Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemática Educativa

La ecuación de onda en una dimensión: El caso de la solución de D'Alembert, una caracterización histórica-epistemológica.

Tesis que presenta:

Alan Arturo Flores Cambrón

Para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

en la especialidad de

Matemática Educativa

Directora de la Tesis:

Dra. Rosa María Farfán Márquez

Ciudad de México Abril, 2021

• La vida solo puede ser entendida vista hacia atrás, pero debe ser vivida mirando hacia adelante. •

▪ Søren Aabye Kierkegaard ▪

• *La ecuación de onda en una dimensión*: *El caso de la solución de D'Alembert, una caracterización histórica-epistemológica.* •

Alan Arturo Flores Cambrón

▪ DME-Cinvestav-IPN ▪

Contenido de la Investigación

Índice de $\mathcal{I}$lustraciones · · · · · · · · · · **pág. i**

Índice de $\mathcal{T}$ablas · · · · · · · · · · **pág. ii**

$\mathcal{A}$gradecimientos · · · · · · · · · · **pág. iii**

$\mathcal{D}$edicatoria · · · · · · · · · · **pág. vi**

$\mathcal{R}$esumen · · · · · · · · · · **pág. viii**

$\mathcal{A}$bstract · · · · · · · · · · **pág. ix**

$\mathcal{I}$ntroducción · · · · · · · · · · **pág. x**

$\mathcal{C}$apítulo 1. $\mathcal{C}$onsideraciones $\mathcal{I}$niciales · · · · · · · · · · **pág. 01**

1.1 $\mathcal{M}$otivaciones · · · · · · · · · · **pág. 01**

1.2 $\mathcal{U}$na aproximación a la problemática · · · · · · · · · · **pág. 07**

1.2.1 $\mathcal{L}$a unidad de aprendizaje de $\mathcal{EDP}$ I · · · · · · · · · · **pág. 16**

1.3 $\mathcal{R}$evisión de literatura · · · · · · · · · · **pág. 20**

1.3.1 $\mathcal{L}$os libros de texto especializados · · · · · · · · · · **pág. 20**

1.3.2 $\mathcal{E}$l $\mathcal{MSV}$ en investigaciones científicas · · · · · · · · · · **pág. 23**

1.4 $\mathcal{P}$roblema de investigación · · · · · · · · · · **pág. 32**

$\mathcal{C}$apítulo 2. $\mathcal{C}$onsideraciones $\mathcal{T}$eóricas y $\mathcal{M}$etodológicas · · · · · · · · · · **pág. 35**

2.1 ¿$\mathcal{P}$or qué se contempla a la $\mathcal{TSME}$ en esta investigación? · · · · · · · · · · **pág. 37**

2.2 $\mathcal{E}$l objeto de estudio de la $\mathcal{TSME}$ y las cuatro dimensiones del saber · · · · · · · · · · **pág. 42**

2.2.1 $\mathcal{L}$os cuatro principios de la $\mathcal{TSME}$ · · · · · · · · · · **pág. 45**

2.3 $\mathcal{E}$l $\mathcal{d}$iscurso $\mathcal{M}$atemático $\mathcal{E}$scolar · · · · · · · · · · **pág. 50**

2.4 $\mathcal{L}$a metodología en la $\mathcal{TSME}$ · · · · · · · · · · **pág. 54**

2.4.1 $\mathcal{E}$l análisis histórico-epistemológico · · · · · · · · · · **pág. 56**

2.4.2 $\mathcal{A}$nálisis de obras originales · · · · · · · · · · **pág. 58**

Capítulo 3. Una crítica a la Matemática Escolar de las Ecuaciones Diferenciales Parciales desde el discurso Matemático Escolar · · · · · **pág. 68**

3.1 Conceptos y terminología básica de las EDP · · · · · **pág. 69**

3.2 EDP lineales y homogéneas de segundo orden y su clasificación · · · · · **pág. 73**

3.3 Tipos de condiciones en EDP lineales y homogéneas de segundo orden · · · · · **pág. 77**

Capítulo 4. Un recorrido histórico-epistemológico asociado a la idea de propagación de sonido · · · · · **pág. 79**

4.1 El surgimiento de ideas fundamentales sobre la Teoría de la Vibración · · · · · **pág. 79**

4.2 Los inicios de la Física del sonido · · · · · **pág. 84**

4.3 El estudio matemático, experimental y mecanicista del sonido en la Revolución Científica · · · · · **pág. 93**

4.4 Resumen del Capítulo 4 · · · · · **pág. 113**

Capítulo 5. El paradigma científico del Siglo XVIII: La matematización del movimiento y el surgimiento del Análisis Matemático · · · · · **pág. 117**

5.1 La emergencia de la Dinámica en el Siglo XVIII · · · · · **pág. 118**

5.2 El Problema de la Cuerda Vibrante · · · · · **pág. 124**

5.2.1 El análisis dialéctico en la obra matemática de Jean le Rond D'Alembert · · · · · **pág. 165**

5.3 Configuración de la hipótesis epistemológica · · · · · **pág. 199**

Capítulo 6. Conclusiones de la Investigación · · · · · **pág. 202**

Capítulo 7. Prospectivas a Futuro · · · · · **pág. 210**

Referencias Bibliográficas · · · · · **pág. 213**

Anexos · · · · · **pág. 221**

Índice de Ilustraciones

Ilustración 1. Triangulación disciplinar intersecada. Fuente**:** Elaboración propia · · **pág. 16**

Ilustración 2. Capítulo 12 del libro de Spiegel **(**1983**)** ·**pág. 21**

Ilustración 3. Capítulo 10 del libro de Boyce y DiPrima **(**2001**)** · · · · · · · · · · · · · ·**pág. 22**

Ilustración 4. Triángulo Didáctico. **(**Cantoral, 2013, p. 45**)** · · · · · · · · · · · · · · · · · **pág. 40**

Ilustración 5. El triángulo didáctico extendido. **(**Cantoral, 1998**)** como se citó en Cantoral **(**2013**)** ·**pág. 41**

Ilustración 6. El triángulo didáctico de la Socioepistemología. **(**Cantoral, 2013**)** · · · **pág. 42**

Ilustración 7. Principios de la Socioepistemología ·**pág. 46**

Ilustración 8. Modelo de anidación de prácticas. **(**Cantoral, 2013, p. 334**)** · · · · · · · **pág. 49**

Ilustración 9. Acción → Actividad → Práctica. **(**Cantoral, 2013, p. 336**)** · · · · · · · ·**pág. 50**

Ilustración 10. Modelo de exclusión. **(**Soto, 2010, p. 93**)** · · · · · · · · · · · · · · · · · · **pág. 52**

Ilustración 11. Mapa del dME. **(**Soto, 2010, p. 93**)** ·**pág. 53**

Ilustración 12. Esquema metodológico de la investigación. Fuente**:** Elaboración propia ·**pág. 60**

Ilustración 13. Esquema metodológico sobre la Problematización del saber matemático. Fuente**:** Elaboración propia · **pág. 65**

Ilustración 14. Esquema metodológico propuesto con base en la naturaleza del objeto matemático. Fuente**:** Elaboración propia · **pág. 66**

Ilustración 15. Redefinición del problema hecha por Zarlino. **(**Cohen, 1984, p. 5**)** · **pág. 89**

Ilustración 16. El *quadrívium* desde la posición de Kepler. **(**Cohen, 1984, p. 18**)** · · **pág. 99**

Ilustración 17. Polígonos regulares circunscritos en un círculo según Kepler. **(**Cohen, 1984, p. 19**)** · **pág. 100**

Ilustración 18. Las ocho consonancias según Kepler. **(**Cohen, 1984, p. 22**)** · · · · · ·**pág. 102**

Índice de Tablas

𝒯abla 1. 𝒰nidad de aprendizaje de ℰcuaciones 𝒟iferenciales 𝒫arciales I · · · · · · · · **pág. 18**

𝒯abla 2. ℬibliografía básica y de consulta para ℰcuaciones 𝒟iferenciales 𝒫arciales I · **pág. 21**

𝒯abla 3. ℰl problema de investigación · **pág. 32**

𝒯abla 4. ℰjemplos de ℰ𝒟𝒫 lineales y no lineales · **pág. 72**

𝒯abla 5. ℰjemplos de ℰ𝒟𝒫 lineales con coeficientes constantes y variables · · · · · · **pág. 73**

𝒯abla 6. 𝒞aracterización de acciones y actividades con relación al *análisis dialéctico* en la obra matemática de 𝒥ean le ℛond 𝒟'𝒜lembert · **pág. 195**

AGRADECIMIENTO A INSTITUCIÓN

Agradezco al ***C***onsejo ***N***acional de ***C***iencia y ***T***ecnología **(*CONACYT*)** por el apoyo económico brindado para la realización de mis estudios de maestría, sin el cual, la presente investigación no hubiese sido posible.

Alan Arturo Flores Cambrón

Número de ***B***ecario **(*CVU*): 936098**

AGRADECIMIENTOS

Sin duda alguna, al emprender el proceso de escritura de una tesis, en donde se requiere de un compromiso sumamente grande conlleva a realizar una serie de introspecciones como persona y como estudiante a lo largo de este proceso, dos posturas no ajenas entre sí, donde a través de un cúmulo de sentimientos y miradas de agradecimiento se encuentran al final de este camino. ***E***l saber reconocer en primera instancia a todas aquellas personas que estuvieron en y durante el proceso de emprender esta trayectoria para formarme como investigador, y que de forma directa e indirecta han hecho de este proceso algo más ameno para brindarme una madurez no solo en lo académico, sino como persona, reitero en este espacio… en estas líneas, mis más sinceros agradecimientos, que, de forma innegable, no bastarán para poder expresar mis palabras de total gratitud.

Antes que nada, agradezco a la vida y al Universo por haberme permitido llegar hasta este momento, por ver cumplir un sueño más en mi trayectoria escolar, la cual estoy seguro que me permitirá tocar otras puertas para emprender nuevas experiencias en lo académico y lo profesional. ***A*** Dios, por no abandonarme nunca en mis momentos de reflexión; por guiar todos mis anhelos en mis noches de desvelo y por ver hecha la fe que deposito en ti.

Comienzo mi más sincero y profundo agradecimiento a la Dra. Rosa María Farfán Márquez, mi directora de tesis, una mujer con una calidez humana excepcional, quien me abrió las puertas al Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, así como la confianza que depositó en mí desde un principio; por creer en mí para poder hacer cumplir este proyecto de investigación, que, sin sus enseñanzas, sus críticas y sus consejos tan certeros esto no hubiese ocurrido. ***U***n mundo nuevo para mí como investigador en formación, que lo encontré al estar en su grupo de investigación. ***A*** mi hermana académica Verito y a mis hermanos académicos Jesús, Fabián, Jorge, Piña y Abraham, ¡gracias! por todos y cada uno de los momentos en los que las críticas académicas permitieron abrir cauce a esta investigación.

A mis profesores de seminarios, la Dra. Rosa María Farfán Márquez, la Dra. Claudia Margarita Acuña Soto, la Dra. Gisela Montiel Espinosa, la Dra. Daniela Reyes Gasperini, el Dr. Francisco Cordero Osorio, el Dr. Carlos Armando Cuevas Vallejo, el Dr. Ricardo Arnoldo Cantoral Uriza y el Dr. Francisco Javier Lezama Andalón, que, a través de sus experiencias, con sus enseñanzas, propiciaron en el aula, un escenario de diálogo y de discusión, al brindar nuevas miradas de conocimiento de la Matemática, y en especial de la Matemática Educativa, disciplina científica capaz de dar soluciones para transformar y mejorar la educación.

*U*n agradecimiento a mis compañeros de generación Sindi, Viri, Sofía, Jimy, Carlitos, Luis Carlos, de Latinoamérica para Latinoamérica, colegas con diferentes intereses, pero con un mismo objetivo de aprendizaje; por todas aquellas pláticas dentro y fuera de clases y, que a pesar de las *adversidades* hicieron de este viaje algo más ameno y fructífero. *A*gradezco especialmente a Tony, quien me abrió las puertas de su amistad, por compartir charlas en las que derivaron momentos de conocimiento, y que indiscutiblemente sirvieron para poder desentrañar ideas valiosas para esta investigación.

A Adriana Parra Hernández, a Susana Gómez Vargas, por su gran y eficiente compromiso, así como su amable trato, a lo largo de la realización de mis trámites desde el inicio hasta el fin de mis estudios de maestría. *A* Jacqueline Desfassiaux Duarte, por su valioso apoyo en la búsqueda bibliográfica cuando más lo requerí y en el que siempre tuve una respuesta inmediata; a ellas y a todo el personal técnico y administrativo que, de alguna forma directa o indirecta, estuvieron ahí, ¡muchas gracias!

*A*l continuar con estas líneas, donde externo mis agradecimientos, viene a mi mente mi familia, el pilar más importante en mi vida no solo en el terreno de lo personal sino en lo profesional; mis papás, Elizabeth y Arturo, quienes me han mostrado su apoyo incondicional para superarme y ser mejor cada día, por ayudarme a cumplir mis sueños. *M*i hermana, Carla, por acompañarme siempre en mis travesías de vida, y por haberme dado una extensión de ti, mi sobrinita Giselle. *A* ellas a quienes les agradezco su existencia y en especial a mi guachita hermosa, Gisi, mi amor; sé que crecerás y que algún día leerás estas líneas y las comprenderás; quiero que sepas que te doy las gracias por alegrarme en todo momento, por venir a mi rincón de trabajo a sacarme una sonrisa; por ser parte de mi felicidad y compartirme tu felicidad en cualquier instante. A ustedes, ¡muchas gracias!

A todas aquellas personas que saben que estuvieron en y durante este proceso, ¡gracias!, con mi aprecio y cariño, les agradezco de corazón el haberse aventurado conmigo por ver cumplir una travesía académica más.

***A*tentamente:**

▪*Alan Arturo Flores Cambrón*▪

DEDICATORIA

A la mujer que me dio la vida, ¡mi madre!; ¡mami! te dedico este trabajo, como símbolo y muestra de todo mi amor que tengo hacia ti; por tu valentía, por tus esfuerzos, por ser un gran ejemplo de vida. ***E***res una de mis fuentes de inspiración para seguir en busca de mis sueños personales y profesionales; agradezco a la vida por haberme dado a una madre como tú. ***E***sta tesis representa, uno de los motivos para expresarte lo mucho que te debo en mi vida, por siempre estar ahí, por sentir tu abrigo en todo momento y en los que más los he necesitado; indudablemente compartir este viaje académico no fue la excepción. **¡*T****e amo mamita con todo mi ser***!**

A la memoria de mi padrino Francisco Flores Alva **[†]**, ¡tío Paco!, estoy consciente de que usted jamás leerá estas líneas pero espero con el alma que en donde usted se encuentre, si es que está, esté gozando de la dicha del descanso eterno; sé y estoy seguro que si usted viviera se sentiría muy orgulloso de mí, y que como siempre lo hizo, me escucharía y me daría un consejo, unas palabras de aliento, para que yo demuestre a donde quiera que ande y vaya, ser el mejor, pero sobre todo, ser un ejemplo para toda la familia; aunque estas líneas no me hubiese gustado externarlas por su ausencia, con todo mi cariño las expreso para demostrar cuanto lo extraño y añoro su presencia. Este logro académico lo comparto hasta el cielo con usted… **¡*U****n beso y un abrazo sin fin hasta donde usted está***!**

A mi directora de tesis, la Dra. Rosa María Farfán Márquez, quien tengo presente la manera en que me sugirió tomar este proyecto. ***L***o recuerdo perfectamente… como postrada con su inigualable personalidad en su asiento de su oficina después de un *S*eminario de los *J*ueves entré yo a saludarla… después de hacerlo, tomé asiento y me dijo**: "—*O***ye Alan, **¿**qué has pensado sobre tu proyecto de investigación**?**, —a lo que inmediatamente le respondí**:** ***P****ues mire doctora, he pensado en trabajar algo relacionado a Ecuaciones Diferenciales* **[…]—"** no tardé en terminar de decirle eso, cuando ella rápidamente intervino diciéndome**:** "—*¿****S****abes qué***?**, yo siempre he querido saber **¿**por qué se separan las variables**?**, **[…]** tengo una hipótesis y tiene que ver con las *características físicas del fenómeno* **[…]—"**.

M*i ser y mi mente, parecieron inundarse de emoción, porque cogí en un abrir y cerrar de ojos esa inquietud que la doctora estaba compartiéndome, aunado a que ya conocía parte de su línea de investigación, —¡*F*ourier**!—**, y, a pesar de que no había leído a fondo sus innumerables trabajos científicos respecto a ello, coincidían perfectamente a esa curiosidad que yo, al ser todavía estudiante de licenciatura también me había preguntado en ese momento cuando cursé Ecuaciones Diferenciales Parciales I, donde yo veía a mi profesor, explicar ese método de solución sin dar una explicación sobre el *porqué* es posible *suponer* la solución de la ecuación en forma de producto; por eso, enlacé perfectamente lo comentado

por la doctora junto con lo que yo, ya sabía de estudiante; inmediatamente dije en mi mente, **"—¡**claro**!**, $\mathcal{F}$ourier en su trabajo empleó Ecuaciones Diferenciales Parciales**—"**, por ello, aunque la Dra. Farfán no me hubiese dicho explícitamente que este método es un objeto matemático que vive dentro de este tipo de Ecuaciones Diferenciales, yo, hilé perfectamente el vínculo de lo que yo conocía, en conjunto a la Matemática empleada por $\mathcal{F}$ourier para resolver la *ecuación de calor*, **¡**Ecuaciones Diferenciales Parciales**!**

$\mathcal{D}$espués de esta pequeña charla, supe y concluí claramente el camino que tomarían las intenciones sobre las que la Dra. Farfán había puesto sobre la mesa, a través de haber externado sus ideas iba a propiciar con las que, en ese momento, yo, estaba pensando; encaminarlas en conjunto para que al final de todo, se encontraran para así encauzar los inicios de esta investigación.

***¡$\mathcal{A}$ usted, doctora, muchas gracias por acogerme como uno más de sus hijos académicos… le debo tanto*!**, este escrito forma parte de toda mi admiración y respeto que tengo hacia usted.

$\mathcal{A}$tentamente:

▪$\mathcal{A}$lan $\mathcal{A}$rturo $\mathcal{F}$lores $\mathcal{C}$ambrón▪

$\mathcal{D}$iciembre-2020

Resumen

La presente investigación está centrada en un estudio de corte *histórico-epistemológico* sobre el **M**étodo de **S**eparación de **V**ariables **(MSV)**, objeto matemático presente en la **M**atemática **E**scolar en áreas del conocimiento científico como la Matemática, Física e Ingeniería; tal estudio es hecho a partir de haber fijado dentro del *marco de referencia*[i] identificado, la *Teoría de la Vibración*, al *Problema de la Cuerda Vibrante*. A partir del análisis realizado conllevó en poder escudriñar elementos *históricos* y *epistemológicos* que permearon la producción de este objeto matemático en el Siglo XVIII y posteriormente a la forma en que se conoce hasta hoy día. Este proyecto, es realizado a través de la postura teórica adoptada, la **T**eoría **S**ocioepistemológica de la **M**atemática **E**ducativa **(TSME)** por medio de su metodología, la *problematización del saber matemático*, en donde se ha puesto en juego la *actividad matemática*[ii] de Jean Le Rond D'Alembert, actor principal que reporta la Historia de la Matemática por haber empleado dicho método *en el resultado* de sus investigaciones sobre una cuerda tensada en sus extremos que fue puesta en vibración, la cual está reportada en su obra matemática**:** *Addition au memoire sur la courbe que forme une corde tenduë, mise en vibration*.

Por ello, esta investigación, conlleva a poner en evidencia el contraste de lo que se vive en la enseñanza tradicional del **MSV** como una reproducción algebraica sin dotar de significaciones que hay detrás de su uso en relación con lo que el *análisis histórico-epistemológico* brinda en vínculo con la **TSME**, al poder rescatar algunas acciones y actividades hechas por el autor **(***véase* el final del análisis dialéctico de la obra**)**, con base en el método de Cantoral et al. **(**2015**)**. En relación al análisis histórico se inquieren los orígenes del **MSV** a partir de asociar a lo largo de más de diez siglos las ideas fundamentales en torno al *marco de referencia*, lo que permitió definir y caracterizar a la *Teoría Musical*, como una posible *práctica de referencia* **(***véase* el **Capítulo 6.**, de esta investigación**)**.

Una vez establecido todo el análisis de esta investigación, se ha configurado una hipótesis epistemológica que brinda pautas para continuar en la misma ruta encausada para poder proliferar en los resultados de esta investigación, así como las líneas de investigación que de ella se desprenden. Finalmente, en las conclusiones se deja por esclarecido una construcción social del **MSV** hecha bajo el *análisis histórico-epistemológico* realizado.

[i] **marco de referencia:** En esta investigación este término se refiere como una manera innata *de contextualizar el conocimiento científico propio de algún problema* visto desde una rama de la Física-Matemática; por ejemplo, el estudio del movimiento ondulatorio, se concibe desde la Teoría de la Vibración; la transferencia del calor, desde la Teoría del Calor, la dinámica de fluidos, desde la Hidrodinámica.

[ii] **actividad matemática:** A lo largo de esta investigación, este término alude al área o áreas de las Matemáticas con mayor presencia en el momento del estudio de algún fenómeno o problema. Por ejemplo, la actividad matemática del Siglo XVIII se refiere al Cálculo Algebraico, al Análisis Matemático y al nacimiento de las Ecuaciones Diferenciales Parciales.

Abstract

The present research is focused on a *historical-epistemological* study about the **M**ethod of **S**eparation of **V**ariables **(MSV)**, mathematical object present in the **S**chool **M**athematics in areas of scientific knowledge such as Mathematics, Physics and Engineering; such study is made from having fixed within the identified *reference frame*[i], the *Theory of Vibration*, to the *Problem of the Vibrating String*. From the analysis carried out, it was possible to scrutinize *historical* and *epistemological* elements that permeated the production of this mathematical object in the 18th Century and later to the way it is known until today. This project is carried out through the theoretical position adopted, the **S**ocioepistemological **T**heory of **M**athematics **E**ducation **(TSME)** through its methodology, the *problematization of mathematical knowledge*, where the *mathematical activity*[ii] of Jean Le Rond D'Alembert has been put into play, the main actor who reports the History of Mathematics for having used this method *in the result* of his researches on the rope stretched at its ends that was put into vibration, which is reported in his mathematical work**:** *Addition au memoire sur la courbe que forme une corde tenduë, mise en vibration*.

For this reason, this research, leads to put in evidence the contrast of what is lived in the traditional teaching of the **MSV** as an algebraic reproduction without endowing with meanings that there is behind its use in relation to what the analysis The *historical-epistemological analysis* of the work, based on the method of Cantoral et al. **(**2015**)**, provides a link with the **TSME**, by rescuing some of the actions and activities carried out by the author **(***see* the end of the dialectical analysis of the work**)**. In relation to the historical analysis, the origins of the **MSV** are investigated by associating over more than ten centuries, the fundamental ideas around the *frame of reference*, which allowed defining and characterizing *Music Theory* as a possible *reference practice* **(***see* **Chapter 6.**, of this research**)**.

Once all the analysis of this research has been established, an epistemological hypothesis has been configured that provides guidelines to continue in the same route in order to proliferate in the results of this research as well as the lines of research that are derived from it. Finally, in the conclusions, a social construction of the MSV made under the *historical-epistemological analysis* is left for clarification.

[i] **frame of reference:** In this research this term is referred to as an innate way of *contextualizing the scientific knowledge of a problem* seen from a branch of Physics-Mathematics; for example, the study of wave motion is conceived from the Theory of Vibration; heat transfer, from the Theory of Heat, fluid dynamics, from Hydrodynamics.

[ii] **mathematical activity:** Throughout this research, this term alludes to the area or areas of Mathematics with the greatest presence at the time of study of some phenomenon or problem. For example, the mathematical activity of the 18th Century refers to Algebraic Calculus, Mathematical Analysis and the birth of Partial Differential Equations.

Introducción

El estudio de las **E**cuaciones **D**iferenciales **P**arciales **(EDP)**, ha conllevado a investigaciones científicas dentro de la Matemática a descubrir nuevos métodos de solución analíticos o numéricos, o bien poner en juego sus *ansatz* a problemas de la Física, donde los fenómenos suscitados en su gran gama de ramas de esta disciplina, la matematización de estos ve involucrada el empleo de **E**cuaciones **D**iferenciales **P**arciales lineales y en casos muy caóticos las **EDP** no-lineales, así como su impacto posterior en el terreno de la Ingeniería, en su infinidad de contextos, pero por mencionar algunos, como las comunicaciones, la electrónica, la robótica, el control, etc., estos estudios se suman el conjunto de investigaciones existentes en el campo científico de la Matemática Educativa donde pone sobre la mesa de investigación a esta rama de la Matemática en investigaciones alrededor de la Serie Trigonométrica de Fourier, la convergencia de Series de Fourier y el estado estacionario **[**las investigaciones pioneras en el campo, pueden consultarse en Farfán **(**1986**)** y Farfán **(**1993**)]**, sin embargo, de todo este conjunto de investigaciones que a grandes rasgos se comentan, existe un objeto matemático, el **MSV**, que ha generado inquietudes al respecto por la manera en que usualmente se enseña, y por ende en el proceso de enseñanza-aprendizaje deja por un lado elementos sustanciales que atienden a su construcción epistemológica.

Cabe mencionar, que este objeto matemático, en su estudio es visto como un *método de solución* para las **EDP-lineales-homogéneas de orden dos**, sin embargo, la existencia de investigaciones en Matemática Educativa en torno a esta rama de la Matemática, se limitan a cierto tipo de conceptos matemáticos presentes en la *teoría* y *práctica* de este tipo de ecuaciones, por lo que se considera una oportunidad para atender la epistemología intrínseca existente detrás del **MSV**, debido a que en investigaciones ya reportadas no han sido atendidas de manera particular en torno a este *objeto matemático* y es precisamente que de este escrito se pretende develar por medio de un *análisis histórico-epistemológico* su génesis matemática.

A partir, de poder expresar en conjunto estas inquietudes, a continuación, se comenta la manera en que está dispuesto el presente escrito, que atiende esta investigación, en el **Capítulo 1. Consideraciones Iniciales**, contempla los inicios motivacionales por los que esta investigación pasó para su consolidación, así también aborda como una aproximación a la problemática a través de un ejemplo clásico escolar, donde el método, sin más que añadir funcionalmente opera a través de usos algebraicos, se hace una revisión bibliográfica de libros de texto especializados en la materia **(EDP)** donde el **MSV** está presente aunado a

investigaciones científicas en torno a este objeto matemático, al final de este capítulo queda definido el problema de investigación, el objetivo general, y la pregunta de investigación, donde también, se muestra una hipótesis inicial, que acompaña el entendimiento del método visto matemáticamente. En el **Capítulo 2. Consideraciones Teóricas y Metodológicas**, se contemplan los constructos teóricos de la **T**eoría **S**ocioepistemológica de la **M**atemática **E**ducativa que, bajo su lente, permiten entender la génesis epistemológica del **MSV** por medio las herramientas metodológicas que esta postura brinda, la *problematización del saber matemático*, a través de la *historización* y *dialectización*, esta última por el método de **Cantoral et al. (2015)**; además dado el análisis hecho, se propone un esquema metodológico que permite atender a futuras investigaciones bajo el corte**:** *histórico-epistemológico*.

El **Capítulo 3. Una crítica a la Matemática Escolar de las Ecuaciones Diferenciales Parciales desde el discurso Matemático Escolar**; aborda un análisis-crítico a la **ME** desde el **dME** al *uso* de los conceptos básicos-iniciales **(**como la terminología que se emplea, su clasificación**:** de las EDP lineales y homogéneas de segundo orden, así como los diferentes tipos de condiciones a las cuales pueda estar sujeta la matematización de un fenómeno**)** de un curso de **EDP**, los cuales están centrados propiamente en la algebrización, por lo que se pretende que, desde esta crítica, se genere una reflexión **S***ocioepistemológica* al incluir a las *prácticas*, para así resaltar las argumentaciones que construyen los individuos y no específicamente en el objeto matemático que aprenden, este capítulo se incluye además con la finalidad de mostrar que el *Problema de la Cuerda Vibrante* atiende en su nomenclatura actual una EDP lineal y homogénea de segundo orden, y, aunque en el Siglo XVIII el *tratamiento matemático*[iii] de las EDP se encontraba *en ciernes*, específicamente, el conjunto de métodos analíticos desarrollados en el Siglo XVIII; derivado esto, es conveniente mostrar tales diferencias para comprender su evolución histórica y epistemológica de la notación y el *tratamiento matemático* empleado por D'Alembert, tal y como hoy día se conoce la *ecuación de onda* y por ende el objeto matemático de solución, el **MSV**.

En el **Capítulo 4.**, intitulado**: Un recorrido histórico-epistemológico asociado a la idea de propagación del sonido**, como parte del *análisis histórico* se muestra al lector el conjunto de circunstancias históricas y epistemológicas que desentrañan la *actividad matemática* desde la Edad Antigua **(**con la Civilización Griega**)**, al pasar por la Edad Media, el Renacimiento y la Revolución Científica, en suma relación a la evolución pragmática, de la posible *práctica de referencia*, la *Teoría Musical*, referidas propiamente dentro del *marco*

[iii] **tratamiento matemático:** En esta investigación este término se refiere sobre la manera en que es abordada una problemática a partir de las herramientas metodológicas que la Matemática de la época en cuestión proporciona, como, por ejemplo, la aritmetización, la algebrización, la geometrización, o técnicas del Cálculo, el Análisis Matemático o las Ecuaciones Diferenciales, dicho de otras palabras, la naturaleza que poseen los procedimientos empleados.

de referencia, la *Teoría de la Vibración*, y contextualizadas al conjunto de ideas sobre la propagación del sonido, al poderse consolidar todas estas ideas hacia finales del Siglo XVII y principios del Siglo XVIII con las famosas *Leyes de Mersenne*, epistemología *física* y *matemática* central y fundamental del *marco de referencia* al siglo posterior.

Así entonces, ya en el **Capítulo 5. El paradigma científico del Siglo XVIII: La matematización del movimiento y el surgimiento del Análisis Matemático**, ubicado en el contexto de la Matemática del Siglo XVIII, con Brook Taylor y Johann Bernoulli, quienes fueron los primeros en sentar las bases epistemológicas formales al *Problema de la Cuerda Vibrante*, con el aporte esencial de haber descubierto la forma inicial del *modo fundamental* de la cuerda vibrante, idea geométrica explotada posteriormente por D'Alembert, Euler y en consecuencia por Daniel Bernoulli, sobre la *forma inicial de la cuerda* así como la *expresión analítica* **(***función***)** que funcionalmente y geométricamente representara la *proximidad a la solución general*; años más tarde se sumó Lagrange a tal controversia.

Dentro de este capítulo se expone el *análisis dialéctico* de la obra matemática de Jean Le Rond D'Alembert, quien fue el primero en dar un modelo matemático al *Problema de la Cuerda Vibrante* y por ende una solución, el hincapié en analizar la *actividad matemática* del autor es precisamente en que es el primero además en emplear el **MSV**; al finalizar con el análisis dialéctico, se brinda una caracterización de acciones y actividades que permearon su producción matemática respecto al uso del método, lo que conlleva a poder configurar una posible hipótesis epistemológica derivada de todo el *análisis histórico-epistemológico* desarrollado en esta investigación.

Finalmente, el **Capítulo 6. Conclusiones de la Investigación**, se articula un análisis desde la **TSME** con base en la recolección de datos de esta investigación, se comentan una serie de reflexiones, así como la respuesta a la pregunta de investigación en relación a la hipótesis inicial y epistemológica propuesta, lo que conlleva a validar el cumplimiento finalmente del objetivo general planteado en este proyecto.

Con el **Capítulo 7. Prospectivas a Futuro**, se comentan futuras pautas para continuar con esta investigación, se piensan varias directrices que derivan de tópicos que fueron trastocados durante el análisis de los datos, una de ellas, es incidir y profundizar en la *problematización del saber matemático*, dentro del aula con docentes o estudiantes a través de un *diseño exploratorio*; donde en consecuencia es posible contemplar un **rediseño** a futuro del **d**iscurso **M**atemático **E**scolar de la **M**atemática **E**scolar de las **EDP**. Otra directriz en la investigación es, que al haber identificado *cantidades imaginarias*, en las soluciones del *Problema de la Cuerda Vibrante*, se piensa en la posibilidad de ahondar teóricamente sobre qué tipo de pensamiento es el que los matemáticos de esa época poseían al percatarse de que sus soluciones no estaban definidas sobre el eje real y por ende, la solución general al

Problema de la Cuerda Vibrante, pone su atención a ellas, para poder expresar mediante "*un cambio algebraico*" las cantidades imaginarias a cantidades reales, que forman.

Otra de ellas, que se comenta en el capítulo, es sobre las concepciones que tienen los estudiantes cuando abordan temas relacionados con el *marco de referencia*, la *Teoría de la Vibración,* donde el concepto fundamental, *onda*, involucra epistemologías físicas y matemáticas inherentes a él, como la *superposición*, la *amplitud*, la *longitud*, **(**por mencionar solo unos**)**; estas epistemologías surgen en problemas a través de *diferentes contextos de propagación*, como el agua, aire, tierra, o en otro caso la electricidad, etc. Finalmente, otra de las líneas de investigación que abre brecha este proyecto es buscar otros *marcos de referencia*, a los ya conocidos como el calor o la vibración, donde la *separación de variables*, pueda estar presente, una vez que hayan sido establecidas las condiciones físicas y matemáticas **"***generales***"** del **MSV**; lo que, por medio, del posicionamiento teórico adoptado, pueda enriquecer a futuro la construcción social en torno a este saber matemático.

Capítulo 1. Consideraciones Iniciales

El presente capítulo está subdividido por cuatro secciones; la primera de ella atiende a detallar las ***motivaciones*** que conllevan a realizar esta investigación, se muestra el proceso de reflexión a la cual fue sometida para su consolidación, se toma la postura como estudiante y como investigador en formación en el campo de la Matemática Educativa; en la ***aproximación a la problemática*** se expone a través de un ejemplo escolar en conjunto con el currículo de Nivel Superior **(**Universitario**)** de una carrera de *Ciencias* el *objeto matemático* que es de interés en la presente investigación. En la ***revisión de literatura*** contempla los contenidos de dos libros especializados que se emplean para su enseñanza lo que permite visualizar que el uso de este objeto no ahonda en detallar las características de su *funcionamiento matemático*, por lo que se evidencia que existe una desvinculación total con dotar de significado su funcionamiento, así también se hace una recapitulación sobre las investigaciones identificadas que conciernen al emplear el **MSV**. Al articular estas secciones se hace explícito el ***problema de investigación*** de este proyecto.

1.1 Motivaciones

"*La esencia de las matemáticas no es hacer las cosas simples complicadas, sino hacer las cosas complicadas simples*." – *Stan Gudder*

Una de las razones que conciernen el inicio de esta investigación, se remota a mis estudios de la Licenciatura en Ingeniería Matemática cursada en la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional **(**ESFM-IPN**)**, en ella, durante los 4 años **(**8 semestres**)** que dura la formación como ingeniero**(**a**)**, se pretende que el estudiante curse 5 semestres enfocados al *tronco común* **(**formación básica**)**, y a partir del sexto semestre puede enfocarse en una de las dos líneas de especialidad que oferta la Licenciatura, las cuales son de elección propia del estudiante, ya sea la línea Industrial o Financiera. Si bien, se contempla que dentro del currículo escolar de una escuela de *Ciencias Exactas* como es el caso de la ESFM-IPN el estudiante conozca gran parte del bagaje de la Matemática desde cursos elementales hasta los avanzados, es en la mayoría de ellos donde no se le permite *explorar* a fondo la Matemática ya que estos son limitados por la Matemática Escolar[1] **(ME)** y por ende en ellos se excluye su *funcionalidad* **(**es decir, *porqué funciona así***)**, ya que no contempla escenarios que resignifiquen el **C**onocimiento **M**atemático **(CM)** del estudiante.

Gran parte de esta desarticulación escolar y la forma en que ha prevalecido la enseñanza de la Matemática durante muchos años no es la excepción en la educación a Nivel Superior, al ser aquí donde pueden presenciarse más casos donde al estudiante no se le dota de suficientes *herramientas*, las cuales van desde las matemáticas, tecnológicas, éticas y hasta

[1] **Matemática Escolar**: Es un derivado de los procesos de transposición didáctica de la *Matemática* como campo científico que produce conocimiento matemático con criterios de verdad y lo desarrollan comunidades internacionales **(Reyes-Gasperini, 2016, p. 47).**

las de liderazgo, por mencionar algunas, ya que estas formarán parte del futuro en el que estará inmerso el estudiante cuando se encuentre en el sector productivo y ni hablar que derivado de la ausencia de estas, existen en numerosas estadísticas de deserción escolar.

Para ello, la presente investigación está centrada en un *objeto matemático* que subjetivamente está destinado a cambiar de alguna manera la percepción de como la Matemática no es simplemente la **"***receta matemática***"** o la **"***fórmula***"** para resolver problemas como comúnmente son tratados en escenarios escolares.

Pensar ahora en la *epistemología* que rodea a este objeto matemático, permite resignificar y rescatar aquellos elementos que componen y conllevan a estructurar una explicación en otros *contextos* como el *físico* ya que en consecuencia estos permean su *quehacer funcional* **(***uso algebraico***)** y ayudan a entender su epistemología e incluso identificar el *porqué* hasta hoy día su tratamiento matemático es común en problemas de la Física-Matemática.

Tras esto, y, como parte de haber sido estudiante de una escuela de *Ciencias*, los intereses se incrementaron al momento de explorar en su totalidad el contenido del currículo escolar de la Licenciatura; sin embargo, llega un momento en que estos intereses personales son focalizados y acotados. Por ejemplo, al terminar un semestre y conocer los cursos que debía llevar al término de este, acrecentaban mi *curiosidad* como estudiante, en lo particular siempre existió uno y que hasta la fecha forma parte de mis intereses de investigación como puede reflejarse en las líneas del presente escrito; este gusto se evidenciaba con tan solo leer el nombre de *Ecuaciones Diferenciales* **(ED)**.

La razón más inmediata fue, que, aunque desconocía su contenido, imaginaba que era enfrentarse a un *sinfín* de métodos algebraicos y/o geométricos propios de la teoría de ED, que permiten conocer a través de una serie de procesos *algo*; ese *algo* que lo denominé en su debido momento como estudiante por desconocimiento matemático propio del curso, era qué, así como en un curso de Álgebra, el objetivo primordial es enseñar a obtener *raíces* de una ecuación, o formalmente al referirse sobre un polinomio de *cierto grado*; aquí, se iba a tratar de encontrar una *función*, sí, una *función* de una ED por medio de todo el *background* de métodos analíticos clásicos conocidos en ED, aunque su quehacer no se restringe únicamente a *solucionar* ecuaciones, sino que, en un primer acercamiento su campo de acción de las ED es conocer la manera en *cómo se solucionan.*

Siempre han existido preguntas que surgen quizá no de forma inmediata, pero sí con el pasar del tiempo, las cuales se interiorizan y salen a flote en el momento menos esperado cuando se es estudiante y una de ellas fue preguntarme sobre el contenido del currículo

escolar de una carrera de *Ciencias*, la experiencia propia de haber pasado por una escuela de esa formación, de alguna manera las acrecienta, por ejemplo, conocer los contenidos del mismo, permite identificar que curricularmente hay un *conocimiento relativo* a las ED que está presente en carreras como Matemáticas, Física e Ingeniería.

Dicho lo anterior, se dice entonces, que curricularmente existen cursos en una carrera de Ciencias, que están presentes en los primeros semestres de formación; al conjunto de estos forman lo que se conoce como *tronco común*, ya que involucra a los primeros semestres de formación que el estudiante debe cursar **(**esto es visible en gran parte de los currículos escolares de las Licenciaturas**)**. Por otro lado, cabe aclarar que posteriormente al tronco común están dispuestos otros cursos, que son llamados *optativos*, lo que significa que son de *libre elección* por parte del estudiante, y que a futuro le permiten completar sus créditos escolares.

Ese *conocimiento relativo* identificado en el currículo **(**sea en el tronco común o en los cursos optativos**)** es parte del interés en esta investigación y ***yace en el campo de las ED*** las cuales se convierten en uno de los *pilares* más importantes de estudio en la formación de un estudiante de Ciencias e Ingeniería, esto es, por su *campo de aplicabilidad* para resolver problemas en el contexto de la vida real, donde para dar una interpretación a ellos, requieren de las herramientas matemáticas de las ED.

Tras esto, cabe destacar que el panorama curricular fue el que permitió tener una mejor incidencia sobre los intereses que recaen en esta investigación, al ser precisamente que durante mis estudios de Licenciatura, el currículo escolar, conllevó a que identificara que se deben llevar 3 cursos de Ecuaciones Diferenciales; pero, **¿***cuáles eran estos, y, en qué semestres se iban a abordar***?**, si bien, esta pregunta en un inicio puede ser respondida al momento de "explorar" la malla curricular donde están organizados los 8 semestres que dura la Licenciatura y en ella, en cada semestre se hacen explícitos los cursos a tomar; al observar que en el 3er y 4º semestre se incluye a las **E**cuaciones **D**iferenciales **O**rdinarias **[EDO]** y en el 5º semestre a las **E**cuaciones **D**iferenciales **P**arciales **[EDP]**.

Grosso modo se detallan los *2 de los 3 cursos de ED*[2] una vez que fueron llevados **(**al termino de explicar los primeros dos se continua con el tercero, pero se hace énfasis sobre el contenido que marca el **"**temario**"** mientras que en la aproximación a la problemática se comenta la experiencia de haber llevado este último**)**; el primero de ellos, en el 3**er** semestre

[EDO I] está destinado a que el estudiante conozca las definiciones y características básicas de las EDO, su campo de aplicabilidad, así como los primeros métodos de integración para EDO de primer orden, también incluye la matematización de modelos lineales en

[2] Para ver con detalle los **Planes de estudio** y **Unidades de Aprendizaje** de la *Licenciatura en Ingeniería Matemática* consulte la página: https://www.esfm.ipn.mx/unidades-aprendizaje.html

problemas como el crecimiento bacteriano, la edad de un fósil, el enfriamiento de un pastel que es sacado de un horno, e inclusive conocer la corriente de un circuito eléctrico que está dispuesto en serie, por mencionar algunos, así mismo para problemas no-lineales, los cuales involucran la matematización de la dinámica de una población a través de la ecuación logística o bien, conocer la reacción química de dos sustancias que son mezcladas; el curso incluye también hallar soluciones de EDO a través del operador de la Transformada de Laplace y finalmente concluye con calcular soluciones de EDO-lineales por medio de series de potencias.

Durante el 4º semestre **[EDO II]** se contempla que el estudiante conozca la *Teoría Cualitativa de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales* en sus diferentes tratamientos matemáticos, los casos cuando son homogéneas y no-homogéneas, con coeficientes constantes o variables, así como la matematización de sistemas físicos por medio de EDO-lineales de orden superior como el caso del movimiento libre amortiguado y no-amortiguado e inclusive cuando este sistema está sometido a un movimiento forzado, a su vez, contiene la teoría de sistemas de EDO-lineales de primer orden y los diferentes *métodos* para encontrar sus soluciones; el curso finaliza con conocer algunos métodos numéricos para *aproximar* soluciones de EDO, como el método de Euler, Euler-mejorado y el método de Runge-Kutta.

Hasta este momento, junto con la experiencia de haber pasado por dos cursos de EDO, se identificó que su *enseñanza* está centrada en *emplear métodos analíticos* para encontrar soluciones de una EDO, tal y como lo menciona **Rodríguez-Gallegos y Quiroz (2016)**: **"**Al día de hoy, la enseñanza usual de un curso de Ecuaciones Diferenciales **(**ED**)** se limita a una serie de procedimientos analíticos que dan respuesta a problemas matemáticos sin contexto**" (p. 101),** bajo esta postura cabe recalcar que al estar dotado de un dominio algebraico para solucionar ED, la enseñanza conlleva al estudiante a que desarrolle habilidades memorísticas, sin que le coadyuve a apropiarse de un aprendizaje significativo.

Revestido de todos esos *métodos analíticos* para resolver EDO, al estar ya inmerso en el 5° semestre en el curso de **EDP I**[3] de la Licenciatura, se logró identificar que dentro del aula **"**tradicional**"** la forma de enseñanza es la misma respecto en comparación a los cursos de ED antes mencionados; lo que posibilita hacer hincapié en primera instancia la diferencia entre las EDO y las EDP, y, que si bien, son dos campos de la Matemática completamente diferentes, en conjunto ambas áreas de la Matemática se complementan para que su *Teoría-Matemática* funcione.

[3] Cabe mencionar que, aunque se hace explícito **EDP I** [**I** como la manera *numérica* de aludir que hay un curso posterior como **EDP II**], el curso de **EDP II** se lleva una vez que el estudiante escoge una de las dos líneas de especialidad **(**que es a partir del 6º semestre**)** que oferta la Licenciatura, las cuales son Industrial y Financiera, y es en esta última que lleva un segundo curso de EDP, sin embargo, aclaro que mi especialidad es Industrial por lo que ese curso quedó cubierto y equiparado respecto a la otra especialidad en cuanto a créditos por un curso de Física III.

Bajo la trayectoria que avanza un curso de Matemáticas, y en específico el que se acaba de mencionar proveído de un *temario*, en un inicio se enseña al estudiante a que conozca las definiciones básicas y la terminología de una EDP, la clasificación de las EDP; al igual que las primeras técnicas de integración para EDP, seguido de esto, las principales ecuaciones que se presentan comúnmente en la *Física-Matemática* e *Ingeniería*.

Posteriormente el *temario* indica continuar con la aplicación de los elementos matemáticos necesarios para obtener soluciones de EDP mediante el Análisis de Fourier, con el empleo de la Serie de Fourier que, de esta deriva, el estudio de su convergencia, ortogonalidad y cálculo de sus coeficientes, así como incluir las características y representación de las Series de Fourier de senos y cosenos, al mismo tiempo se procede a conocer la forma compleja de la Serie de Fourier.

Al seguir con la ruta que marca el *temario*; una vez que se adentra al estudio de las EDP más representativas como la de calor, de onda y de Laplace, justamente se enseña un ***método analítico*** conocido y que en gran medida *se convierte y es* uno de los ***ejes*** sobre el cual un curso de EDP gira y tiene su esencia; este, permite solucionar un cierto tipo de EDP **(**más adelante esto es detallado**)** junto con las condiciones a las cuales esté sujeta la ecuación, una vez que se conoce su tratamiento da cabida a resolver problemas con valores en la frontera al aplicar la Teoría de Sturm-Liouville **(**por lo regular *este* curso de **EDP I** culmina con estos temas**)**.

En la literatura matemática se le conoce como **Método de Separación de Variables [MSV]** el cual funciona en la mayoría de los casos para EDP-lineales-homogéneas de segundo orden. De ***forma general***, cabe pensar entonces, que conocer la manera en que funciona un objeto matemático y en específico al hablar de algún *método* que solucione un determinado problema, radica en que este solo se limita a que el estudiante ponga en práctica las *habilidades* y/o *estrategias* matemáticas-cognitivas que *conozca* y *use* **(**aritméticas, algebraicas, geométricas, etc.**)** para dar respuesta.

Sin embargo, al considerar únicamente el contexto antes mencionado sobre la manera en que es empleado, es decir, que su *uso* es *algebraico*, escatima escenarios que le son importantes y que le ayudarían a significar al estudiante un conocimiento matemático más robusto, como el entender que, a través de su *epistemología* al recabar aspectos *históricos* **(**donde inherentemente surgen elementos *socio-culturales* que permean su producción y difusión**)** que están implicados y entrelazados sobre el *quehacer matemático* que sustenta al objeto matemático permite entender el carácter funcional del **MSV**, al incidir sobre las *prácticas* que emergen de la época en la que imperó la utilización del método y propiamente por el consenso matemático de la comunidad científica **(**estos intereses emergieron al

momento de emprender los estudios de formación como investigador en Matemática Educativa**)**.

Este método, al conocerlo *como funciona matemáticamente*, permitió abrir brechas y nuevas perspectivas sobre los intereses en que se enmarcan esta investigación, primero que como estudiante en su momento estaban limitadas al sostener y aceptar solo su *uso algebraico* para resolver problemas de las EDP, sin embargo, al pasar el tiempo surgieron nuevas e interesantes reflexiones en torno a él, como esa forma "tan peculiar" de operar algebraicamente, y que si bien, esas ideas se encontraban *en ciernes*, maduraron cuando se limitaron dos momentos precisos**:**

El primer momento, pensar en la *naturaleza Matemática del método*, que conlleva a poseer una visión *histórica de sus orígenes* y preguntar**: ¿***por qué se puede suponer que la solución es de la forma*** $\boldsymbol{X(x)\cdot T(t)}$**?** ***El segundo momento***, ahonda sobre el cuestionar alrededor de las características y/o elementos matemáticos que permiten **"***separar variables***"**. Dilucidar estas *dudas*, se convierten en el parteaguas que dará componentes significativos para entender el *funcionamiento* del **MSV** en **EDP**; de manera **"**formal**"** estos dos momentos son consolidados como el *problema de investigación* que se detalla en la **sección 1.4**.

Si bien, la mayoría de veces un único curso de EDP, como muchos otros de la Matemática en cualquier nivel, no bastan para poder dar respuesta a todas aquellas interrogantes que el estudiante pueda tener en mente respecto a algunos temas, esto es por múltiples factores que se presentan en el discurso Matemático Escolar **(**más adelante se definirá este concepto teórico de la Matemática Educativa**)**, por la existencia de que los tiempos de enseñanza son limitados **(**calendarizados**)** para cubrir los *planes y programas de estudio* respecto a los cursos y al tener presencia este tipo de cuestionamientos dan cabida a quedar en el olvido.

Es por ello que las reflexiones descritas anteriormente se terminaron de consolidar al momento de ingresar al programa de *Maestría en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa, en el Departamento de Matemática Educativa del Instituto Politécnico Nacional, en el área de Educación Superior*. Ya inmerso en la formación como investigador, sabía que esos intereses e inquietudes respecto a este tema de interés debían ser puestos en juego al estudiar a fondo la *epistemología matemática* del método, la cual puede ser desentrañada al considerar aspectos de ***construcción social*** desde la visión de la **T***eoría* **S***ocioepistemológica de la* **M***atemática* **E***ducativa* **(TSME)**. Esta postura teórica concede el reflexionar por cuestionamientos que no surgen solo de la **ME** dentro de un aula, sino también por los diversos escenarios de carácter social y cultural que influyen en el aprendizaje de la Matemática de un individuo, al contemplar otros ámbitos de interacción de la vida real.

1.2 Una aproximación a la problemática

> "*Para aquellos que no conocen las matemáticas, es difícil sentir la belleza de la naturaleza. Si quieres apreciarla, es necesario aprender el lenguaje en el que habla.*" — *Richard Feynman*

Una vez hecha explícita la *motivación* que concierne la presente investigación, y aunado a los intereses en el campo de las *Ecuaciones Diferenciales*; se ha identificado que el *objeto matemático*[4] **(**Cantoral (2019) lo define como**:** el objeto físico o material, aquello susceptible de "manipulación" **[…]** cuya naturaleza es abstracta **(p. 148))** que es parte del estudio de las *Ecuaciones Diferenciales Parciales*, es un ***método clásico*** para resolver *EDP-lineales-homogéneas de segundo orden* llamado ***Método de Separación de Variables*** **[MSV]**.

Las EDP al estar presentes en la currícula de una carrera de Física, Matemáticas e Ingeniería se detecta su *importancia* por tratarse de una de las áreas de la *Matemática* que aborda con éxito la matematización de fenómenos de la Naturaleza ya que en ellos se ven involucradas dos o más variables independientes **(**esta es la primera característica peculiar sobre la manera en que se identifica que el fenómeno está matematizado por una EDP**)**, y que, así como las EDO, las EDP tienen su propia teoría y, por ende, sus métodos de solución.

Al inicio del curso de EDP I que se llevó en el 5º semestre, el docente brindó los primeros conceptos básicos, características y clasificación de este tipo de ecuaciones, simultáneamente su objeto de estudio y algunas de sus aplicaciones en el campo de la Física e Ingeniería. En cuanto a las primeras **"***técnicas algebraicas***"** que fueron vistas, radicaron al principio con comprobar por *derivación parcial* soluciones de EDP.

Seguido de esto, técnicas de integración directa, para después adentrar a conocer y emplear un método analítico particular que resuelve EDP, este es el **MSV** el cual se aplicó a un *sinnúmero* de EDP **(**evidentemente escogidas por el docente para que el *método opere***)**, aunque también se rescata en esta enseñanza la característica prominente y es que *admite suponer* una solución en forma de producto de dos funciones las cuales son independientes respecto de sus variables, sin dejar por esclarecido si para todo tipo de EDP el método funciona y porqué el método supone una solución de esa forma, de ahí, el salto de este tema

a la continuación de la trayectoria del curso es que continuó con enseñar la manera en que se calcula la Serie de Fourier de funciones, y se culminó con su representación compleja.

Observación: La descripción hecha anteriormente sobre la manera en que inició el curso y siguió su cauce es dada por la **experiencia personal** al cursar **EDP I**, este fue estructurado de tal manera por el docente y difiere considerablemente sobre cómo está dispuesto a seguir el programa de **EDP I**.

---

[4] Para más detalles vea Cantoral **(**2019**)**, Capítulo V: Predicción, determinística y no determinística, $\mathscr{p}^*$.

A continuación, para entrar en detalle sobre este método se pide resolver por medio de *separación de variables* la siguiente EDP[5] donde por medio de la cual podrá verse que el método ─ opera de manera estructurada ─ para reducir el problema original a un sistema de EDO.

Resuelva la EDP dada por el **MSV:**

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2};\ a^2-\textbf{es una constante}\ \cdots[i]$$

Solución: *Suponga* que existe una solución de la forma $u(x,t)=X(x)\cdot T(t)$, donde $X(x)$ y $T(t)$ son *funciones independientes* respecto a sus variables.

Para aplicar el **MSV** primero, se prosigue a calcular las *derivadas parciales*[6] hasta $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ & $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ para $u(x,t)=X(x)\cdot T(t)$ respectivamente.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}[X(x)T(t)]=\left.\frac{d[X(x)]}{dx}\right|_{T(t)=cte}=T(t)X'(x)\therefore\frac{\partial u}{\partial x}=T(t)X'(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}[X(x)T(t)]=\left.\frac{d[T(t)]}{dt}\right|_{X(x)=cte}=X(x)T'(t)\therefore\frac{\partial u}{\partial t}=X(x)T'(t)$$

Una vez que se calcularon las primeras derivadas parciales se encuentran las segundas derivadas parciales, como se muestra a continuación**:**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]=\frac{\partial}{\partial x}[T(t)X'(x)]=\left.\frac{d[X'(x)]}{dx}\right|_{T(t)=cte}=T(t)X''(x)\therefore\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=T(t)X''(x)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]=\frac{\partial}{\partial t}[X(x)T'(t)]=\left.\frac{d[T'(t)]}{dt}\right|_{X(x)=cte}=X(x)T''(t)\therefore\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=X(x)T''(t)$$

Una vez que se han encontrado las segundas derivadas parciales respecto a x y t, se sustituyen en la EDP original **[*i*]**, de la siguiente manera**:**

$$a^2T(t)X''(x)=X(x)T''(t)$$

De esta última expresión se *separan las variables*, de la siguiente forma**:**

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T''(t)}{T(t)}\cdots[ii]$$

---

[5] Este ejemplo fue tomado de la página 510 del libro de texto de Zill y Wright **(**2012**)**.

[6] Sea $z=f(x,y)$ una función continua de dos variables reales, se define la derivada parcial de z respecto a x & respecto a y como: $\frac{\partial z}{\partial x}:=\left.\frac{dz}{dx}\right|_{y=cte}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}:=\left.\frac{dz}{dy}\right|_{x=cte}$

Para que la expresión $[\boldsymbol{ii}]$ sea válida, esta, debe ser igualada a una *constante de separación* que se denotará por $-\lambda$[7]; así, la expresión queda como**:**

$$\frac{\boldsymbol{\mathcal{X}''(x)}}{\boldsymbol{\mathcal{X}(x)}} = \frac{\boldsymbol{\mathcal{T}''(t)}}{\boldsymbol{a^2\mathcal{T}(t)}} = -\boldsymbol{\lambda}$$

Se iguala cada término de la expresión con la constante de separación, de la siguiente forma**:**

$$\begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{\mathcal{X}''(x)}}{\boldsymbol{\mathcal{X}(x)}} = -\boldsymbol{\lambda} \\ \dfrac{\boldsymbol{\mathcal{T}''(t)}}{\boldsymbol{a^2\mathcal{T}(t)}} = -\boldsymbol{\lambda} \end{cases}$$

Se simplifican las dos expresiones anteriores, para lo cual, se llevan hasta su *mínima expresión***:**

$$[\boldsymbol{iii}] \cdots \begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{X}''(x) = -\lambda\mathcal{X}(x) \Rightarrow\ \mathcal{X}''(x) + \lambda\mathcal{X}(x) = 0} \\ \boldsymbol{\mathcal{T}''(t) = -\lambda a^2\mathcal{T}(t) \Rightarrow\ \mathcal{T}''(t) + \lambda a^2\mathcal{T}(t) = 0} \end{cases}$$

Se puede observar que en $[\boldsymbol{iii}]$ resultaron dos *EDO-lineales-homogéneas con coeficientes constantes* por resolver; como $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$**,** la *constante de separación* puede adoptar cualquiera de los siguientes tres casos**:**

a) $\boldsymbol{\lambda = 0}$
b) $\boldsymbol{\lambda < 0 \Rightarrow \lambda = -\alpha^2\ con\ \alpha} \in \mathbb{R}$
c) $\boldsymbol{\lambda > 0 \Rightarrow \lambda = \alpha^2\ con\ \alpha} \in \mathbb{R}$

Una vez que se identificaron los casos que puede tomar la *constante de separación*, las EDO obtenidas en la expresión $[\boldsymbol{iii}]$ se transforman de la siguiente manera**:**

$$[\boldsymbol{iv}] \cdots \begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{X}''(x) = 0} \\ \boldsymbol{\mathcal{X}''(x) - \alpha^2\mathcal{X}(x) = 0} \\ \boldsymbol{\mathcal{X}''(x) + \alpha^2\mathcal{X}(x) = 0} \end{cases}$$

y

$$[\boldsymbol{iv}] \cdots \begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{T}''(t) = 0} \\ \boldsymbol{\mathcal{T}''(t) - \alpha^2 a^2\mathcal{T}(t) = 0} \\ \boldsymbol{\mathcal{T}''(t) + \alpha^2 a^2\mathcal{T}(t) = 0} \end{cases}$$

Antes de que se prosiga a resolverlas, se *omite la dependencia funcional* de cada una de las ecuaciones en $[\boldsymbol{iv}]$, esto se hace en la mayoría de los casos para evitar caer en ambigüedades algebraicas; así entonces las EDO en $[\boldsymbol{iv}]$ quedan como se muestra a continuación**:**

[7] $-\lambda$ **(**léase como **menos lambda)** se llama ***constante de separación***. La expresión se iguala a una constante como la única manera de que ambos miembros hagan válida la igualdad.

$$[iv] \cdots \begin{cases} X'' = 0 \\ X'' - \alpha^2 X = 0 \\ X'' + \alpha^2 X = 0 \end{cases}$$

y

$$[iv] \cdots \begin{cases} T'' = 0 \\ T'' - \alpha^2 a^2 T = 0 \\ T'' + \alpha^2 a^2 T = 0 \end{cases}$$

Obteniéndose los siguientes tres sistemas de EDO**:**

Caso $\lambda = 0$	$\begin{cases} X'' = 0 \\ T'' = 0 \end{cases}$
Caso $\lambda < 0 \Rightarrow \lambda = -\alpha^2 \; con \; \alpha \in \mathbb{R}$	$\begin{cases} X'' - \alpha^2 X = 0 \\ T'' - \alpha^2 a^2 T = 0 \end{cases}$
Caso $\lambda > 0 \Rightarrow \lambda = \alpha^2 \; con \; \alpha \in \mathbb{R}$	$\begin{cases} X'' + \alpha^2 X = 0 \\ T'' + \alpha^2 a^2 T = 0 \end{cases}$

Para el caso en el que $\lambda = 0$, las soluciones que conllevan las EDO en $[iv]$ son**:**

$$X'' = 0 \equiv \frac{d^2 X}{dx^2} = 0$$

La ED anterior se resuelve por *integración directa* **[**dos veces**]** por tratarse de una EDO-lineal homogénea de orden dos, de la siguiente manera**:**

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = 0 = \frac{d}{dx}\left(\frac{dX}{dx}\right) = 0 \Leftrightarrow \int d\left(\frac{dX}{dx}\right) = \int 0 \cdot dx \Rightarrow \frac{dX}{dx} = c_1 \Rightarrow X(x) = c_1 x + c_2$$

Para el caso de $T'' = 0$ se integra de la manera en que se efectúo anteriormente**:**

$$\frac{d^2 T}{dt^2} = 0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{dt}\right) = 0 \Leftrightarrow \int d\left(\frac{dT}{dt}\right) = \int 0 \cdot dt \Rightarrow \frac{dT}{dt} = c_3 \Rightarrow T(t) = c_3 t + c_4$$

Una vez halladas las funciones $X(x)$ y $T(t)$ para el caso cuando $\lambda = 0$, se continua a *formar* la solución de la EDP**:**

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t) = (c_1 x + c_2)(c_3 t + c_4)$$

y, al simplificar los términos**:**

$$u(x,t) = c_1 c_3 xt + c_1 c_4 x + c_2 c_3 t + c_2 c_4$$

de esta última expresión se renombran las constantes como**:**

$$A_1 = c_1 c_3; A_2 = c_1 c_4; A_3 = c_2 c_3; A_4 = c_2 c_4$$

Así entonces la *solución* para el caso $\boldsymbol{\lambda = 0}$ queda como**:**

$$\boldsymbol{u(x,t) = \mathcal{A}_1 xt + \mathcal{A}_2 x + \mathcal{A}_3 t + \mathcal{A}_4}$$

Para el caso $\boldsymbol{\lambda < 0 \Rightarrow \lambda = -\alpha^2}$ $\boldsymbol{con\ \alpha} \in \mathbb{R}$, las soluciones que conllevan las EDO en [$\boldsymbol{iv}$] para**:**

$$\boldsymbol{X'' - \alpha^2 X = 0}$$

recurren a la *Teoría Cualitativa de EDO-lineales-homogéneas con coeficientes constantes*, ya que no es posible resolverla por medio de cuadraturas **(**integración**)** directas.

Para ello, primero se prosigue a escribir la *ecuación auxiliar* **(**en la Literatura Matemática también se le conoce como ***ecuación característica*** o ***ecuación asociada*****)** asociada a la EDO**:**

$$\boldsymbol{k^2 - \alpha^2 = 0}$$

la ecuación anterior es algebraica de grado dos, cuyas raíces son**:**

$$\boldsymbol{k^2 = \alpha^2 \Rightarrow k = \pm\sqrt{\alpha^2} \Rightarrow k_{1,2} = \pm\alpha}$$

Así, la solución para $\boldsymbol{X(x)}$ está dada por**:**

$$\boldsymbol{X(x) = c_5 e^{k_1 x} + c_6 e^{k_2 x} = c_5 e^{\alpha x} + c_6 e^{-\alpha x}}$$

si se reescribe la solución anterior por medio de funciones hiperbólicas **(**recuerde que $\boldsymbol{senh(u) = \frac{e^u - e^{-u}}{2}}$ y $\boldsymbol{cosh(u) = \frac{e^u + e^{-u}}{2}}$ y por transformaciones algebraicas es posible despejar a $\boldsymbol{e^u}$ y $\boldsymbol{e^{-u}}$**)**, por lo que $\boldsymbol{X(x)}$ queda expresada como**:**

$$\boldsymbol{X(x) = c_5[cosh(\alpha x) + senh(\alpha x)] + c_6[cosh(\alpha x) - senh(\alpha x)]}$$

la cual resulta que**:**

$$\boldsymbol{X(x) = c_5 cosh(\alpha x) + c_5 senh(\alpha x) + c_6 cosh(\alpha x) - c_6 senh(\alpha x)}$$

y al factorizar términos comunes**:**

$$\boldsymbol{X(x) = [cosh(\alpha x)][c_5 + c_6] + [senh(\alpha x)][c_5 - c_6]}$$

Si se reescriben las constantes como**:** $\boldsymbol{\mathcal{A}_5 = c_5 + c_6}$ & $\boldsymbol{\mathcal{A}_6 = c_5 - c_6}$ [se continúa con la secuencia de indización de las constantes $\boldsymbol{\mathcal{A}_i}$]; entonces la solución $\boldsymbol{X(x)}$ queda escrita como**:**

$$\boldsymbol{X(x) = \mathcal{A}_5 cosh(\alpha x) + \mathcal{A}_6 senh(\alpha x)}$$

Una vez encontrada la solución $\boldsymbol{X(x)}$, se prosigue del mismo modo para encontrar la

solución $\mathcal{T}(t)$**:**

$$\mathcal{T}''-\alpha^2 a^2\mathcal{T}=0$$

De la ecuación anterior se escribe su *ecuación auxiliar* asociada a la EDO**:**

$$k^2-\alpha^2 a^2=0$$

la ecuación algebraica anterior es de grado dos, cuyas raíces son**:**

$$k^2=\alpha^2 a^2 \Rightarrow k=\pm\sqrt{\alpha^2 a^2} \Rightarrow k_{1,2}=\pm\alpha a$$

Así, la solución para $\mathcal{T}(t)$ está dada por**:**

$$\mathcal{T}(t)=c_7 e^{k_1 t}+c_8 e^{k_2 t}=c_7 e^{\alpha a t}+c_8 e^{-\alpha a t}$$

y al reescribir la expresión anterior por funciones hiperbólicas, $\mathcal{T}(t)$ queda como**:**

$$\mathcal{T}(t)=c_7[cosh(\alpha a t)+senh(\alpha a t)]+c_8[cosh(\alpha a t)-senh(\alpha a t)]$$

la cual queda como**:**

$$\mathcal{T}(t)=c_7 cosh(\alpha a t)+c_7 senh(\alpha a t)+c_8 cosh(\alpha a t)-c_8 senh(\alpha a t)$$

y al factorizar términos comunes**:**

$$\mathcal{T}(t)=[cosh(\alpha a t)][c_7+c_8]+[senh(\alpha a t)][c_7-c_8]$$

se renombran las constantes como**:**

$$\mathcal{A}_7=c_7+c_8;\ \mathcal{A}_8=c_7-c_8$$

finalmente, la solución $\mathcal{T}(t)$ queda como**:**

$$\mathcal{T}(t)=\mathcal{A}_7 cosh(\alpha a t)+\mathcal{A}_8 senh(\alpha a t)$$

Una vez que se han hallado las funciones $\mathcal{X}(x)$ y $\mathcal{T}(t)$ para el caso en el que $\lambda<0$, se *forma* la solución de la EDP**:**

$$u(x,t)=\mathcal{X}(x)\cdot\mathcal{T}(t)=[\mathcal{A}_5 cosh(\alpha x)+\mathcal{A}_6 senh(\alpha x)][\mathcal{A}_7 cosh(\alpha a t)+\mathcal{A}_8 senh(\alpha a t)]$$

Para el caso $\lambda>0 \Rightarrow \lambda=\alpha^2\ con\ \alpha\in\mathbb{R}$, las soluciones que conllevan las EDO en $[iv]$ para**:**

$$\mathcal{X}''+\alpha^2\mathcal{X}=0$$

tienen que recurrir a la *Teoría Cualitativa de EDO-lineales-homogéneas con coeficientes constantes*, ya que no es posible resolverla por medio de cuadraturas directas como en el caso anterior.

Para ello es necesario emplear la *ecuación auxiliar* asociada a la EDO**:**

$$\boldsymbol{k^2 + \alpha^2 = 0}$$

la ecuación anterior es algebraica de grado dos, cuyas raíces son**:**

$$\boldsymbol{k^2 = -\alpha^2 \Rightarrow k = \pm\sqrt{-\alpha^2} \Rightarrow k_{1,2} = \pm \alpha i}$$

se puede observar que $\boldsymbol{k_1}$ y $\boldsymbol{k_2}$ son raíces complejas conjugadas.

Por lo que la solución para $\boldsymbol{X(x)}$ está dada por $\boldsymbol{X(x) = c_9 e^{k_1 x} + c_{10} e^{k_2 x}}$ de tal forma que**:**

$$\boldsymbol{X(x) = c_9 e^{\alpha i x} + c_{10} e^{-\alpha i x} = c_9 e^{(0+\alpha i)x} + c_{10} e^{(0-\alpha i)x}}$$

la solución $\boldsymbol{X(x)}$ *es compleja*, pero el interés radica en expresar la solución con *funciones reales*, por lo que, a través de la teoría de las *EDO-lineales-homogéneas* admite formar su *solución real*, y para tal caso, queda como**:**

$$\boldsymbol{X(x) = e^{0 \cdot x}[c_9 cos(\alpha x) + c_{10} sen(\alpha x)]}$$
$$\boldsymbol{X(x) = 1 \cdot [c_9 cos(\alpha x) + c_{10} sen(\alpha x)]}$$
$$\boldsymbol{X(x) = c_9 cos(\alpha x) + c_{10} sen(\alpha x)}$$

Asimismo, una vez encontrada la solución $\boldsymbol{X(x)}$ se prosigue para la solución $\boldsymbol{T(t)}$**:**

$$\boldsymbol{T'' + \alpha^2 a^2 T = 0}$$

De la ecuación anterior se escribe la *ecuación auxiliar* asociada a la EDO**:**

$$\boldsymbol{k^2 + \alpha^2 a^2 = 0}$$

la ecuación es algebraica de grado dos, cuyas raíces son**:**

$$\boldsymbol{k^2 = -\alpha^2 a^2 \Rightarrow k = \pm\sqrt{-\alpha^2 a^2} \Rightarrow k_{1,2} = \pm \alpha a i}$$

se observa que $\boldsymbol{k_1}$ y $\boldsymbol{k_2}$ son raíces complejas conjugadas, por lo que la solución para $\boldsymbol{T(t)}$ está dada por $\boldsymbol{T(t) = c_{11} e^{k_1 t} + c_{12} e^{k_2 t}}$, al sustituir las raíces adopta la forma**:**

$$\boldsymbol{T(t) = c_{11} e^{\alpha a i t} + c_{12} e^{-\alpha a i t} = c_{11} e^{(0+\alpha a i)t} + c_{12} e^{(0-\alpha a i)t}}$$

la solución $\boldsymbol{T(t)}$ es *compleja*, sin embargo, como se mencionó con anterioridad el interés se centra en expresar una solución *real de funciones*, para ello, la teoría de las *EDO-lineales-homogéneas* permite escribir dicha solución real, y para este caso, queda como**:**

$$\boldsymbol{T(t) = e^{0 \cdot t}[c_{11} cos(\alpha a t) + c_{12} sen(\alpha a t)]}$$
$$\boldsymbol{T(t) = 1 \cdot [c_{11} cos(\alpha a t) + c_{12} sen(\alpha a t)]}$$

$$\mathcal{T}(t) = c_{11}cos(\alpha a t) + c_{12}sen(\alpha a t)$$

Una vez que se encontraron las funciones $\mathcal{X}(x)$ y $\mathcal{T}(t)$ para el caso en el que $\lambda > 0$, se *forma* la solución de la EDP**:**

$$u(x,t) = \mathcal{X}(x)\mathcal{T}(t) = [c_9 cos(\alpha x) + c_{10}sen(\alpha x)][c_{11}cos(\alpha a t) + c_{12}sen(\alpha a t)]$$

El siguiente método tabular, ayuda a visualizar el producto de los términos que componen a $\mathcal{X}(x)$ y $\mathcal{T}(t)$ respectivamente; en la primera columna están dispuestos los *sumandos* de la función $\mathcal{X}(x)$ y en la primera fila los *sumandos* de la función $\mathcal{T}(t)$**:**

×	$c_{11}cos(\alpha a t)$	$c_{12}sen(\alpha a t)$
$c_9 cos(\alpha x)$	$c_9 c_{11} cos(\alpha x) cos(\alpha a t)$	$c_9 c_{12} cos(\alpha x) sen(\alpha a t)$
$c_{10} sen(\alpha x)$	$c_{10} c_{11} sen(\alpha x) cos(\alpha a t)$	$c_{10} c_{12} sen(\alpha x) sen(\alpha a t)$

Las constantes indicadas por el producto $c_i c_j$ son reescritas como sigue la indización $\mathcal{A}_i$**:**

$$\mathcal{A}_9 = c_9 c_{11};\ \mathcal{A}_{10} = c_9 c_{12};\ \mathcal{A}_{11} = c_{10} c_{11};\ \mathcal{A}_{12} = c_{10} c_{12}$$

Finalmente se forma la solución $\mathcal{X}(x) \cdot \mathcal{T}(t)$**:**

$$u(x,t) = \mathcal{X}(x) \cdot \mathcal{T}(t) = \mathcal{A}_9 cos(\alpha x) cos(\alpha a t) + \mathcal{A}_{10} cos(\alpha x) sen(\alpha a t) + \mathcal{A}_{11} sen(\alpha x) cos(\alpha a t) + \mathcal{A}_{12} sen(\alpha x) sen(\alpha a t)$$

Como se aprecia, el ***Método de Separación de Variables***, involucra Conocimiento Matemático de otras áreas de la Matemática como Teoría de Ecuaciones Algebraicas, Cálculo Diferencial e Integral, Cálculo en varias variables reales, Álgebra Lineal, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Variable Compleja. Para el empleo del **MSV**, es necesario que el estudiante tenga conocimientos matemáticos de estas áreas para dar solución a algún problema que involucre a este *objeto matemático*.

Hasta el momento, como se ha mostrado durante el desarrollo de la aproximación a la problemática, el *funcionamiento* del *objeto matemático*, se centra en una enseñanza dotada del enfoque algebraico puro, pero sin contexto, al usarse como un *método convencional* para resolver **EDP**. Por otro lado, se identifica que cualquier interpretación geométrica que se le pueda dar a la solución es soslayada, sin que esto último afirme que sea excluida en su enseñanza.

Tras esto, y como una manera de evidenciar la existencia de la *costumbre didáctica* que prevalece en la enseñanza del método y sin que se ahonde más en ella, las inquietudes que atañe esta investigación es sobre el mismo *funcionamiento* del método, las características que este posee sin que sean tratadas en el aula; debido a que en su enseñanza, así como en los libros de texto que se utilizan, no contemplan ni profundizan en escenarios de *corte histórico* y *epistemológico* en torno al método y que al estar dentro de las currículas de las

escuelas de Ciencias e Ingeniería se privilegia el tratamiento abstracto **(**lógico-formal**)** sin dotar al estudiante a adquirir un significado.

El hecho que ya se ha mostrado sobre la existencia de un conocimiento relativo a las **ED** en los campos disciplinares ya mencionados y al momento de resolver un problema específico que involucre el empleo del **MSV**, ayuda a conferir tres posturas que puede adoptar el método **(**esto obedece a los intereses de cada disciplina**):**

[1] que busca la existencia y unicidad de soluciones particulares de la EDP **(***Campo de acción***:** *Matemáticas***)**.

[2] que su procedimiento sale a *la postre* para dar respuesta e interpretación por medio de las condiciones a las que esté sujeto el fenómeno; este el caso central de la *Física-Matemática* **(***Campo de acción***:** *Física***)**.

[3] dado que el método es transversal respecto a varias disciplinas de *conocimiento aplicado* su *uso algebraico* contribuye una vez que es hallada la solución, poderla expresar por medio de la Serie de Fourier **(***Campo de acción***:** *Ingeniería***)**.

Al tener como objeto de estudio el **MSV** que se detalla en el presente escrito y al haber identificado que existe una transversalidad de un conocimiento matemático relativo **(**ya antes descrito**)** alrededor de este método que está presente en las currículas de Ciencias e Ingeniería por consiguiente en la **ME**, se esclarece la existencia de la mutua relación e interacción entre disciplinas como la Física, las Matemáticas y la Ingeniería, autores como **Heck y Van Buuren (2019)** llaman que las Matemáticas son el lenguaje de la Física. Ahora bien, al no solo considerar la única concepción de vínculo que existe la *Física* con la *Matemática*, pone en manifiesto que las necesidades de explicar lo que acontece en el *mundo natural* estrechan su quehacer de la *Matemática* con la *Ingeniería*, así como, la *Ingeniería* con la *Física*.

El camino que estas áreas de conocimiento toman, en un principio pueden verse completamente ajenos o desvinculados los unos a los otros sobre su propia esencia de ser **(**contextos**)**, no obstante, al final de este se encuentran para cumplir una función específica, más allá de solucionar un *problema* su rol es que evidencian científicamente resultados por medio de la compartición de *objetos matemáticos*, es por ello que esta investigación apunta a señalar que estas forman una *triangulación disciplinar intersecada* **(Véase *Ilustración* 1.)**. En esta triangulación se aclara que un área de conocimiento no permuta una a la otra, es decir, no son reemplazadas entre sí, por ejemplo, la Ingeniería a la Física, o la Física a la Matemática, no, sino que el objetivo final **(**su *intersección***)** es crear *conocimiento científico* que satisfaga las necesidades del mundo real.

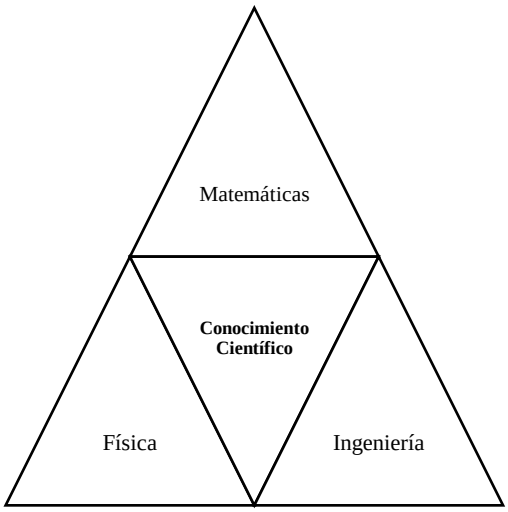


***Ilustración* 1.** *Triangulación disciplinar intersecada.* **Fuente: Elaboración propia**

Como se ha escrito globalmente, *los* ir y venir de estas áreas de conocimiento emergen por esta compartición de objetos matemáticos, y para intereses centrales de este escrito es que, aunque aparece de forma transversal el **MSV** en los currículos escolares de Física, Matemáticas e Ingeniería en el Nivel Superior; se toma el caso particular de una de las universidades públicas de México, la ESFM-IPN del curso de Ecuaciones Diferenciales Parciales I de la Licenciatura en Ingeniería Matemática, en este curso **(**también entiéndase como materia y/o asignatura**)** se enfatiza que existe una desvinculación de los temas sobre la manera en que están dispuestos para su enseñanza. Para ello, se presenta la siguiente subsección destinada a mostrar lo que la Institución llama *unidad de aprendizaje* los contenidos que esta posee, o también dicho los *temas* a cubrir.

1.2.1 La unidad de aprendizaje de EDP I

> "*La escuela no cambia por decreto. Puede modificarse la estructura, el currículum, los itinerarios, pero no se transforma la actitud ni se mejora la capacidad educativa.*" *— Miguel Ángel Santos Guerra*

En general la enseñanza de la Matemática en el Nivel Superior ha sido hasta hoy día "*tradicional*", lo que quiere decir que los principales actores **(**profesor, alumno, saber**)** en el proceso educativo relucen al intervenir en situaciones áulicas. Los roles de estos actores en el aprendizaje deben permanecer activos entre sí mediados por el discurso escolar y otros contextos que no son dados dentro del aula escolar.

Montiel (2005) hace mención sobre este tipo de eventualidades que surgen en el discurso escolar *al citar la obra* de Brosseau **(**1986**)** conocida como la *Teoría de Situaciones Didácticas*, donde por medio de ella la concepción de cómo se explicaban los fenómenos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas hasta ese entonces cambiaría gracias a los fundamentos plasmados en ella; por su parte en **Reséndiz (2010)** se puede encontrar *su* punto

de vista acerca de esta teoría, el cual lo resume que en ella se engloba al conjunto de relaciones expresadas en el salón de clase entre el docente, los alumnos y el conocimiento; asimismo pretende modelar y contrastar empíricamente los fenómenos didácticos que surgen en el ámbito escolar.

Como expresa **Montiel (2005)**:

> **[…]** la problemática de investigación en Matemática Educativa es definida por los fenómenos didácticos que se presentan regularmente en los estudiantes tras haber tenido un acercamiento al conocimiento matemático en cuestión. Sin embargo, explicarlos en términos de lo que acontece en la Institución requiere de un estudio sistémico sobre la relación del profesor y los estudiantes con respecto a un saber matemático escolar.
>
> Se han identificado diversos "contratos" que condicionan y modifican las relaciones del sistema didáctico en el aula. Existen un **contrato social de enseñanza** donde se establece la causa del saber a enseñar, un **contrato escolar** donde se define la actividad, las responsabilidades, actitudes y los derechos de los participantes del fenómeno escolar, a saber, escuela, profesor y alumno; un **contrato pedagógico** donde se establecen las relaciones sociales entre el profesor y alumno; y finalmente el **contrato didáctico** que se refiere a las negociaciones de profesor y alumno respecto del saber matemático escolar en juego.
>
> Es claro que los contratos escolar y pedagógico están sujetos a variables tales como**:** estructura institucional, modalidad educativa, calendarios escolares, programas académicos, horas clase, estándares de evaluación, tradición de enseñanza, etc., y por lo tanto encontraremos diferencias significativas de una Institución a otra, en una región que **[,]** en otra, etc. **(p. 25)**

Por tal motivo la variable *programas académicos*, entiéndase también las acepciones de esta como *programas de estudio, plan de estudios, malla curricular*, *currícula académica* o *mapa curricular* contienen o están dispuestas las "*materias*" **(***asignaturas*, *cursos***)** a cubrir en un determinado período escolar; el caso al que se refiere este escrito son las "*unidades de aprendizaje*", en específico la *unidad de aprendizaje de Ecuaciones Diferenciales Parciales I del* 5º *semestre de la Licenciatura en Ingeniería Matemática de la ESFM-IPN* **(Véase *Tabla* 1.):**

***Tabla* 1.** *Unidad de aprendizaje de Ecuaciones Diferenciales Parciales I.*

Unidad de aprendizaje: *Ecuaciones Diferenciales Parciales I*	
Unidad I: *Ecuaciones Diferenciales Parciales.*	**Temas:** [**1.1**] Concepto de una Ecuación Diferencial Parcial con valores en la frontera. [**1.2**] Clasificación de algunas Ecuaciones Diferenciales Parciales. [**1.3**] Ecuaciones Diferenciales Parciales que surgen de la física e ingeniería. [**1.3.1**] Ecuación de onda. [**1.3.2**] Ecuación de calor. [**1.3.3**] Problemas que involucran potencial eléctrico o gravitacional.
Unidad II: *Series y Transformada de Fourier.*	**Temas:** [**2.1**] Serie de Fourier. [**2.1.1**] Convergencia, derivación e integración de Series de Fourier. [**2.1.2**] Ortogonalidad y cálculo de los coeficientes de Fourier. [**2.1.3**] Series de Fourier de senos y cosenos. Representación de una función par o impar por Series de Fourier. [**2.1.4**] Teorema de Fourier. [**2.1.5**] Funciones periódicas y el espectro de amplitud. [**2.1.6**] Forma compleja de una serie de Fourier y espectros de frecuencia. [**2.2**] Transformada de Fourier. [**2.2.1**] Integral de Fourier. [**2.2.2**] Aplicaciones de la transformada de Fourier. [**2.2.3**] Transformada de Fourier en senos y cosenos. [**2.2.4**] Transformada de Fourier discreta. [**2.2.5**] Transformada rápida de Fourier.
Unidad III: *Problemas con valores en la frontera en Ecuaciones Diferenciales Parciales.*	**Temas:** [**3.1**] Método de separación de variables. [**3.1.1**] Solución de la ecuación de onda. [**3.1.2**] Solución de la ecuación de calor. [**3.1.3**] Algunos problemas en los que falla el método de separación de variables. [**3.2**] Solución de las ecuaciones de calor y de onda en

	dominio no acotados. [**3.3**] Solución por transformada de Laplace de problemas con valores en la frontera. [**3.4**] Solución usando transformada de Fourier de problemas con valores en la frontera.
Unidad IV: *Teoría de Sturm-Liouville.*	**Temas:** [**4.1**] Problemas con valores en la frontera lineales y homogéneos; eigenvalores y eigenfunciones. [**4.2**] Problemas con valores en la frontera de Sturm-Liouville. [**4.3**] Problemas con valores en la frontera no-homogéneos. [**4.4**] Problemas singulares en Sturm-Liouville.

Al retomar que existe una doble desvinculación **(**ver las unidades subrayadas y los temas que las comprenden en la **Tabla 1.) [1]** por parte de los temas de esta *unidad de aprendizaje* **(EDP I)** y **[2]** el caso de interés que rodea al **MSV** se ahonda tras la **Observación** que se hizo en la **Sección 1.2**, sobre la manera en que el docente en turno al impartir el curso de **EDP I**, dispuso de "*intereses*" sobre la manera en que iba a dar el seguimiento de los temas, pero bien, el *pro* de esta trayectoria [**contrato didáctico que emergió en ese momento**] es que el **MSV** se enseñó como antesala a temas avanzados como la Serie de Fourier, *pero aun así no existe ningún argumento matemático característico que atienda a explicitar porqué el funcionamiento del* **MSV** *es así.*

¿Cuál es la conclusión de esta subsección**?**, al mostrar la **Tabla 1.** y la experiencia personal de haber llevado el curso de **EDP I** explicada en la **Observación**, es precisamente que existen intereses de por medio para enseñar el *objeto matemático* los cuales son permeados por el **contrato** que el docente establezca en función de su actividad, experiencia e intereses áulicos e institucionales, por lo que deja en evidencia que el contenido de esta *unidad de aprendizaje* no favorece su enseñanza sí y solo si el docente opta por seguir esta secuencia, de lo contrario de forma general en la enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales Parciales, Métodos Matemáticos de la Física, Matemáticas Avanzadas de la Ingeniería y otros tópicos que sus contenidos desembocan en el algún momento en el empleo del objeto matemático **(MSV)** para encontrar soluciones particulares del fenómeno tratado en cuestión, por lo que se puede asegurar que su *uso es algebraico*.

1.3 Revisión de literatura

"*La lectura no da al hombre sabiduría; le da conocimientos.*"
— William Somerset Maugham

Hasta el momento, se han explicitado las motivaciones que emergieron durante el proceso de reflexión que se ha sometido esta investigación desde la posición de estudiante e investigador en formación, estas coadyuvaron hasta llegar **"**a una mejor**"** acotación de las temáticas que rodean al **MSV**. El rol de estudiante, permitió identificar todos aquellos libros especializados en materia al **MSV**, al ser los libros de texto de Ecuaciones Diferenciales que incluyan el tópico de **EDP**. Al estar en la formación como investigador, ya no solo se adentró en buscar literatura especializada alrededor de este objeto matemático, sino que ahora la atención recaía en investigaciones de disciplinas científicas como**:** Física, Matemáticas y Matemática Educativa en las que a partir de ellas la visión que se adoptó principalmente recaía en encontrar "*otros*" o "*desentrañar*" elementos matemáticos característicos del **MSV** que pudieran no estar presentes en la enseñanza tradicional escolar y por ende en ellas mismas no son reportadas, más que la incidencia en su *uso algebraico*.

1.3.1 Los libros de texto especializados

"*Los libros son el mejor viático que he encontrado para este humano viaje.*" *— Michel Eyquem de Montaigne*

Para presentar esta subsección, se citan las palabras de **Montiel (2005)**:

> El libro de texto constituye para el profesor una fuente de recursos tanto para las explicaciones de clase como para el conjunto de ejercicios a resolver en el salón, para llevar tarea o para usarse en la evaluación.
>
> Los textos proporcionan una presentación *secuenciada*, *lógica* y *coherente* de los temas y conceptos matemáticos. Ver en los textos una secuencia semejante a la que proponen los programas de estudio es un indicador de que dichos programas no varían drásticamente entre sistemas educativos. **(p. 30)**

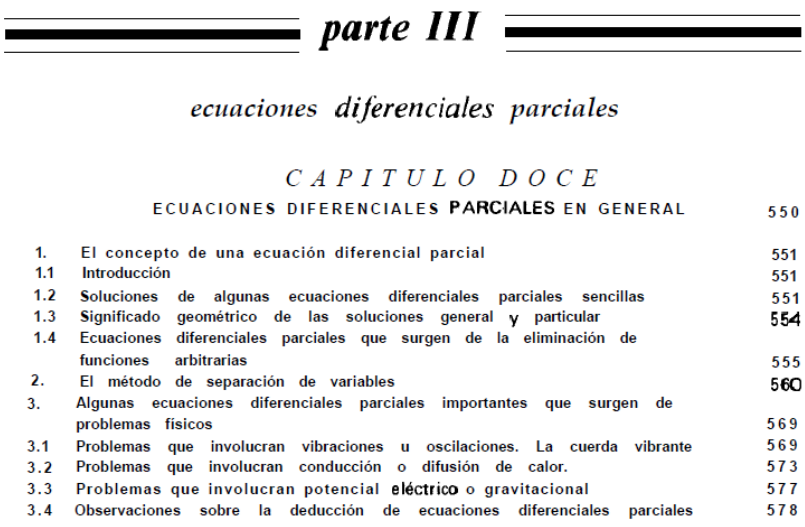
Como se ha presentado el devenir de la problemática en torno al *objeto matemático* esta puede también ahondar al referir sobre la existencia del contrato didáctico en el caso particular del curso de **EDP I**, y como bien se ha esclarecido en la *desvinculación de los temas* en la ***Tabla* 1.**, la *unidad de aprendizaje* propone al docente y al estudiante una bibliografía básica y de consulta **(Véase *Tabla* 2.)**, la cual, por disposiciones dentro del contrato didáctico que se establezca dentro del aula puede ser no-obligatorio seguir el uso de dicha bibliografía, pero sí como una manera de poder llevar un seguimiento de los temas, ya

que dentro de un conjunto de libros de texto, puede variar el contenido respecto a la unidad de aprendizaje.

***Tabla* 2.** *Bibliografía básica y de consulta para Ecuaciones Diferenciales Parciales I.*

Básica	*Consulta*	*Bibliografía*
×		[**1**] "Ecuaciones Diferenciales Aplicadas" de Murray R. Spiegel. Tercera Edición, Editorial Prentice-Hall, 1990.
	×	[**2**] "Fourier Series and Boundary Value Problems" de Ruel V. Churchill. Tercera Edición, International Student, 1970.
	×	[**3**] "Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera" de William E. Boyce, Richard C. DiPrima. Tercera Edición, 1992.
	×	[**4**] "Análisis de Fourier" de Hwei P. Hsu, Editorial Addison – Wesley Iberoamericana, 1992.

La bibliografía usada en el curso de **EDP I** fue**:** [**1**] **(**marcada como *Bibliografía básica***)** y [**3**] **(**como *Bibliografía de consulta***)**; al explorar [**1**] **(Véase *Tabla* 2.)** se encuentra gran parte de los temas que marca la *unidad de aprendizaje*, este libro de texto consta de tres partes, la *primera parte*, contiene de 9 capítulos todos ellos ahondan a la Teoría de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, la *parte dos*, contiene los capítulos 10 y 11 y en ellos se trata la Teoría de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, y la *tercera parte* ahonda en 3 capítulos los cuales se desglosan a continuación**:** Capítulo 12. Ecuaciones Diferenciales Parciales en General, es en este dónde se incluye el método de separación de variables **(Véase *Ilustración* 2.)**; Capítulo 13. Soluciones de problemas de valor de frontera usando series de Fourier y Capítulo 14. Soluciones de problemas de valor de frontera usando funciones de Bessel y de Legendre.



parte III

ecuaciones diferenciales parciales

CAPITULO DOCE

ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES EN GENERAL 550

1. El concepto de una ecuación diferencial parcial 551
1.1 Introducción 551
1.2 Soluciones de algunas ecuaciones diferenciales parciales sencillas 551
1.3 Significado geométrico de las soluciones general y particular 554
1.4 Ecuaciones diferenciales parciales que surgen de la eliminación de funciones arbitrarias 555
2. El método de separación de variables 560
3. Algunas ecuaciones diferenciales parciales importantes que surgen de problemas físicos 569
3.1 Problemas que involucran vibraciones u oscilaciones. La cuerda vibrante 569
3.2 Problemas que involucran conducción o difusión de calor. 573
3.3 Problemas que involucran potencial eléctrico o gravitacional 577
3.4 Observaciones sobre la deducción de ecuaciones diferenciales parciales 578

***Ilustración* 2.** *Capítulo 12 del libro de* Spiegel **(**1983**)**.

Una vez que se ha ubicado en [**1**] al **MSV** se prosiguió a explorar a fondo la manera en cómo es tratado matemáticamente este objeto**:** De forma descriptiva se comenta que el autor al inicio hace hincapié en que, así como en las **EDO** hay una clasificación para las lineales y no lineales, el caso de las **EDP** no es la excepción, continúa con la manera en que una EDP-lineal puede ser expresada por operadores al reemplazar la notación parcial; al seguir con la diferencia matemática de una EDP lineal y no lineal, el autor aclara que solo discutirá en su obra las EDP lineales que son más útiles en problemas aplicados dado que el tratamiento de las no-lineales no son tema de discusión. El contenido de la sección del libro sigue su curso al establecer una analogía con las EDO, y aclara que el estudiante podría esperar ver de forma natural la aparición de los siguientes teoremas**:** el de la *solución complementaria* y el del *principio de superposición*.

Como en el caso de las EDO-lineales-homogéneas, en estas, la solución encontrada para el caso más elemental de la ED-lineal de primer orden, es la *función elemental no trivial*, es decir, la función exponencial, cuya derivada es una *constante múltiple de sí misma por la función exponencial*, por ende y de forma general se asume que todas estas son soluciones complementarias de dicha EDO, tras ello, el autor da una EDP-lineal-homogénea de primer orden y a manera de ilustración la solución que contempla y para comprobar es la función *exponencial*, la cual conduce a la *ecuación auxiliar* o *ecuación característica*.

Hasta el momento el autor ha desentrañado el conjunto de *conceptos matemáticos* que reúne como antesala el **MSV** y que el estudiante debe conocer para emplearlo. Propone un problema de valor de frontera para discusión, mismo que resuelve por la *técnica algebraica*, y en ningún momento aclara el significado de las condiciones de frontera a las que está sujeto el problema, ya que da por entendido que al llegar hasta ahí el estudiante ya diferencia el tipo de condiciones que versan sobre las EDP.

Al consultar [**3**] el contenido en su índice se puede dejar en claro que este libro de texto abarca 11 capítulos, los últimos dos son destinados propiamente al estudio de las **EDP**, y el **MSV** está dispuesto es en el **Capítulo 10. (Véase *Ilustración* 3.)**. Se aclara en este escrito que la edición consultada de este libro de texto es la cuarta a diferencia de la edición indicada en la ***Tabla* 2.**

Capítulo 10. Ecuaciones diferenciales parciales y series de Fourier 563
10.1 Separación de variables; conducción del calor 563
10.2 Series de Fourier 572
10.3 Teorema de Fourier 582
10.4 Funciones pares e impares 588
10.5 Solución de otros problemas de conducción del calor 597
10.6 Ecuación de onda: vibraciones de una cuerda elástica 608
10.7 Ecuación de Laplace 620
Apéndice A. Deducción de la ecuación de conducción del calor 629
Apéndice B. Deducción de la ecuación de onda 634

***Ilustración* 3.** *Capítulo 10 del libro de* **Boyce y DiPrima (2001)**.

Los autores de este libro dejan por esclarecido que desde los últimos dos siglos se han desarrollado varios métodos para resolver **EDP**, pero es el método de separación de variables el método sistemático más antiguo, en este capítulo de su libro ellos muestran por medio de un problema básico de conducción de calor de un cuerpo sólido, la diferencia notoria que se deja plasmada es que a pesar de que su *uso es algebraico* sin más que se puedan hacer notar otras características matemáticas que rodean al método, este se contextualiza por medio de un problema de conducción de calor, donde su solución concluye con expresar la solución por medio de la Serie de Fourier, tal y como lo marca el desglose que se puede ver en la ***Ilustración* 3**.

De esta subsección se concluye que, al presentar dos libros de texto representativos en la enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales, la manera en que se abordan los temas y en específico el **MSV** en **EDP**, los contextos de uso son *algebraicos* y relativamente poco visibles los geométricos, también difieren sobre manera en cómo los autores quieren transmitir la apropiación de los conceptos que le anteceden, que le acompañan **((**EDO-lineales-homogéneas**)** y que son involucrados posteriormente **(**contexto fenomenológico**)** al **MSV**.

1.3.2 El MSV en investigaciones científicas

> "*Los encantos de esta ciencia sublime, las matemáticas, sólo se revelan a aquellos que tienen el valor de profundizar en ella*."
> *— Carl Friedrich Gauss*

Esta subsección es uno de los cimientos por los cuales, este proyecto tiene su esencia. En ella se presta atención a la recapitulación de investigaciones que conciernen al **MSV**. Justo este momento es el que permite enfatizar y aclarar que el método al ser un concepto que asocia a una gran diversidad de *saberes matemáticos* con relación a la Física, Matemáticas y la Ingeniería no se han reportado investigaciones que expliciten sus *características* y dado que, al ser uno de los ejes de estudio de las **EDP**.

Las investigaciones sobre la enseñanza de las **EDP** no han sido evidenciadas como tal, pero bien, como es un tópico de las Matemáticas Aplicadas de estas emergen una infinidad de conceptos asociados que son camino para resolver problemas específicos en torno a las *Series de Fourier* y el *estado estacionario* los cuales son reflejados en investigaciones en el campo de la *Matemática Educativa,* en donde conceptos que rodean al **MSV**, se convierten en su objeto de estudio, como parte de un saber matemático, convirtiéndose así en una oportunidad de atender de manera acotada a estos conceptos en la Matemática Superior, y en donde se ve plenamente involucrado el *objeto matemático* central de esta investigación, el **MSV**.

En relación al campo de la Matemática se tiene la investigación de: Shingareva y Lizárraga-Celaya (2010) que con base en sus palabras, mencionan claramente que la *separación de variables* es uno de los métodos más importantes y poderosos para resolver Ecuaciones Diferenciales Parciales lineales **(EDP)**, en donde a partir de la estructura de una EDP en particular permite buscar soluciones exactas separables **(**aditivamente o multiplicativamente**)**, por ejemplo $\boldsymbol{u(x,t) = \phi(x) \circ \psi(t)}$, donde la multiplicación o la adición se denota por el operador $\circ$. Bajo este sentido, los autores sostienen que el método de separación de variables en Ecuaciones Diferenciales Parciales permite reducir el problema original a un sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, el cual se puede resolver por cuadraturas. Sobre la aplicación del método, ellos dejan por esclarecido que varias ecuaciones lineales de la física-matemática llevan a buscar una transformación de variables tal que en las nuevas variables la EDP se puede resolver mediante un ansatz separable **(**aditivo o multiplicativo**)** para encontrar la solución **(p. 145).** En esta investigación, no se reportan características acerca del método, al incidir únicamente en su mecanización algebraica lo que es una buena oportunidad de que esta investigación atienda una vez conocida la génesis epistemológica del método.

En el campo de la Física investigaciones reportadas en artículos científicos salen a la luz como la de **Polyanin (2000)**, aquí, el autor destaca aspectos teóricos que aplica a la Mecánica y a la Física-Matemática sobre el método de separación de variables, al sostener que este es uno de los muchos métodos utilizados para resolver ecuaciones lineales en la física matemática, además que este método se basa en la búsqueda de soluciones particulares para ecuaciones lineales homogéneas, que adoptan la forma de un producto de funciones **[…] (p. 680);** y, a su vez **Sklyanin (1995)**, indica que la separación de variables en sus formas más elementales en coordenadas cartesianas, esféricas o elípticas es una parte indispensable del currículum básico de las matemáticas y la física, donde el método puede ser caracterizado como la reducción de un problema multidimensional a uno unidimensional. Sus orígenes están ubicados en los trabajos de D'Alembert y Fourier **(**teoría de ondas**)** y Jacobi **(**mecánica Hamiltoniana**)** y durante mucho tiempo fue el único método conocido de soluciones "exactas" de problemas de Física-Matemática **(p. 35),** por lo que de estas, podrá notar el lector que es posible conocer parte de la ruta histórica en la que se debe dirigir esta investigación y por lo cual ser una pertinencia en ahondar sobre su epistemología.

Si bien, dado que se ha mostrado con estas tres investigaciones en el campo de la Física y las Matemáticas que por sus propios intereses utilizan herramientas algebraicas como el **MSV** y en vista de que el método es funcional para resolver una gran multitud de problemas en cuestión, a este puede vérsele como un **objeto matemático de segundo tipo** según **Cantoral (2019)** quien, al hacer una tipificación de estos objetos, los organiza en tres

tipos. Es en el *segundo nivel*, que es donde recae el **MSV**, y puede reconocerse que está en esta categoría, por causa de que, en él, la operación de la *multiplicación* existe, es decir, el método *supone* una solución en forma de producto como $\boldsymbol{u(x,t) = X(x) \cdot T(t)}$, denotado por **« · »**, dicho en otras palabras, puede apreciársele que involucra un *procedimiento* **(***la actividad***: «***multiplicar***»)** con objetos de primer tipo que están expresados como *definiciones* **(***conceptos***)**, como el caso de las *funciones* $\boldsymbol{X(x)}$, $\boldsymbol{T(t)}$.

La *revisión de literatura* que comprende esta investigación, y en específico la de esta subsección, es que las investigaciones mostradas anteriormente, fueron seleccionadas por dos características pertinentes a resaltar**: [1]** la primera de ellas es que la revisión de artículos científicos en torno a este método sí existen pero únicamente se explicita en una gran cantidad el *uso algebraico* del método, sin dar cabida a explicaciones a fondo del **MSV**, los casos mostrados con anterioridad son la excepción ya que **[2]** el título de tales artículos *sí* comprende con dejar en evidencia en su contenido las características matemáticas modernas o referencias históricas que actualmente se conocen y por las cuales el método es usado.

El panorama hasta este momento de haber mostrado estas investigaciones, es, que mientras la investigación en **Matemáticas** reconoce al **MSV** por su carácter funcional-operatorio **(***uso algebraico***)**, para encontrar soluciones de EDP-lineales-homogéneas el caso de la investigación en **Física** adopta al método por su carácter funcional-operatorio para dar solución a problemas contextualizados, alrededor de sus diversas áreas como la Mecánica Clásica o de Fluidos, Termodinámica, Electromagnetismo, por mencionar solo unas. Por esto mismo, se considera un buen inicio en esta investigación para develar en esta investigación la concepción epistemológica alrededor del método, al propiciar así argumentaciones referentes al conjunto de conceptos que lo involucran. El método por sí mismo es un hilo conductor entre situaciones específicas **(***marcos de referencia***)** donde emergen conocimientos matemáticos asociados ante contextos, los cuales pueden ser atendidos bajo el estudio concretamente del fenómeno físico situacional.

Tras la versatilidad con la que el método se adapta a problemas en diversos campos de conocimiento científico producto de una *transposición didáctica*, no es la excepción cuando este objeto matemático aparece intrínseco a conceptos como el de **las Series de Fourier** o bien, como resultado también de la separación de variables la **teoría de Sturm-Liouville** a poder llegar a identificar comportamientos estables en el estudio de los fenómenos como la conducción de calor, o el movimiento ondulatorio.

Hoy día, en la disciplina científica, la Matemática Educativa, existen investigaciones inmersas en objetos matemáticos como la **Serie Trigonométrica de Fourier (STF)**, las cuales en su trayectoria evolutiva han emergido conceptos matemáticos como la

convergencia de series, que da lugar a la concepción de noción de *estado estacionario* situado ante un contexto fenomenológico. Este proyecto es situado en un marco investigativo que involucra a lo antes descrito en un conjunto de investigaciones que de forma natural el **MSV** aparece en ellas.

Con base en las primeras formulaciones de su investigación, **Romero (2016)** cita el trabajo de **Farfán (1986)** donde menciona que este es un referente sobre la génesis de la **STF**, relacionado con la determinación del estado estacionario, así como el problema de conducción de calor, visto como ambiente fenomenológico que dio paso al surgimiento de la **STF**, sin embargo, no se detalla sobre la génesis matemática del **MSV**, que está inmerso en el uso algebraico de la **STF**.

[En tal investigación**]** muestra que Daniel Bernoulli, al resolver el problema de la cuerda vibrante, utiliza argumentos físicos para decir que la forma inicial de la cuerda se puede expresar como una serie trigonométrica. En contraparte**:**

> Fourier nos muestra que la solución matemática es acorde con la situación física, pero la demostración se inserta en la matemática misma sin alusión a argumentos que no pertenecen a ella. Así se da la separación entre la física y las matemáticas que desde la antigüedad caminaban estrechamente ligadas una de la otra. **(**Farfán, 1986, p. 674**)**

Es decir, se da una ruptura entre el modelo matemático y el problema físico, aunque el primero responde al segundo, las argumentaciones utilizadas son propias del área de las matemáticas **(p.1).**

A comentar que en tal investigación pone en evidencia únicamente el *antecedente histórico matemático* al desarrollo investigativo que deviene sobre la **STF**, el *problema de la cuerda vibrante*, sin presentar algún escenario epistemológico respecto a la génesis del **MSV**, por otro lado, **Ortiz (2018)** apunta que la historia comienza más o menos a mitad del Siglo XVIII con un estudio de un problema de naturaleza, el problema de la cuerda vibrante, el que llevó a una ecuación diferencial parcial de tipo hiperbólico **[…]** cuya solución es de la forma de una serie trigonométrica. Además, este problema llevó a una interesante polémica sobre la naturaleza de la función a considerarse. En esta primera parte se tienen los trabajos de D'Alembert **(**1717-1789**)**, Euler **(**1707-1783**)**, D. Bernoulli **(**1700-1782**)**, y naturalmente los de Fourier **(**1768-1830**) (p.103).**

La investigación antes mencionada, expone la manera en que históricamente emergen las ideas asociadas a tal problema, pero no muestra una ruta histórica más sólida que conlleve a ubicar el pasaje o pasajes históricos que dirigen al inicio de las ideas que rodean al *Problema de la Cuerda Vibrante*, pero, a pesar de ello, si contribuye a evidenciar uno de los

conceptos que entrelazan la epistemología a la solución de dicho problema, el concepto de *función*. Lo anterior coadyuva a abrir una brecha epistemológica alrededor del Siglo XVIII, con los actores que se vieron más influenciados en tal polémica, y además como fundamento de la **STF**.

Al dar esta estructura histórica, el autor, contribuye a esclarecer no solo la historia matemática alrededor del *Problema de la Cuerda Vibrante*, sino que además hace notar ya una interpretación moderna del problema, es decir, como actualmente se conoce, al señalar, por ejemplo, el tipo de ecuación que modela el fenómeno, y que dentro de la revisión de los libros de texto **(Ver subsección 1.3.1)** para la enseñanza de las EDP, la clasificación de las **EDP** es un concepto teórico matemático que no debe pasar por desapercibido ya que una vez que un fenómeno es matematizado por estas ecuaciones, facilita la identificación de métodos *ad hoc* para solucionarlo.

Este devenir histórico del *problema de la cuerda vibrante* causó conmoción entre los actores principales de la época, Ortiz **(**2018**)** menciona a algunos de ellos. Autores de libros de texto como **Boyce y DiPrima (2001)** que su obra es mencionada en la **subsección 1.3.1** indican que la solución de la ecuación de onda fue uno de los problemas matemáticos importantes de mediados del Siglo XVIII. La ecuación de onda fue deducida y estudiada por primera vez por D'Alembert en 1746. También llamó la atención de Euler **(**1748**)**, Daniel Bernoulli **(**1753**)** y Lagrange **(**1759**)**. La ecuación de onda fue resuelta de varias maneras y los méritos de estas soluciones, así como las relaciones entre ellas, fueron discutidas, algunas veces acaloradamente, en una serie de documentos a lo largo de más de 25 años. Los puntos en disputa se refirieron a la naturaleza de una función y a las clases de funciones que es posible representar por series trigonométricas. Estas cuestiones no fueron resueltas hasta el Siglo XIX **(p. 608),** tal y como estos autores adjetivan sobre la manera en que ─ *fueron discutidas* ─ las soluciones, a menudo se le conoce también como la *controversia suscitada del problema de la cuerda vibrante*, y es esta revisión la cual muestra una manera de poder analizar las soluciones de los personajes antes dichos.

Esta revisión permite, ubicar una buena oportunidad para esclarecer la epistemología del método, debido a que en los libros de texto no se brinda, redundando en la Matemática Escolar, a través de los *usos* **(**aritméticos, algebraicos, geométricos, funcionales, por mencionar unos**)**, sin poder dirigir hacia una trayectoria donde el conocimiento matemático pueda ser puesto es contextos donde se propicie la inferencia de estos *usos*, o del *uso algebraico* que pueda representar el **MSV**.

En la investigación de **Cañada (2000)** expone precisamente esta controversia, al explicar las diferencias que existen entre las soluciones del *Problema de la Cuerda Vibrante*, dadas por D'Alembert, Euler y Daniel Bernoulli respectivamente las cuales fueron un

cimiento matemático fortísimo para que Jean Baptiste-Joseph Fourier las explotara en su obra *Théorie Analytique de la Chaleur* en 1822 y diera la solución a tal problema, pero, no ahonda a brindar detalles sobre el porqué emerge el método de solución empleado, el **MSV**, en cambio, una retrospectiva del futuro que muestra esta investigación es que a raíz del nacimiento del Análisis Matemático en el Siglo XVIII, ayuda a explotar epistemológicamente el entendimiento sobre la manera en que la solución al problema "*fue*" aceptado, aunado a su representación, y los inicios de un estadío más avanzado de representación, la **STF**, con ideas incipientes con Daniel Bernoulli, D'Alembert y Lagrange.

A continuación, se muestra, una versión moderna del *Problema de la Cuerda Vibrante* la cual puede consultarse en **Farfán (2012)** de la siguiente manera**:**

Supóngase que una cuerda flexible se ha tensado sobre el eje $\boldsymbol{x}$ y sujetada de dos puntos, que por conveniencia serán $\boldsymbol{x = 0}$ y $\boldsymbol{x = \pi}$. Así, la cuerda representará una cierta curva $\boldsymbol{y = f(x)}$ en el plano $\boldsymbol{XY}$; donde si se le deja en libertad producirá *vibraciones* en el plano. El problema consiste en determinar su movimiento, es decir, su posición, velocidad y aceleración en cualquier instante.

Para obtener la ecuación de movimiento se hacen diversas suposiciones que simplifiquen el problema; la primera de ellas es la subsecuente vibración es completamente transversal, es decir, cada punto de la cuerda tiene coordenada constante $\boldsymbol{x = \ell}$ y, por tanto, su coordenada $\boldsymbol{y}$ depende sólo de $\boldsymbol{x}$ en el instante $\boldsymbol{t}$. Así, el desplazamiento de la cuerda desde su posición de equilibrio está dado por alguna función $\boldsymbol{y = y(x,t)}$, donde al calcular la primera y segunda derivada parcial respecto al tiempo serán**:** $\frac{\partial y}{\partial t}$ y $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, éstas representan la *velocidad* y *aceleración* de la vibración de la cuerda respectivamente.

Ahora si se considera el movimiento de un *pedacito* de la cuerda, que en su posición de equilibrio tiene longitud $\Delta\boldsymbol{x}$. Si la densidad lineal de la masa de la cuerda es $\boldsymbol{m = m(x)}$, la masa del *pedacito* es $\boldsymbol{m\Delta x}$ y, según la Ley de movimiento de Newton, la fuerza transversal $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ que actúa sobre el *pedacito* está dada por la ecuación**:**

$$\boldsymbol{\mathcal{F} = m\Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \cdots (a)}$$

Ya que la cuerda es flexible, la tensión $\boldsymbol{\mathcal{T} = \mathcal{T}(x)}$ en cualquier punto está dirigida a lo largo de la tangente y tiene por componente $\boldsymbol{y}$ a $\boldsymbol{\mathcal{T}\sin\theta}$. La siguiente hipótesis se refiere a que el movimiento de la cuerda se debe únicamente, a la tensión sobre ella. Como consecuencia, $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ es la diferencia entre los valores inicial y final de $\boldsymbol{\mathcal{T}\sin\theta}$ en nuestro *pedacito*, a saber $\Delta(\boldsymbol{\mathcal{T}\sin\theta})$; por tanto $\boldsymbol{(a)}$ se convierte en**:**

$$\Delta(\mathcal{T}\,\mathbf{sin}\,\theta) = m\Delta x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\cdots(b)$$

Si las vibraciones de la cuerda son relativamente pequeñas, es decir, si θ es pequeño, $\mathbf{sin}\,\theta$ es aproximadamente igual a $\mathbf{tan}\,\theta = \frac{\partial y}{\partial t}$; así (b) se convierte en**:**

$$\frac{\Delta\left(\mathcal{T}\frac{\partial y}{\partial t}\right)}{\Delta x} = m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\cdots(c)$$

y cuando $\Delta x \to 0$, obtenemos**:**

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathcal{T}\frac{\partial y}{\partial t}\right) = m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\cdots(d)$$

Finalmente, puesto que la masa m y la tensión $\mathcal{T}$ son constantes, obtenemos**:**

$$a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\cdots(e)$$

donde $a = \sqrt{\frac{\mathcal{T}}{m}}$. Usualmente, a esta ecuación le nombramos ***ecuación de onda unidimensional*** y una solución $y(x,t)$ de ella debe satisfacer las condiciones de frontera**:**

$$y(0,t) = 0\cdots(f)$$

$$y(\pi,y) = 0\cdots(g)$$

así como las condiciones iniciales**:**

$$\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0} = 0\cdots(h)$$

$$y(x,0) = f(x)\cdots(i)$$

Las restricciones (f) y (g) expresan la suposición de que los extremos de la cuerda permanecen fijos en los puntos $x = 0$ y $x = \pi$; en tanto que (h) e (i) aseguran que la cuerda no tiene movimiento cuando es liberada y que $y = f(x)$ es su forma inicial, respectivamente. Observemos que ninguna de estas condiciones se relaciona con la obtención de (e). Daremos una solución formal de (e) al utilizar el *método de separación de variables.* Es decir, se ***supone*** que la solución es de la forma**:**

$$y(x,t) = u(x)v(t)$$

factorizable en un producto de dos funciones, *en donde cada factor depende sólo de una de las variables independientes involucradas.* Al sustituir esta última relación en $(\boldsymbol{e})$, se tiene**:**

$$\boldsymbol{a^2 u''(x)v(t) = u(x)v''(t)}$$

o, equivalentemente a**:**

$$\boldsymbol{\frac{u''(x)}{u(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{v''(t)}{v(t)} \cdots (j)}$$

El lado izquierdo es una función de $\boldsymbol{x}$, únicamente, y el lado derecho sólo depende de $\boldsymbol{t}$, por lo que esta relación se cumple solamente si ambos miembros de la ecuación son constantes.

Se denota dicha constante por $\boldsymbol{-\lambda}$; así $(\boldsymbol{j})$ da lugar a EDO, una para $\boldsymbol{u(x)}$ y otra para $\boldsymbol{v(t)}$**:**

$$\boldsymbol{u''(x) + \lambda u(x) = 0 \cdots (k)}$$

y

$$\boldsymbol{v''(t) + \lambda a^2 v(t) = 0 \cdots (\ell)}$$

Ahora debemos encontrar las soluciones de estas ecuaciones**:** la primera sujeta a las condiciones de frontera $\boldsymbol{u(0) = u(\pi) = 0}$, y la segunda a las restricciones iniciales $\boldsymbol{v'(0) = 0}$ y $\boldsymbol{v(0) = f(x)}$.

La constante λ representa cualquier número real, y parte del trabajo al resolver las ecuaciones $(\boldsymbol{k})$ y $(\boldsymbol{\ell})$ consiste en determinar los valores de λ para los que el problema puede resolverse.

Si consideramos $\boldsymbol{\lambda = 0}$, la solución general de $(\boldsymbol{k})$ es $\boldsymbol{u(x) = c_1 x + c_2}$; pero como $\boldsymbol{u(0) = 0 = u(\pi)}$, tendremos que la única solución que satisface las condiciones de frontera es la *trivial*. Lo mismo sucede si $\boldsymbol{\lambda}$ es negativa.

Si nos restringimos al caso $\boldsymbol{\lambda > 0}$, una solución es $\boldsymbol{u(x) = \sin\sqrt{\lambda}\, x}$, pero $\boldsymbol{u_2(x) = \cos\sqrt{\lambda}\, x}$ es también solución, *así como cualquier combinación lineal de ellas*; por tanto, la solución general de $(\boldsymbol{k})$ es**:**

$$\boldsymbol{u(x) = c_1 \sin\sqrt{\lambda}\, x + c_2 \cos\sqrt{\lambda}\, x}$$

como $\boldsymbol{u(0)}$ debe ser cero, la solución se reduce a**:**

$$\boldsymbol{u(x) = c_1 \sin\sqrt{\lambda}\, x}$$

De la segunda condición de frontera, $\boldsymbol{u(\pi) = 0}$, se debe tener que $\boldsymbol{\sqrt{\lambda}\pi = n\pi}$, para algún entero positivo $\boldsymbol{n}$, es decir $\boldsymbol{\lambda = n^2}$. En otras palabras, $\boldsymbol{\lambda}$ debe ser igual a alguno de los números $\boldsymbol{1, 4, 9}$, ... A estos valores de $\boldsymbol{\lambda}$ se les llama *valores propios* del problema, y a las soluciones correspondientes**:** $\boldsymbol{\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \ldots, \cdots (m)}$ se les conoce como *funciones propias* o *eigenfunciones*. En tanto que los valores propios están determinados únicamente por la naturaleza del problema, no es así para las eigenfunciones, pues para cualquier constante diferente de cero, los múltiplos de $\boldsymbol{(m)}$, $\boldsymbol{a_1 \sin x, a_2 \sin 2x, a_3 \sin 3x}$, ..., son eigenfunciones. Así las correspondientes soluciones de $\boldsymbol{(k)}$ son**:**

$$\boldsymbol{u_n(x) = \sin nx, n = 1, 2, 3, \ldots}$$

Similarmente, para los valores de $\boldsymbol{\lambda}$ se halla la solución general de $\boldsymbol{(l)}$ la cual es $\boldsymbol{v(t) = c_1 \sin nat + c_2 \cos nat}$ y, si se impone la condición de que $\boldsymbol{v'(0) = 0}$, entonces $\boldsymbol{c = 0}$, obteniéndose las soluciones $\boldsymbol{v_n(t) = \cos nat}$.

Recordamos que la solución para la ecuación que describe el movimiento de la cuerda es de la forma $\boldsymbol{y(x, t) = u(x)v(t)}$ por lo tanto, las soluciones de $\boldsymbol{(e)}$ son de la forma**:** $\boldsymbol{y_n(x, t) = \sin nx \cos nat}$. Cada una de estas funciones, para $\boldsymbol{n = 1, 2, 3}$, ..., satisface a la ecuación $\boldsymbol{(e)}$ y a las condiciones $\boldsymbol{(f)}$, $\boldsymbol{(g)}$ y $\boldsymbol{(h)}$; lo anterior puede verificarse que es válido para cualquier suma finita de múltiplos de las $\boldsymbol{y_n}$ es**:**

$$\boldsymbol{a_1 \sin x \cos at + a_2 \sin 2x \cos 2at + \cdots + a_n \sin nx \cos nat}$$

Si se procede formalmente, es decir, al ignorar todo lo referente a la convergencia, diferenciabilidad término a término, etc., entonces cualquier serie infinita de la forma**:**

$$\boldsymbol{y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \cos nat}$$

es también solución que satisface las condiciones $\boldsymbol{(f)}$, $\boldsymbol{(g)}$ y $\boldsymbol{(h)}$.

Finalmente, al añadir la condición $\boldsymbol{(i)}$, esto es, que para $\boldsymbol{t = 0}$ la solución $\boldsymbol{y(x, t)}$ sea la forma inicial de la cuerda, por lo que**:**

$$\boldsymbol{f(x) = a_1 \sin x \cos at + a_2 \sin 2x \cos 2at + \cdots + a_n \sin nx \cos nat}$$

es la solución al Problema de la Cuerda Vibrante.

Las investigaciones anteriores específicamente son atendidas dentro del campo científico, la Matemática Educativa, de las cuales es notoriamente visible que lo que respecta al objeto matemático de interés en esta investigación también recae su *uso* en la

algebrización, por ser un algoritmo que opera mecánicamente, debido a esto, no logra evidenciar la manera epistemológica sobre su funcionamiento, y por ende su *uso*, lo que permite a esta investigación tomar la posibilidad de atender su génesis epistemológica

Este panorama que se vislumbra sobre el *Problema de la Cuerda Vibrante*, permite acotar los siguientes aspectos identificados anteriormente como**: [1]** los personajes de la historia que dieron aportes significativos en el tratamiento matemático del problema, pero que, de este aspecto su devenir debe esclarecer **[1.1]** el contexto histórico que rodea a esos personajes, **[1.2]** los antecedentes a la controversia y por ende **[1.3]** las características matemáticas alrededor del método, **[2]** ubicar el análisis epistemológico con su devenir histórico en la obra donde Jean Le Rond D'Alembert quien fue el primero que estableció una ecuación y una "*proximidad a la solución general*" al *Problema de la Cuerda Vibrante*; para ello se formula la siguiente sección de este capítulo que ayuda a comprender cómo se consolidó este proyecto de investigación.

1.4 Problema de investigación

> "*El álgebra es muy generosa. Siempre nos dice más de lo que le preguntamos.*" *– Jean Le Rond D'Alembert*

En virtud de haber expuesto en la **sección 1.1** las **Motivaciones**, en la **sección 1.2 Una aproximación a la problemática** con un ejemplo en donde visiblemente se privilegian las herramientas algebraicas propias del método para dar solución a la EDP, se le excluye de dotarle un *contexto* al que pueda estar asociado, más aún al mostrar en la **subsección 1.2.1** la desvinculación de los temas por parte de la *unidad de aprendizaje* específica de la universidad ya mencionada, conlleva a entrelazar la revisión de los libros de texto que se muestra en la **subsección 1.3.1** en los que se identifica que para tratar al método su explicación es puramente algebraica, finalmente al vincular la **subsección 1.3.2** sobre las **investigaciones científicas** que hasta hoy día hay en torno a este *objeto matemático* sin que se ahonde más en él, ya que se concibe como un *algoritmo mecánico* como cualquier otro y que no se adentra en explicar los detalles del mismo, **es por todo esto que se permite concebir** lo que en la ***Tabla* 3.** se presenta como el ***problema de investigación*:**

***Tabla* 3.** *El problema de investigación.*

A raíz de esto:	
El problema de investigación que se plantea en este proyecto es:	*La pregunta de investigación es:*
El **MSV** en **EDP** al estar presente como un concepto matemático por transposición didáctica en áreas del conocimiento científico como la	¿Por qué el **MSV** en **EDP** *supone* una solución de la forma $\boldsymbol{X(x) \cdot T(t)}$?

Física, Matemáticas e Ingeniería, su tratamiento matemático escolar *ahonda únicamente en el uso algebraico* y que, en consecuencia, en situaciones áulicas se excluyen epistemológicamente elementos funcionales característicos del método.	
El objetivo general es:	*La hipótesis inicial es:*
Caracterizar al **MSV** a partir de un análisis *histórico-epistemológico* al situar como referencia **(**espacio-temporal**)** el *Problema de la Cuerda Vibrante* surgido aproximadamente a finales del Siglo XVII y principios del Siglo XVIII.	Dadas las características físicas del *fenómeno* es posible concebir que su matematización involucre ecuaciones diferenciales lineales con dos o más variables independientes las cuales al tener esta cualidad matemática su solución admite suponer la existencia de funciones separables.

Como es posible notar en la descripción en torno al *Problema de investigación*, a lo largo de este escrito se ha fijado al *Problema de la Cuerda Vibrante* y el *fenómeno físico* que produce, *la vibración*, para atender a la problemática identificada, y la manera de cómo es que a partir de su naturaleza y a la *actividad matemática* de la época fue posible *predecir* el tipo de soluciones, lo que permite así justificar el *uso algebraico* del *objeto matemático* que atiende esta investigación, el **MSV**. Para conocer la epistemología *física* y *matemática*, del problema, es necesario, tomar en cuenta que su matematización, está sentada por la *Segunda Ley de Newton*. Al tener presente las *características físicas* del problema, se deben considerar los siguientes supuestos, la cuerda se *aleja* ligeramente sobre su posición de equilibrio, pero permanece tensada en sus dos extremos $\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{d}$, por conveniencia en los extremos **(***fronteras***)** $\boldsymbol{c = 0}$ y $\boldsymbol{d = \pi}$, es decir, en el intervalo $[\boldsymbol{0, \pi}]$; comienza a vibrar desde el reposo **(***velocidad inicial cero***)**, y cada punto de la cuerda vibra *exclusivamente* de manera vertical, por lo que se dice entonces, que de estas condiciones, la cuerda vibrará y producirá **(**conforme a la variación de la velocidad que sufra**:** *aceleración***)** una onda estacionaria <u>*sin importar el tiempo que transcurra*</u>. Históricamente, el *modo fundamental* de solución de la cuerda vibrante fue descubierto por Brook Taylor y Johann Bernoulli, años más tarde esta idea fue explotada por Euler, D'Alembert y Daniel Bernoulli **(**véase el **Capítulo 5.)**.

Dado que el problema, produce el fenómeno de la *vibración*, esta solo depende de la tensión de la cuerda y no del tiempo; entonces, para conocer la forma que adopta la cuerda, o dicho en otras palabras, la *forma inicial de la cuerda* es preciso hacer saber en qué puntos

la *función solución* **(**se hace cero**)**, por lo que la única función que se *anula* en *los extremos* es la que corresponde al *modo fundamental*, es decir, conceptualmente alude, a la *función seno*; para ello, el **MSV:** $\boldsymbol{X(x) \cdot T(t)}$, se introduce, como un producto de dos funciones independientes, en donde el factor función $\boldsymbol{T(t)}$ es una función en el tiempo $\boldsymbol{t}$, la cual permite calcular la *aceleración* en cada instante que transcurre. Mientras que la función $\boldsymbol{X(x)}$ con base en las condiciones a las que esté sujeto el problema, geométricamente denotará el comportamiento trigonométrico de la cuerda **(**ya que no importa el tiempo que transcurra cuando la cuerda esté tensada y por ende su aceleración**)**, lo que conlleva entonces a decir que el **MSV** confiere el poder determinar los coeficientes en la respectiva variable de la *función seno*, como *función solución* al *Problema de la Cuerda Vibrante*, y que de forma conceptual esto hace referencia a los *subsecuentes* modos de vibración de la cuerda, que si son superpuestos generan una suma infinita de términos trigonométricos.

El *siguiente capítulo* consta de la descripción de los fundamentos teóricos y metodológicos que coadyuvan a encaminar la presente investigación, una vez definido que el objetivo general centrado es realizar un *análisis histórico-epistemológico*, en la medida que se pueda propiciar escudriñar y caracterizar la *actividad matemática* de Jean Le Rond D'Alembert en torno al *Problema de la Cuerda Vibrante* con base en la **TSME**.

Capítulo 2. Consideraciones Teóricas y Metodológicas

El presente capítulo está destinado a mostrar los componentes teóricos de la **T***eoría* **S***ocioepistemológica* de la **M***atemática* **E***ducativa* **(TSME)** que permiten atender, articular y profundizar bajo su "*lupa*" la problemática que se ha puntualizado en el **Capítulo 1**.

Como se detalló en la **sección 1.2**, destinada a una ***aproximación a la problemática***, se identificó un *objeto matemático* que se convierte en parte central a lo largo de este escrito, el **MSV** en **EDP**. Una vez, al tener con él, un acercamiento *escolar*, es decir, el momento en que es enseñado, puede apreciarse que este se restringe únicamente a funcionar como una *fórmula* o *procedimiento algebraico* para dar solución a cierto tipo de problemas de contexto físico, matemático y de ingeniería, lo que conlleva a *excluir* aquellas características que rodean su *funcionamiento*.

Es por esto que, a continuación, se menciona la naturaleza que tiene la investigación y la manera en que los *constructos teóricos* de la **TSME** se articulan junto con ella para hacer frente a la problemática ya mencionada.

En cuanto al **MSV**, hasta el momento se reconoce su uso por el siguiente aspecto**:** la bondad matemática que posee y la "*facilidad*" de operar con él, ya que pudiese no representar dificultades algebraicas en cuanto a su *uso* al reducir el problema a un *sistema de EDO*, a pesar de ello, como se ha mencionado se *soslaya* por completo el *porqué funciona* de esa forma, al identificarse que en los libros de texto y por ende en su enseñanza su *uso* es netamente *algebraico*, viéndose acotado a un contexto puramente simbólico.

Lo anterior, permite hablar propiamente de los *objetos matemáticos* que subyacen y evolucionan al transcurrir un nivel educativo, al identificar la supremacía que impera en la enseñanza de estos y por ende en la Matemática misma hasta hoy día. Esta peculiar *enseñanza tradicional* no ha sido suplementada únicamente por factores propios de la **M**atemática **E**scolar **(ME)**, que involucra, por mencionar algunos elementos que le son inherentes y permean su acción, como los libros de texto, las notas del docente y la comunicación asertiva docente-alumno o alumno-docente, sin embargo, no son los únicos ni los más importantes; en cambio, esta si se ha visto complementada por una gran diversidad de estrategias que favorecen el aprendizaje del estudiante.

Estas *estrategias*, contemplan el uso de *recursos didácticos* al fungir como mediadores en el proceso enseñanza-aprendizaje del estudiante. Como se ha mencionado al respecto de lo **"***tradicional***"** al recurrir y ahondar en los contenidos de los libros de texto, el estudiante tiene necesidad de *explorar* otras alternativas para crear su propio aprendizaje. Con relación a lo anterior, **Vargas (2017)** glosa su opinión que radica sobre la importancia

en el empleo de los *recursos didácticos*, al manifestar que estos pueden ser tanto físicos como virtuales, y asumen como condición, despertar el interés de los estudiantes que se adecúan a las características físicas y psíquicas de los mismos, además que facilitan la actividad docente al servir de guía; asimismo tienen la gran virtud de adaptarse a cualquier tipo de contenido.

Al hablar específicamente del *aprendizaje matemático*, no es la excepción, debido a las concepciones y preocupaciones que rodean a esta área del conocimiento humano, la Matemática; una vez que el estudiante aprende de forma autónoma por medio de algún *recurso didáctico*, busca la alternativa más apropiada para construir dicho aprendizaje y conocimiento; por ejemplo, páginas web que contienen ejercicios resueltos, videos donde es posible entender una explicación más clara y detallada, e incluso optar por hacer uso de algún software computacional que facilita el cálculo numérico y atiende a dar respuesta al problema en cuestión.

Sin embargo, el contenido de estos recursos que brindan la posibilidad de construir conocimiento matemático son empleados en el momento más inmediato que le es útil al estudiante o al docente, por ejemplo, en las siguientes situaciones**:** resolver una tarea y/o actividad, presentar algún examen, o simplemente para conformar parte de su bagaje matemático que con el tiempo construye, *empero* en gran medida de estos contenidos son *limitados*, y, por ende, el objeto matemático lo es aún más, ya que no se cuestiona sobre su desarrollo, por ejemplo, la manera en *cómo* evolucionó una fórmula, o *porqué* un procedimiento **(**o algoritmo**)** matemático **(**cualesquiera**)** se usa hasta hoy día de esa forma. Evocar este tipo de cuestionamientos es remontar al pasado, ya que al tener una retrospectiva del tiempo y la evolución que tuvo no solo histórica, sino epistemológica y didáctica que trajo consigo, es en sí hablar de los *orígenes* del mismo.

En este sentido la **ME** no se enfoca directamente en explorar cuestiones *históricas* y *contextuales* que le acompañan y anteceden a un determinado objeto matemático, sino que su objeto de estudio recae precisamente en su enseñanza debido a una transposición didáctica; por ejemplo, pensar en la manera en cómo evolucionó la definición de *función*, de *límite*, de *derivada* o de *integral* **(**por mencionar algunos objetos matemáticos**)** tal y como la conocemos hasta hoy día en un curso de Cálculo o de forma general *curricularmente*, elude toda aquella *epistemología* que pudiera existir detrás de ello.

El caso del **MSV** en **EDP** no es la excepción, ya que al estar dentro de la **M**atemática **E**scolar es posible detectar las ideas matemáticas sobre las cuales el método es útil escolarmente, lo que conlleva a identificar para qué tipo de ecuaciones funciona; ***primero***, diferenciar que no es el mismo método que se usa para separar variables en EDO; ***segundo***, dada su aplicabilidad en el campo de las EDP, cabe preguntar el siguiente cuestionamiento**:**

¿*para qué tipo de EDP el método es funcional****?***, responder esta pregunta ya es conocer la teoría matemática que respalda a este tipo de ED.

Si bien, el método se puede encontrar en una gran diversidad de literatura especializada donde está presente y se detalla su *funcionamiento matemático* como se ha mencionado anteriormente, sin embargo, el contenido de esa literatura no atiende a prestar atención en cuáles son las características del **MSV**, ya que, no se cuestiona sobre su *génesis* y por ende sobre los elementos que propician a que *funcione* hoy día de tal forma, por este motivo se conlleva a la presente investigación a situarse ante *un* contexto *histórico-epistemológico*.

Seguido de lo anterior, implica pensar en las circunstancias *espacio-temporales* en las que el pensamiento matemático involucrado de la *época* en la que *emergió* el **MSV** permitió unificar no solo las ideas matemáticas que le rodean a ese *saber matemático*, específicamente al contemplar desde la **TSME** al **MSV** como un **saber culto**, pues dentro de este enfoque se precisa la legitimidad de toda forma de saber, sea este popular, técnico o culto, todos en conjunto caracterizan a la sabiduría humana, por lo que se pretende validar propiamente a las *prácticas* en la comunidad científica de la época **(**Siglo XVIII**)** en la que emergió y en consecuencia al buscar en ella su valor epistémico de verdad, aunado a las implicaciones *sociales* y *culturales* que están inmiscuidas dentro del pasaje *histórico* que le confirieron a tal forma de consolidarlo como parte de un *conocimiento matemático*.

Por ello, el interés teórico de la investigación está en dilucidar la **C**onstrucción **S**ocial del **C**onocimiento **M**atemático que está presente en el **MSV** desde el enfoque de la **T***eoría* ***S****ocioepistemológica* de la **M***atemática* **E***ducativa*, a continuación, el presente capítulo, está contempla *secciones* y *subsecciones* que permiten tener una secuencia para un mejor entendimiento respecto a la articulación de los constructos teóricos de la **TSME** que coadyuvan a analizar la parte *textual* y *contextual* de esta investigación.

2.1 ¿Por qué se contempla a la TSME en esta investigación?

> "*Prefiero el conocimiento que la riqueza, ésta puede ser transitoria, lo otro es perpetuo*." — *Sócrates*

El caso de la *Matemática Educativa,* como disciplina científica que está inmersa en las $\mathcal{C}$iencias $\mathcal{S}$ociales y $\mathcal{H}$umanidades, y que en un primer acercamiento sobre su quehacer es pensar que su actuar está en responder al conjunto de problemáticas vinculadas sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, que si bien, en gran medida lo es, tras pasar el tiempo, los intereses de investigación en esta disciplina recobran visiones más amplias a su conjunto de problemáticas que suscitan.

Por mencionar algunas *líneas de estudio* en investigación en la Matemática Educativa, y que hoy día amplían las prospectivas en esta disciplina, se encuentra la formación del docente en Matemáticas, la introducción de tecnología en la enseñanza y aprendizaje de la Matemática, los usos del conocimiento matemático en diferentes comunidades, evaluación y reforma curricular; estas líneas de investigación se mencionan no porque sean las únicas que existen o las más importantes, sino para que el lector conozca la pluralidad del campo de acción de la disciplina, ante este panorama estas líneas necesitan situarse ante teorías específicas que aporten, desentrañen y propicien nuevas evidencias científicas al campo disciplinar a partir del rechazo o aceptación de hipótesis e incluso robustecer dichas hipótesis con el quehacer de que la investigación no es acotada.

Dentro de la Matemática Educativa, se han constituido diferentes marcos teóricos para interpretar los fenómenos de enseñanza-aprendizaje de la Matemática; se destaca que algunos son centrados a responder las problemáticas propias de la dimensión cognitiva del aprendizaje de la Matemática, otros asumen la problemática en términos de las interacciones entre el saber, el alumno y el profesor ante situaciones específicas secuenciadas para el aprendizaje de conceptos matemáticos **(Soto & Cantoral, 2014).**

No obstante, también impera una necesidad de introducir el aprendizaje de la Matemática en el *contexto social y cultural* como parte funcional de la vida del ser humano; de acuerdo con **Cantoral y Farfán (2003)** quienes enfatizan que**:**

> La enseñanza en general y la de las matemáticas en particular son asuntos de la mayor importancia para la sociedad contemporánea. A lo largo del tiempo, las sociedades han conformado instituciones con el objeto de incorporar a las matemáticas y a la ciencia en la cultura de la sociedad con la clara intención de favorecer entre la población una visión científica del mundo. **(p. 28)**

Tras mostrar el panorama sobre la pluralidad y diversidad de las problemáticas de forma general que conciernen a esta disciplina, ahora, es necesario recalcar que una vez mencionado lo anterior, se enfatiza que una de las posturas teóricas como la **T***eoría* ***S****ocioepistemológica* de la **M***atemática* **E***ducativa* parte de su objeto de estudio está el enfrentarse a problemáticas de ese *corte*.

La **T***eoría* ***S****ocioepistemológica* de la **M***atemática* **E***ducativa* **(TSME)** o simplemente **S***ocioepistemología*, incorpora contextos sociales y perspectivas culturales alrededor de los actores principales que están en los procesos didácticos, el aprendiz, el saber, así como sus interacciones en esos aspectos **(Cantoral, 2013)**, es decir, dichos contextos confieren un papel importante en la **C**onstrucción **S**ocial del **C**onocimiento **M**atemático **(CSCM)**.

Tras esta premisa, **Cantoral (2013)** expresa que**: "**La **T***eoría* ***S****ocioepistemológica* de la **M***atemática* **E***ducativa* se ocupa entonces, específicamente, del problema que plantea la construcción social del conocimiento matemático y el de su difusión institucional**" (p.62);** el término *institucional* alude a escenarios no escolares donde se propicie una interacción que promueva conocimiento **(Reyes-Gasperini, 2016).**

A lo largo del tiempo y del actuar de la disciplina ─ la Matemática Educativa ─ con la ayuda de la **S***ocioepistemología*, han existido una gran diversidad de investigaciones cualitativas y empíricas, para interpretar y dilucidar por medio de la articulación de *las cuatro dimensiones del saber* y *los principios* sobre los que se rige esta aproximación teórica la **CSCM**; al emplear *metodologías* y *análisis* derivados de la *problematización* del *saber matemático*.

Por lo cual, cabe destacar que, las primeras contribuciones científicas de la **S***ocioepistemología* como **(**una**)** escuela mexicana de *Matemática Educativa* sus investigaciones se remotan **(véase: Cantoral, 1990; Cordero, 1994; Farfán, 1993)** a finales de los años ochenta y principios de los noventa, donde parte de su objetivo concierne en atender formas de pensamiento matemático, fuera y dentro de la escuela, que se difundan socialmente a fin de caracterizarlos para su uso efectivo entre la población **(Cantoral, 2013).**

Lo anterior, deja esclarecido que entre sus intenciones de esta escuela de pensamiento dentro de la disciplina científica la ─ Matemática Educativa ─, es precisamente centrarse en buscar otros contextos, como el *social* y *cultural*, donde el ser humano propicie su *pensamiento matemático*, lo signifique y difunda socialmente mediante su uso como un *conocimiento matemático*.

Al hablar del *contexto social* implica pensarlo como un sistema complejo donde los individuos interactúan y son copartícipes de dinámicas que permean su entorno cultural y lo hacen ser identitario **[**como su**(**s**)** forma**(**s**)** de vida al incluir sus costumbres y tradiciones**]**, lo que provoca en un amplio sentido reflexionar en la manera en cómo estos individuos generan nuevos aprendizajes y la forma en que robustecen sus conocimientos y los ponen en *práctica*.

Desde la perspectiva de **Huang et al. (2019)** quienes argumentan que la construcción del conocimiento está mediada por el aprendizaje social que hace hincapié en el hecho de que los individuos aprenden de las interacciones sociales en comunidades y grupos; es decir, por medio de la experiencia que el grupo adquiere cuando colabora y desarrolla habilidades de pensamiento crítico, así como al poner en manifiesto su autorreflexión.

Específicamente el caso del aprendizaje de la Matemática desde el enfoque de la **TSME**, el conjunto de investigaciones que se han realizado, permiten concebir a la matemática no como un saber fijo y preestablecido, sino como un conocimiento con

significados propios que se construyen y reconstruyen en el contexto mismo de la actividad que realiza el hombre **(Arrieta et al., 2004),** lo que permite científicamente distinguir elementos que están intrínsecos en la construcción del conocimiento como herramientas y argumentos utilizados en contextos interactivos.

Es necesario resaltar que, en los inicios de la **S***ocioepistemología*, se estudiaban los fenómenos didácticos de manera sistémica, considerando sólo los tres polos básicos del triángulo didáctico**:** el contenido de la enseñanza **(saber)**, el sujeto que aprende **(alumno)** y quien enseña **(profesor)**, regulados en un medio didáctico controlado **(Véase *Ilustración* 4.)**, no obstante, pronto surgió una necesidad de sucesivas reconstrucciones**:** negaciones ampliaciones y reorganizaciones al nivel teórico **(Cantoral, 2013).**

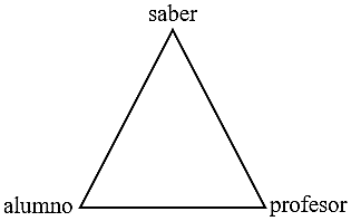


***Ilustración* 4.** *Triángulo Didáctico*. **(Cantoral, 2013, p. 45)**

Si bien, se reconoció que habría que incorporar dimensiones de *corte social* y *cultural* que significasen al conocimiento matemático que se originó, por ello, **Cantoral et al. (2014)**, expresan que**:**

> No basta con estudiar las relaciones entre profesores, alumnos y conocimiento escolar desatendiendo las *múltiples dimensiones del saber*, así como tampoco resulta suficiente con estudiar las restricciones institucionales de tipo pedagógico general descuidando aquellas otras restricciones ligadas específicamente al *saber matemático*. **(p. 97)**

Para esto, el marco *socioepistemológico*, una vez que se ocupó de incorporar *contextos socioculturales* como la manera en la que se *significase el origen* del conocimiento matemático; tras el surgimiento de nuevas necesidades, evoluciones y retos que encaraba la disciplina con el pasar del tiempo, las investigaciones de este corte, ocuparon tomar como *referencia* el *triángulo didáctico clásico* **(Véase *Ilustración* 4.)** para hacerle *modificaciones* que acaecieron su reinterpretar por medio de la *coyuntura social*.

El *esquema extendido* **(Véase *Ilustración* 5.)** dado por Cantoral **(**1998**)** **citado en Cantoral (2013)** al narrar sus palabras con base en el *triángulo didáctico clásico* fue una manera de poner en evidencia que cada uno de los polos de este triángulo **(**saber, alumno y profesor**)**, así como las relaciones por parejas **(**saber-profesor, saber-alumno y alumno-

profesor**)** se modificaban al mirarlos desde la tesitura social, cuya naturaleza al ser institucional, histórica y culturalmente situada, modificaba a su vez las ideas del aprendizaje, enseñanza y animación, así como al saber, al profesor y al alumno **(pp. 140-141).**

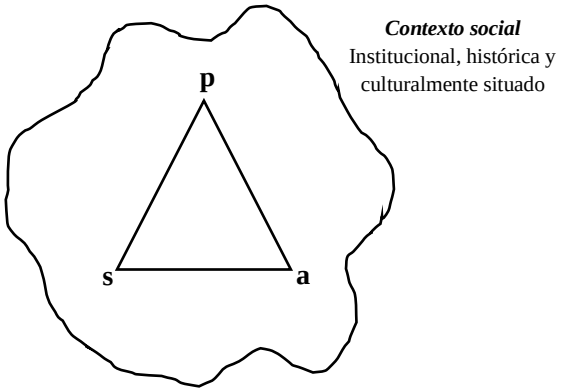


***Ilustración* 5.** *El triángulo didáctico extendido*. **(**Cantoral, 1998**)** **como se citó en Cantoral (2013)**.

De forma preliminar, esta **"***reestructuración***"** hecha por este enfoque, permitió concebir las *implicaciones sociales* y perspectivas *culturales* que entrelazan las relaciones establecidas por el *triángulo didáctico*, al sostener que se conservan los polos, aristas y contextos involucrados; **Cantoral (2013)** afirma que algunos autores señalan que la relación profesor-alumno se caracteriza por la *animación*, mientras que las relaciones profesor-saber por la *enseñanza* y alumno-saber por el *aprendizaje*.

Ahora bien, como lo hacen notar **Cantoral et. al (2014)** en donde explican que, en relación al esquema antedicho, sobre el quehacer de los contextos incorporados que *significan* la **CSCM**, aparecen ahora en los procesos didácticos, el aprendiz, el saber en tanto *conocimiento en uso* y los entornos socioculturales al fungir como principales actores.

Este enfoque *sociocultural* concibe a estos entornos como **"***agentes mediadores***"** debido a que sus relaciones en el quehacer e interactuar de un individuo o una comunidad transmutan a ser *prácticas de referencia* que son normadas por *prácticas sociales*, por lo que es asequible la generación de conocimiento matemático, y aunque no requiere de tener un marco de referencia en específico para ello, debido a que en toda actividad humana es propiciadora de este. De este modo la **S***ocioepistemología* propone el nuevo triángulo **(Véase *Ilustración* 6.)** como cimiento para su avance teórico.

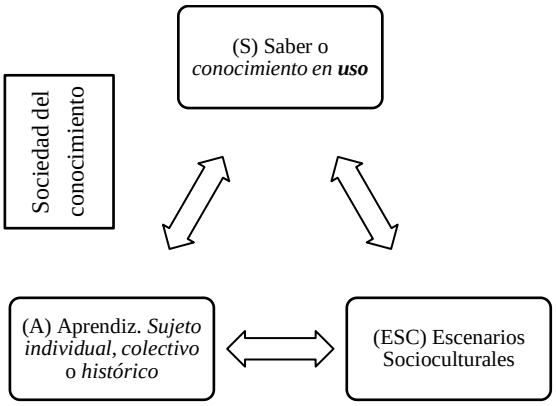


***Ilustración* 6.** *El triángulo didáctico de la Socioepistemología.* **(Cantoral, 2013)**

Con esto, se muestra un panorama versátil y amplio de la investigación de *corte socioepistemológico* en Matemática Educativa, al reconocer que la matemática es una actividad humana cultural e históricamente situada **(Buendía, 2010),** y que se necesitan contextos como el *social* para resignificar el saber matemático por medio de su construcción social, en escenarios no escolares.

Para ello, una vez que es mostrada la visión que contempla la **TSME**, esta investigación acoge dicha postura para analizar los procesos de **C**onstrucción **S**ocial de **C**onocimiento **M**atemático asociado al **MSV**, *objeto matemático*, considerado como un **saber culto**, derivado de la emergencia del conocimiento de la época durante el Siglo XVIII, en dos áreas del conocimiento científico, la $\mathcal{F}$ísica y la Matemática, y aunque el interés recae en su génesis epistemológica, el reconocimiento del pensamiento matemático de ese siglo, conllevó a consolidarlo a través de procesos y sucesos históricos que le antecedieron y por tanto permearon la actividad matemática propia de ese siglo, sin embargo, como se mostrará en el **Capítulo 4.**, la emergencia, producción y consolidación de estas ideas a lo largo de diez siglos, están ubicadas dentro del *marco de referencia*, la *Teoría de la Vibración*, una vez que el Análisis Textual y Contextual, permitió ubicar a esta rama de la Física, como el puente epistemológico de saber asociado al Problema de la Cuerda Vibrante.

2.2 El objeto de estudio de la TSME y las cuatro dimensiones del saber

"*Nunca se alcanza la verdad total, ni nunca se está totalmente alejado de ella.*" — *Aristóteles*

Cantoral (2013) menciona que**:**

> La Socioepistemología es una teoría de naturaleza sistémica que permite tratar con los *fenómenos de construcción social del conocimiento* y de su *difusión institucional* partiendo de una perspectiva múltiple de naturaleza sistémica al incorporar a su estudio

> las interacciones entre la epistemología, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza. En este sentido centra su atención en el *saber* **[**cómo**]** la construcción social del conocimiento y abre de este modo para la didáctica un campo de intervención para la acción educativa. **(p. 143)**

Para ahondar en la **CSCM** es necesario tomar en cuenta lo siguiente, el enfoque socioepistemológico asume la legitimidad de toda forma de saber, sea este *popular*, *técnico* o *culto*, pues en su conjunto constituyen la sabiduría humana **(Cantoral, et al., 2014),** lo que permite a partir de ello estudiar sistemáticamente las cuatro *dimensiones del saber* que lo componen.

Por esta razón es que la **S***ocioepistemología* toma en cuenta la complejidad de la *naturaleza del saber* y su *funcionamiento cognitivo*, *didáctico*, *epistemológico* y *social* en la vida de los seres humanos mostrando los procesos de adaptabilidad, empíricamente comprobables, que nos permitan alcanzar algún grado de satisfacción en nuestros actos de conocer **(Cantoral, 2013, p. 139)**.

De acuerdo con **Cantoral (2013)**, una forma en la que el lector conozca acerca de que tratan y consisten estas *cuatro dimensiones* es la siguiente**:**

> La *dimensión didáctica* del saber es relativa a su naturaleza como objeto institucional dirigido en los procesos de enseñanza a los aprendices, tanto en el ámbito escolar como no escolar, en la vida cotidiana, la esfera profesional altamente especializada o en la enseñanza de las artes y los oficios, en las prácticas comunitarias de acompañamiento. Una especie de enseñanza, pero en *aula extendida* para una verdadera *sociedad de conocimiento*. **(pp. 146-147)**

> La *dimensión epistemológica* se ocupa del análisis en profundidad de las circunstancias que hicieran posible la construcción del conocimiento matemático, su razón de ser. Pero **[,]** sobre todo, que lo hicieran público. **[. …]** En síntesis, la dimensión epistemológica concierne más bien a las formas en que el saber matemático puede ser conocido, el tipo de relaciones que el sujeto establece frente al objeto. **(pp. 147-148)**

> La *dimensión cognitiva del saber*, por su parte analiza las formas de apropiación y significación progresivas que experimentan quienes se

> encuentran en situación de construcción de conocimiento. El acto de conocer, como actividad humana puede ser modelado a través de las producciones de quienes construyen. Se analiza el desarrollo del pensamiento situado en su acción de significar y resignificar. De este modo habremos de entender, en un sentido moderno al *pensamiento* que incluye, entidades matemáticas y procesos avanzados del pensamiento, como abstracción, justificación, visualización, estimación o razonamiento bajo hipótesis. El pensamiento matemático operará sobre una red de conceptos y procedimientos, unos más avanzados y otros más elementales; quizá por ello los estudiantes no logran entender lo que significa una noción, a menos de que entiendan en un cierto nivel, que va más allá del manejo de técnicas asociadas, otros conceptos matemáticos que sean asociados. Esta situación fuera del aula, se complica considerablemente, pues los saberes no están compartamentalizados a encarar tareas de la vida cotidiana. **(pp. 148-149)**
>
> La *dimensión social y cultural del saber*, su textura sociocultural, se ocupa de los usos del saber en situaciones específicas. **[. …]** Algunos mecanismos sociales como la formación de consensos y la conformación de tradiciones suelen ser buenos medios para analizar el uso del conocimiento. Este se localiza en el ejercicio articulado de prácticas intencionales y normadas. Nuestro enfoque trata el problema de representación de un modo distinto, no busca discurrir teóricamente sobre la acción de representar al objeto mediante artefactos, herramientas o signos. Sino que se ubica al nivel de las *prácticas* y de la forma en que éstas se norman por *prácticas sociales*. **(pp. 149-150)**

El estudio sistemático de las cuatro dimensiones tiene como característica principal que no se pueden analizar de forma desvinculada o separada, y aunque por la naturaleza de la investigación y del método empleado, se separen temporal e intencionalmente en su conjunto se entretejen en una sola *unidad de análisis* **(Cantoral, 2013).** Tras este sentido, el prestar atención en la manera en que un *sujeto* "*aprende*" y por ende *construye su conocimiento* en el caso particular de la Matemática recae en la aproximación de la **TSME** al insertar toda forma de su interactuar social y cultural.

Al referir sobre el *aprendizaje matemático* de un sujeto o de una comunidad es contemplar *cómo* su identidad propia, y su estrecho vínculo que tiene con su entorno e incluso

con sus propias limitaciones tanto individuales como colectivas propician la generación de un *saber* o entendido también como *conocimiento puesto en uso* al momento de confrontar su empirismo con la práctica.

De este modo, al hacer mención entre el conjunto de *interacciones* que tiene un individuo con su comunidad los aspectos de índole *socioepistemológico* relucen tras considerar a estas formas de *actividad humana* consensuadas a que sean entendidas como *prácticas sociales*, y sean estas las generadoras de conocimiento matemático; investigaciones salen *a la postre* como la de **Covián (2013)** donde argumenta que esta es la hipótesis fundamental que sostiene la **S***ocioepistemología*.

2.2.1 Los cuatro principios de la TSME

> "*La inteligencia consiste no solo en el conocimiento, sino también en la destreza de aplicar los conocimientos en la práctica*." — *Aristóteles*

Desde la posición de **Buendía (2010)** en la que se refiere que **"**la propuesta socioepistemológica tiene como fin la reorganización de la matemática escolar y para ello, le apuesta a reconocer la naturaleza del conocimiento matemático**" (p. 12);** en esta tónica, al recobrar que esta investigación está sumergida en la atmósfera teórica ya descrita, se reconocen aquellos estudios que se han hecho hasta hoy día donde se refleja que aspiran a esclarecer el problema del *significado de los objetos matemáticos*, al hacerlo desde la *significación pragmática*, esto es, la significación de los objetos matemáticos se alcanza identificando prácticas, ejerciéndolas y estructurándolas, respecto de la función social que guardan ante el objeto **(Cantoral, 2019, p. 155),** de modo que el contenido de este escrito no es la excepción.

Consecuentemente este tipo de investigaciones con *proximidad* **S***ocioepistemológica* son un referente tanto para el presente como para el futuro al inquirir respecto a la **CSCM**, en lo particular **Arrieta et al. (2004)** a tal caso comentan que**:**

> los aspectos constructivos del conocimiento **[…]** derivan en un análisis de la relación entre prácticas sociales y el conocimiento, al entender a las prácticas sociales como un conjunto de acciones voluntarias que, intencionalmente, desarrolla el individuo para construir conocimiento. **(p. 418)**

Si bien se ha reiterado cuál es la *incesante* labor en el campo de la **S***ocioepistemología*, y aunque no es el objetivo poner en evidencia cada una de las investigaciones ya hechas hasta hoy día, lo que sí se rescata como *esencia de ser y de actuar* desde esta posición es el rol que tiene la actividad humana, sobre todo, ahora cabe pensar en una inversión de pensamiento **(**esto es dicho de forma despersonalizada teóricamente**)** sobre

los medios que generan la construcción de conocimiento, al no tener el foco de atención en un primer momento sobre *qué es lo que aprende*, sino *cómo lo aprende*.

Cantoral (2013) al citar a Cantoral **(**2002**)** y Cantoral et al. **(**2006**)**, pone en manifiesto que la práctica social no es lo que hace en sí el individuo o el grupo, sino aquello que les hace hacer lo que hacen, aun sin adquirir conciencia de sus acciones **[…]** esta práctica social en sentido teórico y filosófico, el autor indica que es un constructo que pretende establecer la intención transformadora, a la vez que ubica la actividad humana como un *acto social*. **(p. 152)**

Por lo antes dicho, el tratar con investigaciones que recurren a la **TSME** se asientan de forma *innata* en los cuatro principios, estos no poseen una secuencia lineal, pero si forman una red nodal, es decir, están articulados **(Véase *Ilustración* 7.)**, los cuales son**:** el *principio de la racionalidad contextualizada*, el *principio del relativismo epistemológico*, el principio de la *resignificación progresiva* o de la *apropiación situada* y el *principio normativo de la práctica social*. Para que el lector, tenga una mejor comprensión de estos, se expone de acuerdo a lo que **Cantoral (2013)** hace notar**:**

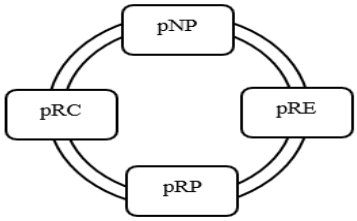


***Ilustración* 7.** *Principios de la Socioepistemología.*

El *principio normativo de la práctica social* es el eslabón fundamental en el que reposa la **S***ocioepistemología*, pues asume que las *prácticas sociales* son la base y orientación en los procesos de construcción del conocimiento, en otras palabras, son las generadoras del conocimiento.

La *práctica social* tiene cuatro funciones; **Reyes-Gasperini (2011)** las precisa del siguiente modo**:** *normativa* **(**de la actividad humana**)**, *identitaria* **(**dota de identidad cultural al individuo o al grupo**)**, *discursiva-reflexiva* **(**construye argumentaciones de acción**)** y *pragmática* **(**regula los comportamientos de los individuos**)**; estas se caracterizan por ser permanentes más no estáticas.

El *principio de la racionalidad contextualizada* hace referencia a que la relación del sujeto al saber es una función del contexto **(**social y cultural**)**, dicho de otras palabras, esto es, que la racionalidad del sujeto está permeada por el momento y el lugar determinado. Para explicarlo de mejor manera se adopta la idea de **Crespo (2007)**; en su investigación, indica que**:**

> El escenario sociocultural influye no sólo en las conductas, sino en la manera de actuar y de pensar de los miembros de la sociedad que lo habita, **[…]** **[**por lo que**]** todas las características de los escenarios socioculturales influyen en *la construcción de conocimiento, comprendido éste como un producto sociocultural*, **[énfasis añadido]** y por lo tanto representativo de la sociedad en la que se gesta. **(p. 38)**

Como punto de partida al siguiente principio, se toma al concepto de *relativismo* el cual sostiene que los puntos de vista no tienen verdad ni validez universal, sino que, en todo caso, sólo poseen una validez subjetiva y relativa a los diferentes marcos de referencia; bajo esta definición el *principio del relativismo epistemológico* acoge al *saber* desde sus diferentes acepciones **(**popular, técnico y culto**)**, lo que deriva que estos poseen valores epistémicos de verdad y que son relativos respecto de quién aprenda individual o colectivamente **(**su forma contextual**)**.

El *principio de la resignificación progresiva* hace alusión como punto de inicio a la *acción* del *sujeto* sobre el *objeto*, es decir, la *acción* como base del desarrollo del *conocimiento*, de ahí que se *derivan los significados construidos*, esto en la labor de la epistemología genética; bajo el actuar de la **S***ocioepistemología*, se toma el *conocimiento puesto en uso* donde el individuo o comunidad **(**racionalidad contextualizada**)** *resignificarán* sus saberes una vez que evolucionan como producto de sus diálogos, interactuar, quehacer, en sí, de sus prácticas **(**relativismo epistemológico**)**.

En síntesis, la **TSME** argumenta que las *prácticas sociales* son las que originan el conocimiento matemático. Al ubicar a un individuo o una comunidad en su contexto identitario **(**situacional y temporal**)** este es el que determina el *tipo* de *racionalidad* con la que aprende, y por medio de su interactuar *construye conocimiento* bajo situaciones específicas **(**prácticas de referencias**)** de su cultura **(**racionalidad contextualizada**)**. Al poner en *uso* este conocimiento y concebirlo como *saber*, este será "*aprobado*" de forma relativa en torno a su grupo identitario, ya que en ellos es donde erigió su *construcción* al infundir sus restricciones y diálogos **(**relativismo epistemológico**)**. Debido a que las *prácticas sociales no son estáticas*, es decir, sufren evoluciones por un **"***miríar***"** de condiciones **(**exigencias y necesidades**)** que emergen dentro de la misma comunidad, por esta razón, los *conocimientos puestos en uso* se resignificarán y se *dotarán* de otros significados por el mismo seno del grupo o comunidad **(**resignificación progresiva**)**.

Cantoral (2013) plantea persistentemente, que el enfoque *socioepistemológico*, asume al *saber* como *construcción social del conocimiento* y en ese sentido, se trata con los *saberes* popular, técnico y culto; donde el conocimiento pasa al saber mediante *acciones* deliberadas que el sujeto **(**individual o colectivo**)** realiza sobre el medio o sobre sus propias

acciones; estas «acciones *sobre* acciones», permiten una coordinación activa que estructura en una actividad que se *institucionaliza* como *actividad práctica* e *instrumental compartida*. Este proceso de *institucionalización* sólo es posible si se regula en el marco de *prácticas de referencia* que orientan a la actividad humana; **[…]** son entonces las *prácticas de referencia* las que, a través de mecanismos diversos **(***permanencia-cambio*, *transferencia por contigüidad*, *conservación de saberes*, *adaptación institucional***)**, instituyen a las actividades humanas, conforman instituciones compartidas.

Estas actividades ya instituidas se organizan para dar lugar a las *prácticas socialmente compartidas*, que pasan de una generación a otra por contigüidad generacional. Es con este pasaje que se dota de *uso* social al conocimiento, se le transfiere institucionalmente el valor de uso, el cual es por supuesto de naturaleza social pues proviene de la reiteración intencional y compartida de *prácticas*, ello origina la *experiencia compartida*, la *expertez*. Esta *práctica*, como se ha dicho, es regulada por las *prácticas de referencia* en escenarios socioculturales, que son normadas por *prácticas sociales*. Esta cadena de articulaciones entre prácticas, parte de una pieza básica, la coordinación entre *acción* y *actividad*. Ella moviliza distintos tipos de mediadores culturales, tanto prácticos como instrumentales, pero, sobre todo, conforma una noción de *práctica* que, en un sentido amplio, se le habrá de asumir como reiteración intencional y normada con la finalidad de alcanzar hábitos y gran experiencia ante labores específicas. Se crean de este modo entidades conocidas como *instituciones*.

Ahora bien, gracias a la articulación entre *práctica* y *actividad*, la **S***ocioepistemología* las articula de forma necesaria en su *Modelo de anidación de prácticas* o también llamado *Modelo de prácticas anidadas* **(Véase *Ilustración* 8.)** que propone de manera integrada **[…]** con ello el modelo propuesto en dicha estructura de prácticas anidadas se transforma en una triada jerarquizada $\{\boldsymbol{\mathcal{P}} \rightarrow \boldsymbol{\mathcal{PR}} \rightarrow \boldsymbol{\mathcal{PS}}\}$, que consta, respectivamente, del conjunto de *prácticas* que **organizan** a la actividad, el conjunto de *prácticas de referencia* que **significan** y **orientan** a las prácticas, y finalmente al conjunto de *prácticas sociales*, que **norman** las acciones, a las actividades, a las prácticas y a las mismas prácticas de referencia, es decir a todo tipo de prácticas según este enfoque. De ahí proviene el nombre usual, que, en la **S***ocioepistemología*, se le llama **“***epistemología de prácticas***”**.

Ahora bien, para que este proceso de articulación constructiva de prácticas construya efectivamente conocimiento, se precisa de una reflexión sobre dichas prácticas o sintéticamente se requiere de una *práctica social*, esto, es posible hacerse al seno de visiones más amplias y profundas como son los paradigmas, las cosmogonías o en nuestro caso, al interior o en la frontera de las llamadas *prácticas de referencia*. El sentido de racionalidad contextualizada lo brinda fundamentalmente la práctica de referencia. Por tanto, en el análisis

del Rediseño del discurso Matemático Escolar, el examen minucioso de las prácticas de referencia que orientan a las *situaciones de aprendizaje* es *el quid* de su eventual éxito.

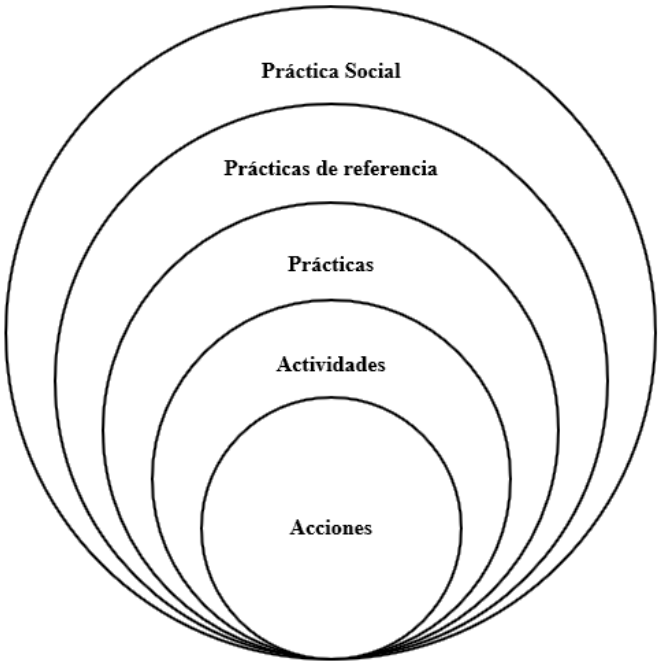


***Ilustración* 8.** *Modelo de anidación de prácticas.* **(Cantoral, 2013, p. 334)**

Desde el enfoque de la epistemología genética de Piaget, la *acción*, se concibe como la intervención activa de un sujeto que recae sobre los objetos del mundo o sobre otras acciones realizadas por el mismo sujeto a fin de adaptarse al entorno y organizarse internamente. De este modo podemos decir que las acciones ejecutadas por el sujeto constituyen la sustancia o la materia prima de toda adaptación intelectual y perceptual.

Ahora bien, desde el marco sociocultural de Vygotsky el concepto de desarrollo humano es un proceso cultural, al ser la *actividad humana* su motor principal. **[…]** Propone que en el desarrollo cultural se crean instrumentos que, sin tener consecuencias biológicas, amplifican las capacidades naturales de cada individuo. Es decir, el paso de lo natural o lo biológico a lo humano y cultural es mediado por el conjunto de artefactos convencionales que la especie humana ha elaborado, los signos tienen un valor funcional, un valor de uso. La actividad humana se caracteriza entonces por modificar y transformar la naturaleza.

Si la *acción* como noción de partida, está en la base de los fenómenos adaptativos funcionales del desarrollo de la inteligencia y consiste en la *intervención activa del sujeto sobre el objeto* **(**o sobre otras acciones realizadas por el mismo sujeto**)** a fin de adaptarse al entorno y organizarse internamente; entonces, la *actividad* como concepto teórico es el elemento vinculante del desarrollo es el elemento vinculante del desarrollo humano al desarrollo cultural y consiste en la *actividad práctica e instrumental mediada* **(**no individual,

sino en cooperación social**)** *para la formación de funciones psicológicas superiores*, a fin de modificar la naturaleza.

La respuesta que brinda el programa *socioepistemológico* a la manera en cómo se articulan *acción* y *actividad* ante tareas que precisan saberes sofisticados es la que alude al concepto de *práctica social*, pues es quien ejerce una *normativa regulatoria* para dicha articulación. La mediación, entre esta normativa y la actividad práctica en sí, la brinda la *práctica de referencia*, pues es la que provee el contexto temporal y situacional necesario para la resignificación. **(Véase *Ilustración* 9.)**

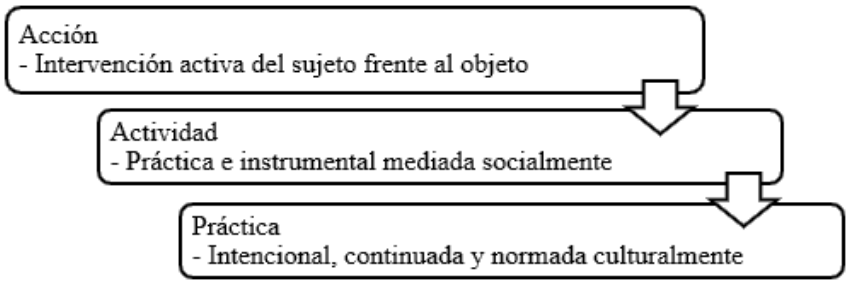


***Ilustración* 9.** *Acción→Actividad→Práctica.* **(Cantoral, 2013, p. 336)**

El análisis de la intervención activa del sujeto **(**individual, colectivo o histórico**)** sobre el objeto o sobre la práctica misma, posibilita el desarrollo humano, pero la actividad práctica e instrumental permite el desarrollo cultural, crea mediadores que amplían las capacidades naturales de los individuos y comunidades. La *práctica*, en tanto reiteración eficaz, intencional y controlada de la articulación acción-actividad, queda organizada por paradigmas o *prácticas de referencia*.

La articulación entre *acción* y *actividad* crea entonces un sistema que establece una relación simbiótica regulatoria **(**función normativa**)**. Es decir, el paso de lo natural o lo biológico, a lo humano y cultural es normado por la medicación del conjunto de artefactos que la especie humana ha elaborado **(**funciones discursiva e identitaria**)**. Esta medicación adquiere un valor funcional, un valor de uso **(**función pragmática**)**. Llamamos a la *práctica social* el *emergente* **(**como las propiedades del agua que emergen de la articulación de sus componentes**)** regulatorio que posibilitará el tránsito del conocimiento al saber.

2.3 El discurso Matemático Escolar

"La educación no cambia el mundo, cambia a las personas que van a cambiar el mundo." — Paulo Freire

Tal como lo deja esclarecido el planteamiento de la **TSME [**puede consultar la **Sección 2.1]**, la **ME** no es posible solo concebirla por los actores didácticos **(**profesor, alumno, saber**)** que intervienen con su actuar dentro de alguna institución educativa, ya que

al pensar en que estos elementos son los únicos que intervienen en el proceso *enseñanza-aprendizaje* del estudiante es limitar todas aquellas formas de actuar sustancialmente entre ellos mismos así como la inclusión de contextos transversales que le son inherentes, lo que induce así al surgimiento y existencia de "barreras" que impiden la *construcción de conocimiento matemático*; derivado de ello, la *filosofía* del funcionar de forma "estructurada" y política de la **ME** es que reúne causas y circunstancias que de cierta manera promueven la deserción estudiantil en esta área del conocimiento y que es reflejada en las estadísticas escolares.

Al referir las palabras de **Soto (2010)** quien apunta que**:**

> Desde la Teoría Socioepistemológica la problemática fundamental del aprendizaje de la matemática se encuentra en la estructura de la matemática escolar, donde los objetos matemáticos han sido el eje que ha normado la actividad áulica, con lo cual se ha soslayado la organización y la actividad humana que hizo y hace posible que los conceptos emerjan y sigan viviendo. **(p.3)**

Esta forma de "apostar" sobre las directrices que forman la trayectoria que sigue la estructura de la **ME**, se ha acotado sobre el rol que los *objetos matemáticos* ejercen en la actividad escolar, al contemplar que para su aprendizaje los únicos medios que lo propician son las actividades dentro del aula como los discursos orales del docente, el seguimiento de sus notas, la apropiación del uso exclusivo de un libro de texto o bibliografía especializada, los apuntes del estudiante e incluso el uso de la bitácora empleada por el docente para su seguimiento didáctico.

Los autores **Cantoral et al. (2006)** precisan que las investigaciones en Matemática Educativa centradas en la **S**ocioepistemología se ocupan de forma específica del problema que plantea la construcción social del conocimiento matemático y de su difusión institucional. *Este conocimiento adquiere el estatus de saber sólo hasta que se haya constituido socialmente en ámbitos no escolares* **[énfasis añadido]**, su difusión hacia y desde el sistema de enseñanza le obliga a una serie de modificaciones que afectan directamente su estructura y funcionamiento, de manera que afectan también a las relaciones que se establecen entre los estudiantes y su profesor.

La **S***ocioepistemología* en su intento por difundir estos saberes, sostiene que se forman discursos que facilitan la representación en matemáticas alcanzando consensos entre los actores sociales, **Cantoral et al. (2006)** al citar a Cantoral **(**1990**)** nombran a estos discursos con el término genérico de *discurso Matemático Escolar* **[dME]**, donde aclaran que la estructuración de dichos discursos no se reduce a la organización de los contenidos

temáticos, ni a su función declarativa en el aula **(**el discurso escolar**)**, sino que se extiende un tanto más allá, al llegar al establecimiento de bases de comunicación para la formación de consensos y la construcción de significados compartidos, a raíz de esto, los autores citan el sentido de Minguer **(**2004**)** al referir que se trata más bien de una unidad cultural.

A juicio de **Cordero et al. (2015)** al citar a **(**Soto, 2010; Soto y Cantoral, 2014**)** conciben a la matemática escolar como una institución que se le otorga una noble función social. Sin embargo, al estudiar sus características y fundamentos han reconocido al dME como un sistema de razón que ha normado las prácticas y representaciones sociales de los agentes educativos lo que provoca un tipo de exclusión a partir de una violencia simbólica.

Al precisar la investigación de **Soto (2010)** versa sobre este término, la *exclusión* en el **dME**. La esencia de esta, es cómo a partir de un *modelo teórico* explica que el funcionamiento del **dME** provoca una *exclusión*. Dicho modelo, permite entender que el **dME** es un *sistema de razón* que produce *violencia simbólica* **(Véase *Ilustración* 10.)**.

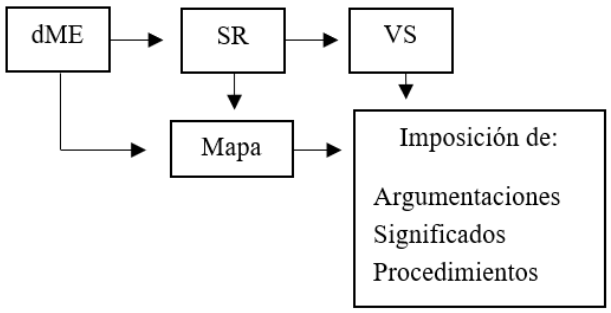


***Ilustración* 10.** *Modelo de exclusión.* **(Soto, 2010, p. 93)**

Según la autora, de este modelo prevalecen las siguientes consideraciones**:**

[1] Dentro *sistema de razón* no se considera un mecanismo que describe la estructura con la finalidad de excluir o incluir grupos de personas, sino que nace a partir de una *práctica social*, bajo la **TSME** como una necesidad de democratizar, difundir y formalizar el conocimiento matemático, y que a través de su estructura *limita* **[énfasis añadido]** el campo de acción posible, es decir, prevé de las reglas con las cuales deben comportarse los actores del sistema didáctico.

[2] Existen tres características que describen el funcionamiento de un *sistema de razón* en la relación a la exclusión**:** en primer lugar, que se puede entender como un *mapa* que delimita lo que queda fuera y lo que queda dentro de la "razón", es decir, lo que se considera como normal o no. En segundo lugar, que un *sistema de razón* genera categorías; y por último que esas categorías fabrican identidades. Debido a la jerarquía que existe entre

estas tres características del funcionamiento de un *sistema de razón* **(Soto, 2010, p. 71).** Dicho mapa **(Véase *Ilustración* 11.)** es el siguiente**:**

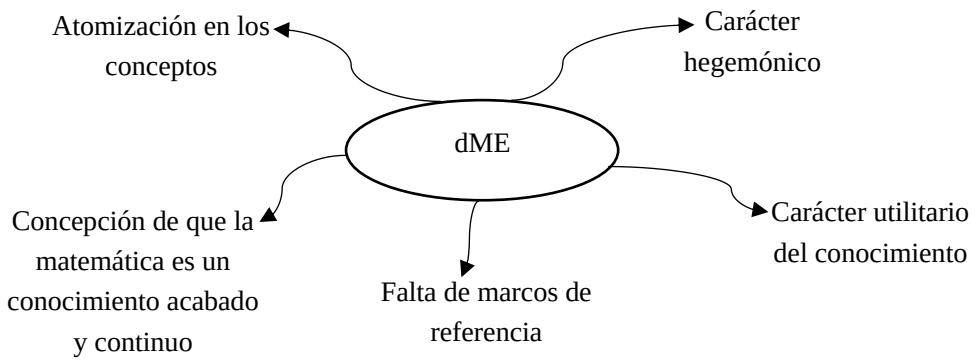


***Ilustración* 11.** *Mapa del dME.* **(Soto, 2010, p. 93)**

Si bien, estas características respecto al **dME** ya han sido evidenciadas y explicadas por las investigaciones en el campo disciplinar, pese a ello, se considera pertinente al pie de este escrito que el lector conozca su función. Estas son enunciadas por **Soto (2010)** así**:**

> **Atomización en los conceptos:** no considera los aspectos sociales, contextuales y culturales que permiten la constitución del conocimiento.
>
> **Carácter hegemónico:** supremacía de argumentaciones y significados frente a otras.
>
> **Concepción de que la matemática es un conocimiento acabado y continuo:** lo que ha generado que la enseñanza de la matemática sea reducida a la mecanización de procesos o memorización de los conceptos.
>
> **Carácter utilitario del conocimiento:** la organización de la matemática escolar ha antepuesto la utilidad del conocimiento a cualquiera de sus restantes cualidades. Se busca que el conocimiento tenga un carácter funcional, en el sentido de que logre integrar tal conocimiento a la vida para transformarla.
>
> **Falta de marcos de referencia para la resignificación de la matemática escolar:** se ha soslayado el hecho de que la matemática responde a otras prácticas de referencia y por tanto es ahí donde encuentra una base de significados naturales. **(p. xv)**

Una vez explicitadas las características del **dME** y al tener como referencia representativa los resultados de la investigación de Soto **(**2010**)** con base en su modelo propuesto, se precisa que el **dME** actual produce una exclusión de la **CSCM** al imponer argumentaciones, significados y procedimientos determinados, por tal motivo se requiere de un rediseño; **Reyes-Gasperini (2016)** señala que esta propuesta privilegia la articulación de argumentaciones y propicia la emergencia de racionalidades situadas y contextualizadas, lo que favorece el carácter funcional del saber **(**su valor de uso**)** e impulsa una resignificación progresiva que considere marcos de referencia diversos, en sí es conjuntar la simbiosis de los cuatro principios de la **TSME**.

La siguiente subsección de este capítulo, muestra la *metodología* implementada para atender la presente investigación, al reconocer la naturaleza del *objeto matemático* que se estudia. Se propone evidenciar con base en la fundamentación de la **S***ocioepistemología* una descentración del objeto al tratarlo ahora a través del entendimiento de su epistemología situada en el tiempo y el espacio como una construcción social, es decir, al distinguir todas aquellas actividades humanas que confieren al uso **(**empleo**)** del **MSV** lo que permite lograr identificar la existencia de una resignificación progresiva.

Se detalla en cada subsección de la **subsección 2.4** los elementos metodológicos empleados para el análisis de los datos usados en esta investigación, se articulan de tal forma que se presentan dos ilustraciones de forma esquemática el recorrido metodológico guiado y que al presentar el **Capítulo 4.**, los elementos socio-culturales surgen en el proceso del devenir de la problemática identificada y que en conjunto con los actores principales es que intervienen en el desarrollo de la epistemología matemática desde la antigüedad hasta principios del Siglo XVII, el **Capítulo 5.**, se define el paradigma de pensamiento dominante de la época del Siglo XVIII, así como el surgimiento del Análisis como herramienta matemática de la época y que finalmente una vez mostrados estos elementos es que se puede adentrar al análisis de la obra matemática del autor Jean le Rond D'Alembert, por medio de la visión **S*ocioepistemológica***.

2.4 La metodología en la TSME

> "*El misterio es la cosa más bonita que podemos experimentar. Es la fuente de todo arte y ciencia verdaderos.*" — *Albert Einstein*

El reconocimiento por el estudio histórico-epistemológico del **MSV** coadyuva a optar por la postura que sostiene la **TSME**, específicamente del *saber matemático*, donde se le construye, reconstruye, significa y resignifica para así ubicarlo como menciona **Cantoral (2013)** en el tiempo y el espacio, al explorarlo desde la óptica de quien aprende, de quien inventa, de quien lo usa**:** se posiciona a la opción constructiva en la perspectiva

histórica, cultural e institucional para que, en definitiva se lo rediseñe con fines didácticos **(pp. 97-98).**

Concretamente, la **S***ocioepistemología* tiene una metodología particular para llevar a cabo la **CSCM**, esta es, la *problematización del saber matemático*, para analizar este saber, **Cantoral (2013)** plantea que se deberá *problematizarse* **(***historiarse* y *dialectizarse***)**. Específicamente, trata de la polifonía entre los *procesos avanzados del pensamiento*, la *epistemología de las matemáticas* y las *prácticas humanas* altamente especializadas. En este sentido, el *saber matemático* [el *saber* **sobre** algo], no puede reducirse a una mera definición formal, declarativa o relacional, a un conocimiento matemático [el *conocimiento* **de** algo], sino que habrá de ocuparse de su *historización* y *dialectización* como sus dos mecanismos fundamentales de constitución. Es por esto que el *saber* habrá de ser concebido como una *construcción social* **(pp. 53-54).**

Reyes-Gasperini (2016) expresa que historizar, no se reduce al análisis de la obra en tanto objeto manipulable con ideas abstractas escritas y las articulaciones que en ella misma se sustenten, sino, al estudio de la racionalidad contextualizada con la cual fue concebida en su tiempo y espacio. **[…]** Dialectizar, por tanto, se puede concebir como el acto de confrontar racionalidades contextualizadas y darles, por qué no, el carácter de validez a las construcciones estudiadas y así, dotar de relativismo epistemológico **[…]** es decir, significarlas con base en sus contextos, entenderlas y estudiarlas con base en ellos. Esto es un acercamiento paso a paso a la resignificación del conocimiento matemático que está en proceso de problematización **(pp. 54-55).**

Hay que dejar en claro que, para que se lleve a cabo la *problematización del saber matemático* debe de considerarse que el objetivo más inmediato es entender los usos y razón de ser del conocimiento matemático estudiado **(Reyes-Gasperini, 2016, p. 55),** en **Cantoral (2013)** hace notar que, la *problematización* se debe trabajar mediante la articulación de las cuatro dimensiones, es decir sistémica, al considerar la composición de *uno* de los tres tipos de saber **(**técnico, popular y sabio**)**, y por cuestiones de método se separan, pero no pueden analizarse la una sin las otras, al final se entretejen.

Así, la siguiente subsección es destinada a mostrar una de las partes medulares metodológicas para recobrar elementos en torno al **MSV** que permitirán conferir un *análisis socioepistemológico* a fin de caracterizar este objeto matemático, una vez estudiada la producción matemática de Jean le Rond D'Alembert, con base en la *actividad matemática* del Siglo XVIII, así como recobrar los elementos *históricos-epistemológicos* que asocian la génesis de dicho *objeto matemático*.

2.4.1 El análisis histórico-epistemológico

> "*Lo que distingue las mentes verdaderamente originales no es que sean las primeras en ver algo nuevo, sino que son capaces de ver como nuevo lo que es viejo, conocido, visto y menospreciado por todos.*" — *Friedrich Nietzsche*

Si bien, ya se ha dejado esclarecido el objeto matemático del presente estudio, el **MSV**, el cual está presente en áreas del conocimiento científico **(**triangulación disciplinar intersecada**)** como la Matemática, la Ingeniería y la Física. En el **Capítulo 1.**, se ha comentado a través de *una aproximación a la problemática* **(Sección 1.2)**, donde se pone en evidencia el predominante *uso algebraico*, por lo que ahora, el reto cae plenamente en poder desentrañar tales características *epistemológicas* en torno al **MSV**, al incluir la visión socioepistemológica al conjunto de características *socioculturales*, que han permeado **(**resignificación progresiva**)** su legado histórico.

Al tratar con un *objeto matemático*, al respecto, **Buendía (2010)** al citar a Cantoral **(**2000**)** opina que el enfoque que se suele asumir respecto a ellos es que existen previamente y que las dificultades didácticas yacen en la distancia entre las imágenes formadas por el individuo y los objetos matemáticos, incluso, ella menciona también la investigación de Cordero **(**2003**)**, quien señala que, mientras los objetos sean la metáfora principal para explicar cómo se construye el conocimiento matemático, éste sólo podrá ser explicado desde la matemática misma. Las epistemologías formuladas en este marco, en el mejor de los casos ayudan a tener cierto entendimiento de los conceptos y sus desarrollos, pero difícilmente logran establecer relaciones funcionales entre conceptos y estructuras a lo largo del sistema educativo **(p. 16).**

Lo anterior conlleva ahora a pensar precisamente en un **"**rescate didáctico**" (**que evidentemente no es inmediato**)** y que dicho en otras palabras, al no estar presente escolarmente, es que el estudio *epistemológico* entra en juego, el cual, permite atender a toda aquella forma de construcción del conocimiento científico del individuo, o en su conjunto colectivo que lo ubica en una sociedad en el tiempo, y en el espacio, es decir, en su cultura **(**costumbres y tradiciones**)**, así como la manera en que éste lo adopta por el legado de la *praxis identitaria* que incluso puede reconstruir, finalmente a juicio de quien lo use es como el individuo lo valide o lo rechace, actualmente, el enfoque de la **TSME** tiene como una tarea compleja, insertarlo en un medio difusivo aparte del escolar, donde pueda ser socialmente compartido.

Al tener en cuenta a **Buendía y Lezama (2012)** quienes citan la investigación de Bachelard **(**2000**)**, en donde él menciona que el historiador de la ciencia debe tomar las ideas como hecho, mientras que el epistemólogo debe tomar los hechos como ideas, insertándolas en un sistema de pensamientos. Un hecho mal interpretado por una época es un hecho para

el historiador. […] Los autores también comentan que, en una revisión de corte histórico, la socioepistemología utiliza técnicas de investigación epistemológica donde esta es entendida como la revisión de las circunstancias involucradas en la generación de conocimiento matemático. Así, la búsqueda histórico-epistemológica implica no solo la relatoría de hechos históricos, sino de aquellas circunstancias socio-culturales que los rodean. Es una búsqueda del hacer del hombre, en tanto ente social que genera y usa el saber matemático en cuestión **(pp. 93-96).**

Al respecto, esta investigación que está encaminada en el corte **"**histórico y epistemológico**"** acarrea situaciones investigativas donde se deba explorar sin trastocar o manipular el conocimiento matemático de antaño, sino más bien, ser cuidadoso en preservar la producción matemática aunque se tenga en pleno conocimiento que la matemática de antaño ha sufrido una **"**evolución**"** no solo de notación en los objetos matemáticos que la componen, sino un cambio de paradigma matemático-conceptual hasta el día de hoy, preservar esa sensibilidad entreteje toda la difusión institucional.

Respecto a la epistemología del objeto del saber científico, **Artigue (2018)** hace notar que el análisis epistemológico es, a su criterio, necesario para el didáctico ya que tiene el fin de ayudarle a colocar a distancia y bajo control las **"**representaciones epistemológicas**"** [esta noción se introduce en la investigación de la autora para diseñar las concepciones que se forjan dentro de este dominio un individuo dado, a través de su propia vivencia matemática] de las matemáticas inducidas por la enseñanza**:**

[a] Proporcionar una historicidad a los conceptos matemáticos que la enseñanza usual tiende a presentar como objetos universales tanto en el tiempo como en el espacio.

[b] Proporcionar, a la vez una historicidad a las nociones matemáticas como las de rigor, ya que la enseñanza usual cultiva la ficción de un rigor eterno y perfecto de las matemáticas.

Dentro del mundo de la enseñanza, la introducción dentro del rigor matemático se simboliza por la introducción dentro del universo de la geometría demostrativa, y la referencia implícita o explícita a la geometría griega ligada a esta representación, contribuye a conducir y reforzar esta ficción fuera del tiempo y del espacio.

El análisis epistemológico coloca en evidencia la evolución del rigor con el paso del tiempo, su dependencia de los dominios matemáticos relativos y los niveles de elaboración de los objetos que el manipula. El ejemplo que esta autora da, es el del Cálculo Infinitesimal, quien a su criterio le parece particularmente significativo en esta dependencia del campo. Este se va a desarrollar, a partir del Siglo XVIII, esencialmente alrededor de los métodos**:** métodos de los indivisibles **(**Cavalieri, Roberval, …**)**, método de adegalizaación **(**Fermat**)**,

método de particiones infinitesimales **(**Leibniz, Bernoulli, …**)**, método de series **(**este último constituye, sobre todo durante el Siglo XVIII, el proceso privilegiado de las funciones**)**.

Y aquello que, valida estos métodos, por lo menos durante los primeros tiempos, es ante todo su carácter de método, es decir, su capacidad de adaptación a la resolución de una gran cantidad de problemas y su productividad **(p. 2).**

2.4.2 Análisis de obras originales

> "*Grandes descubrimientos y mejoras implican invariablemente la cooperación de muchas mentes*." – *Alexander Graham Bell*

El *inicio* de este análisis como menciona **Cantoral (2013)** se identifica la manera en que los estudios que involucraban el *análisis de obras originales* su principal característica fue la manera de entretejer los hechos epistemológicos con las circunstancias históricas y culturales que le acompañan, tanto al nivel de las instituciones, como de los actores y sus prácticas **(p. 108).**

El reconocimiento de uno de los primeros "logros" del enfoque de la **S***ocioepistemología* fue la noción o representación del *Prædiciere* **(**Cantoral, 1990, 2001**)**, en tanto que este se encuentra en la génesis y el desarrollo de dos conceptos centrales**:** la *predicción* y lo *analítico*, esto fue posible, gracias al análisis sistémico de textos originales de la época, que cubre el periodo de la época *newtoniana*, lo que a su vez la relación de la naturaleza simbiótica entre ambos conceptos, permitió localizar y analizar los procesos de *resignificación progresiva* y de *racionalidad contextualizada*, cuyo *valor epistémico es relativo* al escenario y se encuentra *normado* por *procesos sociales*, por ello el *Prædiciere* tiene naturaleza de una *práctica social* **(Cantoral, 2013).**

Derivado de lo anterior, para llegar a rediseñar el discurso Matemático Escolar, se elaboró una metodología compuesta de varios elementos que definen a la **S***ocioepistemología*, y que en ese instante esto fue posible gracias al análisis de Obras Matemáticas, estas fueron**:** la génesis histórica, la didáctica de antaño, la fenomenología intrínseca, los constructos característicos, la reconstrucción de los significados asociados y la praxis educativa**:**

[a] La *Génesis histórica***:** Se proponía reconocer con detalle las circunstancias sociales, culturales e institucionales que propiciaron la construcción de conocimiento a lo largo de su evolución histórica. La génesis de las prácticas, o más precisamente, la *epistemología de prácticas* al tener vínculo con la génesis de los conceptos y los procesos asociados.

[b] La *Didáctica de antaño***:** Se identifican las ideas preexistentes tanto las dominantes como las secundarias, en la enseñanza de la época en cuestión, mismas que

hacían alusión al conocimiento matemático nuevo; esta propuesta tiene como hipótesis que *el saber es un producto cultural* y excluye el supuesto de *la generación espontánea de conocimiento*.

Una parte importante, es que de este análisis se desprende la forma en como era concebida la enseñanza de la matemática, asimismo el grado de importancia de ésta en el panorama del conocimiento en general y de su relación con otras áreas del conocimiento. Así a través de dicho análisis, fue posible detectar que en la concepción de la enseñanza de las ciencias no existió nunca una delimitación precisa entre la práctica matemática y la otra ciencia, lo que hace *más comprensible el comportamiento de las tendencias educativas de la época*.

[c] La *Fenomenología intrínseca***:** Apoyada en un inicio por los señalamientos de Hans Freudenthal **(**Freudenthal, 1983**)**, se señala la necesidad de contar con una *fenomenología* propia de los conceptos y procesos involucrados, al entender fundamentalmente el rescate de todos los elementos que caracterizaron los diferentes significados que la noción adquirió en su génesis histórica.

Es decir, se concibió a esta *fenomenología intrínseca* de los conceptos matemáticos como un constructo que restituye al significado actual, el conjunto de otros significados construidos a lo largo de la génesis conceptual y que la propia historia de las ideas y las prácticas eliminó **[…]** por lo que *resignifica* al uso social del concepto en la medida en que le dota, de nueva cuenta fuentes de significación.

[d] Los *Constructos característicos***:** Son todos los recursos cognitivos de quien aprende a fin de actuar sobre los objetos de conocimiento y de esta forma construir conocimiento. A través de un análisis riguroso de la génesis histórica de los conceptos, se identifican los *constructos característicos* que vienen a aclarar los procesos “reales” por los que atravesó la construcción de cada concepto matemático; ellos posibilitan la identificación de analogía y procesos inductivos que definen formas personales de aproximación al objeto. Así se llegaron a definir estilos de pensamiento matemático, **[…]** al reconocer una estructura cognoscitiva que posibilitaría la adquisición de nuevos conocimientos.

[e] La *Praxis educativa***:** Se refiere a la reflexión sobre la práctica educativa por medio de la investigación, lo que posibilita que esta simbiosis se afine progresivamente hasta alcanzar el aprendizaje en matemáticas por parte de los estudiantes, que es el objetivo final de la práctica educativa.

Como sigue a continuación, se muestra un esquema metodológico propuesto para dar seguimiento al corte *histórico-epistemológico* en el que se enmarca esta investigación. De forma general, la ilustración detalla el camino identificado que, desde el principio con base

en la *Naturaleza del objeto*, conlleva al esquema hasta la manera en que se configura la hipótesis epistemológica **(Véase *Ilustración* 12.):**

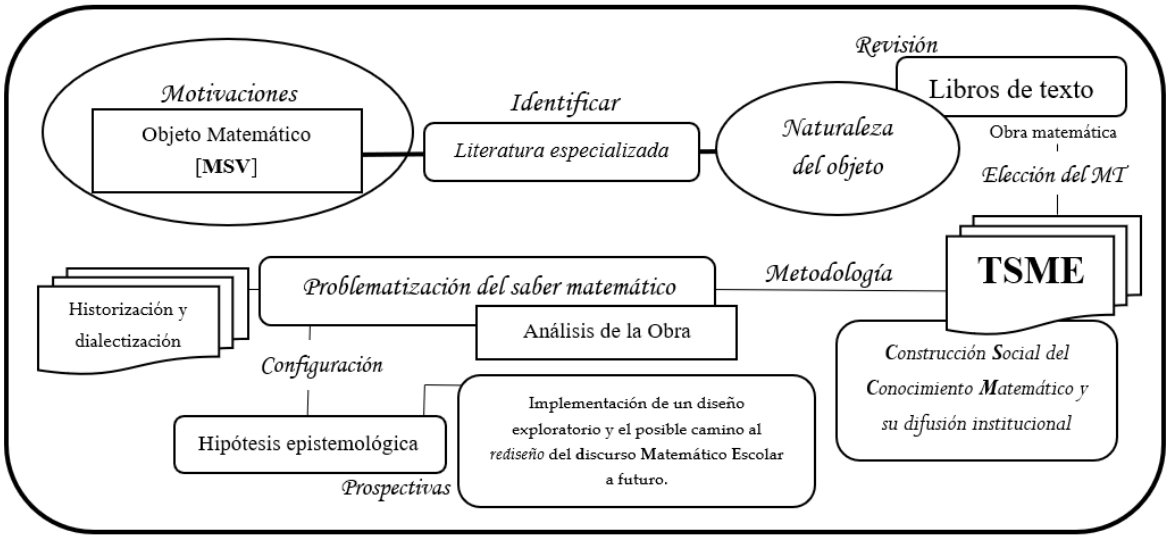


***Ilustración* 12.** *Esquema metodológico de la investigación.* **Fuente: Elaboración propia.**

Una vez que ha sido resumida en la ***Ilustración* 12.**, la manera en que la investigación es atendida metodológicamente, la atención recae ahora sobre la manera en *cómo* se va a estudiar el *objeto matemático* puesto en escena, para ello, la *Naturaleza del objeto*, deriva las herramientas metodológicas propias de la **TSME**, las cuales, a través de la *historización* y la *dialectización*, en torno al objeto matemático se ponen en juego en el *Problema de la Cuerda Vibrante*.

Como parte de la *historización* se ha identificado el *marco de referencia* asociado al problema, la *Teoría de la vibración*, la cual, permite entender aspectos claves sobre la génesis del *objeto matemático* que atiende esta investigación, es decir, al poder ubicar en el tiempo y espacio el conjunto de ideas asociadas a este *marco*, al emerger así *epistemologías físicas* y *matemáticas* a lo largo de más de diez siglos, las cuales se identifican por medio de *rutas históricas* que se terminan de consolidar en el *Problema de la Cuerda Vibrante*.

El proceso que sigue esta metodología socioepistemológica configurada, durante la *dialectización* se hace hincapié en la *actividad matemática* como parte de las evoluciones epistemológicas dadas durante toda la brecha histórica identificada en la *génesis histórica* del *Problema de la Cuerda Vibrante*, una vez que se delimitó el devenir *histórico-epistemológico* con base en la **"***posible***"** *práctica de referencia* identificada desde sus inicios en la Civilización Griega hasta su consolidación en el Siglo XVIII con el surgimiento del Análisis, y pudiéndose robustecer posteriormente con el pasar del tiempo, hasta hoy día como se le conoce en el campo de la Ingeniería**:** la Acústica.

Los personajes que salen a la luz del problema conllevaron a una contribución evolutiva de la algebrización y geometrización al análisis matemático, dado que esta última actividad matemática se encontraba *en ciernes* en el Siglo XVIII, y que se terminó de erigir con el trabajo de Cauchy. Pero como sostiene **Møller Pedersen (1980)**, ya en el período de 1630-1660 es necesario conocer las matemáticas que le precedieron. Las matemáticas de este período estuvieron muy influenciadas por la matemática griega clásica. La razón de la importancia de la matemática griega fue que durante el Siglo XVI se había hecho habitual que los matemáticos adquirieran un conocimiento de esta disciplina, las cuales fueron admiradas por su gran rigor, pero sus métodos no eran heurísticos, no estaban bien preparados para sugerir ideas sobre cómo abordar un nuevo problema, por ejemplo, cuando se tratase de cuadraturas.

Por lo tanto, era natural buscar otros métodos que, si no estaban a la altura de la exigencia griega de exactitud, al menos pudieran sugerir ideas sobre la solución de problemas. Las semillas de tales métodos se encuentran en el período anterior, a finales del Siglo XVI y principios del XVII, que fue una época fértil para las ciencias exactas en su conjunto, por mencionar algunas, la astronomía hizo grandes avances gracias al trabajo de Johannes Kepler; Simon Stevin contribuyó mucho a la estática con su tratado *De Beghinselen der Weeghconst* **(**"Los elementos del arte de pesar**:** 1586a"**)**. En mecánica, la deducción de Galileo Galilei de las leyes de los cuerpos en caída libre y de las trayectorias parabólicas de los proyectiles significó una ruptura con la física aristotélica y el comienzo de una nueva época, en la que las matemáticas se utilizarían ampliamente en la física.

Muchos matemáticos del Siglo XVII no eran matemáticos de profesión. Esta tendencia fue especialmente notable en Francia. **[. …]** Este período ofrece varios descubrimientos independientes y casi simultáneos con sorprendente parecido, que a menudo dieron lugar a disputas sobre la prioridad y las acusaciones de plagio. Hoy es posible establecer que por regla general estas acusaciones eran infundadas, pero en ese momento esto no era posible, ya que no era común publicar tratados. Para esto hubo dos razones principales, primero después de 1640 los editores se mostraron reacios a imprimir literatura matemática, que no era muy rentable y segundo, los matemáticos se mostraron reticentes a publicar sus nuevos métodos, al querer publicar solo sus resultados. Muchos tratados tuvieron que esperar mucho tiempo para su publicación**:** varios se dejaron de imprimir hasta finales del Siglo XIX y principios del XX, y algunos permanecen inéditos hasta el día de hoy.

No fue hasta el último tercio del Siglo XVII cuando aparecieron las revistas científicas; antes de esa época los matemáticos se comunicaban por carta. Aquí el francés Marin Mersenne jugó un papel importante, pues se mantuvo en contacto con muchos científicos europeos por correspondencia y reuniones que celebró en el convento de París. A

los matemáticos les envío problemas que no podía resolver por sí mismo, y se ocupó de que los resultados y manuscritos que recibiera fueran distribuidos entre los interesados de ellos **(pp. 11-13).**

Tal y como dice el autor, la correspondencia sobre la actividad matemática durante mucho tiempo se sostuvo como parte de polémicas y controversias entre los matemáticos de las épocas en cuestión las cuales en gran medida fueron solucionadas a través de mantener correspondencias académicas entre los personajes principales al problema, a través de los medios de comunicación existentes como en gran medida lo fue *la carta*. Para los fines metodológicos que atiende la presente investigación, una vez detallada la *historicidad* como una manera de desentrañar parte de la génesis *histórica-epistemológica* alrededor del **MSV** se logró identificar una *posible práctica de referencia* **(***definida* hasta el **Capítulo 6. Conclusiones de la Investigación)** que está presente en cada una de las rutas históricas identificadas que ayuda a sostener una transversalidad evidentemente por medio de su evolución pragmática sobre la actividad matemática de cada época, al refinar así el conocimiento matemático vinculado desde la primera ruta identificada en la Edad Antigua hasta llegar al Siglo XVIII y por ende los trabajos posteriores vinculados al *marco de referencia*.

Para ello, como se ha dicho ya, párrafos anteriores, el *Problema de la Cuerda Vibrante*, reúne una parte esencial en los inicios de la consolidación del Análisis Infinitesimal, por lo que, dada la *historicidad* hecha al *objeto matemático*, se toma como referente el primer trabajo matemático del Siglo XVIII, en donde por primera vez *en él* se explicita un modelo matemático y una *proximidad a la solución general* en torno a esta controversia suscitada.

Dicho trabajo es la *obra matemática* de *Jean le Rond D'Alembert* titulada *Recherches sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibration*, escrita en 1747 y publicada en 1749, la cual se convierte en un *referente* para analizar en *que parte de la obra* el **MSV** emerge para así poder expresar una solución al problema en cuestión.

Al proseguir con dicho análisis *histórico-epistemológico* que se realiza en el **Capítulo 5.**, intitulado **"El paradigma dominante del Siglo XVIII: La matematización del movimiento y el surgimiento del Análisis Matemático"**, se hará explícita la epistemología matemática de esa época, que si bien, en la obra de D'Alembert de 1747, las ideas del *Problema de la Cuerda Vibrante*, ya estaban plasmadas y consolidadas por este personaje, gracias al aporte de los matemáticos de la época y propiamente al robustecimiento de las ideas asociadas a la *actividad matemática* del *marco de referencia*, la *Teoría de la vibración*, sin embargo, el trabajo de D'Alembert en lo que implicaba, el sostener una correspondencia académica trajo consigo una serie de controversias que envolvieron a la

"*solución***"** que encontró al resolver la famosa *ecuación de ondas en una dimensión* **(***unidimensional***)**, la cual fue puesta en *tela de juicio* por Daniel Bernoulli y Leonhard Euler, matemáticos interesados en poder explicitar y sostener un *argumento físico* y *matemático* sobre la manera en que la *función solución* adoptaba los siguientes aspectos**: [1]** la forma geométrica **(***bosquejo gráfico***)** y **[2]** que además esta forma **(***geométrica***)**, debía asociarse a una expresión analítica **(***función***)**. A raíz de esto, Bernoulli y Euler conllevaron a una serie de divergencias académicas por la solución que planteó D'Alembert.

Por ello, esta investigación al contemplar el *Problema de la Cuerda Vibrante* que trajo consigo en cierta manera **"***disputas académicas***"** entre los actores principales del Siglo XVIII, se toma como principal referente, el trabajo de D'Alembert, dado que se conoce por primera vez su *matematización* con las condiciones asociadas al problema, es decir, la *ecuación que modela el movimiento de una cuerda tendida que es puesta en vibración*.

El *análisis de los datos* que contempla esta investigación es con base en la *Naturaleza del objeto*, sin embargo, conviene esclarecer los siguientes aspectos**: [1]** como bien, ya se mencionó el objetivo de la *Problematización del saber matemático* de esta investigación es *caracterizar* el **MSV** en la obra matemática de *Jean le Rond D'Alembert* **(***Addition au memoire sur la courbe que forme une corde tenduë, mise en vibration***)** por medio de una *historización* y una *dialectización*, el escenario que se pone en juego es el *Problema de la Cuerda Vibrante*, **[2]** como se ha detallado, este problema, fue explicitado por D'Alembert en 1747 en su *primera memoria* intitulada como *Recherches sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibration*, la cual contiene *once artículos*, en donde al finalizar esta, el autor detalla que existen más consecuencias que se pueden extraer de la solución general que da al problema, por lo que **[3]** para dar detalle de la continuidad de su memoria D'Alembert posteriormente las brinda en su *segunda memoria* intitulada *Suite des recherches sur la courbe que forme une corde tenduë, mise en vibration* escrita en 1747 pero publicada en 1749, en ella revisa las propiedades **(**características**)** de la dinámica que produce la cuerda vibrante, específicamente en lo que refiere a *su solución*, mientras que en la *tercera memoria, Addition au memoire sur la courbe que forme une corde tenduë, mise en vibration* escrita en 1750, pero publicada dos años más tarde **(**1752**)**, *brinda una explicación del método que empleó en el artículo* XXII de la *segunda memoria*, al ser este lo que hoy día en la **M**atemática **E**scolar se conoce como **M***étodo de* **S***eparación de* **V***ariables* **(MSV)**.

Por ello, una vez que se ha identificado el trabajo matemático del autor, referido al *Problema de la Cuerda Vibrante*, se deben considerar las siguientes observaciones, **[1]** este problema es abarcado en las *tres memorias*, pero únicamente el interés investigación se centra en el *momento* donde el *objeto matemático* **(MSV)** surge como una manera de poder dar una justificación a la **"***proximidad a la solución general***"** que D'Alembert encuentra en el

problema; al ser en la ***tercera memoria***, donde se identifica y **[2]** las *tres memorias* están en el *idioma francés* por lo que se optó por traducirlas al idioma español **[***la traducción es nuestra***]** y dado que el interés está en *analizar* la obra por medio de un análisis de corte **S***ocioepistemológico*, se han considerado de manera general los siguientes lineamientos metodológicos que han sido puestos en marcha al momento de trabajar con el análisis directo de la obra, los cuales son**:**

[1] Al llegar con el análisis de la obra se ha hecho ya una retrospección *histórica* situada en dos ejes**:** de corte *social* y *cultural* que permitió esclarecer la manera en *cómo epistemológicamente* el *Problema de la Cuerda Vibrante* se consolidó hasta la *actividad matemática* propia del Siglo XVIII, al reconstruir *históricamente* el conjunto de ideas asociadas a la *posible práctica de referencia* reconocida por su epistemología física y matemática vinculada estrechamente con el marco de referencia, la *Teoría de la vibración*.

[2] Al tener un contacto directo con la obra, conllevó a realizar una exploración de la misma donde en ningún momento se *trastoca* el trabajo del autor como el adherir términos propios del lenguaje en el que está escrita **(**francés**)**, es decir, se respeta en todo momento la *sintaxis* del texto e incluso ***no*** se incorporan nuevos *objetos matemáticos* como conceptos matemáticos, proposiciones, axiomas, corolarios, teoremas, o bien algún tipo de simbología matemática y/o geométrica que pudiesen alterar la *actividad matemática* del autor.

[3] Se explora la obra del autor al articular la secuencia que sigue en sus *Memorias*, dado que explícitamente el método aparece hasta la tercera memoria. Debido a esto, el interés está centrado en mostrar con base en el *método propuesto* por **Cantoral et al. (2015)** al emplear el modelo de *anidación de prácticas* **(Véase *Ilustración* 8.)** dada la naturaleza de la investigación **(**documental**)**, se inicia con el nivel de *acción*, donde se pretende buscar una posible *actividad*, en el nivel de *actividad humana*, la cual se pueda generar por medio de llevar a cabo *tareas* específicas con relación en su actividad matemática, en este caso, en el marco histórico-epistemológico donde el autor está ubicado.

[3.1] Para hacer el análisis refinado de las *acciones*, se plantea cada sección o secciones que componen a la obra, las siguientes preguntas**:** ***qué debe hacer***, para explicitar la acción directa con el objeto, ***cómo lo debe hacer***, para identificar las herramientas que se lo permiten, y ***para qué lo debe hacer***, al buscar reconocer la intención de la obra matemática.

[3.1.1] Del punto **[3.1]** redefinimos las preguntas sin que pierdan su objetividad durante el análisis de la obra en un escenario contextualizado donde se genere una manera de ver como el autor transmite sus ideas**: *¿qué hace*?**, ***¿cómo lo hace*?**, ***¿para qué lo hace*?**

[4] En sus *Memorias* presentadas por Jean le Rond D'Alembert, puede apreciarse la manera en que su trabajo matemático en ciertas secciones referencia alguna construcción

geométrica que da sentido a su explicación, por ello en el **Capítulo 5.**, se dispone a mostrar el texto original de la obra, y si en algún momento es que alguna de estas secciones, indique visualizar alguna construcción geométrica, esta se presentará en la traducción hecha.

[5] Cabe resaltar que el **A***nálisis* **S***ocioepistemológico* se atenderá como se menciona en el punto **[3]** para así poder verificar que el objetivo que atiende esta investigación se cumple al sustentar la caracterización histórica-epistemológica alrededor del **MSV**. A continuación, se presenta una ilustración a manera de poder visualizar la *Problematización del saber matemático*, en donde de manera explícita los elementos metodológicos identificados a lo largo de la *historización* y la *dialectización* son conjugan a fin de poder entender el proceso que sigue esta investigación **(Véase *Ilustración* 13.)**.

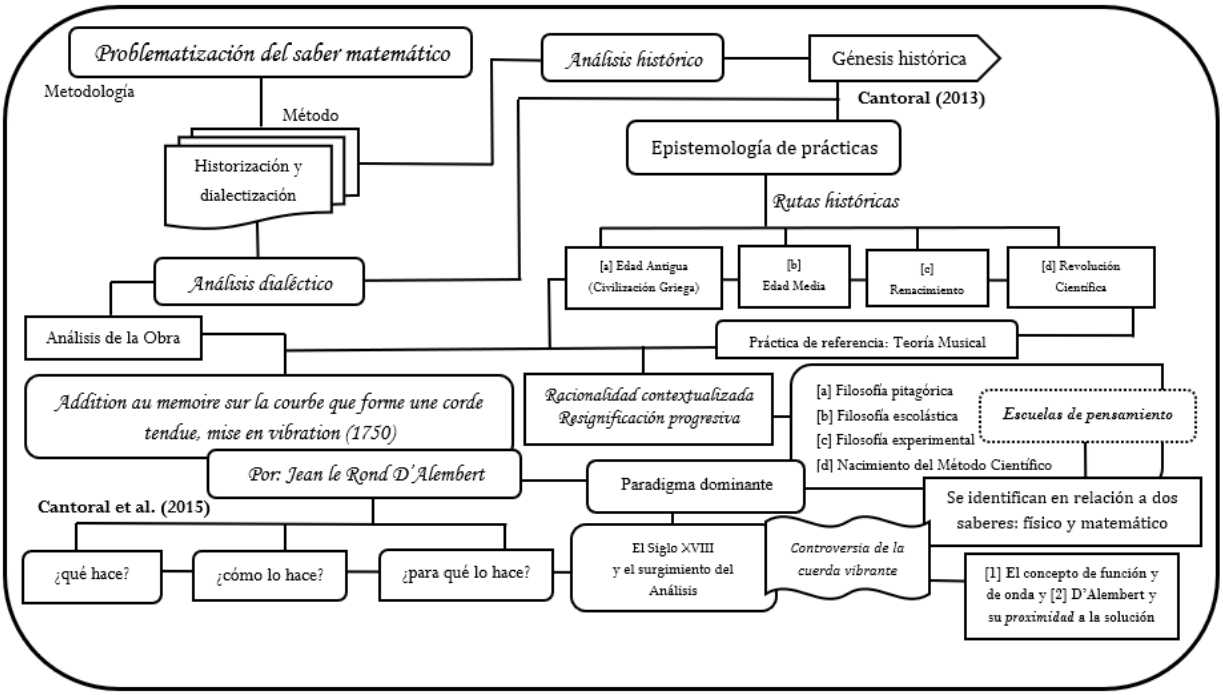


***Ilustración* 13.** *Esquema metodológico sobre la Problematización del saber matemático.*
Fuente: Elaboración propia.

Esta investigación ha permitido identificar una *trayectoria metodológica* para abordar la *Problematización del saber matemático* en relación con la *naturaleza* del *objeto matemático* puesto en escena. Desde la postura teórica, la ***Socioepistemología*** al hacer estudios de corte *histórico-epistemológico* brinda una serie de esquemas que se adaptan a los fines metodológicos, los cuales permiten encontrarse hacia un punto de inflexión, al encontrar una *epistemología de prácticas* para la **CSCM**, por ello, para el caso del *objeto de estudio* de este escrito no fue la excepción al abordar la problematización a través de una *evolución histórica-epistemológica* el conjunto de ideas que rodean al **MSV** vinculado a dos saberes, el ***físico*** y el ***matemático***, al desentrañar su *génesis* con base en la *actividad*

matemática de la época la cual es producto de los cambios *socioculturales* encontrados en las *rutas históricas* que comprende desde la Antigüedad con la Civilización Griega hasta el advenimiento del Siglo XVIII.

Dicho lo anterior, y con relación a la manera en que es presentado el esquema metodológico para esta investigación como se puede observar en la ***Ilustración* 13.**, se propone el siguiente esquema **(Véase *Ilustración* 14.)** que permitirá a futuras investigaciones de corte *histórico-epistemológico* robustecer la manera en que se puede identificar una *epistemología de prácticas* asociadas a un *saber matemático*, específicamente, atiende principalmente a la *génesis epistemológica* de conceptos matemáticos que tienen un carácter dominante hoy día en la **M**atemática **E**scolar, como axiomas, corolarios, teoremas o métodos que predominan en la solución de problemas matemáticos, para ello, al identificar el conjunto de *prácticas* que acompañen al objeto sin desprenderse de este, conlleva al investigador a poder abrir brecha a la manera en que un *objeto matemático* se erige en una *determinada época*, al atender los factores *sociales* y *culturales* que permean su desarrollo y por ende su difusión.

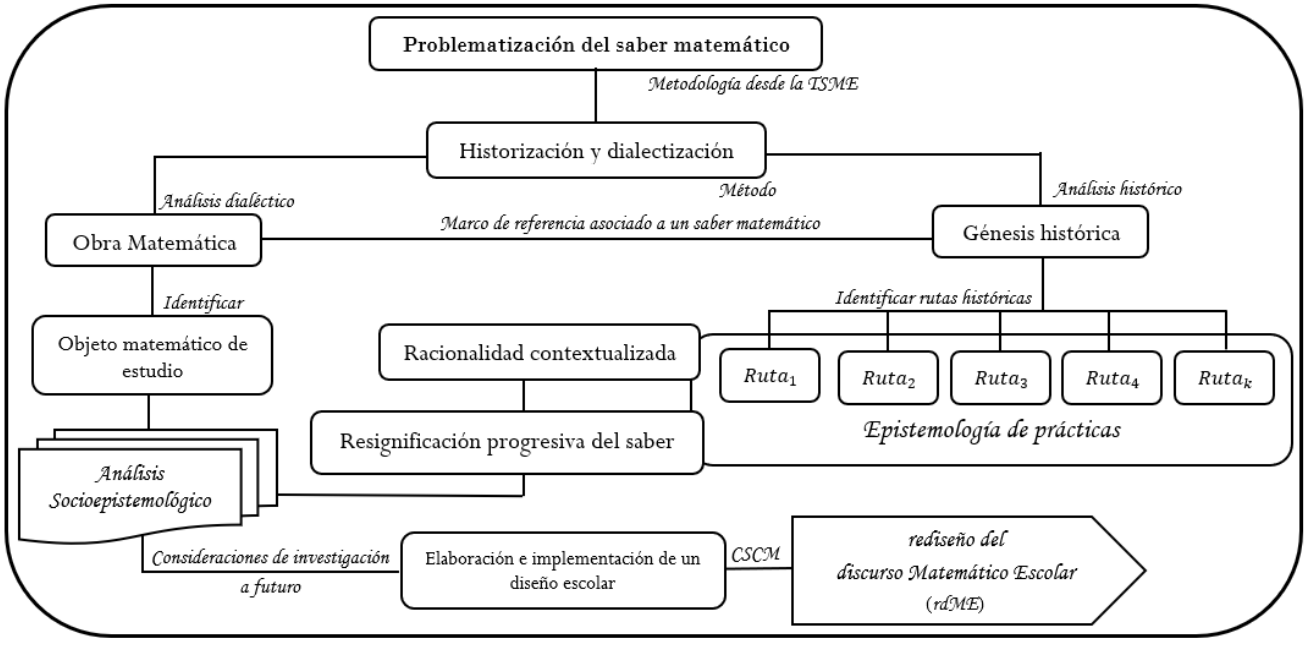


***Ilustración* 14.** *Esquema metodológico propuesto con base en la naturaleza del objeto matemático.*
Fuente: Elaboración propia.

La finalidad de este esquema es, dada la *naturaleza del objeto matemático*, permitirá al investigador en poder establecer un marco de referencia que le ayude a identificar una trayectoria histórica para así delimitar las *rutas históricas* como pasajes históricos evolutivos enlazados a una epistemología o epistemologías que estén *asociadas a un saber*, como el *físico* o el *matemático*, en donde a su vez, los personajes situados en el tiempo y espacio geográfico sean los precursores de generar conocimiento matemático, el cual es permeado de

acuerdo a su *racionalidad contextualizada*, al pretender que con su diálogo e intercambio cotidiano favorezca a la evolución de prácticas.

Así entonces, la *Problematización del saber matemático* asociado a un *objeto matemático* con la necesidad de escudriñar su *génesis epistemológica* puede iniciarse a partir de considerar el análisis de la obra original, por medio de identificar un *marco de referencia* vinculado a un saber matemático, lo que coadyuvará a reconocer históricamente las influencias *socioculturales* a través de identificar ciertas *rutas históricas*, en tanto que los personajes que son copartícipes en la construcción de conocimiento matemático posibilitan recrear una antesala a esta construcción por medio de sus influencias con otros personajes interesados en el *saber matemático* que envuelve a la problemática, al abonar en su actividad académica los procesos cognitivos que fueron involucrados en la formación de *conceptos matemáticos*, los cuales son basados en los modos de razonamiento como la inducción, pero que su producción es analizada desde su *epistemología*.

Cabe agregar que este esquema puede ser modificable en cuanto a las *necesidades* de las futuras investigaciones, pero siempre enmarcadas en el corte *histórico-epistemológico* donde están situadas, la trayectoria metodológica que tomen puede ser influenciada por las diversas investigaciones que existen en el marco teórico, la **S*ocioepistemología***, a fin de poder brindar una aproximación o un camino futuro hacia la **CSCM**.

Capítulo 3. Una crítica a la Matemática Escolar de las Ecuaciones Diferenciales Parciales desde el discurso Matemático Escolar

Este capítulo es destinado a mostrar elementos característicos de las Ecuaciones Diferenciales Parciales **(EDP)** con base en el tratamiento *moderno* que actualmente es posible encontrar en el ámbito escolar en el Nivel Superior. Se muestran algunas definiciones básicas y clásicas de las **EDP**, así como su clasificación; que, una vez al adentrar a su estudio permite dar cabida al uso algebraico del *objeto matemático* central de esta investigación. Este capítulo muestra un acercamiento actual sobre la enseñanza escolar respecto a la terminología y simbología matemática de las **EDP** y por ende su tratamiento matemático, el cual recae específicamente en las **EDP**-lineales-homogéneas de segundo orden y su método de solución de interés, el **MSV**.

Más allá de mostrar a la Matemática Escolar de las **EDP** en un curso de Nivel Superior, se pretende realizar en este capítulo también, una crítica desde el discurso Matemático Escolar bajo la mirada **S***ocioepistemológica* a tales contenidos, el cual permite atender a futuro incluso, a resignificar otros escenarios, de naturaleza física y matemática que antes no habían sido explorados, donde a través de su contextualización permite generar el desarrollo del uso algebraico del **MSV**, conllevándolo a una resignificación progresiva del conocimiento matemático.

Además, este capítulo, busca que, durante el recorrido de la lectura para los posteriores capítulos, el lector, sea capaz de asociar e identificar lo que desde un inicio en el **Capítulo 1** y el devenir de este escrito ha hecho alusión y deja dicho a grandes rasgos sobre las **EDP**.

La decisión de incluirlo y destinarlo a que hable sobre esta área de la Matemática es que el lector al comienzo podrá encontrar únicamente hablar de forma global sobre las **EDP** y bien, específicamente sobre el **MSV**, pero que al no dejar en claro una explicación más desmenuzada sobre este tipo de **EDP**, no podría contextualizar matemáticamente la teoría empleada alrededor de este objeto matemático, y en consecuencia al no dejar por esclarecido las bases matemáticas de este tipo de ecuaciones, el análisis de los datos de esta investigación se vería limitado debido a que no podrían articularse los elementos socioepistemológicos en torno al **dME** de las **EDP**. Incluso, como podrá notar el lector, se realiza una crítica a la **M**atemática **E**scolar desde el **dME**, donde se ponen en tela de juicio los elementos característicos desde este *sistema de razón*, por medio de sus características, al realizar un

análisis que conlleva a ser sensible por sobre la lejanía que impera la enseñanza tradicional de la Matemática por sobre la **C**onstrucción **S**ocial del **C**onocimiento **M**atemático.

3.1 Conceptos y terminología básica de las EDP

"*Todos los efectos de la naturaleza son solo los resultados matemáticos de un pequeño número de leyes inmutables*." – *Pierre Simon Laplace*

Hoy en día, existen un gran número de intereses por describir lo que acontece a nuestro alrededor, para ello, el ser humano y su incesante actividad de involucrarse con su entorno día a día desde tiempos remotos ha generado y perfeccionado explicaciones de forma continua que le han permitido esclarecer lo que ocurre en su medio.

Estas labores del ser humano, han conllevado a su interactuar tanto individual como colectivo generar conocimiento científico con base en las leyes que gobiernan a la Naturaleza para la toma de decisiones en diversos ámbitos de la vida humana a fin de satisfacer necesidades de impacto social, cultural y económico **(**por mencionar solo unas**)** dentro de una política de estado; el caso del sector productivo de la Ingeniería es uno de ellos, al verse comprometido con brindar soluciones a corto plazo a una sociedad; esta disciplina científica **"[…]** como actualmente la conocemos, se estableció a mediados del siglo XIX**" (Farfán, 2012, p. 82);** y a pesar de sufrir evoluciones con el paso del tiempo, su esencia ha estado presente gracias a su transdisciplinariedad con otras ciencias **(**como se detalló en el **Capítulo 1.** con la ***Ilustración* 1.)**, al fusionar conocimiento físico, matemático, químico y en su estrecha relación con otras áreas del conocimiento humano.

En ella, así como en la Física y las Matemáticas, el tratamiento matemático de problemáticas es muy común, ya que la matematización de fenómenos recurre a las Ecuaciones Diferenciales para modelizar las situaciones del mundo real, al reconocer que pueden simplificar el modelo de la realidad física. En gran medida este tipo de situaciones en la vida real se matematizan descriptivamente porque intervienen dos o más variables independientes. Esta área de la Matemática antes descrita son las Ecuaciones Diferenciales Parciales.

Desde la postura de **Epstein (2017)**, señala que muchas de las **EDP** utilizadas en la ingeniería y física son el resultado de la aplicación de leyes físicas de la conservación o el equilibrio de los sistemas que involucran campos, es decir, las cantidades definidas sobre un dominio continuo de dos dimensiones como el espacio y el tiempo, o más. En condiciones adecuadas de continuidad y diferenciabilidad se puede derivar una ley de equilibrio genérica tanto en forma global **(**integral**)** como local **(**diferencial**)** y aplicarla a diversos contextos de importancia práctica como el flujo de tráfico, la mecánica de sólidos, la mecánica de fluidos y la conducción de calor.

Con base en **Bravo Yuste (2006)** una ecuación en derivadas parciales **(EDP)** es una ecuación sobre una función incógnita $\boldsymbol{u}$ que depende de varias variables $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \ldots$ y en la que aparecen derivadas parciales de la función $\boldsymbol{u}$ como se muestra a continuación**:**

$$\mathcal{F}\left(x, y, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \ldots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}, \ldots, u\right) = 0$$

Este tipo de ecuaciones son importantes en la Ciencia pues un número enorme de sistemas e interacciones se describen mediante ecuaciones en derivadas parciales. Por ejemplo, la ecuación de ondas, la ecuación de Laplace y de Poisson en Electromagnetismo, las ecuaciones de difusión, las ecuaciones de Maxwell, la ecuación de Schrödinger y muchas otras son ecuaciones de este tipo.

La simbología o notación *parcial* puede encontrarse también por el reemplazo de la notación subindizada**:**

$$u_x \equiv \frac{\partial u}{\partial x}, u_y \equiv \frac{\partial u}{\partial y}, u_{xx} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u_{yy} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, u_{xy} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, u_{yx} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

Por ejemplo, la ecuación de difusión en una dimensión **(**en una línea**)** puede escribirse como**:**

$$u_t = u_{xx}$$

la ecuación de difusión en dos dimensiones **(**en una superficie**):**

$$u_t = u_{xx} + u_{yy}$$

o, la ecuación de ondas en tres dimensiones **(**en un volumen**)** se expresa como**:**

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$$

Escolarmente, el lector puede observar, como las Ecuaciones Diferenciales Parciales, están dotadas de simbología matemática, como cualquier otro curso de Matemáticas, por lo que, desde la postura teórica, sobre la cual esta investigación está ubicada, transmuta hacia una crítica en la que, dentro de la Matemática Escolar, como mencionan **Cordero et al. (2015)** su característica principal del conocimiento matemático ha sido su capacidad de universalizarse, incluso más que el idioma o la lengua. Bajo el intento por una matemática para todos, es decir una inclusión se ha conformado un **dME** que ha olvidado los contextos, las comunidades y las situaciones específicas donde emerge el conocimiento matemático **(p. 62).**

Por esto mismo, tras el panorama que comienza a mostrar hasta este momento este capítulo, el lector podrá notar que el *tratamiento matemático* de las **EDP**, está fuertemente sostenido por medio de una epistemología dominante, es decir, a través de *usos algebraicos*

que el propio conocimiento matemático impone a través de argumentaciones, significados y procedimientos. *Empero*, que esta investigación está destinada precisamente a reconocer esa epistemología del conocimiento matemático por medio de su construcción social.

Al continuar, con la Matemática Escolar, de las EDP, se posiciona el conocer el **orden** de una EDP, el cual es el orden de la *derivada más alta* que aparezca en la ecuación, mientras que el **grado** de la **EDP** es el *exponente* que aparece en la derivada máxima; por ejemplo, en las ecuaciones mostradas anteriormente **(**de difusión y ondas**)** son **EDP** de segundo orden, grado uno mientras que la ecuación $\boldsymbol{y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0}$ es una **EDP** de primer orden, grado uno, por lo que desde aquí se puede reconocer de manera clara el contexto escolar dentro de un sistema educativo en el Nivel Superior, no solo de esta área de la Matemática, sino de las otras que le componen.

Dotar al estudiante de conceptos, propicia una reproducibilidad sin dotar de un aprendizaje, lo que se puede interpretar el **carácter hegemónico** del conocimiento matemático, ya que delega el conjunto de argumentaciones que el estudiante desde este momento cuando se adentra a un curso de Matemáticas pueda generar y usar para construir su conocimiento matemático, ante situaciones o contextos específicos, el caso de las **EDP**, puede apreciarse que no es la excepción.

Al continuar con la Matemática escolar de las **EDP**, se llega al momento en que se deben conocer ciertos aspectos de ellas, que por sí solos muchas de las veces no son claros y específicos, para ello, dotar al estudiante en el estudio de estas ecuaciones, conlleva a conocer en este punto su *tipo*; por ejemplo, se llaman **no-homogéneas** cuando contienen un término **(***sumando***)** en el que *no aparece* la función incógnita $\boldsymbol{u}$, esto implica que la función nula $\boldsymbol{u = 0}$ no es solución de estas ecuaciones; de lo contrario se dice que es **homogénea**.

Por ejemplo, la ecuación $\boldsymbol{u_t = u_{xx}}$ es homogénea puesto que en sus términos aparece la función incógnita $\boldsymbol{u}$ y además esta se puede reescribir como $\boldsymbol{u_t - u_{xx} = 0}$ al observar que los términos del miembro izquierdo de la ecuación contienen a la función incógnita $\boldsymbol{u}$ y están igualados a $\boldsymbol{0}$, lo que, a su vez, la ecuación $\boldsymbol{u_t = u_{xx} + f(x, y)}$ contiene la función $\boldsymbol{f(x, y)}$ como sumando en la que no aparece la función incógnita $\boldsymbol{u}$ en ella.

Una **EDP** se dice **lineal** si la función incógnita y sus derivadas aparecen de forma lineal, es decir, *que están elevadas a la potencia uno* y *no existen términos en la ecuación en donde haya productos entre la función desconocida y/o sus derivadas y en dado caso de que existan estos productos serán únicamente con términos de la variable independiente*, para ilustrar esta definición el lector podrá ver en la ***Tabla* 4.**

Tabla 4. *Ejemplos de EDP lineales y no lineales.*

$u_t - u_{xx} = 0$	lineal
$u_t = u_{xx}u_{xyz}$	no lineal
$(u_{tt})^3 = u_{xx}$	no lineal
$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$	lineal
$u_t = 2xu_{xx} + x^2u_{yy}$	lineal

Si una **EDP** es de orden n, su solución se llama **general** ya que contendrá entonces n funciones arbitrarias, y cualquier solución que sea hallada o encontrada a partir de esta solución por selecciones particulares de las funciones arbitrarias se dice que es una **solución particular**.

La manera en que se presenta la estructura de un curso de **EDP**, es lineal como puede apreciarse, como la mayoría de las otras áreas de la Matemática, e incluso se aclara que se restringe este capítulo a mostrar los primeros conceptos; por ejemplo, se enseña, Cálculo Diferencial, para poder calcular derivadas, y así posteriormente, poder encontrar integrales, con un curso **(**o más cursos**)** de Cálculo Integral, por ello, se reconoce el **carácter utilitario del conocimiento** matemático, no únicamente para un curso de Álgebra, de Cálculo o de Ecuaciones Diferenciales, por mencionar solo unos, sino por reconocer la percepción de que la Matemática busca por medio de su expresión una organización a través de la Matemática Escolar. De este modo, se reconoce desde el **dME** que las **EDP** no pueden ser concebidas sin que antes el estudiante haya pasado por un curso de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, esta secuencia obedece precisamente al carácter utilitario del conocimiento.

Posteriormente, conocer un *sinfín* de métodos analíticos para encontrar soluciones, genera al mismo estudiante y por ende como antesala al docente, a que esté fuertemente centrado en el objeto matemático, por ende, al seguir con esta crítica de la Matemática Escolar, vista desde el **dME**, sitúa a la **concepción de la matemática** en que es un conocimiento acabado y continuo, ya que su organización genera eso por medio de sus contenidos, por lo que **(Soto, 2010)** genera que en su enseñanza sea reducida a la mecanización de procesos o memorización de conceptos.

Finalmente, se cierra esta sección al hablar sobre las soluciones de una Ecuación Diferencial, se remonta al lector a que recuerde que mientras que la solución general de una **EDO** arroja *constantes arbitrarias* y al asignarle valores específicos a la solución general se obtiene una solución particular, geométricamente esta solución forma lo que se llama una *familia uniparamétrica de curvas*, el caso de las **EDP** no es la excpeción, aunque ahora la solución general arroja *funciones arbitrarias* y al asignarle valores específicos a esta solución

general, se obtiene una particular y geométricamente se forma una *familia de superficies* **(S. Romero et al., 2001).**

3.2 EDP lineales y homogéneas de segundo orden y su clasificación

"Las matemáticas proporcionan a la física un lenguaje propio, las formas de expresión son claras y elegantes y le dan el señorío necesario sobre los fenómenos naturales y su debido aprovechamiento."

– G. Arfken

Debido a que esta investigación está apegada fuertemente a la visión **S***ocioepistemológica*, se presenta esta sección para seguir con evidencia en que la Matemática su enseñanza se ha fomentado en que esta debe de ser un conocimiento acabado y continuo, al presentar los argumentos y significado, el caso de las **EDP**, no queda soslayado. A continuación, se presenta la forma general de una **EDP** lineal de segundo orden **(**con dos variables espaciales**)** es**:**

$$\mathcal{A}(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\mathcal{B}(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\mathcal{C}(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\mathcal{D}(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+\mathcal{E}(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+\mathcal{F}(x,y)u=\mathcal{G}(x,y)$$

donde $\mathcal{A}(x,y)$, $\mathcal{B}(x,y)$, $\mathcal{C}(x,y)$, $\mathcal{D}(x,y)$, $\mathcal{E}(x,y)$, $\mathcal{F}(x,y)$ son funciones de las variables x e y en una región $\mathfrak{D}\subset\mathbb{R}^2$, y la función incógnita $u:=u(x,y)$. Si la función $\mathcal{G}(x,y)=0$ en $\mathfrak{D}\subset\mathbb{R}^2$ se dice que la **EDP** es homogénea.

Si $\mathcal{A}(x,y)$, $\mathcal{B}(x,y)$, $\mathcal{C}(x,y)$, $\mathcal{D}(x,y)$, $\mathcal{E}(x,y)$, $\mathcal{F}(x,y)$ toman algún valor constante en $\mathfrak{D}\subset\mathbb{R}^2$ con $\mathcal{G}(x,y)=0$ se dice que la **EDP** es lineal-homogénea con coeficientes constantes, mientras que si los coeficientes de $\mathcal{A}(x,y)$, $\mathcal{B}(x,y)$, $\mathcal{C}(x,y)$, $\mathcal{D}(x,y)$, $\mathcal{E}(x,y)$, $\mathcal{F}(x,y)$ son variables definidas en $\mathfrak{D}\subset\mathbb{R}^2$, se trata de una **EDP** es lineal-homogénea con coeficientes variables, vea la ***Tabla* 5.**

***Tabla* 5.** *Ejemplos de EDP lineales con coeficientes constantes y variables.*

$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$	La **EDP** es lineal-homogénea con coeficientes constantes
$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$	La **EDP** es lineal-homogénea con coeficientes variables
$2x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=1$	La **EDP** es lineal con coeficientes variables

Y se da a conocer lo anterior precisamente, ante la **falta de marcos de referencia para la resignificación de la Matemática**, ya que queda delegada la manera en que una **EDP** se presenta en un contexto en el que su matematización la conlleve a ser lineal, homogénea o no-homogénea, o a qué se debe que sea de coeficientes constantes, o variables,

y esto es menester debido a la percepción en que no existen por sí solos contextos y situaciones específicas en las que el estudiante pueda identificar la presencia del conocimiento matemático, basado en este tipo de ecuaciones, ya que la misma Matemática Escolar de las **EDP**, se ve limitada a responder a diversas prácticas de referencia, en las que se pueda encontrar una base de significados naturales.

Finalmente, el caso que atañe esta investigación es precisamente en evidenciar esa base de significados naturales a través de epistemologías, centradas en una práctica de referencia, que atiende a responder situaciones específicas por medio de un *marco de referencia*, que es permeados por la misma práctica de referencia que se logre identificar con el estudio *histórico-epistemológico*; incluso, la transversalidad del conocimiento matemático, históricamente puede ser situado como un emergente para estudiar la misma *actividad matemática* de una época determinada hasta hoy día, por ejemplo, el pensamiento proporcional en sus inicios, y que sus bases son sentadas en los famosos *Elementos* de Euclides, conlleva así a posicionar el estudio de las **EDP** en un terreno fértil y relativamente joven para entender la epistemología de su quehacer y por ende de la manera en que estas responden ante problemáticas del mundo real, como el mundo natural y físico que rodea a la vida humana.

Al seguir con la tónica de la Matemática Escolar de las **EDP**, se presenta a fines de esclarecer otra característica de este *sistema de razón*, el **dME**, que el contexto histórico de esta investigación, la manera en que suscitó el *Problema de la Cuerda Vibrante*, considera a la *actividad matemática* de la época a dar solución a problemas específicos, lo que también conllevó al surgimiento de nuevas áreas de la Matemática a dar respuesta a ellos, como las **EDP**, y a pesar de que sus primeras formulaciones no estaban dotadas de la misma simbología que hoy día conocemos e incluso por los mismos métodos de solución, sí se generó un escenario epistemológico en el que los fenómenos naturales estudiados en el Siglo XVIII y XIX, argumentaron el uso de tales métodos, como el **MSV**.

Sin embargo, escolarmente, no existe posibilidad alguna que dentro del discurso escolar en su totalidad, sean considerados aspectos sociales, contextuales y culturales que permitan la constitución de conocimiento, y aunque es posible generarlo, la misma Matemática Escolar, restringe en su mayoría, no solo al estudiante, al docente, o al conjunto de factores que le dan esencia de ser, sino que por sí sola es un puente en la epistemología de las **EDP** y el caso general, la Matemática en si, pero que no es elemento u obstáculo para que el estudiante no pueda aprender. Hablar de lo anterior, es visto dentro del **dME**, como una **atomización de conceptos**, y aunque en este capítulo se incluye directamente la teoría de la Matemática Escolar de las **EDP**, su razón de ser está en dar una crítica directa sobre la manera en que las **EDP** en el Siglo XVIII eran tratadas, como su nomenclatura, su tratamiento

matemático, y por ende sus métodos de solución. Y aunque se encuentra históricamente esa posición epistemológica, es importante que el lector conozca lo que hoy día impera en la enseñanza tradicional.

Se brinda al lector, la clasificación de estas ecuaciones, las cuales están en tres tipos básicos que exhiben características comunes y que a partir de ellas podrá identificar en cuál está centrada esta investigación**:**

1. **Ecuaciones Parabólicas:** $\mathcal{B}^2 - 4\mathcal{A}\mathcal{C} = 0$. Un claro ejemplo es la *ecuación de difusión del calor en una dimensión* **(**variable de tiempo con una dimensión espacial**)**, observe**:**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}$$

esta puede ser reescrita como**:**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

al identificar los elementos que la describen por ser una **EDP**-lineal-homogénea de orden dos de tipo *parabólico* por**:** $\mathcal{A} = 1, \mathcal{B} = \mathcal{C} = \mathcal{D} = \mathcal{F} = \mathcal{G} = 0, \mathcal{E} = -\frac{1}{k}$.

Este tipo de ecuaciones **describen flujos y procesos de difusión** y permiten resolver los denominados problemas de propagación que son problemas transitorios donde la solución de la **EDP** es requerida sobre un dominio abierto, sujeta a condiciones iniciales y de frontera prescritas. Algunos de los ejemplos más comunes de estos problemas incluyen problemas de, *problemas de difusión*, *conducción de calor* y en general *problemas donde la solución cambia con el tiempo*.

2. **Ecuaciones hiperbólicas:** $\mathcal{B}^2 - 4\mathcal{A}\mathcal{C} > 0$. Un ejemplo de este tipo es la *ecuación de onda unidimensional*, observe que**:**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

la cual puede ser rescrita como**:**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Es posible observar que es una **EDP-**lineal-homogénea de segundo orden en una dimensión espacial de tipo *hiperbólico,* dado que**:** $\mathcal{A} = 1$, $\mathcal{B} = \mathcal{C} = \mathcal{D} = \mathcal{F} = \mathcal{G} = 0$ y $\mathcal{E} = -\frac{1}{c^2}$.

Este tipo de ecuaciones **describen sistemas vibratorios y movimiento ondulatorio**, las cuales también tratan con problemas de propagación una característica particular de estos procesos descritos es la *velocidad finita de propagación de las*

perturbaciones, tal es el ejemplo de la ecuación de onda, con la distinción de que aparece una segunda derivada respecto al tiempo, por lo que, en consecuencia, la solución consiste en distintos estados característicos con los cuales oscila el sistema, tal es el caso de problemas de vibraciones, ondas de un fluido, transmisión de señales acústicas de un gas en un tubo y oscilaciones electromagnéticas.

3. **Ecuaciones elípticas:** $\mathcal{B}^2 - 4\mathcal{A}\mathcal{C} < 0$. Un ejemplo de estas ecuaciones es la *ecuación de Laplace*, observe que**:**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

es una **EDP**-lineal-homogénea de orden dos en estado estable con dos dimensiones espaciales de tipo *elíptico*, al identificar que $\mathcal{A} = \mathcal{C} = 1, \mathcal{B} = \mathcal{D} = \mathcal{E} = \mathcal{F} = \mathcal{G} = 0$. A decir que este tipo de ecuaciones **describen fenómenos estáticos o estacionarios** y permiten resolver los llamados problemas de equilibrio o procesos de ciclo fijo, que son problemas donde se busca la solución de una ecuación diferencial dada que no depende del tiempo, en un dominio cerrado, sujeta a condiciones de frontera prescritas. Es decir que los problemas de equilibrio son problemas de condiciones de frontera.

Los ejemplos más comunes de tales problemas incluyen a distribuciones estacionarias de temperatura, flujo de fluidos incompresibles no viscosos, distribución de tensiones en sólidos de equilibrio, el campo eléctrico de una región que contenga una densidad de carga, pero en general problemas donde el objetivo sea determinar un potencial, algunos de los ejemplos de este tipo de **EDP** por su tipo, están problemas de distribución en estado estable como la distribución de temperatura sobre una placa calentada, filtración de agua bajo una presa y el campo eléctrico cercano a la punta de un conductor.

Sin entrar en detalle matemático formal, cabe aclarar que el discriminante $\mathcal{B}^2 - 4\mathcal{A}\mathcal{C}$ depende de x, y por lo que la ecuación puede cambiar de un tipo a otro a lo largo del dominio de integración, aunque esto es poco corriente que suceda. Los calificativos *parabólico, hiperbólico* y *elíptico* proceden de la analogía con la clasificación de las ecuaciones cuadráticas de las secciones cónicas.

Como se aprecia, por medio de haber detallado en una crítica a la Matemática Escolar de las **EDP**, y finalizar con su clasificación, acota su estudio únicamente a *tres marcos de referencia*, es decir, que la matematización está presente ante contextos específicos ya conocidos, sin embargo, esto puede ser concebido y aceptado por el estudiante, una vez que se propicie adentrar en el mismo saber matemático de las **EDP**, sin antes no puede existir de

forma innata, esto es por lo antes analizado desde el mismo **dME**, y la finalidad desde la postura teórica es gozar que el conocimiento matemático quede despersonalizado y descontextualizado para que pueda ser difundido, no solo dentro de un aula escolar, sino a en otros ámbitos de la vida humana, y su mismo quehacer, el caso de las **EDP**, su campo de acción es amplio, y por ello conviene y convendrá dotar al estudiante de poseer un interés en su estudio, ya que la mayoría de los problemas del mundo real, como el caso de la Ingeniería, genera de una visión de la Matemática Aplicada, y por ende esto se puede atender desde su enseñanza a través de las investigaciones en el campo de la Matemática Educativa.

Se finaliza con la siguiente sección del capítulo, para conocer el estrechamiento que tiene el contexto *histórico-epistemológico* con relación a que el **MSV "**opera a través de condiciones", las cuales están descritas por las *características físicas* del fenómeno que se atienda **(**o del que emerja en un determinado *marco de referencia***)**.

3.3 Tipos de condiciones en EDP lineales y homogéneas de segundo orden

"*La cosa más bella que podemos experimentar es lo misterioso. Es la fuente de todo el arte auténtico y la ciencia*." — *Albert Einstein*

Una vez conocidos los tipos de las **EDP**, y la manera en que se presentan en *marcos de referencia* específicos, por ser los ya reportados, y que enriquecen los aspectos epistemológicos que conforman la Matemática Escolar, envuelven en la misma crítica del **dME** a las **EDP**, debido a que puede responder ante otros *marcos de referencia*, para resignificar otras *prácticas*, por eso se finaliza con mencionar los diferentes tipos de condiciones físicas y matemáticas a las que un fenómeno pueda estar sujeto.

Con base **Bravo Yuste (2006)** las ecuaciones que se han descrito anteriormente pueden tener infinitas soluciones, por lo que para centrar atención en una en específico es necesario *imponer* condiciones adicionales al problema, que pueden ser de dos tipos**:** *iniciales* y de *frontera*.

a) **Condiciones iniciales:** *desplazamiento*, *velocidad* y *temperatura*. **Estas condiciones fijan el estado del objeto en el instante inicial**.
b) **Condiciones de frontera:** *Dirichlet*, *Neumann* y *mixtas*. Estas condiciones son también llamadas de *contorno* y son las que determinan la interacción del objeto con el medio que le rodea. Estas condiciones son clasificadas en tres tipos las cuales son**:**
   [1] Dirichlet: Consisten en fijar el valor de la función u en cada punto del contorno o frontera.
   [2] Neumann: Se especifica en cada punto del contorno la componente normal a la frontera del gradiente de $\boldsymbol{u}$; es decir de $\boldsymbol{\nabla_n u \equiv (\nabla u)_n}$.

[3] Mixtas: Consisten en considerar una condición de tipo Dirichlet en un extremo y una condición de tipo Neumann en el otro.

Estas condiciones de contorno son apropiadas para garantizar la existencia y unicidad de las soluciones y radica según el tipo de la **EDP**, sea *hiperbólica*, *parabólica* o *elíptica*. En las ecuaciones de tipo *parabólico* las condiciones de contorno habituales son las de *Dirichlet* o *Neumann* en donde el tipo de contorno **(**frontera**)** es *abierto*; para las ecuaciones *elípticas*, como el caso de la ecuación de Laplace se tiene que el tipo de condiciones de contorno habitual para este tipo son las de *Dirichlet* o *Neumann*, pero aquí la distinción es que el tipo de contorno **(**frontera**)** es *cerrado*. Las ecuaciones de tipo *hiperbólico* las condiciones más habituales son las *iniciales* o también llamadas de *Cauchy* en ellas, el tipo de frontera **(**contorno**)** es *abierta*. Lo antes dicho, podrá ser comprendido cabalmente por el estudiante cuando se explore el estudio con otros *marcos de referencia*, como sostiene el sistema de razón, una vez que sean atendidos, lo que propicia incursionar y tener más evidencia de las investigaciones en Matemática Educativa sobre las **EDP**, al considerar sus tópicos o conceptos que involucran saberes transversales por medio de campos científicos, como la Física.

Hasta este momento, se ha mostrado la parte teórica acotada de las **EDP** y en la que se adentra el **MSV** para dar solución al tipo de ecuaciones que se han descrito con anterioridad, por lo que el lector podrá ver las conexiones en cuanto a la Teoría Matemática de las **EDP** lineales-homogéneas de segundo orden y el método que se emplea para solucionar problemas presentes en la Física-Matemática e Ingeniería.

Este capítulo constituye una manera de dejar en claro dos aspectos en este escrito hasta el momento**: [1]** el contenido de la **M**atemática **E**scolar de las **EDP** que está presente en los temarios o unidades de aprendizaje de las escuelas de Ciencia e Ingeniería, así como en los libros de texto, **[2]** una crítica desde el **dME** tras el visible *uso algebraico* en el tratamiento de la teoría matemática de las **EDP** y en consecuencia de todos sus métodos de solución existentes **(**aunque no se mencionan**)**; el caso del **MSV** no deja por sí mismo sentadas las bases de su epistemología e incluso la falta de significar otros *marcos de referencia* puede propiciar la generación de una transversalidad de conocimiento matemático, al poder significar su uso y su procedimiento en la Matemática, Física e Ingeniería. Lo anterior, conlleva a remontar al pasado específicamente a través de la historicidad y evolución epistemológica del conjunto de ideas germinales que conllevaron a consolidarse en el *Problema de la Cuerda Vibrante*.

Capítulo 4. Un recorrido histórico-epistemológico asociado a la idea de propagación del sonido

El presente capítulo, tiene como objetivo *mostrar* las ideas germinales sobre las que el *Problema de la Cuerda Vibrante* se sustenta, es por ello que tiene como intención que el lector conozca su *pasaje histórico*; se pretende rescatar en su mayoría a los personajes principales **(**desde la Civilización Griega hasta llegar al Siglo XVII y principios del Siglo XVIII**)** que con sus aportes e ideas, el desarrollo, formulación y consolidación de la *Teoría de la Vibración*, este como *marco de referencia* central ayuda a tratar a uno de los problemas de gran controversia suscitado a finales del Siglo XVII y que aunado al papel que juega el Cálculo Algebraico en el Siglo XVIII permitió a los matemáticos contemporáneos de la época dar solución a tal problema, este escenario es tratado en el **Capítulo 5.** de esta investigación.

4.1 El surgimiento de ideas fundamentales sobre la Teoría de la Vibración

"*Las matemáticas son un arte, y como un arte elige la belleza y la libertad*." — *Marston Morse*

Desde la opinión de **Skudrzyk (1971)** señala que la *acústica* es la ciencia del sonido, de las vibraciones y de las percusiones de los sólidos, líquidos y gases. Es una ciencia que surgió del interés en la música e instrumentos musicales, y es casi tan antigua como la humanidad, por ello, a su vez, la postura histórica de **Dostrovsky (1975)** en cuanto a los personajes, sostiene que Benedetti, Vincenzo, Galileo Galilei, Beeckman, Descartes, Mersene, Huygens, Wallis, Newton, Sauveur, y otros, fueron referentes quienes buscaron entender la vibración en términos físicos y matemáticos, y, al enfatizar a **Lützen (1987)** respecto al movimiento vibratorio de los medios continuos, menciona que surgió en el estrecho vínculo con la *teoría de la música*.

Tras revisar las posturas de los autores antes citados, sostienen que para establecer en el *marco de referencia* su inicio e interés por el estudio del *sonido*, y por ende de las vibraciones, se torna realmente difícil fijar la unicidad cultural y geográfica, ya que, si solo se llega a mencionar o a decir que solo determinados personajes en el curso de la historia de las civilizaciones humanas dieron cuenta de ello y que una única cultura o determinadas culturas **(**antes de nuestra era**)** fueron las que mostraron interés en abonar al quehacer y desarrollo de la *acústica*, conviene la necesidad de esclarecer y fijar el *contexto* y su *devenir histórico* que permitió dar origen a los problemas asociados al estudio del sonido.

Cabe señalar que el propósito de este capítulo no es acotar u omitir estadios históricos que confieren el entender el desarrollo y consolidación del *Problema de la cuerda vibrante*, sino más bien, mostrar el conjunto de elementos que propiciaron el surgimiento de *conceptos e ideas asociadas* ligadas al marco de referencia que es la *Teoría de la vibración*, y que a partir de la ciencia de la *Acústica* como actualmente se le conoce a esta componente científica es que se ven involucradas prácticas relacionadas a la *Teoría musical*.

Los primeros conceptos de la ciencia Acústica eran de naturaleza puramente especulativa. Por ejemplo, en el año 3000 a. C., el filósofo chino, Fohi, trató de encontrar una conexión entre el tono de un sonido y los cinco elementos**:** tierra, agua, aire, fuego y el viento. Los hindúes son conocidos por tempranas discusiones sobre la música, al igual que los árabes. Cabe aclarar que, las concepciones musicales de los antiguos chinos, hindúes y árabes difieren considerablemente de las nuestras, pero la de los antiguos griegos muestran similitudes. Las principales fuentes de conocimiento sobre la teoría musical son los **"**Problemas de Aristóteles**"** y los **"**Cinco Libros de Música**"** de Severinus Boethius[8] **(Skudrzyk, 1971, p.1).**

Históricamente y culturalmente se sitúan los inicios de la *Teoría de la vibración* en la práctica de la *Teoría musical*; y, que si bien, como los párrafos anteriores *grosso modo* lo hacen notar de una manera genérica, en primera instancia se identifica que han existido intereses de diversas civilizaciones para aproximar o tratar de dar una visión de manera explicativa sobre los fenómenos de la Naturaleza involucrados por la *práctica musical* por medio del *marco de referencia* situado.

Por ejemplo, actualmente gracias a los avances de la Ciencia, es posible dar una interpretación de los fenómenos naturales que acontecen hoy en día, esto es posible hacerlo a través del nivel de descripción del estado físico en el que se encuentre el fenómeno. Dichos niveles son, el *microscópico* y el *macroscópico*, el primero de ellos, permite describir aquellos fenómenos que no son perceptibles por todos los sentidos del ser humano, mientras que el segundo atiende a poder brindar una caracterización del objeto estudiado por medio de las magnitudes *extensivas* e *intensivas*[9], las primeras detallan respecto de la cantidad de materia que posee la sustancia o el cuerpo, y las segundas, hacen la descripción con la peculiaridad de no depender de la cantidad de materia, también las magnitudes *escalares*, *vectoriales* o *tensoriales* forman parte del estudio físico de un fenómeno a nivel macroscópico.

[8] Fue un filósofo y poeta latino-romano, compaginó con su faceta de estadista, traductor de filosofía griega y autor de tratados como la música, aritmética y astronomía.
[9] Las propiedades *intensivas* son aquellas que no dependen de la masa o del tamaño de un cuerpo, mientras que las *extensivas* sí dependen de la masa; son magnitudes cuyo valor es proporcional al tamaño del sistema que describe.

Lo antes dicho, posiciona las directrices por las que el *Problema de la cuerda vibrante* toma su cauce, es decir, una vez identificada a la práctica de partida, que es la *Teoría musical*, el *sonido* deriva magnitudes para su estudio dentro de la ciencia de la *Acústica*, ya que funge como puente entre los armónicos musicales y matemáticos para entender el fenómeno asociado a la vibración de una cuerda.

La *Teoría musical* a partir de su desarrollo y evolución en el tiempo cobra importancia y auge como una forma identitaria en las diferentes regiones geográficas del mundo, es por ello, que esta investigación deja plasmada la existente conectividad cultural musical directa con nuestro presente, la cual, recae precisamente en la civilización griega, debido a esto, se muestra una breve exploración de los personajes que dan prueba de ello por medio de la historicidad que en los siguientes párrafos de esta investigación se deja por sentado.

Papadopoulos (2002), inmerso en la civilización griega, sostiene que las escuelas de Pitágoras, Platón y Aristóteles consideraban a la música como parte de las matemáticas; por ello, ya en el Siglo VI a. C. Pitágoras y sus discípulos desarrollaron un famoso currículo educativo llamado *quadrivium* el cual consistía en integrar a la Teoría de Números[10] **(**Aritmética**)**, Geometría, Música y Astronomía como *saberes exactos*, la vigencia de este currículo estuvo en toda la Edad Media y luego fue desterrado por el Enciclopedismo; mientras que el *trívium* contenía a la gramática, la dialéctica y la retórica como *saberes racionales* del ser humano, y, en conjunto a estos siete conocimientos se les llamaba *artes liberales*.

Es por ello que el papel que sostuvo la *música* a lo largo de la historia en diversas culturas antiguas hizo que se concibiera en la civilización griega como un saber ya establecido a través del currículo que se describió con anterioridad, el cual permitió junto con los saberes restantes convertirse en un pilar fundamental en la enseñanza durante mucho tiempo esto, con la finalidad de que coadyuvara a conjuntar destrezas y habilidades científico-lingüísticas esto como parte estructurante del conocimiento que imperaba en tal época. Este sistema de organización educativa conllevó a futuro consolidar visiones que impactaron en la conformación de las primeras universidades.

La *Teoría musical* ha sido, al menos en parte, *aritmética* desde los antiguos griegos. Para ello, autores interesados en la Historia de la Matemática como **Papadopoulos (2002)** menciona a su juicio que**:**

> Los historiadores de la ciencia suelen estar de acuerdo en que Pitágoras **(**VI a. C.**)** está en el origen de la matemática como una ciencia puramente teórica. Al mismo tiempo, Pitágoras es considerado como

[10] En la Antigua Grecia, la Teoría de Números era equivalentemente con la Aritmética. Hoy día la Teoría de Números es conocida como área de la Matemática en su acepción como Álgebra Abstracta o Alta Aritmética.

> el primer teórico de la música **(**desde el punto de vista de la música europea**)**. *El mayor descubrimiento musical de Pitágoras es la relación de los intervalos musicales con las proporciones de los números enteros*. **[La traducción es nuestra] (p. 67)**

El quehacer y desarrollo de la *Teoría musical* no hubiese sido posible sin que el ser humano haya explorado su entorno, es decir, sin que su interactuar con el mundo natural le haya permitido unificar ideas que tuvieran relación con su *contexto físico*; si bien, la mayoría de los fenómenos que ocurren en la Naturaleza tienen una explicación, en la época antigua estos no quedaban fuera del alcance para que los filósofos naturales dieran una interpretación de lo que pasaba, sino más bien tenían en sus manos una tarea por dilucidar sobre lo que estaba acontecía a su alrededor, es decir, en su mundo natural.

Un claro ejemplo está sobre los pasajes que da cuenta la historia acerca de los inicios de la *Teoría musical*, al referirse de manera anecdótica sobre Pitágoras, quien, al caminar por una tienda de un brasero, escuchó diferentes sonidos producidos por los martillos al golpear un yunque, se dio cuenta que el *tono*, es decir, la *nota musical*, que era producida por el martillo, dependía solo de su peso y no del lugar donde el martillo golpeaba el yunque, o de la magnitud del golpe. Se dio cuenta de que el compás de un intervalo musical entre dos notas producidas por dos martillos diferentes dependía solo del peso relativo de los martillos, y en particular de los intervalos musicales consonantes, que, en la música clásica griega eran los intervalos de octava, de quinta y de cuarta, estos, se correspondían en términos de las fracciones numéricas $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{1}}$, $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$ y $\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$ respectivamente **(Papadopoulos, 2002, p. 68).**

Es importante dejar en claro como lo hace notar **Dostrovsky (1975)** que la aritmética empleada por los antiguos griegos está basada en las proporciones que caracterizan a los intervalos musicales. Los intervalos sonoros se caracterizan por las proporciones más simples**:** La relación de frecuencia para la octava es $\mathbf{2}:\mathbf{1}$, para la quinta, $\mathbf{3}:\mathbf{2}$, y para la cuarta, $\mathbf{4}:\mathbf{3}$, estos nombres se refieren al número de notas de la escala que abarca el intervalo, esta correlación entre las consonancias y las relaciones simples fue presumiblemente notada por muchos músicos de instrumentos de cuerda, pero fueron los pitagóricos quienes enfatizaron y la usaron, no solo como base de la *Teoría musical*, sino también como inspiración para toda una cosmología **(p. 172).**

Como se ha mencionado en párrafos anteriores dentro del *quadrivium* se aprecia el papel que juega la *música* en la época antigua, esta práctica no se caracterizaba como una manera de expresión artística **(**aún**)** o como el complemento a una de las siete artes liberales, sino con la peculiaridad más inmediata en la que se conjugaba con la Matemática; Pitágoras como el precursor más próximo de la *Teoría musical* en la civilización griega y que en

conjunto con sus discípulos mostraron el interés en los intervalos musicales como una fuente de nociones matemáticas conectadas con la ciencia de la época y con la cosmología del Universo, por ello es que le atribuyeron al propio Pitágoras el descubrimiento de las proporciones consonánticas; de aquí derivarían el conjunto de epistemologías asociadas a la práctica de la *Teoría Musical*, y por ende su estrecho vínculo con la concepción del funcionamiento del Universo, mismo que propiciaría rupturas entre el mismo saber de la época con los posteriores al vincular a la *Teoría Musical* y su posterior desarrollo.

El relato sobre Pitágoras y su caminar un día por una tienda de un brasero que le permitió definir parte del rumbo que le ayudaría a caracterizar a los intervalos musicales, no es el único que se cuenta sobre él, **Dostrovsky (1975)** a su vez, toma en cuenta incluso algunas de las opiniones que versan alrededor de este, incluso con los mismos pitagóricos; Nicomachus **(**finales del Siglo I d. C.**)**, sostiene que Pitágoras se motivó a experimentar con cuerdas, según él, suspendió cuatro cuerdas del mismo material y hechas de igual número de hilos, idénticos en grosor e igualmente retorcidos. A cada cuerda sujetó un peso diferente que suspendió de la extremidad inferior.

Cuando dispuso que las longitudes de las cuerdas fueran exactamente iguales, golpeó alternativamente dos cuerdas de forma simultánea y encontró las consonancias antes mencionadas, produciéndose una consonancia diferente por un par de cuerdas diferentes, por ejemplo, las cuerdas con pesos de **12** y **6** que suenan a una octava de distancia, implican que la frecuencia es proporcional por un par de cuerdas diferentes, en lugar de la raíz cuadrada de la tensión. A su vez Theon de Smyrna **(**primera parte del Siglo II**)** escribió que Pitágoras investigó las proporciones **(**octava, quinta, cuarta, etc.**)** en función de la longitud y el grosor de las cuerdas y también en función de la tensión obtenida al girar las clavijas o por el método más familiar de suspender los pesos de las cuerdas **(p. 172).**

Como es posible notar lo que respecta a la cosmovisión pitagórica y en particular a esta escuela de pensamiento es que sus ideas estaban totalmente arraigadas y ligadas a la concepción de *número*, es decir, al tener un vínculo estrecho con el mundo natural la idea de **“**orden**”** lo asociaron propiamente a la *armonía* a través de la práctica de la *Teoría musical* que está inmersa en el propio *quadrivium*, es por eso que la Naturaleza se explicaba matemáticamente a través de las proporciones y razones, idea sentada por los mismos filósofos pitagóricos, lo que les permitió percatarse que los modos musicales producían una **“**armonía**”** la cual descansaba profundamente en los números proporcionales.

Así entonces, hasta el momento el interés por el estudio del sonido no figuraba más allá que del pensamiento matemático propio de la época, sin embargo, **Darrigol (2007)** menciona que la expresión de los intervalos musicales armoniosos por proporciones de

números enteros pequeños es una noción pitagórica, probablemente basada en las longitudes correspondientes de la cuerda vibrante de un monocordio[11], por lo que la interpretación del sonido como una vibración también se remonta a la antigüedad, aunque su expresión más precisa es la que se espera en la filosofía de la mecánica temprana-moderna **(p. 346);** si bien, la misma historia da cuenta en que Pitágoras fue el primero en mostrar sus experimentos sobre el sonido basados primero en el uso de martillos y después con cuerdas, a este lo único que le interesaba era mostrar las relaciones aritméticas y no la física de las vibraciones sonoras.

Cabe dejar por esclarecido que esta subsección hasta el momento su intención es mostrar la figura de la escuela de pensamiento pitagórica y su quehacer con la *Teoría musical*, en donde Pitágoras es uno de los principales ponentes en el desarrollo de esta; ahora bien, al tener en cuenta la postura de **Boido y Kastíka (2002)** quienes sostienen que la ciencia de la música, desde Pitágoras en adelante, consideraban a este conocimiento como una clave para la comprensión del cosmos, vinculado con la numerología y la magia, que incluyen, por caso especulaciones metafísicas sobre la armonía del universo o la armonía celestial; sobre las razones por las cuales los sonidos musicales son agradables al oído, sobre el motivo por el cual la música provoca distintos estados afectivos en el alma humana, sobre la música como mediadora entre microcosmos y el macrocosmos; sobre la justificación mística o religiosa de la división de la octava, sobre la vibración de los cuerpos sonoros y la posibilidad de emplear instrumentos para la experimentación musical, sobre los intervalos musicales y su relación con proporciones numéricas, sobre el mecanismo por el cual los instrumentos emiten sonidos musicales y éstos llegan a nuestros oídos **(p. 61).**

Otras escuelas filosóficas como la *peripatética* sostenían desacuerdos con la filosofía pitagórica en cuanto al estudio de la *Teoría musical*; esta escuela de pensamiento poseía un vínculo estrecho que estaba ligado directamente a las enseñanzas de su fundador, Aristóteles, y específicamente los seguidores de su discípulo Aristóxeno criticaban la Matemática empleada por Pitágoras y sus discípulos; ellos, usaban una estética empírica de la música tal como lo menciona **Dostrovsky (1975);** por ello, la siguiente subsección tiene como objetivo mostrar los inicios del estudio físico del sonido.

4.2 Los inicios de la Física del sonido

"*Comprender las cosas que nos rodean es la mejor preparación para comprender las cosas que hay más allá*." – *Hypatia de Alejandría*

El interés central que tenía Pitágoras a pesar de los errores que ponía en evidencia con sus experimentos era simplemente mostrar las relaciones aritméticas entre los tonos **(**intervalos musicales**)** y no de la física que producían las vibraciones del sonido. Desde el

[11] El *monocordio* fue un instrumento musical *de una sola cuerda sonora* inventado por Pitágoras, su construcción estaba dentro de una caja de resonancia y una regla numerada, con la que determinaba las relaciones numéricas entre diversos fragmentos **(**segmentos**)** de la cuerda.

punto de vista de **Boido (2007)** quien coincide con la postura de Stillman Drake al referirse en que la apelación sistemática al experimento como soporte a las leyes matemáticas de la naturaleza no existió hasta Galileo Galilei y que durante las primeras etapas de la Revolución Científica diversos autores ya ponían en manifiesto la existencia de una tendencia metodológica al respecto. Ya en la segunda mitad del Siglo XVI aparecen los primeros intentos por explicar aspectos particulares de los fenómenos sonoros desde una perspectiva mecanicista **(p. 97).**

Lo anterior permite dejar por esclarecido y en manifiesto la naciente existencia de las intenciones físicas y matemáticas **"**formalistas**"** alrededor del conocimiento científico de la época, por un lado, los intereses por el estudio de los fenómenos que emergen en el mundo natural fueron los primeros en mostrar indicios para detallar y dar explicaciones más robustas al quehacer científico que imperaba con mayor auge hacia el Siglo XVI y por el otro lado el surgimiento de la Mecánica Racional como contexto de referencia coadyuvó a cambiar las concepciones filosóficas que hasta la fecha habían perdurado en torno al estudio físico del sonido.

Hasta este momento, es importante señalar que el papel que jugó la práctica de la *Teoría musical*, hasta antes del Renacimiento **(**que es el período que comprende la Edad Media**)** y la Revolución Científica había sido considerada como una **"**ciencia**"**, con un impacto similar al de la Matemática y la Astronomía o incluso la Óptica, de tal forma que está costumbre científica establecida en el *quadrivium* por parte de los filósofos griegos había perdurado con el objetivo de tratar todas las concepciones relacionadas con su espiritualidad y por ende con su cosmovisión ligada al mundo natural.

Así entonces, en el Renacimiento la *música* era considerada una ciencia matemática, donde los teóricos musicales poseían reglas matemáticas que a su juicio debían ser seguidas estrictamente en la práctica. Era impensable que los músicos se apartaran de dichas reglas ya que, de otro modo, las bases de la música serían destruidas. En cuanto a la naturaleza de los fenómenos sonoros, a principios del Siglo XVII Francis Bacon lamentaba que la única relación conocida que vincula el sonido con algún parámetro físico era la proporción numérica pitagórica entre la longitud de las cuerdas y la altura de las notas. Por ello pone el énfasis en la necesidad de explorar las dimensiones materiales del sonido y de su producción efectiva, al desechar las abstractas especulaciones matemáticas de origen griego y medieval. **[…]** Otros estudiosos contemporáneos de Bacon y Kepler, entre ellos Galileo, Mersenne y Descartes, desde posiciones mecanicistas, concibieron en cambio al sonido como una sucesión de impulsos regulares, impresos al aire por el movimiento vibratorio del cuerpo sonoro **(**y en particular por las vibraciones de una cuerda**)** y transmitidos a través de dicho medio de manera similar a como lo hacen las ondas en el agua **(Boido, 2007, p. 97).**

Es evidente que la transición en el tiempo las críticas históricas respecto a la práctica de la *Teoría musical* que emergen en el contexto de la Edad Media en conjunto con la edad temprana del Renacimiento tomarían un mayor vigor ya la Revolución Científica para sentar las bases del estudio físico del sonido, las cuales consideraban a la música como un conocimiento científico comparado con el mismo auge que otras áreas; sin embargo, empezaron a surgir diversas reflexiones acerca de lo que se entendía por la música se particionaron en dos concepciones, las cuales, autores como **Boido y Kastíka (2002)** reconocen este tipo de *reflexiones* acerca de la música en dos direcciones**:** la *estética* referida a la concepción musical, la instrumentación o el papel de la armonía y la melodía y la *científica* que esencialmente se interroga acerca de la naturaleza del sonido musical. **[. …]** Mencionan que en la actualidad la ciencia de la música prácticamente ha dejado de existir, pero estaba presente, y con gran vigor, en aquella época y a fin de no caer en anacronismos se destina como una categoría de análisis tal y como era concebida en el pasado; actualmente la ciencia de la música y su historia han quedado relegadas al interés de unos cuantos historiadores. El arte de la música, la estética musical, es hoy el centro de un universo que ha dejado de lado las pretensiones de "ciencia". La componente "científica" de aquella ciencia de la música pertenece en la actualidad casi exclusivamente a una rama de la mecánica**:** la acústica, y en particular a la llamada *acústica musical* **(p. 60).**

Al situar en el tiempo al Siglo XVI como una primera aproximación al estudio científico del sonido, como afirma **Boido (2007)** que el primer desarrollo importante en ese tiempo en la investigación de las causas físicas de un fenómeno sonoro en particular, la *resonancia*, fue realizado por el médico, escritor y poeta italiano Girolamo Fracastoro **(**1478 – 1553**)** colega y amigo de Copérnico. **[. …]** Sus consideraciones sobre el sonido fueron presentadas en su obra *De sympathia et antipathia rerum liber unus* **(**1546**)**. **[. …]** Fracastoro describió como cierta vez, en una iglesia, advirtió que algunas imágenes de cera se movían en el mismo momento en que sonaba una campana, mientras que otras figuras no lo hacían. Su explicación se basó en la frecuencia de los impulsos propagados por la campana a través del aire, esta explicación sería la misma causa de las vibraciones simpatéticas **[**este tipo de vibraciones son generadas por un fenómeno vibratorio en el que la cuerda o un cuerpo vibratorio anteriormente pasivo responde a vibraciones externas en las que posee una semejanza armónica**]** de los instrumentos de cuerda.

Posteriormente, otros estudios fundamentales **(**teóricos y experimentales**)** se centraron en mostrar que el tono de una nota es proporcional a la frecuencia de vibración del cuerpo sonoro, y por lo tanto que los intervalos musicales son razones de frecuencias de vibraciones, estos estudios fueron realizados por Benedetti en 1563, Galilei entre 1589 y 1590, Isaac Beeckman entre 1614 y 1615 y Marin Mersenne entre 1623 y 1634. Pero hubo

que esperarse hasta 1702 para que el término "acústica" hiciese su irrupción en el ámbito científico el cual fue empleado por primera vez el físico Joseph Sauveur **(**1653-1716**)**, cuando ya dicha rama de la física se hallaba bien consolidada **(Boido, 2007).**

Investigaciones como la de **Dostrovsky (1975)** y **Boido y Kastíka (2002)** hacen referencia a la transición histórica de la *Teoría musical* a la Edad Media, donde para esta época la música era una ciencia que se encontraba alejada de los sentidos o del placer auditivo y se vinculaba con la ─ moral ─ ya que estaba básicamente al servicio de la educación religiosa, personajes como Severinus Boethius, considerado como el último representante de la cultura romana y el primer intelectual del Medievo así como el guía y autoridad de esta etapa histórica a lo que se refiere a los escritos clásicos sobre música; para él, su concepto de *música mundana* es el de la pitagórica, la música de los planetas ya que se trataba de la armonía en el sentido amplio y era la única música que existía verdaderamente. Los otros tipos de música **(**la *música humana* y la de *los instrumentos***)** existían solamente como reflejo o en la medida en que participaban de la armonía del cosmos. Los sonidos de la música mundana de Boethius *no se oyen*.

Boethius fue quien asoció explícitamente las proporciones de los pesos de los martillos **(**según la anécdota referida hacia el mismo Pitágoras**)** con las proporciones de los intervalos musicales, según él, Pitágoras "no tenía fe en el oído humano" y "no confiaba en los instrumentos musicales", por lo que buscaba de "un método por el cual pudiera aprender las medidas fijas e inalterables de las consonancias", de esa forma Boethius explica por qué Pitágoras comparó los pesos de cinco martillos, para después mencionar algunos otros experimentos "en esas proporciones" con pesos en las cuerdas, longitudes de cañas, pesos en las embarcaciones y, finalmente, en las longitudes y espesores de las cuerdas **(Dostrovsky, 1975, p. 173).**

Al transcurrir el tiempo, ya en el Siglo XI se menciona a hablar sobre los primeros pasos hacia una ciencia de los sonidos percibidos por los sentidos, estos fueron dados por Guido de Arezzo **[**Fue un monje benedictino italiano que ha pasado a la historia de la música como uno de los más importantes reformadores del sistema de notación musical**]**, el cual considera que las ideas de Boethius son vistas como "útiles solamente para los filósofos". **[. …]** Gradualmente la música fue definiéndose más como la ciencia de los sonidos producidos tanto por la voz humana como por los instrumentos que ejecutaban los músicos. Por otra parte, durante el Siglo XIV, comienzan a hacer sus primeras apariciones las consideraciones *estéticas* acerca de la música, y se hablará de su *belleza* o su *fealdad*. **[. …]** A partir del Siglo XVI la música se consolida paulatinamente como la disciplina de los sonidos percibidos por los sentidos y comienza a ser concebida como un arte **(Boido y Kastíka, 2002, pp. 61-62).**

La historia de la *Teoría musical* nos muestra pasajes hasta este momento, no solo de sus precursores más inmediatos o con más aportes de su quehacer al desarrollo de esta práctica, sino que reúne el pasaje de su esencia por medio de los cambios de paradigma como lo que en un inicio se concebía y se sostenía por la filosofía pitagórica; al pasar a la Época Medieval **(**llámese también Medievo o Medioevo**)** ya estaban presentes rupturas en torno a este tipo de cosmovisiones filosóficas y en gran parte teológicas para dar lugar así a concepciones propias del campo de la *música* como su estética, lo que conlleva a deslindarse precisamente de las creencias numerológicas que hasta el momento persistieron. Por el contrario, críticas hacia los pitagóricos como la de la escuela de pensamiento aristotélico, se ocuparon por la música de los instrumentos, la que es posible escuchar y analizar los efectos que produce en el ser.

Como era de esperar, dado que Pitágoras no proporcionó una solución al problema que había descubierto **(**el de las consonancias**)**, *empero* llegó a la conclusión de que el mundo no se compone más que de números, ya que si esto fuera así el problema de las consonancias se hubiera resuelto, sin embargo, la mayoría de sus contemporáneos creyeron que esta solución crea problemas mayores que él que se propuso en resolver, de tal manera que los filósofos posteriores resolvieron el problema de la *consonancia* al considerar que el alma humana constituye una *armonía* de varios elementos, que se despierta por una armonía similar a la proporcionada por las consonancias.

La definición del problema, así como la explicación posterior dada prevalecieron durante la Antigüedad y durante la Alta Edad Media, cuando la música probablemente se tocaba en la escala pitagórica y la Teoría Musical estaba completamente dominada por ideas tomadas de los antiguos. Aproximadamente en los Siglos XII y XIV ocurrieron dos desarrollos radicalmente nuevos en la música, *la invención de la polifonía* y *la introducción de las terceras y las sextas como consonancias*. La *polifonía* se puede definir como**:** varias melodías relativamente independientes tocadas o cantadas simultáneamente. La palabra clave aquí es**:** *relativamente*, ya que, por ejemplo, en un canto simultáneo de la misma melodía en diferentes tonos, ocurre automáticamente cuando dos hombres y dos mujeres cantan juntos no constituye una polifonía propiamente dicha. En la verdadera polifonía que de alguna manera surgió del canto gregoriano, las melodías siempre proceden de tal manera que al menos los acordes resultantes acentuados suenan armoniosamente, en otras palabras, la unión de las melodías está gobernado por las consonancias **(Cohen, 1984).**

Cohen (1984) afirma que la tarea principal con esta nueva extensión del rango tradicional de consonancias en la práctica musical, la Teoría Musical se enfrentaba ahora a la tarea de dar cuenta de alguna manera estas nuevas consonancias. La tarea difícil que quedaba era integrar las nuevas consonancias en la Teoría Musical existente. El hombre que

finalmente logró esto, en una de las grandes obras maestras de la historia de la Teoría Musical, el *Le Institutioni Harmoniche* **(**1558**)**, fue Gioseffo Zarlino *maestro di capella* de San Marcos en Venecia.

Este único libro representa según el autor, el primer intento de establecer reglas de composición sobre la teoría de la consonancia. Aquí, el enfoque científico y estético de la música están unidos en una síntesis hecha posible por una característica común de toda la música hasta ese momento, pero perdida poco después, a saber, el hecho de que las disonancias todavía se trataban como excepciones, para ser utilizadas solo para la expresión de unos pocos afectos seleccionados que debían estar siempre cuidadosamente preparados para resolverse en acordes consonantes. Gracias a esta característica de la música del Renacimiento tardío, Zarlino pudo convertir la teoría de la consonancia en la piedra angular de toda la Teoría Musical **(pp. 4-5).**

En el Siglo XIII surgió el problema de los instrumentos y las voces para entonarse juntos, cuando inicio el canto simultáneo de dos o tres voces junto con el desarrollo de nuevos instrumentos, usados inicialmente para acompañar la voz, pero empleados posteriormente también solos. **[. …]** Para ello Zarlino **[**en el Siglo XVI**]** ya proponía una nueva subdivisión de la escala musical fundamentada en la *justa entonación*, y justamente este sistema tenía inestabilidades de entonación, por lo cual fue una de las diferencias entre él y su discípulo Vincenzo **(Guevara, 2010).**

Según **Cohen (1984)**, Zarlino redefinió el problema pitagórico de las consonancias de la siguiente manera **(Véase *Ilustración* 15.)**, es posible percibir que en las proporciones de las consonancias están contenidas en el número seis, es decir, todos los números que componen las proporciones de las consonantes son uno de los primeros seis números enteros. Este rango de los primeros seis enteros, o escenario, es el *número sonoro*, el *número armónico*, que posee este *poder* para generar todas las consonancias musicales. Ahora, ¿por qué solo seis?, ¿qué propiedades permiten precisamente a este número hacerlo?

	Name	Ratio of string lengths	Example in our scale	
Pythagorean	Unison	1: 1	C – C	
	Octave	1: 2	C – c	
	Fifth	2: 3	C – G	together octave, as $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$
	Fourth	3: 4	G – c	
New	Major third	4: 5	C – E	together octave, as $\frac{4}{5} \times \frac{5}{8} = \frac{1}{2}$
	Minor sixth	5: 8	E – c	
	Minor third	5: 6	A – c	together octave, as $\frac{5}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{2}$
	Major sixth	3: 5	C – A	

***Ilustración* 15.** *Redefinición del problema hecha por Zarlino.* **(Cohen, 1984, p. 5)**

En primer lugar, seis es el número de los números perfectos, es decir, aquellos números que son en sí mismos la suma de todos los factores en los que se pueden resolver**:**

$$\mathbf{1 \times 2 \times 3 = 1 + 2 + 3}$$

Además, dice Zarlino, Dios necesitó seis días para la Creación. Hay seis planetas**:** Luna, Mercurio, Venus, Marte, Júpiter, y Saturno. Hay seis **"**partes que conforman la naturaleza**":** tamaño, color, forma, intervalo, estado y movimiento. Hay seis direcciones**:** arriba, abajo, adelante, atrás, a la derecha, a la izquierda. Seis partes que delimitan al cubo. Y así. Así, se ha redefinido el problema de la consonancia en el sentido de que se ha descubierto que el *escenario* es el *número armónico* que genera todas las consonancias, tanto las tradicionales como las adquiridas recientemente, y finalmente se ha resuelto el problema también, en el sentido de que se ha demostrado *porqué* precisamente el *número seis* es tan privilegiado como para poseer esta capacidad de generación única **(pp. 5-6).**

Hasta este punto, Zarlino, ocupa la necesidad explicativa de relacionar y privilegiar la filosofía pitagórica en la práctica de la Teoría Musical, sin embargo, ya se hacen presentes los primeros trabajos por entender de forma *física* el fenómeno natural que produce el *sonido* eran de esperarse en el lapso de tiempo del Medievo y el transcurso de los años del inicio del Renacimiento como se dejó dicho párrafos atrás de esta subsección; en estos años ya prevalecían y estaban ubicados intereses por el surgimiento de experimentaciones en cuanto al *sonido*, las cuales se sustentaban bajo ciertas *hipótesis físicas* lo que a su vez condujo al nacimiento de *metodologías experimentales* en aras del nacimiento del *método científico* el cual se posicionaba ya en manos de otra generación que **"**revolucionaría**"** por completo este estudio y así el advenimiento de un cambio radical en la ciencia.

Como plantean **Boido y Kastíka (2002)** con Gioseffo Zarlino, en la segunda mitad del Siglo XVI, acontece la "matematización" de la música real **(**audible**)**, que a juicio del músico veneciano responde a la "matematización" de la naturaleza. Aunque la música se sostenía en un conjunto de relaciones numéricas ─ Zarlino era esencialmente pitagórico ─ la armonía de los sonidos que no se oyen comenzó a estar *estrechamente vinculada* con la armonía de los objetos que sí se oyen por lo que intentó justificar racionalmente el uso real que se hacía de los intervalos musicales. **[…]** La intención más inmediata durante esta época fue propiciar la búsqueda de un criterio de verdad matemático en cuanto al fenómeno de los *armónicos*, ya que estos se encontraban en la naturaleza y, por lo tanto, su secuencia generaba acordes consonantes. Éste fue el punto de partida para los teóricos desde Zarlino hasta Rameau.

Si bien, dentro del pasaje de la Historia de la Ciencia, como se ha esclarecido a lo largo de estas subsecciones que comprenden este capítulo, la Civilización Griega ocupa el

primer referente contextual tanto histórico como geográfico en el devenir de la práctica de la Teoría Musical hasta llegar a los años que comprende la Edad Media **(**del Siglo V al XV**)** que, dentro de la ideología que había prevalecido hasta ese momento había sido mostrar las relaciones numerológicas en torno a los intervalos musicales y que posteriormente en conjunto con la inclusión de instrumentos y el canto gregoriano **(**canto litúrgico de la Iglesia de Roma**)** el problema de las consonancias sufrió reestructuraciones tras nuevos aportes a esta práctica.

Los siglos subsecuentes dieron cabida en la línea del tiempo al Renacimiento **(**aproximadamente los Siglos XIV y XVI**)** este como el período de transición de la Edad Media a los inicios de la Edad Moderna y posteriormente a la Revolución Científica **(**ubicada del Siglo XVI al XVII**)** los cuales conllevarían a la ruptura del paradigma filosófico pitagórico que había prevalecido hasta ese entonces y por su parte también al aristotélico.

La *siguiente subsección* es destinada al nacimiento de la Mecánica Racional que muestra cómo las relaciones establecidas desde las concepciones filosóficas que habían prevalecido hasta la Edad Media conllevaron a evolucionarse con el surgimiento de esta rama de la Física. Cabe resaltar que, así como la Edad Media, movimiento propiamente del continente europeo, con la característica principal de la ausencia de contacto de Europa con otras civilizaciones del mundo, se reestructurarían ámbitos sociales, culturales, políticos y económicos de la época; así, al seguir el cauce del tiempo con el Renacimiento como una manera de manifestar la renovación cultural y el dogma establecido en la Europa Medieval, es decir, se planteaba ahora una nueva forma de ver la vida, al mundo y en sí, al ser humano, al sustituir el teocentrismo por el antropocentrismo.

Seguido de este movimiento la aparición de la incipiente Revolución Científica, hasta su culminación permitió unificar el camino de la *Acústica*, ciencia que emergió de la práctica de la *Teoría Musical*, como consecuencia de la transformación de las concepciones antiguas ligadas a ella, por lo que se logra identificar una evolución a través de la siguiente ruta epistemológica**:**

[1] La teorización de la música en la época antigua fue puramente matemática, ya que era considerada una *ciencia*, tan similar como la Astronomía, Óptica, Aritmética y la Geometría; pero, lo que conllevó a desprenderse de la práctica matemática fue el conjunto de ideas asociadas a la divinidad y al cosmos que sostenían los filósofos de ese entonces.

[2] Al sufrir este **“**cambio**”** de perspectiva ideológica la *Teoría Musical* que estaba inmersa en el famoso *quadrivium*, permitió en la época de la Edad Media y el Renacimiento a que los “sentidos humanos” fueran copartícipes al juzgar tal práctica por medio de la armonía que producían los sonidos provocados por los instrumentos y las voces; por lo que,

el canto y la utilización de estos, conllevaron a posicionarla ahora como un *arte estética*, y por ende la desplazaban ahora a otro terreno gracias a la desvinculación de la cosmovisión filosófica sostenida hasta esos momentos.

[2.1] **Guevara (2010)** hace notar que el científico renacentista, encuentra que los músicos, a partir del Siglo XI comenzaron a crear su propio lenguaje junto con un elaborado sistema de notación y diagramas. Ellos ya tenían una representación gráfica a lo que posteriormente la geometría cartesiana presentaría como función de dos dimensiones coordenadas **(**en la representación musical la coordenada $\boldsymbol{x}$ es el tiempo, la coordenada $\boldsymbol{y}$ el tono**)**.

[3] Una vez que la *Teoría Musical* ya se contemplaba como un *arte estética*, en la época inicial de la Revolución Científica, los problemas detectados derivados de ella, abrieron brecha al estudio temprano *mecanicista* del fenómeno del sonido, por lo que, ya para ese entonces, con Vincenzo Galilei y propiamente con el mismo Galileo Galilei, ya rechazaban toda la filosofía antigua al empezar a incorporar *métodos experimentales*, es decir, experimentaciones sustentadas en *hipótesis físicas* derivadas de observaciones y mediciones que dieron pie al inicio del concepto**:** *método científico*.

[4] Lo que posteriormente respecta al estudio del *sonido* es ya sobre un contexto físico y matemático que es notorio ya en la Edad Moderna temprana con la consolidación de la *Acústica* separada de la *Teoría Musical*, pero que sus orígenes se sustentan en esta práctica; por el contrario, la *música* ahora es vista como una concepción artística, que ya en el Siglo XVII con el período del Barroco en el que está contrapuesto con cualquier estilo artístico al *clasicismo*, la *Teoría Musical* buscaría ahora la incorporación de los diferentes tipos de música y los efectos que esta producía en los oyentes ligándola directamente a la *Teoría de los afectos*.

La cual que desde tiempos remotos se consideraba que esta práctica podía producir emociones e inspiraciones espontáneas desde el estado psicológico en el que se encuentran las personas, debido a las características de la actividad musical, como el tempo, los intervalos, la disonancia o su contraparte la consonancia, cromatismos, etc., por mencionar algunas, donde propician estados emocionales como la alegría, tristeza, odio, amor, admiración y el deseo, estas, ya desde la Antigüedad Clásica estaban y se presumía que la música producía estas; incluso René Descartes en 1649 en su obra *Les passions de l'âme* figuran como parte de la organización del cuerpo humano al generar afectos hasta su mayor expresión como las pasiones.

4.3 El estudio matemático, experimental y mecanicista del sonido en la Revolución Científica

"El estudio profundo de la naturaleza es la fuente más fértil de descubrimientos matemáticos." – Jean-Baptiste Joseph Fourier

En esta subsección se muestran los aportes sobre el tratamiento físico y matemático del *sonido* que comprenden los Siglos del XVI al XVIII; históricamente, **Guevara (2010)** sitúa su investigación en la Revolución Científica, donde menciona que los estudiosos del Siglo XVI comenzaban a entender la música ya no solo como una disciplina abocada a la composición y a la creación de conmovedoras interpretaciones en donde las matemáticas tenían solo que proveer los elementos de ajuste cada vez que surgían problemas de consonancias, como pasó con los epiciclos en el sistema ptolemaico, sino que además debían tratar de explicar las razones técnicas que sustentan la música, entender de qué manera ésta forma también un cuerpo amplio y exegético, al tratar de formular razones de todo, tanto de lo material como de lo intangible.

De tal forma, que estas revoluciones de conocimiento como señala este autor, permitieron ligarse entre sí, ya que no pueden considerarse totalmente independientes, incluso menciona al mismo Stillman Drake quien él está convencido de que los orígenes del perfil experimental de la ciencia del Siglo XVIII se tienen que buscar en la música del Siglo XVI. Para vislumbrar el desarrollo de los Siglos XVI y XVIII sobre el vínculo entre las matemáticas y los paradigmas de la música el autor señala los tres caminos que se detallan a continuación**:**

[a] Por un lado están los que trataban de ver las diferentes disciplinas del conocimiento al interior de un solo cerco teórico; la música no es considerada una disciplina perteneciente a las artes o a las matemáticas aplicadas, sino como un conjunto de conocimientos que tendrían en común un lenguaje universal**:** el de las Matemáticas.

[b] En paralelo a éstos surgieron aquellos que se interesaban en resolver problemas concretos originados al tratar de explicar la mecánica del sonido y la manera en que éste es percibido por el cuerpo humano.

[c] En el Siglo XVIII los avances matemáticos proporcionaron una nueva herramienta**:** el análisis, una teoría con que sería posible entender más sobre la propagación del sonido, y que llevó a nuevas teorías que ya no eran especulativas, las cuales a su vez repercutieron de manera directa o indirecta en el diseño de los instrumentos y las interpretaciones **(p. 34).**

Una vez que se ha esclarecido la ruta epistemológica en cuanto al cambio evolutivo de la práctica matemática sostenida, así como la inclusión de *hipótesis físicas* dentro del

estudio del *sonido*, se toma ahora como partida parte del Siglo XVI para dar contextualización y seguimiento histórico a este problema, se toma la siguiente postura que sostiene **Cohen (1984)** respecto a los cambios que la ciencia sufre en ese entonces, este autor menciona que en un período sorprendentemente breve alrededor de 1600 la ciencia tradicional dio paso, en muchos aspectos, a una nueva forma de interpretar la naturaleza. Comenzó como una forma novedosa de abordar problemas científicos, la nueva ciencia eventualmente permitió al hombre manipular y cambiar la naturaleza en una escala sin precedentes. Lo que provocó este trastorno fundamental es uno de los problemas centrales de la historia, **[. …]** la *ciencia de la música* **[énfasis añadido]** que encajó con los nuevos desarrollos de la ciencia, por lo que es conveniente dar descripción de las principales características de la Revolución Científica como se da a continuación**:**

[1] *Matematización***:** Hasta el Siglo XVII, el estudio científico **(**a diferencia del mágico**)** de la naturaleza estuvo completamente dominado por las doctrinas de Aristóteles y sus numerosos comentaristas. La ciencia aristotélica es, entre otras cosas, esencialmente *cualitativa*; su objetivo fue explicar los fenómenos naturales al definir sus esencias. **[. …]** En contraste, la nueva ciencia del Siglo XVII es *cuantitativa***:** las propiedades de la naturaleza se explican al vincular distintos fenómenos a través de una ley formulada en términos matemáticos.

[2] *Experimentación***:** En cierto sentido, la ciencia aristotélica tiene una base empírica. Ciertamente deriva sus datos de la cuidadosa observación de la naturaleza. Lo que la distingue de la nueva ciencia es el tipo de naturaleza que se observa. El método aristotélico es directamente empírico**:** la caída libre, por ejemplo, se observa tal cual, es decir, demasiado rápida para que el ojo la analice, y también muy complicada por los efectos del aire a través del cual cae el cuerpo. La nueva ciencia, por el contrario, observa, por así decirlo, no la naturaleza natural, sino una naturaleza *artificial*, que nunca se ve en la vida diaria. Por lo tanto, en el ejemplo de la caída libre se hace manejable al dirigir el cuerpo que cae a través de una ranura ligeramente inclinada contra el horizonte, y se libera de la fricción del aire y la flotabilidad al imaginar o crear efectivamente un vacío a través del cual se hace caer el cuerpo. Este proceso de obligar a la naturaleza a exhibir fenómenos que normalmente no se producen se denomina “experimentación”. Los ejemplos abundan, y se encuentran también en la ciencia musical.

[3] *Mecanización***:** En la ciencia aristotélica las propiedades se explican al hipotetizar la existencia de una determinada cualidad en la que está contenida la propiedad a explicar. Por ejemplo, el hecho de que ciertos cuerpos estén más o menos calientes se explica al postular la presencia en dicho cuerpo de una cierta cantidad de una cualidad llamada “calor”.

Alrededor de 1600, algunos científicos se dieron cuenta que esta explicación del mundo no es menos complicada que el mundo mismo, y comenzaron a buscar principios explicativos que lograran una reducción real de la complejidad infinita de la realidad. Inspirados en el atomismo antiguo, postularon una división de la materia en partículas **(**esta división es finita o infinita**)**, al despojar a estas partículas de todas las cualidades excepto del tamaño y la forma **[**los personajes de esta época**]** se dispusieron a explicar todo lo que sucede en el mundo a través del movimiento, es decir, la ubicación relativa cambiante, de partículas de materia de diferentes formas y tamaños. La consolidación de esta **[**forma de investigar o**]** programa de investigación en esta época se suele denominar **"**mecanización**"** de la naturaleza o "filosofía mecánica". La explicación del proceso de la sensación humana fue sin duda una parte de este programa, y aquí es donde, como veremos la mecanización de la naturaleza se volvió relevante para la ciencia musical.

Desde la posición del autor el propósito de esta subdivisión, es servir como pista para distinguir entre las diversas teorías musico-científicas que existen en esta época. Sin embargo, lo anterior es relevante para el proceso histórico de la Revolución Científica en un sentido más amplio. La subdivisión anterior está inspirada en las obras[12] de Dijksterhuis, quien consideró la matematización como el rasgo de definición último de la Revolución Científica, y Kuhn, que utilizó la distinción entre el enfoque matemático y el experimental para encontrar algún patrón significativo en la desconcertante variedad de actividad científica en el período en cuestión. **[**. … **]** **[**A continuación**]** se da el siguiente esbozo sobre la dinámica que impulsó el proceso histórico de la Revolución Científica**:**

[a] Durante la primera etapa, alrededor de 1600 a 1650 aproximadamente se delinearon los programas de investigación que se convirtieron en constitutivos de la Revolución Científica. Galileo formuló los programas tanto del enfoque matemático como experimental, mientras que Descartes proclamó su programa de investigación mecanicista. Durante bastante tiempo, cada uno de estos enfoques distintos avanzó por sí solo. Por ejemplo, Kepler matematizó el campo que desde entonces se ha denominado óptica geométrica; Torricelli experimentó con el vacío; Gassendi explicó el mundo por medio de átomos; y así. También resultaron combinaciones posibles de los diferentes enfoques; así, por ejemplo, Pascal matematizó la física de la presión del aire, basándose en los fundamentos experimentales previamente establecidos por Torricelli y por el mismo Pascal.

[b] Durante el transcurso de la segunda etapa **(**1650-1690**)** los diferentes enfoques chocaron cada vez más. En particular, la mecanización de la naturaleza parecía inadecuada para el tratamiento matemático. La investigación se dirigió cada vez más a problemas de investigación galileano y cartesiano. La sensación de crisis resultante es particularmente evidente en el trabajo de Huygens, quien estaba firmemente comprometido con ambos

[12] Véase **«**The Mechanization of the World Picture: Pythagoras to Newton.**»**

programas de investigación y se volvió cada vez más consciente de su incompatibilidad última.

[c] La crisis se resolvió y así se puso fin a la Revolución Científica por Newton, quien se dio cuenta de que una formulación del mecanicismo en términos de fuerzas y los movimientos causados por estas fuerzas podría hacer que el enfoque mecanicista fuera susceptible de tratamiento matemático sobre una base experimental después de todo. Así se restauró la armonía entre los enfoques y un programa de investigación parcialmente nuevo definido que podría servir y sirvió hasta finales del Siglo XIX **(pp. 7-10).**

Con base en la cita anterior el autor, comenta la brecha histórica que permite esclarecer cada vez más el *pasaje* de la Revolución Científica, al fungir este como mediador histórico-epistemológico en el entendimiento de los *avances* del conocimiento científico moderno de la época, propiamente del físico y matemático. Las características de la dinámica de este movimiento científico, se dan como eje de comprensión para el advenimiento de los personajes más representativos en tanto que el *fenómeno del sonido* ocupa el tener un mejor entendimiento por los partícipes de este tiempo.

Si bien, este cambio de paradigma científico en los inicios del Siglo XVI no fue visible en su totalidad debido a que la influencia griega, así como la de la Edad Media estaban presentes aún de **"**cierta manera**"** y, por ende, permeaban las ideas en torno a este cambio evolutivo que ya sufría la ciencia de la época, por lo que la *Teoría Musical*, como práctica permite reunificar cuál o cuáles eran las visiones científicas que ya se habían puesto en ella, así como lo que se esperaba y lo que se quería lograr en ese momento, lo que ayudó a dejar camino abierto para el mejor entendimiento de esta práctica.

Es conveniente ahora, tener en cuenta a **Cohen (1984)** quien esboza la situación de la ciencia de la música alrededor de 1600, tal y como estaba presente al inicio de este período. Por un lado, estaba el *senario* **(**inclusión de las terceras y las sextas**)**, por otro lado, aparecieron tres enfoques distintos de la ciencia que estaban sustancialmente en desacuerdo con los principios explicativos sobre los que se basaba el *senario*. De acuerdo con las siguientes tres hipótesis**:**

[1] Se puede esperar que para cualquiera que adopte la nueva concepción de las matemáticas como **"**el lenguaje del Libro de la Naturaleza**"**, la forma en que Zarlino había aplicado el *senario* al problema de la consonancia no parecería más que un juego de números vacíos.

[2] Se puede esperar que a medida que el enfoque experimental de la naturaleza se hizo más común rápidamente, la cuestión de si las consonancias podrían depender de variables distintas a las longitudes de las cuerdas era obvio de abordar.

[3] Desde el lado del mecanismo, se puede esperar que se intente cerrar la brecha que todavía deja Zarlino entre el origen del sonido musical y su recepción por el alma, en términos de partículas materiales de varios tamaños y formas.

Así, como menciona el autor desde los tres nuevos puntos de vista científicos, el senario de Zarlino parecería bastante insatisfactorio**, [**debido a que su posición al problema era netamente *pitagórica***]** tanto como definición como explicación del problema de la consonancia. Y efectivamente, unos 30 años después de la proclamación del *senario*, comenzarían los ataques. Por lo general, esto no tomó la forma de una polémica extendida contra Zarlino. Simplemente se dio por sentado que todavía existía un problema de consonancia, por lo que lo siguientes autores se proclamaron orgullosos de resolverlo, después de veinte siglos**:** Kepler **(**1619**)**, Galileo **(**1638**)** y Beeckman **(**1629**) [**quienes son discutidos más adelante**] (pp. 10-11).**

Quizá Johannes Kepler **(**1571-1630**)** es más conocido por descubrir las tres leyes fundamentales del movimiento de los planetas en sus órbitas alrededor del Sol, sin embargo, también fue un crítico sobre el enfoque matemático de la ciencia de la música. De acuerdo con **Dostrovsky (1975)** plantea que Kepler no se ocupaba directamente de los análisis físicos del tono y la consonancia; explicaba la consonancia de la misma manera que explicó las influencias astrológicas con la idea de arquetipos que son comunes al universo y al alma del hombre. Sin embargo, criticó la aritmética tradicional del tono. **[…]** Kepler sintió que la polifonía contemporánea había alcanzado un pico de perfección musical y su estética empírica afectó su decisión sobre qué intervalos llamar "consonancias". Como muchos contemporáneos, Kepler incluyó terceras y sextas entre las consonancias porque sonaban bien. En la *Harmonice Mundi* **(**1619**)** Kepler escribió**:**

> "Los Pitagóricos eran tan adictos en… filosofar en números, que no se atenían al juicio de sus oídos, aunque fue por medio de esto que inicialmente fueron llevados a esta filosofía; ellos definieron únicamente por sus números lo que es un intervalo melódico y que no lo es, es consonante y lo disonante, violentando así el instinto natural al juicio instintivo del oído."

Así Kepler desaprobaba la dogmática clasificación pitagórica de las consonancias, aunque se inspiraba en la idea de la importancia cosmológica de las armonías matemáticas. Kepler dio una derivación geométrica de las consonancias **(**al inscribir los polígonos en círculos**)**, que se hizo más difícil por la inclusión de terceras y sextas. Como en su astronomía, Kepler combinó la observación **(**juicio del oído, en este caso**)** con el análisis geométrico **(Dostrovsky, 1975, pp. 176-177).**

Como menciona **Cohen (1984)** para Kepler era obvio que los números nunca podrían proporcionar un criterio para distinguir la consonancia de la disonancia. El fracaso de Zarlino no se debió al azar, porque, de hecho, creía Kepler, la aritmética ocupa un estado ontológico bastante diferente de la geometría.

Con base en la opinión de Kepler, la mente humana está configurada para captar cantidades **(“**ad quanta intelligenda condita**”)**. Pero la cantidad no es el mismo número, sino lo que es medible. En palabras de Kepler**: “**La Aritmética no es nada […] sino la parte expresable de la geometría**”**. Los números se abstraen de la realidad; en sí mismos no denotan nada real. Además, los números son discretos, mientras que las cantidades sin continuas. Por ello este criterio debe buscarse entre las magnitudes continuas**:**

> Dado que los términos de los intervalos consonantes son cantidades continuas, también las causas que los distinguen de la disonancia deben tomarse de la familia de las cantidades continuas, no de los números abstractos, como una cantidad discreta.

Pero, ¿en qué sentido son los términos de las cantidades continuas los intervalos consonantes?, según Dickreiter, esto tiene que ver con la nueva idea del concepto de movimiento, al ejemplificar así el comienzo de la Revolución Científica en el campo de la mecánica, para la cual de hecho la renovación de ideas sobre el movimiento fue una característica central. Para apoyar este punto de vista, Dickreiter da una cita vaga de la obra *Harmonice Mundi***:**

> Así, en general, en todas aquellas cosas en las que se puede buscar la cantidad y, por tanto, las armonías, estas últimas están presentes de manera mucho más evidente a través del movimiento, que sin el movimiento.

Este autor, cree que no es aquí donde se busca la modernidad de Kepler. Una solución mucho más obvia comenta que es simplemente decir que el sonido es un **[***fenómeno continuo***]**, en el sentido de que cada punto de una cuerda define un tono diferente**:** lo anterior, es de hecho el significado que pretender Kepler dar en el contexto inmediato de la cita anterior de *Harmonice Mundi*.

Sin embargo, esto puede ser claramente para Kepler que la música tiene un lugar completamente diferente dentro del *quadrivium* que para Zarlino y toda la tradición representada por él. **(Véase *Ilustración* 16.)**

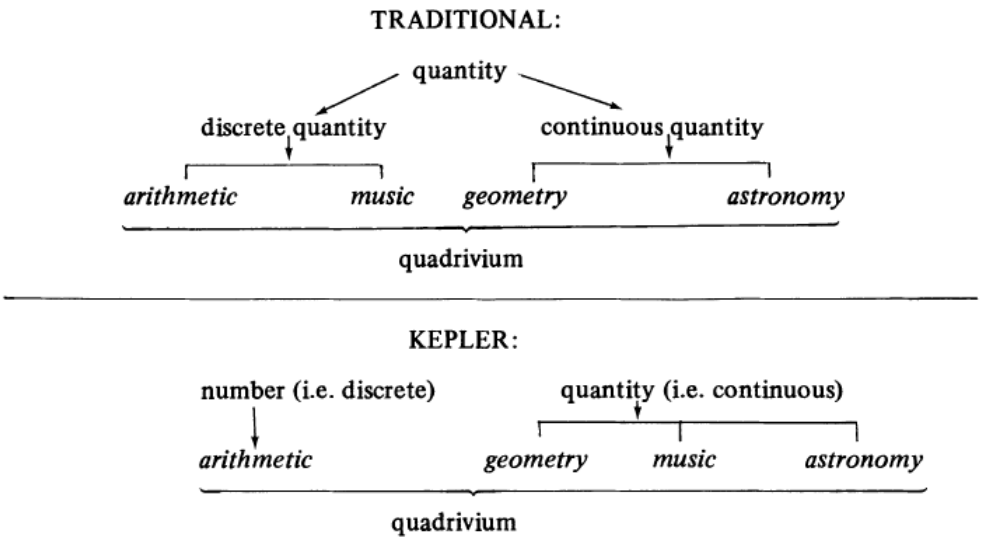


Ilustración* 16.** *El* ***quadrivium *desde la posición de Kepler.* **(Cohen, 1984, p. 18)**

La idea presentada en la búsqueda de un criterio geométrico para las consonancias como se da en la ***Ilustración* 16.**, demuestra el juicio que poseía Kepler ante la esfera y el círculo. Como puede apreciarse en la ***Ilustración* 16.**, se muestra un replanteamiento hecho por Kepler del famoso *quadrivium* conocido desde la época antigua, específicamente en la civilización griega, en el, separa sus concepciones de los términos**:** *discreto* y *continuo*, y aunque ambos estaban presentes, el primero de ellos recaía profundamente sobre la naturaleza de la Aritmética, mientras que el segundo lo asociaba plenamente a fenómenos en donde la cantidad sufría *cambio*, esta idea la asoció completamente al *movimiento planetario* donde ligó las ideas de las consonancias **(***Teoría musical***)** que poseía, esto le permitió concebir una *analogía* a través de la geometría al privilegiar un valor simbólico a la esfera y al círculo.

Propiamente el trabajo de Kepler se centra en caracterizar a las consonancias y a las disonancias a través de la geometría, por lo que el valor simbólico que Kepler asigna a la esfera y al círculo es privilegiado, a tal forma de tener las siguientes consideraciones respecto a estas figuras, según el autor Walker resume este valor en lo siguiente**:**

La esfera representa la Trinidad**:** el centro es el Padre, la superficie el Hijo y el espacio intermedio el Espíritu Santo. En la *Harmonice Mundi*, cuando explica el uso del círculo como causa de las consonancias, recuerda esta simbolización y la amplia. En una sección a través del centro de la esfera produce la figura plana de un círculo que representa el alma del hombre; esta sección se realiza al girar una línea recta, que representa la forma corporal, que se extiende desde el centro de la esfera a cualquier punto de su superficie; así el alma es al cuerpo como una curva a una línea recta que es **"**incomunicable e inconmensurable**"**; y el

alma es para Dios como un círculo a la esfera, es decir, se une a la esfericidad tridimensional divina, pero se unieron y dieron forma al plano generado por la línea corporal. **"**Cuál es la causa**"**, continúo Kepler, donde **"**estableció al círculo como sujeto y fuente de términos para las proporciones armónicas**"**.

Es esencial para comprender el pensamiento de Kepler darse cuenta de que, para él, a diferencia de sus predecesores del Renacimiento, los símbolos como estos no tienen una fuerza demostrativa independiente, comenta el**:**

> Yo también juego con símbolos […] pero yo juego de manera que no olvido que estoy jugando. Porque nada se prueba con símbolos; nada oculto se descubre en la filosofía natural a través de símbolos geométricos; las cosas ya conocidas son meramente ajustadas **[…]** a menos por razones seguras pueda demostrarse que no son meramente simbólicas, sino que son descripciones de las formas en las que las dos cosas están conectadas y las causas de esta conexión.

La historia de la búsqueda de Kepler de un criterio geométrico para las consonancias demuestra que estas no eran palabras vacías, como su intento de encontrarlo en la esfera y los cinco poliedros regulares **(**los **"**sólidos Platónicos**")** que se pueden inscribirse o circunscribirse, no llegó a nada. Y esto a pesar de su ardiente esperanza de que tuviera éxito, ya que en su primer **(***Mysterium Cosmographicum*; 1596**)** había utilizado estas mismas figuras por explicar la estructura del sistema solar.

Pero con el círculo tuvo más suerte. Encontró su criterio en las áreas que están cortadas por la circunferencia de un círculo circunscrito por polígonos regulares. El procedimiento es el siguiente.

Para empezar, Kepler dobla una cuerda imaginaria de tal manera que el principio y el final coinciden**:** en otras palabras, construye un círculo. Ahora, cuando dentro de un círculo se inscribe un polígono regular, dividirá el círculo en un cierto número de áreas iguales. El cuadrado inscrito, por ejemplo, divide el círculo en cuatro partes iguales, el pentágono en cinco, y así sucesivamente. **(Véase *Ilustración* 17.)**

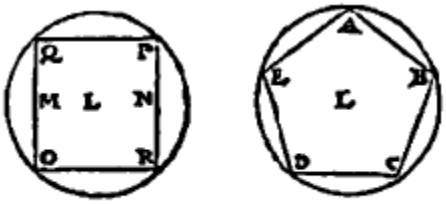


Fig. 5. From: *Harmonice Mundi*, p. 6/7.

***Ilustración* 17.** *Polígonos regulares circunscritos en un círculo según Kepler.* **(Cohen, 1984, p. 19)**

Estas divisiones generan proporciones que resultan de una comparación de los diversos arcos así cortados. Para hacer tal comparación debe hacerse entre la *parte* y el residuo. "Parte" aquí significa uno o más arcos subtendidos por uno o más lados del polígono en cuestión, de modo que la suma de las longitudes de los arcos no exceda la mitad del círculo**:** lo que queda del círculo se llama **"**residuo**"** que por tanto es igual o mayor que la "parte". Ahora se pueden hacer tres tipos de comparaciones, a saber**:**

1. parte del todo;
2. residuo del todo;
3. parte del residuo;

Así, por ejemplo, el pentágono genera las siguientes proporciones**:**

1. parte del todo**:** $\mathbf{1}:\mathbf{5}$; $\mathbf{2}:\mathbf{5}$;
2. residuo del todo**:** $\mathbf{3}:\mathbf{5}$; $\mathbf{4}:\mathbf{5}$;
3. parte del residuo**:** $\mathbf{1}:\mathbf{4}$; $\mathbf{2}:\mathbf{3}$.

Evidentemente, este procedimiento es demasiado amplio para generar sólo las ocho consonancias, ya que de este modo se incluye también un número infinito de consonancias al margen del compás de una octava, y también porque el número de polígonos regulares es infinito. Por lo tanto, es necesario plantear ciertas condiciones limitantes. Kepler puede hacer con tres **[**como se muestra a continuación**:]**

[1] Solo se admiten aquellos polígonos regulares que son directamente construibles por regla y compás. Esta condición **[…]** deriva de profundas condiciones metafísicas. Los lados de los polígonos regulares no construibles son perfectamente compatibles en los diámetros de los círculos en los que están inscritos. Por tanto, estos polígonos son desconocidos. No solo el hombre puede no conocerlos**:** Ni siquiera Dios. Y eso es porque Él no pudo haber usado esta clase particular de polígonos como modelos a partir de los cuales creó el mundo o cualquier parte de el.

Por lo tanto, el número de polígonos regulares se limita a aquellos cuyo número de lados está dado por las siguientes tres series **(**$\boldsymbol{s}$ es igual al número de lados; $\boldsymbol{n}$ es cualquier número entero desde cero hacia arriba**):**

$$\boldsymbol{s_1 = 2 \cdot 2^n \longrightarrow 2, 4, 8, 16, 32, \ldots}$$

$$\boldsymbol{s_2 = 3 \cdot 2^n \longrightarrow 3, 6, 12, 24, 48, \ldots}$$

$$\boldsymbol{s_3 = 5 \cdot 2^n \longrightarrow 5, 10, 20, 40, 80, \ldots}$$

Como resultado, todavía hay un número infinito de proporciones, debido al hecho de que todavía se incluye un número infinito de réplicas **(**intervalos mayores a una octava**)**.

[2] Las réplicas se eliminan debido a la aparente identidad de dos notas separadas por una octava. Esta segunda restricción aún producirá demasiadas consonancias porque, por un lado, las proporciones con, por ejemplo, **7** se eliminan por la capacidad de construir un heptágono **(**parte del todo como **1**: **7)**. Pero, por otro lado, estas mismas proporciones serían necesariamente reintroducidas a través de la consideración del octágono, que es indispensable para dotar a Kepler de **5**: **8**, pero que al mismo tiempo generaría disonancias **1**: **7** y **7**: **8**. ¿Cómo deshacerse de ellas?

[3] La sección de un círculo por un polígono regular genera proporciones consonantes si y solo si ninguna de las proporciones de una parte del todo, residuo del todo o parte del residuo podría haber sido alcanzada antes a través de un polígono no construible como, por ejemplo, el heptágono. Por lo tanto, el octágono se usa para derivar **5**: **8 (**residuo del todo**)**, lo cual es admisible porque ni la parte del todo **3**: **8**, ni la parte del residuo **3**: **5** ya se han excluido, sino que **1**: **7**, y por lo tanto **7**: **8** también se eliminan porque la parte **1**: **7** ya se ha excluido debido a la no constructibilidad del heptágono.

Estas tres condiciones limitantes de hecho proporcionan a Kepler todo, y no más de ocho consonancias, por siete divisiones solamente **(**las divisiones no numeradas son repeticiones o generadoras de disonancias**) (Véase *Ilustración* 18.)** **(pp. 17-21):**

	Regular polygon	Part	Residue	Whole	Resulting consonance	Resulting dissonance
①	diameter	1	1	2	$\frac{1}{1}$; $\frac{1}{2}$	–
②	triangle	1	2	3	$\frac{2}{3}$	–
③	square	1	3	4	$\frac{3}{4}$	–
		2	2	4	$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$	–
④	pentagon	1	4	5	$\frac{4}{5}$	–
⑤		2	3	5	$\frac{3}{5}$	–
⑥	hexagon	1	5	6	$\frac{5}{6}$	–
		2	4	6	$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$	–
		3	3	6	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	–
	heptagon	1	6	7	–	$\frac{6}{7}$
		2	5	7	–	$\frac{5}{7}$
		3	4	7	–	$\frac{4}{7}$
	octagon	1	7	8	–	$\frac{7}{8}$
		2	6	8	$\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$	–
⑦		3	5	8	$\frac{5}{8}$	–
		4	4	8	$\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$	–

***Ilustración* 18.** *Las ocho consonancias según Kepler*. **(Cohen, 1984, p. 22)**

Desde el punto de vista de **Dostrovsky (1975)** el trabajo de Kepler tocó las nociones del tono y la frecuencia en una instancia. Al tratar de relacionar las relaciones armónicas con el sistema solar, Kepler examinó los períodos relativos de revolución de los planetas. Mostró que las proporciones de casi todas las velocidades angulares en el aphelio y en el perihelio, tanto para un solo planeta como para pares de planetas, están cerca de las proporciones de los intervalos consonánticos. Para describir los resultados en términos musicales reales, Kepler asignó tonos **(**cuyas frecuencias eran**)** proporcionales a las velocidades angulares.

Como bien, puede apreciarse, el contexto matemático para atender el problema de las consonancias y disonancias hasta el momento ha estado presente, independientemente de trabajar con las proporciones respecto a las consonancias y disonancias, el introducir ahora la cosmovisión planetaria, conllevó a Kepler a **"**reestructurar**"** la filosofía sostenida al problema que persistía en la práctica de la *Teoría musical*, por medio del establecimiento de una geometrización privilegiada por el círculo y los polígonos regulares para encontrar tales proporciones.

La brecha de este problema existente en la *Teoría musical*, toma las tres características prominentes durante la Revolución Científica, tal y como en párrafos anteriores ya se dejó esclarecido, **Álvarez-García (2010)** ubica ahora a Simón Stevin **[1548-1620]**, un matemático e ingeniero belga quien sostenía que era posible concebir una escala musical más adecuada para la modulación armónica cuyos intervalos estuviesen definidos por medio de un mismo número irracional y no de cocientes entre distintos enteros **(**concretamente, la raíz duodécima de 2, aproximadamente igual a 1.059, que permite la división de la octava en doce intervalos de la actual escala temperada**)** **(p. 23).**

El problema de las consonancias de Zarlino que hasta este momento se ha comentado en este capítulo, y en específico, en esta subsección, se ubica con dos principales exponentes bajo la *aproximación matemática* con Johannes Kepler y Simón Stevin, el primero de ellos atiende a la geometrización de la armonía, mientras que Simón Stevin sostuvo la postura de considerar que las consonancias no estaban regidas por números enteros sino por un mismo número irracional, si bien, aunque en este último no se entra en detalle sobre qué fue lo que lo obligó a hacer sus estudios de las consonancias, ya que no es el objetivo principal de la investigación, ni de la subsección, lo que si conviene es rescatar y esclarecer a tales personajes que dieron pie a esta evolución epistemológica que acaece al problema de la consonancia y si bien, a pesar de que ya existían indicios experimentales y mecánicos en mostrar la *física del sonido*, no lo fue sino hasta los aportes de Stevin a la materia, los cuales fueron cobrando menos importancia al momento de la introducción de este nuevo estudio presente desde unas décadas atrás y a pesar de que no se desprende de la *aproximación*

matemática confiere una manera de entender tal situación por medio de este nuevo análisis que se detalla en los siguientes párrafos.

Cabe resaltar que el estudio de la *aproximación experimental* y *mecanicista* sostienen una conexión más fortísima debido a que uno de los contextos identitarios de la Revolución Científica fue mostrar *evidencia* por medio de la validación experimental; sin embargo, **Álvarez-García (2010) menciona** que la metodología experimental como la conocemos hoy día **[**para esta época**]** estaba en sus inicios. Antes de Galileo, la apelación sistemática a la experiencia para apoyar leyes obtenidas matemáticamente parece haber estado ausente, predominaba la mera acumulación de observaciones sin estar acompañada de alguna ley matemática previamente formulada para ser probada ─ un procedimiento que puede ser llamado el enfoque baconiano ─ que históricamente pertenece a la artesanía y no a la ciencia. **[**Sin embargo**]** el diseño experimental para descubrir nuevas leyes matemáticas vino después. La experimentación moderna comienza con la Ley de Caída Libre de los Cuerpos de Galileo.

El curso que sigue esta subsección, se retoma el trabajo de Vincenzo Galilei **(**el cual se ubica en la *aproximación experimental***)** quien fue discípulo de Gioseffo Zarlino sobre lo que respecta los inicios del movimiento de la Revolución Científica, como plantea **Dostrovsky (1975)** este personaje, fue la primera persona que se conoce que ha estudiado explícitamente la variedad de formas en las que las propiedades físicas de una fuente de vibración determinan el tono del sonido, y lo hizo a través de experimentos. Los primeros estudios acústicos de Vincenzo no parecen haberse conocido hasta que algunos de sus manuscritos fueron encontrados y discutidos por Palisca. Vincenzo fue un teórico de la música y también un compositor, lutanista y filósofo de la música. Admiraba la monodia[12] griega **[…]** y no aprobaba la polifonía contemporánea.

Cabe resaltar que ya desde finales del Siglo XV, algunos teóricos abogaban por una mayor dependencia del **"**juicio del oído**"** en el análisis de los intervalos musicales, en lugar del dogmático énfasis medieval en las simples proporciones. **[. …]** Vincenzo hizo su trabajo sobre la física de las vibraciones en el contexto de estos intereses musicales y filosóficos, porque quería encontrar hechos que fueran útiles para argumentar en contra de una adherencia demasiado fuerte a las reglas formales. Sus experimentos, realizados en 1589 a 1590, se describen en dos manuscritos**:** En **"**un discurso particular sobre las proporciones de la octava**"**, Vincenzo mostró, a partir de experimentos con cuerdas, tubos, pesos y monedas, que **"**la proporción**"** de la octava no es única; afirmó que, aunque la relación **2**: **1** es para longitudes, **4**: **1** para tensiones y **8**: **1** para volúmenes **(**como los de los tubos de órgano**)**. En **"**un particular discurso sobre el unísono**"**, describió experimentos que mostraban que, para tener el mismo tono, las cuerdas deben ser iguales no sólo en longitud sino también en material, tensión y grosor **(pp. 175-176).**

Cabe destacar que Galileo Galilei, de alguna manera estuvo involucrado en el trabajo experimental de su padre Vincenzo, y al morir este en 1591, Galileo hereda todos los manuscritos de su padre, entre los que seguramente estaban los estudios y críticas que realizó sobre la teoría musical. Muchos años más tarde, Galileo incorporó las ideas de su padre en sus propias discusiones sobre la física del sonido, y más importante aún, la inspiración para usar experimentos en mecánica está muy probablemente conectada con la experimentación musical de Vincenzo **(Álvarez-García, 2010).**

Hay que tomar en cuenta la opinión de **Capecchi (2014)** quien menciona que, con el Renacimiento, en el Siglo XV, la matemática teórica medieval **(**principalmente algebraica**)** se le unió a la matemática nueva **(**principalmente geométrica**)**, o más bien las matemáticas antiguas redescubiertas a las que el movimiento humanista dio una gran contribución. Sin embargo, hay que destacar que la readquisición de las técnicas fue bastante lenta. En particular, las tratados matemáticos y mecánicos de Arquímedes, aunque disponibles en la traducción Latina por Moerbeke, recibieron poca atención. No afectaron mucho a la ciencia hasta la primera mitad del Siglo XVI. **[. …]** A principios del Siglo XVI en Italia se abrió un amplio debate sobre el papel de las matemáticas en las ciencias naturales como resultado del creciente uso de las matemáticas en las aplicaciones y el hecho de que los matemáticos comenzaban a dar una forma distinta de conocimiento a sus disciplinas. Aunque nadie negó el papel fundamental de las matemáticas en sí mismas, no todos estuvieron de acuerdo con su estatus en cuanto al conocimiento del mundo físico **(pp. 90-92).**

La pauta histórica que se comentó en el párrafo anterior permite también conocer el trabajo matemático que fue propio de la época del Renacimiento, la cual ayuda a reivindicar el camino inevitable y progresivo seguido hasta los primeros años de la Revolución Científica, y, en resumen, el reconocimiento del Álgebra y la Geometría, como **“**ramas de la Matemática**”** para atender en específico al problema de las consonancias, del cual conduce al estudio físico del sonido por medio del entendimiento de los armónicos, al derivarlo directamente al tratamiento experimental.

Giovanni Battista Benedetti, conocido en la historia de la física principalmente por su trabajo sobre la caída libre, explicó los grados de consonancia con un análisis que invocaba la física del sonido musical. Hacia 1563, Benedetti mantuvo correspondencia con el compositor Cipriano de Rore, un compositor, en relación con los problemas de afinación y la necesidad de temperamento. **[. …]** Benedetti discutió el hecho bien conocido de que cuando un puente divide una cuerda a un tercio de su longitud, las secciones suenan a una octava de distancia. Dijo que la sección más larga tarda el doble de tiempo en completar un ciclo que la más corta. Palisca presenta la explicación de Benedetti de la siguiente manera**:**

> **“**Las consonancias surgen, dice de una cierta igualación de la percusión, o de una igual ocurrencia de ondas de aire, o de su co-terminación. El unísono, continúa, es la primera y más agradable consonante, y después viene el diapasón o la octava, luego la quinta. Ahora bien, estas preferencias pueden mostrarse como el resultado del orden de acuerdo de las terminaciones de las percusiones de las ondas de aire, por las que se genera el sonido.**”** **[La traducción es nuestra] (Dostrovsky, 1975, pp. 174-175)**

En resumen, **Guevara (2010)** explica que Giovanni Battista Benedetti participó de manera notable en la explicación física del sonido, quien escribió la primera teoría de la consonancia **(**armonía**)** con una base física, al asociar las proporciones numéricas de los intervalos musicales **(**consonancias**)** con la vibración de las cuerdas, de lo cual resulta que la frecuencia de las vibraciones es inversamente proporcional a la longitud de la cuerda que la produce. Así, la consonancia deriva de los ciclos de la vibración sonora. Aunque Benedetti no demostró sus propiedades, sus afirmaciones son importantes, ya que los números podían ser vistos como factibles en la cuantificación de los eventos físicos de las cuerdas, esto es, ya no se quedarían sólo como una herramienta para sustentar eventos especulativos.

Por su parte, se ubica también en la *aproximación experimental* el trabajo de Galileo Galilei, quien fue profundamente influenciado por el trabajo de su padre, Vincenzo Galilei, este último quien criticara la aritmética de la *Teoría Musical*, y gracias a la interacción que sostuvo con Galileo, le permitió mostrar un interés al hacer énfasis en las características físicas asociadas al tono, ya que para Vincenzo, como lo hace notar **Álvarez-García (2010)** que para Vincenzo todo lo relacionado a los intervalos permisibles para la música era numerología y sumisión de la práctica musical a una preestablecida **[**la escala pitagórica**]**; señalaba que de hecho los músicos utilizaban otros intervalos, pues la consonancia es asunto de oído bien entrenado y no de prejuicios teóricos.

En la misma línea epistemológica figura la investigación de **Guevara (2010)** quien menciona que Vincenzo Galilei elaboró en el Siglo XVI una teoría de la música, alejándose de la teoría predominante de la época, la ptolemaica-pitagórica de las consonancias y disonancias, al rechazar la idea de subordinar la composición a las reglas pitagóricas, en donde las consonancias se definen sólo a partir de proporciones matemáticas y los intervalos musicales de la octava, quinta, y cuarta **[…]** por tanto, aceptar la ruta pitagórica era quedarse con la música homofónica, que se acompañaba de instrumentos que sonaban al unísono con la voz, o a lo más, con una octava de diferencia.

Por medio de la práctica experimental Vincenzo afirmó que, si en lugar de la longitud se consideraba la tensión de la cuerda, se necesitaba entonces cuadruplicar los pesos

aplicados a las cuerdas y no simplemente duplicarlo para obtener la octava. Si se consideraba la tensión de la cuerda como elemento de variación, resultaba entonces que las consonancias no están definidas por proporciones simples entre números, con lo cual Vincenzo mostraba las inconsistencias en el *senario* de Zarlino.

Pero Vincenzo no solo se limitó a reflexionar sobre la tensión de las cuerdas, mostró también ─ sobre una línea que posteriormente tomaron Galileo y Mersenne ─ que las proporciones numéricas que se generan, asociadas a las consonancias, corresponden al resultado de los experimentos cuando las proporciones se expresan a partir de las longitudes, grosor y tensión de las cuerdas. En su *Discorso particolare intorno allá diversità delle forme del diapasón* menciona algunos de sus experimentos con las cuerdas y los pesos al usar diversos materiales. Entre otras conclusiones, señala que, si dos cuerdas producen un unísono, deben ser del mismo material, magnitud y tensión, porque de lo contrario todos los sonidos serían aproximados. Las observaciones de Vincenzo, aunque algunas son improcedentes, muestran que las proporciones numéricas son significativas si se aplican al conjunto de propiedades físicas de los cuerpos sonoros, pero carecen de sentido si se usan sólo como una abstracción, sin considerar las variantes materiales, para apoyar una teoría en lugar de otra **(p. 36).**

Galileo Galilei y la influencia de su padre, le permitió criticar el uso tradicional de las proporciones basadas en la longitud de las cuerdas para describir los intervalos musicales. Conectó el tono con la frecuencia y explicó claramente que las relaciones de frecuencia corresponden a los intervalos. Así encontró la cantidad que se refiere directamente al sonido propagado y no solo a las propiedades del objeto vibrante que produce el sonido. Al discutir el tono y la frecuencia, Galileo también describió algunas propiedades generales de las ondas y la vibración **(Dostrovsky, 1975, p. 178).**

Al morir Vincenzo, en, 1591, Galileo hereda todos los manuscritos de su padre, entre los que seguramente estaban los estudios y críticas que realizó sobre teoría musical. Muchos años más tarde, Galileo incorporó las ideas de su padre en sus propias discusiones sobre la física del sonido, y más importante aún, la inspiración para usar experimentos en mecánica está muy probablemente conectada con la experimentación de Vincenzo **Álvarez-García (2010).**

Por lo anterior, a juicio de **Guevara (2010)**, en este contexto llega Galileo Galilei quien de manera original presentó al final de la primera jornada de *Dos nuevas ciencias* una reflexión acerca de las cuerdas vibrantes y su correspondencia con las consonancias; y con el deseo de hacerlo más comprensible vincula las vibraciones de una cuerda con el movimiento de un péndulo.

Las preguntas que intentará responder Galileo en esta jornada fueron**:** **¿**por qué unas consonancias nos agradan más que otras**?**, **¿**cómo es que las vibraciones de una cuerda se pueden transmitir a otras o a otros objetos sin tener contacto directo con ellos**?** En cuanto a la primera interrogante, no se puede olvidar que fue uno de los problemas que Descartes ya había planteado en el *Compendio*.

Como parte de mostrar los resultados de sus experimentaciones, Galileo dice que**:** **"**las razones de los intervalos musicales no tienen como causa próxima e inmediata la longitud, tensión o grosor de la cuerda, sino, más bien, la relación numérica de las vibraciones de las ondas del aire, que golpean el tímpano de nuestro oído […] estos sonidos tan diferentes en tono, algunos pares son recibidos por nuestros sentidos con sumo agrado, otros con menos agrado, mientras que otros nos hieren con un considerable desagrado**"**. **[…]** La descripción proporcionada por Galileo no responde al problema, y se esperaría más de él cuando se le conoce como el gran observador de los fenómenos físicos. No obstante, Marin Mersenne tampoco logró dar una descripción más precisa de estos fenómenos de consonancia y disonancia, aunque con estos autores aún debe haber algunas reservas sobre la viabilidad de sus descripciones, ya que por medio de la visualización de consonancia se puede llegar a relaciones conmensurables o no de las cuerdas.

Galileo y Mersenne evalúan el grado de la consonancia al contar las vibraciones solamente coincidentes en todas las vibraciones de la cuerda más aguda ─ y no la vibración de las cuerdas juntas. Galileo lo hace con la octava y la quinta, y deja ver la viabilidad ─ sin adentrarse más ─ de la cuarta. También se tiene que considerar el contexto de la época de Galileo y no esperar mucho más de él en este tema. En el caso de Mersenne, sí dedicó muchas páginas de su obra al tema sin llegar a un resultado que fuera en realidad mejor **(p. 37).**

Ante los inminentes avances *experimentales* del Siglo XVII en los que la física del sonido se sitúa, el papel de Marin Mersenne es eje para brindar conexiones al trabajo de Galileo. Mersenne, quien fuera un fraile francés y filósofo natural estuvo interesado en el trabajo de Galilei, y aunque le escribió varias veces para establecer una correspondencia, nunca recibió una respuesta. Sin embargo, hubo otras personas que explicaban el grado de consonancia en términos de la proporción de coincidencias entre pulsos de diferentes fuentes. Mersenne recibió esta explicación de Beeckman y Descartes, y la incluyó en su *Harmonie Universelle* **(**1636**)** **(Dostrovsky, 1975);** en donde estableció una fórmula que relacionaba la longitud de una cuerda y la frecuencia del sonido que emite.

A priori, Mersenne, estaba impulsado en el *contexto físico* que rodeaba al problema de las consonancias, por lo que él, no iba a permitir una **"**intervención**"** que no tuviera razones de naturaleza física. Por eso, como afirma **Darrigol (2007)** ya en el Siglo XVII, Galileo Galilei y Marin Mersenne popularizaron la correspondencia entre el tono y la frecuencia que

Giovanni Battista Benedetti, el padre de Galileo, Vincenzo e Isaac Beeckman habían articulado anteriormente. Por consiguiente, un tono musical es una sucesión periódica de pulsos transmitidos por el aire al tímpano. El número de pulsos en una unidad de tiempo determina el tono. Se dice que dos tonos son consonantes si y solo si su relación de frecuencia es reducible a la relación de dos pequeños enteros. **[. …]** En su obra, Mersenne, se basó en una explicación similar de consonancia como coincidencia de pulsos, aunque no correspondía necesariamente con la consonancia acordada por los músicos **(pp. 346-347).**

A través de la línea epistemológica en la que el fenómeno asociado al sonido sigue su cauce durante el Siglo XVII, se encuentra el paradigma *mecanicista* con dos principales exponentes, Isaac Beeckman y René Descartes; ambos sostienen nexos en el abonar sobre este entendimiento que ya prevalecía sobre el problema de las consonancias, y que, de alguna manera, la escuela *experimentalista* se vería permeada por las inquietudes surgidos en este paradigma.

Al emplear las palabras de **Cohen (1984)** quien expresa que de la escuela experimentalista no se podía esperar más**:** evidentemente, con los medios a su disposición no era posible ninguna experimentación más allá del tímpano. Sin embargo, en ese momento emergía a la luz otra escuela de filosofía natural que, por sus propios principios, se vio obligada a investigar el asunto más profundamente. Los creadores de la **“**filosofía mecánica**”**, los cuales estaban decididos a explicar todos los procesos naturales a través de los movimientos de las partículas de materia; en su intento de explicar el mundo, difícilmente podían permitirse el lujo de detenerse en el **[**juicio del**]** tímpano. En el contexto de Descartes, la explicación del proceso de audición fue parte de su solución general al problema cuerpo-mente. Para Beeckman surgió en el contexto de sus investigaciones acústicas y musicológicas.

Isaac Beeckman **(**1588 – 1637**)** fue uno de los personajes más extraños de toda la Revolución Científica **[…]** pues, aunque fue un pensador muy original e intelectualmente independiente, que dedicó atención a campos tan variados como la mecánica, la astronomía, la lógica, medicina, música, etc., nunca publicó una palabra de sus muchos hallazgos. **[. …]** Algunas de las características básicas del enfoque científico de Beeckman son las siguientes**:**

[a] La matemática es una herramienta importante de la física, pero no tiene ni mucho menos el estatus ontológico que le asignaron Kepler y Galileo**:** no es el lenguaje del Libro de la Naturaleza, sino la sombra de su cuerpo. La ausencia resultante de intentos de matematizar la naturaleza **(**aparte de algunas pruebas geométricas incidentales**)** corresponde con el hecho de que el conocimiento matemático de Beeckman era relativamente pobre.

[b] Lo importante es explicar la naturaleza, es decir, encontrar la estructura oculta bajo las apariencias de los fenómenos que observamos. Aunque Beeckman es consciente en cierta medida de la importancia de la verificación experimental, él no se esfuerza por hacer experimentos. Encuentra la mayor parte de sus datos en los fenómenos de la vida diaria, aunque los observa con atención para no tomarlos al pie de la letra. Esta postura más bien no-experimental, como él mismo confesó, fue el resultado, en cierta medida, de una miopía grave.

[c] Las explicaciones que se den deben ser de carácter corpuscular; nada más que el material es inteligible.

[d] El último objetivo debería ser explicar al hombre; pero esto no se puede intentar hasta que se haya alcanzado una comprensión perfecta de los fenómenos naturales externos al hombre.

El trabajo de Beeckman está relacionado con la búsqueda del criterio de distinción entre las consonancias y las disonancias por lo que los logros de las teorías de consonancia de Kepler y Mersenne permitieron estrechar tal regularidad, a través de los siguientes aspectos**:**

[1] Música y acústica**:** La teoría de consonancia de Kepler se basaba en la geometría. Por el contrario, los aportes de Mersenne y Beeckman tenían **"**algo**"** en común, y era que sus trabajos, estaban firmemente arraigados en principios acústicos. Tanto la teoría de coincidencia **[Mersenne]** y **[**de**]** la regularidad dependía de un análisis previo del sonido. En los casos de Galileo y Mersenne sus intentos de resolver el problema de la consonancia a través de la concepción de pulsos impartidos y transmitidos por el aire, dieron lugar a una serie de nuevos problemas, cuyas respuestas se convirtieron junto con las primeras en elementos de la nueva ciencia de la acústica.

Algo similar parece haber sucedido con Beeckman; sin duda, su teoría de los glóbulos del sonido se había desarrollado independientemente de su explicación de la consonancia, al seguir su convicción *a priori* de que el sonido, como cualquier otro fenómeno natural, debe ser necesariamente reducible a movimientos de ciertas partículas de la materia. Es evidente que prácticamente todas las elaboraciones de esta teoría tienen su origen en problemas musicales, tanto tradicionales como nuevos. No menos que en el enfoque experimentalista, el análisis del funcionamiento de instrumentos musicales se había convertido para Beeckman en un elemento vital de la ciencia de la música.

[2] El criterio distintivo**:** Existen grandes contrastes entre los intentos de Kepler y Mersenne de encontrar un criterio de distinción entre consonancia y disonancia. Kepler organizó todo en su *Harmonice Mundi* en torno a él, mientras que en *Harmonie Universelle*

el problema proporcionó el material para uno de los cientos de proposiciones que componen el libro. La solución de Kepler era geométrica, mientras que Mersenne no estaba dispuesto a admitir *a priori* ningún criterio que no fuera físico. Kepler estaba convencido de que había encontrado la solución, mientras que Mersenne al final tuvo que reconocer la derrota.

La posición de Beeckman está aproximadamente a medio camino entre estos dos. Por un lado, sí encontró un criterio que, conforme a sus ideales científicos, era efectivamente de naturaleza física. Por otro lado, el problema claramente no era central para el pensamiento musical de Beeckman**:** la solución se le ocurrió sólo como una especie de idea de último momento en su análisis de la resonancia simpática, y su inverosímil contenido confirma una vez más su aparente naturaleza *ad hoc*.

[3] La clasificación de las consonancias**:** Beeckman, estaba confiado en el poder explicativo de los principios mecanicistas que aplicaba a los fenómenos de la naturaleza. Esto no quiere decir que creyera haber explicado, o pudiera explicar todo lo presente en la naturaleza desde su teoría atómica.

En resumen, las contribuciones de Beeckman a la teoría musical fueron, por decir lo menos, al nivel de su época. En cuanto al alcance, estaban a la par de los más completos producidos por sus contemporáneos. En cuanto al contenido, dieron respuesta a todas las preguntas pertinentes vigentes en ese momento. Algunos de ellos incluso tenían claras ventajas sobre todas las explicaciones rivales contemporáneas. Tomados en conjunto, muestran que la filosofía mecánica, no menos que el enfoque matemático o experimental, podría dar lugar a avances en el campo milenario de la ciencia de la música. Aparte de que no se hayan publicado, no hay ninguna razón inherente por la cual las teorías musicales de Beeckman no podrían haberse convertido, mucho más de lo que fueron en realidad, en un punto de partida viable para una mayor investigación científico-musical.

Al seguir la brecha *mecanicista*, aparece René Descartes **(**1596-1650**)**, que reduce la música a las matemáticas de su juventud, Beeckman mostró la relevancia de las consideraciones acústicas para la teoría musical, y su propia filosofía mecánica lo condujo hacia una explicación de la recepción sensorial auditiva en términos de materia y movimiento **(pp. 115-161).**

De acuerdo con **Rasch (1992)**, la música jugó un papel menor en la carrera profesional de Descartes después de la finalización del *Musicae compendium* en 1618, donde no parece haber tenido contactos con músicos profesionales. La mayor parte del conocimiento musical práctico de su libro se derivó de Zarlino. **Dostrovsky (1975)** hace notar que Descartes estuvo inspirado en comprender los fenómenos naturales gracias a los fundamentos aritméticos de la teoría musical, por lo que esta práctica lo conllevó a explicar

las proporciones musicales principalmente de forma abstracta **(**en términos de varias divisiones de un segmento de línea**)** e incluso consideró la justificación de las ideas básicas de las características físicas del sonido dados los intervalos en los que **"**un tono**"** contiene al **"**más alto**"** y al **"**más bajo**"**.

A pesar de que Descartes escribió un libro tradicional sobre música, este, contenía la física como telón de fondo. Una vez que la frecuencia se relacionara con el tono, el número volvería al análisis de los intervalos musicales. Por lo que **Cohen (1984)** manifiesta con sus propias palabras, que los esfuerzos mecanicistas del Siglo XVII estaban ya al borde del límite, que hasta esos momentos las explicaciones sostenidas al respecto sobre la teoría de la consonancia se beneficiaban de una investigación detallada de la anatomía y fisiología del sentido del oído, por ello, esto forma parte del mérito de los primeros proponentes de la filosofía mecánica.

Como menciona el autor, la crítica hasta el trabajo de Descartes, muestra a los principales representantes de la Revolución Científica donde en su primera etapa aplicaron sus nuevos conceptos y sus nuevos métodos del análisis al arte liberal de la música. Se ha dejado en claro que todos ellos rechazaron los viejos conceptos numerológicos y buscaron nuevas soluciones al viejo enigma de la consonancia, por muy amplia que fuera la diversidad de las conclusiones a las que llegaron, esto, no era lo único que tenían en común, con la única excepción de Vincenzo Galilei, que se interesó por la ciencia sólo en la medida en que se superponía con la Teoría Musical, todos los científicos descritos reaccionaron positivamente cuando fueron expuestos a la prueba de fuego número uno del progreso científico de la época**:** todos ellos se adhirieron a la teoría de Copérnico, en un período en el que todavía estaba lejos de ser evidente, incluso en el mundo de la ciencia. Otra cosa que tenían en común era que frecuentemente comentaban el trabajo de cada uno.

El autor, al seguir la brecha posiciona el trabajo científico de Christiaan Huygens **(**1629-1695**)** el cual se caracteriza por una combinación de las tres características principales que ya se vieron para definir la peculiar forma en que los participantes de la Revolución Científica se acercaron a la naturaleza. Huygens aplicó el método de Galileo de matematizar la naturaleza a muchos dominios de la naturaleza no matematizados previamente, como los péndulos, el impacto, fuerza centrífuga, etc. También se mantuvo fiel, hasta el final de su vida, al programa de Descartes de no admitir otros principios explicativos que los movimientos de partículas de materia de diversas formas y tamaños. Finalmente, al llevar a cabo este programa, tuvo mucho más éxito que el mismo Descartes, ya que realmente realizó en la práctica lo que Descartes ni siquiera había estimado en teoría, a saber, pruebas experimentales, por ejemplo, a sus teorías de la luz y de impacto.

Su trabajo, estuvo permeado por el período de transición del estilo de música renacentista al barroco, por lo que la exposición de Huygens a la música estuvo totalmente determinada por este último y lo que a su vez su padre Constantijn Huygens, fue uno de los pioneros en este nuevo estilo.

Las propias investigaciones musicales de Huygens ciertamente no fueron preeminentes entre sus actividades científicas, pero le ocuparon desde al menos 1661 hasta su muerte, pero que sus teorías musicales proporcionan un ejemplo particularmente fascinante de la fructífera interacción del progreso de la ciencia de la música con la evolución del estilo compositivo y los cambios concomitantes en la percepción de ciertos intervalos musicales.

La aportación de Huygens, es la primera insinuación de que el movimiento armónico **(**como el de los senos**)** juega un papel básico en la acústica que se encuentra en la teoría de las cuerdas musicales. En su célebre *Horologium Oscillatorum* de 1673, Huygens demostró que el movimiento pendular de un cuerpo que se desliza hacia abajo en una cicloide es armónico e isócrono. En esa época, también entendió que la fuerza responsable de este movimiento era proporcional a la distancia recorrida por el cuerpo desde el punto de equilibrio. Probablemente al notar que una circunstancia similar se daba en el caso de una cuerda elástica tensa e ingrávida cargada con una masa en el medio, derivó la frecuencia de oscilación en función de la tensión, la longitud de la masa. El razonamiento implicaba oscilaciones armónicas para la cuerda cargada **(Darrigol, 2007).**

Para dejar en claro, lo que hasta estos último párrafos se ha comentado de manera genérica lo que abarca el trabajo *histórico-epistemológico* desde la Edad Antigua con los Griegos hasta la Revolución Científica con el aporte científico de Huygens, sobre el entendimiento de los *armónicos*, se detalla a continuación un breve resumen que explicita el conjunto de ideas que evolucionaron respecto al saber físico y matemático ligado al *Problema de la Cuerda Vibrante* que se resaltan propiamente en las diferentes *escuelas de pensamiento* a partir de los momentos contextualizados identificados en las *rutas históricas* identificadas que forman parte de la esencia del *marco de referencia*, la *Teoría de la Vibración*, con relación en la práctica .

4.4 Resumen del Capítulo 4

> "*La habilidad de exponer una idea es tan importante como la idea en si misma*." — *Aristóteles*

Como es posible observar, a lo largo de este capítulo, surgen una serie de acontecimientos que son pertinentes al desarrollo del *marco de referencia*, la *Teoría de la vibración*; si bien, la intención hasta este momento es mostrar los estadios históricos que son

antesala al *Problema de la cuerda vibrante*, ya que permitieron rescatar y articular en su mayoría las epistemologías que rodean al conjunto de eventos *socioculturales* que conllevaron a la evolución de la práctica de la *Teoría musical*.

En primera instancia, remontar hasta la antigüedad permitió delimitar el corte *histórico-epistemológico* de esta investigación, ya que, al ubicar geográficamente a la filosofía griega en la Europa Occidental, de otras como la china, la hindú o los mismos árabes, ayuda a entrelazar el devenir epistemológico que de ella emerge, al predominar su actividad matemática en conjunto con las restantes ciencias que componen el famoso *quadrívium*.

Al recordar el conjunto de las ciencias que eran enseñadas por las escuelas de pensamiento más representativas de la Edad Antigua, específicamente en la civilización griega como la pitagórica y la peripatética, la Aritmética, la Astronomía, la Geometría y la Música, comparten una transversalidad en su actividad matemática para establecer lazos epistemológicos a los problemas prominentes de la época, que conllevan a evocar justificaciones a través de un pensamiento proporcional y de cosmovisión derivado de la práctica musical.

Por ello, la Música, se convirtió desde sus inicios en uno de los cimientos más importantes para comprender tanto el mundo natural como el cosmos, al establecer relaciones numerológicas; esto surge propiamente con el *problema de las consonancias*, Pitágoras quien fuera su principal exponente estaba interesado en establecer un criterio de *razón aritmética* que le permitiera saber el *por qué* unos *sonidos* son *más intensos* que *otros*, la matemática de la época, lo encaminó a usar *proporciones numéricas* basadas en los diferentes pesos de los martillos que golpeaban un yunque, y, aunque sus experimentos no solo se limitaron a explorar con los pesos de los martillos, fue a partir de estos que conllevó a generar un conocimiento científico propio de la época, por lo que la *escuela de pensamiento* identificada para esta época **(**Edad Antigua del año 4000 a. C. al año 476 d. C., con la Civilización Griega**)** es la *filosofía pitagórica* con el *uso aritmético* de las *proporciones* **(***razones***)** al asociar que todo lo que ocurre en la Naturaleza tenía que ver con la cosmovisión ligada a la secuencia de los números enteros.

Conviene enfatizar que la práctica de la *Teoría Musical*, era considerada como ciencia durante todo el período que comprende la Edad Antigua, así como en los siglos posteriores, con sus características propias de las *rutas históricas* detalladas **(Vea la *Ilustración* 13.)**, al ubicar el quehacer de esta práctica en el período de la Edad Media, de los Siglos V al XV que lo comprenden, se posicionan una vertiente de críticas al respecto sobre la manera en que la música era considerada; la *escuela de pensamiento* que se definió fue la *filosofía escolástica*, que ayuda a entender las evocaciones ligadas a las especulaciones metafísicas del cosmos con la música, en la que aunque estaban presentes las concepciones numéricas,

ya existía una presencia del juicio de la moral en la que se juzgaban la consonancia y disonancia de los primeros cantos por voces, así como el empleo de ciertos instrumentos de viento y de percusión.

En la *ruta histórica* del *Renacimiento*, que comprende de los Siglos XV al XVI, se ubica otra *escuela de pensamiento* denotada por la *filosofía experimental*; el motivo para poder caracterizar a esta escuela fueron los intereses cada vez más refinados por comprender la caracterización de los intervalos musicales, en la que el **"**juicio del oído humano**"** teóricos de la música acrecentaron su importancia de incluirlo a la par con el surgimiento del Canto Gregoriano, donde el camino que empezaba a tomar la práctica de la *Teoría Musical* se desprendía más del valor científico arraigado de la Edad Antigua, lo que conlleva a posicionarla en dos vertientes, sobre su *esteticidad* y el *conocimiento científico* que de ella se desprende.

Finalmente, ya en la Revolución Científica, el período que la comprende abarca del Siglo XVI al XVII, la *escuela de pensamiento* que se rescata a lo largo de esta *ruta histórica*, es el *Nacimiento del Método Científico*, donde Galileo Galilei, rompe la arraigada concepción que hasta el momento había perdurado con la práctica la *Teoría musical* y que traslada a un estatus científico más elevado el pensamiento del ser humano al comprender con base en argumentos *hipotéticos físicos* la Naturaleza. La *matematización*, la *experimentación* y la *mecanización* triada científica que se manifiesta en vínculo con la práctica de la *Teoría Musical*, al ser esta una de las ciencias que compusieron a la Revolución Científica, y que de esta se desprendieron *problemas* que se originaron dentro de esta práctica.

En esta misma ruta, cabe aclarar que la *Teoría Musical*, proporciona un estatus de pensamiento más prominente de la época en el entendimiento de los *fenómenos* derivados de ella, por lo que el análisis científico derivado de esta, permitía tener una familiaridad a los *artesanos* que fabricaban *instrumentos* conocer las reglas empíricas para su producción, es esto puede concluirse que esta práctica abarcaba en síntesis su contexto artístico y la plausibilidad al conocimiento científico.

A continuación, el siguiente capítulo tiene como finalidad mostrar dos aspectos claves para entender hasta el momento toda esta *ruta histórica* que se ha evidenciado, el primero de ellos es continuar con el trabajo que rodea el fenómeno físico del sonido en el marco de referencia la *Teoría de la Vibración*, a seguir con la contribución científica de John Wallis y Francis Robartes al posicionarse durante el Siglo XVII, para que ya en el Siglo XVIII en el curso de este devenir histórico personajes como, Brook Taylor, Joseph Sauveur, Jakob Hermann, Gabriel Cramer, Leonhard Euler, Johann Bernoulli, Daniel Bernoulli, y propiamente Jean le Rond D'Alembert, salgan a la luz al centrar su atención al *Problema de la Cuerda Vibrante*, donde una vez que epistemológicamente se consolidó esta famosa

controversia centren su juicio en la *solución* al famoso *Problema de la Cuerda Vibrante*. Tal solución está rodeada por la *actividad matemática* que es manifestada a raíz de su pensamiento científico **(**mecanicista y experimental**)** de la época.

El último aspecto clave, es concebir a la luz el trabajo de Jean le Rond D'Alembert, por medio de la posición teórica sobre la cual esta investigación está ubicada a fin de poder entender la obra matemática de D'Alembert en torno a la manera en que emerge el **MSV**, la unidad de análisis está centrada en la *tercera memoria* **(***Addition au memoire sur la courbe que forme une corde tenduë, mise en vibration***)** sin perder la conexión y entendimiento de todo su trabajo matemático en torno al *Problema de la Cuerda Vibrante* con las *dos memorias* que te anteceden. La **TSME** abre una ventana para poder entender la producción científica de D'Alembert; como se mencionó en la metodología en el **Capítulo 2.**, el método brindado por Cantoral et al. **(**2015**)** permite ubicar en relación al modelo de anidación de prácticas, *acciones* y *actividades* para entender el juego de las heurísticas que configuran la estructura epistemológica de la unidad de análisis.

Capítulo 5. El paradigma científico del Siglo XVIII: La matematización del movimiento y el surgimiento del Análisis Matemático

En este capítulo se presenta la continuidad *histórica-epistemológica* alrededor del *Problema de la Cuerda Vibrante*, en tal contenido se muestra el quehacer del Análisis para atender la controversia suscitada, para ello se ha implantado como objetivo general de esta sección continuar con *problematización* del **MSV**, al ya tener por conocida la obra matemática donde emerge el método.

Se ha elegido el trabajo de Jean le Rond D'Alembert, ya que a pesar de que este *problema* acarreó la atención de algunos matemáticos de la época, D'Alembert fue el primero en explicitar una Ecuación Diferencial que matematizara la vibración de una cuerda y por ende diera una *solución*, esta última es la que trajo consigo una serie de debates entre el pensamiento físico y matemático de Leonhard Euler y Daniel Bernoulli, actores que se vieron más influenciados en las discusiones al explicar la forma que debería tener la *función solución*. Se resalta el trabajo de Brook Taylor como antesala al trabajo de D'Alembert, ya que fue la piedra angular más próxima a este.

Se dará continuación histórica que como mencionan **Cannon y Dostrovsky (1981)**, la Teoría de la Vibración y el problema de la Dinámica durante el medio siglo que siguió la publicación de Newton, *Principia Mathematica*, ya había una relación entre estos marcos de referencia, *empero*, durante este período no existía una teoría de la Dinámica; mientras que la teoría que comprendía una buena cantidad de información acústica, planteaba definitivamente problemas que conllevó a obtener resultados específicos. De hecho, fue a través de los problemas planteados por la Teoría de la Vibración que una teoría general de la Dinámica fue motivada y descubierta y es precisamente en esta época que emergieron ideas propias del Cálculo, Análisis Lineal, Ecuaciones Diferenciales, Funciones Especiales, la Teoría de la Elasticidad, con la que la Teoría de la Vibración está profundamente entrelazada.

Como expresan los autores, que, aunque el pensamiento matemático difiere en las distintas épocas, las matemáticas en sí mismas tienen una coherencia que trasciende con el tiempo. Por lo tanto, esto proporciona una poderosa herramienta que ayuda a captar modos de pensamiento de tiempos pasados. **[. …]** Antes de mediados del Siglo XVIII, nadie tenía la menor idea de que la "Segunda Ley de Newton" pudiera utilizarse como base para una descripción dinámica de un sistema mecánico que tiene varios grados de libertad. Sin embargo, por nombre y por tradición, esta noción está asociada con la *Principia* de 1687 y comúnmente se supone que Newton, al menos, sabía que su "*Segunda Ley*" describía en

principio los movimientos de un sistema mecánico. […] A principios del Siglo XVIII, la notación funcional se usaba solo en circunstancias muy limitadas. Al reconocer que ciertos conceptos tienen una apariencia muy diferente cuando no se dispone de una formulación desde el punto de vista de la *teoría de las funciones*. […] La cuestión de las formulaciones funcionales surgió también en relación con las técnicas del cálculo. De hecho, durante el Siglo XVIII, el *cálculo geométrico* dio paso gradualmente al *cálculo funcional*.

Un claro ejemplo que ponen los autores, es el siguiente**:** Taylor y Johann Bernoulli descubrieron que, el modo fundamental de una cuerda vibrante tiene la forma de una función sinusoidal, aunque no la expresaron así, la expresaron geométricamente y no descubrieron que también los modos superiores de la cuerda tienen la forma de una función sinusoidal. Es decir, desde el punto de vista funcional, uno considera naturalmente que el *seno* está definido en toda la recta real, mientras que, desde el punto de vista geométrico, los ángulos más grandes que 2π no son muy naturales.

Al seguir la opinión de los autores, cuando se buscan problemas de dinámica en muchos grados de libertad que fueron tratados antes de mediados del Siglo XVIII, se encuentran problemas en la teoría de las vibraciones. Dado que se trata de problemas lineales y con solución en dinámica, puede que no sea sorprendente que fueran los primeros en ser considerados, sin embargo, cabe enfatizar que no existía una teoría de la dinámica y, por lo tanto, no había noción de lo que podría ser un problema lineal en dinámica.

5.1 La emergencia de la Dinámica en el Siglo XVIII

> "*Aquellos que pretenden descubrirlo todo, pero no encuentran pruebas, pueden ser considerados como que en realidad pretendieron descubrir lo imposible*." — *Arquímedes*

Para tener conocimiento sobre el surgimiento de la Dinámica, se debe recurrir a la teoría de la vibración, ya que en algún momento esta [rama de la Física] no estaba guiada por ninguna comprensión cualitativa en muchos grados de libertad. A finales del Siglo XVII, la teoría de las vibraciones ya tenía una fuerte «tradición». En cierto sentido, en parte mitológico, esta tradición se remonta a Pitágoras, que había cuantificado el tono con la longitud de la cuerda. Pero fue un descubrimiento del Siglo XVII que el tono se cuantificaba apropiadamente por la frecuencia**:** por lo que la aritmética pitagórica de la teoría musical medieval proporcionó una clasificación experimental completa de frecuencias relativas. El Siglo XVII proporcionó la ley de Mersenne de que la frecuencia $\boldsymbol{\nu}$ de una cuerda vibrante de longitud $\boldsymbol{\ell}$, tensión $\boldsymbol{\mathcal{P}}$, y densidad de masa lineal $\boldsymbol{\rho}$ satisface la proporcionalidad**:**

$$\boldsymbol{\nu \propto \frac{1}{\ell}\sqrt{\frac{\mathcal{P}}{\rho}}}$$

Conscientemente está implicada la noción de isocronismo, es decir, la independencia de la amplitud de la frecuencia. Junto con la ley de Mersenne apareció **[1]** el problema de la derivación, **[2]** el problema de la derivación de la constante de proporcionalidad, y **[3]** el problema de la medición de la frecuencia absoluta. Uno tenía el problema de hacer por la cuerda lo que Huygens había hecho por el péndulo. Pero para no resolver estos problemas, había más. El Siglo XVII también descubrió, demostró y describió los modos vibratorios superiores. Percibió una analogía entre la cuerda vibrante y las vibraciones del aire en una tubería. Proporcionó descripciones cualitativas del sonido en el aire, algunas bastante buenas y otras erróneas. Presentó el problema de encontrar la velocidad del sonido y observó su independencia de tono y volumen. Dio discusiones sobre consonancia, disonancia, superposición y ritmos. Dejó un gran número de observaciones de fenómenos especiales, siempre con un problema concomitante. **[…]** Además de esta tradición, el doble péndulo tenía un atractivo modesto. Fue el problema de la velocidad del sonido y la derivación de la ley de Mersenne los que se trataron primero y las intuiciones de la teoría de la vibración guiaron la formulación de los conceptos.

El enfoque sobre la teoría de las pequeñas vibraciones se refiere a linealizar las ecuaciones dinámicas a una configuración estable. Este no solo se disponía de ecuaciones dinámicas en el período considerado, sino que no había una noción sistemática de análisis lineal ni de los conceptos asociados como los valores propios, los vectores propios, las soluciones sinusoidales, los modos, la superposición, etc. De hecho, la teoría de la vibración en la primera parte del Siglo XVIII es un preludio al descubrimiento del análisis lineal. Por otro lado, los conceptos que prevalecían en esta época de la teoría de la vibración ahora parecen un poco difusos, aunque eran fenomenológicamente relevantes. Además del isocronismo, existía la noción de simultaneidad cruce del eje.

Lo anterior se refiere al hecho de que los sistemas considerados, la cuerda tensa, la cadena para colgar, la varilla recta y sus análogos discretos que tenían configuraciones de equilibrio a lo largo de los ejes, experimentaban movimientos más simples cuando los movimientos los llevaban a través de sus configuraciones de equilibrio, es decir, cuando todas las partes del sistema alcanzaban su eje simultáneamente. Así pues, los movimientos que se estudiaron fueron los que tenían las propiedades de isocronismo y cruce simultáneo del eje. Se asumió claramente que el isocronismo significaba la restricción al caso de las pequeñas vibraciones. Pero, además se asumió que el isocronismo y el cruce simultáneo del eje significaba que cada elemento del sistema se movería como un péndulo simple, es decir, que cada elemento sufriría movimientos armónicos simples que tendrían el mismo período **(Cannon & Dostrovsky, 1981).**

Incluso sobre el tratamiento matemático sobre las ecuaciones en la teoría de las vibraciones, durante el Siglo XVII, apunta **Lützen (1984)** que las funciones propias tienen su origen en los modos simples de una cuerda vibrante que fueron investigados por John Wallis **(**1677**)** y Francis Robartes **(**1692**)**, quienes descubrieron la conexión entre el número de nodos y los armónicos **(p. 247).**

Es así, que el problema sobre el *marco de referencia*, la *Teoría de la Vibración*, conducía hacia una evolución epistemológica sobre la actividad física y matemática cada vez más refinada, por lo que, al ubicarse ya a finales del Siglo XVII con el trabajo de Isaac Newton, como expresa **Monacorda (1991)** que, con su publicación *Principia* **(**1687**)** pasaron más de sesenta años antes de que se conocieran las ecuaciones generales de movimiento de un sistema de partículas. De hecho, fueron establecidas por Euler en 1750 **(p. 1).**

Al recalcar que el estudio de la vibración de una cuerda formó parte esencial de la *actividad matemática* de la época, que conllevó no solamente a incursionar en experimentaciones ligados al tipo de vibración que esta producía, sino abarcó otro tipo de fenomenologías físicas pero en diferentes contextos, como, por ejemplo, la manera en que, en una columna de aire se presentaban las vibraciones **Dostrovsky (1975)** dice que era aún más complejo de tratar que las vibraciones de una cuerda, pero que en el contexto de un análisis teórico **(**después del Siglo XVIII**)** la cuerda ideal y la columna de aire ideal son bastante comparables. **[. …]** Sin embargo, en el contexto de un análisis empírico, la cuerda y la columna de aire se presentan de maneras muy diferentes.

De lo anterior al apreciar los avances en el Siglo XVIII los avances del trabajo científico en el *marco de referencia*, **Skudrzyk (1971)** hace notar que en este tiempo se da el comienzo de la física teórica y la mecánica aplicada. Con los *Mathematical Foundations of natural philosophy* de Newton **(**1642 a 1726**)** se habían demostrado las grandes posibilidades de las derivaciones matemáticas en la investigación física. Newton también publicó un libro sobre la óptica **(**1704**)**. Sin embargo, su teoría del corpúsculo de la luz no permitió explicar los resultados experimentales. Leibniz **(**1646 a 1718**)** en su *The Infinitesimal Calculus* introdujo métodos efectivos. Euler **(**1707 a 1783**)** desarrolló la teoría de ondas estacionarias de las cuerdas. La escuela matemática francesa trató problemas de mecánica teórica – Lagrange **(**1736 a 1813**)**, Daniel Bernoulli **(**1700 a 1782**)**, D'Alembert **(**1717 a 1783**)** y Laplace **(**1749 a 1827**)** al ser sus representantes más famosos. Fourier **(**1768 a 1830**)** al estudiar el fenómeno del calor, descubrió la serie que lleva su nombre, y así creó la base de la acústica fisiológica y musical. Fue un período de gran fecundidad, cuyas consideraciones teóricas han dado lugar a muchos éxitos.

Hasta este momento es posible concientizar sobre estas líneas al lector sobre los avances epistemológicos de dos saberes que de alguna manera se fusionan el *físico* y el

matemático, sin perder su estatus, pero que por sobre su actividad representan conocimiento científico ya propio del Siglo XVIII, tal y como apunta **Garber (1999)**, las matemáticas han interactuado y se han convertido en parte integral de la física. Y, como en otros casos, esta transformación se hizo invisible. En exámenes retrospectivos, las matemáticas del Siglo XVIII fueron subsumidas por los físicos como física. Sin embargo, los problemas que surgieron en la mecánica y la astronomía fueron el medio por el cual los matemáticos desarrollaron el cálculo en sí mismo en el Siglo XVIII. Los trabajos resultantes fueron matemáticos, no físicos. La mecánica en su forma matemática fue un campo dentro de las matemáticas. Sin embargo, a mediados del Siglo XIX la mecánica se convirtió en el núcleo explicativo de la física. Para los físicos de mediados del Siglo XIX, la mecánica racional del Siglo XVIII se convirtió en física. Las expresiones matemáticas recibieron significados físicos derivados de compromisos metodológicos y conceptuales que no existían en el Siglo XVIII.

Las matemáticas también tienen una historia, tan compleja y controvertida como cualquier otra disciplina científica. Los significados de los fundamentos de las matemáticas, y en particular, los fundamentos del cálculo han cambiado a través del tiempo y del espacio. A medida que el contenido de las matemáticas ha mutado, las matemáticas disponibles para los físicos también han cambiado. Las formas de lenguaje con las que se expresa la física han pasado a depender de las matemáticas disponibles. Sin embargo, las cuestiones que surgieron en el mundo físico establecieron los problemas que los matemáticos utilizaban para explorar las matemáticas, ampliar su alcance, así como cambiarlo junto con su carácter.

La física también ha sido una fuente para las matemáticas. Para los matemáticos del Siglo XVIII, su punto de partida en los problemas del mundo real garantizaba la existencia de soluciones. Los matemáticos necesitaban la física para sus propios propósitos, tan seguro como que los físicos han moldeado las matemáticas para sus propios usos.

La autora también manifiesta que las cuestiones intelectuales que rodean la relación entre las matemáticas y la física están inevitablemente unidas a cuestiones sociales. Las nuevas formas institucionales fueron tan integrales para la creación de la física moderna como sus nuevas formas intelectuales. Aunque una transformación no tiene porqué implicar a la otra, en este caso tanto el contexto social como el contenido intelectual cambiaron casi simultáneamente. Sin embargo, las causas inmediatas de ambos no fueron las mismas. En Gran Bretaña, la industrialización abrió oportunidades para la subsistencia en la ciencia, pero esto no dictó cambios en la metodología, la forma de expresión o el contenido de la física. Esos cambios se produjeron más tarde, bajo las presiones sociales de la industrialización exitosa en las instituciones académicas más antiguas. Los cambios en la práctica a mediados del tercio del Siglo XIX siguieron al liderazgo intelectual de París.

En los estados alemanes, las oportunidades sociales que trajo consigo la reforma de las universidades prusianas, impulsadas por una ideología educativa al servicio de los propósitos políticos del Estado, supuso la transformación de los profesores de los órganos docentes colegiados de importancia local en académicos con reputación de investigadores internacionales. En este caso, la investigación de cuestiones y problemas esotéricos sin conexión visible con el uso social, dio lugar a formas particulares de discurso teórico en física que dependían sobre compromisos filosóficos previos. Sin embargo, la ideología educativa del Estado no predeterminó que la erudición Parisina en ciencias y matemáticas fuera el modelo para los académicos alemanes. Sin embargo, los franceses ofrecieron el modelo más exitoso para emular y luego trascender. Durante este proceso en Gran Bretaña, y los Estados alemanes la física como disciplina y profesión, fue puesta en las formas que se han heredado y por lo tanto etiquetada aquí, por conveniencia, como moderna **(pp. 18-20).**

El panorama general que muestra la autora no solo enfatiza por sobre el advenimiento evolutivo inminente sobre el rubro de los saberes, el *físico* y el *matemático*, sino que posiciona una claridad que dentro de la postura teórica en la que se ubica la investigación se esclarece una *resignificación progresiva* a partir los sujetos **(**individuos**)** que actúan sobre los objetos y que de estos construya un significado. Al continuar con el papel de la Dinámica en el Siglo XVIII para atender al *Problema de la Cuerda Vibrante* sobre el *marco de referencia*, la *Teoría de la Vibración*, una vez que la *actividad matemática* entrelaza una base significativa por entender a la Matemática de la época conduce a tomar un punto de partida y al tomar en cuenta a **Bos (1980)** sobre la **“**invención**”** o más bien las **“**invenciones**”**, del cálculo. Tanto Newton **(**en 1664-1666**)** como Leibniz **(**en 1675**)** crearon, independientemente el uno del otro, un *cálculo infinitesimal*. Sus inventos fueron muy diferentes en conceptos y estilo, pero cada uno contiene tanto de lo que ahora se reconoce como esencial para el cálculo, aunque la expresión *invención* está justificada en ambos casos.

Al considerar que se continuó con su desarrollo posterior del cálculo hasta alrededor de 1780. En este desarrollo, el tipo de *cálculo leibniziano* con los diferenciales e integrales resultaron más exitosos que el *cálculo fluxional newtoniano*. Es pertinente aclarar que muchos matemáticos participaron en el desarrollo del cálculo en sus inicios, como Isaac Newton, profesor Lucasiano de matemáticas en Cambridge y más tarde *Master of the Mint* en Londres; Gottfried Wilhelm Leibniz, historiador y científico de la corte ducal de Hanover; Jakob Bernoulli, profesor de matemáticas en Basilea; su hermano Johann Bernoulli, trece años más joven, que después de un profesor en Groninga sucedió a Jakob en Basilea en 1705; Guillaume François Marquis de l’Hôpital, un noble francés que vive por medios privados y un hábil matemático muy interesado en los nuevos desarrollos de métodos infinitesimales; y en la misma brecha Leonhard Euler, que estudió con Johann Bernoulli y luego inició una

carrera en las instituciones científicas típicamente del Siglo XVIII, las academias. Fue profesor en la Academia de San Petesburgo **(**ahora Leningrado**)** desde 1730 hasta 1741 y desde 1766 hasta su muerte; en los años intermedios de él sirvió en la Academia de Berlín como profesor.

Muchas de las grandes ideas que harían famoso a Isaac Newton en matemáticas y ciencias naturales le llegaron en los años 1664-1666. En ese momento era un estudiante de posgrado en el Trinity College, en Cambridge, pero durante algún tiempo durante esos dos años vivió en Lincolnshire, y se mantuvo alejado de Cambridge por temor a la plaga. De esa época datan sus ideas sobre la gravedad, que posteriormente desarrollaría y presentaría al mundo en su famoso *Principia* **(***1687a***)**, así como su teoría de colores, publicado en el tratado *Opticks* en 1704 **(pp. 49-50).**

Justo aquí, una vez que se ha abierto el panorama sobre el trabajo científico de Newton y más aún al añadir el valor epistémico por sobre el desarrollo del Cálculo, es necesario ubicarlo en el terreno fértil del *marco de referencia*, la *Teoría de la Vibración*, **Dostrovsky (1975)** afirma que Newton en su *Principia* da una buena estimación de la longitud de onda del sonido en 1713 y que las diferentes longitudes de onda viajan a la misma velocidad e incluso describió matemáticamente la propagación de vibraciones en un medio elástico compresible, consideró el problema en una dimensión, aporte criticado posteriormente por Lagrange.

Así entonces, a principios del Siglo XVIII, Joseph Sauveur y Bernard le Bovier Fontenelle explicaron que, al asumir que una cuerda puede vibrar con muchos modos simples al mismo tiempo, se pueden emitir armónicos simultáneamente con el tono fundamental. Este es el origen *físico-musical* del *principio de superposición*. Sin embargo, pasó medio siglo antes de que estas se incorporaran a la teoría *matemático-mecánica* del movimiento ondulatorio **(Lützen, 1984).**

A continuación, la siguiente subsección abordará explícitamente un problema que causó gran conmoción entre varios matemáticos de la época en donde la *actividad matemática formal* **(**se adhiere el adjetivo **"***formal***"** a tal actividad como una manera de expresar los cambios epistemológicos de la matemática contemporánea del Siglo XVIII**)**, la traslada a un *contexto académico* más robusto por el surgimiento más consolidado del cálculo, como señala **Bos (1980)** que, al escribir la historia del cálculo, se acostumbra a dedicar mucha atención a los conceptos y métodos fundamentales. Esto tiende a oscurecer el hecho de que la mayoría de los matemáticos pasan mayor parte de su tiempo al usar conceptos y métodos para resolver problemas y no al contemplarlos. De hecho, en el Siglo XVIII el término «matemáticas» comprendía mucho más que cálculo y análisis, pues abarcaba desde

aritmética, álgebra y análisis al pasar por astronomía, óptica, mecánica e hidrodinámica hasta materias tecnológicas como artillería, construcción de barcos y navegación **(pp. 79-80).**

5.2 El Problema de la Cuerda Vibrante

> "*Si se trata de penetrar en los misterios de la naturaleza, es muy importante saber si es por impulsión o atracción que los cuerpos celestes actúan los unos sobre los otros; si es alguna materia sutil e invisible la que opera sobre los cuerpos impulsándolos unos sobre otros, o si están dotados de una cualidad escondida y oculta gracias a la cual se atraen mutuamente.*" — *Leonhard Euler*

Como una manera de *introducción* a este problema, no hay que descuidar la visión de la matemática del Siglo XVIII en donde los conceptos y métodos del cálculo permitieron establecer metodologías al surgimiento de *nuevos* problemas, por ejemplo, el de *la braquistócrona* y aunque no se tiene por objetivo mostrar exhaustivamente el *tratamiento matemático* de este problema, sí lo es, *explicitar* el papel del *cálculo leibniziano* para considerar este tipo de problemas.

Al rescatar a este problema sensibiliza el pensamiento matemático humano en determinados entornos, tal y como lo hace notar **Farfán (2012)** que el resolver problemas o, mejor aún, la metodología del descubrimiento de la época, se basa en analogías entre varios contextos, a primera vista no factibles, al hacer gala de una gran variedad operativa que permite, incluso, transportar los resultados obtenidos en casos finitos a casos infinitos, sin el menor reparo en consideraciones que hoy haría cualquier matemático. Y nótese que estas analogías, así como los argumentos físicos utilizados en la época, no se presentan como *plausibles* o *intuitivos*, sino como *la demostración* del hecho.

La autora menciona incluso que el programa de los Bernoulli **[**una vez que se vieron inmiscuidos en los problemas de la época**]** y sus seguidores consistía precisamente en mostrar la superioridad del cálculo leibniziano para resolver los problemas planteados de la física; así, no es de extrañar que la fundamentación, tanto de los métodos como los resultados, resida en la solución, satisfactoria o no, de los problemas planteados. En otras palabras, *el fin justifica los medios*, sin que ello implique llegar a contradicciones con el conocimiento anterior **(p. 78).**

El hecho del surgimiento de estos problemas no estaba centrado únicamente por la *naturaleza epistémica* del cálculo en sí mismo, sino que *fue* al mostrar su actuar de forma transversal en otros contextos del conocimiento humano sea este científico o técnico que dio como evidencia un dominio capaz de analizarse, ajustarse y ejecutarse como parte de un lenguaje matemático basado en leyes.

Al recordar el problema de la catenaria **(**sin entrar en el contexto ni en su actividad matemática propia del Siglo XVII**)** junto con el problema de la braquistócrona una manera de dar a la luz su solución, fue posible gracias a los nuevos métodos, y que como **Bos (1980)** señala, que había muchos más problemas de este tipo y sus orígenes eran diversos. La observación directa de procesos mecánicos simples sugirió problemas de la forma de una viga elástica bajo tensión, el problema de la cuerda vibrante **(**que Taylor, Daniel Bernoulli, D'Alembert, Euler y muchos otros estudiaron**)** así como el problema de la forma de una vela impulsada por el viento **(**discutida por los hermanos Bernoulli a principios de la década de 1690**)**.

Las construcciones más tecnológicamente involucradas sugirieron el estudio del movimiento del péndulo **(**que inició Huygens**)**, la trayectoria de los proyectiles y el flujo del agua a través de las tuberías, por lo que la astronomía y la filosofía sugirieron el movimiento de los cuerpos celestes como tema de tratamiento matemático. La propia matemática también sugería problemas**:** se generalizaban ecuaciones diferenciales especiales, se clasificaban tipos de integrales **(**por ejemplo, integrales elípticas**)** y ciertos tipos de problemas comenzaron con bastante rapidez a formar campos coherentes con un enfoque matemático unificado**:** el cálculo de variaciones, la mecánica celeste, la hidrodinámica y la mecánica en general.

De lo anterior, algo más debe comentarse sobre las nuevas ramas de la mecánica **(**o **«**mecánica racional**»** como se llamaba entonces, para distinguirla del estudio de las máquinas**)**, las cuales adquirieron su forma matemática ahora familiar en el Siglo XVIII, con raíces fortísimas con las bases de Newton en su *Philosophiae naturalis principia Mathematica* **(***1687a***)**, **[…]** donde hizo pleno uso de sus nuevos métodos infinitesimales, en donde encontró que sus resultados poseían un estilo fuertemente geométrico, e implícitamente resolvió muchas ecuaciones diferenciales, exactamente o por aproximación a través de expansiones en serie.

Pero ya en la primera mitad del Siglo XVIII, gracias a los esfuerzos de hombres como Jakob, Johann y Daniel Bernoulli, D'Alembert, Clairaut y Euler, el estilo en este tipo de estudio se matematizó aún más, es decir, los métodos se transformaron en métodos analíticos y se unificaron mediante la formulación de leyes básicas expresadas como fórmulas matemáticas, es particular en ecuaciones diferenciales **(pp. 84-85).**

Se puede mostrar que las Ecuaciones Diferenciales y su solución se convirtieron en un uso muy importante en el cálculo, donde ya para el Siglo XIX esta característica se mantuvo con el uso creciente de las Ecuaciones Diferenciales Parciales con condiciones de contorno. Otro estímulo para el Análisis Matemático, aunque de un tipo diferente, fue la Educación Matemática. El Cálculo se enseñó en estilo de libro de texto desde los primeros días del libro de texto de l'Hôpital *1696a,* y la estrecha asociación con la educación continuó

a lo largo de la ampliación del tema al Análisis Matemático aunado a la fundación en 1795 de la *École Polytechnique* en París como evento importante en la educación científica. El Análisis estuvo bien representado en la enseñanza de matemáticas ahí **(**y también en la *Ecole Normale* de París**)** donde Laplace y Lagrange impartieron cursos importantes **(Grattan-Guinness, 1980).**

Hoy día este tipo de cambios sociales en la educación son procesos consolidados a través de una lucha que involucra una serie de esfuerzos inquisitivos de una política de Estado, sin embargo, en tal época fue posible conocer este tipo de necesidades debido a que fue un factor sociocultural latente y la creación de la *École Polytechnique* fue precursora no solo de la instrucción educativa, sino que como menciona **Farfán (2012)** se dio el proceso del nacimiento de la ciencia de la ingeniería, la cual permitió un importante proceso, no sólo en la producción de científicos de gran talento, sino en la creación de un ambiente para la ciencia de la ingeniería.

Es decir, la *École* no fue solo la prueba institucional de la importancia de las matemáticas en Francia; también fue el sitio del surgimiento de la ingeniería matemática sobre la práctica tradicional **(p. 82),** así entonces, de acuerdo con la postura de la autora, entra a detalle resaltar el auge de una producción de capital científico ya casi a finales del Siglo XVIII y que al final de toda esta estructura gubernamental, conlleva al favorecimiento de una inversión en el conocimiento de la época.

A manera de entrar en detalle, sobre la *actividad matemática* en el Siglo XVIII donde las Ecuaciones Diferenciales tomaron un rol impactante en la solución de problemas a través de diferentes *contextos* como la Mecánica, la Hidrodinámica o la Astronomía, por mencionar algunos, conllevó a situar el trabajo de los matemáticos contemporáneos dentro de las nuevas áreas de la Matemática, y como ya se ha comentado, para ese entonces ya existían una diversidad de *métodos analíticos* para la solución de este tipo de problemas, pero no lo fue hasta con el auge de esta nueva área de la Matemática, el cual fue totalmente ligado al surgimiento del Análisis Matemático, al sumarse evidentemente la construcción de nuevos conceptos que sin duda alguna fueron, los propiciadores en conjunto de una *explicación física asociada a algún fenómeno*, se vinculara con tal *actividad matemática*.

Para ello, el terreno de las Ecuaciones Diferenciales, dado que se encontraba en sus inicios pero con un rigor fortísimo con la capacidad de explicitar una solución a una diversidad de situaciones, muchos actores principales incluyeron en su *actividad matemática* inconscientemente esta nueva rama, conllevaron a emplear soluciones geométricas, por ejemplo, Newton, en sus trabajos, de los que más se resaltan en los inicios de las ED, en su *Principia* y su *Método de las fluxiones*, su actividad esencialmente y en gran medida era de esta naturaleza pero que inconscientemente involucraba el hacer uso de ED con más de una

variable independiente, sin embargo aunque para esa época *aún no existía simbología* para asociar el tratamiento matemático de tal actividad no fue una *limitante* o asociarlo como un *obstáculo epistemológico*. Por su parte **Manacorda (1991)** afirma que las *tres leyes del movimiento* sufrieron una nueva formulación con Euler en 1750 basada en las Ecuaciones Diferenciales.

En relación al panorama general anterior del inicio de las ED, conviene tomar la postura, en relación al análisis *histórico-epistemológico* sobre el cual el *objeto matemático* de esta investigación se erige su *génesis*, para ello, situado en el *Problema de la cuerda vibrante*, entra el detalle, a *saber* sobre quién o quiénes son los actores participantes en el, sobre qué *marco de referencia* situado, más aún sobre el *tipo de actividad matemática* que se hacía en la época, es decir, durante el Siglo XVIII, históricamente ya posicionado, para esto, **Farfán (2012)** hace el recuento de tales personajes, al posicionar en un primer acercamiento al problema a Taylor que en 1715 da una primera interpretación matemática al problema, aunque el paso decisivo de la solución la dio D'Alembert años más tarde.

Es posible fijar que el *Problema de la Cuerda Vibrante* traslada epistemológicamente a un nivel elevado en la concepción científica de la época a los actores principales del Siglo XVIII en sus inicios **(**del problema**)** aunado a los que se sumaron, y que como sostiene **Stillwell (2010)** que este fue uno de los problemas más fértiles de las matemáticas, al ser la fuente de los campos tan diversos como las Ecuaciones Diferenciales Parciales, Series de Fourier, y la Teoría de Conjuntos. También es notable en ser quizás el sólo escenario en el que el sentido de la *audición* **[énfasis añadido]** llevó a importantes descubrimientos. Como ya se mencionó incluso que los pitagóricos descubrieron la relación entre el tono y la longitud al escuchar los tonos armoniosos producidos por dos cuerdas cuyas longitudes estaban en una simple proporción de números enteros. Así que en cierto sentido era posible «escuchar la longitud de la cuerda» y algunos descubrimientos posteriores de propiedades matemáticas significativas de las cuerdas, armónicos, fueron inicialmente provocadas por la audición.

Cabe recordar que dentro del análisis histórico hecho en el **Capítulo 4.**, donde se posicionan las rutas históricas identificadas que coadyuvan a consolidar la génesis epistemológica vinculada al *Problema de la Cuerda Vibrante*, centrada en el *objeto matemático* el **MSV** ya en los Siglos XVI y XVII, un conjunto de ideas reconfirmaba el inalcanzable sustento científico del *marco de referencia* que siglos atrás se veía lejano.

Dado esto, diversos científicos de la antigüedad como plantea **Stillwell (2010)** sugirieron que la base física del tono era la frecuencia de vibración, pero no fue hasta el Siglo XVII que el mentor de Descartes, Isaac Beeckman, descubrió la relación precisa entre la frecuencia y la longitud. En 1615 Beeckman dio un argumento geométrico simple para mostrar que la frecuencia es inversamente proporcional a la longitud; por lo tanto, las

proporciones pitagóricas de longitudes también se pueden interpretar como relaciones **(**recíprocas**)** de frecuencias.

La última interpretación es más fundamental porque la frecuencia por sí sola determina el tono, mientras que la longitud determina el tono solo cuando el material, la sección transversal y la tensión de la cuerda son fijos. Mersenne **(**1625**)** descubrió experimentalmente que la relación entre frecuencia $\boldsymbol{\nu}$, y la tensión $\boldsymbol{\mathcal{P}}$, la densidad de masa lineal $\boldsymbol{\rho}$, y la longitud $\boldsymbol{\ell}$ es**:**

$$\boldsymbol{\nu \propto \frac{1}{\ell}\sqrt{\frac{\mathcal{P}}{\rho}}}$$

[como se indicó en la **sección 5.1** de este capítulo**]**. Es así que la primera derivación de la Ley de Mersenne a partir de supuestos matemáticos fue dada por Taylor **(**1713**)**, en un artículo marca el comienzo de la *teoría moderna de la cuerda vibrante*. En él descubrió la posibilidad más simple para la forma instantánea de la cuerda, la *media onda sinusoidal***:**

$$\boldsymbol{y = k \sin \frac{\pi x}{\ell}}$$

y estableció generalmente que la fuerza sobre un elemento es proporcional a**:**

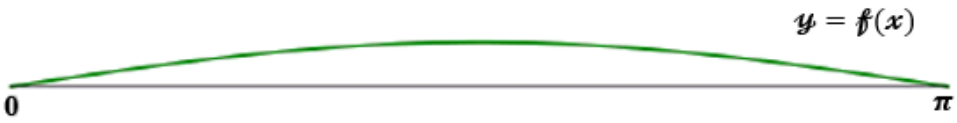
$$\boldsymbol{\frac{d^2 y}{dx^2}}$$

Para incursionar más a fondo sobre los inicios de este problema, pues como ya se ha dicho, el trabajo de Taylor es la piedra angular para los subsecuentes aportes a los trabajos de los posteriores matemáticos interesados en este problema, pero que, si bien, una forma de detallar las características matemáticas más desmenuzadas sobre de *qué trata* el problema, es la que brindan **Cannon y Dostrovsky (1981)**, ellos mencionan que Brook Taylor presentó su trabajo sobre la cuerda vibrante a la Royal Society en septiembre de 1712. Su trabajo apareció en 1714 en el volumen de las *Philosophical Transactions* de 1713 y una versión revisada fue incluida en su libro sobre el cálculo publicado en 1715. En él se introduce la condición de péndulo en la que se supone que todos los elementos de la cuerda sufren pequeñas vibraciones como simples péndulos todos del mismo período; por lo tanto, son restaurados por fuerzas armónicas de la misma intensidad. A partir de un análisis estático, la fuerza sobre un elemento es proporcional a la curvatura. La igualdad de esta fuerza con la fuerza armónica es la condición del péndulo. *De estas condiciones, el problema plantea el determinar la forma inicial de la cuerda, así como la frecuencia de la vibración, es decir el tiempo de vibración.* **[énfasis añadido] [. …]** Incluso, no puede haber duda que la música

fue una inspiración para Taylor en su interés por el problema de la cuerda vibrante **(pp. 15-20).**

Una *forma moderna* que se conoce al problema es la siguiente**:** Suponga que una cuerda flexible se ha tensado sobre el eje $\boldsymbol{x}$ y se sujeta de dos puntos, por conveniencia $\boldsymbol{x = 0}$ y $\boldsymbol{x = \pi}$, entonces se tira **(**suelta**)** la cuerda hasta tomar la forma de una cierta función $\boldsymbol{y = f(x)}$ en el plano $\boldsymbol{xy}$, si se deja en libertad, esta producirá vibraciones en ese plano. Se debe determinar el movimiento de la cuerda, es decir, su posición, velocidad y aceleración en cualquier instante, para cualquier punto de la cuerda, se inicia en el tiempo $\boldsymbol{t = 0}$. Si la subsecuente vibración es completamente transversal, entonces alguna función $\boldsymbol{y = y(x, t)}$ representará el desplazamiento vertical de la cuerda en la abscisa $\boldsymbol{x}$, donde $\boldsymbol{0 \leq x \leq \pi}$ y $\boldsymbol{t \geq 0}$ es el tiempo transcurrido desde que se suelta.

Así entonces para el $\boldsymbol{t = 0}$ cuándo se tensa **(**sujeta**)** la cuerda la función adopta la forma**:**



Para el tiempo $\boldsymbol{t = 1}$**:**

Para el tiempo $\boldsymbol{t = 2}$**:**

Para el tiempo $\boldsymbol{t = 3}$**:**

Y así sucesivamente para tiempos posteriores. Hasta este momento el *Problema de la Cuerda Vibrante* en sus inicios había brindado una serie de "constructos epistemológicos"

asociados a la *actividad matemática* hecha por Taylor, sin embargo, las limitantes de la época en la emergencia del surgimiento de nuevos conceptos matemáticos, permitieron a Taylor hasta entonces descubrir lo siguiente**:** dado que no disponía de una ecuación que modelara el fenómeno, no pudo encontrar las soluciones, pero sí probó la existencia de soluciones periódicas de tal problema.

Además, argumentaba que en cada punto de la fuerza restauradora es proporcional a la distancia de este al eje $\boldsymbol{X}$, lo que provoca centrarse en el primer modo fundamental de la vibración de la cuerda, lo que conlleva a no encontrar una *solución general* al problema.

Al seguir con los «avances» a dicho problema, para 1727, como afirman **Cannon y Dostrovsky (1981)**, Johann Bernoulli anunció sus resultados sobre la cuerda vibrante en cartas de octubre y diciembre de ese año a su hijo Daniel Bernoulli en San Petesburgo. Los extractos de estas cartas fueron publicados por la Academia de San Petesburgo en su volumen de 1727 que apareció en 1729. Él presentó a la Academia los detalles de su artículo que fue publicado en el volumen de 1728 pero que apareció en 1732. En gran medida este artículo puede considerarse como un conjunto de notas sobre el análisis de Taylor. Pero, además, introduce un análisis del correspondiente problema discreto de la cuerda ingrávida cargada con masas puntuales e igualmente espaciadas.

Al igual que Taylor, Johann Bernoulli hace los supuestos del isocronismo y cruce simultáneo con el eje, al considerar solo el caso de una cuerda soltada desde un lado; sobre la base de estos supuestos, determina que debe satisfacer las condiciones del péndulo, es decir, él pensaba que la fuerza restauradora es proporcional a la distancia del eje $\boldsymbol{X}$, por lo que no dedujo resultados generales **(p. 48).**

Así entonces **Garber (1999)** expresa que, ya para finales de los años 1740, una agria disputa estalló entre Jean le Rond D'Alembert y Leonhard Euler sobre la solución de la ecuación unidimensional. *Las cuestiones eran de la naturaleza de sobre la legitimidad de las funciones matemáticas, la definición de continuidad y la diferenciación* **[énfasis añadido]**. Una descripción sobre este recalentado intercambio ilustra las relaciones entre las matemáticas, la metafísica y la filosofía experimental durante el Siglo XVIII.

D'Alembert no fue el primer matemático que se centró en establecer matemáticamente y luego resolver la ecuación de movimiento de una cuerda bajo tensión. Al examinar el problema, D'Alembert explotó las recién desarrolladas Ecuaciones Diferenciales Parciales. Aparte del tratamiento físico general que necesitaba para establecer las ecuaciones, el trabajo de D'Alembert fue un ejercicio de desarrollo del cálculo, una exploración de soluciones a Ecuaciones Diferenciales Parciales de cierto tipo.

No era la expresión física, en forma matemática, del movimiento de una cuerda vibrante. Lo que D'Alembert se propuso demostrar para una cuerda bajo tensión, fue utilizar las condiciones de Taylor, fue que existen infinitas curvas distintas de la compañera de la cicloide alargada **(**curva sinusoidal**)** que satisfacen el problema en cuestión. Al partir de la obra de Brook Taylor, D'Alembert se centró en la expresión de Taylor para la fuerza aceleradora sobre un elemento de la cuerda, $\boldsymbol{\mathcal{T}\beta}$, donde $\boldsymbol{\beta}$ es la curvatura y $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ la tensión de la cuerda. Al usar la segunda Ley de Newton, D'Alembert construyó soluciones a las expresiones de la fuerza aceleradora en la cuerda que eran equivalentes a la resolución de la ecuación de onda**:**

$$d\frac{dy}{dt^2} = \frac{\mathcal{T}}{\rho} d\frac{dy}{ds^2}$$

donde puede apreciarse que hizo uso de la notación del Siglo XVIII.

Observación:

Cabe esclarecer que D'Alembert no usó la notación moderna, pero manipuló sus expresiones como una Ecuación Diferencial Parcial:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\mathcal{T}}{\rho}\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}$$

El caso que nos atañe es mostrar cómo para el Siglo XVIII, las Ecuaciones Diferenciales Parciales se encontraban en un *incipiente* desarrollo, por lo que esto se vino a consolidarse de mejor manera hacia el año 1770 aproximadamente con los trabajos de Nicolas de Condorcet, Joseph-Louis Lagrange y Pierre-Simon Laplace, pero que, ya para el año 1740 **(**aproximadamente**)**, sin embargo, desde el juicio de **Cajori (1928)** como *antesala* expresa que los acontecimientos generales asociados con la evolución de los conflictos fundamentales de las *fluxiones* y el *cálculo* son tan absorbentes, que la historia del tema muy especializado de las Ecuaciones Diferenciales Parciales y de la diferenciación e integración parcial no ha recibido la atención adecuada para el período temprano que precede a las trascendentales contribuciones de Leonhard Euler a este tema.

La historia *preuleriana* de los procesos parciales del cálculo es difícil de trazar, por la razón de que en esa época no existía ningún simbolismo reconocido ni una *fraseología* técnica que distinguiera los procesos parciales de los ordinarios. **[. …]** La diferenciación parcial y la integración parcial se producen incluso en los procesos ordinarios del cálculo en los que no se producen Ecuaciones Diferenciales Parciales. El ejemplo más sencillo de

diferenciación parcial se ve en la diferenciación del producto xy, en el que se supone que una variable es por el momento constante, y luego la otra, pero no se empleaba explícitamente Ecuaciones Diferenciales Parciales.

En la misma sintonía histórica durante el Siglo XVIII de poder rescatar *elementos epistemológicos* sobre la *diferenciación* e *integración parcial* como tema asociado actualmente a las Ecuaciones Diferenciales Parciales, se posiciona la opinión de **Demidov (1982)** quien sostiene que la historia de las Ecuaciones Diferenciales con Derivadas Parciales está poco estudiada. A pesar de muchos trabajos interesantes, principalmente publicado en las últimas décadas, todavía hay muchas preguntas por resolver antes de que podamos obtener una imagen más o menos exacta de la evolución de esta rama tan importante de las Matemáticas Modernas. Este es el caso de la cuestión relativa a la fase inicial del desarrollo de la teoría de D'Alembert y Euler. Aunque los resultados obtenidos por Leonhard Euler en este campo son bien conocidos, la investigación de D'Alembert no ha sido aún objeto de un análisis verdaderamente sistemático y a menudo se describe de manera incompleta **(pp. 3-4).**

Una vez que se ha contextualizado el rubro de esta rama de las Matemáticas durante el Siglo XVIII, cabe elucidar que su actuar no es el mismo al que se conoce actualmente y es parte de su propia *actividad matemática*, sin embargo, para ese entonces permitió resolver una diversidad de problemas contextualizados por el empleo de la *derivación* e *integración parcial* sin ningún contratiempo en la interpretación de sus resultados, como el caso del *Problema de la Cuerda Vibrante*.

El origen de esta teoría se atribuye a menudo a la memoria de Leonhard Euler *Additamentum ad dissertationem de infinitis curvis eiusdem generis* publicada en 1740. Como indica su título, esta disertación se refiere a la geometría y, en particular al problema de las llamadas curvas isogonales. Esta tradición, que vincula el origen de la Teoría de las Ecuaciones Diferenciales Parciales con esta memoria de Euler, se remonta en particular a finales del Siglo XVIII. El autor comenta que puede concluirse que Leonhard Euler, si bien ocupaba las Ecuaciones Diferenciales Parciales, no les prestaba mucha atención en ese momento. La importancia de los resultados obtenidos no parece haber sido plenamente comprendida ni por el propio Euler ni, más aún, por la mayoría de sus contemporáneos. Sólo mucho más tarde de sus seguidores lo usaron para tratar de demostrar su prioridad.

Si los resultados obtenidos por Euler prefiguran el nacimiento de la Teoría de las Ecuaciones Diferenciales Parciales, el trabajo de D'Alembert en los años 1740 lo marca realmente. D'Alembert obtuvo varias ecuaciones de la *física-matemática* de este tipo y las integró **(Demidov, 1982, pp. 4-6).**

La ecuación que obtuvo D'Alembert y que *gobierna la dinámica de la cuerda vibrante* puede ser escrita de una forma moderna con la respectiva notación de las EDP, pero que, para la época del Siglo XVIII, la notación actual no estaba desarrollada, ya que se encontraba en un incipiente y acelerado desarrollo los métodos de integración parcial para las EDP, por lo que los resultados que obtuvo Euler sobre el Cálculo Diferencial Parcial permitieron a D'Alembert explorar el terreno de la *actividad matemática* y aplicarlos para encontrar una *proximidad a la solución general* del *Problema de la Cuerda Vibrante*, matematizado por la ecuación**:**

$$d\frac{dy}{dt^2} = \frac{\mathcal{T}}{\rho} d\frac{dy}{ds^2}$$

de la Ecuación Diferencial anterior, al suprimir $\frac{\mathcal{T}}{\rho}$ dado que representan constantes relacionadas al material de la cuerda y la tensión de esta es posible despreciarlas para fines de la solución, por lo que la ecuación queda como**:**

$$d\frac{dy}{dt^2} = d\frac{dy}{ds^2}$$

donde

$$\frac{ddy}{dt^2} = \frac{ddy}{ds^2} \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{ds^2}$$

Ahora, de la expresión**:**

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{ds^2}$$

es posible percatar que tiende a "*parecerse*" mucho a la notación moderna empleada en las EDP, a pesar de ello y de ser la *actividad matemática* propia del Siglo XVIII en ciernes del surgimiento del Análisis Matemático y sobre todo de las Ecuaciones Diferenciales Parciales, esto no fue un obstáculo para D'Alembert en tal momento para poder resolver dicha ecuación y así obtener una *proximidad a la solución general*. Ahora cabe realizar la pregunta, ***¿****en qué resultados matemáticos de Euler se basó D'Alembert para resolver la ecuación***?**, para responder a tal pregunta, es posible hacerlo con base en el *tratamiento matemático que hoy día* se le da al siguiente teorema**:**

Sea la ED de la forma $\mathcal{P}(x,t)dx + Q(x,t)dt = 0$ se llama Ecuación Diferencial Exacta si su primer miembro es la *diferencial total* de una función $v(x,t)$, expresada como**:**

$$d[v(x,t)] = dv \equiv \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial t}dt$$

y que la *condición necesaria* y *suficiente* para que la Ecuación Diferencial *sea exacta* es que *cumpla la condición*:

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$$

donde las funciones $\mathcal{P}(x,t)$ y $Q(x,t)$ junto con las derivadas parciales $\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t}$, $\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial t}$ y $\frac{\partial Q}{\partial x}$ existen y son continuas en un recinto simplemente conexo $\mathfrak{D}$ de *variación* en el plano $\mathcal{XT}$. La *integral general* de la Ecuación Diferencial Exacta inicial es:

$$\int_{x_0}^{x} \mathcal{P}(x,t)dx + \int_{t_0}^{t} Q(x_0,t)dt = \mathcal{C}$$

El teorema del criterio anterior fue escrito por Leonhard Euler en 1734 y publicado en 1740 por la Academia de Ciencias de San Petesburgo con la notación y *tratamiento matemático* correspondiente de la época y de acuerdo con **Engelsman (1984)** quien hace notar que apareció en el manuscrito *De differentiatione* el cual consta de dos partes distintas, pero que en la primera mitad del manuscrito contiene exactamente lo que promete el título: el Cálculo Elemental de Diferenciación Parcial, que consiste en el teorema de igualdad, el teorema de intercambiabilidad y el teorema de Euler sobre funciones homogéneas. La segunda mitad del manuscrito está dedicada a problemas relacionados con familias de curvas, en particular el problema de la trayectoria ortogonal y el problema de las trayectorias de arco o áreas iguales. Estos problemas se tratan explícitamente como ejemplos de la aplicación del Cálculo Diferencial Parcial como se desarrolló en la primera mitad del manuscrito.

Este claro desenredo del Cálculo Diferencial y sus aplicaciones es el aspecto fascinante de *De differentiatione*. Aquí está la gran diferencia entre el trabajo de Euler y el de sus precursores, en particular de Nicolaus I Bernoulli, en los años anteriores a 1720. Es la diferencia entre un cálculo conceptualmente independiente basado en el concepto clave de funciones o expresiones que involucran varias variables y un cálculo que está conceptualmente relacionado con el concepto de una familia de curvas.

Este es otro ejemplo del conocido proceso de *desgeometrización del cálculo*, que tuvo lugar en la primera mitad del Siglo XVIII. Sin embargo, esto no implica que las familias de curvas ya no jueguen un papel importante en el Cálculo Diferencial Parcial de Euler. Por el contrario: Todavía proporcionan la motivación mínima para que Euler desarrolle tal cálculo, y todavía proporcionan los problemas interesantes. Sólo su papel como base conceptual del cálculo ha dado paso ahora a los *conceptos más formales de funciones y expresiones de varias variables*. El importante papel que todavía juegan las familias de curvas en el Cálculo Diferencial Parcial de Euler queda claro desde el comienzo mismo de *De differentiatione*.

Una vez tocado un poco la historia sobre el teorema puede tomarse como una de las *bases pioneras esenciales* en los cimientos de las Ecuaciones Diferenciales Parciales directamente sobre el trabajo de Leonhard Euler que fue base para D'Alembert para trabajar con ecuaciones de la *física-matemática*, y de donde esta investigación recobra lo que actualmente ofrece el dME de las EDO ya que en ellas está contenido el conocer el teorema antes escrito.

Del teorema anterior, se *omite la demostración*, ya que para el Siglo XVIII su *tratamiento matemático* aceptaba su equivalencia, entonces ahora, se muestra una "*solución matemática"* a la ecuación que obtuvo D'Alembert con base en dicho teorema para poder encontrarla, e incluso es posible hallarla con base en el *tratamiento matemático* del criterio de Euler, a poder decir que una EDP expresada en *notación moderna* **(**es decir, al reunir las características de ser lineal, homogénea y de segundo orden**)**, puede ser reescrita como un *sistema de EDO de primer orden* y como un *sistema de diferenciales exactas*.

Es posible escribir la ecuación $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{ds^2}$ como un *sistema de EDO de primer orden* dado el criterio de Euler que $\frac{dP}{dt} = \frac{dQ}{ds}$ *si y solo si* $P(s,t)ds + Q(s,t)dt = dv$ es una *diferencial total* o bien si $P(s,t)ds + Q(s,t)dt = 0$ es una Ecuación Diferencial Exacta. Así entonces, la ecuación encontrada por D'Alembert que describe la dinámica de la cuerda vibrante se reescribe como**:**

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{dy}{ds}\right)$$

pero si se hace $P = \frac{dy}{dt}$ y $Q = \frac{dy}{ds}$ y como las *derivadas mixtas* son iguales entonces, si se calcula $\frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d^2y}{dt^2}$ a su vez, $\frac{dQ}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{dy}{ds}\right) = \frac{d^2y}{ds^2}$ así se halla entonces que $\frac{dP}{dt} = \frac{dQ}{ds}$, por otro lado si $P = \frac{dy}{ds}$ y $Q = \frac{dy}{dt}$, al calcular $\frac{dP}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{dy}{ds}\right) = \frac{d^2y}{ds^2}$ y $\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d^2y}{dt^2}$ en donde puede verificarse que $\frac{dP}{ds} = \frac{dQ}{dt}$

y se obtiene el sistema**:**

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{ds} = \dfrac{dQ}{dt} \\ \dfrac{dP}{dt} = \dfrac{dQ}{ds} \end{cases}$$

donde las expresiones anteriores atañen a un *sistema de EDO de primer orden*, ahora por otro lado D'Alembert encontró que existen dos funciones $y(s,t)$ y $v(s,t)$ por el criterio de

Euler donde la ecuación puede ser escrita como un *sistema de ecuaciones diferenciales exactas* de la siguiente manera**:**

Observe que $\mathcal{P} = \frac{dy}{dt}$ y $\mathcal{Q} = \frac{dy}{ds}$, por definición de las funciones $\mathcal{P}dt = dy$ y a su vez $\mathcal{Q}ds = dy$ de donde $\mathcal{P}dt = \mathcal{Q}ds = dy$ pero que $\mathcal{P}dt \pm \mathcal{Q}ds = dy$ para fines de que la expresión anterior adopte la forma de una *diferencial total*, se desprecia el hecho de que $\mathcal{Q}ds$ sea negativa en el miembro izquierdo **(**positiva en el derecho**)**, así entonces resulta que**:** $dy = \mathcal{P}dt + \mathcal{Q}ds$ y al considerar que $\frac{d\mathcal{P}}{dt} = \frac{d\mathcal{Q}}{ds}$ implica que**:**

$$dv = \mathcal{P}(s,t)ds + \mathcal{Q}(s,t)dt$$

donde al suprimir la *dependencia funcional* de la expresión anterior, esta puede ser reescrita como $dv = \mathcal{P}ds + \mathcal{Q}dt$; donde finalmente el *sistema de ecuaciones diferenciales exactas* queda como**:**

$$\begin{cases} dy = \mathcal{P}dt + \mathcal{Q}ds \\ dv = \mathcal{P}ds + \mathcal{Q}dt \end{cases}$$

Las tres formas de poder representar la EDP en términos del criterio de Euler fue lo que hizo D'Alembert, pero que lo mostrado antes escrito es con base en el *tratamiento matemático actual*, lo curioso aquí es que se da a conocer una cercanía a la *actividad matemática* de D'Alembert en el Siglo XVIII, tal ecuación puede ser *integrada* **(**resuelta**)**, para trabajar con la solución de D'Alembert, se opta por trabajar con el último sistema, es decir con el *sistema de ecuaciones diferenciales exactas*, de la siguiente manera**:**

[1] Al **sumar** las dos EDO**:**

$$dy + dv = \mathcal{P}dt + \mathcal{Q}ds + \mathcal{P}ds + \mathcal{Q}dt$$

Del miembro derecho es posible *reducir términos semejantes* como**:**

$$\begin{aligned} dy + dv &= \mathcal{P}dt + \mathcal{Q}ds + \mathcal{P}ds + \mathcal{Q}dt \\ dy + dv &= \mathcal{P}ds + \mathcal{Q}ds + \mathcal{P}dt + \mathcal{Q}dt \\ dy + dv &= (\mathcal{P} + \mathcal{Q})ds + (\mathcal{P} + \mathcal{Q})dt \\ dy + dv &= (\mathcal{P} + \mathcal{Q})(ds + dt) \end{aligned}$$

[1.1] Si **se integra** cada miembro de la expresión anterior**:**

$$\begin{aligned} &\int dy + \int dv = \int (\mathcal{P} + \mathcal{Q})(ds + dt) \\ &\therefore y + v = \Psi(s + t) \end{aligned}$$

[2] Al **restar** las dos EDO**:**

$$dy - dv = \mathcal{P}dt + \mathcal{Q}ds - (\mathcal{P}ds + \mathcal{Q}dt)$$

Al *simplificar términos* del miembro izquierdo la ED queda como**:**

$$\begin{aligned}
dy - dv &= \mathcal{P}dt + \mathcal{Q}ds - \mathcal{P}ds - \mathcal{Q}dt \\
dy - dv &= (\mathcal{P}dt - \mathcal{Q}dt) + (\mathcal{Q}ds - \mathcal{P}ds) \\
dy - dv &= (-\mathcal{Q}dt + \mathcal{P}dt) + (\mathcal{Q}ds - \mathcal{P}ds) \\
dy - dv &= -(\mathcal{Q}dt - \mathcal{P}dt) + (\mathcal{Q}ds - \mathcal{P}ds) \\
dy - dv &= -(\mathcal{Q} + \mathcal{P})dt + (\mathcal{Q} - \mathcal{P})ds \\
dy - dv &= (\mathcal{Q} - \mathcal{P})ds - (\mathcal{Q} - \mathcal{P})dt \\
dy - dv &= (\mathcal{Q} - \mathcal{P})(ds - dt)
\end{aligned}$$

[2.1] Si **se integra** cada miembro de la expresión anterior**:**

$$\begin{aligned}
\int dy - \int dv &= \int (\mathcal{Q} - \mathcal{P})(ds - dt) \\
y - v &= \Phi(s - t)
\end{aligned}$$

[3] D'Alembert prosigue a sumar ambas ED integradas de la siguiente manera**:**

$$\begin{aligned}
y + v + y - v &= \Psi(s + t) + \Phi(s - t) \\
2y &= \Psi(s + t) + \Phi(s - t) \\
y &= \frac{\Psi(s + t) + \Phi(s - t)}{2} \\
y &= \frac{1}{2}[\Psi(s + t) + \Phi(s - t)] \\
y &= \frac{1}{2}\Psi(s + t) + \frac{1}{2}\Phi(s - t)
\end{aligned}$$

[4] Finalmente la *solución* que obtiene D'Alembert es**:**

$$y(s, t) = \frac{1}{2}\Psi(s + t) + \frac{1}{2}\Phi(s - t)$$

Así pues, la función $y(s, t)$ es una *proximidad a la solución general* y las funciones Ψ y Φ representan *funciones arbitrarias*, pero, **¿***qué se puede decir respecto a las características matemáticas que D'Alembert propuso con esta solución***?**, para responder esta pregunta se coincide con la posición de **Garber (1999)** quien afirma que había obscuridades en el argumento de D'Alembert, pero que éste era un intento de introducir el *tiempo* en la solución del problema del *movimiento de una cuerda*. Mientras que el *razonamiento físico* era vago, D'Alembert se concentró en la solución funcional, la cual incluía **"**infinidad de curvas**"**.

A pesar de que el razonamiento físico de D'Alembert era escaso, lo que poseía de este le permitió proceder a demostrar su existencia y explorar la naturaleza matemática de las funciones, en este caso $\boldsymbol{\Psi}$ y $\boldsymbol{\Phi}$ y su relación en una cuerda tensa y fija en sus extremos, por lo que, si se consideran las características físicas del problema se tiene que**:**

[1] La cuerda se encuentra *tensa* en este momento, se suelta sin una velocidad inicial, pero en este instante, la forma inicial de la cuerda en el tiempo $\boldsymbol{t = 0}$ adopta una *cierta forma*, es decir, una *función*.

[2] Al momento de que la cuerda sufre una *vibración*, esta se encuentra tensada en $\boldsymbol{t = 0}$, a una velocidad inicial $\boldsymbol{0}$.

[3] Los extremos de la cuerda se mantienen fijos sin importar el tiempo que transcurra.

En virtud de conocer la solución de D'Alembert, dada por**:**

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{s} + \boldsymbol{t}) + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{s} - \boldsymbol{t})$$

donde $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t})$ es una *expresión analítica*, y que a simple vista no puede decirse nada al respecto ya que se trastoca "*otro terreno*" el de poder brindar las *características* de la función $\boldsymbol{y}$, lo que obedece inmediatamente a considerar el contexto de las *funciones* $\boldsymbol{\Psi}$ y $\boldsymbol{\Phi}$, al hablar del contexto en este escrito se emplea un *calificativo* hacia él por sobre las *condiciones a las que el Problema de la Cuerda Vibrante se erige*, es decir, desde la *física* que describe su dinámica.

Algo interesante es lo siguiente, en diversos libros de Física-Matemática, Ecuaciones Diferenciales Parciales e Historia de las Matemáticas, por mencionar algunos tópicos, es posible encontrar el *tratamiento matemático* que se le da al *Problema de la Cuerda Vibrante*, y donde se puede encontrar la solución $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t})$, curiosamente también se detecta la solución de la forma $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$, es decir, la primera solución es expresada en la *variable* $\boldsymbol{s}$ mientras que en la segunda expresión se da en la *variable* $\boldsymbol{x}$; **[a] ¿***por qué ocurre esto***?**, **[b] ¿***qué diferencia existe en expresarla en la variable* $\boldsymbol{s}$ *o en la variable* $\boldsymbol{x}$**?**, para responder a ambas preguntas se prosigue a lo siguiente**:**

Para **[a]** el argumento a decir es que D'Alembert parte de la *hipótesis* de considerar que la cuerda para ser puesta en movimiento *sufre pequeñas vibraciones*, por ende, esta condición es considerada al momento de poner en escena la ecuación, por lo que al transcurrir el tiempo desde que la cuerda se suelta, esta adopta diferentes *posiciones* en toda la *trayectoria* que sigue, debido a esta dinámica de la cuerda se opta por el uso de la *abscisa curvilínea* $\boldsymbol{s}$ para evitar confusiones con la *abscisa* $\boldsymbol{x}$.

Vincula también la fuerza que disminuye la velocidad del movimiento **(***geometría de la vibración***)** en un intervalo de tiempo con las porciones infinitesimales de la cuerda y sus respectivos términos de la ecuación $\frac{d^2y}{dt^2}$ y $\frac{d^2y}{ds^2}$.

Para responder la pregunta **[b]** la razón a sostener es en el estricto sentido matemático, mientras que la variable s configura una trayectoria por cada instante de tiempo t_i donde geométricamente describe un recorrido **(**desde la concepción de «continuidad» de D'Alembert, por medio de la *longitud de arco***)**, mientras que en la variable x se considera por sobre todo el *continuo real*.

Una vez hechas las aclaraciones sobre las *características físicas* del *Problema de la Cuerda Vibrante* y la otra sobre las variables en las que la solución encontrada por D'Alembert está expresada la función y **(**bajo ciertos argumentos a considerar respecto la forma de la *función***)**, se deja por un lado la solución desde la variable s se constituye la dinámica del problema en la variable x**:**

$$y(x,t) = \frac{1}{2}\Psi(x+t) + \frac{1}{2}\Phi(x-t)$$

si y solo si se conservan las restricciones geométricas**:**

observe que los puntos c y d *se mantienen fijos respectivamente*, por lo que**:**

$$\begin{cases} y(0,t) = 0 \\ y(a,t) = 0 \end{cases}$$

Al sustituir las *condiciones anteriores* a las cuales está sujeto el problema, se tiene que**:**

$$y(0,t) = \frac{1}{2}\Psi(0+t) + \frac{1}{2}\Phi(0-t) = 0$$

$$\frac{1}{2}\Psi(t) + \frac{1}{2}\Phi(-t) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}[\Psi(t) + \Phi(-t)] = 0 \Leftrightarrow \Psi(t) + \Phi(-t) = 0$$

$$\Rightarrow \Psi(t) = -\Phi(-t)$$

$$\Leftrightarrow -\Psi(t) = \Phi(-t)$$

$$\therefore \Psi \textit{ es una función impar}$$

de lo anterior, se rescribe la ecuación

$$y(x,t) = \frac{1}{2}\Psi(x+t) + \frac{1}{2}\Phi(x-t)$$

de la forma

$$y(x,t) = \frac{1}{2}\Psi(x+t) - \frac{1}{2}\Psi(-x+t)$$
$$\therefore y(x,t) = \frac{1}{2}\Psi(t+x) - \frac{1}{2}\Psi(t-x)$$

Al tomar la segunda condición en la solución obtenida:

$$y(a,t) = \frac{1}{2}\Psi(t+a) - \frac{1}{2}\Psi(t-a) = 0$$
$$\frac{1}{2}\Psi(t+a) - \frac{1}{2}\Psi(t-a) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}[\Psi(t+a) - \Psi(t-a)] = 0$$
$$\Leftrightarrow \Psi(t+a) - \Psi(t-a) = 0$$
$$\Leftrightarrow \Psi(t+a) = \Psi(t-a)$$
$$\therefore \Psi \textit{ es una función con período } 2a$$

ahora bien, como la cuerda está tensada por ambos extremos D'Alembert pone en escena el caso cuando $y(x,0)$, es decir, cuando la cuerda toma una *forma inicial*, por lo que adopta una cierta trayectoria geométrica, o en términos del Análisis Matemáticos, describe una *función*, esto ocurre en el tiempo $t = 0$, a una velocidad inicial $\frac{d}{dx}[y(x,0)] = 0$,

Al introducir esta condición en la ecuación:

$$y(x,t) = \frac{1}{2}\Psi(t+x) - \frac{1}{2}\Psi(t-x)$$

al proseguir a calcular la derivada:

$$\frac{d}{dx}[y(x,0)] = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}\Psi(0+x) - \frac{1}{2}\Psi(0-x)\right] = 0$$
$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}\Psi(x) - \frac{1}{2}\Psi(-x)\right] = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}\Psi(x)\right] - \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}\Psi(-x)\right] = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dx}[\Psi(x)] - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}[\Psi(-x)] = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\Psi'(x) - \frac{1}{2}\Psi'(-x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}[\Psi'(x) - \Psi'(-x)] = 0 \Leftrightarrow \Psi'(x) - \Psi'(-x) = 0$$
$$\therefore \Psi'(x) - \Psi'(-x) = 0$$

de lo anterior es posible ver: $\Psi'(x) = \Psi'(-x)$ lo que implica que Ψ' $\boldsymbol{es\ par}$, si se integra la expresión:

$$\Psi'(x) - \Psi'(-x) = 0$$

resulta:

$$\Psi(x) - \Psi(-x) = 0 \Leftrightarrow \Psi(x) = \Psi(-x)$$

al sustituir la *condición* antes escrita en la solución**:**

$$y(x,t) = \frac{1}{2}\Psi(t+x) - \frac{1}{2}\Psi(t-x)$$

se tiene

$$y(x,t) = \frac{1}{2}\Psi(t+x) + \frac{1}{2}\Psi(-t+x)$$

pero como $t = 0$

$$y(x,0) = \frac{1}{2}\Psi(0+x) + \frac{1}{2}\Psi(0+x) = \frac{1}{2}\Psi(x) + \frac{1}{2}\Psi(x) = \Psi(x)$$
$$\therefore y(x,0) = \Psi(x)$$

esta condición representa que Ψ está determinada por la posición en el tiempo $t = 0$ sobre el intervalo en el que la cuerda se considera que está tensada, es decir en los extremos inicial y final del intervalo $[0, a]$.

A manera de resumen, de esto se concluye que D'Alembert llega a una *solución general particular* de la Ecuación Diferencial *por medio de considerar las* **"***condiciones físicas***"** del problema. Entonces la ecuación que matematiza la dinámica del problema es**:**

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{ds^2}$$

De la cual obtiene una *proximidad a la solución general* dada por**:**

$$y(s,t) = \frac{1}{2}\Psi(s+t) + \frac{1}{2}\Phi(s-t)$$

Donde al considerar ciertas **"***condiciones físicas***"** vinculadas al problema, obtiene una solución de la forma**:**

$$y(x,t) = \frac{1}{2}\Psi(t+x) - \frac{1}{2}\Psi(t-x)$$

Lo hizo a través de las condiciones que describen la forma inicial de la cuerda y las velocidades en los puntos fijados, pero esta solución posee observaciones en cuanto al método empleado por D'Alembert, como herramienta del Análisis Matemático de la época, a comentar como sostiene **Garber (1999)**:

> *D'Alembert obtuvo esta solución a través de un cambio de coordenadas, no por el método de separación de variables*. D'Alembert llamó a esto *el*

> *método de los multiplicadores* y además no fue el primero en referirse como una familia de curvas, sino que se refirió como una *solución generalizada a una Ecuación Diferencial Parcial*.

La *actividad matemática* del Siglo XVIII abre una brecha a los *problemas* asociados a *contextos físicos* los cuales incursionaban no solo en su matematización, sino que trastocaban un terreno poco fértil de conocimiento el de las Ecuaciones Diferenciales Parciales, ya que al involucrar las condiciones matemáticas del problema mediante el empleo de dos o más variables independientes, se centra la atención sobre aquellas *restricciones matemáticas*, llámense también *condiciones iniciales* y de *frontera* en un sentido actual por parte del discurso Matemático Escolar, que cumplen la validez hipotética de una ley física.

Como es posible apreciar, el trabajo de D'Alembert estuvo permeado por la *actividad matemática* de Euler, conllevándolo a emplear sus resultados sobre el Cálculo Diferencial Parcial y que de la **"***solución***"** obtenida por D'Alembert, acarreó finalmente *fuertes discusiones* en torno a este problema más aún como opina **Farfán (2012)** la discusión generada por el *Problema de la Cuerda Vibrante* puso bajo inspección los fundamentos sobre los que se apoyaba el análisis, tales como la teoría de funciones, el papel del álgebra, el continuo real y la convergencia de series, así como la interpretación física de las soluciones matemáticas.

La autora señala que el programa de los Bernoulli y sus seguidores era el de demostrar la superioridad del cálculo leibniziano por sobre otros métodos para abordar problemas físicos. **[. …]** Este cálculo fue esencialmente un *cálculo de operadores* sobre *expresiones algebraicas*; tales operadores son la diferenciación y la integración que, si bien no nacieron en estrecha relación uno con el otro, ahora se ligan por un *principio de inversión*[13].

De este modo la potencialidad del cálculo algebraico permitía a los matemáticos realizar cualquier cadena de integraciones y diferenciaciones de acuerdo a sus necesidades; pero implica limitaciones y, en este caso, la limitación fue que cualquier operación debería darse sobre una función que obedeciera a una *ley de continuidad*. Así, el cálculo solo podía operar sobre aquellas funciones que satisficieran totalmente esta condición, y éstas fueron funciones como polinomios, las funciones exponenciales y trigonométricas, y todas aquellas expresiones que dieran un *resultado definido* una vez que se les aplicaran las operaciones del cálculo.

Al continuar con la postura de la autora, ella menciona que, en esta época, el cálculo consistía, principalmente en métodos disconexos y en los problemas que podían resolverse

[13] Los Bernoulli reinterpretaron la integral de Leibniz como antiderivadas; mientras que, para Leibniz $\int y \cdot dx = Q$ significa que la suma de los rectángulos infinitamente pequeños $y \cdot dx = Q$, para ellos, en cambio, significa que $dQ = y \cdot dx$

con tales métodos. Quien reestructuró el cálculo de Leibniz y lo convirtió en un cuerpo organizado fue Leonhard Euler, figura central de toda la matemática europea del Siglo XVIII.

Para ello, es importante realizar una introspección a la solución que D'Alembert encontró y que está dada por la expresión $y(x,t) = \frac{1}{2}\Psi(t+x) - \frac{1}{2}\Psi(t-x)$, ya que es pertinente adentrar a la *crítica* sobre la *actividad matemática* de D'Alembert hecha por Leonhard Euler y Daniel Bernoulli, que finalmente trajo consigo la famosa *controversia* al *Problema de la Cuerda Vibrante*.

Los méritos de estos personajes al problema se reconocen sin escatimar por supuesto el trabajo *histórico-epistemológico* que les antecede y por ende el que les es subsecuente, pero, a manera de mostrar el desenlace académico crucial derivado del *problema* fue respecto a los nuevos conceptos de *continuidad* y *discontinuidad* que envolvían al concepto de *función*, ante la plausible evolución epistemológica que atañe a este concepto, D'Alembert estuvo involucrado y tuvo que adentrarse a la causa provocada por la controversia suscitada a la solución del *Problema de la Cuerda Vibrante*, es decir, fijamente a la solución que él encontró, para ello, **Fraser (1989)** comenta al respecto que en los libros de texto de Euler y Lagrange, ellos mencionan que una *función* viene dada por *una sola expresión analítica*, una fórmula a partir de variables y constantes en un número finito de pasos al usar operaciones algebraicas y trascendentales, así como la composición de funciones. En el Siglo XVIII, estas funciones se denominaban "*continuas*", en oposición a las funciones "*discontinuas*", expresiones definidas por partes en más de un intervalo de números reales.

Debido a esto, el autor comenta que la cuestión de la naturaleza de una función surgió abiertamente en el debate sobre la cuerda vibrante, probablemente la controversia matemática más interesante y mejor documentada del Siglo XVIII. Aunque el debate envolvió a varios matemáticos e involucró una serie de cuestiones, los puntos de interés relevantes surgen por el desacuerdo entre D'Alembert y Euler.

Al seguir con la posición del autor y como ya se ha mencionado párrafos atrás D'Alembert en 1747 derivó e integró una Ecuación Diferencial Parcial que matematiza la dinámica del movimiento de una cuerda que es estirada y que es puesta en vibración. El logro de D'Alembert fue importante, tanto matemáticamente como en el uso de principios dinámicos. Su derivación fue inmediatamente adoptada por Euler, quien *reinterpretó* la solución para *permitir una clase más amplia de curvas aceptables como formas iniciales de la cuerda*.

Euler consideró esta reinterpretación una adición sustancial al análisis de D'Alembert quien este último rechazó su trabajo y Euler por su parte reaccionó enérgicamente, el debate posterior que nunca se resolvió a satisfacción de los participantes, *se refería a la cuestión*

matemática de cómo interpretar la solución inicial de la ecuación de onda. El problema básico era que la *integración* de Ecuaciones Diferenciales Parciales requería la *introducción de funciones arbitrarias*. D'Alembert insistió en que sólo una ecuación que conecta las variables $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ era aceptable como *solución inicial*, por tanto, *permitiría solo funciones que fueran dadas por expresiones analíticas únicas*, lo anterior es una restricción que D'Alembert da por sentado tomar en cuenta más aún dado que se había demostrado que la solución inicial de la cuerda vibrante es periódica solo se podían permitir aquellas funciones que eran, en virtud de su forma algebraica, *periódicas*.

Por su parte Euler resolvió el problema en 1748 sin embargo discrepaba con D'Alembert, aceptó las restricciones que D'Alembert había impuesto a las posibles soluciones iniciales del problema. Según D'Alembert, una forma inicial de la cuerda dada por un *arco de parábola* $\boldsymbol{y = x(1 - x)}$ *sería inaceptable* porque la expresión $\boldsymbol{y = x(1 - x)}$ *no es impar ni periódica*.

Euler no vio ninguna razón por la que no se pudiera trasladar el arco de la parábola a lo largo del eje horizontal **[***eje de las abscisas*, es decir, el *eje de las* $\boldsymbol{x}$**]** y así definir una nueva curva periódica. La curva obtenida vendría dada por una función periódica que se definió a trozos sobre cada intervalo de longitud 1. En la solución $\boldsymbol{y = f(x)}$ el símbolo de función $\boldsymbol{f(x)}$ ahora se referiría a diferentes expresiones algebraicas que dependen del intervalo de números reales $\boldsymbol{x}$ a los que pertenecía.

Farfán (2012) señala la distinción substancial entre la concepción leibniziana, cuyos objetos de estudio son las curvas **(**es decir, objetos geométricos**)**, en contraste con la corriente formalista del Siglo XVIII, encabezada por Euler, que toma por objetos a las funciones, cuya naturaleza es, eminentemente, *analítica* **(p. 57).**

En el debate posterior, D'Alembert y Euler defendieron vigorosamente sus respectivas posiciones. Sobre la base de la plausibilidad física y la generalidad matemática, Euler abogó por la aceptación de funciones **"**discontinuas**"** como soluciones iniciales a la ecuación de onda. D'Alembert sostuvo que la concepción de Euler era artificial, que las curvas en cuestión no fueron producidas por ningún modo natural de generación. El cálculo estudiado definido, dadas las expresiones analíticas correspondientes a tales curvas naturales y la inclusión de las funciones más generales de Euler violó los principios básicos de la asignatura.

Aunque el debate sobre el concepto de función tocó la base misma del cálculo los temas en cuestión permanecieron curiosamente aislados de la corriente principal del Análisis Matemático Contemporáneo. Las funciones generales defendidas por Euler plantearon problemas fundamentales que no pudieron resolverse dadas las direcciones sobre las que la

investigación en la época se encontraba. La oposición de D'Alembert puede haber parecido obstinada, pero también mostraba un claro sentido del espíritu del cálculo.

La propiedad distintiva de una función **"**discontinua**"**, de que su forma algebraica dependía del intervalo de números reales a los que pertenecía la variable independiente, socavó la base del Cálculo como sujeto explicable por principios analíticos formales. Para defender la introducción de estos objetos, Euler apeló al modelo físico, sin ninguna especificación clara de las condiciones matemáticas necesarias**:** su razonamiento aquí ha sido adecuadamente denominado un **"**retorno a la geometría**"**; su noción de función general nunca se incorporó a la teoría analítica presentada en sus libros de texto de mediados de siglo y, de hecho, estaba en desacuerdo con su dirección básica. *En el mejor de los casos, la concepción de Euler de una función general constituía una* **"***visión***"** *no realizada de las matemáticas del futuro*.

Un breve resumen que puede brindarse hasta este momento sobre la disputa sostenida por la solución encontrada por D'Alembert y posteriormente por Euler al *Problema de la Cuerda Vibrante*, se adentra específicamente sobre las *características* que debe poseer la función y, este se puede dar al compartir la postura de **Youschkevitch (1976)**, al respecto él menciona que la discrepancia de Euler con D'Alembert se debió en *cuanto a la naturaleza de las funciones admitidas en las condiciones iniciales* **(***y en consecuencia, en la solución del problema***)**. Euler al guiarse por las consideraciones físicas y una profunda intuición matemática, incluso al plantear el problema, él escribió en su *Opera Omnia, ser. II, vol. X*, lo siguiente**:**

> *… la première vibration dépend de notre bon plaisir, puisqu'on peut, avant de lâcher la corde, lui donner une figure quelconque; ce qui fait que le mouvement vibratoire de la même corde peut varier à l'infini, suivant qu'on donne à la corde telle ou telle figure au commencement du mouvement*.
>
> *… la primera vibración depende de nuestro buen gusto, ya que podemos, antes de soltar la cuerda, darle cualquier forma*; *lo que significa que el movimiento vibratorio de la misma cuerda puede variar infinitamente, dependiendo de si la cuerda se le da tal o cual figura al inicio del movimiento*. **[La traducción es nuestra]**

Al repetir esta afirmación en su propia investigación, que en su primera parte se parece bastante a la de D'Alembert, Euler considera**:**

> *courbe anguiforme, soit régulière, contenue dans une certaine équation, soit irrégulière ou mécanique,*

> *curva anguiforme, ya sea regular, contenida en una determinada ecuación, o irregular o mecánica,* **[La traducción es nuestra]**

es decir, sin que se impongan restricciones a la forma de la cuerda. En un caso particular, produce una solución correspondiente a la forma inicial *continua* representada por una serie trigonométrica

$$y = \alpha \sin\frac{\pi x}{\ell} + \beta \sin\frac{2\pi x}{\ell} + \gamma \sin\frac{3\pi x}{\ell} + \cdots$$

la cuerda está fija en los puntos $x = 0$ y $x = \ell$.

D'Alembert no estuvo de acuerdo con Euler y así comenzó la larga controversia sobre la *naturaleza de las funciones que se permitirían en las condiciones iniciales y en las integrales de las Ecuaciones Diferenciales Parciales*, que su aparición continuó en un número cada vez mayor en la teoría de la elasticidad, la hidrodinámica, la aerodinámica y la geometría diferencial.

Desde la opinión de **Kleiner (2012)** cabe resaltar entonces que uno de los avances conceptuales fundamentales en el Siglo XVIII y que aún hoy día está presente, fue logrado por Euler; al hacer del concepto de función la pieza central del Cálculo. Por lo tanto, el Cálculo no se trata de curvas, afirmó Euler, sino de funciones. La derivada y la integral no son meras abstracciones de las nociones de tangente o velocidad instantánea, por un lado, y de área o volumen, por el otro; son conceptos básicos del Cálculo, que deben investigarse por derecho propio. Euler no fue el primero en introducir la noción de función, pero sí en hacerla central al considerar el Cálculo como la rama de las Matemáticas que se ocupa de las funciones

Al seguir con el punto de vista del autor, quien comenta que pronto la polémica ganó una nueva dimensión con la entrada de un nuevo participante Daniel Bernoulli, cuya contribución fue publicada en 1753. D. Bernoulli quien era esencialmente físico que basó su argumento en la física del problema y los hechos conocidos sobre las vibraciones musicales. En general, se reconoció en ese momento que los sonidos musicales **(**y, en particular, las vibraciones de una cuerda «*musical*»**)** se componen de frecuencias fundamentales y sus tonos armónicos. Esta evidencia física, y un razonamiento matemático impreciso, convencieron a Bernoulli de que la solución al problema de las cuerdas vibrantes debe ser dada por**:**

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)\cos\left(\frac{n\pi a t}{\ell}\right)$$

Esto, por supuesto, significó que una función arbitraria $\boldsymbol{f(x)}$ puede ser representada en $(\mathbf{0}, \boldsymbol{\ell})$ por una serie de *senos*:

$$\boldsymbol{y(x,t) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)}$$

Bernoulli solo estaba interesado en resolver el problema físico sin dar una definición de función. Por *función arbitraria* se refería a una *forma arbitraria de la cuerda vibrante*. Tanto Euler como D'Alembert, así como otros matemáticos de la época, encontraron que la solución de Bernoulli es absurda. Al basarse en su «*artículo de fe*» del Siglo XVIII, argumentaron que dada la función $\boldsymbol{f(x)}$ y la serie sinusoidal en el intervalo $(\mathbf{0}, \boldsymbol{\ell})$ deben estar de acuerdo en todas partes. Pero esto implica la conclusión manifestante absurda de que una función "*arbitraria*" es impar y periódica. (Dado que la forma inicial de Bernoulli de la cuerda fue dada por una expresión analítica, Euler rechazó la solución la solución de Bernoulli como la solución más general). Bernoulli replicó que las soluciones de D'Alembert y Euler constituyen "hermosas matemáticas, pero ¿qué tiene que ver con las cuerdas vibrantes?"

Una vez más centrado en su pensamiento físico *justifican* los aportes de D. Bernoulli al *marco de referencia*, la *Teoría de la vibración*, en el *contexto de las vibraciones en una varilla*, conlleva a posicionarlo en el *Problema de la Cuerda Vibrante* al explotar sus ideas y dejarlas por sentadas al afirmar que todos los pequeños movimientos producidos por la vibración originan superposiciones de modos simples **Cannon y Dostrovsky (1981),** matemáticamente es posible visualizar esto en la solución que dio al respecto.

Por su parte **Youschkevitch (1976)** expresa del mismo modo como los autores antes mencionados que fue por su *principio de la superposición de modos*, que lo conllevó a sostener que tanto la forma inicial arbitraria de la cuerda y sus vibraciones subsecuentes podrían representarse mediante una serie infinita de términos que incluyen senos de múltiples ángulos. Según D. Bernoulli una elección apropiada de coeficientes hace que la serie:

$$\boldsymbol{y = \alpha \sin\frac{\pi x}{\ell} + \beta \sin\frac{2\pi x}{\ell} + \gamma \sin\frac{3\pi x}{\ell} + \cdots}$$

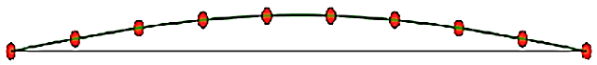
sea tan general como las series de potencias; sin embargo, el método para calcular los "coeficientes $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$, etc." Era desconocido para él.

Según **Stillwell (2010)** el enésimo término de la serie representa el enésimo modo, lo que conlleva a generalizar la fórmula de Taylor para el modo fundamental al construir la dependencia del tiempo, por lo que esta intuición es correcta y que la forma de onda triangular, entre otras es representable por una serie trigonométrica. El hecho de que la onda

triangular pudiera ser representada por una serie la convertía en una función auténtica según los estándares clásicos; de ahí que los matemáticos se dieran cuenta de que una representación en serie no garantiza la diferenciabilidad. Más tarde, también se puso en tela de juicio la continuidad y los problemas infinitamente sutiles relativos a la convergencia de las series trigonométricas lo que llevó a Cantor a desarrollar la Teoría de Conjuntos.

El autor menciona, que estas consecuencias notablemente de lo que al principio parecía ser una cuestión puramente física no fueron, por supuesto, los únicos frutos de las investigaciones de las cuerdas vibrantes, de lo que desencadena la Teoría del Calor, hasta la Teoría de Números.

Al seguir con el estudio *histórico-epistemológico* se posiciona el trabajo de Lagrange, y de acuerdo a lo que hace notar **Manacorda (1991)** al respecto, expresa que este joven matemático contribuyó a la discusión con un largo trabajo **[**que fue presentado a la Academia de Turín en 1759 en donde intenta explicar el problema de las cuerdas vibrantes**]** en el que, después de haber criticado fuertemente los métodos adoptados por D'Alembert, Euler y D. Bernoulli, afirmaba haber encontrado una teoría general y completamente rigurosa al movimiento de una cuerda. Él asume el modelo de la cuerda que ya había sido considerado por Johann Bernoulli**:**



con la *característica prominente* de que este tiene un *paso al límite* **(**$\boldsymbol{n \longrightarrow \infty}$**)**.

Lagrange obtuvo lo que él afirmaba ser las *ecuaciones generales de movimiento de una cuerda homogénea*, si bien las ecuaciones parecían ser correctas, el método fue criticado por Euler, Bernoulli y D'Alembert, porque algunos *puntos del paso al límite* parecían no estar suficientemente justificados, ya que, en ese momento, el concepto de límite no estaba bien establecido.

Por su parte, autores como **Wheeler y Crummett (1987)** expresan que Lagrange apoyó la solución de Euler determinada a partir de las condiciones iniciales y la admisión de las nuevas funciones con esquinas. Sin embargo, Lagrange se opuso al uso poco claro de Euler respecto a los infinitesimales. Descartó la solución de Bernoulli, al respaldar los argumentos de Euler contra la generalidad de las series trigonométricas. Él también cayó en la trampa de la periodicidad.

Lagrange revisó la derivación de la ecuación de onda y los argumentos de D'Alembert, Euler y D. Bernoulli, sin embargo, apoyó la solución de Euler determinada a partir de las condiciones iniciales y la admisión de funciones con esquinas. Lagrange se

opuso al uso poco claro de Euler respecto a los infinitesimales, descartó además la solución de D. Bernoulli, al respaldar los argumentos de Euler contra la generalidad de las series trigonométricas. Él también cayó en la trampa de la periodicidad.

El enfoque de Lagrange al problema de las cuerdas vibrantes fue evitar por completo la ecuación de onda [ya conocida], él, por su parte construyó la cuerda a partir de una colección de n masas puntuales e igualmente espaciadas conectada por un cable de luz. Esto produjo un conjunto de n ecuaciones de la forma:

$$y(x,t) = \frac{2}{\mathcal{L}}\int_0^{\mathcal{L}} dX\, y(X)\left[\sin\left(\frac{\pi X}{\mathcal{L}}\right)\sin\left(\frac{\pi X}{\mathcal{L}}\right)\cos\left(\frac{\pi ct}{\mathcal{L}}\right) + \sin\left(\frac{2\pi X}{\mathcal{L}}\right)\sin\left(\frac{2\pi X}{\mathcal{L}}\right)\cos\left(\frac{2\pi ct}{\mathcal{L}}\right) + \cdots\right]$$
$$+ \frac{2}{\pi c}\int_0^{\mathcal{L}} dX\, v(X)\left[\sin\left(\frac{\pi X}{\mathcal{L}}\right)\sin\left(\frac{\pi X}{\mathcal{L}}\right)\cos\left(\frac{\pi ct}{\mathcal{L}}\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi X}{\mathcal{L}}\right)\sin\left(\frac{2\pi X}{\mathcal{L}}\right)\cos\left(\frac{2\pi ct}{\mathcal{L}}\right) + \cdots\right]$$

donde $y(x)$ y $v(x)$ representan la posición inicial y la velocidad de la cuerda. Este resultado acercó mucho a Lagrange a la serie de Fourier. Si el desplazamiento inicial $y(x)$ se sustituye en la solución de Lagrange para $t = 0$, y el orden de la integral y la suma son invertidas, se tiene que:

$$y(x) = \frac{2}{\mathcal{L}}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^{\mathcal{L}} y(x)\sin\left(\frac{n\pi X}{\mathcal{L}}\right)dX\right]\sin\left(\frac{n\pi X}{\mathcal{L}}\right)$$

que es una serie de Fourier impar.

El autor al tomar la misma opinión de Grattan-Guiness el cual sugiere que hay al menos tres razones por las que Lagrange no descubrió la serie. Primero porque no buscaba un teorema del Análisis Matemático. Le preocupaba la cuerda vibrante como un problema relacionado con la naturaleza de la propagación del sonido. En segundo lugar, Lagrange buscaba una solución integral y no un resultado en serie infinita. Esto también es una consecuencia de su visión del movimiento de la cuerda en el contexto de una teoría del sonido.

Finalmente, la representación de la serie habría sido la solución de Bernoulli, con coeficientes dados por las integrales. Y, por supuesto, Lagrange no sintió que la serie trigonométrica fuera lo suficientemente general, aunque varios matemáticos se acercaron mucho a la serie de Fourier, *empero*, todos aparentemente la vieron como un mecanismo de interpolación muy preciso.

Euler sintió que la solución de Lagrange apoyaba sus propios argumentos a favor de la generalidad de las condiciones iniciales que acordó Lagrange, pero consideró que sus métodos eran preferibles ya que evitaban sus argumentos infinitesimales en cierta manera. (Aunque Lagrange claramente no pudo escapar del uso de los infinitesimales). Con la

aparición del artículo de Lagrange, la intensidad del debate declinó significativamente. Todavía quedaban por aclarar la *actividad matemática* para lograr un progreso significativo. Se derivaron Ecuaciones Diferenciales Parciales, las interpretaciones geométricas de sus soluciones comenzaron a evolucionar y se refinó la *Teoría de funciones*. Finalmente, Jean-Baptiste Joseph Fourier fue llevado a su famosa serie mientras estudiaba la ecuación de difusión del calor. Lagrange fue miembro del único debate, objetó los resultados de Fourier, al cuestionar la convergencia de la serie. Fourier finalmente pudo demostrar la convergencia de al menos una de sus soluciones. Así el rigor matemático posterior requerido para determinar las condiciones en las que convergía la serie general tuvo una gran influencia en las Matemáticas del Siglo XIX.

La manera en que esta *controversia*, causó polémica académica entre los actores que se vieron más influenciados al abonar en el *tratamiento matemático* del *Problema de la Cuerda Vibrante*, respectivamente con su *actividad matemática*, poseyó una serie de evoluciones epistemológicas respecto al momento *sociocultural* dependiente del contexto histórico en el que emergió, es decir, en el que estaba *situado*; evidentemente las Matemáticas del Siglo XVIII revolucionarían no solo la epistemología de su quehacer, sino que abonaría en el interés por el entendimiento de los *fenómenos naturales* dando un paso a la *Física-Matemática* que ya se tornaba fértil su quehacer para ese entonces, como por ejemplo, el *marco de referencia*, que se ha descrito a lo largo de esta investigación, la *Teoría de la Vibración*, conllevó a estudiar las características de la dinámica de una cuerda que es puesta en vibración.

Los objetos matemáticos identificados de este problema son evidentemente la *función solución* expresada por una *suma de funciones* con características peculiares, esta, se ha denotado como *una proximidad a la solución general*, encontrada por D'Alembert, Euler, D. Bernoulli y Lagrange, quienes aparentemente se *acercaron* a la solución general, pero que, por las limitaciones conceptuales matemáticas de la época, como el *concepto de función*, trastocó limitaciones en las justificaciones dadas por estos actores, no antes, se puede decir, que sus argumentaciones estuvieron basadas por sus conocimientos en la *Teoría Musical*, práctica que en esencia permeó el conjunto de inquietudes un tanto reñidas por poder dar una respuesta al *Problema de la Cuerda Vibrante*.

Esta investigación, ha puesto toda la atención en el *Problema de la Cuerda Vibrante*, pero no solo en las condiciones ya conocidas por las que este, está sustentado como por ejemplo, por la *física que le rodea*, sino por los razonamientos emitidos por D'Alembert, al ser el primer actor que brinda una matematización a tal problema, así como una *proximidad a la solución*, de esto, se rescata el objeto matemático que lo conllevó a propiciar una serie de argumentos basados en las nociones físicas estrechamente vinculadas a esta controversia.

El análisis *histórico-epistemológico* que atiende esta investigación se ha acotado hasta el aporte matemático de Joseph-Louis Lagrange respecto al *Problema de la Cuerda Vibrante*, a manera de resaltar y poder evidenciar una evolución epistemológica mediada por el Análisis Matemático de la época que llevó a reivindicar la trayectoria que el Cálculo Algebraico había seguido hasta ese momento, aunado al surgimiento cada vez más evidente de los problemas de la *Física-Matemática* y su relación tan cercana a las Ecuaciones Diferenciales Parciales, rama de las Matemáticas que tomó un gran ímpetu en la *actividad matemática* de los matemáticos del Siglo XVIII y los posteriores.

A manera de recordar dentro de este mismo análisis se retoma el *objetivo general* planteado en esta investigación**:**

> **«***Caracterizar* al **MSV** a partir de un análisis *histórico-epistemológico* al situar como referencia **(**espacio-temporal**)** el *Problema de la Cuerda Vibrante* surgido aproximadamente a finales del Siglo XVII y principios del Siglo XVIII.**»**

Seguidamente, de tener pleno conocimiento de que la investigación está centrada en el *objeto matemático*, conocido por el **MSV** y aunado a que todo este análisis *histórico-epistemológico* abrió el panorama no solo por desmembrar las epistemologías intrínsecas que están dentro del conjunto de las *rutas históricas* identificadas, sino porque se delimita a la *actividad matemática* de un solo personaje que es identificado en ser el primero que brinda un modelo matemático al *Problema de la Cuerda Vibrante* y una *solución* que derivó en una gran controversia.

Al recobrar a Jean le Rond D'Alembert, quien da por primera vez una solución al *Problema de la Cuerda Vibrante*, que es adjetivada en esta investigación como una *proximidad a la solución general*, por las características que deben seguir las *funciones* que conforman la solución, la cual está expresada por**:**

$$\boldsymbol{y(x,t) = \frac{1}{2}\Psi(t+x) - \frac{1}{2}\Psi(t-x)}$$

si se reescribe en la notación de *coordenadas curvilíneas* **(***longitud de arco***)**, como sostiene D'Alembert en su *primera memoria*, **«***Recherches sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibration***»** es posible despreciar el $\frac{1}{2}$ en cada sumando de las funciones; obteniéndose**:**

$$\boldsymbol{y(s,t) = \Psi(t+s) - \Psi(t-s)}$$

donde $\boldsymbol{\Psi}$ es una función *impar* y *periódica* con *período* $\boldsymbol{2a}$. Como menciona **Demidov (1982)** en la *segunda memoria* de D'Alembert, intitulada por **"***Suite des recherches*

sur la courbe que forme une corde tenduë, mise en vibration”, se encuentran **los orígenes del método de separación de variables**.

D’Alembert resuelve el problema de la cuerda vibrante con sus extremos fijos cuando su forma inicial es una línea recta o una sinusoide, lo que conlleva a que pueda reducir el problema a dos Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Al integrarlos escribe la solución en la forma**:**

$$y(s,t) = \Psi(t+s) - \Psi(t-s)$$

de la que observa además que la solución $y(s,t)$ también se puede escribir en este caso en forma de producto $S(s)\cdot T(t)$, es decir, una función de la variable única s *por* una función en la variable única t. ***Algún razonamiento especial le da la certeza de que tal representación*** $y(s,t) = S(s)\cdot T(t)$ ***sólo es posible si la solución tiene la forma*** $A\,\mathbf{sin}\,Ms\cdot\mathbf{sin}\,Mt$ ***o como*** $A\,\mathbf{sin}\,Ms\cdot\mathbf{cos}\,Mt$

Para apoyar mejor su *razonamiento*, D’Alembert escribió, en sus memorias de 1750 pero publicadas dos años más tarde, intitulada como “*Addition au memoire sur la courbe que forme une corde tenduë, mise en vibration*”, la solución del problema $y(s,t)$ de las vibraciones de la cuerda sujeta en sus extremos, es decir, fijados, $(y|_{s=0} = y|_{s=\ell} = 0)$ son de la forma**:**

$$\Psi(t+s) - \Psi(t-s) = S(s)\cdot T(t)$$

al diferenciar esta relación dos veces con respecto a s**:**

$$\Psi'(t+s) - \Psi'(t-s) = \frac{dS(s)}{ds}\cdot T(t)$$
$$\Psi''(t+s) - \Psi''(t-s) = \frac{dS^2(s)}{ds^2}\cdot T(t)$$

y en relación a t**:**

$$\Psi'(t+s) - \Psi'(t-s) = S(s)\cdot\frac{dT(t)}{dt}$$
$$\Psi''(t+s) - \Psi''(t-s) = S(s)\cdot\frac{dT^2(t)}{dt^2}$$

y al equiparar miembro a miembro la igualdad obtenida, se obtiene**:**

$$\frac{dS^2(s)}{ds^2}\cdot T(t) = S(s)\cdot\frac{dT^2(t)}{dt^2}$$

o, al separar las variables**:**

$$\frac{1}{\mathcal{S}(s)}\cdot\frac{d\mathcal{S}^2(s)}{ds^2}=\frac{1}{\mathcal{T}(t)}\cdot\frac{d\mathcal{T}^2(t)}{dt^2}$$

luego, obtiene dos ecuaciones por determinar $\mathcal{S}(s)$ y $\mathcal{T}(t)$**:**

$$\frac{1}{\mathcal{S}(s)}\cdot\frac{d\mathcal{S}^2(s)}{ds^2}=\mathcal{A}$$
$$\frac{1}{\mathcal{T}(t)}\cdot\frac{d\mathcal{T}^2(t)}{dt^2}=\mathcal{A}$$

de ambas ecuaciones resulta que**:**

$$\frac{d\mathcal{S}^2(s)}{ds^2}-\mathcal{S}(s)\mathcal{A}=0$$
$$\frac{d\mathcal{T}^2(t)}{dt^2}-\mathcal{T}(t)\mathcal{A}=0$$

donde $\mathcal{A}$ es una *constante arbitraria*, entonces se escriben sus soluciones de la forma**:**

$$\mathcal{S}(s)=\mathcal{C}_1e^{s\sqrt{\mathcal{A}}}+\mathcal{C}_2e^{-s\sqrt{\mathcal{A}}}$$
$$\mathcal{T}(t)=\mathcal{C}_3e^{t\sqrt{\mathcal{A}}}+\mathcal{C}_4e^{-t\sqrt{\mathcal{A}}}$$

y, al tener en cuenta las condiciones dadas, se obtiene $\mathcal{C}_1=-\mathcal{C}_2$ **(**tan pronto como $y|_{s=0}=0$**)** y, al asumir la solución no trivial, la negatividad de $\mathcal{A}$ **(**tan pronto como $y|_{s=\ell}=0$**)**.

Al asumir la solución real y por lo tanto al imponer ciertas restricciones a los coeficientes $\mathcal{C}_i$, D'Alembert concluye que la función desconocida $\mathcal{S}(s)$ será de la forma $k\sin\sqrt{-\mathcal{A}}\,s$, y la función $\mathcal{T}(t)$, la forma $\mathcal{R}\sin\sqrt{-\mathcal{A}}\,t$ o $\mathcal{R}\cos\sqrt{-\mathcal{A}}\,t$, donde k y $\mathcal{R}$ números reales, así queda lo que se tenía que demostrar.

El razonamiento esbozado por D'Alembert en **"***Addition au memoire sur la courbe que forme une corde* tenduë, *mise en vibration***"** es el *primer paso hacia la creación del método de separación de variables*. La característica de este razonamiento consiste en su método de obtención de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias basadas en la representación de la solución buscada en la forma**:**

$$\Psi(t+s)-\Psi(t-s)$$

un método diferente al que se utiliza hoy en día, en el que se emplea la sustitución $y(s,t)=\mathcal{S}(s)\cdot\mathcal{T}(t)$ en la *ecuación diferencial original*, seguida de la separación de las

variables. Además, la propia ecuación original, en forma de $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial s^2}$, no existía en D'Alembert. Su papel fue desempeñado por el sistema de expresiones diferenciales del tipo**:**

$$\begin{cases} dy = \mathcal{P}dt + Qds \\ dv = \mathcal{P}ds + Qdt \end{cases}$$

obsérvese también la ausencia, en su razonamiento, de otro componente importante del actual método de separación de variables, que es el problema de los valores propios. D'Alembert se acerca mucho a ello al obtener la negatividad de $\mathcal{A}$ a partir de la hipótesis de la no trivialidad de la solución y la condición $y|_{s=\ell} = \mathbf{0}$, pero no la plantea. Además, es cierto que, para los objetivos que se ha fijado, la posición de tal problema resulta inútil en este caso.

Al continuar con la génesis epistemológica que resalta el autor centrado en el *objeto matemático* que es de interés en esta investigación, el **MSV**, él menciona, que en la segunda edición de *Traité de dynamique* de 1758 en el *artículo 133*, D'Alembert busca la solución a la ecuación**:**

$$\frac{dp}{dt} = q - (\ell - s)\frac{dq}{ds}$$
$$p = \frac{dy}{dt}\ y\ q = \frac{dy}{ds}$$

como la igualdad $y = \mathcal{T}(t) \cdot \mathcal{S}(s)$ la sustituyó *directamente* en la Ecuación Diferencial. Al separar las variables se llega a las Ecuaciones Diferenciales para la determinación de $\mathcal{T}(t)\ \mathcal{S}(s)$ y de la siguiente forma**:**

$$-\frac{d^2\mathcal{T}}{dt^2} \cdot \frac{1}{\mathcal{T}} = \frac{1}{n}$$
$$-\frac{\mathcal{S}}{n} = \frac{d\mathcal{S}}{ds} - (\ell - s)\frac{d^2\mathcal{S}}{ds^2}$$

al integrar la primera de las ecuaciones obtenidas, D'Alembert obtiene**:**

$$\mathcal{T} = \mathcal{A}\cos\frac{t}{\sqrt{n}}$$

La solución así obtenida, $y = \mathcal{T}\mathcal{S}$, para todo n, él escribe **(**puede encontrarse en el *artículo* 135**):**

> **«***… ne fait trouver les vibrations que dans le cas où la corde a une figure telle que tous les points arrivent en même temps à la situation verticale***»** **(***lorsque* $\mathcal{T}$ *s'annule***). «***Mais voice une méthode ― poursuit-il quelques pages plus loin* [*art. 136*] *― qui peut réussir dans plusieurs cas. Soit*

$y = TS + T'S' + T''S''$, *etc., et soit* $\frac{-ddT}{Tdt^2} = n$, $\frac{-ddT'}{T'dt^2} = m$, $\frac{-ddT''}{T''dt^2} = r$, *etc.*, n , m , r *étant des quantités différentes, on aura* $y = AS\cos t\sqrt{n} + BS'\cos t\sqrt{m} + CS''\cos t\sqrt{r}$, *etc.*»

«*… Mais il faudra pour cela que l'équation primitive de la corde lorsque* $t = 0$, *soit*:

$$y = TS + T'S' + T''S''$$

etc. Ainsi le problème ne peut être résolu par cette méthode que dans certains cas particuliers.»

«*… Solo provoca las vibraciones si la cuerda tiene un patrón tal que todos los puntos llegan a la situación vertical al mismo tiempo*» (*cuando* T *se cancela*). «*Pero aquí hay un método que continúa unas páginas más tarde* [*art. 136*], *que puede tener éxito en muchos casos. Ya sea* $y = TS + T'S' + T''S''$, *etc., y ya sea que* $\frac{-ddT}{Tdt^2} = n$, $\frac{-ddT'}{T'dt^2} = m$, $\frac{-ddT''}{T''dt^2} = r$, *etc.,* n , m , r *sean cantidades diferentes, tendremos a* $y = AS\cos t\sqrt{n} + BS'\cos t\sqrt{m} + CS''\cos t\sqrt{r}$, *etc.*»

«*… Pero esto requerirá que la ecuación primitiva de la cuerda cuando* $t = 0$, *sea*:

$$y = TS + T'S' + T''S''$$

y así sucesivamente. Así pues, el problema sólo puede resolverse por este método en ciertos casos especiales.» **[La traducción es nuestra]**

De lo anterior, el autor, comenta que de esta manera D'Alembert incluyó básicamente en la Teoría de las Ecuaciones Diferenciales Parciales, la solución del problema de la cuerda vibrante, dada mucho antes por D. Bernoulli (*Hist. Ac. Sc. Berlín*, 1753, *Vol*. 9, Berlín, 1755) en forma de una *serie trigonométrica infinita*. D. Bernoulli propuso dicha solución basándose exclusivamente en consideraciones físicas (no relacionadas con la ecuación diferencial correspondiente).

Dado que el efecto de poder suponer una solución de esa forma, D'Alembert trastoca elementos matemáticos que son derivados de su *tratamiento matemático* dentro de su *actividad matemática,* lo que lo conlleva a *examinar* de cerca el problema de los valores propios, cuya idea, sin embargo, no le afectó porque, como la mayoría de los matemáticos de su tiempo, no admite la posibilidad de representar una función arbitraria al utilizar una serie

trigonométrica, por esta razón, considera que la solución que obtuvo de la Ecuación Diferencial es bastante «*especial*».

En las memorias *Recherches sur les vibrations des cordes sonores* contenidas en el primer volumen de sus *Opuscules* de 1761, D'Alembert presenta, entre otras cosas, la ecuación de la cuerda vibrante de espesor variable de la forma**:**

$$\frac{1}{S(s)} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

(lo expresión anterior está dada en la forma moderna, la que utilizó D'Alembert en 1743 fue**:** $\frac{1}{S(s)} \cdot \frac{d^2 y}{ds^2} = \frac{d^2 y}{dt^2}$**)** al partir de la analogía con el caso $S(s) = constante$, busca la solución en la forma**:**

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} B_i e^{A_i \xi(s) + D_i t}$$

donde A_i, B_i, D_i son constantes, para las condiciones $y|_{s=0} = y|_{s=\ell} = 0$ **(**no se hace ninguna hipótesis sobre la forma de la cuerda en el momento inicial**)**. Para determinar las constantes A_i y D_i, así como la función $\xi(s)$, D'Alembert escribe ecuaciones incorrectas que son la base de su razonamiento posterior.

En una carta a Lagrange publicada en las *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin* de 1768 **(**publicada en 1770**)** *Extrait de différentes Lettres de Mr. D'Alembert de Lagrange, pp*. 235-254; D'Alembert presenta, al referirse a las memorias *Recherches sur les vibrations des cordes sonores*, la variante corregida de la solución que se ve en forma de una serie en términos aditivos de la forma $A_n \zeta(s) \cos \frac{n\pi t}{T}$. Para determinar $\zeta(s)$ se obtiene la ecuación**:**

$$\frac{d^2 \zeta(s)}{ds^2} + S(s)\zeta_n(s)\frac{n^2\pi^2}{T^2} = 0$$

cuya solución se busca en las condiciones $\zeta_n(0) = \zeta_n(\ell) = 0$. **«**Es necesario asegurar que aún es posible cumplir esta doble condición, el valor de X **(**la notación usada $S(s)$**)** que se le ha dado; este es un punto que no creo que nadie haya considerado en general.**» (***Extrait de différentes Lettres de Mr. D'Alembert à Mr. De la Grange, p*. 242**)**.

En este fragmento, D'Alembert plantea la cuestión de la existencia de la solución de una Ecuación Diferencial Ordinaria en determinadas condiciones de contorno y aborda, de nuevo, la cuestión de la *búsqueda de valores propios* del problema que antes había considerado.

En otro pasaje de su correspondencia con Joseph-Louis Lagrange publicado en el mismo volumen intitulado como *Suite de l'extrait de différentes Lettres de Mr. D'Alembert à Mr. De la Grange* que el anterior, D'Alembert resuelve la ecuación por el *método de separación de variables* la ecuación**:**

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \mathcal{A}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \mathcal{B}\frac{\partial z}{\partial t}$$

donde $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son constantes. Al poner $z = X(x) \cdot T(t)$, escribe las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias para la determinación de $X(x)$ y $T(t)$ sin plantear en este caso ningún problema en los límites.

Así en la obra de D'Alembert antes citada *Addition au memoire sur la courbe que forme une corde tenduë, mise en vibration* como en *Recherches sur les vibrations des cordes sonores, Extrait de différentes Lettres de Mr. D'Alembert à Mr. De la Grange* y *Suite de l'extrait de différentes Lettres de Mr. D'Alembert à Mr. De la Grange*, **se encuentra de una forma u otra los componentes principales del método de separación de variables, método al que vuelve de nuevo en su memoria *Recherches de calcul intégral* de 1768 y cuyo desarrollo posterior se debe a J. Fourier, S. Poisson, M. V. Ostrogradsky, etc.**

Para D'Alembert, las soluciones obtenidas en forma de series infinitas **(**incluidas las derivadas de funciones trigonométricas**)** no eran generales. Esto lo enfatizó constantemente. Al haber presentado la solución de la ecuación**:**

$$\frac{1}{S(s)} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

en forma de esta serie**:**

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{B}_i e^{\mathcal{A}_i \xi(s) + \mathcal{D}_i t}$$

escribe que «no es la única integral posible de la ecuación propuesta, y que todavía hay otras soluciones, aunque quizá sea muy difícil encontrar una fórmula general que contenga todas», esto lo explicita en *Recherches sur les vibrations des cordes sonores* **(***Opuscules mathématiques, p. 8***)**.

Al analizar en ese mismo trabajo la solución general de la ecuación de la cuerda vibrante**:**

$$y(s, t) = \Psi(s + t) + \Phi(s - t)$$

D'Alembert advierte que la expresión**:**

$$y(s,t) = \Psi(s+t) + \Phi(s-t) + At^2 + As^2 + Ct + Ds + E$$

de manera más general, también satisface la ecuación, entonces, ¿Es posible luego admitir que la expresión $\Psi(s+t) + \Phi(s-t)$ es una solución general? A esta pregunta, D'Alembert responde afirmativamente**:**

> «*Mais on peut remarquer que* $At^2 + As^2 = \frac{A}{2}(t+s)^2 + \frac{A}{2}(t-s)^2$ **(***nos notatios — S. D.***)**; *que* $Ct + Ds = F(t+s) + G(t-s)$, *en supposant* $F + G = C$ *et* $F - G = D$ *ou* $F = \frac{C+D}{2}$ *et* $F = \frac{C-D}{2}$; *à l'egard de la constante* E, *elle est censée ebtrer dans l'une des deux quantités* $\Psi(s+t)$ *ou* $\Phi(s-t)$; *ainsi la valeur de* y *se réduit dans tous les cas à* $\Psi(s+t) + \Phi(s-t)$ **»** **[***Recherches sur les vibrations des cordes sonores*; *pp. 5-6***]**

> «*Pero podemos notar que* $At^2 + As^2 = \frac{A}{2}(t+s)^2 + \frac{A}{2}(t-s)^2$ **(***nuestras notaciones***)**; *que* $Ct + Ds = F(t+s) + G(t-s)$, *suponiendo* $F + G = C$ *y* $F - G = D$ *o* $F = \frac{C+D}{2}$ *et* $F = \frac{C-D}{2}$; *con respecto a la constante* E, *se supone que está en una de las dos cantidades* $\Psi(s+t)$ *o* $\Phi(s-t)$; *por lo tanto el valor de* y *se reduce en cualquier caso a* $\Psi(s+t) + \Phi(s-t)$ **»** **[***Recherches sur les vibrations des cordes sonores*; *pp. 5-6***]** **[La traducción es nuestra]**

Al mantener la postura del autor, quien enfatiza que se puede decir que los fragmentos citados según las notas dispersas en sus diversas obras **[***memorias***]** D'Alembert entiende por su solución general de una Ecuación Diferencial Parcial como una expresión analítica que, aunque es la solución, tiene el *grado de generalidad* **(**que depende de las funciones arbitrarias o constantes en las soluciones generales obtenidas por D'Alembert**)** donde admite que todas las posibles soluciones están contenidas en dicha expresión a lo que solo basta con elegir adecuadamente las cantidades arbitrarias que entran en ellas.

No hay que olvidar que en 1768 apareció un nuevo trabajo de D'Alembert sobre la integración de Ecuaciones Diferenciales Parciales, las *Recherches de calcul intégral*. Al haber hecho un balance de más de veinte años de investigación en el campo del análisis que había descubierto, D'Alembert desarrolló métodos que había desarrollado anteriormente, como el *método de los multiplicadores* o el de *separación de variables*, así como una serie de nuevos métodos. Como señala D'Alembert, en las *Recherches de calcul intégral*, los resultados presentados en este escrito se obtuvieron en 1762, pero el retrasó significó que

algunos de sus resultados relativos a la integración de las ecuaciones de primer orden se obtuvieron independientemente y ya publicado por Leonhard Euler en 1764.

Los años 1740-1750 estuvieron marcados por el reinado ilimitado de D'Alembert y Euler en el campo de la Teoría de las Ecuaciones Diferenciales Parciales. Este estado de cosas fue interrumpido por la llegada del joven Lagrange a principios de los años 1760, quien en 1762 publicó una disertación intitulada *Nouvelles recherches sur la nature et la propagation du son* en la *Miscellanea Taurinensia, tomo II*, publicado en *Turín* y comprende de las páginas 11-172; cuyos resultados, según el propio D'Alembert, influyeron en la elaboración de los métodos expuestos en los últimos artículos, especialmente en el *artículo 31* de su memoria *Recherches de calcul intégral*.

Una de las reflexiones por hacer en cuanto a la *actividad matemática* que rodea al **MSV**, es que como se ha visto hasta el momento, el *Problema de la Cuerda Vibrante* está inmerso en el *marco de referencia*, la *Teoría de la Vibración*, lo que conlleva a rescatar lo que hasta el momento se ha evidenciado, el corte *histórico-epistemológico* bajo el lente teórico de la ***Socioepistemología***, la cual encamina a una vía para poder escudriñar la génesis matemática vinculada estrechamente a elementos socioculturales que propiciaron una detonación más significativa en el Siglo XVIII, tales elementos, en la razón de ser de esta teoría en la Matemática Educativa, son los responsables de la construcción de conocimiento matemático vía entorno a la actividad humana.

El pasaje de esta famosa controversia suscitada en el Siglo XVIII, centrada en la *actividad matemática* de la época, evidencia el fortísimo auge de nuevos tópicos de las Matemáticas como el Análisis Matemático, así como el inminente nacimiento de las Ecuaciones Diferenciales Parciales, que ya parecían estar presentes en los trabajos de Newton y por ende una manera de tratarlas matemáticamente vía el Cálculo Algebraico no fue la excpeción para adentrar en este nuevo terreno.

El *tratamiento matemático* del *Problema de la Cuerda Vibrante* se percibe desde diferentes directrices hacia donde recae la *actividad matemática*, los principales involucrados como Leonhard Euler, Jean le Rond D'Alembert, Daniel Bernoulli y Joseph-Louis Lagrange, bajo su postura cada uno abren una ventana epistemológica hacia el entender uno de los conceptos más importantes y un tanto aturdidos en concepción matemática desde hace ya un par de siglos atrás al día de hoy, al ser este el de *función*, mismo que dentro de los aportes de estos principales exponentes envueltos en el problema, propiciaron una evolución epistemológica en su entendimiento que se mantenía arraigado por el Cálculo Algebraico, permeado por una geometrización en sus aportes.

Se ha analizado el *Problema de la Cuerda Vibrante* desde el haber identificado el *primer modelo matemático* que explicitara su matematización de la dinámica de una cuerda que es tensada en sus dos extremos fijados y que además es puesta en vibración, parte de la génesis histórica como elemento metodológico desde la ***Socioepistemología*** tendió a esclarecer pasajes de la historia que reivindican el grado de esencia y de consolidación del *marco de referencia*, desde una *práctica* identificada por su actividad, la *Teoría musical*, reunido el conjunto de elementos que se explicaron ya a lo largo de esta investigación, se señala una *búsqueda de una base de significados* por medio del análisis histórico-epistemológico, lo que hasta el momento ha permitido explicar contextos de la propia *actividad matemática* que envuelve a este problema, y por consiguiente, es necesario *explicar* por medio de la *unidad de análisis*, el exploramiento del **"***detrás de escena***"** palabras metafóricamente usadas como la manera de asumir la localización de *acciones* y *actividades* en la obra matemática de la cuerda vibrante.

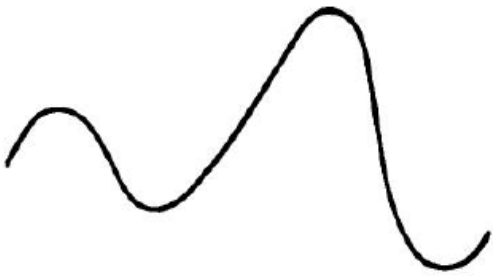
Este análisis dialéctico que se presenta a continuación deja por sentado que se ha elegido una de las tres memorias de Jean Le Rond D'Alembert**:** *Addition au memoire sur la courbe que forme une corde tenduë, mise en vibration*; donde el *objeto* matemático, de estudio, el **MSV** surge como una necesidad epistemológica que el autor no contemplaba en un inicio de manera *directa*, es decir, que sus razonamientos evocados se veían un tanto *limitados*, por considerar a la *continuidad de funciones en el sentido de Euler* como *invariabilidad, inmutabilidad de la ley de la ecuación que determina la función sobre todo el dominio de los valores de la variable*.

Mientras que la otra forma de organización matemática, referida a la epistemología del concepto de función, tocaba paradigmas un tanto *sin sabores* ya que, para ese entonces la *discontinuidad* era ya entendida en un sentido bajo el razonamiento de D'Alembert, Euler que significaba un *cambio de la ley analítica*, mediante la posibilidad de *existencia de* leyes diferentes sobre dos o más intervalos sobre el dominio en el que está definida la ley.

La visión de Euler, en cambio, entonces, **¿**cómo se tornaba ante la *discontinuidad***?**, **Farfán (2012)** afirma que ellas *no poseen una representación simple* y, por esto, una curva de tal clase *no corresponde a una función*, **[…]** por lo que se estableció un círculo vicioso**:** la falta de una representación adecuada impide el manejo de las curvas *discontinuas* en el análisis, lo que restringe el concepto de función; recíprocamente, es el limitado concepto de función que impide dar una representación de curvas *discontinuas* que emergen del problema físico planteado, la *cuerda vibrante*.

A manera de aterrizar del *concepto de función* la *continuidad* y la *discontinuidad*, **Grattan-Guinness (1970)** menciona que la terminología de Euler es diferente a la nuestra **(**misma que tuvo sus orígenes en el Siglo XIX**)**, y la diferencia es importante. El término

continuo de Euler es sinónimo a nuestro «*diferenciable*» y se refiere a la vieja teoría de funciones, pero su *discontinuo* corresponde al *continuo actual e incluye las nuevas funciones, que son consideradas como compuestas de expresiones algebraicas* **(pp. 6-7). [**Observe lo siguiente**:]**

	Sentido Euleriano**:** Continuo Sentido Moderno**:** Diferenciable
	Sentido Euleriano**:** Discontinuo **[α]** Sentido Moderno**:** Continuo
	Sentido Moderno**:** Discontinuo

Como señala **Grattan-Guinness (1970)** y **Youschkevitch (1976)** para **[α]**, Euler explicó que están compuestas por partes continuas, al ser precisamente por eso llamadas *mixtas* o *irregulares*; también las llegó a llamar *curvas mecánicas*. En Geometría, según Euler se estudiaban principalmente curvas *continuas*, es decir, *analíticas*. Las funciones *discontinuas* o *mixtas* y las curvas del *Volumen 2* del *Introductio in analysin infinitorum* corresponden a las *funciones analíticas por partes o definidas por trozo* que hoy día se conocen **(p. 64),** pero, dicho lo anterior en **Farfán (2012)** se puede encontrar el manifiesto de una imprecisión a estas interpretaciones históricas hechas por Grattan-Guiness **(**1970**)**.

De esta manera se ha llegado hasta la manera en que el *objeto matemático*, que atiende esta investigación, el **MSV**, involucra a otros objetos matemáticos asociados a él,

implícitamente, entonces, como se ha esclarecido, párrafos atrás de esta investigación, el método empleado por D'Alembert, conocido en un principio como el *método de los multiplicadores,* y que a partir de una evolución epistemológica vinculada a la *actividad matemática* fue posteriormente acuñado como el *método de separación de variables,* está presente desde el momento en el que D'Alembert se percató sobre *qué tipos* de funciones admite su solución general, con las características de que $\boldsymbol{\Psi}$ es *impar* y *periódica con periodo* $\boldsymbol{2a}$, y sobre las características respecto al fenómeno debía de involucrar en su análisis.

Para proseguir con dicho análisis, partimos desde lo que plantea **Truesdell (1960)** al recordar que Taylor sólo consideró soluciones *sinusoidales*, entonces por su propio *tratamiento matemático* al *Problema de la Cuerda Vibrante*, D'Alembert obtiene que $\boldsymbol{\Psi = k\cos\frac{\pi x}{\ell}}$ y él mismo dice que se cumple un resultado similar cuando la *velocidad inicial es cero*. En estos dos casos $\boldsymbol{y = f(x)g(t)}$, y D'Alembert que *son los únicos casos*. Para entonces

$$\frac{y(x,t_1)}{y(x,t_2)} = f(t_1,t_2)$$

"por el método ordinario**"** se encuentra que $\boldsymbol{f(x) = \sin \mathcal{M}x}$, **[**pero si bien la solución más general de este tipo es $\boldsymbol{y = k\sin(\mathcal{M}x + \mathcal{N})\sin(\mathcal{M}ct + \mathcal{P})}$, las observaciones de D'Alembert no constituyen una prueba**]**. **[…]** D'Alembert llama a $\boldsymbol{\Psi}$ **«***curva generadora***»** de la *proximidad a la solución general*, una vez que incluyó las *características físicas del problema*.

Del carácter de las *funciones solución*, en este caso el de la *proximidad a la solución general*, D'Alembert, consideró como sus demás contemporáneos que el análisis infinitesimal se aplicaba únicamente a funciones definidas en determinados intervalos por una única expresión analítica llamadas continuas en el sentido Euleriano. Según los matemáticos de la época, la clase de funciones continuas coincidía con la de las funciones analíticas, *excepto en puntos singulares aislados en las proximidades de las cuales las funciones se desarrollan en toda una serie generalizada que contiene magnitudes fraccionarias y negativas en la variable*. D'Alembert, también, supuso que las funciones arbitrarias que figuran en su *proximidad a la solución general*, deben ser **continuas**. De modo que la función $\boldsymbol{\Psi}$ define la **«***forma primitiva* **(***inicial***)»** de la cuerda vibrante, con las características de ser**:** *impar* y *periódica con periodo* $\boldsymbol{2a}$.

Antes de incursionar con el *análisis dialéctico* centrado en el *objeto matemático*, el **MSV**, es importante fijar posturas epistemológicas importantes que rodean al método, y que además es necesario para comprender toda la puesta en escena del *Problema de la Cuerda Vibrante*, y por ende la *lupa* que se pone a la *proximidad a la solución general* en relación

con la aplicación del método en esta, a continuación, se detallan tales aspectos, de acuerdo con **Demidov (1982)**:

[1] La Ecuación Diferencial asociada al problema en el Siglo XVIII está dada por la expresión $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{ds^2}$, o bien, como se conoce actualmente con la notación ∂, $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial s^2}$, en donde su *proximidad a la solución general* está dada por la *función*: $y(s,t) = \Psi(t+s) - \Psi(t-s)$ la cual fue hallada por medio de las condiciones físicas del problema y permite construir geométricamente una solución en el plano ST , independientemente de la curva primitiva dada.

[2] La solución de Euler, permitió abrir camino epistemológico sobre el funcionamiento del método **(MSV)** debido a que su mirada fue puesta también por sus resultados y aunque no fueron clásicos dado el comienzo del Análisis Matemático, él menciona que no solo las segundas derivadas pueden ser *discontinuas*, sino también las primeras derivadas. Al hablar en el sentido moderno, Euler afirmaría que la *función solución*, debe ser continua y diferenciable.

[3] La generalización de su solución no procedió debido a sus argumentos, ya que afirmó que en algunos casos la solución que satisface la ecuación $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{ds^2}$ ocupa de otras consideraciones, es decir, propiedades físicas del problema **(**sin que él haya especificado en qué dirección se ubicaban esas consideraciones**)**, a su solución se sumó su construcción geométrica y corregir estas argumentaciones era un camino imposible de seguir debido al análisis de la época.

[4] D'Alembert, reaccionó fuertemente a los argumentos de Euler, por lo que se ve interesado en analizar su construcción matemática. Define en $[0,\ell]$ la forma primitiva **(**inicial**)** de la cuerda extendida sobre todo el eje numérico de forma *impar* y *periódica*, y al emplear $y(s,t) = \Psi(t+s) - \Psi(t-s)$, toma el caso $s = 0$, en todo el *semiplano* $t > 0$, D'Alembert se percató que la construcción geométrica posee «*ciertas restricciones*» y que las curvas obtenidas son reproducidas hasta el *infinito* y que las representa *una misma ecuación* sujeta a la *ley de continuidad*.

El razonamiento evocado por D'Alembert parte de lo siguiente, *suponga una curva primitiva* **(***inicial***)** *tal que se compone de piezas descritas por diferentes expresiones analíticas*. *Sea* s_0 *un punto tal que a su izquierda* **(***una cierta vecindad***)** *la curva viene dada por una ecuación* $y = f_1(s)$ *y a su derecha* **(***también en una vecindad determinada***)** *por otra ecuación* $y = f_2(s)$. Al calcular sus diferenciales correspondientes a sus segundas derivadas, $\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}$ y $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ lo que D'Alembert encuentra es que en el marco de la solución clásica

(*proximidad a la solución general***)**, se deduce, en sentido estricto, que la segunda derivada de la función primitiva no puede tener un salto o, lo que es mismo, una discontinuidad del segundo tipo **(***en el sentido euleriano también llamadas mixtas***)**.

D'Alembert insiste en que la curva primitiva viene dada por una única expresión analítica; toda su argumentación matemática se dirige contra una sola afirmación**:** *la de la existencia de discontinuidades de la primera y segunda derivada*. Y como en ese momento los matemáticos no conocían las *discontinuidades* de segundo tipo **(**en el sentido Euleriano, *funciones mixtas***)**, lo que identificó la clase de funciones cuya derivada «*no posee saltos a ninguna parte*» con la clase de funciones diferenciables y continuamente diferenciables, el significado de las objeciones matemáticas de D'Alembert *consiste entonces en que la función primitiva debe ser doblemente diferenciable* **(***o continuamente diferenciable***)**. En resumen, si se rechaza la exigencia superflua de D'Alembert de que la función primitiva esté dada por una única expresión analítica **(**que es lo que D'Alembert hará después**)** su posición, es decir, *su solución clásica* **(**la *proximidad a la solución general***)** se vuelve tan precisa como sus palabras.

El autor menciona las palabras de D'Alembert, quien sostiene que **«**en todos los demás casos no podrá resolverse el problema, al menos con su método **(***método de los multiplicadores* hoy día el **MSV)** y que ni siquiera excede en las fuerzas del Análisis conocido por la época**»**. Esta reflexión es correcta y profética porque en el nivel del Análisis de la época no permitió el desarrollo de una teoría de soluciones *débiles*, al convertirse esto en un asunto para un futuro lejano **[**con el desarrollo del concepto de límite**]**.

Así entonces, la posición de Euler en el debate sobre el *Problema de la Cuerda Vibrante* se basa en la necesidad de una noción más amplia de la solución de la ecuación $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{ds^2}$ o $\frac{\partial^2y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2y}{\partial s^2}$. Básicamente como ya se ha dicho, introdujo incorrectamente la *solución débil* de esta ecuación. En cuanto a D'Alembert, considera que la solución clásica de la ecuación $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{ds^2}$ o $\frac{\partial^2y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2y}{\partial s^2}$ a la que impone demasiadas restricciones surgen conceptos vagos sobre la naturaleza de las nociones fundamentales del Análisis Matemático que era característicos de su época.

Por lo tanto, está claro que Euler y D'Alembert no escucharon lo mismo cuando se hablaba de la *solución de la ecuación* $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{ds^2}$ o $\frac{\partial^2y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2y}{\partial s^2}$, de lo que entonces, cabe preguntar lo siguiente**:**

> **¿***Qué es lo que les impidió a los dos ilustres geómetras ver que no había ningún objeto real de discusión, sino que sólo necesitaban ser especificados sus puntos de vista***?**

lo anterior se debe en gran parte a la pobre elaboración de los fundamentos del Análisis Matemático, en particular por la ausencia de un gran número de conceptos importantes, como las derivadas por la izquierda o derecha, así como el carácter impreciso de algunos de ellos **(**por ejemplo, los conceptos contradictorios de las funciones **«***continuas***»)**. **[. …]** Para D'Alembert como para Euler, la noción de tal solución **[***proximidad a la solución general***]** no depende en gran medida de cómo se defina **(**un método de definición que proporcione la solución clásica, u otro método que represente una cierta realidad dotada de propiedades independientes del método de definición de la solución**)**. Para revelar estas propiedades, varios métodos son buenos, al incluir el razonamiento físico de D'Alembert y Euler.

Así entonces, a manera de comentario final, bajo la postura del autor, D'Alembert vuelve a la cuestión de la aplicabilidad de las funciones *discontinuas* al *Problema de la Cuerda Vibrante*, es decir, en admitirlas en su *proximidad a la solución general*, al comentar incluso que el comportamiento de y no tiene saltos, es decir, a fines de entender en la época que no hay ningún punto en la curva donde dos valores estén presentes al mismo tiempo. De esto se puede concluir que D'Alembert ha aceptado la *opinión de Euler sobre la aplicabilidad de las funciones discontinuas* a la *proximidad a la solución general*.

Una vez esclarecidas estas ideas epistemológicas que están inmersas en la *proximidad a la solución general* y por ende al **MSV**, se continúa en la siguiente subsección de esta investigación con el análisis dialéctico de la obra matemática de D'Alembert, en donde se pone en juego el *tratamiento matemático* del **MSV** en conjunto con las características asociadas al *Problema de la Cuerda Vibrante*.

5.2.1 El análisis dialéctico en la obra matemática de Jean le Rond D'Alembert

> "*Los encantos de esta ciencia sublime, las matemáticas, sólo se les revelan a aquellos que tienen el valor de profundizar en ella*." — *Carl Friedrich Gauss*

A continuación, se presenta este análisis por medio de la *dialectización* en la obra matemática del autor Jean Le Rond D'Alembert, en ella se pone atención a la *triada analítica* propuesta por Cantoral et. al **(**2015**)** y se enfatiza a través del *modelo de anidación de prácticas* el *proceso de identificar* una *acción* o *acciones* que permitan caracterizar una *actividad* o *actividades*, estas situadas como una *actividad humana*, es decir, se pretende rescatar el conjunto de *heurísticas* empleadas por D'Alembert que dieron pie a la solución del *Problema de la Cuerda Vibrante*, específicamente al focalizar el empleo del **MSV** en la solución que él obtuvo, adjetivada en esta investigación como una *proximidad a la solución general*.

El punto de partida está en recobrar la *proximidad a la solución general*, dado que a partir de las características de **Ψ**, a cumplir que debe ser *impar* y *periódica* con periodo $\mathbf{2}\boldsymbol{a}$, D'Alembert su objetivo a cumplir fue buscar la **«***forma general***»** de la solución por medio de estas características, es decir, la posibilidad de representarla por *una sola expresión analítica*, el método empleado por él, en su *tercera memoria***: "***Addition au memoire sur la courbe que forme une corde tenduë, mise en vibration***"** fue el *método de los multiplicadores*, conocido actualmente como el **MSV**, mismo que en un principio no fue conocido de esta manera, sino conforme a la posterior evolución epistemológica en torno a su *actividad matemática* y por ende a su *tratamiento matemático* referente a la solución de la ecuación de onda expresada por series trigonométricas, así como en otros contextos de referencia como la Hidrodinámica.

Derivado lo anterior, conviene conocer al autor de la obra, por lo que cabe mencionar un poco sobre *quién fue* este personaje, *qué es lo que hizo* a grandes rasgos así como elementos científicos que sobresalientes que marcan el pasaje de su vida académica; para ello, desde la posición de **Breus (1968)** quien expresa que el nombre de Jean Le Rond D'Alembert **(**16 de noviembre de 1717 al 29 de octubre de 1783**)** el matemático y filósofo francés y esclarecedor del período de preparación de la Revolución Burguesa en Francia, tiene un prominente lugar en la ilustre constelación de nombres eminentes científicos del mundo.

Los trabajos científicos de D'Alembert hicieron una contribución fundamental en el desarrollo de muchas ramas de las matemáticas, la mecánica y la astronomía. La elección de D'Alembert como miembro de las Academias de París, Petesburgo y otras ciudades fue un reconocimiento a sus grandes servicios científicos.

Junto con Denis Diderot, D'Alembert creó la **"***Encyclopedia of the Sciences, Arts and Crafts***"**, en la **"***Encyclopedia***"** era responsable de las secciones de Matemáticas y Física. En su primer volumen publicó importantes artículos acerca de **«***límites***»**, **«***diferenciales***»**, **«***ecuaciones***»**, **«***Dinámica***»**, y **«***Geometría***»**. De sus trabajos filosóficos, el más importante fue su artículo introductorio a la enciclopedia ─ **"***Sketch of the origin and development of the Sciences***"** ─ en el que, al seguir a Francis Bacon, dio una clasificación de las Ciencias, y también incluye en su ensayo los **"***Elements of Philosophy***"** de 1759.

Dentro de la *actividad matemática* hecha por D'Alembert, el autor menciona que sus intentos de aplicar las ecuaciones básicas de la Mecánica a los problemas de la Teoría del Movimiento Planetario **(***el problema de los tres cuerpos***)** condujeron al desarrollo de métodos aproximados de solución de las Ecuaciones Diferenciales; eligió *órbitas circulares* como soluciones aproximadas de estos problemas, que luego se corrigieron mediante series ampliadas en potencias de pequeñas cantidades **(**la excentricidad de las órbitas planetarias, su inclinación a ser elípticas y así sucesivamente**)**. D'Alembert también desarrolló un método

de solución aproximada que consistía en introducir series infinitas con coeficientes indeterminados, los cuales luego se determinaban mediante una Ecuación Diferencial.

D'Alembert prestó servicios particularmente grandes en el desarrollo de métodos de soluciones de Ecuaciones Diferenciales. Hay que mencionar primero sobre la reducción del famoso problema de la oscilación de una cuerda **[***Problema de la Cuerda Vibrante***]** a una Ecuación Diferencial Parcial de segundo orden **(***la ecuación de onda***)** y la representación de la solución en la forma de la *suma de dos funciones arbitrarias*. La solución de tal problema, **[**como ya se ha mencionado párrafos atrás de esta investigación**]** jugó un papel importante en los trabajos de D'Alembert, Euler, D. Bernoulli, Lagrange y otros matemáticos.

En las investigaciones relacionadas con la solución de esta ecuación, los matemáticos establecieron por primera vez *cuántas funciones arbitrarias ocurren en la integral* de una Ecuación Diferencial Parcial a lo que también los conllevó a investigar el problema de representación de las funciones arbitrarias por medio de series trigonométricas que más tarde llamaron Series de Fourier. También dentro la *actividad matemática* de D'Alembert está al resolver una Ecuación Diferencial Parcial ─ elíptica ─ en Hidrodinámica, D'Alembert y Euler fueron los primeros en encontrar las ecuaciones básicas que unen las partes real e imaginaria de una función analítica, que más tarde se llamaron ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Al proseguir sobre el trabajo académico de D'Alembert, el autor sostiene que él, encontró la solución de otras Ecuaciones Diferenciales Parciales. Así, en el documento *Recherches de calcul intégral*, consideró la solución de las Ecuaciones Diferenciales Parciales lineales con coeficientes constantes. Para resolver estas ecuaciones, D'Alembert utilizó dos métodos**:** el primero de ellos consistió en la reducción de las Ecuaciones Diferenciales Parciales a Ecuaciones Diferenciales Ordinarias **[**el famoso **MSV]** y su solución por el método de *factor integrante*.

El segundo método, que D'Alembert aplicó a las Ecuaciones Diferenciales Parciales de primer orden, "consistía" en introducir una sustitución que transformaba la ecuación dada a una ecuación más simple, la cual podía ser integrada fácilmente. Aunque no está completamente formulado con claridad, D'Alembert dio una clasificación de las ecuaciones lineales y no lineales, y de las que tienen coeficientes constantes o variables. También hay que mencionar una condición suficiente ampliamente utilizada en convergencia de series que lleva el nombre de D'Alembert.

D'Alembert realizó un gran número de investigaciones sobre muchos problemas aplicados, en particular, la hidrodinámica, la mecánica aerodinámica y el problema de los tres cuerpos. En **«***Tracts on Dynamics***»** D'Alembert introdujo el método de reducción de los

problemas de la dinámica de los cuerpos sólidos a la estática, el cual se conoce como «*Principio de D'Alembert*». El principio de D'Alembert puede considerarse como una afirmación sobre el equilibrio entre las fuerzas dadas y las fuerzas inerciales. En esta forma el principio de D'Alembert es la base de esa rama de la mecánica que proporciona métodos de solución de problemas dinámicos por los métodos de la estática.

Como es posible observar, D'Alembert poseyó una amplia actividad matemática en torno a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Parciales, ramas de las Matemáticas que hoy día están presentes en la gran diversidad de currículos escolares de Matemáticas, Física e Ingeniería. Desde los inicios de esta investigación como parte de las **Motivaciones** se mostró una inquietud que está apegada precisamente a las EDP, y su actuar en la Física-Matemática, al tener como centro de estudio a uno de sus «*más conocidos*» métodos de solución para EDP lineales homogéneas de segundo orden, el **MSV**, tal método opera de manera sistemática, es decir, de forma *procedimental*, sin atender a alguna argumentación epistemológica de su uso.

En esta subsección tiene como objetivo, con base en la postura teórica adoptada, la ***Socioepistemología***, y el método que permite analizar la unidad de análisis [Cantoral, et al., (2015)], es decir, a la obra matemática original, en apego al *modelo de anidación de prácticas*, **develar** el cumplimiento del *objetivo* planteado en esta investigación, a partir del *tratamiento matemático* que el autor, Jean Le Rond D'Alembert emplea en su obra: *Addition au memoire sur la courbe que forme une corde tenduë, mise en vibration*.

Parte del adoptar la postura teórica es que uno de sus principales *lemas* es tratar la *problematización del saber matemático* hacia una *descentración del objeto matemático, por medio de las prácticas*, es decir, al hablar del objeto matemático en una primera instancia, el cual es permeado rotundamente por la actividad matemática escolar, se pretende poner en un primer plano la manera en que en situaciones áulicas el alumno construye su conocimiento matemático mediante un ejercicio de prácticas, de manera que como sostiene **Cantoral (2013)** desde el punto de vista de la Socioepistemología, la práctica se concibe como un conjunto organizado de actividades y acciones objetivas e intencionales para atender a una situación dada.

El ejercicio de las prácticas es el que coordina a las *acciones* y *actividades*, el cual produce discursos y significados, guiados por medio de *prácticas de referencia* correspondientes, las cuales se norman por *prácticas sociales*. Cabe esclarecer antes de iniciar el análisis dialéctico, que, con base en la ***Socioepistemología*** las nociones de práctica y práctica social son fundamentales en virtud del papel que las dos desempeñan en la construcción social del conocimiento.

La relación estrecha que hay entre estas, no se reduce al plano semántico, sino que llega al terreno de lo epistémico, en razón de que ambas se remiten a acciones llevadas a cabo por sujetos **(**individuales y colectivos**)** organizados en comunidades actuantes en contextos situacionales diversos **(**en escenarios escolares o fuera de ellos**)**, pero donde prevalezca la intencionalidad de *significar*.

Al continuar con dicha relación, el autor menciona que la idea de *práctica* coincide con lo expresado por Villoro **(**1982**)**, según el cual la noción de *práctica* se encuentra ligada a la *actividad humana*, aunque como ha señalado no toda actividad humana es una práctica; se comprende más bien aquella dirigida por fines **(**o por **"**quereres**")** conscientes. Se refiere a toda *actividad intencional* y no a los actos instintivos o inconscientes, postura que se comparte desde la Socioepistemología. La *práctica*, por tanto, está ligada a la *construcción social de conocimiento*, en contextos históricos, culturales e institucionales.

Para continuar con la fase del *análisis dialéctico* con base en la ***Socioepistemología*** se pone a detalle lo que comprende la *unidad de análisis* a estudiar**:**

Contexto matemático	*El Problema de la Cuerda Vibrante*
Marco de referencia	Teoría de la Vibración
Obra Matemática	"*Addition au memoire sur la courbe que forme une corde tenduë, mise en vibration*"
Autor	Jean Le Rond D'Alembert
Año de escritura	1750
Año de publicación	1752
Publicado por	«*Histoire de l'Académie des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*»
Contenido	pp. 355 − 360
Artículos	$\mathbb{I} - \mathbb{IV}$
Idioma	Francés
Número de memoria	3

Como se mencionó en el **Capítulo 2. Consideraciones Teóricas y Metodológicas** en la subsección **2.4.2 Análisis de obras originales**, al comenzar con el análisis dialéctico de la obra "*Addition au memoire sur la courbe que forme une corde tenduë, mise en vibration*", esta, fue traducida del idioma *francés* al *español*, en la cual en ningún momento se pretende *incluir* o *añadir* como se ha dejado esclarecido **(**en la subsección **2.4.2)** algún otro objeto matemático que *altere* el contenido de esta, como trastocar el *tratamiento*

matemático que hace el autor a lo largo de su memoria; si en algún momento los artículos aluden a otro**(**s**)** artículo**(**s**)** de las dos primeras memorias, se dispondrán en los **Anexos** de esta investigación.

Así entonces, a continuación, se da a conocer el contenido de la obra matemática, así como el inicio del análisis dialéctico **(**desde el artículo I al IV**)**, que con base en Cantoral et al. **(**2015**)** y el modelo de anidación de prácticas, se pretende rescatar el conjunto de heurísticas matemáticas en apego a la *actividad matemática* del Siglo XVIII, y el *tratamiento matemático* hecho por Jean Le Rond D'Alembert, para identificar *acciones* y *actividades* al coordinar en un principio las primeras para estructurar las segundas, las cuales son institucionalizadas según **Cantoral (2013)** como *actividad práctica* e *instrumental compartida*; si y solo si se regula en el marco de *prácticas de referencia* que orientan a la actividad humana **(p. 331).**

El **MSV**, es el objeto matemático de interés en esta investigación, el cual al estar ubicado en el corte *histórico-epistemológico*, conllevó a desentrañar su epistemología matemática, a través de los procesos socioculturales que permearon la producción y consolidación del *Problema de la Cuerda Vibrante*, centrado en el *marco de referencia*, la *Teoría de la Vibración*, la solución a este problema, acarreó una serie de disputas académicas en cuanto a la *proximidad a la solución general* encontrada por D'Alembert.

Si bien es cierto, se ha elegido la obra matemática de Jean Le Rond D'Alembert **(**su tercera memoria a dicho problema**)**, por ser la primera producción matemática escrita y publicada en donde aparecen los inicios del **MSV**, aunado al surgimiento de la primera Ecuación Diferencial que reuniera en conjunto las características físicas del problema, y por ende se conociera su solución, pero que al final de todo, la génesis del método conllevó a ubicar sus *razonamientos físicos* y *matemáticos* que fueron permeados en su solución hasta su tercera memoria, en apego a sus dos memorias anteriores *Recherches sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibration* **(**1747**)** y *Suite des recherches sur la courbe que forme une corde tenduë, mise en vibration* **(**escrita en 1747 pero publicada en 1749**)**.

Otra de las observaciones que se consideran pertinentes a resaltar es que, durante todo el análisis dialéctico que se hace en la obra y con la familiaridad que se tiene con la memoria, es posible visualizar que los 4 artículos que la comprenden, contienen el *tratamiento matemático* hecho por el autor en torno a su *proximidad a la solución general* y al **MSV**, por lo que cada uno de ellos, se subdividen a fin de esclarecer con una mayor delicadeza el conjunto de *acciones* y *actividades* realizadas por D'Alembert, para así poder develar el razonamiento evocado sobre la *génesis epistemológica* de este método. El documento original sobre el nacimiento del **M**étodo de **S**eparación de **V**ariables **(MSV)** en Ecuaciones Diferenciales Parciales **(EDP)** se debe a Jean Le Rond D'Alembert, quien lo intituló como**:**

ADDITION
AU MEMOIRE SUR LA COURBE QUE FORME UNE CORDE TENDÜE, MISE EN VIBRATION.

PAR M. D'ALEMBERT.

ADICIÓN

EN MEMORIA DE LA CURVA FORMADA POR UNA CUERDA TENSADA, PUESTA EN VIBRACIÓN

POR: MR. D'ALEMBERT

[La traducción es nuestra]

I.

Dans l'art XXII. de ce Mémoire j'ay trouvé par une metho de très indirecte, que ſi $\Psi(t+s)-\Psi(t-s)=\Delta t.\,\Gamma s$, on aura $\Gamma s=$ ſin M s, & $\Gamma t=$ ſin M t ou coſ M t. Cette propoſition eſt vraye & exacte dans le point de vüe, où je l'enviſageois alors; mais ayant eu occaſion depuis de la conſidérer d'une maniere plus générale, j'ay trouvé une maniere directe de reſoudre le problème, qui donne lieu à quelques obſervations.

I.

«En el artículo XXII de estas *Memorias* he encontrado por un método muy indirecto, que si $\Psi(t+s)-\Psi(t-s)=\Delta t\cdot\Gamma s$, tendremos $\Gamma s=\sin \mathcal{M}s$ y $\Gamma t=\sin \mathcal{M}t$ o $\cos \mathcal{M}t$. Esta proposición es verdadera y exacta desde el punto de vista de lo que yo estaba considerando en ese momento; pero habiendo tenido ocasión desde entonces de considerarla de manera más general, he encontrado una forma directa de resolver el problema, lo que da lugar a algunas observaciones.» **[La traducción es nuestra]**

Comentarios Generales:

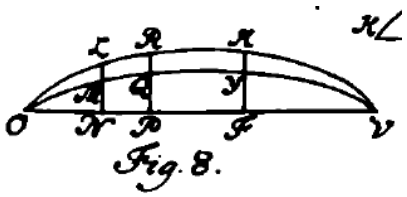
El autor comenta que en el artículo XXII de su *segunda memoria*: *Suite des recherches sur la courbe que forme une corde tenduë, mise en vibration*, encontró un método el cual es

aplicable a realizar una serie de observaciones. Recuerde que en esta memoria es donde están plasmados los inicios «*formales*» del *tratamiento matemático* **(**su *génesis matemática***)** del **MSV**, lo anterior conlleva a precisar que D'Alembert trabaja con dicho método directamente sobre la solución que él encontró **(**a lo largo de esta investigación, esta solución se ha adjetivado como una *proximidad a la solución general***)**; cabe mencionar también que el método opera directamente sobre la solución encontrada a raíz de establecer las condiciones **(***características***)** físicas del problema, pero que antes de esto, existen dos características matemáticas a la solución, y precisamente sobre la función $\boldsymbol{\Psi}$ que es una función *impar* y *periódica* con *período* $\boldsymbol{2a}$.

De esto, D'Alembert tiene en sus razonamientos puestos sobre la forma inicial de la función $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})$, es decir, implica su conjunto de concepciones geométricas que son admisibles en la forma que adopta la función $\boldsymbol{y}$. Cabe mencionar que Brook Taylor y Johann Bernoulli ya habían descubierto que el modo fundamental de la cuerda vibrante tiene la forma de una *función sinusoidal*.

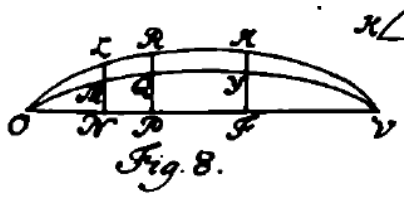
En este artículo, el autor, alude para su complemento y entendimiento el Artículo XXII, de su segunda memoria, en él, expresa que la *proximidad a la solución general*, a fin de encontrar una única ley analítica que represente la solución puede ser encontrada *únicamente* por medio de $\boldsymbol{\Delta t \times \Gamma s}$, e incluso, no admite otro caso sino únicamente el antes dicho, ya que $\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{t}+\boldsymbol{s}) - \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{s})$ solo puede ser considerada en *general* como la ordenada de una curva formada por una cuerda vibrante.

El autor parte al tomar como referencia geométrica, la Figura 8. **(**del artículo XXII, **véase Anexos, segunda memoria):**

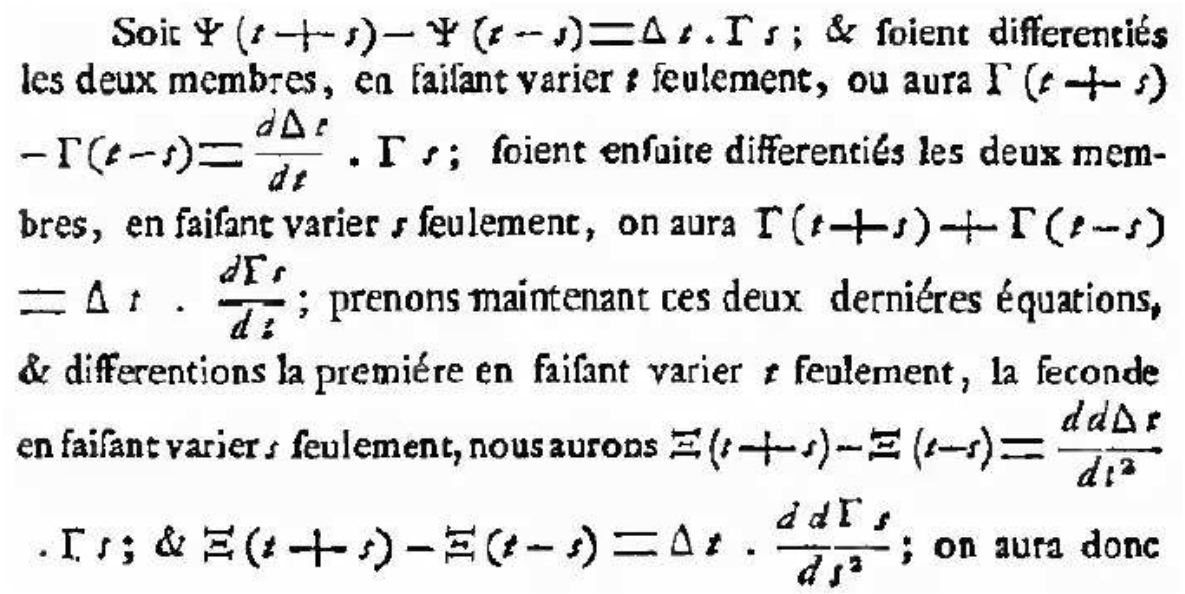


No hay que olvidar que la forma del modo fundamental de la cuerda vibrante es "*sinusoidal*" y aunque para el Siglo XVIII aún se encontraba *en ciernes* el Análisis Matemático donde su objetivo más inmediato fue el de las *funciones*, no obstante, *imperaba* el análisis geométrico, el cual permitía resolver una gran cantidad de problemas que emergieron en la época.

Para ello, D'Alembert, a partir de dejar por sentado en su primera memoria el *Problema de la Cuerda Vibrante*, el *tratamiento matemático* que él emplea es el ya establecido por Leonhard Euler **(**Cálculo Diferencial Parcial e Integración Parcial**)**, por medio de hacer un cambio de coordenadas, tales coordenadas son las que se presentan en la expresión de la *proximidad a la solución general* $\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{t}+\boldsymbol{s}) - \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{s})$ que permiten conocer la

<table>
<tr><td colspan="2">descripción geométrica s (longitud de arco) que adopta la cuerda en cada instante de tiempo t (aceleración).</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Análisis – Artículo 1:</u></td></tr>
<tr><td>¿Qué hace?</td><td>Para comenzar a describir la construcción del MSV, se parte de la Figura 8. De la segunda memoria:
 
D’Alembert bosqueja <u>otro modo</u> a partir de considerar la «geometría» del modo fundamental (sinusoidal), en donde traza el conjunto de ordenadas, las cuales son las formadas por los segmentos de recta: $\mathcal{LN}$, que de ella nace la ordenada $\mathcal{MN}$, de $\mathcal{RP}$ surge $\mathcal{QP}$ y de la ordenada $\mathcal{KF}$, emerge la ordenada $\mathcal{YF}$.</td></tr>
<tr><td>¿Cómo lo hace?</td><td>Dibuja tres ordenadas sin considerar una distancia fija establecida entre ellas, a lo largo de las curvas cualesquiera $\mathcal{OMV}$ y $\mathcal{OLV}$, las cuales de forma «mecánica» en conjunto describen geométricamente cicloides alargadas a lo largo de todo el eje s, el origen es el inicio de dichas construcciones geométricas, a través de considerar las características de la función Ψ, que es una función impar y periódica con período $2a$.</td></tr>
<tr><td>¿Para qué lo hace?</td><td>Para establecer comparaciones entre lo que hoy día se conoce como amplitud en los diferentes tiempos t, esta comparación propicia una construcción geométrica de los modos a partir de <u>razones aritméticas</u>, de tal forma que el método propicia una infinidad de funciones de la forma “sinusoidal” y/o</td></tr>
</table>

	"cosenoidal" **(**«*modos*»**)**; por lo que de este *tratamiento matemático* se esclarece que el pensamiento de D'Alembert es *geométrico*, lo que origina la posibilidad de crear una infinidad de cicloides alargadas definidas sobre toda la recta real, a partir de tener en mente la *continuidad en el sentido Euleriano* de la función $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})$.



Soit $\Psi(t+s)-\Psi(t-s)=\Delta t\,.\,\Gamma s$; & soient differentiés les deux membres, en faisant varier t seulement, ou aura $\Gamma(t+s)-\Gamma(t-s)=\frac{d\Delta t}{dt}\,.\,\Gamma s$; soient ensuite differentiés les deux membres, en faisant varier s seulement, on aura $\Gamma(t+s)+\Gamma(t-s)=\Delta t\,.\,\frac{d\Gamma s}{ds}$; prenons maintenant ces deux derniéres équations, & differentions la premiére en faisant varier t seulement, la seconde en faisant varier s seulement, nous aurons $\Xi(t+s)-\Xi(t-s)=\frac{dd\Delta t}{dt^2}\,.\,\Gamma s$; & $\Xi(t+s)-\Xi(t-s)=\Delta t\,.\,\frac{dd\Gamma s}{ds^2}$; on aura donc

«Que $\boldsymbol{\Psi(t+s)-\Psi(t-s)=\Delta t\cdot\Gamma s}$; y diferenciarse los dos miembros, variando solo $\boldsymbol{t}$, o tener $\boldsymbol{\Gamma(t+s)-\Gamma(t-s)=\frac{d\Delta t}{dt}\cdot\Gamma s}$; o diferenciarse los dos miembros, variando solo $\boldsymbol{s}$, teniendo $\boldsymbol{\Gamma(t+s)-\Gamma(t-s)=\Delta t\cdot\frac{d\Gamma s}{ds}}$; ahora tomemos sus dos últimas ecuaciones, y diferenciemos la primera variando solo $\boldsymbol{t}$, la segunda variando solo $\boldsymbol{s}$, tendremos $\boldsymbol{\Xi(t+s)-\Xi(t-s)=\frac{dd\Delta t}{dt^2}\cdot\Gamma s}$; y $\boldsymbol{\Xi(t+s)-\Xi(t-s)=\Delta t\cdot\frac{dd\Gamma s}{ds^2}}$; habremos hecho $\boldsymbol{\frac{dd\Delta t}{dt^2}\cdot\Gamma s=\Delta t\cdot\frac{dd\Gamma s}{ds^2}}$: hecho $\boldsymbol{\frac{dd\Delta t}{\Delta t\cdot dt^2}=\frac{dd\Gamma s}{ds^2\cdot\Gamma s}}$;…» **[La traducción es nuestra]**

<u>Comentarios Generales:</u>

D'Alembert, emplea el Cálculo Diferencial Parcial en su tratamiento matemático, por lo que a lo largo de este artículo y los subsecuentes, es posible visualizar que esta memoria opera bajo las reglas ya conocidas y empleadas en su origen por Leonhard Euler pionero en dicho Cálculo, no obstante el autor tiene un apego fortísimo a un pensamiento geométrico-proporcional para la construcción de los modos subsecuentes al fundamental,

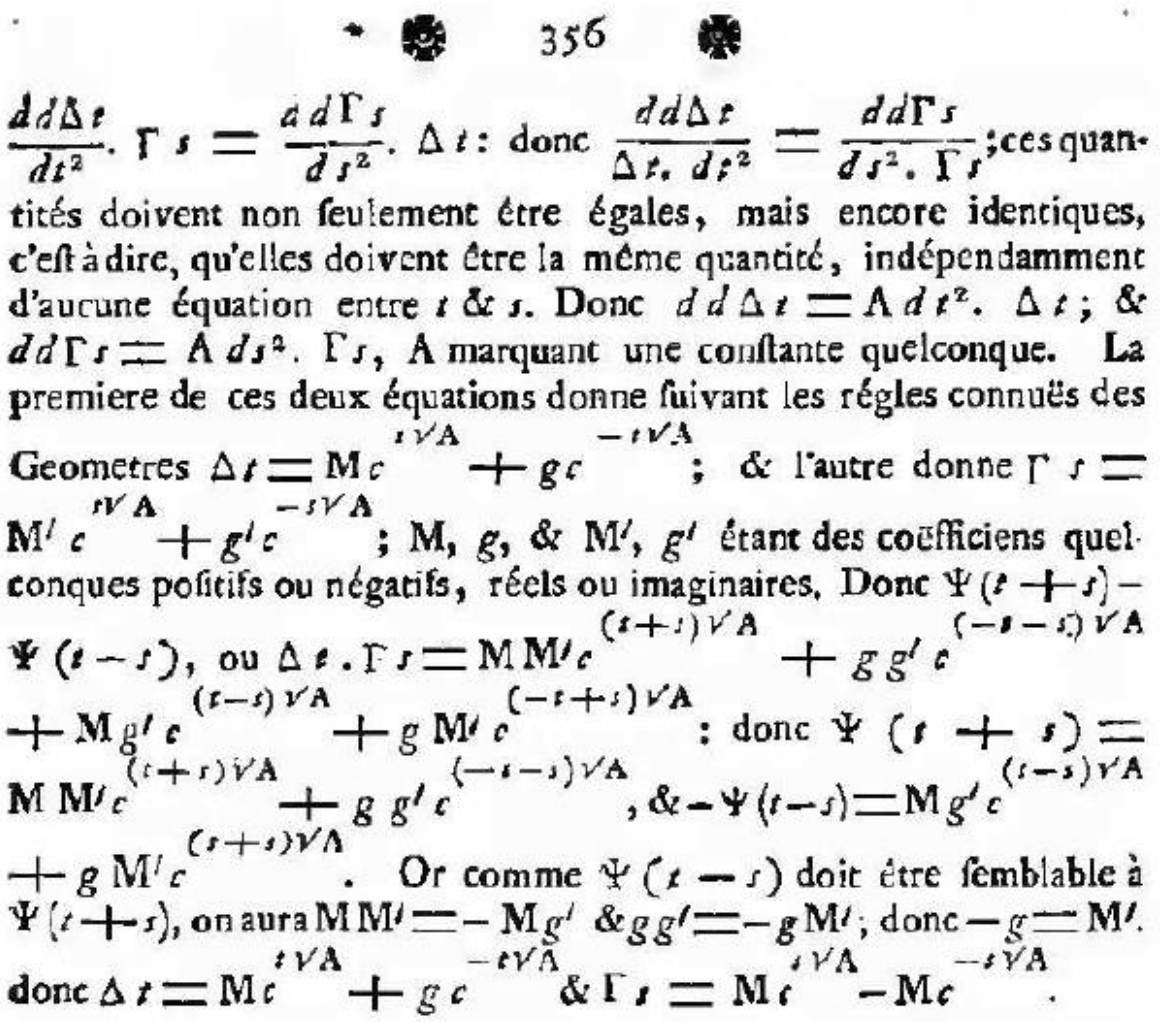
esto bajo la serie evoluciones epistemológicas del Análisis Matemático, respecto a lo funcional.

Una de las *observaciones insistentes* a realizar dentro de este *análisis dialéctico* es que existe una diferencia sobre la manera de funcionar hoy día el MSV, el *método de los multiplicadores* aplicado por D'Alembert al *Problema de la Cuerda Vibrante* al **MSV** en EDP, el autor lo hace por medio de considerar todo el desplazamiento o recorrido de la longitud de arco en cada instante de tiempo que preserva la *continuidad*, por ello, el cambio de variables fue una clave epistemológica fundamental matemática para la preservación de los posteriores modos al fundamental, geométricamente lo hace bajo el pensamiento geométrico de la cicloide alargada.

Análisis – Artículo 1:

¿Qué hace?	**Aplica derivación parcial dos veces** a cada término de la solución a partir de considerar la solución $y(s,t)$, donde obtiene las funciones Ξ respectivamente de cada sumando que representan la segunda derivada parcial.
¿Cómo lo hace?	**Al mantener constante la variable s y deriva de manera *ordinaria* la expresión que involucre la variable t, y viceversa**, al derivar parcialmente la variable t , se mantiene constante la variable s.
¿Para qué lo hace?	**D'Alembert lo hace para describir el problema físico, dado que trabaja con un sistema que posee dos grados de libertad uno relacionado con la posición y el otro con la velocidad (**o momento lineal o cantidad de movimiento**) en conjunto con la aceleración**, lo que involucró que D'Alembert poseyera un pensamiento avanzado; sin embargo, aunque este pensamiento en gran medida no era *físico*, permitía que D'Alembert tuviera conciencia de que dicho problema involucraba tocar terreno relativamente nuevo, de un área de la Matemática, las Ecuaciones Diferenciales Parciales **(**dos o más dimensiones

	espaciales**)**, **debido que para conocer *qué* tipos de funciones Ψ admite la *proximidad a la solución general y*, hubo que reducir la dimensión del problema y trabajar con Ecuaciones Diferenciales Ordinarias**, cuyos métodos de solución para el Siglo XVIII ya mostraban un completo desarrollo, en sumo apego a construcciones geométricas propiciadas en este caso **(***El Problema de la Cuerda Vibrante***)** por la forma del modo fundamental.



356

$\frac{dd\Delta t}{dt^2}.\ \Gamma s = \frac{dd\Gamma s}{ds^2}.\ \Delta t$: donc $\frac{dd\Delta t}{\Delta t.\ dt^2} = \frac{dd\Gamma s}{ds^2.\ \Gamma s}$; ces quantités doivent non seulement être égales, mais encore identiques, c'eſt à dire, qu'elles doivent être la même quantité, indépendamment d'aucune équation entre t & s. Donc $dd\Delta t = A\,dt^2.\ \Delta t$; & $dd\Gamma s = A\,ds^2.\ \Gamma s$, A marquant une conſtante quelconque. La premiere de ces deux équations donne ſuivant les régles connuës des Geometres $\Delta t = Mc^{t\sqrt{A}} + gc^{-t\sqrt{A}}$; & l'autre donne $\Gamma s = M'c^{s\sqrt{A}} + g'c^{-s\sqrt{A}}$; M, g, & M', g' étant des coëfficiens quelconques poſitifs ou négatifs, réels ou imaginaires. Donc $\Psi(t+s) - \Psi(t-s)$, ou $\Delta t.\ \Gamma s = MM'c^{(t+s)\sqrt{A}} + gg'c^{(-t-s)\sqrt{A}} + Mg'c^{(t-s)\sqrt{A}} + gM'c^{(-t+s)\sqrt{A}}$: donc $\Psi(t+s) = MM'c^{(t+s)\sqrt{A}} + gg'c^{(-t-s)\sqrt{A}}$, & $-\Psi(t-s) = Mg'c^{(t-s)\sqrt{A}} + gM'c^{(s+s)\sqrt{A}}$. Or comme $\Psi(t-s)$ doit être ſemblable à $\Psi(t+s)$, on aura $MM' = -Mg'$ & $gg' = -gM'$; donc $-g = M'$. donc $\Delta t = Mc^{t\sqrt{A}} + gc^{-t\sqrt{A}}$ & $\Gamma s = Mc^{s\sqrt{A}} - Mc^{-s\sqrt{A}}$.

«… estas cantidades no solo deben ser iguales, sino idénticas, es decir, deben ser la misma cantidad, independientemente de cualquier ecuación entre $\boldsymbol{t}$ y $\boldsymbol{s}$. Hecho $\boldsymbol{dd\Delta t = \mathcal{A} dt^2 \cdot \Delta t}$; y $\boldsymbol{dd\Gamma s = \mathcal{A} ds^2 \cdot \Gamma s}$, siendo $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ cualquier constante. La primera de estas dos ecuaciones da según las reglas conocidas de la Geometría $\boldsymbol{\Delta t = \mathcal{M} e^{t\sqrt{\mathcal{A}}} + g e^{-t\sqrt{\mathcal{A}}}}$; y la otra da $\boldsymbol{\Gamma s = \mathcal{M}' e^{s\sqrt{\mathcal{A}}} + g' e^{-s\sqrt{\mathcal{A}}}}$; siendo $\boldsymbol{\mathcal{M}}$, $\boldsymbol{g}$, & $\boldsymbol{\mathcal{M}'}$, $\boldsymbol{g'}$ cualquier coeficiente positivo o negativo, real o imaginario. Hecho $\boldsymbol{\Psi(t+s) - \Psi(t-s)}$, o $\boldsymbol{\Delta t \cdot \Gamma s = \mathcal{M}\mathcal{M}' e^{(-t+s)\sqrt{\mathcal{A}}} + g g' e^{(-t-s)\sqrt{\mathcal{A}}} + \mathcal{M} g' e^{(t-s)\sqrt{\mathcal{A}}} + g \mathcal{M}' e^{(-t+s)\sqrt{\mathcal{A}}}}$; hecho**:**

$$\boldsymbol{\Psi(t+s) = \mathcal{M}\mathcal{M}' e^{(-t+s)\sqrt{\mathcal{A}}} + g g' e^{(-t-s)\sqrt{\mathcal{A}}}}$$

&

$$\boldsymbol{-\Psi(t-s) = \mathcal{M} g' e^{(t-s)\sqrt{\mathcal{A}}} + g \mathcal{M}' e^{(-t+s)\sqrt{\mathcal{A}}}}$$

Pero como $\boldsymbol{\Psi(t-s)}$ tiene que ser lo mismo que $\boldsymbol{\Psi(t+s)}$, tendremos $\boldsymbol{\mathcal{M}\mathcal{M}' = -\mathcal{M} g'}$, & $\boldsymbol{g g' = -g \mathcal{M}'}$, hecho $\boldsymbol{\Delta t = \mathcal{M} e^{t\sqrt{\mathcal{A}}} + g e^{-t\sqrt{\mathcal{A}}}}$ & $\boldsymbol{\Gamma s = \mathcal{M} e^{s\sqrt{\mathcal{A}}} - \mathcal{M} e^{-s\sqrt{\mathcal{A}}}}$.» **[La traducción es nuestra]**

Comentarios Generales:	
Al proseguir dentro del mismo artículo, es posible percatarse que el *tratamiento matemático* del autor es que llega a la expresión $\frac{dd\Delta t}{\Delta t \cdot dt^2} = \frac{dd\Gamma s}{ds^2 \cdot \Gamma s}$, la cual, hoy día, en el dME de EDP, a esta expresión se llega a partir de suponer la solución en forma de producto de dos funciones independientes **(**una de la otra**)**, es en este **"***paso***"** donde D'Alembert llega a la famosa separación de variables, pero que, en esencia, esta parte desde el suponer encontrar funciones solución como $\boldsymbol{\Delta t \times \Gamma s}$. Finalmente, cada miembro de la expresión encontrada por D'Alembert contiene la misma variable, y dentro de su discurso en el artículo, él menciona qué para que estas cantidades sean iguales e idénticas deben ser la *misma cantidad*, **(**a lo que hoy día se le denota con la famosa **"***constante de separación***")** y es precisamente lo que dentro del análisis dialéctico de este apartado continúa.	
Análisis – Artículo 1:	
¿Qué hace?	Al momento de llegar a la expresión $\frac{dd\Delta t}{\Delta t \cdot dt^2} = \frac{dd\Gamma s}{ds^2 \cdot \Gamma s}$ **iguala estas cantidades a otra cantidad *aparentemente* arbitraria**, la justificación que él da, es que para que sean idénticas, estas expresiones deben ser iguales a otra cantidad arbitraria $\boldsymbol{\mathcal{A}}$. Incluso dentro de su *tratamiento matemático* el autor, bajo el supuesto de que

	$-\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{s})=\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{t}+\boldsymbol{s})$ reduce las constantes arbitrarias que conforman la combinación.
¿Cómo lo hace?	**El autor, menciona que a partir de «reglas conocidas de la Geometría», sin embargo, su contexto en el que está ubicado su *tratamiento matemático*, es esencialmente *algebraico*** para la búsqueda de las funciones $\boldsymbol{\Delta t}$ y $\boldsymbol{\Gamma s}$, esto fue posible por medio de conocer algún método de resolución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias lineales homogéneas [y sin ahondar en ello], el cual permite expresar las *funciones solución* por medio de una *combinación lineal*; para ello, es necesario encontrar las soluciones $\boldsymbol{\Delta t}$ y $\boldsymbol{\Gamma s}$, en ambos casos el autovalor es $\sqrt{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$, pero de aquí queda aún una incógnita por encontrar, que valor posee $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, si este es real o imaginario, y aunque, en este apartado seccionado del artículo, el autor, no brinda ningún detalle, su pensamiento está posicionado por sobre estas características de dicha constante, entonces, es justo en este momento dentro del análisis dialéctico que posiciona una introspección por sobre la conciencia **(**mirada**)** del autor en soluciones complejas.
¿Para qué lo hace?	Esto condujo al autor, a **reducir el problema a un sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias**, para así encontrar las soluciones $\boldsymbol{\Delta t}$ y $\boldsymbol{\Gamma s}$, las cuales están expresadas como una combinación lineal para después, generar el producto que indica la *proximidad a la solución general* a partir de las *combinaciones lineales* formadas.

	Al simplificar la expresión una vez que fueron igualadas las constantes arbitrarias, conlleva a poder comprobar que $$\Delta t = \mathcal{M}e^{t\sqrt{\mathcal{A}}} + ge^{-t\sqrt{\mathcal{A}}}$$ & $$\Gamma s = \mathcal{M}e^{s\sqrt{\mathcal{A}}} - \mathcal{M}e^{-s\sqrt{\mathcal{A}}}$$ son funciones solución para Ψ y $-\Psi$ respectivamente.

Si l'on veut que $\Psi(t+s) - \Psi(t-s)$ ſoit $= o$, non ſeulement lorsque $s = o$, mais encore lorsque $s = l$, comme on le ſuppoſoit dans l'art. XXII. on trouve qu'alors $\sqrt{A}$ doit être une quantité imaginaire, & on aura $\Gamma s = k$ ſin Ns ; de plus pour que Δt ſoit réel, il faut que $g = M$, M étant une quantité réelle, ou $g = -M$, M étant une quantité imaginaire $\frac{P}{2\sqrt{-1}}$; donc en ce cas $\Gamma s = k$ ſin. Ns & $\Delta t = R$ ſin. Nt ou B coſ Nt.

En général ſoit $\Phi(t+as) + \Psi(t+gs) = \Delta t \cdot \Gamma s$, on aura 1°. $\frac{d\Delta t}{dt\,\Delta t} \cdot \frac{d\cdot\Gamma s}{d\Gamma s} = \frac{1}{a}$ ſi $\frac{1}{g} = \frac{1}{a}$;

357

2°. $\frac{d\,d\,\Delta t}{\Delta t.\,dt^2} \cdot \frac{ds^2\,\Gamma s}{d\,d\,\Gamma s} = \frac{1}{aa}$, ſi $\frac{1}{gg} = \frac{1}{aa}$; 3°. $\frac{d^3\,\Delta t}{dt^3\,\Delta t} \cdot \frac{ds^3\,\Gamma s}{d^3\,\Gamma s} = \frac{1}{a^3}$ ſi $\frac{1}{g^3} = \frac{1}{a^3}$; & ainſi de ſuite. Donc en général ſi $\frac{1}{g^n} = \frac{1}{a^n}$ on aura $d^n\Delta t = A\,dt^n \cdot \Delta t$; & $d^n\Gamma s = A\,ds^n\,\Gamma s.a^n$; équations qu'on integrera par les methodes connuës.

«Si queremos que $\Psi(t+s) - \Psi(t-s)$ sea $= 0$, no solo cuando $s = 0$, sino también cuando $s = \ell$, como se supone en el artículo XXII encontramos que entonces $\sqrt{\mathcal{A}}$ debe ser una cantidad imaginaria, y tendremos $\Gamma s = k \sin \mathcal{N}s$; además para que Δt sea real, es

necesario que $\mathcal{g} = \mathcal{M}$, $\mathcal{M}$ es una cantidad real, o $\mathcal{g} = -\mathcal{M}$, $\mathcal{M}$ es una cantidad imaginaria $\frac{\mathcal{P}}{2\sqrt{-1}}$; hecho en este caso $\mathbf{\Gamma}\mathcal{s} = \mathcal{k}\,\mathbf{sin}\,\mathcal{N}\mathcal{s}$ & $\mathbf{\Delta}\mathcal{t} = \mathcal{R}\,\mathbf{sin}\,\mathcal{N}\mathcal{t}$ o $\mathcal{B}\,\mathbf{cos}\,\mathcal{N}\mathcal{t}$.

Por lo general, cualquier $\mathbf{\Phi}(\mathcal{t} + \mathcal{a}\mathcal{s}) + \mathbf{\Psi}(\mathcal{t} + \mathcal{g}\mathcal{s}) = \mathbf{\Delta}\mathcal{t} \cdot \mathbf{\Gamma}\mathcal{s}$ que obtengamos, **1º:** $\frac{d\mathbf{\Delta}\mathcal{t}}{dt\mathbf{\Delta}\mathcal{t}} \cdot \frac{d\mathcal{s}\mathbf{\Gamma}\mathcal{s}}{d\mathbf{\Gamma}\mathcal{s}} = \frac{1}{a}$ si $\frac{1}{g} = \frac{1}{a}$; **2º:** $\frac{dd\mathbf{\Delta}\mathcal{t}}{\mathbf{\Delta}\mathcal{t}dt^2} \cdot \frac{d\mathcal{s}^2\mathbf{\Gamma}\mathcal{s}}{dd\mathbf{\Gamma}\mathcal{s}} = \frac{1}{aa}$, si $\frac{1}{gg} = \frac{1}{aa}$; **3º** $\frac{d^3\mathbf{\Delta}\mathcal{t}}{dt^3\mathbf{\Delta}\mathcal{t}} \cdot \frac{d\mathcal{s}^3\mathbf{\Gamma}\mathcal{s}}{d^3\mathbf{\Gamma}\mathcal{s}} = \frac{1}{a^3}$ si $\frac{1}{g^3} = \frac{1}{a^3}$; & así sucesivamente. Así que en general si $\frac{1}{g^n} = \frac{1}{a^n}$ tendremos $d^n\mathbf{\Delta}\mathcal{t} = \mathcal{A}dt^n \cdot \mathbf{\Delta}\mathcal{t}$; & $d^n\mathbf{\Gamma}\mathcal{s} = \mathcal{A}d\mathcal{s}^n\mathbf{\Gamma}\mathcal{s} \cdot a^n$; ecuaciones que integraremos por los métodos relacionados.» **[La traducción es nuestra]**

Comentarios Generales:

Los casos particulares para los que la *proximidad a la solución general* conforme avanza el *tratamiento matemático* del método, parecieron haber emergido en un escenario inconscientemente donde el autor trastocaba la Matemática de la época **(**el Análisis Matemático**)**, por ello, cabe recordar que todas las posibilidades por las que D'Alembert examina de manera minuciosa la forma inicial de la cuerda, depende únicamente sobre esta y por ende de la expresión analítica que la represente, los casos "*particulares*" por los que en este curso del artículo, son precisamente en la manera en que se cuestionó cuando $\mathbf{\Psi}(\mathcal{t} + \mathcal{s}) - \mathbf{\Psi}(\mathcal{t} - \mathcal{s}) = \mathbf{0}$, y esto lo hizo precisamente por los "casos" particulares" donde se analizaban a partir de las *consideraciones físicas* la forma que adoptaba la *función* sobre el eje, pero que geométricamente sentaba sus bases cuando se fijaban los extremos.

Análisis – Artículo 1:

¿Qué hace?	Durante su *tratamiento matemático*, la preocupación del autor se acrecentaba al **buscar por medio de argumentos matemáticos la forma o expresión matemática sobre los posibles casos que puede adoptar la *proximidad a la solución general*** $\mathbf{\Psi}(\mathcal{t} + \mathcal{s}) - \mathbf{\Psi}(\mathcal{t} - \mathcal{s}) = \mathbf{0}$, uno de los casos especiales es al considerar dicha expresión al igualarla a cero, al momento de considerar los valores de las abscisas $\mathcal{s} = 0$ y $\mathcal{s} = \ell$.
¿Cómo lo hace?	**Al variar diferentes estados de tiempo** $\mathcal{t}$ desde la primera *proximidad a la solución general***:**

	$\boldsymbol{y(s,t) = \frac{1}{2}\Psi(s+t) + \frac{1}{2}\Phi(s-t)}$ **(**esta expresión es la empleada en este escrito y difiere a la expresada en este apartado de la memoria de D'Alembert, pero que en cuestión de *tratamiento matemático* son equivalentes**)** por medio del método empleado por el autor, de esa misma manera, evidencia la existencia de constantes que estarán presentes en las combinaciones lineales de las funciones $\boldsymbol{\Delta t}$ y $\boldsymbol{\Gamma s}$ las cuales al derivarlas $\boldsymbol{n}$ veces $\frac{d^n \Delta t}{dt^n \Delta t} \cdot \frac{ds^n \Gamma s}{d^n \Gamma s} = \frac{1}{a^n}$ y como $\frac{1}{g} = \frac{1}{a}$, *aseguran* que existe $\frac{1}{g^n} = \frac{1}{a^n} = \mathcal{A}$, de esto se argumenta algebraicamente la *existencia de una constante*, llamada hoy día *constante de separación*.
¿Para qué lo hace?	**La visión de D'Alembert, es encontrar una única expresión analítica que contenga geométricamente a la curva que describe la *proximidad a la solución general***, por lo que el autor, busca matemáticamente esta justificación a partir de considerar la expresión encontrada con las funciones **Ψ** y **Φ (**una vez que realizó el *tratamiento matemático* con el Cálculo Diferencial Parcial e Integración Parcial de Euler**)** y emplear **conservar la continuidad en el sentido de Euler**, además de que durante su *tratamiento matemático* deja las bases de la existencia de la famosa *constante de separación* así la *proximidad a la solución general* se derive $\boldsymbol{n}$ veces en busca de una solución.

En effet ſoit $d^n y = k y\, dx^n$; Mr. *Euler*, a fait voir dans le Tome VII des *Miſcellanea Berolinenſia*, que cette équation s'integroit en ſuppoſant la réſolution de l'équation $f^n = A$, & j'ay montré dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de Pruſſe année 1748. p. 289. que cette équation ſe reduiſoit toujours à l'intégration de n équations ſimples : par exemple ſi $n = 5$, on aura $du = Ay\,dx$; $dr = u\,dx$, $dt = r\,dx$, $ds = t\,dx$, & $dy = s\,dx$. Cette methode eſt ſans doute un peu plus longue que celle de M. *Euler*, mais je la crois auſſi plus rigoureuſe & plus directe, & d'ailleurs elle s'étend à beaucoup d'autres cas que celui, qui eſt l'objet du mémoire de M. *Euler*.

Je n'ay pas beſoin de faire obſerver que l'équation $\frac{1}{a^n} = \frac{1}{g^n}$ eſt beaucoup plus générale que l'équation $\frac{1}{g} = \frac{1}{a}$, puisque celle-cy ne donne qu'une valeur de g en a, & qu'au contraire l'autre donne n valeurs de $\frac{g}{a}$ tant réelles qu'imaginaires ; car $\sqrt[n]{1}$ a n valeurs differentes.

Au reſte, ſi la valeur de g en a doit être réelle, c'eſt à dire, ſi on ſuppoſe g & a réelles, alors g n'aura qu'une ou deux valeurs réelles, ſavoir $+a$ & $-a$; & dans le cas où $g = a$, le problème devient bien plus ſimple ; car alors $\Phi(t+as) + \Psi(t+gs) = \Phi(t+as) + \Psi(t+as) = \Xi(t+as)$; & l'on a $\Xi(t+as) = \Delta t . \Gamma s$; d'où l'on tire

$a = \frac{d\Gamma s . \Delta t . dt}{ds . \Gamma s . d\Delta t}$; & par conſéquent $\Delta t = M c^{tVA}$; & $\Gamma s = M c^{saVA}$.

«En esencia $d^n y = kyx^n$; Mr. Euler, hizo ver en el *Tome VII* de la *Miscellanea Berolinensia*, que esta ecuación se integra suponiendo la resolución de la ecuación $f^n = A$, & yo mostré en las *Mémoires de l'Académie des Sciences de Prusse*, año 1748, p. 289, que esta ecuación se reduce siempre a la integración de n ecuaciones simples: por ejemplo, si $n = 5$, tendremos $du = Aydx$; $dr = udx$, $dt = rdx$, $ds = tdx$, & $dy = sdx$. Este método es un poco más largo que el de Mr. Euler, pero creo que también es más riguroso

y más directo, y además se extiende a muchos otros casos que el que es objeto del escrito de Mr. Euler.

No necesito señalar que la ecuación $\frac{1}{a^n} = \frac{1}{g^n}$ es mucho más general que la ecuación $\frac{1}{g} = \frac{1}{a}$, ya que solo da un valor de g en a, & que por el contrario la otra da n valores de $\frac{g}{a}$ tanto reales como imaginarios; porque $\sqrt[n]{1}$ tiene n valores diferentes. Además, si el valor de g en a debe ser real, es decir, si suponemos que g & a son reales, entonces g tendrá solo uno o dos valores reales, a saber $+a$ & $-a$; & en el caso de $g = a$, el problema se simplifica mucho más, porque entonces $\varphi(t + as) + \Psi(t + gs) = \Phi(t + as) + \Psi(t + as) = \Xi(t + as)$; & tenemos $\Xi(t + as) = \Delta t \cdot \Gamma s$; por lo tanto $a = \frac{d\Gamma s \cdot \Delta t \cdot dt}{ds \cdot \Gamma s \cdot d\Delta t}$; & en consecuencia $\Delta t = \mathcal{M} e^{t\sqrt{\mathcal{A}}}$; & $\Gamma s = \mathcal{M} e^{sa\sqrt{\mathcal{A}}}$.» **[La traducción es nuestra]**

Comentarios Generales:

El autor en este apartado del artículo con base en la *actividad matemática* de Leonhard Euler el Cálculo Diferencial y la Integración Ordinaria establece con los métodos ya conocidos y desarrollados que al resolver la Ecuación Diferencial $f^n = \mathcal{A}$ algebraicamente puede ser expresada por medio de n *diferenciales*, es decir, n ecuaciones simples; además que de este *tratamiento matemático* deriva la existencia de n constantes arbitrarias que arroja el proceso de derivación o integración, netamente, es para justificar la existencia de las constantes que aparecen en la búsqueda de soluciones así como en la reformulación matemática de la expresión f^n, inmersamente de este *tratamiento matemático* nuevos conceptos que emergieron destinaron la formulación cualitativa de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias lineales, como el conjunto que genera a la solución por medio de una combinación lineal, tal y como ya se ha comentado anteriormente.

Dentro de la secuencia del análisis de este artículo, el autor también manifiesta la existencia de valores que «*no son del todo reales*», es decir, habla de los *números imaginarios*, lo que hace en su *actividad matemática* enfrentarse a restricciones en las soluciones de las funciones Ψ, Φ, y por ende en las que genera el método $\Delta t \times \Gamma s$.

Análisis – Artículo 1:

¿Qué hace?	**D'Alembert analiza las "*naturaleza*" de las cantidades (constantes) obtenidas por la generalización $\frac{1}{g} = \frac{1}{a}$, ⋯, $\frac{1}{a^n} = \frac{1}{g^n}$**, en cada integración de las *diferenciales*, que expresan la reformulación Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, cabe aclarar que el objetivo de hallar estas «*constantes*» son

	para expresar las soluciones de $\boldsymbol{\Delta t}$ y $\boldsymbol{\Gamma s}$ en forma de una combinación lineal.
¿Cómo lo hace?	**Emplea las transformaciones de la ecuación $\boldsymbol{f^n = \mathcal{A}}$ a partir de *diferenciales***, las cuales por métodos ya conocidos de integración **(**como el Cálculo empleado por Euler**)** pueden ser resueltas. Observación**:** Cabe aclarar que el autor obtiene los valores de las constantes arbitrarias dadas por $\boldsymbol{g}$ y $\boldsymbol{a}$ a partir del *tratamiento matemático* que se desprende de obtener las raíces de $\sqrt[n]{\mathbf{1}}$, $\boldsymbol{n}$ veces de manera que, si estas dos constantes son iguales y reales, el problema se simplifica para la búsqueda de las soluciones $\boldsymbol{\Delta t}$ y $\boldsymbol{\Gamma s}$.
¿Para qué lo hace?	**Para generalizar que a partir del uso del método $\boldsymbol{n}$ veces, existe la posibilidad de que no todas las soluciones sean inmediatamente naturales**, es decir, al hablar de soluciones reales, D'Alembert, no ve mayor objeción en poder representar de esa forma las soluciones para las funciones $\boldsymbol{\Delta t}$ y $\boldsymbol{\Gamma s}$.

II.

M. *Euler* a traité dans les Mémoires de 1748. le probléme des cordes vibrantes par une methode entierement ſemblable à la mienne, quant à la partie eſſentielle au problème, & ſeulement, ce me ſemble, un peu plus longue. Ce grand Geometre obſerve, comme je l'ay fait art. XXVIII. de mon Mémoire, que la courbe formée par la corde au commencement de ſon mouvement eſt la même courbe que j'ay appellée *génératrice*. Mais je crois devoir avertir icy, de crainte que quelques lecteurs ne prennent mal le ſens de ſes paroles, que pour avoir cette courbe génératrice, il ne ſuffit pas de transporter la courbe initiale alternativement au deſſus & au deſſous de l'axe; il faut de plus que cette courbe ait les conditions que j'ay exprimées dans mon mémoire, c'eſt à dire que ſi on ſuppoſe $y = \Sigma$ pour l'équation de la courbe initiale, il faut que Σ ſoit une fonction impaire de s, & qu'en général les ordonnées diſtantes l'une de l'autre de la quantité $2l$, ſoient égales; ce qui ne peut avoir lieu, à moins que la courbe ne ſoit mechanique, & telle que je l'ay déterminée dans mon Mémoire. Dans tout autre cas le problème ne pourra ſe réſoudre, au moins par ma methode, & je ne ſay méme s'il ne ſurpaſſera pas les forces de l'analyſe connuë. En effet on ne peut ce me ſemble exprimer y analytiquement d'une manière plus générale, qu'en la ſuppoſant une fonction de t & de s. Mais dans cette ſuppoſition, on ne trouve la ſolution du problème que pour les cas où les differentes figures de la corde vibrante peuvent étre renfermées dans une ſeule & même équation. Dans tous les autres cas il me paroit impoſſible de donner à y une forme générale.

II.

Mr. Euler trató en las *Mémories* de 1748 el problema de las cuerdas vibrantes con un método totalmente similar al mío, en cuanto a la parte esencial del problema, & solo, me parece, un poco más largo. Este gran Geómetra observa, como lo hice en el art. XXVIII de mi *Mémoire*, que la curva formada por la cuerda al principio de su movimiento es la misma curva que he llamado la curva *génératrice*. Pero creo que debo advertir aquí, para que algunos lectores no tomen a mal el significado de estas palabras, que para tener esta curva generadora [*génératrice*] es necesario transportar la curva inicial alternativamente por encima y por debajo del eje; además, esta curva debe tener las condiciones que expresé en mi *Mémoire* [trabajo], es decir que asumimos $\boldsymbol{y = \Sigma}$ para la ecuación de la curva inicial, $\boldsymbol{\Sigma}$ debe ser una

función impar de s, y que en general las ordenadas distantes entre sí por la cantidad 2ℓ, son iguales; lo cual no puede ocurrir a menos que la curva se forme mecánicamente, y como determiné en mi *Mémoire*. En cualquier otro caso, el problema no se resolverá, al menos no por mi método, & ni siquiera puedo decir que no superará las fuerzas del análisis conocido. De hecho, no se puede expresar analíticamente de manera más general, sólo con una función de t & de s. Pero en este supuesto, la solución del problema sólo se encuentra en los casos en que las diferentes figuras de la cuerda vibrante pueden estar contenidas en una sola ecuación. En todos los demás casos me parece imposible dar a una *y* en una forma más general. **[La traducción es nuestra]**

<table>
<tr><td colspan="2"><u>Comentarios Generales:</u>
Este es el artículo que reúne la esencia epistemológica del método empleado por D’Alembert, a partir del conjunto de razonamientos que él mismo sentó sobre la forma inicial de la cuerda, por medio de la función y denotada como la proximidad a la solución general, a partir de las características de la función Ψ, impar y periódica con periodo $2a$, a continuación los siguientes cuestionamientos analíticos, permitirán conocer los cimientos que conllevarán a formular la hipótesis epistemológica de esta investigación.</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Análisis – Artículo 2:</u></td></tr>
<tr><td>¿Qué hace?</td><td>Aunque el autor, en este segundo artículo de los cuatro que comprende esta memoria, destinada a mostrar las bases epistemológicas de la génesis del MSV, comenta una serie de argumentos con base en su actividad matemática (Ecuaciones Diferenciales Parciales, al involucrar evidentemente otras áreas prolíficas de la Matemática del Siglo XVIII) y su tratamiento matemático (al ser este en su mayoría geométrico, algebraico y constructivamente funcional, en vísperas de la consolidación del Análisis Matemático). Geométricamente, D’Alembert dispuso establecer la construcción del modo fundamental (inicial) de la cuerda vibrante y las posteriores reproducciones de este, como una cicloide alargada, una vez que hizo el cambio de variable al eje s fijó paralelas como ordenadas en cada punto</td></tr>
</table>

	recorrido por s en varios instantes de tiempo t **(**como se comentó al inicio de este análisis dialéctico con el Artículo 1.**)**, de esta memoria.
¿Cómo lo hace?	**Dibujó estas paralelas en el *modo fundamental,* y otro modo "arbitrario" dibujado por encima del fundamental, con la condición de que sus extremos coincidan en los extremos de la cuerda (modo fundamental) cuando es puesta en vibración; funcionalmente estos modos son *sinusoidales,* y geométricamente describen una *cicloide***, con la finalidad de mantener una equivalencia en las razones entre los puntos intersecados en cada modo que forman segmentos de estas rectas paralelas, **(**es decir, en el fundamental y el arbitrario**)**.
¿Para qué lo hace?	El razonamiento de D'Alembert, en una primera instancia está un **«***tanto alejado***»** de concepciones físicas al *Problema de la Cuerda Vibrante*, sin embargo, el haberse involucrado en este lo conllevó en hipotetizar las características físicas del problema, en conjunto con sus construcciones geométricas **(***tratamiento matemático***)**; **D'Alembert, se percata que además de que y es una *función impar con periodo* $2a$, esto debe suceder si y solo si a menos que la curva sea mecánica (*no analítica*) «observe que idirectamente está consciente de la existencia de la *continuidad* que deben poseer las funciones Ψ (curvas generadoras) y por ende y, tiene como finalidad de incluir todas las formas (geométricas) en una *misma ecuación*.**

III.

Dans le Mémoire que j'ay donné ſur la vibration des cordes, j'ay trouvé qu'en ſuppoſant la force de tenſion $= pml$, l la maſſe de la

359

corde, T le tems d'une vibration de la corde, θ le tems employé par un corps peſant à tomber de la hauteur a, on a θ: $T = V 2aml : l$. En général ſoit Φ la force de tenſion ou le poids qui lui ſeroit égal, M la maſſe de la corde, on aura au lieu de $\frac{pml}{l}$, $\frac{\Phi}{M}$; & au lieu de de ml, $\frac{l\Phi}{Mp} = \frac{l\Phi}{P}$, en nommant P le poids de la corde, donc θ: $T = V \frac{2al\Phi}{P} : l$; donc $T = \frac{\theta l V P}{V 2al\Phi}$: or ſi $\theta = 1^{\text{ſec.}}$ on aura $a = 15$ pieds à peuprés: donc on a $T = 1^{\text{ſec.}} \cdot \frac{V l}{V 30} \cdot \frac{V P}{V \Phi}$,

III.

«En la *Mémoire* que di sobre la vibración de la cuerda, encontré que asumiendo la fuerza de tensión $= \boldsymbol{pml}$, $\boldsymbol{l}$ la masa de la cuerda, $\boldsymbol{T}$ es el tiempo de una vibración de cuerda, $\boldsymbol{\theta}$ los tiempos usados por un cuerpo pesado cayendo de la altura a, tenemos $\boldsymbol{\theta : T} = \frac{\sqrt{2aml}}{l}$. En general, si $\boldsymbol{\varphi}$ es la fuerza de tensión o el peso igual a ella, $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ es la masa de la cuerda, tendremos en lugar de $\frac{pml}{l}$, $\frac{\varphi}{\mathcal{M}}$; & en lugar de $\boldsymbol{ml}$, $\frac{l\varphi}{\mathcal{M}p} = \frac{l\varphi}{\mathcal{P}}$, al nombrar con $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ el peso de la cuerda, hecho $\boldsymbol{\theta : T} = \sqrt{\frac{2al\varphi}{\mathcal{P}}} : \boldsymbol{l}$; hecho $\boldsymbol{T} = \frac{\theta l \sqrt{\mathcal{P}}}{\sqrt{2al\varphi}}$: o si $\boldsymbol{\theta = 1\ seg}$, tendremos $\boldsymbol{a = 15\ pies}$ después de unos segundos: hecho tenemos $\boldsymbol{T} = \mathbf{1}\ \boldsymbol{seg} \cdot \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{30}} \cdot \frac{\sqrt{\mathcal{P}}}{\sqrt{\varphi}}$, cualquiera que sea la figura de la cuerda;…» **[La traducción es nuestra]** [La continuación del análisis dialéctico de este tercer artículo, se vincula como sigue la siguiente parte seccionada]

quelque figure que prenne la corde ; cette équation aura du moins lieu, ſi la figure de la corde eſt renfermée dans l'équation générale que j'ai déterminée dans mon Mémoire. Il eſt même bien vraiſemblable qu'en général quelque figure que la corde prenne, le tems d'une vibration ſera toujours le même ; & c'eſt ce que l'experience paroit confirmer ; mais cequ'il ſeroit difficile, peut-être impoſſible, de démontrer en rigueur par le calcul. Au reſte on pourroit faire telle hypotheſe pour reſoudre ce problème, qui donneroit une valeur de T differente de celle que nous venons de trouver ; par exemple, ſi on régardoit la corde comme un fil élaſtique ſans maſſe, tendu par une force Φ, & chargé en ſon milieu d'un poids $= P$, on trouveroit, en appellant 2π le rapport de la circonference au rayon, que le tems d'une vibration ſeroit $1^{\text{ſec.}} \cdot \frac{V l}{2 V 15} \cdot \frac{\pi V P}{V \Phi}$; expreſſion differente de la précedente, & qui par conſéquent donneroit une valeur fauſſe pour le tems des vibrations de la corde. Je crois donc que ſi on veut déterminer les vibrations de la corde par la methode que j'ay expoſée à la fin de mon Mémoire, art XLIV ; il ne ſuffit pas de ſuppoſer la corde chargée de deux ou trois poids, mais il en faut ſuppoſer un nombre

360

aſſez conſidérable, ſans quoy il y auroit à crainre que le problème ne fut pas aſſez exactement réſolu.

esta ecuación tendrá lugar al menos, si la figura de la cuerda está contenida en la ecuación general que he determinado en mi *Mémoire*. Es incluso muy probable que en general, sea cual sea la cuerda, el tiempo de una vibración sea siempre el mismo; & esto es lo que la experiencia parece confirmar; pero lo que será difícil, quizás imposible, de demostrar en rigor por cálculo. Además, podríamos hacer tal hipótesis para resolver este problema, que da un valor de $\boldsymbol{T}$ diferente al que acabamos de encontrar: por ejemplo, si miramos la cuerda como un alambre elástico, estirado por una fuerza $\boldsymbol{\varphi}$, & cargado en el medio con un peso $= \boldsymbol{P}$, uno podría encontrar, llamando $\boldsymbol{2\pi}$ a la relación de la circunferencia al radio, que el tiempo de una vibración sería $\mathbf{1}\,\boldsymbol{seg} \cdot \frac{\sqrt{\ell}}{2\sqrt{15}} \cdot \frac{\pi\sqrt{P}}{\sqrt{\varphi}}$; expresión diferente a la anterior, y que por consiguiente da un valor erróneo para el tiempo de las vibraciones de la cuerda. Creo que si se quiere determinar las vibraciones de la cuerda por el método que expuse al final de mi

Mémoire, art. XLIV; no es difícil suponer un número suficientemente considerable, sin temer que el problema no se haya resuelto con suficiente precisión. **[La traducción es nuestra]**

Comentarios Generales:	
En este tercer artículo que comprende la memoria de D'Alembert, él, expone con base en las características físicas del problema asociado a la *fuerza de tensión* como parte epistemológica central en la descripción de la dinámica del fenómeno que produce la cuerda vibrante, en ella, contempla elementos del sistema físico como la gravedad, la masa de la cuerda y los tiempos de vibración. Una vez establecida la idea de temporización, es decir, al considerar diferentes tiempos t, el razonamiento deductivo empleado por D'Alembert, es estrechamente geométrico-algebraico con dotes de argumentos *funcionales* **(**por en Análisis Matemático**)**, ubicándolo así a esclarecer argumentos sobre cómo tenían que ser los tiempos subsecuentes de vibración **(**epistemológicamente hoy día puede pensarse esto sobre todas las funciones trascendentes con su *periodo* en el plano xy**)**, al tomar en cuenta las diferencias que esto acarrea en considerar otro material con el que esté hecho la cuerda **(**pensamiento físico asociado a las características físicas del material, no del todo inconsciente por D'Alembert**)**.	
Análisis – Artículo 3:	
¿Qué hace?	**D'Alembert, a partir de suponer un distinto material con el cual podría estar hecha la cuerda, menciona que los tiempos de vibración podrían ser diferentes (sufrir una variación)**, por lo que, al evocar este tipo de razonamientos, propician que el método empleado para encontrar soluciones D'Alembert, no puedan ser tan precisas a las ya esperadas **(**conocidas**)**.
¿Cómo lo hace?	**Emplea una hipótesis para T donde considera a la cuerda como un alambre elástico, estirado a una cierta fuerza, y cargado en el medio con un cierto peso**, podría esperarse que el tiempo de vibración puede ser el mismo al ya obtenido a los inicios de este artículo, pero que al haber partido de esta evocación de considerar otro material, el autor muestra bajo el método

	empleado que no podrían considerarse en una misma ecuación **(***expresión analítica***)** el conjunto de características físicas que reúne el *Problema de la Cuerda Vibrante*.
¿Para qué lo hace?	**Para dejar en claro que las características físicas de la cuerda, como el material que está hecha, influirá en la solución de la Ecuación Diferencial que matematiza la dinámica del problema**, aunada a las condiciones **(**iniciales y de frontera como hoy día se conocen**)**.

Una de las observaciones en este apartado del artículo, es la siguiente, al precisar una vez más sobre el tipo de pensamiento que D'Alembert poseía a lo largo de su obra matemática, cabe aclarar que él se había enfrentado a incluir las interpretaciones físicas del problema, situación que no acarreó mayor dificultad a lo largo de su trabajo, especialmente al contexto de la naturaleza *física-matemática* que el *Problema de la Cuerda Vibrante* involucra.

El claro ejemplo, fue en este artículo de su memoria, pensar sobre los tiempos de vibración **(***periodo***)** que produce la dinámica de la cuerda vibrante en relación a las características físicas de la cuerda **(**alambre elástico**)**, para ello, hoy día se considera que estos elementos propician significar la solución de la matematización del problema, en este caso, la *ecuación de onda*, D'Alembert por eso es que fue el primero en reunir todas las características físicas que asocien al sistema inicial del problema, al incluir así también el comportamiento de las condiciones iniciales y de frontera que en esencia epistemológica describen el problema.

Finalmente, el último artículo que se da a continuación de la memoria de D'Alembert, se observa que, dentro de su epistemología central del *Problema de la Cuerda Vibrante*, es la solución que de este devenga, la cual, es caracterizada en esta investigación como una *aproximación a la solución general*, de la que se obtiene una notación funcional, capaz de incluir "*bajo ciertas características*" por medio de $\boldsymbol{\Delta t \cdot \Gamma s}$ **(**véase la subsección **5.3** de este capítulo**)**.

IV.

Il eſt viſible par les formules précedentes qu'à tenſion & à groſſeurs égales le nombre de vibrations dans un même tems eſt en raiſon inverſe de la longueur des cordes. Comme le ſon plus ou moins aigu des cordes dépend du nombre de vibrations plus ou moins grand qu'elles ſont dans un tems donné, c'eſt ſans doute pour cette raiſon que quelques Auteurs modernes très habiles ont cru pouvoir répreſenter les ſons par les logarithmes des rapports de la longueur des cordes. Cette idée eſt ingénieuſe, & paroit même fondée ſur la maniere de parler uſitée en acouſtique & en muſique, lors qu'on dit que ſi quatre cordes *a*, *b*, *c*, *d*, ſont en proportion Geometrique, l'intervalle des ſons rendus par *a* & par *b*, ſera *égal* à l'intervalle des ſons rendus par *c*, & par *d*; d'où l'on a cru pouvoir conclure que les logarithmes des rapports $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, répreſentoient les intervalles des ſons. Mais on n'a pas prétendu ſans doute, que cette concluſion fût autre choſe qu'une ſuppoſition purement arbitraire, les mots *d'intervalle* des ſons, *d'égalité* ou de *difference des intervalles*, ne ſont que des manieres de parler abrégées, aux quelles il ne faut pas attribuer plus d'etenduë qu'elles n'en ont. Les ſons ne ſont que des ſenſations, & par conſéquent n'ont réellement aucun rapport entr'eux; on ne peut pas comparer les ſons plus que les couleurs, il ne faut qu'un peu d'attention pour le ſentir; de plus, quand ils auroient entr'eux quelque rapport, ce ſeroit fort improprement qu'on repréſenteroit ce rapport par des logarithmes, comme je l'ay fait voir dans un autre Ecrit, où j'ay examiné ſi les logarithmes ſont réellement la meſure des rapports.

IV.

«Se puede ver en las fórmulas anteriores que a igual tensión y ritmo el número de vibraciones en los mismos tiempos es el inverso de la longitud de la cuerda. Como el sonido más o menos agudo de las cuerdas depende del número más o menos de las vibraciones que tienen en un determinado tiempo, esta es probablemente la razón por la que algunos autores modernos muy hábiles creyeron que podían representar los sonidos por los logaritmos de las relaciones de las longitudes de las cuerdas. Esta idea es ingeniosa, y parece basarse incluso en la forma habitual de hablar en la música, cuando se dice que si cuatro cuerdas ***a***, ***b***, ***c***, ***d*** suenan en proporción geométrica, el intervalo de los sonidos emitidos por ***a*** & por ***b***, será igual al

intervalo de los sonidos emitidos por c, & por d; a partir de lo cual se pensó que era posible concluir que los logaritmos de las proporciones $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, representan los intervalos de los sonidos. Pero probablemente no se ha afirmado que esta conclusión no sea más que una suposición puramente arbitraria, que las palabras *intervalos de sonidos*, *igualdad* o *diferencia de intervalos*, son sólo formas de hablar de manera abreviada, a las que no se debe atribuir más rango del que tienen. Los sonidos son solo sensaciones y, por consiguiente, no tienen realmente ninguna relación entre ellos; no se pueden comparar los sonidos más que los colores, solo se necesita un poco más de atención para aclararlos; además, cuando tienen alguna relación entre ellos, sería muy impropio representar esta relación por medio de logaritmos, como he mostrado en otro escrito, donde he examinado si los logaritmos son realmente la medida de las relaciones.**»** **[La traducción es nuestra]**

Comentarios Generales:

D'Alembert, en este último artículo con que cierra su *tercera memoria*, comenta la imposibilidad de establecer alguna relación matemática de los sonidos con los logaritmos con base en su *actividad matemática* **(**como trabajos de Teón de Esmirna bajo la influencia pitagórica**)**, sin embargo, algo que sobresale de ello y que es importante comentar es papel epistemológico de la *práctica* que se ha identificado a lo largo de todo el análisis histórico-epistemológico hecho al *Problema de la Cuerda Vibrante*, la *Teoría Musical*, al ser un cimiento esencial para poder entender y comprender la *física-matemática* del *marco de referencia*, la *Teoría de la Vibración*.

Hasta este momento D'Alembert, enfatiza a dicha *práctica* de manera indirecta como una forma de entender el conocimiento científico que se ha derivado de ella a lo largo de varios siglos, y aunque el autor no lo comenta, él, está consciente que el trabajo delegado de ella hasta el Siglo XVIII, permitió comprender su *evolución epistemológica*, desligándola ya de toda concepción filosófica que durante muchos años prevaleció de ella.

Este último artículo pone al realce los últimos comentarios hechos por D'Alembert al justificar la manera en que emerge el **Método de Separación de Variables (MSV) (**conocido así hoy día**)**, pero que a raíz de poder develar una justificación matemática, evocada por sus razonamientos conllevó al **Método de los Multiplicadores** a una visible evolución epistemológica derivada de su *tratamiento matemático* **(**geométrico-algebraico y *funcional***)**, respecto al *Problema de la Cuerda Vibrante*, donde este permitió evidentemente que D'Alembert encontrara en su *proximidad a la solución general* términos expresados en una Serie Trigonométrica Infinita años más tarde.

Análisis – Artículo 4:	
¿Qué hace?	Dado el artículo anterior **(**III**)**, para encontrar los tiempos de vibración de una cuerda, el autor comenta la existencia de una relación que, a igual tensión y número de vibraciones en un mismo tiempo, es el inverso de la longitud de la cuerda. **Esta afirmación hecha por D'Alembert conlleva a *poner* como ejemplo *no aprobado*, que los sonidos podían representarse por los logaritmos de las relaciones de las longitudes de las cuerdas.**
¿Cómo lo hace?	**Esta negación parte del proponer que, si cuatro cuerdas suenan en proporción geométrica, pueden ser denotadas por sus intervalos de los sonidos que emiten por a, b, c y d**, al expresar estas relaciones como $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ las cuales representan dichos intervalos.
¿Para qué lo hace?	**Para afirmar que los sonidos son solo sensaciones** y no se les debe atribuir más rango del que pueden tener, no se pueden comparar los sonidos **y en dado caso de que posean una relación más general sería muy impropio representarlos por medio de logaritmos.**

Como podrá percatarse el lector, el *método* empleado con base en la *metodología* para realizar el *análisis dialéctico* de la obra matemática de D'Alembert desde la **S*ocioepistemología***, permite responder bajo la mirada del investigador, contextualizar la *actividad matemática* de la época, así el *Problema de la Cuerda Vibrante*, históricamente está situado, se aprecia el cambio epistemológico trascendental del Cálculo al Análisis Matemático con el concepto de *función*, por lo que en este momento para culminar con el análisis dialéctico es necesario también dejar por sentado que *no se pretendió desde los mismos argumentos analíticos* [Cantoral et al. **(**2015**)**] identificar *acciones* para así definir

actividades **(**en el nivel de actividad humana**)** hecha por D'Alembert, sino que se pretende generar un puente para la Construcción Social de Conocimiento Matemático que se detalla en el **Capítulo 6. Conclusiones de la Investigación**, pero no antes, detallar una *caracterización de acciones y por ende actividades* a lo largo de la *actividad matemática* y de su *tratamiento matemático* realizado por D'Alembert en el *Problema de la Cuerda Vibrante*, en su tercera memoria, antes analizada.

***Tabla* 6.** *Caracterización de acciones y actividades con relación al análisis dialéctico en la obra de Jean le Rond D'Alembert.*

<table>
<tr><td colspan="3">Caracterización de Acciones y Actividades identificadas en la obra: Addition au memoire sur la courbe que forme une corde tenduë, mise en vibration de Jean le Rond D'Alembert, al tomar como punto de partida para el análisis dialéctico la proximidad a la solución general, en donde el MSV lo justifica en su empleo como una manera de generalizar la solución a partir de tener en mente el vínculo de la actividad matemática del Siglo XVIII, es decir, el naciente papel del Análisis Matemático, lo conllevó a justificar geométricamente la búsqueda de soluciones en el sentido Euleriano continuas (conocidas hoy día como diferenciables) y discontinuas (hoy día funciones analíticas continuas por partes) e incluirlas a todas estas en una misma expresión analítica.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Ecuación Diferencial que describe la dinámica del Problema de la Cuerda Vibrante:</td><td colspan="2"><u>Ecuación de onda en una dimensión:</u></td></tr>
<tr><td>Notación Matemática del Siglo XVIII</td><td>Notación Matemática Actual</td></tr>
<tr><td></td><td>$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{ds^2}$</td><td>$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial s^2}$</td></tr>
<tr><td>Proximidad a la solución general:</td><td colspan="2">$y(s,t) = \Psi(s+t) + \Phi(s-t)$</td></tr>
<tr><td>Proximidad a la solución general (una vez ya introducidas las características físicas del problema):</td><td colspan="2">$y(s,t) = \Psi(t+s) - \Psi(t-s)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Características matemáticas encontradas por D'Alembert de la función solución y respecto de la función Ψ:</td><td colspan="2">Ψ posee las características de ser en el plano ST:</td></tr>
<tr><td>Impar</td><td>Periódica con periodo $2a$</td></tr>
<tr><td>D'Alembert busca por medio de un escenario geométrico-analítico la forma analítica de la solución que contenga a todas las funciones Ψ:</td><td colspan="2">Él propone que a fines de encontrar una única expresión analítica en donde las diferentes formas que puede adoptar la cuerda vibrante deben incluirse en:</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>$y(s,t) = \Psi(t+s) - \Psi(t-s)$</td><td>$\Psi(t+s) - \Psi(t-s)$
por medio de equivaler:
$\Psi(t+s) - \Psi(t-s) = \Delta t \times \Gamma s$</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Recuerde que el pensamiento de D’Alembert, una vez aceptado el de Euler epistemológicamente tuvo una resignificación progresiva al incluir las funciones discontinuas cognitivamente aceptadas bajo la continuidad en el sentido Euleriano.</td><td>Por otro lado, al hablar sobre la solución y, se tiene que:
<table><tr><th>Notación Matemática del Siglo XVIII</th><th>Notación Matemática Actual</th></tr><tr><td>$\frac{dy}{dt} = \Psi(s+t) + \Phi(s-t)$
$\frac{dy}{ds} = \Psi(s+t) - \Phi(s-t)$</td><td>$\frac{\partial y}{\partial t} = \Psi(s+t) + \Phi(s-t)$
$\frac{\partial y}{\partial s} = \Psi(s+t) - \Phi(s-t)$</td></tr><tr><td>$\frac{d^2y}{dt^2} = \Xi(s+t) + \Xi(s-t)$
$\frac{d^2y}{ds^2} = \Xi(s+t) - \Xi(s-t)$</td><td>$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \Xi(s+t) + \Xi(s-t)$
$\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} = \Xi(s+t) - \Xi(s-t)$</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Estas expresiones en su momento indicaron que deben poseer una discontinuidad; el razonamiento de D’Alembert, <u>fue en afirmar que toda función que cambie de expresión no debe ser aceptada</u>, por ello, la dificultad radicaba en determinar la primera (velocidad) y segunda derivada (aceleración) de estas funciones, sin embargo, actualmente esto es visto desde el punto de vista de existencia de la derivada que de discontinuidad en el sentido Euleriano.</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Comentario General</u>: Como sostiene Farfán (2012), que la importancia de las clases de las funciones diferenciables, continuas y discontinuas, dependen de la existencia e igualdad o desigualdad de los valores del límite por la izquierda y por la derecha de una función y de su derivada en un punto dado (p. 64). Lo anterior hoy día se argumentaría con bases de la Matemática Actual en crítica a la controversia que suscitó la solución, sin embargo, la esencia misma del tratamiento matemático hecho en esa época radica en las limitaciones sobre la actividad matemática del Siglo XVIII por una determinada situación histórica y que no es de atención propia obscurecer dicha epistemología matemática.</td></tr>
<tr><td>¿Cuál es la esencia del funcionamiento de $\Delta t \times \Gamma s$?</td><td>Dado que:
$y(s,t) = \Psi(t+s) - \Psi(t-s)$
geométricamente debe transportarse por encima y debajo del eje S, D’Alembert,</td></tr>
</table>

	incluye este «*producto*» como una manera de incluir a todas las funciones *sinusoidales* **(**desde el modo fundamental de la cuerda, es decir, el Tayloriano y los subsecuentes**)** que cumplan la ley de continuidad en el sentido Euleriano, a fin de evitar lo que en el sentido moderno se diría como *discontinuo*, dado que la descripción geométrica a la solución no depende del *tiempo*, al poderse concluir que las características físicas del fenómeno, propician caracterizar como un producto la solución.

<u>*Observación General*</u>**:** El *objeto matemático* de estudio es el **M**étodo de **S**eparación de **V**ariables **(MSV)**, conocido en sus inicios en el Siglo XVIII como el *método de los multiplicadores*, herramienta geométrica-algebraica empleada para D'Alembert, en la *proximidad a la solución general* **(**la que incluye las características físicas del problema**)** como una manera de sustentar la *generalización* de su solución por medio de la concepción de continuidad en el sentido Euleriano, a las funciones discontinuas.

Una de las evoluciones epistemológicas que tuvo el método, fue precisamente el nombre con el que hoy día se conoce, en un principio el método alude precisamente a la búsqueda de *funciones doblemente diferenciables* o *continuamente diferenciables*; hoy día, se sostiene incluso, derivado de esto que $\boldsymbol{\mathcal{U}(x,t)}$ es solución de una EDP lineal, homogénea de segundo orden, la cual debe ser de *principio* de clase $\boldsymbol{\mathcal{C}^2}$.

Otra de las resignificaciones que tuvo el *objeto matemático*, es respecto a su notación, hoy día es posible *suponer* una solución de la forma $\boldsymbol{\mathcal{U}(x,t) = \mathcal{X}(x) \cdot \mathcal{T}(t)}$, donde cada una de las funciones $\boldsymbol{\mathcal{X}(x)}$ y $\boldsymbol{\mathcal{T}(t)}$ son independientes en sus variables, para buscar precisamente cumplir que en el producto la función se transforme a ser *continuamente diferenciable*, la notación funcional actual $\boldsymbol{\mathcal{X}(x)}$ y $\boldsymbol{\mathcal{T}(t)}$ no acarrea mayor problema hoy día, *empero* la notación del Siglo XVIII, $\boldsymbol{\Gamma s}$ y $\boldsymbol{\Delta t}$ podrían ser vistas como incrementos.

Una vez más resignificamos el papel de la Matemática del Siglo XVIII y Actual como una manera incesante en su objetividad de la época que atañe a los problemas de ese momento en cuestión, donde la evolución y resignificación de los nuevos objetos y conceptualizaciones matemáticas conllevan plausiblemente a una mejor comprensión para evadir ambigüedades simbólicas.

***Acciones* (*heurísticas*) inferidas por el autor:**	***Actividades* caracterizadas a partir de haber fijado el conjunto de acciones realizadas por el autor:**
El haber tenido contacto directo con la obra, crea una sensibilización desde la postura teórica, en la que la investigación está ubicada a fin de generar una **CSCM**, a partir de vincular el escenario del *Problema de la Cuerda Vibrante*, en su tercera memoria. Se han identificado algunas heurísticas, como la *comparación* entre las ordenadas que geométricamente envuelven al *modo fundamental* y a otro arbitrario por encima de este, al buscar justificar por medio de *particionar* las longitudes de estas paralelas sin importar la distancia que las depare a cada una de ellas, como se distingue estas dos acciones son directamente ejecutadas en el modo fundamental de la cuerda, para buscar argumentos basados en proporción la construcción del método que conlleven a justificarlo algebraicamente por medio de incluir todas las expresiones analíticas que sean continuas en el sentido Euleriano, lo que hizo D'Alembert fue precisamente *percibir* el tan alejado concepto de *función* en la época. Dentro de su tratamiento algebraico, *determina* aquellas diferentes condiciones por medio del «álgebra» como *operar* con los diferentes términos de las expresiones a partir de las operaciones desde el miembro de la igualdad en el que se encuentren. La esencia de su memoria, es precisamente, poder vislumbrar el *comportamiento* con	A partir de haber fijado esa serie de *acciones*, se perfila una caracterización de actividades, la primera de ellas, es la *construcción* **(***construye geométricamente***)**, en el sentido geométrico de la periodicidad de la función $\boldsymbol{\Psi}$ que intrínsecamente está fijada desde el primer modo fundamental de la cuerda vibrante, otra de las actividades que se pueden mirar a lo largo del análisis dialéctico es que D'Alembert *relaciona* los diferentes modos de la cuerda vibrante con los subsecuentes, todo esto centrado en la solución **(**o soluciones, vistas actualmente como una suma infinita, por la *superposición de ondas***)** de lo que se logra derivar hoy día lo que se conoce como la Serie Trigonométrica de Fourier, para encontrar los subsecuentes modos de la cuerda vibrante en la solución *multiplica* cada instante de tiempo, por la posición que adopta la cuerda conforme está sometida a una cierta tensión $\boldsymbol{(\Gamma s \times \Delta t)}$. A fin de esclarecer la intención del autor durante su *tratamiento matemático* en su obra, él sostiene que su método puede no funcionar, cuando se contempla otro material de la cuerda, por lo que lo geométrico y lo analítico, son escenarios que *conmensura* el autor como una condición para *generalizar* su solución por medio del *tratamiento matemático* adoptado en la época, pese a las limitaciones

base en el Análisis Matemático de la época la *proximidad a la solución general*.	conceptuales existentes, esto es visto como parte de su *proceso cognitivo* derivado de su razonamiento al estudio del *Problema de la Cuerda Vibrante,* una vez que contempla las condiciones físicas a la solución del mismo.

5.3 Configuración de la hipótesis epistemológica

> "*¿Cómo puede ser que la Matemática, siendo al fin y al cabo un producto del pensamiento humano independiente de la experiencia, esté tan admirablemente adaptada a los objetos de la realidad?*" – *Albert Einstein*

El *Problema de la Cuerda Vibrante*, permite brindar como uno de los resultados de esta investigación plantear una *posible hipótesis epistemológica*, que es derivada, para su *configuración* por medio del *análisis histórico-epistemológico*, al ubicar la *actividad matemática* presente por el uso del **MSV** en la **M**atemática **E**scolar actual en ramas de la Matemática como las Ecuaciones Diferenciales Parciales o el Análisis de Fourier, a lo que se suma de manera estrecha la relación que se sostiene respecto a la génesis epistemológica de este *objeto matemático*, ubicado históricamente sobre los inicios del *marco de referencia*, la *Teoría de la Vibración*, para ello, es conveniente, que dado el actor principal a esta controversia suscitada en el Siglo XVIII por ser el primero en brindar de forma completa la matematización a dicho problema y en consecuencia en dar una *proximidad a la solución general*, para justificar la manera en que el **M**étodo de **S**eparación de **V**ariables surge, se ha planteado como *posible hipótesis epistemológica***:**

> **«***El* **M***étodo de* **S***eparación de* **V***ariables* **(MSV)** *nace en un escenario geométrico-analítico, respecto al fenómeno de la vibración, al tomar en cuenta que su dinámica involucra dos variables una espacial y otra respecto al tiempo. Este método es visto como un algoritmo que permite introducir como su solución el producto de dos funciones las cuales son independientes en sus variables, en donde su función solución las deberá incluir en una misma ecuación* **(***expresión analítica***)**. *La geometría de la función respecto a la variable espacial puede poseer saltos en los que no esté definida o sea discontinua* **(***vista en el sentido Euleriano***)** *esto es, debido a las características físicas asociadas al fenómeno, donde el tiempo al ser una variable que toma valores continuos no afectan a la descripción de la curva mecánica generada por el fenómeno, la cual deberá transportar a la curva inicial* **(***sinusoidal***)** *por encima y debajo del eje de las abscisas, y que su algebrización permite encontrar los coeficientes en las variables de*

> *las funciones producto, que representan los modos que produce el fenómeno una vez que se introduzcan las condiciones iniciales y de frontera a la solución del problema.***»**

La configuración de la hipótesis antes dicha, está centrada con relación a la *actividad matemática* propia de la época en suma relación al *fenómeno físico* enmarcado en el *marco de referencia*, la *Teoría de la Vibración*, que atiende específicamente la controversia suscitada, por lo que conceptualmente es referida en relación a los conceptos que tomaron auge en el Siglo XVIII como el concepto de función, según Euler, adoptado por D'Alembert en el resultado de sus investigaciones al problema, así como a las condiciones a las cuales está sujeta la matematización del fenómeno.

Esta *posible hipótesis epistemológica*, se ha planteado a fines de haber realizado un primer acercamiento *histórico-epistemológico* al *Problema de la Cuerda Vibrante*, centrado al *objeto matemático* de estudio, el **MSV**. Tal problema conllevó a la Matemática del Siglo XVIII, a cambios sustanciales tanto de génesis con nuevos *objetos matemáticos*, como de evolución pragmática en el papel del Cálculo Algebraico que había prevalecido hasta el Siglo XVIII con el surgimiento inminente del Análisis Matemático.

Las nuevas ramas **(**o áreas**)** de la Matemática que comenzaban a tomar un auge y una acogida por la comunidad matemática de esa época, y que, así como las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, los matemáticos no "*crearon de forma consciente*" las Ecuaciones Diferenciales Parciales, sino que continuaron sus miradas sobre *fenómenos físicos* que antes ya habían explorado, como, por ejemplo, las antesalas al *Problema de la Cuerda Vibrante*, se ubican los trabajos de la catenaria o braquistócrona.

El contexto que estaban trastocando los interesados en esta nueva rama de la Matemática, permitieron poseer una mejor comprensión del mundo natural que les rodeaba, y por ende de los *fenómenos físicos* por medio de *principios físicos* en vínculo con una sustentación matemática más consolidada para ese entonces, por ello, lo que se conoce hoy día de esta rama de la Matemática, son una serie de principios en un contexto *físico-matemático* que involucran de manera inmediata a las Ecuaciones Diferenciales Parciales.

El caso del *Problema de la Cuerda Vibrante*, fue pieza central en el cambio de paradigma de *pensamiento físico* y *matemático* del ser humano para conllevar a los actores interesados en este problema del Siglo XVIII, a dar una solución a dicha controversia, este cambio, *alude precisamente a la reunión de una desvinculación de estudio*, es decir, estudiar por separado el desplazamiento de una cuerda en vibración en función del tiempo y en función de la distancia de un punto de la cuerda a un extremo conllevó a una evolución matemática para reunir en conjunto el desplazamiento, en función de las dos variables fue

sin duda el primer intento de comprender a esta nueva rama de la Matemática, las Ecuaciones Diferenciales Parciales.

Al comprender, epistemológicamente el problema y al ubicar su estudio condujo a las Ecuaciones Diferenciales Parciales en la misma brecha histórica a tornarse ser un área prominente de la Matemática del Siglo XIX, en donde el estudio físico del sonido que produce la cuerda vibrante reunió contextos como *medios naturales de propagación* una vez conocida la teoría *física* y *matemática* que le rodeaba al fenómeno, y donde se reivindica aún más el papel del *marco de referencia*, la *Teoría de la Vibración*, en medios como el *aire*, con el uso de los instrumentos de viento como tubos de órgano, campanas, tambores, etc.

En términos de la Física se sabe que el *aire* y los *líquidos* son fluidos, el primero de ellos, resulta ser *comprimible*, mientras que los líquidos, son considerados *incompresibles*, por ello, las *leyes de movimiento* que los rigen en su funcionalidad epistemológica, involucran directamente al efecto físico que producen, la *propagación de ondas*, derivado de este estudio, se ven constituidos *marcos de referencia*, dentro de la Física, como lo es la *Teoría de la Vibración* **(**Mecánica Clásica**)** y la *Hidrodinámica* **(**Mecánica de Fluidos**)**, por lo que su descripción matemática de estos marcos de referencia constituyen temas centrales de estudio de las Ecuaciones Diferenciales Parciales.

Capítulo 6. Conclusiones de la Investigación

"*Las matemáticas poseen no sólo la verdad, sino la suprema belleza, una belleza fría y austera, como una tumba.*" — *Bertrand Russell*

Al llegar a este momento de la investigación, se recapitula en síntesis los resultados obtenidos a lo largo del estudio *histórico-epistemológico* hecho en relación al *objeto matemático* que atiende este proyecto, el **M**étodo de **S**eparación de **V**ariables **(MSV)**, por lo que surge de manera natural a partir de la postura teórica, generar una Construcción Social de Conocimiento Matemático **(CSCM)**, a través de poder dejar en claro los elementos, factores y circunstancias socioculturales y epistemológicas que formaron parte del ser el puente de acción de la Matemática del Siglo XVIII, con el *Problema de la Cuerda Vibrante*.

Conocer desde un principio la manera en que tenía que ser atendida la problemática propició adentrar a conocer la historia del *Problema de la Cuerda Vibrante*, en sus dos vertientes en las que se posiciona**:** *históricamente situado* y *epistemológicamente evolucionado*, es decir, la primera vertiente atiende claramente, sobre sus orígenes, en sumo apego a su evolución epistemológica por parte de los actores participantes asociados a las ideas *físicas* y *matemáticas* que en contexto formulan al problema. Al tocar así la sensibilidad de las *rutas históricas* identificadas a lo largo del análisis, las cuales abren brecha sobre el conocer la manera en que el ser humano a lo largo del tiempo, de su historia y de su pensamiento a conllevado a su forma de vida a un visible progreso.

Desde siempre el ser humano ha tenido necesidades e intereses por explicar qué es lo que pasa a su alrededor, a partir de interactuar con el mundo natural, incluso, dicha interacción conllevó, por ejemplo, a los primeros habitantes a descubrir el fuego, para saciar sus necesidades alimenticias y de protección, o bien, al momento de la creación de los primeros artefactos de caza cuando se enfrentaban a presas sumamente grandes y que conscientemente era imposible pensar en derribar con fuerza humana, o que decir cuando el ser humano a partir del uso de la rueda la conllevó a perfeccionarla a tal grado de poderla emplear como medio de transporte, o por el contrario, si se habla de una ruta histórica más presente como lo es la Revolución Industrial, que trajo consigo una inminente industrialización que acabó expandiéndose paulatinamente en gran parte del mundo, a fin de saciar la actividad humana como fuerza laboral por la sustitución de maquinaria capaz de hacer el trabajo del hombre.

Este conjunto de evoluciones epistemológicas, ha conllevado al ser humano a también explicarse sobre qué es lo que sucede en su entorno, en su lugar de vida, en el contexto en el cual está situado, para ello, las inquietudes emergen precisamente al cuestionarse sobre el mundo natural, como lo fue el *sonido*, al ubicar la génesis de su estudio en la Edad Antigua, específicamente con la Civilización Griega y al identificar a Pitágoras por ser el primer actor

influyente que reporta la historia por ser quien mostró los primeros intereses en conocer a fondo el estudio de los intervalos musicales, la anécdota reporta que él, al pasar por una tienda de un brasero, se percató sobre la diferencia de los tonos que producían los diferentes pesos de los martillos que golpeaban el yunque, durante mucho tiempo aritmetizó sus argumentos por medio de razones numéricas a los intervalos musicales, sin embargó los esfuerzos mostrados en su época no permitieron la obtención de respuestas ni argumentos convincentes de interpretación por las fuertes diferencias de pensamiento con escuelas de pensamiento como la peripatética; por ello, esta problemática prevaleció en los siglos posteriores.

Durante los posteriores siglos, centrados en la problemática, y como parte del desarrollo del *análisis histórico-epistemológico* se identificaron *rutas históricas*, posteriores a la Edad Antigua, como la Edad Media **(**del Siglo V al XV**)**, el Renacimiento **(**del Siglo XV al XVI**)** y la Revolución Científica **(**del Siglo XVI al XVII**)**, que dentro de cada una de ellas, la problemática sobre las consonancias tomó más auge, pero que sin duda existió una ruptura epistemológica que había prevalecido en la antigüedad bajo las concepciones filosóficas y cosmológicas hasta la consolidación de intereses explicativos asociados a hipótesis físicas vinculadas con el fenómeno que produce el sonido.

Al poder identificar lo que a lo largo del **Capítulo 4.**, se mencionó a la *Teoría Musical*, simplemente como una práctica, por la razón de ser de que su actividad fue destinada para realizar estudios de la Naturaleza **(**el sonido**)** a través de reglas establecidas por las consonancias, conllevó a tomar fuerza su continuo ejercicio, que una vez ya establecido el *quadrívium* dentro de este la *Matematización de la Música* adquirió un estatus epistemológico elevado en la sociedad con el pasar del tiempo, y que a raíz de que en siglos anteriores su estudio era tan importante fue que permeó la actividad matemática del Siglo XVIII y posteriores e incluso hasta hoy día conocida como la *Acústica*.

Por esto mismo, la *Teoría Musical* se *caracteriza en la presente investigación*, como una posible *práctica de referencia*, debido a que mantiene su carácter de ser la expresión material e ideológica de un paradigma ideológico, disciplinar y cultural **(**referido al *marco de referencia*, la *Teoría de la Vibración***)**, que prevaleció a lo largo de todo el *análisis histórico-epistemológico*, y en donde en ella se sientan las bases del conocimiento *físico* y *matemático* del *Problema de la Cuerda Vibrante*, dicho análisis histórico por sobre el **MSV** permite concebir a través del triángulo didáctico de la Socioepistemología, la existencia de saberes que el ser humano **(aprendiz)** a lo largo de los siglos conllevó a evolucionarlos a través de sus pensamientos hasta el surgimiento de hipótesis físicas, que asociaran la comprensión del sonido, por medio de la cuantificación de los tonos en los intervalos musicales **(conocimiento)**, todo esto, permeado por los diferentes pasajes históricos que son

caracterizados por las *rutas históricas* que se identificaron **(escenarios socioculturales)** a lo largo de más de diez siglos.

Tal capítulo abarca históricamente la evolución epistemológica de la Edad Antigua, hasta el Siglo XVII, no sin antes mencionar que al ya ubicarse las concepciones que se tenía sobre la posible *práctica de referencia*, se fijara como un elemento epistemológico esencial para comprender los cimientos de la Matemática del Siglo XVIII que atiende principalmente a una de las controversias matemáticas que acapararon la atención de los matemáticos de esa época, por lo que esta posible *práctica de referencia* fue trascendental para poder dar una serie de explicaciones *físicas* y por ende *matemáticas* a la *solución* del *Problema de la Cuerda Vibrante*, y aunque estas no lograron en su mayoría ser consensuadas por la comunidad matemática, permitió vincular los dos tipos de pensamiento el *pensamiento físico* y el *matemático*, en sus máximos representantes como Leonhard Euler, Jean le Rond D'Alembert y Daniel Bernoulli.

Al estudiar en esta investigación parte de la Matemática del Siglo XVIII, permite atender el sentido de las conclusiones de esta investigación, una vez que se sabe que uno de los conceptos matemáticos que acapara la esencia de esta investigación es el de *función* y que epistemológicamente acarreó confusiones en ámbito intelectual de la época.

Por ello, una vez entendida la *actividad matemática* que se logró identificar en las *rutas históricas*, como la aritmetización **(***al emplear relaciones numéricas para caracterizar los diferentes intervalos musicales***)**, la geometrización **(***al utilizar a los polígonos regulares para vincular como una forma armónica el cosmos con la aritmética de los intervalos musicales de los sonidos por los filósofos antiguos como Descartes y Beeckman***)**, la algebrización con el advenimiento inminente del Cálculo, potenciado y privilegiado por la Geometría, fueron formas de hacer matemática durante siglos y que en su momento privilegió y llenó de satisfacciones a los filósofos, geómetras, matemáticos y demás científicos al brindar respuestas a los problemas que más llamaron su atención, sin embargo, fueron los esfuerzos epistemológicos evolutivos de la Matemática del Siglo XVIII, que se enfrentaron con **«***limitaciones***»** densas propiamente por el surgimiento de nuevos conceptos y objetos matemáticos, debido a esto como se ha sostenido, el *Problema de la Cuerda Vibrante*, generó esos cambios en la *actividad matemática* durante ese siglo, por el nacimiento del Análisis Matemático, el Cálculo Diferencial Parcial y la Integración Parcial, piedras angulares para el nacimiento de las Ecuaciones Diferenciales Parciales.

Cabe destacar que ya para ese entonces, una infinidad de métodos de integración ordinaria para Ecuaciones Diferenciales, estaban casi en su totalidad desarrollados, por lo que el problema, llamó la atención prácticamente desde que Jean le Rond D'Alembert reúne el conjunto de características que describen *física* y *matemáticamente* la dinámica del

Problema de la Cuerda Vibrante, por ello, las conclusiones estarán generadas en torno a este personaje, quien fue el actor principal a este problema y cuya solución se debe a él, por lo que al ubicar desde la **S*ocioepistemología*** a las cuatro dimensiones del saber conllevan a analizar de forma sistémica el fenómeno que reúne la *problematización del saber matemático*.

A fin de dilucidar una **C**onstrucción **S**ocial del **C**onocimiento **M**atemático en torno al *Problema de la Cuerda Vibrante*, esta investigación, parte de considerar los elementos que unifican al Análisis Textual y Contextual los cuales proveen de los elementos necesarios que están presentes en la Matemática Escolar en relación a la Matemática del Siglo XVIII, donde el *objeto matemático* incide directamente en las **E**cuaciones **D**iferenciales **P**arciales, un terreno de la Matemática para esa época poco explorado, pero con una aceptabilidad que incrementó debido a la metodología empleada para resolver los problemas de ese entonces, el Cálculo Diferencial e Integral Parcial.

Los elementos reunidos para el Análisis Textual conllevó a estudiar al **MSV** en libros de texto, el currículo, la enseñanza y el discurso por parte del docente, los cuales fueron elementos clave para conocer la producción matemática actual del **MSV**, al lograr identificar que la enseñanza actual de este *objeto matemático* está dotada de *usos algebraicos*, se parte de esta a fin de poder dar la crítica durante el *análisis histórico-epistemológico* al conjunto de elementos que conllevaron a desentrañar su génesis epistemológica, por medio del Análisis Contextual.

Por ello, desde la *dimensión epistemológica*, desde donde se articula el análisis se incide directamente en las circunstancias que posibilitan la construcción del conocimiento matemático, dada la *actividad matemática* del Siglo XVIII, en este caso, dándole una razón de ser al *análisis histórico-epistemológico* realizado, a partir de ubicar en él, la *racionalidad contextualizada* a los actores, que a lo largo del tiempo y de las circunstancias posibilitaron una *resignificación progresiva* de los usos del saber matemático en contextos específicos **(**la caracterización de los intervalos musicales a partir del problema de las consonancias, cuya actividad fue netamente aritmética con los pitagóricos, posteriormente, en la Edad Media, el conjunto de ideas metafísicas del cosmos con la música fueron las prominentes, y al pasar a la época del Renacimiento el juicio del oído humano con el surgimiento del canto gregoriano fue pieza epistemológica para dar lugar a las primeras concepciones físicas del sonido, en la Revolución Científica, por medio de la matematización y el surgimiento de la experimentación científica a partir de las primeras leyes físicas de la mecánica**)**, inmersos en la posible *práctica de referencia*, la *Teoría Musical*.

Al proseguir con la articulación teórica de la Construcción Social del Conocimiento Matemático, relacionado con el *Problema de la Cuerda Vibrante*, el *objeto matemático* de

estudio, el **MSV**, emerge en estrecha relación al nacimiento del Análisis Matemático, con el concepto de *función*, el cual acaparó atención precisamente a la *proximidad a la solución general* de la ecuación $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{ds^2}$, la cual estuvo centrada por Leonhard Euler, Jean le Rond D'Alembert, Daniel Bernoulli y años más tarde sumándose Lagrange, por lo que dicha proximidad, alude precisamente a la expresión analítica **(***función***)** que deben poseer las vibraciones que produce la cuerda.

Históricamente, el aporte de Brook Taylor y Johann Bernoulli, dieron el punto de partida geométrico **(**a finales del Siglo XVII y principios del Siglo XVIII**)** sobre la *forma inicial* de la cuerda vibrante, la cual debe ser *sinusoidal*, lo que este argumento matemático de validez concierne propiamente al quehacer de su época, y el aporte de los que se vieron más influenciados en la controversia posteriormente, llevarán a la puesta en escena su propio *relativismo epistemológico*, que desde los aportes al *marco de referencia*, la *Teoría de la Vibración,* significaron nuevos constructos **(**como hipótesis y leyes físicas**)** al problema, en cuestión de poseer *cognitivamente* dos formas de pensamiento, el *físico* y el *matemático*. De lo anterior es el punto de esencia y de partida para dotar teóricamente la visión *cognitiva* que entreteje las formas de apropiación la producción de lo que es la *proximidad a la solución general*, si bien, D'Alembert rompe toda aquella concepción que él había argumentado y sostenido sobre la *única forma* que acepta la *proximidad*, lo traslada a una forma de razonamiento de haberle podido hacer entender un nuevo proceso avanzado de pensamiento, al incluir en el sentido Euleriano a las funciones discontinuas en su solución.

Finalmente, desde *dimensión social y cultural del saber*, el trabajo de D'Alembert es visto debido como un producto de toda una epistemología**:** *históricamente situada* y *resignificada* en su contexto **(***el Problema de la Cuerda Vibrante***)** que está revestido en su génesis epistemológica por el conocimiento de la *práctica de referencia*. Este conocimiento, le confirió poseer el uso del conocimiento *teórico* y *práctico* a lo largo de más de diez siglos, como la *experimentación* y la *mecanización*, por ello, la obra matemática, D'Alembert, es considerada un resultado *sociocultural*, por haber ejercido *acciones* y por ende *actividades*, como que evolucionaron en la *actividad matemática* de los matemáticos posteriores, como Laplace, Cauchy, Fourier, por mencionar solo unos; cabe aclarar en este punto de la investigación, como manera de mostrar las conclusiones que arroja, que teóricamente se necesita profundizar en el *análisis histórico-epistemológico* para poder perfilar *prácticas,* sin embargo, una vez conocida la *posible práctica de referencia*, conllevaría de alguna manera a una dirección más sistémica al análisis dialéctico.

Lo anterior coadyuva íntegramente al eslabón desde la postura teórica sobre la cual es analizada esta investigación, la **TSME**, al fijarse desde su *principio normativo de la*

práctica social, la manera en que empíricamente y teóricamente el proceso de construcción de D'Alembert, le permeó la producción *histórica-epistemológica* de antaño hasta sus días, que le permitió intervenir prácticamente para así transformar los procesos didácticos a fin d favorecer que el **MSV**, es considerado como una Construcción Social de Conocimiento Matemático.

Desde el **d**iscurso **M**atemático **E**scolar **(**véase el Capítulo 3.**)**, se incide directamente en la producción escolar del **MSV**, el cual, por medio de Soto **(**2010**)**, se observa que al imperar un *uso algebraico* en el proceso enseñanza-aprendizaje del **MSV**, no conlleva a considerar aspectos sociales, contextuales **(**por mencionar algunos ─desde el dME─ entiéndase esto como una *atomización de conceptos***)**, como el estudio *histórico-epistemológico* sobre las ideas que aporta la posible *práctica de referencia*, a *fenómenos físicos* bajo *marcos de referencia*, como la *Teoría de la Vibración*, o la *Teoría del Calor*.

Estos le pueden permitir al estudiante ser una fuente de constitución de conocimiento matemático, sin embargo, en consecuencia le delega fuertemente una supremacía de argumentaciones y significados frente a otros, por ejemplo, mencionar que, su acepción que puede poseerse del **MSV** es la ausencia epistemológica por la que el método funciona, y que el estudio del *problema de las consonancias*, a partir de proporciones **(**razones**)** numéricas, fue que en el Siglo XVII, conllevó a Taylor y Johann Bernoulli a descubrir la forma geométrica del modo fundamental de la cuerda vibrante y por ende de este, se desprenden conceptos matemáticos, como el de *periodicidad* **(**que para la época de Euler aún carecía de argumentaciones matemáticas sólidas**)** dado que el surgimiento del Análisis Matemático se dio un siglo después.

Al continuar con la mirada desde el **dME**, la enseñanza del **MSV** en el Nivel Superior, así como muchos otros *objetos matemáticos* en diferentes niveles escolares, no es la excepción de concebir a la Matemática como un conocimiento acabado y continuo, lo que bajo este estatus, no permite poseer un carácter utilitario del conocimiento que puede desprender epistemológicamente este objeto matemático, y aunque se identificó una posible *práctica de referencia*, en muchos de los casos donde el objeto pueda operar queda disfuncionalmente operable debido a la escasez de significancia epistemológica e inexistencia de otros *marcos de referencia*, situación que se comenta en el siguiente capítulo como una mirada de investigación a futuro.

Para cerrar este capítulo, regresamos a la pregunta de investigación**: ¿Por qué el MSV en EDP *supone* una solución de la forma $\boldsymbol{X(x)\cdot T(t)}$?**, y para ser respondida, hay que recordar**:**

Hipótesis inicial	*Hipótesis epistemológica*
Dadas las características físicas del *fenómeno* es posible concebir que su matematización involucre ecuaciones diferenciales lineales con dos o más variables independientes las cuales al tener esta cualidad matemática su solución admite suponer la existencia de funciones separables.	El **M**étodo de **S**eparación de **V**ariables **(MSV)** nace en un escenario geométrico-analítico, respecto al fenómeno de la vibración, al tomar en cuenta que su dinámica involucra dos variables una espacial y otra respecto al tiempo. Este método es visto como un algoritmo que permite introducir como su solución el producto de dos funciones las cuales son independientes en sus variables, en donde su función solución las deberá incluir en una misma ecuación **(**expresión analítica**)**. La geometría de la función respecto a la variable espacial puede poseer saltos en los que no esté definida o sea discontinua **(**vista en el sentido Euleriano**)** esto es, debido a las características físicas asociadas al fenómeno, donde el tiempo al ser una variable que toma valores continuos no afectan a la descripción de la curva mecánica generada por el fenómeno, la cual deberá transportar a la curva inicial **(**sinusoidal**)** por encima y debajo del eje de las abscisas, y que su algebrización permite encontrar los coeficientes en las variables de las funciones producto, que representan los modos que produce el fenómeno una vez que se introduzcan las condiciones iniciales y de frontera a la solución del problema.

Dado a conocer lo anterior, se perfila una solución robusta que puede brindarse durante el discurso del docente al momento de enseñar el **MSV**, en un curso de Ecuaciones Diferenciales Parciales **(**área de la Matemática más inmediata donde está presente este *objeto matemático***)**, o bien, una vez que el estudiante *domine* el *uso algebraico* del método, y su vinculación con otras ramas de la Matemática que involucra su aplicación.

Así entonces, cabe aclarar primero que el *separar variables*, es más que un procedimiento algebraico, este producto $\boldsymbol{X(x)\cdot T(t)}$ debe ser considerado como un proceso matemático que involucra dos aspectos obligatorios**: [1]** conocer las *características físicas* a las que está sujeta el fenómeno**:** condiciones iniciales y de frontera, y **[2]** *matemáticas***:** la matematización del fenómeno debe estar dada por una EDP *lineal de orden dos* y *epistemológicamente* con el *producto* se busca**: [2.1]** funciones no nulas e independientes en sus variables y **[2.2]** encontrar con base en las condiciones iniciales y de frontera a las que esté sujeto el fenómeno, los ***coeficientes en las variables de las funciones producto*** **(**senos y/o cosenos**)**, que representan los modos subsecuentes de vibración referidos en la solución al *Problema de la Cuerda Vibrante*, conceptualmente esta superposición alude a una suma infinita de términos **(**nodos**)**.

Con relación al *objetivo general* planteado en la investigación**:** «*Caracterizar* al **MSV** a partir de un análisis *histórico-epistemológico* al situar como referencia **(**espacio-temporal**)** el *Problema de la Cuerda Vibrante* surgido aproximadamente a finales del Siglo XVII y principios del Siglo XVIII»; es posible *verificar* desde la postura teórica adoptada, la metodología, y el análisis de los datos *que se ha cumplido* dicho objetivo, al inferir así en consecuencia la validez de la hipótesis inicial sostenida en conjunto con la hipótesis epistemológica. Por ende, los resultados abren brecha para seguir en curso con investigaciones en este campo de la Matemática, en particular dentro de la disciplina científica, la Matemática Educativa, debido a que son muy pocos los conceptos que han sido reportados en la investigación, y que podrían ser reportados a futuro como una manera de generar un interés en la enseñanza y aprendizaje de las Ecuaciones Diferenciales, tanto Ordinarias como Parciales, y más aún, este último por ser un campo de la Matemática relativamente poco explorado dentro de este campo científico; comentarios de este tipo son trastocados en el siguiente capítulo que se muestra a continuación.

Capítulo 7. Prospectivas a Futuro

"*Un matemático es una máquina para transformar café en teoremas.*"

– Martin Gardner

La presente investigación, permitió tocar terreno de diversas áreas de la *Matemática*, como las Ecuaciones Diferenciales Parciales, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Cálculo Diferencial e Integral **(**en una variable y en varias variables**)**, así como el Análisis Matemático y la Variable Compleja **(**por mencionar a las más inmediatas que rodean al **MSV)**, y, dentro de la *Física*, la primera rama de esta área del conocimiento científico que históricamente tomo sus bases en su estudio, la Mecánica Clásica, y a su vez, en esta, se ubica la Dinámica, en la cual está posicionada la Acústica, cabe destacar que el estudio del *objeto matemático* conllevó a poder apreciar una sensibilización al estudio de corte *histórico-epistemológico*, donde se caracterizó como posible *práctica de referencia* a la *Teoría Musical*, la cual fue puente epistemológico para develar el conocimiento sobre la actividad matemática que habita en ella desde la Antigüedad hasta el siglo que concierne esta investigación, el Siglo XVIII y por ende sobre el conjunto de ideas asociadas a la *física* y la *matemática* sobre el *marco de referencia* la *Teoría de la Vibración*.

Desde la **S*ocioepistemología***, postura teórica en la que es ubicada esta investigación, abona al quehacer del investigador, al tomar el conjunto de decisiones en cuanto a la manera en que será difundido el Conocimiento Matemático, elemento clave para su institucionalización, dentro y fuera de escenarios escolares y no escolares, por ello, es importante que la mirada en la que el **MSV**, ha sido ubicado conlleve a partir del corte *histórico-epistemológico*, a apuntar sobre aquellos elementos característicos que propician en las aulas escolares, pérdidas didácticas por parte del docente, y por ende cognitivas hacia los estudiantes, a pesar de que el docente muestre esfuerzos intensos durante el proceso enseñanza-aprendizaje.

Estas incidencias son precisamente en el insistir sobre la posibilidad del rediseño del discurso Matemático Escolar **(**rdME**)** en cursos o tópicos donde el **MSV** se vea involucrado, al privilegiar que la Matemática es un producto de la actividad y cultura humana y por ende las *prácticas* y la *construcción de significados compartidos*, forman un eje en el que puedan propiciarse marcos de referencia que organicen, signifiquen y orienten a dichas prácticas, tal es el caso como el que atiende esta investigación, el escenario en el que la expresión de la experiencia epistemológica se da el problema es sobre la *Teoría de la Vibración*, en donde el *Problema de la Cuerda Vibrante*, enlaza a través de la posible *práctica de referencia*, la *Teoría Musical*, elementos epistemológicos claves para entender el producto del *análisis histórico-epistemológico* sobre el cual dicha controversia tuvo su esencia al consolidarse y ser elemento clave para la evolución matemática de la época, el Análisis Matemático, *sin*

embargo, este rediseño debe ser provocado una vez que se hayan obtenido resultados con base en un *diseño exploratorio* implementado con docentes o con estudiantes.

Antes de destacar la manera en que la problemática que atiende esta investigación pueda ser atendida por un *diseño exploratorio*, señalamos un par de directrices por sobre las áreas de conocimiento científico en las que está posicionado el *objeto matemático*, de acuerdo con **Driver (1989)** a principios de los años 70's, la investigación en educación científica comenzó a centrarse en modelos conceptuales que subyacen al razonamiento de los estudiantes en determinados ámbitos de la ciencia. Por lo que los investigadores han utilizado entrevistas y otras técnicas interpretativas para investigar y describir la forma en que los estudiantes conceptualizan una gama de fenómenos naturales, al proporcionar intrigantes ideas sobre su mundo conceptual, un mundo que a menudo refleja una razonabilidad convincente.

Por lo tanto, se considera que el aprendizaje de la ciencia implica más que el individuo dé sentido a sus experiencias personales por sobre el mundo natural que le rodea, sino que además inicie como sostiene la autora, esas "*formas de ver*" que ya han sido establecidas y encontradas por la comunidad científica. Estas "*formas de ver*" no pueden ser "*descubiertas*" por el aprendiz, y si un aprendiz se encuentra con el punto de vista consensuado por la comunidad científica, este será el *estado de la idea*.

Como es posible percibir, el aprendizaje de la Ciencia, cognitivamente tiene sus inicios cuando el ser humano explora a su alrededor y como ya se ha evidenciado en esta investigación de corte *histórico-epistemológico*, el poder identificar *marcos de referencia*, supondría de alguna manera la existencia de innumerables contextos de significancia donde podrían caracterizarse actividades mediante las acciones hechas por el sujeto, para ello la interacción con el mundo físico o natural es importante para fomentar el pensamiento crítico del ser humano.

El claro ejemplo que muestra esta investigación, es el *Problema de la Cuerda Vibrante*, cuyos inicios se remontan hasta la antigüedad con el estudio de la música y su advenimiento posterior, cuya teorización confirió epistemológicamente desentrañar el Método de Separación de Variables **(MSV)**, por medio de posicionarlo en un *marco de referencia*, y que las derivaciones de este, conllevaron a trabajos posteriores a consolidarse por sobre otros marcos de referencia, como la *Teoría del Calor*, con Fourier, donde este personaje conlleva a un estatus epistemológico más elevado a la Matemática de la época.

Una vez que se ha evidenciado que el *objeto matemático* involucra en su contexto a dos áreas del conocimiento científico, la *Física* y la *Matemática*, la posibilidad de extender a futuro esta investigación, es convincente por sobre dos rutas**: [1]** Abonar y brindar una

problematización de saber matemático más sólida para robustecer la hipótesis epistemológica configurada y así llevarla a **[2]** un *diseño exploratorio* con docentes o estudiantes, el cual, puede contemplar dentro de su diseño, actividades que generen la *separación de variables*, y así encontrar la esencia epistemológica de que este *objeto matemático* permite encontrar los coeficientes en las variables de la función solución, vista como un producto, al partir de las conceptualizaciones que tienen los docentes o estudiantes con marcos de referencia como la *Teoría de la Vibración*, o *Teoría del calor*.

Otra de las rutas que abre brecha esta investigación es**:** Dada la *hipótesis epistemológica* y el conocimiento que se tiene por sobre los *marcos de referencia* la *Teoría de la Vibración*, y la *Teoría del Calor*, el contexto matemático que atiende a cada uno de ellos, concibe sus soluciones como una *suma infinita* **(**Serie Trigonométrica de Fourier**)**, matemáticamente expresadas por *superposición de soluciones fundamentales*, por lo que proyecta a tales soluciones a posicionarlas en un estadío más avanzado del conocimiento, el *estado estacionario*, por ello, dados estos dos marcos de referencia, *analizar con profundidad la búsqueda de otros marcos*, donde pueda generarse la *separación de variables*, ubica a este proyecto en incursionar por esta línea de investigación.

Otra de las sensibilizaciones que emergieron durante la realización de este proyecto, fue la identificación evidente de una evolución del pensamiento matemático que atañó a lo largo de los siglos por los que el *análisis histórico-epistemológico* hecho es ubicado en el tiempo, de ello, algo en lo que conviene ahondar es la manera en la que ya en el Siglo XVIII al hablar *funcionalmente* sobre la solución del *Problema de la Cuerda Vibrante* la *actividad matemática* realizada por D'Alembert incluía expresiones imaginarias, de esto, se infiere, **¿***a qué restricciones matemáticas se enfrentaron Euler, D'Alembert para los valores tomados por una variable o cantidad universal considerarla imaginaria***?**, dado que para el Siglo XVIII, los matemáticos nunca desarrollaron una representación geométrica completa para números complejos; por ello, el sugerir, esta línea de investigación confina los esfuerzos para la comprensión algebraica del Cálculo y el Análisis Matemático de la época.

Referencias Bibliográficas:

El listado que se da a continuación muestra el conjunto de bibliografía empleada en el *curso de inicio*, *trayecto* y *finalización* de la realización de esta investigación, como lo fueron**:** libros, artículos científicos y tesis de grado *en su mayoría*; estos son referenciados con base en la *Séptima Edición* **(***2020***)** de las normas de la *Asociación Americana de Psicología* **(***APA*, por sus siglas en inglés**)**, donde es posible apreciar visualmente que uno de los cambios que contempla esta *edición* es la incorporación de los apellidos completos de los autores y/o autoras en todo el dominio del formato de citación que le acuñe sea cual sea la fuente que haya sido consultada **(**artículos científicos, libros y/o tesis de grado**)**, otra de las peculiaridades de esta edición es al momento de citar una *tesis de grado*, el estilo es similar al acostumbrado en las ediciones anteriores, *empero*, en dado caso, el formato actual puede apreciarse un cambio en la simbología empleada en la cual, *dentro de ella*, debe estar dispuesta toda la información referente al programa académico al que perteneció la persona, la institución donde obtuvo el grado así como el tipo de tesis que realizó **(**licenciatura, maestría y/o doctorado**)**, el símbolo ahora son los corchetes [·] y si la institución brinda el acceso a través de su repositorio digital, incluir la liga **(URL)** de acceso a tal documento.

[1] Álvarez-García, J. L. **(**2010**)**. Galileo y Vincenzo**:** La música y el nacimiento del método. *Ciencias 100*, octubre-diciembre, 20-26. https**:**//bit.ly/35WEhkx

[2] Arrieta Vera, J. L., Buendía Abalos, G., Ferrari Escolá, M., Martínez Sierra, G., & Suárez Téllez, L. **(**2004**)**. Las prácticas sociales como generadoras del conocimiento matemático. En L. Díaz Moreno **(**Ed.**)**, *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17*, 418-422. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

[3] Artigue, M. **(**2018**)**. Epistemología y didáctica. *El cálculo y su enseñanza, Enseñanza de las Ciencias y las Matemáticas*, *11*, 1-31. https**:**//bit.ly/3p0Dnwe

[4] Boido, G. **(**2007**)**. El surgimiento de la acústica a finales del siglo XVI**:** Vincenzo Galilei y Giovanni Benedetti. En P. García & L. Salvatico **(**Eds.**)**, *Epistemología e Historia de la Ciencia*, **(**13**)**, 97-101. Centro de Investigaciones de la Facultad de Filosofía y Humanidades, Universidad Nacional de Córdoba. https**:**//bit.ly/386wdAg

[5] Boido, G., & Kastíka, E. **(**2002**)**. La ciencia de la música entre los siglos XVI y XVIII**:** de los sonidos que no se oyen a los orígenes de la acústica. En N. Horenstein, L. Minhot & H. Severgnini **(**Eds.**)**, *Epistemología e Historia de la Ciencia*, **(**8**)**, 60-66. Centro de Investigaciones de la Facultad de Filosofía y Humanidades, Universidad Nacional de Córdoba. https**:**//bit.ly/3kYr5Cc

[6] Bos, H. J. M. **(**1980**)**. From the Calculus to Set Theory, 1630-1910**:** An Introductory History. En I. Grattan-Guinness **(**Ed.**)**, *Newton, Leibniz and the Leibnizian tradition* **(**pp. 49-92**)**. Princenton University Press.

[7] Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. **(**2001**)**. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera* **(**4ª ed.**)**. Limusa Wiley.

[8] Bravo Yuste, S. **(**2006**)**. *Métodos Matemáticos Avanzados para Científicos e Ingenieros*. Servicio Publicaciones de la UEx.

[9] Breus, K. A. **(**1968**)**. Jean Le Rond D'Alembert on the 250th anniversary of this birth. *Ukrainskii Matematicheskii Zhurnal*, *20***(**2**)**, 228-231. https**:**//doi.org/10.1007/BF01085535

[10] Buendía Abalos, G. **(**2010**)**. Articulando el saber matemático a través de prácticas sociales. El caso de lo periódico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13***(**4-I**)**, 11-28. https**:**//bit.ly/34Ltiei

[11] Buendía Abalos, G., & Lezama Andalón, F. J. **(**2012**)**. Epistemología del saber matemático escolar**:** una experiencia didáctica. *Noesis. Revista de Ciencias Sociales y Humanidades*, *21***(**42**)**, 86-111. http**:**//dx.doi.org/10.20983/noesis.2012.2.4

[12] Cajori, F. **(**1928**)**. The Early History of Partial Differential Equations and of Partial Differentiation and Integration. *The American Mathematical Monthly*, *35***(**9**)**, 459-467. https**:**//doi.org/10.2307/2298771

[13] Cannon, J. T., & Dostrovsky, S. **(**1981**)**. *The Evolution of Dynamics***:** *Vibration Theory From 1687 to 1742*. Springer-Verlag New York Inc.

[14] Cantoral Uriza, R. A. **(**1990**)**. *Categorías Relativas a la apropiación de una base de significaciones para conceptos y procesos matemáticos de la Teoría elemental de las Funciones Analíticas*. *Simbiosis y Predación entre las nociones de* "*el Prædiciere*" *y* "*lo Analítico*" [Tesis doctoral, Doctorado en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

[15] Cantoral Uriza, R. A., & Farfán Márquez, R. M. **(**2003**)**. Matemática Educativa**:** Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *6***(**1**)**, 27-40. https**:**//bit.ly/3kSXWIe

[16] Cantoral Uriza, R. A., Farfán Márquez, R. M., Lezama Andalón, F. J., & Martínez-Sierra, G. **(**2006**)**. Socioepistemología y representación**:** algunos ejemplos.

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, **(**Núm. Esp.**)**, 83-102. https**:**//bit.ly/2Gra3gY

[17] Cantoral Uriza, R. A. **(**2013**)**. *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa***:** *Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Gedisa.

[18] Cantoral Uriza, R. A., Reyes-Gasperini, D., & Montiel Espinosa, G. **(**2014**)**. Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7***(**3**)**, 91-116. https**:**//bit.ly/3oXQXk3

[19] Cantoral Uriza, R. A., Montiel Espinosa, G., & Reyes-Gasperini, D. **(**2015**)**. Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, **(**8**)**, 9-28. https**:**//doi.org/10.35763/aiem.v1i8.123

[20] Cantoral Uriza, R. A. **(**2019**)**. *Los caminos del saber*. *Pensamiento y lenguaje variacional*. Gedisa.

[21] Cañada Villar, A. **(**2000**)**. Una perspectiva histórica de las series de Fourier**:** de las ecuaciones de ondas y del calor a los operadores compactos y autoadjuntos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *3***(**3**)**, 293-320. https**:**//bit.ly/3kQHpVd

[22] Capecchi, D. **(**2014**)**. Humanism and Renaissance. En M. Ceccarelli **(**Ed.**)**, *The Problem of the Motion of Bodies***:** *Volume 25*. *History of Mechanism and Machine Science*, **(**pp. 83-127**)**. Springer.

[23] Cohen, H. F. **(**1984**)**. *Quantifying Music***:** *The Science of Music at the First Stage of the Scientific Revolution, 1580-1650*. Springer Science+Business Media Dordrecht.

[24] Cordero Osorio, F. **(**1994**)**. *Cognición de la integral y la construcción de sus significados***:** *un estudio del Discurso Matemático Escolar* [Tesis doctoral, Doctorado en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

[25] Cordero Osorio, F., Gómez Osalde, K., Silva-Crocci, H., & Soto Soto, D. G. **(**2015**)**. *El discurso matemático escolar***:** *la adherencia, la exclusión y la opacidad*. Gedisa.

[26] Covián Chávez, O. N. **(**2013**)**. *La formación matemática de futuros profesionales técnicos en construcción* [Tesis doctoral, Doctorado en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

[27] Crespo Crespo, C. R. **(**2007**)**. *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología* [Tesis doctoral, Doctorado en Matemática Educativa]. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional. Repositorio Digital – Instituto Politécnico Nacional. https://bit.ly/2HXBKhw

[28] D'Alembert, J. **(**1747**)**. Recherches sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibration. *Histoire de l'Académie des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, *3*, 214-219.

[29] D'Alembert, J. **(**1747**)**. Suite des recherches sur la courbe que forme une corde tenduë, mise en vibration. *Histoire de l'Académie des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, *3*, 220-229.

[30] D'Alembert, J. **(**1750**)**. Addition au memoire sur la courbe que forme une corde tenduë, mise en vibration. *Histoire de l'Académie des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, 355-360.

[31] Darrigol, O. **(**2007**)**. The acoustic origins of harmonic analysis. *Archive for History of Exact Sciences*, *61***(**4**)**, 343-424. https://doi.org/10.1007/s00407-007-0003-9

[32] Demidov, S. S. **(**1982**)**. Création et développement de la Théorie des équations différentielles aux dérivées partielles dans les travaux de J. d'Alembert. *Revue d'histoire des sciences*, *35***(**1**)**, 3-42. https://doi.org/10.3406/rhs.1982.1788

[33] Dostrovsky, S. **(**1975**)**. Early Vibraton Theory**:** Physics and Music in the Seventeenth Century. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, *14***(**3**)**, 169-218. https://doi.org/10.1007/BF00327447

[34] Driver, R. **(**1989**)**. Students' conceptions and the learning of Science. *International Journal of Science Education*, *11***(**5**)**, 481-490. https://doi.org/10.1080/0950069890110501

[35] Engelsman, S. B. **(**1984**)**. *Families of Curves and the Origins of Partial Differentiation*. North Holland.

[36] Epstein, M. **(**2017**)**. *Partial Differential Equations***:** *Mathematical Techniques for Engineers*. Springer.

[37] Farfán Márquez, R. M. **(**1986**)**. *Acerca de la representación de una función* "*arbitraria*" *en serie trigonométrica* **(***Ensayo histórico***)**. [Tesis de grado de maestría, Maestría en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

[38] Farfán Márquez, R. M. **(**1993**)**. *Construcción de la noción de convergencia en ámbitos fenomenológicos vinculados a la ingeniería. Estudio de caso* [Tesis doctoral, Doctorado en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

[39] Farfán Márquez, R. M. **(**2012**)**. *Socioepistemología y ciencia. El caso del estado estacionario y su matematización*. Gedisa.

[40] Fraser, C. G. **(**1989**)**. The Calculus as Algebraic Analysis**:** Some Observations on Mathematical Analysis in the 18th Century. *Archive for History of Exact Sciences, 39*, 317-335. https**://**doi.org/10.1007/BF00348445

[41] Garber, E. **(**1999**)**. *The Language of Physics***:** *The Calculus and the Development of Theoretical Physics in Europe, 1750-1914*. Springer Science+Business Media New York.

[42] Guevara Bravo, J. C. **(**2010**)**. Matemáticas y música en la revolución científica. *Ciencias 100*, octubre-diciembre, 32-41. https**://**bit.ly/35YV9XL

[43] Grattan-Guinness, I. **(**1970**)**. *The Development of the Foundations of Mathematical Analysis From Euler to Riemann*. The Massachusetts Institute of Technology.

[44] Grattan-Guinness, I. **(**1980**)**. From the Calculus to Set Theory, 1630-1910**:** An Introductory History. En I. Grattan-Guinness **(**Ed.**)**, *The emergence of mathematical analysis and its foundational progress, 1780-1880* **(**pp. 94-145**)**. Princenton University Press.

[45] Heck, A., & Van Buuren, O. **(**2019**)**. Mathematics in Physics Education. En G. Pospiech, M. Michelini & B-S. Eylon **(**Eds.**)**, *Perspectives on Mathematics in Physics Education***:** *Part I. Students' Understanding of Algebraic Concepts* **(**pp. 53-74**)**. Springer.

[46] Huang, R., Spector, J. M., & Yang, J. **(**2019**)**. *Educational Technology: A Primer for the 21st Century*. Springer.

[47] Kleiner, I. **(**2012**)**. *Excursions in the History of Mathematics*. Springer Science+Business Media, LLC.

[48] Lützen, J. **(**1987**)**. The Solution of Partial Differential Equations by Separation of Variables**:** A Historical Survey. En E. R. Phillips **(**Ed.**)**, *Studies in Mathematics***:** *Volume 26. Studies in The History of Mathematics*, **(**pp. 242-277**)**. The Mathematical Association of America.

[49] Manacorda, T. **(**1991**)**. Origin and development of the concept of wave. *Meccanica*, *26***(**1**)**, 1-5. https**:**//doi.org/10.1007/BF00517717

[50] Møller Pedersen, K. **(**1980**)**. From the Calculus to Set Theory, 1630-1910**:** An Introductory History. En I. Grattan-Guinness **(**Ed.**)**, *Techniques of the Calculus*, *1630-1660* **(**pp. 10-47**)**. Princenton University Press.

[51] Montiel Espinosa, G. **(**2005**)**. *Estudio Socioepistemológico de la Función Trigonométrica* [Tesis doctoral, Doctorado en Ciencias en Matemática Educativa]. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional. Repositorio Digital – Instituto Politécnico Nacional. https**:**//bit.ly/3jQ3uC0

[52] Ortiz Fernández, A. **(**2018**)**. Series de Fourier**:** Una Perspectiva Histórica. *Selecciones Matemáticas*, *05***(**01**)**, 102-120. http**:**//dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2018.01.11

[53] Papadopoulos, A. **(**2002**)**. Mathematics and Music Theory**:** From Pythagoras to Rameau. *The Mathematical Intelligencer*, *24***(**1**)**, 65-73. https**:**//doi.org/10.1007/BF03025314

[54] Polyanin, A. D. **(**2000**)**. Partial separation of variables in unsteady problems of mechanics and mathematical physics. *Doklady Physics*, *45*, 680-684. https**:**//doi.org/10.1134/1.1342449

[55] Rasch, R. A. **(**1992**)**. The Musical Background of Seventeenth-Century Science**:** Theory, Practice, and Craftsmanship. En V. Coelho **(**Ed.**)**, *Music and Science in the age of Galileo***:** *Volume 51*. *The Western Ontario Series in Philosophy of Science*, **(**pp. 185-210**)**. Springer.

[56] Reséndiz-Balderas, E. **(**2010**)**. El discurso en la clase de matemáticas y los acuerdos sociales. La noción de variación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13***(**4-I**)**, 99-112. https**:**//bit.ly/327oJtc

[57]Reyes-Gasperini, D. **(**2011**)**. *Empoderamiento docente desde una visión Socioepistemológica**:** Estudio de los factores de cambio en las prácticas del profesor en matemática* [Tesis de grado de maestría, Maestría en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

[58] Reyes-Gasperini, D. **(**2016**)**. *Empoderamiento docente y Socioepistemología***:** *Un estudio sobre la transformación educativa en Matemáticas*. Gedisa.

[59] Rodríguez-Gallegos, R., & Quiroz Rivera, S. **(**2016**)**. El papel de la tecnología en el proceso de modelación matemática para la enseñanza de las Ecuaciones

Diferenciales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *19*(1), 99-124. http://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1914

[60] Romero Fonseca, F. W. (2016). *Construcción Social de la Serie Trigonométrica de Fourier. Pautas para un Diseño de Intervención en el Aula* [Tesis de grado de maestría, Maestría en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

[61] Romero Sánchez, S., Moreno, F. J., & Rodríguez, I. M. (2001). *Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP's)*. Servicio de Publicaciones: Universidad de Huelva. https://bit.ly/2TKmyHs

[62] Shingareva, I. K., & Lizárraga-Celaya, C. (2010). Ecuaciones Diferenciales Parciales no lineales: Separación de variables, soluciones simbólicas. En S. E. Ibarra Olmos & M. C. Villalva Gutiérrez (Eds.), *Memorias de la XX Semana Nacional de Investigación y Docencia en Matemáticas*, 145-151.

[63] Sklyanin, E. K. (1995). Separation of Variables. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, *118*, 35-60. https://doi.org/10.1143/PTPS.118.35

[64] Skudrzyk, E. (1971). *The Foundations of Acoustics: Basic Mathematics and Basic Acoustics*. Springer-Verlag New York Wien.

[65] Soto Soto, D. G. (2010). *El discurso Matemático Escolar y la Exclusión. Una Visión Socioepistemológica* [Tesis de grado de maestría, Maestría en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

[66] Soto Soto, D. G., & Cantoral Uriza, R. A. (2014). Discurso Matemático Escolar y Exclusión. Una Visión Socioepistemológica. *Boletim de Educação Matemática*, *28*(50), 1525-1544. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a25

[67] Stillwell, J. (2010). *Mathematics and Its History* (3rd ed.). Springer.

[68] Truesdell, C. (1960). *The rational mechanics of flexible or elastic bodies 1638-1788*. Springer Science & Business Media.

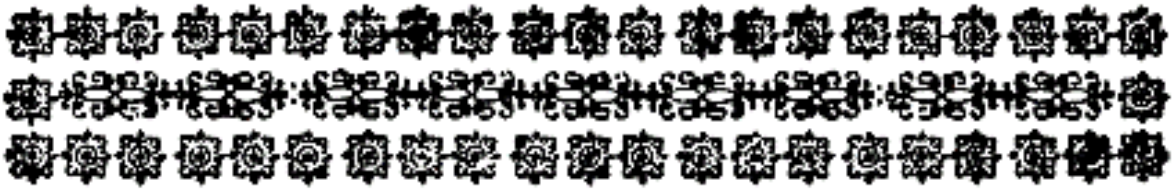
[69] Vargas Murillo, G. (2017). Recursos educativos didácticos en el proceso enseñanza aprendizaje. *Cuadernos Hospital de Clínicas*, *58*(1), 68-74. https://bit.ly/3kMtKyy

[70] Wheeler, G. F., & Crummett, W. P. (1987). The vibrating string controversy. *American Journal of Physics*, *55*(1), 33-37. https://doi.org/10.1119/1.15311

[71] Youschkevitch, A. P. **(**1976**)**. The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century. *Arch. Hist. Exact Sci.*, *16*, 37-85. https://doi.org/10.1007/BF00348305

Anexos

Contexto matemático	*El Problema de la Cuerda Vibrante*
Marco de referencia	Teoría de la Vibración
Obra Matemática	"*Recherches sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibration*"
Autor	Jean Le Rond D'Alembert
Año de escritura	1747
Año de publicación	1749
Publicado por	«*Histoire de l'Académie des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*»
Contenido	pp. 214 – 219
Artículos	Ⅱ – ⅩⅡ
Idioma	Francés
Número de memoria	1



RECHERCHES

SUR LA COURBE QUE FORME UNE CORDE

TENDUË MISE EN VIBRATION,

PAR MR. D'ALEMBERT.

INVESTIGACIÓN DE LA CURVA FORMADA POR UNA CUERDA TENSADA QUE ES PUESTA EN VIBRACIÓN.

POR: MR. D'ALEMBERT

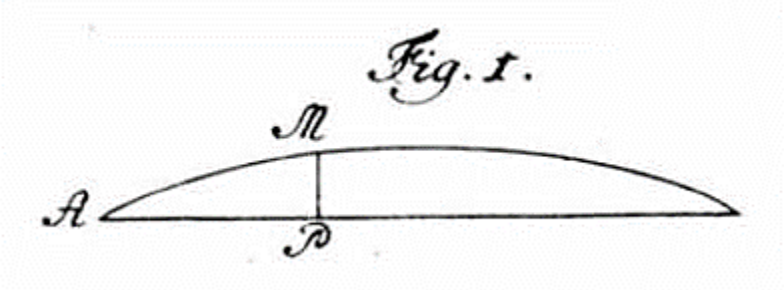
[La traducción es nuestra]

I.

Je me propoſe de faire voir dans ce Memoire, qu'il y a une infinité d'autres courbes que *la Compagne de la Cycloide allongée*, qui ſatisfont au Probleme dont il s'agit. Je ſuppoſeray toujours 1mo, que les excurſions ou vibrations de la corde ſont fort petites, enſorte que
Fig. 1. les arcs A M de la courbe qu'elle forme, puiſſent toujours être ſuppoſés ſenſiblement égaux aux abſciſſes correſpondantes A P. 2°. que la corde eſt uniformement epaiſſe dans toute ſa longueur: 3°. que la force F de la tenſion eſt au poids de la corde, en raiſon conſtante, c. a. d. comme m à 1; d'où il s'enſuit que ſi on nomme p la gravité, & l la longueur de la corde, on pourra ſuppoſer $F = p\,m\,l$; 4°. que ſi on nomme A P ou A M, s; P M, y; & qu'on faſſe $d\,s$ conſtante, la force acceleratrice du point M ſuivant M P, eſt $-\frac{F\,d\,d\,y}{d\,s^2}$, ſi la courbe eſt concave vers A C, ou $\frac{F\,d\,d\,y}{d\,s^2}$ ſi elle eſt convexe. *Voyez Taylor Meth. Incr.*

I

Propongo mostrar en esta *Memoria*, que hay una infinidad de curvas distintas a "la Compagne de la Cycloide allongée" que satisfacen el problema en cuestión. Primero debe asumirse que las vibraciones de la cuerda son muy pequeñas, de modo que siempre se suponga que los arcos $\mathcal{AM}$ de la curva que forma son aproximadamente iguales a las correspondientes abscisas $\mathcal{AP}$. 2º, que la cuerda sea uniformemente gruesa en toda su longitud. 3º que la fuerza $\mathcal{F}$ de la tensión esté en el peso de la cuerda, a razón constante, es decir, como $m \cdot g$, de lo que se deduce que si nombramos p como la gravedad y ℓ la longitud de la cuerda, podemos suponer $\mathcal{F} = p m \ell$; 4º, que si nombramos $\mathcal{AP}$ o $\mathcal{AM}$, s; $\mathcal{PM}$, y; & si hacemos ds constante, la fuerza de aceleración en el punto $\mathcal{M}$ que sigue a $\mathcal{MP}$, es cóncava hacia $\mathcal{AC}$, o si $\frac{\mathcal{F}ddy}{ds^2}$ es convexa. **[La traducción es nuestra]**



215

II. Cela posé, imaginons que M m, m n, soyent deux côtés consecutifs de la courbe dans un instant quelconque, & que P p = $p\pi$, c. à. d. que ds soit constant. Soit t le tems écoulé depuis que la corde a commencé à entrer en vibration: il est certain que l'ordonnée P M ne peut etre exprimée que par une fonction du tems t, & de l'abscisse ou de l'arc correspondant s ou A P. Soit donc P M = $\Phi(t, s,)$ c. à. d. egale à une fonction inconnuë de t, & de s; on fera $d[\Phi(t, s,)] = p\,dt + q\,ds$, p, & q etant pareillement des fonctions inconnuës de t & de s; or il est evident par le Theor. de Mr. Euler, Tom. VII. des Mem. de Petersb. p. 177, que le coëfficient de ds dans la differentielle de p doit etre egal au coëfficient de dt dans la differentielle de q; soit donc $dp = \alpha\,dt + \nu\,ds$, on aura $dq = \nu\,dt + \beta\,ds$, α, ν, β, etant encore des fonctions inconnuës de t & de s.

Fig. 2.

II

Bueno, imaginemos que $\mathcal{M}m$, mn, son dos lados consecutivos de la curva en cualquier instante y que $\mathcal{P}p = p\pi$, es decir, que ds es constante. Dejemos que t sea el tiempo que ha transcurrido desde que la cuerda comenzó a entrar en vibración**:** es cierto que la ordenada $\mathcal{P}\mathcal{M}$ solo puede ser expresada en función del tiempo t, & de la correspondiente abscisa s o $\mathcal{A}\mathcal{P}$. Hágase $\mathcal{P}\mathcal{M} = \varphi(t, s,)$ igual a una función desconocida de t, & de s; haremos $d[\varphi(t, s,)] = p\,dt + q\,ds$, p, & q de la misma manera funciones desconocidas de t & s y es evidente por la *Theor. De Mr. Euler, Tom. VII des. Mem. De Petersb, p. 177,* que el coeficiente de ds en el diferencial de p debe ser igual al coeficiente de dt en el diferencial de q; se hace $dp = \alpha dt + \nu ds$, se tendrá que $dq = \nu dt + \beta ds$, α, ν, β siendo funciones desconocidas de t & de s. **[La traducción es nuestra]**

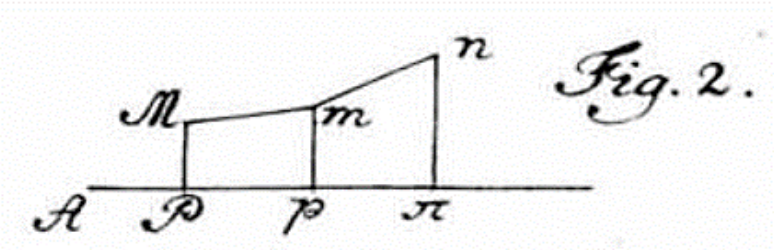


Fig. 2.

III. De là il s'enſuit, que comme les cotés M m, m n, appartiennent à la même courbe, on aura p m — P M égale à la difference de φ (t, s,) en ne faiſant varier que s, c. à. d. que p m — P M $= q\,ds = ds \cdot q$; & que la quantité que nous avons nommé cy-deſſus $d\,dy$, c. a. d. la difference ſeconde de P M, priſe en ne faiſant varier que s, ſera $d\,s \cdot b\,ds$, on aura donc $\frac{F\,d\,dy}{ds^2} = F\,6$.

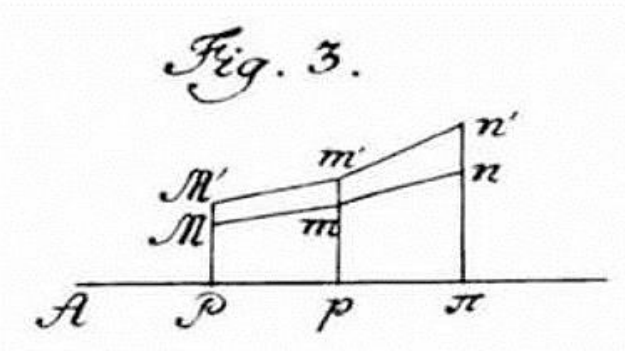
III

De esto se deduce que, como $\mathcal{M}n$, mn, pertenecen a la misma curva, tendremos $\mathcal{P}m - \mathcal{P}\mathcal{M}$ es igual a la diferencia de $\varphi(t, s,)$ variando solo s, es decir, que $\mathcal{P}m - \mathcal{P}\mathcal{M} = q\,ds = ds \cdot q$; y que cantidad que hemos nombrado anteriormente ddy, es decir, la segunda diferencia de $\mathcal{P}\mathcal{M}$, tomada variando solo s, será $ds \cdot b\,ds$ tendremos $\frac{\mathcal{F}\,ddy}{ds^2} = \mathcal{F}\mathcal{C}$.
[La traducción es nuestra]

IV. Imaginons preſentement que les points M, m, n viennent en M′, m', n'; il eſt certain que l'excés de P M′ ſur P M ſera egal à la difference de φ (t, s,) priſe en ne faiſant varier que t, c. à. d. que P M′ — P M $= p\,dt = dt \cdot p$; & que la difference ſeconde de P M priſe en ne faiſant varier que t, c. à. d. la difference de M M′, ou ce qui eſt la même choſe, l'espace parcouru par le point M en vertu de la force acceleratrice qui l'anime, ſera $= \alpha\,dt$. Fig. 3.

IV

Imaginemos preferentemente que los puntos $\mathcal{M}, m, n$ vienen en $\mathcal{M}', m', n'$; es seguro que el exceso de $\mathcal{P}\mathcal{M}$ será igual a la diferencia de $\varphi(t, s,)$, tomada variando solo t, es decir, la diferencia de $\mathcal{P}\mathcal{M}' - \mathcal{P}\mathcal{M} = pdt = dt \cdot p$; y que la segunda diferencia de $\mathcal{P}\mathcal{M}$ tomada variando solo t, es decir, la diferencia de $\mathcal{M}\mathcal{M}'$, o que es lo mismo, el espacio recorrido por el punto $\mathcal{M}$ en virtud de la fuerza de aceleración que lo anima, será $= \alpha dt$.
[La traducción es nuestra]



V. Cela posé, soit a l'espace qu'un corps pesant animé de la gravité p, parcourreroit dans un tems donné & constant θ: il est evident que l'on aura (par le Lem. XI. Sect. I. Liv. I. Princ. Math.)

$$\alpha dt^2 :$$

216

$$\alpha dt^2 : 2a = F\beta dt^2 : p\theta^2, \text{ donc } \alpha = \frac{2aF\beta}{p\vartheta^2} = \frac{2apml\beta}{p\vartheta^2} = \mathfrak{C} \cdot \frac{2aml}{\vartheta^2}.$$

V

Esto planteaba, ya sea al espacio que un cuerpo pesado animado por la gravedad $\boldsymbol{p}$, viajaría en un tiempo dado y constante $\boldsymbol{\theta}$**:** es obvio que uno tendrá **(***par le Lem. XI. Sect. I. Liv. I. Princ. Math***)**

$$\boldsymbol{\alpha dt^2}:$$

$$\boldsymbol{\alpha dt^2 : 2a = \mathcal{F}\beta dt^2 : p\theta^2}$$

hecho

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{2a\mathcal{F}\beta}{p\vartheta^2} = \frac{2apml\beta}{p\vartheta^2} = \mathcal{C} \cdot \frac{2aml}{\vartheta^2}}$$

[La traducción es nuestra]

VI. Nous remarquerons d'abord, que l'on peut repreſenter le tems donné θ par une ligne conſtante de telle grandeur que l'on voudra : il faudra ſeulement avoir ſoin de prendre, pour exprimer les parties variables & indeterminées du tems, des lignes t qui ſoyent à la ligne qu'on aura priſe pour marquer θ, dans le rapport de ces parties variables du tems au tems conſtant & donné, pendant lequel un corps peſant parcourt l'eſpace a. On pourra donc ſuppoſer θ telle, que $\vartheta^2 = 2aml$: & en ce cas on aura $\alpha = \beta$. Donc puiſque $dp = \alpha dt + \nu ds$, il faut que dq ou $\nu dt + \beta ds$ ſoit $= \nu dt + \alpha ds$.

VI

Observaremos primero que podemos representar los tiempos dados $\boldsymbol{\theta}$ por una línea constante del tamaño que queramos**:** habrá que tener cuidado de tomar, para expresar las partes variables e indeterminadas de los términos, las líneas $\boldsymbol{t}$ que son las líneas tomadas para marcar $\boldsymbol{\theta}$, en relación de estas partes variables de los términos con los términos constantes dados, durante los cuales un cuerpo pesado viaja a través del espacio $\boldsymbol{a}$. Podemos asumir que

$\boldsymbol{\theta}$ es tal que, $\boldsymbol{\vartheta^2 = 2am\ell}$ & en este caso tendremos $\boldsymbol{\alpha = \beta}$. Entonces $\boldsymbol{dp = \alpha dt + \nu ds}$, por lo que es necesario que $\boldsymbol{dq}$ o $\boldsymbol{\nu dt + \beta ds}$ o igual a $\boldsymbol{\nu dt + \alpha ds}$. **[La traducción es nuestra]**

VII. Pour déterminer par ces conditions les quantités α & ν, on remarquera, que comme $dp = \alpha dt + \nu ds$, & $dq = \nu dt + \alpha ds$, on aura $dp + dq = (\alpha + \nu) \cdot (dt + ds)$; & $dp - dq = (\alpha - \nu) \cdot (dt - ds)$. d'où il s'enſuit

1°, que $\alpha + \nu$ eſt egale à une fonction de $t + s$, & que $\alpha - \nu$ eſt egal a une fonction de $t - s$.

2°. Que par conſequent on aura $p = \frac{\Phi(t+s) + \Delta(t-s)}{2}$ ou ſimplement $= \Phi(t+s) + \Delta(t-s)$; & $q = \Phi(t+s) - \Delta(t-s)$, d'où l'on tire P M ou $s(p\,dt + q\,ds) = \Psi(t+s) + \Gamma(t-s)$, $\Psi(t+s)$ & $\Gamma(t-s)$ exprimant des fonctions encore inconnuës de $t + s$ & de $t - s$.

l'equation generale de la courbe eſt donc

$$y = \Psi(t+s) + \Gamma(t-s).$$

VII

Para determinar las cantidades α & ν, sobre las condiciones, cabe señalar que, dado que $\boldsymbol{dp = \alpha dt + \nu ds}$, & $\boldsymbol{dq = \nu dt + \alpha ds}$, tendremos $\boldsymbol{dp + dq = (\alpha + \nu) \cdot (dt + ds)}$; & $\boldsymbol{dp - dq = (\alpha - \nu) \cdot (dt - ds)}$ de donde sigue**:**

1. que $\alpha + \nu$ es igual a una función de $\boldsymbol{t + s}$; & que $\boldsymbol{\alpha - \nu}$ es igual a una función de $\boldsymbol{t - s}$.
2. lo que significa que tendremos $\boldsymbol{p = \frac{\varphi(t+s)+\Delta(t-s)}{2}}$ o simplemente $\boldsymbol{\varphi(t+s) + \Delta(t-s)}$; y $\boldsymbol{q = \varphi(t+s) - \Delta(t-s)}$, de la cual $\boldsymbol{\mathcal{PM}}$ o $\boldsymbol{s(pdt + qds) = \psi(t+s) + \Gamma(t-s)}$, $\boldsymbol{\psi(t+s)}$; que expresan funciones aún desconocidas de $\boldsymbol{t + s}$ & de $\boldsymbol{t - s}$ la ecuación general de la curva viene dada por**:** $\boldsymbol{y = \psi(t+s) + \Gamma(t-s)}$. **[La traducción es nuestra]**

VIII. Or il eſt aiſé de voir que cette equation renferme une infinité de courbes. Pour le faire voir, ne prenons icy qu'un cas particulier, ſavoir celui, où $y = o$, quand $t = o$; c. à. d. ſuppoſons que la corde, lorsqu'elle commence à entrer en vibration, ſoit etenduë en ligne droite, & qu'elle ſoit forcée à ſortir de ſon etat de repos, par l'action de quelque cauſe que ce puiſſe etre; il eſt evident que l'on aura $\psi s + \Gamma - s = o$, donc $\Gamma - s = -\psi s$. De plus, comme la corde paſſe toujours par les points fixes A & B, il faut que $s = o$, & $s = l$, rendent $y = o$, quelle que ſoit t; donc 1°. $\psi t + \Gamma t = o$, & $\Gamma t = -\psi t$; donc $\Gamma(t - s) = -\psi(t - s)$; donc on aura $y = \psi(t + s) - \psi(t - s)$; donc il faut que $-\psi - s = \Gamma s = -\psi s$; donc ψs doit etre une fonction de s dans laquelle il n'entre que des puiſſances paires, lorsqu'on l'aura reduite en ſerie. 2°. De plus la condition de $y = o$ lorsque $s = l$, donne $\psi(t + l) - \psi(t - l) = o$. Il faut donc trouver une quantité $\psi(t + s)$, telle, que $\psi s - \psi - s = o$ & $\psi(t + l) - \psi(t - l) = o$.

VIII

Ahora es fácil ver que esta ecuación contiene una infinidad de curvas. Para ello, echemos un vistazo a un caso particular, privilegiamos el valor de $\boldsymbol{y = 0}$, cuando $\boldsymbol{t = 0}$; es decir, supongamos que la cuerda, cuando es forzada a un estado de reposo, por la acción de cualquier causa que sea; es obvio que uno tendrá $\boldsymbol{\psi s + \Gamma - s = 0}$ haciendo $\boldsymbol{\Gamma - s = -\psi s}$. Además, como la cuerda siempre pasa a través de los puntos fijos $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ & $\boldsymbol{\mathcal{B}}$, es necesario que $\boldsymbol{s = 0}$ & $\boldsymbol{s = \ell}$, debe hacerse $\boldsymbol{y = 0}$, cualquiera que sea $\boldsymbol{t}$; donde:

1. $\boldsymbol{\psi s + \Gamma t = 0}$ & $\boldsymbol{\Gamma t = -\psi s}$; hecho que $\boldsymbol{\Gamma(t - s) = -\psi(t - s)}$ hecho que tendremos que $\boldsymbol{y = \psi(t + s) - \psi(t - s)}$ lo hizo $\boldsymbol{-\psi - s = \Gamma s = -\psi s}$; donde $\boldsymbol{\psi s}$ debe ser una función de $\boldsymbol{s}$ en la que solo entran números pares, cuando se reduce en serie.
2. Además, la condición de $\boldsymbol{y = 0}$ cuando $\boldsymbol{s = \ell}$, da $\boldsymbol{\psi(t + \ell) - \psi(t - \ell) = 0}$. Necesitamos encontrar una cantidad $\boldsymbol{\psi(t + s)}$, tal que $\boldsymbol{\psi s - \psi - s = 0}$ & $\boldsymbol{\psi(t + \ell) - \psi(t - \ell) = 0}$. **[La traducción es nuestra]**

IX. Pour y parvenir, imaginons la courbe $s\ o\ T$, dont les coordonnées soyent $T\,R = u$, $Q\,R = z$, & qui soyent telles, que $u = \psi z$; cela posé puisque $\psi\, s - \psi - s$ doit etre egale à zero, il est evident qu'en prenant $Q\,r = Q\,R$, il faut que $r\,s = R\,T$; & qu'ainsi la courbe $s\ o\ T$ aura, de part & d'autre du point o, des portions semblables & egales, $s\ o$, $o\ T$. De plus, comme $\psi\,(t + l)$ doit etre $= \grave{a}\ \psi\,(t - l)$ & que la difference de $t + l$ & de $t - l$ est $2l$, il est evident que la courbe $s\ o\ T$ doit etre telle, qu'etant supposée entierement decrite, deux ordonnées quelconques distantes l'une de l'autre de la quantité $2\,l$, soyent egales entr'elles. Donc si on suppose $Q\,R = l$, on verra que la partie $T\,K$ doit etre egale & semblable à $s\,O$; que la partie $K\,X$ doit etre aussy egale & semblable à $o\ T$ &c.; & comme les parties $s\ O$, $o\ T$, sont deja semblables & egales, il s'ensuit que la courbe cherchée s'etend à l'infini des deux côtés du point o, & qu'elle est composée de parties toutes egales & semblables à la partie $o\ T\ K$, dont l'abscisse $Q\,V = 2\,l$, & qui est

Fig. 4.

Memoires de l'Academie Tom. III. Ee divisée

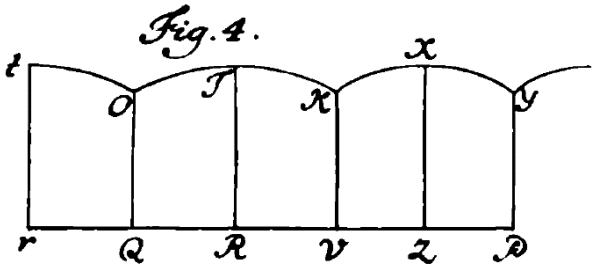
divisée par son point de milieu T en deux parties semblables & égales.

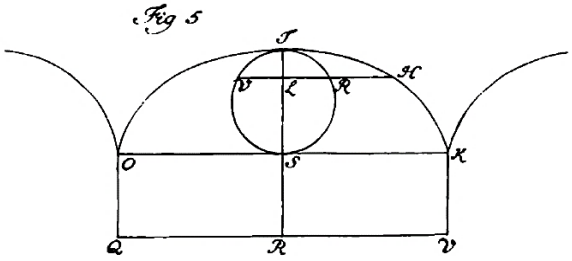
Fig. 5. Or les Geometres savent qu'une telle courbe peut toujours s'engendrer par le moyen d'une autre courbe $T\,V'\,S\,R\,V'$, qui rentre en elle même, & dont les deux parties $T\,R\,S$, $T\,V'\,S$ soyent semblables & egales: car si par un point quelconque L de l'axe T S on tire une droite L H, laquelle soit egale à un multiple de l'arc T R, plus à une fonction quelconque de l'abscisse T L & de l'ordonnée L R; ou bien si l'on fait la ligne L H egale à une fonction quelconque de l'abscisse T L & de l'ordonnée L R, plus à l'espace T L R divisé par une constante quelconque; il est certain qu' on aura par ce moyen une courbe $o\ T\ K$, dont les deux parties seront egales & qui s'etendra à l'infini, ayant toutes ses parties semblables & egales à $o\ T\ K$, comme la cycloide ordinaire.

IX

Para ello, imaginemos la curva $\boldsymbol{t o \mathcal{T}}$, cuyas coordenadas son $\boldsymbol{\mathcal{T}\mathcal{R} = u}$, $\boldsymbol{\mathcal{Q}\mathcal{R} = z}$, y que son tales que $\boldsymbol{u = \psi z}$; esto se plantea desde que $\boldsymbol{\psi s - \psi - s}$ debe ser igual a cero, es obvio que al tomar $\boldsymbol{\mathcal{Q}r = \mathcal{Q}\mathcal{R}}$, es necesario que $\boldsymbol{r t = \mathcal{R}\mathcal{T}}$; & que así la curva $\boldsymbol{t o \mathcal{T}}$ tendrá, a ambos lados el punto $\boldsymbol{o}$, porciones similares e iguales, $\boldsymbol{t o}$, $\boldsymbol{o \mathcal{T}}$. Además, como $\boldsymbol{\psi(t + \ell)}$ tiene que ser igual a $\boldsymbol{\psi(t - \ell)}$ y que la diferencia de $\boldsymbol{t + \ell}$ y de $\boldsymbol{t - \ell}$ es $\boldsymbol{2\ell}$, es evidente que la curva $\boldsymbol{t o \mathcal{T}}$ debe ser tal que, suponiendo que se describa en su totalidad, dos ordenadas cualesquiera

separadas entre sí por la cantidad de 2ℓ, sean iguales entre sí. Así que asumimos que $QR = \ell$, veremos que la parte TK debe ser igual y similar a oT; y como las partes to, oT, ya son similares e iguales, se deduce que la curva que buscamos se extiende hasta el infinito a ambos lados del punto o, y que está compuesta partes todas iguales y similares a la parte oTK, cuya abscisa $QV = 2\ell$ & que está dividida por el punto medio T en dos partes iguales. Sin embargo, los Geómetras favorecen que la curva siempre puede ser generada por medio de otra curva $TV'SRV'$, que encaja en sí misma, y cuyas dos partes TRS, $TV'S$ son similares e iguales**:** porque si en cualquier punto L del eje TS se dibuja una línea recta LH, que es un múltiplo de TR, más cualquier función de la abscisa TL & de la ordenada LR; o si hacemos que la línea LH sea igual a cualquier función de la abscisa TL y la ordenada LR, más el espacio TLR dividido por cualquier constante; es seguro que tendremos por este medio una curva oTK, cuyas dos partes serán iguales y será infinita, teniendo todas sus partes similares e iguales a oTK, como el cicloide ordinario. **[La traducción es nuestra]**





X. Ayant donc décrit une telle courbe O T K, il ſera facile de déterminer pour un tems quelconque t, la courbe que forme alors la corde tenduë: car cette courbe ſe conſtruira toujours en prenant pour l'ordonnée qui répond à une abſciſſe quelconque s, la difference de deux ordonnées de la courbe O T K, rapportée à un axe quelconque Z V, & desquelles l'une $\psi(t+s)$ ſoit diſtante du point Z de la quantité $t+s$, & l'autre $\psi(t-s)$ ſoit diſtante de ce même point Z, de la quantité $t-s$

X

Habiendo derivado tal curva, OTK, será fácil determinar para cualquier tiempo dado t, la curva que formada por la cuerda estirada**:** Esta curva siempre se construirá tomando la

ordenada que corresponde a cualquier abscisa s. La diferencia entre dos ordenadas de la curva OTK, referidas a cualquier eje ZV, y de las cuales $\psi(t+s)$ se encuentra a una distancia del punto Z por la cantidad $t+s$, & la otra $\psi(t-s)$ se encuentra a una distancia de este mismo punto Z, por la cantidad $t-s$. **[La traducción es nuestra]**

XI. Nous avons deja remarqué que ψs doit etre une fonction paire de s, donc $\psi(t+s)$ doit etre auſſi une fonction paire de $t+s$. Donc la difference de $\psi(t+s)-\psi(t-s)$, prife en ne faiſant varier que t, c'eſt à dire $dt.[\Delta(t+s)-\Delta(t-s)]$ doit etre telle, que $\Delta(t+s)$ & $\Delta(t-s)$ ſoyent des fonctions impaires de $t+s$ & de $s-s$: or il eſt facile de voir que $\Delta(t+s)-\Delta(t-s)$ ou $\frac{PM'-PM}{ds}$ exprime en general la viteſſe du point M, & que $\Delta s-\Delta -s$, exprime la viteſſe initiale de ce même point; donc l'expreſſion de la viteſſe initiale imprimée à chaque point de la corde, lorſqu'elle eſt en ligne

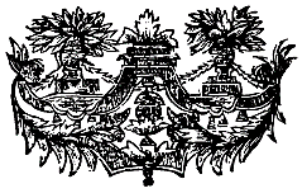
ligne droite, & qu'elle commence à ſe mouvoir, doit etre telle, qu'etant reduite en ſerie, elle ne renferme que des puiſſances impaires de s; autrement, ſi la fonction de s, qui exprime cette viteſſe initiale, n'etoit pas une fonction impaire de s, le problême ſeroit impoſſible, c. à. d. on ne pourroit pas aſſigner une fonction de t & de s, qui repreſentât en general la valeur des ordonnées de la courbe pour une abſciſſe s, & pour un tems t quelconque.

Il y a un grand nombre d'autres conſéquences à tirer de la ſolution generale que nous venons de donner. Elles feront le ſujet d'un ſecond Memoire.

XI

Ya hemos notado que ψs debe tener una función par de s, así que $\psi(t+s)$ debe ser una función par de $t+s$. Dada la diferencia de $\psi(t+s)-\psi(t-s)$, tomada variando solo t,

es decir dt. $[\psi(t+s)-\psi(t-s)]$ debe ser tal que, $\Delta(t+s)$ & $\Delta(t-s)$ son dos funciones impares de $t+s$ y de $t-s$: es fácil ver que $\Delta(t+s)-\Delta(t-s)$ o $\frac{\mathcal{PM}'-\mathcal{PM}}{dt}$ expresa en general la velocidad del punto $\mathcal{M}$, y que $\Delta s-\Delta-s$, expresa la velocidad inicial del mismo punto; la expresión de la velocidad inicial en cada punto de la cuerda, cuando está en línea recta y cuando comienza a moverse, debe ser tal que, al reducirse en serie, solo contenga las potencias impares de s; de lo contrario si la función de s, que expresa esta velocidad inicial, no es una función impar de s, el problema sería imposible de resolver, es decir, no se pude asignar una función de t y s, que generalmente representa el valor de las ordenadas de la curva para cualquier abscisa s, & para cualquier tiempo t.
Hay muchas otras consecuencias que se pueden extraer de la solución general que acabamos de dar. Serán objeto de una segunda *Memoria.* **[La traducción es nuestra]**



Contexto matemático	*El Problema de la Cuerda Vibrante*
Marco de referencia	Teoría de la Vibración
Obra Matemática	"*Suite des recherches sur la courbe que forme une corde tenduë, mise en vibration*"
Autor	Jean Le Rond D'Alembert
Año de escritura	1747
Año de publicación	1749
Publicado por	«*Histoire de l'Académie des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*»
Contenido	pp. 220−249
Artículos	XIII − XXVIII
Observaciones [Remarques]	*Remarque* I: XXIX *Remarque* II: XXX − XL *Remarque* III: XLI *Remarque* IV: XLII *Remarque* V: XLIII − XLIV *Remarque* VI: XLV *Remarque* VII: XLVI *Remarque* VIII: XLVII
Idioma	Francés

Número de memoria	2

XXII. Il eſt facile de voir que dans les deux cas, dont nous venons de parler, $\psi(t+s)-\psi(t-s) = \Delta t \times \Gamma s$, Δt, & Γs exprimant des fonctions de t & de s, & que dans le 1er. cas $\Gamma s = \Delta s$; or je dis qu'il n'y a aucun autre cas où $\psi(t+s)-\psi(t-s)$ puiſſe etre egal au produit d'une fonction de t par une fonction de s. En effet il eſt viſible par ce que nous avons dit dans le art. VII & VIII, que $\psi(t+s)-\psi(t-s)$ peut etre regardé en general comme l'ordonnée d'une courbe que forme une corde vibrante. Or ſoient OMV, OLV (fig. 8) deux des courbes quelconques que forme la corde dans deux inſtans differens; pourque y ſoit $\Delta t \times \Gamma s$, il faut qu'en tirant tant d'ordonnées qu'on voudra LN, RP, KF, &c. on ait LN: MN = RP: PQ = KF: YF; or dans cette ſuppoſition on trouvera facilement par la methode ordinaire, que toutes les courbes OMV, OLV, doivent etre des compagnes de cycloide, fort allongées; donc on ne peut avoir $\psi(t+s)-\psi(t-s) = \Delta t \times \Gamma s$, que dans le cas de $\Gamma s = \frac{e^{Ms\sqrt{-1}} - e^{-Ms\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$

M exprimant un nombre quelconque, & dans celui de $\Delta t = A$

$M t \sqrt{-1}$

$\left(\frac{e^{Mt\sqrt{-1}} - e^{-Mt\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right)$ ou bien $= A \left(\frac{e^{Mt\sqrt{-1}} + e^{-Mt\sqrt{-1}}}{2}\right)$. C'eſt ainſi que l'application de la Mechanique à la Geometrie aide quelque fois à decouvrir des verités purement geometriques, qu'il pourroit être aſsés difficile de trouver, en ſe ſervant de methodes directes.

Art. XXII [p.229] Es fácil ver que, en ambos casos, de los que acabamos de hablar, $\Psi(t+s)-\Psi(t-s) = \Delta t \times \Gamma s$, Δt, & Γs expresan funciones de t & de s, & que en el primer caso $\Gamma s = \Delta s$ pero yo digo que no hay ningún otro caso en el que $\Psi(t+s)-\Psi(t-s)$ pueda ser igual al producto de una función de t por una función de s. De hecho, es visible por lo que hemos dicho en el **artículo VII** & **VIII**, que

$\Psi(t+s)-\Psi(t-s)$ puede ser considerada en general como la ordenada de una curva formada por una cuerda vibrante. Ahora, OMV, OLV [fig. 8] son dos curvas cualesquiera formadas por la cuerda en dos instantes diferentes; para que y forme $\Delta t \times \Gamma s$, es necesario que al dibujar tantas ordenadas como se quiera LN, RP, KF, & se debe tener $LN : MN = RP : PQ = KF : YF$; pero en este supuesto se encontrará fácilmente por el método ordinario, que todas las curvas OMV, OLV, deben ser compañeras cicloides, muy alargadas; por lo que sólo se puede tener $\Psi(t+s)-\Psi(t-s) = \Delta t \times \Gamma s$, en el caso de $\Gamma s = \frac{e^{Ms\sqrt{-1}}-e^{-Ms\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$, expresando cualquier número, & en el de $\Delta t = A\left(\frac{e^{Mt\sqrt{-1}}-e^{-Mt\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right)$ o si no $\Delta t = A\left(\frac{e^{Mt\sqrt{-1}}-e^{-Mt\sqrt{-1}}}{2}\right)$. Así pues, la aplicación de la Mecánica a la Geometría ayuda a veces a descubrir verdades puramente geométricas, que pueden ser difíciles de encontrar, mediante métodos directos. **[La traducción es nuestra]**

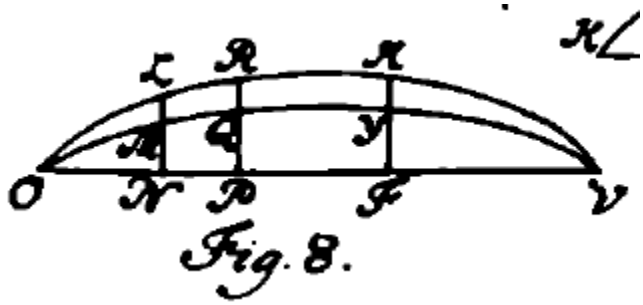


Fig. 8.