su procedimiento de manera exitosa.

5.3.2.6 Incisos f) y g: Sobre la expresión en términos del contexto y utilizando lenguaje matemático.

Las preguntas de estos incisos se plantearon inicialmente con la intención de averiguar cómo estaban interpretando los estudiantes la expresión de volumen obtenida y ver si eran capaces de expresar esto en términos del contexto del problema y utilizando lenguaje matemático.

5.3.2.6.1.- Sobre el equipo grabado (equipo 1) e intervención del tesista

Los estudiantes tuvieron diversas conversaciones en torno a las preguntas. En primera instancia leyeron el inciso f) y comentaron al respecto (Transcripción 16).

> Estudiante 1: una función que podemos integrar o derivar.
>
> Estudiante 2: una función mmm.
>
> El estudiante 2 procede a leer la pregunta 2.
>
> Estudiante 2: usando lenguaje matemático responde, ¿qué…?, ¿la misma?, aaah con tus propias palabras y matemáticamente.
>
> (Transcripción 16)

Los estudiantes continuaron hablando sobre realizar operaciones con la expresión del volumen (derivar e integrar), para después dar por terminada la actividad. Dicho esto, continuaron hablando sobre lo planteado por el estudiante 1 acerca de derivar e integrar.

A continuación, los estudiantes hablaron con el tesista y expresaron haber terminado, este, observó sus respuestas y lenguaje manejado lo que le dio la noción al tesista de que posiblemente las preguntas eran ambiguas respecto de la parte del "contexto" y el "lenguaje matemático". Después el tesista decidió intervenir buscando aclarar estas partes ambiguas (Transcripción 17).

> Tesista: (Lee la pregunta del inciso f). Contexto del problema, ¿de qué trataba el problema?, ¿qué elementos había del problema? Teníamos altura… ¿qué más?
>
> Los estudiantes murmullan algunas ideas.
>
> Tesista ¿teníamos que?
>
> Grupo: el volumen, el área.
>
> Tesista: esto es hablando en el contexto del problema. Segunda pregunta (lee el inciso g), ahí ya pues estamos… tratando de quitar el contexto, ahí simplemente hablando más desde las matemáticas mismas y, pero igual son libres de manejar su lenguaje como mejor prefieran, ahí hay libertad hasta cierto punto.
>
> (Transcripción 17)

Durante esta intervención el tesista dio cuenta de lo ambiguo que podía resultar preguntar sobre el "contexto" esto al tener en cuenta lo contestado por el grupo; y lo complicado que era definir "lenguaje matemático", al punto de que se dio explicación breve y simple. Lo que llevó a concluir, en ese momento, que difícilmente los estudiantes podrían contestar las preguntas f) y g) adecuadamente.

Durante de esta intervención el equipo grabado continúo discutiendo acerca de las preguntas, desarrollándose otra conversación (Transcripción 18).

> Estudiante 1: la h sería el desparasitante.
>
> Estudiante 2: no, la V.
>
> Estudiante 1: no, la V es el agua, y el h es la varilla, pero también sería el desparasitante.
>
> Estudiante 2: ¿la h?

Estudiante 1: sí.

Estudiante 2: no, la h si es una varilla.

Estudiante 1: oh, demonios.

Hay una pausa y continúan, en general ambos intentan expresar su idea.

Estudiante 1: dependiendo del valor de la varilla es la cantidad de agua que se usa.

Estudiante 2: (asiente). De la altura de la varilla, dependiendo de…

Estudiante 1: de la altura de la… bueno de las marcas de la varilla, (estudiante 2 asiente) es la cantidad de agua que hay.

Estudiante 2: es la cantidad de agua que hay.

Estudiante 1: pues solo hay que poner eso (el estudiante 2 asiente)

Después de algunos comentarios el estudiante 1 le dictó a su compañero una respuesta.

Estudiante 1: dependiendo de la varilla es la cantidad de agua que hay.

Los estudiantes se dirigen al tesista para mostrarle su respuesta.

Tesista: de la varilla.

Estudiante 2: bueno de la altura de la varilla.

Los estudiantes sugirieron realizar un cambio y el tesista les indico que dejaran la respuesta como mejor les pareciera, pero que estuvieran satisfechos con esta.

Estudiante 2: de la altura de la varilla es que…

Estudiante 1: de las marcas.

Estudiante 2: dependiendo de donde llegue el agua a la varilla es la cantidad de agua que hay.

Estudiante 1: listo.

(Transcripción 18).

Finalmente se pudieron apreciar sus respuestas finales en sus hojas de trabajo (ver Figuras 55 y 56).

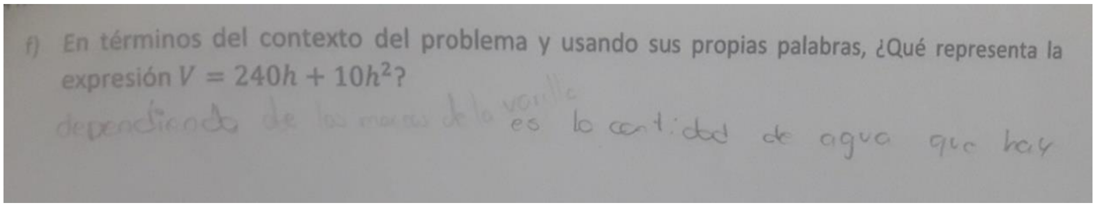


Figura 55: Respuesta del inciso f).

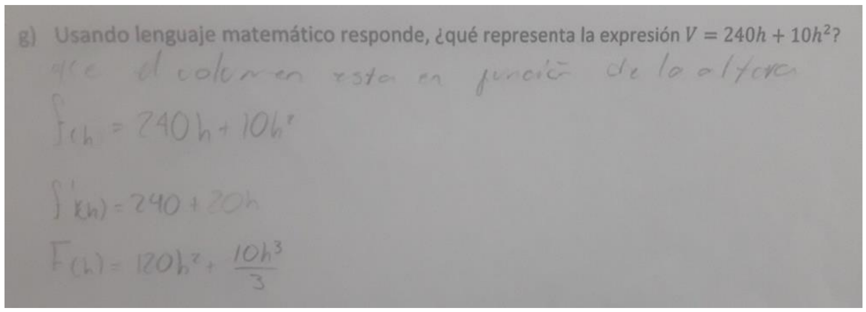


Figura 56: Respuesta del inciso g).

De la Figura 55 se puede recuperar “dependiendo de las marcas de la varilla es la cantidad de agua que hay” y de la Figura 56 “que el volumen está en función de la altura”, esto junto con algunas expresiones matemáticas.

Respecto del inciso f) la respuesta expresada fue de la que más se discutió, como se puede observar en las transcripciones anteriores, en si hablaron del tema de la dependencia de la cantidad de agua (volumen) y las marcas de la varilla (altura), de esta forma se pudiera decir que los estudiantes dieron cuenta de la relación de dependencia entre dichas cantidades.

Sobre el inciso g) los estudiantes hablaron brevemente sobre el tema de derivar e integrar (Transcripción 16), lo cual se observó que hicieron con la expresión de volumen $V = 240h + 10h^2$, la cual reescribieron como:

$$f(h) = 240h + 10h^2$$

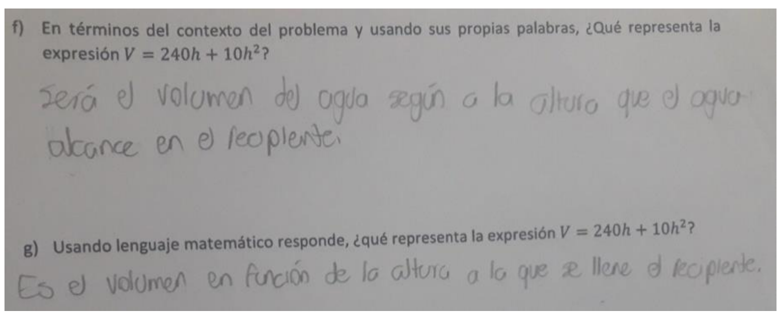
En general se observó como recurrieron a notación relacionada con funciones ($f(h)$), derivadas ($f'(h)$) e integrales ($F(h)$). Considerando esto último y lo reflejado en la Transcripción 25 se pudiera decir que los estudiantes vieron a la expresión del volumen como una función dependiente de la altura, posibilidad que se ve sustentada por el segmento de la respuesta “que el volumen está en función de la altura” (ver Figura 46).

Esta última idea no es mencionada de forma tan clara y explicita en las Transcripciones 16, 17 y 18, sin embargo, si se mencionó el tema de la “dependencia” como parte de su discusión sobre el inciso f), asimismo durante el inciso b) hablaron de que la base mayor dependía de la altura.

Considerando estas ideas se podría decir que la respuesta “que el volumen está en función de la altura” es una versión “mejorada” de la respuesta “dependiendo de las marcas de la varilla es la cantidad de agua que hay”.

5.3.2.6.2 Sobre los equipos restantes

A continuación, se muestran algunas de las respuestas de las parejas restantes las cuales se consideró que representaban adecuadamente al conjunto total de respuestas (Figura 57 y Figura 58).

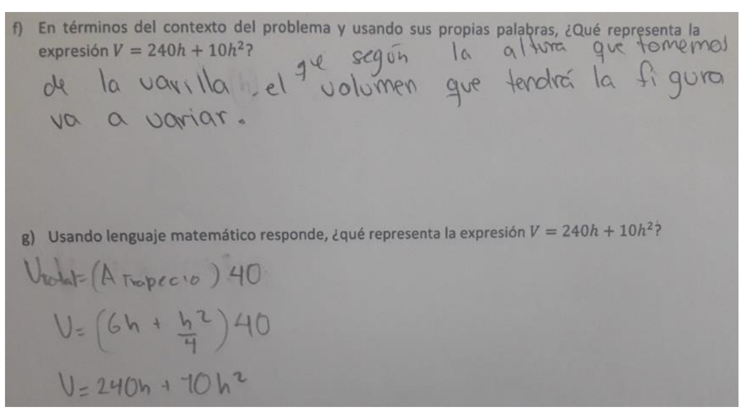

f) En términos del contexto del problema y usando sus propias palabras, ¿Qué representa la expresión $V = 240h + 10h^2$?

Será el volumen del agua según a la altura que el agua alcance en el recipiente.

g) Usando lenguaje matemático responde, ¿qué representa la expresión $V = 240h + 10h^2$?

Es el volumen en función de la altura a lo que se llene el recipiente.

Figura 57: Respuestas del equipo 4.


f) En términos del contexto del problema y usando sus propias palabras, ¿Qué representa la expresión $V = 240h + 10h^2$?

que según la altura que tomemos de la varilla, el volumen que tendrá la figura va a variar.

g) Usando lenguaje matemático responde, ¿qué representa la expresión $V = 240h + 10h^2$?

$V_{total} = (A_{trapecio})\,40$

$V = \left(6h + \frac{h^2}{4}\right)40$

$V = 240h + 10h^2$

Figura 58: Respuestas del equipo 7.

Analizando las respuestas se pudo observar que los estudiantes dieron cuenta de la relación entre el volumen del bebedero y la altura (nivel del agua). Asimismo, al comparar las respuestas de f) en las Figuras 57 y 58 se pudo apreciar un lenguaje en términos del contexto; por lo que, si bien la pregunta pudo ser ambigua, se puede decir que la intervención del tesista (Transcripción 17) apoyó a los estudiantes en superar dicha situación. Mientras que al comparar las respuestas de g) en las Figuras 57 y 58 se pudieron apreciar respuestas muy distintas en cuanto al lenguaje; sugiriendo esto que una pregunta solicitando una respuesta usando "lenguaje matemático" pudo resultar difícil de comprender.

5.3.2.6.3 Cierre de los incisos f) y g)

Respecto de los incisos f) y g) se puede decir que las preguntas fueron ambiguas en el sentido de que "en términos del contexto" y "usando lenguaje matemático" no son expresiones que se puedan definir, entender y explicar fácilmente; aunque se considera que la intervención del docente apoyó a los estudiantes en comprender a que se refería la pregunta con el "contexto". Considerando esto es que se analizó principalmente el contenido de las respuestas.

En general los estudiantes mencionaron diversos términos relacionados con la concepción de función: variación y dependencia. Se hizo uso de expresiones como "en función", "según", "depende" para hablar de cómo se relacionan el volumen y la altura: el volumen depende de la altura.

Se pudieron apreciar distintos elementos relativos al contexto en las respuestas de ambas preguntas: la varilla, el bebedero, el nivel del agua, la altura del bebedero, el volumen, entre otros. Esto pudiera traducirse como que los estudiantes se apropiaron del contexto del problema o del problema en sí mismo (lo hicieron suyo).

Dicho esto, no es que no existan indicios de una respuesta en lenguaje matemático, por ejemplo, las respuestas del equipo grabado se acercaron a una definición de función. Asimismo, estos durante su discusión de los dos últimos incisos hablaron del término "función" e identificaron a la expresión de volumen como una.

5.3.2.7 Cierre de la parte 2

Esta parte de la actividad fue bastante amplia en cuanto al tiempo y cantidad de actividades, se observaron diversos procedimientos de resolución, así como formas de razonamiento a la hora de contestar, siendo algunos esperados y otros no.

Respecto al tema del uso del contexto se puede decir que los estudiantes se apropiaron del contexto del problema y pasaron a ver la precisión como un tema importante: asumieron el problema como una situación real y al valerse este del tema de la precisión este último les resultó relevante. Esto se reflejó principalmente en las respuestas del inciso e) las cuales fueron expresadas usando mínimo 4 decimales, que fue el grado de precisión solicitado por el problema.

El tema de la precisión se intentó utilizar como un detonador del trabajo matemático. Dado que se puede decir que el contexto llevó a que los estudiantes vieran la importancia de la precisión y esto a su vez los llevo más tarde a hacer planteamientos por si mismos (inciso e), se considera que efectivamente el tema de la precisión influenció en que los estudiantes se comprometieran en un trabajo matemático.

5.3.4 Cierre del problema del bebedero

En la primera parte del problema se les presentó a los estudiantes una herramienta tecnológica (applet) para poder resolver lo planteado. En general los estudiantes manipularon la herramienta y llenaron sus tablas de datos usando diversos grados de precisión, hasta dos decimales en la columna de alturas y hasta tres decimales en el volumen (litros).

Analizando sus respuestas se concluyó de manera general que en ese momento el grupo podía dividirse en quienes tenían interés de reflejar respuestas precisas en sus tablas (siendo la mayoría) y en quienes no. Dicho de otra forma, esta parte permitió identificar la postura inicial de los estudiantes acerca del tema de la precisión.

Previo a introducir la segunda parte el tesista preguntó al grupo de estudiantes acerca de sus respuestas: 1) sobre el nivel de precisión utilizado y 2) si interesaba conocer las respuestas exactas o bastaba con las obtenidas mediante él applet, esto último dejando en claro que las respuestas proporcionadas por la computadora eran aproximaciones. Concordando los estudiantes que en general les parecían respuestas pertinentes.

Hecho esto el tesista intentó que los estudiantes recordaran el contexto original del problema (de lo que trataba este) y procedió a presentar la parte 2. En esta parte se introdujo un nuevo elemento al contexto (instrucciones del desparasitante) y se les cuestiono si las respuestas que había obtenido mediante el applet eran lo suficientemente precisas. El resultado fue que los estudiantes coincidieron con que no era suficiente la precisión de sus respuestas dado que “se le podían morir sus animales al granjero”. De esta forma se puede decir que se apropiaron del contexto y lo vieron como relevante para contestar el problema: asimilaron el problema como una situación real (que era la intención), identificaron las repercusiones que podía tener la falta de precisión en las respuestas y de esta forma la precisión gano un cierto nivel de importancia para los estudiantes.

El tesista usó este momento para continuar haciendo énfasis en el contexto, hablándose sobre como el problema hablaba de un granjero, alguien sin la posibilidad de usar la tecnología. Expresando el tesista que una persona en esa situación podría usar matemáticas para resolver el problema, herramienta de la que disponían ellos como estudiantes. Esto es, se presentó a las matemáticas como una herramienta que permite ganar precisión.

En el inciso b) se dio una intervención del tesista para ayudar a los estudiantes a determinar una expresión importante para la resolución del problema (expresión para el área de la parte sombreada). Apoyándose de la herramienta tecnológica para construir junto con los estudiantes dicha expresión.

En el inciso e) los estudiantes obtuvieron una expresión de volumen y aplicaron diversos procedimientos para resolver el problema simplificado (la búsqueda de la altura para un volumen de 700 litros), reflejando la mayoría de los estudiantes respuestas con al menos cuatro decimales. En los incisos f) y g) se pudieron apreciar distintos elementos relativos al contexto en las respuestas de ambas preguntas: la varilla, el bebedero, el nivel del agua, la altura del bebedero, el volumen, entre otros. Uniendo lo observado en los incisos e), f) y g) se pudiera decir que efectivamente los estudiantes se apropiaron del contexto del problema.

De manera sintética se puede decir que el contexto, la intervención docente y el uso de tecnología trabajaron en conjunto en este problema. La tecnología en un inicio se presentó como una herramienta que permitía encontrar una primera solución, después con la introducción del nuevo elemento del contexto (parte 2) y la intervención docente los estudiantes dieron cuenta de que la herramienta no era suficientemente precisa para evitar que "se le mueran sus vacas al granjero": hubo una apropiación del contexto, los estudiantes vieron el problema de la forma en que se les intentó presentar, como una situación real. De esta forma se presentó a las matemáticas como una herramienta para ganar precisión, lo que permitió introducir el trabajo matemático y que los estudiantes se fueran comprometiendo en un trabajo matemático.

Durante la parte 2 la tecnología junto con la intervención del tesista (trabajando en conjunto con los estudiantes) jugaron un papel importante en la observación de propiedades/características de relevancia para la comprensión y construcción de un modelo (inciso b); el cual, más tarde fue terminado (inciso d) y utilizado para resolver una versión modificada del problema original (inciso e). Destacándose el papel de la intervención como una forma de apoyo para superar la tarea de construcción del modelo, la cual había mostrado (en aplicaciones previas) ser una tarea difícil y compleja.

Finalmente se descarta como el contexto continuo presente a lo largo de las actividades, particularmente en los últimos tres incisos (e, f y g). Observándose esto en el contenido de las respuestas mismas (manejo de lenguaje: bebedero, varilla, etc.) como en la forma de estas (nivel de precisión de las respuestas). Considerando esto y el hecho de que el énfasis en el contexto se hizo principalmente al inicio de la parte 2, es que se considera que hubo una apropiación del contexto por parte de los estudiantes; sin descartarse que hubo momentos previos a las actividades e, f y g en los que contexto fue ligeramente olvidado o que tuvo un menos impacto.

Conclusiones

Al inicio del trabajo se planteó la pregunta de investigación ¿qué papel juegan el contexto de los problemas, el uso de la tecnología y las intervenciones del docente para promover el trabajo de modelización matemática de los estudiantes? Mediante el análisis de resultados se pudo llegar a lo siguiente.

El contexto juega un papel dependiendo del tipo: intra-matemático y extramatemático. En los problemas de contexto intra-matemático geométrico: caminito y triángulo, se observó como los componentes geométricos favorecieron la evocación/establecimiento de diversos conocimientos por parte de los estudiantes, los cuales les fueron de utilidad para plantear y desarrollar distintos tipos de procedimientos que les permitieron resolver los problemas. De esta forma se puede decir que el contexto intramatemático geométrico de los problemas favoreció el trabajo matemático de los estudiantes, el cual interesa llevar al aula de acuerdo con la concepción de modelización de Sadovsky (2005). En el problema de contexto extramatemático: bebedero, se observó como los estudiantes se apropiaron del contexto de la precisión: fue un elemento importante que influenció su proceso de resolución, esto comparando su trabajo de la primera parte del problema y con su trabajo en la segunda parte.

Respecto del uso de la tecnología (applets) en primera instancia se pudiera decir su rol fue ligeramente distinto en cada problema: triangulo y bebedero. En el primero la tecnología permitió analizar el problema (fenómeno) más de cerca, lo que a su vez llevó a identificar diversas características del modelo expuesto en el análisis previo; asimismo la tecnología fue utilizada para obtener las respuestas de manera directa. En el segundo la tecnología sirvió para obtener una primera aproximación de la solución (primera parte del problema) y después fue útil para la observación propiedades relevantes para la construcción de un modelo. De esta forma se puede decir que la tecnología fue útil para la observación/identificación de características útiles para la creación de modelos: parte de un trabajo de modelización.

Las intervenciones del docente (que para este trabajo fue el tesista) también fueron de importancia. Siendo algunas de estas el proporcionar información como forma de apoyo, el fomentar que los estudiantes se cuestionen sus respuestas: sobre su validez y pertinencia, entre otras. Dicho esto, se considera que fueron importantes por el contenido de las mismas, porque estas se llevaron a cabo en momentos clave de transición (entre una parte del problema y otra) y en general porque sirvieron de apoyo para que los estudiantes afrontaran partes difíciles de los problemas. Lo que les permitió evocar conocimientos útiles para la resolución de los problemas, establecer relaciones entre los elementos de estos y favoreció el planteamiento y desarrollo de diversos procedimientos: promoviendo el trabajo de modelización de los estudiantes.

Dicho esto, los tres elementos: contexto, tecnología e intervención docente, no trabajaron de forma separada. En cada problema se pudo observar como al menos dos de estos elementos trabajaron en conjunto para promover el trabajo de modelización matemática de los estudiantes. Particularmente en el problema principal de la secuencia se observó como los tres elementos se entrelazaron a lo largo de las diversas actividades y trabajaron de forma conjunta.

Acerca de posibles cambios específicos en la secuencia. En el primer problema se observó tanto el planteamiento de procedimientos que no se apoyaron de forma directa de la semejanza de triángulos, conocimiento que se visualizó como central en la secuencia, como el planteamiento de procedimientos apoyados fuertemente en dicho conocimiento. Dicho esto, considerando que la intervención del tesista sobre semejanza, la cual se dio una vez que los estudiantes trabajaron la actividad un tiempo, favoreció el planteamiento de procedimientos de este último tipo, un posible cambio es el plantear la intervención del tesista antes de que los estudiantes comiencen con la actividad (una vez leída). Esto como una manera de resaltar la importancia de la semejanza de triángulos y favorecer el planteamiento de procedimientos apoyados en este conocimiento.

Respecto del segundo problema, la situación que se desato al trabajar con el tercer inciso de la segunda parte se considera que fue beneficiosa para los estudiantes. Dicho esto, se esperaba que los estudiantes trabajaran con la herramienta y plantearan procedimientos escritos para resolver el problema, situación que no se dio, en su lugar los estudiantes optaron por tomar las respuestas que se podían obtener mediante la herramienta. Como se mencionó en el análisis de resultados de este problema se considera que la dificultad del problema o la redacción de este tuvieron que ver con esta forma de proceder de los estudiantes, por lo que un posible cambio es el reescribir el problema y destinar un mayor tiempo para que los estudiantes puedan trabajarlo (al menos dedicarle una sesión completa), tiempo del que no se dispuso en este trabajo por diversas circunstancias.

Acerca del tercer problema, considerando los resultados obtenidos y el como se dio la experiencia de clase un posible cambio es aumentar el número de sesiones a tres. Esto buscando dedicar el máximo tiempo posible al inciso b), el cual es clave para resolver la segunda parte del problema. De tal forma que la intervención del docente no sea necesaria en el mismo nivel que lo fue en este trabajo, sino que el estudiante tenga un rol más activo: que tenga la oportunidad de explorar con la herramienta tecnológica, plantear ideas y llevarlas a cabo, esto buscando construir el modelo que se pide.

Respecto de las preguntas finales, si bien arrojaron información importante para el análisis de resultados se considera que pueden ser removidas de la actividad y de esta forma concluir con el inciso e), esto sin perderse nada del contenido del problema en sí.

Considerando la propuesta original de Segal y Giuliani (2008) se puede decir que se amplió el marco de posibilidades en cuanto a la resolución de los problemas, esto mediante la introducción de una herramienta tecnológica digital: applet de GeoGebra. Asimismo, se considera que el análisis previo hecho como ampliación del análisis didáctico presentado por la autora permitió hacer cambios sustanciales en los problemas, los cuales, teniendo en cuenta los resultados obtenidos, se puede decir que resultaron beneficiosos.

Aun con los posibles cambios mencionados y los aspectos en los que se considera que se aportó a la propuesta original de Segal y Giuliani (2008) la secuencia aún tiene aspectos que pueden pulirse y existen otras formas de aprovecharla. Por ejemplo, una posibilidad interesante sería usar esta secuencia para enseñar sobre la modelización a un conjunto de maestros. Primero se les podría aplicar una versión modificada de la secuencia haciendo que experimenten de primera mano su funcionamiento y después complementar esto mediante la introducción de teoría acerca de la modelización y uso en la enseñanza. Esto es, usar la secuencia en la formación de profesores.

Anexos

A) Secuencia de actividades: Prueba definitiva

-Sesión 1

Nombre: ____

Grado: _______ **Grupo:** ______

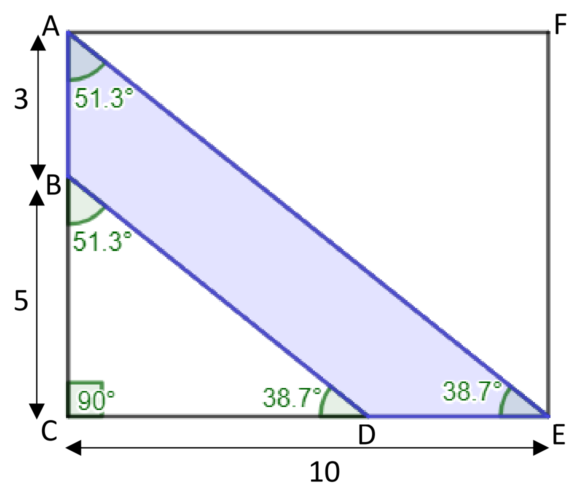
Instrucciones

- Resuelvan los siguientes problemas. Trabajen en parejas.
- Pueden usar las herramientas tecnológicas que tengan a la mano, como **calculadora**, **hoja de cálculo**, o el “**applet**” de GeoGebra que está instalado en las computadoras y cuyas instrucciones se les proporcionan al final de estas hojas de trabajo.
- Por favor, escriban todos sus procedimientos y resultados usando pluma. En caso de corregir algún error, eliminen el error con una cruz (un tache). No borren. Todos sus procedimientos son útiles para nosotros.

Problema del caminito:

Para embaldosar un patio rectangular, se desea saber el área del caminito sombreado determinado por la diagonal y una paralela a la misma.

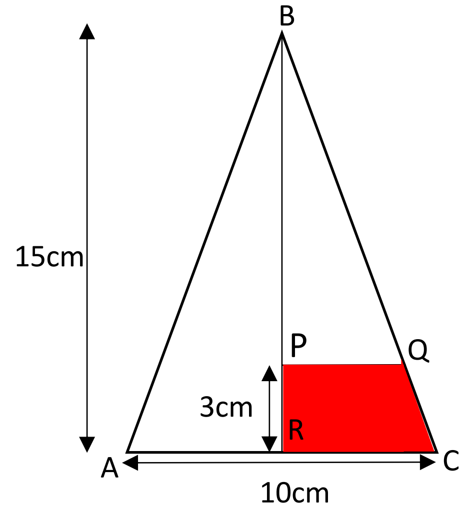
1. Dada la información que se muestra y usando semejanza de triángulos, contesta, ¿cuál es el área del caminito?



Problema del triángulo

Se tiene un triángulo isósceles cuya altura mide 15 cm y su base mide 10 cm, como se muestra en la figura de más abajo.

1. Si se marca sobre la altura un punto **P** a 3 cm de la base del triángulo, ¿cuál es el área de la **parte sombreada** de la figura?

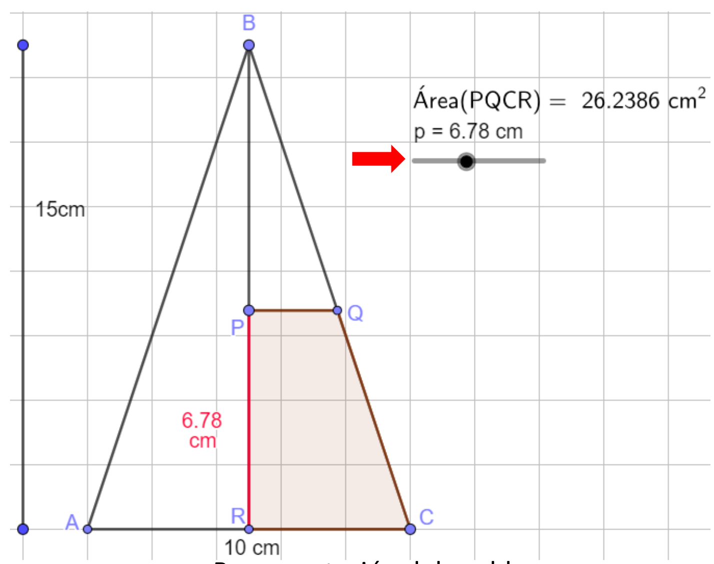


2. Muevan el punto **P** sobre la altura para que **el área sombreada** sea de $24\ cm^2$, $31.5\ cm^2$ y $40\ cm^2$. ¿A qué distancias de la base ubicaron al punto P para obtener las áreas pedidas?
   - Para que el área sea de $24\ cm^2$, la distancia de **P** a la base es de: ____________
   - Para que el área sea de $31.5\ cm^2$, la distancia de **P** a la base es de: ___________
   - Para que el área sea de $40\ cm^2$, la distancia de **P** a la base es de: ______________

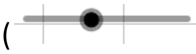
Applet: Problema Del Triángulo

A continuación, se presentan las instrucciones para usar una herramienta tecnológica llamada *applet de Geogebra*.

En la computadora, abran el *applet* llamado “Problema del triángulo”. Verán una imagen como la siguiente.



Representación del problema
del triángulo

Pueden mover varias cosas de este *applet*. Muevan el punto **P** de arriba para abajo sobre la altura. Pueden hacerlo usando el clic izquierdo del ratón o arrastrando el punto **negro** que está sobre el *deslizador* (), en la esquina superior derecha. Para mayor precisión se puede dar clic sobre el deslizador y usar las teclas direccionales izquierda y derecha del teclado.

En la esquina superior derecha verán cómo cambian el **área de la región sombreada (PQCR)** y la medida de la **distancia del punto P a la base del triángulo**.

-Sesiones 2 y 3

Nombre: ____

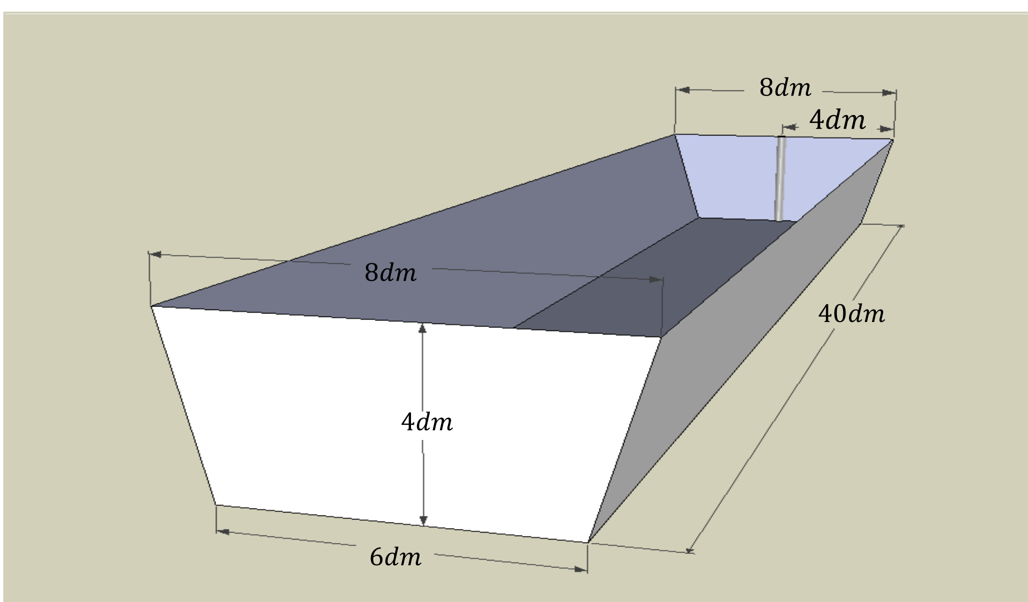
Grado: _______ Grupo: ______

Instrucciones

- Resuelvan el siguiente problema. Trabajen en parejas.
- Pueden usar las herramientas tecnológicas que tengan a la mano, como **calculadora**, **hoja de cálculo**; o el "**applet**" de GeoGebra, el cual está instalado en las computadoras y cuyas instrucciones se les proporcionan en la tercera hoja.
- Por favor, escriban todos sus procedimientos y resultados usando pluma. En caso de corregir algún error, eliminen el error con una cruz (un tache). No borren. Todos sus procedimientos son útiles para nosotros.

Problema del bebedero

En el campo, algunos bebederos para animales tienen una forma como la que se esquematiza en el dibujo:



Se trata de un prisma recto de 40dm de largo, y dos de sus caras son trapecios isósceles congruentes de base menor 6dm, base mayor 8dm y altura 4dm. Donde dm indica la unidad de longitud **decímetros**.

Un granjero desea desparasitar a sus vacas. Para esto, debe lograr medir con suficiente certeza 100 litros de agua por cada litro de desparasitante. Para ello necesita graduar una varilla colocada de forma vertical dentro del bebedero para precisar el nivel de agua correspondientes a 100, 200, 300, … litros y así saber cuánto desparasitante debe agregar.

1. ¿A qué alturas hay que marcar la varilla para indicar los distintos niveles de agua (100, 200, 300, … litros)?

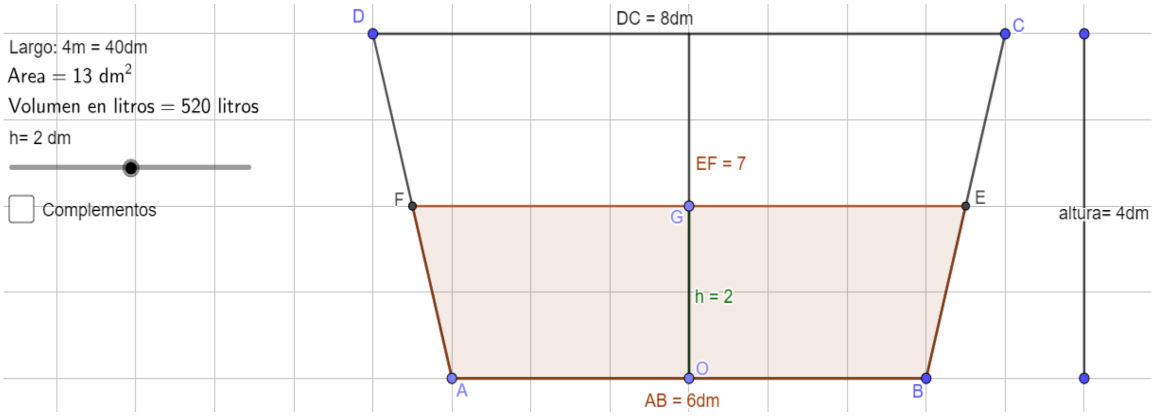
Llenen la siguiente tabla con los valores obtenidos.

Tabla de resultados:

Altura	Litros

Applet: Problema Del Bebedero

En la computadora, abran el *applet* llamado "Problema del Bebedero". Verán una imagen como la siguiente.



Representación del Problema
del Bebedero

Pueden mover varias cosas de este *applet*. Muevan el punto **G** de arriba para abajo sobre la altura. Pueden hacerlo usando el clic izquierdo del ratón o arrastrando el punto que está sobre el *deslizador* (), que se encuentra a la izquierda del trapecio *ABCD*. Para mayor precisión se puede dar clic sobre el deslizador y usar las teclas direccionales izquierda y derecha del teclado.

En la esquina superior izquierda verán cómo cambian el **área de la región sombreada**; el **volumen del bebedero** en litros; y la medida de la **distancia del punto G a la base del trapecio**, es decir, la **altura h del agua en el bebedero**. Así mismo se tiene la casilla de "Complementos", al activarla se muestra información adicional del modelo, así como diversas figuras que podrían resultarles útil para plantear sus procedimientos.

La herramienta tecnológica les ayudó a obtener buenas aproximaciones de las soluciones solicitadas, pero ¿son buenas aproximaciones?, ¿son estas suficientes? Mantengan estas preguntas en mente y continúen con la parte 2 del problema.

Parte 2

Después de revisar las instrucciones del desparasitante de manera minuciosa, el granjero observa la siguiente advertencia "**para un uso adecuado es necesario que el recipiente utilizado este graduado con una precisión de al menos cuatro decimales**".

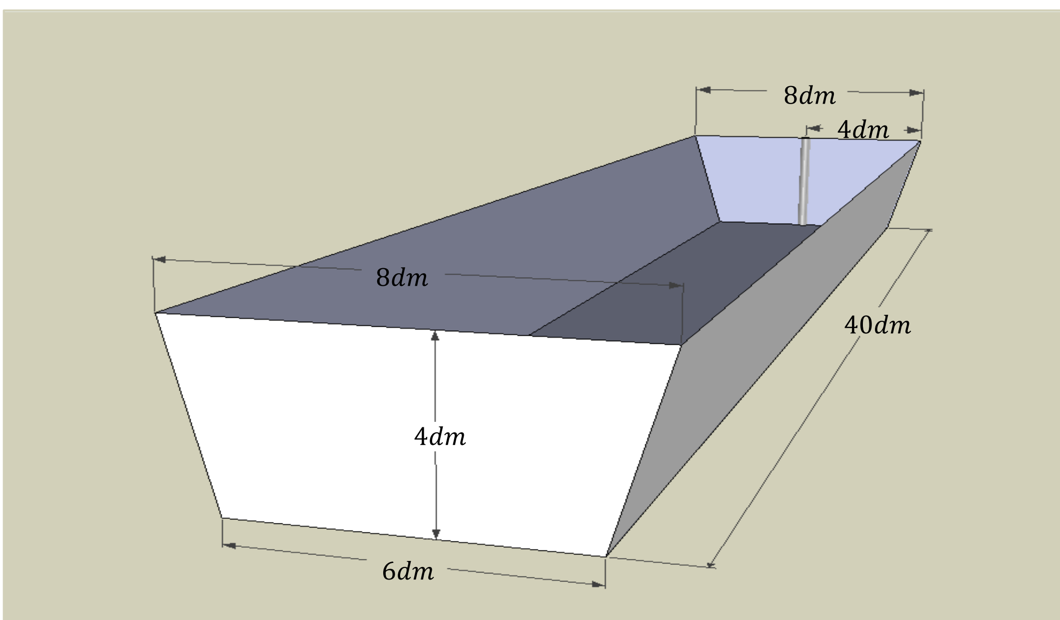
Bajo este contexto ¿es suficiente la precisión reflejada en los resultados que pusieron en su tabla?

Considerando esta nueva parte del problema, planteen un procedimiento matemático que les permita contestar la pregunta que les plantea el problema original:

- ¿A qué alturas hay que marcar la varilla para indicar los distintos niveles de agua (100, 200, 300, … litros)?

Para esto, auxíliense de sus conocimientos matemáticos y de las herramientas tecnológicas. Como apoyo para contestar esta pregunta se plantean los siguientes pasos:

a) Paso 1: responde a la pregunta ¿cuál es el volumen total del bebedero en dm^3?, ¿y en litros?



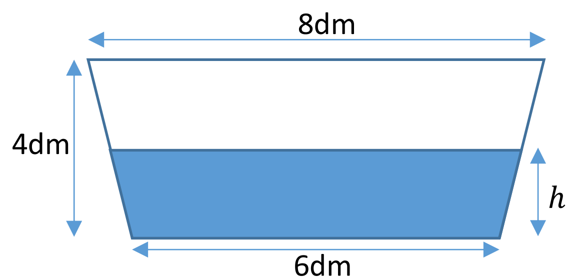
Las siguientes formulas les pueden servir para contestar esta pregunta.

$$Volumen_{Prisma} = Area_{Base} * l$$
$$Area_{Trapecio} = \frac{(B+b)h}{2}$$

Donde B es la base mayor del trapecio, b es la base menor del trapecio, h es la altura del trapecio y l el largo del bebedero.

b) Paso 2: resuelve el siguiente problema.

Sea h la altura del agua en el bebedero expresada en dm, calcula el **área sombreada** que se forma en la cara del bebedero en términos de h, utilizando para esto semejanza de triángulos.



Apóyate para esto de la opción "complementos" del applet, analiza la nueva información que se te proporciona. Puedes cuestionarte ¿al mover/variar h que sucede con el lado superior de la figura sombreada?, ¿cómo describirías dicho comportamiento?, ¿esta información puede servirte para resolver el problema?

c) Paso 3: Denota el **área sombreada** como A, verifica que se obtiene alguna de las siguientes opciones e indica cual es:

I. $A = \left(6 + \frac{h}{4}\right)h$

II. $A = 6h + \frac{h^2}{4}$

III. $A = 6h + \frac{h^2}{2}$

d) Paso 4: resuelve el siguiente problema.

Sea h la altura del agua en el bebedero expresada en dm, calcula el volumen de agua expresado en litros. Denótenlo V y verifiquen que se obtiene $V = 240h + 10h^2$.

e) Usando sus conocimientos matemáticos el granjero logra deducir que $V = 240h + 10h^2$ y observa que dicha expresión le puede servir para resolver su problema. Después de contar sus vacas este se da cuenta de que necesitara 700 litros de agua para desparasitarlas a todas, es decir, basta con encontrar la altura h correspondiente a dicho volumen. Lo cual reduce el problema original de la siguiente forma.

Paso 5: Utiliza la expresión $V = 240h + 10h^2$ para calcular que altura h hay que marcar en la varilla para indicar el nivel de agua correspondiente a él volumen $V = 700\ litros.$

Tabla de resultados:

Altura	Litros

A manera de reflexión, contesta lo siguiente:

f) En términos del contexto del problema y usando sus propias palabras, ¿Qué representa la expresión $V = 240h + 10h^2$?

g) Usando lenguaje matemático responde, ¿qué representa la expresión $V = 240h + 10h^2$?

B) Secuencia de actividades: Prueba piloto

Nombre: ____

Grado: _______ **Grupo:** ______

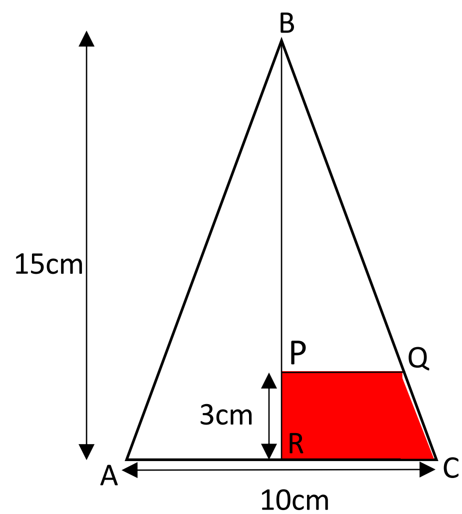
Instrucciones

- Resuelvan el siguiente problema. Trabajen en parejas.
- Pueden usar las herramientas tecnológicas que tengan a la mano, como **calculadora**, **hoja de cálculo**, o el "**applet**" de Geogebra que se les proporciona al final de esta hoja de trabajo y que está instalado en las computadoras.
- Por favor, escriban todos sus procedimientos y resultados usando pluma. En caso de corregir algún error, eliminen el error con una cruz (un tache). No borren. Todos sus procedimientos son útiles para nosotros.

Problema del triángulo

Se tiene un triángulo isósceles cuya altura mide 15 cm y su base mide 10 cm, como se muestra en la figura de más abajo.

1. Si se marca sobre la altura un punto **P** a 3 cm de la base del triángulo, ¿cuál es el área de la parte sombreada de la figura?

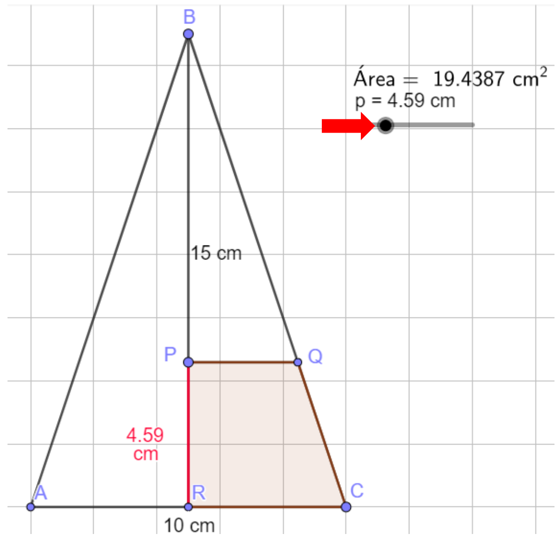


2. Muevan el punto **P** sobre la altura para que **el área sombreada** mida $24\ cm^2$, $31.5\ cm^2$ y $40\ cm^2$. ¿A qué distancias de la base ubicaron al punto P para obtener las áreas pedidas?
   - Para que el área sea de $24\ cm^2$, la distancia de **P** a la base es de: ____________
   - Para que el área sea de $31.5\ cm^2$, la distancia de **P** a la base es de: ___________
   - Para que el área sea de $40\ cm^2$, la distancia de **P** a la base es de: _____________

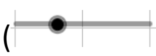
Applet

A continuación, se presentan las instrucciones para usar una herramienta tecnológica llamada *applet de Geogebra*.

En la computadora, abran el *applet* llamado “Problema del triángulo”. Verán una imagen como la siguiente.



Representación del problema
del triángulo

Pueden mover varias cosas de este *applet*. Muevan el punto **P** de arriba para abajo sobre la altura. Pueden hacerlo usando el clic izquierdo del ratón o arrastrando el punto que está sobre el *deslizador* (), en la esquina superior derecha. Para mayor precisión se puede dar clic sobre el deslizador y usar las teclas direccionales izquierda y derecha del teclado.

En la esquina superior derecha verán cómo cambian el **área de la región sombreada** y la medida de la **distancia del punto P a la base del triángulo**.

Bibliografía

Almeida, L. M. W. (2018) Considerations on the use of mathematics in modeling activities. *ZDM Mathematics Education*, 50(1-2), 19-30. doi: 10.1007/s11858-017-0902-4

Araújo, J. L. (2010). Brazilian research on modelling in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 42(3-4), 337-348. doi: 10.1007/s11858-010-0238-9

Ärlebäck, J. B., & Doerr, H. M. (2018). Students' interpretations and reasoning about phenomena with negative rates of change throughout a model development sequence. *ZDM Mathematics Education*, 50(1-2), 187-200. doi: 10.1007/s11858-017-0881-5

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula* (Tesis doctoral no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Ciudad de México.

Balam, C. (2012). *Una problematización de la matemática del docente: la categoría Modelación-Graficación en situaciones de aprendizaje* (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Ciudad de México.

Barquero, B., Bosch, M., & Romo, A. (2018). Mathematical modelling in teacher education: dealing with institutional constraints. *ZDM Mathematics Education*, 50(1-2), 31-43. doi: 10.1007/s11858-017-0907-z

Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects — State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 37-68. doi:10.1007/BF00302716

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM Mathematics Education*, 38(2), 86-95. doi:10.1007/BF02655883

Borsani, V., Cedrón, M., Cicala, R., Di Ricco, E., Duarte, B., & Sessa, C. (2013). La integración de programas de geometría dinámica para el estudio de la variación de magnitudes geométricas: nuevos asuntos para la didáctica. *VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*, Uruguay, 6901-6908. Recuperado de http://cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/643.pdf

Borsani, V., Lamela, C., Luna, J. P., & Sessa, C. (2014). Discusiones en el aula en torno a una variación cuadrática: la coordinación entre distintos registros de representación. *Yupana*, 1(7), 11-31. doi: 10.14409/yu.v1i7.4260

Brady, C. (2018). Modelling and the representational imagination. *ZDM Mathematics Education*, 50(1-2), 45-59. doi: 10.1007/s11858-018-0926-4

Burkhardt, H. (2006). Modelling in Mathematics Classrooms: reflections on past developments and the future. *ZDM Mathematics Education*, 38(2), 178-195. doi: 10.1007/BF02655888

Burkhardt, H. (2018). Ways to teach modelling—a 50 year study. *ZDM Mathematics Education*, 50(1-2), 61-75. doi: 10.1007/s11858-017-0899-8

Cantoral, R., Moreno Durazo, A., & Caballero Pérez, M. (2018). Socio-epistemological research on mathematical modelling: an empirical approach to teaching and learning. *ZDM Mathematics Education*, 50(1-2), 77-89. doi: 10.1007/s11858-018-0922-8.

Carreira, S., & Baioa, A. M. (2018). Mathematical modelling with hands-on experimental tasks: on the student's sense of credibility. *ZDM Mathematics Education*, 50(1-2), 201-215. doi: 10.1007/s11858-017-0905-1

Degrande, T., Van Hoff, J., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2018). Open word problems: taking the additive or the multiplicative road? *ZDM Mathematics Education*, 50(1-2), 91-102. doi: 10.1007/s11858-017-0900-6

English, L. D., & Watson, J. (2018). Modelling with authentic data in sixth grade. *ZDM Mathematics Education*, 50(1-2), 103-115. doi: 10.1007/s11858-017-0896-y

Frejd, P. (2013). Modes of modelling assessment—a literature review. *Educational Studies in Mathematics*, 84(3), 413-438. doi: 10.1007/s10649-013-9491-5

Frejd, P., & Bergsten, C. (2018). Professional modellers' conceptions of the notion of mathematical modelling: ideas for education. *ZDM Mathematics Education*, 50(1-2), 117-127. doi: 10.1007/s11858-018-0928-2

Galleguillos, J., & Borba, M. C. (2018). Expansive movements in the development of mathematical modeling: analysis from an Activity Theory perspective. *ZDM Mathematics Education*, 50(1-2), 129-142. doi: 10.1007/s11858-017-0903-3

Geiger, V., Mulligan, J., Date-Huxtable, L., Ahlip, R., Jones D. H., May E. J., …, & Wright, I. (2018). An interdisciplinary approach to designing online learning: fostering pre-service mathematics teachers' capabilities in mathematical modelling. *ZDM Mathematics Education*, 50(1-2), 217-232. doi: 10.1007/s11858-018-0920-x

Greefrath, G., Hertleif, C., & Siller, H.-S. (2018). Mathematical modelling with digital tools—a quantitative study on mathematising with dynamic geometry software. *ZDM Mathematics Education*, 50(1-2), 233-244. doi: 10.1007/s11858-018-0924-6

Hernandez-Martinez, P., & Vos, P. (2018). "Why do I have to learn this?" A case study on students' experiences of the relevance of mathematical modelling activities. *ZDM Mathematics Education*, 50(1-2), 245-257. doi: 10.1007/s11858-017-0904-2

Ikeda, T. (2018). Evaluating student perceptions of the roles of mathematics in society following an experimental teaching program. *ZDM Mathematics Education*, 50(1-2), 259-271. doi: 10.1007/s11858-018-0927-3

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 38(3), 302-310. doi: 10.1007/BF02652813

Krawitz, J. & Schukajlow, S. (2018). Do students value modelling problems, and are they confident they can solve such problems? Value and self-efficacy for modelling, word, and intra-mathematical problems. *ZDM Mathematics Education*, 50(1-2), 143-157. doi: 10.1007/s11858-017-0893-1

León, M. (2006). *Modelación matemática en Ciencias Naturales mediante la hoja electrónica de cálculo* (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Ciudad de México.

Maass, K., & Engeln, K. (2018). Impact of professional development involving modelling on teachers and their teaching. *ZDM Mathematics Education*, 50(1-2), 273-285. doi: 10.1007/s11858-018-0911-y

Méndez, M. (2013). *Desarrollo de red de usos del conocimiento matemático: la modelación para la matemática escolar* (Tesis doctoral no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Ciudad de México.

Morales, F. (2003). *Acerca de la actividad de modelación. Las temperaturas de la tierra* (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Ciudad de México.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Ng, K. E. D. (2018). Towards a professional development framework for mathematical modelling: the case of Singapore teachers. *ZDM Mathematics Education*, 50(1-2), 287-300. doi: 10.1007/s11858-018-0910-z

Olivera, M. (2016). Procesos de aprendizaje matemático en un laboratorio de experimentación y colaboración virtual (Tesis doctoral no publicada)

Orey, D. C. & Rosa, M. (2018). Developing a mathematical modelling course in a virtual learning environment. *ZDM Mathematics Education*, 50(1-2), 173-185. doi: 10.1007/s11858-018-0930-8

Panizza, M., Sadovsky, P., & Sessa, C. (1999). La ecuación lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito. *Enseñanza de las ciencias*, 17 (3), 453-461. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/39077332_La_ecuacion_lineal_con_dos_variables_entre_la_unicidad_y_el_infinito

Plath, J. & Leiss, D. (2018). The impact of linguistic complexity on the solution of mathematical modelling tasks. *ZDM Mathematics Education*, 50(1-2), 159-171. doi: 10.1007/s11858-017-0897-x

Pretelín, A. (2017). *Construcción de videojuegos para modelación matemática, por estudiantes de ingeniería* (Tesis doctoral no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Ciudad de México.

Roldán, A. (2012). *Sobre el uso de las gráficas de la elipse en el nivel medio superior. Un estudio socioepistemológico* (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Ciudad de México.

Sadovsky, P. (2005). *Enseñar Matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos*. Buenos Aires, Argentina: Editorial Libros del Zorzal.

Santos-Trigo, M. (2002). Students' approaches to the use of technology in mathematical problem solving. En Speiser, R., Maher, C. A., & Walter, C. N. (Eds.), *Proceedings of the twenty-third annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vols. 1-2)* (pp. 53-55). Recuperado de https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED476613.pdf#page=66

Santos-Trigo, M. (2006). Dynamic Representation, Connections and Meaning in Mathematical Problem Solving. *For the Learning of Mathematics*, 26(1), 21-25. Recuperado de https://www.jstor.org/stable/40248519?seq=1#page_scan_tab_contents

Santos-Trigo, M. (2014). *La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos*. México: Trillas.

Segal, S., & Giuliani, D. (2008). *Modelización Matemática en el aula. Posibilidades y necesidades*. Buenos Aires, Argentina: Editorial Libros del Zorzal.

Sessa, C., & Cambriglia, V. (2007). La Validación de Procedimientos para Resolver Sistemas de Ecuaciones. *Yupana*, 1(4), 11-24. doi:10.14409/yu.v1i4.253

Sessa, C. (2018). About Collaborative Work: Exploring the Functional World in a Computer-Enriched Environment. En Kaiser, G., Forgasz, H., Graven, M., Kuzniak, A., Simmt, E., & Xu, B. (Eds.), *Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education* (pp. 581-599). Recuperado de https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-72170-5

Sevinc, S. & Lesh, R. (2018). Training mathematics teachers for realistic math problems: a case of modeling-based teacher education courses. *ZDM Mathematics Education*, 50(1-2), 301-314. doi: 10.1007/s11858-017-0898-9

Solares-Rojas, A., Preciado-Babb, A., Peña, F., Ortiz, A., Rosas, M., Velasco, R., …, & Fuentes, M. (2018). Tendencias en Modelación Matemática en Latinoamérica / Latinamerican Trends in Mathematical Modeling. In T.E. Hodges, G. J. Roy, & A. M. Tyminski, (Eds.), *Proceedings of the 40th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (94-100). Greenville, SC: University of South Carolina & Clemson University.

Stender, P. (2018). The use of heuristic strategies in modelling activities. *ZDM Mathematics Education*, 50(1-2), 315-326. doi: 10.1007/s11858-017-0901-5

Suárez, L. (2008). *Modelación-Graficación, Una categoría para la Matemática Escolar. Resultados de un Estudio Socioepistemológico* (Tesis doctoral no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Ciudad de México.

Velasco, K. (2012). *Modelación de situaciones reales con ecuaciones de primer grado desde la perspectiva APOE: un estudio a nivel bachillerato* (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Ciudad de México.

Villanueva, J. (1992). *Sobre la experiencia de modelación matemática en economía. Experiencia didáctica con alumnos del nivel superior* (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Ciudad de México.

Villarreal, M., Esteley, C., & Smith, S. (2018). Pre-service teachers' experiences within modelling scenarios enriched by digital technologies. *ZDM Mathematics Education*, 50(1-2), 327-341. doi: 10.1007/s11858-018-0925-5