CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

DOCENCIA-INVESTIGACIÓN EN UN AULA DE EDUCACIÓN SECUNDARIA PARA LA ENSEÑANZA DE LA TRIGONOMETRÍA

TESIS

Que presenta

PENÉLOPE DAYANARA COLÍN HERNÁNDEZ

Para obtener el grado de

MAESTRA EN CIENCIAS

EN LA ESPECIALIDAD DE

MATEMÁTICA EDUCATIVA

Director de la Tesis:

M. en C. Ignacio Garnica y Dovala

Ciudad de México Junio, 2022

Agradezco al **Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología** que por medio del programa de becas me permitió desarrollar mis estudios de Maestría.

Becario No. 728905

Agradezco al **Cinvestav,** institución formadora
de investigadores que necesita nuestro país.

Agradezco al **Departamento de Matemática Educativa** por brindar las condiciones que permiten una formación como investigador.

Agradezco a la **Escuela Secundaria Diurna No.4 “Moisés Sáenz”** por las facilidades que otorgaron para realizar la investigación.

Agradecimientos

A lo largo de mi vida he conocido a muchas personas que me han enseñado su forma de concebir la realidad, algunos me han enseñado a percibirla; sentirla, verla, escucharla y otras me han enseñado a cuestionarla, pensarla, inclusive modificarla. Gracias a todas ellas, "soy", cada uno me ha brindado un poco de madeja para ir construyendo mi propia versión de la realidad, todo ese cúmulo de conocimientos que me han transmitido se han albergado en algún lugar de mi ser, que en ocasiones lo tomo y lo tejo para organizarlo y comprender aquellos fenómenos que se me presentan.

La presente investigación es un pequeño tejido intelectual que me ha posibilitado echar un vistazo a las grandes mentes de cada uno de mis alumnos, asombrarme, maravillarme y tratar de entenderla para colaborar a que siga enriqueciendo sus intuiciones. Sin embargo, no se ha hecho solo, ha requerido de muchas personas, cada una brindando algo de sí, es imposible nombrar a cada una de ellas en un corto espacio, por lo cual, sólo mencionaré a las que estuvieron relacionadas de forma directa para la realización de esta investigación.

Primeramente, a las personas que hicieron posible mi existencia, a mis padres; Karina Hernández Sánchez y Ramón Colín Hernández. A mi madre quien siempre ha procurado mi bienestar en todo momento, quien ha dado su vida por nosotros, ella tiene una magia indescriptible, puede ver el fututo (entre otras miles de cosas) y auguró que tendría una vida en paz y sería inmensamente feliz a pesar de todas nuestras tormentas, así lo ha sido. Admiro y valoro tu persona, por ti mi vida gira correctamente y cuando no lo hace sé que tendrás para mí un enorme cobijo en el que pueda sentir tu calor y un amor inmenso.

A mi padre que me motivó desde pequeña a ver más allá de lo que hay a mi alrededor, gracias a ello me sigo cuestionando por mi diminuto papel en este mundo. Cuando miro los astros me siento tan pequeña e insignificante, pero eso ya no me aflige, sé que puedo mejorar los lugares por donde paso. También me abriste una puerta hacia un mundo genial, me

enseñaste a maravillarme con los libros que leo para después tener una conversación muy seria tú y yo.

A Alberts Bakari, él, además de ser mi maestro desde pequeña es un faro que te guía cuando estás perdido, cuando la vida se vuelve compleja, una charla con él y encuentras el motivo de tu existencia y recuerdas el valor de lo que posees.

En el camino me encontré con la doctora María Verónica Nava Avilés, quien fue mi asesora de apoyo en la Escuela Normal Superior María Verónica Nava, ella me enseñó el valor que tiene una mente humana, a tratar de entenderla, cuidarla y tratarla con respeto, con sus enseñanzas me motivaba a ser mejor, comenzar a disfrutar la docencia, emocionarme por los logros intelectuales de los alumnos y los míos. Para mí siempre es un privilegio escucharla hablar, siempre tiene esas frases que se te quedan en la mente y te hacen pensar, reflexionar y te obligan a cambiar tu práctica. Por ser solamente asesora de apoyo, no tuve tiempo suficiente para experimentar todo eso que ella decía, esa emoción cuando comprendes al otro, cuando descubres todo lo que es capaz de hacer, decir y pensar. El último día que la vi, fue en mi examen profesional, dijo tantas cosas, entre ellas me dijo que esperaba que algún día encontrara el lugar en donde realmente me pudiera desarrollar intelectualmente y fuera feliz.

Ese lugar del que ella me habló existe, lo encontré en el departamento de Matemática Educativa, específicamente en el área de Ciencias de la Cognición y Tecnologías de la Información Aplicada, ahí conocí a personas excepcionales: Ana María Ojeda Salazar, Vicente Carreón Miranda, Ignacio Garnica y Dovala y Héctor Santiago Chávez Rivera. Es un honor aprender de cada uno de ellos, en todos ellos reconocía una emoción singular, cada uno ama lo que hace, se apasiona y se esfuerzan para que las personas con quienes desarrollan sus actividades también lo hagan.

A la doctora Ana María Ojeda Salazar agradezco sus observaciones y comentarios sobre el proyecto de investigación, que haya compartido su inteligencia y conocimientos para mejorarla.

Al maestro Vicente Carreón Miranda por enseñarnos el otro lado de la matemática, en donde todos los conceptos están entrelazados y como profesores debemos ver esas conexiones, entenderlas y lograr que los alumnos también las visualicen. La generosidad del maestro Vicente Carreón y sus enseñanzas sobre la vida son cosas que jamás olvidas, que se mantienen en la memoria como unas huellas que van marcando un camino.

Al maestro Héctor Santiago Chávez Rivera por el apoyo que nos brindó en todo momento, así como, su amabilidad al momento de preguntarle nuestras dudas.

Hay un proverbio que dice dale un pez a un hombre y comerá hoy, enséñale a pescar y comerá el resto de su vida. Siempre estaré infinitamente agradecida con el maestro Ignacio Garnica y Dovala porque él me enseñó a tejer (pescar) mi realidad en las aulas, hizo que me reconociera como un ser pensante, él mismo me reconoció y me ayudó a crecer. Me ayudó a sentir esa emoción de la que hablaba la doctora Nava en sus clases, con él nada se queda en la teoría, aunque para mí la teoría es muy interesante porque te muestra la mente de otras personas; su visión sobre ciertos fenómenos y la forma de expresarlo con una herramienta tan poderosa, la palabra.

A lo largo de toda la investigación me presentó a grandes mentes: Euclides, Hilbert, Arquímedes, Kant, Ricoeur, Fischbein, Prassad, Piaget, entre otras, asimismo en cada uno de sus seminarios nos hablaba sobre filosofía, nos platicaba sobre Edgar Morín y su basto trabajo. El acercamiento que tuve con la teoría fue sin duda una experiencia enriquecedora y satisfactoria.

Sin embargo, la teoría toma un papel en la realidad, no está aislada, separada o habita solamente en el mundo de las ideas. Él siempre me dijo que la teoría hay que bajarla, y poco a poco me enseñó a hacerlo, al principio me costó mucho trabajo identificar conceptos tan abstractos en las acciones de mis alumnos, ¿cómo identificar las intuiciones en un aula?, para mí eso era teoría, formas de concebir los fenómenos. Conforme leía y leía, releía hasta comprender la teoría, me di cuenta que cuando volvía a mis aulas en las acciones de mis alumnos se revelaba todo lo que estaba plasmado en los libros. Cada movimiento o evidencia escrita tenía significado para mí, la teoría me brindó unos enormes lentes con lo que se ve la realidad de forma distinta. La vinculación entre la teoría y la práctica desde este enfoque me maravilló, fue sorprendente ver las mismas formas de resolver un teorema de construcción hecha por Euclides hace muchos años y una de alumnos del siglo XXI, así como la genialidad de cada uno de mis alumnos.

Lo que aprendí a lo largo de este tiempo con el Maestro Ignacio Garnica y Dovala es demasiado, le doy las gracias por compartir lo que sabe conmigo y por hacer a mi mente feliz.

A la doctora Eugenia Lucas Valerio, agradezco todo el apoyo que me brindó para la realización del proyecto. Por motivarme a hacer las cosas diferentes, a proponer en aras de la mejora integral de los alumnos, por exigirme para lograr mejorar, siento gran admiración por lo que realiza día a día para que la Escuela Secundaria No. 4 “Moisés Sáenz” siga siendo “la mansión de amores en que la ilusión brotó, bendita escuela que mi ardiente sed sació […], dulce mansión de la ilusión, gloria y honor”.

Al maestro Ángel Muñoz Saldaña, a la primera persona que me guió en la profesión, quien siempre me brindó su apoyo para mejorar mi práctica docente. Sin embargo, no solamente me ha enseñado los secretos de la docencia, sino que también algunos consejos de la vida. Gracias por escucharme atentamente y ofrecerme sus sabios consejos.

Dedicatoria

Para R. Akzayakatl Colín Hernández:

Desde que mi madre un día nos leyó un cuento cuando éramos sumamente pequeños y tú lo memorizaste casi por completo tuve una gran admiración por ti, supe que eras demasiado inteligente. Y a lo largo de nuestras vidas me has demostrado que eres la persona en la que quiero convertirme, que se aferra a conseguir lo que desea, que, aunque se caiga, se levanta y lo hace una y otra vez, que se enfrenta a sus miedos y los vence.

Gracias a ello, me has motivado y obligado a dar siempre lo mejor de mí, me has exigido tanto, que has logrado que reconozca que soy capaz de hacer lo que sea, que es cuestión de empezar con lo más simple y poco a poco volverte el mejor en lo que haces, me enseñaste que el miedo se vence cuando tienes una mano dispuesta siempre a cuidar de ti, de que no te lastimes, de que no te falte algo, que cuando la vida se mueva ferozmente siempre estarás tú para refugiarme.

Las pláticas más largas y filosóficas sólo contigo las he tenido, he comprendido muchas cosas debido a ellas, me emociona escucharte hablar cuando las ideas más extrañas te rondan, se te traba la lengua, te cambia la voz, como si algo raro te poseyera y comenzaras a tener lucidez de algo que no comprendemos, de los misterios de nuestra existencia y de lo que nos rodea.

Por ser tan diferentes, hemos logrado un equipo perfecto y sumamente sincronizado, que siempre buscará algo nuevo que intentar, descubrir, explorar, degustar.

Se dice que en esta vida se está solo, pero si tú no existieras estaría aún más sola.

Este proyecto realmente no es para ti, es una ofrenda a la vida por dejarme disfrutarla contigo.

Resumen

Este proyecto de investigación parte de dos problemas principales: en el primero la docente se enfrenta a los distintos retos tanto metodológicos, teóricos y prácticos, los concibe aislados porque no logra vincular lo que tiene como base teórica con su quehacer cotidiano, en donde debe resolver una gran variedad de dificultades dentro de su salón de clases, y el segundo, tiene relación directa con un concepto matemático que había identificado como complicado tanto para su enseñanza como para su aprendizaje cuando lo trataba con sus alumnos de tercer grado de secundaria: razones trigonométricas.

A partir de las dos problemáticas se establecen dos conjuntos de preguntas y objetivos, el primer conjunto es para entender la relación entre la práctica docente y la teoría, es decir, de la docencia y la investigación, y el segundo, es para identificar las condiciones mínimas de conocimientos para el concepto de interés. La perspectiva teórica consideró tres aspectos: la relación docencia-investigación: se revisaron algunos proyectos colaborativos entre investigadores y docentes; la construcción del conocimiento en donde se consideraron dos teorías: la Reducción de la Abstracción en la Enseñanza (RAiT) y el pensamiento intuitivo, y el tercer aspecto fue el concepto matemático partiendo de los conceptos mínimos de geometría hasta transitar a los de trigonometría, así como el estado del arte en su enseñanza.

Para la realización del proyecto se partió de la noción de indagación como un método previo para que la docente tuviera un acercamiento más profundo a sus aulas y a lo que se realiza en la investigación de Matemática Educativa, por lo cual se desarrolla en condiciones institucionales reales de enseñanza, es decir, con todas las condiciones que ofrece un aula. Se desarrollaron tres ciclos: indagatorio, indagatorio-investigativo e investigativo. Los propósitos de cada ciclo fueron diferentes, en el primero se identificaron las formas en las que los alumnos tratan con nociones básicas de geometría, en el segundo se fortalecieron dichas nociones para transitar a los conceptos mínimos de trigonometría y en el tercero se trató el concepto de relaciones trigonométricas. Los resultados obtenidos de cada ciclo fueron sometidos a un análisis y a una interpretación de las formas en la que los alumnos estaban tratando con los conceptos. Se concluye que la relación docencia-investigación se enriquece con el tiempo y dota al docente de herramientas metodológicas, teóricas y prácticas que le posibilitan comprender los fenómenos de sus aulas y proponer en aras de consolidar los conocimientos de los alumnos. Respecto al concepto matemático se concluye que partir de conceptos mínimos y la incorporación paulatina de nuevos elementos favorece el desarrollo del pensamiento intuitivo, le den sentido a los conceptos, y logran seguir construyéndolos.

Abstract

This research project is based on two main problems: in the first, the teacher faces different methodological, theoretical and practical challenges, he conceives them in isolation because he cannot link what he has as a theoretical basis with his daily work, where he must solve a great variety of difficulties within his classroom, and the second is directly related to a mathematical concept that he had identified as complicated both for his teaching and for his learning when he was dealing with it with his third-graders of secondary school: trigonometric reasons . Although a distinction is made, both problems are linked, since the identification of the concept is derived from teaching practice.

From the two problems, two sets of questions and objectives are established, the first set is to understand the relationship between teaching practice and theory, that is, of teaching and research, and the second, is to identify the conditions minimum knowledge for the concept of interest. The theoretical perspective considered three aspects: the teaching-research relationship: some collaborative projects between researchers and teachers were reviewed; the construction of knowledge where two theories were considered: the Reduction of Abstraction in Teaching (RAiT) and intuitive thinking, and the third aspect was the mathematical concept starting from the minimum concepts of geometry until transitioning to those of trigonometry, thus as the state of the art in its teaching.

To carry out the project, the notion of inquiry was started as a preliminary method for the teacher to have a deeper approach to their classrooms and to what is done in educational mathematics research, for which it is developed in real institutional conditions of teaching, that is, with all the conditions that a classroom offers. Three cycles were developed: investigative, investigative-investigative and investigative. The purposes of each cycle were different, in the first the ways in which the students deal with basic notions of geometry were identified, in the second these notions were strengthened to move to the minimum concepts of trigonometry and in the third the concept of trigonometric relations. The results obtained from each cycle were subjected to an analysis and an interpretation of the ways in which the students were dealing with the concepts.

It is concluded that the teaching-research relationship is enriched over time and provides the teacher with methodological, theoretical and practical tools that allow them to understand the phenomena of their classrooms and propose in order to consolidate the students' knowledge. Regarding the mathematical concept, it is concluded that starting from minimal concepts and the gradual incorporation of new elements favors the development of intuitive thinking, they give meaning to the concepts, and they manage to continue building them.

ÍNDICE

Índice de tablas

Índice de gráficas

Índice de Figuras

Introducción

El presente proyecto de investigación tiene un enfoque cualitativo, puesto que no se conocen las variables y se requiere explorarlas (Creswell, 2011, p.16), se lleva a cabo con tres grupos de tercer grado de secundaria en condiciones institucionales reales de enseñanza, es decir, con todo lo que ofrece un aula diariamente. La problemática de la investigación surge de los procesos que se le presentan a un docente cuando aborda conceptos matemáticos en el salón de clases sin que muchos de los alumnos los comprendan, desconociendo la forma de afrontar dichas dificultades debido a que no logra vincular el bagaje teórico que posee con su práctica a pesar de su formación académica, aunado a la baja comprensión que tiene el docente del por qué surgen dificultades en los alumnos cuando trata el contenido curricular: explicitación y uso de las razones trigonométricas: seno, coseno y tangente.

El desarrollo de la investigación está concentrado en cinco capítulos, el primero brinda un panorama general del contexto y las motivaciones del proyecto, se plantean los dos problemas de investigación: relación docencia-investigación y el concepto matemático, también se encuentran las preguntas y los objetivos de la investigación y la justificación. En el segundo capítulo se presenta el marco teórico utilizado, éste se divide en tres partes: docencia-investigación, construcción del conocimiento y el concepto matemático. En el capítulo tres se encuentra la metodología de la investigación dividida en cuatro apartados: Reflexión de la práctica docente antes del proceso de formación para la investigación y tres ciclos: indagatorio, indagatorio-investigativo e investigativo. En el capítulo cuatro se encuentra el desarrollo de la investigación; los resultados (análisis-interpretación) de cada ciclo, finalmente, en el capítulo cinco se encuentran las conclusiones divididas en tres: relación docencia-investigación, concepto matemático y las conclusiones.

Capítulo 1. Contexto de la investigación

Esta investigación parte de procesos de autorreflexión en la que la sustentante antes de incorporarse al programa de maestría ya contaba con tres años de experiencia como docente frente a grupo, identificando dificultades en su ejercicio docente, reconociendo que su práctica se encontraba separada de un respaldo teórico que le permitiera tomar decisiones metodológicas y prácticas para el abordaje de contenidos de geometría en particular: razones trigonométricas propuesto en el Programa de Estudios 2011.

1.1. Retos del ejercicio docente frente a las dificultades en el aula

Antes de que me incorporara al programa de maestría, ya tenía una experiencia de tres años como docente frente a grupo, había identificado las dificultades que se me presentaban en la práctica y de la misma forma, había identificado los contenidos curriculares que más dificultades presentan en la enseñanza. A partir de mi experiencia como docente es que surgen las dos problemáticas medulares de la presente investigación.

Cuando ingresé al servicio profesional docente me di cuenta de que lo que se vive en las secundarias dista mucho de los procesos pedagógicos que se aprenden en las escuelas formadoras de docentes, ya que, para enfrentar los retos metodológicos y prácticos, que se me presentaron, la formación adquirida no fue suficiente porque las dificultades de las aulas eran de todo tipo: conceptuales, metodológicas, actitudinales.

Por tal motivo, comencé a buscar alternativas de formación para hacer frente a la realidad que se me presentaba en una institución con grandes dificultades como ausentismo, reprobación, violencia, así como el ambiente que se vivía fuera de la institución, en donde predominaba el consumo de sustancias nocivas para la salud. Tomé cursos, pláticas y talleres tanto presenciales como en línea, algunos de matemáticas, otros, destinados a la didáctica y a la creatividad, también cursos donde brindaban herramientas para resolver la distracción, el aburrimiento y la falta de interés en los alumnos por el aprendizaje de las matemáticas, también asistí a un taller para el diseño de proyectos multidisciplinarios que conjuntaba contenidos de distintas asignaturas, además de realizar búsqueda de herramientas digitales por mi propia cuenta.

Con todo lo que aprendí en lo antes mencionado, comencé a modificar mi forma de enseñanza, el cambio más significativo que hice fue en la estructura de mis clases, las dividí en tres, unas para enseñar lo teórico, otras para lo práctico y una tercera destinada a actividades recreativas y lúdicas, en ellas implementé el uso de materiales didácticos tanto físicos como electrónicos. También modifiqué la organización de los contenidos del programa de estudios, consideraba que no estaban ordenados de la manera correcta para darle un seguimiento continuo, revisé el programa y adecué los contenidos en pequeñas rutas que facilitaran la comprensión de los conceptos a los alumnos.

Con las modificaciones que realicé obtuve resultados favorables, logré que a los alumnos les gustará la clase, que es uno de los ejes que marca el Programa de Estudios (SEP, 2011), Actitud hacia las matemáticas; motivar el interés por la asignatura y lo que se les proponía, asimismo, algunos alumnos presentaban nociones de los conceptos que se les presentaban, sin embargo, me cuestionaba por qué los conocimientos de mis alumnos no eran sólidos, por qué en clase desarrollaban bien los conceptos, pero los olvidaban en un corto tiempo, por qué resolvían problemas determinados, pero cuando modificaba algo, aunque fuera mínimo ya no lograban hacerlo.

Mi enseñanza en realidad no había cambiado en su totalidad, puesto que, yo seguía enseñando los conceptos como suelen enseñarse: fortaleciendo la algoritmia y la memoria. Ellos copiaban lo que se hacía en el pizarrón mientras yo buscaba problemas más difíciles para que ellos los resolvieran, algunas veces les daba trucos para que se aprendieran de memoria lo que les solicitaba, otras, ellos pasaban al pizarrón a explicar los procedimientos que habían realizado para resolver algún problema, inclusive diseñaban sus propios problemas, porque suponía que cuando un alumno los diseña es porque ha entendido el contenido, sin embargo, dichos problemas no eran diferentes a los que yo les proponía.

A este tipo de enseñanza de las matemáticas, se le ha denominado matemáticas frontales, es decir:

> […] El "frente" de las matemáticas son las matemáticas en forma "terminada", tal como se presentan al público en el aula, libros de texto y revistas. […] las matemáticas "de frente" son formales,

> precisas, ordenadas y abstractas. Se divide claramente en definiciones, teoremas y comentarios. A cada pregunta hay una respuesta, o al menos, una etiqueta llamativa: "pregunta abierta". El objetivo se establece al principio de cada capítulo y se alcanza al final (Prassad, 2014, p.4).

Prassad (2014), menciona que la enseñanza de la matemática frontal requiere de una actitud correcta, buena memoria y cierto tipo de estilo de pensamiento para tener éxito, y si el alumno no cuenta con ello comienza el rechazo y la ansiedad a las matemáticas. Ellos memorizan fórmulas y algoritmos para posteriormente aplicarlos a diversas situaciones, por lo cual, en ocasiones lo que aprenden no tiene sentido para ellos, inclusive no se cuestionan el porqué de lo que se les enseña, ni les causa curiosidad y es por eso por lo que lo olvidan con facilidad o les resulta muy complicado aplicar los algoritmos cuando existen cambios en lo que se les plantea.

Si bien, los cursos, talleres y pláticas a las que asistí me brindaron ideas novedosas de lo que se podía hacer en el aula, éstas no estaban vinculadas a la realidad de cada una de mis aulas, a las condiciones de mis alumnos ni a mis necesidades para enseñar los conceptos matemáticos en aras de una comprensión por parte de los alumnos. A pesar de planificar y aplicar distintas actividades, instrumentos y/o herramientas para solucionar las dificultades que presentan los alumnos en el aprendizaje de las matemáticas, como docente, desconocía qué de todo lo que diseñé y apliqué, había dado resultado.

Regularmente, la teoría se encuentra en manos de los investigadores de Matemática Educativa, quienes se encargan de teorizar cómo debería enseñarse la matemática en las aulas, sin tener un contacto cercano con todas las condiciones en donde se dan clases todos los días; pareciera que la teoría, es decir, la investigación se alejó de las aulas y comenzó a teorizar realidades utópicas dejando a un lado todo el cúmulo de variables que ofrece un aula y por ende el docente.

Por lo tanto, se genera una dicotomía, dado que el docente le resulta complicado acceder a dichas teorías para comprender sus aulas, y cuando logra acceder, a través de cursos, diplomados, talleres o seminarios, lo único que hace es replicarlo con sus alumnos sin considerar el contexto y las condiciones de su realidad, por lo cual, las dificultades y retos se mantiene vigentes e inclusive se agudizan. De ahí la importancia de promover en los docentes procesos de investigación en el aula.

1.2. Retos docentes para la enseñanza de contenidos matemáticos

Si bien desde primer grado de secundaria se abordan teoremas y conceptos matemáticos, se hace evidente que los alumnos de tercer grado, no tienen consolidados los conocimientos básicos de aritmética, álgebra, geometría, así como probabilidad y estadística, lo que deriva en complicaciones en la enseñanza de los contenidos curriculares de tercer grado tales como ecuaciones de segundo grado para álgebra, para probabilidad y estadística: distribución frecuencial y teórica, y para geometría, razones trigonométricas.

Por ello, la presente investigación se enfocó a las formas en las que los alumnos de tercero de secundaria comprenden y aplican el contenido curricular: explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente, dado que los alumnos resuelven problemas sin comprender ni aplicar el concepto de relación trigonométrica.

Para ejemplificar lo antes mencionado se muestra una actividad (véase figura 1.1.) desarrollada en las primeras sesiones que impartí de geometría en una escuela de tiempo completo, en esa sesión se les solicitó a los alumnos que diseñaran sus propios problemas tratando en primer lugar el teorema de Pitágoras y posteriormente las razones trigonométricas, la actividad debían desarrollarla de manera digital porque sería enviada por correo electrónico.

Se observa que la alumna diseña y contextualiza el problema que se le solicitó, ofrece una representación gráfica y en ella marca los ángulos agudos con letras del alfabeto y la medida de los lados que ya conoce, para saber la altura de la rampa utiliza el teorema de Pitágoras y una vez que tiene todos los datos separa los ángulos agudos para realizar la sustitución en las razones y solamente se queda en la parte de la sustitución.

Figura 1.1

Actividad de razones trigonométricas antes de incorporarme al proceso de formación para la investigación

1. Adriana quiere saber que tan alta es una rampa de skateboard que mide 7 m de hipotenusa y 4 m de un cateto.

Datos

-Hipotenusa mide 7m

-cateto mide 4m

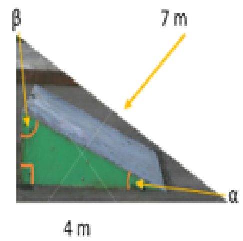
OPERACIONES

-raíz cuadrada

-multiplicación

-resta

Representación del problema



Solución

$c^2= a^2-b^2$

$c^2= 7^2-4^2$

$c^2= 49- 16$

$c^2=33$

$c= \sqrt{33}$

$c= 5$

Razones trigonométricas

EL ángulo β co= 4 ca= 5 hip= 7	$sen\ \beta = \frac{co}{hip} = \frac{4}{7}$ $\cos \beta = \frac{ca}{hip} = \frac{5}{7}$ $\tan \beta = \frac{co}{ca} = \frac{4}{5}$ $\cot \beta = \frac{ca}{co} = \frac{5}{4}$ $\sec \beta = \frac{hip}{ca} = \frac{7}{5}$ $\csc \beta = \frac{hip}{co} = \frac{7}{4}$	El ángulo α co= 5 ca=4 hip=7	$sen\ \alpha = \frac{co}{hip} = \frac{5}{7}$ $\cos \alpha = \frac{ca}{hip} = \frac{4}{7}$ $\tan \alpha = \frac{co}{ca} = \frac{5}{4}$ $\cot \alpha = \frac{ca}{co} = \frac{4}{5}$ $\sec \alpha = \frac{hip}{ca} = \frac{7}{4}$ $\csc \alpha = \frac{hip}{co} = \frac{7}{5}$

Nota: Actividad realizada en Word por una alumna de tercer grado y enviada por la plataforma Schoology.

Se observa que para obtener la altura de la rampa que propone utiliza la ecuación del teorema de Pitágoras, es decir, ya lo tiene mecanizado, sin embargo, al obtener la raíz cuadrada brinda la solución como un entero e ignora los decimales. Por último, para las razones trigonométricas, hace la distinción de los dos ángulos agudos, sabe que habrá diferencias en los valores y lo único que hace es sustituir, pero no comprende para qué o por qué de cada una de las razones.

En este sentido, Montiel (2013), señala que la forma de enseñanza de las relaciones trigonométricas en las escuelas se "ha convertido […] en el proceso aritmético de dividir las longitudes de los lados del triángulo, esto es, en una técnica para encontrar valores faltantes de un triángulo" y:

> si bien resuelve el problema de calcular la altura del edificio (cumpliendo así con el objetivo escolar de elegir correctamente la razón trigonométrica tangente y calcular el valor faltante), no asegura un pensamiento trigonométrico ante el manejo del triángulo, sus elementos y las relaciones entre éstos (Montiel, 2013, p. 23).

Y justamente era lo que sucedía con mis alumnos, sólo hacían uso del algoritmo para resolver problemas y cuando se les cuestionaba por qué utilizaban cierta relación no lo sabían. Se estaba enseñando el contenido en su forma ya terminada, en donde debían poner en juego sus habilidades de memoria de fórmula y utilización de algoritmo.

A partir de lo anterior, se explicitan dos problemas medulares para la presente investigación: la necesidad de que la docente logre vincular su práctica con la teoría y la comprensión de los alumnos del contenido curricular: Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.

1.3. Preguntas de investigación

A partir de los problemas identificados se establecen dos conjuntos de preguntas: el primero para la relación existente entre docencia-investigación y el segundo para el concepto matemático.

1.3.1. Docencia-investigación

Las preguntas para la relación entre la docencia y la investigación son:

1) ¿Cuáles son las condiciones reales de aula para llevar a cabo procesos de docencia-investigación en la enseñanza de las matemáticas en educación secundaria?
2) ¿Es la noción ciclo indagatorio pertinente para establecer un vínculo entre la práctica y la teoría en la enseñanza de las matemáticas en educación secundaria?

1.3.2. Concepto matemático

Las preguntas para el concepto matemático son:

1) ¿Cuáles son las condiciones mínimas de conocimiento adquirido de los alumnos para la identificación de relaciones entre segmentos en el triángulo rectángulo?
2) ¿Cuáles son las condiciones mínimas de conocimiento adquirido de los alumnos para el tratamiento de las relaciones trigonométricas?
3) ¿Es el pensamiento geométrico intuitivo una condición necesaria para fortalecer la comprensión de las nociones de trigonometría?
4) ¿Cuál es la influencia en términos de procesos cognitivos de la mediación de la geometría dinámica en el desarrollo del concepto en el aula?

1.4. Objetivos de la investigación

A partir de las preguntas planteadas se desprenden los siguientes objetivos:

1.4.1. Docencia-investigación

Los objetivos de la relación entre la docencia e investigación son:

1) Identificar las condiciones reales de aula para llevar a cabo procesos de docencia-investigación en la enseñanza de las matemáticas en educación secundaria

2) Valorar si la noción de ciclo indagatorio es pertinente para establecer un vínculo entre la práctica y la teoría para la enseñanza de las matemáticas en educación secundaria.

1.4.2. Concepto matemático

Los objetivos para el concepto matemático son:

1) Identificar las condiciones mínimas de conocimiento adquirido por los alumnos de tercer grado de secundaria para el tratamiento de las relaciones entre segmentos en el triángulo rectángulo
2) Identificar las condiciones mínimas de conocimiento adquirido por los alumnos de tercer grado de secundaria para el tratamiento de las relaciones trigonométricas
3) Valorar si el pensamiento geométrico intuitivo es una condición necesaria para fortalecer la comprensión de las nociones de trigonometría en alumnos de tercero secundaria.
4) <u>Reconocer las acciones de la mediación de la geometría dinámica para la comprensión de nociones y conceptos relacionadas al concepto en foco.</u>

1.5. Justificación

Uno de los propósitos que persigue en Programa de Maestría es la formación para la investigación considerando que los participantes del programa adquieran las herramientas teórico-metodológicas para identificar y afrontar las dificultades que se presentan cuando se abordan los contenidos curriculares en el aula, diseñando, aplicando y evaluando estrategias didácticas que propicien la observación, seguimiento y evaluación de los procesos de comprensión de los alumnos a través de los procesos indagatorio, indagatorio-investigativo e investigativo.

Capítulo 2. Marco teórico

El marco teórico en el que se apoya el presente estudio se aborda en tres partes: 1) relación docencia-investigación; 2) construcción del conocimiento, y 3) concepto matemático.

En el apartado de docencia-investigación se establece la diferencia entre lo que realiza un matemático, un docente de matemáticas y un investigador de Matemática Educativa y las relaciones que establece éste con otros campos de conocimiento, se brinda un panorama general del estado del arte en la relación entre docentes e investigadores y se ofrece la concepción que se tiene para este proyecto sobre la relación dialéctica entre la docencia y la investigación. En el apartado de construcción del conocimiento se toman dos marcos teóricos: la reducción de la abstracción en la enseñanza (Reducing Abstraction in Teaching (RAiT)), el pensamiento intuitivo y la propuesta utilizada para la investigación. El apartado del concepto matemático tiene relación con el de construcción del conocimiento, puesto que el RAiT parte de conceptos mínimos y poco a poco incorpora nuevos, por tal motivo, para el concepto se parte de una estructura formal de la enseñanza de la trigonometría, dicha estructura se rediseñó para conectar los conceptos geométricos con los conceptos básicos de trigonometría y así partir de lo más simple, en otro apartado se coloca el material teórico consultado para el tratamiento de la geometría y la trigonometría así como el estado del arte en la enseñanza de la trigonometría.

2.1 Relación docencia-investigación

Para establecer la relación docencia-investigación es necesario realizar una distinción entre lo que hace un matemático, un docente de matemáticas y un investigador de Matemática Educativa y a qué se le concibe como matemáticas, asimismo el estado del arte sobre las relaciones que se han establecido entre docentes e investigadores brinda un panorama para establecer nuestra propuesta.

2.1.1. Diferencias entre matemáticas, matemáticos, docentes de matemáticas e investigadores de Matemática Educativa

Freudenthal (citado en Bass 2005), "consideraba las matemáticas no principalmente como un cuerpo de conocimientos, sino como actividad humana […] argumentó, basarse en la realidad en torno a fenómenos que piden ser organizados" (p. 420). Si consideramos lo que dijo Freudenthal y recordamos la historia de las matemáticas se observa que, para construir las matemáticas, el hombre comenzó con ideas simples, primitivas, seminales, "declaraciones no probadas como puntos de partida, […] que pueden aceptarse sin prueba" (Fischbein, 1987, p.8), porque había algo en esas ideas que tenían cierta certeza y posibilitaba seguir construyendo más conocimiento con ellas. Pronto se empezaron a acumular las ideas y fue necesario, lo que dijo Freudenthal, organizarlas, es decir, estructurarlas. En este sentido,

> "La preocupación de los matemáticos por crear un sistema racional, autoconsistente, está reflejado explícitamente en las obras de los griegos – matemáticos y los filósofos Platón, Aristóteles y Euclides- tenían una comprensión clara de la distinción entre principios directamente aceptables, axiomas y aquellas propiedades que deben probarse. La historia de las matemáticas es, de hecho, la historia de los esfuerzos para lograr este programa" (Fischbein, 1987, p. 9).

Con el paso de los años y con los esfuerzos de crear ese sistema, se fueron conformando las matemáticas como un cuerpo amplio y basto de conocimiento, poco a poco a raíz de su estructura, se volvió una materia abstracta, según Prassad (2014), hay principalmente tres cuestiones que las contribuyen de esta forma: a) como sistema de autocontención desconectado del mundo físico y social, b) la naturaleza jerárquica de las matemáticas, es decir, cuanto más nos movemos a los niveles más altos dentro de la jerarquía, las entidades matemáticas se vuelven más abstractas y c) a menudo perciben las matemáticas como reglas del juego. Poco a poco se fue consolidando ese sistema racional y autoconsistente, sin embargo, conllevó a la dificultad de transmitirlo a las nuevas generaciones, los matemáticos tenían claro que no podían enseñarse los conceptos como se conciben en la matemática pura, porque son abstracciones tan complejas que sería imposible su comprensión y lo que hicieron fue desdoblar los conceptos formales en pasos, porque “el proceso es menos abstracto que el objeto” (Prassad, 2014, p. 42).

> “[…] en gran parte guiados por las opiniones de los matemáticos sobre el tema, nuevos planes de estudio destacando los tratamientos axiomáticos de las estructuras matemáticas básicas fueron desarrollados para las escuelas, y los maestros fueron educados rápidamente (e inadecuadamente) en esta “Nueva Matemática”, con la presunción de que el conocimiento estaba equipado para enseñar esas ideas y percepciones novedosas a los niños pequeños (Bass, 2005, p. 421).

A partir de esta concepción, los matemáticos dejaban de lado el sentido del concepto y “a menudo no apreciaban las sutilezas cognitivas y epistemológicas de la enseñanza de las matemáticas elementales” (Bass, 2005, p.419), en consecuencia, se empezaron a presentar dificultades cuando los alumnos trataban los conceptos.

A raíz de las dificultades que se presentaron, surgió a mediados del siglo XX, la educación matemática, cuyo principal interés es “esclarecer las condiciones del aprendizaje de ideas complejas en situación escolar, con la finalidad de usar dicho conocimiento en la mejora de los procesos educativos.” (Cantoral y Farfán, 2003, p. 210). En este sentido, se observa claramente que “la educación matemática no son matemáticas” (Bass, 2005, p.418), ni tampoco es docencia en matemáticas, las tres se diferencian entre sí. Las matemáticas a lo largo del tiempo y gracias a la actividad intelectual humana se ha consolidado como un cuerpo de conocimiento, mientras que la educación matemática y la docencia en matemáticas persiguen objetivos distintos, Goos (2014), enfatiza que “el objeto de la investigación, a diferencia de la docencia, no es resolver problemas sino generar conocimientos que nos ayuden a comprender un problema” (p. 189), por su parte, Malara y Zan (2002), subrayan que “el objetivo principal de la investigación es comprender, mientras que el objetivo principal de la enseñanza es ayudar a los estudiantes a aprender (Wong, 1995; Ainley, 1999; Mason,1999, como se citaron en Malara y Zan (2002).

2.1.2. Relaciones que establece un investigador de Matemática Educativa

Los investigadores de Matemática Educativa reconocieron la complejidad de los procesos de enseñanza-aprendizaje y la importancia de la expansión y modificación del marco teórico valiéndose de otras disciplinas como la psicología, la filosofía, entre otras, (Schoenfeld 2002b, p.467-480), para fortalecer su comprensión de los fenómenos que se presentan cuando los docentes y los alumnos se enfrentan con los conceptos de su interés. A partir de su amplio bagaje teórico, los investigadores construyen una red conceptual.

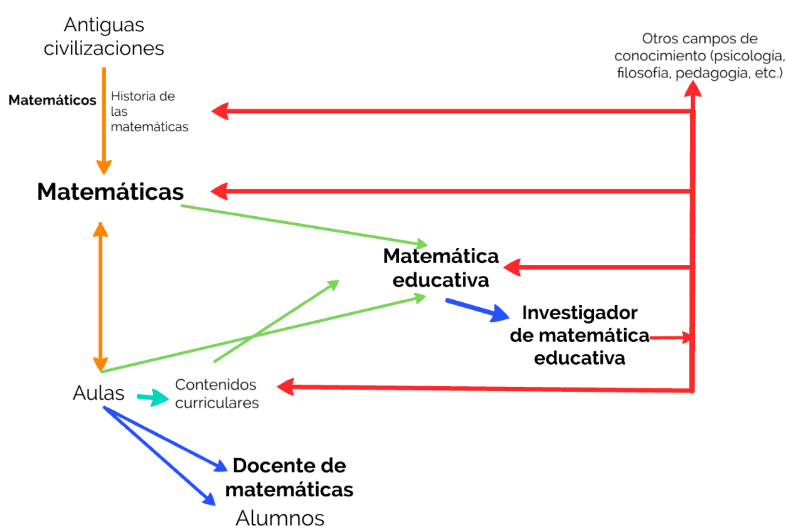
Las principales relaciones que establecen son con:

- Las matemáticas para estudiar cómo es tratado el concepto de interés formalmente
- Los contenidos curriculares estipulados en los planes y programas
- La historia de las matemáticas para fortalecer la comprensión de la epistemología del concepto
- Otros campos del conocimiento: la psicología porque aportan las fuentes teóricas de la enseñanza, el aprendizaje y la comunicación, la filosofía para vincularse con la teoría del conocimiento.
- La Matemática Educativa para saber cómo ha sido tratado el concepto desde la óptica de la investigación

Con estas relaciones, los investigadores van tejiendo sus ideas para proponer, teorizar y/o poner en juego las posibles formas en que se enseñan los conceptos de su interés (Véase figura 2.1).

Figura 2.1

Relaciones que establece un investigador de matemática educativa



En este sentido, la labor de un investigador de Matemática Educativa dista mucho de la de un docente de matemáticas, inclusive “muchos educadores han cuestionado la relevancia de las contribuciones hechas por los matemáticos de investigación, cuya experiencia y conocimiento está tan alejado de las preocupaciones y realidades de la educación matemática escolar” (Bass, 2005, p.418). Debido a esta diferencia se ha desarrollado un interés constante para fortalecer la relación entre la teoría y práctica, es decir, la teoría que corresponde a los productos de la investigación y la práctica que corresponde a la función de enseñanza y aprendizaje en el aula.

Últimamente, algunos investigadores han querido reconciliar la teoría y la práctica, se han dado cuenta de “la importancia dramática de la variable "maestro”” (Malara y Zan 2002, p. 563), como eje para comprender con un poco más de profundidad las dificultades que se presentan en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las aulas.

2.1.3. Estado del arte para la relación entre docentes e investigadores

Se recuperaron algunos de los proyectos en los que los investigadores se vinculan con los docentes para establecer una colaboración. Las investigaciones tomadas en cuenta son: Goos (2014), Cowie, Otrel-Cass, Moreland, Jones, Cooper, y Taylor (2010) y Malara y Zan (2002), los primeros dos reportan distintas formas de reconciliar la teoría con la práctica, son importantes para comprender qué se ha realizado para dicha reconciliación, el tercer documento contiene elementos que se ajustan más a los que se está tratando en este proyecto.

Goos (2014), reporta tres proyectos, el primero es un estudio longitudinal que se lleva a cabo con docentes en formación, el segundo fue comisionado por el gobierno para apoyar a los profesores en la incorporación de la aritmética al plan de estudios y el tercero es una relación colaborativa a largo plazo entre un investigador y un docente.

El proyecto realizado con los docentes en formación comenzó cuando los estudiantes se inscribieron a la asignatura que impartía el investigador. Éste les realizó una invitación para participar en el proyecto, se seleccionaron algunos de los que presentaron interés. Los propósitos de este proyecto surgieron de las experiencias del investigador en la enseñanza de cursos anteriores y de las observaciones que había realizado.

El segundo proyecto fue comisionado por el gobierno para apoyar a los docentes, los investigadores impartían "talleres de desarrollo profesional de día completo durante todo el año para apoyar la planificación y evaluación, y visitó a los maestros en sus escuelas en dos ocasiones entre los talleres para ofrecer más consejos y retroalimentación" (Goos, 2014, p.195). La mayoría de los docentes estaban comprometidos con el proyecto, sin embargo, una minoría "eran reacios a diseñar e implementar tareas de aritmética que se alinean con el modelo" (Goos, 2014, p.195), que los investigadores habían presentado en un principio.

En la última el investigador establece una relación con un docente de secundaria para llevar a cabo su investigación de doctorado. Al terminar la investigación, el docente se incorporó al doctorado bajo la supervisión del investigador que acababa de obtener su grado. Mientras se realizaba la investigación de doctorado se tenían objetivos y necesidades distintas, los roles estaban separados, el investigador era quien proponía los temas y las preguntas iniciales, posteriormente esta relación tuvo algunos cambios. Cuando el docente se incorporó al doctorado, él también comenzó a proponer sus temas y sus preguntas, con esto, se volvió más equitativa la relación, se estableció una conexión bidireccional entre ambos. Para el autor el tercer proyecto "parece ideal, y posiblemente idealizado, ofrece un vistazo a las posibilidades" (p.199), mientras que con los otros dos "no reduce el desafío de lograr el entendimiento mutuo entre el investigador y profesores que participan en dichos proyectos" (p.199).

El equipo de trabajo de Cowie et. al (2010), marca tres estudios colaborativos: profesor-investigador impulsado por investigadores, profesor-investigador dirigido por docentes y cuando el investigador toma el rol de docente. En el primer estudio se lleva a cabo el Proyecto Classroom Interactions in Science and Technology Education (InSiTE), con 12 docentes de 6 escuelas primarias, cuyo objetivo de los investigadores:

> era comprometerse con los profesores como participantes en todos los aspectos del proceso de investigación con el fin de obtener una mejor comprensión y mejora de la evaluación del profesor para las interacciones del aprendizaje (AfL). El estudio se estructuró como una serie de ciclos de docencia en el aula y observación, intercalada con reuniones conjuntas de profesores e investigadores. El trabajo en el aula permitió al equipo probar ideas y reflexionar sobre su impacto en las interacciones del maestro y el aprendizaje de los estudiantes (p.71).

Los ciclos posibilitaron la planificación colaborativa, docentes e investigadores se reunían para realizar la planificación, interpretación de datos y discusión de la teoría, posteriormente los docentes impartían la clase y dos investigadores la observaban, uno se centraba en la actividad del docente y el otro en algunas acciones que pasaban en el grupo. Finalmente, se comentaban las observaciones realizadas por el investigador y el docente contribuía con las situaciones que le parecían interesantes y los investigadores no habían tomado en cuenta, agregando una perspectiva interna. El papel de los investigadores fue "negociar con los profesores las formas en que su práctica podría desarrollarse para convertirse en más eficaz. Los investigadores introducen nuevas ideas cuando los profesores las necesitan, para mejorar la práctica dentro de las prácticas existentes de los profesores" (Cowie et. al.,2010, p.5).

En el segundo estudio colaborativo, los investigadores fueron invitados para trabajar en un proyecto con profesores sobre evaluación para el aprendizaje, los investigadores establecieron dos preguntas de investigación y los maestros desarrollaron sus propias preguntas de investigación y planes dentro de este marco de referencia, tenían reuniones periódicas para compartir información y perfeccionar lo que se estaba realizando y finalmente "los profesores elaboraron informes de investigación individuales utilizando plantillas proporcionadas por los investigadores" (Cowie, et. al., 2010, p. 6), estos informes los compartieron los docentes fuera y dentro de sus planteles.

De las relaciones establecidas anteriormente se obtienen beneficios tanto para el investigador como para el docente, el investigador pone en juego sus intereses, comprende y teoriza el tema de su interés, también contribuye a enriquecer el cuerpo de la Matemática Educativa. El docente, "al participar en el proceso de investigación, […] profundiza y mejora sus propias reflexiones sobre sus prácticas pedagógicas cambiantes, lo que aporta una perspectiva de la vida real muy necesaria para comprender y desentrañar las complejidades del aula" (Cowie, 2010, p. 70), además al involucrarse en la investigación logra: "construir sus propias preguntas, cuestionar sus suposiciones y biografías y reevaluar continuamente si una solución particular o la interpretación funciona y encontrar otra si no lo es" (Cochran-Smith & Donnell, 2006, como se citó en Cowie et. al. 2010).

“Regularmente un estudio de investigación puede ser de relevancia directa para los profesores, pero más comúnmente su relevancia directa es para otros investigadores” (Malara y Zan, 2002), lo anterior se observa en las colaboraciones mencionadas anteriormente porque se centran en los intereses de los investigadores: comprender y teorizar cómo se debería enseñar matemáticas en un salón de clases con ayuda de quién conoce las condiciones de las aulas: los docentes, en lugar de anteponer las necesidades e intereses de los profesores. En el proceso, los investigadores se colocan a ellos mismos o lo que estaban teorizando como modelo a seguir, eligen el tema, la problemática, teoría y metodología para posteriormente guiar, proponer, diseñar, analizar, informar y escribir sus documentos invitando a los docentes a la realización de algunas tareas del proceso investigativo, incluso cuando las investigaciones son dirigidas por los mismos docentes.

Al finalizar la investigación algunos docentes criticaban la forma en que los investigadores “llegaban a las escuelas y cosechaban todo, sin dejar nada para el maestro excepto "gracias" y nunca los volveríamos a ver” (Goos, 2014, p.197), terminado el proceso algunos docentes debían volver a sus aulas a enfrentar nuevamente las dificultades del día a día, a otros les interesaba la investigación y se alejaban de las aulas por lo que los beneficios no se veían reflejados en ellas a un largo plazo.

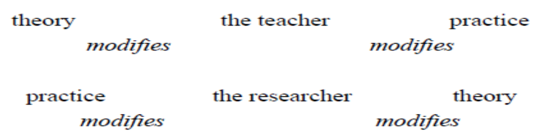
Malara y Zan (2002), plantean la posibilidad de que exista la relación de la docencia y la investigación en una sola persona, sin embargo, manifiestan que “algunos eruditos se niegan a creer que los dos roles pueden ser desempeñados por la misma persona, porque se considera que tales roles pertenecen a culturas separadas” (p.7), cada uno tienen distintos objetivos y tiempos; para el investigador su objetivo es comprender y para el docente es ayudar a los estudiantes a aprender. (Wong, 1995; Ainley, 1999; Mason,1999, como se citó en Malara y Zan, 2002). Respecto a los tiempos, el docente cuenta con tiempos cortos (ahora, aquí, con estos estudiantes) y el investigador con tiempos más largos (en cualquier momento, en cualquier lugar, con cualquier estudiante).

Los autores mencionan que dicha dicotomía se podría disminuir a largo plazo, puesto que, al final ambos objetivos están enfocados a lo mismo: mejora de la enseñanza para la mejora del aprendizaje de los alumnos, por lo cual, retoman el concepto de docente-investigador del modelo italiano, y lo toman como un elemento de reconciliación entre la teoría y la práctica "haciéndolo evolucionar en un proceso dialéctico entre los dos polos" (Malara y Zan, 2002, p. 553). Consideran la teoría como un corpus de conocimiento sobre la educación matemática en manos de los investigadores - y la práctica - la enseñanza real realizada por profesores.

Establecen la importancia de la relación dialéctica entre teoría y la práctica: el contacto con la teoría (lentamente) cambia los procesos de decisión de los profesores - y por lo tanto la práctica - el contacto con la práctica (lentamente) cambia la decisión de los procesos de los investigadores y la teoría final (p.26-27) (véase figura 2.2).

Figura 2.2

Relación entre teoría y práctica



Recuperado de: Malara y Zan 2002

El propósito de la relación docente-investigador en una sola persona es que "diseñen y controlen las situaciones de enseñanza-aprendizaje, no para reproducir procesos prefabricados. Este conocimiento debería permitir a los profesores resolver los problemas prácticos que se encuentran, para adaptar su práctica a su aula actual" (Malara y Zan, 2002), sin embargo, para que ello sea posible es necesario que exista reflexión de la práctica docente, "a través de la práctica reflexiva, los profesores toman conciencia de lo que están haciendo y por qué: la conciencia es, por tanto, producto del proceso de reflexión", es un elemento para reconciliar la teoría y la práctica.

En el modelo que los autores proponen consideran al docente como una variable muy importante porque es él quien posee información de las condiciones de aula y las necesidades que se le presentan diariamente con los alumnos, reconocen a los docentes como "tomadores de decisiones, influenciados por importantes factores que la investigación no debe descuidar, como el conocimiento, las creencias y las emociones" (p.554) *decisiones cognitivas* (relacionadas con el contenido), *decisiones afectivas* (relacionadas con los aspectos más interpersonales. enseñanza) y *decisiones de gestión* (incluida la asignación de tiempo). Cooney (1988), como se citó en Malara y Zan (2002).

2.1.4. Nuestra concepción sobre la relación docente-investigador, el docente como dialectizador

A partir de las ideas que establecen Malara y Zan (2002), se recupera el concepto de docente-investigador, la diferencia sustancial es que dichos autores llevan a cabo el proceso dialéctico con profesores en formación y profesores interesados, con el tiempo si presentaban interés se incorporaban a programas de investigación y en este proyecto el docente se incorporó a un programa de maestría.

El cambio sustancial entre las relaciones mencionadas anteriormente y lo que se está proponiendo en el presente trabajo es que el docente requiere acercarse al proceso de investigación en condiciones institucionales de enseñanza y tome como eje rector su experiencia en la práctica, sus aulas y sus alumnos, para resolver por sí mismo las dificultades que se le presentan para proponer, diseñar, comprender y modificar su enseñanza en aras de mejorarla, tomando decisiones con mayores elementos teóricos, prácticos y metodológicos. Asimismo, teorice lo que ocurre en los salones de clase y no solamente, como dice Cowie et. al. (2010), haga uso del conocimiento de otros, puesto que, distan mucho de la realidad que se vive con los alumnos, su prioridad es repercutir en sus aulas antes que en el cuerpo de conocimiento de Matemática Educativa.

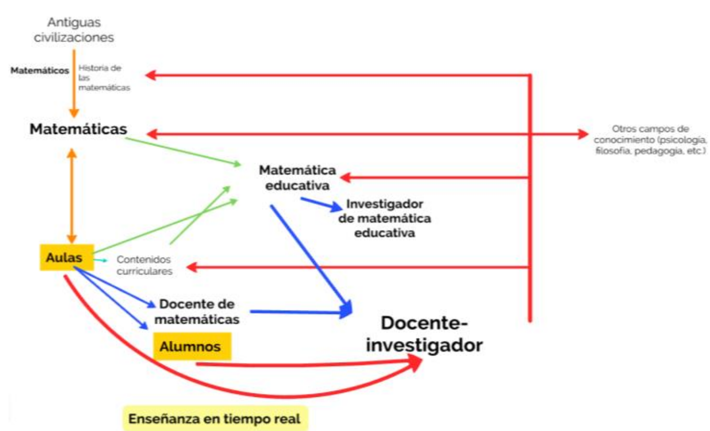
Bajo esta perspectiva, los docentes cumplen con dos funciones: docencia-investigación. La docencia-investigación se realiza en dos espacios diferentes: las aulas y el programa de maestría en Matemática Educativa. Los primeros son espacios complejos que, albergan muchos fenómenos y la rige cierta normatividad como los planes y programas, el reglamento escolar, acuerdos tomados como colegiado para la resolución de las problemáticas que se presenten en la institución, eventos cívicos y éticos, actividades extraclase, asimismo, el reglamento interno de cada asignatura, tiempo efectivo de la clase, características de los alumnos, control de grupo por parte del docente, conducta de los alumnos, inasistencias y retardos, dificultades que presentan los alumnos cuando tratan los conceptos matemáticos, entre otras, A lo anterior se le ha denominado *condiciones institucionales reales de enseñanza.*.

En el segundo espacio, el departamento de Matemática Educativa, la docente-investigadora reflexiona sobre su práctica docente, identifica, cuestiona, indaga, investiga los fenómenos que se le presentan en sus aulas, también revisa material teórico, propone y diseña acciones para ponerlas en juego con sus alumnos en una clase en *condiciones reales de enseñanza*. Estos espacios no están aislados, uno depende del otro. El no verlas de manera aislada "reduce la separación entre teoría y práctica al hacerlo evolucionar en un proceso dialéctico entre los dos polos, por otro lado, da vida a un prototipo significativo de un proceso de formación de alta calidad" (Malara y Zan 2002, p. 553), el docente-investigador es el dialectizador de dichos polos.

El docente al formarse para la investigación fortalece sus concepciones teóricas pertinentes, no se limita a que "la práctica docente a menudo se describe mediante el triángulo didáctico que consta de tres elementos interrelacionados; profesor, alumno y contenido" (Ostergaard, 2013, p.6), ni replica las diferentes formas en las que han tratados los contenidos otros docentes o investigadores, sino que también establece conexiones al igual que el investigador de Matemática Educativa: recurre al cuerpo de conocimiento, la historia de la matemática, otros campos de conocimiento (psicología, filosofía, pedagogía, etc.) y a lo que se ha realizado en Matemática Educativa, como se muestra en la figura 2.3.

Figura 2.3

Relaciones que establece un docente-investigador



Sin embargo, la forma de proceder al momento de establecer dichas relaciones es diferente a como las hace el investigador, se debe tener en cuenta que el docente no ha tenido acercamiento a lo que se hace en la investigación de Matemática Educativa, va iniciando su proceso de formación para la investigación, por lo que, se toma como proceso inicial la indagación que es:

> “ […] un modo de aprendizaje y metodología de instrucción que hace énfasis en las ideas de los alumnos como los sujetos que resuelven o solucionan un problema o situación en los estudios, es decir, aquellos donde se formulan hipótesis, construyen conceptos o recogen datos y que además, pretenden ir más allá de la simple búsqueda de información de su objeto de estudio, plantean el tema de cómo indagan y exploran las pautas y procesos de razonamiento científico. Su énfasis está en desarrollar patrones de autonomía en los alumnos y las alumnas respecto al conocimiento científico y en cuanto a la capacidad intelectual de informarse por sí mismo (Camacho, Casilla, Finol de Franco, 2008, p. 288).

En este caso, la indagación es un modo de aprendizaje y una metodología de instrucción para un docente en formación para la investigación.

2.2. Construcción del conocimiento

Como ya se ha mencionado en el apartado de docencia-investigación, para comprender la complejidad del aula se necesitan muchas herramientas teóricas, entre ellas conocer la epistemología del concepto matemático y la forma en que los individuos construyen su conocimiento.

En esta sección se tratan dos marcos teóricos relacionados con la construcción del conocimiento en el aula, el primero es el de intuición visto desde los enfoques de Fischbein (1987); y de Peña (2020) y el segundo relacionado con el concepto de “Reducción de la Abstracción en la Enseñanza (RAiT)” propuesto por Prassad (2014). Ambos conceptos: intuición y abstracción tienen una amplia gama de significados en distintos campos de conocimiento, sin embargo, los dos tienen algo en común: han sido considerados como objetos y como procesos, se considerarán esas ideas y al final se explicará la forma de concebir las relaciones entre las intuiciones, las abstracciones, el proceso de reducción de la abstracción (RAitT), el proceso de intuición y el proceso de abstracción (RAiT).

2.2.1. Pensamiento intuitivo

A lo largo de la historia ha habido una discusión sobre la amplia, diversa y controvertida gama de significados que tiene el concepto de intuición. Se ha tratado en “los debates filosóficos, en los fundamentos teóricos de la ciencia y las matemáticas, en consideraciones místicas, en ética y estética, en pedagogía, y, sin embargo, muy poco y muy rara vez en psicología” (Fischbein, 1987, p.3). Para algunos es una fuente de verdad, para otros es completamente lo contrario: una fuente de errores, también ha sido considerada como un método, una identificación simpática, la facultad a través de la cual los objetos se captan directamente, intuiciones morales y como una cierta categoría de cognición.

2.2.1.1. Intuición como ideas primitivas

Fischbein (1987), se cuestiona sobre “¿Cómo es posible que un término tan confuso y nebuloso reaparezca persistentemente una y otra vez con un papel preeminente en muchos dominios importantes como la filosofía, la ciencia, la matemática, la ética, el arte, la religión?” (p.6), él mismo brinda una respuesta a dicha pregunta:

> Hay una característica común básica que, a pesar de las diferencias entre los diferentes, permite relacionar los distintos significados en una estructura conceptual común. El conocimiento intuitivo es conocimiento inmediato; es decir, una forma de conocimiento que parece representarse a sí mismo ante una persona como evidente por sí mismo. La intuición, como cognición inmediata, puede ser fuente de revelaciones religiosas, de inspiración artística, de iluminación científica, etc. En todos estos casos se trata de formas de cognición aparentemente inmediatas” (p.6).

Afirma que “una intuición es, entonces, una idea que posee las dos propiedades fundamentales de una realidad concreta, dada objetivamente; inmediatez - es decir, evidencia intrínseca y certeza (no certeza convencional formal, sino certeza significativa prácticamente e inmanente)” (Fischbein, 1987, p.21), también señala que

> “las intuiciones son sólo aparentemente cogniciones autónomas y evidentes. Lo son para conferir a algunas de las ideas del individuo, la apariencia de certeza y validez intrínseca. Pero, de

hecho, estas ideas parecen muy robustas como efecto de ser arraigado profundamente en la organización mental básica de la persona" (Fischbein, 1987, p. X).

En este sentido, Fischbein (1987) menciona que las intuiciones siguen presentándose en los diversos campos de conocimiento porque son parte integral de cualquier actividad intelectualmente productiva.

2.2.1.2 Intuición como proceso

Peña (2020), señala la intuición como un proceso, lo asume como un proceso constructivo que guarda relación con el proceso creativo, puesto que "el proceso intuitivo experimentado por un matemático es similar al del escritor, dramaturgo, músico, poeta" (p.129). El proceso creativo y el proceso de intuición están relacionados, "eso significa que *la intuición sin construcción está vacía* y no es una percepción en absoluto, y *la construcción es una acción solo en la intuición*" (Peña,2020, p. 131). Decir que estos dos procesos se dan en la conciencia "nos permite comprender que cualquier juicio o proposición matemática es algún tipo de informe de lo que ha sido construido en mi intuición" (Peña, 2020, p.131).

Peña (2020), reconoce a la intuición como

> "[…] un esfuerzo intelectual, es decir, el que va más allá de la percepción de los sentidos o de la simple memoria. La intuición podría verse como el punto final de un trabajo previo que implica prueba, ensayo y error, indeterminación, introspección, interpretación, análisis, memoria, etc., pero a la vez es un punto de partida del trabajo lógico y formal de la matemática" (p.139).

En este sentido,

> "el proceso de intuición no puede desconocer el contexto real del individuo (no necesariamente el físico). En principio, las ideas pueden presentarse a la conciencia de manera "desordenada", pero luego, gracias a lo ya conocido por el individuo y, en el caso de la matemática, por los conceptos y la lógica, se convierte en un acto real y comprensible" (Peña, 2020, p.129).

En este punto, es necesario hacer una aclaración sobre lo que menciona el autor como ideas desordenadas, para nosotros esas ideas no son desordenadas son primitivas, seminales, en otras palabras, son las intuiciones de las que habla Fischbein (1987), no surgen de la nada, cuentan con un contexto específico, surgen "cuando el individuo ha estado inmerso en un contexto matemático. Cuando mayor sea su conocimiento sobre la matemática, mejor será su proceso intuitivo" (Peña, 2020, p. 139), y también se cumple de manera inversa "no será fructífero si el individuo no maneja de manera claro los conceptos matemáticos, de lo que se infiera que, el conocimiento de lo nuevo es posible cuando el individuo se apoya en lo ya conocido". (Peña, 2020, p. 139).

En resumen, la intuición es un proceso "donde *el mundo real* y los *conocimientos previos* del individuo juegan un papel importante; y en el transcurso de dicho proceso, no se puede desconocer la necesidad de la lógica para formalizar los hallazgos obtenidos por la intuición" (Peña, 2020, p.129).

Antes de seguir es necesario que se explicite lo que se entiende por mundo real.

De acuerdo con Popper, existen tres mundos. El mundo de los cuerpos físicos, el de los estados de conciencia y el mundo de los productos de la mente humana. En este tercer mundo encontramos los conceptos y teorías matemáticas. En cualquier caso, ya sea para inventar una nueva teoría, para determinar un concepto o simplemente para resolver un problema, el matemático toma como base su mundo real (que puede ser cualquiera de los tres mencionados).

> 1. Los objetos del mundo 3 son reales (aún más abstractos que las fuerzas físicas) pero aún así, son reales, pues constituyen herramientas poderosas para cambiar el mundo 1. (No pretendo dar a entender que esa sea la única razón para considerarlos reales, ni que sean simplemente herramientas).
> 2. Los objetos del Mundo 3 poseen efectos sobre el Mundo 1 sólo a través de la interpretación humana de sus creadores; más concretamente, poseen dichos efectos gracias a que son captados de, lo que constituye un proceso del Mundo 2, más exactamente, un proceso en el que entran en interacción los Mundos 1 y 3.
> 3. Por tanto, hemos de admitir la realidad tanto de los objetos del Mundo 3 como de los procesos del Mundo 2, aún cuando pueda no gustarnos admitirlo por deferencia digamos, hacia la gran tradición del materialismo (Popper y Eccles, 1977, p.54) (Citado por Peña 2020).

Al final de su documento Peña (2020), señala que a pesar de que la discusión que se tienen sobre el concepto de intuición ya no es sobre si se deben aceptar o no estas ideas primitivas aún hay muchas interrogantes para la intuición y presenta tres preguntas importantes:

1. ¿Cuál es el papel de la intuición en el conjunto de creencias de los matemáticos y estudiantes?

2. Si la intuición es un proceso, ¿Cómo puede éste fortalecerse para que produzca más ideas novedosas?

3. ¿Puede establecerse una relación entre la cantidad de preconceptos estructurados del individuo y el resultado de sus intuiciones? (p.140).

2.2.2. Reducción de la Abstracción en la Enseñanza (RAiT)

Es importante incorporar una pregunta a las que ya ha planteado Peña (2020); ¿cuál es el proceso que posibilita identificar las ideas seminales de un concepto matemático? Nosotros reconocemos que para identificar las ideas primitivas de un concepto matemático es necesario que varios procesos se relacionen; uno para la de-construcción del concepto matemático y otro para su re-construcción. Y justamente Prassad (2014), brinda un panorama de estos dos procesos en lo que llama Reducción de la Abstracción en la Enseñanza (Reducing Abstraction in Teaching (RAiT)). Para comprender su planteamiento es necesario señalar la discusión sobre el concepto de abstracción, por qué las matemáticas se consideran una materia abstracta, la abstracción como un objeto y como un proceso, qué se entiende por objeto matemático y la relación dialéctica que existe entre lo concreto y lo abstracto.

2.2.2.1 Discusión para definir el concepto de abstracción

Al igual que el concepto de intuición, el concepto de abstracción ha presentado una amplia gama de significados en distintos campos teóricos, “puede ser usada como verbo, sustantivo o adjetivo, cada uno de los cuales ofrece diferentes perspectivas al significado.” (Mitchkemore y White, 1995) (Citado por Prassad, 2014, p.20), lo cual no permite que haya un significado preciso de abstracción, varias disciplinas han estado interesadas en tratar el tema, en las que se le ha puesto mayor atención son en la filosofía y la filosofía de las matemáticas. La comunidad de investigación matemática también se ha interesado en el concepto de abstracción, para Piaget (1980), Ginsburg y Asmussen (1988) y Dienes (1989) citados en Prassad (2014), “la abstracción es uno de los aspectos más importantes de las matemáticas”, para Piaget (1980), “la abstracción constituye las habilidades requeridas para el aprendizaje elemental a través de conceptos matemáticos avanzados", Ferrari (2003), citado por Prassad, (2014). señala que la abstracción "es reconocida como una de las características más importantes de las matemáticas desde un punto de vista cognitivo, así como una de las razones principales para el fracaso en el aprendizaje" (p.1225). Para otros la abstracción es un objeto y para otros es un proceso.

2.2.2.2. Abstracción como objeto matemático

Existe una diferencia entre un objeto que se usa en lenguaje común y un objeto que se utiliza en matemáticas. Los objetos en lenguaje común son "cosas […] tangibles, materiales y reales" (Prassad, 2014, p.21), y el objeto matemático "puede referirse a lo mental, construcciones u objetos abstractos, como propiedades, clases, proposiciones o relaciones" (Prassad, 2014, p.21), es "el producto final de una actividad mediante la cual se toma conciencia de las similitudes entre nuestras experiencias" (Prassad, 2014, p.24), y "una representación estática similar a un objeto que comprime la información operativa en un todo compacto" (Prassad, 2014, p.20).

Lave (1988) (citado por Prassad 2014), agrega que el significado que se le dé a un objeto matemático depende de la "relación con la situación y contexto del cual se ha abstraído el objeto o concepto matemático" (p.22) a esto él llama abstracción situada, la cual enfatiza "la conexión con situaciones, no buscando desafiar la utilidad de la abstracción matemática formal, sino manteniendo que esta abstracción puede tener lugar in situ en lugar de sólo dentro de un sistema autónomo" (Prassad, 2014, p.22), considerando lo anterior, se "permite una visión de las matemáticas como socialmente creadas y situadas, conservando su aplicabilidad en diferentes contextos" (Prassad, 2014, p.22).

2.2.2.3. Abstracción como proceso

Gilson (1937), Walkerdine (1988), y Skemp (1976) (citados en Prassad, 2014), establecen la experiencia como factor importante para la abstracción, y distingue la abstracción como un producto final y el término abstrayendo como una actividad". Skemp

(1976) (citado por Prassad, 2014, p. 24), realiza la distinción entre ambas de una manera concreta:

> La abstracción es una actividad mediante la cual nos damos cuenta de las similitudes […] entre nuestras experiencias. Clasificar significa recopilar nuestras experiencias sobre la base de estas similitudes. Una abstracción es una especie de cambio duradero, resultado de la abstracción, que nos permite reconocer nuevas experiencias que tienen las similitudes de una clase ya formada […]. Distinguir entre abstracción como actividad y abstracción como su producto final, en lo sucesivo denominaremos a este último un concepto (pág.21).

Hershkowitz, Schwarz y Dreyfus (2001), citados en Prassad (2014), ven la abstracción desde una perspectiva sociocultural dentro de la educación matemática, la marcan como un “proceso con una historia, puede capitalizar en herramientas y otros artefactos, y ocurre en un entorno social particular.” (p. 2) (Citado por Prasad, 2014, p. 24), toma en cuenta varias cosas como el “conocimiento previo de los estudiantes, el ambiente de aprendizaje, herramientas tecnológicas, el curriculum, normas del aula y otros componentes sociales” (Prassad, 2014, p.24).

En este sentido,

> “para la mayoría de los conceptos matemáticos, la enseñanza no comienza en territorio virgen” (p.154), sino que todos los estudiantes llegan con ciertas ideas, intuición y conocimiento ya formados en su mente la base de su experiencia previa. Cornu sostiene que “estas ideas no desaparecen siguiendo la enseñanza, al contrario de lo que pueden imaginar la mayoría de los profesores” (p. 154). Por tanto, sugiere, es importante que los profesores se den cuenta explícitamente de esta dificultad por parte de sus alumnos y traten de reconstruir su estructura de conocimiento para acomodar los nuevos conceptos” (Prassad, 2014, p.36).

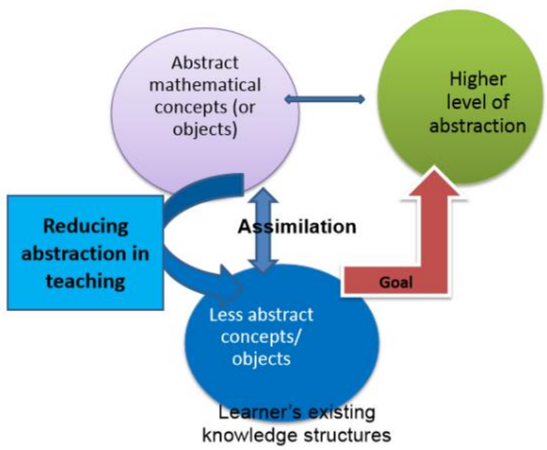
2.2.2.4. El proceso de Reducción de la Abstracción en la enseñanza (RAiT)

Prassad (2014), propuso la RAiT, retomó la idea que había planteado Hazzan (2005), sobre la Reducción de la Abstracción, sin embargo, la diferencia entre ambas propuestas es que Hazzan (2005), se centró en los alumnos, cómo “mientras aprenden un nuevo e infamiliar concepto matemático, los alumnos tienden a trabajar en un nivel más bajo de abstracción como forma de estrategia para hacer el concepto accesible mentalmente” mientras que Prassad (2014), se centró en los docentes, en cómo “lidian con la abstracción matemática mientras implementan actividades matemáticas en el salón de clases" (p.45), menciona que los primeros que se deben enfrentar a la abstracción matemática son los docentes, por lo tanto, la idea de Reducción de la Abstracción es una actividad de la enseñanza, es por eso que la denomina Reducción de la Abstracción en la Enseñanza (RAiT). En el método de enseñanza que propone:

> […] los conceptos se concretan y se presentan a los estudiantes en un nivel inferior de abstracción, mediando temporalmente a través de conceptos, objetos, discursos o situaciones en un nivel inferior de abstracción. El objetivo es, sin embargo, pasar al más alto nivel de abstracción al ascender desde el nivel inferior. Cuando el alumno asimila lo nuevo, conceptos o ideas abstractas en su estructura de conocimiento existente. El concepto abstracto se vuelve menos (o no más) abstracto para el estudiante. Pisando el nuevo concepto abstracto concretado, un maestro puede introducir otro concepto y el ciclo continúa. (p.p. 49-50) (véase figura 2.4).

Figura 2.4

Modelo de enseñanza en RAiT



Retomado de Prassad (2014)

En su método le da importancia a la relación dialéctica que se establece con conceptos u objetos menos abstractos y los conceptos u objetos más abstractos, señala que "el desarrollo de un concepto verdadero (comprensión conceptual) sólo es posible cuando los conceptos cotidianos (forma inferior) y los conceptos científicos (forma superior) entran en relación dialéctica" (Prassad, 2014, p.28), en este sentido también señala que

> Al trabajar lentamente hacia arriba, un concepto cotidiano despeja el camino para el concepto científico y su desarrollo a la baja. Esto crea una serie de estructuras necesarias para la evolución de un concepto más primitivo, aspectos elementales, los cuales le dan cuerpo y vitalidad. Los conceptos

científicos a su vez suministran estructuras para el desarrollo ascendente de los conceptos espontáneos del niño hacia la conciencia y su uso deliberado. (p. 192) Vygotsky (1986) (Citado por Prassad).

Esta propuesta tiene un enfoque constructivista, toma en cuenta:

> "el conocimiento, la experiencia y el nivel de pensamiento existentes de los alumnos, así como sus contextos familiares al tiempo que introducen nuevos conceptos matemáticos. Al hacerlo, el nivel de abstracción del concepto se reduce y se presenta a los estudiantes para que los estudiantes pueden lidiar con conceptos u objetos matemáticos dentro de su zona de confort, promoviendo así una conexión más rica entre el alumno y el concepto" (Prassad, 2014, p. 35).

Los objetos matemáticos cobran sentido en una determinada situación o contexto y el proceso de abstracción toma en cuenta el contexto real y los conocimientos previos al igual que el proceso intuitivo.

2.2.3. Nuestra propuesta sobre la construcción del conocimiento

Partimos de que para identificar las ideas primitivas de un concepto es necesario que varios procesos se relacionen; uno para la deconstrucción del concepto matemático y otro para su re-construcción.

En este proceso se tienen a los conceptos y a las ideas seminales de un concepto matemático. A los primeros los llamamos abstracciones según lo que se ha explicado sobre objetos matemáticos y a los segundos, intuiciones de acuerdo con lo que establece Fischbein (1987). Los objetos matemáticos y las ideas seminales pueden conectarse mediante tres procesos, dependiendo si requerimos ir de lo más abstracto a lo menos abstracto o viceversa. Para ir de un objeto matemático a las ideas seminales se encuentra el proceso de reducción de la abstracción, que consiste en deconstruir el concepto para llegar a las ideas primitivas del concepto, a los elementos mínimos con los que fue construido. El proceso de intuición y el proceso de abstracción surgen cuando existe el proceso de enseñanza y se van de lo menos abstracto (intuiciones) a lo más abstracto (conceptos matemáticos) ambos toman en cuenta el mundo real, ya sea que esté incorporado al Mundo1, 2 ó 3 que menciona Popper y Eccles (1977), citados por Peña (2020), y los conocimientos previos de los alumnos.

El proceso de abstracción lo tomamos en el sentido de Prassad (2014), como una actividad de la enseñanza que tiene dos objetivos principales: incorporar los elementos matemáticos mínimos en el aula "[…] mediando temporalmente a través de conceptos, objetos, discursos o situaciones en un nivel inferior de abstracción. El objetivo es, sin embargo, pasar al más alto nivel de abstracción al ascender desde el nivel inferior" (Prassad,2014, p.139).

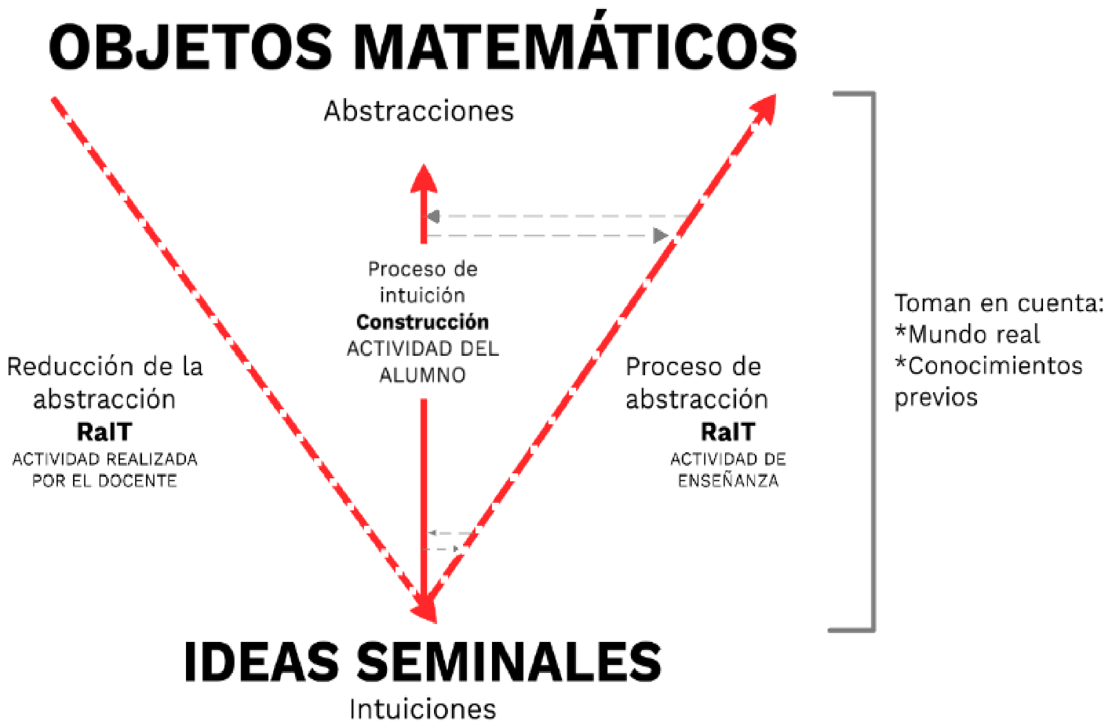
En este proceso se encuentra la relación dialéctica entre los conceptos u objetos menos abstractos y los conceptos u objetos más abstractos, no hemos colocado la relación de lo concreto a lo abstracto puesto que, como lo vimos anteriormente, cuando admitimos la realidad de los 3 mundos de Popper y Eccles (1977), posibilita tomar a las intuiciones como entidades abstractas. Por lo tanto, el proceso de abstracción comienza con entidades abstractas, que es a lo que llamamos intuiciones las cuales pueden ser tanto del Mundo 1, 2 ó 3. Conforme el alumno "asimila lo nuevo y conceptos o ideas abstractas en su estructura de conocimiento existente, la anterior. El concepto abstracto se vuelve menos (o no más) abstracto para el estudiante. Pisando el nuevo concepto abstracto concretado, un maestro puede introducir otro concepto y el ciclo continúa" (Prassad, 2014).

Con esto se logra decir que este proceso no es lineal, es decir, no va directamente de una intuición a un concepto matemático formal, sino que gracias a que el profesor se encarga de ir enriqueciendo las intuiciones de los alumnos con nuevos elementos posibilita obtener *"totales compactados"*. Estos totales compactados pueden ser utilizados nuevamente por los alumnos como intuición para seguir con la construcción de un nuevo total compactado, en otras palabras, de un objeto matemático. Gracias a que existe la relación dialéctica entre ellos se dice que dicho proceso es un ciclo, donde las intuiciones se vuelven intuiciones más elaboradas, y si se quiere seguir construyendo conceptos matemáticos las intuiciones vuelven a servir como ideas primitivas para el nuevo objeto matemático.

El proceso intuitivo se entiende como un proceso constructivo que guarda relación con el proceso creativo, parte de las ideas primitivas de un concepto, las cuales surgen "cuando el individuo ha estado inmerso en un contexto matemático. Cuando mayor sea su conocimiento sobre la matemática, mejor será su proceso intuitivo" (Peña, 2020, p. 139). El proceso de intuición y el de abstracción están relacionados, puesto que el proceso de abstracción en la enseñanza depende de las intuiciones que los alumnos vayan manifestando en las sesiones de acuerdo con sus conocimientos previos y su contexto real, el docente-investigador cumple su rol de observador de las acciones realizadas por sus alumnos cuando tratan con las nociones matemáticas en las clases y a partir de las dificultades y las intuiciones que los alumnos presentan debe modificar los nuevos elementos a incorporarse. Entonces ambos procesos se enriquecen tanto el de abstracción en la enseñanza como el de intuición (véase figura 2.5).

Figura 2.5

Relaciones entre las intuiciones y los objetos matemáticos en la enseñanza



2.3. Concepto matemático: relaciones trigonométricas

El siguiente apartado está dividido en cuatro partes, la primera ofrece la estructura general de las funciones trigonométricas realizada por Arenas, Becerra, Morales, Urrutia y Gómez (2014), en la segunda parte proponemos a partir del trabajo de los autores anteriormente citados una estructura que relaciona conceptos básicos de geometría con el propósito de vincularlos con el concepto de relación trigonométrica, la tercera parte está destinada a los documentos formales e históricos tanto de geometría como de trigonometría, por último, la parte de estado del arte en la enseñanza de la trigonometría.

2.3.1. Estructura general de las funciones trigonométricas

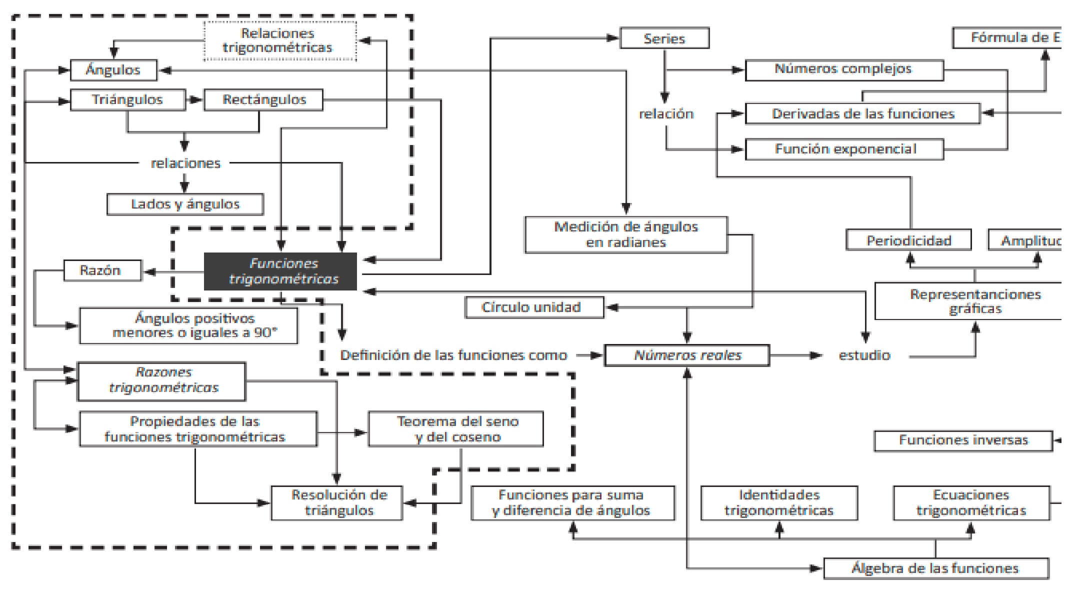
Para la relación conceptual se revisó el documento de Arenas et. al. (2014), porque proponen un esquema de una estructura general de las funciones trigonométricas, desde las relaciones trigonométricas hasta la fórmula de Euler y las series trigonométricas.

Colocan una estructura general de las relaciones entre distintos conceptos que:

> Está configurada por los objetos (ángulos, triángulos, etc.), conceptos (razones trigonométricas) y la estructura matemática (funciones trigonométricas). Respecto a las relaciones, se presentan relaciones verticales o conceptuales, porque la relación horizontal o de representación se presenta en el siguiente apartado. Se pueden distinguir dos focos principales. El primero hace referencia al desarrollo de las razones trigonométricas y el segundo, a la construcción de las funciones trigonométricas desde los números reales. Seleccionamos el primer foco para realizar el diseño e implementación de nuestra unidad didáctica. (Véase figura 2.6).

Figura 2.6

Estructura conceptual general de las funciones trigonométricas



Nota: la línea punteada delimita el foco de estudio de la estructura conceptual y las líneas con flechas describen la dirección de la relación entre los conceptos matemáticos de ciones trigonométricas.

Figura 1. Estructura conceptual general de las funciones trigonométricas

Nota. Adaptado de Arenas, Becerra, Morales, Urrutia y Gómez (2014)

El esquema está dividido en dos partes: la estructura delimitada con líneas punteadas corresponde al desarrollo de las relaciones trigonométricas, algunos de los conceptos que se colocan son de geometría, parten de las relaciones trigonométricas para llegar al concepto de razón trigonométrica y posteriormente a la resolución de triángulos. La segunda parte corresponde al concepto de función ligado con los conceptos de relación y razón que se encuentran en la parte delimitada y con otros conceptos trigonométricos. Esta estructura explicita los conceptos mínimos de la geometría y los de trigonometría, los cuales posibilitan el desarrollo de la segunda parte que corresponden a conceptos más elaborados. Estos autores hacen una diferenciación entre razones trigonométricas y relaciones trigonométricas, lo cual será importante para la siguiente sección.

2.3.2. Nuestra propuesta para la estructura conceptual de relaciones trigonométricas vinculada con conceptos de geometría

Tanto el marco teórico de la reducción de la abstracción (RAiT) y el esquema de Arenas et. al. (2014), fueron el punto de partida porque brindan el panorama general de las conexiones entre conceptos de geometría, trigonometría y el concepto de función trigonométrica, sin embargo, nosotros estamos en el nivel de secundaria, un nivel fundamental para la construcción de la noción de trigonometría, por lo cual, es necesario vincular la parte de los elementos de la trigonometría con conceptos de geometría.

Modificamos la parte punteada de la estructura del esquema y agregamos la parte de los conceptos de geometría. Por lo cual, nuestro esquema también está dividido en dos partes, la primera corresponde a los conceptos de geometría y la segunda que está delimitada por una línea punteada pertenece a las relaciones trigonométricas. Para geometría se han considerado conceptos básicos y conceptos transitorios, es decir, que posibilitan transitar a los conceptos mínimos de trigonometría.

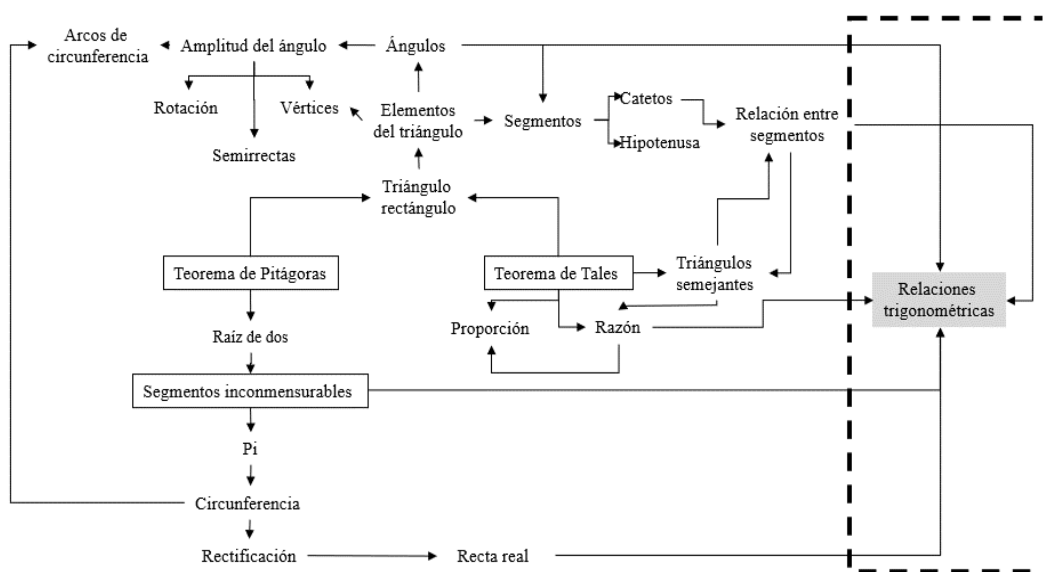
El triángulo rectángulo es de interés, puesto que, tanto el teorema de Pitágoras como el de Tales hacen uso de él, por lo cual, para nosotros es importante colocar de manera explícita una estructura que posibilite relacionar los contenidos mínimos de geometría para arribar a la noción de triángulo rectángulo. Comenzamos con sus elementos: vértices, segmentos y ángulos. En ángulo se hizo un desglose para el concepto de amplitud porque será fundamental para tratar las relaciones trigonométricas. En el Teorema de Tales se toman en cuenta los siguientes elementos: relaciones entre segmentos, triángulos semejantes, razón y proporción y para el Teorema de Pitágoras fueron dos conceptos de interés: las áreas y raíz de dos. Ambos teoremas conllevan a la medida de segmentos, por lo cual los dos teoremas tienen dos conceptos en común: los triángulos rectángulos y la medida de segmentos.

Tanto la raíz de dos como el número Pi fueron vistos como segmentos inconmensurables y como número irracional. La ubicación de los dos números en el plano cartesiano se vincula con los números reales y asimismo con la representación gráfica de las razones trigonométricas.

Las conexiones entre los conceptos de geometría son fundamentales para la transición a los conceptos básicos de la trigonometría, las más evidentes son 3: del concepto de relación de segmentos a relaciones trigonométricas, de razón a razones trigonométricas, y raíz de dos y pi en el plano cartesiano a la representación gráfica de las relaciones trigonométricas, sin embargo, toda la conexión conceptual de geometría es importante. A la primera conexión se le incorpora el concepto de variación tomando en cuenta los ángulos agudos del triángulo rectángulo para vincularlos con los conceptos de amplitud y periodo, finalmente la representación gráfica. Las relaciones trigonométricas que se han considerado han sido seno y coseno, debido al nivel educativo (Véase figura 2.7).

Figura 2.7

Estructura conceptual general de la vinculación de conceptos de geometría y trigonometría



Nota: Adaptada de Arenas, Becerra, Morales, Urrutia y Gómez (2014)

2.3.3. Elementos teóricos de los conceptos de geometría y trigonometría

Para la construcción del esquema mostrado anteriormente fue necesaria la revisión de literatura de matemática formal, así como de documentos históricos que brindaran a la docente-investigadora herramientas teóricas para realizar las conexiones entre los contenidos tanto de geometría como de trigonometría. No debe olvidarse que la investigación está desarrollada en las condiciones reales que ofrece un aula, por lo tanto, la forma en que se trataron los conceptos en el aula y las dificultades que se presentaron influyeron en el desarrollo de la estructura conceptual.

2.3.3.1. Conceptos de geometría

Para los conceptos de geometría se recurrió a los Elementos de Euclides (1999). El libro I se analizó completo porque contiene los conceptos mínimos de geometría (punto, línea recta, semirrectas, segmentos de recta, ángulo, superficie, figura, círculo, semicírculo y congruencia), los cuales están presentes en el Programa de Estudios de Educación Secundaria (SEP, 2011). La estructura del libro I es la siguiente: se encuentran 23 definiciones de los objetos con los que se trabaja a lo largo del libro, cinco postulados y 9 nociones comunes o axiomas. De los 48 teoremas, 12 son de construcción y 36 de demostración; los teoremas de construcción requieren de una demostración constructiva, que se basa en dos instrumentos, regla y compás, haciendo uso de ellos se logra afirmar o contradecir un argumento, o probar la existencia de un determinado objeto matemático y los teoremas de demostración son aquellos que parten de los supuestos y aplican reglas para llegar a la conclusión deseada. Cada uno de los teoremas están demostrados utilizando las definiciones, los postulados y las nociones comunes.

La distribución de los teoremas del libro es: del teorema 1-26 se tratan en un principio los teoremas de construcción, propiedades de los triángulos, ángulos, perpendiculares y algunos teoremas de congruencia, de la proposición 27-32 tratan sobre paralelas y en el 32 realiza la demostración de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, de la 33 -48 trata lo relacionado con las áreas, recuperando los paralelogramos, triángulos, cuadrados y los últimos dos teoremas están relacionados con el Teorema de Pitágoras y su recíproco.

De este libro se puso atención en los conceptos matemáticos que presentaba como los elementos de la geometría y en la proposición 47 y 48, porque recuperan la mayoría de los teoremas anteriores, es decir, es un teorema más elaborado. También se puso atención en los doce teoremas de construcción porque tratan rectas paralelas, perpendiculares y congruentes, ángulos, triángulos y cuadrados. De los libros II, V y X solamente se revisaron los primeros teoremas para identificar la forma de tratar los conceptos desde un enfoque geométrico. Del libro II se recuperó la forma en la que se tratan las áreas de forma geométrica, es decir, sin utilizar números, recurriendo principalmente a la congruencia de áreas, este libro tiene relación con el tratamiento del teorema 47 del libro I que corresponde al Teorema de Pitágoras. Del libro V se tomaron varios conceptos: la comparación de las magnitudes (geométricas), relación, razón y proporción, las diferencias entre estos conceptos es sustancial para definir posteriormente qué es una relación y una razón trigonométrica, además son elementos del Teorema de Tales. Del libro X la conmensurabilidad e inconmensurabilidad de segmentos utilizando como unidad un segmento.

Para complementar los libros V y VI, se recuperó el documento del Grupo Beta (1990), porque trata de proporcionalidad geométrica y semejanza y para el libro X se recurrió al libro de Peterson y Hashisaki (1969), para revisar el subconjunto de los números irracionales y el tratamiento del número Pi, la raíz de dos y los temas de geometría.

Además de los libros de Euclides se revisó otro documento histórico, el de Arquímedes (1952), solamente se trataron dos teoremas, el 1 y 3 que están relacionados con la circunferencia y el círculo.

1. El área de cualquier círculo es igual a un triángulo rectángulo en cuál de los lados alrededor del ángulo recto es igual al radio y el otro a la circunferencia, del círculo.
3. La relación entre la circunferencia de cualquier círculo y su diámetro es mayor que 3 pero menor que 4

El primer teorema brinda dos formas para calcular el área del círculo tanto por fuera como por dentro tomando como base un triángulo rectángulo. Y la tercera proposición ofrece una aproximación de la relación entre la circunferencia y su diámetro, estas proposiciones son los fundamentos del número Pi.

2.3.3.2. Conceptos de trigonometría

Para los conceptos de trigonometría se revisaron los libros de Stitz y Zeager (2013) y el de Lucas y James (1970), Trigonometría moderna.

Del capítulo 10 Fundamentos de la trigonometría de Stitz y Zeager (2013), se revisaron los primeros 3 apartados, porque contenían los conceptos de interés. El capítulo comenzó con la explicación de una semirrecta y un ángulo, los cuales son elementos de la geometría, el ángulo fue de vital importancia para abordar las seis funciones trigonométricas en el círculo unitario. Por ser el ángulo un elemento de la geometría indispensable para el desarrollo de los conceptos de trigonometría se recurrió a un documento que recuperó la Historia de la medida angular de Wallis (2005), también se recuperó el documento de Merlet (2004), llamado Una nota de la historia de las funciones trigonométricas.

Del libro de trigonometría moderna se revisaron el capítulo 5 que tiene que ver con Medidas y funciones circulares y el capítulo 6 de Funciones trigonométricas.

2.3.4. Estado del arte de la enseñanza de la trigonometría

Se revisaron dos documentos relacionados con la enseñanza de la trigonometría, el de Montiel (2013) y el de Maknun, Rosjanuardi y Jupri (2019). Parten de los problemas que han identificado en la enseñanza de la trigonometría, mencionan que la forma de enseñanza las razones trigonométricas en las escuelas se "ha convertido […] en el proceso aritmético de dividir las longitudes de los lados del triángulo, esto es, en una técnica para encontrar valores faltantes de un triángulo" Montiel, 2013, p. 23, lo anterior asume a

> la razón trigonométrica como herramienta, si bien resuelve el problema de calcular la altura del edificio (cumpliendo así con el objetivo escolar de elegir correctamente la razón trigonométrica tangente y calcular el valor faltante), no asegura un pensamiento trigonométrico ante el manejo del triángulo, sus elementos y las relaciones entre éstos (Montiel, 2013, p. 23).

Montiel (2013), identifica que a pesar de que "la introducción a la trigonometría se contextualiza en la geometría", la forma en la que se ha tratado en el discurso Trigonométrico

Escolar (dTE); “ha despojado a las razones trigonométricas de todo aquello que le da origen, sentido y significado; es decir, *hay una pérdida del proceso geométrico en la construcción de lo trigonométrico”* (Montiel, 2013, p. 27). En este sentido, “propone una construcción basada en prácticas y no sólo en conceptos, poniendo énfasis a la construcción de la relación y la funcionalidad trigonométricas y sus respectivos desarrollos del pensamiento geométrico-proporcional y analítico funcional” (Montiel, 2013, p. 27). Agrega elementos de la geometría porque en la

> “tradición escolar el uso de los triángulos tiene un carácter puramente ilustrativo, no son construcciones geométricas en el sentido estricto y ello puede provocar que lo trigonométrico se vea sólo como la relación entre ángulos y catetos, y no se estudie la naturaleza de esta relación, que es en donde radica lo trigonométrico” (Montiel, 2013, p. 27).

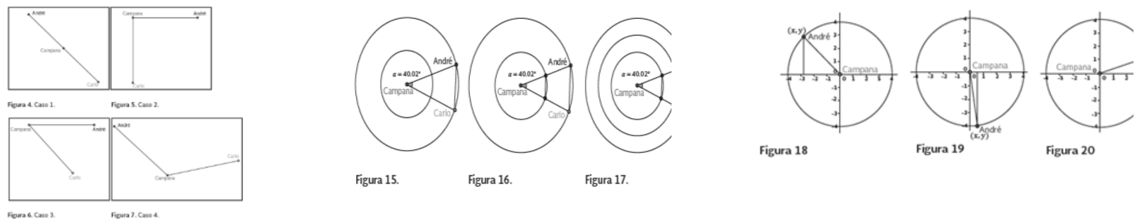
“En el sistema educativo mexicano el primer acercamiento del estudiante con la trigonometría se ubica en el tercer grado de la educación básica-secundaria (entre los 14 y 15 años de edad)” (Montiel, 2013, p. 13), por lo cual las aseveraciones anteriores son de suma importancia para nosotros, porque en tercero de secundaria se consolidan los conceptos de geometría y comienza el tránsito a los conceptos de trigonometría.

Montiel (2013), propuso en su documento una “secuencia de actividades “prototípicas” que no constituyen un diseño para implementarse en cualquier escenario escolar, sino que conforman la base de prácticas a partir de la cual se pueden elaborar diseños de clase que se adapten a las condiciones institucionales particulares” (p. 41). Se conforman de 4 fases: 1. Planteamiento y exploración de un problema, 2. Un contexto para las construcciones geométricas, 3. Hacia la construcción de la función trigonométrica y 4. Resignificando la función trigonométrica.

Utiliza un ejemplo y lo desarrolla en cada una de las fases que propone, nosotros tomamos ese ejemplo como una ruta de enseñanza de las razones trigonométricas, no nos centraremos en el problema sino en cómo lo está presentando de manera gráfica para transitar a la función trigonométrica. En la fase 1 parte del problema y espera que las respuestas de los alumnos sean dos segmentos concatenados (véase figura 2.8 a), en la fase 2 los segmentos se inscriben en una circunferencia y posteriormente varía la medida de la circunferencia (véase figura 2.8b), con softwares de geometría dinámica le da movimiento a los segmentos, en la fase tres se incorpora un plano cartesiano (véase figura 2.8c).

Figura 2.8

Ruta que propone Motiel (2013) para la enseñanza de la trigonometría



(a) (b) (c)

Retomado de: Montiel (2013)

Esta propuesta nos fue de interés por varios aspectos; puso en evidencia la necesidad de vincular conceptos de geometría con conceptos de trigonometría, brindó una ruta para transitar de lo geométrico a lo trigonométrico y mostró elementos de la geometría que son importantes en la trigonometría (angularidad, triángulos, circunferencia).

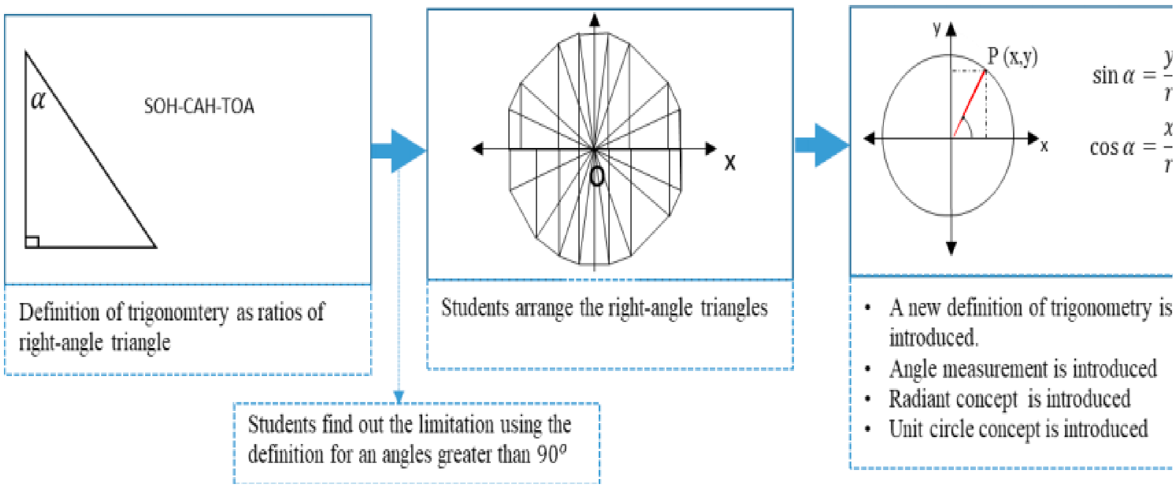
Otro documento que se revisó fue el de Maknun, Rosjanuardi y Jupri (2019), ellos distinguen dos formas de ver la trigonometría:

> La trigonometría se puede ver como relaciones de un triángulo de ángulo recto y también como una función. Ambos contextos tienen diferentes enfoques y orígenes. La trigonometría como proporciones se define como el seno es opuesto sobre adyacente, tan conocido por maestros y estudiantes como SOH-CAH-TOA. Si bien la trigonometría como función significa que hay una correspondencia entre dos conjuntos (un dominio y un rango, en números reales), busque que cada elemento en el dominio tiene exactamente un elemento en el rango que le corresponde (p.1).

Mencionan que los estudiantes no logran distinguir los dos contextos, porque el problema está "en el hecho de que muchos enfoques para enseñar trigonometría, como el enfoque del triángulo rectángulo, enfatizan principalmente las habilidades procedimentales y tales enfoques no permiten que los estudiantes entiendan el seno y el coseno como una función" (Maknun et.al. 2019, p. 2). Al igual que Montiel (2013), consideran importante vincular la geometría con la trigonometría. Por lo cual, proponen un diseño didáctico que "a partir de la definición de trigonometría como proporciones de triángulos rectángulos, los estudiantes construyen numerosos triángulos rectángulos que se convierten en un círculo que los lleva a la nueva definición de trigonometría y los introduce en el círculo unitario” (Maknun et.al., 2019, p. 3) (véase figura 2.9).

Figura 2.9

Visión general del diseño



Retomado de: Maknun, Rosjanuardi y Jupri (2019)

Capítulo 3. Metodología

La investigación se realizó en cuatro tiempos: el primero fue una reflexión que realizó la docente de su propia práctica antes de incorporarse al proceso de formación para la investigación, los otros tres tiempos se denominaron: ciclo indagatorio, ciclo indagatorio-investigativo y ciclo investigativo.

El primer tiempo se desarrolló cuando la docente se incorporó a su formación para la investigación, realizó un análisis de los instrumentos que había aplicado al principio del ciclo escolar en la escuela secundaria, partió del diseño, su aplicación y los resultados obtenidos, lo cual, le posibilitó cuestionarse por qué, para qué, cómo y con qué propósito planteaba sus instrumentos en el aula, así mismo lograra identificar sus áreas de oportunidad.

El desarrollo de los tres ciclos estuvo ligada a los ciclos escolares de la secundaria, el ciclo indagatorio se llevó a cabo en el periodo escolar 2018-2019, el indagatorio-investigativo en el 2019-2020 y el ciclo investigativo en el 2020-2021. En el periodo del 2019-2020 se presentó la pandemia, (se encuentra marcada con color naranja en el esquema), se suspendieron las clases presenciales, se tuvieron otros escenarios y otras condiciones, lo cual, modificó el diseño de la investigación, porque para los tres se tenía contemplada una estructura semejante con tres fases: diagnóstico, desarrollo en el aula y valoración, pero solamente en el primer ciclo se llevaron completamente las tres, en el indagatorio investigativo faltó la valoración y en el ciclo investigativo el diagnóstico.

En cada ciclo se atendió un grupo de tercer grado distinto, cada uno de ellos con características específicas. El grupo del periodo del 2018-2019 llegó con muchos contenidos curriculares consolidados, a la mayoría le gustaba la asignatura y tenían disposición a realizar las actividades propuestas por la docente. El grupo del periodo 2019-2020 en comparación con el grupo pasado presentó poco dominio de los contenidos básicos para ingresar a tercero, la mayoría de los alumnos presentaban promedio de 6 en segundo grado y algunos rechazaban la asignatura. El grupo del ciclo escolar 2020-2021 presentó características diferentes respecto a los demás, puesto que, la modalidad fue a distancia, dicha modalidad dejó entrever las desigualdades tanto económicas como sociales que presentan los alumnos en sus familias, el grupo se dividió en tres subgrupos, 1) aquellos alumnos que se conectaban siempre a las sesiones virtuales y entregaban todas sus actividades en la plataforma utilizada, 2) los que regularmente se conectaban y entregaban esporádicamente actividades y 3) con los que no se logró establecer un contacto con ellos debido a las distintas problemáticas económicas y/o sociales que presentaban.

Para cada una de las fases de los ciclos se diseñaron instrumentos y técnicas de recopilación de datos, en el esquema de la figura 3.1 (el esquema también se puede consultar en el apéndice 0) se encuentran dichos instrumentos en una franja amarilla, la cual representa el aula presencial, otro instrumento se encuentra en un recuadro gris que es un escenario virtual y el resto de los instrumentos están en la franja azul que es el aula virtual.

Entre cada uno de los ciclos hubo un periodo de transición, es decir, los resultados obtenidos del ciclo anterior inmediato delineaban el diseño del siguiente.

Figura 3.1

Metodología general de la investigación

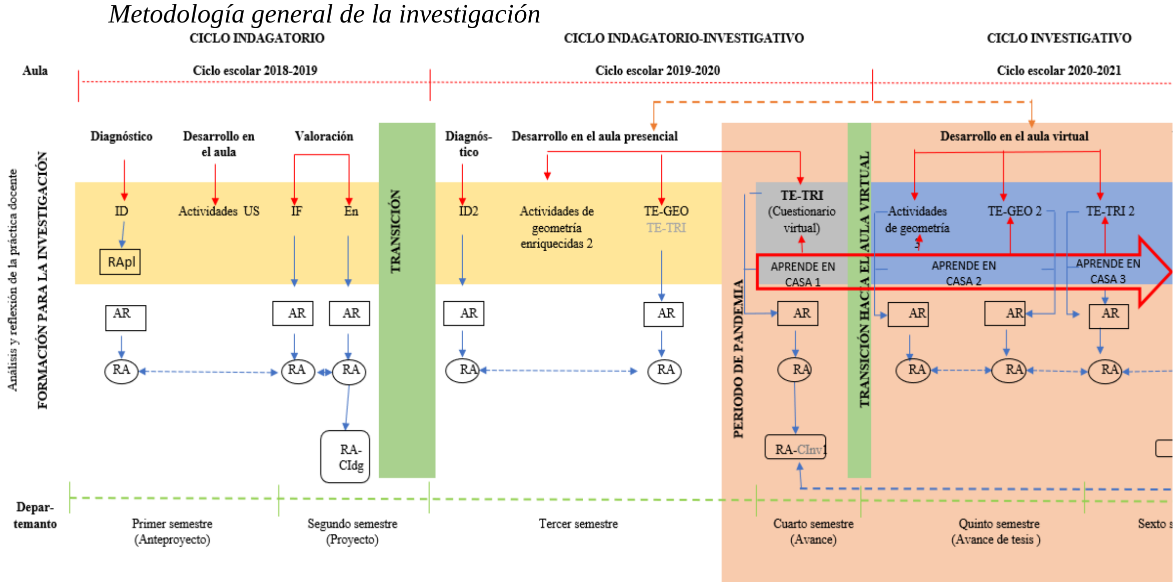


Figura 1. Metodología de la investigación
Código: CI: Ciclo indagatorio, ID: cuestionario diagnóstico, IF: cuestionario final, En: Entrevistas, AR: Análisis de resultados, RA: Resultados del análisis, CI2: Ciclo investigativo, ID: cuestionario diagnóstico, IF: cuestionario final, En: Entrevistas,
AR: Análisis de resultados, RA: Resultados del análisis
Significado de colores:
Amarillo: aula presencial
Azul aula virtual
Verde periodos de transición

A continuación, se detalla cómo el profesor hizo la primera reflexión de su práctica, cómo se diseñaron y en qué condiciones se aplicaron los instrumentos y técnicas utilizados en las fases de los ciclos.

3.1. Reflexión de la práctica docente antes de la formación para la investigación

Antes de comenzar la formación en la investigación en el departamento de Matemática Educativa, la docente ya había comenzado el ciclo escolar en la escuela secundaria, las primeras dos semanas fueron destinadas a la aplicación de los instrumentos diagnósticos que cada docente consideró adecuados para conocer las condiciones de su grupo y comenzar a planificar las actividades con los contenidos específicos de la asignatura.

Debido a la extensión del documento de diagnóstico y el de planificación realizados por la docente solamente se centró la atención en los instrumentos que aplicó. Aplicó dos: el primero fue un cuestionario relacionado con las Inteligencias Múltiples (véase anexo 1) que tenía como propósito recuperar información sobre las diferentes inteligencias de los alumnos, el segundo instrumento fue otro cuestionario para los conocimientos previos de contenidos matemáticos de primero y segundo grado, específicamente de aritmética y álgebra (véase anexo 2).

El instrumento de inteligencias múltiples basado en lo que propone Howard Gardner, constó de 10 enunciados por cada inteligencia: lingüística, lógico-matemática, musical, cinestésica-corporal, espacial, interpersonal, intrapersonal y naturalista, los alumnos leían los enunciados y ponderaban entre 0 y 5 de acuerdo con la frecuencia con la que ellos realizaban o les gustaba realizar diversas acciones, cero fue que nunca realizaban la actividad y 5 fue equivalente a siempre. Para obtener los resultados del instrumento, se realizó la sumatoria de los valores de cada inteligencia, se compararon y se determinó cuáles de las ocho inteligencias fueron las que predominaban en cada alumno.

El cuestionario de conocimientos previos constó de 11 reactivos relacionados con aritmética y álgebra. Los contenidos matemáticos puestos en juego fueron: utilización de números enteros, multiplicación de expresiones algebraicas, resolución de ecuaciones de primer grado, sistemas de ecuaciones, productos y cocientes de potencias, jerarquía de operaciones, tabulación y graficación de ecuaciones de primer grado.

Para el análisis del cuestionario de inteligencias múltiples solamente se consideró la inteligencia lógica-matemática, se formularon preguntas de análisis para cada uno de los 10 enunciados de dicha inteligencia con el propósito de identificar el alcance del instrumento y posteriormente buscar la relación de los enunciados con lo que se propone en el Programa de matemáticas 2011 de Secundaria (Véase anexo 3), posteriormente se realizó una contrastación de ambos instrumentos.

Se hizo una revisión teórica sobre lo que propone Howard Gardner sobre inteligencia e inteligencia lógico-matemática y se comparó con lo que propone Piaget sobre inteligencia para determinar en qué sentido estaba planteado el instrumento que se había aplicado a los alumnos.

3.2. Ciclo indagatorio

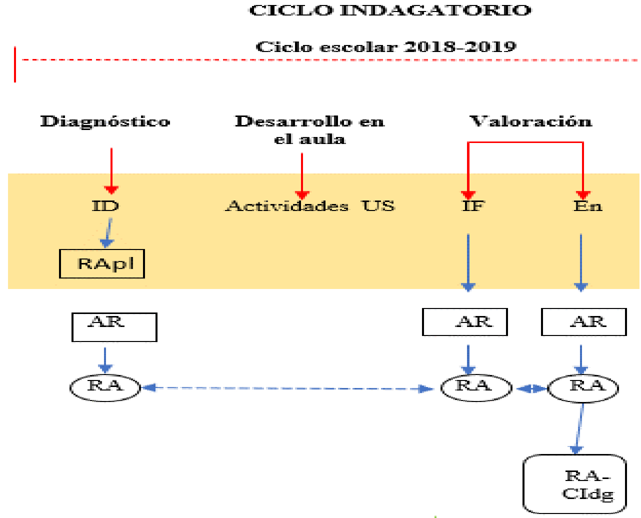
Una vez que la docente reconoció el alcance de los instrumentos aplicados al principio del ciclo escolar se comenzó con el diseño del ciclo indagatorio en el periodo escolar 2018-2019 con un grupo de 37 alumnos de tercer grado.

Los propósitos del ciclo fueron: identificar las condiciones de conocimiento adquirido por parte de los alumnos que ingresan a tercer grado de secundaria, cómo tratan con los conceptos básicos de geometría en condiciones institucionales e identificar los contenidos de geometría que posibilitan la transición a los conceptos básicos de trigonometría.

La indagación se realizó en tres fases: diagnóstico, desarrollo en el aula y valoración. Para la fase de diagnóstico se diseñó un cuestionario (ID), para el desarrollo en el aula se diseñaron actividades con conceptos de geometría (Act. 1) y al finalizar las actividades se planteó una última sesión (US) que abarcó los contenidos tratados durante todo el desarrollo en el aula, la cual fue videograbada, y, para la fase de valoración se tuvo un cuestionario final (IF) y dos entrevistas semiestructuradas (En). Todos los instrumentos y técnicas fueron aplicados en un aula presencial, los resultados de la aplicación se analizaron (AR) y se obtuvieron los resultados del análisis (RA) y a partir de ello se obtuvieron los resultados de todo el ciclo (RA-Idg) (Véase figura 3.2).

Figura 3.2

Metodología del ciclo indagatorio



3.2.1. Diagnóstico

Antes de comenzar el diagnóstico se analizó el Programa de Estudios (SEP, 2011), solamente se centró la atención en el eje de Forma, espacio y medida. Los contenidos de los tres grados de secundaria se separaron en los dos temas que se señalan en el documento: Figuras y cuerpos y Medida, este acomodo facilitó la identificación de los contenidos básicos de geometría y la forma en la que se encuentran distribuidos a lo largo de los tres grados escolares. Se identificaron aquellos contenidos que tenían relación entre sí, no importaba si se encontraban en primer grado o hasta tercero porque se conjuntaron en <u>contenidos nodales.</u> Para cada grado se identificó un grupo de contenidos que eran los pilares para el desarrollo de los demás (véase tabla 3.1).

Tabla 3.1

Contenidos nodales del eje de Forma, espacio y medida de los tres grados

Grado	**Contenidos nodales del programa**	
1°	• Triángulos y cuadriláteros • Líneas notables de un triángulo.	• Polígonos regulares • Círculos
2°	• Ángulos • Paralelas • Suma de los ángulos interiores	• Figuras simétricas • Triángulos isósceles y equiláteros, rombos, cuadrados y rectángulos
3°	• Figuras congruentes o semejantes • Teorema de Tales. • Teorema de Pitágoras • Razones trigonométricas	• Figuras homotéticas. • Cuerpos que se generan al girar sobre un eje

A partir de la tabla 3.1, se diseñó la tabla 3.2, los contenidos nodales identificados en el programa de estudio se organizaron de tal forma que se partiera de las nociones más simples hasta nociones más elaboradas como son el teorema de Tales y teorema de Pitágoras que se tratan en tercer grado. Se identificó que los contenidos de recta, semirrecta, segmento de recta y ángulos no se encuentran presentes de forma explícita en el Programa de estudios, puesto que, se da por hecho que se han tratado en la primaria y por tal razón, se comienza en primer grado de secundaria a tratar directamente con triángulos y cuadriláteros. Sin embargo, nosotros necesitábamos conocer qué nociones tienen los alumnos sobre estos conceptos.

En la tabla 3.2 se encuentra en la primera columna los contenidos programáticos, en la segunda, los grados en los que se tratan y la tercera lo que se quiere observar (Q/O).

Tabla 3.2.

Lo que se quiere observar de cada concepto básico de geometría

Conceptos básicos marcados en el Programa de Estudios (SEP, 2011)	Grados	Lo que se quiere observar (Q/O)
Comparación de segmentos (no está explícito en el programa de estudios)		Ante la presentación visual de una concatenación de segmentos cómo comparan la longitud de los segmentos.
Operación de segmentos (no está explícito en el programa de estudios)		Ante la presentación figural de tres segmentos de recta cómo proceden los alumnos a hacer la adición entre ellos.
Ángulos congruentes (no está explícito en el programa de estudios)		Ante la presentación visual de tres ángulos congruentes en distintas posiciones y con longitud de semirrectas variadas, cómo comparan los ángulos.
Ángulos complementarios y suplementarios	2°	Ante la presentación visual de un ángulo recto cómo lo conciben y qué noción tienen de los ángulos que forman un ángulo recto.
Clasificación de ángulos	1°	Ante la presentación visual de cuatro ángulos diferenciados por sus grados cómo los nombran según su clase.
Clasificación de triángulos por lados	1° y 2°	Ante la presentación visual de tres triángulos cómo los nombran según su clase por lados.
No está presente de manera explícita la clasificación de triángulos según sus ángulos en el Programa de Estudios (SEP, 2011)		Ante la presentación visual de tres triángulos cómo los nombran según su clase por ángulos.
Líneas notables en los triángulos	1°	Ante la presentación visual de dos triángulos qué noción de altura tienen.
Ángulos interiores de un polígono	2°	A partir de dos cuadrados congruentes cómo descomponen uno de ellos para formar un triángulo y conocer la noción qué tienen de los ángulos internos tanto de un cuadrado como de un triángulo.
Polígonos regulares y polígonos irregulares	1° y 2°	Ante la presentación figural de 3 polígonos regulares y dos irregulares saber si los identifican.
Ángulos centrales	1°	Ante la presentación gráfica de dos polígonos regulares saber qué nociones tienen de ángulo central y su medida.
Perímetro de figuras abiertas y cerradas	1°	
Tratamiento del círculo	1°	Ante la presentación de cinco circunferencias saber si asocian los segmentos y rectas característicos de la circunferencia con la figura circular.
Área de polígonos	1° y 2°	
Teorema de Tales	3°	Ante la presentación visual de triángulos semejantes entre paralelas saber si identifican los triángulos semejantes.
Teorema de Pitágoras	3°	Ante la presentación visual de tres cuadrados distintos saber qué noción de unidad tienen y cómo la tratan cuando realizan una adición de áreas.

Los Q/O (qué observar) fueron la guía para el diseño del instrumento diagnóstico (ID) (véase apéndice A1) se diseñó un reactivo para cada uno. Los propósitos del cuestionario fueron dos: identificar que conocimientos adquiridos tenían los alumnos de los ciclos escolares pasados e identificar cómo trataban las nociones básicas de geometría a partir de la relación entre los elementos de la figura presentada, por lo cual, los reactivos constaron de una figura limpia, es decir, sin números.

Después de la aplicación del instrumento diagnóstico se realizó la tabla de concentración, que muestra de manera rápida los resultados obtenidos. Las respuestas de los alumnos fueron tan diversas que la tabla de concentración fue insuficiente para identificar cuáles eran los conocimientos adquiridos de los alumnos respecto a las nociones de geometría. Por lo cual, fue necesario interpretar los resultados obtenidos

Posteriormente, se realizó una tabla, se agruparon las respuestas de los alumnos que tenían características comunes para cada uno de los 14 reactivos y se comenzaron a analizar los resultados con las caracterizaciones identificadas. Las respuestas de cada reactivo se dividieron en subgrupos, cada subgrupo está relacionado con respuestas que poseen características en común, de cada uno de ellos se realizó una interpretación. La información se organizó de acuerdo con los subgrupos correspondientes a las caracterizaciones. Y se comenzó a analizar cada una de las caracterizaciones del reactivo, identificando qué información está directamente relacionada con el marco teórico y qué está relacionada con la enseñanza previa.

3.2.2. Desarrollo en el aula

Para el desarrollo en el aula se tuvo en cuenta los resultados del cuestionario diagnóstico, los contenidos del Programa de Estudios (SEP, 2011) y tres aspectos importantes de cómo se proponen los conceptos de geometría en el Programa:

1. Se da por supuesto que los alumnos poseen los conocimientos básicos de segmentos de recta, ángulos, triángulos, polígonos, diferencias entre círculo y circunferencia, porque son contenidos que en cierta forma fueron tratados en

primaria. Por lo cual no existen contenidos específicos para tratar de manera particular esos conceptos, sino que ya están vinculados con otros.

2. Los contenidos de geometría están relacionados con la medida, por lo cual, no se pone énfasis a lo figural.

3. Los contenidos están orientados a la resolución de problemas de manera inmediata

Estos tres aspectos tienen relación con el ejercicio propio de la enseñanza, ya que, depende del docente la incorporación de aquellos elementos básicos que no se encuentran explícitos en el Programa de Estudios (SEP, 2011) o de aquellos que los alumnos no dominen, él decide qué elementos conceptuales y qué estrategias pone en juego para desarrollar cada uno de los contenidos programáticos.

Para consolidar los conceptos básicos de geometría es necesario una orientación conceptual diferente, en donde se respeten los contenidos programáticos, pero a éstos se incorporen los elementos básicos que se dan por supuesto que los estudiantes ya poseen, para que poco a poco a un concepto seminal, se le van incorporando nuevos elementos que posibiliten el desarrollo de conceptos más elaborados.

3.2.2.1. Actividades de geometría

Para las actividades de geometría se recuperó el análisis hecho del Programa de Estudios (SEP, 2011) y se propusieron los conceptos básicos de geometría con sus respectivas secuencias (véase tabla 3.3).

Tabla 3.3

Secuencias para los conceptos básicos de geometría

Conceptos geométricos	Secuencias
Recta, semirrecta, segmento de recta	Diferenciación entre recta, semirrecta, segmentos de recta Operación con segmentos (adición, sustracción, multiplicación y división) Diferenciación entre rectas o segmentos paralelas y perpendiculares y división de segmentos Uso de escuadras para el trazo de segmentos paralelos y perpendiculares.
Ángulos	Construcción de un ángulo a partir de dos semirrectas Elementos del ángulo Clasificación de los ángulos de acuerdo con su amplitud Identificación de ángulos congruentes entre paralelas cortadas por una transversal
Triángulos	Elementos de un triángulo Construcción de triángulos a partir de sus lados o sus ángulos Clasificación de triángulos por lados y ángulos Teorema de la suma de los ángulos interiores de un triángulo
Polígonos	Cuadriláteros formados con distintos tipos de triángulos Diagonales en los cuadriláteros

	Suma de los ángulos interiores en los cuadriláteros Identificación de polígonos regulares e irregulares Diagonales a partir de un vértice de polígonos regulares e irregulares Suma de los ángulos internos de un polígono regular e irregular
Circunferencia	Diferenciación entre circunferencia y círculo Características de las líneas notables de la circunferencia y su relación con los elementos de la misma Explicitación del número pi con el uso de material concreto. Medición de la circunferencia tomando como unidad de medida el diámetro Número pi como una constante infinita Noción de semejanza entre circunferencias
Teorema de Tales	Comparación de figuras congruentes y semejantes Comparación entre segmentos Razones y proporciones Triángulos semejantes
Teorema de Pitágoras	Unidades arbitrarias de medida para la longitud y el área. Relaciones entre las áreas de 3 cuadrados que pertenecen a la primera terna pitagórica Deducción del enunciado del teorema de Pitágoras Longitud de los lados del triángulo a partir de unidades de medida

En total fueron 20 actividades las que se llevaron a cabo con el grupo de alumnos en el horario estipulado para el profesor por parte de la institución. Se realizó una planificación en la que se detallaron la temporalidad, los espacios y los medios utilizados para el desarrollo de las actividades. La docente en las actividades presentaba figuras sin medidas, organizó a los alumnos a partir de los resultados del cuestionario diagnóstico en grupos de trabajo, algunas actividades se desarrollaron de manera individual.

3.2.2.2. Última sesión

Para recuperar toda la información sobre las 20 actividades relacionadas con los conceptos básicos de geometría se diseñó la última sesión en tres momentos, el primero estaba relacionado con segmentos de recta, paralelas, perpendiculares, ángulos suplementarios, complementarios, aplicados a la obtención de las medidas de ángulos; el segundo momento tuvo relación con el Teorema de Tales y el último momento con el Teorema de Pitágoras. Cabe mencionar que cada momento recuperaba los datos obtenidos del momento anterior.

Para los tres momentos se diseñaron tres hojas de control (véase apéndice A2), se tomó la misma figura geométrica, de la cual los alumnos iban complementando la información a medida que avanzaban en cada uno de los momentos, los objetivos para cada hoja de control fueron los siguientes:

*Primera hoja: Calcular los ángulos dada una tangente y el valor de un ángulo.
*Segunda hoja: Utilizar el teorema de Tales para calcular el lado de uno de los triángulos
*Tercera hoja: Utilizar el teorema de Pitágoras para calcular el lado faltante de los triángulos de la figura de la hoja.

En esta última sesión se realizó una videograbación para recuperar la información sobre lo que estaban desarrollando los alumnos. Se tuvieron dos cámaras: una fija y una ambulante. La fija registró las actividades de una mesa de trabajo, mientras los alumnos desarrollaban las actividades y establecían comunicación entre ellos. Y la cámara ambulante iba siguiendo a la docente mientras él realizaba preguntas relacionadas con las actividades en cada una de las mesas de trabajo. Se realizó una planificación corta en donde se especificaban las acciones de la docente y de los alumnos por tiempos bien delimitados para que las personas que estaban utilizando las cámaras supieran las actividades en todo momento.

Una vez realizadas las video-grabaciones el análisis de los datos obtenidos fue de la siguiente manera: se recuperó la grabación de la cámara ambulante y se editó el video para separarlo por mesas y por momentos, es decir, cada mesa de trabajo tuvo un video que se dividió en los tres momentos. Posteriormente, se realizó la transcripción del video de cada una de las mesas y se identificaron a los alumnos con mayores intervenciones. Se centró la atención en dos alumnos de una mesa puesto que eran los que recuperaban la información parecida a las otras mesas. Con estos alumnos identificados se realizó un ejercicio de confrontación de sus intervenciones en el video y las hojas de control de la sesión.

En el desarrollo de las actividades la docente registró sus observaciones para cada una de las sesiones en una bitácora, la cual estuvo dividida en dos columnas, la primera columna destinada a la descripción de los aspectos que la docente consideró importantes y en la segunda se colocaron conclusiones, cosas que tenían que modificarse por presentar dificultades y algunas relaciones que se establecían con la teoría revisada.

3.2.3. Valoración

Para la valoración del ciclo indagatorio se aplicó un instrumento final y se hicieron dos entrevistas.

3.2.3.1. Instrumento final

Como parte de la valoración se realizó un instrumento final (véase apéndice A3), cuyo objetivo fue valorar la consolidación de los conocimientos básicos de geometría, así como validar lo sucedido en las actividades propuestas en clase. Se centró la atención en la forma en la que los alumnos desarrollan los conceptos, si los tienen consolidados o siguen presentando las mismas dificultades que se identificaron en el cuestionario diagnóstico, si centran su atención a lo figural o siguen recurriendo a la medida al momento de tratar figuras, y la forma de expresarse para explicar cómo resuelven los reactivos.

El análisis de los resultados del cuestionario final estuvo enfocado en el propósito que se planteó para cada uno de los reactivos conforme a los conceptos matemáticos puestos en juego. También se agruparon las respuestas de los alumnos para cada reactivo y se identificaron que muchas de esas agrupaciones fueron similares a las del cuestionario diagnóstico, sin embargo, no se obtuvieron muchas agrupaciones por reactivo, además el número de alumnos que contestaba de manera correcta aumentó y el cuestionario posibilitó que los alumnos proporcionaran sus explicaciones de cómo habían resuelto cada uno de los reactivos.

Los cuestionarios diagnóstico y final presentan diferencias sustanciales que se observan en la tabla 3.4

Tabla 3.4

Comparativa general de los dos instrumentos

	ID	IF
Objetivo	Identificar qué nociones tienen los alumnos respecto a los conceptos puestos en juego	Validar la consolidación de los conceptos puestos en juego
Diseño	14 reactivos Cada reactivo abarcaba una noción básica No se solicita explicación ni justificación	9 reactivos Un reactivo recupera varias nociones conceptuales Se les solicita explicación o justificación
Criterios de análisis	*Lo que se quería observar para cada noción conceptual *Interpretación de las respuestas escritas y acciones realizadas de los alumnos *Cómo están presentes las ideas fundamentales de medida *Cómo estaban presentes los niveles de Van Hiele y Tall (2018)	Propósito relacionado con el concepto puesto en juego

3.2.3.2. Entrevista

Por último, se realizaron dos entrevistas semiestructuradas, el objetivo fue verificar si los alumnos tenían la madurez o no para llegar en buenas condiciones a los conceptos de trigonometría, en las entrevistas se identificó qué conceptos o nociones previas fueron las que tenían los alumnos. Se eligieron a dos alumnos, y se confrontaron sus resultados desde el principio de la experiencia (cuestionario diagnóstico, final y las hojas de control de la última sesión). Se tomó como eje las hojas de control de la última sesión y se diseñó un guion de entrevista (véase apéndice A4) para evitar que la entrevista se desviara.

De las hojas de control se desprendieron preguntas relacionadas con los tipos de ángulos, triángulos, las características de los triángulos congruentes y semejantes, la utilización del teorema de Tales y de Pitágoras, cada entrevista se realizó en 50 minutos con dos cámaras que tomaran el registro de video.

Para el análisis de la entrevista se realizó la transcripción de cada una de las entrevistas, se identificaron los tres momentos y los elementos sustanciales que dieran cuenta si los alumnos tenían los conocimientos necesarios para transitar sin dificultad a los conceptos de trigonometría.

Una vez que se terminó el ciclo y se obtuvieron los resultados se delimitaron los cinco conceptos geométricos de transición a la trigonometría y se esbozaron preguntas y objetivos para la investigación.

3.3. Ciclo indagatorio-investigativo

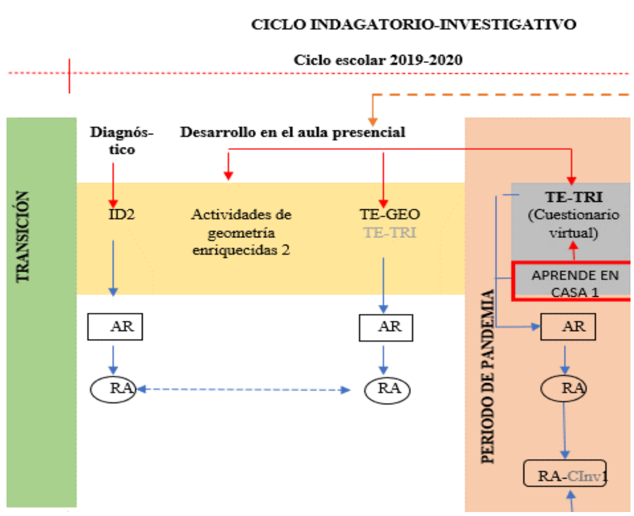
El ciclo indagatorio-investigativo se llevó a cabo en el periodo escolar 2019-2020 con un grupo de 32 alumnos de tercer grado. Los propósitos de este ciclo fueron: poner en juego las preguntas y objetivos de la investigación, tratar los contenidos más elaborados de geometría y también los contenidos básicos de trigonometría.

A partir de los resultados del ciclo indagatorio se decidió realizar un Acuerdo Académico Colegiado (Anexo 4) entre la Escuela Secundaria Diurna No. 4 “Moisés Sáenz” y el área de "Ciencias de la Cognición y Tecnología de la Información Aplicadas" del departamento de Matemática Educativa del Cinvestav para el desarrollo de un seminario, cuyo objetivo fue: Analizar e investigar problemas relacionados con la Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas identificados por los profesores de la secundaria, mediante el desarrollo de proyectos de investigación educativa.

Este ciclo se realizó en dos fases: diagnóstico y desarrollo en el aula. Para el diagnóstico se diseñó un cuestionario (ID2), para el desarrollo en el aula se diseñaron actividades con conceptos de geometría (Act. 2) y dos trayectorias de enseñanza (TE); una para los contenidos de geometría (TE-Geo1) y otro para los de trigonometría (TE-Tri1) (véase figura 3.3)."*La trayectoria de enseñanza* (TE) es una unidad de contenido matemático diseñada en secuencias (S#), con el propósito de comunicar tal contenido a estudiantes" (Garnica, I. Chávez H., y Ojeda A. 2017, p. 218). Los autores mencionan que la trayectoria de enseñanza no está enfocada al aprendizaje sino a la experiencia de enseñanza en el aula, porque su efecto comunicativo se puede identificar en los resultados de los mismos alumnos.

Figura 3.3

Metodología del ciclo indagatorio-investigativo



Debido a la pandemia se suspendieron las clases a finales del ciclo escolar en la institución, y solamente se aplicaron en el aula presencial (marcada con un recuadro amarillo) el cuestionario diagnóstico, las actividades de geometría y la trayectoria de enseñanza de geometría. La trayectoria de enseñanza de trigonometría ya se había diseñado, pero se tuvo que ajustar a los nuevos escenarios (marcado con un recuadro gris) mediante un cuestionario virtual, también por esta razón este ciclo no contó con la fase de valoración.

3.3.1. Diagnóstico

Para la fase de diagnóstico se diseñó un cuestionario que a diferencia del cuestionario del ciclo indagatorio que abarcaba solamente el eje de Forma, espacio y medida, éste se realizó con los contenidos de los tres ejes que marca el Programa de Estudios (SEP, 2011): Sentido numérico y pensamiento algebraico, Forma, espacio y medida y manejo de la información. De cada uno de los ejes se tomaron los conceptos clave enfocados en el tratamiento de los conceptos básicos identificados en el ciclo indagatorio (Véase apéndice B1).

3.3.2. Desarrollo en el aula

Para el desarrollo en el aula se diseñaron actividades de geometría y dos trayectorias de enseñanza, una para tratar los conceptos de transición de la geometría y otra para los conceptos mínimos de trigonometría.

3.3.2.1. Actividades de geometría 2 (Act. 2)

A partir de los resultados del cuestionario diagnóstico fue necesario implementar actividades con los elementos de la geometría, realizamos la segunda reducción de la abstracción, se tomaron en cuenta los libros de Euclides. El libro1 se analizó completamente y se identificó que los teoremas corresponden a los contenidos de geometría correspondientes a la secundaria. El análisis del libro se hizo a partir del teorema 47 y 48, correspondientes al teorema de Pitágoras y su recíproco, identificamos los teoremas que se utilizan en la demostración e identificamos una ruta de teoremas, la cual posibilitó considerar los teoremas más simples hasta el teorema 47.

Se identificaron 19 teoremas fundamentales con los que se puede desarrollar el teorema 47 y a partir de ellos se realizó una confrontación con el Programa de Estudios (SEP, 2011), lo cual indica que los teoremas del primer libro de Euclides están presentes en la educación primaria y secundaria, el teorema 47 que corresponde al teorema de Pitágoras junto con el teorema de Tales y las razones trigonométricas se encuentran al final de tercer grado de secundaria.

Posterior a la confrontación de los teoremas con los contenidos curriculares se trazaron tres rutas de enseñanza: áreas, congruencia y semejanza y los teoremas de regla y compás. A la última se le puso mayor énfasis para posteriormente pasar a los cinco contenidos de transición. Posteriormente se realizó la conexión entre el libro 1 y los teoremas revisados de los libros II, V, VI, X de Euclides. (véase tabla 3.5)

Tabla 3.5

Rutas de enseñanza

	Área	Congruencia y semejanza	Regla y compás
Teoremas	T.I.34 (D)	T.I.27 (D)	T.I.1. (C)
	T.I.35 (D)	T.I.29 (D)	T.I.2 (C)
	T.I.41 (D)	T.I.4 (D)	T.I.11 (C)
	T.I.47 (D)	T.I.8 (D)	T.I.22 (C)
	T.I.48 (D)		T.I.23 (C)
			T.I.31 (C)
			T.I.46 (C)

Nota: T: Teorema, I: Primer libro de Euclides, D: Teorema de demostración y C: Teorema de construcción

Se realizó un diseño para llevar a cabo los contenidos del primer libro de Euclides, para ello se realizó una planificación con los tiempos específicos y la forma de trabajo y las hojas de control (véase apéndice B2).

En esta fase la docente le dio el primer giro a su práctica, puesto que, ya conocía cómo los alumnos trataban con los conceptos básicos, las dificultades que presentaban y cómo ponía en juego las ideas fundamentales de medida, con dicha información modificó el tratamiento de la geometría y le dio especial énfasis a la figura y a las relaciones entre sus elementos, de la misma forma identificó las intuiciones que los alumnos manifestaban en las actividades y poco a poco incorporó nuevos elementos que le posibilitara a los alumnos seguir construyendo los conceptos mediante su pensamiento intuitivo.

3.3.2.2. Trayectoria de enseñanza de geometría

Solamente se logró aplicar en el aula la trayectoria de enseñanza de Geometría con los tres conceptos clave: Números irracionales (raíz de dos y pi), teorema de Tales y teorema de Pitágoras. Se eligió un equipo de trabajo para realizar un monitoreo detallado, en una sesión se grabó audio para identificar qué conceptos ponían en juego cuando trataban con los conceptos clave.

Debido a la pandemia la SEP suspendió las clases presenciales inicialmente a partir del viernes 20 de marzo hasta el 20 de abril como medida preventiva ante el virus SARS-Cov2, ante tal situación la SEP realizó la propuesta de Aprende en casa por TV, la cual consistió en la transmisión por televisión de contenidos de educación básica basados en los planes y programas de estudios vigentes, por esta razón, la Trayectoria de Enseñanza de Trigonometría no se realizó con los alumnos de forma presencial y hubo un cambio de escenarios, las clases fueron televisadas y comenzaron a partir del lunes 23 de marzo y se previó que concluyeran para el día 17 de abril. Las decisiones que se tomaron a nivel escuela a partir de lo que estableció la SEP fueron: uso del blog escolar como medio de comunicación con alumnos y padres de familia, publicación de las preguntas más importantes de las sesiones de Aprende en casa para cada una de las asignaturas. Sin embargo, el periodo de confinamiento se alargó y las clases televisadas de Aprende en casa se extendieron hasta finalizar el ciclo escolar. Una vez terminado el ciclo escolar, se tomó la decisión a nivel escuela de apoyar a los alumnos de tercero para el examen de ingreso a nivel medio superior con pequeños cuestionarios que contuvieran información y preguntas de los temas en los que más dificultades se tenía o no se habían tratado con profundidad. Por academias se organizaron los cuestionarios y particularmente nosotros enviamos uno relacionado con temas de trigonometría. El cuestionario tuvo explicación y seis preguntas, en cada una se les solicitó justificación de su respuesta. Recuperó las últimas actividades de geometría desarrolladas con los alumnos de manera presencial, se retomaron los elementos del triángulo rectángulo, las relaciones entre los lados de un triángulo rectángulo y posteriormente se trataron las razones de seno y coseno. Para los dos últimos contenidos se tomó como base lo que se había diseñado para la trayectoria de trigonometría (véase apéndice B3) y se modificó de acuerdo con las condiciones de los alumnos y las características dadas para la elaboración del cuestionario por parte de la dirección.

3.4. Ciclo investigativo

Una vez terminado el ciclo escolar 2019-2020 la SEP tuvo como reto el comienzo del siguiente ciclo y una de sus prioridades fue seguir transmitiendo contenidos y garantizar que los profesores tuvieran un contacto más directo con los alumnos, para ello generó un convenio de colaboración con Google for Education, a partir de eso, se puso a disposición de los docentes y alumnos el conjunto de herramientas de Google, entre ellas correo electrónico institucional con capacidad ilimitada de almacenamiento en la nube, Classroom, Meet, también cursos y capacitación para los docentes. Posteriormente, la SEP informó que se había realizado un convenio con las televisoras para la transmisión de contenido educativo en todo el territorio nacional, anunció que las tres primeras semanas del ciclo escolar se retransmitiría Aprende en casa 1 para que se tuviera tiempo de grabar las nuevas sesiones tomando en cuenta a docentes del país para que dirigieran las clases televisadas.

Antes de comenzar el ciclo escolar los docentes tomaron un Taller intensivo de capacitación donde hicieron uso de la plataforma Classroom para irse familiarizando con ella y se llevó a cabo la junta con el Consejo Técnico Escolar en su fase intensiva para decidir las acciones que se iban a tomar para el inicio del siguiente ciclo escolar, se decidió de manera colegiada lo siguiente:

* Las tres primeras semanas del ciclo escolar fueran destinadas al desarrollo de actividades en Classroom para fortalecer las habilidades del pensamiento según cada asignatura

* Tomar las clases televisadas como eje rector de la práctica docente a partir del 14 de septiembre (inicio de Aprende en casa 2)

*Utilización del correo electrónico institucional por parte de los docentes

*Creación de un correo electrónico con ciertas características por parte de los alumnos

*Utilización del blog escolar para la comunicación exclusivamente con padres de familia

*Utilización de la Plataforma Classroom para la comunicación entre docentes y alumnos, así como desarrollo de actividades de aprendizaje

*Utilización de la plataforma Meet una hora a la semana para enriquecer el tema visto en las clases televisadas y/o resolver dudas de los alumnos

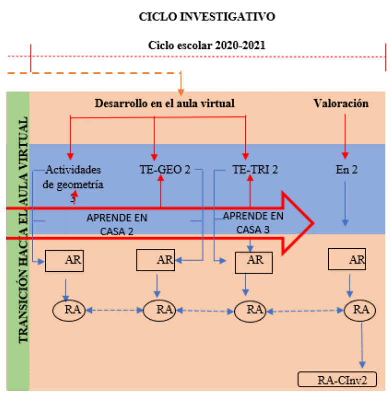
*Elaboración de cuadernillos por grado para los alumnos que no contaran con tecnología

El ciclo escolar 2020-2021 comenzó el 24 de agosto de manera remota con el desarrollo de actividades enfocadas al fortalecimiento de habilidades básicas del pensamiento a través de la plataforma de Classroom, estas actividades posibilitaron que los alumnos se familiarizaran con dicha plataforma, la forma de entrega y la revisión de sus actividades (Véase apéndice C1). Dichas actividades tuvieron las ideas del RAiT, de cada eje temático del Programa de Estudios se tomó un contenido seminal y se fueron enriqueciendo a lo largo de las tres semanas. El día 14 de septiembre los docentes y los alumnos comenzaron con la visualización de Aprende en casa 2, a partir de las clases televisadas los profesores diseñaron actividades relacionadas con los contenidos que se abarcaban en ellas. Sin embargo, los alumnos presentaron muchas dudas y confusión, por tal motivo, se organizaron reuniones virtuales con los alumnos una vez a la semana, para ampliar, fortalecer y resolver las dudas presentadas con los contenidos tratados en las transmisiones (Véase figura 5). En la tercera semana ya no se siguió dicho orden, lo cual favoreció que la docente continuara desarrollando actividades de geometría para los contenidos de congruencia, semejanza y transformaciones geométricas. Cabe mencionar que los tres pilares conceptuales del ciclo indagatorio están relacionados con el teorema de Tales, el teorema de Pitágoras y los números irracionales, por tal motivo se tomaron como objeto de análisis las clases televisadas en donde se trataron los contenidos de congruencia y semejanza. Dicho análisis está dividido en dos partes: la primera para los contenidos presentados a los estudiantes a través de las transmisiones televisivas y la segunda para las actividades que propone la docente en Classroom a partir de Aprende en casa 2.

En Aprende en casa tres se trataron dos contenidos de geometría: cuerpos geométricos y razones trigonométricas, son los contenidos finales del eje de forma espacio y medida en tercero de secundaria. Y las razones trigonométricas son el contenido de nuestro interés. Lo que realizamos al tratar dicho contenido, fue asignar algunas de las hojas de control de trigonometría (véase apéndice B3) (que ya se tenían diseñadas para el ciclo pasado) en la plataforma de Classroom, la siguiente semana después de que los alumnos trataran el contenido de las hojas se tuvo una sesión en la plataforma de Meet, para tratar el contenido en tiempo real, dicha sesión fue grabada. Posteriormente se les solicitó a 6 alumnos participar en un proyecto, en el cual se trataron las dos trayectorias de enseñanza: geometría y trigonometría y finalmente de los 6 alumnos se solicitaron 2 voluntarios para realizarles una entrevista, para dicha entrevista se realizó un guion (véase apéndice C2).

Figura 3.4

Metodología del ciclo investigativo



3.5. Análisis-interpretación de los resultados de cada ciclo

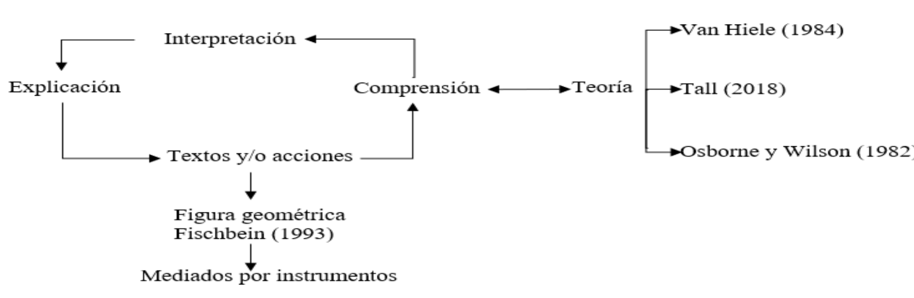
Uno de los propósitos que se tienen es identificar las formas en la que los alumnos tratan con los conceptos matemáticos, para ello los instrumentos fueron una mediación en donde los alumnos expresaron de forma escrita cómo trataban los conceptos matemáticos puestos en juego, en esos instrumentos se colocaban figuras conceptuales, es decir, realidades mentales, constructos manejados en el razonamiento matemático en el dominio de la geometría. Este constructo figural es controlado y manipulado, en principio sin residual, por reglas lógicas y procedimientos en el reino de un cierto sistema axiomático. (Fischbein, 1987, p. 148) y cuando los alumnos se enfrentaban a ellos lo expresaban de formas distintas y variadas, inclusive realizaban acciones observables, las cuales “por su carácter estructurado en conjuntos significantes, los sistemas simbólicos presentan una forma (textura) comparable a la de un texto” (p. 65), y

> Un texto es siempre más que una sucesión lineal de frases. Consiste en una totalidad estructurada que puede siempre ser construida de diversas maneras. y la acción representa una primera afinidad con el mundo de los signos en la medida en que ella misma está articulada por signos, reglas, normas, en síntesis, por significaciones. La acción es en líneas generales el hecho del hombre significante (p.64).

Por lo tanto, el docente es el encargado de interpretar tanto las acciones como las expresiones escritas, desde pequeños gestos o movimientos con sus manos hasta pequeñas marcas en las hojas, en este sentido pueden existir muchas interpretaciones, sin embargo, “la pluralidad de interpretaciones, incluso el conflicto de interpretaciones no constituye un defecto o un vicio, sino un atributo de la comprensión. En este sentido, se puede hablar de la polisemia textual, así como nos referimos a la polisemia léxica”(p.63).Bajo esta perspectiva fue necesario tratar los resultados de la siguiente forma, la primera es una explicación de lo que sucedió posterior a la aplicación de los instrumentos, para ello se realizaron tablas de concentración que brindaron solamente información cuantitativa de las respuestas correctas y las incorrectas, dicha información le servía al docente porque era la más inmediata y le posibilitaba tomar las decisiones sobre qué contenidos poner en juego en el aula, inclusive le servía para organizar los equipos de trabajo, sin embargo, era insuficiente para el propósito que se perseguía: identificar y comprender las formas en las que los alumnos tratan los conceptos, por lo tanto, se recurrió a tres marcos teóricos: niveles de pensamiento geométrico con la propuesta de Van Hiele, niveles de abstracción de Tall (2018) y el tratamiento de la medida de Wilson y Osborne.(1992) (Véase figura 3.5).

Figura 3.5

Forma de analizar e interpretar los resultados



Respecto al marco teórico, los niveles tanto de Van Hiele y los de Tall (2018), son de mucha ayuda para determinar en qué niveles tanto de pensamiento geométricos como de abstracción se encuentran los alumnos y si es que ascienden conforme se desarrollan las actividades.

Tall (2018), plantea cinco niveles diferentes a los de Van Hiele, menciona que los niveles de Van Hiele se ven como un proceso natural de creciente sofisticación y los que él plantea pueden verse como una nueva forma de abstracción estructural, centrándose en las propiedades de las estructuras a medida que se perciben de manera sucesivamente sofisticada. Proporcionan una sofisticación a largo plazo mediante el reconocimiento, la descripción, la definición y la deducción.

En el presente trabajo de investigación se consideran los dos primeros niveles y en algunas ocasiones se toma en cuenta el nivel de definición.

Tabla 3.7

Comparativa de los niveles de pensamiento geométrico y formas de abstracción estructural

Van Hiele			**Tall**		
Niveles como un proceso natural de creciente sofisticación			Nueva forma de abstracción estructural		
1	Visualización	Identifica, nombre, compara y opera con figuras geométricas de acuerdo con su apariencia	1	Reconocimiento	Reconoce en una estructura básica por medio de su forma visual
2	Análisis	Analiza las figuras en términos de sus componentes y relaciones entre componentes y descubre propiedades de una clase de formas empíricas.	2	Descripción	El significado de la figura es refinado por la descripción de sus propiedades básicas. Una figura es vista como un todo.
3	Ordenación o clasificación	Interrelaciona lógicamente las propiedades descubiertas anteriormente para dar o seguir argumentos informales.	3	Definición	Nuevas figuras son categorizadas usando la definición de las propiedades específicas que lo caracterizan.

Se toma en cuenta el documento de Wilson y Osborne (1992), porque trata las ideas fundamentales de medida en la enseñanza, los puntos importantes que se tomaron en cuenta fueron:

- La diferencia entre la medida en las ciencias y en las matemáticas, en la primera el problema de error de observación está involucrado y la medida en matemáticas es limpia, precisa y no está subjeta a errores de observación.
- Cinco ideas fundamentales de medida
    - FIM 1: Número asignado.

- FIM 2: Comparación
- FIM 3: Congruencia
- FIM 4: Unidad de medida
- FIM5: Aditividad

Las ideas fundamentales de medida se utilizaron en los instrumentos para determinar cómo hacen uso de las cinco ideas y los niveles tanto de Van Hiele y Tall (2018), se consideraron a lo largo de cada uno de los ciclos, desde la fase de diagnóstico como en la fase de valoración, ahí so lograba identificar si los alumnos habías ascendido de niveles tanto del pensamiento geométrico y trigonométrico como para los niveles de abstracción.

Capítulo 4. Desarrollo y resultados (análisis-interpretación) de la investigación

Los resultados se dividen en los tres ciclos: indagatorio, indagatorio-investigativo e investigativo de acuerdo con las fases desarrolladas en cada uno. En el primer ciclo es en donde se desarrollan las tres fases completas: diagnóstico, desarrollo en el aula y valoración, en el segundo ciclo no se realiza la fase de valoración debido al inicio de la pandemia y el último no tiene fase diagnóstica. Como se mencionó en el apartado de metodología cada una de esas fases tuvo instrumentos y técnicas, aquí se reporta lo que sucedió con cada uno de ellos.

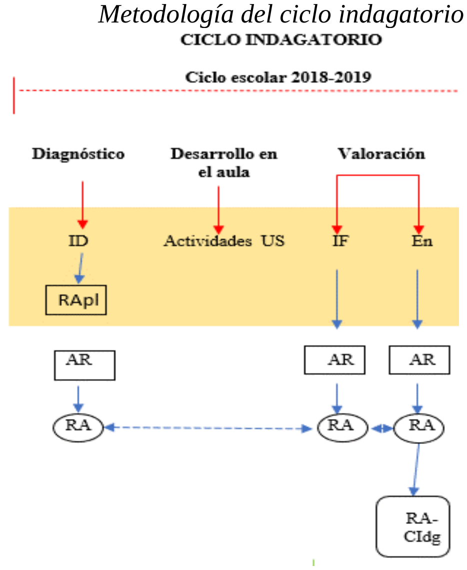
4.1. Resultados (análisis-interpretación) del ciclo indagatorio

Los propósitos de este ciclo de indagación fueron: reconocer las condiciones de conocimiento adquirido por parte de los estudiantes, reconocer cómo tratan con los conceptos básicos de geometría en condiciones institucionales e identificar los contenidos de geometría que posibilitan la transición a los conceptos básicos de trigonometría.

El ciclo indagatorio estuvo dividido en cuatro fases: diagnóstico, desarrollo en el aula, valoración y transición. Los instrumentos utilizados en cada fase fueron los siguiente: cuestionario diagnóstico (ID) para la primera fase, para la segunda fueron 20 actividades de geometría (Act 1) y una sesión que englobara los conceptos vistos durante todo el desarrollo en el aula (US) y para la tercera fase se utilizó un cuestionario final (IF) y se realizaron dos entrevistas (En). (Véase figura 4.1). El ciclo se desarrolló en un grupo de 37 alumnos de tercer grado de secundaria en el ciclo escolar 2018-2019. Al finalizar el ciclo, la docente-indagadora recuperó los resultados obtenidos en cada fase y realizó sus conclusiones para establecer las nuevas condiciones para el siguiente ciclo.

Figura 4.1

Metodología del ciclo indagatorio



Los resultados obtenidos se analizaron de acuerdo con los criterios de análisis establecidos en el apartado de metodología, se consideró lo siguiente: los niveles de pensamiento geométrico de Van Hiele y los niveles de abstracción propuestos por Tall (2018) y la manifestación de las ideas fundamentales de medida señalados por Wilson y Osborne (1992).

4.1.1. Resultados de la fase diagnóstica

El instrumento utilizado en la fase diagnóstica fue un cuestionario cuyo propósito fue identificar las condiciones de conocimiento adquirido de los alumnos respecto a los siete contenidos básicos de geometría identificados desde primero a tercero de secundaria en el Programa de Estudios (SEP, 2011); segmentos, ángulos, triángulos, polígonos, circunferencia, nociones del teorema de Tales y nociones del teorema de Pitágoras. Se diseñaron distintos reactivos con un objetivo específico dependiendo de lo que se quería identificar en cada una de las nociones.

A partir de lo solicitado en cada reactivo se interpretaron las formas en las que se expresan los alumnos, ya sea de forma escrita (lo que plasman en sus cuestionarios) o las acciones que realizan (observadas por la docente-investigadora en formación en el salón de clases).

Las ideas fundamentales de medida propuestas por Wilson y Osborne (1992), están presentes en tres nociones básicas: segmento, ángulo y noción del teorema de Pitágoras, puesto que, son los tres sistemas de medida que los autores tratan: longitud, medida de los ángulos y áreas respectivamente. No se considera la idea uno que ellos proponen, puesto que, está relacionada con Asignación numérica y nosotros estamos interesados en cómo tratan la figura geométrica y las relaciones que establecen entre sus elementos. En las nociones de triángulos, polígonos, circunferencia y noción del teorema de Tales se observa de manera directa el nivel uno: reconocimiento que señala Tall (2018).

Las interpretaciones realizadas están relacionadas con cada uno de los propósitos de los reactivos. A continuación, se muestra el ejercicio hermenéutico realizado para cada una de las nociones.

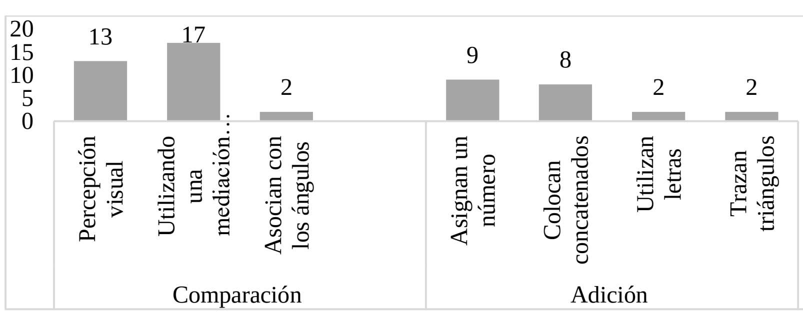
4.1.1.1 Segmentos

Para los segmentos se tuvo interés en dos aspectos: cómo comparan longitudes y cómo proceden a hacer la adición entre ellos, para cada uno se tienen distintas interpretaciones de las formas en qué lo realizan y una explicación del por qué lo hacen de esa forma, en este sentido, se identifican algunas de las ideas fundamentales de medida que evidencian cómo tratan con esta noción.

En la gráfica 4.1 se muestran los dos temas que se abordaron de los segmentos: comparación y adición y las diferentes interpretaciones con su respectiva frecuencia.

Gráfica 4.1

Resultados cuantitativos de las interpretaciones de segmentos

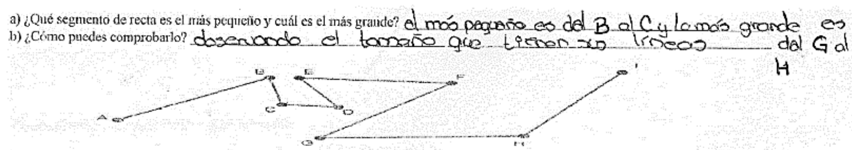


En la comparación de segmentos se les presentó una línea poligonal y se les solicitó que identificaran el más grande y el más pequeños, se tuvieron tres interpretaciones: comparan segmentos valiéndose de la percepción visual, hacen uso de una mediación y asocian con conceptos distintos.

Para la primera interpretación los alumnos compararon los segmentos de manera visual, esto se sabe por las respuestas que brindaron los alumnos como se muestra en la figura 4.2.

Figura 4.2

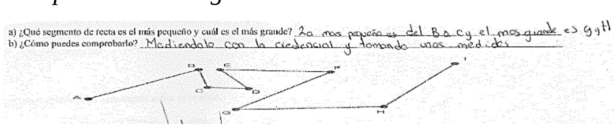
Comparación de segmentos de manera visual



Otros alumnos recurrieron a utilizar una mediación, es decir, a valerse de partes de su cuerpo, objetos o segmentos de recta para realizar la comparación. En la figura 4.3a se muestra como un alumno recurre a su credencial y "toma unas medidas", se manifiesta cómo hace uso del lenguaje de medida para cuando se pide comparar. Otro ejemplo de utilización de mediaciones se encuentra en la figura 4.3b en donde hace uso de sus dedos expresando que los usa como regla. La comparación de longitudes es una de las cualidades implícitas que tiene el compás, sin embargo, el uso de regla graduada desde temprana edad hace que se pierda.

Figura 4.3

Comparación de segmentos utilizando una mediación



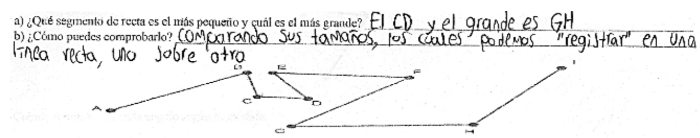
(a)

(b)

En la figura 4.4. existe una diferencia sustancial con las interpretaciones anteriores, el alumno para comparar la longitud de los segmentos hace uso de un tercer segmento de recta y coloca uno sobre otro, en este ejemplo, el alumno no necesita de un objeto que mida la longitud, sino que presta atención directamente a la longitud de cada uno de los segmentos y logra inclusive trasladarlos con ayuda del compás (se observó en la sesión cómo el alumno hacía uso de su regla sin graduar y compás). Se centró en la figura y operó con ella. A pesar de que utiliza una mediación, no es la misma forma de utilizarlo.

Figura 4.4

Comparación de segmentos utilizando una mediación (otra línea recta)

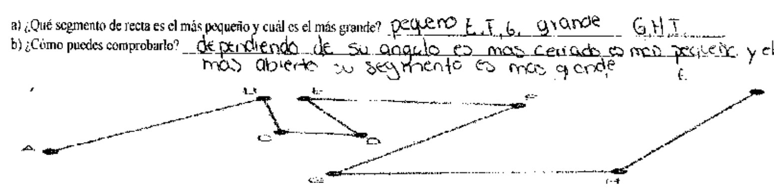


En las tres interpretaciones se observan las formas en la que los alumnos manifiestan la idea fundamental de medida de comparación, en la primera es mediante la percepción visual, en la segunda utilizan una mediación que simula una regla, la cual les posibilita realizar las comparaciones y finalmente, los alumnos reconocen una cualidad del compás y además señala que logra registrarlo en otro segmento de recta.

La tercera forma en la que los alumnos comparan segmentos es cuando prestan atención a otros elementos de la figura, en el caso de la figura 4.5 menciona que un segmento de recta pequeño o grande depende de ángulo, no tiene presente que son dos sistemas de medida distintos. Wilson y Osborne (1992), señalan que frecuentemente los alumnos cuando se les solicita centrar su atención en un ángulo lo centran en la longitud de los segmentos y no en la amplitud, en este ejemplo es lo contrario, se les solicita a los alumnos que centren su atención en los segmentos y lo que ellos hacen es centrarse en la amplitud de los ángulos.

Figura 4.5

Asocian el segmento con otras ideas (áng-tri)



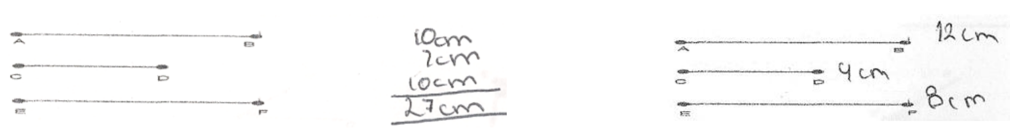
Para la adición de segmentos se les presentaron tres segmentos de recta, dos de ellos congruentes y uno diferente y se les solicitó que los adicionaran, se tienen cuatro interpretaciones: asignan un valor numérico, asignación de letras, trazan triángulos con los segmentos y concatenan los segmentos.

En la primera algunos alumnos le asignan un valor numérico a cada uno de los segmentos, es decir, que para cada segmento existe un número que está relacionado con la longitud del segmento, (primera idea fundamental de medida) en este sentido, asignaron el número mediante estimación visual como se muestra en las figuras 4.6a y 4.6b, esto se debe a que desde temprana edad se les enseña a los niños a medir con instrumentos para encontrar el valor numérico. En el reactivo presentado el segmento AB y EF son congruentes, el ejemplo de la figura 4.6a estima los números de dichos segmentos con el mismo número (diez) y en el segmento CD con siete, posteriormente suma los números. En la respuesta de la figura 4.6b no se observa una correspondencia entre la proporcionalidad de los segmentos y las longitudes estimadas, no reconocen los segmentos congruentes.

Se debe recordar que no se hizo uso de la primer idea fundamental de medida, puesto que se quiere saber cómo tratan la figura, sin embargo, en repetidas ocasiones encontramos la asignación numérica y es que desde temprana edad se les enseña a los niños a medir con instrumentos para encontrar el valor numérico, en este sentido, los autores mencionan que existe una gran diferencia entre la medida en ciencias y en matemáticas, en la ciencia está en juego la observación la cual tiene un margen de error mientras que la medida en matemática es limpia, precisa (Wilson y Osborne, 1992).

Figura 4.6

Adición de segmentos mediante la asignación numérica

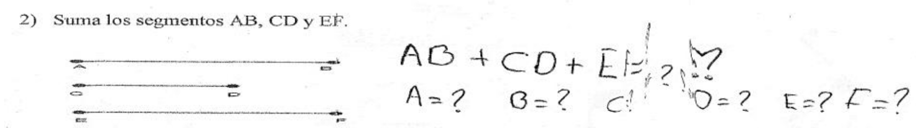


(a) **(b)**

Otra forma en que adicionaron segmentos es mediante letras, toman en cuenta los elementos de la figura presentada y comienzan a operar con ellos como se muestra en la figura 4.7, coloca el nombre de los vértices e indica que operación hacer con ellos, no coloca cuál sería el posible resultado, en su lugar coloca signos de interrogación y también coloca el nombre de los vértices con signo de interrogación, refiriéndose que no sabe qué colocarles como resultado. En la enseñanza de álgebra es común decirles a los alumnos que a lo que no se sabe su valor se le coloquen literales y es lo que hace el alumno, pero no sabe cómo tratarlo.

Figura 4.7

Adición de segmentos utilizando lenguaje algebraico



La tercera interpretación es en donde los alumnos tratan con los segmentos y los traslada para trazar un triángulo como se muestra en la figura 4.8, en ella se observó que los alumnos trasladaron los segmentos, sin embargo, no estuvo presente la idea de adición.

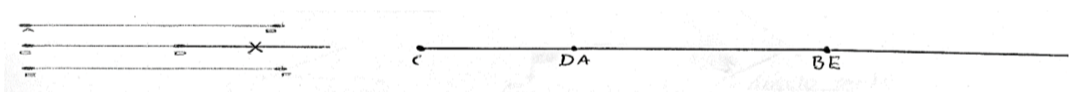
Figura 4.8

Trazan triángulos cuando se les solicita adicionar segmentos

En la última interpretación, los alumnos trasladan los segmentos con ayuda de regla sin graduar y compás y los concatenan, como se muestra en la figura 4.9. Wilson y Osborne (1992, p.82) consideran que “unir segmentos en segmentos de línea se comporta como sumar números. Significa que la estructura de la suma puede orientar el pensamiento sobre la medición y viceversa”. Lo cual resulta importante para seguir con conceptos de geometría más elaborados.

Figura 4.9

Adición de segmentos colocándolos consecutivamente



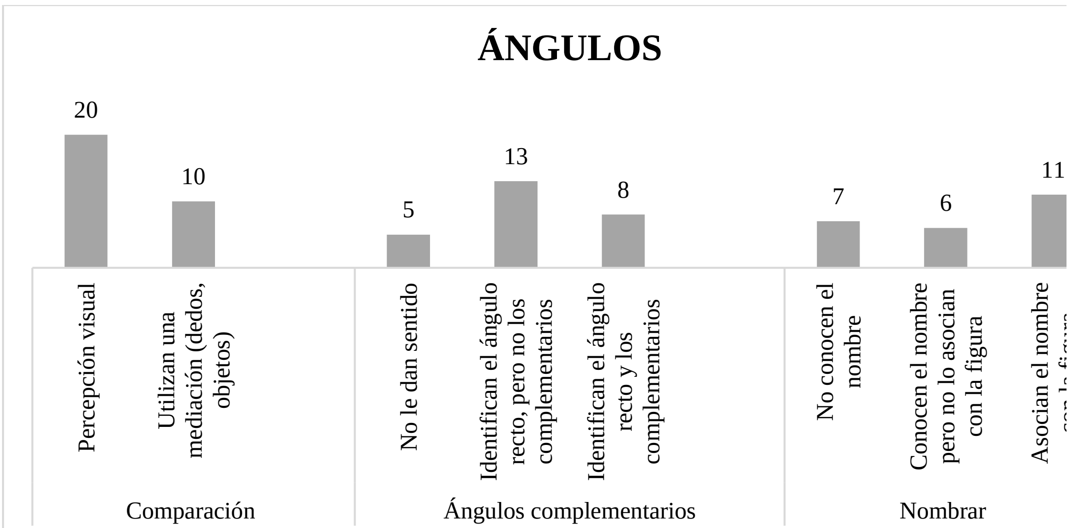
En las cuatro interpretaciones está presente la idea fundamental de medida de adición de formas distintas, en las dos primeras no tratan con el segmento como tal, sino que hacen referencia a números y letras, en la tercera tratan con los segmentos, sin embargo, la construcción que realizan no da idea de adición, en la última interpretación los alumnos tratan el segmento como tal y logran concatenarlos lo cual señalan Wilson y Osborne (1992), como parecido a la estructura de la suma.

4.1.1.2. Ángulos

Para los ángulos se toman en cuenta tres aspectos: cómo comparan los ángulos, cómo conciben el ángulo recto, qué noción tienen de los ángulos complementarios y cómo nombran ángulos según su clase. En la gráfica 4.2 se muestran las interpretaciones para cada uno de los aspectos.

Gráfica 4.2

Resultados cuantitativos de las interpretaciones de ángulo

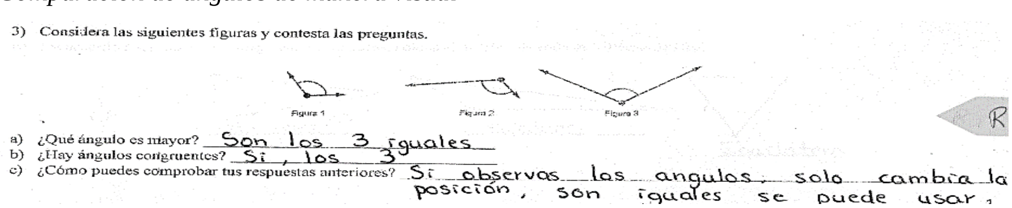


En la comparación de ángulos les mostraron tres ángulos congruentes y se les preguntó sobre cuál era el más grande y si había ángulos congruentes, se tuvieron dos interpretaciones: comparan ángulos de manera visual y hacen uso de mediaciones para la comparación.

En la primera interpretación se percatan que los tres ángulos presentados son congruentes y expresan que lo hacen de forma visual como se muestra en la figura 4.10.

Figura 4.10

Comparación de ángulos de manera visual

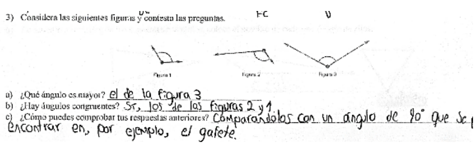


En la segunda interpretación los alumnos comparan los ángulos utilizando una mediación al igual que con los segmentos hacen uso de su cuerpo, objetos y segmentos de recta, en la figura 4.11a el alumno toma de referencia el ángulo recto y menciona que lo encuentra en su gafete y en la figura 4.11b realizan pequeñas marcas que utilizan para determinar los grados de la figura y prolonga las semirrectas, pero no reconoce que los tres ángulos son congruentes.

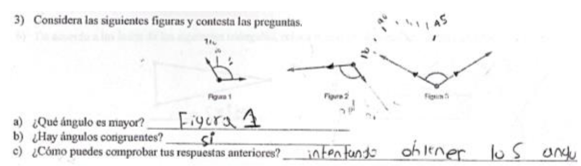
En el primero se observa que están realizando comparaciones entre los ángulos usando de referencia el ángulo recto a través de un objeto y en el segundo ponen en juego la idea fundamental de medida: unidad, puesto que cada una de las marcas que realiza representa una unidad de medida.

Figura 4.11

Comparación de ángulos mediante una mediación



(a)



(b)

En las dos interpretaciones está presente la idea fundamental de comparación manifestada de distintas formas, en el primero es mediante la percepción visual y en el segundo tratan de verificar la amplitud de los ángulos haciendo uso de una mediación.

Para los ángulos complementarios se identificaron tres formas en la que los alumnos lo realizaron: asignan números como si fueran segmentos, no reconocen que el ángulo recto es de 90° y obtienen los valores de cada ángulo.

En la primera interpretación los alumnos no tienen claro que el grado es la unidad de medida para medir los ángulos, intentan colocarle números como si fueran longitudes, inclusive los alumnos tantearon la medida de las semirrectas de los ángulos mostrados, es decir, observan la longitud de las semirrectas en vez de la amplitud que existe entre ellas (Wilson y Osborne, 1992), como en el caso de la figura 4.12a y 4.12b. Los autores advierten que los alumnos traen diversas experiencias geométricas al momento de realizar medición, lo cual afectan la forma en que piensan cuando se encuentran con un nuevo sistema de medición, esto es lo que sucedió en esta noción, trasladaron sus conocimientos de segmentos.

Figura 4.12

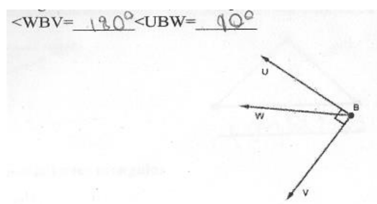
Dificultades para la unidad de medida del ángulo

(a) (b)

En la segunda interpretación los alumnos reconocen el grado como unidad de medida de los ángulos, sin embargo, no reconocen que el ángulo recto es de 90° como se muestra en la figura 4.13.

Figura 4.13

Dificultades para la noción de ángulo recto

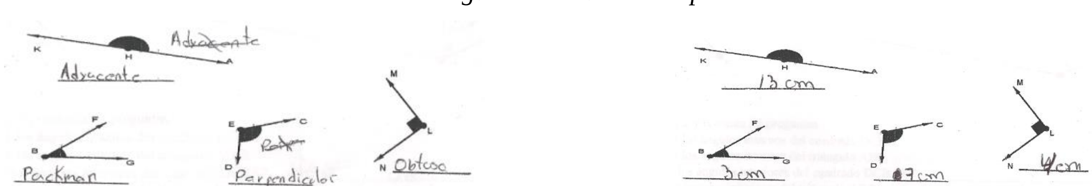


Para nombrar los ángulos se presentó uno de cada tipo y se les solicito que colocaran a qué tipo pertenecían, se tuvieron dos interpretaciones: asocian el nombre con números o palaras distintas y conocen el tipo de ángulos.

En la primera algunos alumnos hicieron alusión a palabras que no tenían relación con la clasificación como se muestra en la figura 4.14a y algunos colocaron un número acompañado de cm como el caso de la figura 4.14b, se vuelve a observar que a pesar de que se les solicite el nombre del ángulo según su clasificación colocan números, la idea fundamental de medida de asignación numérica es muy persistente.

Figura 4.14

Asociación del nombre de los ángulos con números o palabras

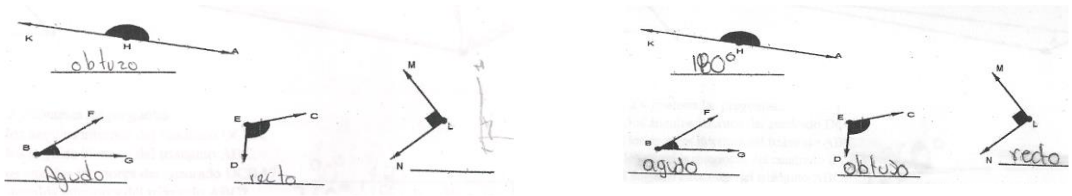


(a) (b)

En la segunda interpretación los alumnos conocen el nombre de la clase ángulos, sin embargo, no lo asocian con la figura como es el caso de la figura 6.15a y finalmente hay alumnos que reconocer los ángulos y logran nombrarlos como es el caso de la figura 6.15b.

Figura 4.15

Conocen el nombre de los tipos de ángulo



(a) **(b)**

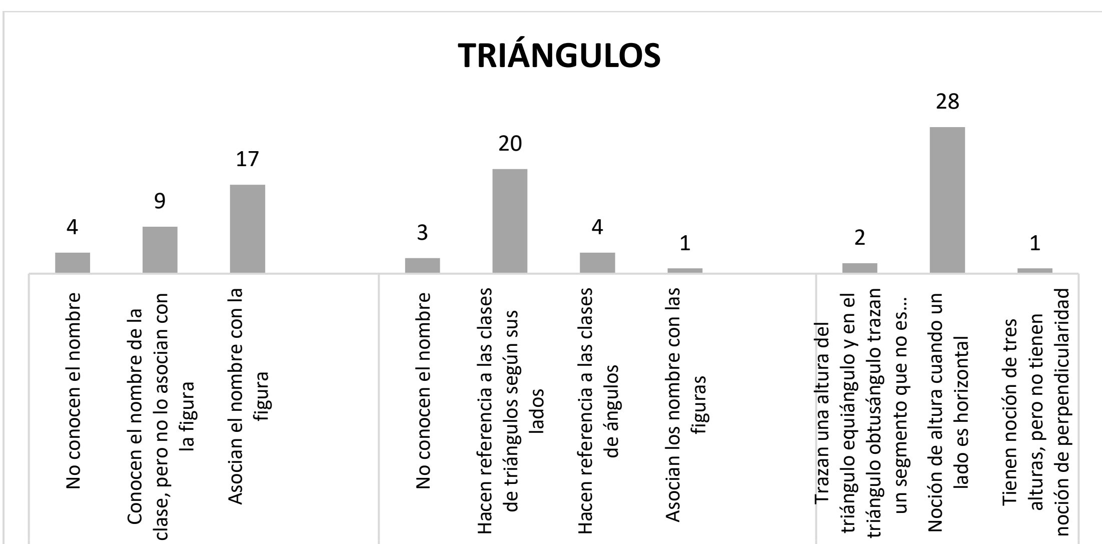
Se identifica que los alumnos de la última interpretación se encuentran en el nivel de visualización de Van Hiele y de reconocimiento de Tall (2018).

4.1.1.3. Triángulos

En la noción de triángulos se toman en cuenta tres aspectos: cómo los nombran según sus lados y sus ángulos y qué noción tienen de altura. En la gráfica 4.3 se muestran las interpretaciones realizadas.

Gráfica 4.3

Resultados cuantitativos de las interpretaciones de triángulo



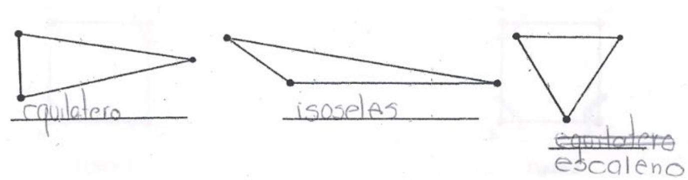
Para que los alumnos coloquen el nombre de los triángulos según sus lados se les presentan tres de cada tipo, se tienen tres interpretaciones:

Algunos alumnos colocan palabras que no tienen relación con la clasificación como se muestra en la figura 6, otros conocen el nombre, sin embargo, no lo asocian con la figura presentada como en la figura 6.22 y finalmente están los alumnos que asocian el nombre con los triángulos como se muestra en la figura 6.

La mayor parte de los alumnos logran nombrarlos, estos alumnos reconocen los tipos de triángulos según sus lados mediante la observación visual de los segmentos que los conforman y comparan sus longitudes para determinar el nombre.

Figura 4.16

Conocer los nombres pero no lo asocian con los triángulos



Cuando se les solicita nombrar los triángulos según sus ángulos lo hacen de cuatro formas: colocan palabras que no tienen relación con las clases, hacen referencia a la clasificación según sus lados o según sus ángulos y finalmente nombran y asocian los triángulos según sus ángulos. Centraremos la atención en la interpretación dos y tres, puesto que, en la enseñanza comúnmente se enseña solamente la clasificación por lados y se deja a un lado por sus ángulos, a excepción del triángulo rectángulo, pero no se hace la distinción de que pertenece a diferente clasificación es por eso por lo que las respuestas de este tipo se concentran aquí, los alumnos nombran los triángulos según la clasificación por sus lados como se muestra en la figura 4.17. Por otro lado, cuando asocian el nombre a la clasificación de los ángulos recuperan los conocimientos previos que tienen y centran su atención en los ángulos, sin embargo, algunos solamente identifican uno o dos de ellos, olvidando que son tres ángulos internos como se observa en la figura 4.18.

Figura 4.17

Conocen las clases de los triángulos según sus lados y las asocian con las figuras presentadas

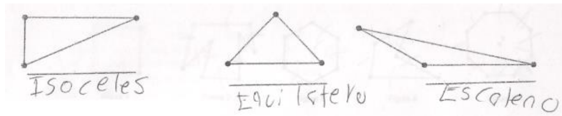
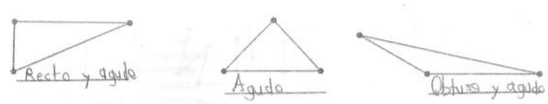


Figura 4.18

No conocen las clases de los triángulos según sus ángulos, por lo cual hacen referencia a la clasificación de los triángulos según sus lados.)



Para el trazo de las alturas, se presentan dos triángulos, uno equilátero y una obtusángulo. Respecto al triángulo equilátero se tienen dos formas: trazan una altura siempre y cuando uno de los lados sea horizontal y trazan tres alturas, pero no tienen ideas de perpendicularidad.

Se observa que los alumnos no presentan dificultades cuando uno de los lados se encuentra de forma horizontal como se observa en las figuras 4.19a y 4.19b, sin embargo, en la figura 4.19a solamente trazó una altura y en el 4.19b el alumno trazo las tres, pero dos de ellas no son perpendiculares.

Figura 4.19

Trazo de alturas en un triángulo equilátero

(a) (b)

Cuando se presenta un triángulo obtusángulo lo realizan de tres formas diferentes: cuando trazan las altura desde el vértice cuyo lado contrario es horizontal como en la figura 4.20a, en los que conocen que las alturas se trazan desde uno de los tres vértices, pero ignoran las nociones de perpendicularidad como en la figura 4.20b y la última es una interpretación en la que los alumnos reconocen que hay tres alturas en el triángulo, todas relacionando uno de los vértices con su lado opuesto, sin embargo, no considera la perpendicularidad en las alturas que traza en los vértices cuyos lados no son horizontales como se muestra en la figura 4.20c.

Figura 4.20

Trazo de alturas en un triángulo obtusángulo

(a) (b) (c)

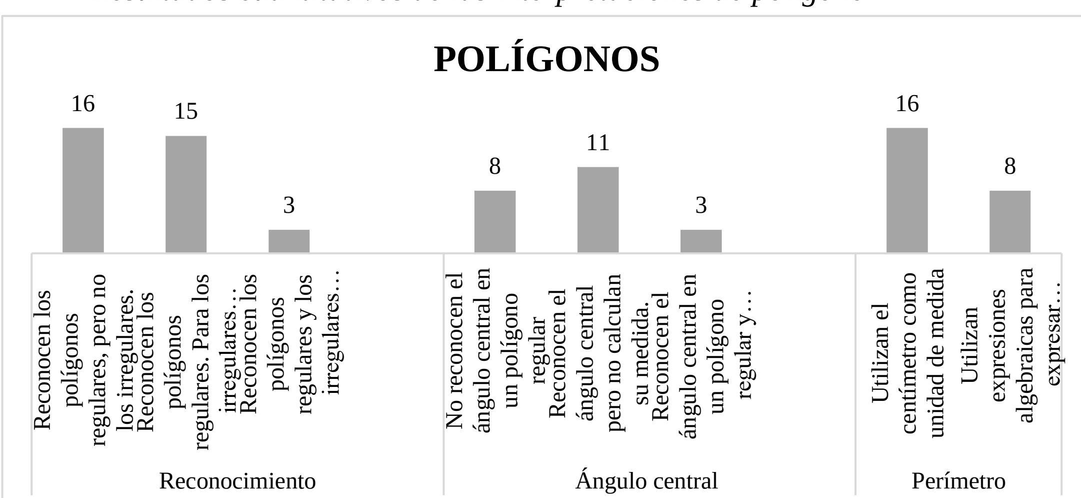
En la enseñanza comúnmente se enseña el trazo de una altura en los triángulos acutángulos y se deja a un lado los triángulos rectángulos y obtusángulos.

4.1.1.4. Polígonos

Para los polígonos se tomaron en cuenta los siguientes aspectos: cómo descomponen un cuadrado para formar un triángulo y obtienen los ángulos internos tanto de un cuadrado como de un triángulo, el reconocimiento de polígonos regulares e irregulares, ángulos centrales, cómo adicionan segmentos y cómo obtienen el perímetro de un polígono. En la gráfica 4.4 se muestran las interpretaciones para cada uno de los aspectos y sus respectivas frecuencias.

Gráfica 4.4

Resultados cuantitativos de las interpretaciones de polígono

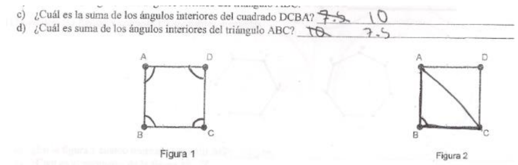


En los ángulos interiores de un cuadrado y un triángulo se realizaron tres interpretaciones: se vuelve a presentar que los alumnos no consideran la amplitud sino la longitud, colocan los números sin unidad de medida y no presenta relación con la suma solicitada.

Al igual que en el apartado anterior, los alumnos no reconocen el grado como unidad de medida para los ángulos y ésto es porque se centran en la longitud de los lados de la figura en lugar de la amplitud, como se observa en la figura 4.21.

Figura 4.21

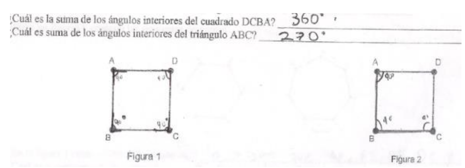
No asocian el grado como unidad de medida para el ángulo



Otra interpretación es que los alumnos reconocen al grado como unidad de medida de los ángulos, reconocen que los ángulos interiores de un cuadrado son ángulos rectos, sin embargo, al momento de obtener los ángulos internos del triángulo no identifican que solamente es la mitad de los ángulos rectos.

Figura 4.22

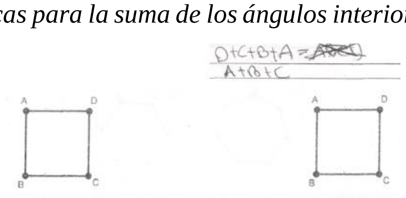
No le dan sentido a la diagonal en el cuadrado para los ángulos del triángulo



Al igual que en segmentos, los alumnos utilizan letras para indicar la suma, sin embargo, lo colocan solamente como vértices y no colocan un resultado como se muestra en la figura 4.23. Se observa que no tienen consolidado el uso de las letras cuando se trata con figuras geométricas y hacen uso de sus conocimientos sobre álgebra sin darle sentido.

Figura 4.23

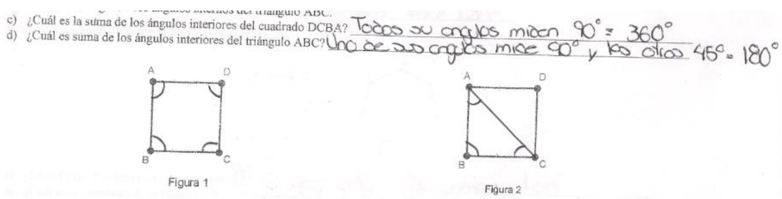
Utilizan expresiones algebraicas para la suma de los ángulos interiores del cuadrado y el triángulo



También hubo a alumnos que identificaron el triángulo trazando una diagonal y obtuvieron los ángulos solicitados como se muestra en la figura 4.24.

Figura 4.24

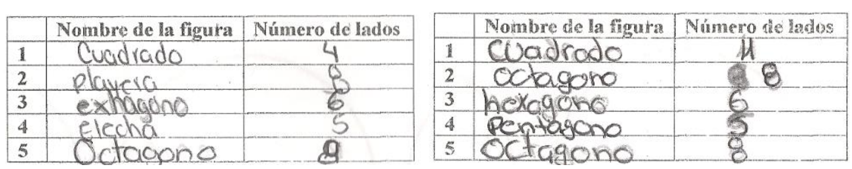
Identifican la diagonal en el cuadrado y le dan sentido a los ángulos en el triángulo



Para el reconocimiento de polígonos regulares e irregulares se realizaron tres interpretaciones: cuando reconocen el número de lados que tienen los polígonos tanto regulares como irregulares, asocian el nombre de los polígonos regulares pero con los irregulares colocan las palabras según su aspecto como se muestra en la figura 4.25a, también está la interpretación en la que nombran los polígonos regulares y también los irregulares, pero omiten colocar que son irregulares como es el caso de la figura 4.25b.

Figura 4.25

Reconocen los polígonos regulares, pero presentan dificultades para los irregulares



	Nombre de la figura	Número de lados
1	Cuadrado	4
2	playera	8
3	exhagono	6
4	flecha	5
5	Octagono	8

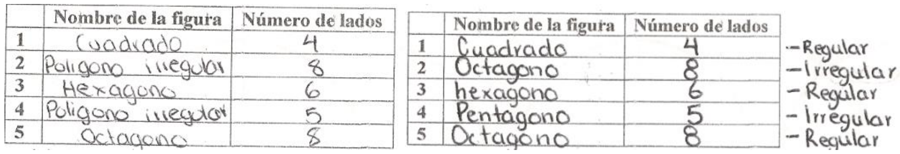
	Nombre de la figura	Número de lados
1	Cuadrado	4
2	octagono	8
3	hexagono	6
4	Pentagono	5
5	Octagono	8

(a) (b)

Otros alumnos en los polígonos irregulares colocan que son irregulares, pero no colocan su clasificación como es el caso de la figura 4.26a y finalmente reconocen tanto los polígonos regulares como los irregulares como se muestra en la figura 4.26b.

Figura 4.26

Reconocen los polígonos regulares, para los irregulares mencionan el nombre o solamente que es irregular



	Nombre de la figura	Número de lados
1	Cuadrado	4
2	Poligono irregular	8
3	Hexagono	6
4	Poligono irregular	5
5	Octagono	8

	Nombre de la figura	Número de lados	
1	Cuadrado	4	– Regular
2	Octagono	8	– Irregular
3	hexagono	6	– Regular
4	Pentagono	5	– Irregular
5	Octagono	8	– Regular

(a) (b)

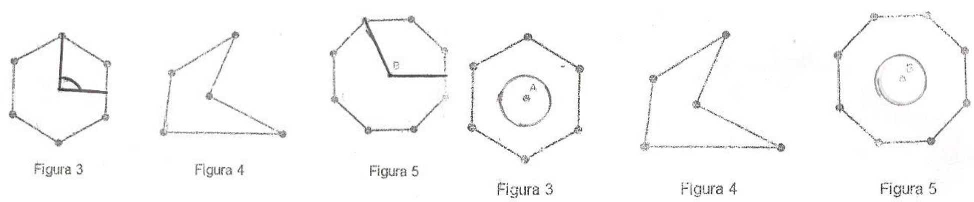
En la enseñanza se le pone más énfasis a la enseñanza de los polígonos regulares, por tal motivo, muy pocos alumnos reconocen los irregulares. Respecto a los niveles de Tall (2018) y de Van Hiele los alumnos se encuentran en el nivel de reconocimiento y visualización respectivamente.

Para el reconocimiento del ángulo central y la obtención de los grados correspondientes se les pidió que en un hexágono y un octágono marcaran el ángulo central, se identificaron tres interpretaciones:

Para la primera interpretación se observa que los alumnos no reconocen el ángulo central, algunos toman dos vértices no consecutivos y lo marcan como el caso de la figura 4.27a, otros realizan una circunferencia dentro de los polígonos como se muestra en la figura 4.27b, esto no les posibilita obtener el valor del ángulo.

Figura 4.27

No reconocen el ángulo central en un polígono regular

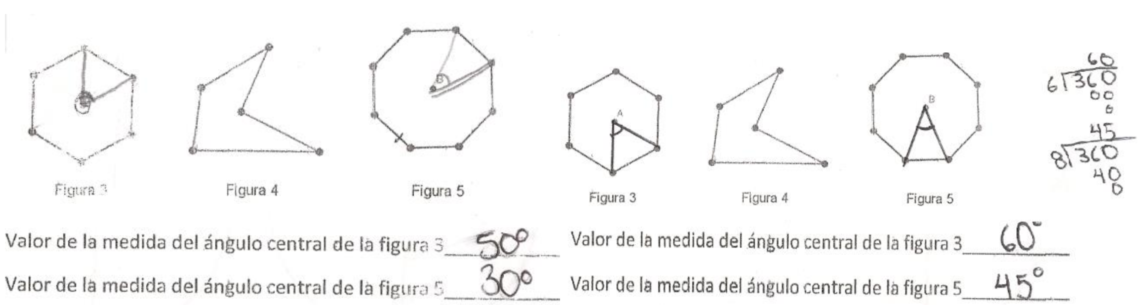


(a) (b)

La siguiente interpretación es cuando reconocen el ángulo central, pero no obtienen los grados del mismo como se observa en la figura 4.28a, por último, los alumnos reconocen el ángulo central y obtiene los grados del mismo como se muestra en la figura 4.28b.

Figura 4.28

Reconocen el ángulo central



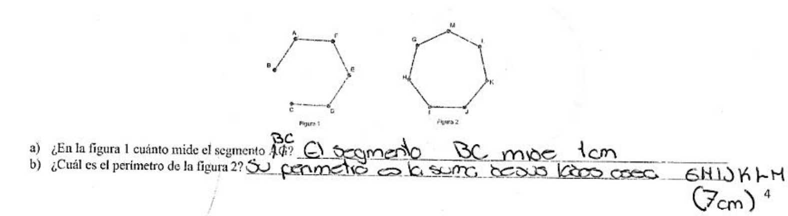
(a) (b)

Para la adición de segmentos se les presentó una línea poligonal y un polígono regular: se tuvieron tres interpretaciones: asignan un número al segmento, asignan letras.

Para adicionar los segmentos de la línea poligonal los alumnos asignan un número, la mayoría le asigno uno, otros le colocaron como unidad de medida centímetros, se les preguntó sobre el valor de la magnitud de la línea poligonal, pero no consideraron los segmentos de los que estaba constituida, sino que se centraron en el espacio vacío entre los extremos de la poligonal, por tal motivo su respuesta es 1. Y para el polígono cerrado, utilizaron la misma unidad de medida (1cm) y posteriormente contaron los lados del polígono para brindar el resultado.

Figura 4.29

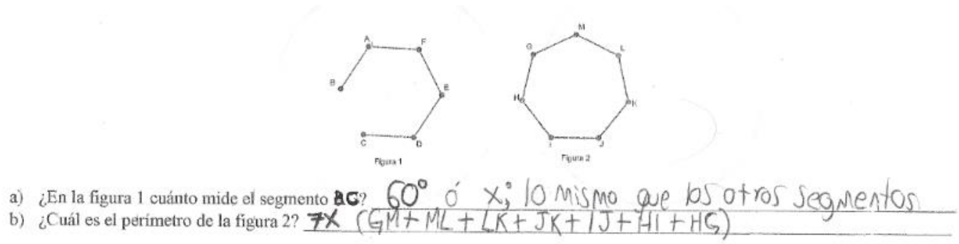
Adicionan segmentos utilizando el centímetro como unidad de medida



En la siguiente interpretación los alumnos utilizan letras, colocan cada vértice e indican la operación a realizar, pero no ofrecen un resultado, esto mismo se observó cuando se les solicitó que adicionaran los segmentos en el reactivo 2, al final no le dieron sentido al por qué estaban utilizando letras para realizarlo como se muestra en la figura 4.30, también se observa que para la pregunta de la poligonal ofrece una respuesta en grados, lo cual indica que se está centrando en los ángulos. El cual es lo que los autores marcan como una dificultad para diferenciar entre longitud y ángulos.

Figura 4.30

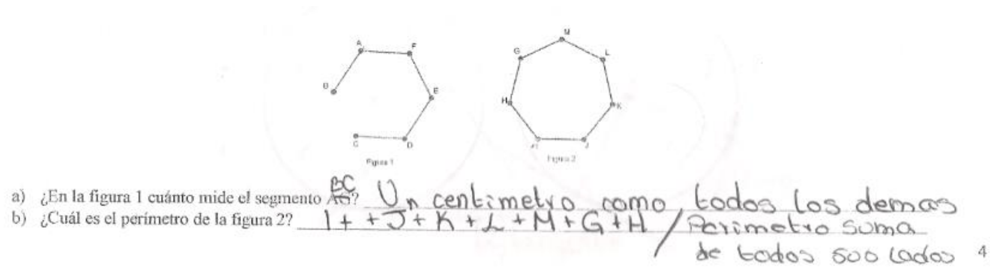
Utilizan expresiones algebraicas para expresar adiciones de segmentos



Otro ejemplo de la utilización de letras está en la figura 4.31, en ella los alumnos consideran la poligonal como un centímetro y para el polígono colocan letras, pero no un resultado, sin embargo, escriben a que se refiere cuando se les solicita el perímetro de una figura.

Figura 4.31

Utilizan expresiones algebraicas para expresar adiciones de segmentos



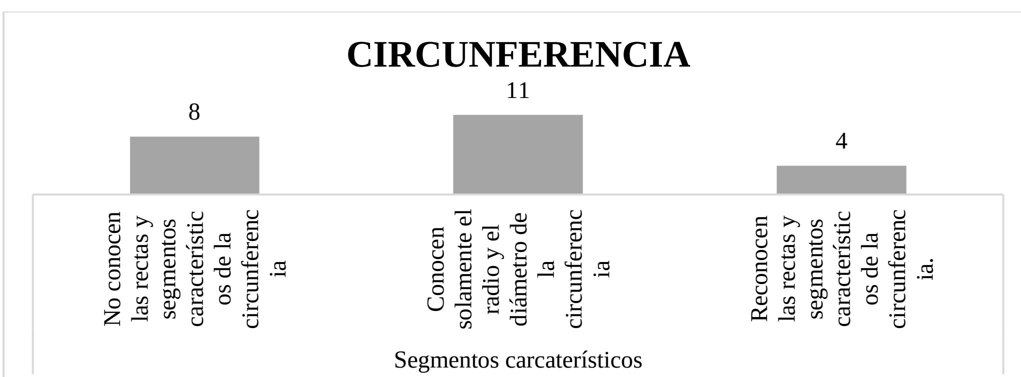
4.1.1.5. Circunferencia

Para la circunferencia se colocaron cinco circunferencias y se les solicitó que en cada una de ellas trazaran un segmento o recta característico.

En la gráfica 4.5 se muestran las interpretaciones de lo que los alumnos han contestado para este reactivo.

Gráfica 4.5

Resultados cuantitativos de las interpretaciones de circunferencia

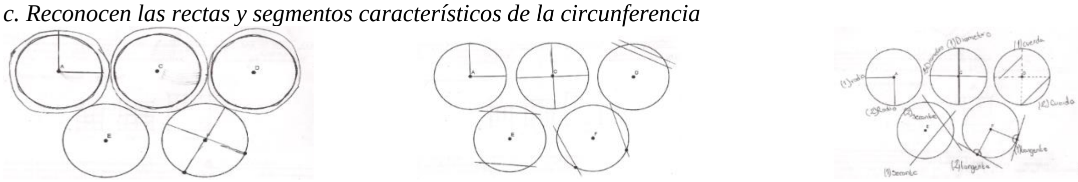


Al momento de trazar los segmentos y rectas característicos de la circunferencia algunos alumnos realizan trazos que no tienen relación con lo solicitado como es el caso que se muestra en la figura 6.45, 11 alumnos trazan de manera correcta solamente el radio y el diámetro y para los otros realizan secantes como se observa en la figura 6.47. En la enseñanza es muy común que se presente mayor atención al radio y el diámetro que se ven reflejadas en estas dos interpretaciones.

Cuatro alumnos trazan los segmentos y rectas característicos como se muestra en la figura 6.47, en donde se le solicitan las cuerdas el alumno traza una de manera correcta y otra que no comparte puntos con la circunferencia.

Figura 4.32

a. No conocen las rectas y segmentos característicos de la circunferencia
b. Conocen solamente el radio y el diámetro de la circunferencia
c. Reconocen las rectas y segmentos característicos de la circunferencia



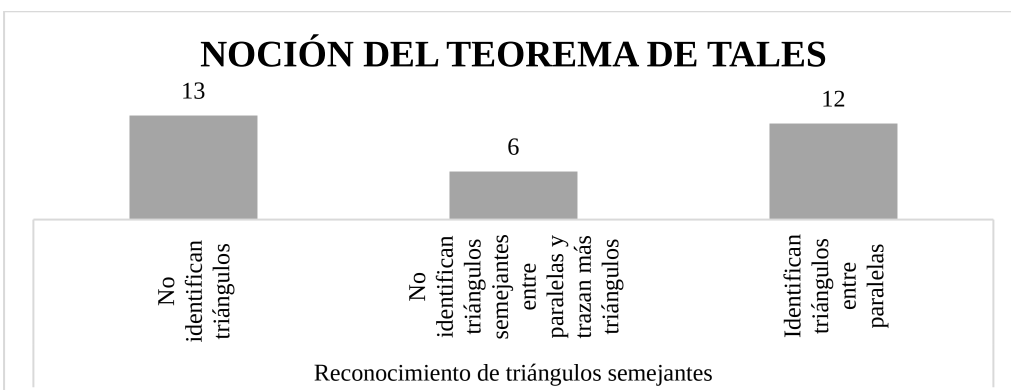
(a) (b) (c)

4.1.1.6. Noción de teorema de Tales

Para las nociones del teorema de Tales se consideraron dos aspectos: reconocimiento de triángulos entre paralelas y qué nociones tienen sobre los triángulos semejantes. En la gráfica 4.6 se muestran las interpretaciones realizadas.

Gráfica 4.6

Resultados cuantitativos de las interpretaciones de teorema de Tales

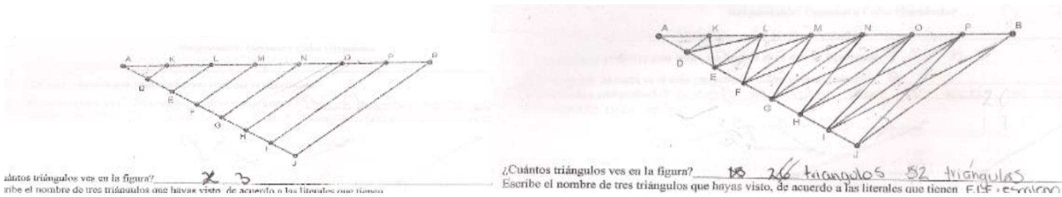


En la identificación de triángulos semejantes se interpretaron tres formas en que los alumnos lo realizan. La primera es que no los identifican y se desconoce el porqué (véase figura 4.33a), en la segunda tampoco los identifican, sin embargo, se observa que trazan más segmentos de recta para formar más triángulos como se observa en la figura 4.33b.

Figura 4.33

(a)No identifican triángulos semejantes entre paralelas

(b)No identifican triángulos semejantes entre paralelas y trazan más triángulos

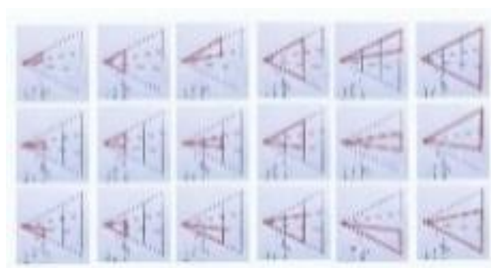


(a) (b)

El trazo de más segmentos se relacionó con algunos juegos de percepción visual, en donde se les solicita a las personas que mencionen cuántas figuras observan y deben realizar más trazos como se muestra en la figura 4.34.

Figura 4.34

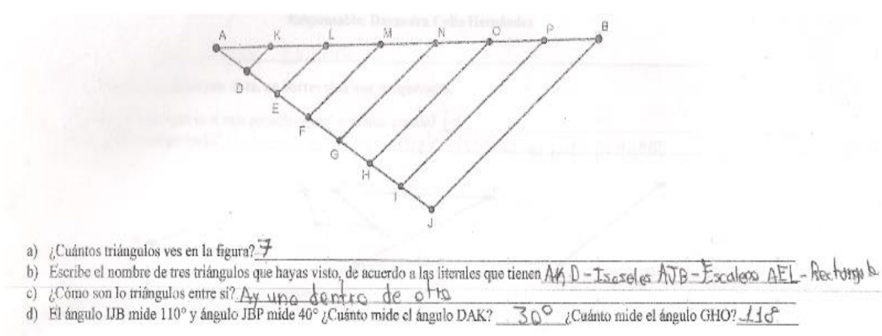
Ejemplo de un juego de percepción visual



En la última interpretación reconocieron los triángulos semejantes en la figura presentada, inclusive algunos lograban nombrar tres de ellos como se observa en la figura 4.35.

Figura 4.35

Identifican triángulos entre paralelas



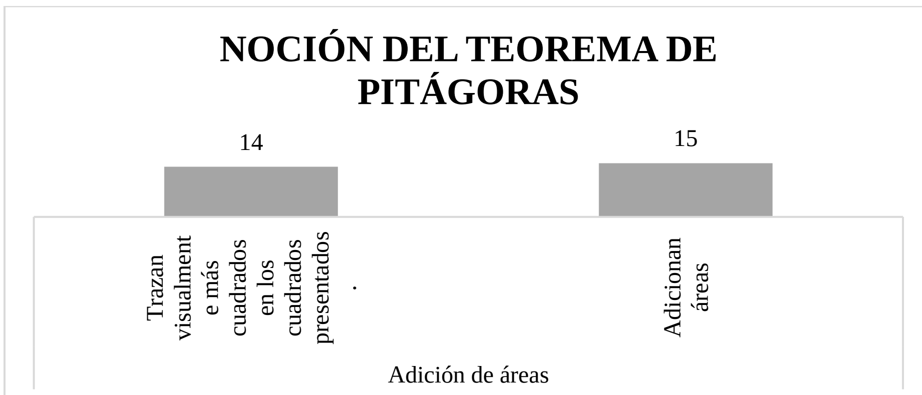
4.1.1.7. Noción del teorema de Pitágoras

Para las nociones del teorema de Pitágoras se consideró cómo trataban con las áreas y cómo hacían uso de la unidad de medida presentada.

En la gráfica 4.7. se muestra cómo los alumnos realizan adición de áreas.

Gráfica 4.7

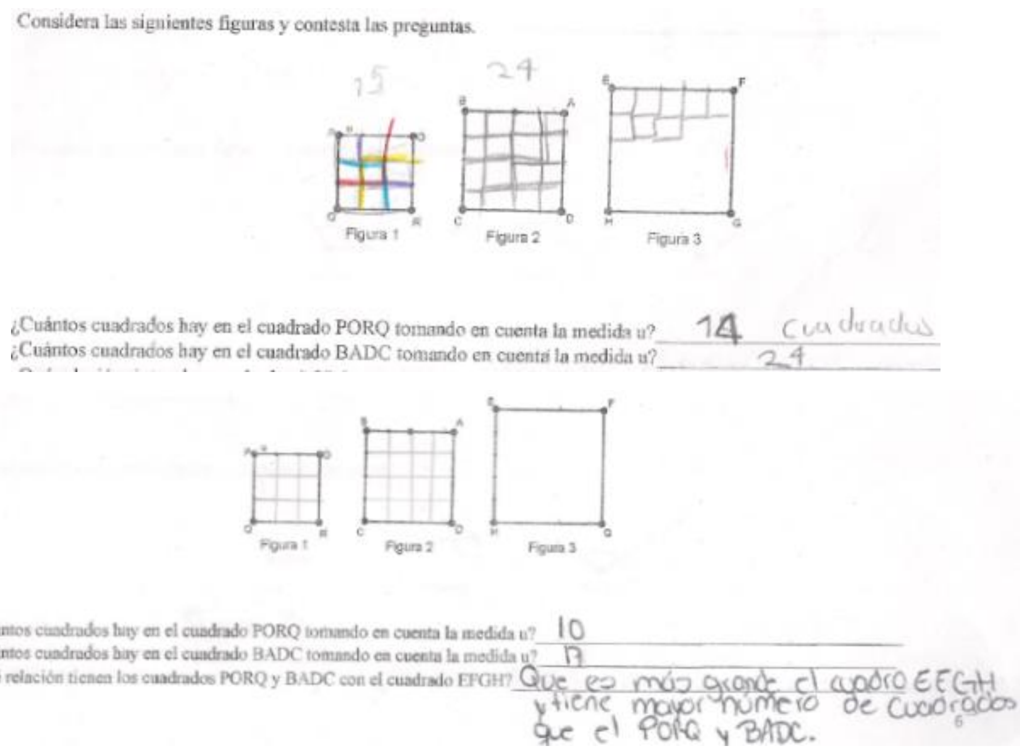
Resultados cuantitativos de las interpretaciones del teorema de Pitágoras



Se tienen dos interpretaciones de cómo adicionan áreas: al igual que en la segunda interpretación de nociones del teorema de Tales, los alumnos identifican más cuadrados como en los juegos, por lo tanto, no se enfocaron a la superficie de la figura como se muestra en la figura 4.36, en el primer cuadrado se logra observar que marca con colores diferentes los cuadrados que está considerando, en el segundo cuadrado realiza la cuadricula, pero ya no marca con colores y en el último no termina de realizar la cuadricula y en la figura 4.36b lo que sucede es que el alumno cuenta los cuadrados trazados con la unidad de medida inducida, pero también toman en cuenta los cuadrados presentados inicialmente. Los autores mencionan que las primeras ideas para tratar el área de una figura es elegir una unidad cuadrática, (Wilson y Osborne,1992), con la cual cubrirán la superficie de la figura, estos alumnos toman en cuenta la unidad de medida sugerida, sin embargo, no se centraron en la superficie solamente.

Figura 4.36

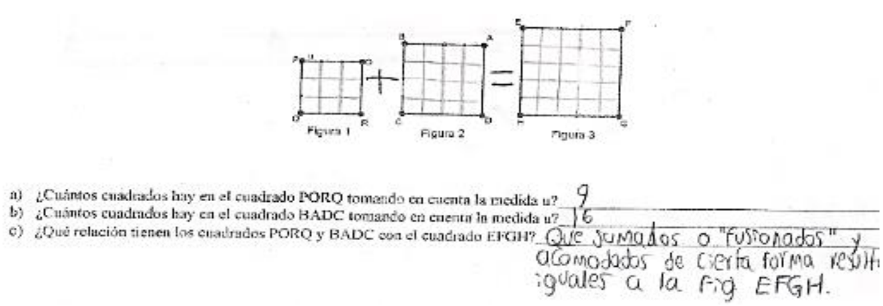
Adicionan áreas, pero no utilizan la unidad de medida marcada



En la otra interpretación los alumnos adicionan las áreas, algunos hacían uso de la unidad de medida de forma explícita, es decir, trazando la cuadrícula y otros la consideraron, pero no realizaron trazos extras a la figura presentada. También reconocen la relación que existe entre las áreas de los cuadrados que está vinculada al teorema de Pitágoras, ellos hablan de una suma o de una fusión, se considera que se refiere a la suma cuando se trata de números y fusión cuando corresponde a figuras (véase figura 4.37).

Figura 4.37

Adicionan áreas utilizando la unidad de medida marcada



4.1.2. Resultados de la fase de desarrollo en el aula

La fase de desarrollo en aula constó de dos momentos: actividades de geometría y una sesión que englobó todos los contenidos tratados en las actividades.

4.1.2.1. Actividades de geometría

A partir de los resultados de la fase indagatoria se diseñaron veinte actividades, en ellas se trataron con profundidad las siete nociones básicas de geometría: segmentos, ángulos, triángulos, polígonos, circunferencia, nociones del teorema de Tales y nociones del teorema de Pitágoras.

En las actividades no se hacía referencia a los números, sino que se trataba con las figuras conceptuales para que los alumnos relacionaran sus elementos, se hizo uso de regla sin graduar y un compás. El papel de la docente en este ciclo fue la presentación de los contenidos más simples y poco a poco la incorporación de nuevos elementos, cuestionar a los alumnos y guiarlos para seguir avanzando en los conceptos. La observación constante realizada por la docente para cada una de las siete nociones fue fundamental porque a partir de ellas, él tomaba decisiones sobre qué conceptos eran los adecuados colocar en las aulas considerando cómo habían resultado en las sesiones anteriores, las dificultades y los éxitos de su enseñanza.

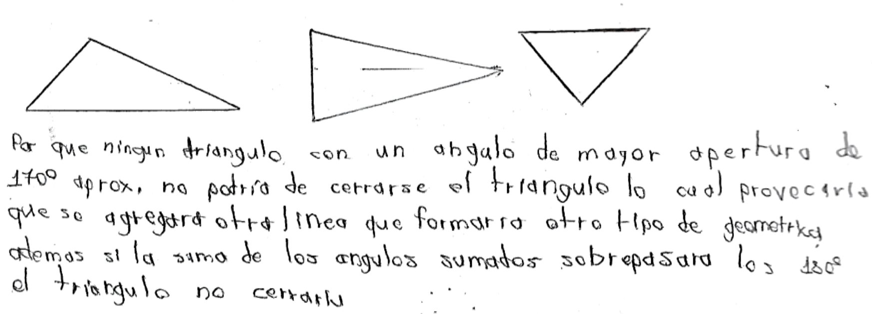
Se recuperó una de las actividades en donde los alumnos pusieron en juego sus conocimientos previos para explicar el teorema de la suma de los ángulos interiores de un triángulo cualquiera, puesto que, en tercer grado de secundaria la mayoría de los alumnos saben que la suma de los ángulos internos de un triángulo cualquiera es de 180°, sin embargo, no saben por qué. Dicha actividad presentó muchos elementos sobre el pensamiento intuitivo de los alumnos, la actividad se realizó en cinco equipos de trabajo, se les dio la explicación sobre lo que tenían que hacer y la docente monitoreó cada uno de los equipos cuestionando a los alumnos sobre las ideas que ellos le manifestaban.

Se identificaron tres formas en la que los alumnos explicaron el teorema: se basaron en la unicidad en los triángulos, a partir de la suma de los ángulos interiores de los cuadriláteros y otra fue mediante circunferencias.

En la primera forma los alumnos trazan diversos triángulos y manifestaron que si era mayor a 180° no cerraría y formaría una figura geométrica diferente de un triángulo, trazaron distintos tipos de triángulos y observaron que sucedía lo mismo en todos como se muestra en la figura 4.38.

Figura 4.38

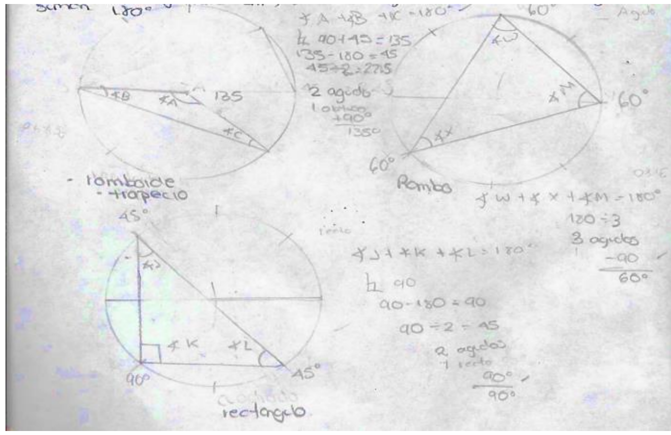
Justificación del teorema de los ángulos interiores de un triángulo (equipo 1)



En otro equipo de trabajo, colocaron un triángulo con dos vértices en la circunferencia y un vértice en el centro e inscribieron dos triángulos en la circunferencia como se muestra en la figura 4, cuando se cuestionó a los alumnos sobre por qué habían utilizado circunferencias hicieron referencia a que su profesor de segundo grado les había mencionado la circunferencia para explicar porque la suma era 180°, pero no lograron explicarlo. Cuando se analizó lo que habían realizado los alumnos se pensó que la circunferencia les había servido para explicar la suma de los ángulos, pero la usaron para lograr trazar los triángulos, se observan algunos arcos en la circunferencia y en algunas intersecciones ellos colocaron un vértice del triángulo, los unieron y trazaron el triángulo. También se observó que hacen uso de lenguaje algebraico para colocar que la suma de los ángulos internos que ellos marcaron en sus triángulos suman 180°. Para explicar por qué la suma es 180°, asignan valores a los ángulos, se observa que obtienen los 60° de uno equilátero, pero el trazo que realizan no corresponde al tipo de triángulo, el otro triángulo que colocaron fue un triángulo rectángulo isósceles, reconocen el ángulo recto y los ángulos de 45° (véase figura 4.39).

Figura 4.39

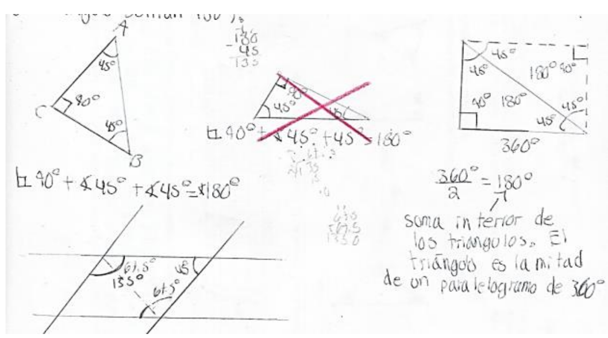
Justificación del teorema de la suma de los ángulos interiores (equipo 2)



En otro equipo hubo más diálogo que en los demás, comenzaron trazando las diagonales de un rectángulo y de un cuadrado, dijeron que se lograba justificar lo solicitado, ya que, se sabía que los ángulos internos de esas dos figuras son de 90°, por lo que si se traza la diagonal se formarían dos triángulos y la suma de los ángulos de cada uno de ellos daba como resultado 180°, posteriormente, la docente les cuestionó sobre qué pasaba con otro cuadrilátero que no fuera cuadrado ni rectángulo, ellos argumentaban que no importaba que cuadrilátero fuera el que se colocará, siempre sería lo mismo puesto que los ángulos interiores de un cuadrilátero siempre era 360°, ya que, solamente los ángulos variaban, si alguno aumentaba, el otro ángulo disminuía pero nunca se pasaban de 360°. A partir de sus explicaciones trazaron más cuadriláteros e identificaron qué tipo de triángulos formaban y concluyeron de esa forma que para cualquier triángulo la suma de los ángulos interiores será 180°, como se muestra en la figura 4.40.

Figura 4.40

Justificación del teorema de la suma de los ángulos interiores (equipo 3)



En los tres ejemplos se observa que los alumnos recurren a los números, le dan veracidad a sus pensamientos mediante los números, y no reconocen que la figura como tal tiene implícitos los conceptos.

4.1.2.1. Última sesión

Se diseñó una última sesión que recuperó los conceptos tratados en las veinte actividades de geometría, se dividió en tres momentos: el primero estaba relacionado con segmentos de recta, paralelas, perpendiculares, ángulos suplementarios, complementarios, aplicados a la obtención de las medidas de ángulos; el segundo momento tuvo relación con el Teorema de Tales y el último momento con el Teorema de Pitágoras. En esta sesión se hace uso de la medida de forma explícita y se presta atención si le dan sentido después de tratar con figuras geométricas. La sesión se llevó a cabo con cinco equipos de trabajo, la docente monitoreó y cuestionó lo que se estaba realizando en cada uno.

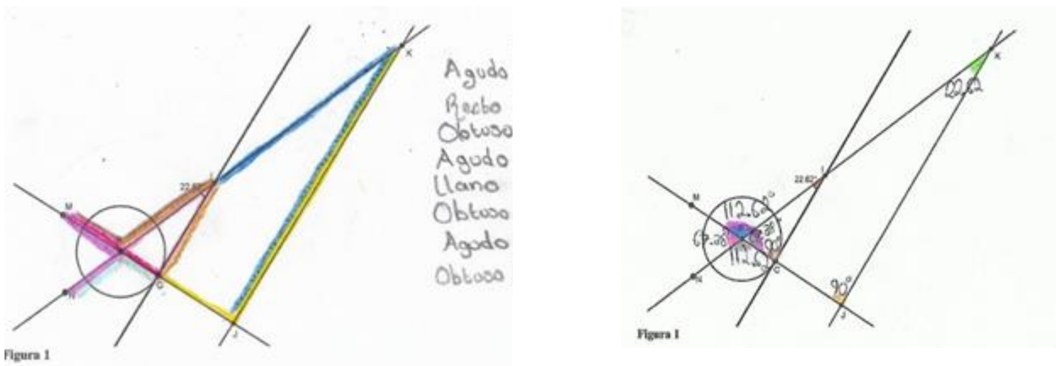
Hubo dos cámaras, una fija y una ambulante. Para el análisis de los resultados se recuperó la grabación de la cámara ambulante y se editó el video para separarlo por mesas y por momentos, es decir, cada mesa de trabajo tuvo un video que se dividió en los tres momentos. Posteriormente, se realizó la transcripción del video de cada una de las mesas y se identificaron a los alumnos con mayores intervenciones. Se centró la atención en dos alumnos de una mesa puesto que eran los que recuperaban la información parecida a las otras mesas. Con estos alumnos identificados se realizó un ejercicio de confrontación de sus intervenciones en el video y las hojas de control de la sesión.

4.1.2.1.1. Primer momento

En el primer momento se les presentó la figura compuesta por dos paralelas, una transversal, una recta perpendicular a las paralelas y una circunferencia, se les solicitó que determinaran el valor de cada uno de los ángulos señalados. La información que se les brindó fue que una de las paralelas era tangente a la circunferencia y el valor de un ángulo, para resolver la actividad era necesario que recordaran sus conocimientos previos de las sesiones de geometría. Se observa que uno de los alumnos reconoce los ángulos y los nombra según su clase, sin embargo, no coloca el valor de los ángulos (véase figura 4.41a) y el alumno 26 los reconoce y obtiene su valor como se observa en la figura 4.41b.

Figura 4.41

Primer momento de la última sesión



(a) (b)

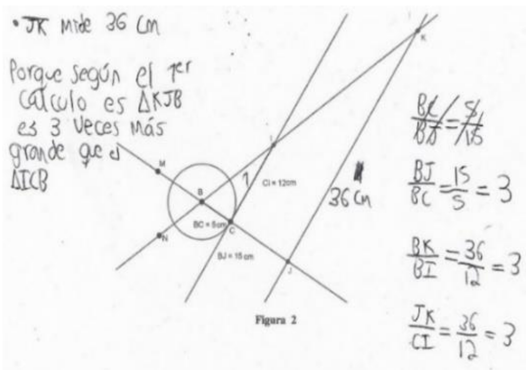
4.1.2.2. Segundo momento

A partir de lo que habían desarrollado en el primer momento con los ángulos, se les volvió a presentar la misma figura y se les solicitó que reconocieran triángulos semejantes y obtuvieran la medida del segmento JK.

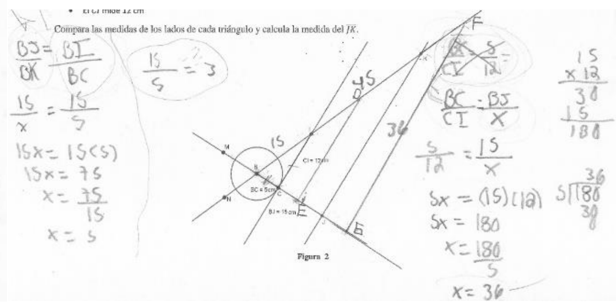
Ambos alumnos reconocieron los triángulos semejantes, pero la forma en la que obtuvieron la medida del segmento fue diferente, uno de los alumnos coloca en primer lugar la relación entre los segmentos y posteriormente le coloca el valor de cada segmento y su resultado es tres, le da sentido al tres que obtuvo y dice que el triángulo mayor es tres veces más grande que el pequeño, por lo tanto, lo que hace es multiplicar el tres por el segmento CI y de esa forma obtiene la medida solicitada (véase figura 4.42a). El otro alumno utiliza directamente el teorema de Tales, establece las relaciones entre los lados correspondientes y posteriormente sustituye los valores de cada uno, resuelve la ecuación y su primer resultado es 5 y finalmente realiza lo mismo para el segmento solicitado (véase figura 4.42b).

Figura 4.42

Segundo momento de la última sesión



(a)



(b)

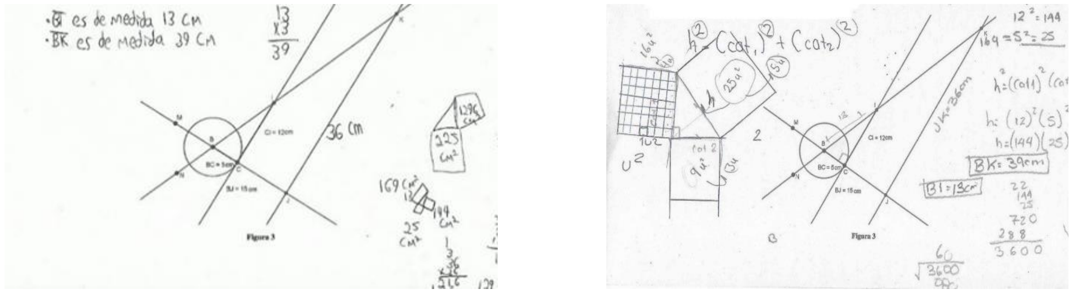
4.1.2.3. Tercer momento

En el tercer momento se les volvió a presentar la figura y se les solicitó obtener la medida de las hipotenusas de los dos triángulos, el propósito de este momento fue que hicieran uso del teorema de Pitágoras.

El alumno 8 realiza dos figuras a un lado, una es del triángulo más pequeño y la otra del triángulo mayor, en la primera traza los tres cuadrados sobre cada uno de los lados del triángulo y con las medidas de los lados obtiene el área de los cuadrados de los catetos y las suma y comienza a buscar dos números que le den como resultado la suma que obtuvo. En la segunda figura ya no coloca el cuadrado de la hipotenusa, es decir, ya no hace uso de las nociones del teorema de Pitágoras porque él recuerda que el triángulo más grande es tres veces mayor que el pequeño, él multiplica el tres por el número que encontró y obtiene las medidas de las dos hipotenusas, como se observa en la figura 4.43a. El alumno 26 realiza un dibujo de la primera terna pitagórica y a partir de ella obtiene la fórmula del teorema de Pitágoras y la utiliza con los valores de la figura para calcular uno de los segmentos solicitados y finalmente realiza lo mismo que el alumno 8, recuerda que el triángulo mayor es tres veces más grande que el pequeño y multiplica el tres por el resultado que había obtenido, de esta forma obtiene la medida de ambas hipotenusas como se muestra en la figura 4.43b.

Figura 4.43

Tercer momento de la última sesión



(a) (b)

4.1.3. Resultados de la fase de valoración

El propósito de esta fase fue valorar la consolidación de los conocimientos básicos de geometría, se centró la atención en cómo los alumnos desarrollan los conceptos, si los tienen consolidados o siguen presentando las mismas dificultades que se identificaron en el cuestionario diagnóstico, si centran su atención a lo figural o siguen recurriendo a la medida al momento de tratar figuras. y la forma de expresarse para explicar cómo resuelven los reactivos. Se hizo uso de un instrumento final (cuestionario) y se realizaron dos entrevistas semiestructuradas.

4.1.3.1 Instrumento final

A diferencia del cuestionario diagnóstico en este cuestionario no se quiere reconocer cómo tratan los alumnos las nociones sino si están consolidados. Al igual que los resultados del diagnóstico están divididos en las siete nociones conceptuales: segmentos, ángulos, triángulos, polígonos, circunferencia, teorema de Tales y teorema de Pitágoras. Se pone énfasis en aquellas respuestas que tienen mayor frecuencia, para determinar la consolidación de los conceptos básicos de geometría.

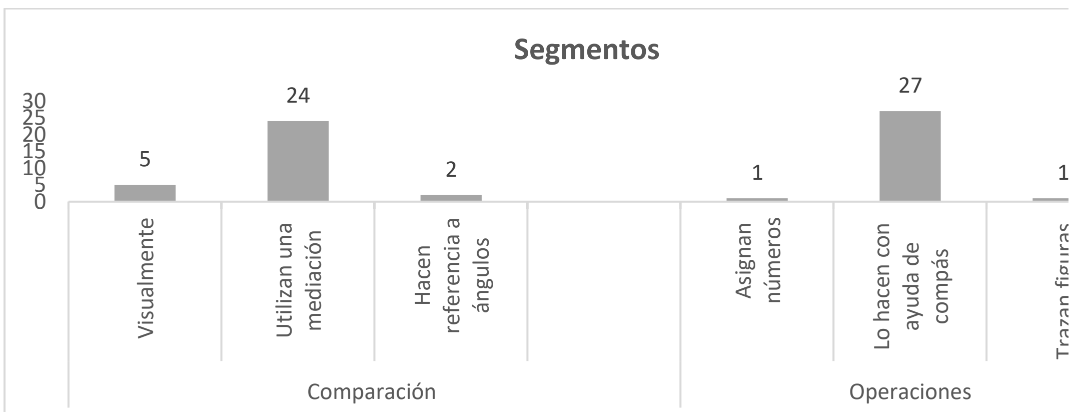
4.1.3.1.1. Segmentos.

Se tuvieron dos objetivos para la noción de segmentos: la comparación de segmentos y la operación entre ellos.

Los resultados se observan en la gráfica 4.8, se observa que algunas de las respuestas tienen relación con las interpretaciones obtenidas en el cuestionario diagnóstico, sin embargo, es menor la frecuencia.

Gráfica 4.8

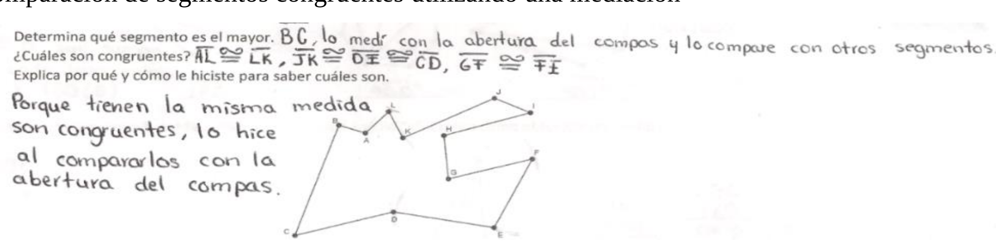
Resultados cuantitativos de la noción de segmentos



Los resultados en el propósito de comparación con mayor número de alumnos son cuando hacen uso de una mediación, esta mediación fue regla sin graduar y compás, se observó que le dan sentido a la función de dichos instrumentos, ya no hacen uso de objetos o de su cuerpo y tratan directamente con cada uno de los segmentos además utilizan lenguaje simbólico para nombrar los ángulos y la relación de congruencia que existe entre ellos como se observa en la figura 4.44.

Figura 4.44

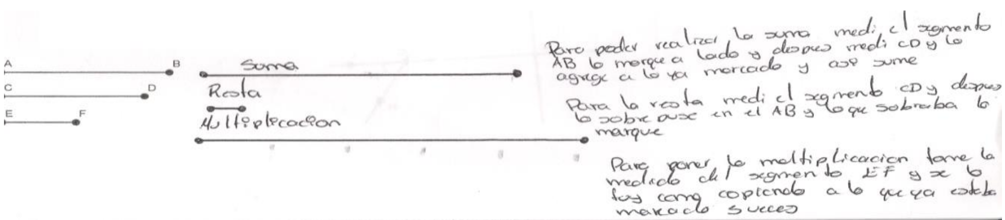
Comparación de segmentos congruentes utilizando una mediación



Respecto a la operaciones entre segmentos la mayoría de los alumnos lo hicieron como se muestra en la figura 4.45, hacen uso de regla sin graduar y compás para determinar la longitud de los segmentos, trasladarlos y realizar las operaciones requeridas. Tratan directamente con el segmento, estos alumnos ya no hacen referencia a los números.

Figura 4.45

Operan segmentos con ayuda del compás



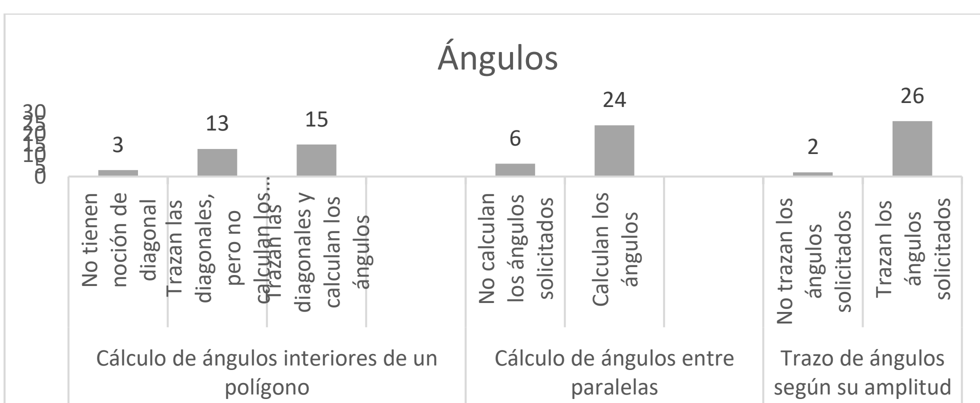
En ambos ejemplos los alumnos hacen uso de algunas ideas fundamentales de medida: comparación y adición, la diferencia con los resultados obtenidos en el cuestionario diagnóstico es que la manifestación de dichas ideas en este instrumento está en sentido geométrico y no numérico.

4.1.3.1.2. Ángulos.

Para los ángulos se establecieron tres propósitos: calcular los ángulos interiores en polígonos regulares e irregulares, calcular ángulos entre paralelas y trazar ángulos según su clasificación. En la gráfica 4.9 se observan los resultados obtenidos.

Gráfica 4.9

Resultados cuantitativos de la noción de ángulos

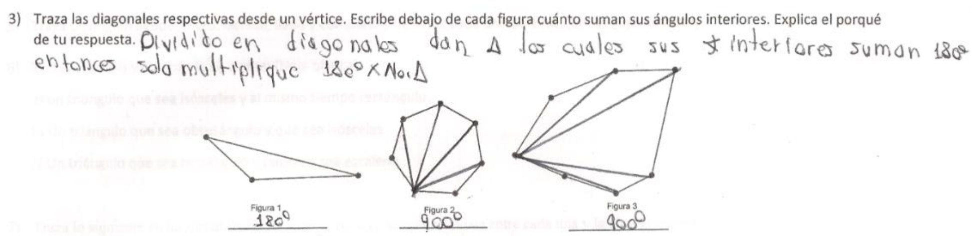


En el cálculo de ángulos interiores de polígonos regulares e irregulares se tienen dos resultados con frecuencias altas, la primera es cuando los alumnos solamente trazan las diagonales y la segunda es cuando trazan las diagonales y obtienen los ángulos solicitados.

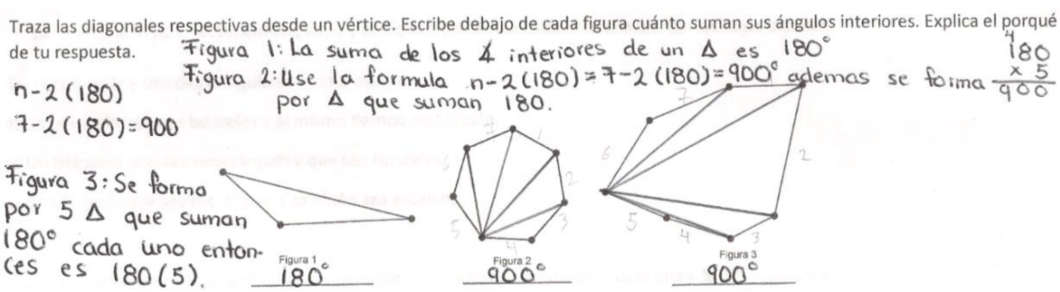
Solamente se centra la atención a la segunda forma, ellos utilizaron diferentes formas de realizar el inciso, una fue a partir de los ángulos de los triángulos formados del trazo de diagonales como se muestra en la figura 4.46 y la otra fue haciendo uso de la fórmula que los alumnos habían descubierto en las sesiones de desarrollo en el aula como se muestra en la figura 4.46 b.

Figura 4.46

Trazan las diagonales y calculan los ángulos interiores de un polígono



(a)



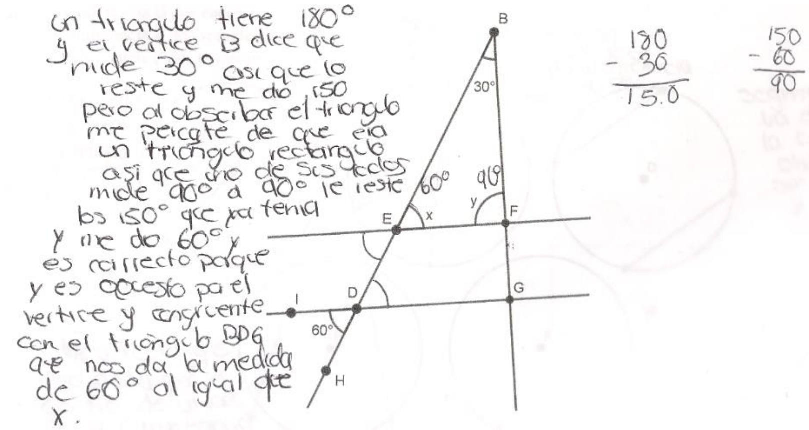
(b)

Respecto a los ángulos que se encuentran entre paralelas, en las respuestas con mayor frecuencia los alumnos obtienen los ángulos solicitados, en la figura 4.47 se muestra un ejemplo de un alumno que obtiene los resultados y explica el porqué de sus respuestas.

Este alumno comienza su explicación diciendo que la suma de los ángulos internos de un triángulo es de 180° y el dato que le dan es 30°, él cual se lo resta a 180° y mediante la percepción visual se percata que existe un ángulo de 90°. Para finalizar, el alumno visualiza el ángulo de 60° y justifica su respuesta como correcta a partir de los dos datos que se le dieron.

Figura 4.47

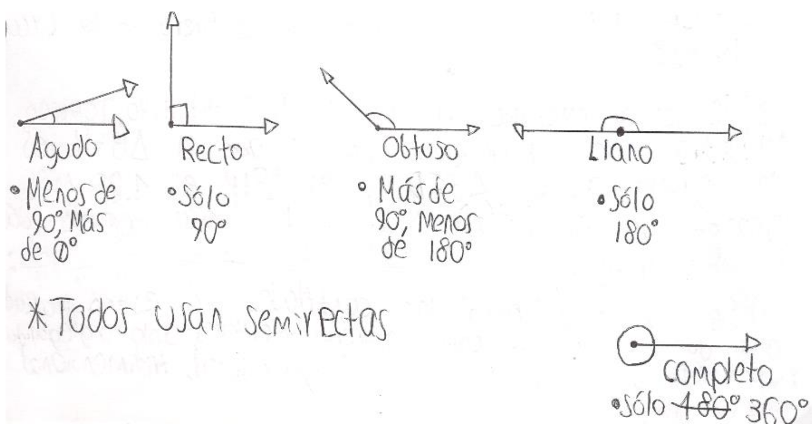
Calculan de manera correcta los ángulos solicitados.



Para la clase de los ángulos se les solicitó a los alumnos que trazaran un ángulo representativo de cada una de las clasificaciones y la mayoría de los alumnos lo realizó como la figura 4.48. Además de saber las clasificación de los ángulos, los trazan, ya no simplemente los reconocen.

Figura 4.48

Conocen las clases de ángulos y los trazan



En todos los ejemplos se consideró que los alumnos habían ascendido del nivel de visualización para Van Hiele y el de reconocimiento para Tall (2018), a los niveles de pensamiento geométrico de análisis según Van Hiele que se refiere a que los alumnos analizan las figuras en términos de sus componente y relaciones entre los componentes y descubren propiedades de una clase de forma empírica y respecto a los niveles de Tall

(2018), se encuentran en el nivel de descripción en donde el significado de la figura es refinado por la descripción de sus propiedades básicas, una figura es vista como un todo.

Los alumnos reconocen los elementos de las figuras y logran establecer conexiones entre la figura y el concepto, en los primeros ejemplos se observa la conexión de la figura a los conceptos y en el último ejemplo se da del concepto a la figura.

4.1.3.1.3. Triángulos.

Para triángulos solamente se trató un propósito: trazar triángulos según la clasificación de sus lados y sus ángulos. Los resultados se encuentran en la gráfica 4.10.

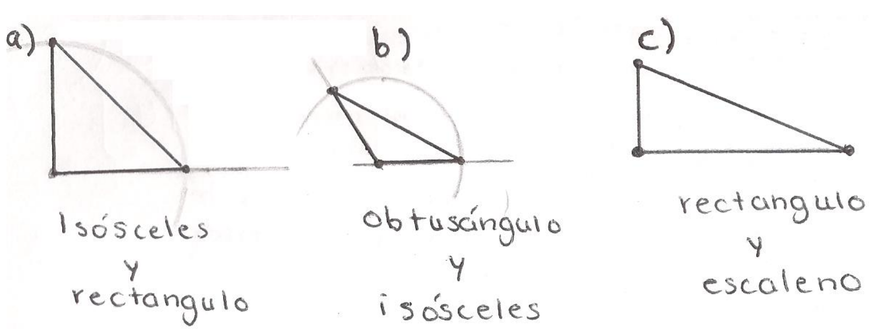
Gráfica 4.10

Resultados cuantitativos de la noción de triángulos

Los alumnos hacen uso de regla sin graduar y compás para trazar los triángulos solicitados como se muestra en la figura 4.49.

Figura 4.49

Conocen las clases de triángulos según sus lados y sus ángulos y logran trazarlos



Al igual que el último ejemplo de ángulos, los alumnos realizan una conexión del concepto y la figura; asocian una figura geométrica que cumpla las condiciones que marca el concepto. Los niveles de pensamiento ascienden en comparación con el diagnóstico, y se encuentran en el nivel de pensamiento geométrico de ordenación y clasificación y respecto al nivel de abstracción se encuentran en el nivel de definición.

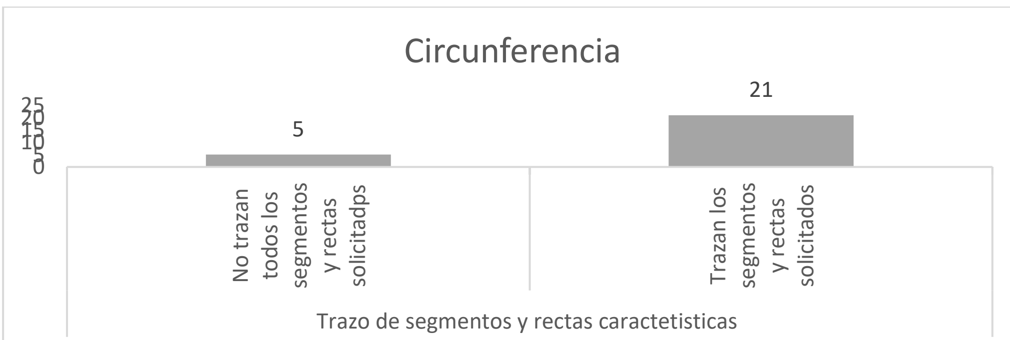
4.1.3.1.4. Circunferencia.

Para la circunferencia el propósito fue que trazaran los segmentos y rectas característicos.

En la gráfica 4.11 se muestran los resultados cuantitativos

Gráfica 4.11

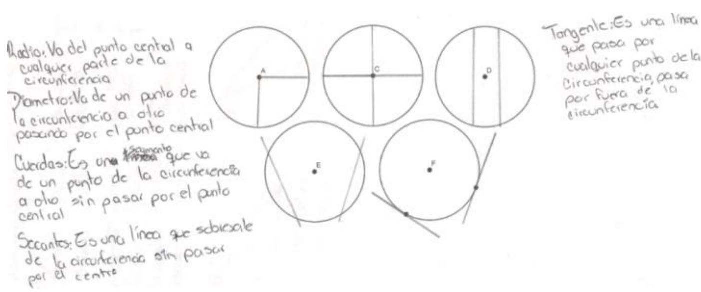
Resultados cuantitativos de la noción de circunferencia



La mayoría de los alumnos trazan todas las rectas y segmentos característicos, inclusive algunos colocan una breve descripción para cada una de ellas como se muestra en la figura 4.50.

Figura 4.50

Conocen todos los segmentos y rectas característicos de la circunferencia



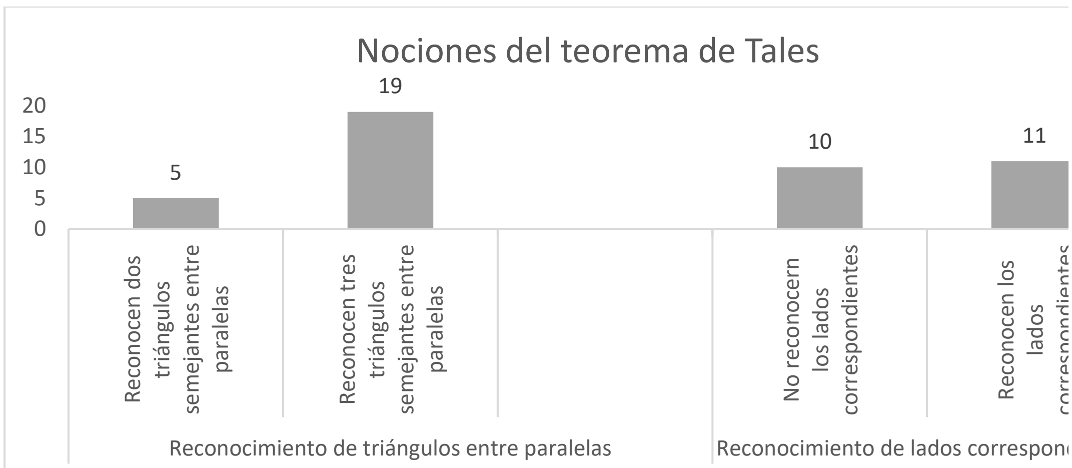
4.1.3.1.5. Noción del teorema de Tales

Los propósitos para el teorema de Tales fueron dos: reconocimiento de triángulos entre paralelas y de los lados correspondientes.

En la gráfica se muestran los resultados para cada uno de ellos.

Gráfica 4.12

Resultados cuantitativos de la noción del teorema de Tales

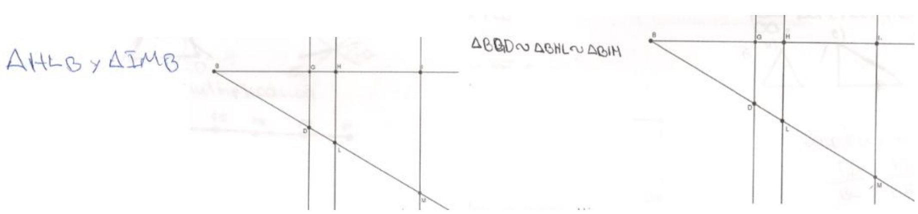


La mayoría de los alumnos reconocen los triángulos semejantes, algunos solamente dos (véase figura 4.51a), otros los tres (véase figura 4.51b).

Figura 4.51

(a) Reconocen dos triángulos semejantes que se encuentran entre paralelas

(b) *Reconocen tres triángulos semejantes que se encuentran entre paralelas*

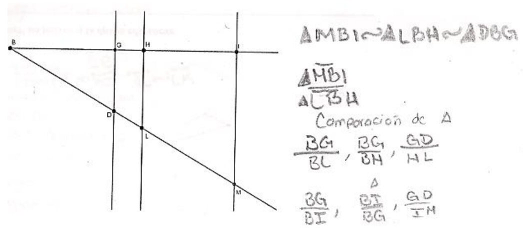


(a) (b)

Sin embargo, al reconocer los lados correspondientes algunos alumnos no los relacionan correctamente como se muestra en la figura 4.52.

Figura 4.52

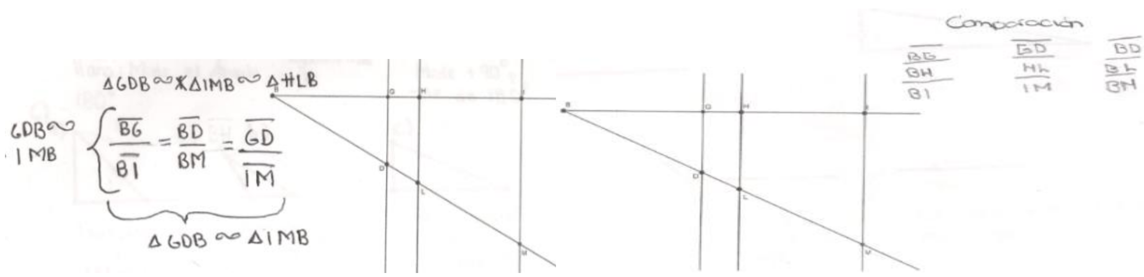
No reconocen los lados homólogos de la figura



Los alumnos que relacionan los lados lo expresan de diversas formas, unos lo hacen en igualdades como se muestra en la figura 4.53a y otros lo colocan en conjuntos como se observa en la figura 4.53b.

Figura 4.53

Reconocen los lados homólogos de la figura



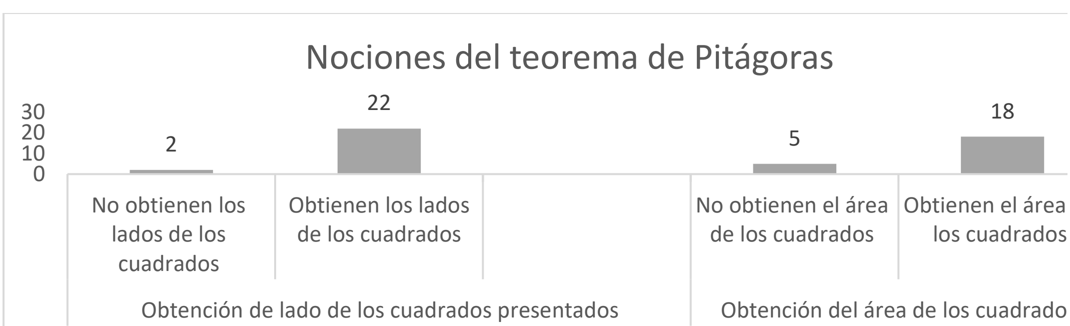
(a) (b)

4.1.3.1.6. Noción del teorema de Pitágoras.

Los propósitos para la noción del teorema de Pitágoras fueron: calcular la longitud de los lados de los cuadrados presentados. Los resultados se encuentran en la gráfica 4.13.

Gráfica 4.13

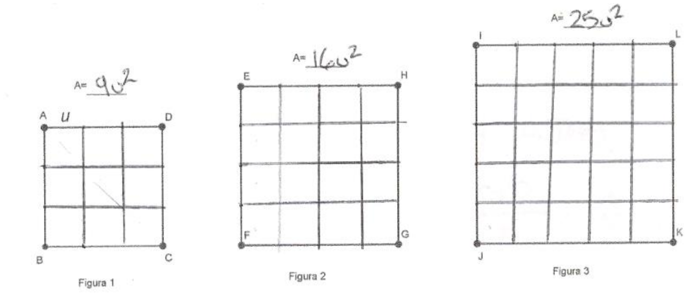
Resultados cuantitativos de la noción del teorema de Pitágoras



La mayoría de los alumnos obtiene las áreas de los tres cuadrados utilizando la unidad de medida sugerida inclusive colocan ya las unidades de medida que en este caso son cuadráticas.

Figura 4.54

Obtienen el área de los cuadrados presentados



4.1.3.2. Entrevistas.

El objetivo fue verificar si los alumnos tenían la madurez o no para llegar en buenas condiciones a los conceptos geométricos de transición para los conceptos básicos de la trigonometría, en las entrevistas se identificó qué conceptos o nociones previas fueron las que tenían los alumnos.

Se debe recordar que se hizo uso de las hojas de control de la última sesión del desarrollo en el aula para las entrevistas, por lo cual, la entrevista se divide en tres momentos:

- Primer momento: Calcular los ángulos dada una tangente y el valor de un ángulo.
- Segundo momento: Utilizar el teorema de Tales para calcular el lado de uno de los triángulos
- Tercer momento: Utilizar el teorema de Pitágoras para calcular el lado faltante de los triángulos de la figura de la hoja.

4.1.3.2.1. Características de los encuestados.

El alumno 11 se eligió para validar que tuviera consolidados los conceptos de geometría, ya que, desde el instrumento diagnóstico presentó respuestas correctas y a lo largo de las actividades manifestaba claridad en los conceptos tratados.

El alumno 26 se eligió por varias razones, la primera es que él solamente aplicaba los teoremas como se los enseñaban en sus cursos, o cómo los leía en los libros que consultaba con su hermana y también se identificaron varios errores en sus hojas de control, en donde se confundía con los contenidos de geometría.

4.1.3.2.2. Primer momento.

En el primer momento de la entrevista con el alumno 11 se pusieron en juego los siguientes conceptos: tangente, ángulos rectos, ángulos congruentes entre paralelas, triángulos semejantes, congruencia y semejanza en triángulos, ángulos suplementarios, ángulo llano y ángulos congruentes.

En el primer momento de la entrevista con el alumno 26 se pusieron en juego más conceptos, ya que, presentó dificultades, los conceptos abarcados fueron: teorema de Tales, razón y proporción, ángulos rectos, tangente, congruencia de ángulos entre paralelas, criterios de semejanza, ángulos opuestos por el vértice, congruencia, paralelas, ángulos suplementarios, resta con decimales, ángulos llanos, justificación de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, paralelogramos, ángulos internos de los cuadriláteros.

Los problemas que presentó el alumno fueron:

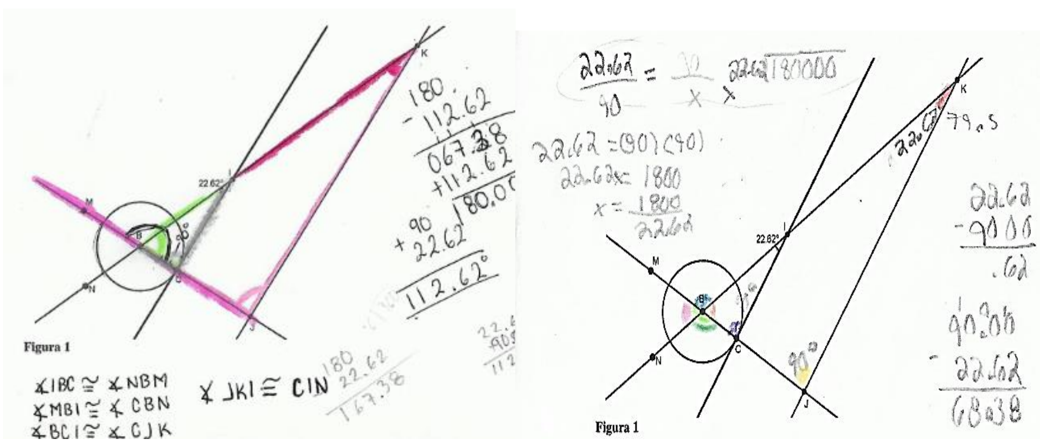
- Utiliza el teorema de Tales para obtener los ángulos solicitados en el primer momento
- Dificultad para diferenciar que el teorema de Tales está relacionado con segmentos y no con ángulos
- Errores para realizar sustracciones con punto decimal

El alumno 11, argumentó de manera rápida el papel que jugaba en el ejercicio la tangente, mencionó las características y la relación que tenía con los ángulos solicitados, para los demás ángulos hizo referencia a la semejanza de triángulos que se encontraban entre paralelas, por lo que justificaba que algunos ángulos eran congruentes entre sí (véase figura 4.55a).

En la entrevista del alumno 26 se comenzó preguntando por qué había utilizado el Teorema de Tales para obtener la medida de los ángulos, fue el primer error que se identificó en las hojas de control. Una vez que se dio cuenta que no le funcionaba el teorema de Tales para obtener los ángulos solicitados, el alumno puso en consideración nuevamente los datos que se le estaban brindando y para argumentar que uno de los ángulos era recto se refería a las perpendiculares. Con los demás ángulos tuvo dificultades porque se le complicó hacer sustracciones con números decimales (véase figura 4.55b).

Figura 4.55

Primer momento de la entrevista



(a) (b)

4.1.3.2.3. Segundo momento.

En el segundo momento de la entrevista del alumno 11 se abarcaron las siguientes nociones conceptuales: identificación de los triángulos semejantes de la figura, características de los triángulos semejantes, obtención de la medida de uno de los lados de un triángulo mediante el teorema de Tales y razón. Las nociones conceptuales abarcadas por el alumno 26 fueron: identificación de triángulos semejantes, descripción de las características de los triángulos semejantes, razones, trazo de triángulos semejantes, paralelas y ángulos, se le solicitó que comprobara si dos triángulos eran semejantes y luego que comprobara que los ángulos que él había trazado eran semejantes, comparaciones, razones, razones con decimal, semejanza, resolución de ecuaciones de primer grado.

Los errores que presentó fueron:

*Dificultad para realizar las comparaciones entre los segmentos de los triángulos semejantes.

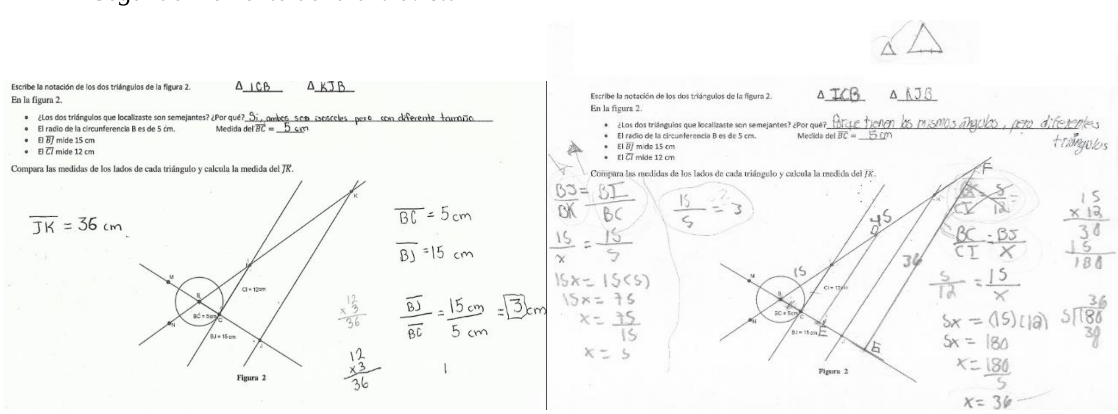
*Dificultad para concebir una razón menor a 0.

Hubo diferencias sustantivas en este momento de la entrevista, el primero es que para el alumno 26 se le solicitó que trazara figuras semejantes y se percatara que en esa misma figura se podía trazar muchos triángulos semejantes, el alumno encontró dos formas para trazar triángulos semejantes, sin embargo, no manifestó nociones de infinito después de trazar más triángulos. Posteriormente, el alumno comparó los segmentos de los triángulos semejantes de manera correcta, pero al momento de tratar las comparaciones de manera escrita los confundía lo cual dio lugar a una buena parte de la entrevista, ya que, cuando se pensaba que el alumno realizaría las comparaciones de manera correcta, se seguían manifestando los errores anteriores (véase figura 4.56b).

Al alumno 11 no se le solicitó que trazara triángulos, sino que hasta el final de la entrevista se le solicitó que identificara qué otros triángulos había semejantes a partir de todos los trazos que había realizado en sus hojas, pero le costó trabajo identificarlos (véase figura 4.56a).

Figura 4.56

Segundo momento de la entrevista



(a) (b)

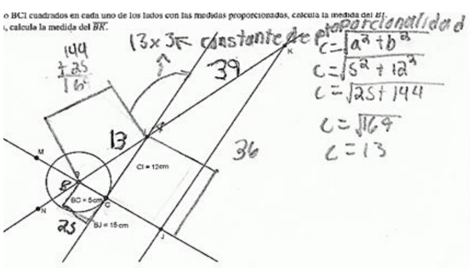
4.1.3.2.4. Tercer momento.

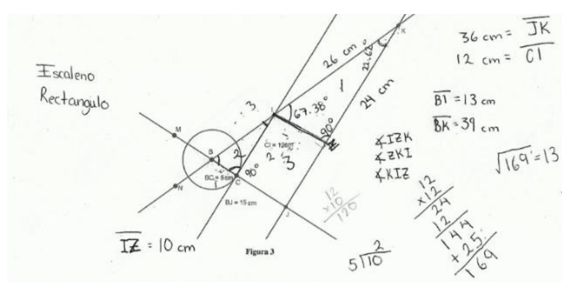
Las nociones abarcadas en la entrevista del alumno 11 en el tercer momento fueron: nociones del teorema de Pitágoras, suma y resta de áreas dependiendo el lado que se quiera calcular, características de un triángulo por lados y ángulos, descripción del triángulo, trazo de cuadrícula, obtención de una expresión algebraica del teorema de Pitágoras, explicación de la expresión del teorema de Pitágoras, obtención de la longitud de uno de los lados del triángulo rectángulo, diferencias entre obtener áreas y obtener longitudes (véase figura 4.57a).

Las nociones de la entrevista del alumno 26 en el tercer momento fueron: aplicación del teorema de Pitágoras, cómo surge el teorema de Pitágoras, unidades de medida, obtener el área sumando unidades de medida, trazo de cuadrícula, suma y resta de áreas dependiendo el lado que se quiera calcular, raíz cuadrada (véase figura 4.57b. Con 11 se centró la atención en la obtención de la expresión algebraica del teorema de Pitágoras y en el alumno 26 se centró la atención en la unidad de medida y en qué momento se tenían que sumar o restar las unidades de medida.

Figura 4.57

Tercer momento de la entrevista





(a) (b)

Debido a los resultados de la parte de valoración la docente reconoció que los conceptos básicos como el tratamiento con segmentos, ángulos, triángulos y el teorema de Pitágoras están consolidados en la mayoría de los alumnos, sin embargo, el concepto que aún presentó dificultades fue el teorema de Tales, su tratamiento en el aula requería de una forma distinta de enseñanza.

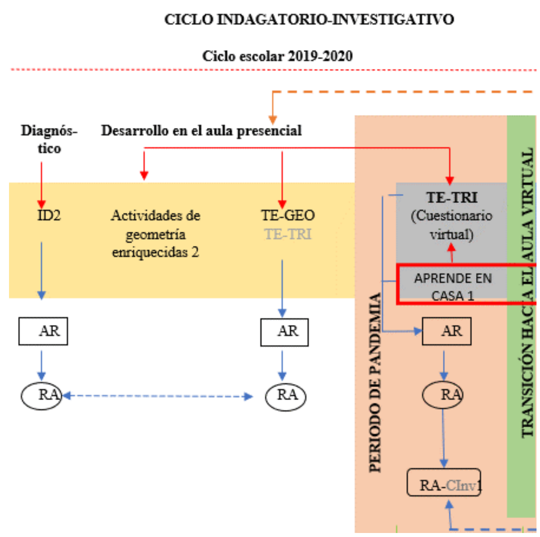
4.2. Resultados (análisis-interpretación) del ciclo indagatorio-investigativo

Los propósitos de este ciclo fueron: poner en juego las preguntas y objetivos de la investigación, tratar los contenidos más elaborados de geometría y también los contenidos básicos de trigonometría.

Este ciclo se llevó a cabo con un grupo de tercer grado del ciclo escolar 2019-2020, se realizó en tres fases: diagnóstico, desarrollo en el aula y transición. Debido al comienzo de la pandemia no se concluyó la fase de desarrollo en el aula en su totalidad y no hubo fase de valoración, la fase de transición se realizó con los resultados obtenidos de lo que se aplicó con los alumnos de forma presencial. Para el diagnóstico se diseñó un cuestionario (ID2), para el desarrollo en el aula se diseñaron actividades con conceptos de geometría (Act. 2) y dos trayectorias de enseñanza (TE); una para los contenidos de geometría (TE-Geo1) y otro para los de trigonometría (TE-Tri1) (véase figura 4.58).

Figura 4.58

Ciclo indagatorio-investigativo



A partir de la fase de transición del ciclo indagatorio, se realizaron modificaciones para el ciclo indagatorio-investigativo, la primera modificación fue el diseño del cuestionario diagnóstico, éste abarcó los tres ejes temáticos marcados en el Programa de Estudios (SEP, 2011) y la segunda modificación fue realizar una segunda reducción de la abstracción del concepto, pero desde documentos históricos (Euclides y Arquímedes) para complementar la primera reducción realizada a partir del análisis del Programa de Estudios (SEP, 2011), se identificaron los conceptos seminales y se trazaron las rutas para poner en juego los conceptos mínimos en el aula y poco a poco incorporar nuevos elementos.

Se modificó el tratamiento de la figura y se omitió completamente el uso de la medida en las primeras actividades, se trató la idea de unidad de medida para que los alumnos le dieran sentido a los números posteriormente y el uso de regla sin graduar y compás fue más fortalecida en las actividades.

4.2.1. Resultados de la fase diagnóstica

En la fase diagnóstica se diseñó un cuestionario, los resultados del cuestionario diagnóstico están divididos en tres partes, cada una corresponde al eje temático marcado en el Programa de Estudios (SEP, 2011): Cuatro reactivos de sentido numérico y pensamiento algebraico, diez para Forma, espacio y medida y finalmente cuatro para Manejo de la información. Se presentan los resultados de forma cuantitativa de los tres, sin embargo, se pondrá énfasis a las respuestas que los alumnos ofrecen respecto al eje de geometría. En la Gráfica 4.14 se muestran los resultados para cada uno de los reactivos.

Gráfica 4.14

Resultados generales del cuestionario diagnóstico (ID2)

La mayoría de los alumnos dejó en blanco los reactivos que no sabían cómo resolver, por tal motivo, se observan frecuencias muy bajas a pesar de que fue un grupo de 32 alumnos. El promedio de respuestas correctas en el eje relacionado con contenidos de aritmética y álgebra es el más bajo, seguido del eje vinculado con geometría y el mayor corresponde a los contenidos básicos de probabilidad y estadística.

Los reactivos de geometría para su análisis se dividieron en segmentos, ángulos, triángulos y polígonos, para este análisis se toman en cuenta dos tipos de evidencias, las primeras corresponden a algunas de las interpretaciones realizadas en el cuestionario diagnóstico del ciclo indagatorio, las cuales obstaculizan la construcción de contenidos más elaborados de geometría y aquellas evidencias que posibilitan seguir avanzando.

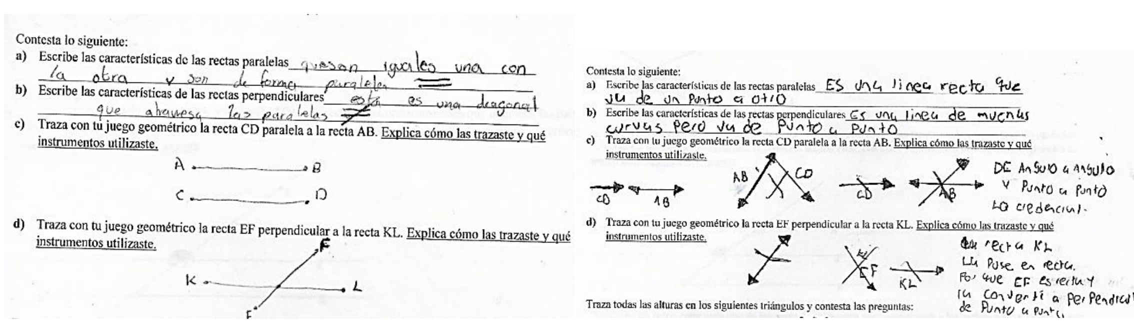
4.2.1.1. Segmentos.

Para la parte de segmentos se tomaron en cuenta los siguientes temas: noción de paralelas y perpendiculares.

Para los conceptos de segmentos paralelos y perpendiculares se identificaron respuestas en las que manifiestan que las rectas paralelas son de la misma longitud, son líneas rectas y respecto a la perpendicularidad consideran que son cuando dos rectas se "atraviesan" como se observa en las figuras 4.59a y 4.59b. En las paralelas presentan intuiciones en la representación gráfica, pero en la explicación mencionan que son congruentes.

Figura 4.59

Nociones de paralelas y perpendiculares erróneas

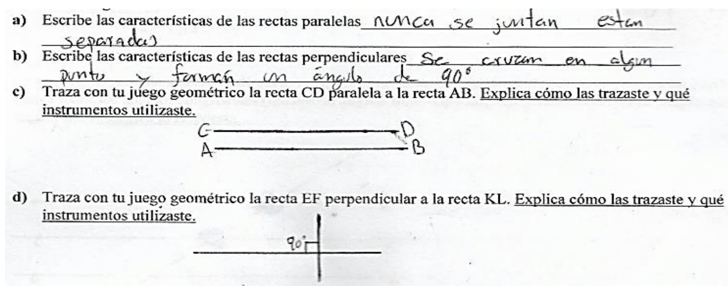


(a) **(b)**

Seis alumnos presentaron ideas que tienen relación con las características de las paralelas y perpendiculares, en la figura 4.60 se muestran las respuestas de un alumno que considera que las paralelas son rectas que nunca se juntan y perpendiculares aquellas que se cruzan y forma un ángulo de 90°. Sin embargo, para las paralelas no manifiesta que estén a la misma distancia y en las perpendiculares solamente menciona que se forma un ángulo recto, no se sabe si reconoce que son cuatro ángulos rectos los que se forman. Las nociones de perpendicularidad y paralelismo no están consolidadas en los alumnos.

Figura 4.60

Nociones de paralelas y perpendiculares


a) Escribe las características de las rectas paralelas nunca se juntan estan separadas

b) Escribe las características de las rectas perpendiculares Se cruzan en algun punto y forman un ángulo de 90°

c) Traza con tu juego geométrico la recta CD paralela a la recta AB. Explica cómo las trazaste y qué instrumentos utilizaste.

C D
A B

d) Traza con tu juego geométrico la recta EF perpendicular a la recta KL. Explica cómo las trazaste y qué instrumentos utilizaste.

90°

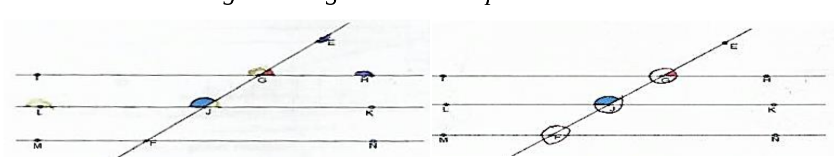
4.2.1.2. Ángulos.

Para ángulos se consideró el reconocimiento de distintos tipos, identificación de ángulos congruentes entre paralelas, valor de ángulos internos de un triángulo y reconocimiento de ángulo central en un polígono regular y su valor.

Para la identificación de ángulos entre paralelas se marcaron dos ángulos con colores distintos y los alumnos debían reconocer los que fueran congruentes y marcarlos con el mismo color. La mayoría de los alumnos no los reconoció, algunos marcaban el ángulo en un punto de la recta como se muestra en la figura 4.61a, otros marcaban el ángulo completo como se muestra en la figura 4.61b.

Figura 4.61

No reconocen los ángulos congruentes entre paralelas

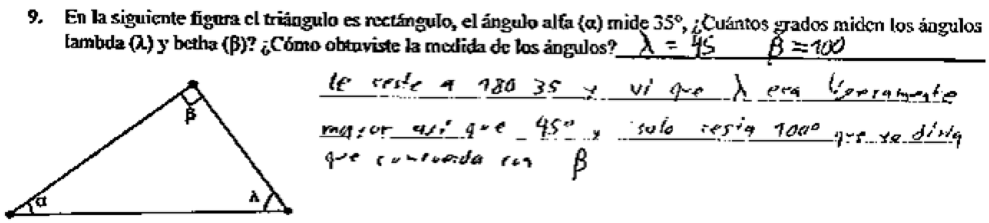


(a) **(b)**

Respecto al valor de los ángulos internos de un triángulo rectángulo, se identificó que la mayoría de los alumnos no tiene presente el teorema que corresponde a la suma de los ángulos internos de un triángulo, ni las características de los triángulos rectángulos. En la figura 4.62 se muestra un ejemplo de un alumno que conoce el teorema de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, pero no reconoce que el triángulo presentado es rectángulo, y aproxima el valor del ángulo betha de manera visual, los valores que encuentra suman 180°.

Figura 4.62

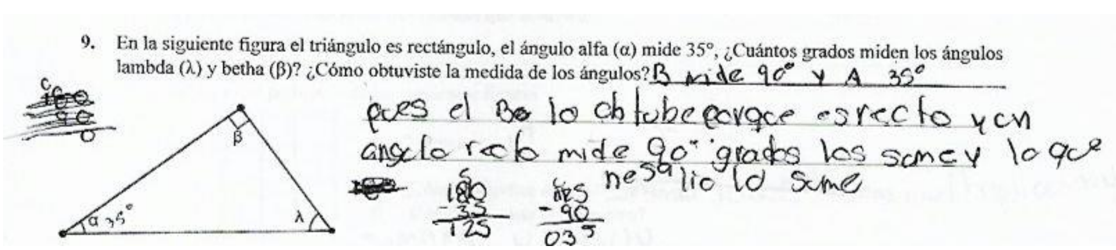
Conocen el teorema de la suma de los ángulos internos de un triángulo, pero no calculan correctamente los valores solicitados



El ejemplo de la figura 4.63 muestra a un alumno que tiene presente el teorema de la suma de ángulos interiores de un triángulo y reconoció las características del triángulo rectángulo, sin embargo, realiza de manera incorrecta sus operaciones y al final no comprueba si sus resultados son correctos.

Figura 4.63

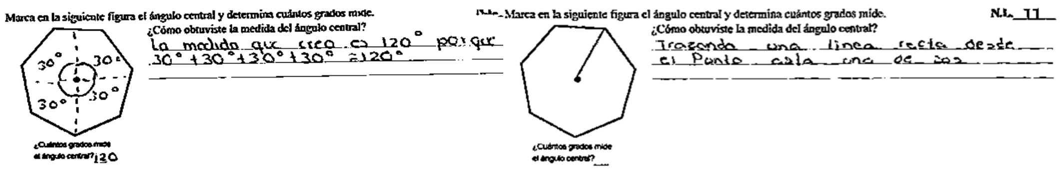
Conocen el teorema de la suma de los ángulos internos de un triángulo y calculan correctamente los valores solicitados



En los ángulos internos en un polígono, la mayoría de los alumnos no los reconocen, algunos dividieron el polígono en cuatro partes y colocaron que el valor de cada uno corresponde a 30° y si se realiza la adición el resultado es 120° como se muestra en la figura 4.64a, otros solamente trazaron un segmento desde el centro a uno de los vértices como se muestra en la figura 4.64b.

Figura 4.64

No reconocen el ángulo central en un polígono regular

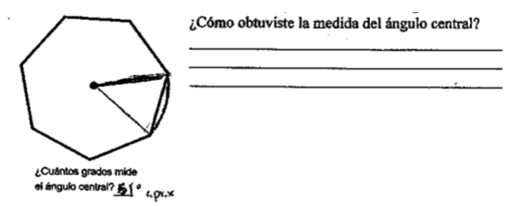


(a) **(b)**

Solamente un alumno identificó el ángulo central y obtuvo su valor, sin embargo, no explica cómo lo realizó como se muestra en la figura 4.65.

Figura 4.65

Reconoce el ángulo central y calcula su valor



4.2.1.3. Triángulos.

Para triángulos se tomó en cuenta el trazo de altura en diferentes tipos de triángulos.

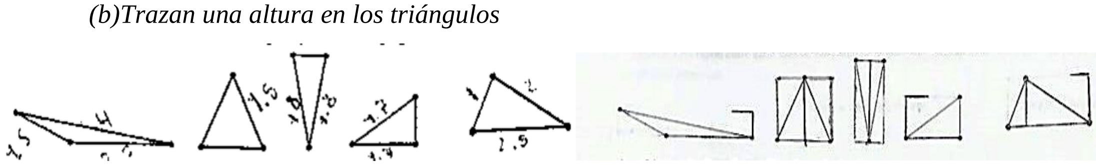
En algunas de las respuestas se vuelve a encontrar al igual que en el cuestionario diagnóstico del ciclo indagatorio a alumnos que hacen uso de la asignación numérica aun cuando se les solicita que tracen, en este caso la altura, se centran en la longitud de los lados como se muestra en la figura 4.66a.

También se identificaron trazos en donde los alumnos realizan la altura y trazan un rectángulo, mostrando que esas también corresponden a la misma altura como se muestra en la figura 4.66b.

Figura 4.66

(a)Asignan un número cuando se les solicita trazar la altura

(b)Trazan una altura en los triángulos

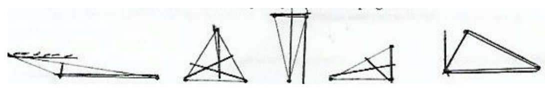


(a) **(b)**

Otros alumnos trazan tres alturas, pero no tienen nociones de perpendicularidad en las dos que no tienen uno de los lados de forma horizontal, por lo que se vio en el apartado de segmentos, los alumnos consideran que por el simple hecho de intersecarse ya cumplen con la característica de altura (véase figura 4.67).

Figura 4.67

Trazo de tres alturas en el triángulo



4.2.1.4. Polígonos.

En polígonos se colocó un reactivo para el reconocimiento de cuadriláteros, así como de las características de sus elementos (lados, ángulos, diagonales) y también la diferenciación entre el perímetro y el área de un cuadrado dada una unidad de medida arbitraria. La mayoría de los alumnos no reconoció los cuadriláteros presentados, algunos inclusive confundieron el cuadrado con un rombo, puesto que ninguno de sus lados estaba de forma horizontal, así mismo no lograban describir cómo eran sus lados, sus ángulos ni sus diagonales como se observa en la figura 4.68.

Figura 4.68

No reconocen los cuadriláteros ni las características de sus lados, ángulos y diagonales

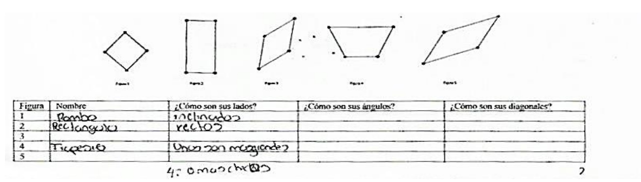


Figura	Nombre	¿Cómo son sus lados?	¿Cómo son sus ángulos?	¿Cómo son sus diagonales?
1	Rombo	inclinados		
2	Rectangulo	rectos		
3				
4	Trapesio	Unos son mas grandes		
5				

4: o mas chicos

Hubo otros alumnos que reconocieron todos los cuadriláteros presentados y colocaron las características de sus lados y sus ángulos, sin embargo, no reconocieron las diagonales como se muestra en la figura 3.69.

Figura 3.69

Reconocen los cuadriláteros, las características de sus lados, ángulos y diagonales

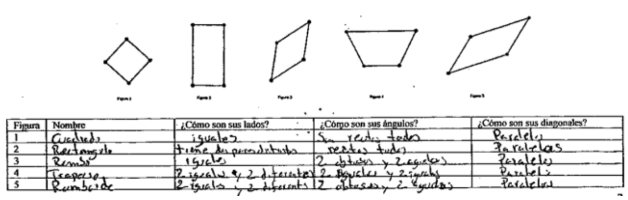


Figura	Nombre	¿Cómo son sus lados?	¿Cómo son sus ángulos?	¿Cómo son sus diagonales?
1	Cuadrado	iguales	Son rectos todos	Paralelos
2	Rectangulo	tiene dos perpendiculares	rectos todos	Paralelas
3	Rombo	iguales	2 obtusos y 2 agudos	Paralelos
4	Trapecio	2 iguales y 2 diferentes	2 iguales y 2 iguales	Paralelos
5	Romboide	2 iguales y 2 diferentes	2 obtusos y 2 agudos	Paralelos

4.2.2. Resultados de la fase de desarrollo en el aula

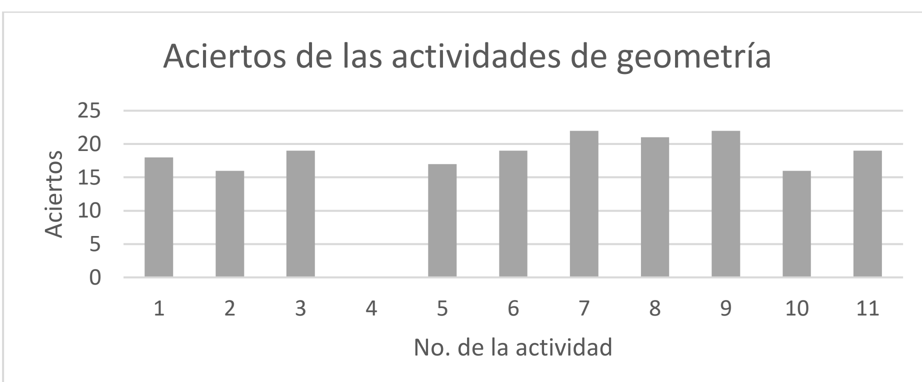
Esta fase se desarrolló en tres partes: actividades de geometría con conceptos básicos, y dos trayectorias de enseñanza, la primera para los conceptos de transición de geometría y la segunda para los conceptos básicos de trigonometría. En la primera se puso énfasis en la construcción con regla sin graduar y compás, se pusieron en juego algunos de los teoremas de los libros, I, VI y X de Euclides, en la trayectoria de enseñanza de geometría se desarrollaron hojas de control para cada uno de los conceptos identificados como transitorios (triángulo rectángulo, teorema de Tales, teorema de Pitágoras, segmentos inconmensurables y circunferencia), finalmente, para la trayectoria de enseñanza de trigonometría también se habían diseñado hojas de control para los conceptos, sin embargo, se tuvo que modificar para aplicarse como un cuestionario virtual de opción múltiple.

4.2.2.1. Actividades de geometría.

Se realizaron actividades relacionadas con los siguientes conceptos básicos: segmentos, ángulos y triángulos. La forma en la que se trataron en el aula no corresponde al acomodo que se realiza para su análisis. la docente previamente había realizado los teoremas de construcción del libro 1, por lo tanto, sus observaciones estaban enfocadas a las formas en las que los alumnos lo trazaban.

Gráfica 4.15

Resultados de las actividades de geometría



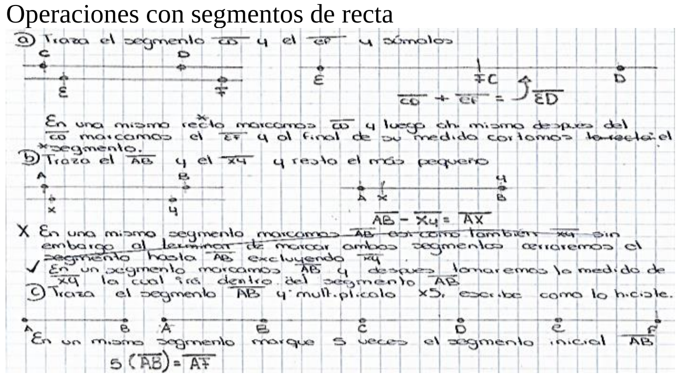
4.2.2.1.1. Segmentos.

En segmentos se trataron los siguientes temas: operaciones con segmentos (adición, sustracción, multiplicación y división), trazo de paralelas y utilización de una unidad de medida arbitraria para determinar la longitud de segmentos.

4.2.2.1.1.1. Operaciones con segmentos.

La operación con segmentos, específicamente adición, sustracción y multiplicación se colocó como una de las primeras actividades (después de la diferenciación entre recta, semirrecta y segmento de recta) puesto que estábamos enfocados a que los alumnos trataran directamente con la forma presentada, con estas actividades los alumnos comenzaron a utilizar regla sin graduar y compás, y descubrían qué características y ventajas tenía cada uno de los instrumentos. La actividad se realizó sin complicaciones, los alumnos comenzaron a tratar con lo que ellos mismos trazaban, no se les brindó un segmento específico, sino que ellos con los conocimientos previos que tenían debían trazarlos y posteriormente operar con ellos. En el ejemplo de la figura 4.70 se observa cómo los alumnos realizan sus trazos, inclusive colocan la operación realizada de forma simbólica y explican cómo realizan cada una de las operaciones. A diferencia de las respuestas que se obtuvieron en el cuestionario diagnóstico del ciclo indagatorio en donde los alumnos utilizaban lenguaje simbólico y posteriormente no sabían a qué correspondía, en las actividades de este ciclo los alumnos logran darle sentido a las letras que utilizan.

Figura 4.70
Operaciones con segmentos de recta



4.2.2.1.1.2. Trazo de paralelas

En la actividad que se desarrolló con los alumnos para tratar el concepto de paralelismo, primeramente, se les cuestionó sobre sus conocimientos previos de las características de dos rectas paralelas, los alumnos manifestaban que eran líneas que nunca se cruzaban o que eran iguales, cómo se había observado en el diagnóstico, los alumnos no tienen consolidado el concepto de paralelismo. A partir de la socialización que se tuvo en el salón de clases, el grupo comenzó a reconocer las características de dos rectas paralelas entre sí, posteriormente se logró concluir que las paralelas tienen la misma inclinación y distancia entre ellas.

Se les solicitó que con lo que se había tratado en clase construyeran con regla sin graduar y compás, primeramente, un segmento de recta cualquiera y posteriormente un segmento de recta paralelo a éste, el cual es uno de los teoremas del libro 1 de Euclides. Desde las primeras actividades no se habían utilizado los números para tratar las figuras geométricas, por lo cual, fue una de las actividades que consolidarían la utilización de los segmentos con los instrumentos (regla y compás). La docente no les dijo la forma en la que se trazan los segmentos paralelos, puesto que, se quería observar cómo los alumnos tratan la figura a partir de las características del concepto, mediante el uso de los dos instrumentos. Se desarrolló en binas, y se les dijo que no borraran aquellas construcciones que consideraran que estaban mal, sino que los tratarían como intentos, porque podría que a partir de ellos tuvieran ideas para la siguiente construcción. La docente monitoreaba, observaba y cuestionaba pequeñas acciones que los alumnos realizaban en la actividad, porque cada una de las acciones que realizaran los alumnos con sus instrumentos era objeto para interpretarlo.

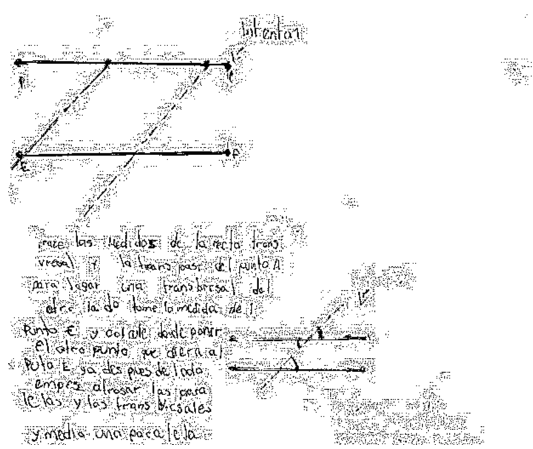
Al principio algunos equipos de trabajo trazaban un segmento de recta y en cada extremo trazaban dos circunferencias, luego visualmente colocaban otro segmento cuyos vértices serían tangentes a las circunferencias, la docente los cuestionaba de cómo sabrían cuál sería el punto de tangencia, es decir, los dos puntos que servirían para trazar un segmento que estuviera a la misma distancia. Les costó trabajo comprender por qué el error visual no se estaba utilizando en las construcciones.

Sin embargo, comprendieron que para trazar un segmento se necesitan dos puntos, y para el propósito de la actividad, esos dos puntos debían estar a la misma distancia del segmento que habían trazado con anterioridad, pero si ellos trazaban visualmente el segmento podría pasar que no estuvieran a la misma distancia. Por ser una de las primeras actividades complejas en la construcción se les brindó una “pista” de que podían utilizar una transversal para la construcción (que es como lo traza Euclides), algunos hicieron uso de ella y otros no.

Se les motivó a pensar en otras construcciones en donde ubicaran explícitamente los dos puntos haciendo uso de su regla y compás, poco a poco los alumnos comenzaron a tener ideas muy variadas, las cuales lograban justificar mediante los trazos que habían realizado. A continuación, se presenta un ejemplo de una actividad que realizó una bina de trabajo. Se observan tres intentos para la construcción y tres descripciones de cómo realiza los trazos. En la figura 4.71 se observa que tienen dos intentos, el primero contiene error visual y el segundo comienza a poner en juego su pensamiento intuitivo para construir lo que se le solicita.

Figura 4.71

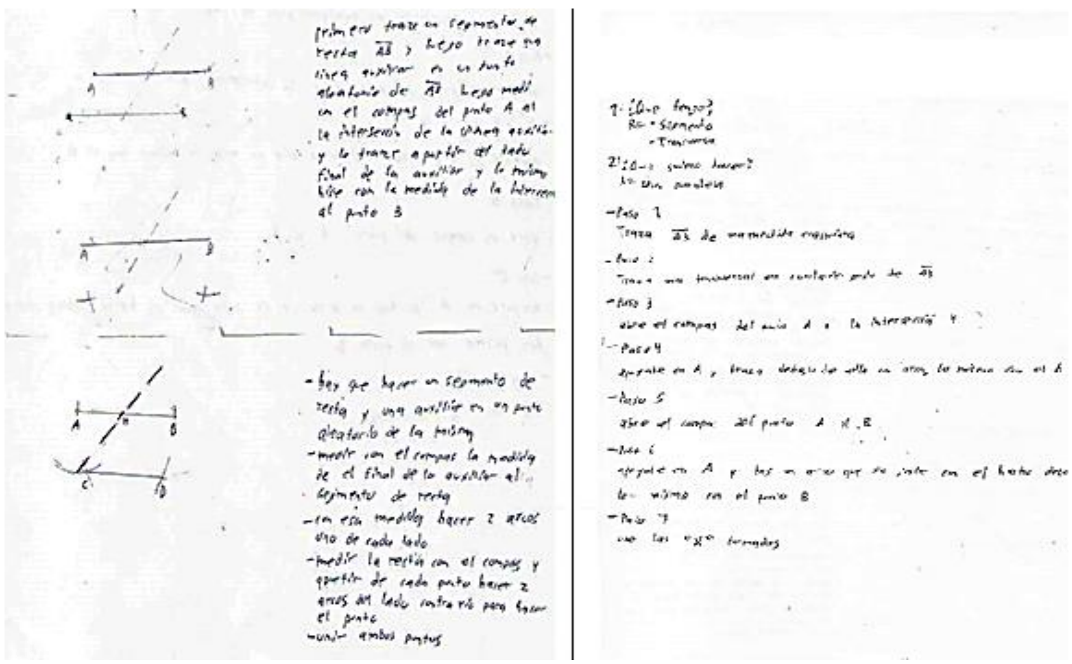
Ejemplo uno de trazo de paralelas



En el siguiente ejemplo, se observa que tiene tres intentos para la construcción y a los lados coloca la explicación de cómo lo realizó paso a paso, en el primero presenta un erros visual, tantea que los puntos están a las mismas distancia y posteriormente traza la paralela, al cuestionar a los alumnos se dieron cuenta y desarrollaron su segunda idea, se observan una marcas hechas con el compás, en donde ubican dos puntos que están a la misma distancia, el cual no contiene el erros visual del primero. La docente les mencionó que debían responder tres preguntas: 1) ¿qué se tiene?, 2) ¿qué se quiere hacer? y ¿cómo lo hicieron?, dichas preguntas fueron un acercamiento al proceso que realiza Euclides para sus demostraciones, sin embargo, debido al nivel educativo, solamente se usan como guía para que los alumnos manifiesten cómo realizan sus construcciones. En este sentido, la explicación que ofrecen los alumnos tuvo una estructura que les posibilitó regresar a este apunte y entender cómo habían realizado su construcción y les ayudó a fortalecer su escritura y argumentación, asimismo, comenzaron a utilizar notación simbólica.

Figura 4.72

Ejemplo dos de trazo de paralelas

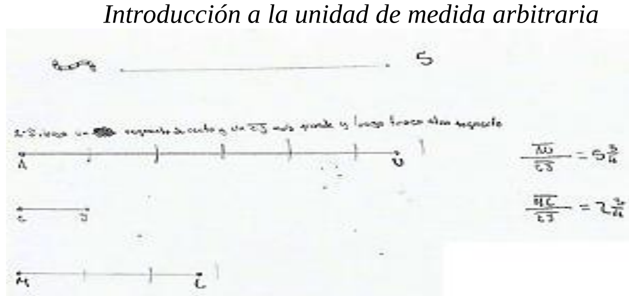


4.2.2.1.1.3. Unidad de medida arbitraria

En un principio se realizó la actividad con un objeto cualquiera que se utilizaría como unidad de medida para determinar la longitud de un segmento, sin embargo, a partir de esas nociones se transitó a tomar un segmento cualquiera como unidad de medida para determinar la longitud de un segmento como se muestra en el libro X de Euclides, lo cual fue una actividad de importancia para la consolidación de los contenidos geométricos de transición tratados en la Trayectoria de enseñanza de geometría.

En la figura 4.73 se observa que el objeto que el alumno elige como unidad de medida es un gusanito, lo dibuja doblado no estirado, de extremo a extremo lo considera como su unidad, en la sesión se trataron los inconvenientes de tratar con objetos concretos y se propuso utilizar segmentos, en la figura se observa cómo determina la longitud de los segmentos, inclusive colocan fracción, otros reconocieron que no son centímetros, sino que depende de cómo se nombre la unidad de medida.

Figura 4.73
Introducción a la unidad de medida arbitraria



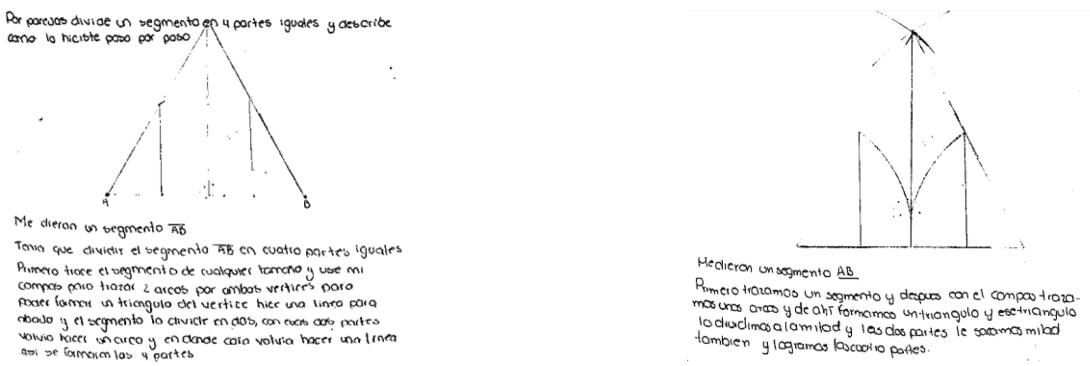
4.2.2.1.1.4. División de segmentos en múltiplos de dos y división de segmentos en "n" número de partes

Este contenido no se trató en las primeras sesiones, se dejó antes del teorema de Tales, después de segmentos, ángulos y triángulos, puesto que, lo constituyen más conceptos a comparación de las otras tres operaciones vistas anteriormente. Los alumnos desarrollaron la actividad en binas o tercias, se trató la división entre múltiplos del dos, y en "n" número de partes diferentes a múltiplos de dos. Para la primera se les dio la consigna de que trazaran un segmento de recta y posteriormente lo dividieran en cuatro partes iguales y para la segunda que lo dividieran en los que ellos quisieran sin que fuera múltiplo de dos. En esta actividad hicieron uso de sus conocimientos previos de lo que se había visto en cada una de las sesiones porque el docente les preguntaba el por qué su construcción era considerada correcta respecto a los conceptos geométricos.

Para la división de segmentos en múltiplos de dos hubo una diversidad de respuestas, cada equipo de trabajo propuso una forma distinta para la división de segmentos, algunas eran muy parecidas entre sí, sin embargo, tenían elementos que las diferenciaban (véase figuras 4.74a y 4.74b).

Figura 4.74

Ejemplos de división de segmentos en partes iguales (múltiplos de dos)



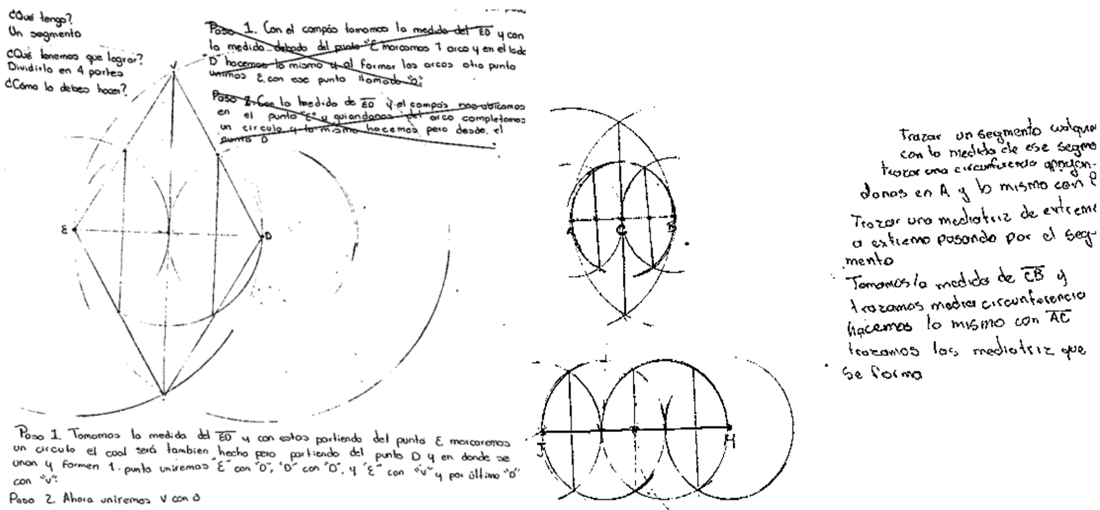
(a) **(b)**

Las figuras 4.75a y 4.75b, están asociadas, sin embargo, en una se tiene la idea de triángulo, en la otra se tiene la de la mediatriz, a partir de las dos ideas realizan las divisiones solicitadas.

En la figura 4.75a realizan un triángulo equilátero, posteriormente, trazan una perpendicular que es la altura del triángulo, toman la longitud de uno de los extremos de segmento al punto medio y con ella trazan tres circunferencias, dos a los extremos y una con apoyo en el punto medio, a partir de ello trazan las perpendiculares y las intersecciones que se realicen en el segmento inicial serán las divisiones del segmento. Realizan una descripción breve de cómo realizan su construcción. En la figura 4.75b se observan dos construcciones y una explicación, la explicación es para la que se muestra con número 1, primero trazan un segmento cualquiera, con la medida del segmento se apoya en los dos extremos y traza una circunferencia en cada uno de ellos, una vez localizado el punto medio, toman la longitud y trazan tres circunferencias, dos en los extremos del segmento y una en el punto medio como en el ejemplo anterior, por último, una las intersecciones y obtiene las mediatrices de las mitades del segmento inicial. La otra construcción que ofrece ese equipo de trabajo no tiene explicación, por lo cual se tiene que interpretar su construcción mediante los trazos que realizaron.

Figura 4.75

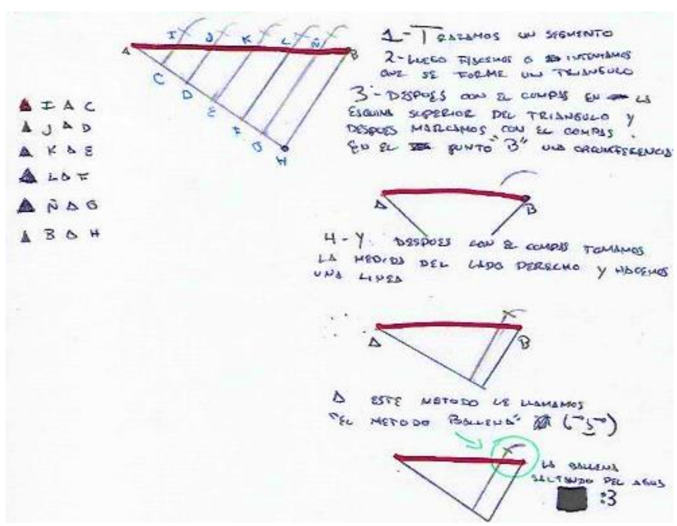
Ejemplo de división de segmentos partes iguales múltiplos de dos



Posteriormente, para la división de segmentos en n partes, se les complicó encontrar una forma general para dividir cualquier segmento, sin embargo, hicieron varios intentos, finalmente la docente explicitó el teorema de Arquímedes, a algunos alumnos les resultó útil para acomodar las ideas que surgieron cuando ellos se enfrentaron a la actividad. A un equipo le resultó fácil realizar la división, puesto que, el trazo de segmentos paralelos ya lo tenían dominado, inclusive le habían colocado un nombre a lo que habían realizado (el método ballena) como se muestra en la figura 4.76.

Figura 4.76

Utilización del método de Arquímedes para dividir segmentos en n partes



4.2.2.1.2. Ángulos.

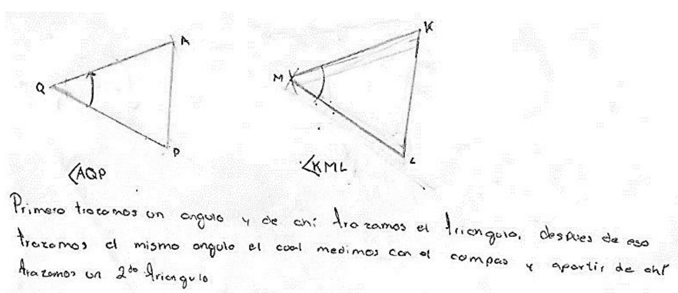
Para ángulos se trató la construcción con regla y compás de ángulos, ángulos congruentes y también la identificación de ángulos congruentes entre paralelas.

Primeramente, la docente cuestionó a los alumnos sobre los elementos de un ángulo y se fueron explicitando las características de un ángulo, a partir de lo tratado se les solicitó que trazaran un ángulo cualquiera y posteriormente trazaran un ángulo congruente al trazado inicialmente, para este momento los alumnos ya habían tratado con los conceptos de segmento de recta, por lo cual, ya tenían un mejor dominio de la regla y el compás.

Algunos realizaron la siguiente construcción, trazaron su ángulo cualquiera y para trazar un congruente a él primero unieron el ángulo para trazar un triángulo, posteriormente trazaron un triángulo congruente, con ello aseguraban que tuviera la misma amplitud. Esta construcción es la que realiza Euclides en el primer libro.

Figura 4.77

Construcción de ángulos congruentes con regla y compás

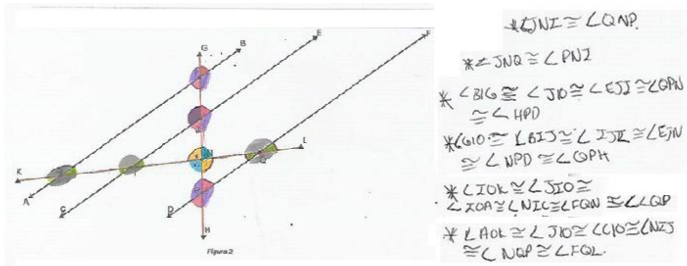


Para la identificación de ángulos congruentes entre paralelas, se les solicitó que ellos trazaran dos paralelas y una transversal y reconocieran los ángulos congruentes, después se les solicitó que lo realizaran con tres paralelas y finalmente se les entregó una hoja impresa con tres paralelas y dos transversales para que ellos identificaran los ángulos congruentes, la mayoría los reconocieron como se muestra en la figura 4.78, algunos nombraron los ángulos y colocaron con simbología los que eran congruentes.

Antes de la formación para la investigación este contenido presentaba muchas dificultades para su enseñanza, los alumnos se confundían con los nombres y solamente los identificaban según sus medidas, por lo tanto, cuando se les presentaban las figuras sin números los alumnos no lograban reconocerlos. Se observó que si se omiten algunos elementos como la medida y los nombres de cada ángulo los alumnos los reconocen fácilmente.

Figura 4.78

Reconocimiento de ángulos congruentes entre paralelas

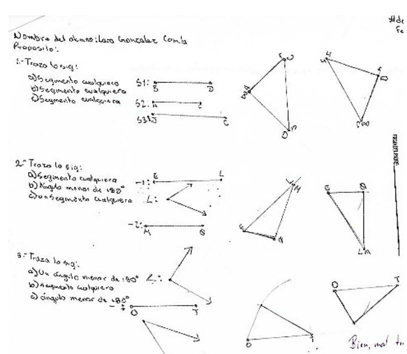


4.2.2.1.3. Triángulos

Para triángulos se trató: elementos de un triángulo (ángulos y lados), construcción con regla y compás de triángulos congruentes dados ángulos o segmentos, clasificaciones de triángulos según sus lados y sus ángulos, triángulos semejantes. Para la construcción de triángulos congruentes (teorema) los alumnos no presentaron dificultades, sin embargo, cuando se les solicitó trazar triángulos dados dos segmentos y un ángulo, los alumnos presentaron dificultades, pero lograron trazarlos. Cuando se les daban dos ángulos y un segmento, la mayoría de los alumnos no lograron trazar el triángulo. Como se muestra en las figuras 4.79. A partir de esa actividad se hizo reflexión sobre los posibles elementos mínimos para trazar un triángulo congruente y se hicieron explícitos los criterios de congruencia.

Figura 4.79

Trazo de triángulos congruentes con regla y compás

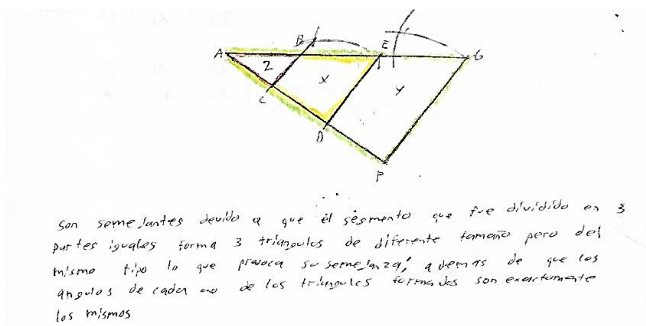


4.2.2.1.3.1. Triángulos semejantes

Para la semejanza de triángulos se realizaron tres momentos, en el primero los alumnos realizaron una división de un segmento en tres partes iguales haciendo uso del método de Arquímedes (véase figura 4.80). Una vez realizada la construcción se les solicitó que identificaran los triángulos que observaban. Unos alumnos lo hicieron marcando con distintos colores los triángulos, mencionaban que estaban encajados uno con otro como en la figura 4.80.

Figura 4.80

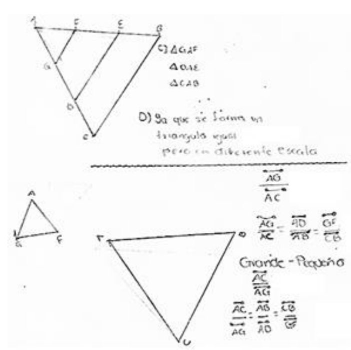
Utilización del método de Arquímedes para dividir segmentos y reconocimiento de triángulos semejantes



El segundo momento para tratar los triángulos semejantes se les solicitó a los alumnos que compararan los lados de dos de los triángulos que habían observado, se les recomendó trazar los triángulos separados, es decir, sin que compartieran elementos. En la figura 4.81 se observa cómo el alumno hace la comparación de los lados del triángulo pequeño al grande y viceversa.

Figura 4.81

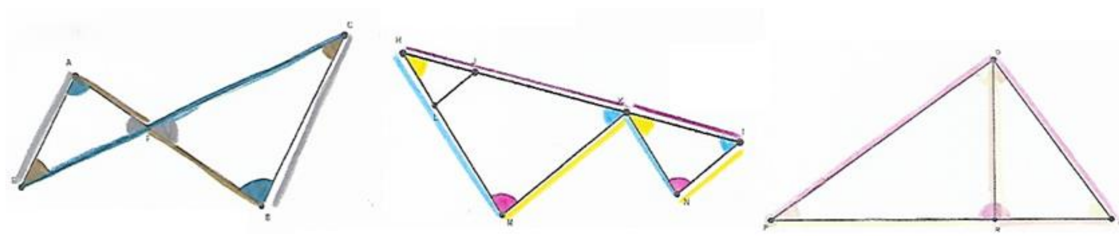
Reconocimiento de triángulos semejantes



Finalmente, se les presentan triángulos semejantes en diferentes posiciones y se les solicita que comparen los lados correspondientes, la mayoría logra reconocer visualmente los lados, (véase figura 4.82), pero cuando realizan la comparación de sus lados haciendo uso del lenguaje simbólico comienzan a tener dificultades.

Figura 4.82

Reconocimiento de ángulos congruentes y lados correspondientes en triángulos semejantes



4.2.2.2. Resultados de la trayectoria de enseñanza de Geometría

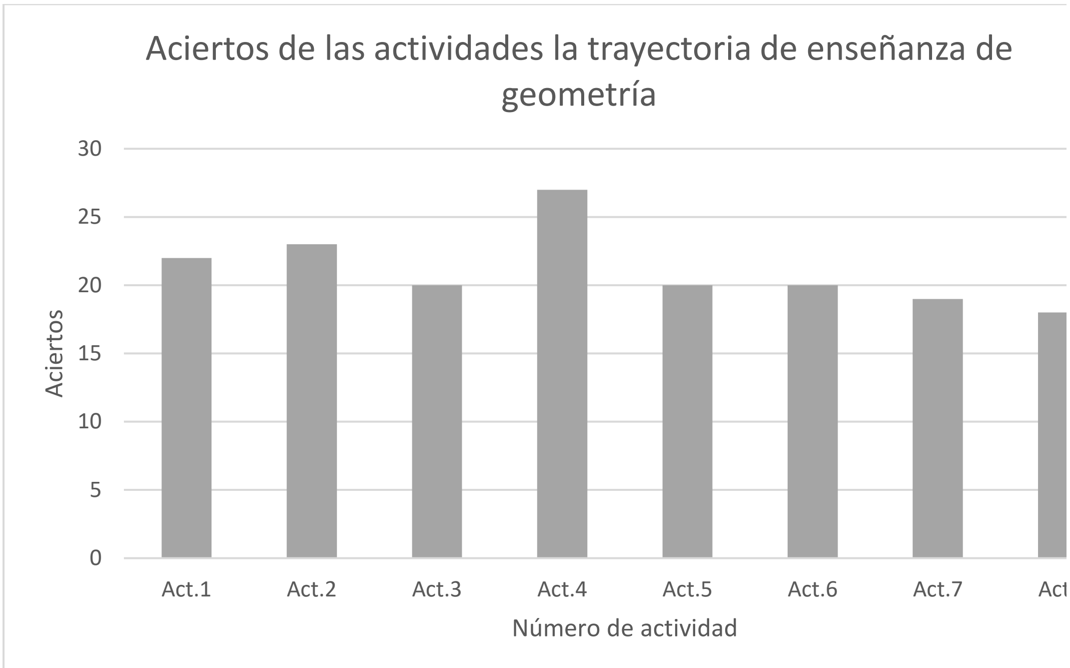
Como se mencionó anteriormente, en el ciclo investigativo solamente se logró realizar la trayectoria de enseñanza de geometría, en ella se trataron los conceptos geométricos de transición: números irracionales (raíz de dos, pi), teorema de Tales y teorema de Pitágoras. Se eligió un grupo para realizar un monitoreo detallado, en algunas de las sesiones se grabó el audio para identificar qué conceptos pusieron en juego los alumnos al momento de tratar con los conceptos. Los resultados que se obtuvieron están divididosen los tres conceptos de interés, en el presente trabajo se tratan solamente los resultados de las actividades para los números irracionales: raíz de dos y pi, como inconmensurables, primeramente. Y también se abarcará la rectificación de la circunferencia y su concepción del Pi como número real.Para cada uno de los conceptos se diseñaron hojas de control, dichas hojas se aplicaron en los equipos de trabajo asignados previamente a los alumnos, los equipos estaban conformados por cinco alumnos.

En las actividades se recuperaban los conceptos tratados en clase inicialmente, es decir, hacían uso de lo que Prassad (2014), señala como conceptos “totales comprimidos”, los conceptos vistos anteriormente pasan a ser abstracciones en lugar de conceptos concretos.

En la gráfica 4.16 se muestran las frecuencias con la que los alumnos desarrollaron sus actividades de cada una de las hojas de control.

Gráfica 4.16

Resultados de las Trayectoria de Enseñanza de Geometría (TE-Geo)



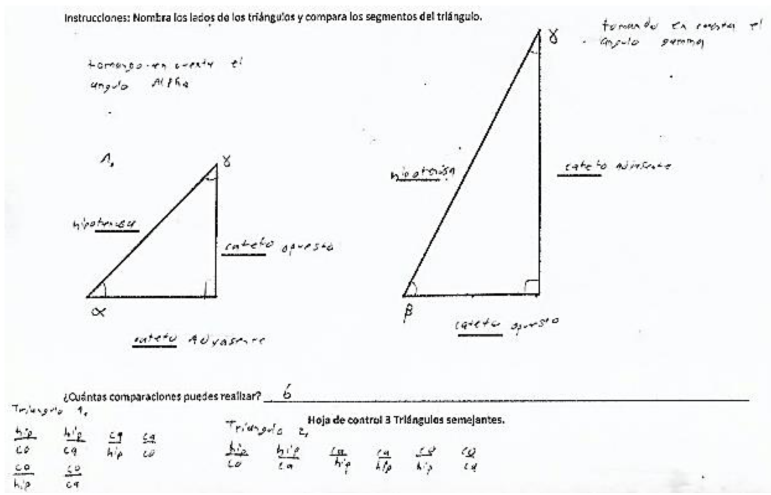
4.2.2.1.1.1. Elementos de un triángulo rectángulo

En esta actividad hubo dos secuencias, reconocimiento de presentó a los alumnos dos triángulos rectángulos, se les solicitó que identificaran primeramente los ángulos y les colocaran una letra griega, posteriormente se les pidió que reconocieran los catetos y la hipotenusa, y el segundo momento estaba relacionado con las relaciones que los alumnos establecieron con los lados del triángulo.

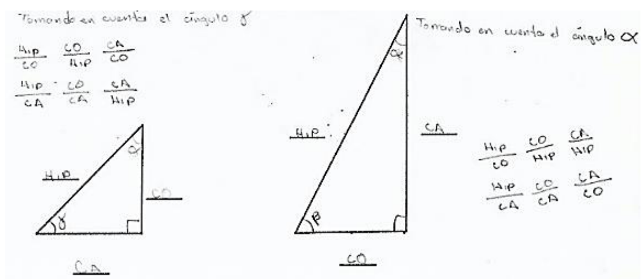
En los siguientes ejemplos se observa que los alumnos colocan una letra griega para los ángulos de los triángulos y reconocen los catetos y la hipotenusa. Cuando se les solicita que coloquen las relaciones existentes entre los lados realizan lo siguiente. En la figura 4.83a los alumnos colocan las seis relaciones y en la figura 4.83b el alumno primero reconoce que hay tres relaciones y las otras relaciones que encuentra se repiten, pero de forma invertida, por lo que, le pregunta al docente si es necesario que escriba las seis o solamente tres.

Figura 4.83

Reconocimiento de los elementos de un triángulo rectángulo y las relaciones entre sus lados



(a)



(b)

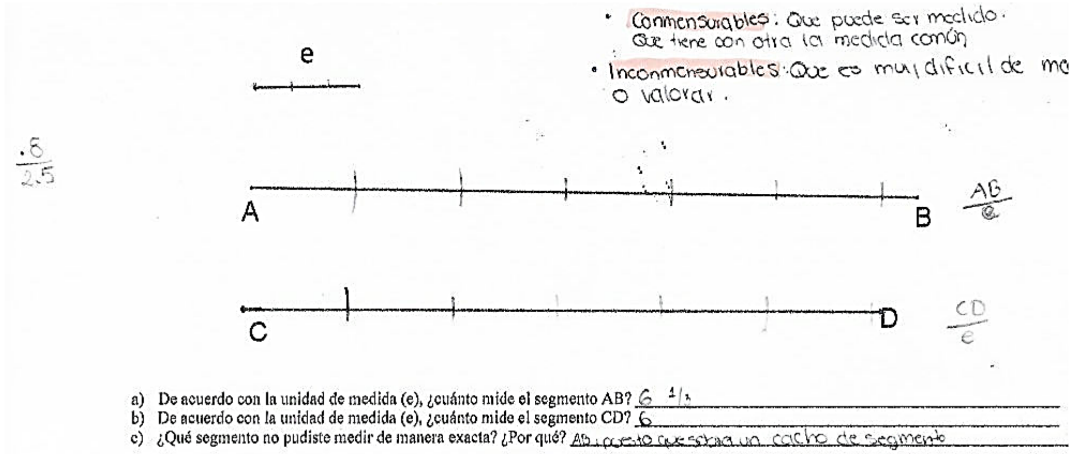
4.2.2.1.2. Segmentos conmensurables e inconmensurables

Para la actividad de segmentos congruentes se hace uso de la idea de comparación entre segmentos, se colocó un segmento cómo unidad de medida y se les mencionó que compararan dicho segmento con los segmentos asignados.

En la figura 4.84 se muestra un ejemplo de cómo los alumnos comienzan a hacer las comparaciones entre los segmentos y se presentan los números, para los segmentos inconmensurables algunos alumnos lo colocan como fracción.

Figura 4.84

Comparación de segmentos dado un tercer segmento como unidad de medida



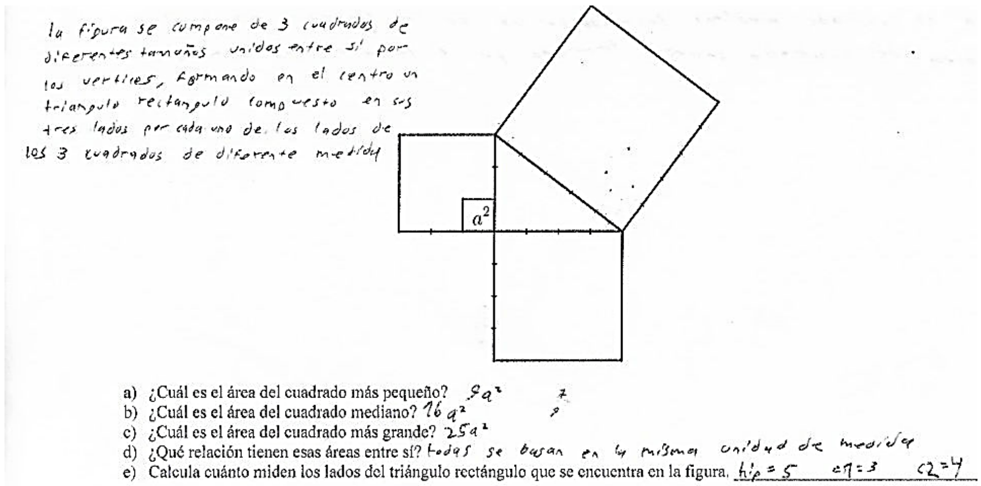
4.2.2.1.3. Teorema de Pitágoras

Para el teorema de Pitágoras se trataron dos cuestiones: áreas de los lados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo, longitudes de los lados del triángulo rectángulo y la medida de la hipotenusa en un triángulo rectángulo isósceles. La primera es la que regularmente se trata en secundaria y el segundo lo colocamos para identificar cómo tratan los alumnos con procesos reiterativos de la comparación de segmentos y las nociones que manifiestan sobre el infinito.

En la figura 4.85 se observa un ejemplo de cómo trata la mayoría de los alumnos la magnitud del área de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo y la magnitud de la longitud de los lados del triángulo rectángulo a partir de una unidad de medida dada, hace uso de la unidad de medida cuadrática que se les coloca y con ella obtienen las áreas, se observa que en las respuestas el alumno coloca (a) como unidad de medida para las áreas, menciona que la relación entre las áreas es que se basan en la misma unidad de medida y finalmente cuando se les solicita la magnitud de la longitud de los lados el alumno ya no coloca la unidad de medida.

Figura 4.85

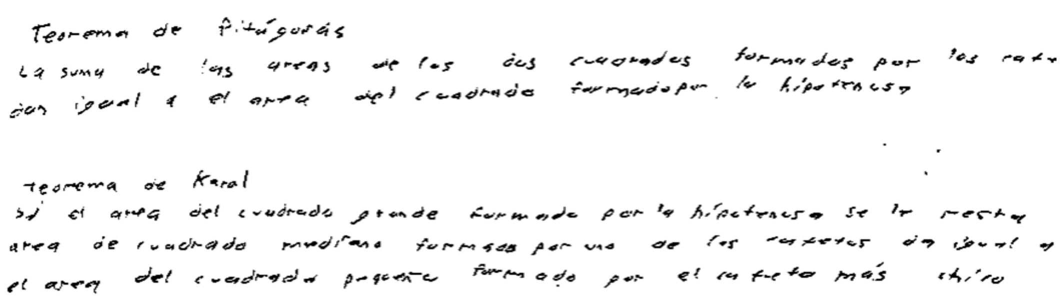
Descripción de la figura y obtención de áreas de los cuadrados y longitud de los lados del triángulo



Otros alumnos manifestaron respuestas semejantes cuando se les solicitaba el área o la longitud de los lados, pero conforme se presentó el diálogo con los alumnos en el salón de clases para encontrar la relación entre la áreas, algunos alumnos presentaron las primeras intuiciones del teorema de Pitágoras: es decir se dieron cuenta que si sumaban las áreas de los cuadrados pequeños equivalía a el área del cuadrado más grande, posteriormente en la conversación una alumna se dio cuenta que si al área del cuadrado más grande se le restaba el área del cuadrado mediano el resultado sería igual al área del cuadrado pequeño, en la figura4.86 se muestra un apunte de un alumno, en uno coloca lo que se habló del teorema de Pitágoras y al segundo enunciado le coloca lo que dijo su compañera.

Figura 4.86

Deducción del teorema de Tales y su complemento

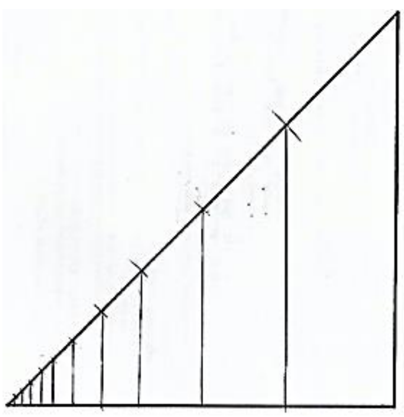


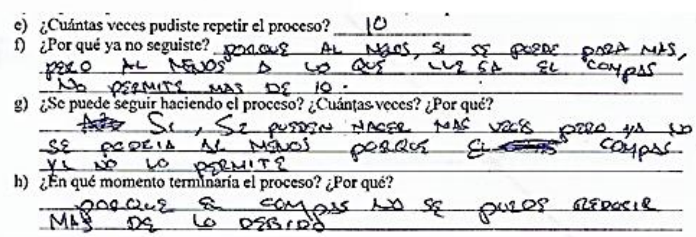
Para los procesos reiterativos de la comparación de segmentos y las nociones sobre el infinito se les colocó un triángulo rectángulo isósceles y se les solicitó que compararan uno de los catetos con la hipotenusa, posteriormente en la intersección de realizada en la hipotenusa trazaran un perpendicular al cateto horizontal, con ello se formaría un triángulo semejante al presentado inicialmente, se les pidió que realizaran el proceso con su regla y compás cuantas veces pudieran y se les hicieron algunas preguntas.

En la figura 4.87 se observa el ejemplo de un alumno que realiza las construcciones solicitadas mediante la regla y el compás, se les preguntó cuántas veces habían logrado realizar el proceso y el alumno menciona que 10 veces, menciona que no siguió porque el compás no permitía más de 10, se les cuestionó si se podía seguir realizando el proceso y si era posible en qué momento terminaría, las respuestas del alumno estuvieron enfocadas a los instrumentos. Con esta actividad se hizo evidente para los alumnos que los instrumentos tienen limitaciones para realizar construcciones en donde se les solicita procesos reiterativos.

Figura 4.87

Procesos reiterativos entre la comparación de un cateto y la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles haciendo uso de regla y compás





e) ¿Cuántas veces pudiste repetir el proceso? 10

f) ¿Por qué ya no seguiste? PORQUE AL MENOS, SI SE PUEDE PARA MAS, PERO AL MENOS A LO QUE LLEGA EL COMPAS NO PERMITE MAS DE 10.

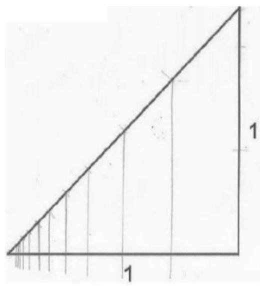
g) ¿Se puede seguir haciendo el proceso? ¿Cuántas veces? ¿Por qué?
SI, SE PUEDEN HACER MAS VECES PERO YA NO SE PODIA AL MENOS PORQUE EL COMPAS YA NO LO PERMITE

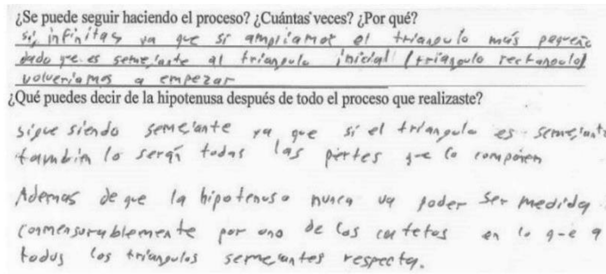
h) ¿En qué momento terminaría el proceso? ¿Por qué?
PORQUE EL COMPAS NO SE PUEDE REDUCIR MAS DE LO DEBIDO

En la figura 4.88 se muestra el ejemplo de un alumno que presenta nociones de infinito a partir del proceso reiterativo, él realizó sus trazos y contestó las preguntas valiéndose de lo que sabía sobre triángulos semejantes, dice que el proceso es infinito y concluye que en todos los triángulos semejantes al triángulo presentado ocurrirá lo mismo.

Figura 4.88

Ejemplo de uso de regla y compás y el pensamiento intuitivo en las actividades de la Trayectoria de Enseñanza de la Geometría




¿Se puede seguir haciendo el proceso? ¿Cuántas veces? ¿Por qué?

sí, infinitas ya que si ampliamos el triangulo más pequeño dado que es semejante al triangulo inicial (triángulo rectangulo) volveríamos a empezar

¿Qué puedes decir de la hipotenusa después de todo el proceso que realizaste?

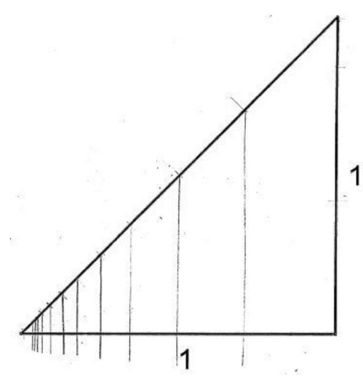
sigue siendo semejante ya que si el triangulo es semejante tambien lo serán todas las partes que lo componen

Ademas de que la hipotenusa nunca va poder ser medida conmensurablemente por uno de los catetos en lo que a todos los triangulos semejantes respecta.

El uso de regla sin graduar y compás en ambos ejemplos posibilitó que surgieran las intuiciones de las que habla Fischbein (1987) y comenzará el proceso intuitivo (creativo y constructivo) que señala Peña (2020). Con esta actividad los alumnos comenzaron a tener las primeras intuiciones de inconmensurabilidad e infinito. Por la falta de espacio solamente se toma el ejemplo de un alumno, sin embargo, hay muchos casos interesantes. En la figura 4.89 está el proceso que elalumno realiza, usa su compás para trasladar la medida de la longitud de uno de los catetos.

Figura 4.89

Trazos para medir la hipotenusa



Cuando se le cuestiona cuánto mide la hipotenusa tomando en cuenta uno de los catetos comounidad de medida, el alumno contesta que mide 1 y le falta un pedazo del cateto, por lo cuales inconmensurable (Véase la figura 4.90). Se observa que el alumno no hace uso de la fórmuladel teorema de Pitágoras, ya que, su mera aplicación no le posibilitaría entender por qué en los triángulos rectángulos isósceles la hipotenusa es inconmensurable.

Figura 4.90

Respuesta del alumno sobre la medida de la hipotenusa

¿Cuánto mide la hipotenusa? Justifica tu respuesta. mide 1 faltandole un trozo de segmento indicando que la unidad de medida (el cateto) es inconmensurable en el segmento a medir (hipotenusa)

Al cuestionarlo sobre si el proceso se puede seguir haciendo, él contesta que sí, que puede seguir haciéndolo infinitamente, además se da cuenta que se forman triángulos rectángulos ymenciona que son semejantes al triángulo que se le presentó inicialmente, además mencionaque si se le realiza una ampliación se vuelve a empezar el proceso (véase figura 4.91).

Figura 4.91

Respuesta del alumno haciendo referencia a un proceso infinito

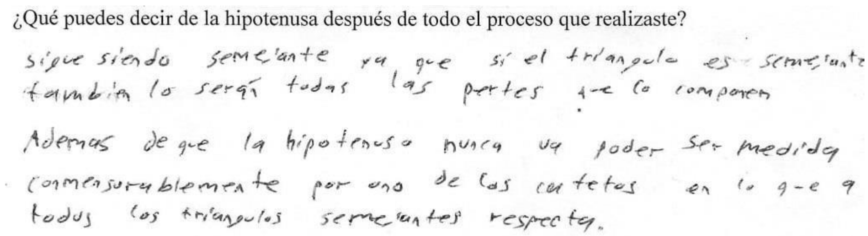
¿Se puede seguir haciendo el proceso? ¿Cuántas veces? ¿Por qué?
si, infinitas ya que si ampliamos el triangulo más p
dado que es semejante al triangulo inicial (triangulo rect
volveríamos a empezar

De su respuesta se rescatan dos cosas importantes; en primer lugar, el alumno hace uso de los contenidos que ha aprendido anteriormente y les da sentido cuando se le coloca la actividad, en palabras de Prassad (2014) ”cuando el alumno ha asimilado lo nuevo y los conceptos o ideas en su estructura existente de conocimiento, los conceptos abstractos previos se vuelven menos abstractos”(p36). En este caso el alumno asimila que la hipotenusa es inconmensurable respecto a uno de los catetos y los conocimientos previos de conmensurabilidad e inconmensurabilidad así como los de semejanza se vuelven menos abstractos para el alumno y al docente le posibilita incorporar nuevos elementos para llegar a la inconmensurabilidad de la circunferencia respecto a su diámetro o su radio, los alumnospoco a poco van ascendiendo de nivel. En este ejemplo se observa cómo se cumple lo propuesto por Prassad (2014), como (RAiT). En segundo lugar, se identifica que el alumno habla de una ampliación, que si se realiza es como si se volviera a empezar el proceso, el alumno tiene la intuicióndel dinamismo de la geometría, si se enfrentara a esta misma actividad con un software de geometría dinámica le daría sentido al movimiento, no lo vería como algo superficial.

En otra pregunta de la misma actividad, en donde se les cuestiona cómo es la hipotenusa después de todo el proceso que se realiza. Un alumno logra generalizar que la hipotenusa siempre será inconmensurable en los triángulos rectángulos isósceles, puesto que los triángulos que se forman son semejantes (Véase figura 4.92).

Figura 4.92

Respuesta del alumno con la descripción de la hipotenusa



¿Qué puedes decir de la hipotenusa después de todo el proceso que realizaste?

sigue siendo semejante ya que si el triangulo es semejante tambien lo serán todas las partes que lo componen

Ademas de que la hipotenusa nunca va poder ser medida comensurablemente por uno de los catetos en lo que a todos los triangulos semejantes respecta.

4.2.2.1.4. Relación entre el diámetro y la circunferencia

Para tratar el número Pi, primero se les solicitó a los alumnos material concreto: un círculo de madera y listón, posteriormente se diseñaron dos actividades, en la primera se les pidió que con el listón tomaran el diámetro como unidad para medir la circunferencia del círculo de madera y realizaran una aproximación del pedazo faltante para cubrir toda la circunferencia respecto al diámetro. En esta actividad se grabó el audio en el equipo de trabajo que era monitoreado, la discusión fue muy interesante. Se recuperaron variosfragmentos del audio, en el primero expresan que el pedacito que les falta es un séptimo respecto al diámetro, en el segundo un alumno abre el debate si la circunferencia es conmensurable o no respecto a su diámetro y el tercero es el debate que se origina en el equipo y finalmente los alumnos se convencen de que es inconmensurable. En el primer fragmento, los alumnos manifiestan que no han contestado las preguntas de la actividad porque están concentrados en saber cuánto mide el segmento que les falta para medir completamente la circunferencia. Se les cuestiona sobre los avances que llevan y una alumnamenciona que han estimado el sobrante por medio de fracciones y lo que obtuvieron es un séptimo, la docente les cuestiona cómo obtuvieron el séptimo y explicaron quetomando la medida de segmento faltante con un listón de la misma medida que el diámetro y posteriormente éste lo doblaron en partes iguales y obtuvieron siete divisiones (véase fragmento).

[06] **D-I:** ¿Ustedes ya?
[07] **A8:** Si dividimos este pequeño… cosita entre el diámetro, nos da pi, bueno la fracción que nos faltaría.
[08] **D-I:** Pero ¿Cómo harías? Porque no tenemos que medir.
[09] **A13:** Pues sabiendo que el diámetro es de…
[10] **D-I:** Pero sin medidas, no importan las medidas, sin regla, no quiero nada de regla. ¿Cómo lo hago?
[11] **A8:** Sacando fracción estimada, sale un séptimo.
[12] **D-I:** Un séptimo. Entonces sacando fracción estimada, sale un séptimo. Entonces, y ¿Cómo sacaron ese un séptimo?
[13] **A8:** Yo doblé mi listoncito.

— La mayoría del grupo se acercó al valor de un séptimo, pero solamente este equipo lo precisóy lo explicó. El propósito de la actividad justamente era que los alumnos obtuvieran la aproximación de Pi mediante fracciones para posteriormente lograr rectificar la circunferencia. La aproximación que realizan los alumnos obtiene relevancia puesto que la proposición tres de Arquímedes (Heath, 1897, p.93) establece que “el radio de la circunferencia de cualquier círculo a el diámetro es menor de $3\frac{1}{7}$ pero más grande que $3\frac{10}{71}$ ". En este sentido, el pensamiento intuitivo se vio fortalecido en esta actividad. En el segundo fragmento un alumno intenta vincular la actividad de Pi con la actividad que trató la inconmensurabilidad de la hipotenusa respecto a los catetos en un triángulo isósceles, perono lo logra y afirma que la circunferencia es conmensurable respecto al diámetro. Esto permite abrir el debate entre los alumnos (A8, A13) y posibilita que la docente-investigadora (D-I) los cuestione sobre si es conmensurable o no. El alumno argumenta que como su compañera obtuvo el un séptimo dividiendo el diámetro y no le sobró algo, por lo tanto, es conmensurable. A continuación, se muestra un fragmento de la conversación de los alumnos.

[14] **A13:** Simplificando el segmento pues. Con lo que había hecho ayer de pero, bueno el problema… esto sí es conmensurable el de ayer era inconmensurable,
[15] **D-I:** ¿Este sí es conmensurable?

[16] **A13:** Sí.
[17] **D-I:** ¿Por qué?
[20] **A13:** Sí, pero si lo dividimos entre siete, cabe perfectamente.
[21] **D-I:** Y ¿sí cabe perfectamente?
[22] **A8:** Sí.
[23] **A13:** Bueno, intenta con el tuyo divide tu listón 7 veces. (Se dirige a un alumno)

Después de la conversación en donde un alumno afirma que la circunferencia es conmensurable respecto al diámetro dos alumnos del equipo (A27 y A31) les dicen que no es esa la razón, que la circunferencia es inconmensurable y lo que hacen es tomar el séptimo que se mencionó anteriormente como unidad para medir su circunferencia, una vez que hanmedido su circunferencia con el séptimo comentan que les faltó poco para medirla completamente, por lo tanto, es inconmensurable, la docente-investigadora (D-I) recupera loque han realizado y los alumnos que decían que era conmensurable (A13 y A8) se convencen, a continuación se muestra un fragmento de dicha conversación.

[59] **D-I:** ¿Se pasó?
[60] **A27:** Sí por poquito, pero…
[61] **D-I:** Fíjate. Lo que hizo ayer, ¿te acuerdas? Decía: voy a tomar la mitad de esa medida [de uno de los catetos del triángulo isósceles] y de esa medida le voy a ir haciendo [midiendo la hipotenusa], entonces ellos ya lo hicieron. Vean. Y dice Ángel: no es cierto, no cabe, le falta, un pedacito. Entonces, ¿Conmensurable o no?
[62] **Todos** Ahhhhhh, [gritos de afirmación] Inconmensurable
[63] **D-I:** ¿Por qué?
[64] **A13:** Porque no cabe [el séptimo no cubre completamente la circunferencia]
[65] **D-I:** ¿Por qué?
[66] **A13:** Porque…
[67] **D-I:** Y si ¿yo divido este un séptimo?
[68] **A13:** No, va a seguir siendo la misma medida nada más qué…
[69] **D-I:** ¿Entonces? ¿Convencidos de que es inconmensurable?
[70] **Todos** Sí.
[71] **D-I:** ¿Rubí? Porque lo que ustedes estaban haciendo es decir, ah pues el diámetro lo parto en siete y sí, el diámetro si lo pueden dividir entre siete.
[72] **A13:** Es que el problema es de que… lo que estábamos haciendo era redondearlo.
[73] **D-I:** Redondearlo, era aproximación. Entonces pónganle ahí que llegaron al valor de más o menos ¿De cuánto?
[74] **A8:** Es que a ti te gusta redondear las cosas…
[75] **…** Seis punto ocho…
[76] **D-I:** ¡Un séptimo! ¿Cuánto va a valer este pedacito con respecto al diámetro? Ustedes llegaron a un séptimo. Que va a ser muy importante eso que acaban de descubrir […] porqueeso va a ser históricamente un hallazgo que este señor, el que lo hizo se tardó mucho, entonces después les cuento la historia. Pero ustedes tienen un avance porque ya llegaron a tres enteros un séptimo…

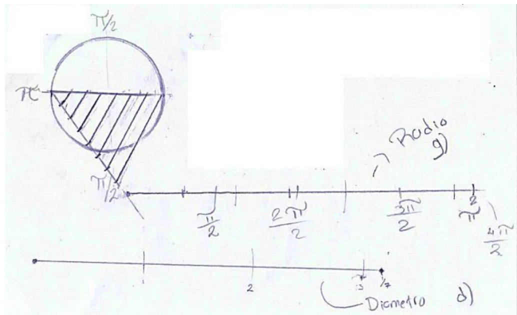
En estos fragmentos de audio se observa que los alumnos ponen en juego su pensamiento intuitivo, desde que la alumna mide con su listón el pedazo que le falta para completar la circunferencia y divide su diámetro para determinar que el pedazo equivale aproximadamente a un séptimo. Hasta que los dos alumnos justifican por qué la circunferencia es inconmensurable con el diámetro tomando como unidad de medida el séptimo que su compañera había encontrado. También se observa la importancia del diálogo entre los alumnos y el papel de la docente para orientar la actividad para que los alumnos no se desvíen de los aspectos. Otra parte importante es la emoción que expresan los alumnos cuando se dan cuenta que efectivamente la circunferencia es inconmensurable respecto al diámetro, en el audio se escuchan gritos que reflejan que los alumnos le han dado sentido a lo que sus compañeros están haciendo para justificar sus ideas.

A partir de la actividad pasada se retomó lo que los equipos de trabajo habían realizado parahallar la aproximación de Pi y se socializó en todo el grupo cuáles habían sido sus resultados y se llegó al acuerdo de tomar el séptimo. Con estos valores los alumnos rectificaron la circunferencia, primero se les solicitó que trazaran una circunferencia y utilizando el método de Arquímedes dividieran el diámetro en siete partes y posteriormente rectificaran lacircunferencia. Luego se les preguntó en dónde ubicarían π, la mitad de π y cómo encontrarían 2π. La figura 4.93 es un ejemplo de la rectificación de la circunferencia utilizando el método de Arquímedes y la aproximación de un séptimo, se observa que realiza dos líneasuna en donde coloca números enteros para los diámetros y la segunda línea utiliza π. Aún nologran ver a Pi como número real, por tal motivo, separan las rectas que realizan.

Los alumnos no presentan problemas al rectificar la circunferencia, identifican de manera rápida en donde se localiza π y $^{\pi}$ que fueron los que se les solicitó en la actividad. Posteriormente, se generó otro debate para saber cómo identificar 2π, una vez aclarada esa situación los alumnos identificaron $^{3\pi}$ como se observa en la figura 4.93. Sin embargo, ésta fue la última sesión de manera presencial con los alumnos.

Figura 4.93

Rectificación de la circunferencia



4.2.2.3. Resultados de la trayectoria de enseñanza de Trigonometría

Debido a la pandemia no se logró aplicar esta trayectoria de forma presencial, sin embargo, de manera colegiada los profesores de la secundaria acordaron elaborar por academias cuestionarios virtuales con poca información y de opción múltiple tratando contenidos en los que los alumnos presentaran dificultades que sirvieran como apoyo a los alumnos de tercer grado para su examen de admisión a medio superior. Para matemáticas se diseñaron tres cuestionarios para los ejes temáticos marcados en el programa de estudios, específicamente nosotros propusimos el de trigonometría como apoyo para su examen de admisión a medio superior. El cuestionario fue virtual y se aplicó a todos los alumnos de tercer grado de la institución (320) de los cuales solamente once lo contestaron y solamente uno de ellos desarrolló las actividades de geometría y la trayectoria de enseñanza de geometría. Fueron 8 aspectos los que se trataron en el formulario, en la tabla 4.1, se observan de maneracuantitativa los resultados obtenidos por los alumnos.

Tabla 4.1

Resultados del formulario de trigonometría

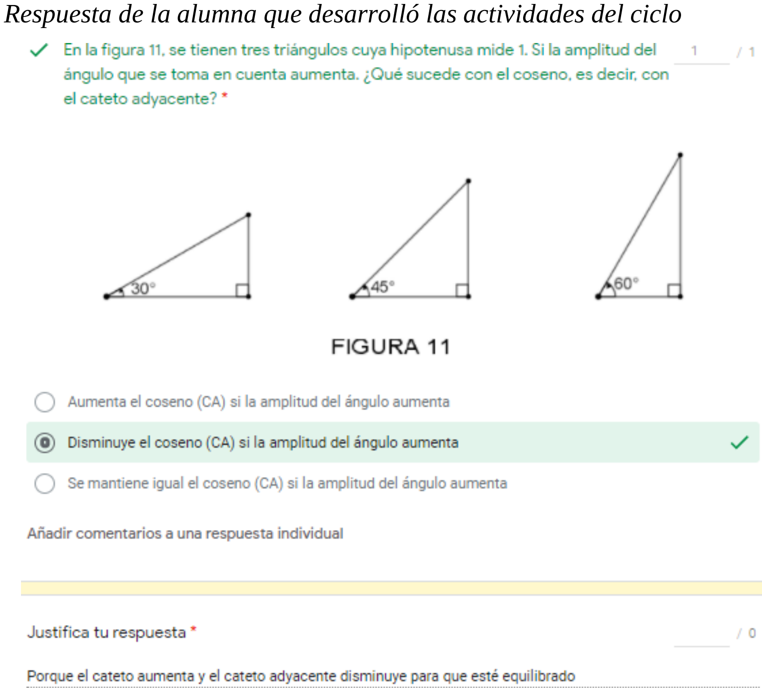
Lo que se solicitó en cada reactivo	Correcto	Incorrecto
Identificación de la hipotenusa	12	0
Identificación del cateto adyacente	10	2
Identificación del cateto opuesto	10	2
Aumento o disminución de seno respecto a la amplitud del ángulo	11	1
Aumento o disminución de coseno respecto a la amplitud del ángulo	9	3
Aproximación de seno respecto a la amplitud del ángulo	12	0
Aproximación de coseno respecto a la amplitud del ángulo	11	0
Aumento o disminución de seno y coseno según el ángulo	11	1

Se identificó que a pesar de que 11 de ellos no desarrollaron las actividades del ciclo indagatorio contestaron de manera correcta casi todos los reactivos, es decir, se vieron forzados a visualizar las figuras que se estaban presentando sin utilizar la medida. Por lo quese concluye que el diseño de la actividad incorporando información relevante y reactivos concretos favoreció su resolución.

Las respuestas de los alumnos fueron muy breves, por tal motivo solamente se rescataron dos alumnos; uno que había desarrollado las actividades del ciclo indagatorio y un alumno que no. El alumno que estuvo en el ciclo indagatorio se centra en la figura y en las relaciones que existen entre sus elementos, por eso cuando se le pregunta qué sucede con el coseno si la amplitud del ángulo aumenta, contesta que disminuye porque el cateto adyacente disminuye, por lo tanto, se encuentran equilibrados (véase figura 4.94), se da cuenta que existe variaciónpero no solamente de la amplitud del ángulo sino que también en seno y coseno, y eso era una de los propósitos de esa sesión, que los alumnos se dieran cuenta de lo invariante y lo variante.

Figura 4.94

Respuesta de la alumna que desarrolló las actividades del ciclo


En la figura 11, se tienen tres triángulos cuya hipotenusa mide 1. Si la amplitud del ángulo que se toma en cuenta aumenta. ¿Qué sucede con el coseno, es decir, con el cateto adyacente? * 1 / 1

- Aumenta el coseno (CA) si la amplitud del ángulo aumenta
- Disminuye el coseno (CA) si la amplitud del ángulo aumenta
- Se mantiene igual el coseno (CA) si la amplitud del ángulo aumenta

Añadir comentarios a una respuesta individual

Justifica tu respuesta * / 0

Porque el cateto aumenta y el cateto adyacente disminuye para que esté equilibrado

El alumno que no desarrolló las actividades del ciclo indagatorio, indica que tuvo dudas en la actividad porque no se tenían las medidas de los segmentos del triángulo y recurre a su calculadora para obtener el valor aproximado de seno y coseno, aunque la respuesta que ofrece es correcta no relaciona la amplitud del ángulo con la longitud de los segmentos, ve los elementos de forma aislada y además hace uso de su calculadora para obtener los valores solicitados, como se muestra en la figura 4.95.

Figura 4.95

Respuesta del alumno que no desarrolló las actividades del ciclo indagatorio

Si los tres triángulos los ordenamos de acuerdo con el ángulo agudo marcado, como se muestra en la figura 13 ¿Aproximadamente cuánto medirá el segmento correspondiente del coseno (CA) para cada uno de los triángulos? *

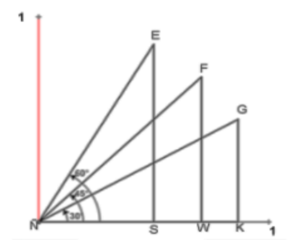


FIGURA 13

	0.5	0.9	0.7	Puntuación	
Aproximadamente el segmento ÑK mide:	○	◉	○	1 / 1	✓
Aproximadamente el segmento ÑW mide:	○	○	◉	1 / 1	✓
Aproximadamente el segmento ÑS mide:	◉	○	○	1 / 1	✓

Justifica las respuestas para cada una de las aproximaciones que se te solicitan / 0

Puse en la calculadora el Cos de 30, 45 y 60

Escribe las dudas que tuviste en este contenido / 0

Porque no tenían ni una medida los triángulos

4.3. Resultados (análisis-interpretación) del ciclo investigativo

El desarrollo del ciclo investigativo se llevó a cabo en el ciclo escolar 2020-2021, debido a las condiciones en las que finalizó el período escolar anterior y los nuevos escenarios para la enseñanza: las plataformas Meet y Classroom, presentados por la SEP para el desarrollo de las actividades para este nuevo ciclo escolar, las condiciones de enseñanza cambiaron.

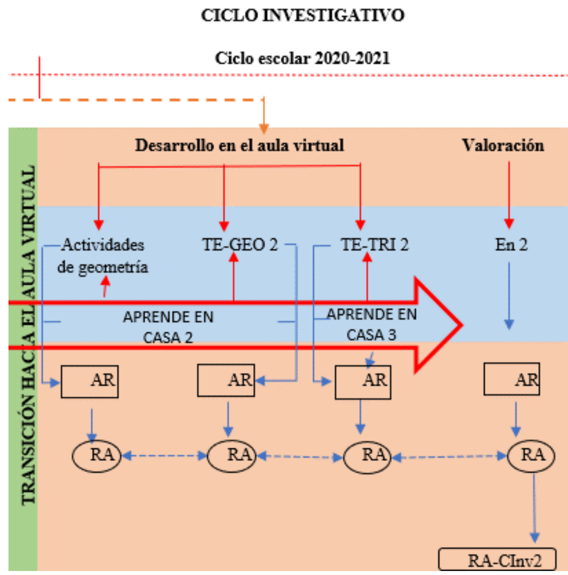
La guía para el desarrollo de las actividades para este ciclo escolar fue el programa televisivo Aprende en casa, que contiene la presentación, dosificación y calendarización de los contenidos curriculares del Programa de estudios. Debido a que la investigación se realiza en condiciones reales de enseñanza, el desarrollo del ciclo investigativo se ajustó a los tiempos y contenidos de las clases televisadas.

Bajo las nuevas condiciones marcadas por la SEP, el ciclo investigativo se dividió en dos partes para su implementación en los escenarios empíricos (aulas virtuales): desarrollo del aula y valoración, a diferencia de los ciclos indagatorio e *indagatorio-investigativo* en este ciclo no se llevó a cabo un diagnóstico, debido a que en el Consejo Técnico Escolar de la escuela secundaria se decidió de manera colegiada realizar actividades que desarrollaran y fortalecieran las habilidades básicas del pensamiento en las primeras tres semanas del ciclo escolar 2020-2021, hasta que estuviera listo el Aprende en casa 2.

Los contenidos geométricos que se trataron en las clases televisadas de Aprende en casa 2 fueron: congruencia, transformaciones geométricas, teorema de Tales y teorema de Pitágoras. Para el interés del presente proyecto solamente se centró el interés en los conceptos de congruencia, teorema de Tales y teorema de Pitágoras. Los contenidos de Aprende en casa 3 de geometría fueron: cuerpos geométricos y razones trigonométricas, pero solamente centramos la atención en el último contenido, no quiere decir que en la enseñanza no se hayan tratado los contenidos de transformaciones geométricas y cuerpos geométricos, sino que, no estaba contemplado como concepto transitorio para el tratamiento de conceptos básicos de trigonometría, por último, la valoración del ciclo tuvo dos entrevistas semiestructuradas (En2) (véase figura 4.96).

Figura 4.96

Ciclo investigativo



La SEP clasificó en tres tipos la participación y comunicación de los alumnos: nula, intermitente y constante, a partir de esa clasificación identificada en las dos plataformas, se identificó que el 43% de 70 alumnos, mantuvo una comunicación y participación constante en el desarrollo de las actividades en ambas plataformas, esta población constantemente asistía a las sesiones de Meet y entregaba actividades en Classroom, los resultados están en función de las actividades desarrolladas por este porcentaje de alumnos.

4.3.1. Resultados de la fase de desarrollo en el aula

Para el desarrollo en el aula se diseñaron tres momentos: actividades de geometría (Ageo3), trayectoria de enseñanza de geometría (Te-Geo 2) y trayectoria de enseñanza de trigonometría (Te-Tri 2). En el primer momento se trata el contenido de congruencia en segmentos, ángulos y triángulos, en el segundo los conceptos de semejanza en los triángulos y triángulos rectángulos, las relaciones existentes entre el área de los cuadrados construidos en los lados de un triángulo rectángulo y las nociones de segmentos conmensurables e inconmensurables y en el tercero las relaciones entre los elementos de un triángulo rectángulo.

Para cada momento se diseñaron hojas de control, éstas se publicaban como actividades en la plataforma de Classroom en cada uno de los grupos a cargo del profesor en la escuela secundaria, los alumnos enviaban sus documentos digitales con el desarrollo de cada hoja de control y asistían a las sesiones virtuales en Meet.

Los resultados del ciclo investigativo están divididos en tres partes: actividades de geometría (Ageo3), trayectoria de enseñanza de geometría (Te-Geo 2) y trayectoria de enseñanza de trigonometría (Te-Tri 2). Cada una de estas partes contiene los resultados del análisis de las clases televisadas de Aprende en casa 2 que trataron los conceptos de interés y los resultados obtenidos de la aplicación de las hojas de control diseñadas para cada momento de la investigación.

4.3.1.1. Ageo (actividades de geometría) 3

En el Programa de Estudios (SEP, 2011) está marcado el concepto de congruencia como el primero para el eje de Forma, espacio y medida para tercer grado de secundaria. Al ser el primero de los contenidos, lo consideramos como lo menciona Prassad (2014), un concepto ("total comprimido"), el cual, integra conceptos más simples, por tal motivo, contenidos como segmentos de recta, ángulos y los elementos de un triángulo no se encuentran de forma explícita en el Programa ni en las clases televisadas de Aprende en casa 2 porque se da por supuesto que los alumnos ya dominan estos contenidos desde educación preescolar.

En este sentido, nosotros complementamos el concepto de congruencia de triángulos y agregamos congruencia entre segmentos, ángulos y triángulos. Para aclarar los conceptos puestos en juego y hacer un exhorto a la utilización de regla sin graduar y compás para el desarrollo de las actividades propuestas en la plataforma de Classroom, se programaron semanalmente sesiones virtuales en la plataforma Meet para socializar con los alumnos sus conocimientos previos y realizar preguntas encaminadas a la construcción de conocimientos matemáticos y fortalecer su pensamiento intuitivo.Se realizó un análisis de las sesiones televisivas que tratan concepto de congruencia y posteriormente se realizó el análisis de las hojas de control que se propusieron en las aulas virtuales.

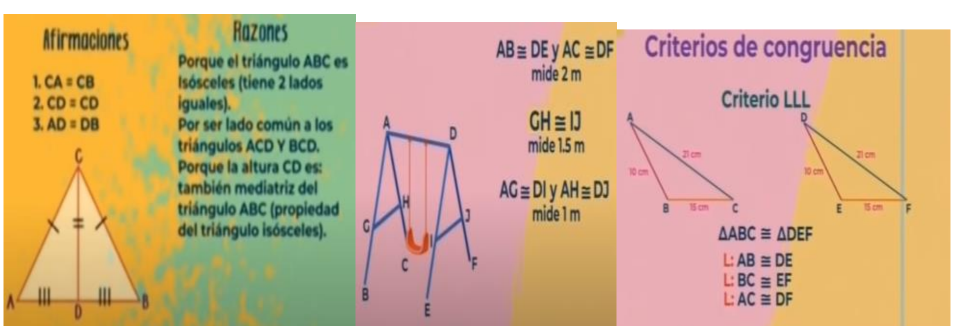
4.3.1.1.1. Resultado del análisis de las clases televisadas para el concepto congruencia entre triángulos.

El concepto de congruencia entre triángulos se trató en las sesiones televisadas, se colocaban figuras como las de las figuras 4.97a, 4.97b y 4.97c. En la figura 4.97a se presenta triángulo isósceles sin medidas y hacen uso del método utilizado por Euclides para realizar una demostración, para los autores Van Hiele ese es un nivel de pensamiento geométrico superior, del mismo modo para Tall (2018), él habla de demostración en el nivel 3, en la presente investigación se mencionó que solamente se abarcarían los primeros niveles y en algunas ocasiones los alumnos lograrían justificar sus construcciones con los conocimientos previos que tuvieran. En la figura 4.97b presentan una figura contextualizada con un columpio, consideran la estructura del columpio como los segmentos que constituyen los triángulos, no presentan medidas, solamente colocaron letras para indicar los vértices, con esa información los alumnos deben identificar los triángulos congruentes. Fischbein, menciona que las figuras en geometría tienen de forma implícita los conceptos, para identificarlos es necesaria la observación y si a dicha figura se le agregan otros elementos, como el columpio, o la estructura que une a todo el columpio, no se sabe en qué de toda la información que se les brinda a los alumnos están centrando su atención.

En la figura 4.97c se explicitan los criterios de congruencia con un ejemplo en donde se colocan las medidas de cada uno de los lados, al colocar la medida hace que los alumnos se centren en los números y no en las relaciones entre los elementos del triángulo.

Figura 4.97

Ruta para la enseñanza para el contenido de congruencia de triángulos propuesta en Aprende en casa 1



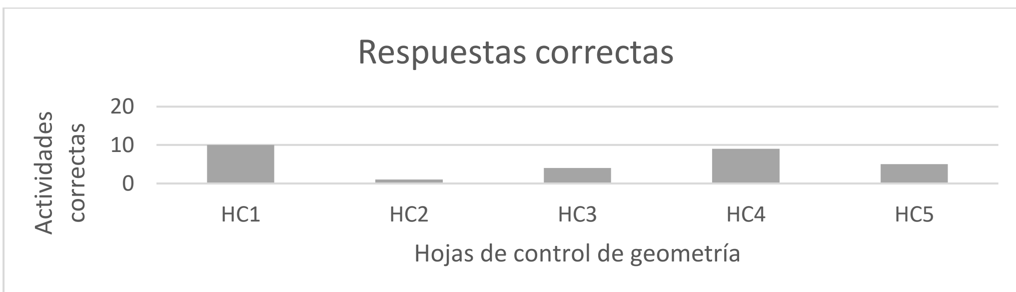
(a) **(b)** **(c)**

4.3.1.1.2. Resultados del análisis de las Ageo 2 (actividades de geometría 2).

Para las Ageo 2 (actividades de geometría 2) se propusieron 5 actividades, en dos de ellas se abarcaron los elementos de la geometría que no están de forma explícita en el Programa de Estudios (SEP, 2011) (recta, semirrecta, segmento de recta, los elementos de un ángulo, los elementos de un triángulo, y tipos de triángulos), dos para la construcción de segmentos, ángulos y triángulos congruentes y la última para las características de los triángulos congruentes. Los resultados que se obtuvieron de la aplicación están organizados en la gráfica 4.17. En ella, se encuentra la frecuencia de actividades que tienen elementos sustanciales en su desarrollo.

Gráfica 4.17

Resultados cuantitativos de las actividades de geometría (Act. 3)



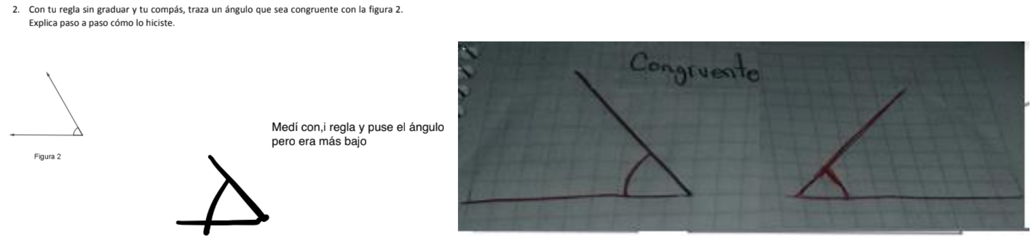
Se separaron los resultados en dos partes: congruencia entre segmentos, ángulos y triángulos a partir de la construcción con regla y compás y las características de triángulos congruentes.

4.3.1.1.2.1. Congruencia entre segmentos, ángulos y triángulos

Como los conceptos de segmentos, ángulos, triángulos no están de forma explícita en el Programa de Estudios (SEP, 2011), se diseñó una sesión Meet en la que se aclararon los conceptos y se diseñaron dos actividades en la plataforma de Classroom, la primera era la construcción con regla sin graduar y compás de segmentos y ángulos congruentes. Algunos alumnos lo realizaron de forma visual haciendo uso de las herramientas digitales que les ofrecía su procesador de textos como se muestra en la figura 4.89a, otros lo realizaron en su cuaderno como el caso de la figura 4.89b.

Figura 4.98

Trazo de ángulos congruentes de forma visual



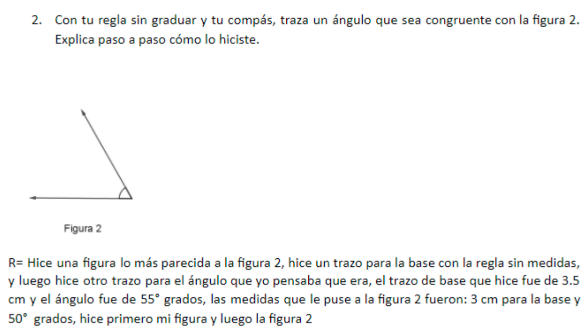
(a) (b)

Nota: El primer ejemplo el alumno realizó el trazo valiendose de las herramientas digitales y el segundo lo traza en el cuaderno pero no hay explicación de cómo lo hace, se deduce que fue de forma visual

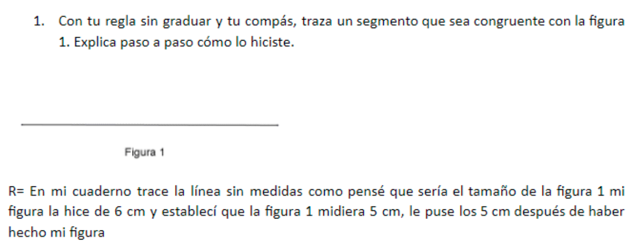
Otros alumnos solamente dieron la explicación de cómo trazar el segmento y el ángulo congruente al que se les presentó, pero no realizan la construcción como es el caso de las figuras 4.99a y 4.99b.

Figura 4.99

Explicación de la construcción de un ángulo congruente



(a)

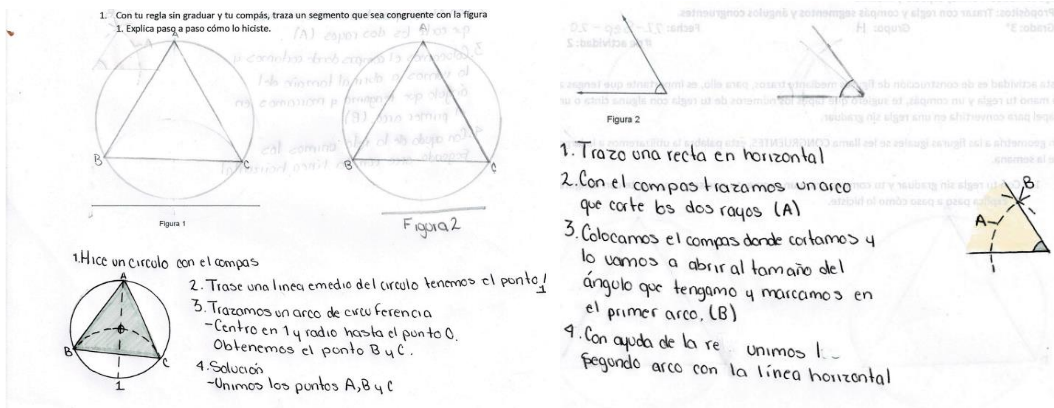


(b)

Hubo alumnos que trazaron lo solicitado con regla sin graduar y compás en su material impreso, como se había indicado, colocan una explicación de los pasos que siguen para realizar la construcción y ponen en juego sus intuiciones como se muestra en la figura 4.100a y 4.100b.

Figura 4.100

Trazo de ángulos congruentes haciendo uso de regla y compás

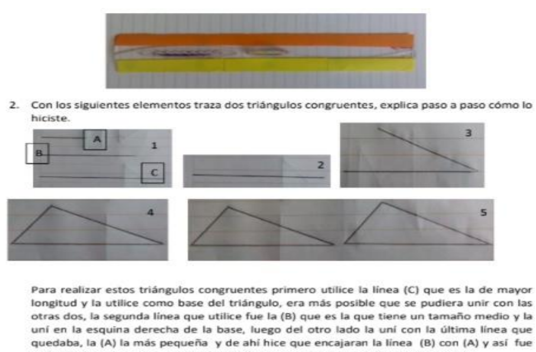


(a) (b)

Una vez que se trató la congruencia de segmentos y ángulos, se realizó una actividad relacionada con la construcción de triángulos congruentes dados tres segmentos, con las mismas indicaciones. A diferencia de la explicación que otorgan las clases televisadas sobre el método axiomático, en la actividad de construcción de triángulos se les solicitó que ellos realizaran sus construcciones a partir de los conocimientos que tenían sobre segmentos de recta, ángulos y triángulos, los alumnos que lo realizan con los instrumentos propuestos (regla sin graduar y compás) realizan construcciones como los de la figura 4.101, se observa cómo realizan sus construcciones y van realizando la explicación, como tal lo que realizan los alumnos no es una demostración como la mostrada en las sesiones de Aprende en casa 2 sino que es una manifestación de su pensamiento intuitivo, es decir, de su proceso creativo para resolver la actividad que se les había propuesto.

Figura 4.101

Trazo de triángulos congruentes dados tres segmentos utilizando regla y compás



4.3.1.1.2.2. Características de los triángulos congruentes

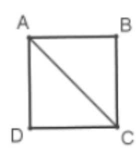
En las actividades pasadas se trató el concepto de congruencia en segmentos, ángulos y triángulos, posteriormente, se diseñó una actividad enfocada a que los alumnos consideraran los elementos de las figuras geométricas y explicaran por qué son congruentes.

En la figura 4.102 se muestra un ejemplo de cómo a partir de la figura los alumnos comienzan a explicar los criterios de congruencia. Parten de la observación de la figura que se les presenta y poco a poco van haciendo explícitos los elementos que posee, para posteriormente brindar una explicación del por qué son congruentes, el alumno menciona que porque es una cuadrado que tiene sus cuatro lados congruentes y si se trazan su diagonal se formaran los dos tipos de triángulos. En este ejemplo se observa la relación que existe entre la figura presentada y los conceptos, Fischbein, menciona que la figura geométrica lleva implícitos los conceptos, el alumno los observa y finalmente relaciona todos los elementos de la figura para justificar por qué son congruentes.

Figura 4.102

Triángulos congruentes (criterios de congruencia)

1. **A partir de la figura, realiza lo siguiente:**



a) **¿Qué triángulos son congruentes?**

R=Los 2 triángulo de la diagonal el triángulo a, d, c y el triángulo a, b, c

b) **¿A qué clase de triángulos pertenecen?**

R=Son Triangulos isosceles

c) **Solamente tomando en cuenta los elementos de la figura explica por qué son congruentes.**
R=Porque todos los lados del cuadrado son iguales el único que es diferente es la línea de la diagonal del cuadrado lo que hace que esos 2 triángulos sean iguales

4.3.1.2. Trayectoria de enseñanza de geometría

En Aprende en casa 2 se trataron los conceptos del teorema de Tales y el teorema de Pitágoras. Para la trayectoria de enseñanza de geometría se utilizaron las hojas de control que se habían diseñado para el ciclo indagatorio-investigativo, sin embargo, no se aplicaron todas, solamente se trataron las que corresponden a las características de triángulos semejantes, relación entre las áreas de los cuadrados construidos en los lados de un triángulo rectángulo, nociones de unidad de medida arbitraria y segmentos conmensurables e inconmensurables. Estos últimos dos no están presentes en las clases televisadas.

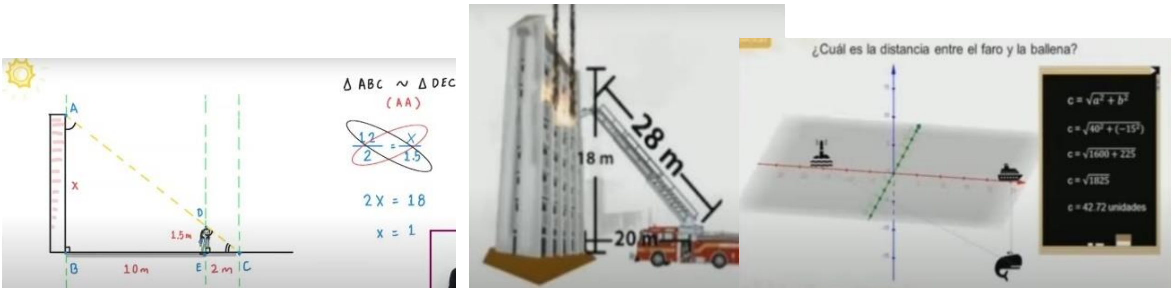
4.3.1.2.1. Resultado del análisis de las clases televisadas para el concepto de Teorema de Tales y teorema de Pitágoras.

Para el tratamiento del teorema de Tales, se hizo explícito el teorema, posteriormente se colocó un ejemplo contextualizado para su utilización y finalmente se propusieron problemas similares a los del ejemplo. Se tomaron tres ejemplos de los problemas sugeridos en las clases televisadas (véase figura 4.103a, 4.103b y 4.103c) se observa que los tres están contextualizados, es decir, colocaron una situación problema, en la figura 4.103a el problema es calcular la altura de un poste y para su representación gráfica lo colocaron en segunda dimensión para posibilitar tratar los triángulos semejantes, en la figura 4.103b colocaron la representación en tercera dimensión y colocaron las medidas y en el último, para tratar la situación en tercera dimensión colocaron los tres ejes y trazaron dos triángulos semejantes, los cuales solamente están en el plano. Uno de las principales dificultades de la geometría es que cuando se contextualizan los conceptos, se confunde entre cuerpo y figuras, y esta diferencia no se les hace saber a los alumnos, por tal motivo, es que se confunden cuando están en la segunda y la tercera dimensión, y los tratan de forma indistinta

En los tres ejemplos hacen uso del teorema mostrado con anterioridad, en el primer ejemplo, se observa que tratan con números enteros y resuelven la ecuación, sin embargo, en el último ejemplo, se hace uso de otros conceptos: teorema de Pitágoras, raíz cuadrada no exacta, en éste se presenta mucha información tanto geométrica como aritmética, desde los tres ejes, hasta el teorema y el tiempo de presentación en las clases televisadas es muy corto, por lo tanto, se desconoce si los alumnos le dan sentido a lo que se les está presentando. De forma similar se mostró el teorema de Pitágoras.

Figura 4.103

Ejemplos de problemas para tratar el teorema de Tales de Aprende en casa



(a) (b) (c)

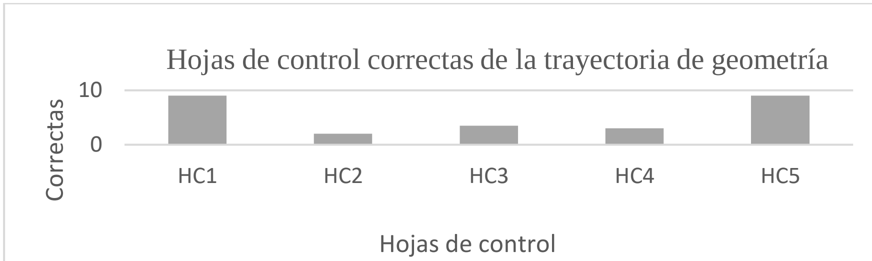
4.3.1.3. Resultados del análisis de la Te-Geo 2 (Trayectoria de enseñanza de geometría).

En la trayectoria de enseñanza se propusieron los siguientes conceptos: características de triángulos semejantes, relación entre las áreas de los cuadrados construidos en los lados de un triángulo rectángulo, nociones de unidad de medida arbitraria y segmentos conmensurables e inconmensurables. Estos últimos dos no están presentes en las clases televisadas.

La primera hoja de control se enfocó a las características de las figuras semejantes, qué elementos se conservan y cuáles cambian, para la segunda hoja se consideró la relación existente entre las áreas de los cuadrados que se construyen en los lados de un triángulo rectángulo. Para los segmentos inconmensurables, una actividad para utilizar la unidad de medida arbitraria para distinguir entre segmentos conmensurables e inconmensurables y posteriormente la hoja de control del triángulo rectángulo isósceles para determinar que la hipotenusa es inconmensurable respecto a la longitud de uno de sus catetos. En la gráfica 4.18 se muestra la frecuencia de los alumnos que realizaron las actividades propuestas.

Gráfica 4.18

Resultados cuantitativos de la Trayectoria de Enseñanza de Geometría (TE-Geo2)



4.3.1.3.1. Características de los triángulos semejantes

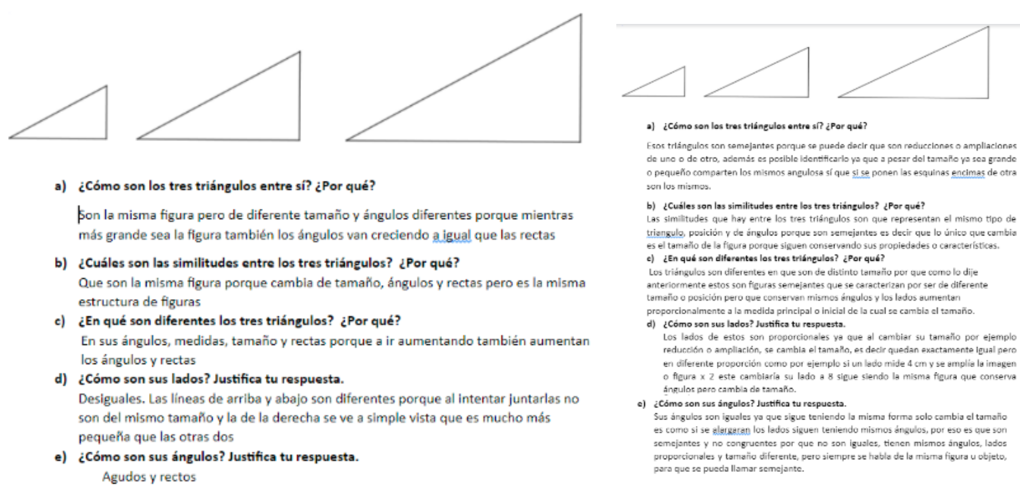
En la hoja de control de los triángulos semejantes se les mostraron tres triángulos semejantes y se les hicieron preguntas para que identificaran sus características.

Se observaron distintas formas en las que los alumnos realizaban la actividad, algunos reconocen que las figuras cambian de tamaño, sin embargo, mencionan que cambian sus ángulos, medidas, tamaño y rectas, por lo cual, no se percatan que los ángulos son congruentes, además dicen que las tres figuras son las mismas como se muestra en la figura 4.104a.

Otros identificaron las características de los triángulos semejantes, desde los lados y los ángulos como se muestra en la figura 4.104b.

Figura 4.104

Características de los triángulos semejantes



a) ¿Cómo son los tres triángulos entre sí? ¿Por qué?

Son la misma figura pero de diferente tamaño y ángulos diferentes porque mientras más grande sea la figura también los ángulos van creciendo a igual que las rectas

b) ¿Cuáles son las similitudes entre los tres triángulos? ¿Por qué?

Que son la misma figura porque cambia de tamaño, ángulos y rectas pero es la misma estructura de figuras

c) ¿En qué son diferentes los tres triángulos? ¿Por qué?

En sus ángulos, medidas, tamaño y rectas porque a ir aumentando también aumentan los ángulos y rectas

d) ¿Cómo son sus lados? Justifica tu respuesta.

Desiguales. Las líneas de arriba y abajo son diferentes porque al intentar juntarlas no son del mismo tamaño y la de la derecha se ve a simple vista que es mucho más pequeña que las otras dos

e) ¿Cómo son sus ángulos? Justifica tu respuesta.

Agudos y rectos

a) ¿Cómo son los tres triángulos entre sí? ¿Por qué?

Esos triángulos son semejantes porque se puede decir que son reducciones o ampliaciones de uno o de otro, además es posible identificarlo ya que a pesar del tamaño ya sea grande o pequeño comparten los mismos angulosa sí que si se ponen las esquinas encimas de otra son los mismos.

b) ¿Cuáles son las similitudes entre los tres triángulos? ¿Por qué?

Las similitudes que hay entre los tres triángulos son que representan el mismo tipo de triangulo, posición y de ángulos porque son semejantes es decir que lo único que cambia es el tamaño de la figura porque siguen conservando sus propiedades o características.

c) ¿En qué son diferentes los tres triángulos? ¿Por qué?

Los triángulos son diferentes en que son de distinto tamaño por que como lo dije anteriormente estos son figuras semejantes que se caracterizan por ser de diferente tamaño o posición pero que conservan mismos ángulos y los lados aumentan proporcionalmente a la medida principal o inicial de la cual se cambia el tamaño.

d) ¿Cómo son sus lados? Justifica tu respuesta.

Los lados de estos son proporcionales ya que al cambiar su tamaño por ejemplo reducción o ampliación, se cambia el tamaño, es decir quedan exactamente igual pero en diferente proporción como por ejemplo si un lado mide 4 cm y se amplía la imagen o figura x 2 este cambiaría su lado a 8 sigue siendo la misma figura que conserva ángulos pero cambia de tamaño.

e) ¿Cómo son sus ángulos? Justifica tu respuesta.

Sus ángulos son iguales ya que sigue teniendo la misma forma solo cambia el tamaño es como si se alargaran los lados siguen teniendo mismos ángulos, por eso es que son semejantes y no congruentes por que no son iguales, tienen mismos ángulos, lados proporcionales y tamaño diferente, pero siempre se habla de la misma figura u objeto, para que se pueda llamar semejante.

(a) (b)

4.3.1.3.2. Relaciones entre áreas de cuadrados construidos en los lados de un triángulo rectángulo

Para las relaciones entre las áreas de los cuadrados construidos en los lados de un triángulo rectángulo se presentó la figura clásica y se colocó una unidad de medida para el área y se les solicitó el área de cada cuadrado y posteriormente la longitud de los segmentos del triángulo rectángulo. Los propósitos de esta actividad fueron:

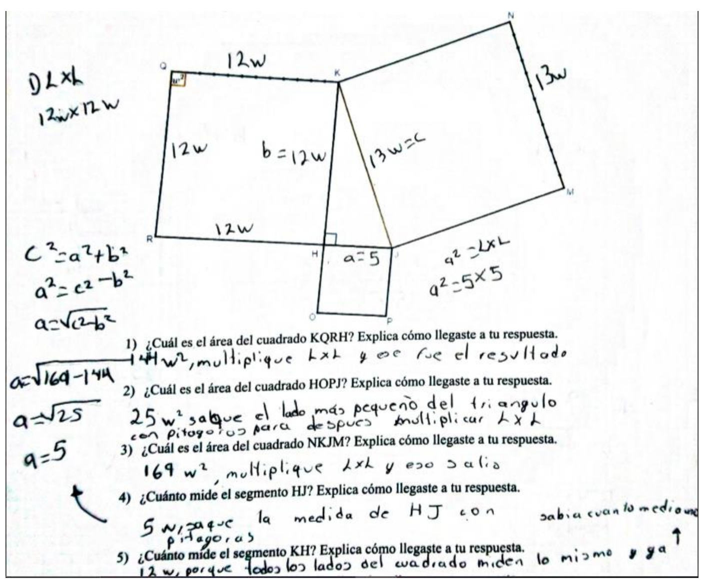
*Utilizar la unidad de medida propuesta para el área

*Diferenciar entre el área y la longitud

Algunos alumnos hicieron uso de la fórmula para el teorema de Pitágoras, como se observa en la figura 4.105, el alumno toma en consideración la unidad de medida y con ella determina cuántos caben en uno de los lados, calcula el área de los cuadrados utilizando la fórmula para calcular el área de un cuadrado y para la longitud hace uso de la fórmula del teorema, en este caso, el alumno no reconoció la relación que había entre las áreas de los cuadrados (véase figura 4.105).

Figura 4.105

Ejemplo del teorema de Pitágoras



En otro ejemplo, el alumno solamente coloca las respuestas, no realizó operaciones, ni trazos en su hoja de control, tampoco explica cómo llega a esos resultados. Se observa que utiliza la unidad de medida para determinar la longitud de los lados de los cuadrados, sin embargo, solamente una de las áreas tiene correctas, en dos de ellas se equivoca y coloca como unidad de medida centímetros cuadrados. En las preguntas de longitud responde las tres de forma correcta y en una de ellas coloca centímetros y los últimos dos los escribe sin unidad de medida (véase figura 4.106).

Figura 4.106

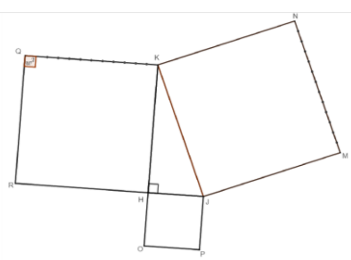
Ejemplo del teorema de Pitágoras haciendo alusión a los centímetros

1) ¿Cuál es el área del cuadrado KQRH? Explica cómo llegaste a tu respuesta.
R=144cm.cuadrados
2) ¿Cuál es el área del cuadrado HOPJ? Explica cómo llegaste a tu respuesta.
R=36cm.cuadrados
3) ¿Cuál es el área del cuadrado NKJM? Explica cómo llegaste a tu respuesta.
R=168cm.cuadrados
4) ¿Cuánto mide el segmento HJ? Explica cómo llegaste a tu respuesta.
R=5cm
5) ¿Cuánto mide el segmento KH? Explica cómo llegaste a tu respuesta.R=12
6) ¿Cuánto mide el segmento KJ? Explica cómo llegaste a tu respuesta.R=13

En el ejemplo de la figura 4.107 el alumno hace uso de la unidad de medida propuesta, hace la diferencia entre las unidades cuadradas para el área y las unidades lineales para la longitud. Para obtener la longitud de los lados del triángulo rectángulo lo que el alumno utiliza es la raíz cuadrada.

Figura 4.107

Ejemplo dos del teorema de Pitágoras



1) ¿Cuál es el área del cuadrado KQRH? Explica cómo llegaste a tu respuesta.
R=El área de la figura KQRH es de 144 w^2. El resultado lo obtuve contando el número de cuadros (unidad w^2) del lado QK y QR y el total de cuadro fue 12 y lo multiplique por el número de cuadros del lado QR y QK Y el resultado fue 144 w^2

2) ¿Cuál es el área del cuadrado HOPJ? Explica cómo llegaste a tu respuesta.
R= El área de la figura HOPJ es de 25 w^2. El resultado lo obtuve contando el número de cuadros (unidad w^2) del lado HO y OP y el total de cuadro fue 5 y lo multiplique por el número de cuadros del lado QR y QK Y el resultado fue 25 w^2

3) ¿Cuál es el área del cuadrado NKJM? Explica cómo llegaste a tu respuesta.
R=El área de la figura NKJM es de 169 w^2. El resultado lo obtuve contando el número de cuadros (unidad w^2) del lado NM y JM y el total de cuadro fue 169 y lo multiplique por el número de cuadros del lado NM y JM Y el resultado fue 169 w^2

4) ¿Cuánto mide el segmento HJ? Explica cómo llegaste a tu respuesta.
R=El segmento HJ mide 5w. El resultado les algo coherente porque su área es 25 w^2 y la raíz cuadrada es 5=5w

5) ¿Cuánto mide el segmento KH? Explica cómo llegaste a tu respuesta.
R= El segmento KH mide 12w. El resultado les algo coherente porque su área es 144 w^2 y la raíz cuadrada es 12=12w

4.3.1.3.3. Nociones de conmensurabilidad en su sentido intuitivo

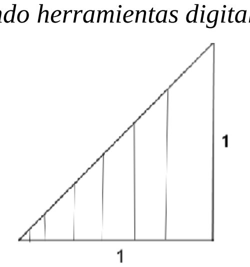
Para las nociones de conmensurabilidad e inconmensurabilidad se realizaron tres actividades: la primera fue una hoja de control utilizada como introducción para diferenciar un segmento conmensurable y uno inconmensurable respecto a una unidad de medida arbitraria dada, la segunda está relacionada con la relación entre la longitud de un cateto de un triángulo rectángulo isósceles y su hipotenusa y la tercera para la relación entre el diámetro de una circunferencia y su radio y diámetro, la primeras dos actividades se realiza con regla y compás y para la última se les solicitó que hicieran uso de un hilo para comparar el radio o diámetro con una circunferencia que ellos trazaron previamente. La primera actividad no se reporta porque los alumnos no presentaron dificultades.

Para la relación entre la relación entre la longitud de un cateto de un triángulo rectángulo isósceles se les solicitó que compararan uno de los catetos con la hipotenusa, posteriormente en la intersección realizada en la hipotenusa trazaran un perpendicular al cateto horizontal, con ello se formaría un triángulo semejante al presentado inicialmente, se les pidió que realizaran el proceso con su regla y compás cuantas veces pudieran y se les hicieron algunas preguntas.

Se identificaron diferentes formas de realizar las actividades, algunos alumnos realizaron los trazos con las herramientas de su procesador de textos y no se llevaron a cabo las indicaciones señaladas, sin embargo, el momento de contestar las preguntas presentan elementos sustanciales, en primer lugar, reconocen el problema de lo físico y lo mental, así mismo, lo reconocieron como un proceso infinito y también reconocen la semejanza en los triángulos formados como se muestra en las figuras 4.108a y 4.108b.

Figura 4.108

Procesos reiterativos entre la comparación de un cateto y la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles utilizando herramientas digitales



e) ¿Cuántas veces pudiste repetir el proceso?
R= 6 veces
f) ¿Por qué ya no seguiste?
R= Porque físicamente ya no podía continuar por la forma de la figura
g) ¿Se puede seguir haciendo el proceso? ¿Cuántas veces? ¿Por qué?
R= Mentalmente puede ser infinito pero físicamente solo se puede hasta 6 por el espacio
h) ¿En qué momento terminaría el proceso? ¿Por qué?
R= Cuando ya no podamos continuar por el espacio porque se dificultaria el graficarlo
i) Después del proceso se formarán distintos triángulos, ¿cómo son entre sí?
R= Son semejantes porque es la misma figura pero sus lados tienen diferentes longitudes

(a)

f) ¿Por qué ya no seguiste?
Porque el espacio se empezó a hacer mucho más pequeño y ya no pude seguir con el proceso.
g) ¿Se puede seguir haciendo el proceso? ¿Cuántas veces? ¿Por qué?
Si se puede seguir haciendo y seria un proceso infinito si se aumentara el espacio cada vez que se va acabando.
h) ¿En qué momento terminaría el proceso? ¿Por qué?
De manera física terminaría hasta que la hipotenusa ya no pueda contener otra medida de un cateto.
i) Después del proceso se formarán distintos triángulos, ¿cómo son entre sí?
Los triangulo que se forma son semejantes entre sí.
j) ¿Cómo son los ángulos de los triángulos que se te formaron?
Son exactamente iguales.
k) ¿Cómo son los lados de los triángulos?
Son proporcionales entre sí.
l) ¿Qué puedes decir de la hipotenusa después de todo el proceso que realizaste?
La hipotenusa es un segmento inconmensurable ya que no se puede medir exactamente.

(b)

Para la actividad de la relación entre la circunferencia y su radio, los alumnos realizaron una circunferencia cualquiera y con ayuda de un hilo tomaron la longitud del radio como unidad de medida para determinar la longitud de la circunferencia, el número pi es un conocimiento previo que los alumnos tienen desde primero de secundaria, por tal motivo, cuando realizan la actividad inmediatamente hacen alusión a él, como se observa en la figura 4.109. No se concibe como un segmento inconmensurable, solamente mencionan que falta un pedazo de la circunferencia.

Figura 4.109

Procesos reiterativos entre la comparación del radio y la circunferencia

- **Con el listón toma la medida del diámetro de la circunferencia.**
- **El diámetro será tu unidad de medida.**
- **Mide la circunferencia utilizando el listón con la medida del diámetro.**
- **¿Cuántas veces cupo la medida del diámetro en la circunferencia?**
  R= Cupo 3 veces exactas y un pedacito más
- **¿Te faltó algún pedazo para medir la circunferencia? ¿Por qué?**
  R= Sí porque la circunferencia en cuestión al diámetro es π y cómo es 3.1416 cabe exactamente 3 veces y un cachito

(a)

- Con el listón toma la medida del diámetro de la circunferencia.
- El diámetro será tu unidad de medida.
- Mide la circunferencia utilizando el listón con la medida del diámetro.
- ¿Cuántas veces cupo la medida del diámetro en la circunferencia?
  Me cupo 3 veces y me sobro un pedazo de circunferencia.
- ¿Te faltó algún pedazo por medir de la circunferencia? ¿Por qué?
  Sí, porque al momento de ir poniendo el hilo por toda la circunferencia me di cuenta que sobro un cachito porque es la representación de π.
- Aproximadamente, ¿cuánto consideras que mide el pedazo que te falto respecto a tu unidad de medida? ¿Por qué?
  Supongo que ¼.
- ¿Cuál sería la medida de la circunferencia si ahora tu unidad de medida es el radio?
  Seria 6 radios y un pedacito de circunferencia.

(b)

4.3.1.4. Resultados del análisis de la Te-Tri 2 (Trayectoria de enseñanza de trigonometría)

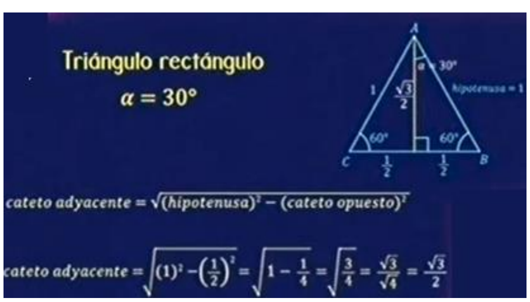
En Aprende en casa 3 se trató el contenido de razones trigonométricas. Para la trayectoria de enseñanza de trigonometría se utilizaron las primeras cuatro hojas de control diseñadas para el ciclo indagatorio-investigativo, las cuales están enfocadas al reconocimiento de los elementos de un triángulo rectángulo, la relación que existe entre sus lados (seis relaciones trigonométricas), relación entre los lados y los ángulos agudos de un triángulo rectángulo específicamente seno y coseno y finalmente se realizó una comparación entre seno y coseno.

4.3.1.4.1. Resultado del análisis de las clases televisadas para el concepto de razones trigonométricas

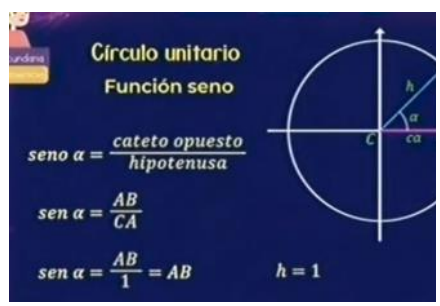
Se eligieron imágenes de las clases televisadas para trazar la ruta que estaban proponiendo para la construcción del concepto de razones trigonométricas. Partieron de un triángulo equilátero cuyos lados son de 1 y posteriormente trazaron la altura, a partir de ello, utilizaron el teorema de Pitágoras para calcular la longitud de la altura (véase figura 4.110a), posteriormente transitaron al círculo unitario, colocaron el triángulo rectángulo y establecieron las relaciones trigonométricas (véase figura 4.110b), en una tabla colocaron los valores aproximados de seno, coseno y tangente para los ángulos característicos (véase figura 4.110c), se mostró en un software de geometría dinámica la representación gráfica de seno, coseno y tangente (véase figura 4.110d), para finalmente colocar un problema que implicaba el uso de las razones trigonométricas (véase figura 4.110e) utilizan las razones trigonométricas para obtener los ángulos solicitados y en la figura 4.110f, se puede observar cómo hacen uso de la calculadora para determinar el valor de la tangente.

Figura 4.110

Ruta para la enseñanza de las razones trigonométricas propuesta en Aprende en casa 3



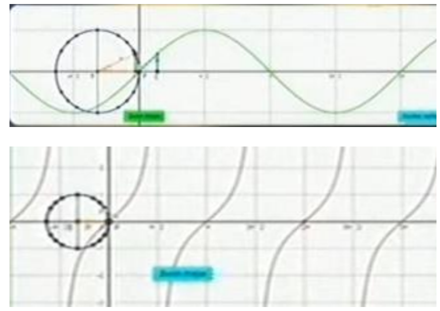
(a)



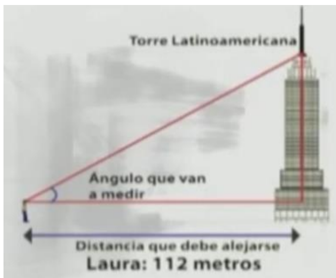
(b)

Función	0°	30°	45°	60°
seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
coseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
tangente	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

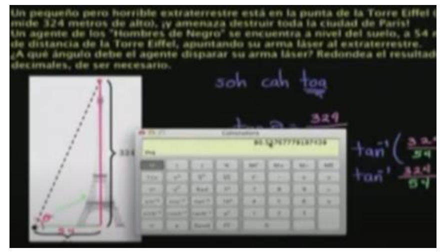
(c)



(d)



(e)



(f)

4.3.1.4.2. Resultado de las actividades de trigonometría

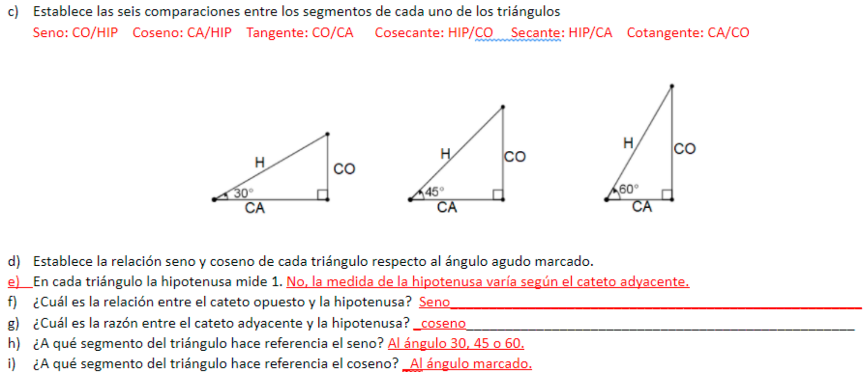
Los contenidos que se trataron en la trayectoria de enseñanza de trigonometría fueron: los elementos de un triángulo rectángulo, la relación que existe entre sus lados (seis relaciones trigonométricas), relación entre los lados y los ángulos agudos de un triángulo rectángulo específicamente seno y coseno y finalmente se realizó una comparación entre seno y coseno.

4.3.1.4.2.1. Relaciones entre segmentos de un triángulo rectángulo

En el ejemplo de la figura se muestra que los alumnos realizan las relaciones entre los lados de los triángulos, colocan las seis, reconocen el nombre de la relación entre los lados según el ángulo, sin embargo, no reconocen a qué segmento corresponde el seno y el coseno como se muestra en la figura 4.111.

Figura 4.111

Ejemplo uno del reconocimiento de los lados de un triángulo rectángulo y las relaciones entre ellos

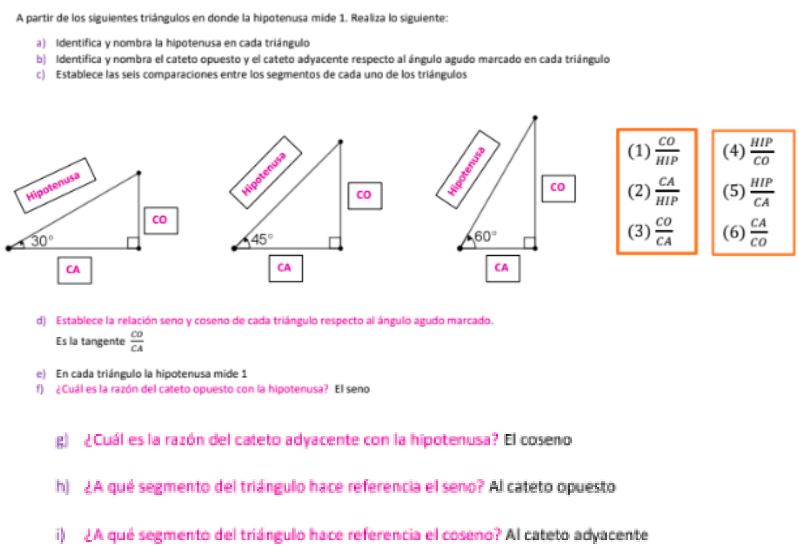

c) Establece las seis comparaciones entre los segmentos de cada uno de los triángulos
Seno: CO/HIP Coseno: CA/HIP Tangente: CO/CA Cosecante: HIP/CO Secante: HIP/CA Cotangente: CA/CO

d) Establece la relación seno y coseno de cada triángulo respecto al ángulo agudo marcado.
e) En cada triángulo la hipotenusa mide 1. No, la medida de la hipotenusa varía según el cateto adyacente.
f) ¿Cuál es la relación entre el cateto opuesto y la hipotenusa? Seno
g) ¿Cuál es la razón entre el cateto adyacente y la hipotenusa? coseno
h) ¿A qué segmento del triángulo hace referencia el seno? Al ángulo 30, 45 o 60.
i) ¿A qué segmento del triángulo hace referencia el coseno? Al ángulo marcado.

En el ejemplo de la figura 4.112 se muestra que el alumno reconoce los lados del triángulo según el ángulo marcado y coloca las seis relaciones que existen entre ellos y reconoce a qué lado corresponde el seno y el coseno cuando la hipotenusa es 1.

Figura 4.112

Ejemplo dos del reconocimiento de los lados de un triángulo rectángulo y las relaciones entre ellos


A partir de los siguientes triángulos en donde la hipotenusa mide 1. Realiza lo siguiente:
a) Identifica y nombra la hipotenusa en cada triángulo
b) Identifica y nombra el cateto opuesto y el cateto adyacente respecto al ángulo agudo marcado en cada triángulo
c) Establece las seis comparaciones entre los segmentos de cada uno de los triángulos

d) Establece la relación seno y coseno de cada triángulo respecto al ángulo agudo marcado.
Es la tangente $\frac{CO}{CA}$
e) En cada triángulo la hipotenusa mide 1
f) ¿Cuál es la razón del cateto opuesto con la hipotenusa? El seno
g) ¿Cuál es la razón del cateto adyacente con la hipotenusa? El coseno
h) ¿A qué segmento del triángulo hace referencia el seno? Al cateto opuesto
i) ¿A qué segmento del triángulo hace referencia el coseno? Al cateto adyacente

4.3.1.4.2.2. Relación entre los lados y los ángulos agudos de un triángulo rectángulo específicamente seno y coseno

Se les dio seguimiento a dos alumnos en la trayectoria de enseñanza de trigonometría debido a su asistencia a las sesiones Meet y la realización de actividades en la plataforma Classroom, ambos solamente tuvieron una falta a las sesiones virtuales, uno de ellos tuvo el 100% de actividades entregadas y el otro el 93.57%.

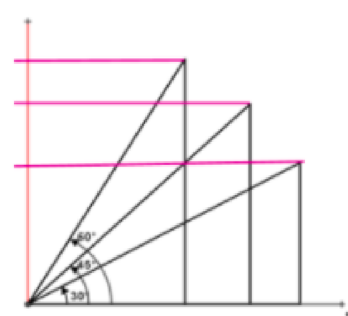
Para aproximar cuánto corresponde a seno se les mostraron tres ángulos ordenados desde un vértice y les indicó trazar perpendiculares del vértice más alto al segmento vertical que está en rojo y para coseno se les indicó que colocaran puntos en donde terminaba cada uno de los lados de los tres triángulos.

Seno

Uno de los alumnos realiza las perpendiculares solicitadas, sin embargo, no aproxima los valores a partir de la información que proporciona la figura sino que hace uso de su calculadora para determinar los valores, reconoce que la hipotenusa no cambia, pero no reconocen que los valores oscilan entre el 0 y el 1, sino que mencionan que es desde .5 al .9. En este ejemplo se observa la influencia de las clases televisadas al momento de utilizar la calculadora, puesto que, no se mostró en las sesiones cómo hacer uso de la calculadora para encontrar los valores (véase figura 4.113).

Figura 4.113

Comparaciones cualitativas y cuantitativas de los lados de los triángulos rectángulos



Nombre del alumno: Leon Rizo Lili Patricia Fecha: 16/03/2021

Propósito de la sesión: **Trabajo: Individual**

Instrucciones: Los triángulos rectángulos que trabajaste con anterioridad se ordenan respecto al ángulo agudo señalado y su cateto adyacente, como se muestra en la figura. Nota: la hipotenusa en cada triángulo es 1

a) **¿Cómo es el cateto opuesto del triángulo de 30° respecto al cateto opuesto del triángulo que tiene el ángulo de 60° marcado? ¿Por qué?**
Es menor porque el de 30º mide .5 y el de 60 mide .8

b) **¿Qué sucede con los catetos opuestos a medida que aumenta la amplitud del ángulo? ¿Por qué?**
Aumenta la medida por que cambia el ángulo y se amplía.

c) Identifica el cateto opuesto de los triángulos, una vez que los tengas traza una perpendicular al segmento rojo que está en vertical que pase por cada uno de los vértices del triángulo en donde se una el cateto opuesto y la hipotenusa.

d) **¿Cuánto mide la razón de seno respecto al ángulo de 30°? ¿Cómo obtuviste la medida?**
Primero vi cual era la que podía ocupar para obtenerlo y fue el de $\frac{co}{hip}$ entonces el seno es igual al $\frac{co}{hip}$ y sustituí tenía el valor de la hipotenusa que es 1 y como era el único valor que tenía saque a cuento valía el seno de 30º y es .5 entonces pase la hipotenusa del otro lado multiplicando y dio que .5 es igual al cateto opuesto.

e) **Determina la medida de la razón de seno de los ángulos faltantes.**
Del cateto opuesto del triángulo de 45º es de .7 y del de 60º es de .8

¿Qué sucede con la medida de la hipotenusa cuando la amplitud del ángulo aumenta? ¿Por qué?
Se mantiene igual, es como si girara la hipotenusa y solo van cambiando las medidas de sus catetos por ejemplo si aumenta el ángulo aumenta el cateto opuesto y disminuye el adyacente

f) **Los valores que obtuviste para la medida de seno de los ángulos ¿entre qué números se ubican? ¿Por qué?**
Entre .5 y .9 por que en el último valor de .8 tiene decimales que se acercan al .9.

El alumno de la figura 4.114 reconoce la relación que existe entre los catetos y los ángulos, no hace uso de su calculadora, sino que hace referencia a una tabla, pero no especifica cuál. Menciona que la hipotenusa también cambia y no reconoce que los valores oscilan entre el 0 y el 1, sino que menciona que van del .5 al 5.

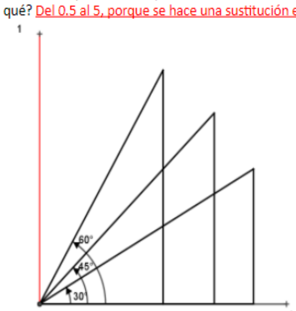
Figura 4.114

Relación seno en los triángulos rectángulos

a) ¿Cómo es el cateto opuesto del triángulo de 30° respecto al cateto opuesto del triángulo que tiene el ángulo de 60° marcado? ¿Por qué? Es más pequeño porque el al aumentar el ángulo también lo hace el cateto opuesto, lo que provoca que el cateto adyacente sea más pequeño.
b) ¿Qué sucede con los catetos opuestos a medida que aumenta la amplitud del ángulo? ¿Por qué? Van creciendo, o sea, que van aumentando su medida conforme aumenta el ángulo.
c) Identifica el cateto opuesto de los triángulos, una vez que los tengas traza una perpendicular al segmento rojo que está en vertical que pase por cada uno de los vértices del triángulo en donde se una el cateto opuesto y la hipotenusa.
d) ¿Cuánto mide la razón de seno respecto al ángulo de 30°? ¿Cómo obtuviste la medida? 0.5 utilizando la tabla.
e) Determina la medida de la razón de seno de los ángulos faltantes.

f) ¿Qué sucede con la medida de la hipotenusa cuando la amplitud del ángulo aumenta? ¿Por qué? Cambia, parece que entre más mide el ángulo, la hipotenusa también aumentará su medida.

g) Los valores que obtuviste para la medida de seno de los ángulos ¿entre qué números se ubican? ¿Por qué? Del 0.5 al 5, porque se hace una sustitución en la fórmula.

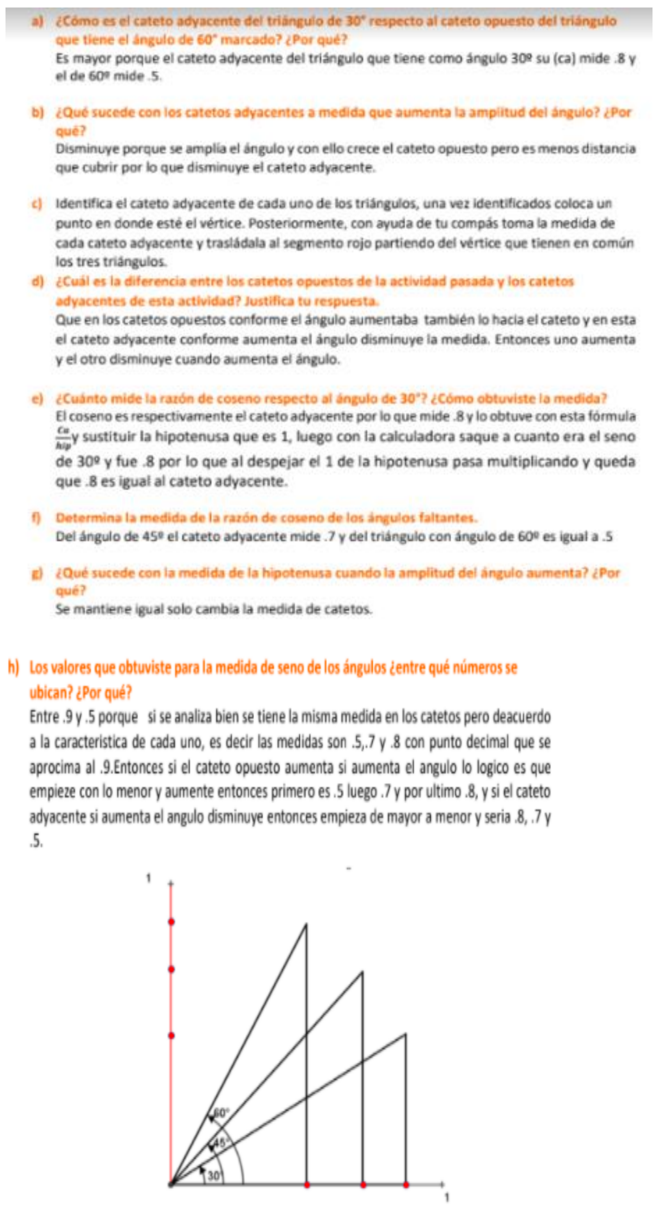


Coseno

Para la relación coseno, el primer alumno realiza lo mismo que para seno, marca los puntos en donde terminan los catetos adyacentes a los ángulos marcados y determina su valor haciendo uso de la calculadora, reconoce que la hipotenusa no cambia, pero no reconoce que los valores en los que oscila el coseno es 0.9 y 0.5.

Figura 4.115

Relación coseno en los triángulos rectángulos



a) ¿Cómo es el cateto adyacente del triángulo de 30° respecto al cateto opuesto del triángulo que tiene el ángulo de 60° marcado? ¿Por qué?
Es mayor porque el cateto adyacente del triángulo que tiene como ángulo 30º su (ca) mide .8 y el de 60º mide .5.

b) ¿Qué sucede con los catetos adyacentes a medida que aumenta la amplitud del ángulo? ¿Por qué?
Disminuye porque se amplía el ángulo y con ello crece el cateto opuesto pero es menos distancia que cubrir por lo que disminuye el cateto adyacente.

c) Identifica el cateto adyacente de cada uno de los triángulos, una vez identificados coloca un punto en donde esté el vértice. Posteriormente, con ayuda de tu compás toma la medida de cada cateto adyacente y trasládala al segmento rojo partiendo del vértice que tienen en común los tres triángulos.

d) ¿Cuál es la diferencia entre los catetos opuestos de la actividad pasada y los catetos adyacentes de esta actividad? Justifica tu respuesta.
Que en los catetos opuestos conforme el ángulo aumentaba también lo hacia el cateto y en esta el cateto adyacente conforme aumenta el ángulo disminuye la medida. Entonces uno aumenta y el otro disminuye cuando aumenta el ángulo.

e) ¿Cuánto mide la razón de coseno respecto al ángulo de 30°? ¿Cómo obtuviste la medida?
El coseno es respectivamente el cateto adyacente por lo que mide .8 y lo obtuve con esta fórmula $\frac{ca}{hip}$ y sustituir la hipotenusa que es 1, luego con la calculadora saque a cuanto era el seno de 30º y fue .8 por lo que al despejar el 1 de la hipotenusa pasa multiplicando y queda que .8 es igual al cateto adyacente.

f) Determina la medida de la razón de coseno de los ángulos faltantes.
Del ángulo de 45º el cateto adyacente mide .7 y del triángulo con ángulo de 60º es igual a .5

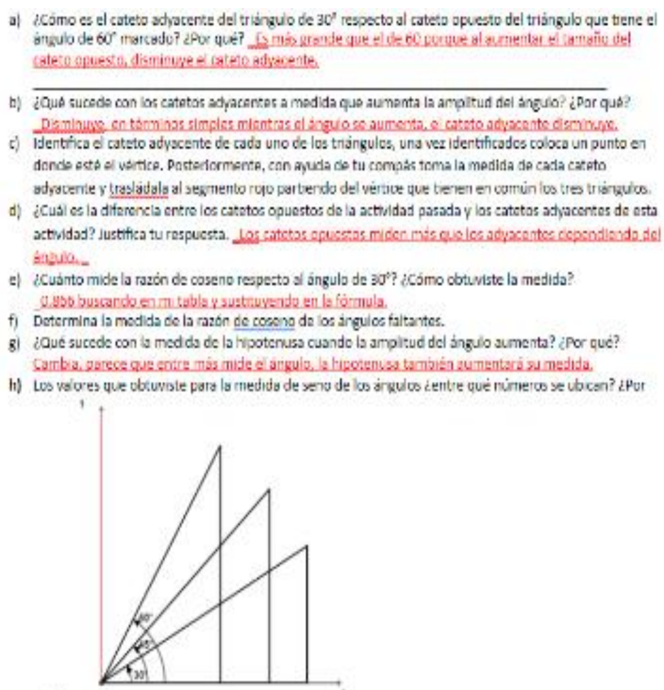
g) ¿Qué sucede con la medida de la hipotenusa cuando la amplitud del ángulo aumenta? ¿Por qué?
Se mantiene igual solo cambia la medida de catetos.

h) Los valores que obtuviste para la medida de seno de los ángulos ¿entre qué números se ubican? ¿Por qué?
Entre .9 y .5 porque si se analiza bien se tiene la misma medida en los catetos pero deacuerdo a la caracteristica de cada uno, es decir las medidas son .5,.7 y .8 con punto decimal que se aprocima al .9.Entonces si el cateto opuesto aumenta si aumenta el angulo lo logico es que empieze con lo menor y aumente entonces primero es .5 luego .7 y por ultimo .8, y si el cateto adyacente si aumenta el angulo disminuye entonces empieza de mayor a menor y seria .8, .7 y .5.

El alumno dos reconoce de manera cualitativa que el coseno disminuye conforme el ángulo aumenta, sin embargo, cuando se le solicita de forma cuantitativa, recurre nuevamente una tabla para buscar los valores de coseno. Cuando trata con coseno tampoco reconoce que la hipotenusa no cambia y los valores en los que oscila son 0 y 1 (véase figura 4.116).

Figura 4.116

No reconoce que la hipotenusa cambia



a) ¿Cómo es el cateto adyacente del triángulo de 30° respecto al cateto opuesto del triángulo que tiene el ángulo de 60° marcado? ¿Por qué? Es más grande que el de 60 porque al aumentar el tamaño del cateto opuesto, disminuye el cateto adyacente.

b) ¿Qué sucede con los catetos adyacentes a medida que aumenta la amplitud del ángulo? ¿Por qué? Disminuye, en términos simples mientras el ángulo se aumenta, el cateto adyacente disminuye.

c) Identifica el cateto adyacente de cada uno de los triángulos, una vez identificados coloca un punto en donde esté el vértice. Posteriormente, con ayuda de tu compás toma la medida de cada cateto adyacente y trasládala al segmento rojo partiendo del vértice que tienen en común los tres triángulos.

d) ¿Cuál es la diferencia entre los catetos opuestos de la actividad pasada y los catetos adyacentes de esta actividad? Justifica tu respuesta. Los catetos opuestos miden más que los adyacentes dependiendo del ángulo.

e) ¿Cuánto mide la razón de coseno respecto al ángulo de 30°? ¿Cómo obtuviste la medida? 0.866 buscando en mi tabla y sustituyendo en la fórmula.

f) Determina la medida de la razón de coseno de los ángulos faltantes.

g) ¿Qué sucede con la medida de la hipotenusa cuando la amplitud del ángulo aumenta? ¿Por qué? Cambia, parece que entre más mide el ángulo, la hipotenusa también aumentará su medida.

h) Los valores que obtuviste para la medida de seno de los ángulos ¿entre qué números se ubican? ¿Por

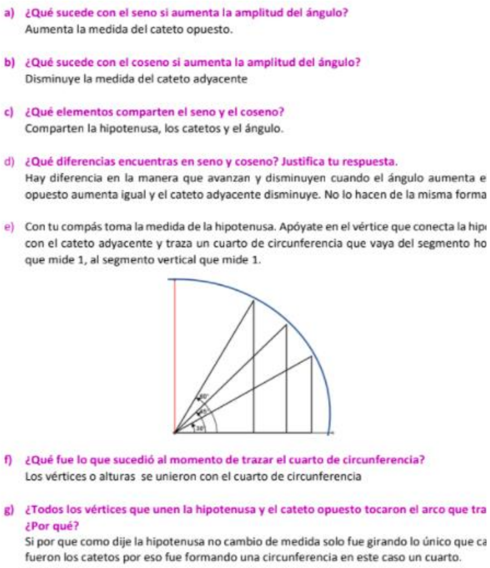
Comparativa

Para realizar la comparativa entre seno y coseno se colocó la misma figura y se les hicieron algunas preguntas, posteriormente se les solicitó que trazarán un cuarto de circunferencia y mencionaran qué sucedía con los vértices de los triángulos rectángulos.

En ambos casos reconocieron que sucedía con seno y coseno mientras el ángulo aumentaba, solamente un alumno mencionó que los elementos que comparten tanto seno como coseno es la hipotenusa en la figura la alumna reconoce que la hipotenusa conserva su medida y va rotando, por lo que va formando la circunferencia. (véase figuras 4.117a y 4.117b).

Figura 4.117

Ejemplo de la actividad de seno



a) ¿Qué sucede con el seno si aumenta la amplitud del ángulo?
Aumenta la medida del cateto opuesto.

b) ¿Qué sucede con el coseno si aumenta la amplitud del ángulo?
Disminuye la medida del cateto adyacente

c) ¿Qué elementos comparten el seno y el coseno?
Comparten la hipotenusa, los catetos y el ángulo.

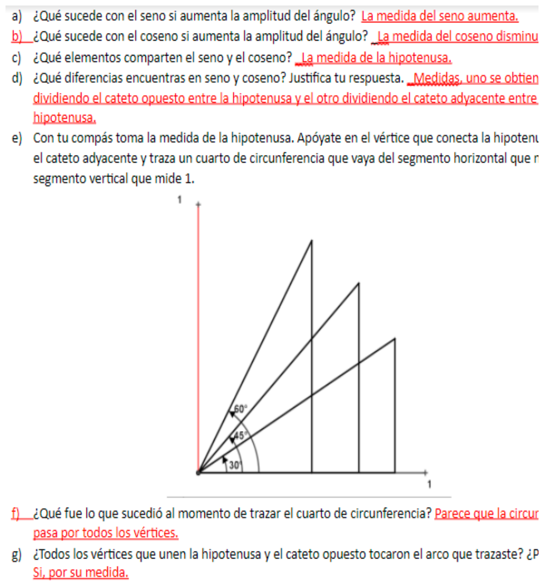
d) ¿Qué diferencias encuentras en seno y coseno? Justifica tu respuesta.
Hay diferencia en la manera que avanzan y disminuyen cuando el ángulo aumenta e
opuesto aumenta igual y el cateto adyacente disminuye. No lo hacen de la misma forma

e) Con tu compás toma la medida de la hipotenusa. Apóyate en el vértice que conecta la hip
con el cateto adyacente y traza un cuarto de circunferencia que vaya del segmento ho
que mide 1, al segmento vertical que mide 1.

f) ¿Qué fue lo que sucedió al momento de trazar el cuarto de circunferencia?
Los vértices o alturas se unieron con el cuarto de circunferencia

g) ¿Todos los vértices que unen la hipotenusa y el cateto opuesto tocaron el arco que tra
¿Por qué?
Si por que como dije la hipotenusa no cambio de medida solo fue girando lo único que ca
fueron los catetos por eso fue formando una circunferencia en este caso un cuarto.

(a)



a) ¿Qué sucede con el seno si aumenta la amplitud del ángulo? La medida del seno aumenta.
b) ¿Qué sucede con el coseno si aumenta la amplitud del ángulo? La medida del coseno disminu
c) ¿Qué elementos comparten el seno y el coseno? La medida de la hipotenusa.
d) ¿Qué diferencias encuentras en seno y coseno? Justifica tu respuesta. Medidas, uno se obtien
dividiendo el cateto opuesto entre la hipotenusa y el otro dividiendo el cateto adyacente entre
hipotenusa.
e) Con tu compás toma la medida de la hipotenusa. Apóyate en el vértice que conecta la hipoten
el cateto adyacente y traza un cuarto de circunferencia que vaya del segmento horizontal que r
segmento vertical que mide 1.

f) ¿Qué fue lo que sucedió al momento de trazar el cuarto de circunferencia? Parece que la circur
pasa por todos los vértices.
g) ¿Todos los vértices que unen la hipotenusa y el cateto opuesto tocaron el arco que trazaste? ¿P
Si, por su medida.

(b)

4.3.2. Resultados de la fase de valoración

Para la valoración del ciclo investigativo se realizaron dos entrevistas semiestructuradas a los mismos alumnos que se les realizó el seguimiento en la trayectoria de enseñanza de trigonometría. Se tomaron en cuenta los conceptos de las dos trayectorias de enseñanza (geometría y trigonometría) desarrolladas a lo largo del ciclo escolar, para valorar la consolidación de cada uno de ellos: congruencia y semejanza en triángulos rectángulos, nociones de inconmensurabilidad en su sentido intuitivo y las relaciones entre los lados y ángulos de un triángulo rectángulo. Se diseñó el guion de la entrevista, así como las hojas de control que utilizaron los alumnos.

Cada una de las entrevistas se realizó de forma individual en una sesión virtual en la plataforma de Meet, la docente envió con anticipación las hojas de control para que los alumnos las imprimieran y lograran desarrollar la actividad, sin embargo, un alumno no tenía posibilidad de tener de forma física sus hojas, por lo que, conforme se realizaba la entrevista el alumno trazaba las figuras en hojas blancas.

La docente utilizó una pizarra electrónica en donde colocaba lo que los alumnos realizaban o decían en la entrevista para darle continuidad al diálogo con los alumnos.

4.3.2.1. Elementos de un triángulo rectángulo

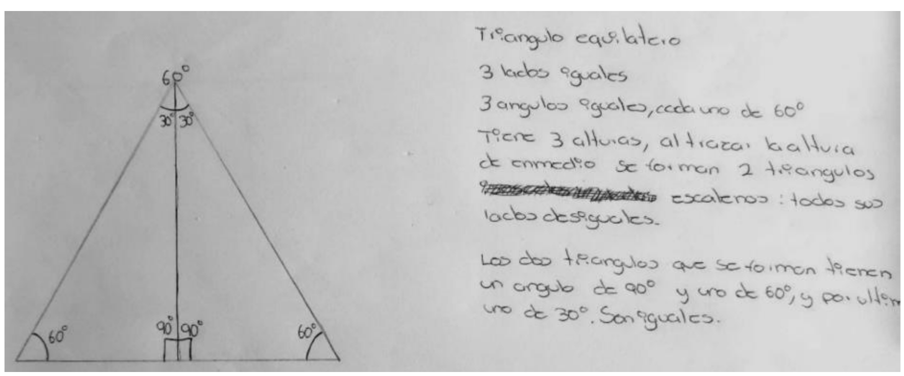
Para el concepto de congruencia se colocó un triángulo equilátero y los alumnos trazaron la altura para formar dos triángulos rectángulos congruentes y a partir de ellos se estableciera el diálogo sobre las características de los elementos de los triángulos.

En ambos casos los alumnos reconocieron en un primer momento los elementos de un triángulo equilátero, posteriormente, lo hicieron con los triángulos rectángulos formados a partir del trazo de la altura, se les cuestionó sobre el valor de los ángulos, ambos hicieron alusión al teorema de la suma de los ángulos internos de un triángulo y a partir de ello, obtuvieron el valor de cada ángulo solicitado como se observa en las figuras 4.118 y 4.119.

Un alumno no presentó dificultades para reconocer los elementos del triángulo equilátero y obtener los ángulos internos, la altura la trazó correctamente y reconoció el tipo de triángulos que se formaron y obtuvo los ángulos correspondientes a los ángulos de los triángulos congruentes.

Figura 4.118

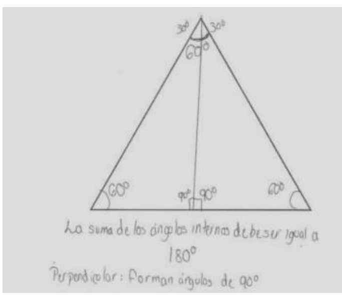
Elementos de un triángulo equilátero y trazo de una altura



El segundo alumno identifica los elementos del triángulo equilátero, sin embargo, cuando se le solicita obtener la medida de los ángulos internos hace alusión al teorema de la suma de los ángulos internos del triángulo, pero contesta que el valor de los ángulos del triángulo equilátero es de 45°. Se le cuestiona por qué obtiene ese valor y si corresponde a los 180° que había dicho anteriormente, finalmente dice que los ángulos son de 60°, a continuación, se presenta un fragmento del diálogo.

Cuando se le cuestiona sobre una de las alturas del triángulo equilátero, el alumno presenta algunas nociones de perpendicularidad, sin embargo, no tiene presente la formación de ángulos rectos, cuando el alumno trazó la altura y se le cuestionó sobre el valor de los ángulos formados fue cuando reconoció los ángulos de noventa grados.

Cuando se le solicitó que obtuviera los valores de los ángulos internos de los triángulos rectángulos formadas a partir del trazo de la altura el alumno ya no presentó dificultades, hizo uso del teorema de la suma de los ángulos internos de un triángulo.



[65] **D-I:** Ok, entonces, ya tenemos esa información: que se forman dos triángulos rectángulos y escalenos al mismo tiempo ahora nos vamos a centrar en él, nos vamos a centrar en los ángulos de esos triángulos, entonces, ya tenemos, fíjate ya tenemos dos ángulos de estos triángulos que se forman y ahora quiero saber ¿cuánto va a medir este ángulo de aquí?

[66] **A1:** ¿el de arriba?

[67] **D-I:** Ajá.

[68] **A1:** 30 grados.

[69] **D-I:** ¿Por qué?

[70] **A1.** Bueno, por dos razones; una: el ángulo completo son 60 y ahí está tomando la mitad y, entonces, son 30 y la otra es para que ese triángulo llegue a 180 ya tenemos 90 y 60, 150, entonces, nada más faltan 30.

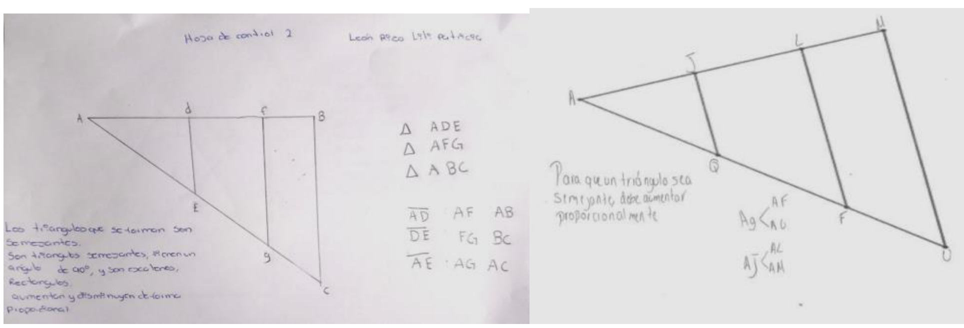
4.3.2.2. Triángulos semejantes

Para la semejanza entre triángulos se presentaron tres triángulos rectángulos ordenados a partir de uno de sus ángulos. Primero se les cuestionó cuántos triángulos visualizaban en la figura presentada, posteriormente, se les solicitó que centraran su atención en los ángulos de cada uno de los triángulos que habían visualizado y luego en los lados. Se realizó una comparación con los lados de cada uno de los triángulos y finalmente se les solicitó a los alumnos que colocaran los lados correspondientes.

Ambos alumnos reconocieron que los ángulos se mantienen y los lados son los que cambian, cuando se les solicitó que colocaran los lados correspondientes, lo hicieron de forma distinta, un alumno realizó un pequeño diagrama de árbol y el otro alumno colocó los tres segmentos correspondientes de forma horizontal. Se observa que el alumno 1 no utiliza lenguaje simbólico, inclusive los segmentos los nombra con una letra mayúscula y una minúscula, aunque en la figura que se le presentó él colocó mayúsculas, el alumno 1 utiliza lenguaje simbólico para nombrar los triángulos que visualizó al principio y para nombrar al triángulo ADE, pero no utiliza la misma simbología para los lados de los otros triángulos. El alumno 2 reconoció los tres triángulos semejantes de la figura presentada, también reconoció que los ángulos son semejantes y que los lados de los triángulos aumentan o disminuyen, pero cuando se le preguntó por lo lados correspondientes, el alumno presentó dificultades para reconocerlos.

Figura 4.119

Reconocimiento de triángulos semejantes y lados homólogos

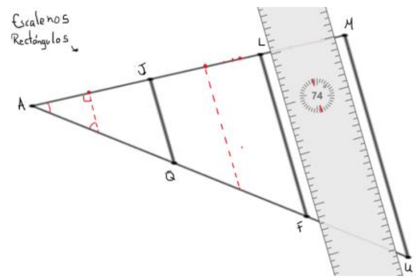


(a) **(b)**

Una vez que el alumno reconoció los lados correspondientes, se trazó otra paralela en la figura presentada para formar otro triángulo semejante para identificar si lo reconocía y lograba relacionarlo con los otros tres triángulos, también se le cuestionó sobre los lados correspondientes de los cuatro triángulos ya formados y mencionó que son semejantes, más no correspondientes. Se le preguntó la relación que había entre los segmentos paralelos trazados y contestó que eran semejantes, pero no reconoció que eran paralelos, por último, reconoció que era posible trazar muchos triángulos semejantes en la figura presentada como se muestra en el siguiente fragmento de entrevista.

[] **D-I:** Ok, ¿qué pasaría si yo trazara esta línea cuando este segmento aquí? ¿que se formaría?
[] **A1:** Haría otro triángulo.
[] **D-I:** Y ¿cómo va a ser? espérame porque me quedo ahí todo chueco. y ¿cómo va a ser respecto a los otros tres triángulos que tengo?
[] **A1:** Semejante.

Una vez que el alumno había reconocido los triángulos semejantes, la docente en la pizarra electrónica trazó más segmentos paralelos en la figura con la herramienta de regla y posteriormente se le cuestionó al alumno sobre los triángulos semejantes que había entre ellas, como se muestra en la figura 4.120 y en el siguiente fragmento.



[377]	**D-I:**	¿Qué más?
[378]	**A1:**	Que son infinitas, creo.
[379]	**D-I:**	Son infinitas, ¿crees que todas estas... estos lados sean paralelos?
[380]	**A1:**	Mhm
[381]	**D-I:**	Entonces, bueno si yo sigo colocando aquí puntitos y bajos y las letras son una perpendicular ¿cuántos triángulos semejantes crees que tenga del 'A' al 'M'? bueno en toda esta figura.
[382]	**A1:**	1,2, 3, 4, 5, 6, 7.
[383]	**D-I:**	Y ¿si sigo poniendo puntitos?
[384]	**A1:**	Pues más de siete.
[385]	**D-I:**	¿Cuántos?
[386]	**A1:**	Voy a hacer 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.
[387]	**D-I:**	Y ¿si lo lleno de puntitos?
[389]	**A1:**	Ya hace muchos.

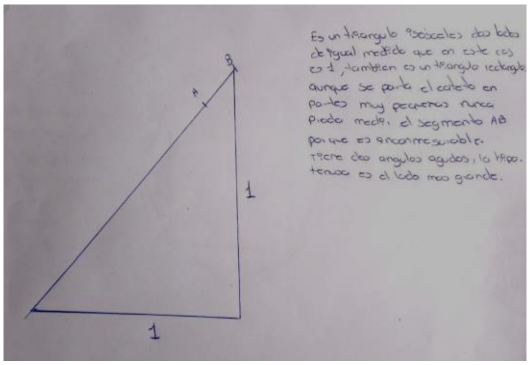
Inconmensurabilidad entre segmentos

Para la noción de inconmensurabilidad, se colocaron tres hojas de control, una para la relación entre la hipotenusa y un cateto de un triángulo rectángulo isósceles, otro para la relación entre la circunferencia y su diámetro y la última fue el tratamiento del agotamiento de la circunferencia desde adentro con polígonos inscritos.

4.3.2.3. Hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles

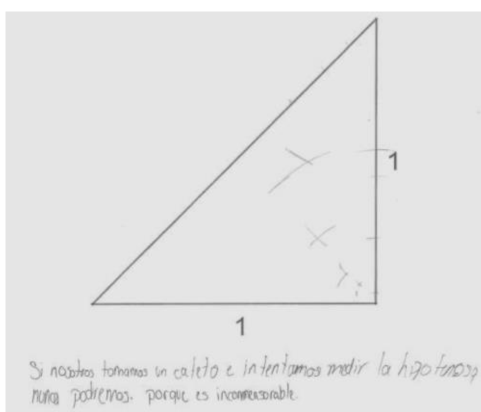
Se les presentó un triángulo rectángulo isósceles, cuya longitud de los catetos fue uno, se les mencionó que se tomaría uno de esos catetos como unidad de medida para compararlo con la hipotenusa, al compararlo faltaría un segmento de la hipotenusa, se les cuestionó qué sucedería si el cateto se dividiera en partes iguales y se tomará una para completar el segmento faltante de la hipotenusa.

El alumno 1 contestó que, aunque el cateto se dividiera en partes muy pequeñas "nunca" podría completar el segmento de la hipotenusa, por último, dice que son inconmensurables.



[234]	**A2:**	Porque no me cupo en, bueno, la tiene ahí, este no sé cómo explicarlo no cupo en la hipotenusa completo, entonces, no lo va a poder medir, no va a poder completar ese cachito aunque se divide en varias partes, aunque sean más chiquitas
[235]	**D-I:**	Pero y si yo tengo uno bien chiquito, bien chiquito ¿tampoco?
[236]	**A2:**	No
[237]	**D-I:**	¿Cómo se le llama esos a esos segmentos que no pueden ser medidos o que cuesta muchísimo trabajo ser medidos?
[238]	**A2:**	Inconmensurable.

El alumno 2 presentó problemas en esta parte de la entrevista, afirmaba que si se dividía el cateto en partes iguales una parte de ella podría completar el segmento faltante de la hipotenusa, este alumno si necesito trazar con su regla y compás la mitad, un cuarto, un octavo y un dieciseisavo del cateto para concluir que no es posible utilizar un segmento como unidad de medida para determinar la longitud del segmento faltante.



Después de que el alumno trazó perpendiculares en su figura, se le cuestionó si con las longitudes obtenidas mediante los trazos que había realizado anteriormente era posible encajarlos en la hipotenusa y el alumno mencionó que sí, a pesar de que había contestado y corroborado que no era posible encajar exactamente los segmentos en toda la hipotenusa, finalmente, se reconoce que por muy pequeño que sea dividido uno de los catetos no habrá un segmento que la cubra completamente, como se muestra en la figura.

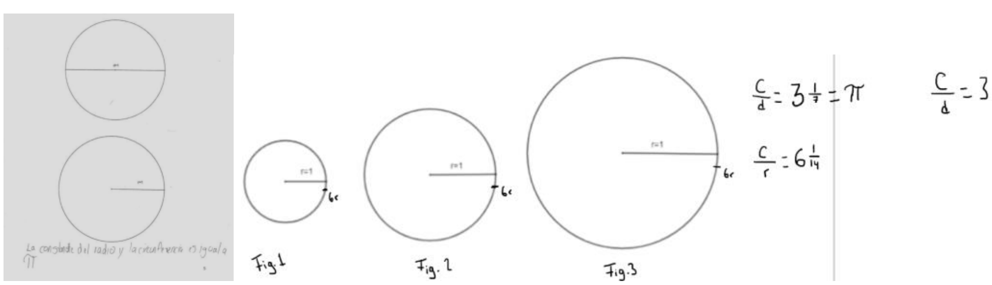
[446]	**D-I:**	Ok, si yo lo sigo dividiendo ya eso, ya mira ya como está. ¿crees que les siga faltando? si , entonces, crees que este pedacito, bueno con alguno de estos con las divisiones del cateto podamos llegar a a encajar uno que quede exactamente, qué no le sobre, que no le falte ¿crees que eso sea posible?
[447]	**A2:**	Pues yo creo que sí.
[448]	**D-I:**	¿Por qué? sí ya vimos con, vimos con un segmento, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete y me dijiste que no, que le iba a seguir sobrando un pedacito.
[449]	**A2:**	Entonces, no, no.
[500]	**D-I:**	¿Por qué no?
[501]	**A2:**	Porque siempre le va a sobrar un pedacito.
[502]	**D-I:**	Y aunque yo la corte muy pequeñita, muy pequeñita, muy pequeñita ¿crees que le siga sobrando?
	A2:	Sí.

4.3.2.4. Relación entre la circunferencia, su diámetro y su radio.

Se les presentó tres circunferencias y se realizó un tratamiento similar al de la relación entre la hipotenusa y un cateto de un triángulo rectángulo isósceles, se les solicitó que tomarán como unidad de medida el diámetro para determinar cuántas veces cabía en la circunferencia, posteriormente se les cuestionó sobre el segmento de circunferencia faltante y qué sucedería su el diámetro se dividí a la mitad, en cuartos, octavos etc alcanzaría a cubrir el espacio faltante. Los dos alumnos mencionaron de forma inmediata que cabía tres veces exactamente, pero hacía falta un segmento. Cuando se centró la atención en ese segmento faltante uno de ellos contestó.

Figura 4.120

Comparación entre el radio y diámetro con la circunferencia



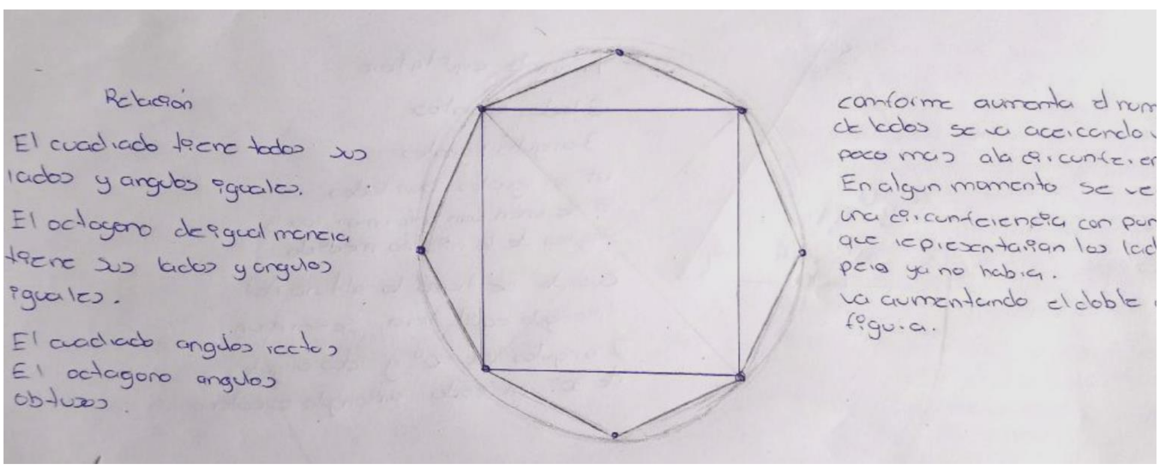
4.3.2.5. La circunferencia y el perímetro de polígonos regulares inscritos en ella

La figura que se les presentó tenía inscrito un octágono y un cuadrado en una circunferencia, se les solicitó a los alumnos que describieran la figura presentada y mencionaran los elementos de cada una de las figuras, luego se centró la atención en la relación existente entre el perímetro del octágono y el cuadrado y finalmente en la circunferencia.

El alumno 1trazó su figura con regla y compás, posteriormente, reconoció el octágono, el cuadrado y sus elementos, presentó confusión entre circunferencia y círculo. Cuando se le pidió que se centrara en el perímetro tanto del octágono como del cuadrado reconoció que dos lados del octágono correspondían a uno del cuadrado, se le solicitó que manifestará cuántos lados tendrían los siguientes polígonos inscritos y cuál sería su perímetro, reconoció que el aumentaba el doble.

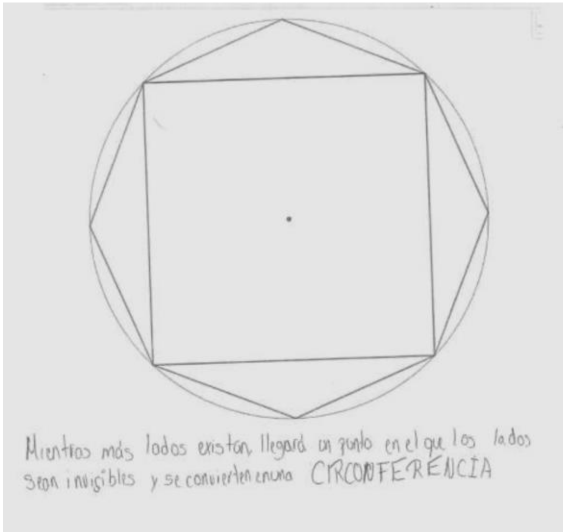
Figura 4.121

Circunferencia y polígonos regulares inscritos en ella



Se le cuestionó cómo imaginaba un polígono de 32 lados y dijo que, casi formando una circunferencia.

El alumno 2 reconoce las características de los lados y ángulos tanto del cuadrado como del octágono y tiene claro el concepto de perímetro, cuando se le cuestiona sobre la relación que existe entre los perímetros tanto del cuadrado como del octágono reconoce que por cada lado del cuadrado le corresponden dos del octágono.

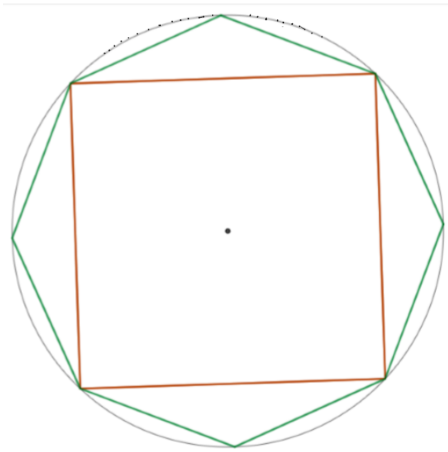


[334]	**A1:**	Pues tendrá una mayor medida. mayor
[335]	**D-I:**	¿Qué tanto? este es el del cuadrado, perdón del octágono y este bueno, aquí lo fuiste desarrollando que son 4, entonces, ¿cómo queda? ¿cuál es ahora sí...?, acá lo voy a poner, el perímetro del cuadrado son cuatro lados y el perímetro del octágono son ocho lados, ahora sí ¿cuál es la relación entre estos dos perímetros?
[336]	**A1:**	Me estaba dando en cuenta que dos de los lados de un octágono equivalen a un lado del cuadrado.
[337]	**D-I:**	muy bien.
[338]	**A1:**	Entonces, ya se sacan los cuatro lados y, entonces, medirían lo mismo.

A pesar de que menciona lo anterior, finaliza su participación mencionando que entonces ambas figuras tendrán el mismo perímetro, considera que por que uno de los lados del cuadrado está conectado con dos del octágono por lo tanto son congruentes, se le menciona que imagine los dos lados del octágono y el del cuadrado y tratara de encimarlos qué sucedía y dice que son iguales, se le vuelve a realizar la pregunta y dice que se extendería hacía los lados los del octágono. Cuando se le preguntó sobre qué pasaba si el número de lados del polígono aumentaba, él contestó que los lados se iban a hacer más pequeños, que entre más pequeños cabrían más y finalmente el alumno dice que desaparecerían y se volverían un círculo, se hizo la aclaración entre círculo y circunferencia.

Se vuelve a regresar la conversación hacia los lados de los polígonos y menciona que cuando sean demasiado pequeños se formarán puntitos, se cuestionó la relación que había entre los pequeños puntitos y el centro de la circunferencia, él dijo que eran del mismo tamaño y tendrían la misma distancia al centro no importaba en qué parte de la circunferencia estuviera el punto.

[]	**D-I:**	Y hasta el final ¿qué vamos a tener? ¿qué crees que tengamos si ya los segmentos se hicieron pequeñitos, pequeñitos, pequeñito, pequeñitos? ¿qué crees que tengamos?
[]	**A:**	Pequeños puntitos.
[]	**D-I:**	Pequeños puntitos y esos pequeños puntitos, pues son los que van a ir haciendo la circunferencia, pero hay una característica de esos pequeños puntos con el centro ¿Cuál crees que sea?



[] **A:** Son iguales.

[] **D-I:** ¿cómo que son iguales?

[] **A** me imagino que van a ser del mismo tamaño.

D-I: Los puntos bueno, ok, puede ser del mismo tamaño los puntitos, pero aparte hay una relación entre los puntos estos que ya me dijiste y el centro ¿crees...? ¿cómo va a ser la distancia entre ellos? entre cada puntito y el centro.

[] **A** igual de cada puntito y el centro.

[] **D-I:** ¿Siempre? Si ¿yo tengo un puntito acá? ay lo voy a hacer más grande para que lo veas, pero ese es un puntito, así chiquitito, es un puntito este punto ¿qué relación...? bueno ¿qué distancia va a tener al centro respecto a todos estos?

A: pues lo mismo.

[] **D-I**: Lo mismo ¿no importa, entonces, en dónde está el puntito de la circunferencia?

[] **A** No.

Capítulo 5. Conclusiones

Las conclusiones se dividen en tres apartados el primero es para la relación docencia-investigación, el segundo para el concepto matemático de interés y el último son las conclusiones finales.

5.1. Conclusiones de la relación docencia-investigación

La relación docencia-investigación no se estableció de manera inmediata, tuve que pasar por cuatro etapas: docente, docente-indagador, docente-indagador-investigador y docente-investigador. En la primera etapa aún no me formaba para la investigación, fueron los primeros años de servicio, en donde comenzaba a identificar las problemáticas de mis salones de clase, reflexionaba sobre mi práctica docente y trataba de cambiar mi enseñanza acudiendo a distintos cursos, diplomados, talleres, sin embargo, a pesar de modificar mi forma de presentar y organizar los contenidos matemáticos seguían presentándose dificultades en los alumnos a la hora de tratar los conceptos. Cuando me incorporé al programa de maestría, comencé a analizar mi práctica docente y a tener un mayor acercamiento a la teoría tanto de los conceptos matemáticos, de epistemología, didáctica, lo cual me posibilitó identificar y comprender algunas acciones y expresiones que los alumnos manifestaban en el aula. Se fue haciendo necesaria mi habilidad de observación, porque a partir de ella, se lograba tomar las diversas decisiones tanto del concepto, de la organización y de enseñanza.

El proceso de indagación fue fundamental porque me posibilitó un acercamiento a lo que se realiza en investigación y un reencuentro más profundo con mis aulas, me ofreció un enfoque distinto de mi enseñanza, se hicieron evidentes las dificultades que tenían los alumnos con los conceptos específicos puestos en juego, y no sólo eso, gracias a la teoría pude explicar por qué se presentaban y por lo tanto, modificar la forma en la que se les presentaba, en este primer momento identifiqué que muchas de las dificultades que presentan los alumnos se debe a la forma de enseñanza, por lo tanto, fue necesario tener otro enfoque a partir de los resultados obtenidos en la indagación.

En el siguiente proceso, indagatorio-investigativo, reconocí que para que la práctica se modifique es importante que haya un agente que interprete, organice y le dé sentido a la teoría, y no sólo eso, sino que además lo lleve al aula y observe las interacciones que establecen los alumnos con los conceptos y a partir de su observación sistemática tome las decisiones para la siguiente clase, porque los tiempos del aula son inmediatos, ahí no se debe tardar tanto tiempo para tomarlas porque el aula es dinámica.

En este ciclo identifiqué que los dos marcos teóricos utilizados para la construcción del conocimiento (reducción de la abstracción y el pensamiento intuitivo) habían posibilitado que los alumnos avanzaran en la construcción de los conceptos, en este sentido la enseñanza ayuda a comprender a los alumnos mejor las matemáticas, pero no sólo eso, también los ayuda a avanzar en los conceptos, como lo menciona Prassad (2014). Uno de los retos a los que me enfrenté como docente fue a la gran variedad de respuestas que brindan los alumnos cuando se tratan de forma distinta los conceptos, me vi obligada a regresar a la teoría tantas veces como fueran necesarias para comprender las respuestas escritas y las acciones de los alumnos. En ese sentido los seminarios del Departamento de Matemática Educativa estaban diseñados para atender a las necesidades que se presentaban en las aulas, cada uno de los maestros enseñaba algo que tuviera relación directa con los fenómenos que se presentaban en las aulas.

En el último ciclo, el investigativo, las condiciones fueron distintas debido a la pandemia, en este ciclo se hizo evidente de forma contundente la necesidad de la relación docencia-investigación y se logró resaltar la matemática frontal tratada en el programa Aprende en casa y la matemática posterior propuesta en las actividades diseñadas para los alumnos. Las rutas trazadas en Aprende en Casa estaban enfocadas a la memorización de fórmulas y procedimientos básicos para posteriormente resolver problemas, es decir, se mostraba la matemática de una forma terminada como lo menciona Prassad (2014). Para las actividades que se propusieron ya tenía la experiencia de los dos ciclos anteriores, tenían registrados aquellos contenidos en los que los alumnos normalmente presentaban dificultades, sin embargo, la guía fue el programa de Aprende en casa, los contenidos debían abarcarse en lo que se les propusiera en las plataformas a los alumnos, los contenidos fueron complementados con contenidos más simples para que los alumnos le fueran dando sentido.

En muchos de los resultados que ofrecieron los alumnos hacían uso de herramientas digitales, sin embargo, no eran utilizados de forma correcta. Por lo tanto, fue necesario analizar las bondades y las desventajas del uso de las plataformas y de los medios digitales de los que hacen uso los alumnos. Debido a las condiciones no fue posible tratar la geometría con diversos medios digitales, sin embargo, se queda abierto ese campo de interés.

A lo largo de todos los ciclos se estableció la relación docencia-investigación de una forma dinámica, es decir, de una forma dialéctica, pero no como la que establece Malara y Zan (2002), en su documento, de una forma lineal, sino que esta relación ahora es una relación en espiral en la que conforme pasa el tiempo se sigue enriqueciendo y puede seguir creciendo: en los conceptos matemáticos, en la epistemología del concepto y en la misma relación entre la docencia y la investigación para posteriormente llevarla a las condiciones reales de enseñanza, observar las relaciones sistemáticamente y modificar la enseñanza. En este enfoque la teoría, la práctica y la metodología están en constante movimiento y los cambios en uno se podrán percibir en los otros dos.

Asimismo, la relación dialéctica que se estableció posibilitó la participación de la docente en diferentes eventos: coloquio de doctorado organizado en el Departamento de Matemática Educativa y en la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (Relme), en el primero participó con un cartel (véase anexo 5) y en el segundo con un reporte de investigación, el cual se presentó de manera virtual (véasela presentación en el anexo 6). A partir de la participación en la Relme se obtuvieron distintas constancias (véase anexo 7). Los autores que vincularon a los investigadores y docentes en trabajos colaborativos consideraron importante que los docentes asistieran a este tipo de eventos porque comenzaban a tener relación con lo que se hace en la investigación.

5.2. Conclusiones acerca del concepto matemático

El marco teórico de reducción de la abstracción en la enseñanza posibilitó identificar los conceptos mínimos del concepto de relaciones trigonométricas, reconocimos que dicho concepto abarca otros conceptos que vienen desde la geometría y si los alumnos no los tienen consolidados se presentarán dificultades al momento de tratar el contenido de trigonometría, por lo cual, fue necesario hacer un ejercicio de reducción de la abstracción de los conceptos geométricos que se tratan en el Programa de Estudios (SEP, 2011), después se identificaron en un principio siete nociones básicas de la geometría: segmentos, ángulos, triángulos, polígonos, circunferencia, teorema de Tales y teorema de Pitágoras, los primeros cinco son los contenidos que se tratan en primer y segundo grado de secundaria a excepción de la noción de segmentos y los dos teoremas son los últimos contenidos de geometría plana que se tratan en tercero de secundaria antes del contenido de razones trigonométricas.

Estos conceptos se desarrollaron a lo largo del ciclo indagatorio, para identificar las formas en la que los alumnos los tratan, las actividades se diseñaron de tal forma que los primeros conceptos les sirvieran a los alumnos para comprender los nuevos conceptos y la docente lograra incorporar los nuevos elementos para seguir construyendo el conocimiento.

A partir de los resultados obtenidos del ciclo indagatorio reconocí que como docente aún me hacía falta comprender algunas situaciones con los alumnos, era necesario profundizar más en los conceptos, pero no de forma matemática, sino que debía revisar la construcción de los conceptos, porque algunos presentaban mayores retos que otros para su enseñanza, en especial el teorema de Tales, resultó confuso para los alumnos cuando se les proponía encontrar los lados correspondientes.

Por tal motivo, para el ciclo indagatorio-investigativo se hace la segunda reducción de la abstracción con documentos históricos (Euclides, Arquímedes), los cuales posibilitaron comprender cómo es que se van tejiendo los conceptos geométricos para proponer otros más elaborados. Se utilizaron las mismas 7 nociones conceptuales: segmentos, ángulos, triángulos, polígonos, circunferencia, teorema de Tales y teorema de Pitágoras, sin embargo, para los últimos tres se requería un tratamiento distinto por lo cual, en las actividades de geometría se trató hasta polígonos. Y se diseñó la Trayectoria de Enseñanza de la Geometría con los siguientes conceptos: Teorema de Tales, teorema de Pitágoras y las nociones de segmentos inconmensurables específicamente en la relación entre el diámetro y la circunferencia y entre un cateto y la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles, estos conceptos se identificaron como los de transición para los conceptos mínimos de la trigonometría.

En este ciclo cambió la forma de enseñanza de los conceptos, se tenía la concepción del tratamiento que Euclides para los conceptos mínimos de geometría en su primer libro, las actividades se enfocaron más en la figura y las relaciones que se establecen entre sus elementos. Algunas veces las construcciones que realizaban los alumnos dependían del concepto, entre todos los miembros del grupo se compartía información sobre las nociones que tuvieran de algún concepto, finalmente se recuperaban todas las características y con ellas debían trazar lo que se les solicitaba, otras veces se les mostraban las figuras y mediante preguntas del profesor y las participaciones de los alumnos se iban haciendo explícitos los conceptos inmersos que tenía la figura, a estas relaciones entre la figura presentada y el concepto puesto en juego o viceversa, debido a estas relaciones Fischbein (1987), llama a las figuras, figuras conceptuales.

En este ciclo identifiqué que tratar los conceptos mínimos desde el principio posibilitó que los alumnos pusieran en juego sus intuiciones e hicieran uso de su proceso creativo, es decir intuitivo (según Peña) para seguir construyendo conceptos más elaborados, al final del ciclo se observó cómo los alumnos ya habían concretizado algunos conceptos y los utilizaban en actividades más complejas, como lo señala Prassad (2014). Las dificultades que presentaban los alumnos con lo que se proponía me obligaba a regresar al concepto de forma matemática, algunas veces a la epistemología, inclusive al método utilizado para ponerlo en el aula.

Para el último ciclo, se retomaron los cinco conceptos de la geometría básica y los tres conceptos de transición para los conceptos de trigonometría y en este ciclo es en donde se trataron los conceptos básicos de la trigonometría en una Trayectoria de enseñanza, el Programa de Estudios (SEP, 2011), marca el contenido como razones trigonométricas, nosotros lo tratamos como relaciones trigonométricas en distintos triángulos rectángulos. La forma en la que se trataron los conceptos de trigonometría tuvo un cambio significativo a cómo trataba el concepto antes de incorporarme al proceso de formación para la investigación, en este ciclo para llegar a que los alumnos le dieran sentido a las relaciones trigonométricas se fueron construyendo los conceptos desde lo mínimo y antes solamente se trataba como receta de cocina y los alumnos no lo comprendían.

En cada ciclo los conceptos se fueron enriqueciendo, por ejemplo, en el primer ciclo, el propósito fue reconocer solamente cómo tratan los conceptos, qué dificultades presentan, cuáles tratan con mayor facilidad, los resultados fueron una base sólida para el profesor, los cuales tomó en cuenta en el diseño de sus instrumentos y actividades posteriores, en el segundo ciclo los conceptos se enriquecieron más por dos cuestiones fundamentales, el tratamiento de la figura conceptual y el uso de regla y compás como un medio concreto para tratar la figura y finalmente en el último ciclo nos enfrentamos con los medios digitales y nos hizo cuestionarnos cuál es la transición que debe existir entre el uso de regla y compás para pasar a medios digitales de tal forma que los alumnos le den sentido a lo que se hace con diversos softwares de geometría dinámica y no solamente los utilicen como lo hicieron los alumnos del último ciclo.

5.3. Conclusiones finales

A diferencia de los proyectos de investigación señalados en el marco teórico en donde se terminan los proyectos y tanto los investigadores y los docentes se separan y cada uno regresa a sus respectivos espacios, los docente deben enfrentarse nuevamente con las dificultades de sus aulas, en este proyecto de investigación una vez que ha terminado, el docente regresa a todas sus aulas con una forma de enseñanza distinta, y esto es porque la relación dialéctica entre docencia-investigación da un giro, ahora es investigación-docencia, el docente ya posee herramientas teóricas, metodológicas y prácticas, ha desarrollado su observación sistemática y reconoce que el fortalecimiento del pensamiento intuitivo es fundamental para la construcción de nuevos conceptos y también reconoce que la relación entre la teoría y la práctica se va enriqueciendo conforme pasa el tiempo y si así lo decide seguir desarrollando investigación tanto en los conceptos matemáticos, en la epistemología del concepto y en la misma relación. El marco teórico de Reducción de la Abstracción deja las pautas para dos cosas: seguir avanzando en el concepto de trigonometría y/o abarcar los otros dos ejes temáticos del Programa de Estudios (SEP, 2011): Sentido numérico y pensamiento algebraico y Manejo de la información.

Actualmente me encuentro en otro centro educativo, por lo que he iniciado un nuevo proceso de investigación partiendo de la fase de indagación de cómo tratan los conceptos los alumnos en el aula. De ahí que el proceso de docencia-investigación debe ser un acto consciente y propósito de todo docente de educación básica.

el ciclo escolar 2021-2022 con cuatro grupos de tercer grado de secundaria de una escuela diferente a la que se llevó a cabo el proyecto, vienen del periodo de pandemia y del trabajo a distancia con las plataformas electrónicas, han ingresado al último grado sin los conocimientos consolidados en algunos de los ejes temáticos, por lo tanto, es un campo para la investigación de los dos ejes temáticos faltantes. Con ellos se han llevado a cabo actividades de geometría como fortalecimiento de los contenidos tratados en primer y segundo grado, mientras realizo el análisis institucional para los contenidos de álgebra y probabilidad y estadística, para posteriormente realizar las reducciones de abstracción correspondientes, revisar diferentes marcos teóricos, diseñar instrumentos y entrar a la fase de indagación, es decir, de cómo tratan los conceptos en el aula.

A futuro se considera realizar el ejercicio con todo el Programa de Estudios (SEP, 2011), de la escuela secundaria, y en varias generaciones enriquecer los contenidos. Una vez realizado en secundaria seguir enriqueciendo los contenidos de forma ascendente, establecer las conexiones conceptuales de forma ascendente para llegar a conceptos de cálculo.

Apéndices

Apéndice 0. Esquema de la metodología de la investigación

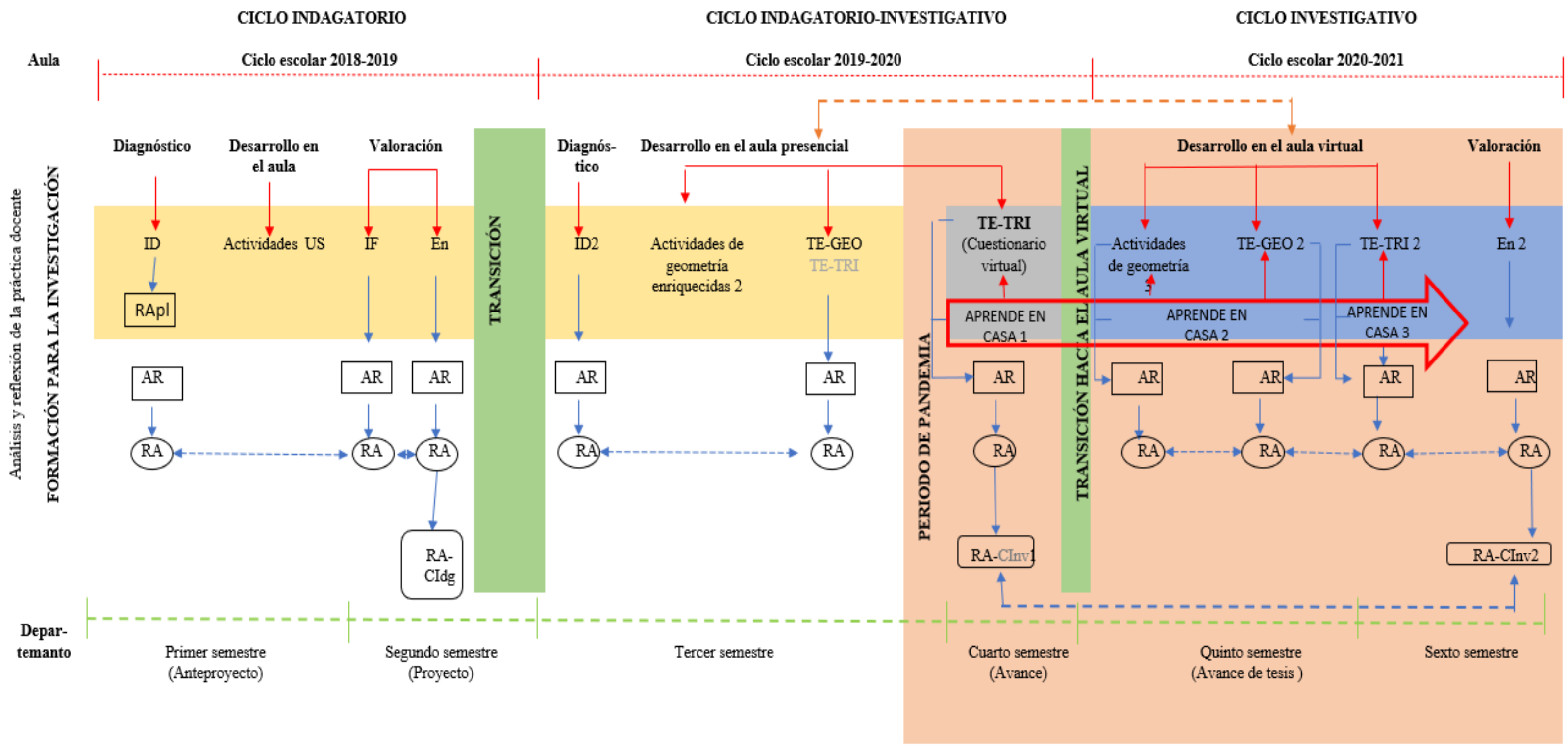


Figura 1. Metodología de la investigación
Código: CI: Ciclo indagatorio, ID: cuestionario diagnóstico, IF: cuestionario final, En: Entrevistas, AR: Análisis de resultados, RA: Resultados del análisis, CI2: Ciclo investigativo, ID: cuestionario diagnóstico, IF: cuestionario final, En: Entrevistas,
AR: Análisis de resultados, RA: Resultados del análisis
Significado de colores:
Amarillo: aula presencial
Azul aula virtual
Verde periodos de transición

Apéndice A. Ciclo indagatorio

Apéndice A1. Instrumento diagnóstico de conceptos básicos de geometría

Nombre del alumno: ____

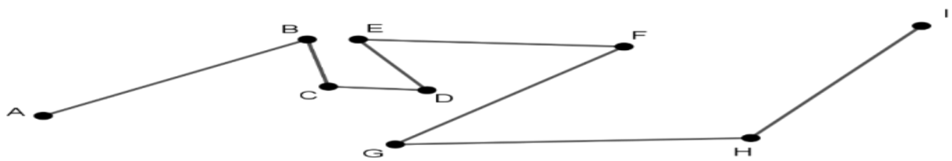
Instrucciones: Contesta y resuelve con tinta, no borres si es que te equivocas.

1) a) ¿Qué segmento de recta es el más pequeño y cuál es el más grande?

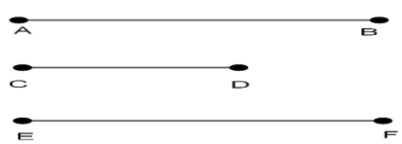
   ____

   b) ¿Cómo puedes comprobarlo?

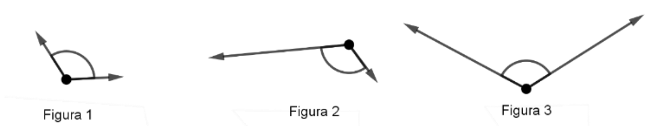
   ____



2) Suma los segmentos AB, CD y EF.

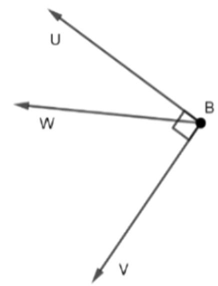


3) Considera las siguientes figuras y contesta las preguntas.

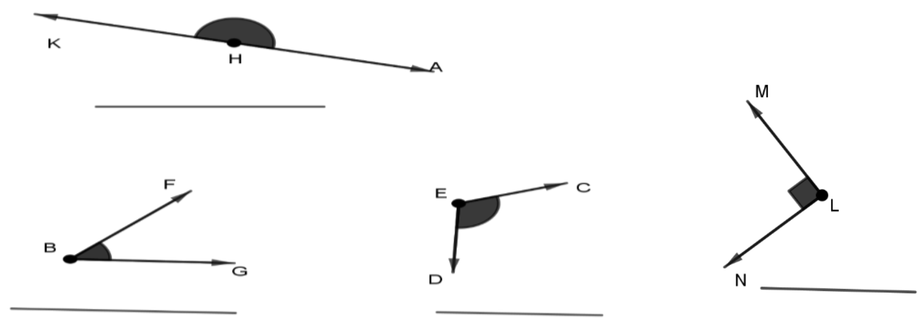


a) ¿Qué ángulo es mayor? ___________________________________
b) ¿Hay ángulos congruentes? ________________________________
c) ¿Cómo puedes comprobar tus respuestas anteriores?
____

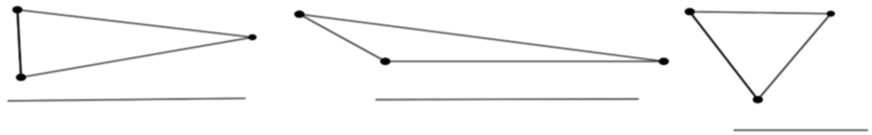
4) En la siguiente figura el ángulo UBV es recto, si el ángulo WBV mide el doble que el ángulo UBW. ¿Cuánto miden los ángulos WBV y UBW? <WBV=_______<UBW=_______



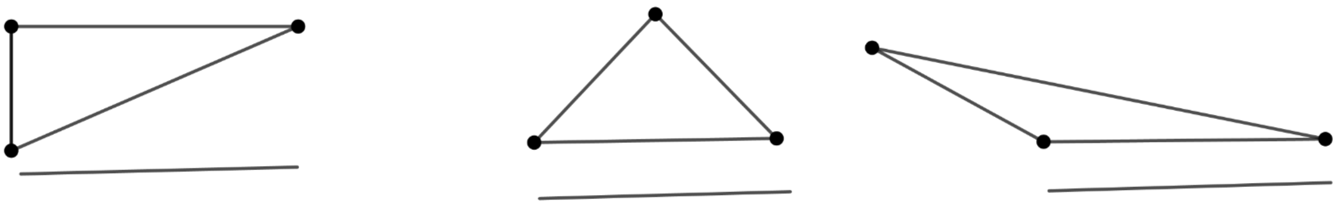
5) Coloca el nombre de cada ángulo según su medida.



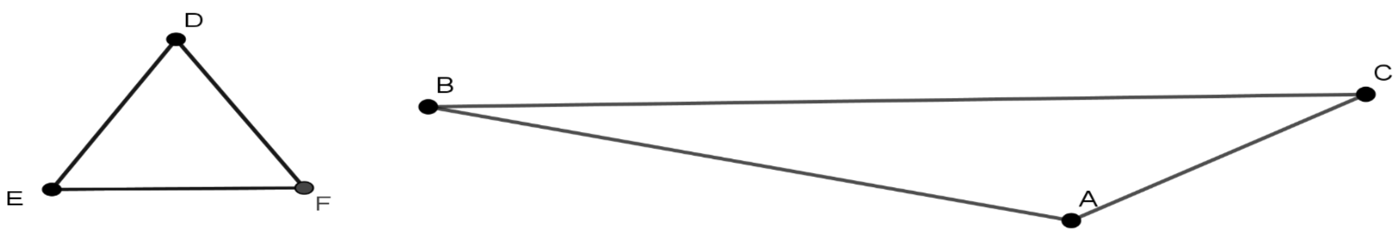
6) De acuerdo con los lados de los siguientes triángulos, coloca el nombre de cada uno debajo de ellos.



7) De acuerdo con los ángulos de los siguientes triángulos, coloca el nombre de cada uno debajo de ellos.



8) Traza las alturas de los siguientes triángulos.



9) Considera las figuras 1 y 2 y contesta las preguntas.
   a) Señala en la figura 1 los ángulos internos del cuadrado DCBA.
   b) Señala en la figura 2 los ángulos internos del triángulo ABC.
   c) ¿Cuál es la suma de los ángulos interiores del cuadrado DCBA?
   d) ¿Cuál es suma de los ángulos interiores del triángulo ABC?

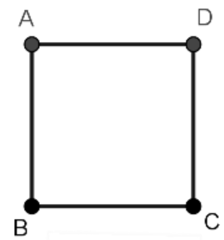


Figura 1

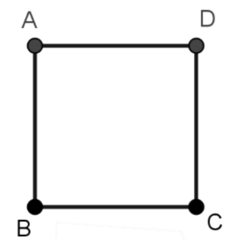
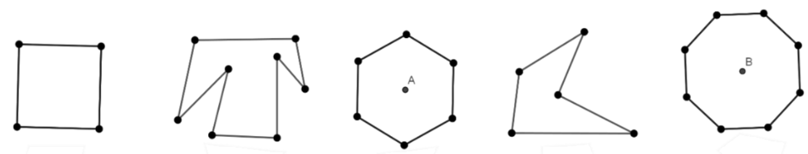


Figura 2

10) Considera las figuras siguientes y contesta las preguntas planteadas en los incisos a) y b):



a) En la tabla siguiente coloca el nombre de cada figura y el número de lados que le corresponde

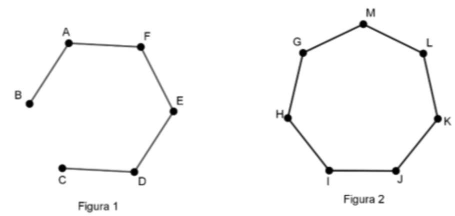
	Nombre de la figura	Número de lados
1		
2		
3		
4		
5		

b) Traza el ángulo central de la figura 3 y el de la figura 5. ¿Cuál es el valor de la medida de cada ángulo central?

Valor de la medida del ángulo central de la figura 3____________________

Valor de la medida del ángulo central de la figura 5____________________

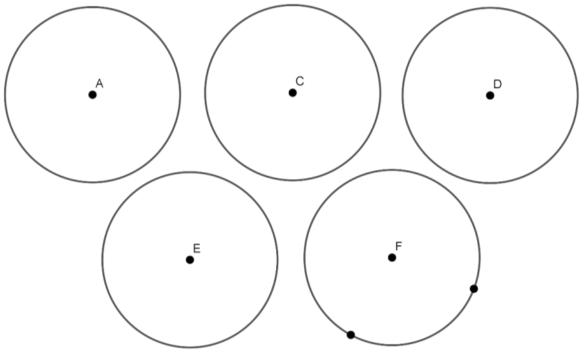
11) Considera las figuras y contesta las siguientes preguntas



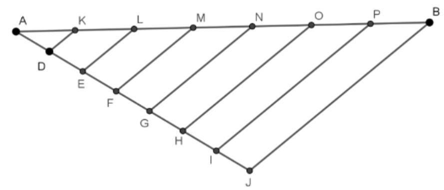
a) ¿En la figura 1 cuánto mide el segmento AG?
____

b) ¿Cuál es el perímetro de la figura 2?
____

12) Traza lo siguiente en las circunferencias:
a) Traza en la circunferencia A dos radios.
b) Traza en la circunferencia C dos diámetros.
c) Traza en la circunferencia D dos cuerdas
d) Traza en la circunferencia E dos secantes.
e) Traza en la circunferencia F dos tangentes.

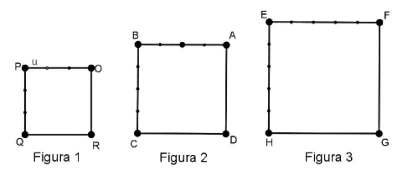


13) Considera la figura siguiente y contesta las preguntas.



a) ¿Cuántos triángulos ves en la figura?____
b) Escribe el nombre de tres triángulos que hayas visto, de acuerdo a las literales que tienen______________,_____________,____________
c) ¿Cómo son lo triángulos entre sí?____
d) El ángulo IJB mide 110° y ángulo JBP mide 40° ¿Cuánto mide el ángulo DAK? ___________¿Cuánto mide el ángulo GHO?__________

14) Considera las siguientes figuras y contesta las preguntas.



a) ¿Cuántos cuadrados hay en el cuadrado PORQ tomando en cuenta la medida u?
b) ¿Cuántos cuadrados hay en el cuadrado BADC tomando en cuenta la medida u?
c) ¿Qué relación tienen los cuadrados PORQ y BADC con el cuadrado EFGH?____

Apéndice A2. Hojas de control momento 1,2 y 3.

En la figura 1:

- La $\overleftrightarrow{CI}$ es tangente a la circunferencia B y su punto de tangencia es C.
- La $\overleftrightarrow{JK} \parallel \overleftrightarrow{CI}$.
- El ∡CIB mide 22.62°

Marca con un color diferente los ángulos que se te solicitan en la tabla. Completa la tabla con las medidas de los ángulos que se te soliciten.

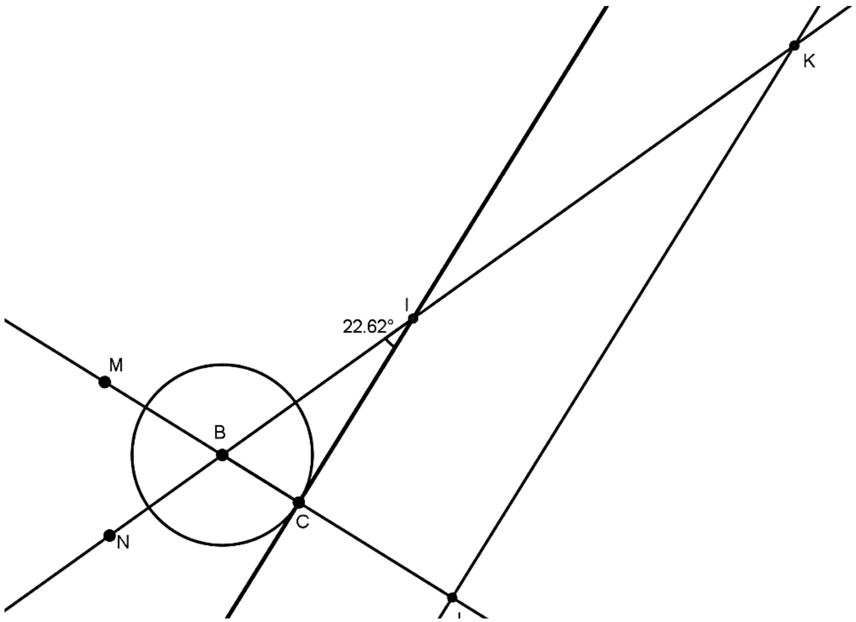


FIGURA 1

ÁNGULO	COLOR	MEDIDA DEL ÁNGULO
∡BCI		
∡CJK		
∡JKI		
∡IBC		
∡MBC		
∡MBI		
∡NBM		
∡CBN		

Escribe la notación de los dos triángulos de la figura 2. Δ______ Δ______
En la figura 2.

- ¿Los dos triángulos que localizaste son semejantes? ¿Por qué?____
- El radio de la circunferencia B es de 5 cm. Medida del $\overline{BC}$ = _______
- El $\overline{BJ}$ mide 15 cm
- El $\overline{CI}$ mide 12 cm

Compara las medidas de los lados de cada triángulo y calcula la medida del $\overline{JK}$.

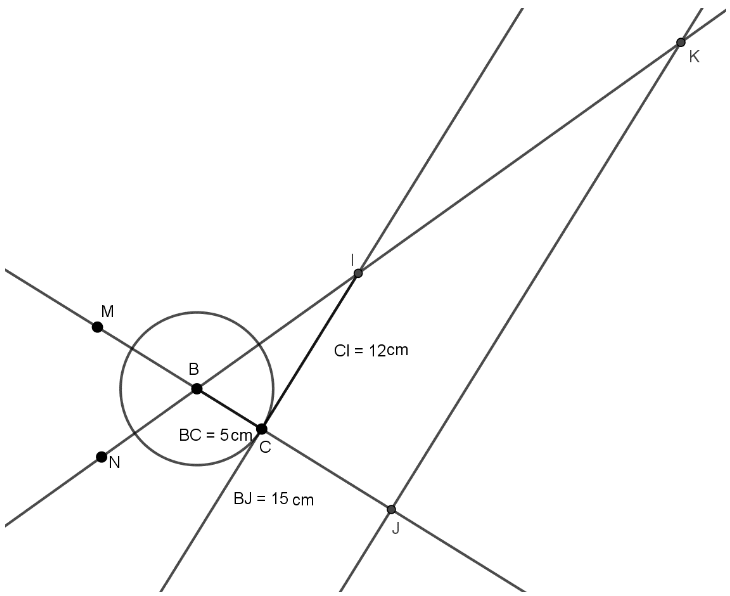


FIGURA 2

En la figura 3:

- Se tienen las mismas medias que la figura 2.
- Si se construyera en el triángulo BCI cuadrados en cada uno de los lados con las medidas proporcionadas, calcula la medida del $\overline{BI}$.
- Con todos los datos que posees, calcula la medida del $\overline{BK}$.

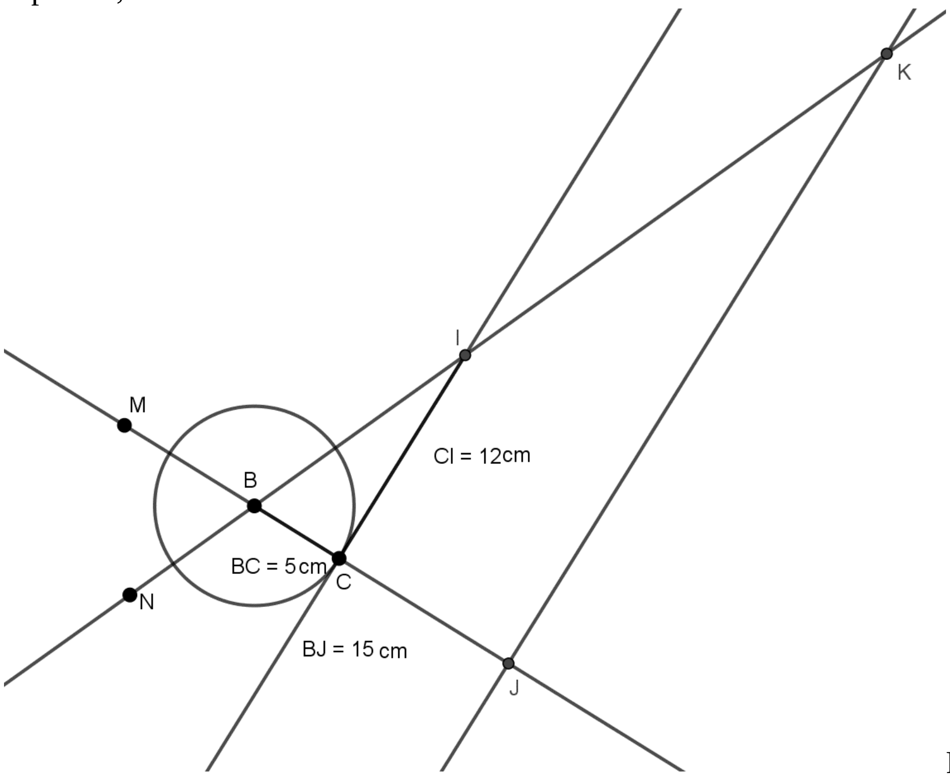


Figura 3

Escuela Secundaria No. 4 “Moisés Sáenz”
Ciclo Escolar 2019 – 2020
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav)

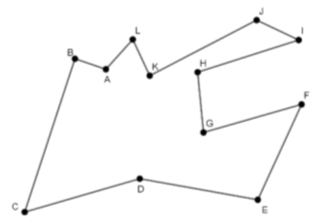
Apéndice A3. Instrumento final de conceptos básicos de geometría

Responsable: Dayanara Colín Hernández

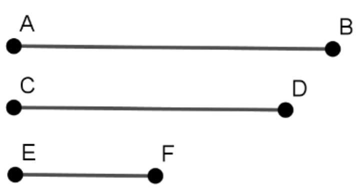
Nombre del alumno: ____

Instrucciones: Contesta y resuelve con tinta, no borres si es que te equivocas.

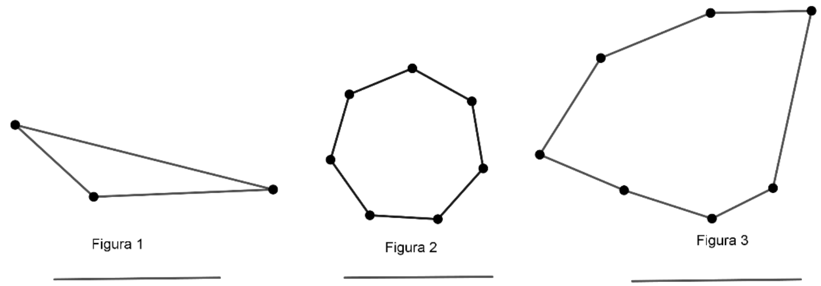
1) Con la siguiente figura:
   - Determina qué segmento es el mayor.
   - ¿Cuáles son congruentes?
   - Explica por qué y cómo le hiciste para saber cuáles son.



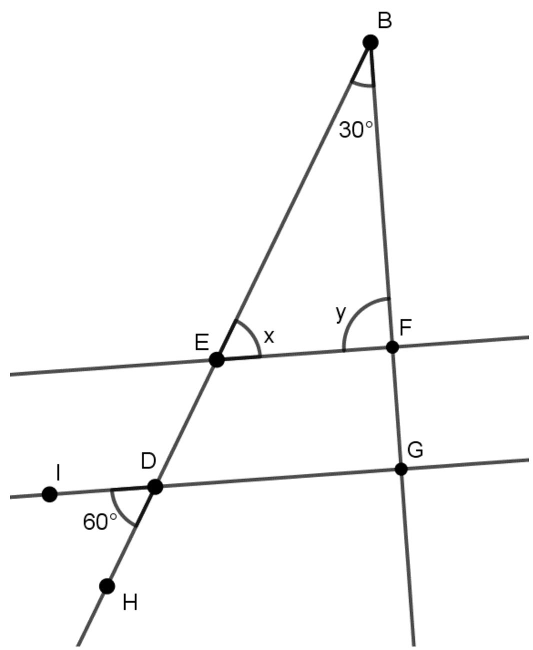
2) Con los siguientes segmentos haz lo siguiente:
   - Suma $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$
   - Resta los $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$
   - El $\overline{EF}$ multiplícalo cinco veces
   - Explica cómo lo hiciste y qué instrumentos utilizaste. (Hoja blanca)



3) Traza las diagonales respectivas desde un vértice. Escribe debajo de cada figura cuánto suman sus ángulos interiores. Explica el porqué de tu respuesta.



4) En la siguiente figura obtén la medida del ángulo "x" y del ángulo "y". Explica cómo obtuviste las medidas.



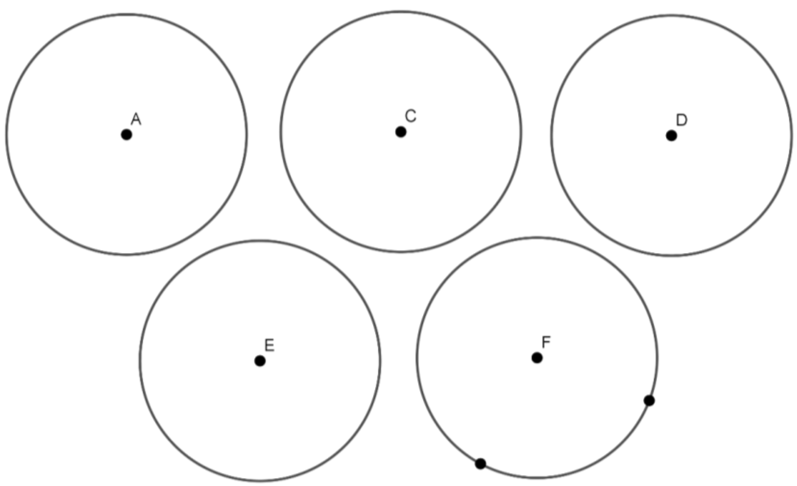
5) Traza un ángulo agudo, recto, obtuso, llano y completo y describe cada uno de ellos. (En las hojas blancas)
6) Traza con regla y compás lo siguiente: (Hoja blanca)

a) un triángulo que sea isósceles y al mismo tiempo rectángulo.

b) Un triángulo que sea obtusángulo y que sea isósceles

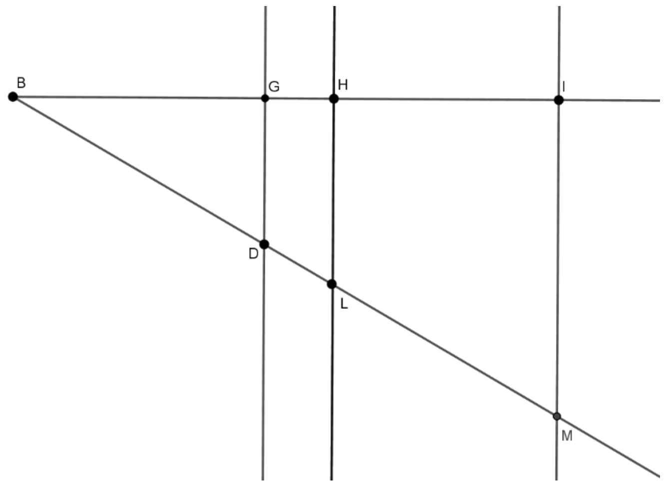
c) Un triángulo que sea rectángulo y también sea escaleno

7) Traza lo siguiente en las circunferencias y describe la relación que existe entre cada una y la circunferencia.
   f) Traza en la circunferencia A dos radios.
   g) Traza en la circunferencia C dos diámetros.
   h) Traza en la circunferencia D dos cuerdas
   i) Traza en la circunferencia E dos secantes.
   j) Traza en la circunferencia F dos tangentes.



8) Con la figura realiza lo siguiente:

- Escribe con notación los triángulos semejantes que veas en la figura.
- Compara los lados semejantes de la figura.



11) Con las siguientes figuras obtén lo siguiente:

a) área de los cuadrados

b) la medida de los siguientes lados $\overline{AB} =$ ________ $\overline{EF}$=_________$\overline{IJ}$=__________

u

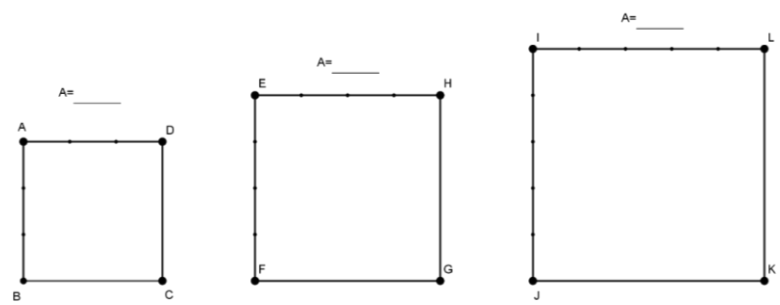
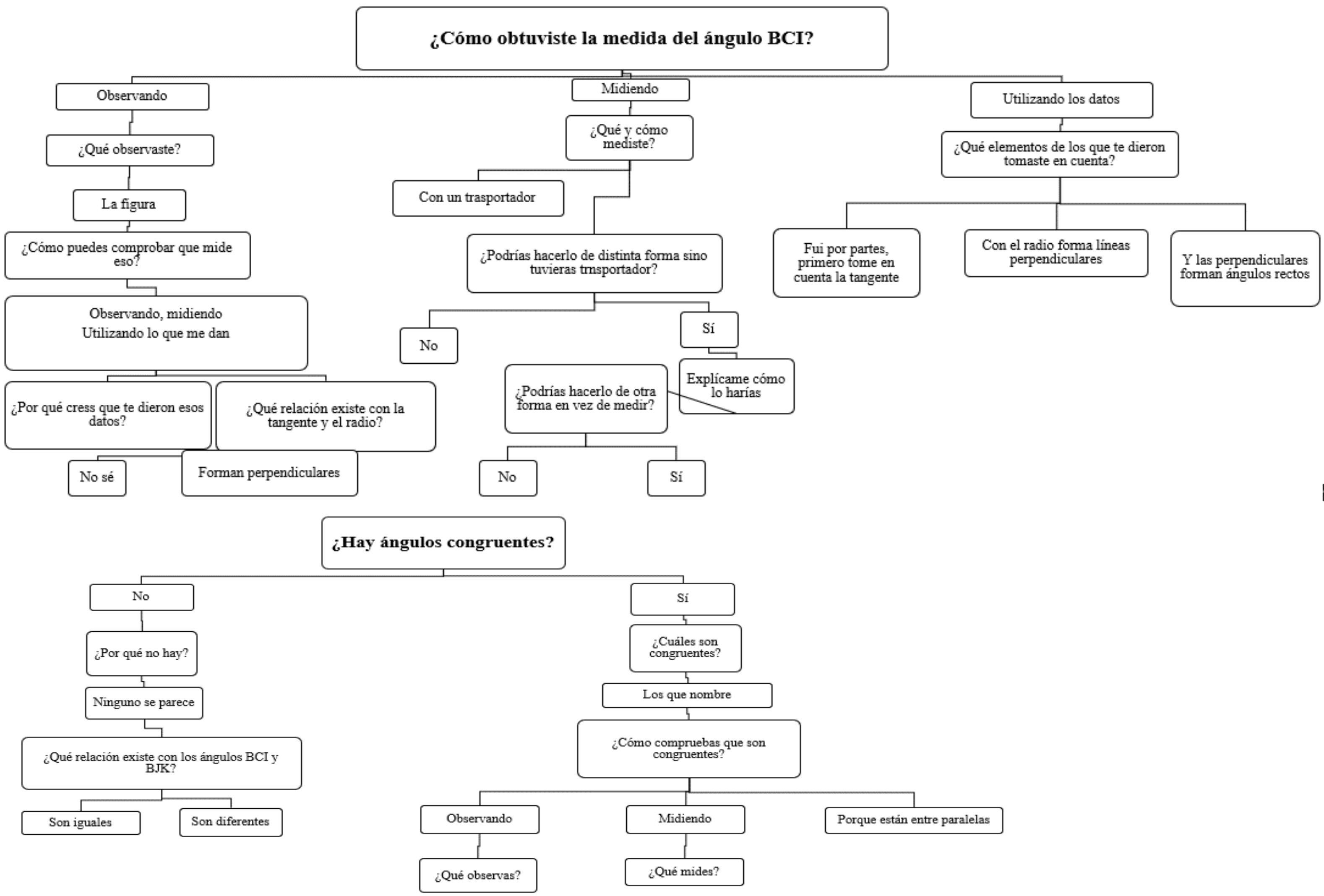


Figura 1 Figura 2 Figura 3

Apéndice A4. Guion de la entrevista



Apéndice B. Ciclo indagatorio-investigativo

Apéndice B1. Cuestionario diagnóstico

Nombre del alumno: ____

Instrucciones: Contesta y resuelve con tinta, no borres si es que te equivocas.

Eje: Sentido numérico y pensamiento algebraico

1. Resuelve y contesta las preguntas.

a) Resuelve la siguiente operación con el método que quieras.

$$\frac{1}{4} + 3\frac{1}{7} =$$

Explica el método que utilizaste____

____

b) Traza una recta numérica y localiza los sumandos $(\frac{1}{4})$ y $(3\frac{1}{7})$

¿Qué fue lo que hiciste para localizar los números? ____

____

c) Convierte a decimal el primer sumando $(\frac{1}{4})$ (Hoja blanca) ________________________________

¿Describe cómo es ese número? ____

____

d) Convierte a decimal el segundo sumando $(3\frac{1}{7})$ (Hoja blanca) ________________________________

¿Describe cómo es ese número? ____

____

e) ¿En qué se diferencian esos dos números? ____

2. Utiliza el método que quieras para resolver lo siguiente:

a) ¿Cuál es la raíz cuadrada de 144? __________

b) Describe el método que utilizaste____
____

c) ¿Cuál es el cuadrado de 18? ____________________

d) ¿Cómo obtuviste el cuadrado? ____
____

3. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones con el método que quieras.

$$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 4x + 3y = 14 \end{cases}$$

a) Describe cómo resolviste el sistema de ecuaciones____________________________________
____

b) Escoge alguna de las ecuaciones del sistema y realiza su tabla y su gráfica. (Hoja blanca)

4. Resuelve lo siguiente. <u>Explica cómo hiciste cada inciso</u>

a) $(x + 3)(5x - y) =$

b) $7y - 4y + 5z + 10yz - 15z + yz =$

Eje: Forma, espacio y medida **N.L.________**

NOTA: En este apartado harás uso de tu juego de geometría, no utilices instrumentos graduados.

5. Traza lo siguiente: (enfrente de cada inciso)

a) Una recta $\overleftrightarrow{AB}$

b) Una semirrecta $\overrightarrow{CD}$

c) Un segmento de recta $\overline{EF}$

6. Contesta lo siguiente:

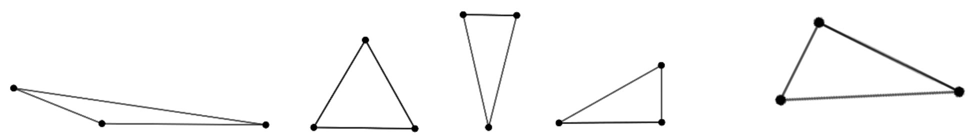
a) Escribe las características de las rectas paralelas_______________________________________

b) Escribe las características de las rectas perpendiculares__________________________________

c) Traza con tu juego geométrico la recta CD paralela a la recta AB. Explica cómo las trazaste y qué instrumentos utilizaste.

d) Traza con tu juego geométrico la recta EF perpendicular a la recta KL. Explica cómo las trazaste y qué instrumentos utilizaste.

7. Traza todas las alturas en los siguientes triángulos y contesta las preguntas:



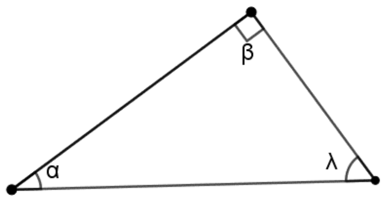
a) ¿Cómo es la altura de un triángulo cualquiera? ____

b) ¿Cuántas alturas tiene un triángulo? _________

c) ¿Cómo fueron las alturas en los últimos triángulos? ____

8. Coloca el nombre de la clasificación a la que corresponde cada uno de los ángulos. Escribe las características de cada uno (hoja blanca)

9. En la siguiente figura el triángulo es rectángulo, el ángulo alfa (α) mide 35°, ¿Cuántos grados miden los ángulos lambda (λ) y betha (β)? ¿Cómo obtuviste la medida de los ángulos?______________________________________



____

____

10. Con las características de las siguientes figuras completa la tabla.

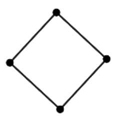


Figura 1

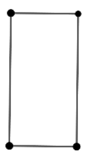


Figura 2

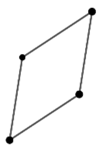


Figura 3

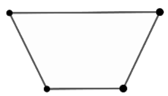


Figura 4

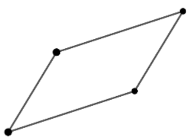
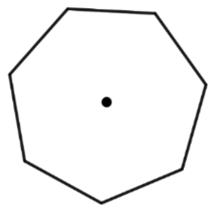


Figura 5

Figura	Nombre	¿Cómo son sus lados?	¿Cómo son sus ángulos?	¿Cómo son sus diagonales?
1				
2				
3				
4				
5				

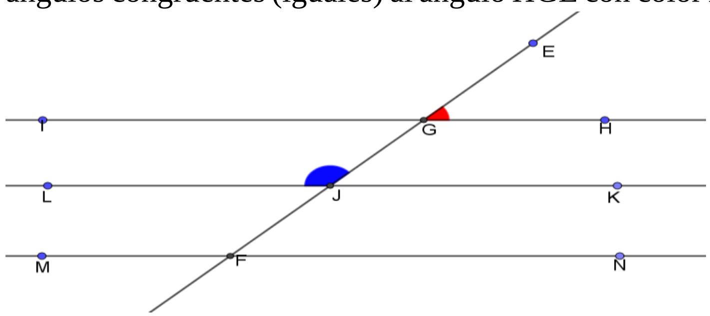
11. Marca en la siguiente figura el ángulo central y determina cuántos grados mide. **N.L.________**



¿Cuántos grados mide el ángulo central?___

¿Cómo obtuviste la medida del ángulo central? ____

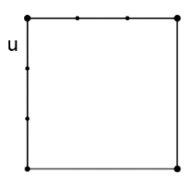
12. La recta IH es paralela a la recta LK y a la recta MN, y la recta EF es una transversal que interseca las paralelas. Marca todos los ángulos congruentes (iguales) al ángulo HGE con color rojo y todos los ángulos congruentes al ángulo GJL. Justifica tu respuesta.



d) ¿En qué se diferencian las tres razones que obtuviste? ____

13. Obtén el área y el périmetro de las siguientes figuras.

a)

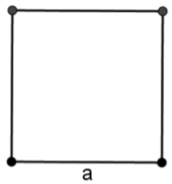


b) Perímetro=__________ Área=____________

c) ¿Cómo obtuviste el área? ____

d) ¿Cómo obtuviste el perímetro? ____

e) En el siguiente cuadrado uno de sus lados mide a.



Perímetro=_________ Área=___________

f) ¿Cómo obtuviste el área? ____

g) ¿Cómo obtuviste el perímetro? ____

Eje: Manejo de la información **N.L._______**

14. Se realizó una encuesta en una paletería sobre los sabores de helados que más les gustaban a los consumidores y se realizó la siguiente tabla, con esa información contesta las preguntas:

Sabores de helados	**Frecuencia absoluta**
Vainilla	13
Chocolate	15
Fresa	10
Napolitano	30
Nuez	12
Chicle	20
Oreo	10

a) ¿A cuántas personas se les hizo la encuesta? ___________
b) ¿Qué es una muestra y para qué sirve? ____
c) ¿A cuántas personas les gusta el sabor napolitano respecto al total de personas que se les hizo la encuesta? ______________________

15. Con los siguientes datos contesta las preguntas:

- A una fiesta acuden 200 personas, de ellas 45 son niños, 60 son adolescentes y 95 son adultos.

a) ¿Cuál es el porcentaje de niños que acudieron a la fiesta? ____
b) ¿Cómo obtuviste el porcentaje? ____
____
c) ¿Cuál es el porcentaje de adolescentes y adultos que están en la fiesta? ____________________________________

d) ¿Cómo obtuviste el porcentaje? ____

16. Los siguientes datos fueron obtenidos de las calificaciones del examen de matemáticas de alumnos de secundaria, con ellos contesta las preguntas. Justifica cada una de tus respuestas.

7,6,7,8,10,5,10,9,8,9,5,8,8

a) ¿Cuál es la moda de los datos? ______________

¿Cómo obtuviste la moda? ____

b) ¿Cuál es la media de los datos? ______________

¿Cómo obtuviste la media? ____

c) ¿Cuál es la mediana de los datos? ______________

¿Cómo obtuviste la mediana? ____

17. Una urna contiene dos pelotas blancas, diez moradas y 8 rojas. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una pelota morada? Expresa tu resultado en forma de fracción común, fracción decimal y tanto por ciento. Justifica tus respuestas.

Fracción común:

Fracción decimal:

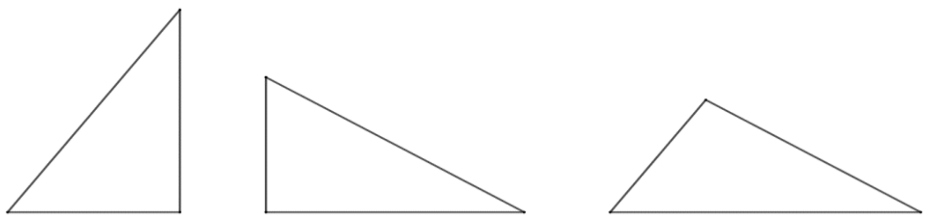
Tanto por ciento:

Apéndice B2. Hojas de control de la Trayectoria de Enseñanza de la Geometría

Hoja de control 1 Alturas y elementos de un triángulo rectángulo

Nombre del alumno:
____Fecha: ___/___/____

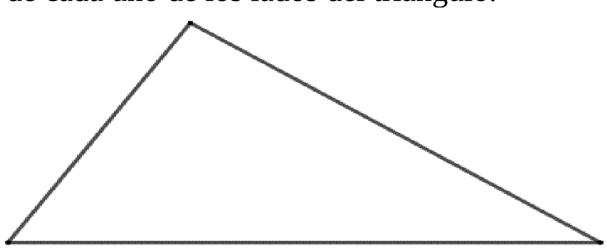
ACTIVIDAD 1 Traza las alturas de los siguientes triángulos y contesta las preguntas.



a) Describe cómo es la altura de un triángulo.
b) ¿Cuántas alturas tiene un triángulo? Justifica tu respuesta. ______________________________
____
____
____
____
c) En un triángulo rectángulo, ¿qué relación tienen los lados del triángulo con sus alturas?_ ____
____
____

ACTIVIDAD 2 Realiza lo siguiente:

a) Identifica el ángulo recto
b) Identifica los otros dos ángulos del triángulo y asígnales una letra del alfabeto griego.
c) Coloca el nombre de cada uno de los lados del triángulo.



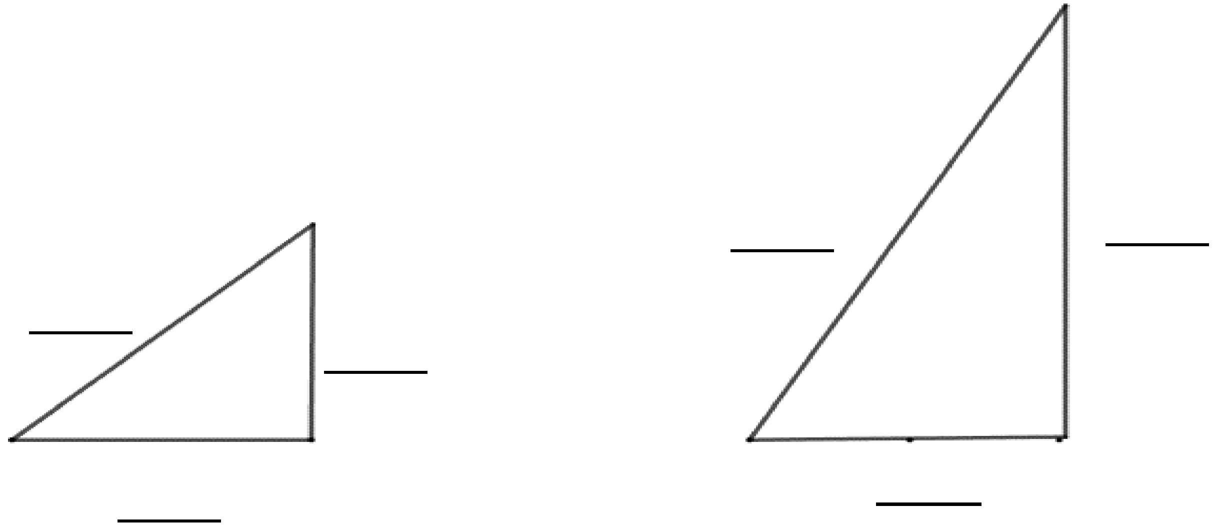
Escuela Secundaria No. 4 “Moisés Sáenz”
Ciclo Escolar 2019-2020

CINVESTAV-DME N.L.:____

Hoja de control 2 Relaciones entre los segmentos de un triángulo rectángulo

Nombre del alumno:
____**Fecha:**___/___/____

Instrucciones: Nombra los lados de los triángulos y compara los segmentos del triángulo.



¿Cuántas comparaciones puedes realizar?

____

Hoja de control 3 Triángulos semejantes.

Nombre del alumno:

Instrucciones: A partir de la siguiente figura contesta las preguntas y realiza lo que se te solicita**.**

a) ¿Cuántos triángulos observas en la figura? Justifica tu respuesta. ____

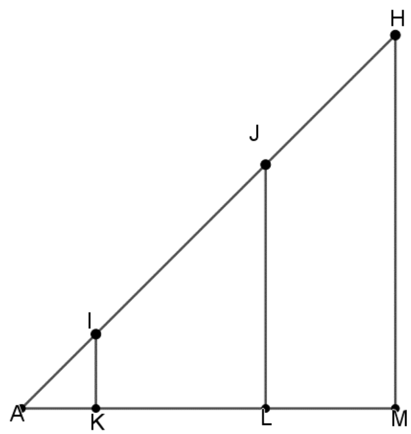
____

b) Nombra los triángulos que ves de acuerdo con los nombres de los vértices____

c) Con ayuda de tu compás, traza en la hoja blanca que se te proporcionó los triángulos de la figura, que estén aislados uno del otro.

d) ¿Cómo son esos triángulos entre sí? ____

e) ¿Cómo son los lados de los triángulos que trazaste? ____

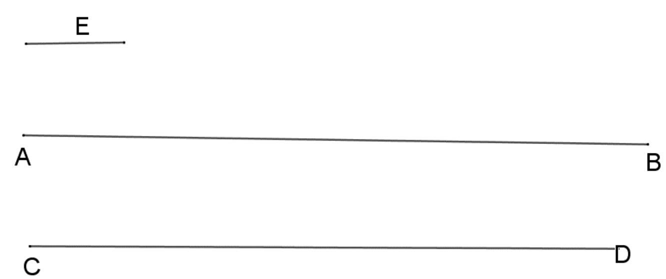


f) ¿Cómo son sus ángulos?

Hoja de control 4 Segmentos inconmensurables y conmensurables.

Nombre del alumno:

Instrucciones: En la siguiente figura se te brinda una unidad de medida (e) y dos segmentos (AB y CD). Realiza lo siguiente: con la unidad de medida establecida, mide el segmento AB y el segmento CD. Luego contesta las preguntas.



a) De acuerdo con la unidad de medida (e), ¿cuánto mide el segmento AB?
____

b) De acuerdo con la unidad de medida (e), ¿cuánto mide el segmento CD?
____

c) ¿Qué segmento no pudiste medir de manera exacta? ¿Por qué?
____

d) ¿Cómo llamarías a los segmentos que se pueden medir exactamente con la unidad de medida?
____

e) ¿Cómo llamarías a los segmentos que no se pueden medir con la unidad de medida establecida?
____

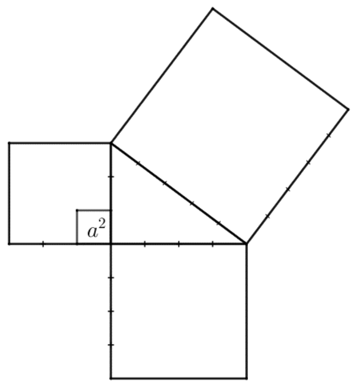
Escuela Secundaria No. 4 "Moisés Sáenz"
Ciclo Escolar 2019-2020

CINVESTAV-DME N.L.:____

Hoja de control 5 Teorema de Pitágoras

Nombre del alumno:
____**Fecha:**___/___/____

Instrucciones: Con la unidad de medida a^2, calcula el área de los tres cuadrados de la siguiente figura. Luego contesta las preguntas



a) ¿Cuál es el área del cuadrado más pequeño?___________
b) ¿Cuál es el área del cuadrado mediano? ______________
c) ¿Cuál es el área del cuadrado más grande? _________________
d) ¿Qué relación tienen esas áreas entre sí?____
e) Calcula cuánto miden los lados del triángulo rectángulo que se encuentra en la figura. _____________________________

Hoja de control 6 Teorema de Pitágoras y raíz de dos.

Nombre del alumno:

Instrucciones: Realiza lo que se te solicita y contesta las preguntas.

a) Describe la figura (qué tipo de triángulo es, cómo son sus lados y sus ángulos) ____

b) Toma la medida del segmento que corresponde a uno de los catetos y utilízala para medir la hipotenusa, en donde quepa un cateto realiza una marca en la intersección y posteriormente traza una perpendicular a la base.

c) ¿Cuánto mide la hipotenusa? Justifica tu respuesta. ____

d) Repite el proceso descrito en el inciso b tantas veces como puedas.

e) ¿Cuántas veces pudiste repetir el proceso? _________________

f) ¿Por qué ya no seguiste? ____

g) ¿Se puede seguir haciendo el proceso? ¿Cuántas veces? ¿Por qué? ____

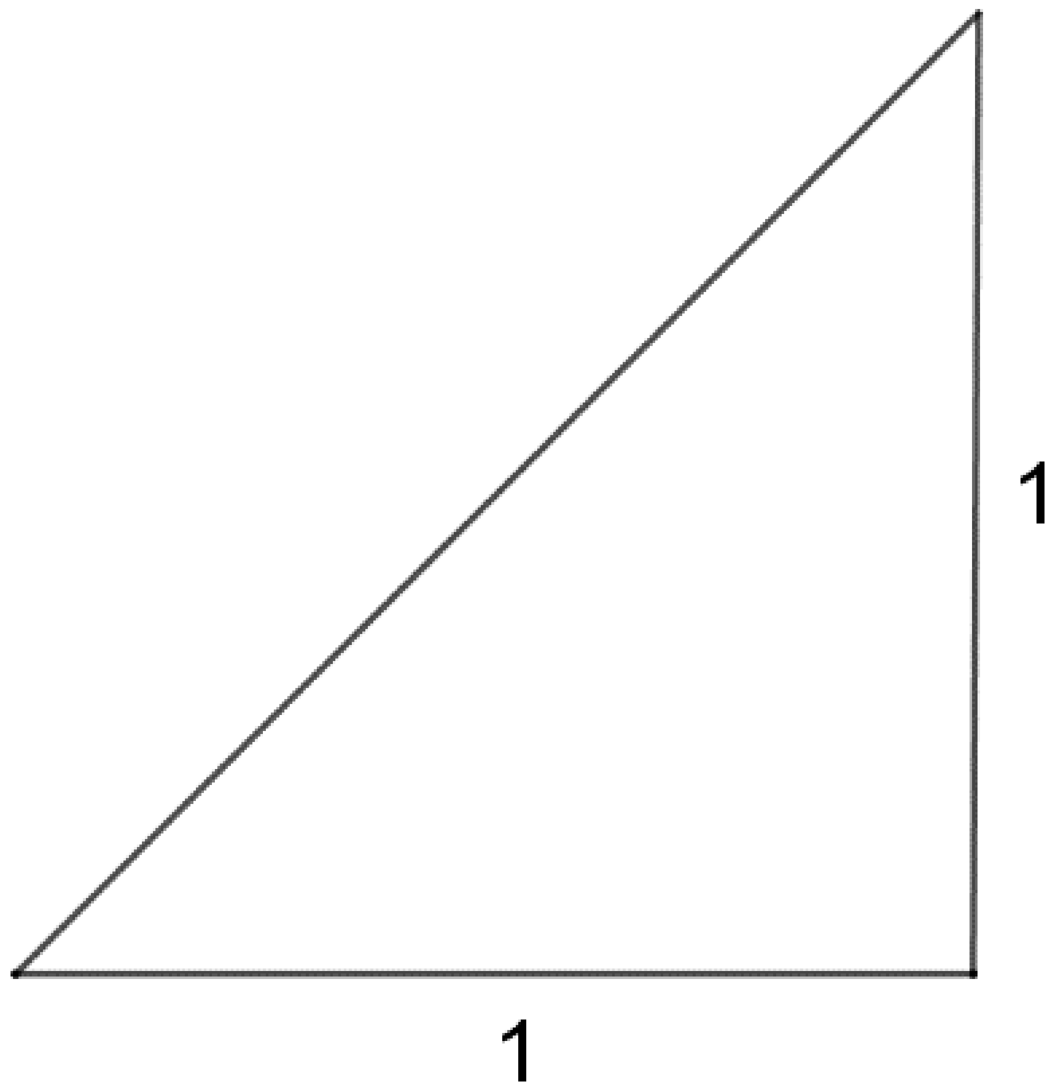
h) ¿En qué momento terminaría el proceso? ¿Por qué?

i) Después del proceso se formarán distintos triángulos, ¿cómo son entre sí? _________________

j) ¿Cómo son los ángulos de los triángulos que se te formaron? ___________________________

k) ¿Cómo son los lados de los triángulos? ____

l) ¿Qué puedes decir de la hipotenusa después de todo el proceso que realizaste?


1
1

Hoja de control 7 Explicitación del número pi

Nombre del alumno: ____F echa:___/___/____

Propósito de la sesión:	Tiempo asignado: ________	Trabajo: En equipo

Instrucciones: Por equipos se te brindará el siguiente material

- Círculo de madera
- Listón

Realiza lo siguiente y contesta las preguntas.

- Con el listón toma la medida del diámetro de la circunferencia.
- El diámetro será tu unidad de medida.
- Mide la circunferencia utilizando el listón con la medida del diámetro.
- ¿Cuántas veces cupo la medida del diámetro en la circunferencia? ____
- ¿Te faltó algún pedazo por medir de la circunferencia? ¿Por qué? ____
- Aproximadamente, ¿cuánto consideras que mide el pedazo que te falto respecto a tu unidad de medida? ¿Por qué?
- ¿De qué otra manera podrías medir la circunferencia?
- ¿Cuál sería la medida de la circunferencia si ahora tu unidad de medida es el radio? __

Hoja de control 7 Rectificación de la circunferencia

Nombre del alumno:

____**Fecha:**___/___/____

Propósito de la sesión:

Tiempo asignado: ________

Trabajo: En equipo

Instrucciones: Realiza lo siguiente:

a) Con la siguiente medida, traza una circunferencia.
b) Traza el diámetro de la circunferencia
c) Utiliza el método de Arquímedes para dividir en siete partes iguales el diámetro.
d) Traza una línea recta, establece un punto y traslada tres veces el diámetro de tu circunferencia y un séptimo.
e) ¿En qué lugar ubicarías a π? ¿Por qué?
____
____
f) ¿En dónde ubicas la mitad de π? ¿Por qué?
____
g) ¿Qué harías para rectificar 2 π? ¿Por qué?____

Apéndice B3. Hojas de control de la Trayectoria de Enseñanza de la Trigonometría

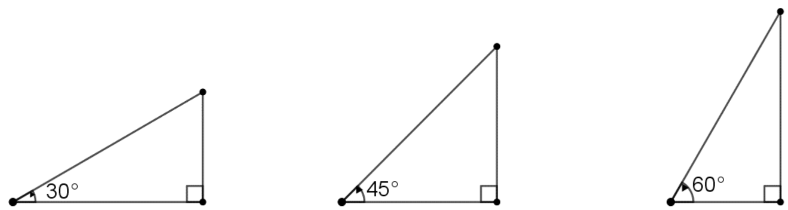
Hoja de control 1. Triángulo rectángulo

Nombre del alumno:

____Fecha:___/___/____

Instrucciones: A partir de los siguientes triángulos en donde la hipotenusa mide 1. Realiza lo siguiente:

a) Identifica y nombra la hipotenusa en cada triángulo
b) Identifica y nombra el cateto opuesto y el cateto adyacente respecto al ángulo agudo marcado en cada triángulo
c) Establece las seis comparaciones entre los segmentos de cada uno de los triángulos



d) Establece la relación seno y coseno de cada triángulo respecto al ángulo agudo marcado.
e) En cada triángulo la hipotenusa mide 1
f) ¿Cuál es la razón del cateto opuesto con la hipotenusa? ____
g) ¿Cuál es la razón del cateto adyacente con la hipotenusa? ____
h) ¿A qué segmento del triángulo hace referencia el seno? ____
i) ¿A qué segmento del triángulo hace referencia el coseno? ____
j) ¿Cómo establecerías la relación de seno y coseno si la hipotenusa es 2? ¿Por qué?
____

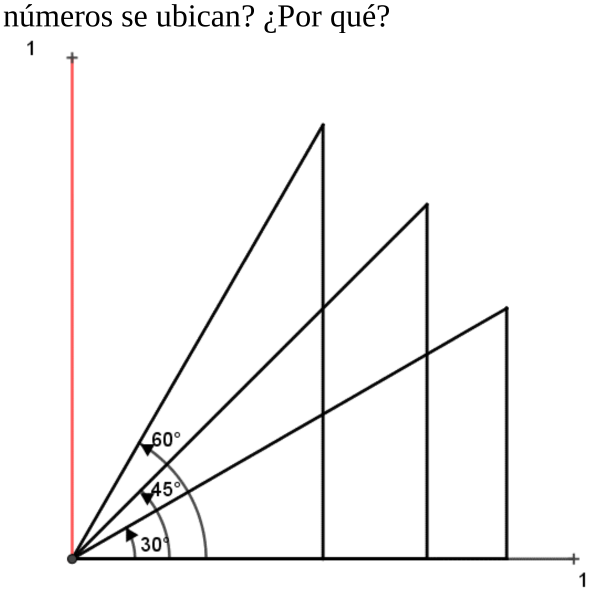
Hoja de control 2

Nombre del alumno: ____Fecha:___/___/____

Instrucciones: Los triángulos rectángulos que trabajaste con anterioridad se ordenan respecto al ángulo agudo señalado y su cateto adyacente, como se muestra en la figura. Nota: la hipotenusa en cada triángulo es 1

a) ¿Cómo es el cateto opuesto del triángulo de 30° respecto al cateto opuesto del triángulo que tiene el ángulo de 60° marcado? ¿Por qué?
b) ¿Qué sucede con los catetos opuestos a medida que aumenta la amplitud del ángulo? ¿Por qué?
c) Identifica el cateto opuesto de los triángulos, una vez que los tengas traza una perpendicular al segmento rojo que está en vertical que pase por cada uno de los vértices del triángulo en donde se una el cateto opuesto y la hipotenusa.
d) ¿Cuánto mide la razón de seno respecto al ángulo de 30°? ¿Cómo obtuviste la medida?
e) Determina la medida de la razón de seno de los ángulos faltantes.

f) ¿Qué sucede con la medida de la hipotenusa cuando la amplitud del ángulo aumenta? ¿Por qué?
g) Los valores que obtuviste para la medida de seno de los ángulos ¿entre qué números se ubican? ¿Por qué?

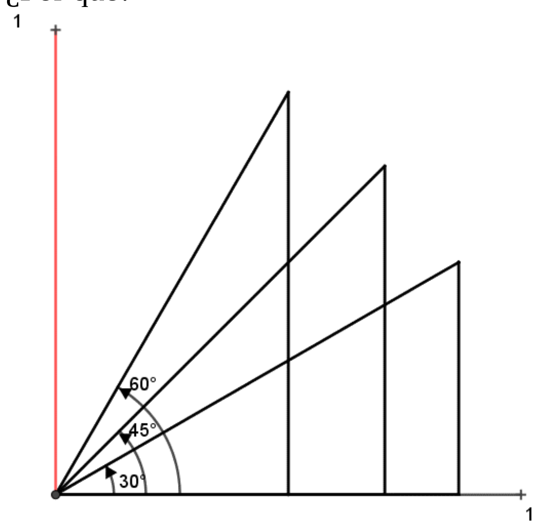


Hoja de control 3

Nombre del alumno: ____Fecha:___/___/____

Instrucciones: Los triángulos rectángulos que trabajaste con anterioridad se ordenan respecto al ángulo agudo señalado y su cateto adyacente, como se muestra en la figura. Nota: la hipotenusa en cada triángulo es 1

a) ¿Cómo es el cateto adyacente del triángulo de 30° respecto al cateto opuesto del triángulo que tiene el ángulo de 60° marcado? ¿Por qué?
b) ¿Qué sucede con los catetos adyacentes a medida que aumenta la amplitud del ángulo? ¿Por qué? ____
c) Identifica el cateto adyacente de cada uno de los triángulos, una vez identificados coloca un punto en donde esté el vértice. Posteriormente, con ayuda de tu compás toma la medida de cada cateto adyacente y trasládala al segmento rojo partiendo del vértice que tienen en común los tres triángulos.
d) ¿Cuál es la diferencia entre los catetos opuestos de la actividad pasada y los catetos adyacentes de esta actividad? Justifica tu respuesta.
e) ¿Cuánto mide la razón de coseno respecto al ángulo de 30°? ¿Cómo obtuviste la medida?
f) Determina la medida de la razón de coseno de los ángulos faltantes.
g) ¿Qué sucede con la medida de la hipotenusa cuando la amplitud del ángulo aumenta? ¿Por qué?
h) Los valores que obtuviste para la medida de seno de los ángulos ¿entre qué números se ubican? ¿Por qué?



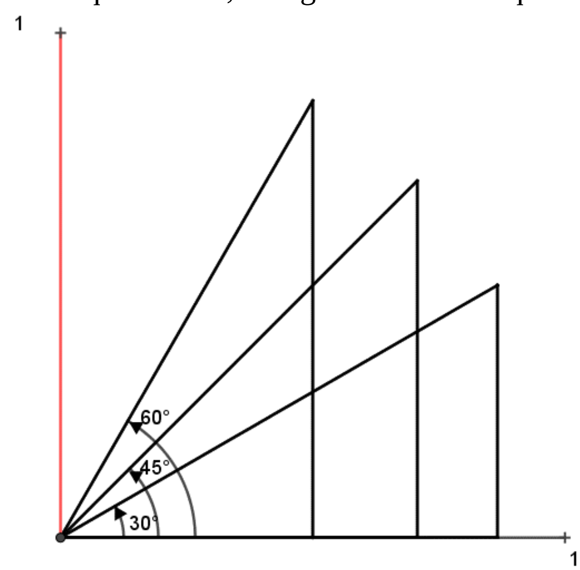
Hoja de control 4

Nombre del alumno: ____Fecha:___/___/____

Propósito de la sesión: **Trabajo: Individual**

Instrucciones: Realiza lo siguiente:

a) ¿Qué sucede con el seno si aumenta la amplitud del ángulo?
b) ¿Qué sucede con el coseno si aumenta la amplitud del ángulo?
c) ¿Qué elementos comparten el seno y el coseno?
d) ¿Qué diferencias encuentras en seno y coseno? Justifica tu respuesta.
e) Con tu compás toma la medida de la hipotenusa. Apóyate en el vértice que conecta la hipotenusa con el cateto adyacente y traza un cuarto de circunferencia que vaya del segmento horizontal que mide 1, al segmento vertical que mide 1.



f) ¿Qué fue lo que sucedió al momento de trazar el cuarto de circunferencia?
g) ¿Todos los vértices que unen la hipotenusa y el cateto opuesto tocaron el arco que trazaste? ¿Por qué?
____

Hoja de control 5

Nombre del alumno: ____

Instrucciones: En las sesiones de geometría rectificaste la circunferencia. A partir de lo que realizaste realiza lo siguiente:

a) Con la siguiente medida traza una circunferencia.
b) Rectifica la circunferencia, utiliza el método de Arquímedes para dividir el diámetro en siete partes iguales.
c) Una vez que realizaste la rectificación, identifica en la recta donde está 2∏, ∏, ∏/2 y 3∏/2, y por último identifica el 0.
d) Traza una perpendicular a la recta que acabas de realizar que pase por el 0, y tenga como medida el radio de tu circunferencia.
e) Localiza el seno de 30°.
f) Localiza el seno de 45°.
g) Localiza el seno de 60°
h) Se te entregó en las sesiones de geometría una tabla de los senos de diversos ángulos, localiza los faltantes.
i) Une los puntos localizados
j) ¿Cómo es la figura?
k) ¿Cómo fue el comportamiento de los números?
l) ¿Por qué no hay valores que superen el 1 y el -1?
m) Explica qué pasa cuando el seno de un ángulo es 0.

N.L.:____

Hoja de control 6

Nombre del alumno: ____

Instrucciones: En las sesiones de geometría rectificaste la circunferencia. A partir de lo que realizaste realiza lo siguiente:

a) Realiza una rectificación como la que hiciste la sesión pasada, con la misma medida de circunferencia.
b) Localiza el coseno de 30°.
c) Localiza el coseno de 45°.
d) Localiza el coseno de 60°
e) Se te entregó en las sesiones de geometría una tabla de los cosenos de diversos ángulos, localiza los faltantes.
f) Une los puntos localizados
g) ¿Cómo es la figura?
h) ¿Cómo fue el comportamiento de los números?
i) ¿Por qué no hay valores que superen el 1 y el -1?
j) Explica qué pasa cuando el seno de un ángulo es 0.

Apéndice C. Ciclo investigativo

Apéndice C1. Hojas de control de habilidades del pensamiento

ACTIVIDADES DE MATEMÁTICAS

¿QUÉ SON LAS HABILIDADES DEL PENSAMIENTO?

Las habilidades básicas del pensamiento son los pilares sobre los cuales se construirá y organizará el conocimiento y razonamiento matemático, asimismo son los peldaños que tenemos que escalar para lograr comprensión y aprendizaje en matemáticas.

Las 9 habilidades básicas son observación, comparación, relación, clasificación simple, ordenamiento, clasificación jerárquica, análisis, síntesis y evaluación. Están relacionadas y se complementan, las más básicas son los escalones que posibilitan ascender a otras habilidades un poco más complejas, como se muestra en la figura 1.

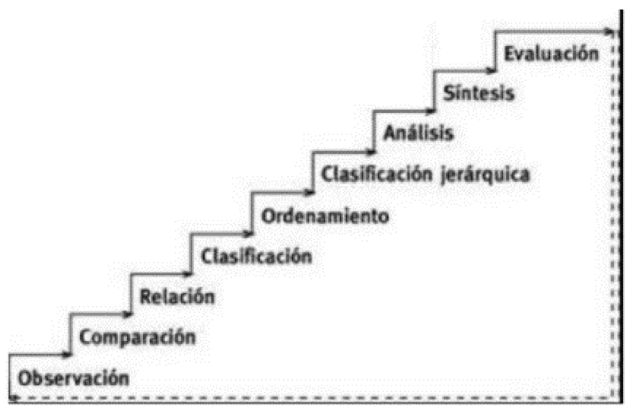


Figura 1. Habilidades básicas del pensamiento

En las siguientes semanas desarrollaremos actividades enfocadas a las habilidades básicas necesarias para un buen desarrollo de la clase de matemáticas. Cada una de las actividades estará relacionada con números, expresiones algebraicas, figuras geométricas, gráficas, tablas. Poco a poco iremos ascendiendo esa escalera de habilidades básicas enfocadas a las matemáticas.

HABILIDAD QUE SE TRATA: OBSERVACIÓN

¿Qué es la observación?

Es un proceso del pensamiento a través del cual tenemos el primer contacto con el mundo que nos rodea, hacemos uso de nuestro sentido de la vista y también de nuestra atención.

Observar consiste en fijar la atención en una persona, objeto, evento o situación, con el fin de identificar sus características.

1. **Observa la siguiente expresión y contesta:**

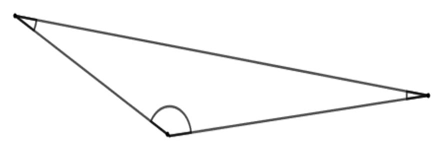
$$-3y^3m^2$$

a) Describe la expresión

b) ¿Qué elementos conforman la expresión?

c) Menciona cómo son los elementos de la expresión

2. **A partir de la figura, realiza lo siguiente:**



a) Describe la figura

b) ¿Qué elementos forman la figura?

c) Describe cómo son los elementos de la figura

3. A partir de la figura, realiza lo siguiente:

a) Describe lo que observas en la figura

b) ¿Cómo son los elementos que hay en la figura?

HABILIDAD QUE SE TRATA: COMPARACIÓN

¿Qué es la comparación?

Esta habilidad tiene relación directa con la observación, se enfoca en examinar dos o más cosas para establecer sus relaciones, diferencias o semejanzas.

1. **A partir de las siguientes expresiones, contesta las preguntas:**

$-3y^3m^2$ $\qquad$ $-5p^5h + 4h^4xw^2$ $\qquad$ $6d^4 + 7rg^3 - d^2$

   a) ¿En qué se parecen las expresiones?

   b) ¿Cuáles son las diferencias entre las expresiones?

2. **A partir de las siguientes figuras contesta las preguntas:**

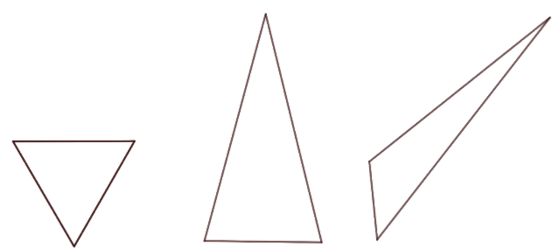
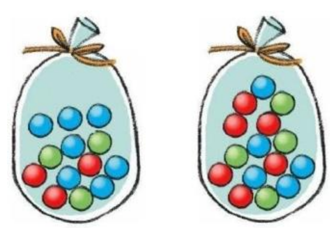


Figura 1 Figura 2 Figura 3

   a) ¿En qué se parecen las figuras?
   b) ¿Cuáles son las diferencias entre las figuras?
   c) ¿Cuál es la diferencia entre los lados de cada una de las figuras?
   d) ¿Cuál es la diferencia entre los ángulos de cada una de las figuras?

3. A partir de las siguientes figuras, contesta las preguntas:



Bolsa 1 Bolsa 2

   a) ¿Cuáles son las similitudes de los elementos de las dos bolsas?
   b) ¿Cuáles son las diferencias entre los elementos de las dos bolsas?

HABILIDAD QUE SE TRATA: RELACIÓN

¿Qué es la relación?

La relación es un vínculo o una correspondencia. En la relación se establecen conexiones entre las semejanzas y diferencias identificadas en la habilidad de comparación, se pueden utilizar expresiones como mayor que, igual que, menor que.

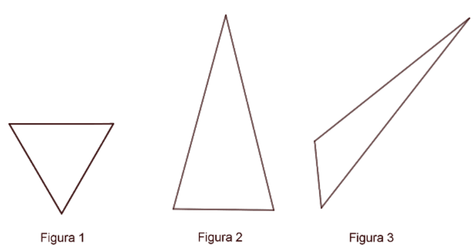
1. **A partir de las siguientes expresiones algebraicas, contesta lo siguiente**:

$$-3y^3m^2 \qquad -5p^5h+4h^4xw^2 \qquad 6d^4+7rg^3-d^2$$

   a) ¿Qué expresión tiene más términos? ¿Por qué?

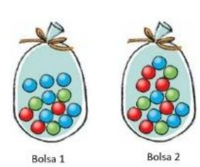
   b) ¿Cuál es la que tiene menos términos? ¿Por qué?

2. A partir de las figuras, contesta lo siguiente: (NO UTILICES REGLA, NI INSTRUMENTOS GRADUADOS)



a) De las tres figuras ¿cuál tiene todos sus lados iguales? Explica cómo llegaste a tu respuesta
b) De las tres figuras ¿cuál tiene dos lados iguales y uno diferente? Explica cómo llegaste a tu respuesta
c) De las tres figuras ¿cuál tiene todos sus lados desiguales? Explica cómo llegaste a tu respuesta
d) De las tres figuras ¿cuál tiene todos sus ángulos iguales? Explica cómo llegaste a tu respuesta
e) De las tres figuras ¿cuál tiene dos ángulos iguales y uno desigual? Explica cómo llegaste a tu respuesta

3. A partir de las siguientes figuras contesta lo siguiente:



a) ¿Qué bolsa tiene más elementos?

HABILIDAD QUE SE TRATA: CLASIFICACIÓN

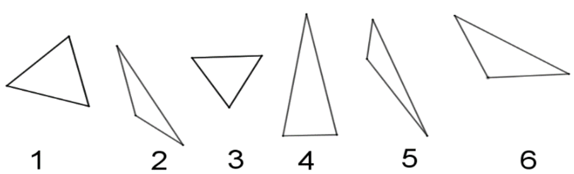
¿Cuál es la clasificación?

Esta habilidad es igual a agrupar al hacer coincidir sus aspectos cuantitativos o cualitativos, esto es uniendo por sugerencias y separando por diferencias.

1. **A partir de las siguientes expresiones, completa la tabla:**

Expresión Algebraica	Coeficiente	Signos	Literales	Exponentes	¿Es un monomio? (1 término) SI / NO	¿Es un binomio? (2 términos) SI / NO	¿Es un trinomio? (3 términos) SI / NO
$-3y^3m^2$							
$-5p^5h+4h^4xw^2$							
$6d^4+7rg^3-d^2$							

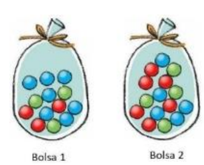
2. **A partir de las siguientes figuras agrupa los triángulos que consideres poseen las mismas características, coloca tus respuestas en la tabla.**



Agrupaciones	Número de triángulo que pertenece a la agrupación	Características que poseen
Agrupación 1		
Agrupación 2		
Agrupación 3		

¿Qué nombre le darías a cada una de las agrupaciones? ¿Por qué?

3**. A partir de las siguientes figuras, agrupa las pelotas por color, tus agrupaciones colócalas en una tabla.**

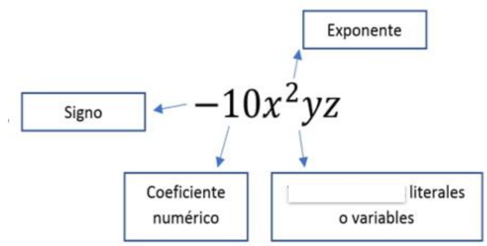


HABILIDAD QUE SE TRATA: ORDENAMIENTO

¿Cuál es el ordenamiento?

También llamado secuenciación, consiste en establecer algún tipo de orden jerárquico.

1. La estructura de un término algebraico es la siguiente.

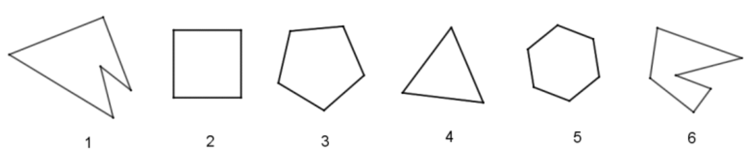


Ordena (de menor a mayor) las siguientes expresiones algebraicas de acuerdo con el número de términos que tienen, en la tabla coloca las expresiones ya ordenadas.

Expresiones desordenadas	$-3h^4g+4d^2rf^6$	$-5b^3d^4f^8wa$	$-11x^3h^4-12f^8+4sw$
Expresiones ordenadas			

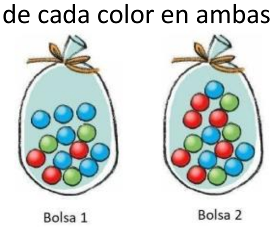
2. En las actividades pasadas habías tratado con figuras triangulares, ahora se incorporarán nuevas figuras.

Ordena las figuras de acuerdo con su número de lados (de menor a mayor), puedes realizar una tabla que contenga el orden de las figuras.



3. En la actividad anterior clasificaste los elementos de las bolsas por color, ahora realiza lo siguiente:

a) Cuenta los elementos que hay de cada color en la bolsa 1 y ordénalos de mayor a menor.
b) Cuenta los elementos que hay de cada color en la bolsa 2 y ordénalos de mayor a menor.
c) Cuenta los elementos que hay de cada color en ambas bolsas y ordénalos de menor a mayor.



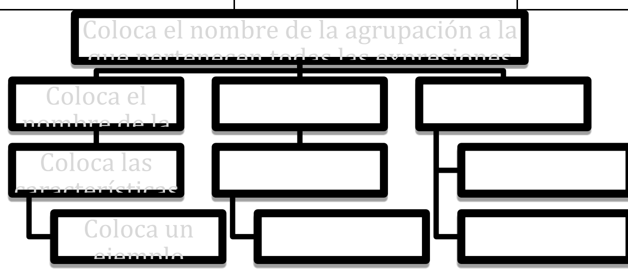
HABILIDAD QUE SE TRATA: CLASIFICACIÓN JERÁRQUICA

¿Cuál es la clasificación jerárquica?

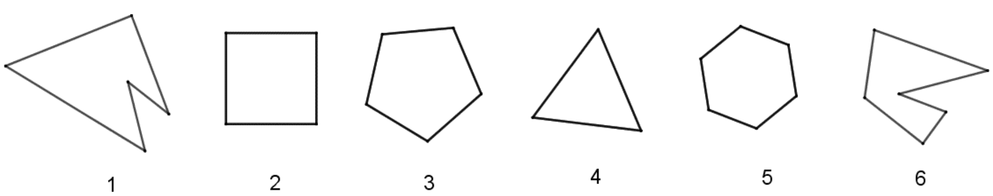
El proceso de separar un conjunto de objetos en clases y subclases, aplicando un criterio que deben cumplir todos los elementos que se incluyen.

1. Antes de realizar este ejercicio revisa qué es un monomio, un binomio y un trinomio. Organiza la información que tienes en la actividad 4 y 5, y la revisión que realizaste, en el siguiente diagrama, tomando en cuenta las agrupaciones de expresiones de acuerdo con su número de términos.

$-3h^4g+4d^2rf^6$	$-5b^3d^4f^8wa$	$-11x^3h^4-12f^8+4sw$

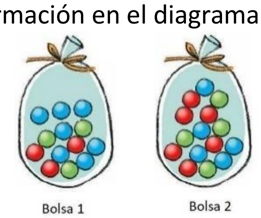


2. En la actividad anterior ordenaste las figuras de acuerdo con el número de lados que tienen, eso te servirá para realizar esta actividad. Agrupa las figuras de acuerdo con el número de sus lados, la información acomódala en un diagrama parecido al del ejercicio 1. Si sabes el nombre de todo el conjunto de figuras colócalo como el título del diagrama, también si sabes el nombre de las figuras colócalo junto con las características de cada uno.



Realiza el esquema en la siguiente página.

2. En la actividad anterior ordenaste los elementos de acuerdo con su cantidad en cada una de las bolsas, ahora, organiza esa información en el diagrama que tú quieras.



HABILIDAD QUE SE TRATA: ANÁLISIS Y SÍNTESIS

¿Qué es el análisis?

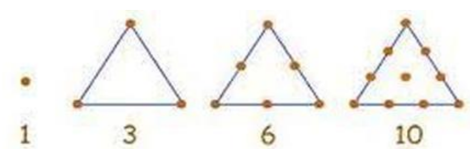
Es la distinción y separación de las partes de algo para conocer su composición.

¿Qué es la síntesis?

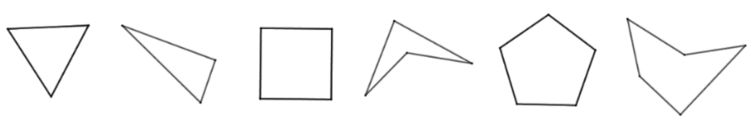
Es la composición de un todo por la reunión de sus partes.

Son procesos contrarios, pero se complementan mutuamente.

1. **Observa las siguientes figuras ¿Cómo serían las figuras que están en la posición 5 y 6?**



2. **Observa las siguientes figuras, ¿cuáles son las dos figuras que continúan?**



3. Observa los elementos de cada una de las bolsas y determina cuántos elementos de cada color tendrá la siguiente bolsa.

EVALUACIÓN

Nombre del alumno:

Grupo:

La última de las habilidades del pensamiento que trataremos es la evaluación, que se refiere a elaborar juicios de valor.

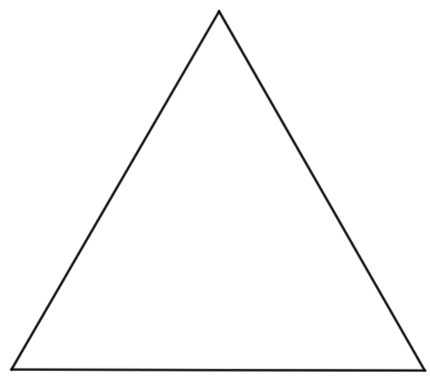
En este sentido, después de desarrollar actividades relacionadas con las habilidades del pensamiento, es el momento de que evalúes tu proceso y reflexiones acerca del uso de las mismas. Para ello, contesta las siguientes preguntas.

1) ¿Qué aprendiste de las habilidades del pensamiento?
2) ¿De qué forma se encuentran presentes las habilidades del pensamiento en la Asignatura de Matemáticas?

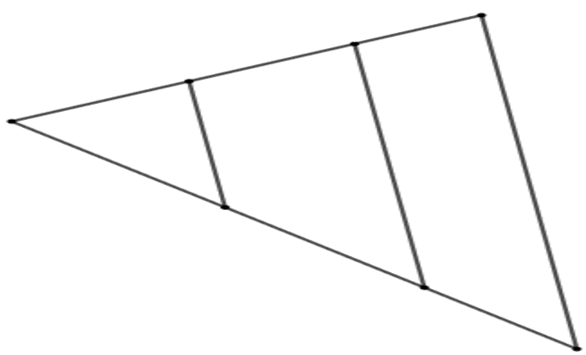
Apéndice C2. Guion de la entrevista

CONGRUENCIA Y SEMEJANZA

1. Descríbeme las características de un triángulo cualquiera
2. ¿Qué tipo de triángulo es el de la figura?
3. Identifica sus ángulos internos ¿Qué valor tiene cada uno? ¿Por qué?
4. ¿Cómo son sus lados?
5. Traza su altura a partir del vértice __
6. ¿Qué tipo de triángulos se forman?
7. Identifica sus ángulos internos ¿Qué valor tiene cada uno? ¿Por qué?
8. ¿Cómo son sus lados?



9. ¿Cuántos triángulos observas en la figura?



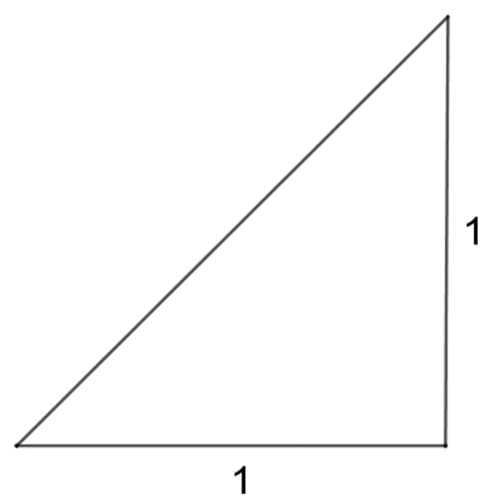
10. Nombra los triángulos que veas
11. ¿Cómo son los ángulos del triángulo ___?
12. ¿Cómo son los ángulos del triángulo ___?
13. ¿Cómo son los ángulos del triángulo ___?
14. ¿Cómo son los ángulos de los tres triángulos entre sí?
15. ¿Cómo son los segmentos ___,___,___ (paralelos)?
16. ¿Cómo son los segmentos ____,____,___(los otros catetos)?
17. ¿Cómo son los segmentos _____,____,_____(hipotenusa)?

Vamos a comparar los triángulos ___ y ____

18. ¿Qué sucede con el triángulo ___ respecto al triángulo _____
19. ¿Qué sucede con sus ángulos?
20. ¿Qué sucede con sus lados?
21. Qué lado es correspondiente al lado ___
22. Identifica los lados que sean correspondientes en los tres triángulos

RAÍZ DE DOS

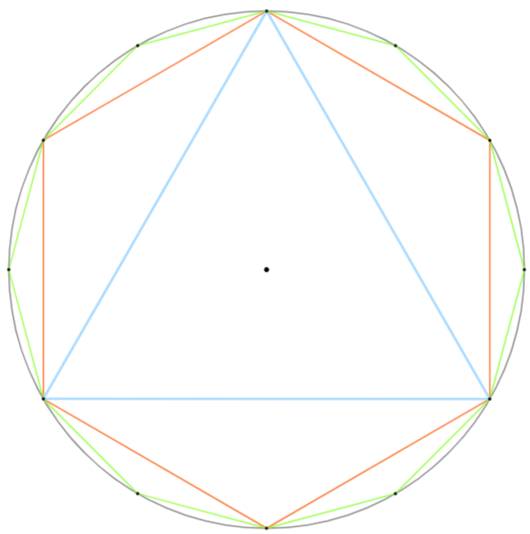
23. Describe el siguiente triángulo
24. ¿Cómo son sus lados?
25. ¿Cómo son sus ángulos?
26. Identifica la hipotenusa y sus catetos y colócales el nombre
27. ¿Cuántas veces cabe uno de los catetos en la hipotenusa?
28. ¿Qué sucedió con el segmento faltante?
29. Consideras que, si divides el cateto en partes más pequeñas, esas partes quepan exactamente en el segmento que falta de la hipotenusa. ¿Por qué?



NOCIÓN DE LONGITUD DE CIRCUNFERENCIA Y POSIBILIDAD DE PROPORCIONAR SU MAGNITUD

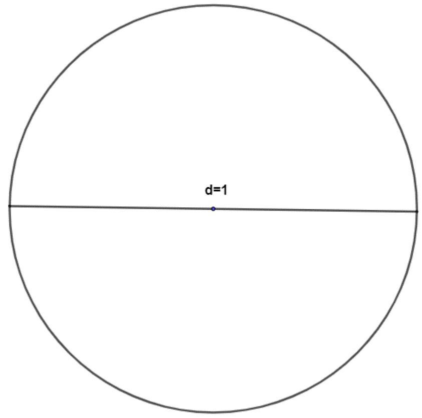
30. Observa la siguiente figura y describe todo lo que observas
31. ¿Qué tipo de figuras observas?
32. Háblame del triángulo
33. Háblame del hexágono
34. Háblame del polígono de 12 lados
35. ¿Cuál sería el perímetro del triángulo? ¿Por qué?

36. ¿Cuál sería el perímetro del hexágono? ¿Por qué?
37. ¿Cuál sería el perímetro del polígono de 12 lados? ¿Por qué?
38. ¿Cómo es el perímetro del hexágono respecto al perímetro del triángulo? ¿Por qué?
39. ¿Cómo es el perímetro del polígono de 12 lados respecto al perímetro del hexágono? ¿Por qué?
40. ¿Cómo es el perímetro del polígono de 12 lados respecto al perímetro del triángulo? ¿Por qué?
41. ¿Qué pasaría con el perímetro de un polígono de 50 lados?
42. ¿A qué forma crees que se parecería?
43. ¿Qué me puedes decir sobre la circunferencia? Todas sus carcaterísticas.
44. ¿Consideras que un polígono de 1000 lados logre ser una circunferencia? ¿Y uno de 1000 lados? ¿Por qué?
45. ¿Cuál es el perímetro de la circunferencia? ¿Por qué?

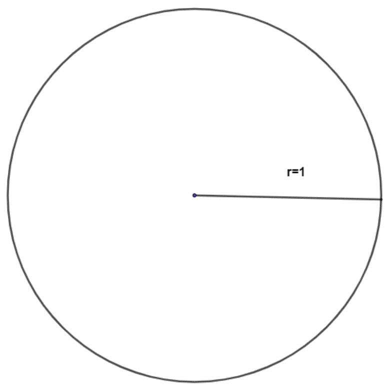


NÚMERO PI

46. Si se considera la longitud del diámetro de una circunferencia como 1, ¿Cuántas veces cabe el diámetro en la circunferencia?
47. ¿Qué sucede con el segmento de circunferencia faltante?

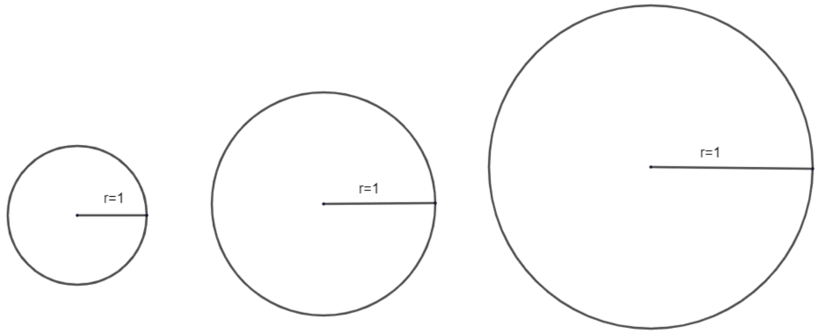


48. A qué parte del diámetro corresponde el segmento de circunferencia faltante? ¿Por qué?
49. Si ahora consideramos el radio de la circunferencia como 1, ¿cuántas veces cabe el radio en la circunferencia?
50. ¿Te sobrará un segmento de circunferencia por medir? ¿Por qué?



Observa los siguientes circunferencias, en todas está marcado el radio como 1

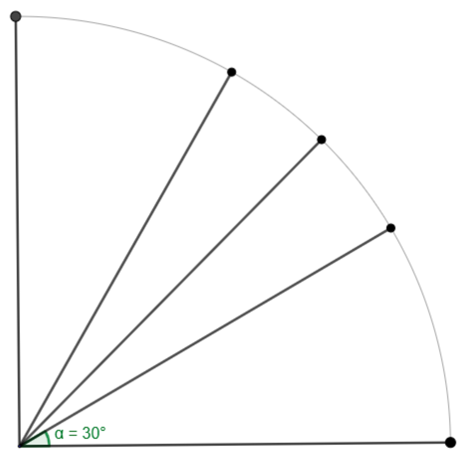
51. ¿Cuántas veces cabrá el diámetro en la circunferencia de la primera circunferencia? ¿Te faltará segmento de circunferencia que medir?
52. ¿Cuántas veces cabrá el diámetro en la circunferencia de la segunda circunferencia? ¿Te faltará segmento de circunferencia que medir?
53. ¿Cuántas veces cabrá el diámetro en la circunferencia de la tercera circunferencia? ¿Te faltará segmento de circunferencia que medir?



54. ¿Consideras que en las 3 circunferencias siempre el diámetro cabra 3 veces y sobrará un segmento de circunferencia?
55. Si consideras los tres segmentos de circunferencia que te faltan por medir, ¿Cómo serán entre sí?
56. En la sesión que tuvimos de geometría llegaron a que corresopndía a 1/5 y yo les mencioné que utilizaríamos 1/7, cuál consideras que sea la diferencia al consideras el segmento de circunferencia faltante como 1/5 y como 1/7.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

57. Observa la siguiente figura, descríbela.
58. ¿Qué segmentos son radios?
59. ¿Cuál es la característica de los radios?
60. ¿Qué consideras como un ángulo?
61. Se marcó en la figura el ángulo de 30° y se proyectó hasta el cuarto de circunferencia, este arco de circunferencia corresponde a 30°. ¿A cuántos grados consideras que corresponde el siguiente arco de circunferencia? ¿Por qué?
62. ¿A cuántos grados consideras que corresponde el siguiente arco de circunferencia? ¿Por qué?
63. ¿A cuántos grados consideras que corresponde el siguiente arco de circunferencia? ¿Por qué?
64. Tomando en cuenta el ángulo de 30°, ¿cuál sería su cateto opuesto?
65. Trázalo
66. Traza los catetos puestos del ángulo de 45° y el de 60°



67. ¿Qué relación hay entre los ángulos ___,___,___ de los tres triángulos ángulos? (alfa, beta y gamma)?
68. ¿Qué relación hay entre los ángulos ___,___,___ de los tres triángulos ángulos? (alfa, beta y gamma)?
69. ¿Qué relación hay entre los ángulos ___,___,___ de los tres triángulos ángulos? (alfa, beta y gamma)?
70. ¿Por qué se conserva siempre el ángulo de 90°?
71. ¿Qué relación hay entre los lados___ ,___,___ de los tres triángulos ángulos?
72. ¿Qué relación hay entre los lados ___ ,___,___ de los tres triángulos ángulos?
73. ¿Qué relación hay entre los lados ___ ,___,___ de los tres triángulos ángulos?
74. ¿Cuál es el lado que no cambia?
75. ¿Qué lados cambian?
76. ¿Por qué consideras que cambian?
77. ¿Cuáles son las relaciones entre los ángulos y los lados de los triángulos?
78. ¿Qué le sucede al segmento___ respecto al segmento___ cuando la amplitud del ángulo aumenta?
79. ¿Qué le sucede al segmento___ respecto al segmento___ cuando la amplitud del ángulo aumenta?
80. ¿Qué le sucede al segmento___ respecto al segmento___ cuando la amplitud del ángulo disminuye?
81. ¿Qué le sucede al segmento___ respecto al segmento___ cuando la amplitud del ángulo disminuye?
82. ¿Qué le sucede al segmento___ respecto al segmento___ cuando la amplitud del ángulo disminuye?
83. ¿De qué depende que aumenten o disminuyan los catetos y la hipotenusa no?

Referencias

Arenas, F., Becerra, M., Morales, F., Urrutia, L. & Gómez, P. (2014). Razones trigonométricas. En P. Gómez (Ed.), Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas de matemáticas en MAD 1 (pp. 342-414). Bogotá: Universidad de los Andes. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/1895/

Bass, H. (2005). Mathematics, mathematicians and math education. *Of the american mathematical society,* 42(4), pp. 417-430.

BETA, GRUPO (1990). Proporcionalidad geométrica y semejanza. Ed. Síntesis. Madrid.

Camacho, H. Casilla, D. Finol de Franco, M. (2008). Indagación: Una estrategia innovadora para el aprendizaje de procesos de investigación. Revista Laurus. Vol. 14, Nº. 26, enero-abril, 2008, pp. 284-306 Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Caracas (Venezuela). Recuperado de: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=76111491014

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2003). Matemática educativa: Una visión de su evolución. Revista Latinoamerica de Investigación en Matemática Educativa, 6 (1). 27-40.

Cowie, B., Otrel-Cass, K., Moreland, J., Jones,A.,Cooper, B. y Taylor, B. (2010). *Teacher-researcher relationships and collaborations in research.* Waikato, Nueva Zelanda: Waikato journal of Education 15, p. 69-80.

Creswell, J. (2005). Educational research: Planning, conducting, and evaluating quantitative and qualitative research (2nd ed.). New Jersey: Pearson

Euclides (1999). Elementos de Geometría. (J. D. García, Introducciones y notas.) México, UNAM.

Fischbein, E. (1987). Intuition in science and mathematics. Dordrecht, The Netherlands: Reidel.

Fuys, D., & Geddes, D. (1984). *An investigation of van Hiele levels of thinking in geometry among sixth and ninth grades: Research findings and implications*. Paper presented at the 68th Annual Meeting of the American Educational Research Association, New Orleans, LA, 27 April. (ERIC Document Reproduction Service No. ED245 934).

Garnica, I. Chavez H., y Ojeda A. (2017). Expresiones figural y escrita de la idea de porcentaje: experiencia de enseñanza con estudiantes de 17 a 24 años. En M. Cruz (coord). Habla del silencio: estudios interdisciplinarios sobre la Lengua de Señas Mexicana y la comunidad Sorda. (p. 218). México: Bonilla Artigas.

Goos, M. (2014). Researcher–teacher relationships and models for teaching development in mathematics education. *ZDM*, *46*(2), 189–200. doi:10.1007/s11858-013-0556-9.

Hazzan, O. & Zazkis, R. (2005). Reducing abstraction: The case of school mathematics. Educational Studies in Mathematics, 58, 101–119.

Hazzan, O. (1999). Reducing abstraction level when learning abstract algebra concepts. Educational Studies in Mathematics, 40(1), 71–90.

Heath, T. L. The Works of Archimedes. Cambridge: Cambridge University Press, 1897.

Lucas, C. W, y James, R. T. (1973). Trigonometría moderna. Tomo I. México, UTEHA

Malara, N. A., & Zan, R. (2002). The problematic relationship between theory and practice. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (p.p. 553-580). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Montiel, G. (2013). Desarrollo del pensamiento trigonométrico. México: Secretaría de Educación Pública.

Ostergaard, K., (2013) Theory and Practice in Mathematics Teacher Education. [Online]. Available at: http://www.forskningsdatabasen.dk/en/catalog/2305630723 (Accessed 5 March 2018).

Peterson, J. y J. Hashisaki (1969), *Teoría de la aritmética*, México, Limusa.

Popper, K. & Eccles, J. (1977). El yo y su cerebro, Barcelona, Editorial Labor.

Prassad K 2014 Dealing With Abstraction: Reducing Abstraction in Teaching (Rat). Proceedings of the 33rd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 1243– 1251

Schoenfeld, A. H. (2002b). Research methods in (mathematics) education. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 435–488). Mahwah, NJ: Erlbaum.

SEP (2011). Programa de estudio 2011. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas. México: SEP.

T. L. Heath, trans, “The Works of Archimedes”, in Robert M. Hutchins, ed., Great Books of the Western World, vol. 11, Encyclopedia Britannica, 1952, pg. 447–451.

Tall, D. (2018). How humans learnto think mathematically: exploring the three worlds of mathematics. USA, Cambridge University Press, pp. 54-57.

Vasilachis, I. (coord.). (2006). Estrategias de la investigación cualitativa. Barcelona, Buenos Aires y México, Gedisa editorial

Von Glasersfeld, E. (1995). Radical Constructivism: A way of knowing and learning. London: Falmer Press.

Wilson, P. A., & Osborne, A. (1992). Foundational ideas in teaching about measure. In T. R. Post (Ed.), *Teaching mathematics in grades K-8: Research-based methods* (pp. 89121). Needham Heights, Massachusetts: Allyn & Bacon.

Anexos

Anexo 1. Cuestionario de Inteligencias Múltiples utilizado antes del proceso de formación para la investigación

Instrumento de inteligencias múltiples

Nombre del alumno:____

Instrucciones: Lee cada enunciado y a la derecha coloca el número del 0 al 5 con el que más te identifiques. En donde 0 es nunca y 5 es siempre.

INTELIGENCIA LINGÜÍSTICA	
1. Desde niño(a) he disfrutado mucho el leer libros, revistas u otros escritos	
2. Aprendo el significado de voces que son nuevas para mí.	
3. Establezco las diferencias que hay entre palabras con significado parecido.	
4. Mis amigos dicen que tengo facilidad para explicar diversos temas.	
5. Escribo pequeñas historias, poesías o artículos.	
6. Acostumbro usar una variedad de palabras cuando hablo o escribo.	
7. Prefiero los exámenes en los que pueda desarrollar por escrito mis respuestas.	
8. Soy hábil para recordar largas listas de palabras.	
9. Cuando escribo una composición, escojo las palabras justas y precisas.	
10. Al redactar sobre un tema, reflexiono sobre el orden que deben seguir las palabras.	
INTELIGENCIA MUSICAL	
1. Desde que era niño(a), la música es lo que más me ha agradado.	
2. Entre las cosas que tengo, lo más importante son mis discos, casetes CD´s o DVD´s de música.	
3. Puedo recordar fácilmente las melodías de las canciones.	
4. Recuerdo cosas, por ejemplo números de teléfonos, cuando sus nombres los repito a un ritmo musical.	
5. Cuando escucho música, puedo decir qué instrumentos se están tocando.	
6. Una de las cosas que hago, es tocar un instrumento musical.	
7. Cuando escucho música, puedo decir cuándo una nota no armoniza con las demás	
8. En el lugar que me encuentre, estoy atento a la música que se escuche.	
9. La gente dice que tengo “buen oído” para la música o el canto.	
10. Creo piezas musicales	
INTELIGENCIA LÓGICA MATEMÁTICA	
1. Desde niño(a), me han gustado las matemáticas.	
2. Puedo hacer muchos cálculos mentalmente	
3. Disfruto resolviendo problemas lógicos y enigmas.	
4.. Me gusta jugar los juegos que exigen desarrollar el pensamiento lógico	
5. Con frecuencia me pregunto sobre el porqué de las cosas y busco aclararlas	
6. Las personas dicen que tengo una “calculadora” en mi cabeza.	
7. Me es fácil resolver problemas matemáticos.	
8. Para mí todo tiene una explicación lógica.	
9. Pienso que las cosas son más claras cuando son medidas o cuantificadas.	
10. Descubro fallas lógicas en lo que las personas dicen o escriben.	
INTELIGENCIA ESPACIAL	
1. Desde niño(a), he tenido facilidad para hacer buenos dibujos.	
2. Me agrada diseñar modelos, o hacer maquetas a escala.	
3. Recuerdo mejor la información cuando empleo gráficos	
4. Encuentro fácilmente la ruta apropiada en zonas que no conozco	
5. Yo puedo imaginar cómo un objeto podría aparecer en diferentes posiciones. 4	
6. Me es fácil leer mapas y trazarlos.	

7. Me gusta resolver los juegos de palabras cruzadas, laberintos o enigmas visuales.	
8. Puedo imaginar con nitidez los lugares que he visitado.	
9. Cuando diseño algo, puedo unir fácilmente sus partes en mi mente.	
10. Me gusta desarmar un artefacto y luego armarlo tal como estaba.	
INTELIGENCIA INTEPERSONAL	
1. Me considero una persona que puede solucionar los problemas que pudieran existir entre mis amigos.	
2. Me doy cuenta rápidamente de cómo otras personas se sienten.	
3. . Las personas me consideran un líder o lideresa	
4.. Me resulta fácil hacer amigos/as.	
5. Prefiero los deportes que se juegan en grupo como el fútbol o el vóleibol.	
6. Trabajo mejor en grupos donde puedo discutir los problemas con otros.	
7. Me desagrada trabajar solo.	
8. Frecuentemente participo en la organización de actividades sociales, deportivas o culturales	
9. Me desenvuelvo mejor cuando interactúo con otras personas.	
10. A menudo comparto mis ideas y sentimientos con otros	
INTELIGENCIA INTRAPERSONAL	
1. Me doy un tiempo exclusivo para pensar sobre los grandes asuntos de la vida.	
2. La gente me ve como una persona solitaria	
3. He asistido al psicólogo u orientador para aprender más sobre mí.	
4. Tengo una afición o interés especial que guardo sólo para mí.	
5. Normalmente, yo sé cuáles son mis sentimientos sobre algo.	
6. Yo prefiero pasar una tarde libre en casa que en una fiesta	
7. Reconozco con facilidad mis emociones.	
8. Me es fácil describir lo que siento	
9. A menudo, me planteo preguntas acerca de los valores y creencias de las personas	
10. Mi manera de ser afecta el como yo aprendo	
INTELIGENCIA KINESTÉSICA	
1. Regularmente participo en un deporte o una actividad física.	
2. Yo puedo dominar nuevos deportes fácilmente.	
3. Me gusta trabajar haciendo cosas con mis manos	
4. Yo disfruto mucho el baile.	
5. Me agrada estar en buena forma física, por lo cual hago bastante ejercicio.	
6. Desde que estudie la primaria me han gustado las clases de educación física.	
7. Frecuentemente hago gestos con las manos u otros movimientos del cuerpo cuando converso con alguien.	
8. Tengo tendencia a tocar los objetos para sentir y examinar su textura.	
9. Yo tengo una buena coordinación muscular.	
10. Me han dado un premio o felicitación por una buena actuación en una competencia deportiva.	
INTELIGENCIA NATURALISTA	
1. Me es fácil notar similitudes y diferencias que hay entre árboles	
2. Puedo reconocer y nombrar diferentes tipos de pájaros.	
3. Cuando puedo, prefiero estudiar al aire libre.	
4. Distingo y nombro diferentes tipos de plantas.	
5. Me gusta sembrar plantas.	
6. Prefiero pasar mi tiempo libre en el campo o cerca del mar	
7. Desde niño(a) me ha gustado estar en contacto con la naturaleza.	
8. Aprendería mejor sobre los animales si los observara directamente en el campo.	
9. Participo en actividades de protección del medio ambiente.	
10. Disfruto estudiando temas de biología, anatomía, botánica o zoología	

Anexo 2. Cuestionario diagnóstico de matemáticas utilizado antes del proceso de formación para la investigación

EXAMEN DIAGNÓSTICO DE MATEMÁTICAS

Responsable: Dayanara Colín Hernández

Instrucciones: En la esquina superior izquierda coloca la fórmula para calcular el área de un triángulo, se te dará décimas en el primer examen mensual. Contesta cada problema, es muy importante que realices tu procedimiento.

Nombre del alumno:____

1.- En Netflix están 6 temporadas de Hora de aventura, cada temporada consta de 50 capítulos que duran aproximadamente 11 minutos, mi mamá sólo me permite ver la televisión 30min al día, ¿en cuánto tiempo terminaré de ver todas las temporadas si lo veo diario?

2.- Calcula el área y el perímetro de un rectángulo que mide 2m de ancho y de largo 5m+3.

3.- Calcula la edad de tu maestra de matemáticas, si la multiplicación de tu edad y su edad sumada con 188 da como resultado 500.

4.- Juan pagó $120 por una carpeta y dos paquetes de hojas; mientras que Manuel pagó $190 por tres paquetes de hojas y dos carpetas. ¿Cuál es el precio de una carpeta y de un paquete de hojas?

5.-Resuelve los ejercicios de la siguiente tabla:

6^3=	$(x-2)^2$=	$(5y+2f^2)(4d-2)$=	$\frac{(-6)(-12)(-8)}{(4)(-2)(9)} =$	20÷4+2x5=	-9+6-15-20=

6.- Grafica y tabula la siguiente ecuación: y=5x+9

Anexo 3. Contrastación del cuestionario de inteligencias múltiples con lo establecido en el Programa de Estudios 2011

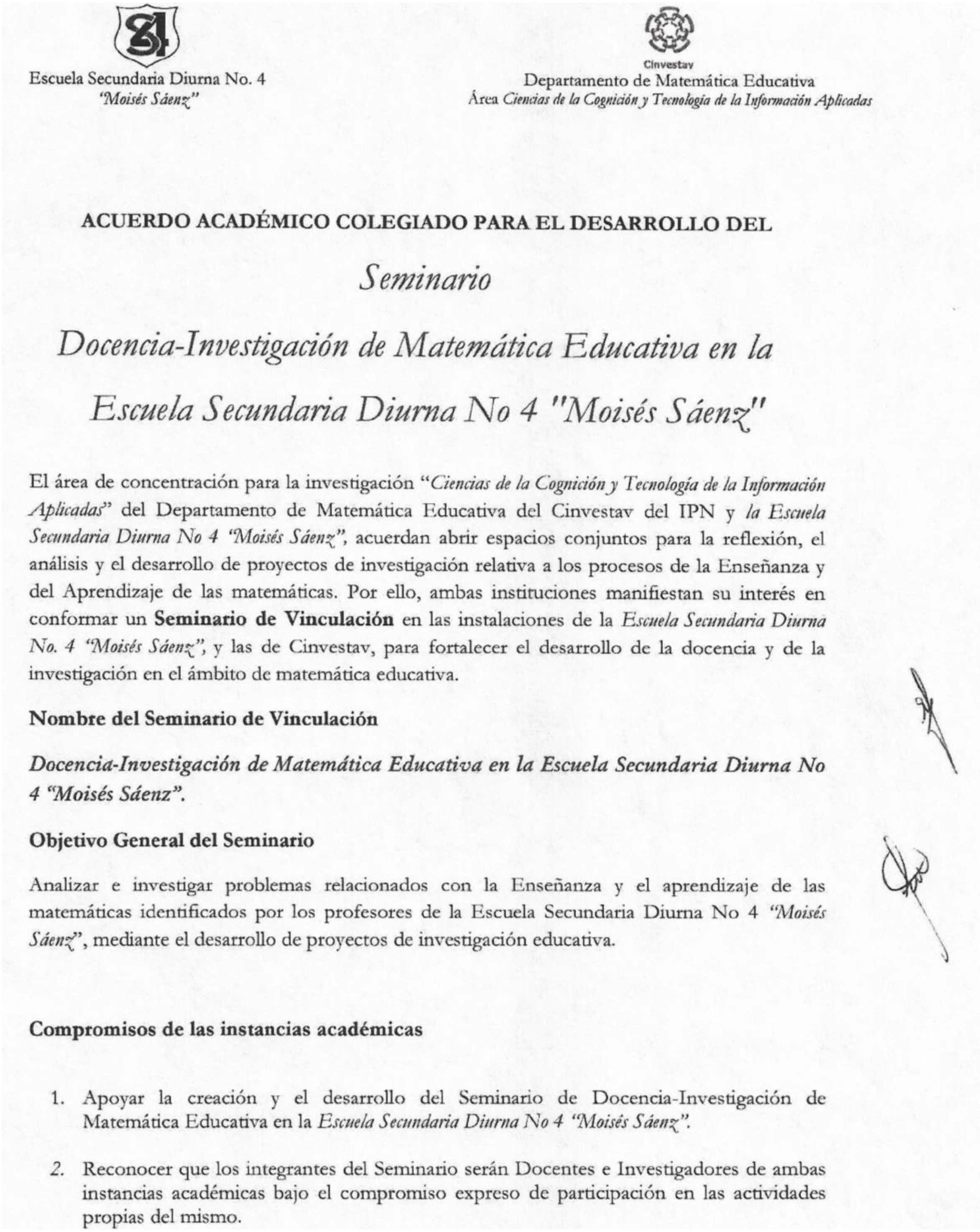
ANÁLISIS PARA EL INSTRUMENTO Y LA RELACIÓN CON EL PROGRAMA DE ESTUDIOS 2011 DE MATEMÁTICAS

PREGUNTAS PROPUESTAS EN EL INSTRUMENTO PARA INTELIGENCIA LÓGICA MATEMÁTICA	PREGUNTAS PARA EL ANÁLISIS DEL INSTRUMENTO	RELACIÓN CON EL PROGRAMA 2011 DE SECUNDARIA DE MATEMÁTICAS	
1. Desde niño(a), me han gustado las matemáticas.	¿Es suficiente la contestación positiva a esta pregunta? ¿Cómo se verifica? ¿Qué aspectos implica ese gusto?	**Propósito del estudio de las matemáticas** •Muestren disposición para el estudio de la matemática.	**Actitud hacia las matemáticas** 4.1. Desarrolla un concepto positivo de sí mismo como usuario de las matemáticas, el gusto y la inclinación por comprender y utilizar la notación, el vocabulario y los procesos matemáticos.
2. Puedo hacer muchos cálculos mentalmente	¿Qué métodos utiliza para realizar los cálculos mentalmente? ¿Qué operaciones puede realizar mentalmente?	**Propósito del estudio de las matemáticas** •Utilicen diferentes técnicas o recursos para hacer más eficientes los procedimientos de resolución	**Competencias** •Resolver problemas de manera autónoma •Manejar técnicas eficientemente
3. Disfruto resolviendo problemas lógicos y enigmas.	¿Qué tipo de problemas lógicos y enigmas disfruta? ¿Qué disfruta de resolverlos? ¿Qué habilidades matemáticas se	**Propósito del estudio de las matemáticas** •Desarrollen formas de pensar que les permitan formular conjeturas y procedimientos para resolver problemas, y	**Actitud hacia las matemáticas** 4.3. Desarrolla el hábito del pensamiento racional.

	desarrollan al resolverlos?	elaborar explicaciones para ciertos hechos numéricos o geométricos.	
4. Me gusta jugar los juegos que exigen desarrollar el pensamiento lógico	¿Qué tipo de juegos permiten desarrollar el pensamiento lógico? ¿Cómo encuentra los juegos de ese tipo? ¿Son pertinentes los juegos que utiliza?	**Propósito del estudio de las matemáticas** •Desarrollen formas de pensar que les permitan formular conjeturas y procedimientos para resolver problemas, y elaborar explicaciones para ciertos hechos numéricos o geométricos.	**Actitud hacia las matemáticas** 4.3. Desarrolla el hábito del pensamiento racional.
5. Con frecuencia me pregunto sobre el porqué de las cosas y busco aclararlas.	¿Cómo logra aclarar el porqué de las cosas? ¿Qué medios utiliza para lograrlo? ¿Es suficiente lo que realiza para lograrlo? ¿Cómo sabe que ha aclarado el porqué?	**Propósito del estudio de las matemáticas** •Desarrollen formas de pensar que les permitan formular conjeturas y procedimientos para resolver problemas, y elaborar explicaciones para ciertos hechos numéricos o geométricos.	**Actitud hacia las matemáticas** 4.2. Aplica el razonamiento matemático a la solución de problemas personales, sociales y naturales,
6. Las personas dicen que tengo una "calculadora" en mi cabeza.	¿Qué métodos utiliza para realizar los cálculos mentalmente? ¿Qué operaciones puede realizar mentalmente?	**Propósito del estudio de las matemáticas** •Utilicen diferentes técnicas o recursos para hacer más eficientes los procedimientos de resolución.	**Competencias** •Resolver problemas de manera autónoma •Manejar técnicas eficientemente
7. Me es fácil resolver problemas matemáticos.	¿Por qué le resulta fácil? ¿Porque el método que utiliza le es	**Propósito del estudio de las matemáticas** •Utilicen diferentes técnicas o recursos para hacer más eficientes los	**Actitud hacia las matemáticas** 4.1. Desarrolla un concepto positivo de sí mismo como usuario de

	efectivo para llegar a la respuesta? ¿Porque le permite pensar en diferentes formas de resolverlo? ¿Si comete errores es posible que no le resulten fáciles?	procedimientos de resolución. •Muestren disposición para el estudio de la matemática y para el trabajo autónomo y colaborativo.	las matemáticas, el gusto y la inclinación por comprender y utilizar la notación, el vocabulario y los procesos matemáticos. **Competencias** •Resolver problemas de manera autónoma
8. Para mí todo tiene una explicación lógica.	¿Qué está entendiendo por explicación lógica? ¿Logra darle explicación? ¿Utiliza herramientas matemáticas para brindar explicación?	**Propósito del estudio de las matemáticas** •Desarrollen formas de pensar que les permitan formular conjeturas y procedimientos para resolver problemas, y elaborar explicaciones para ciertos hechos numéricos o geométricos.	**Actitud hacia las matemáticas** 4.3. Desarrolla el hábito del pensamiento racional
9. Pienso que las cosas son más claras cuando son medidas o cuantificadas.	¿En qué medida le brinda claridad?	**Propósito del estudio de las matemáticas**	
10. Descubro fallas lógicas en lo que las personas dicen o escriben.	¿Cómo corrobora que son fallas lógicas? ¿Se tiene un intercambio con las demás personas para aclarar las fallas lógicas?	**Propósito del estudio de las matemáticas** •Desarrollen formas de pensar que les permitan formular conjeturas y procedimientos para resolver problemas, y elaborar explicaciones para ciertos hechos numéricos o geométricos.	**Actitud hacia las matemáticas** 4.2. Aplica el razonamiento matemático a la solución de problemas personales, sociales y naturales, aceptando el principio de que existen diversos procedimientos para resolver los problemas particulares.

Anexo 4. . Acuerdo académico colegiado entre la Escuela Secundaria Diurna No. 4 Moisés Sáenz" y el Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Politécnico Nacional



Escuela Secundaria Diurna No. 4
"Moisés Sáenz"

Cinvestav
Departamento de Matemática Educativa
Área *Ciencias de la Cognición y Tecnología de la Información Aplicadas*

ACUERDO ACADÉMICO COLEGIADO PARA EL DESARROLLO DEL

Seminario

Docencia-Investigación de Matemática Educativa en la Escuela Secundaria Diurna No 4 "Moisés Sáenz"

El área de concentración para la investigación "*Ciencias de la Cognición y Tecnología de la Información Aplicadas*" del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav del IPN y *la Escuela Secundaria Diurna No 4 "Moisés Sáenz"*, acuerdan abrir espacios conjuntos para la reflexión, el análisis y el desarrollo de proyectos de investigación relativa a los procesos de la Enseñanza y del Aprendizaje de las matemáticas. Por ello, ambas instituciones manifiestan su interés en conformar un **Seminario de Vinculación** en las instalaciones de la *Escuela Secundaria Diurna No. 4 "Moisés Sáenz"*, y las de Cinvestav, para fortalecer el desarrollo de la docencia y de la investigación en el ámbito de matemática educativa.

Nombre del Seminario de Vinculación

Docencia-Investigación de Matemática Educativa en la Escuela Secundaria Diurna No 4 "Moisés Sáenz".

Objetivo General del Seminario

Analizar e investigar problemas relacionados con la Enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas identificados por los profesores de la Escuela Secundaria Diurna No 4 *"Moisés Sáenz"*, mediante el desarrollo de proyectos de investigación educativa.

Compromisos de las instancias académicas

1. Apoyar la creación y el desarrollo del Seminario de Docencia-Investigación de Matemática Educativa en la *Escuela Secundaria Diurna No 4 "Moisés Sáenz"*.
2. Reconocer que los integrantes del Seminario serán Docentes e Investigadores de ambas instancias académicas bajo el compromiso expreso de participación en las actividades propias del mismo.

3. Aceptar que, a consideración del Seminario, sus espacios podrán abrirse de manera flexible a otros miembros de las comunidades de las instancias y/o de otras instituciones, que por sus objetivos converjan con los del presente acuerdo y quienes, temporal o permanentemente, podrán participar en las actividades del Seminario, a conveniencia de cada una de las instituciones y según objetivos formulados por el último.

4. Apoyar la realización de las actividades del Seminario:

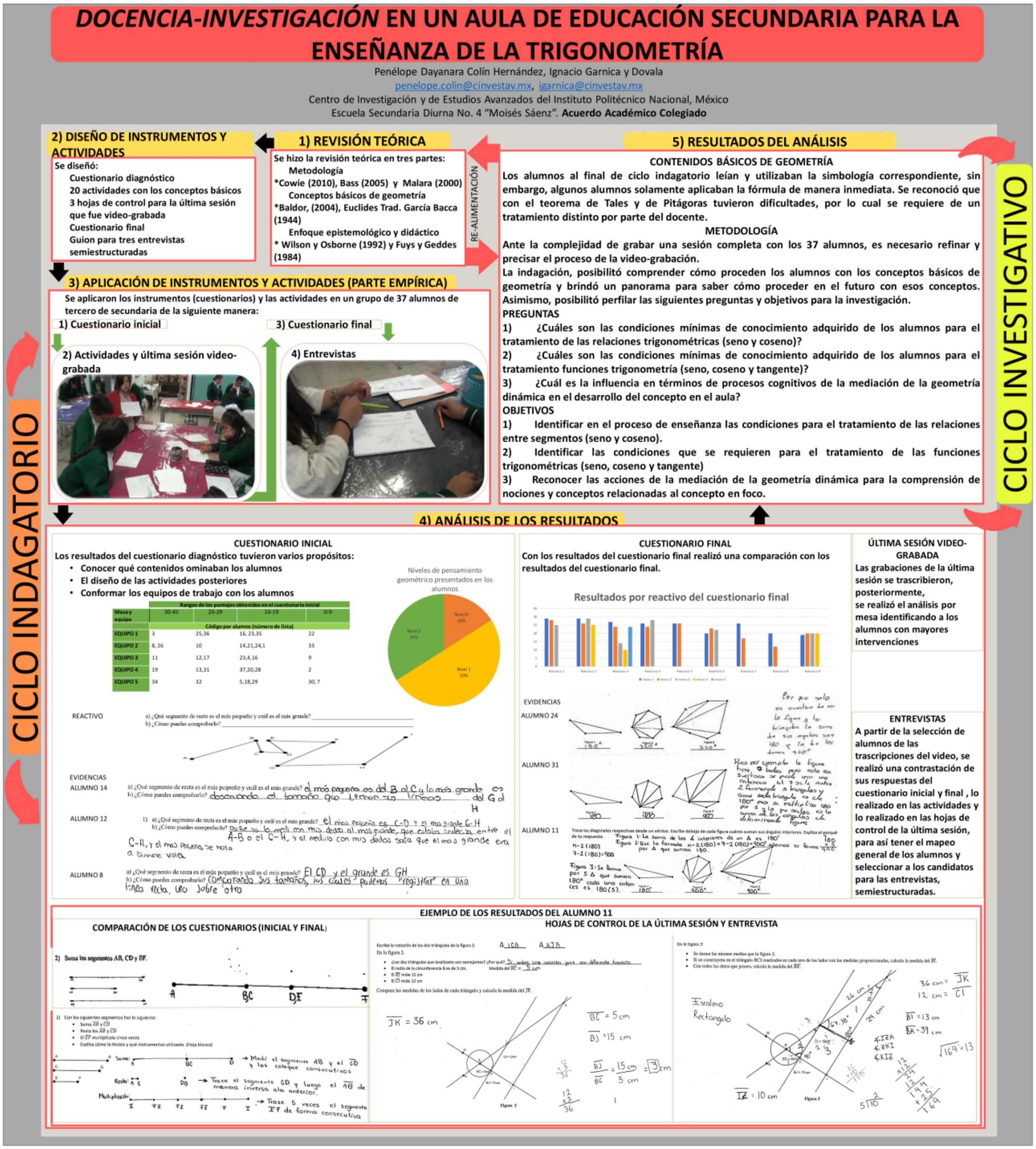
- Reconociendo el quehacer de sus miembros como parte integrante de sus labores institucionales;
- Permitiendo administrativamente el desarrollo de las tareas del Seminario de cada instancia, sin que ello implique necesariamente generar partidas especiales;
- Proporcionando vías expeditas para el intercambio de fuentes de información pertinentes a la realización de las actividades del Seminario;
- Proporcionar un lugar de reunión dentro del plantel, para las actividades propias del seminario.
- Los miembros del Seminario se comprometen a reportar los resultados de las investigaciones realizadas de manera conjunta en artículos, que se presentarán en foros nacionales o internacionales relativos a las temáticas estudiadas en el Seminario.

Utilizando los logos institucionales para la presentación y el desarrollo de las actividades del Seminario.

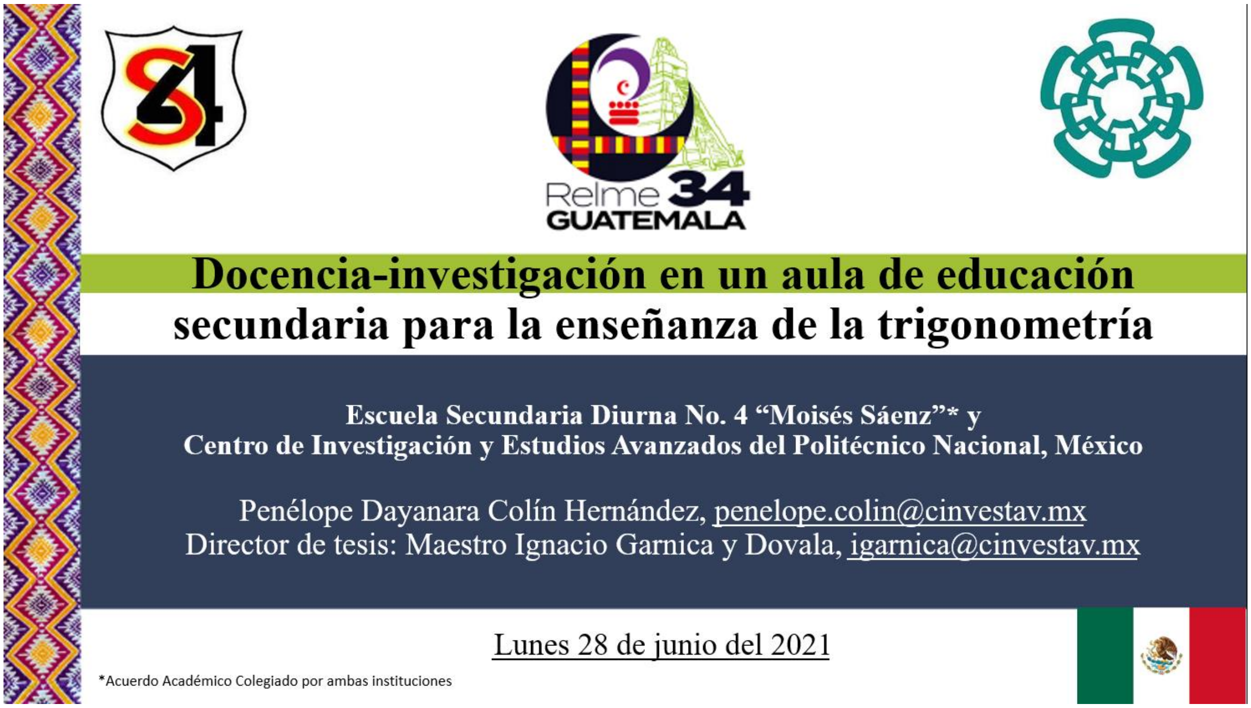
Firman el acuerdo las partes, de cada Institución, responsables

<table>
<tr><td>Dra. Eugenia Lucas Valerio
Directora de la Escuela Secundaria Diurna No 4
"Moisés Sáenz"
SEP
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA
AUTORIDAD EDUCATIVA FEDERAL EN LA CIUDAD DE MÉXICO
COORDINACIÓN SECTORIAL DE EDUCACIÓN SECUNDARIA
ESCUELA SECUNDARIA GENERAL No "MOISÉS SÁENZ"</td><td>M. en C. Ignacio Garnica y Dovala
Coordinador de Área Ciencias de la Cognición y Tecnología de la Información Aplicadas
Luis Moreno A.</td></tr>
<tr><td>Vo. Bo.</td><td>Dr. Luis Enrique Moreno Armella
Jefe del Departamento de Matemática Educativa</td></tr>
</table>

Anexo 5. Cartel presentado en el coloquio de doctorado



Anexo 6. Presentación utilizada en la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (Relme)



1. Problemas de investigación

Los fenómenos del aula y la necesidad de darles una explicación

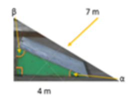
TEOREMA DE PITÁGORAS Y RAZONES TRIGONOMÉTRICAS   3 de mayo del 2017

1. Adriana quiere saber que tan alta es una rampa de skateboard que mide 7 m de hipotenusa y 4 m de un cateto.

Datos
-Hipotenusa mide 7m
-cateto mide 4m

OPERACIONES
-raíz cuadrada
-multiplicación
-resta

Representación del problema



Solución

$c^2= a^2-b^2$
$c^2= 7^2-4^2$
$c^2= 49- 16$
$c^2=33$
$c= \sqrt{33}$
$c= 5$

Razones trigonométricas

EL ángulo β co= 4 ca= 5 hip= 7	$sen\ \beta = \frac{co}{hip} = \frac{4}{7}$ $\cos \beta= \frac{ca}{hip} = \frac{5}{7}$ $\tan \beta= \frac{co}{ca} = \frac{4}{5}$ $\cot \beta= \frac{ca}{co} = \frac{5}{4}$ $\sec \beta= \frac{hip}{ca} = \frac{7}{5}$ $\csc \beta= \frac{hip}{co} = \frac{7}{4}$	El ángulo α co= 5 ca=4 hip=7	$sen\ \alpha = \frac{co}{hip} = \frac{5}{7}$ $\cos \alpha= \frac{ca}{hip} = \frac{4}{7}$ $\tan \alpha= \frac{co}{ca} = \frac{5}{4}$ $\cot \alpha= \frac{ca}{co} = \frac{4}{5}$ $\sec \alpha= \frac{hip}{ca} = \frac{7}{4}$ $\csc \alpha= \frac{hip}{co} = \frac{7}{5}$

Montiel (2013) refiere que se "ha convertido […] en el proceso aritmético de dividir las longitudes de los lados del triángulo, esto es, en una técnica para encontrar valores faltantes de un triángulo", por lo tanto, se "ha despojado a las razones trigonométricas de todo aquello que le da origen, sentido y significado; es decir, *hay una pérdida del proceso geométrico en la construcción de lo trigonométrico"*.

3

2. Preguntas y objetivos de la investigación

Docencia-investigación	Contenido matemático de relaciones trigonométricas
1) ¿Cuáles son las condiciones de posibilidad para la realización de *la docencia-investigación* en el aula?	1) ¿Cuáles son las condiciones mínimas de conocimiento adquirido de los alumnos para la identificación de relaciones entre segmentos en el triángulo rectángulo? 2) ¿Cuáles son las condiciones mínimas de conocimiento adquirido de los alumnos para el tratamiento delas relaciones trigonométricas? 3) ¿Es el pensamiento geométrico intuitivo una condición necesaria para fortalecer la comprensión de las nociones de trigonometría?

Justificación

*Herramientas teóricas y metodológicas para identificar las dificultades
*Diseñe y proponga actividades
*Modificar su práctica docente

Relme 34 GUATEMALA

5

4. Marco teórico

- Docencia-investigación
  - Relación docencia-investigación
  - Relación dialéctica entre docencia-investigación
- Construcción del conocimiento
  - Pensamiento intuitivo
  - Reducción de la abstracción en la enseñanza (RAiT) Diapositiva 7
- Concepto matemático
  - Estructura general de las funciones trigonométricas y estructura conceptual de conceptos de geometría Diapositiva 8
  - Parte teórica de los conceptos de geometría
  - Parte teórica de los conceptos de trigonometría
  - Estado del arte

Diapositiva 9

Relme 34 GUATEMALA

6

4.3.2. Relaciones entre las intuiciones y los objetos matemáticos en la enseñanza

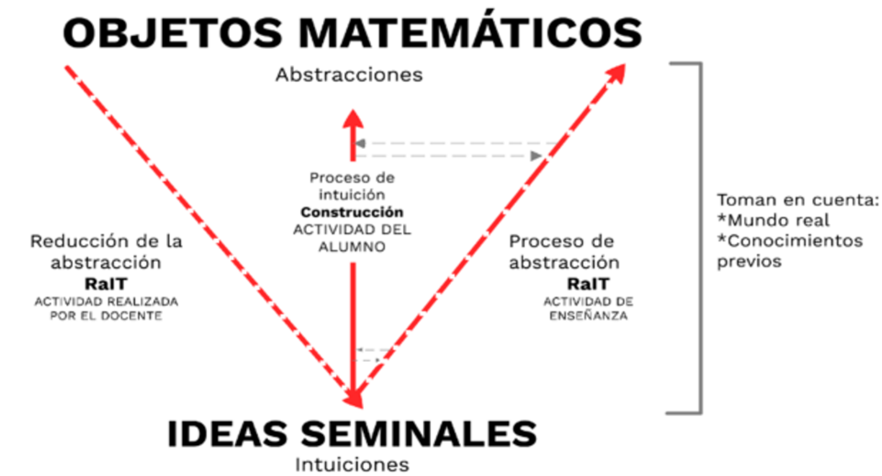


Figura 2. Interpretación de los autores Fischbein (1987), Peña (2020) y Prassad (2014).

Diapositiva 6

4.3.1. Relaciones entre las intuiciones y los objetos matemáticos en la enseñanza

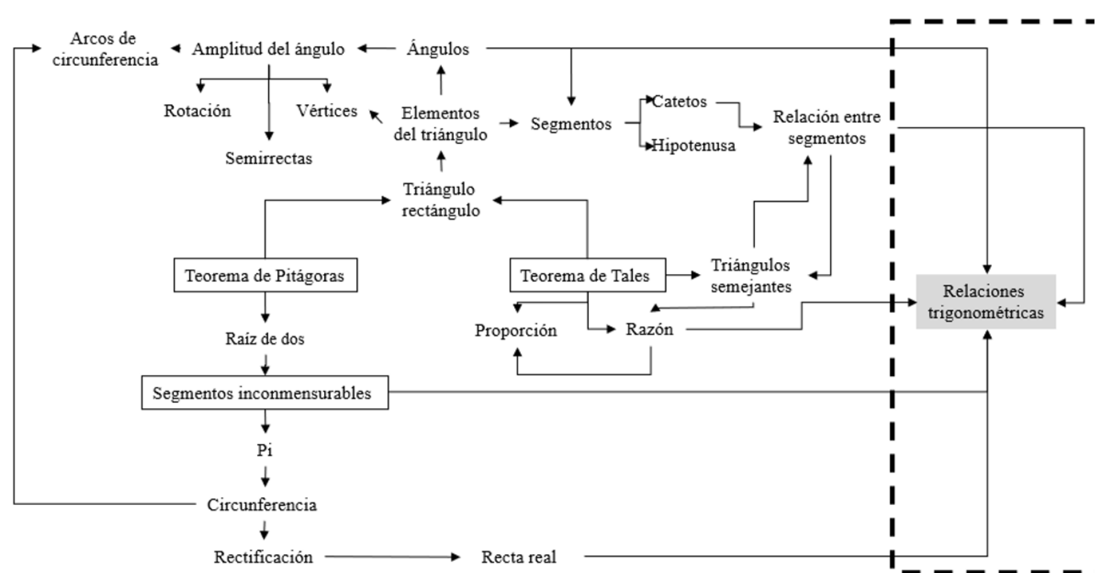


Figura 3. Interpretación del esquema de Arenas et.al. (2014)

8
Diapositiva

5. Metodología

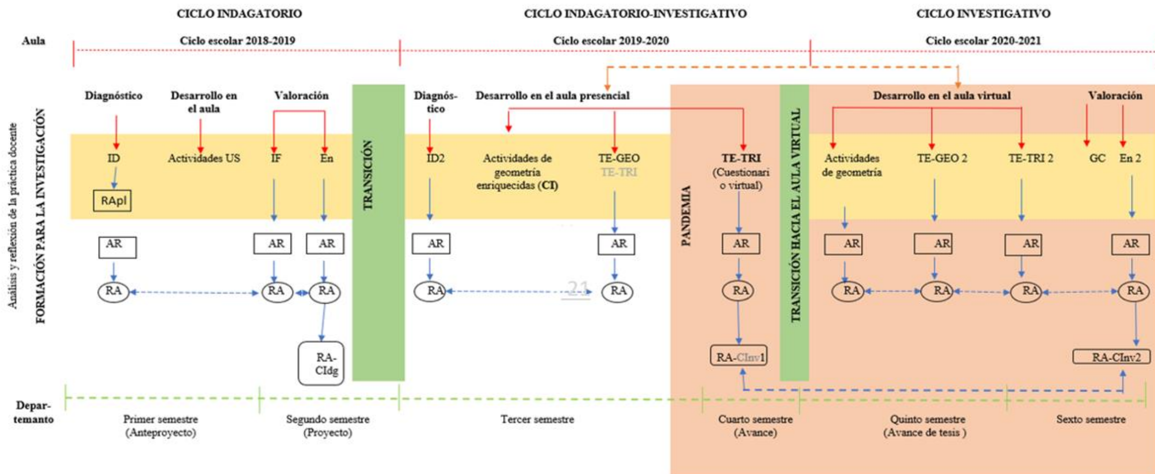


Figura 1. Metodología de la investigación
Código: CI: Ciclo indagatorio, ID: cuestionario diagnóstico, IF: cuestionario final, En: Entrevistas, AR: Análisis de resultados, RA: Resultados del análisis, CI2: Ciclo investigativo, ID: cuestionario diagnóstico, IF: cuestionario final, En: Entrevistas,
AR: Análisis de resultados, RA: Resultados del análisis

Relme 34 GUATEMALA

7

6. Resultados

CICLO INDAGATORIO

CICLO INDAGATORIO-INVESTIGATIVO

CICLO INVESTIGATIVO

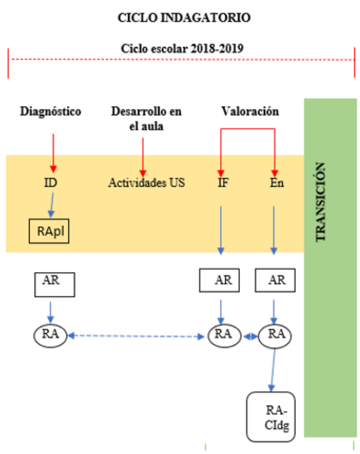
Relme 34 GUATEMALA

8

6.1. Resultados del ciclo indagatorio

Propósitos del ciclo:

1. Reconocer las condiciones de conocimiento adquirido por parte de los estudiantes
2. Cómo tratan con los conceptos básicos de geometría en condiciones institucionales,
3. Delimitar los contenidos de geometría que posibilitan la transición a los conceptos básicos de trigonometría.



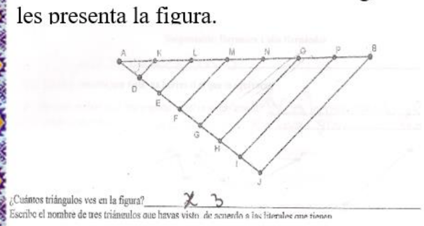
1. Los conceptos identificados fueron:

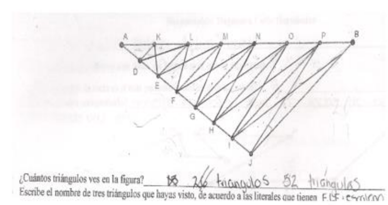
- Segmentos
- Ángulos
- Triángulos
- Polígonos
- Circunferencia
- Triángulos semejantes
- Adición de áreas

11

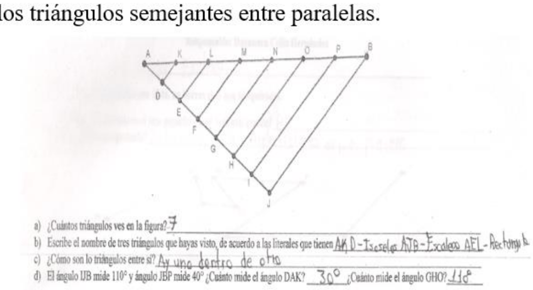
Ejemplo de cómo tratan los triángulos semejantes y teorema de Tales

Los alumnos no identifican los triángulos semejantes en la figura, se desconoce en qué centran su atención cuando se les presenta la figura.





Los alumnos identifican los triángulos semejantes entre paralelas.

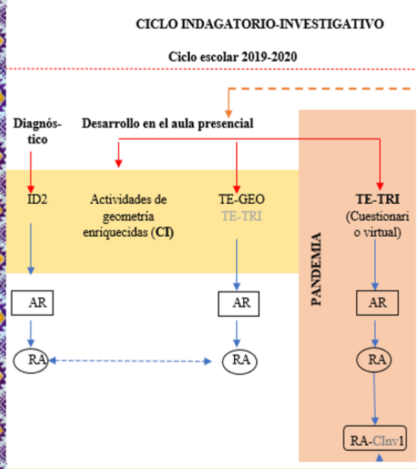


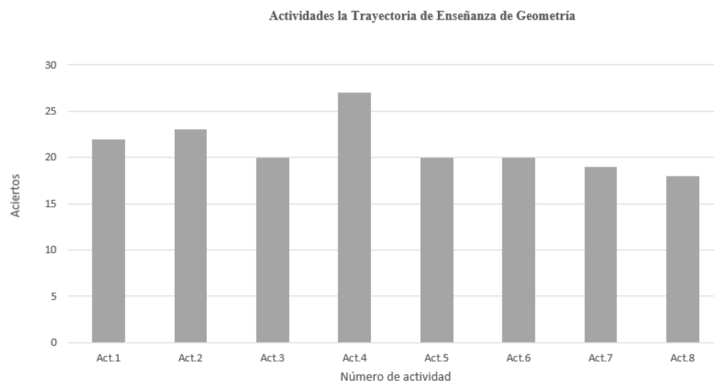
12

6.2. Resultados del ciclo indagatorio-investigativo

Propósitos:

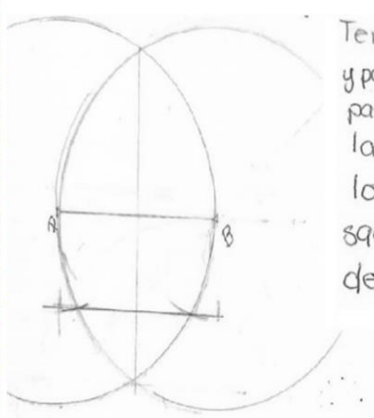
- Fortalecer los conceptos geométricos de transición a los conceptos de trigonometría
- Fortalecer el pensamiento intuitivo





Relme 34 GUATEMALA

Ejemplo de cómo tratan los triángulos semejantes y teorema de Tales



Tenemos una recta y para que sea una paralela y que sea la mismadistancia lo que hice fue sacar la mitad de esa recta.

1.- Se traza una ~~[illegible]~~ recta cualquiera $\overline{AB}$

2.- Tomas la medida de $\overline{AB}$ y apoyandose en A, trazas una circunferencia

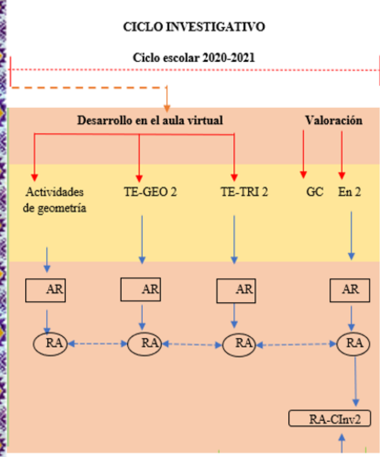
3. Luego te apoyas en el punto B y trazas otra circunferencia

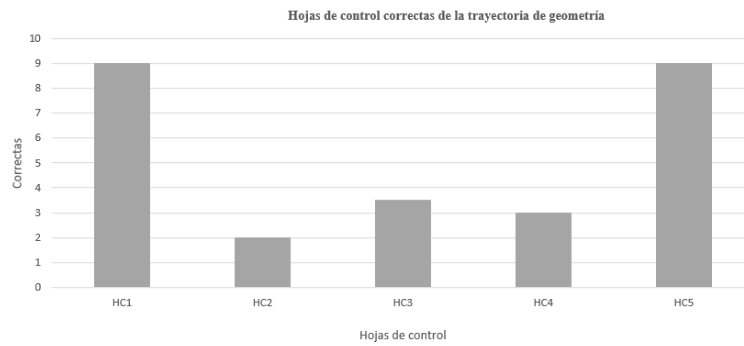
4. Ambas cirferencias se juntan y lo que sigue es unir los puntos formandouna medialriz.

5. Ya que se tiene la mitad se toma la medida y lo único que quedaba era hacer un arco que cruce y trasas otra linea

6.3. Resultados del ciclo investigativo

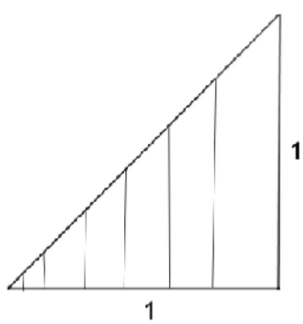
Propósitos: A partir de los conceptos de geometría transitar a los conceptos de trigonometría





13

Ejemplo de cómo tratan los triángulos semejantes y teorema de Tales



e) **¿Cuántas veces pudiste repetir el proceso?**
R= 6 veces

f) **¿Por qué ya no seguiste?**
R= Porque físicamente ya no podía continuar por la forma de la figura

g) **¿Se puede seguir haciendo el proceso? ¿Cuántas veces? ¿Por qué?**
R= Mentalmente puede ser infinito pero físicamente solo se puede hasta 6 por el espacio

h) **¿En qué momento terminaría el proceso? ¿Por qué?**
R= Cuando ya no podamos continuar por el espacio porque se dificultaria el graficarlo

i) **Después del proceso se formarán distintos triángulos, ¿cómo son entre sí?**
R= Son semejantes porque es la misma figura pero sus lados tienen diferentes longitudes

14

Ejemplo de cómo tratan los elementos de un triángulo rectángulo

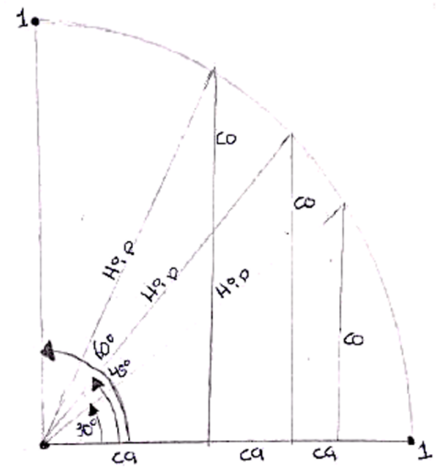


Figura 15. Respuestas de una actividad de la Trayectoria de Enseñanza de Trigonometría

DI: ¿Cuál crees que sea el coseno de 0 grados y el coseno de 90 grados?

A: El de 0 grados es uno porque, porque el coseno en lugar de aumentar va disminuyendo entonces, empieza desde lo más grande que se pueda entonces, es uno y el de 90 grados que sería como lo último, mide es cero.

DI: Ahora ¿cuál va a ser la relación entre el seno y el conseno?

A: Aumentan y disminuyen de diferente manera, conforme aumenta el ángulo, seno aumenta y el coseno disminuye, pero tienen la misma medida solo que invertidos.

Conclusiones

La realización del estudio posibilita concluir que:

1. Es necesario que se modifique la formación del docente, una vía es que se forme en la investigación y cumpla con su doble función: docente-investigador para que ambas se enriquezcan

2. El papel del docente-investigador en las aulas es imprescindible puesto que es quien identifica y coloca las condiciones necesarias para que los alumnos adquieran el conocimiento

3. Reducir la abstracción de los conceptos para colocar los elementos mínimos en el aula y gradualmente incorporar nuevos posibilita la comprensión de los conceptos por parte de los alumnos

4. El tratamiento de los teoremas de construcción es fundamental en el aula porque posibilita que los alumnos se centren en la figura y facilita además, la incorporación de las ideas fundamentales de medida que son importantes para el desarrollo de conceptos trigonométricos

5. Modificar la forma en cómo se trata la medida en el aula mejora el tratamiento y la comprensión de conceptos esenciales para las nociones trigonométricas

6. Es importante fortalecer el pensamiento intuitivo de los alumnos que posibilita el ascenso paulatino a conceptos más complejos

Referencias

Camacho, H., Casilla, D. y Finol de Franco, M. (2008) La indagación: una estrategia innovadora para el aprendizaje de procesos de investigación, *Laurus*, vol. 14 (26) p.p. 284-306.

Arenas, F., Becerra, M., Morales, F., Urrutia, L. & Gómez, P. (2014). Razones trigonométricas. En P. Gómez (Ed.), Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas de matemáticas en MAD 1 (pp. 342-414). Bogotá: Universidad de los Andes.

Cowie, B., Otrel-Cass, K., Moreland, J., Jones,A.,Cooper, B. y Taylor, B. (2010). *Teacher-researcher relationships and collaborations in research.* Waikato, Nueva Zelanda: Waikato journal of Education 15, p. 69-80.

Euclides (1992). *Elementos de Geometría,* trad. Juan David García Bacca, Universidad Autónoma de México, México.

Fischbein, E. (1987). Intuition in science and mathematics. Dordrecht, The Netherlands: Reidel.

Garnica, I. Chavez H., y Ojeda A. (2017). Expresiones figural y escrita de la idea de porcentaje: experiencia de enseñanza con estudiantes de 17 a 24 años. En M. Cruz (coord). Habla del silencio: estudios interdisciplinarios sobre la Lengua de Señas Mexicana y la comunidad Sorda. (p. 218). México: Bonilla Artigas.

Goos, M. (2014). Researcher–teacher relationships and models for teaching development in mathematics education. *ZDM, 46*(2), 189–200.

Heath, T. L. (1897) The Works of Archimedes. Cambridge: Cambridge University Press.

Lucas, C. W, y James, R. T. (1970). Trigonometría moderna. Tomo I. México, UTEHA.

Maknun, C. L., Rosjanuardi, R. y Jupri (2019). From ratios of right triangule to unit circle: introduction to trigonometric functions. International Conference on Mathematics and Science Educatiom (ICMScE 2018) IOP Conf. Series Journal of Physics: Conf. Series 1157 (2019).

Malara, N. A., & Zan, R. (2002). The problematic relationship between theory and practice. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (p.p. 553-580). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Montiel, G. (2013). Desarrollo del pensamiento trigonométrico. México: Secretaría de Educación Pública.

Østergaard, K. (2013). Theory and practice in mathematics teacher education. Proceedings of the IVth international congress on the anthropological theory of didactics (ATD) (pp. 1–22). Toulouse: IVe congrès international sur la TAD.

Peña, L. (2020). Consideraciones sobre la noción de intuición matemática*, Ágora-Papeles de filosofía*. 39(2), p.p. 127-141.

Peterson, J. y J. Hashisaki (1969), *Teoría de la aritmética,* México, Limusa.

SEP (2011). Programa de estudio 2011. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas. México: SEP.

Stitz, S., & Zeager, J. (2013). Pre-calculus. Lakeland: Lakeland Community College.

Subedi K 2014 Dealing With Abstraction: Reducing Abstraction in Teaching (Rat). Proceedings of the 33rd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 1243– 1251.

Tall, D. (2018). How humans learnto think mathematically: exploring the three worlds of mathematics. USA, Cambridge University Press, pp. 54-57.

Wallis, D.A.: History of angle measurement. In: From Pharaos to Geoinformatics FIG Working Week 2005 and GSDI-8. Cairo, Egypt (2005, 17 pp.)

Wilson, P. A., & Osborne, A. (1992). Foundational ideas in teaching about measure. In T. R. Post (Ed.), *Teaching mathematics in grades K-8: Research-*

Anexo 7. Constancias obtenidas de la participación en la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (Relme)

Quetzaltenango, 17 de agosto de 2020

Asunto: Carta de aceptación RELME 34

Estimados autores
Penélope Dayanara Colín Hernández
Ignacio Garnica Y Dovala

De nuestra consideración:

Es grato saludarles y a la vez comunicarles que, a nombre del comité organizador de la XXXIV Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (Relme 34), que su propuesta titulada: **DOCENCIA-INVESTIGACIÓN EN UN AULA DE EDUCACIÓN SECUNDARIA PARA LA ENSEÑANZA DE LA TRIGONOMETRÍA**, fue aceptada para ser expuesta como **Reporte de Investigación.**

Para formalizar su participación deberá inscribirse antes del 31 de diciembre de 2020 mediante la web: clame-relme.org. De esta manera su propuesta será considerada en la programación del evento, que se realizará del 27 de junio al 2 de julio de 2021.

Convencidos de que su participación será relevante para el éxito de la Relme 34, quedamos a la espera de su inscripción.

Atentamente,

Carlos Amilcar Fuentes.
Coordinador General de Relme 34
Email: caffuentes7@gmail.com

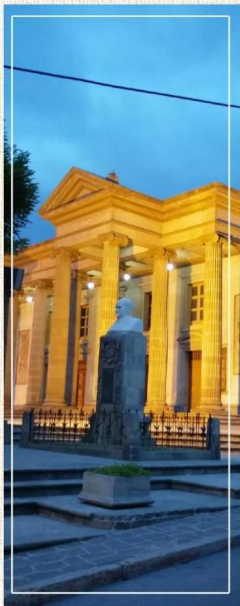
Yolanda Serres Voisin
Stalet Josué Pérez Urrea
Comisión de Reportes de Investigación

www.clame-relme.org relme34gt@gmail.com

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Relme 34 GUATEMALA

EL COMITÉ LATINOAMERICANO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA.
EL COMITÉ ORGANIZADOR DE RELME 34 Y EL DEPARTAMENTO DE ESTUDIOS DE POSTGRADO DEL CENTRO UNIVERSITARIO DE OCCIDENTE DE LA UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA, OTORGAN EL PRESENTE CERTIFICADO A:



Penélope Dayanara Colín Hernández

POR SU PARTICIPACIÓN EN LAS ACTIVIDADES ACADÉMICAS DE LA RELME 34, DEL 28 DE JUNIO AL 2 DE JULIO DEL AÑO 2,021 CON UN TOTAL DE 40 HORAS.

QUETZALTENANGO, GUATEMALA, 2 DE JULIO DEL 2021

Olga Lidia Pérez Presidente de Clame.	Carlos Amilcar Fuentes. Presidente comité organizador.	Percy Iván Aguilar. Director de Postgrados CUNOC

Código Evento
VL-0079722

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Relme 34 GUATEMALA

EL COMITÉ LATINOAMERICANO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA.
EL COMITÉ ORGANIZADOR DE RELME 34 Y EL DEPARTAMENTO DE ESTUDIOS DE POSTGRADO DEL CENTRO UNIVERSITARIO DE OCCIDENTE DE LA UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA, OTORGAN EL PRESENTE CERTIFICADO A:

Penélope Dayanara Colín Hernández

Por su ponencia titulada

Docencia-investigación en un aula de educación secundaria para la enseñanza de la trigonometría. En la modalidad de Reportes de Investigación.

Quetzaltenango, Guatemala, 2 de julio de 2021.

Olga Lidia Pérez Presidente de Clame.	Carlos Amilcar Fuentes. Presidente comité organizador.	Percy Iván Aguilar. Director de Postgrados CUNOC

Código Evento
VL-0079722