CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

Sistemas de ecuaciones lineales en el nivel Medio Superior: estudio de casos mediante Modelos Teóricos Locales

TESIS

que presenta

Xochitl Josefina García López

para obtener el grado de

Doctora en Ciencias

en la especialidad de

Matemática Educativa

Director de la Tesis

Dr. Hugo Rogelio Mejía Velasco

Ciudad de México Marzo, 2022

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por haberme otorgado el apoyo financiero para llevar a cabo mis estudios de doctorado en el Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados del IPN (Cinvestav-IPN).

Número de registro: 559724

DEDICATORIA

A mis maestros y a mis alumnos.

AGRADECIMIENTOS

A mi familia, por su comprensión.

A mis hermanas, por estar siempre presentes.

A Laura, Adriana, Jessy y Ale por su cariño incondicional.

Al Dr. Hugo Rogelio Mejía Velasco por su paciencia, compromiso y dedicación.

A los doctores Teresa Rojano, Elena Fabiola Ruiz, Armando Solares y Alberto Monzoy por su tiempo y aportaciones para la conclusión de este trabajo.

Al personal del DME.

ÍNDICE

Resumen… x

Abstract… xi

Introducción....1

Capítulo 1

El problema de investigación

1.1 Justificación de la problemática....3

1.2 Antecedentes sobre dificultades de los estudiantes respecto a los SEL....5

1.2.1 Los niveles Medio Básico y Medio Superior....5

1.2.2 El nivel Superior 6

1.3 Aspectos para la enseñanza sugeridos en estudios previos....10

1.4 Descripción de la problemática....12

Capítulo 2

Marco teórico metodológico

2.1 Modelos Teóricos Locales 13

2.2 La componente de comunicación....15

2.2.1 Signos 15

2.2.2 Sistemas matemáticos de signos....16

2.3 La componente de cognición 17

2.3.1 Intertextualidad 18

2.3.2 Tendencias cognitivas. 21

2.3.3 Objeto mental: campo semántico personal 25

2.4 La componente de competencia....26

2.4.1 Competencia y Modelo de competencia formal 26

2.4.2 Métodos de resolución de problemas de enunciado....28

2.5 La componente de enseñanza....36

2.5.1 Texto y espacio textual....36

2.5.2 La relación entre el Modelo de enseñanza y las componentes de Cognición y Comunicación 37

2.6 El diagrama del diseño de la experimentación 38

2.7 Hipótesis, preguntas y objetivos de investigación 40

2.7.1 Preguntas de investigación 40

2.7.2 Hipótesis en términos de tesis teóricas 40

2.7.3 Objetivos de investigación 41

Capítulo 3

Análisis previo al diseño del Modelo teórico local

3.1 Modelos actuales de competencia y enseñanza 43

3.1.1 El nivel Medio Básico. 44

3.1.2 La enseñanza Media Superior 45

3.2 Modelos actuales de cognición y comunicación 47

3.2.1 Revisión de la literatura 47

3.2.2 Herramienta de observación. 50

3.3 Modelo teórico local actual: síntesis 60

Capítulo 4

Diseño del Modelo Teórico Local

4.1 El modelo de competencia formal 61

4.1.1 La ecuación lineal 61

4.1.2 El método cartesiano 62

4.1.3 El método de reducción gaussiana. 62

4.1.3 Clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales. 64

4.2 Los modelos de cognición y comunicación 65

4.3 El modelo de enseñanza. 66

4.3.1 Actividad 1. Caracterización de la ecuación lineal 67

4.3.2 Actividad 2. Resolución de ecuaciones lineales. 70

4.3.3 Actividad 3. MIAS y MAES para dotar de sentido a los SEL y su solución. 71

4.3.4 Actividad 4. Sistemas de ecuaciones lineales en el SMS.....73
4.3.5 Actividad 5. Clasificación de SEL de acuerdo con su solución. 77
4.3.6 Actividad 6. Sistemas de ecuaciones lineales equivalentes. 80
4.3.7 Actividad 7. Método de reducción gaussiana para la resolución de SEL. 83
4.3.8 Actividad 8. El método cartesiano para la resolución de SEL. 84

4.4 Programa de actividades para el desarrollo empírico. 85

Capítulo 5

Análisis de datos del desarrollo empírico

5.1 Características de los participantes 87
5.2 El caso de Vanessa 88

5.2.1 Adecuaciones a las actividades derivadas de la prueba piloto 88
5.2.2 Actividad 1. Intertextualidad y producción de sentido 90
5.2.3 Actividad 3. Intertextualidad y producción de sentido 92
5.2.4 Actividad 4. Intertextualidad y producción de sentido 95
5.2.5 Actividad 5. Intertextualidad y producción de sentido 98
5.2.6 Actividad 6. Intertextualidad y producción de sentido 102
5.2.7 Actividad 7. Intertextualidad y producción de sentido 103
5.2.8 Actividad 8. Intertextualidad y producción de sentido 105

5.3 El caso de Gabriel.....108

5.3.1 Actividad 1. Intertextualidad y producción de sentido 108
5.3.2 Actividad 2. Intertextualidad y producción de sentido 112
5.3.3 Actividad 3. Intertextualidad y producción de sentido 114
5.3.4 Actividad 4. Intertextualidad y producción de sentido 116
5.3.5 Actividad 5. Intertextualidad y producción de sentido 118
5.3.6 Actividad 6. Intertextualidad y producción de sentido 125
5.3.7 Actividad 7. Intertextualidad y producción de sentido 127
5.3.8 Actividad 8. Intertextualidad y producción de sentido 132

5.4 El caso de Ana.....151

5.4.1 Actividad 1. Intertextualidad y producción de sentido 151
5.4.2 Actividad 2. Intertextualidad y producción de sentido 155

5.4.3 Actividad 3. Intertextualidad y producción de sentido 157
5.4.4 Actividad 4. Intertextualidad y producción de sentido 162
5.4.5 Actividad 5. Intertextualidad y producción de sentido 167
5.4.6 Actividad 6. Intertextualidad y producción de sentido 174
5.4.7 Actividad 7. Intertextualidad y producción de sentido 175
5.4.8 Actividad 8. Intertextualidad y producción de sentido 184

Capítulo 6

Conclusiones. Interpretación de datos en términos del MTL

6.1 Hallazgos con respecto a la producción de sentido y desarrollo de competencias 200

6.1.1 Conclusiones de la Actividad 1 201
6.1.2 Conclusiones de la Actividad 2 202
6.1.3 Conclusiones de la Actividad 3 202
6.1.4 Conclusiones de la Actividad 4 203
6.1.5 Conclusiones de la Actividad 5 204
6.1.6 Conclusiones de la Actividad 6 204
6.1.7 Conclusiones de la Actividad 7 204
6.1.8 Conclusiones de la Actividad 8 205

6.2 Tendencias cognitivas identificadas 206
6.3 Observaciones sobre el objeto mental SEL de los estudiantes después de la experiencia de aprendizaje 210

6.3.1 Objeto mental SEL. El caso de Vanessa 211
6.3.2 Objeto mental SEL. El caso de Gabriel 211
6.3.3 Objeto mental SEL. El caso de Ana 212

6.4 Análisis del Modelo de enseñanza 212
6.5 Reflexiones finales. Revisión de hipótesis 214

Referencias 217

Anexos

Anexo A. Herramienta de medición. 223
Anexo B. El Modelo de Enseñanza. 237

Resumen

En este documento se presenta el desarrollo de una investigación realizada en el marco de los Modelos Teóricos Locales sobre el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales con estudiantes del nivel Medio Superior. El análisis de las problemáticas en los diferentes niveles escolares derivó en la pregunta sobre qué debe considerarse para fortalecer la red intertextual de los estudiantes del nivel Medio Superior con respecto a los sistemas de ecuaciones lineales. Para responder a esta pregunta establecimos el objetivo de diseñar, analizar e interpretar un Modelo de enseñanza que incluyera el estudio de las ecuaciones de primer grado con una o varias variables y de métodos de modelación de problemas de enunciado, así como caracterizar y operar con sistemas de ecuaciones equivalentes y específicamente con el método de reducción gaussiana para la resolución de sistemas de ecuaciones. El desarrollo empírico se llevó a cabo mediante el estudio de tres casos. El análisis de los casos en términos del Modelo Teórico Local nos permitió observar la producción de sentido y las competencias antes y después de las entrevistas con intervención didáctica derivadas de la puesta en marcha de las actividades del Modelo de enseñanza, así como cambios en el intertexto de los estudiantes con respecto a los sistemas de ecuaciones lineales. Lo anterior, nos permite afirmar que los estudiantes lograron una mejor comprensión de los sistemas de ecuaciones lineales como un objeto matemático, así como mayor competencia al operar con sus distintas representaciones y al identificar el conjunto de soluciones que puede tener un sistema.

Abstract

This document we present the development of a research carried out within the framework of Local Theoretical Models on the study of systems of linear equations with students of Upper Secondary level. The analysis of the problems at different school levels led to the question: How we can improve the intertextual network of students at of Upper Secondary level about systems of linear equations? To answer this question, we have the objective of designing, analyzing, and interpreting a teaching model that include the study of first-degree equations with one or several variables, modeling methods of statement problems, as well as characterize and operate with systems of equivalent equations and specifically with the Gaussian reduction method to solve systems of linear equations. The empirical development was carried out through the study of three cases. By the analysis of the cases in terms of the Local Theoretical Model we can observe sense production and developed of competencies before and after the interviews with didactic intervention established in the implementation of the activities of the Teaching Model, and changes in the intertext of students with respect to systems of linear equations. The foregoing allows us to affirm that the students achieved a better understanding of systems of linear equations as a mathematical object, as well as greater competence when operating with their different representations and when identifying the set of solutions that a system can have.

Introducción

En este documento se detalla el diseño de un Modelo Teórico Local enfocado en los sistemas de ecuaciones lineales con estudiantes del nivel Medio Superior. En la revisión de la literatura, que se presenta en el Capítulo 1, se señalan las dificultades y la falta de competencia respecto a los procesos y conceptos relacionados con los sistemas de ecuaciones lineales en estudiantes de todos los niveles. Estas dificultades persisten hasta el nivel superior, en el que la competencia en el manejo del objeto matemático puede significar un mejor desempeño en cursos de álgebra lineal. Por lo anterior consideramos de especial importancia realizar este estudio con estudiantes preuniversitarios para identificar elementos que contribuyan a la producción de sentido y el desarrollo de competencias relacionadas con los sistemas de ecuaciones lineales mediante el diseño de un modelo teórico local.

En el capítulo 2 de este documento se describe el marco teórico metodológico de los modelos teóricos locales que guía el desarrollo de esta investigación. También se describen diferentes constructos y elementos que nos permiten definir con mayor claridad cada una de las componentes de los modelos teóricos locales: competencia formal, comunicación, cognición y enseñanza; las cuales proporcionan un panorama general del elemento de estudio en condiciones particulares. En el Capítulo 2 presentamos las preguntas, hipótesis y objetivos de investigación.

En el Capítulo 3 se detallan las características del modelo teórico local actual, el cual proporciona información para el diseño del modelo local cuya propuesta se describe en el último capítulo de este documento. Entre los elementos que se señalan en el Capítulo 3 están el análisis de los programas de estudio de diferentes subsistemas del nivel Medio Superior y una recopilación de las problemáticas de los estudiantes respecto al objeto matemático sistema de ecuaciones lineales y sus causas, así como sugerencias de enseñanza señaladas en la literatura previa, con los cuales se definen los modelos de enseñanza, cognición y comunicación.

En el Capítulo 4 se describe el diseño de una propuesta de modelo teórico local, enfocado en el modelo de enseñanza cuya aplicación nos permitirá iniciar el desarrollo empírico, analizarlo e interpretarlo en términos del propio modelo teórico local.

En el Capítulo 5 se detalla el análisis de los datos obtenidos en el desarrollo de la experimentación. Para cada uno de los casos de estudio se describen los momentos de producción de sentido y desarrollo de competencias, así como las tendencias cognitivas identificadas en la aplicación de las actividades del Modelo de enseñanza propuesto.

Finalmente, en el capítulo 6 se hace una síntesis de la interpretación de los datos en términos del modelo teórico local y se analiza como posible investigación futura la conformación de un nuevo MTL con base en los ajustes derivados del análisis de los datos obtenidos.

Capítulo 1

El problema de investigación

Con la finalidad de describir la problemática en la que se enfoca esta investigación, en este capítulo se reporta la revisión de la literatura que consideramos de interés por su énfasis en dificultades de cognición y comunicación relacionadas con el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales (SEL).

En México, la enseñanza de los SEL inicia en el nivel Medio Básico y continúa en algunos casos (dependiendo del área de estudio) hasta el nivel Superior. Esta investigación se centra en estudiantes de Educación Media Superior; sin embargo, en esta sección incluimos resultados de investigaciones de los tres niveles, en los cuales se han reportado dificultades de los estudiantes en torno al estudio de los SEL, así como propuestas para su enseñanza.

1.1 Justificación de la problemática

Una vez superados los obstáculos y dificultades inherentes a la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita, la resolución de sistemas de ecuaciones lineales es una de las direcciones en las que se guía a los estudiantes del nivel Medio Básico en su camino hacia el dominio del álgebra (Rojano, Filloy, & Puig, 2014, p. 395) y es, al mismo tiempo, su primera aproximación a una serie de conceptos y objetos matemáticos que son una importante herramienta en el estudio de otras áreas de las matemáticas que pueden llegar incluso al nivel Superior (v.g. álgebra lineal y otras relacionadas, como programación lineal, ecuaciones diferenciales, etc.)[1]. Las dificultades reportadas en diversas investigaciones realizadas con estudiantes universitarios (DeVries & Arnon, 2004; Cutz, 2005; Manzanero, 2007; Mora, 2001; Parraguez & Bozt, 2012) muestran que, al estar enfocados principalmente en los métodos de resolución, los estudios previos no favorecen en los estudiantes la producción de sentido, el trabajo con diferentes formas de representación, ni la apropiación de procesos

[1] Particularmente en áreas económico-administrativas y de las ingenierías.

relacionados con los SEL; en cuanto al nivel medio, la investigación de Ochoviet (2009) expone la misma problemática con estudiantes entre 15 y 17 años.

El conocimiento sobre los sistemas de ecuaciones lineales es necesario a lo largo del estudio del álgebra lineal, en la solución de diferentes tipos de problemas y en la comprensión de la mayoría de los conceptos relacionados con el área (Trigueros, Oktaç, & Manzanero, 2007). De acuerdo con Lay (2001) el álgebra lineal es una de las áreas más beneficiadas con las crecientes capacidades de cálculo de la tecnología digital, lo cual da, actualmente, un valor agregado al aprendizaje de sus conceptos y aplicaciones. De manera recíproca, muchos desarrollos tecnológicos, como la compresión de imágenes digitales y el Análisis Semántico Latente (Calabuig, García-Raffi & Sánchez-Pérez, 2015), son posibles gracias al álgebra lineal. Por otra parte, la factibilidad del álgebra lineal para introducir a los estudiantes en la construcción de demostraciones puede ser una de las razones por las que su enseñanza suele ser muy abstracta, con énfasis en el rigor. En muchas ocasiones, la lucha de los estudiantes con la abstracción hace que se dejen de lado las aplicaciones (Strang, 1982).

Dubinsky (1997) afirma que la abstracción y el formalismo no deben evitarse en el estudio del álgebra lineal. Es importante en el álgebra lineal el desarrollo de las capacidades de razonar y demostrar con argumentos matemáticos y de realizar cálculos con base en ello, pero también es fundamental que los estudiantes sean capaces de modelar y aplicar estos conocimientos en problemas de diversa índole. Atender ambas necesidades puede resultar insuficiente en los cursos de Álgebra Lineal del nivel Superior, ya que de acuerdo con Mares (2016), los estudiantes deben comprender una gran cantidad de conceptos que no parecen tener relación con conocimientos matemáticos previos.

En la siguiente sección se presentan los resultados de diversas investigaciones que dan cuenta de algunas de las dificultades que tienen los estudiantes de distintos niveles, sobre la comprensión de conceptos y procesos relacionados con los sistemas de ecuaciones lineales.

1.2 Antecedentes sobre dificultades de los estudiantes respecto a los SEL

1.2.1 Los niveles Medio Básico y Medio Superior

Las dificultades reportadas en el nivel Medio Básico con respecto a los SEL están vinculadas por un lado, a los conflictos de la transición de la aritmética al álgebra y de los propios del manejo del lenguaje algebraico, tales como la comprensión y el uso de las variables, las operaciones con cantidades desconocidas (en particular cuando estas cantidades desconocidas son expresiones algebraicas), las propiedades de la igualdad, el significado del signo "=" (igual) o la aplicación del método cartesiano (Rojano, et al., 2014; Solares 2007); y por otro lado, a la concepción de los SEL como un objeto matemático en el que pueden existir varias ecuaciones y variables interrelacionadas, a los procesos implicados en su resolución y a las formas en las que pueden representarse (García, 2015; Panizza, Sadovsky y Sessa, 1999; Solares, 2007).

En investigaciones realizadas con estudiantes entre 15 y 17 años (educación Media Superior en México), se encuentran nuevamente las dificultades detectadas en los estudiantes de nivel Básico, y, además, algunas otras como las reportadas por Segura de Herrero (2004) y Ochoviet (2009):

- Desarticulación entre el objeto SEL y su conjunto solución.
- Incorrecto pasaje del registro verbal al algebraico.
- Otorgar un estatus inframatemático al registro de representación gráfico.
- Generalización de la solución de SEL como los puntos de corte en el registro gráfico.
- En la representación gráfica de un sistema de tres ecuaciones y dos incógnitas concebir el conjunto de tres rectas paralelas como la única configuración gráfica para un sistema sin solución.
- Concebir un sistema de ecuaciones lineales como un proceso de resolución, es decir, en forma operacional.
- Confundir las raíces de cada ecuación con la solución del sistema.
- No interpretar en cada punto un par ordenado y en cada recta una ecuación.

Otras dificultades están relacionadas con la comprensión de la ecuación lineal con dos y tres variables (Panizza, Sadovsky, & Sessa, 1999).

1.2.2 El nivel Superior

En un estudio cualitativo aplicado a tres docentes en el que realizaron entrevistas individuales y observación de clase, Trejo y Camarena (2011) analizaron las concepciones de los profesores en torno a la enseñanza de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas y el papel de la contextualización. Las investigadoras reportaron la existencia de una predominancia de la enseñanza tradicional (entendida como la transmisión de contenidos) por parte de los docentes participantes en el estudio, en la que el profesor es el que sabe y enseña activamente y el estudiante el que aprende con actitud pasiva; para los docentes la enseñanza de un objeto matemático consiste en la repetición y memorización de un conjunto de reglas y procedimientos. Trejo y Camarena señalan que para los docentes entrevistados la enseñanza de los SEL con dos incógnitas consiste en enseñar algoritmos para resolver ejercicios matemáticos y consideran que cuando los estudiantes dominen los procedimientos habrán aprendido matemáticas. Las investigadoras concluyen que una instrucción que se enfoca en el aprendizaje de procedimientos limita competencias de orden superior como el análisis, la argumentación y la toma de decisiones y ello no favorece la resolución de problemas en entornos ajenos al educativo y crean una falsa idea sobre el aprendizaje de las matemáticas.

Oktac y Trigueros (2010)[1] presentan un informe de un proyecto de largo alcance cuyos objetivos son "proporcionar un análisis teórico de las construcciones involucradas en los distintos conceptos de álgebra lineal, validar dicho análisis mediante investigación empírica y hacer sugerencias didácticas" (p. 376) con base en los resultados de la investigación. Algunos de los conceptos estudiados en este proyecto son: espacio vectorial, transformación lineal, base y sistemas de ecuaciones lineales (Alcocer, 2007; Borja-Tecuatl, 2016; Borja-Tecuatl, Trigueros y Oktaç, 2013; Cutz, 2005; Trigueros, Oktaç & Manzanero, 2007; Mora,

[1] La investigación de Ochoviet (2009) forma parte también de este proyecto.

2001; Parraguez & Bozt, 2012). En nuestro caso analizaremos aquellas investigaciones enfocadas en los SEL y su solución.

Las dificultades.

La investigación de Alcocer (2007) consistió en la observación de las dificultades y concepciones sobre la solución de sistemas de ecuaciones lineales en los contextos analítico y geométrico, considerando los casos de sistemas con solución única, con infinitas soluciones y sin solución. Para este fin aplicó un cuestionario al inicio y al final del curso de Álgebra Lineal a 24 estudiantes de nivel Superior del área de ingeniería; posteriormente realizó una entrevista a 5 de ellos. Los resultados fueron analizados mediante la teoría de los modos de pensamiento de Sierpinska (2000)[1].

Alcocer (2007) señala que en estudios previos se ha documentado que, al tener la representación geométrica de un sistema de ecuaciones, en la que las rectas se intersecan dos a dos en tres puntos, muchos estudiantes afirman que existen tres soluciones, ya que relacionan cada intersección con una solución; que la mayoría de los estudiantes tienen dificultad para construir un sistema de ecuaciones lineales partiendo de un punto dado como solución y para pasar de la representación geométrica a la algebraica. Entre sus hallazgos, en el diagnóstico encontró que algunos estudiantes no eran capaces de plantear un sistema de ecuaciones sin solución, con una solución o con infinitas soluciones, consideraban que para cada incógnita se tendría una solución al sistema y que para cada incógnita es necesario tener una ecuación.

En su investigación, Alcocer (2007) reportó que, para obtener un sistema equivalente a partir de una representación gráfica, los estudiantes buscaban multiplicar una de las ecuaciones a fin de conservar el sistema original y que, para la mayoría de los estudiantes, un sistema de tres o más ecuaciones sin solución, en su representación gráfica, debería tener únicamente rectas paralelas. Tras el curso, en el que se hizo énfasis en los conceptos de interés, Alcocer

[1] Sierpinska (2000) plantea tres modos de pensamiento con relación a la concepción de los objetos matemáticos: el pensamiento *Sintético-geométrico* que está basado en la representación geométrica, que es una manera natural de representar mentalmente los objetos matemáticos; el pensamiento *Analítico-aritmético* que usa las relaciones numéricas y, finalmente, el pensamiento *Analítico-estructural* en el que se conciben los objetos matemáticos mediante las propiedades que los explican.

menciona que persistió en algunos casos la idea de que, en sistemas de ecuaciones, son iguales la solución y la intersección (la intersección con los ejes inclusive) y que, por lo tanto, un sistema conformado por dos rectas paralelas y una transversal tiene soluciones.

Parraguez y Bozt (2012), estudian la relación que existe entre los conceptos de solución de un sistema de ecuaciones y los de dependencia e independencia lineal de vectores. Con el fin de analizar la comprensión de los conceptos de solución de un sistema de ecuaciones y de dependencia e independencia lineal de vectores en los modos de pensamiento antes citados (Sierpinska, 2000) y orientar la conexión entre ambos conceptos, los investigadores realizaron un estudio de caso a siente estudiantes chilenos de nivel superior, a los cuales se les aplicó un cuestionario de seis preguntas que tenían como objetivo identificar y promover el tránsito entre los diferentes modos de pensamiento e indagar las conexiones entre los conceptos citados.

De acuerdo con Parraguez y Bozt (2012) la falta de un concepto geométrico de la solución de un SEL limita el desenvolvimiento de los estudiantes en el álgebra lineal, así como su concepción del objeto matemático; afirman que ello es consecuencia del énfasis que se da a lo algebraico al tratar los sistemas de ecuaciones lineales. Parraguez y Bozt señalan que, al resolver un SEL por algunos de los métodos de resolución, el estudiante puede estar aplicando un algoritmo sin un verdadero conocimiento sobre los conceptos.

El trabajo de investigación de Trigueros, Oktaç, y Manzanero (2007) está enfocado en el concepto de solución de sistemas de ecuaciones lineales, en el que se estudia la viabilidad de una descomposición genética, basada en la teoría APOE[1], analizando las dificultades y el patrón de razonamiento de seis estudiantes de nivel superior. Las investigadoras reportaron que algunos estudiantes usaron en sus explicaciones "nuevas palabras" relacionadas con los conceptos introducidos en un curso basado en una propuesta de descomposición genética, pero demostraron que no habían asociado ningún significado a esos conceptos y que no podían encontrar la solución al sistema de ecuaciones. Las investigadoras encontraron, además, que los estudiantes mostraban dificultades para interpretar geométricamente la

[1] En Roa-Fuentes & Oktaç **Fuente especificada no válida.** puede encontrarse una clara y concisa explicación de la teoría APOE.

solución, así como falta de coordinación entre el conjunto solución en una representación analítica y en una representación geométrica. Y concluyen que los estudiantes que tenían mejor desempeño en el álgebra elemental al inicio del estudio lograron mejores resultados en el aprendizaje de los conceptos y procesos relacionados con los SEL.

En Mora (2001) se reportan los resultados de una entrevista que fue aplicada a siete estudiantes de nivel Superior que cursaban el tercer semestre de la carrera de Ingeniería en Alimentos. Mora propone una secuencia de problemas con la cual pretende lograr una conexión en los estudiantes en los modos de pensamiento analítico y sintético-geométrico. El investigador concluye que los estudiantes no logran asociar los diferentes modos de pensamiento.

Cutz (2005) realizó un estudio acerca de las concepciones de los estudiantes de licenciatura sobre los sistemas de ecuaciones lineales. Para ello, la investigadora aplicó un cuestionario diagnóstico, previo al curso de Álgebra Lineal, en el que observó que existían problemas con la concepción y noción del concepto de solución de un sistema de ecuaciones y que éstas persistieron incluso después del curso de Álgebra Lineal. En su investigación, Cutz (2005) utilizó los modos de pensamiento de Sierpinska (2000) y encontró que la mayoría de los estudiantes aún no tienen claros los conceptos de SEL y su solución para realizar el paso del modo geométrico al analítico. Reportó, además, que los estudiantes tienden a relacionar la solución de un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas con el punto de intersección de dos de las rectas que representan gráficamente el sistema; mientras que, en el caso de sistemas con infinitas soluciones, cuyas rectas o planos coinciden en su totalidad, los estudiantes afirman que no hay solución, ya que esperan ver algún punto de intersección o "cruce". Cutz señala, además, que al presentarse un problema para pasar de una representación gráfica a una analítica, los estudiantes demandan el conocimiento de los elementos que les permitan obtener las ecuaciones representadas, mientras que el investigador muestra la representación gráfica con ausencia de ejes y otros elementos que le permita a los estudiantes obtener las ecuaciones, ya que la intención del investigador es que los estudiantes identifiquen las características del sistema; de esto deduce una fuerte tendencia de los estudiantes hacia el modo analítico-aritmético, ya que los estudiantes se enfocan más en las ecuaciones que en la estructura de los sistemas.

Como otro de sus hallazgos, Cutz (2005) señala que los estudiantes hacen una generalización del concepto solución para un sistema representado por rectas a uno que queda representado por planos, sugiriendo así, que la solución de un sistema de ecuaciones con dos incógnitas, se relaciona con los puntos de intersección de las rectas que representa al sistema, y que la solución para un sistema de ecuaciones con tres incógnitas, se relaciona con la región o rectas de intersección de los planos que representan al sistema. Es decir, en el caso en el que se tienen tres planos intersecándose en una línea, los estudiantes afirman que el sistema representado por tales planos tiene una solución, que es precisamente la recta de intersección, ya que la ven geométricamente: como un único objeto. Ello insinúa un reacomodo de las ideas que han adquirido durante cursos previos y que involucran el tratamiento de sistemas de ecuaciones lineales de orden 2×2. Cutz observó una tendencia a resolver sistemas de tres ecuaciones con dos incógnitas formando "pequeños sistemas" de dos ecuaciones con dos incógnitas. La solución de cada pareja de ecuaciones es, según el estudiante, una solución para el sistema, incluso si son diferentes. De lo anterior concluyó que los estudiantes están acostumbrados a trabajar con sistemas cuadrados y cuando se enfrentan a sistemas diferentes, tienen la necesidad de transformarlos en sistemas con los cuales están más familiarizados (así, al tener un sistema de tres ecuaciones y dos incógnitas separan al sistema en tres "pequeños sistemas" de dos por dos) y que ello muestra que los estudiantes no tienen claro el significado del concepto de sistema.

Borja-Tecuatl, Trigueros y Oktaç (2013), describen los resultados de un instrumento de diagnóstico aplicado a 25 estudiantes de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México, sobre el impacto que puede tener en la comprensión de los SEL la falta de competencia respecto a los usos de las variables. Las investigadoras reportan que los estudiantes muestran varias debilidades con respecto a la identificación de los diferentes usos de las variables y para adaptarse a los cambios en el uso de las variables a lo largo de un mismo problema.

1.3 Aspectos para la enseñanza sugeridos en estudios previos.

Parraguez y Bozt (2012) proponen que exista una armonía entre la interpretación algebraica y la geométrica para facilitar el tránsito entre las mismas. Consideran que es necesaria, más no suficiente, la definición formal de los conceptos para poder transitar entre los tres modos

de pensamiento: sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico-estructural. Para Parraguez y Bozt, el modo de pensamiento estructural es el menos favorecido, por ello destacan la importancia de poner especial atención a las propiedades de los sistemas de ecuaciones lineales (sin descuidar los modos aritmético y geométrico). Sugieren el uso de estrategias para promover un mayor interés de los estudiantes hacia los conceptos y sus significados y para favorecer el tratamiento de los SEL en los distintos modos de pensamiento y el tránsito entre ellos.

La descomposición genética que propone Manzanero (2007) sugiere que los conceptos que un estudiante debe construir para comprender el concepto de conjunto solución de un SEL son: conjunto, función, ecuación, igualdad, y espacio vectorial en una estructura de proceso, sin embargo, tras su análisis encuentra la conveniencia de incorporar los de variable y parámetro. Entre sus conclusiones, Manzanero señala la conveniencia de construir a la par las representaciones geométrica y algebraica de los conjuntos solución de un sistema de ecuaciones lineales, ya que ello propicia una mejor comprensión del concepto analizado. Además, considera conveniente presentar (en diferentes representaciones) una cantidad de casos que permita que los estudiantes tengan contacto con todos los elementos indispensables para la construcción del objeto solución; además de problemas no triviales, que enriquezcan su esquema del concepto, tales como problemas que involucran parámetros o problemas presentados en un contexto geométrico.

Trigueros et al. (2007) señalan que una buena comprensión del álgebra elemental parece ser realmente importante para que los estudiantes aprendan conceptos relacionados con los sistemas de ecuaciones y el álgebra lineal.

Para la enseñanza de los sistemas de ecuaciones, Cutz (2005) y Alcocer (2007) destacan la importancia de relacionar la solución de un sistema de ecuaciones lineales con su representación gráfica, evitar que la explicación quede en un nivel de mecanización de métodos de resolución de los sistemas y hacer ver al estudiante la existencia de otros casos de sistemas de ecuaciones que no tienen solución sin limitarse al ejemplo de rectas o planos paralelos. Cutz (2005) sugiere, además, favorecer el modo de pensamiento estructural y para lograrlo recomienda buscar estrategias que promuevan el tratamiento de los sistemas en los distintos modos de pensamiento, así como diseñar actividades que pongan al estudiante en

algún modo de pensamiento en específico, y ante todo, diseñar actividades que inciten el tránsito entre esos modos de pensamiento.

Ochoviet (2009) realiza una serie de sugerencias para introducir el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales, entre otras: proponer actividades que provoquen que los estudiantes analicen el número de soluciones que puede tener un sistema de ecuaciones; iniciar el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales introduciendo la ecuación lineal con dos incógnitas, analizando lo que representan esas dos incógnitas; obtener soluciones mediante procedimientos diversos y no exclusivamente el algebraico; analizar la validez de las soluciones y generar sistemas de ecuaciones que tengan una solución dada; e introducir la noción de ecuaciones equivalentes.

1.4 Descripción de la problemática

Los resultados de las diversas investigaciones que se han presentado en este capítulo nos han permitido revisar algunas de las dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los conceptos relacionados con los SEL, algunas de sus causas y la importancia de buscar estrategias para remontarlas. El estudio de los sistemas de ecuaciones lineales en la educación Media Superior podría significar una transición entre el enfoque tradicionalmente resolutivo en el nivel Medio Básico y el enfoque más conceptual y riguroso en el nivel Superior y una oportunidad de incidir en las dificultades detectadas respecto a las diferentes representaciones y a la apropiación de conceptos y procesos de los SEL (Cutz, 2005; Manzanero, 2007; Mora, 2001; Parraguez & Bozt, 2012). Para ello, en este informe se propone un estudio mediante el marco teórico metodológico de los Modelos Teóricos Locales de los sistemas de ecuaciones lineales enfocado en la producción de sentido respecto al objeto matemático SEL y otros relacionados, tales como conjunto solución, sistemas de ecuaciones equivalentes y eliminación gaussiana en estudiantes de educación Media Superior.

En el siguiente capítulo se detalla el marco teórico metodológico que guía la investigación con la que se pretende abordar la problemática de la resolución de problemas y la producción de significados de los objetos matemáticos relacionados con los SEL en estudiantes de educación Media Superior.

Capítulo 2

Marco teórico metodológico

En diversas publicaciones, Eugenio Filloy, Teresa Rojano y Luis Puig han desarrollado elementos que conforman el marco teórico y metodológico llamado Modelos Teóricos Locales (Filloy & cols., 1999; Filloy, Puig, & Rojano, 2008; Filloy, Rojano, & Puig, 2008; Puig, 2008; Rojano, Filloy, & Puig, 2014). Este marco proporciona una guía para el diseño, el desarrollo de experimentación y el análisis cualitativo de datos en Matemática Educativa. En este capítulo explicamos el porqué del carácter de modelo y de la naturaleza local de estos estudios, definimos algunos constructos que forman parte de la terminología del marco teórico y describimos las componentes de los Modelos Teóricos Locales que son la guía teórico-metodológica de la investigación presentada en este documento.

2.1 Modelos Teóricos Locales

Los Modelos Teóricos Locales (MTL) permiten enfocar un objeto de estudio a partir de cuatro componentes interrelacionadas con las que se analizan los elementos involucrados en un proceso de enseñanza y aprendizaje: el conocimiento matemático, el sujeto que enseña, el sujeto que aprende y la comunicación entre estos últimos. Considerando lo anterior, los MTL se conforman por cuatro modelos:

i) los Modelos de Competencia Formal, que se enfocan en la actuación competente del sujeto ideal con respecto al conocimiento matemático en cuestión (Componente de Competencia),

ii) los Modelos de Enseñanza, que encauzan la actuación y consideran los diferentes factores que impactan y determinan la forma de enseñanza del objeto matemático estudiado por parte del sujeto que enseña (Componente de Enseñanza),

iii) los Modelos de Cognición, con los que se analizan las dificultades en el aprendizaje del objeto en cuestión y la forma en que el usuario combina el nivel de competencia formal con el pragmático en la resolución de un problema; en general, la forma en que el sujeto aprende (Componente de Procesos Cognitivos) y

iv) los Modelos de Comunicación, que son la forma en que se lleva a cabo el intercambio de mensajes dentro de los procesos de enseñanza, la producción de mensajes y la descodificación en la Componente de Comunicación.

Mediante estas cuatro componentes, los MTL permiten realizar estudios que, mediante un enfoque integral, brindan la posibilidad de hacer contribuciones sustantivas a un contenido específico (Filloy, Rojano, & Puig, 2008).

Para ejemplificar la interrelación entre las cuatro componentes podemos pensar en un eficiente modelo de comunicación entre el sujeto que enseña y el sujeto que aprende que da al investigador la posibilidad de observar la forma en que los estudiantes aprenden (modelo de cognición). Esto permite dar sentido a las producciones de los estudiantes desde la perspectiva del modelo de competencia formal e identificar las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje del objeto matemático de interés. Con lo anterior es posible proponer caminos para superarlas en el modelo de enseñanza.

Filloy y cols. (1999) afirman que los análisis de los fenómenos de la matemática educativa, realizados mediante un acercamiento global y el uso de alguna teoría general, reducen de tal manera la problemática que impiden comprender el fenómeno analizado, por lo tanto, respecto del carácter local de los MTL destaca:

> En lugar de argumentar en favor de privilegiar una de las componentes: "gramática", "pragmática" y "comunicación", tendremos que concentrarnos en modelos teóricos locales apropiados sólo para fenómenos específicos […] y proponer diseños experimentales ad-hoc que arrojen luz sobre las interrelaciones y oposiciones que tienen lugar durante la evolución de todos los procesos pertinentes relacionados con cada una de sus cuatro componentes. (p.7)

Según lo anterior, los MTL *i*) permiten analizar los fenómenos relativos a las cuatro componentes en un proceso de enseñanza y aprendizaje de un contenido matemático específico y con estudiantes concretos y *ii*) el modelo se diseña especialmente para observar estos fenómenos y sus interrelaciones; por lo tanto, son estas dos condiciones las que dan a los modelos teóricos el carácter de local.

Existen algunos hechos con los que se puede explicar el carácter de modelo de este marco metodológico, uno es que los MTL tienen un carácter descriptivo, explicativo y predictivo (esquema teórico). Por otra parte, puede afirmarse que, en condiciones idénticas, los

fenómenos tendrían el mismo comportamiento (replicabilidad). Si bien, estos hechos tienen que ver con dos acepciones de la palabra modelo, otro hecho es respecto al cual, Puig (2008), puntualiza:

> En esto se diferencia la pretensión de la elaboración del modelo de la pretensión que suele acompañar la elaboración de una teoría, que implica la exclusión de cualquier otra teoría que se avance para explicar los mismos hechos, a la que se combatirá como errónea. (p. 88).

Con esta afirmación se reconoce la posibilidad de que existan otras maneras de describir, explicar y predecir los mismos fenómenos y se hace una distinción respecto a las teorías.

A continuación, se explican algunos constructos importantes para la definición de las componentes de los MTL (competencia, enseñanza, procesos cognitivos y comunicación) y en particular en la construcción del MTL con el que se analiza esta investigación.

2.2 La componente de comunicación

Para que se lleve a cabo la comunicación entre el sujeto que enseña y el sujeto que aprende es necesaria la construcción de un andamiaje que permita enmarcar el diseño de las experiencias de aprendizaje y la descodificación de estas por parte del sujeto que aprende. Y que permita, además, que el investigador descodifique las producciones de los estudiantes. En los MTL, este andamiaje son los Sistemas Matemáticos de Signos, que se describen en esta sección.

2.2.1 Signos

Puig (2003) señala que más que los signos, la semiótica estudia los procesos de significación y comunicación, y que tal idea está claramente explicada en las definiciones de signo dadas por Peirce. En la semiótica desarrollada por Peirce el signo no se caracteriza por una relación diádica como la pareja significante/significado de Saussure, sino que se encuentra en una relación triádica. La relación se establece entre el signo (S) y su objeto (O) y un interpretante (I), que es la cognición producida en una mente. Para Peirce, un “signo, o representamen, es algo que, para alguien, representa o se refiere a algo en algún aspecto o carácter” (Peirce, 1974, p. 22). El signo no solamente ocupa el lugar de algo (de su objeto), sino que se dirige

a alguien, y en eso radica para este estudio la importancia de la noción de signo según Peirce, en el hecho de que considera la cognición, al afirmar que, la intención es que el signo cree en la mente de una persona un signo equivalente (Filloy, Rojano y Puig, 2008). Esta concepción permite introducir la noción de Sistemas Matemáticos de Signos.

2.2.2 Sistemas matemáticos de signos

Al revisar textos matemáticos pareciera que podemos distinguir en ellos dos lenguajes diferentes, uno formado por signos que podrían considerarse meramente matemáticos o artificiales y otro perteneciente a una lengua vernácula. Sin embargo, de acuerdo con Puig, "[lo que] interesa más desde un punto de vista didáctico no es el estudio de los signos y sus tipos, sino el estudio de los procesos de significación y producción de sentido" (1997, p. 9). A partir de esa afirmación, Puig considera que deja de tener importancia la diferencia entre los signos matemáticos y los del lenguaje natural. Por lo tanto, lo que hay que calificar de matemático no son signos específicos, sino sistemas específicos de signos. Se puede entonces hablar de *Sistemas matemáticos de signos* en lugar de *Sistemas de signos matemáticos*.

Los sistemas matemáticos de signos (en adelante también SMS) a diferencia de cualquier lengua vernácula, están compuestos por signos de diferente naturaleza (Filloy, Rojano y Puig, 2008; Puig 1997). Un SMS está compuesto por diferentes sistemas de signos matemáticos, el lenguaje vernáculo y otros medios de representación. Esta noción permite tomar el sistema de signos como un todo y describir como matemático el sistema y no los signos, y a su vez, este sistema (de naturaleza matemática) permite y es responsable del sentido a los textos (Filloy, Rojano, & Puig, 2008).

De acuerdo con Filloy y cols. (1999), el Modelo de Comunicación requiere considerar tanto la producción de mensajes matemáticos como su descodificación para obtener el significado completo de dicho mensaje. Una de las características de los MTL es que el análisis de las relaciones entre sistemas de signos engloba las producciones de los estudiantes (Filloy, Puig, & Rojano, 2008), por lo tanto, la noción de SMS debe ser suficientemente extensa para servir tanto como herramienta de análisis de textos matemáticos históricos, como de los textos en los que los estudiantes muestran su propia producción de sentido.

Los SMS son heterogéneos debido a que los signos que los forman tienen esa naturaleza, y son estratificados, ya que deben considerar "los estratos de sistemas de signos que producen los alumnos para dar sentido a lo que se les presenta en el modelo de enseñanza" (Filloy, Rojano & Puig, 2008, p. 7). Las producciones de los estudiantes pueden no estar en correspondencia con un sistema socialmente establecido, ni con el modelo formal, sin embargo, desde la perspectiva del modelo formal, el investigador debe ser capaz de descodificarlas. Los conceptos matemáticos son creados por los SMS que los describen y por lo tanto ya no están fuera del mundo de nuestra experiencia, sino que, al crearlos y describirlos, los SMS los dotan de existencia material. La creación de conceptos en SMS con mayores niveles de abstracción, permiten el proceso de abstracción progresiva.

2.3 La componente de cognición

Los procesos cognitivos involucrados en el desarrollo de las formas del pensamiento matemático y su comunicación afinan procesos complejos de pensamiento como los utilizados en la percepción, en la atención y su relación con los procesos de comprensión, en el uso de la memoria, en procesos lógicos de análisis y síntesis, en el uso de las heurísticas y en aprendizaje basado en procesos de generalización y abstracción (Filloy & cols., 1999).

Los fenómenos que se producen en el campo de interés de la Matemática Educativa son fenómenos de enseñanza y aprendizaje que pueden verse como procesos de significación y comunicación (Puig, 2003). De acuerdo con Puig, en el Modelo Cognitivo son particularmente importantes las estructuras de los estudiantes ya que determinan sus procesos de resolución de problemas y la forma en la que codifican y descodifican los mensajes matemáticos en un SMS.

Rojano, Filloy y Puig (2014) señalan que, en estudios realizados en la década de 1980, la interpretación de símbolos y expresiones algebraicos, de estudiantes que inician el aprendizaje del álgebra, se realiza con base en significados que derivan de la aritmética o del lenguaje natural, esto es, como textos que se relacionan con otros textos. Estos resultados sugieren que el acto de la lectura de textos algebraicos sumerge al lector en una red de relaciones intertextuales derivadas de su acervo de experiencias lingüísticas y matemáticas.

2.3.1 Intertextualidad

En Rojano, Filloy y Puig (2014), los autores explican cómo en su investigación de largo alcance iniciada en la década los 80 sobre el aprendizaje del álgebra, encuentran evidencia de que las lecturas de expresiones algebraicas evocan en los estudiantes otros textos en lenguaje natural o en SMS más concretos, es decir, no son leídas como textos cerrados e independientes. Este hecho los motiva a realizar un análisis usando la noción de intertextualidad, que cuestiona la idea de que el proceso de lectura es la extracción de un significado único depositado en un texto por su autor, y da paso a la idea de que, en la búsqueda de significado, un lector se sumerge en una red de relaciones entre una infinidad de textos que son parte de sus experiencias previas, generando un significado único y personal del texto, y que mientras más inserta en un marco cultural se encuentre esta red, más facilidad tendrá el lector para realizar una lectura abierta y productiva en cuanto a la cercanía con el significado aceptado social y culturalmente de dicho texto, cuya creación, es a su vez, de acuerdo con Villalobos (2003), un reflejo del intertexto del autor.

En su artículo "La noción de intertextualidad en Kristeva y Barthes", Villalobos (2003) afirma que los textos no existen por sí mismos, que no son una unidad cerrada y autosuficiente, sino que forman parte de otros textos, y señala:

> […] la teoría de la intertextualidad se refiere a una idea general: en la comunicación, en la transmisión de los saberes y los poderes, de los textos, no existe tabula rasa […] todo texto sería una reacción a textos precedentes, y éstos, a su vez, a otros textos, en un *regressus ad infinitum*. (p. 138).

Orígenes del término intertextualidad.

El término Intertextualidad fue usado por primera vez en el artículo titulado *Bajtín, la palabra, el diálogo y la novela*, en la segunda mitad de la década de los sesenta, por la teórica literaria Julia Kristeva (Allen, 2011).

Gómez (1983) señala que Bajtín consideró que las novelas en cuyo análisis se enfocaron sus libros eran polifónicas, es decir, que en ellas se generaban diálogos entre ideas, personajes, géneros, textos y discursos literarios diversos, llamando a este fenómeno dialogismo. Bajtín se enfoca en los contextos sociales en los que se intercambian las palabras; para él, la

naturaleza relacional de la palabra se deriva de su existencia dentro de sitios y registros sociales específicos y de momentos específicos de emisión y recepción (Allen, 2011).

Al realizar el estudio sobre los trabajos literarios de Mijaíl Bajtín, Kristeva toma como punto de partida los criterios básicos del estructuralismo[1], pero logra trascenderlos ya que encuentra que para su análisis literario tendría que superar el *no historicismo*[2] y la dimensión estática, propias del estructuralismo (Villalobos, 2003). En el artículo citado, Kristeva señala que "(...) todo texto se construye como mosaico de citas, todo texto es absorción y transformación de otro texto. En lugar de la noción de intersubjetividad se instala la de intertextualidad (…)", dando con ello origen al término.

Desde su surgimiento, el término intertextualidad ha tenido diversos desarrollos, se ha definido, redefinido y usado en distintas manifestaciones culturales como el cine, la literatura, la filosofía, etc. Un teórico literario que se destaca por su concepción y uso del término intertextualidad en sus análisis literarios es el teórico francés Roland Barthes, quien señala que la intertextualidad de un texto no debe confundirse con el origen del texto, ya que las citas con las que se relaciona el texto (y que inevitablemente existen) son anónimas e ilocalizables (pero ya leídas), "son citas sin entrecomillado", por lo tanto en un análisis intertextual es un despropósito buscar las influencias u orígenes del texto. Barthes (1994) afirma que:

> un texto no está constituido por una fila de palabras, de las que se desprende un único sentido […] sino por un espacio de múltiples dimensiones en el que se concuerdan y se contrastan diversas escrituras, ninguna de las cuales es la original: el texto es un tejido de citas provenientes de los mil focos de la cultura (p. 69)

Por otra parte, Barthes da un giro a la noción de intertextualidad al cuestionar las suposiciones sobre el papel del autor. Bajo su concepción, los lugares asignados tradicionalmente tanto al autor como al lector son alterados. Para Barthes, una vez que se produce la escritura, se

[1] Corriente cultural que imperaba en Francia en esa época y cuyos fundamentos se encuentran en la semiología de Saussure; en la noción de signo lingüístico saussureana los signos poseen significado por su función en un sistema estático del lenguaje. Para Saussure los signos no tienen significado propio, solo poseen significado debido a su relación (similitudes y diferencias) con otros signos y existen dentro de un sistema (Allen, 2011).

[2] El estructuralismo se opone a otras corrientes de la época, entre ellas al historicismo, que considera la realidad como producto del devenir histórico.

produce una ruptura con el autor (la muerte del Autor), entonces, se vuelve inútil tratar de descifrar un texto investigando al escritor como si fuera la historia del propio texto, ya que la voz de los textos no está en su escritura, sino en su lectura. Barthes (1994) afirma que:

> […] un texto está formado por escrituras mú1tiples, procedentes de varias culturas y que, unas con otras, establecen un diálogo, una parodia, una contestación; pero existe un lugar en el que se recoge toda esa multiplicidad, y ese lugar no es el autor […] sino el lector […] la unidad del texto no está en su origen, sino en su destino […] ese alguien que mantiene reunidas en un mismo campo todas las huellas que constituyen el escrito. (p. 71)

Barthes considera la intertextualidad de los textos, pero confiere mayor importancia al lector. En este sentido, en *Hermenéutica y estructuralismo*, Ricoeur (como se citó en Villalobos, 2003), considera que todo acto de lectura tiende hacia una comprensión y hacia el establecimiento de referentes, y que, por otra parte, los textos están movidos por una voluntad de decir, esto es, todo acto lingüístico conlleva el deseo de significar.

Intertexto personal

Si bien, tal como Barthes puntualizó, un texto "es un tejido de citas provenientes de los mil focos de la cultura", un lector tiene, a su vez, una red de referentes que pone en juego para hacer una lectura que le permite tener una comprensión particular, única de un texto. Más allá de la posibilidad de que esa comprensión esté acorde al significado histórica o culturalmente aceptado, esos referentes interconectados del lector representan su intertexto personal con relación al texto.

Intertextualidad para los fines de esta investigación

En un sentido amplio podríamos decir que la noción de intertextualidad que mejor se adapta a los fines de esta investigación, es aquella en la que se considera de forma protagónica, al lector-estudiante; específicamente, a la red de relaciones con infinidad de otros textos[1] (intertexto personal), que pone en juego (incluso de manera inconsciente) para dar lectura o producir significado de un espacio textual (en el que un texto se convierte al entrar en un

[1] Considerando la noción amplia de texto, descrita en la sección 2.2.3.

proceso de lectura), transformándolo en un nuevo texto, que, en cierta medida, pasará a formar parte de su propio intertexto.

El uso de la noción de intertextualidad en este informe está enfocado en el análisis y la descripción de los procesos de producción de sentido de los estudiantes, así como el desarrollo de competencias en el aprendizaje de los SEL mediante la experimentación con el Modelo de enseñanza.

Consideramos que el intertexto personal de los lectores-estudiantes expresado mediante tendencias, alusiones o referencias en sus producciones, permite, al menos parcialmente, observar en qué formas, este intertexto facilita o dificulta una lectura apegada al sentido social, cultural e históricamente aceptado de un texto.

2.3.2 Tendencias cognitivas.

Las tendencias cognitivas (TC) son hechos que se presentan reiteradamente cuando en una situación de enseñanza se intenta llevar a los estudiantes de un estrato a otro más abstracto de un Sistema Matemático de Signos, es decir, son hechos que se presentan en los procesos cognitivos de abstracción (Filloy y cols., 1999; Filloy, Rojano & Puig, 2008). Estas tendencias cognitivas están estrechamente vinculadas al intertexto de cada sujeto, que incide en los procesos de lectura/transformación de textos y en los procesos de codificación y descodificación de los mensajes matemáticos. A continuación, se describen las once tendencias presentadas por Filloy y cols. (1999) al pasar del SMS de la aritmética al SMS del álgebra.

TC Uno. La presencia de un proceso de abreviación de los textos concretos para poder producir reglas sintácticas nuevas.

Esta tendencia se produce cuando los estudiantes reconocen patrones en las operaciones sobre los modelos algebraicos generados a partir de un texto concreto y esto les permite ahorrar pasos para resolver. El uso repetido de modelos concretos genera esta necesidad, ya que, al reconocer los patrones, los estudiantes son cada vez más independientes de los modelos concretos. Por ejemplo, al obtener valores numéricos (Tabla 2.1), los estudiantes

pueden predecir el resultado de otra entrada y en ocasiones generalizar la operación consiguiendo con ello una función lineal.

Tiempo	Posición
0	2
1	$2+3(1)=6$
2	$2+3(2)=8$
3	$2+3(3)=11$
⋮	
6	$2+3(6)=20$
t	$2+3(t)$

Tabla 2.1 Ejemplo Tendencia cognitiva Uno.

TC Dos. La dotación de sentidos intermedios.

Esta tendencia puede observarse cuando los estudiantes combinan diferentes niveles de abstracción. Por ejemplo, cuando en un problema de enunciado los estudiantes identifican las cantidades desconocidas, pero no las relaciones entre ellas, y esto no les permite establecer en forma correcta un modelo algebraico. Los estudiantes pueden entonces retroceder en el nivel de abstracción y otorgar valores a las cantidades desconocidas para dar mayor claridad a las relaciones y llegar al modelo buscado.

TC Tres. El retorno a situaciones más concretas, cuando se presenta una situación de análisis.

Al proponer a los estudiantes textos algebraicos con diferencias significativas con respecto a aquellos para los que ha encontrado reglas sintácticas nuevas, al no poder usar los estratos intermedios del lenguaje recién creados, se realiza un proceso de retorno al uso del modelo concreto. Por ejemplo, cuando un estudiante ha encontrado que puede resolver una ecuación de la forma $x+a=b$, restando a en ambos lados de la igualdad, pero al enfrentarse a la expresión $x-a=b$, prefiere realizar un análisis aritmético para encontrar el valor desconocido, con lo cual evidencia un retorno a un SMS más concreto, como lo es el aritmético, pero también evidencia una comprensión de lo que significa la variable como incógnita.

TC Cuatro. La imposibilidad de desencadenar operaciones que podían hacerse momentos antes.

Es una tendencia que puede observarse cuando se presenta a los estudiantes un proceso que dominan, inmerso en un proceso más largo o en un problema que involucra dos o más procesos que dominan de manera aislada. Por ejemplo, cuando los estudiantes pueden, por un lado, evaluar expresiones algebraicas con números enteros y por otro, conocen los procesos para operar con fracciones, pero al evaluar una expresión sustituyendo números racionales, tropiezan en las operaciones.

TC Cinco. Lecturas hechas en estratos del lenguaje que no permitirán resolver la situación problemática.

Un ejemplo de esta tendencia es el que manifiestan los estudiantes al asumir que la velocidad de un móvil aumenta al observar una recta con pendiente positiva que modela la posición del móvil con relación al tiempo.

TC Seis. Articulación de generalizaciones erróneas.

Es una de las tendencias más extendidas y tiene múltiples manifestaciones. Un ejemplo difundido ampliamente es el desarrollo del producto de un binomio al cuadrado mediante la siguiente igualdad $(a+b)^2 = a^2 + b^2$, en lugar de $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, ya que los estudiantes generalizan de manera errónea la igualdad $(a \times b)^2 = a^2 \times b^2$.

TC Siete. La presencia de mecanismos apelativos que centran el desencadenamiento de procesos erróneos de resolución.

Algunos sujetos no pueden resolver algunas situaciones problemáticas debido al uso insistente de un proceso ineficiente que no los lleva a la solución. Es frecuente que algunos estudiantes comentan sistemáticamente un error, por ejemplo, cuando cada vez que tienen que operar expresiones del tipo $p(x) - q(x)$, cambian el signo únicamente del primer término del segundo polinomio; o cuando al elevar una expresión al cuadrado, la multiplican por dos, en lugar de multiplicar la expresión por sí misma, o elevan las variables al cuadrado, pero los coeficientes los multiplican por dos.

TC Ocho. La presencia de mecanismos inhibitorios.

En algunas ocasiones, la presencia de radicales, números racionales, negativos o elementos poco asimilados por el sujeto, inhibe procesos o el uso de reglas sintácticas ya dominadas. Los cambios de variables o de valores de datos pueden también actuar como mecanismos inhibitorios.

TC Nueve. La presencia de obstrucciones provenientes de la semántica sobre la sintaxis y viceversa.

Este es el caso de sujetos que logran un buen manejo del modelo concreto, pero desarrollan una tendencia a permanecer y a progresar dentro de ese contexto; esto dificulta el tránsito a un estrato más abstracto o a un SMS más abstracto. Por ejemplo, cuando se propicia el cálculo aritmético de resultados de situaciones problemáticas y los estudiantes logran tal habilidad que se rehúsan al uso de los modelos algebraicos. Por otra parte, el tratar de independizar prematuramente las operaciones de los modelos concretos o enfocarse en el uso de modelos sintácticos puede llevar a los estudiantes a dificultades para establecer relaciones entre las situaciones problemáticas y los resultados obtenidos mediante reglas sintácticas.

TC Diez. La generación de errores sintácticos debido a la producción de códigos personales intermedios, para dotar de sentido a las acciones concretas intermedias.

Una situación encontrada con frecuencia cuando los estudiantes resuelven problemas de enunciado es la dificultad de establecer relaciones entre cantidades desconocidas al representarlas de forma sintáctica. Por ejemplo, cuando al modelar el problema de enunciado: *Un cuarto de un número es igual a 12. ¿Cuál es el número?* el estudiante se enfoca en la resolución y encuentra la cuarta parte de 12 y trata de establecer un modelo que involucre al número 3 o del cual se obtenga dicho número.

TC Once. La necesidad de dotar de sentido a las redes de acciones cada vez más abstractas hasta convertirlas en operaciones.

Durante la transición a un estrato más abstracto de un SMS, los sujetos buscan encontrar significado a cada nueva acción en el proceso, lo cual puede remitirlos a modelos muy concretos o a acciones en otros niveles de abstracción.

Las tendencias cognitivas guardan una fuerte relación con las experiencias previas de los estudiantes, es decir con el intertexto que los estudiantes ponen en juego al llevar a cabo las actividades de aprendizaje de un contenido específico. Algunas tendencias cognitivas funcionan como mecanismos que contribuyen a la producción de sentido; es posible encontrar únicamente algunas de ellas en un estudio o detectar otras propias de la competencia, del cambio en el nivel de abstracción o del SMS que se pretenda alcanzar.

2.3.3 Objeto mental: campo semántico personal

En el análisis que Puig (1997) realiza sobre la idea de la fenomenología didáctica de Freudenthal, menciona que existe una contraposición entre *objeto mental* y concepto atribuyendo al primero una relación con lo que las personas conciben o usan de las matemáticas (lo que está en su cabeza), y al segundo con el conjunto de saberes histórica, cultural y socialmente aceptados de la disciplina. Puig (1997) señala que en muchas ocasiones suele utilizarse el término "concepción" para denotar la parte o a la forma del "concepto", que una persona tiene en su mente y destaca de la siguiente forma la importancia de la constitución del objeto mental:

> El concepto de perro no puede ladrar. Los alumnos a los que se intentó inculcar en la época de las llamadas "matemáticas modernas" el concepto de número —en una versión escolar de la construcción cantoriana de los cardinales— hubieran salido de la escuela sin poder numerar, si no hubieran constituido un objeto mental de número al margen de lo que los programas oficiales querían que se les enseñara (p. 15).

Por otra parte, en correspondencia con la idea de objeto mental, Puig (1997) ejemplifica la idea de "campo semántico personal" utilizando el objeto matemático número. El investigador explica que la lista de todos los contextos en los que se usan los números (que incluye los de secuencia, recuento, cardinal, ordinal, medida, etiqueta, entre otros) cada uno con sus propias reglas de uso, constituyen el campo semántico total, el significado enciclopédico de "número"; y que cuando una persona puede interpretar correctamente el uso del objeto matemático de acuerdo con su contexto, no requiere del significado enciclopédico, sino de su campo semántico personal que es resultado de los significados de número que haya logrado construir a través de la producción de sentidos. Derivado de lo anterior, Puig afirma

que la intención de los sistemas educativos debería enfocarse en buscar que el campo semántico de los alumnos sea tan rico que le permita interpretar adecuadamente los objetos mentales en todas las situaciones posibles, en concordancia con la idea de Freudenthal de que el enfoque debería estar primero en la constitución de objetos mentales antes que en la adquisición de conceptos.

El intertexto personal en matemáticas está compuesto no solo por los conceptos sino por los objetos mentales que constituyen el campo semántico relacionado con ese concepto y que permiten al lector ejecutar procesos.

2.4 La componente de competencia

En los MTL el diseño del Modelo de enseñanza y el análisis de resultados se enfocan en la producción de sentido y en el uso competente de un SMS, pero ¿qué es lo que determina que existe un uso competente?, ¿qué caracteriza la competencia en un estudio teórico local? En esta sección se detalla la noción de competencia desde el enfoque de los MTL para clarificar su uso en la componente de competencia. También se describen tres métodos de resolución de problemas de enunciado (en particular, el Método cartesiano) como elementos para el diseño del Modelo de competencia formal (o Modelo de competencia), el cual trata de los fenómenos que están organizados en las matemáticas en el momento actual considerando su uso actual.

2.4.1 Competencia y Modelo de competencia formal

En el texto titulado “Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos”, Puig (2008) establece como una referencia del sentido de competencia empleado en los estudios teóricos locales, el generado en estudios lingüísticos y semióticos. Cita, por ejemplo, a Noam Chomsky (1965), que afirma, en cuanto al sujeto lingüísticamente competente, que la “teoría lingüística se interesa principalmente por un hablante-oyente ideal… que conoce su lengua perfectamente” (citado en Puig, 2008, p. 89). En cuanto a la enseñanza y el aprendizaje en matemáticas, Puig (2008) señala que la competencia se

encuentra ligada a la actuación, ya que la competencia proporciona una descripción de la conducta del sujeto que aprende:

> La caracterización de la competencia, es decir, de las capacidades del lector ideal ha de hacerse mediante una gramática que dé cuenta de sintaxis, semántica y pragmática, pero también ha de tener en cuenta […] que el que aprende, como consecuencia de su trabajo con ese conjunto de textos que es un modelo de enseñanza, modifica la gramática de los sistemas matemáticos de signos que conoce y que está poniendo en juego […] En cualquier caso, el concepto de competencia (matemática) está vinculado al concepto de actuación (matemática)." (pp. 92-93).

El Modelo de competencia formal se enfoca en un dominio concreto de las matemáticas (como la resolución algebraica de problemas o el concepto de razón o proporción) y debe describir y predecir la conducta del sujeto ideal en ese dominio específico. Sin embargo, la elaboración del Modelo de competencia debe considerar tanto el análisis del dominio matemático (en términos del sujeto ideal), como las actuaciones de los sujetos reales en ese dominio, que por su contraposición con las actuaciones del sujeto ideal pueden enriquecerlo.

Por otra parte, aunque en ocasiones se hable del *nivel de competencia* de un alumno, comparando sus actuaciones con las del sujeto ideal (que define la competencia), esto es un abuso del lenguaje, ya que el modelo de actuación local de un alumno concreto únicamente considera lo observado en circunstancias específicas. Bajo esa perspectiva, cuando se trata de MTL, las competencias matemáticas no pueden ser como las describe PISA: "pensar y razonar, argumentar, comunicar, modelizar, plantear y resolver problemas, representar, y usar el lenguaje y las operaciones simbólicos, formales y técnicos" (OECD, 2004, p. 40) ya que es una forma muy general, que no resulta conveniente para el diseño de la experimentación, ni para análisis de las producciones de los estudiantes en MTL (Puig, 2008).

Cuando se trata de un estudio teórico local, el término competencia está ligado al modelo que establece los límites y elementos de un dominio específico (fenómenos que están organizados en las matemáticas tomadas en su estado en el momento actual y considerando su uso actual)

y la descripción de las acciones que debería ejercer un sujeto ideal para ser competente en ese dominio.

2.4.2 Métodos de resolución de problemas de enunciado.

Gran parte del esfuerzo en el aprendizaje del álgebra está dirigido a alcanzar la competencia en el Método Cartesiano, que es el método por excelencia para la resolución de problemas de enunciado en el SMS del álgebra y el que usualmente se propone en los textos de enseñanza del álgebra para hacer traducciones entre los problemas de enunciado y su modelo algebraico y su posterior resolución. El uso competente del Método Cartesiano impide que el estudiante caiga en tendencias cognitivas que pueden ser obstructores en la resolución de problemas de enunciado que pueden representarse como ecuaciones en el SMS del álgebra.

Filloy, Rojano y Puig (2008) presentan dos métodos, derivados de tendencias observadas en los estudiantes, tales como recurrir a valores concretos y operar con ellos para realizar un análisis lógico lo cual les permite llegar a la solución de problemas de enunciado basados en estratos del SMS del álgebra y en la aritmética: el Método Analítico de Exploraciones Sucesivas (MAES) y el Método de Inferencias Analíticas Sucesivas (MIAS), que se describen enseguida.

Método de Inferencias Analíticas Sucesivas (MIAS)

Una vez identificados los enunciados del problema como situaciones reales, se realizan inferencias lógicas (transformaciones posibles de los enunciados del problema) con diferentes valores numéricos propuestos hasta llegar a una que se reconoce como la solución, por cumplir la condición o condiciones del problema.

Por ejemplo, dado el problema de enunciado: "*El largo de un terreno rectangular mide ocho metros más que su ancho. Si aumentáramos cinco metros a cada lado, el largo mediría el doble que el ancho. ¿Cuáles son las medidas del terreno?*"

Para utilizar el MIAS, un estudiante podría iniciar estableciendo la relación de que el largo mide ocho metros más que el ancho y establecer valores posibles (el ancho no podría ser

cero, pero sí un metro), aumentar cinco unidades a cada pareja de valores, hasta encontrar aquella en la que el largo mide el doble que el ancho (Tabla 2.2).

1 **Ancho**	**2** **Largo**	**3** **Ancho + 5**	**4** **Largo +5**	**5 ¿El largo es el doble que el ancho?**
1	9	6	14	No
2	10	7	15	No
3	11	8	16	Si

Tabla 2.2 Ejemplo de Método de inferencias analíticas sucesivas.

Es posible el uso del MIAS cuando los estudiantes no son competentes para identificar las cantidades desconocidas y las relaciones entre ellas. El MIAS puede ser útil para aclarar las relaciones entre los datos desconocidos y las condiciones dadas y dar pasos intermedios hacia la conformación del modelo algebraico, resultaría inconveniente que el estudiante tendiera a permanecer en este estrato. Cuando se considere conveniente, como un antecedente del MAES, se puede regresar en el proceso con preguntas de tipo: *¿Cómo podríamos definir el largo si al ancho le llamamos x? ¿de qué otras formas es posible definir la última columna? ¿Cómo podemos establecer una igualdad entre las columnas 3 y 4 cuando encontramos que las condiciones se cumplen?*

Método Analítico de Exploraciones Sucesivas (MAES)

Este método consiste en suponer una solución hipotética para facilitar el desencadenamiento del análisis y obtener la representación algebraica del problema.

Una vez hecha la lectura del texto, se inicia identificando “lo desconocido”, lo que se quiere obtener. Posteriormente se le asigna un valor o una solución hipotética a lo desconocido con lo cual el lector debe pensar en todas las relaciones del problema ya no en términos de cantidades desconocidas, sino en términos de valores concretos. Esta acción facilita el análisis y, por lo tanto, la resolución del problema. Es posible que el MAES involucre un uso de “lo desconocido” más cercano al usado en el Método Cartesiano (Filloy & cols., 1999).

El MAES consta de cuatro fases, que se describen a continuación retomando el ejemplo del método anterior: “El largo de un terreno rectangular mide ocho metros más que su ancho. Si

aumentáramos cinco metros a cada lado, el largo mediría el doble que el ancho. ¿Cuáles son las medidas del terreno?".

Fase 1. Lectura y explicitación de las incógnitas.

Una vez leído el enunciado se el estudiante podría determinar que lo desconocido son las medidas del terreno, esto es:

Cantidades desconocidas:

Ancho del terreno

Largo del terreno.

Fase 2. Introducción de una situación hipotética.

Se introduce una situación hipotética proponiendo un valor numérico para lo desconocido suponiendo así una posible solución del problema; a partir de esto se obtienen consecuencias lógicas.

En esta etapa podrían en primera instancia, no ser evidentes todas las relaciones entre los elementos del problema, pero al no involucrar el SMS del álgebra, sino uno del cual el estudiante tiene mejor dominio, como es el SMS de la aritmética, el análisis puede resultar más asequible para el estudiante y propiciar un enlace entre ambos sistemas.

En el ejemplo, a partir de identificar el ancho y el largo del terreno como las cantidades desconocidas, se propone un valor numérico para una de las cantidades y se obtienen consecuencias lógicas (Tabla 2.3).

Valor hipotético	**Consecuencia 1**	**Consecuencia 2**	**Consecuencia 3**
Ancho	Largo=Ancho+8	Ancho+5	Largo+5
10	18	15	23

Tabla 2.3 Fase 2 del Método analítico de exploraciones sucesivas.

Fase 3. Comparación entre cantidades.

En esta fase se requiere que se establezca una comparación entre dos cantidades que representan lo mismo en el problema, pero que son consecuencia, al menos una de ellas, de interrelacionar los datos con la incógnita o incógnitas del problema.

En el ejemplo, podemos encontrar de acuerdo con el enunciado, que una vez que se han sumado cinco unidades a cada medida del terreno, el doble del ancho del terreno debería ser igual a su largo, por lo tanto, para el valor hipotético Ancho=10 se tendría que hacer la comparación:

¿30=23?

Fase 4. Recuperación.

Esta Fase se trata de la "recuperación" de operaciones, la obtención de un patrón numérico y la representación del problema con una ecuación algebraica.

A partir de la comparación de las cantidades iguales se trabaja hacia atrás escribiendo las operaciones que dieron origen a esa igualdad hasta llegar a un patrón numérico compuesto por dos expresiones aritméticas.

$$¿30 = 23?$$
$$¿2 \times (15) = Largo + 5?$$
$$¿2 \times (10 + 5) = (10 + 8) + 5?$$
$$¿2 \times (Ancho + 5) = (Ancho + 8) + 5?$$

Interfase. En este punto es posible regresar a la Fase 2 y utilizar otro valor hipotético, con el que se obtendrá el mismo patrón numérico. Se recomienda hacer entre dos y cuatro suposiciones (Tabla 2.4).

Valor hipotético	Consecuencia 1	Consecuencia 2	Consecuencia 3
Ancho	Largo=Ancho+8	Ancho+5	Largo+5
10	18	15	23
6	14	11	19
12	20	17	22

Tabla 2.4 Interfase Método analítico de exploraciones sucesivas.

$¿30 = 23?$ $¿2 \times (15) = Largo + 5?$ $¿2 \times (10 + 5) = (10 + 8) + 5?$ $¿2 \times (Ancho + 5) = (Ancho + 8) + 5?$	$¿22 = 19?$ $¿2 \times (11) = 14 + 5?$ $¿2 \times (6 + 5) = (6 + 8) + 5?$ $¿2 \times (Ancho + 5) = (Ancho + 8) + 5?$	$¿34 = 25?$ $¿2 \times (17) = 20 + 5?$ $¿2 \times (12 + 5) = (12 + 8) + 5?$ $¿2 \times (Ancho + 5) = (Ancho + 8) + 5?$

Fase 4.1 Obtenido el patrón numérico de la Fase 4, se emplea una x para representar la solución exacta" del problema. Mediante este proceso de abstracción-generalización se obtienen relaciones algebraicas entre lo desconocido (x) y los datos, estableciéndose una ecuación con la misma forma del patrón numérico.

$$¿2\times(Ancho+5)=(Ancho+8)+5?$$
$$x=Ancho$$
$$2\times(x+5)=(x+8)+5$$

Considerando x como la solución exacta

Fase 4.2 Se resuelve la ecuación con el objeto de operar algebraicamente con la representación de lo desconocido y se comprueba la ecuación sustituyendo en ella el valor numérico obtenido al resolver la ecuación.

Resolución	Validación
$2(x+5)=(x+8)+5$	$2(x+5)=(x+8)+5$
$2x+10=x+13$	$x=3$
$2x-x=13-10$	$2(3+5)=(3+8)+5$
$x=3$	$2(8)=11+5$
	$16=16$

Las fases del MAES son un estrato intermedio del SMS con el que se pretende que el estudiante de una significación correcta a las relaciones del problema y a la equivalencia representada por la ecuación.

Método Cartesiano

En el Método Cartesiano (MC) el proceso de resolución se establece a través de la representación de los elementos desconocidos y estableciendo las relaciones del problema expresadas en lenguaje algebraico, lo cual conduce a una o varias ecuaciones cuya resolución da solución al problema. La aplicación del Método Cartesiano requiere expresiones de un Sistema Matemático de Signos más abstracto que los métodos MIAS y MAES; sin embargo, un usuario de un SMS más abstracto será competente en éste, si es competente en otros estratos de SMS más concretos, ya que eso le permitirá abordar el problema mediante el

estrato con el cual pueda comprenderlo y desencadenar su análisis lógico (Filloy y cols., 1999; Filloy, Rojano y Puig, 2008).

La competencia en la resolución de problemas de enunciado verbal involucra elementos que provienen de ámbitos diferentes. Por ejemplo, el paso del enunciado en lenguaje natural a una ecuación requiere de la competencia en ambos lenguajes (natural y algebraico), además de la competencia para traducir enunciados en expresiones algebraicas. El Método cartesiano, es el más pertinente en este tipo de problemas. Y puede presentarse como una serie de pasos que el sujeto ideal recorrería linealmente (Filloy, Puig, & Rojano, 2008):

1. Una lectura analítica del enunciado del problema que lo reduce a una lista de cantidades y de relaciones entre cantidades. Este es un paso muy importante, ya que se prepara al lenguaje natural para ser traducido al lenguaje algebraico en el cual solo existen cantidades y relaciones entre esas cantidades, requiere la competencia en el lenguaje natural, en especial en este tipo de textos matemáticos; la lectura analítica requiere encontrar las cantidades y relaciones en el texto, incluso aquellas que no están explícitas pero que son requeridas para la resolución del problema, a la vez que requiere ignorar cualquier hecho que no esté directamente relacionado con estas.
2. Elección de una cantidad que se va a representar con una letra (o de unas cantidades que se van a representar con letras distintas). Lo cual requiere competencia en el SMS del álgebra y en el proceso para asignar correspondencia entre letras y cantidades desconocidas.
3. Representación de otras cantidades mediante expresiones algebraicas que describen la relación (aritmética) que esas cantidades tienen con otras que ya han sido previamente representadas por una letra o una expresión algebraica. Se requiere que el sujeto establezca las relaciones entre otras cantidades que también son desconocidas y aquellas a las que ya se les ha asignado una letra, lo que requiere la competencia en el significado de expresiones algebraicas compuestas y reglas de sintaxis en el álgebra.
4. Establecimiento de ecuaciones igualando dos expresiones, de las que se han escrito en el tercer paso, que representen la misma cantidad. El sujeto debe ser competente

para encontrar una misma cantidad expresada en dos formas diferentes, con lo cual le dé sentido a la equivalencia entre los dos miembros de la ecuación.

5. Transformación de la ecuación en una forma canónica.
6. Aplicación de la fórmula o algoritmo de solución a la ecuación en forma canónica.

Los pasos 5 y 6 requieren competencias estrictamente algebraicas de transformación y aplicación de algoritmos de solución.

7. Interpretación del resultado de la ecuación en términos del problema. Requiere la competencia para evaluar el resultado en el problema verbal.

Las competencias necesarias para resolver este tipo de problemas no se limitan a las descritas en cada uno de los pasos, ya que cada problema tiene características propias que pueden requerir competencias distintas del sujeto resolutor.

Ejemplo de uso del Método Cartesiano.

Problema. El largo de un terreno rectangular mide 15 metros más que su ancho. Si aumentáramos 5 metros a cada lado, el largo mediría el triple que el ancho. ¿Cuáles son las medidas del terreno?

Pasos del MC	Ejemplo
Una lectura analítica del enunciado del problema que lo reduce a una lista de cantidades y de relaciones entre cantidades.	Largo y ancho del terreno. El largo mide 15 metros más que el ancho. El ancho más 5 metros. El largo más 5 metros. El largo más 5 metros es el triple que el ancho más 5 metros.
Elección de una cantidad que se va a representar con una letra.	x: Ancho del terreno
Representación de otras cantidades mediante expresiones algebraicas que describen la relación (aritmética) que esas cantidades tienen con otras que ya han sido previamente representadas por una letra o una expresión algebraica.	$x+15$: Largo del terreno $x+5$: Ancho más cinco metros. $(x+15)+5=x+20$: Largo más cinco metros.

Establecimiento de una ecuación, igualando dos expresiones, de las que se han escrito en el tercer paso, que representen la misma cantidad.	Una vez que se ha aumentado 5 metros a cada lado, tres veces el ancho es igual al largo. $3(x+5)=x+20$
Transformación de la ecuación en una forma canónica.	$3(x+5)=x+20$ $3x+15=x+20$ $3x+15-15=x+20-15$ $3x=x+5$ $3x-x=x-x+5$ $2x=5$
Aplicación de la fórmula o algoritmo de solución a la ecuación en forma canónica.	$2x=5$ $\frac{2x}{2}=\frac{5}{2}$ $x=2.5$
Comprobar que el valor de la variable es solución de la ecuación en la forma original y de la ecuación en la forma canónica y que por lo tanto son equivalentes.	Ecuación original $3(x+5)=x+20$ $3(2.5+5)=2.5+20$ $3(7.5)=22.5$ $22.5=22.5$ Ecuación canónica $2x=5$ $2x=5$ $2(2.5)=5$ $5=5$
Interpretación del resultado de la ecuación en términos del problema.	$x=2.5$ El ancho mide 2.5 metros. $x+15=2.5+15=17.5$ El largo mide 17.5 metros. $x+5=2.5+5=7.5$ El ancho más 5 es 7.5 metros. $17.5+5=22.5$ El largo más 5 es 22.5 metros. El largo más 5 (22.5 metros) es tres veces el ancho más 5 (7.5 metros).

En el desarrollo del MC se considera que cada uno de los pasos 1 a 6 se realizan incluso cuando no sea de forma explícita, sin embargo, es importante que los estudiantes reflexionen sobre las cantidades conocidas y desconocidas, ya que con frecuencia inician el

planteamiento de la ecuación sin tener claras las cantidades y las relaciones entre ellas, dando lugar a errores.

Como parte del modelo cognitivo se analizan las dificultades, obstáculos y beneficios (tendencias cognitivas) producto de la utilización de los tres métodos de resolución; las competencias que generan las tácticas intermedias del MIAS y el MAES para el uso competente del MC, el cual implica un dominio en el uso de la simbolización y la conciencia de que su aplicación le permite resolver familias de problemas.

2.5 La componente de enseñanza

2.5.1 Texto y espacio textual

En la investigación con MTL, se adopta la noción de espacio textual como una producción abierta a las relaciones con otros textos que, en un proceso de lectura/transformación, forman parte de la experiencia del lector. De acuerdo con Rojano, Filloy y Puig (2014):

> El espacio textual tiene una existencia empírica, y es un sistema que impone una restricción semántica sobre la persona que lo lee; el texto es una nueva articulación de ese espacio individual e irrepetible hecho por una persona como resultado de su acto de lectura/transformación, utilizando otros textos con el fin de hacerlo (p. 394).

Así, un texto es el resultado de la transformación o lectura de un espacio textual. Al entrar en contacto con el espacio textual, el lector no extraerá un significado inherente al mismo, sino que este espacio textual será transformado por el lector con el fin de producir sentido, dando como resultado un texto, el cual será una interpretación única e irrepetible (Filloy & Córdoba, 2013) resultado de las relaciones con otros textos que el lector pone en juego y que forman parte de su experiencia personal; derivado de lo anterior, el espacio textual original se convierte en un intertexto.

Para los fines de este reporte, un texto no sólo se genera a partir de una producción escrita sino a partir de cualquier conjunto de señales del cual una persona puede, mediante la percepción, producir sentido; es decir, una composición musical, una pintura, una conversación oral, etc. también pueden ser textos. En cuanto a un texto matemático, esta

noción debe ser tan amplia que permita considerar las producciones de los estudiantes, las cuales pueden ser expresadas de manera oral, escrita o mediante lenguaje corporal (e incluso la combinación de éstas) y deben ser consideradas no solo las producciones en papel sino las generadas mediante la tecnología digital o cualquier otro medio (Rojano, Filloy, & Puig, 2014).

El Modelo de Enseñanza es la secuencia de textos matemáticos, tomados como espacios textuales, de cuya lectura/transformación (por parte de los estudiantes), se deriva la producción de sentido y el establecimiento de nuevos significados en los SMS, que permiten, a su vez, la producción de nuevos conceptos. En una situación de enseñanza y aprendizaje, más que el lector ideal, lo que interesa es el alumno que puede no ser del todo competente en la descodificación y codificación de textos objeto de estudio (Puig, 2008). El nivel de competencia del lector depende de su intertexto personal, pero la diversidad de sistemas de signos usados en los textos para enriquecer la caracterización de los objetos matemáticos de estudio puede propiciar o dificultar la producción de sentido en el SMS del álgebra (Puig, 2003).

2.5.2 La relación entre el Modelo de enseñanza y las componentes de Cognición y Comunicación

La información que proveen las componentes de cognición y comunicación en el análisis previo de los problemas, abren rutas al diseño del Modelo de enseñanza. El Modelo de enseñanza se elabora con el fin de que los alumnos logren ser competentes (en el sentido definido en el Modelo de Competencia), y se pone a prueba examinando las actuaciones de los estudiantes de acuerdo con el Modelo de cognición (Puig, 2008) .

Filloy, Rojano y Puig (2008) mencionan que existen bases teóricas para afirmar que es más conveniente introducir a los estudiantes al estudio del álgebra mediante un acercamiento semántico (antes que de manera sintáctica) que debe derivar en un proceso de abstracción para modelar sintácticamente los nuevos objetos y operaciones. Sin embargo, de acuerdo con los autores, el manejo sintáctico sigue siendo un eje rector en el estudio del álgebra que no debe ser considerado como un proceso mecánico. En ese sentido mencionan que para Thorndike (1923, citado en Filloy, Rojano y Puig, 2008):

> La computación algebraica tal como hoy la reconocemos es, sin duda, una habilidad intelectual. No es tan indicadora del intelecto como la resolución de problemas, en parte porque requiere de menor grado de abstracción, selección y originalidad de pensamiento, y en parte también porque sólo incluye números, y no números y palabras. Está, sin embargo, muy por encima de lo que se le reprocha: ser una rutina mecánica, que puede ser aprendida y operada sin hacer uso del pensamiento (p. 135).

El análisis de las componentes de cognición y comunicación en la problemática de la enseñanza y el aprendizaje descrita en el capítulo 1 así como en los diseños curriculares sobre los SEL son el sustento del desarrollo del Modelo de enseñanza que se describe con detalle en el Capítulo 3.

2.6 El diagrama del diseño de la experimentación

En la Figura 2.1 se muestra el diagrama del diseño de la experimentación presentado por Filloy y cols. (1999) y Filloy, Rojano y Puig (2009), para la organización de las etapas de la observación experimental que sigan las pautas del programa de investigación que ellos proponen. El diagrama inicia con la descripción de la problemática, de la cual se realiza un análisis previo con base en las componentes de enseñanza y de cognición y comunicación; de ese análisis inicial se derivan las hipótesis que se contrastarán con las observaciones empíricas e inicia el diseño del MTL. En el diagrama se encuentra que, a partir de los resultados del análisis e interpretación de los datos del estudio experimental del MTL diseñado para probar las hipótesis derivadas del análisis previo de los problemas, se genera una nueva problemática, lo cual deriva en la recursividad en el uso de los MTL.

Sobre el momento ideal de la observación experimental, se recomienda encontrar un área conceptual en la que, cuando se diagnostican las competencias de la población con respecto a los usos de esos conceptos, se ve que esas competencias llevan a desempeños aún alejados de los objetivos. También es aconsejable que la población estudiada reciba instrucción en matemáticas dentro de un sistema de enseñanza controlada, con seguimiento de los avances realizados y la posibilidad de intervención con material didáctico si es requerido.

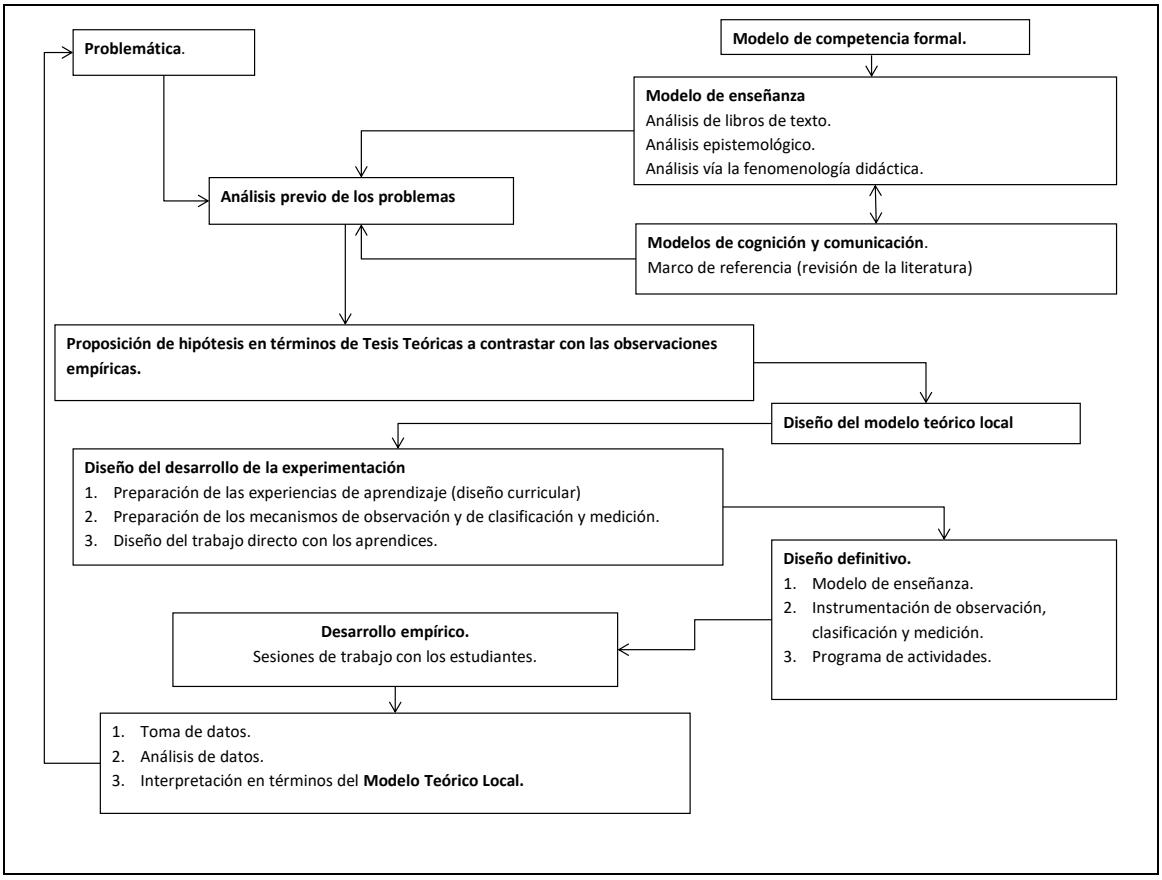


Figura 2.1 Diagrama del diseño de la experimentación

Durante la enseñanza controlada, se preparan y refinan los mecanismos de medición y clasificación y se diseña una prueba de diagnóstico para obtener los perfiles de los estudiantes y definir qué estudiantes sería interesante observar en mayor profundidad; para ello se diseña un estudio de caso mediante una entrevista clínica.

El desarrollo de la presente investigación está basado en la estructura del diagrama del diseño de la experimentación (Figura 2.1), sin embargo, en este documento se ha adoptado una organización más acorde a este tipo de informe, que pueda resultar más estructurada para el lector. Enseguida se enuncian las preguntas de investigación y con base en ellas y en el análisis de los problemas, se proponen las hipótesis a contrastar con las observaciones empíricas y finalmente los objetivos de la investigación.

2.7 Hipótesis, preguntas y objetivos de investigación

Con base en el análisis del Modelo teórico local actual cuyo estudio inicia en el Capítulo 1 con la revisión de la literatura y que se describe con detalle en el Capítulo 3, consideramos que es necesario fortalecer la producción de sentido y la competencia de los estudiantes respecto al objeto matemático Sistema de ecuaciones lineales en el nivel Medio Superior.

2.7.1 Preguntas de investigación

Partimos de la pregunta general:

¿Qué debe considerarse, en el diseño de un Modelo de enseñanza, para fortalecer la red intertextual con respecto a los sistemas de ecuaciones lineales de los estudiantes del nivel Medio Superior?

La pregunta anterior conduce a las preguntas específicas:

- ¿Qué debe considerarse en el diseño de un Modelo de enseñanza para favorecer la competencia en la modelación algebraica de problemas de enunciado relacionados con sistemas de ecuaciones lineales?
- ¿Cómo impacta la representación en diferentes sistemas matemáticos de signos la producción de sentido y la competencia de los estudiantes en la resolución sistemas de ecuaciones lineales?
- ¿Cómo influye en los estudiantes el estudio de la naturaleza de la solución en la construcción del objeto matemático sistema de ecuaciones lineales?
- ¿Cómo afecta el intertexto de los estudiantes respecto a los sistemas de ecuaciones lineales el enfoque en los sistemas equivalentes y el método de resolución de Gauss?

2.7.2 Hipótesis en términos de tesis teóricas

Respecto a los procesos cognitivos de los estudiantes de la enseñanza Media Superior en el aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales y para tratar de dar respuesta a las preguntas de investigación, consideramos las siguientes hipótesis teóricas:

1. La competencia en la lectura/transformación de las ecuaciones de primer grado con una o varias variables, como parte del intertexto de los estudiantes, es un precursor en la constitución del objeto mental sistema de ecuaciones lineales y favorece la producción de sentido en su aprendizaje.
2. Mediante el uso del MIAS y el MAES como herramientas intermedias del MC se favorece competencia y la producción de sentido en la modelación de problemas de enunciado, factibles de representarse algebraicamente como sistema de ecuaciones lineales.
3. Se promueve la competencia en la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales de los estudiantes de nivel Medio Superior mediante el uso del objeto matemático *sistema de ecuaciones equivalente* y del método de reducción gaussiana.
4. El análisis y transformación de los sistemas de ecuaciones lineales en diferentes sistemas de signos matemáticos favorecen la producción de sentido y la competencia en su resolución.

2.7.3 Objetivos de investigación

Objetivo general

Proponer, analizar e interpretar en términos de los Modelos teóricos locales un Modelo de enseñanza sobre los sistemas de ecuaciones lineales con estudiantes del nivel Medio Superior.

Objetivos específicos

- Analizar mediante el modelo de cognición las dificultades para la producción de sentido y la competencia respecto a los Sistemas de Ecuaciones Lineales.
- Proponer, analizar e interpretar actividades encaminadas a promover la producción de sentido y la competencia con respecto a los SEL mediante:
    - El uso de los métodos MIAS y MAES para la modelación algebraica de problemas de enunciado.

- La resolución mediante el enfoque en los sistemas equivalentes y el método de Gauss.
- La revisión de los sistemas de ecuaciones lineales y su solución en diferentes sistemas de signos matemáticos.
- El análisis de situaciones de SEL con diferentes tipos de solución.

Capítulo 3

Análisis previo al diseño del Modelo Teórico Local

El esquema mostrado en la Figura 2.1 muestra un panorama general del desarrollo del MTL que se presenta en este documento. Inicia con la problemática, que ha sido descrita con detalle en el Capítulo 1. Inicia con la problemática, que ha sido descrita con detalle en el Capítulo 1 y que podemos sintetizar con base en nuestro marco teórico, como "La constitución de red intertextual personal sobre Sistema de ecuaciones lineales en estudiantes del nivel Medio Superior".

El diagrama continúa con el análisis previo de los problemas, que podemos interpretar como el MTL inicial, ya que engloba el análisis de cada una de las componentes y del cual se desprenden las hipótesis teóricas a contrastar con la experimentación. Como parte del MTL inicial, se incluye el análisis de la experimentación que se ha realizado hasta el momento y que ha permitido probar algunas actividades de enseñanza y algunos mecanismos de observación y clasificación. El modelo teórico local inicial se presenta en este capítulo.

Con base en las hipótesis se procede al diseño del MTL. En el diagrama (Figura 2.1), esta etapa inicia con el diseño del desarrollo de la experimentación, en el que se incluyen los mecanismos de observación, medición y clasificación (Modelos de cognición y comunicación) y la preparación de las experiencias de aprendizaje que conforman el Modelo de enseñanza y que están basadas en el Modelo formal; lo anterior forma parte del diseño definitivo para el desarrollo empírico. En el Capítulo 4 se detalla el diseño definitivo, que incluye los elementos de cada una de las componentes y el programa de trabajo con los estudiantes.

3.1 Modelos actuales de competencia y enseñanza

Respecto al Modelo de enseñanza que forma parte del análisis previo de los problemas, en esta sección se describe la forma en la que se plantea el estudio de los SEL en algunos programas del nivel Medio Básico y el nivel Medio Superior con el fin de analizar los

objetivos de estos programas respecto a los SEL, las formas en que proponen su estudio y analizar la fenomenología didáctica que proponen.

3.1.1 El nivel Medio Básico.

El primer acercamiento a los SEL en el currículo escolar se da en el nivel Medio Básico. De acuerdo con el documento *Matemáticas. Educación secundaria. Plan y programas de estudio, orientaciones didácticas y sugerencias de evaluación* (SEP, 2017b), el estudio de los SEL se ubica en el segundo grado de educación Media Básica (Secundaria), en el tema de *Ecuaciones* del Eje Temático *Número, álgebra y variación.* El aprendizaje esperado que le precede se concentra en el primer año de secundaria y es el de la resolución de problemas mediante la formulación y solución algebraica de ecuaciones lineales. Algunas de las orientaciones didácticas para la concreción del aprendizaje esperado "Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas" son que los alumnos interpreten cada una de las literales de las ecuaciones del sistema, como una misma cantidad desconocida en ambas ecuaciones y dentro de la misma ecuación y las distintas formas en que se presentan las incógnitas en un sistema de ecuaciones (como literal o como expresión) y resaltar la diferencia entre la solución (o soluciones) de una ecuación lineal y la solución de un sistema 2×2 y señalar que en ese caso la solución puede ser única, un número infinito de soluciones o no existir.

Respecto a los procedimientos se recomienda que los docentes procuren que los estudiantes aprendan a manipular ecuaciones y las propiedades de la igualdad para el uso de los métodos de suma y resta, sustitución e igualación. La representación gráfica es considerada como un método de resolución y se recomienda una coordinación entre ésta y la representación algebraica.

Para abordar el tema se consideran como antecedentes indispensables:

- Interpretación de la literal como una incógnita.
- Comprensión de la relación entre el planteamiento y la solución de una ecuación lineal, y la resolución de un problema.
- Destreza en la manipulación de la literal como número general en el proceso de resolución algebraica de ecuaciones lineales.

- Habilidad para interpretar las literales en relación funcional y para graficar ecuaciones de rectas ($y = ax + b$) en el plano cartesiano. (SEP, 2017b, págs. 208-209).

En este nivel únicamente se estudian sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas y los métodos de resolución pueden considerarse una extensión de las competencias respecto al tratamiento algebraico de las ecuaciones de primer grado con una incógnita.

3.1.2 La enseñanza Media Superior

Uno de los objetivos de la reforma educativa iniciada en el año 2013 fue el de generar un marco curricular común para los diferentes subsistemas de la enseñanza Media Superior en México. En el ciclo escolar 2018-2019 se inicia la implementación del Nuevo Currículo de la educación Media Superior. Con algunas adaptaciones de acuerdo con los perfiles de egreso de cada uno de los subsistemas, los Bachilleratos Generales, los Colegios de Bachilleres y los Bachilleratos Tecnológicos, entre otros, adoptaron este nuevo marco curricular. Por otro lado, los subsistemas adscritos a la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) y al Instituto Politécnico Nacional (IPN) continuaron con planes de estudio independientes. En todos los casos los programas de estudio de matemáticas de los subsistemas de la educación Media Superior fueron modificados en los años recientes. A continuación, se resume la forma en que se abordan los SEL en algunos de los programas de matemáticas.

Bachillerato General

En el primer semestre de los cursos del Bachillerato General se encuentra la materia de Matemáticas I. En el Bloque VI (de 7) *Ecuaciones lineales*, cuyo propósito es “Resuelve modelos lineales que representan fenómenos de la vida cotidiana” (SEP, 2017) se encuentra la información de la Figura 3.1.

Conocimientos	Habilidades	Actitudes	Aprendizajes Esperados
Ecuaciones lineales. • Una variable. • Dos variables. • Tres variables.	Representa las variables de un problema en su contexto. Deduce alternativas de solución a problemas reales. Propone problemas a resolver con ecuaciones lineales. Describe modelos de solución de sistemas de ecuaciones lineales (analíticos y gráficos).	Reconoce sus fortalezas y áreas de oportunidad. Privilegia el diálogo para la construcción de nuevos conocimientos. Externa un pensamiento crítico y reflexivo de manera solidaria. Afronta retos asumiendo la frustración como parte de un proceso.	Resuelve problemas de forma colaborativa, mediante el uso de métodos gráficos y/o analíticos para ecuaciones lineales, siendo perseverante y reflexivo en la generación de alternativas de solución. Desarrolla estrategias de manera crítica para el planteamiento y la solución de problemas de su contexto.

Figura 3.1 Bloque *Ecuaciones Lineales* (SEP, 2017, pág. 24).

Para el estudio de este bloque se proponen 14 horas.

Bachillerato Tecnológico

En el programa de materia de Álgebra que se imparte en el primer semestre del Bachillerato tecnológico se aborda el estudio de los SEL, mediante los contenidos específicos: "Resolución de ecuaciones lineales en contextos diversos: ¿qué caracteriza a la solución? Sistemas de ecuaciones lineales con dos variables, en estrecha conexión con la función lineal: ¿qué caracteriza al punto de intersección?, ¿siempre existe solución?" (SEP, 2017, pág. 22). El aprendizaje esperado es que el estudiante interprete la solución de un sistema de ecuaciones lineales. El contenido se encuentra en el último parcial (de tres), bajo el eje *Del pensamiento aritmético al lenguaje algebraico* y se sugieren 10 horas para su estudio.

Escuela Nacional Preparatoria

La Escuela Nacional Preparatoria (ENP) es un subsistema de Educación Media Superior dependiente de la Universidad Autónoma de México, cuya estructura curricular consta de 3 planes anuales. El programa de estudio que considera el estudio de los SEL es el de Matemáticas IV (en el primer año de estudios), mientras que el de Matemáticas VI del área Económico-Administrativas considera la unidad de *Matrices y su vínculo con modelos económicos-administrativos*. En el programa de matemáticas IV, la unidad 4 (de 5 unidades) es *Sistemas de ecuaciones para modelar condiciones simultáneas*, cuyo objetivo específico es que el alumno:

> Desarrollará habilidades de razonamiento lógico, abstracción, generalización y comunicación matemática al: identificar las relaciones numéricas involucradas en el fenómeno o evento estudiado, para expresarlas mediante un sistema de ecuaciones; representar fenómenos o eventos que requieran el uso de sistemas de dos y tres ecuaciones lineales con dos y tres incógnitas; resolver sistemas de ecuaciones aplicando las propiedades de la igualdad y de los números reales; interpretar y validar sus resultados en el contexto de la situación o fenómeno analizado; fundamentar el procedimiento algebraico seleccionado (UNAM, 2017, pág. 6).

Los contenidos conceptuales consideran el estudio de la ecuación lineal con dos variables, la idea intuitiva de pendiente y ordenada al origen, y los sistemas de ecuaciones de dos y tres variables. Mientras que en los contenidos procedimentales se considera la modelación y resolución de SEL cuadrados de dos y tres variables mediante métodos algebraicos y su representación gráfica, y la interpretación de los resultados obtenidos. En el aspecto actitudinal se considera la valoración de su capacidad para modelar y argumentar el resultado de un problema contextualizado, el reconocimiento del papel de la tecnología como herramienta de indagación de diversas condiciones del fenómeno estudiado, el reconocimiento de la importancia de contar con recursos diversos para resolver un problema y el trabajo colaborativo (UNAM, 2017).

3.2 Modelos actuales de cognición y comunicación

En esta sección se presentan algunos análisis de las dificultades observadas en los estudiantes respecto al aprendizaje de los SEL en investigaciones previas que se han descrito con detalle en el Capítulo 1 y en una herramienta de observación aplicada a estudiantes de nivel Medio Superior para su revisión preliminar.

3.2.1 Revisión de la literatura

En el Capítulo 1 se presentan los hallazgos de múltiples estudios relacionados con los SEL; y se muestra que aun cuando las circunstancias, enfoque y marco teórico de los estudios presentados son diversos, arrojan resultados similares respecto a algunos fenómenos. La

siguiente es una síntesis de las problemáticas que presentan los estudiantes en las concepciones y procesos relacionados con los SEL de acuerdo con la revisión de la literatura.

Los estudios previos muestran que, con relación a los SEL, algunos estudiantes tienen dificultades con los siguientes procesos:

- Transitar de la representación geométrica a la algebraica.
- Construir un sistema de ecuaciones lineales partiendo de un punto dado como solución.
- Obtener un sistema equivalente en diferentes representaciones.
- Proponer un sistema de ecuaciones sin solución, con una solución o con infinitas soluciones.
- Evaluar una solución (a la pregunta de si un conjunto de valores era solución de un sistema, resolvían el sistema en lugar de evaluar las soluciones).
- Resolver sistemas de ecuaciones no cuadrados.

Además, se encontró que los investigadores reportan que, en forma recurrente, los estudiantes suelen tener concepciones erróneas al considerar que:

- en un SEL de tres o más ecuaciones con dos incógnitas, sin solución, todas las rectas de su representación gráfica deberían ser paralelas;
- un SEL conformado por dos rectas paralelas y una transversal tiene soluciones;
- en SEL, todas las intersecciones son soluciones, incluso las intersecciones con los ejes;
- para cada variable es preciso tener una ecuación;
- para cada incógnita se tiene una solución;
- rectas o planos, coincidentes en su totalidad, no tienen solución;
- la solución para un sistema de ecuaciones con tres incógnitas se relaciona con la región o rectas de intersección de los planos que representan al sistema, en el caso en el que se tienen tres planos intersecándose en una línea, los estudiantes consideran que el sistema representado por tales planos tiene una solución, que es precisamente la recta de intersección.

Algunas razones que los investigadores han encontrado para estas dificultades son:

- Los estudiantes tienen poca claridad en los conceptos de SEL y su solución. Aplican los algoritmos sin conocimiento de los significados.
- Existe un mayor énfasis en la enseñanza de los métodos analíticos; por tanto, mayor tendencia de los estudiantes hacia la representación algebraica.
- Los estudiantes están acostumbrados a trabajar con sistemas cuadrados.
- Los estudiantes desarrollaron el concepto de solución de un SEL a través del proceso de resolverlo.

Algunas de las sugerencias respecto a la enseñanza de los SEL en las investigaciones presentadas son las siguientes:

- Iniciar el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales introduciendo la ecuación lineal con dos incógnitas y analizando lo que representan esas dos incógnitas.
- Usar estrategias para favorecer el tratamiento de los SEL y su solución en diferentes representaciones y el paso entre ellas. Por ejemplo, construyendo a la par las representaciones geométrica y algebraica de los conjuntos solución de un sistema de ecuaciones lineales.
- Promover un mayor interés de los estudiantes hacia el estudio de los conceptos y sus significados.
- Incorporar los conceptos de variable y parámetro.
- Proponer ejemplos diversos para sistemas sin solución y no limitarse al caso de paralelas en la representación gráfica.
- Implementar actividades que provoquen que los estudiantes analicen el número de soluciones que puede tener un sistema de ecuaciones.
- Verificar la validez de las soluciones y generar sistemas de ecuaciones que tengan una solución dada.
- Introducir la noción de ecuaciones equivalentes.
- Acceder a los nuevos conceptos y procesos de SEL con un buen dominio del álgebra elemental.

3.2.2 Herramienta de observación.

La herramienta de observación que se detalla en esta sección se aplicó a estudiantes de la materia *Temas selectos de matemáticas*, que se imparte en el último año de la Escuela Nacional Preparatoria (ENP), la materia es optativa y se imparte en el área de Físico-Matemáticas y de las Ingenierías. Por las condiciones de ingreso y permanencia a la ENP y debido a la elección del curso, consideramos que los estudiantes tienen un buen rendimiento e interés en el estudio de las matemáticas. Debido a que la herramienta se aplicó en dos sesiones y no todos los estudiantes participaron en ambas, se analizaron 12 cuestionarios.

Este mecanismo de observación forma parte del análisis previo de los problemas, el objetivo de su aplicación es analizar la competencia de los estudiantes preuniversitarios respecto a conceptos y procesos relacionados con los SEL, y fue el primer paso en el diseño de los instrumentos de observación, clasificación y medición, necesarios para la interpretación de resultados en términos del MTL.

Las preguntas de la herramienta fueron adaptadas a partir de los cuestionarios realizados en los estudios descritos en el Capítulo 1.

La herramienta consta de diferentes tipos de preguntas con diversos enfoques, algunas de esas preguntas y ejemplos representativos de las respuestas dadas por los estudiantes se muestran en las tablas y se analizan las respuestas con base en los constructos descritos en la componente de cognición del Capítulo 2.

Las respuestas a la Pregunta 1 (Tabla 3.1) muestran que el intertexto de los estudiantes respecto a su concepción de los SEL está relacionada con su resolución, lo cual muestra que el objeto mental *sistema de ecuaciones* de estos estudiantes está más inclinado a la resolución que a la modelación, en la mayoría de los casos los estudiantes respondieron que se utiliza para solucionar problemas o hacen referencia a la solución. El lenguaje usado por los estudiantes en las respuestas a la segunda pregunta (Tabla 3.1) muestra tendencia a la representación algebraica; y nuevamente se evidencia una evocación al proceso de resolución en las palabras “encontrar” y “despeje”, llama la atención que en la segunda respuesta se menciona que la solución es una función y que la cantidad de “funciones” es dos o tres.

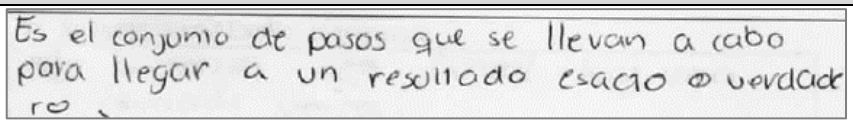
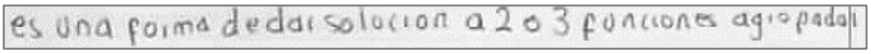
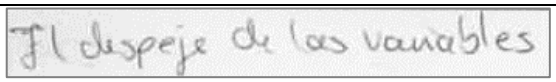
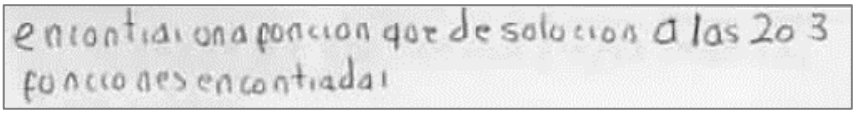
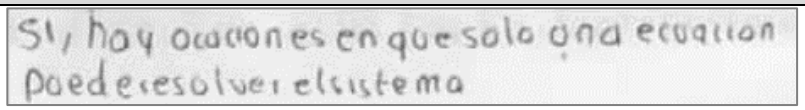
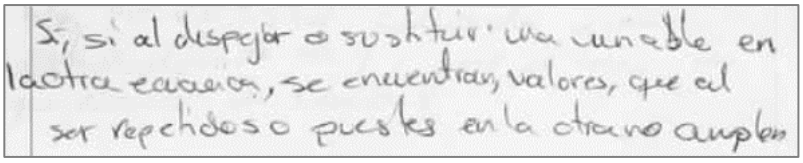
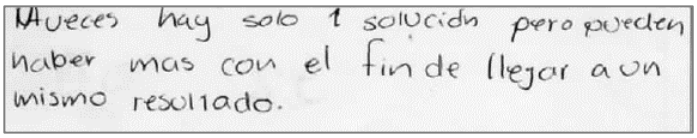
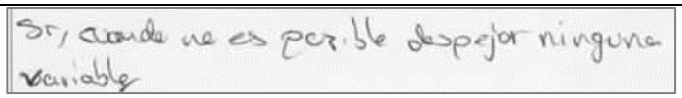
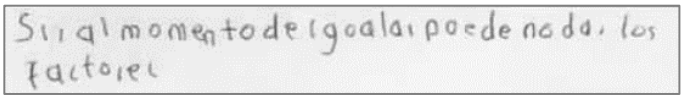
Pregunta	Ejemplos de respuestas
1 ¿Qué es un sistema de ecuaciones?	 *"Es el conjunto de pasos que se llevan a cabo para llegar a un resultado exacto o verdadero."*  *"es una forma de dar solución a dos o tres funciones agrupadas"*
2 ¿Qué es la solución de un sistema de ecuaciones?	 *"El despeje de las variables"*  *"encontrar una función que dé solución a las dos o tres funciones encontradas"*

Tabla 3.1 Respuestas a las preguntas 1 y 2.

Pregunta 3	Ejemplos de respuestas
a) ¿Es posible tener un sistema de ecuaciones lineales con dos ecuaciones y tres variables que tenga solución única? Explica tu respuesta.	 *"Sí, hay ocasiones en que solo una ecuación puede resolver el sistema"*  *"Sí, si al despejar o sustituir una variable en la otra ecuación, se encuentran valores, que al ser repetidos o puestos en la otra, no cumplen"*  *"A veces hay solo una solución, pero puede haber más con el fin de llegar a un mismo resultado."*
b ¿Es posible tener un sistema de ecuaciones lineales con dos ecuaciones y tres variables que no tenga solución? Explica tu respuesta.	 *"Sí, cuando no es posible despejar ninguna variable"*  *"Sí, al momento de igualar puede no dar los factores"*

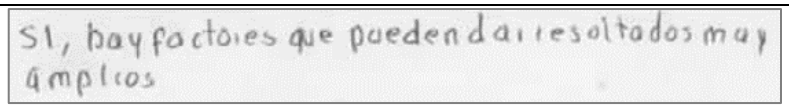
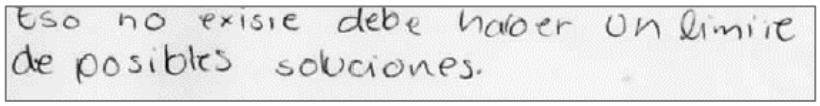
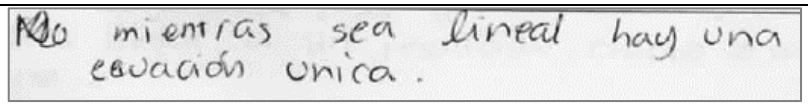
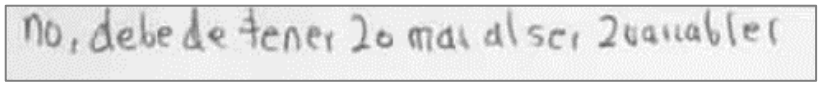
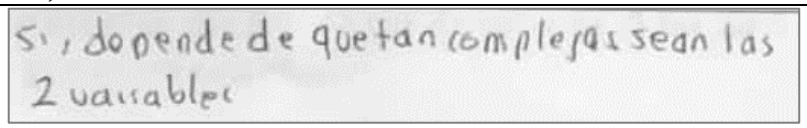
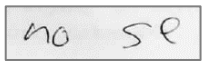
c ¿Es posible tener un sistema de ecuaciones lineales con dos ecuaciones y tres variables que tenga infinita cantidad de soluciones? Explica tu respuesta	 *"Sí, hay factores que pueden dar resultados muy amplios"* *"No, ya que no es cuadrática"*  *"Eso no existe, debe haber un límite de posibles soluciones"*
Pregunta 4 a) ¿Es posible tener un sistema de ecuaciones lineales con tres ecuaciones y dos variables que tenga solución única?	 "*mientras sea lineal hay una ecuación única"* *"Sí, al despejar solo una literal"*  "*No, debe de tener dos o más al ser dos variables"*
b) ¿Es posible tener un sistema de ecuaciones lineales con tres ecuaciones y dos variables que tenga ninguna solución? Explica tu respuesta.	 *"Sí, depende de que tan complejas sean las dos variables"*  *"no sé"*
c) ¿Es posible tener un sistema de ecuaciones lineales con tres ecuaciones y dos variables que tenga infinita cantidad de soluciones? Explica tu respuesta.	 *"Sí, al ser dos variables hay bastantes soluciones"*

Tabla 3.2 Respuestas a las preguntas 3 y 4.

Las respuestas a las preguntas 3 y 4 (Tabla 3.2), en su mayoría vagas o confusas, evidencian una falta de caracterización de la solución de un SEL. Incluso en aquellos casos en los que la respuesta es correcta, la explicación muestra, cuando menos, desconocimiento del tipo de análisis de necesario para lograr una explicación plausible. Respuestas como "hay factores

que pueden dar resultados muy amplios" o "depende de qué tan complejas sean las dos variables" exponen un lenguaje que evidencia que su intertexto personal no les permite hacer una lectura adecuada de las preguntas o responderlas con lenguaje adecuado. Al responder que se puede encontrar una solución única al "despejar solo una literal" se muestra que consideran que el valor de cada literal es una respuesta al sistema.

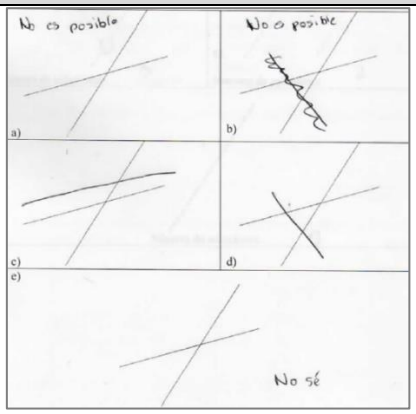
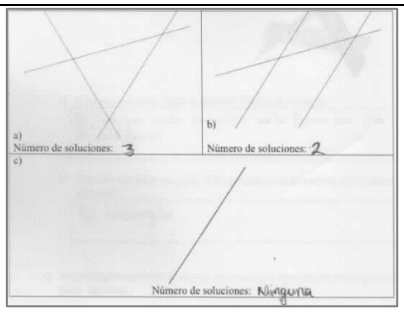
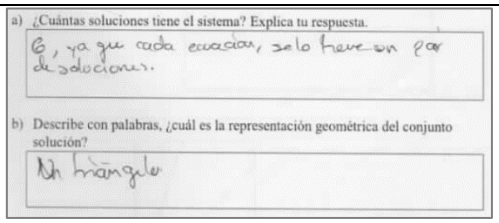
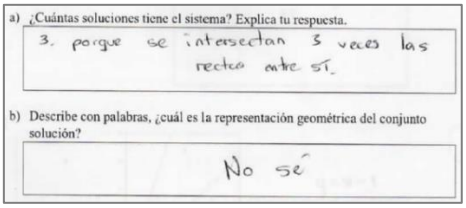
Pregunta	Ejemplos de respuestas
5 ¿Es posible colocar una tercera recta para que el sistema de ecuaciones representado en la gráfica tenga: a) ninguna solución? b) una solución? c) dos soluciones? d) tres soluciones? e) infinita cantidad de soluciones? Si es posible ¿cómo colocarías la tercera recta?	
6 Determina el número de soluciones que tendría cada uno de los sistemas de ecuaciones representados en las gráficas, considerando que en cada caso se muestran tres rectas y si existen soluciones señala las soluciones en cada gráfica.	
7 Dada la siguiente representación geométrica de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas: ¿Cuántas soluciones tiene el sistema? Explica tu respuesta. Describe con palabras, ¿cuál es la representación geométrica del conjunto solución? 	 *a) "6, ya que cada ecuación, solo tiene un par de soluciones."* *b) "Un triángulo"*  *a) "3 porque se intersectan 3 veces las rectas entre sí."* *b) "No sé"*

Tabla 3.3 Respuestas a las preguntas 5, 6 y 7.

Una de las problemáticas que en mayor medida evidencian la influencia del intertexto de los estudiantes con respecto a los SEL es la que tiene que ver con la solución en el SSM de los planos coordenados. Tal como se ha documentado en estudios previos, los estudiantes mostraron tendencia a generalizar la idea de la intersección de rectas o planos con la solución del SEL (Tabla 3.3), su objeto mental *solución de SEL* carece de un intertexto que les permita hacer una lectura apropiada y ser competentes para identificar o construir en esta representación una solución más allá de la de dos ecuaciones con dos incógnitas.

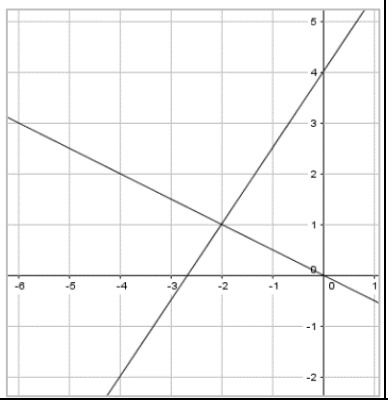
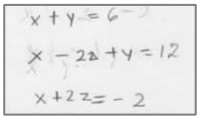
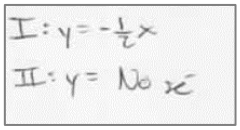
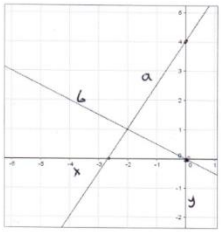
Pregunta	Ejemplos de respuestas
8 Escribe algebraicamente el sistema de ecuaciones representado en el siguiente plano cartesiano. 	 $x+y=6$ $x+2z+y=12$ $x-2z=-2$  

Tabla 3.4 Respuestas a la pregunta 8

Algunos estudiantes fueron competentes en el paso de la representación gráfica en el sistema coordenado a la representación algebraica, sin embargo, la mayoría tuvo dificultades para realizar esta tarea (Tabla 3.4). El referente más cercano de los estudiantes entre el SSM de los ejes coordenados y la representación algebraica es el que con más frecuencia se trabaja en las aulas y es el de llevar una ecuación a su representación gráfica, por lo tanto, la operación inversa suele ser compleja para los estudiantes.

El nivel de complejidad del problema se eligió para permitir el paso de la representación del problema en lenguaje natural a la representación gráfica mediante el análisis de la solución de los sistemas representados en los planos; sin embargo, en general los estudiantes

escribieron el modelo algebraico para identificar la solución a la pregunta (Tabla 3.5), lo cual muestra nuevamente la tendencia de los estudiantes hacia el trabajo en SMS algebraico.

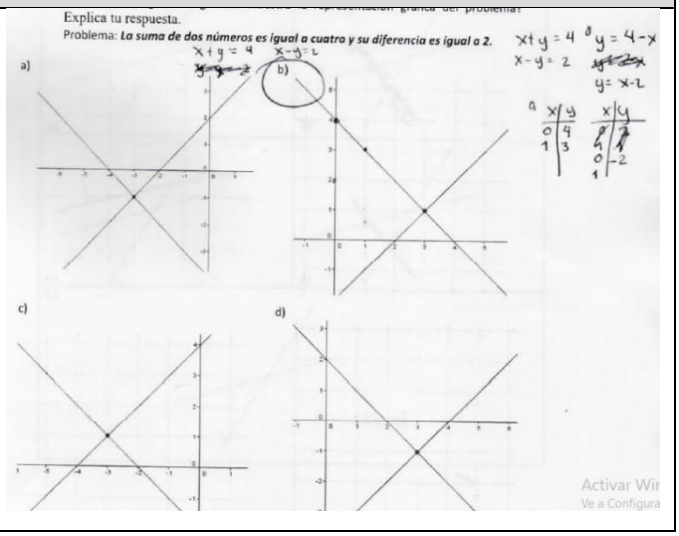
Pregunta	Ejemplos de respuestas
16 ¿Cuál de las siguientes gráficas muestra la representación del problema? Explica tu respuesta. Problema: La suma de dos números es igual a cuatro y su diferencia es igual a 2.	

Tabla 3.5 Respuestas a la pregunta 16

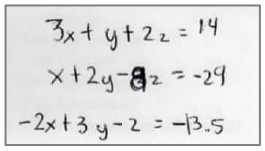
Pregunta	Ejemplo de respuestas
Escribe un sistema de ecuaciones cuya solución sea: x=3, y=-2 y z=3.5	 $3x+y+2z=14$ $x+2y-8z=-29$ $-2x+3y-z=-13.5$

Tabla 3.6 Respuestas a la pregunta 15.

En general los estudiantes fueron competentes en expresar un sistema de ecuaciones a partir de su solución (Tabla 3.6), lo cual contrasta con las respuestas dadas en las primeras preguntas y muestra que el objeto mental "solución de un sistema de ecuaciones lineales" les permite realizar procesos, incluso cuando no sean capaces de realizar lecturas adecuadas del objeto matemático en otros contextos.

La intención de establecer un SEL que puede representarse como un sistema escalonado era facilitar a los estudiantes la obtención del conjunto solución y la construcción de un nuevo sistema a partir de éste o utilizar la primera ecuación para transformar la tercera. El intertexto de los estudiantes, en general, no les permitió enfrentar de forma competente esta pregunta, ya que confundieron la equivalencia de los SEL, con una estructura similar en cuanto al

número de ecuaciones y variables sin considerar la solución del SEL. El único caso de respuesta correcta fue el que se muestra en el tercer ejemplo, en este caso, cada una de las ecuaciones fue multiplicada por un número natural, lo cual no requirió operaciones entre ecuaciones y no llevó a una simplificación del sistema.

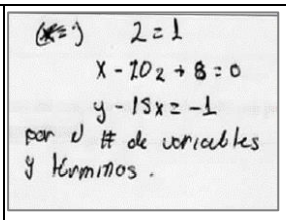
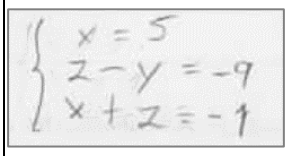
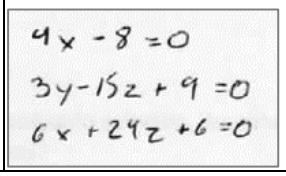
Da un ejemplo de sistema de ecuaciones lineales equivalente al sistema dado y explica por qué son equivalentes. $\begin{cases} x = 2 \\ y - 5z + 3 = 0 \\ x + 4z = -1 \end{cases}$	 $z = 1$ $x - 10z + 8 = 0$ $y - 15x = -1$ *"Por el número de variables y de términos."*  $x = 5$ $z - y = -9$ $x + z = -1$  $4x - 8 = 0$ $3y - 15z + 9 = 0$ $6x + 24y + 6 = 0$

Tabla 3.7 Respuestas a la pregunta 9.

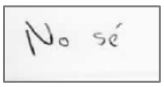
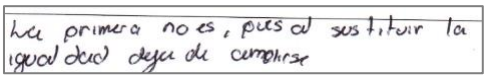
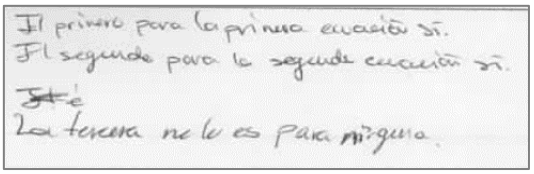
Pregunta	Ejemplos de respuestas
10 Dada la ecuación $3x - 2y + z = 4$ ¿Son las triadas ordenadas (1,4,5), (3,1,-3) y (2,5,8) soluciones de la ecuación? Explica tu respuesta. Encuentra el conjunto solución de la ecuación. ¿Cuántas soluciones tiene? Si graficáramos todos los puntos del conjunto solución, describe con palabras, ¿cuál sería la representación geométrica?	 *"No sé"* *"No lo sé"*  *"La primera no es, pues al sustituir la igualdad deja de cumplirse"*
11 Considerando el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 4x - y = 5 \\ 4x - y = 0 \end{cases}$ ¿Son los pares ordenados (0,-5), (1,4) y (0,0) soluciones del sistema? Encuentra el conjunto solución del sistema ¿Cuántas soluciones tiene?	 *"El primero para la primera ecuación, sí.* *El segundo para la segunda ecuación sí.* *La tercera no lo es para ninguna."*

Tabla 3.8 Respuestas a las preguntas 10 y 11.

En las preguntas 10 y 11 se muestra que en algunos casos el intertexto de los estudiantes les impide hacer una lectura adecuada del objeto matemático solución de un sistema de ecuaciones (Tabla 3.8); en el primer caso, los estudiantes no responden a la pregunta sobre cuántas soluciones tiene la ecuación, lo que nos indica una falta de competencia respecto al trabajo paramétrico.

Para la segunda pregunta se encuentran casos, como el ejemplo, en los que los estudiantes desarticulan el sistema de ecuaciones y expresan las soluciones en términos de cada una de las ecuaciones.

<table>
<tr><th>Pregunta</th><th>Ejemplos de respuestas</th></tr>
<tr>
<td>13. En un acuario hay dos especies de peces A y B que se alimentan de dos clases de alimentos. En la tabla siguiente se indica el consumo diario de alimentos de ambas especies y la cantidad de alimento total disponible por clase, en gramos y por día. El problema consiste en calcular la cantidad de peces de cada especie que puede vivir en el acuario sin que sobre alimento de ninguna de las dos clases.

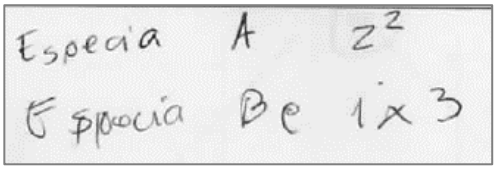
<table>
<tr><th></th><th>Especie A</th><th>Especie B</th><th>Total</th></tr>
<tr><td>Alimento 1</td><td>2</td><td>1</td><td>25</td></tr>
<tr><td>Alimento 2</td><td>4</td><td>3</td><td>55</td></tr>
</table>
Representa algebraicamente el problema.</td>
<td>
$A+B=80$
$a1+b1=25$
$a2+b2=55$
$a=\text{alimento}\quad A=\text{especie}$

Especie A 2^2
Especie B 1×3</td>
</tr>
</table>

Tabla 3.9 Respuestas a la pregunta 13

Los ejemplos mostrados para esta pregunta no son los más representativos ya que varios estudiantes lograron realizar una modelación algebraica adecuada del problema; sin embargo, estas respuestas muestran falta de competencia de algunos estudiantes para hacer una lectura/transformación del lenguaje natural al lenguaje algebraico e incluso para identificar los valores desconocidos (Tabla 3.9).

En la Tabla 3.10 presentamos la primera parte de la resolución a cada uno de los dos SEL por parte de un estudiante; como puede observarse, en ambos casos utiliza de forma inadecuada el método de igualación, esto lo explicamos en el Capítulo 2 como la tendencia cognitiva siete (TC7), es decir, *la presencia de mecanismos apelativos que centran el desencadenamiento de procesos erróneos de resolución*; el estudiante insistió en el uso del método a pesar de que no dominaba el proceso. Además, en la tercera línea podemos observar que mientras en el lado izquierdo de la igualdad realiza correctamente la suma algebraica, del lado izquierdo elimina la variable, en este caso, debido a que la suma algebraica implicaba a dos números con diferente signo, la sustracción puede haber significado para el estudiante *la presencia de un mecanismo inhibitorio* (TC8) o *la imposibilidad de desencadenar operaciones que podían hacerse momentos antes* (TC4), por involucrar un tratamiento algebraico diferente.

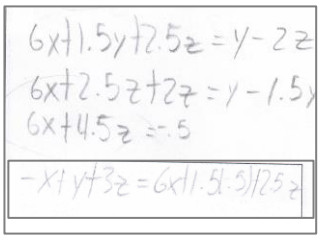
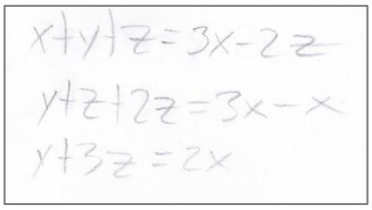
Pregunta	Ejemplo de respuestas
Resuelve los sistemas de ecuaciones. $6x+1.5y+2.5z=36.6$ $-x+y+3z=0$ $y-2z=0$	 $6x+1.5y+2.5z=y-2z$ $6x+2.5z++2z=y-1.5y$ $6x+4.5z=-.5$ $-x+y+3z=6x+1.5(-.5)+2.5z$
$x+y+z=3$ $2x-y-3z=-2$ $3x-2z=1$	 $x+y+z=3x-x$ $y+z+2z=3x-x$ $y+3z=2x$

Tabla 3.10 Ejemplo 1 de resolución de sistemas de ecuaciones.

En el ejemplo de la Tabla 3.11 se muestra cómo el estudiante usa elementos de apoyo para organizar el método de sustitución, sin embargo y a pesar de que aplica el método en forma competente, no utiliza una propiedad de la igualdad en forma adecuada (r3 y r7); identificamos en este caso la tendencia cognitiva seis (TC6): *articulación de generalizaciones erróneas*.

En la resolución de sistemas de ecuaciones encontramos, en la mayoría de los casos, falta de competencia en el uso de los procedimientos para la resolución de los sistemas de ecuaciones o en la aplicación de las reglas sintácticas del álgebra; los estudiantes mostraban tendencia a utilizar un solo método de resolución, sin analizar previamente el SEL, para identificar el método más apropiado o el tipo de SEL de acuerdo con el número de soluciones. El uso del punto decimal en el SEL y en la solución no parece ser un mecanismo inhibidor. Ninguno de los estudiantes intentó resolver los SEL mediante el método de reducción gaussiana, lo que evidencia falta de competencia en su uso, que impide que forme parte de su intertexto personal.

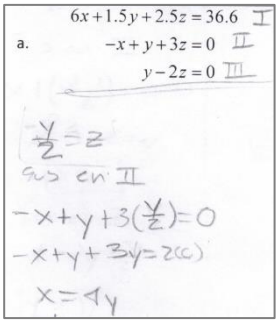
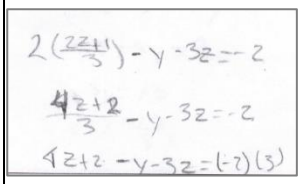
Pregunta	Ejemplos de respuestas
$6x+1.5y+2.5z=36.6$ $-x+y+3z=0$ $y-2z=0$	 $\frac{y}{2}=z$.....r1 Sustituyendo en II $-x+y+3\left(\frac{y}{2}\right)=0$.....r2 $-x+y+3y=2(0)$.....r3 $x=4y$.....r4
$x+y+z=3$ $2x-y-3z=-2$ $3x-2z=1$	 $2\left(\frac{2z+1}{3}\right)-y-3z=-2$.....r5 $\frac{4z+2}{3}-y-3z=-2$.....r6 $4z+2-y-3z=(-2)(3)$...r7

Tabla 3.11 Ejemplo 2 Resolución de sistema de ecuaciones lineales

Con base en los resultados obtenidos, consideramos que algunos elementos que pueden contribuir en la construcción de los objetos mentales SEL y solución de SEL y que pueden considerarse en la elaboración del modelo de enseñanza, son:

- La competencia en las transformaciones algebraicas, en particular, aquellas relativas a la resolución de ecuaciones lineales con una incógnita, el trabajo con ecuaciones lineales de dos o tres variables y el método cartesiano.

- Enfocar la resolución en la obtención de sistemas equivalentes mediante el método de reducción gaussiana, ya que de esta manera se mantiene la cohesión del sistema en todo el proceso de resolución y se refuerza la concepción de la solución del SEL en cada paso de esta y, además, permite establecer criterios para identificar las características de los SEL con solución única, sin solución y con infinita cantidad de soluciones. En lo posible, representar los sistemas equivalentes en forma gráfica para observar que lo que se conserva es la "solución del sistema".
- Introducir en los textos del modelo de enseñanza el SMS del álgebra, que incluya el trabajo con tablas de valores, problemas de enunciado y planos coordenados en geometría dinámica. Enfrentando a los estudiantes a problemas no tradicionales y a la resolución de SEL con números racionales en ecuaciones y solución.

3.3 Modelo teórico local actual: síntesis

Independientemente de los objetivos revisados en los programas de estudio, podemos identificar, con base en el análisis previo de los problemas en lo referente a los Modelos de enseñanza, de cognición y comunicación actual que la enseñanza de los SEL en los niveles Medio Básico y Medio Superior se enfoca principalmente en los métodos analíticos de resolución (sustitución, igualación y reducción por suma y resta), en la representación gráfica de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas y en problemas de enunciado cuya modelación algebraica puede realizarse mediante la traducción de condiciones. El análisis previo de los problemas nos permite también identificar algunos objetos mentales que, al formar parte del intertexto personal de los estudiantes pueden potenciar la producción de sentido del concepto de SEL y la competencia en su resolución. Y finalmente, nos dan elementos a considerar para el diseño de la propuesta del Modelo de enseñanza.

Capítulo 4

Diseño del MTL

Continuando con el diagrama del diseño de la experimentación (Figura 2.1), se inicia con el diseño del Modelo teórico local. En este capítulo se detallan los modelos de competencia formal y de comunicación en los cuales se basan las experiencias de aprendizaje que son la parte medular del Modelo de enseñanza y que se justifican mediante el Modelo de cognición.

4.1 El modelo de competencia formal

Las experiencias de aprendizaje que proponemos responden a la experimentación necesaria para contrastar las observaciones empíricas con las hipótesis establecidas; para el desarrollo de estas experiencias de aprendizaje proponemos el modelo de competencia formal cuyos elementos se describen en las siguientes secciones. Es importante tener presente que el modelo de competencia formal describe la actuación competente del sujeto ideal con respecto al conocimiento matemático en cuestión en el ámbito del MTL.

4.1.1 La ecuación lineal

La importancia del uso competente de la ecuación lineal en diferentes SSM radica en que en el Modelo de enseñanza que proponemos es un elemento precursor en la conformación del objeto mental SEL. Respecto a la ecuación lineal, el sujeto ideal es capaz de identificar:

a) la ecuación lineal de primer grado con una incógnita como aquella que puede reducirse a la forma canónica

$$ax+b=0 \text{ , con } a\neq 0$$

b) la ecuación lineal de primer grado con dos variables como aquella que puede reducirse a la forma canónica

$$ax+by=c \text{ , con } a\neq 0 \text{ y } b\neq 0$$

c) La ecuación de primer grado con tres variables como aquella que puede escribirse como

$$ax + by + cz = d \text{ , con } a \neq 0,\ b \neq 0 \text{ y } c \neq 0$$

Las reconoce como la representación de familias de problemas; es capaz de identificarlas y en cualquiera de sus formas y transformarlas a su forma canónica mediante el uso de las propiedades de la igualdad y de los números reales. Identifica cuántas soluciones tienen y cuál es su forma gráfica. Y es capaz de reconocer y representar la ecuación de primer grado con dos incógnitas en el plano de ejes coordenados.

4.1.2 El método cartesiano

El sujeto ideal es competente en el uso del método cartesiano. La competencia en el uso del método cartesiano, descrito con detalle en la sección 2.4.2, requiere competencia en el lenguaje natural para realizar una lectura adecuada de un problema de enunciado y en el lenguaje algebraico, para realizar la representación de los elementos desconocidos y de las relaciones entre ellos, la resolución y la posterior interpretación de los resultados. Consideramos que el MC es el método ideal de resolución de problemas de enunciado que pueden expresarse como ecuaciones y como sistemas de ecuaciones lineales y parte importante para la conformación del objeto mental SEL ya que propicia la producción de sentido respecto del concepto y su resolución.

4.1.3 El método de reducción gaussiana.

El método de resolución por reducción gaussiana consiste en llevar un SEL en su forma canónica a un SEL escalonado equivalente mediante el uso de criterios de equivalencia de sistemas de ecuaciones al realizar operaciones elementales por renglones, para posteriormente, mediante una sustitución regresiva encontrar los valores del conjunto solución del SEL. Por ejemplo, en el caso de la resolución de un SEL de n ecuaciones y n incógnitas mediante el método de Gauss, el objetivo inicial sería la transformación de un sistema de la forma:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13} + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23} + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33} + ... + a_{3n}x_n &= b_3 \\
\vdots \quad & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3} + ... + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}$$

en otro SEL equivalente de la forma:

$$\begin{aligned}
\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13} + ... + \alpha_{1n}x_n &= \beta_1 \\
0 \quad + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23} + ... + \alpha_{2n}x_n &= \beta_2 \\
0 \quad + \quad 0 \quad + \alpha_{33} + ... + \alpha_{3n}x_n &= \beta_3 \\
\vdots \quad & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
0 \quad + \quad 0 \quad + \; 0 \; + ... \; + \alpha_{nn}x_n &= \beta_n
\end{aligned}$$

Las transformaciones se realizan mediante operaciones elementales de los sistemas de ecuaciones derivadas de criterios de equivalencia:

- Cambiar el orden de las ecuaciones o de las incógnitas.
- Multiplicar una ecuación de un SEL por una constante distinta de cero y sustituir el resultado por la original.
- Sustituir una ecuación por otra que resulte de sumarla con otra ecuación del sistema o con un múltiplo de esta.

Una vez realizadas las operaciones posibles para llegar el sistema escalonado, tenemos los siguientes casos:

1) Si en la última ecuación obtenemos $ax = b$, con $a = 0$ y $b \neq 0$ el sistema no tiene solución.
2) Si en la última ecuación obtenemos $ax = b$, con $a = 0$ y $b = 0$ el sistema tiene infinitas soluciones.
3) Si en la última obtenemos $ax = b$, con $a \neq 0$ se procede a sustituir hacia atrás en el sistema de ecuaciones para encontrar el valor de cada una de las variables.

El estudiante ideal reconoce qué es un SEL equivalente; es capaz de utilizar competentemente el método de reducción gaussiana; reconoce que el SEL que obtiene al aplicar las operaciones

elementales es equivalente al anterior e identifica, de acuerdo con el sistema escalonado obtenido cuántas soluciones tiene el SEL. En la siguiente sección se detalla un análisis del tipo de SEL de acuerdo con el número de soluciones.

4.1.3 Clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales.

Golovina (1980) explica que existen tres casos respecto de la solución de una ecuación de primer grado con una incógnita del tipo $ax = b$.

- Si $a \neq 0$ la ecuación tiene la solución única $x = \frac{b}{a}$.
- Si $a = 0$ y $b = 0$, la ecuación tiene infinitas soluciones, ya que, para cualquier valor de x se satisface que $0x = 0$.
- Si $a = 0$ y $b \neq 0$ la ecuación no tiene soluciones, ya que la expresión $0x = b$ no se satisface para ningún valor de x.

Y los mismos casos pueden encontrarse respecto a la solución de cualquier sistema de ecuaciones con igual o mayor número de ecuaciones que de incógnitas. Por ejemplo, para el caso del sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Aplicando el método de reducción para la incógnita y se obtendría $x(a_1b_2 - a_2b_1) = c_1b_2 - c_2b_1$, entonces:

- Si $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, la ecuación tiene la solución única $x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ (Sistema compatible determinado).
- Si $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ y $c_1b_2 - c_2b_1 = 0$, la ecuación tiene infinitas soluciones, ya que, para cualquier valor de x se satisface $0x = 0$ (Sistema compatible indeterminado).
- Si $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ y $c_1b_2 - c_2b_1 \neq 0$, la ecuación no tiene soluciones, ya que no se satisface para ningún valor de x (Sistema incompatible).

Ocurre de forma similar aplicando el método para la variable x.

La diferencia $a_1b_2 - a_2b_1$ es el determinante del sistema de ecuaciones. Extendiendo el análisis del determinante para un sistema de n incógnitas con n ecuaciones, excepto aquellos con mayor número de incógnitas que de ecuaciones, en estos casos, los sistemas son indeterminados de acuerdo con el Teorema de Rouchè-Fröbenius.

En el ámbito del MTL que nos ocupa, el estudiante ideal es capaz de explicar, por inspección del SEL, por su representación en los sistemas de ejes coordenados o por los resultados de aplicar el método de reducción gaussiana, si un SEL tiene una, ninguna o infinitas soluciones y cuando es necesario, interpreta este resultado en términos de un problema.

4.2 Los modelos de cognición y comunicación

Los textos de las actividades del Modelo de enseñanza están enmarcados en el SMS del álgebra, contienen espacios para el desarrollo numérico y tabular mediante, así como el trabajo en el sistema de ejes cartesianos plano y tridimensional; los objetivos particulares de las actividades están detallados en el Modelo de enseñanza. Un ejemplo de un texto de trabajo es que se muestra en la Figura 4.1.

Si bien el diseño original de la experiencia de aprendizaje incluía hojas de trabajo que permitieran la observación del lenguaje y las conexiones que los estudiantes realizaban para la producción de sentido y que sirvieran de evidencia del desarrollo de competencias, las condiciones actuales de educación a distancia nos llevaron a utilizar las hojas de trabajo como guía para entrevistas en una plataforma de videoconferencias y para el trabajo mediante una aplicación de pizarra digital.

El diseño de las sesiones de entrevista se realiza con intervención didáctica y con ello se pretende observar la producción de sentido durante las actividades en las que se aborda (i) el uso de diferentes sistemas de signos matemáticos y el paso entre ellos, para lo cual se hace uso de software de geometría dinámica y hojas de trabajo; (ii) los criterios de equivalencia de los SEL para la resolución mediante el método de Gauss; y (iii) el método cartesiano para modelar algebraicamente y resolver sistemas de dos o más ecuaciones e incógnitas.

Mediante las entrevistas con intervención didáctica se pretende promover la discusión, la reflexión y el uso del discurso matemático proveer espacios para que los estudiantes realicen sus propias producciones para ser analizadas mediante el modelo de cognición.

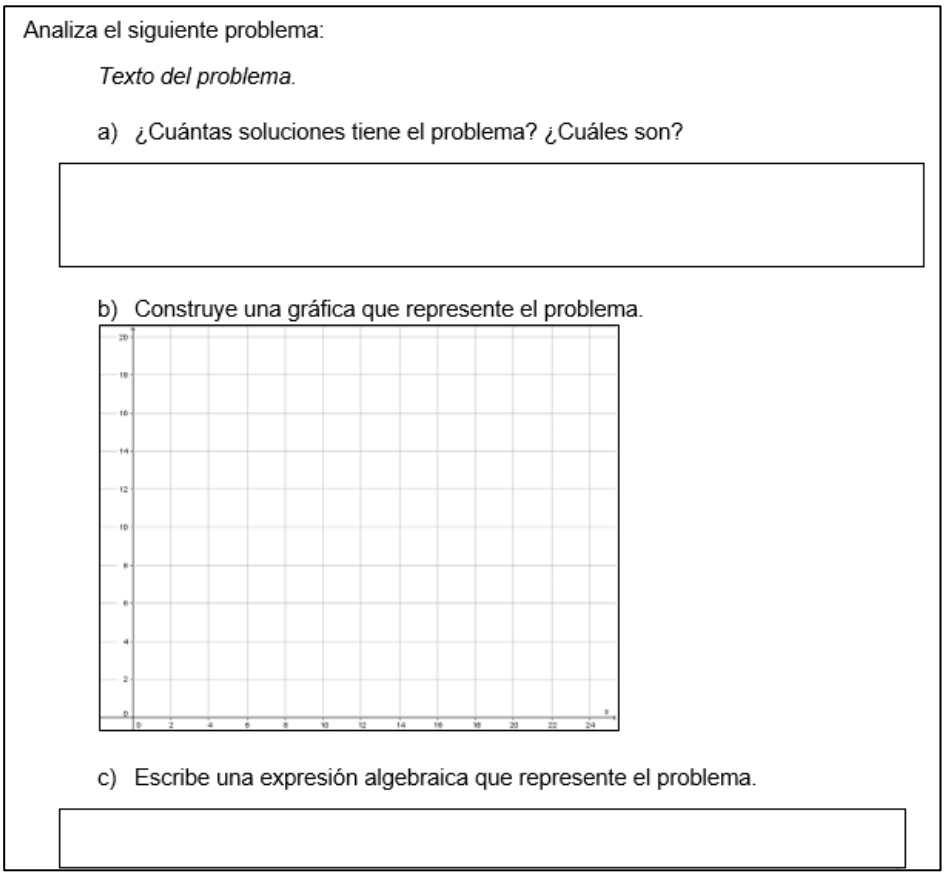


Figura 4.1 Ejemplo de espacio textual y de trabajo de las actividades.

El Modelo de cognición que proponemos se conforma del análisis de la consecución de los objetivos de las actividades del Modelo de enseñanza, que incluye la producción de sentido de la lectura de los espacios textuales propuestos, con base en la red intertextual sobre los SEL, el desarrollo del objeto mental o competencias para la modelación de problemas de enunciado en SEL y su resolución, y la identificación de tendencias cognitivas de los estudiantes.

4.3 El modelo de enseñanza.

El modelo de enseñanza que aquí se detalla, está fundamentado en el modelo formal descrito en la sección anterior, y tiene justificación en el análisis de las dificultades y de las estrategias

para el estudio de los SEL y en los objetivos de la investigación. El modelo consiste en ocho actividades que se enfocan en la construcción de una red intertextual entorno a los SEL. Si bien, el MTL en su conjunto está organizado para el estudio de los SEL podemos dividir el Modelo de enseñanza en dos apartados; uno enfocado en el análisis de la producción de sentido de los problemas de enunciado factibles de modelarse algebraicamente mediante sistemas de ecuaciones y otro para la competencia en la resolución de SEL (Figura 4.2).

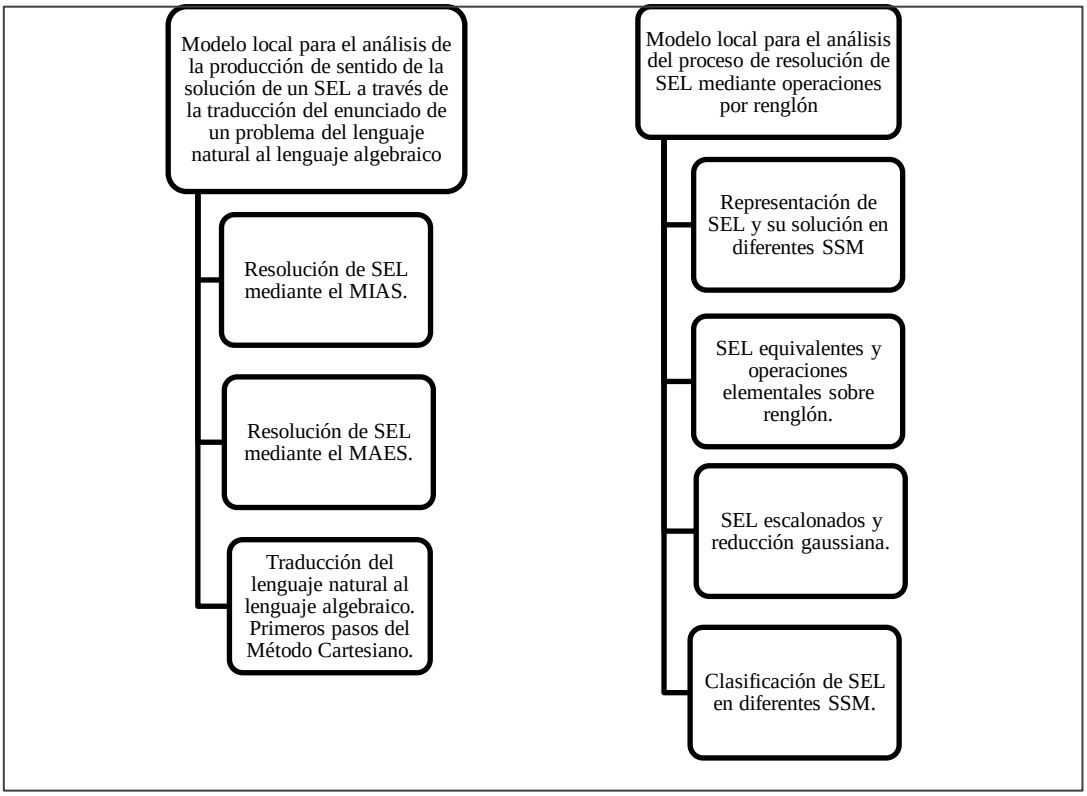


Figura 4.2 Estructura de los modelos locales para el desarrollo de las actividades.

4.3.1 Actividad 1. Caracterización de la ecuación lineal

El objetivo didáctico de la Actividad 1 es que los estudiantes caractericen la ecuación, específicamente la ecuación lineal, diferenciándola de otro tipo de expresiones. La actividad está dividida en cinco secciones.

En la primera sección se propone una serie de expresiones algebraicas (véase la Tabla 4.1) y se cuestiona a los estudiantes acerca de cuáles de ellas son ecuaciones, el tipo de ecuación, la justificación de sus respuestas y la solución o soluciones de cada expresión. En esta sección

se sugiere al docente guiar el proceso de caracterización del objeto matemático ecuación, en particular la ecuación de primer grado, mediante preguntas enfocadas en las variables como incógnitas y como relaciones funcionales, la cantidad de soluciones, el signo de igual y el grado de las ecuaciones.

I Llena las tablas para cada una de las expresiones siguientes.

a) $3m+1=0$	
i) ¿Es una ecuación? Sí/No Justifica	iii) Resuelve si es posible.
ii) Si es una ecuación, ¿de qué tipo es?	

Expresiones para analizar	
a) $3m+1=0$	b) $(x-1)^2 = x^2-2x+1$
c) $3x+5$	d) $t=3$
e) $3x-2<4$	f) $3t-2=t+1$
g) $z^2-4=0$	h) $x-3y=0$
i) $2-3=-1$	j) $2x-3y-z=-1$

Tabla 4.1 Expresiones usadas en la primera sección de la Actividad 1

La segunda sección está enfocada en la ecuación lineal con dos variables. Para lo cual se propone el siguiente problema:

> **Problema 1.** Analiza el siguiente problema:
> *Una pequeña empresa de refresco artesanal llena botellas de 5 y 2 litros. Si en un día se embotellaron 120 litros de la bebida, ¿cuántas botellas de 5 l y cuántas botellas de 2 l se llenaron?*
> *¿Cuántas soluciones tiene el problema? ¿Cuáles son?*
> *Construye una gráfica que represente el problema. (Se proporciona plano coordenado).*
> *¿Cuál es la expresión algebraica que representa el problema? ¿Qué tipo de expresión es?*
> *¿Cuántas soluciones tiene esta expresión?*

Se solicita a los estudiantes que resuelvan el problema aritméticamente, por inspección, para resaltar la multiplicidad de soluciones (un estrato intermedio, como antecedente al Método de inferencias analíticas sucesivas). Posteriormente se pide a los estudiantes que construyan

una gráfica que represente el problema. Con lo anterior se vuelve a hacer énfasis en la multiplicidad de soluciones. Finalmente se pide a los estudiantes que escriban una expresión algebraica que modele el problema. Se sugiere al profesor que haga hincapié en la diferencia entre el número de soluciones entre una ecuación lineal con una variable y una ecuación lineal con dos variables y entre la cantidad de soluciones del problema planteado y la cantidad de soluciones del modelo algebraico. Respecto a la gráfica, se sugiere hacer énfasis en la tendencia de los estudiantes a trazar una recta sobre algunos puntos localizados a partir de las soluciones encontradas haciendo énfasis en la diferencia entre la gráfica que representa el problema y la gráfica de la ecuación que representa el problema. Aquí es conveniente el uso de software de geometría dinámica (SGD) para el análisis de las gráficas. En esta sección se sugiere generalizar a la ecuación de primer grado con tres incógnitas, cuestionar a los estudiantes sobre sus soluciones y representación gráfica y mostrar sus representaciones en el SGD.

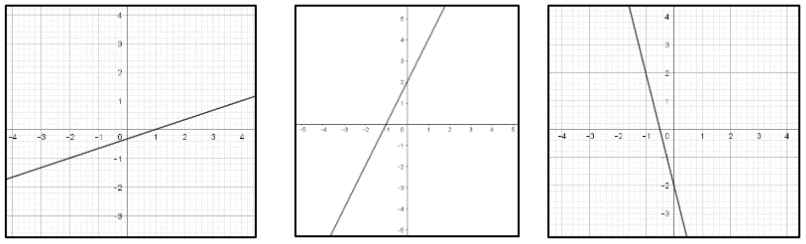
La tercera sección de la actividad está enfocada en el proceso inverso; se presenta a los estudiantes una ecuación lineal con dos variables y se les solicita que escriban un fenómeno que pueda ser representado mediante esa expresión.

Escribe un problema de enunciado que pueda modelarse algebraicamente mediante la expresión

$$5x + 3y = 35$$

La cuarta sección está enfocada en identificar la ecuación de primer grado con dos incógnitas asociada a una gráfica.

1. Escribe la ecuación asociada a cada una de las rectas mostradas.



_____ _____ _____

La quinta y última sección de la actividad es la conclusión de las observaciones por lo que se solicita a los estudiantes que describan ampliamente lo que para ellos son las ecuaciones

lineales en general y las ecuaciones lineales específicamente, la cantidad de soluciones y los elementos que las componen y que proporcionen ejemplos.

Escribe un ejemplo de ecuaciones de primer grado:

a) Con una variable	
b) Con dos variables	
c) Con tres variables	

Describe ampliamente qué es una ecuación y cuáles elementos la componen.
Describe qué son las ecuaciones de primer grado, cuántas soluciones tienen y qué elementos la componen.

4.3.2 Actividad 2. Resolución de ecuaciones lineales.

El objetivo de esta actividad es que los estudiantes identifiquen (i) que las expresiones con las características de ecuaciones de primer grado con una incógnita pueden tener una, ninguna o infinita cantidad de soluciones; y (ii) que las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas cuya forma canónica es $ax+by=c$ tienen infinita cantidad de soluciones y pueden representarse como rectas en el SSM del plano de ejes coordenados.

En la primera sección de esta actividad se solicita a los estudiantes resolver una serie de cuatro ecuaciones de las cuales los incisos a y c tienen una solución, el inciso b no tiene solución y el inciso d tiene infinita cantidad de soluciones.

I Resuelve las siguientes ecuaciones.

$$y+\frac{2}{3}y=\frac{1}{2}(1+3y)$$

$$2-\left[3-2\left(t+1\right)\right]=-2\left[4-\left(3+t\right)\right]$$

$$x+\frac{7}{6}+\frac{5x+4}{4}=2(x+1)$$

$$-4z+5+2(5z+4)=2(3z+6)+1$$

El trabajo en la segunda sección de la Actividad 2 se enfoca en las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, el objetivo específico es la producción de sentido, por parte de los

estudiantes, de que las ecuaciones cuya forma canónica de la forma $ax+by=c$ tienen infinita cantidad de soluciones y pueden representarse mediante una recta.

II Resuelve y grafica la siguiente ecuación.

$3x-5y=10$

Además de los objetivos mencionados, encontramos en esta actividad la oportunidad de identificar la competencia de los estudiantes en las transformaciones algebraicas necesarias para la resolución de ecuaciones y realizar una intervención didáctica en caso de que así se considere conveniente.

4.3.3 Actividad 3. MIAS y MAES para dotar de sentido a los SEL y su solución.

El objetivo general de la Actividad 3 es la producción de sentido respecto (*i*) del concepto de sistema de ecuaciones como un conjunto de condiciones que pueden ser independientes en su formulación, pero que están interrelacionadas en este objeto matemático y (*ii*) de su solución como el conjunto de valores que hace cumplir todas las condiciones o que valida la igualdad de las ecuaciones.

Para el primer problema de esta actividad, el objetivo específico es que el estudiante encuentre la solución mediante el método de inferencias analíticas sucesivas; sin el uso de ecuaciones algebraicas, enfocándose en las condiciones y la propuesta de valores numéricos que las satisfagan y priorizando el significado de la solución como el par de valores que debe validar las dos condiciones, en este caso, nunca se pierde el sentido del problema original, siempre se trabaja en términos de las condiciones dadas en lenguaje natural y de valores desconocidos que están relacionados mediante las condiciones planteadas.

> *Problema 1. Una empresa de transporte de material para construcción tiene dos camiones. El camión A con capacidad de dos toneladas y el camión B con capacidad de cuatro toneladas. El supervisor de la empresa quiere saber cuántos viajes hizo cada camión ayer y la información que tiene es que se transportaron 20 toneladas de material a una construcción y que ningún camión viajó con menos de su capacidad.*
> *¿Cuántas soluciones tiene el problema? ¿Cuáles son?*

Preguntas para guiar a los estudiantes en caso de que no sepan cómo abordar el problema:

¿Qué es lo que queremos saber?

¿Qué sería una solución para este problema?

¿Cuál sería una solución?

¿Cuántos viajes tendría que haber hecho el camión A si el camión B no hubiera hecho ningún viaje? ¿Y si el camión B hubiera hecho un solo viaje?

¿Puedes hacer una tabla con las soluciones posibles? ¿Cuántas son?

¿Podemos saber con certeza cuántos viajes hizo cada camión?

Una vez expresadas las soluciones tabularmente se agrega la otra parte del problema.

El supervisor sabe también que por cada viaje del camión A la empresa cobra 2 mil pesos y por cada viaje del camión B 3 mil pesos, y encuentra una copia de la factura en la que se muestra que el pago por los viajes fue de 18 mil pesos. Con esta nueva información, ¿puede resolver su problema?

Preguntas para guiar en el método de resolución (MIAS)

Extiende la tabla que hiciste en la primera parte del problema, ¿Cuánto habría cobrado la empresa en miles de pesos para cada una de las respuestas de la tabla?

¿cuántas soluciones tiene el problema con la nueva condición?

¿cuál es la solución?

Sintetizar la información y hacer énfasis en que en la primera parte se tenía una condición y dos valores desconocidos y que la segunda parte dio otra condición.

El objetivo del segundo problema es que mediante el uso de valores numéricos identifiquen las relaciones entre los valores desconocidos y las condiciones y el vínculo entre las condiciones que determinan la existencia de una solución.

Problema 2. Ana participó en un juego en el que debía responder 10 preguntas, por cada acierto ganaba dos puntos y por cada error perdía un punto. Si al final Ana obtuvo ocho puntos, ¿cuántos aciertos y cuántos errores tuvo?

Preguntas para guiar en el método de resolución (MAES)

Considerando únicamente que su resultado fue de ocho puntos ¿cuál es la cantidad mínima de aciertos que podría haber tenido?

Con esa cantidad de aciertos ¿cuántos errores habría tenido?

Si hubiera tenido cinco aciertos, ¿cuántos errores debería haber tenido?

¿Y para seis aciertos?

¿Cuál es la condición que determina esas respuestas?

¿Cuál es la relación entre la cantidad de aciertos y la cantidad de errores de acuerdo con esa condición?

Considerando que el juego consta de 10 preguntas, si Ana hubiera tenido un solo acierto, ¿cuántos errores habría tenido?

Si hubiera tenido dos aciertos ¿cuántos errores habría tenido?

¿Cuál es la condición que determina esas respuestas?
Si suponemos que la cantidad de aciertos es x *y la cantidad de errores es* y *¿Cómo podemos expresar la primera condición para relacionar las dos cantidades desconocidas?*
¿Cómo podemos expresar la segunda relación entre las variables?
¿Podríamos resolver el problema si sólo contáramos con una condición?

El objetivo del tercer problema es que el estudiante se apoye en el razonamiento de los problemas anteriores para obtener las ecuaciones que determinan el SEL al observar que el proceso de encontrar la solución mediante inferencias se vuelve complejo y poco práctico.

Problema 3. Representa algebraicamente el siguiente problema: Hallar la medida de los lados de un rectángulo cuyo lado mayor mide el triple que su lado menor y cuyo perímetro es 73.6 unidades.
Preguntas para guiar en el método de resolución.
¿Cuáles son los valores desconocidos?
¿Cuál es la primera condición?
Escríbela como una expresión algebraica.
Si el estudiante no puede plantearla:
Encuentra una solución para la primera condición (encuentre una nueva solución hasta que pueda generalizar algebraicamente la condición).
Realizar el mismo proceso para la segunda condición y hacer notar que en este caso encontrar las soluciones posibles sería un proceso demasiado largo.

Para el cierre de esta actividad se analizan los SEL de cada uno de los problemas cuestionando al estudiante sobre la posibilidad de que existan otros problemas que puedan representarse mediante el mismo SEL y concluyendo que la forma algebraica es la representación de una familia de problemas.

4.3.4 Actividad 4. Sistemas de ecuaciones lineales en el SMS

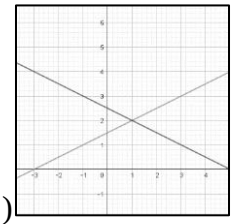
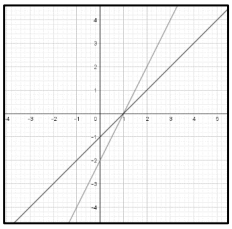
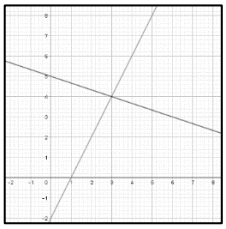
Con esta actividad se pretende que el estudiante identifique los SEL en los diferentes sistemas matemáticos de signos que conforman el SMS que enmarca las actividades de enseñanza de este modelo y que transite entre ellos mediante el reconocimiento de sus elementos. La actividad consta de una serie de preguntas en las que se solicita al estudiante relacionar sistemas de ecuaciones lineales mediante el reconocimiento de sus características en diferentes sistemas de signos; esto con el fin de reforzar el objeto mental de los SEL como

un conjunto de ecuaciones que modelan condiciones relacionadas entre sí, las cuales, pueden ser representadas de formas diferentes.

En la Pregunta 1 se le presenta al estudiante un conjunto de SEL y de gráficas para que relacione las correspondientes a través de la identificación de elementos como la solución del SEL sin que tenga que graficar cada ecuación. Se pide al estudiante que identifique la solución y se hace un análisis sobre las ventajas y desventajas del uso del sistema de ejes coordenados para encontrar una solución. Además, se le cuestiona sobre la posibilidad de que no siempre se crucen las rectas entre sí.

1. *Relaciona los sistemas de ecuaciones con la gráfica correspondiente*.

b) $\begin{cases} y = 2x - 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = 2x - 2 \\ x + 3y = 15 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \\ x + 2y = 5 \end{cases}$

( )  ( )  ( ) 

El objetivo de la Pregunta 2 es que los estudiantes relacionen un problema dado en lenguaje natural, con la representación tabular de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, con lo cual se pretende que identifiquen las relaciones y condiciones del problema y las relacionen con los valores numéricos que cumplen con dichas condiciones.

2. Dado el problema:

   Se tiene un rectángulo cuya altura mide 2 cm más que su base y cuyo perímetro es igual a 24 cm. Calcular las dimensiones del rectángulo.

¿Cuál de las siguientes parejas de tablas representa las condiciones del problema?

a)

x	y
1	3
2	4
3	5
4	6
5	7
6	8
7	9
8	10
9	11
10	12
11	13

x	y
1	3
2	8
3	15
4	24
5	35
6	48
7	63
8	80
9	99
10	120
11	143

b)

x	y
1	3
2	4
3	5
4	6
5	7
6	8
7	9
8	10
9	11
10	12
11	13

x	y
1	11
2	10
3	9
4	8
5	7
6	6
7	5
8	4
9	3
10	2
11	1

c)

x	y
1	3
2	4
3	5
4	6
5	7
6	8
7	9
8	10
9	11
10	12
11	13

x	y
1	23
2	22
3	21
4	20
5	19
6	18
7	17
8	16
9	15
10	14
11	13

En la Pregunta 3, el objetivo es que los estudiantes analicen el proceso inverso a la modelación algebraica para reforzar la comprensión de las variables en las ecuaciones y del SEL como un objeto matemático. Se pide a los estudiantes escribir un problema de enunciado a partir de valores dados como solución.

3. *Escribe el anunciado de un problema cuya respuesta sean los siguientes valores.*

$$x = 5$$
$$y = 2.5$$
$$z = 1$$

En la pregunta 4 se solicita a los estudiantes que relacionen tablas de valores numéricos con SEL expresados algebraicamente. El objetivo es que identifiquen cuáles condiciones son las que cumplen las tablas presentadas. Tradicionalmente los estudiantes tabulan valores a partir de las ecuaciones o los sistemas de ecuaciones como uno de los métodos para obtener representaciones gráficas. En esta pregunta se plantea el proceso inverso: se presentan tres tablas de valores numéricos y se solicita identificar de una serie de opciones, el SEL que representan. Dado que los estudiantes de la educación Media Superior son competentes en el proceso de tabular ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, consideramos que podrían ser competentes en el proceso inverso, sin embargo, al ser un proceso no explorado, podría presentarse un mecanismo inhibitorio.

En la Pregunta 5 se presenta un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas sin solución en el SSM del plano de ejes coordenados y se solicita al estudiante que escriba su representación algebraica y analicen la solución del sistema en ambas representaciones. El objetivo en esta pregunta es observar el análisis que el estudiante realiza sobre las intersecciones de las rectas que representan el SEL, su competencia para representar las ecuaciones lineales a partir de su representación gráfica y los procesos que llevarán a cabo para tratar de resolver el sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas.

4. *¿Cuál es el sistema de ecuaciones lineales que corresponde a la siguiente terna de tablas?*

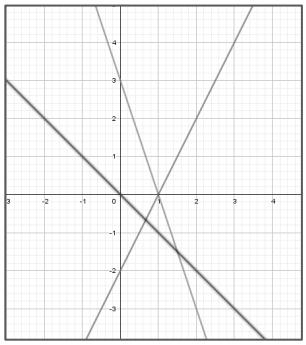
x	y
10	14
11	13
12	12
13	11
14	10
15	9
16	8
17	7
18	6
19	5

x	y
12	0
13	1
14	2
15	3
16	4
17	5
18	6
19	7
20	8
21	9

x	y
0	0
3	1
6	2
9	3
12	4
15	5
18	6
21	7
24	8
27	9

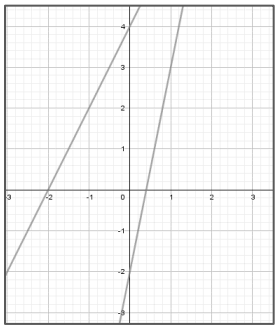
a) $\begin{aligned} x+y&=24 \\ x&=y-12 \\ x-3y&=0 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x+y&=24 \\ x-y&=12 \\ 3x&=y \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} x+y&=24 \\ x-y&=12 \\ x-3y&=0 \end{aligned}$

5. *Escribe algebraicamente el sistema de ecuaciones representado en el siguiente plano coordenado y resuélvelo. ¿Qué puedes decir sobre la solución del sistema de acuerdo con la gráfica? Y en el tratamiento algebraico, ¿qué puedes decir sobre la solución del sistema?*



En la Pregunta 6 se presenta un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas y solución única en una representación gráfica parcial en la que no se muestra la intersección de las rectas que representan las ecuaciones del sistema. Se pretende observar si los estudiantes intuyen que el SEL tiene solución dado que las rectas no son paralelas y analizar la competencia en el paso de la representación gráfica a la algebraica y el método de resolución o la estrategia que usan para determinar la solución.

6. ¿Cuál es la solución del sistema de ecuaciones lineales representado en la siguiente gráfica?



4.3.5 Actividad 5. Clasificación de SEL de acuerdo con su solución.

El objetivo que se persigue con esta actividad es que el estudiante reconozca que existen SEL sin solución, con infinitas soluciones o con solución única. La actividad se divide en tres secciones. En la primera sección se identifica la solución de un SEL. Con la primera pregunta de esta sección se pretende que el estudiante reconozca la solución de SEL de dos ecuaciones con dos incógnitas en sus formas gráfica y tabular. La actividad se realiza con el uso de una aplicación en GeoGebra (véase Figura 4.3), que es un software de geometría dinámica (SGD).

1. ***Considera la siguiente como una forma general del sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas y realiza lo que se pide en cada inciso.***

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

a) Abre el archivo SEL_Soluciones1.ggb. Usa los deslizadores de la primera ventana del archivo para definir el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} 3x - 4y &= 5 \\ 3x + y &= 10 \end{aligned} \qquad (1)$$

b) ¿Cuáles son los datos en los que coinciden los valores en la representación tabular?

$x =$ y=

c) ¿En qué coordenadas se intersecan las rectas en la representación gráfica?

$x =$ y=

d) Sustituye los valores en el sistema de ecuaciones. ¿Se cumplen las igualdades? ¿Qué significa que se cumplan o no las igualdades?

El propósito con la Pregunta 2 de esta sección es que el estudiante reconozca la solución de SEL de tres ecuaciones con tres incógnitas en sus formas gráfica y tabular.

2. ***Considera la siguiente como una forma general del sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas y realiza lo que se pide en cada inciso.***

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

a) Abre el archivo SEL_Soluciones2.ggb. Usa los deslizadores de la primera ventana del archivo para definir el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 2 \\ x - 2y - 5z &= 5 \\ 3x + y - 2z &= 9 \end{aligned} \qquad (1)$$

b) ¿Cuáles son los datos en los que coinciden los valores en la representación tabular?

$x =$ y= z=

c) ¿En qué coordenadas se intersecan las rectas en la representación gráfica?

$x =$ y= z=

d) Sustituyan los valores en el sistema de ecuaciones. ¿Se cumplen las igualdades? ¿Qué significa que se cumplan o no las igualdades?

El objetivo de segunda sección es que los estudiantes identifiquen características y patrones en los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas sin solución, con una o con infinitas soluciones. En esta sección se presenta a los estudiantes cinco SEL y se les pide que los grafiquen mediante el SGD y registren sus observaciones sobre cada uno de ellos en sus formas algebraica, gráfica y tabular. Finalmente, se les cuestiona sobre la imposibilidad de encontrar otro número de soluciones y sobre sus observaciones respecto de cada tipo de SEL para sintetizar la información.

Usa el archivo SEL_Soluciones1.ggb para representar cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones y registra lo que observas en cada uno de ellos.

1. $\begin{cases} y = 2x - 2 \\ 2x + y = -2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 1 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} y = 2x - 2 \\ 3x - \frac{3}{2}y = 15 \end{cases}$

5. $\begin{cases} y = 2x - 2 \\ 6x - 3y = 6 \end{cases}$

Representación algebraica
Representación gráfica
Representación tabular

En la tercera sección de esta actividad se propone a los estudiantes una serie de sistemas de dos y tres ecuaciones lineales con dos y tres incógnitas, entre los que hay SEL sin solución, con una solución o con infinita cantidad de soluciones y se solicita a los estudiantes que observen las características de los SEL en su forma gráfica mediante el SGD con el fin de generalizar las posibilidades de los SEL respecto a su solución encontradas en la sección previa.

1. *Usa el archivo SEL_Soluciones1.ggb para representar cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones y registra lo que observas en cada uno de ellos.*

a) $\begin{cases} 6x+4y=22 \\ 3x+2y=8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-2y=10 \\ -2x+4y=-20 \\ 3x+5y=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x+2y=10 \\ x+y=3 \\ 2x+y=7 \end{cases}$

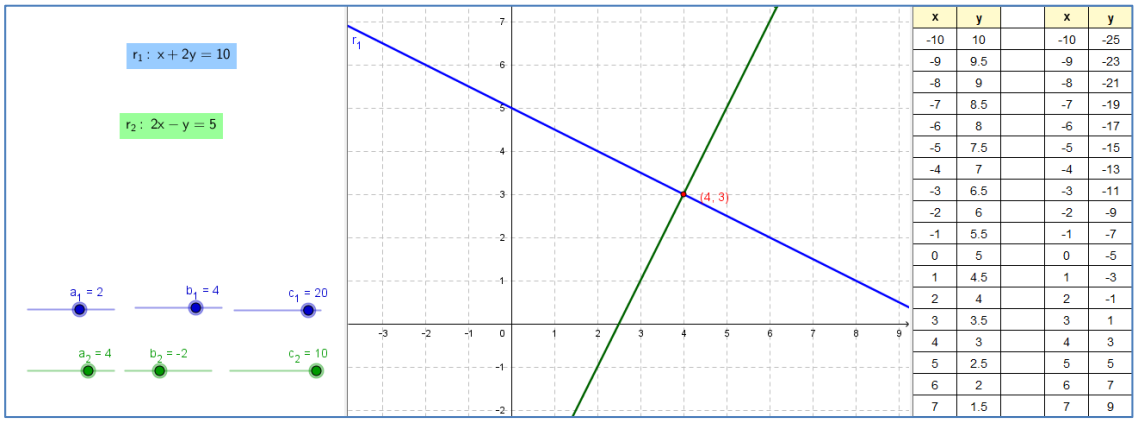
d) $\begin{cases} 3x-13y=-8 \\ 6x-26y=16 \\ 3x+5y=1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x+2y-5z=3 \\ 3x-2y+3z=1 \\ 2x+4y-10z=15 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+4y-2z=1 \\ 3x-2y-z=5 \end{cases}$

Respecto al número de soluciones:

¿Qué número de soluciones es posible encontrar en sistemas de tres ecuaciones y dos incógnitas? ¿Cómo sería su forma gráfica?

¿Qué número de soluciones es posible encontrar en sistemas de dos ecuaciones con tres incógnitas? ¿Cómo sería su forma gráfica?

¿Qué número de soluciones es posible encontrar en sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas? ¿Cómo sería su forma gráfica?



x	y		x	y
-10	10		-10	-25
-9	9.5		-9	-23
-8	9		-8	-21
-7	8.5		-7	-19
-6	8		-6	-17
-5	7.5		-5	-15
-4	7		-4	-13
-3	6.5		-3	-11
-2	6		-2	-9
-1	5.5		-1	-7
0	5		0	-5
1	4.5		1	-3
2	4		2	-1
3	3.5		3	1
4	3		4	3
5	2.5		5	5
6	2		6	7
7	1.5		7	9

Figura 4.3 Interfaz para la observación de SEL 2X2 representaciones algebraica, gráfica y tabular.

4.3.6 Actividad 6. Sistemas de ecuaciones lineales equivalentes.

Con esta actividad pretendemos la producción de sentido respecto al concepto de sistema de ecuaciones lineales equivalentes, su importancia para la resolución de SEL mediante los SEL escalonados y el reconocimiento de las operaciones que permiten obtener sistemas de ecuaciones lineales equivalentes.

En la primera sección de la actividad se propone a los estudiantes, a manera de introducción, una serie de preguntas relacionadas con las ecuaciones equivalentes, que les permita hacer las conexiones intertextuales necesarias con el fin de tener una lectura más eficaz del concepto de SEL equivalentes. Se establece la importancia de las propiedades de la igualdad para la resolución de las ecuaciones y que la igualdad de cada ecuación obtenida de esta manera puede validarse mediante la misma solución, por lo cual son equivalentes.

1. *Responde las siguientes preguntas.*

   a) ¿Qué es la solución de una ecuación?
   b) ¿Qué es una ecuación equivalente?
   c) ¿Cuáles son las operaciones que podemos realizar sobre una ecuación para resolverla?

   Si los estudiantes no pueden comunicar las operaciones que permiten obtener ecuaciones equivalentes, dar el siguiente ejemplo:

   Dada la ecuación

$$5x - 2 = 2x + 1 \qquad (1)$$

   Sumar 2 a ambos miembros de la ecuación. La ecuación que se obtiene

es:

$$5x = 2x + 3 \qquad (2)$$

Restar 2x a ambos miembros de la ecuación original. La ecuación que se obtiene es:

$$3x = 3 \qquad (3)$$

Encontrar la solución de la ecuación y comprobar que $x = 1$ *valida (1), (2) y (3).*

d) Dado que al evaluar la misma solución las igualdades se cumplen, ¿cómo son entre sí las ecuaciones obtenidas?

(Motivar que los estudiantes concluyan la definición de ecuación equivalente en caso de que no la hayan respondido en el inciso b)

e) ¿Qué es un sistema de ecuaciones equivalente?

(Motivar que los estudiantes expresen adecuadamente la respuesta a la pregunta.)

f) ¿Cuáles son las operaciones que podemos realizar sobre un sistema de ecuaciones para obtener un sistema de ecuaciones equivalente?

(Plantear la pregunta solo para dar pie a la construcción de la respuesta.)

En la segunda sección de la actividad el estudiante debe probar diferentes operaciones sobre algunos SEL, representar los resultados obtenidos en el archivo mediante el SGD cuya interfaz se muestra en la Figura 4.3 y verificar que el resultado obtenido es un SEL equivalente. Las operaciones son las siguientes:

2. Escribe el siguiente sistema de ecuaciones en papel y en el archivo SEL_eq1.ggb para observar su forma gráfica y tabular

$$3x - 4y = 2$$

$$x + 2y = 4$$

a) Toma nota de la solución del sistema.
b) Multiplica ambos miembros de una ecuación por algún número.
c) Escribe el nuevo sistema de ecuaciones.
d) Define el nuevo sistema en el archivo y observa las formas gráfica y tabular.
¿Qué observas respecto a la solución del sistema de ecuaciones?
¿Qué se podríamos concluir de lo anterior respecto a los sistemas de ecuaciones?
e) Suma las dos ecuaciones del sistema.

f) Escribe un nuevo sistema de ecuaciones tomando el resultado de la suma y sustituyéndolo por cualquiera de las ecuaciones.

g) Define en el archivo el nuevo sistema de ecuaciones y registra tu observación.

¿Qué observas respecto a la solución del nuevo sistema de ecuaciones?

¿Qué se podríamos concluir respecto al nuevo sistema de ecuaciones y el original?

3. Considera nuevamente el sistema de ecuaciones.

$$3x - 4y = 2$$
$$x + 2y = 4$$

a) Usa los deslizadores para representarlo en el archivo ***SEL_eq1.ggb*** *toma nota de la solución del sistema.*

b) Cambia el orden de las ecuaciones y escriban el nuevo sistema.

c) ¿Cómo es el nuevo sistema con relación al anterior?

d) Del nuevo sistema, multiplica por 2 la primera ecuación y suma el resultado a la segunda ecuación.

e) Escribe un nuevo sistema de ecuaciones sustituyendo el resultado de la operación en cualquiera de las ecuaciones del sistema.

f) Usa el archivo para representar el nuevo sistema de ecuaciones y registra tu observación.

4. ¿Cuáles son las operaciones que podemos realizar sobre un sistema de ecuaciones para obtener un sistema de ecuaciones equivalente?

¿Cuál es la característica de un sistema equivalente en su forma gráfica?

Con el propósito de que el estudiante observe la conveniencia de estructurar los SEL en forma escalonada para su resolución, en la tercera sección de esta actividad se presentan dos SEL escalonados y se analiza que un objetivo de las operaciones elementales sobre el sistema de ecuaciones es llegar a SEL con esta estructura.

5. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

$$a)\begin{cases} x + 4y = 12 \\ 3y = 6 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ 2y + 3z = 9 \\ 11z = 55 \end{cases}$$

4.3.7 Actividad 7. Método de reducción gaussiana para la resolución de SEL.

El objetivo de esta actividad es que el estudiante sea competente en el uso de las operaciones elementales por renglón para convertir un sistema de dos o tres ecuaciones con dos o tres incógnitas en un SEL escalonado y lo resuelva. Otro propósito, es que el objeto mental SEL del estudiante le permita identificar la naturaleza de la solución a partir de los resultados de aplicar las operaciones por renglón para obtener un SEL escalonado.

En la primera sección de esta actividad se solicita al estudiante que utilice operaciones elementales sobre renglón para resolver dos SEL con solución única. El primero de dos ecuaciones con dos incógnitas y el segundo de tres ecuaciones con tres incógnitas. El propósito es que se familiarice con las operaciones y con la forma de expresarlas.

1. ***Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones realizando operaciones que te permitan obtener un sistema escalonado.***

a) $\begin{cases} 5x+3y=12 \\ 4x+2y=10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+6y-5z=0 \\ x+y+2z=9 \\ 2x+4y-3z=1 \end{cases}$

2. ***Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones aplicando las operaciones elementales por renglón para obtener un sistema escalonado.***

$a)\begin{cases} 2x+3y=11 \\ 4x+6y=8 \end{cases}$ $b)\begin{cases} 6x+9y=12 \\ 4x+6y=8 \end{cases}$

$c)\begin{cases} 7x-10z-7y=-3 \\ -6z+2x-4y=-1 \\ 5x-4z-3y=-2 \end{cases}$ $d)\begin{cases} 3z+y-2x=8 \\ y-x+z=-1 \\ -2x+2z+2y=-2 \end{cases}$

$e)\begin{cases} 2x-y-z=-1 \\ 4x-y+7z=-3 \\ -2x+3y-5z=1 \end{cases}$ $f)\begin{cases} 2y-3x+4z=-1 \\ 3z+y-2x=8 \\ -5x+3y+7z=-7 \end{cases}$

La segunda sección de esta actividad tiene como objetivo que el estudiante identifique los SEL sin solución, con una solución o con infinita cantidad de soluciones a partir de los resultados obtenidos de escalonar SEL que se le presentan.

En cada uno de los SEL se cuestionará al estudiante para identificar a partir de los resultados que vaya obteniendo, cuándo se trata de un SEL sin solución o con infinitas soluciones. En el caso de SEL con infinitas soluciones la intervención didáctica estará encaminada a la conformación de soluciones paramétricas como una generalización de la ecuación lineal con dos variables. Posteriormente se utilizará el SGD para obtener la forma gráfica de cada uno de los ejemplos y tener una relación entre los SSM.

4.3.8 Actividad 8. El método cartesiano para la resolución de SEL.

El objetivo de la Actividad 8 es conjuntar las competencias y observar el modelo mental construido hasta ahora por los estudiantes, para ello se requiere que usen el método cartesiano para resolver mediante el método de reducción gaussiana los SEL en caso de tener solución única, en caso contrario que identifiquen de qué tipo de sistema se trata y justifiquen.

En los primeros dos problemas de la actividad se requiere a los estudiantes la resolución de problemas de enunciado que pueden modelarse mediante sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas con solución única.

> ***Problema 1***. *En un examen de 100 preguntas, cada respuesta correcta suma un punto y las incorrectas restan medio punto. La nota de un alumno es 7.15 sobre 10. Calcular el número de preguntas que contestó correcta e incorrectamente.*
>
> ***Problema 2.*** *Una empresa gastó $ 61 250.00 pesos en comprar un teléfono a cada uno de sus 25 empleados. El proveedor le vendió a la empresa dos modelos diferentes, uno a $ 3200 y el otro a $ 1950 pesos. ¿Cuántos teléfonos de cada modelo compró?*

Enseguida se presentan tres problemas de enunciado para ser resueltos mediante el MC. Los tres sistemas presentan características diferentes y tienen más de dos ecuaciones o incógnitas. En el primer caso se presenta un problema de enunciado que puede modelarse mediante un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas sin solución. En el segundo caso se presenta un problema de enunciado que puede ser representado mediante un sistema de dos ecuaciones, una con tres y la otra con dos incógnitas. El tercer problema puede ser modelado mediante un sistema con tres ecuaciones, dos de las cuales tienen tres incógnitas y la otra,

dos. El SEL tiene solución única. El proceso de intervención didáctica en esta actividad consiste principalmente en recuperar las competencias logradas en actividades previas.

3. *Un avión dispone de 32 asientos en primera clase y de 50 asientos en clase turista, cuya venta supone un total de 146000 pesos. En un vuelo se vendieron 10 asientos en primera clase y 40 en turista, obteniendo un total de 70000 pesos y en otro vuelo se vendieron 20 boletos de cada uno obteniendo un total de 60000. ¿Cuál es precio de los asientos en cada clase?*
4. *En el segundo trimestre del año las ventas reportadas por una agencia de autos fueron de 85 unidades entre automóviles familiares, sedan y deportivos. Se sabe que si se hubieran vendido nueve unidades más de cada tipo de auto se habrían vendido el doble de sedan que deportivos. ¿Cuántos automóviles de cada uno de estos tres tipos se vendieron?*
5. *Para hacer su mezcla especial, en una cafetería combinan tres tipos de café con los siguientes costos de compra: el café tipo A con un costo de 390 pesos el kilo, el tipo B con un costo de 420 pesos el kilo y el tipo C con un costo de 450 pesos el kilo. Para hacer 20 kilos de mezcla especial invierten $8235 pesos y la mezcla contiene 3 kilos más del tipo A, que del tipo B. ¿Qué cantidades de cada tipo de café se agregan a cada kilo de mezcla especial?*

4.4 Programa de actividades para el desarrollo empírico.

Como se ha explicado en las secciones anteriores, el desarrollo de la experimentación directa consta de dos partes: la etapa de la enseñanza controlada en la que se trabajará con un grupo de estudiantes que cursan el último año de enseñanza Media Superior y la etapa de entrevistas con enseñanza en las que trabajará con un subgrupo seleccionado del primero. Pretendemos que la etapa de la enseñanza controlada sirva a la vez como mecanismo de observación y clasificación para seleccionar a los estudiantes para la etapa de entrevistas con enseñanza al analizar sus actuaciones mediante el Modelo de cognición. Por las condiciones actuales, ambas fases se realizarán en un ambiente de trabajo virtual mediante una aplicación de comunicación síncrona grabadas; a partir del análisis de las actuaciones de los estudiantes

(sus interacciones en las sesiones de trabajo y sus respuestas a las actividades) se pretende identificar los procesos de producción de sentido y de conformación de los objetos mentales que constituyen el campo semántico relacionado con los SEL. El propio ambiente de trabajo a distancia, que se integra al Modelo de comunicación, será un campo de experimentación que esperamos no impida la adecuada aplicación de las actividades del Modelo de enseñanza y la apropiada observación del desempeño de los estudiantes, sino que las enriquezca.

El protocolo para las entrevistas son las propias actividades que se propondrán a cada uno de los estudiantes y que se detallaron en la sección 4.3.2, sin embargo, de acuerdo con las actuaciones de los estudiantes pueden surgir variaciones en las intervenciones para lograr los objetivos de cada actividad, las respuestas de los estudiantes a las actividades, así como el mecanismo de medición presentado en la sección 3.2.2 serán analizados e interpretados en términos del MTL.

Capítulo 5

Análisis de datos del desarrollo empírico

En este capítulo se describe el análisis de datos derivados de las sesiones de trabajo con los participantes bajo estudio. El análisis se realiza con base en el Modelo de cognición descrito en Capítulo 4. En el primer apartado de este capítulo se describen las características de los participantes, grado escolar, desempeño académico general y algunas particularidades detectadas respecto a la forma de trabajar en la experiencia de aprendizaje.

Cada una de las tres secciones siguientes, se enfoca en un estudio de caso, cuyo análisis se divide en subsecciones de acuerdo con las actividades del Modelo de enseñanza. La descripción de las actividades inicia con una síntesis de los momentos de producción de sentido y de desarrollo de competencias basadas en el intertexto de los estudiantes con respecto a los SEL, el que posteriormente se desarrolla con detalle mediante imágenes o diálogos de las entrevistas. En algunas de las actividades se incorpora el análisis de tendencias cognitivas identificadas.

El primer estudio de caso que se describe se planificó para ser una experiencia piloto, por lo cual existen algunas variaciones con respecto al trabajo con los otros participantes. En ese caso, por ejemplo, se realiza la descripción de adecuaciones al Modelo de enseñanza, derivadas del propio desarrollo empírico.

5.1 Características de los participantes

Durante la experiencia de enseñanza Vanessa estudiaba el Cuarto año (primer ciclo de la Educación Media Superior) de la Escuela Nacional Preparatoria. La estudiante obtuvo resultados académicos destacados en el nivel Medio Básico. En la implementación del Modelo de enseñanza se evidenció por parte de la estudiante una forma tradicional de aprendizaje. No participaba activamente y no respondía si no se sentía segura de tener las respuestas correctas. En general respondía en forma de pregunta. La estructura de las actividades y el método de entrevista con intervención didáctica la hacían sentir insegura y

poco confortable a decir de la estudiante, ya que esperaba recibir información y procesos para reproducirlos.

Por otra parte, Gabriel era estudiante del sexto año de la Escuela Nacional Preparatoria durante las semanas de la experiencia de aprendizaje. Se encontraba recursando la materia de Matemáticas V. Gabriel comentó que sus dificultades en el área de matemáticas se debían a que los resultados de sus exámenes no eran buenos. En general, Gabriel mostró confianza en sus respuestas y un desempeño constante en los diferentes aspectos del Modelo de enseñanza. No mostró tendencias o dificultades en alguna actividad o sistema de signos particular.

Ana es una estudiante de alto desempeño académico en general y durante el desarrollo del Modelo de enseñanza cursaba en último año (sexto) en la Escuela Nacional Preparatoria. Es una estudiante comprometida. Expresó no sentirse cómoda con el tipo de preguntas no ordinarias para las que no tenía respuestas inmediatas. En general respondía o preguntaba con seguridad. Ana parecía estar más familiarizada con las transformaciones algebraicas, por lo que no parecía desarrollar competencias en otros SSM con la misma facilidad; sin embargo, siempre se mostró con muy buena disposición y atención a cada paso del desarrollo de la experiencia de aprendizaje.

5.2 El caso de Vanessa

5.2.1 Adecuaciones a las actividades derivadas de la prueba piloto

En el caso de Vanessa las actividades se implementaron a manera de prueba piloto. Los objetivos fueron extendidos a identificar la existencia de instrucciones o enunciados cuya redacción pudiera producir ambigüedades o confusiones respecto al tipo de respuestas esperadas, identificar redundancias, obstáculos o dificultades generados por las propias actividades para la consecución de los objetivos didácticos del Modelo de enseñanza. Particularmente, las dificultades derivadas de la modalidad del trabajo a distancia que pudieran subsanarse mediante adecuaciones en las actividades del Modelo.

Una de las adecuaciones más importantes es que la estructura de la experimentación que se establecía en dos etapas: una de enseñanza controlada y otra de entrevista con intervención

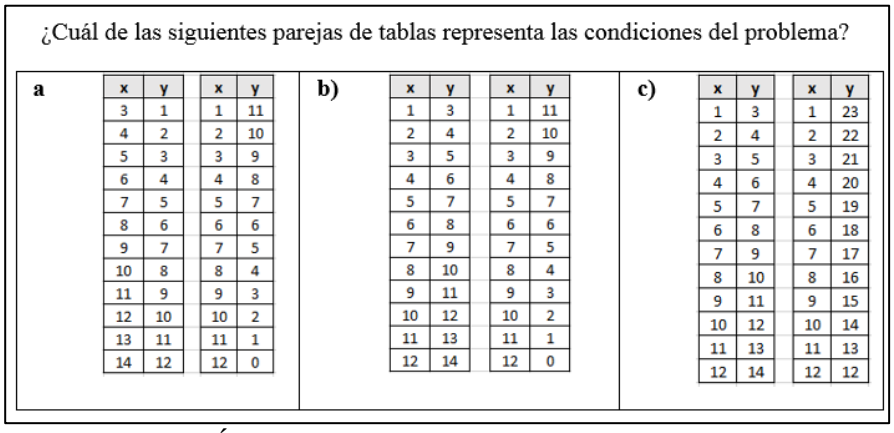
didáctica, se redujo a la de entrevista con intervención didáctica, sin embargo, algunas de las actividades de la primera etapa se conservaron incluyéndose como parte del Modelo de enseñanza.

El objetivo planteado para la primera actividad de la etapa de enseñanza controlada en la experiencia piloto era que los estudiantes formalizaran la resolución de problemas de enunciado que pueden modelarse como ecuaciones de primer grado mediante el uso del Método Cartesiano. Consideramos, sin embargo, que implementar el uso del Método Cartesiano durante la etapa previa al trabajo con los métodos MIAS y MAES en los sistemas de ecuaciones no contribuye al objetivo general del modelo de enseñanza al no aportar elementos al intertexto de los estudiantes que apoyen la producción de sentido y que, por el contrario, podría provocar que los estudiantes no usen las estrategias más concretas aportadas por el MIAS y el MAES. Derivado de este análisis se planteó la posibilidad de eliminar la actividad con la finalidad de hacer más eficiente el trabajo a distancia. Es así, como la segunda actividad de la etapa de enseñanza controlada pasó a ser la Actividad 1 de ocho actividades del Modelo de enseñanza.

Por otra parte, las transformaciones algebraicas para la resolución de ecuaciones de primer grado y el trabajo con ecuaciones sin solución y con infinitas soluciones son elementos que no se consideraron en la versión piloto del Modelo de enseñanza y que robustecen el objeto mental de ecuación lineal, por lo que se determinó agregar una actividad con este propósito: la Actividad 2 del Modelo de enseñanza (A2).

En el caso de A4S2 (Sección 2 Actividad 2 de la etapa de entrevista) se identificó que dos de los pares de tablas cumplían con las condiciones del problema (Figura 5.1), por lo que se realizó una modificación en esta sección, para tener una respuesta única.

En A7 (Actividad 5 de la etapa de entrevista), cuyo objetivo es dotar al estudiante de competencia en el uso de las operaciones elementales por renglón para resolver sistemas de ecuaciones fue abordada con operaciones en pizarra electrónica y papel. Sin embargo, consideramos que las transformaciones algebraicas para la resolución en esta actividad podrían ser sustituidas por las aplicaciones SEL_Reducción2.ggb y SEL_Reducción3.ggb. Esto se estableció en las instrucciones de A7.


¿Cuál de las siguientes parejas de tablas representa las condiciones del problema?

a

x	y
3	1
4	2
5	3
6	4
7	5
8	6
9	7
10	8
11	9
12	10
13	11
14	12

x	y
1	11
2	10
3	9
4	8
5	7
6	6
7	5
8	4
9	3
10	2
11	1
12	0

b)

x	y
1	3
2	4
3	5
4	6
5	7
6	8
7	9
8	10
9	11
10	12
11	13
12	14

x	y
1	11
2	10
3	9
4	8
5	7
6	6
7	5
8	4
9	3
10	2
11	1
12	0

c)

x	y
1	3
2	4
3	5
4	6
5	7
6	8
7	9
8	10
9	11
10	12
11	13
12	14

x	y
1	23
2	22
3	21
4	20
5	19
6	18
7	17
8	16
9	15
10	14
11	13
12	12

Figura 5.1. Ítem modificado con base en la experiencia piloto.

5.2.2 Actividad 1. Intertextualidad y producción de sentido

En la Actividad 1 (A1), cuyo objetivo es que los estudiantes caractericen la ecuación lineal, la estudiante identifica ecuaciones y descarta expresiones mediante características como incógnitas e igualdad. A partir del desarrollo de la actividad se evidencia producción de sentido respecto a *i*) que un problema de enunciado que presenta una condición y dos cantidades desconocidas puede tener múltiples soluciones (análisis mediante MIAS); *ii*) que puede generalizarse en forma algebraica como una ecuación lineal con dos variables y *iii*) que esas ecuaciones tienen infinita cantidad de soluciones.

En A1S1 la estudiante identifica y justifica a priori cuáles de las expresiones son ecuaciones e incluso resuelve las ecuaciones de primer grado con una incógnita en forma competente (Figura 5.2).

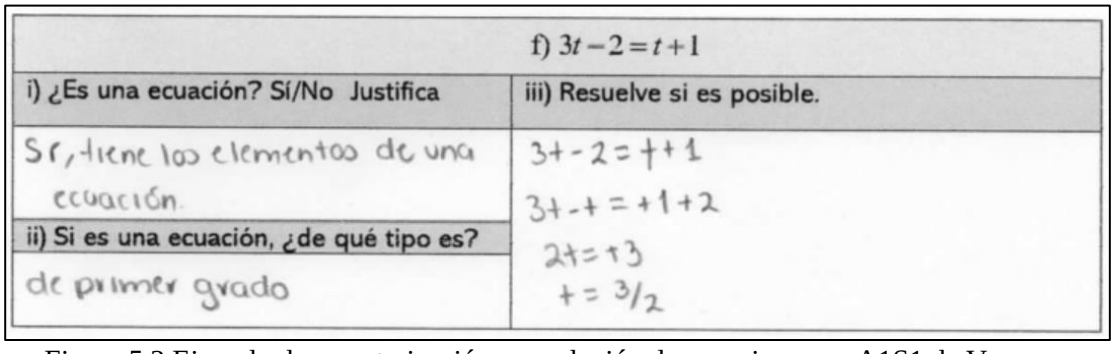


Figura 5.2 Ejemplo de caracterización y resolución de ecuaciones en A1S1 de Vanessa.

Además, en A5S2, mediante intervención didáctica, la estudiante identifica la infinidad de soluciones de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Reconoce, además, la forma

de modelar algebraicamente condiciones con dos cantidades desconocidas a partir de la evaluación de soluciones posibles, lo que podemos considerar como un estrato del MIAS (Figura 5.3).

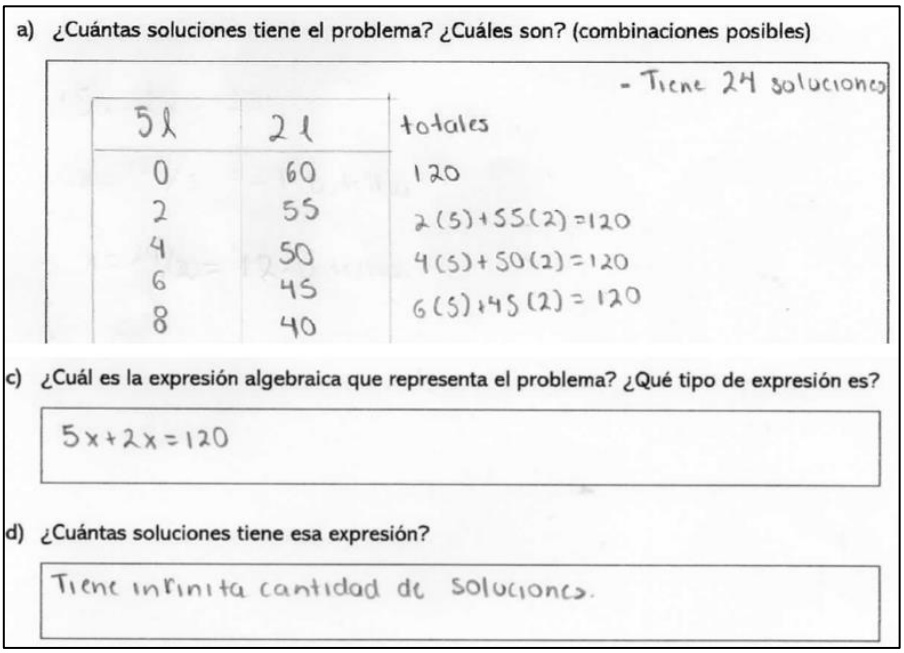


Figura 5.3 Desarrollo de A1S2 de Vanessa.

La estudiante identifica en A1S5 algunas de las características de las ecuaciones, sin embargo, se limita a las ecuaciones con una incógnita y se enfoca en la resolución, lo que evidencia que su intertexto con respecto a las ecuaciones no se modificó de forma tan determinante por lo analizado en la actividad, sino que está centrado en encontrar un valor desconocido (Figura 5.4).

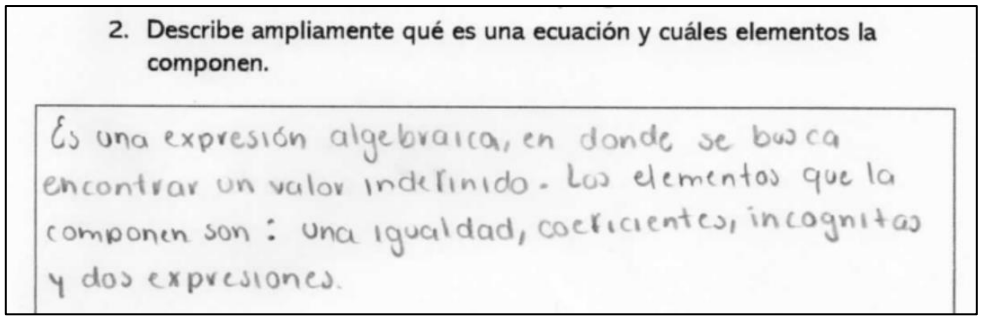


Figura 5.4 Respuesta en A1S5 de Vanessa.

Previo al desarrollo de A1S3 se realizó una sesión para explicar diferentes formas para graficar ecuaciones de primer grado con dos incógnitas en el SSM del plano de ejes

coordenados y para relacionar las gráficas con las ecuaciones y viceversa. La estudiante demostró ser competente en estos procesos en las actividades subsecuentes.

5.2.3 Actividad 3. Intertextualidad y producción de sentido

En la experiencia piloto, la Actividad 3 (Actividad 1 de la etapa de entrevista) consistió en tres problemas, el primero enfocado en el uso del MIAS, el segundo para la aplicación del MAES y el tercero en la competencia en el uso del MC. En cada caso la estudiante identificó las cantidades desconocidas. Encontramos, además, producción de sentido mediante una intervención didáctica respecto al hecho de que para encontrar una solución única en un problema con dos cantidades desconocidas se requieren dos condiciones; que esas condiciones pueden expresarse en términos de las cantidades desconocidas generalizadas mediante un sistema de ecuaciones en el que la solución es común a las ecuaciones; además, la estudiante identificó que para encontrar las soluciones que cumplen las condiciones de un problema de enunciado existen diferentes alternativas, como el análisis de inferencias sucesivas o el uso de valores concretos como auxiliares para modelar algebraicamente.

En A3P1, cuyo objetivo es el uso del MIAS para la resolución de un problema de enunciado, la estudiante utilizó el método con apoyo de la investigadora y encontró las soluciones del problema mediante un análisis sucesivo de valores (Figura 5.5).

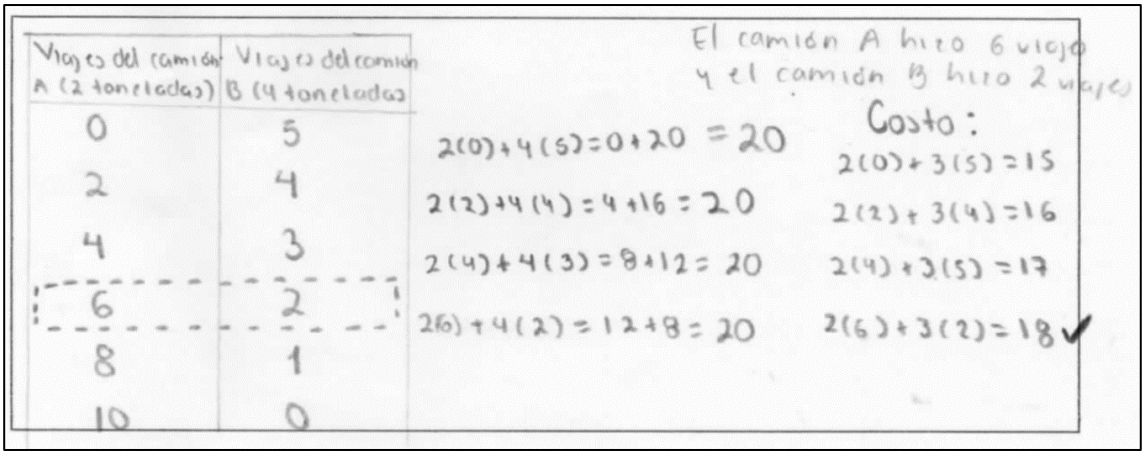


Figura 5.5 Desarrollo en A3P1 de Vanessa.

La estudiante identificó las cantidades desconocidas y encontró, mediante intervención didáctica, las respuestas posibles a una de las condiciones y las analizó en forma sucesiva

para encontrar la respuesta a la segunda condición y al problema. Sin embargo, al inicio, propone plantear una ecuación como respuesta a la pregunta de cuál podría ser una solución al problema (se pretende que indique una combinación de valores numéricos que cumplan la condición), lo que nos plantea la posibilidad de un obstáculo generado en la Actividad 1 de la etapa de enseñanza controlada (actividad eliminada después de la experiencia piloto), en la que directamente se usa el Método cartesiano para la resolución de problemas de primer grado con una incógnita.

L1 I: ¿Cuál sería una solución para el problema? [A3P1]
L2 V: …eeeh… ¿hacer una ecuación?

El proceso en A3P2 (en el que se pretende el uso del MAES) para encontrar las ecuaciones a partir de explorar valores fue un proceso lento y confuso para la estudiante, por lo que hubo más intervención de la investigadora de lo pretendido; esto nos llevó a considerar reforzar el método mediante la introducción de un nuevo problema de enunciado. Sin embargo, la estudiante es, en esta etapa de la experiencia, competente en la aplicación de los métodos de resolución de sustitución, igualación y eliminación por suma y resta. (Figura 5.6).

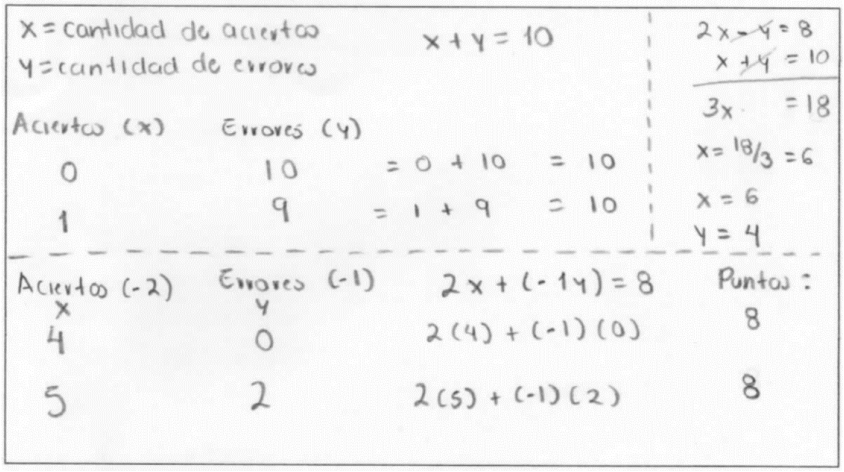


Figura 5.6 Desarrollo en A3P2 de Vanessa.

En el problema A3P3 cuyo objetivo es el uso del Método Cartesiano, la estudiante identifica las cantidades desconocidas (Figura 5.7), pero no logra establecer sin intervención las relaciones expresadas mediante condiciones para modelar las ecuaciones.

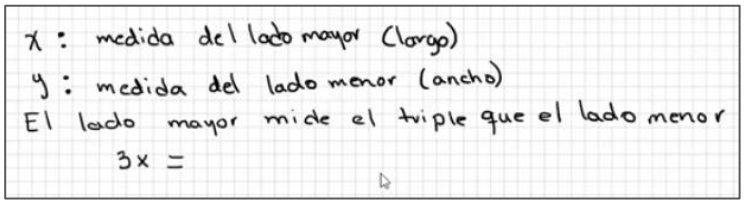


Figura 5.7 Inicio de A3P3 de Vanessa.

L3 I: Esta condición sería que el lado mayor mide el triple que el lado menor. En términos de equis y ye, ¿cómo lo establecerías?
[…]
L4 V: ¿Como tres equis?
L5 I: Tres equis ¿igual a qué?
L6 V: ¿Al perímetro?

Para que la estudiante lograra establecer las relaciones y las ecuaciones fue necesario regresar a un estrato del MAES.

L7 I: ¿qué te parece si le damos un valor? Digamos que ye vale cinco. ¿Cuánto valdría equis?
L8 V: Quince.
L9 I: Quince, muy bien. ¿Qué fue lo que hiciste?
L10 V: Lo multipliqué tres veces lo que valía ye.
L11 I: Exacto porque tres veces lo que vale ye es igual a lo que vale equis, ¿cierto?
L12 V: Ajá.
L13 I: Ahora dime cómo lo pondrías aquí [señala la igualdad].
L14 V: $3y = x$

Informe de Tendencias cognitivas identificadas en la Actividad 3

En la resolución de A3P3, identificamos una tendencia en el proceso de modelar algebraicamente problemas de enunciado, que consiste en combinar elementos de diferentes condiciones y relacionarlos en forma no adecuada en una sola ecuación (L3-L6), derivado, posiblemente del trabajo con problemas de enunciado modelados con una ecuación de primer grado con una incógnita. Consideramos este hecho como un caso particular de las Tendencias Cognitivas 2 y 5 (TC2, TC5), esto es, la dotación de un sentido intermedio al realizar la lectura en un estrato del lenguaje que no le permite resolver la situación problemática. En general observamos que los problemas de enunciado cuyo proceso de resolución consiste en modelar algebraicamente representan un mecanismo inhibitorio para los estudiantes (TC8).

5.2.4 Actividad 4. Intertextualidad y producción de sentido

Durante el desarrollo de la actividad identificamos evidencia de que, con intervención didáctica, hubo producción de sentido con respecto a la representación de los SEL en diferentes SSM que conforman el sistema matemático de signos, así como la relación entre ellos; la estudiante relacionó, por ejemplo, sistemas de ecuaciones con sus representaciones en los SSM del plano de ejes coordenados y tabular con valores numéricos. Además, la estudiante identificó la solución en la representación gráfica para sistemas con dos variables.

En el caso de A4S1 la estudiante fue competente en relacionar los sistemas de ecuaciones con las gráficas correspondientes (consideramos que se incorporó a su intertexto desde la Actividad 1), incluso identificó que las soluciones de cada SEL en el SSM del plano cartesiano podrían ser otra forma de establecer la relación, sin embargo, no ha tenido información sobre la solución de los SEL en el plano, por lo que su intertexto con relación a la solución la lleva a hacer la lectura de que las intersecciones con los ejes son la solución del SEL, derivado, posiblemente, de la obtención de raíces de funciones en forma gráfica, y no le permite identificar las coordenadas del punto que representan la solución.

L15 I: Aquí lo que hiciste fue ir revisando que cada una de estas ecuaciones estuviera representada en una de las gráficas, ¿cierto?
L16 V: Sí.
L17 I: Muy bien. ¿Tú crees que podrías encontrar otra manera de comprobar cuáles de estas gráficas corresponden con estos sistemas de ecuaciones?
L18 V: Tal vez si obtenemos cuánto vale ye y equis.
[…]
L19 I: Digamos que en esta gráfica yo te dijera ¿cuál es la solución del sistema de ecuaciones representado en esta gráfica? Nada más con ver la gráfica ¿qué me dirías? Sería éste, o éste o éste… [se señalan varios puntos de intersección con los ejes y la intersección entre las rectas].
L20 V: Viendo en qué parte de la recta cruza, ¿de las ye y de las equis?

Mediante intervención didáctica, la estudiante identificó en A4S1, que la intersección de las dos rectas es la solución del SEL.

L21 I: [señalando un punto de una de las rectas] Este punto que está aquí es solución de la recta azul, ¿es solución de la recta verde?
L22 V: No.

L24 I: No, porque no forma parte de la recta verde. [Señalando otro punto de una de las rectas] Este otro punto es solución de la recta azul, ¿es solución de la recta verde?
L25 V: No.
L26 I: Pero hay un punto de la recta azul que también es solución de la recta verde, ¿cuál sería ese punto?
L27 V: ¿En donde se cruzan?

En A4S2 la estudiante no logra identificar las tablas que representan las condiciones del problema sino hasta la intervención de la investigadora, mediante preguntas que le hicieran relacionar los valores numéricos con las condiciones del problema. En A4S3, la estudiante no es competente en el proceso de plantear un problema de enunciado cuyo modelo algebraico corresponda con el solicitado.

En A4S5 se debe escribir en forma algebraica el SEL representado en el SSM del plano de ejes coordenados y la estudiante lo hace en forma competente, sin embargo, de acuerdo con la secuencia de las actividades aún no se han analizado las transformaciones algebraicas que permitan al estudiante resolver este tipo de SEL, por lo que consideramos que el enfoque debería estar en el SSM del plano de ejes coordenados una vez que se haya abordado la solución en este SSM. Aún con las limitaciones mencionadas, durante el desarrollo la estudiante concluyó, derivado del análisis, que el sistema de ecuaciones no tiene solución.

[Una vez que se ha obtenido la solución para dos de las tres ecuaciones del sistema]
L28 I: Si el sistema tiene tres ecuaciones y la solución de dos ecuaciones no se cumple para la última ¿qué quiere decir para el sistema de ecuaciones? […] ¿Qué se te ocurre que pasa con la solución de ese sistema de ecuaciones? ¿Hay solución?
L29 V: ¿No?

La estudiante no logra trasladar el resultado algebraico al SSM del plano sin la intervención de la investigadora.

L30 I: El álgebra nos dice que no hay solución, ¿qué nos dice el plano?
[La estudiante se queda pensativa varios segundos]
L31 I: ¿Cuál fue el punto que encontramos como solución de las dos primeras ecuaciones? ¿qué era? ¿equis igual a qué y ye igual a qué?
L32 V: equis igual a uno y ye igual a cero.
L33 I: ¿dónde está ese punto?
L34 V: ¿En donde se cruza la recta roja y azul?
L35 I: […] *¿ese punto es solución de la recta verde?*

L36 V: No.
L37 I: ¿Entonces qué podemos decir de este sistema que está aquí representado gráficamente?
L38 V: Que solo esas dos rectas tienen… ¿esa solución?
L39 I: Sólo esas dos rectas tienen la misma solución, pero es un sistema de tres, entonces para el sistema de ecuaciones ¿qué quiere decir?
L40 V: [Piensa varios segundos. No responde.]
[…]
L41 I: Como tiene tres ecuaciones entonces no podemos hablar en términos de dos ecuaciones. Entonces respecto a la solución de este sistema de ecuaciones, ¿qué podemos decir?
L42 V: ¿Qué no tiene?
L43 I: Sí, que no tiene solución.

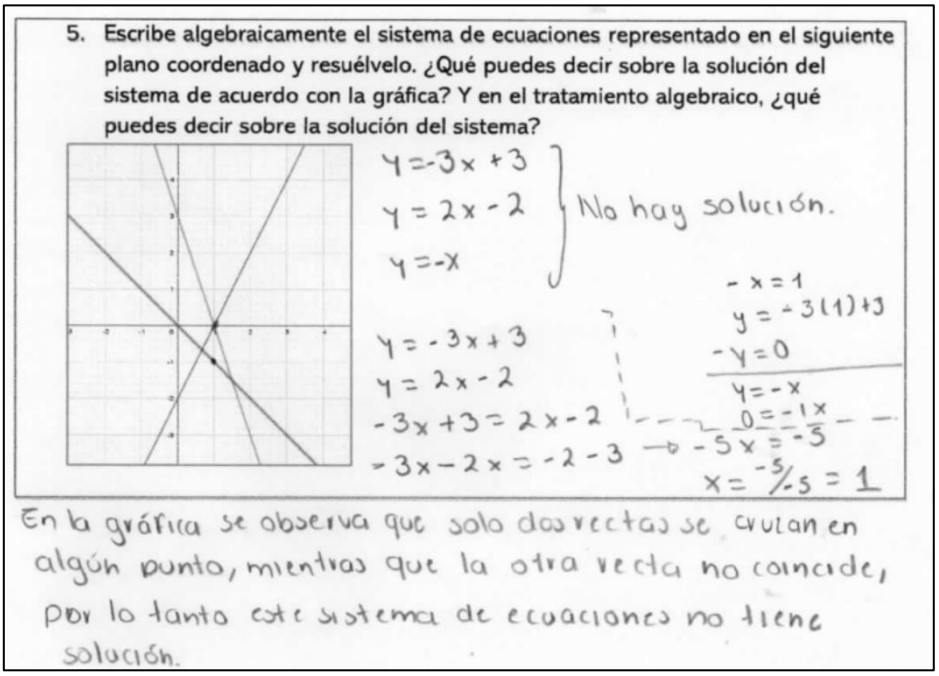


Figura 5.8 Desarrollo de A4S5 de Vanessa.

Finalmente, la estudiante identifica la condición en el SSM del plano de ejes coordenados para que el sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas tenga solución.

L44 I: ¿Por dónde tendría que pasar la recta verde para que el sistema sí tuviera solución?
L45 V: mmmh, en donde está… bueno, tendría que cruzar junto con las dos rectas azul y roja.

En A4S6 la estudiante no identifica, en primera instancia, que el sistema presentado en el SSM del plano de ejes coordenados tiene solución.

L46 I: […] *Es de dos ecuaciones ¿cierto?*
L47 V: Sí.
L48 I: ¿Tú crees que tenga solución?
L49 V: mmmh ¿no?

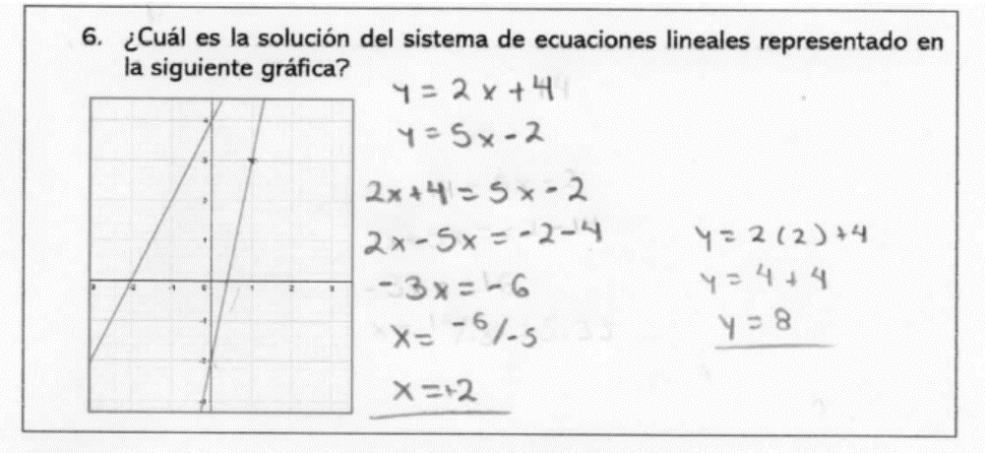


Figura 5.9 Desarrollo de A4S6 de Vanessa.

Mediante intervención, una vez que se representan algebraicamente las ecuaciones y se resuelve el SEL, la estudiante identifica la solución.

5.2.5 Actividad 5. Intertextualidad y producción de sentido

Mediante intervención didáctica en el desarrollo de las actividades, al finalizar A5, el intertexto de la estudiante con respecto a la representación de los SEL en diferentes SSM le permite identificar las características de los SEL de hasta tres ecuaciones e incógnitas, sin solución, con una, o con infinitas soluciones, lo cual se evidencia en su discurso al responder los cuestionamientos con los que se lleva a cabo la intervención para la resolución de las actividades.

En A5S1a, se evidencia que se ha logrado incorporar a la red intertextual de la estudiante, con relación al SSM del plano de ejes coordenados, los elementos para identificar en forma competente que la intersección de las rectas que representan las ecuaciones del SEL es la solución del sistema, a diferencia de lo evidenciado al inicio de A4. Además, identifica que

los valores en los que coinciden las parejas de números de las tablas que representan una sección del SEL coinciden con la intersección de las rectas.

L50 I: ¿Recuerdas cómo dijimos que reconocíamos la solución en un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas? En el plano, ¿cómo reconocemos dónde está la solución?
L51 V: ¿Cuando se intersecaban las rectas?
L52 I: Muy bien, ¿dónde se intersecan aquí las dos rectas?
L53 V: En equis cero y ye menos dos.
L54 I: ¿Y qué observamos en la parte tabular? ¿Dónde coinciden los valores de las tablas?
L55 V: En equis cero y ye menos dos.

En A5S1b, la estudiante identifica las características del sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas sin solución en los tres SSM.

L56 I: Vamos a observar primero la parte gráfica, ¿cómo son esas rectas?
L57 V: ¿Paralelas?
L58 I: Son paralelas, ¿eso quiere decir que vamos a encontrar una solución en la parte gráfica?
L59 V: No.
[…]
L60 I: Y en la parte tabular ¿qué pasa? ¿Podemos encontrar dos valores que sean coincidentes en las dos tablas?
L61 V: No.
[…]
L62 I: En la parte algebraica ¿qué pasa? Observa por favor los coeficientes. ¿Qué pasa si cambio todos los signos de la primera ecuación?
L63 V: Igual a los coeficientes de la otra ecuación.
L64 I: Pero del lado derecho ¿qué pasaría?
[…]
L65 I: Los coeficientes de equis y de ye son…
L66 V: Iguales
L67 I: Y el del lado derecho es…
L68 V: Diferente.

La estudiante identifica las características del sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (A5S1c) con infinitas soluciones.

L69 I: Ve lo que va pasando ¿sí lo puedes observar? Cuando me voy acercando y luego llego a tres, ¿qué pasa?

L70 V: Se vuelven uno.
L71 I: Las dos rectas se vuelven una.
[…]
L72 I: ¿Y cómo son las tablas?
L73 V: También iguales.
L74 I: Eso quiere decir que ¿en cuántos puntos coinciden estas rectas?
L75 V: ¿En todos?
L76 I: ¿Eso quiere decir que cuántas soluciones tenemos? … ¿Cuántos puntos tiene una recta?
[…]
L77 I: ¿Te acuerdas que habíamos platicado cuántos puntos tiene una recta?
L78 V: Muchos
L79 I: Muchos, infinita cantidad de puntos. Entonces, ¿cuántas soluciones tendría este sistema de ecuaciones?
L80 V: ¿Infinita?

Con los ejemplos siguientes de la actividad se pretende reforzar el objeto mental de SEL con respecto a la naturaleza de su solución.

L81 I: Entonces tenemos tres casos, no sé si ya los pudiste identificar, tenemos tres posibilidades cuando tenemos un sistema de ecuaciones, ese sistema de ecuaciones puede tener una solución, y si las rectas son paralelas, ¿cuántas soluciones tiene?
L82 V: Ninguna.
L83 I: Y si las rectas coinciden entre sí, ¿cuántas soluciones tiene?
L84 V: ¿Infinitas soluciones?

La estudiante identifica que el SEL A5S3a no tiene solución con base en una inspección de sus características en su forma algebraica; esto es, sin resolverlo y sin observarlo en otros SSM.

L85 I: ¿Entonces como serían las rectas?
L86 V: ¿Paralelas?
L87 I: Paralelas, muy bien, exactamente, eso quiere decir que ese sistema de ecuaciones así simplemente con ese análisis podemos decir qué cosa respecto a su solución, ¿vale la pena intentar resolverlo?
L88 V: No.
L89 I: ¿Por qué razón?
L90 V: No tiene solución.

La estudiante identifica a partir del SSM del plano de ejes coordenados, que el sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas A5S3b, de dos rectas coincidentes, sí tiene solución.

L91 I: Platícame, ¿qué pudiste observar en GeoGebra?
L92 V: Bueno, puse que dos rectas se volvían la misma y la otra se intersecta con
L93 las dos rectas que se unieron.
L94 I: Ok, este sistema, ¿tiene solución o no tiene solución?
L95 V: Sí.

En el SEL A5S3d de dos rectas paralelas y una transversal, la estudiante identifica que no tiene solución y que, además, aunque no existan rectas paralelas, si las tres rectas no coinciden en un punto el SEL no tiene solución.

L96 I: ¿Qué me puedes decir con respecto a la solución de este sistema de ecuaciones? [Figura 5.10] *¿Tiene solución?*
L97 V: No.
L98 I: No tiene solución, ¿por qué no tiene solución? Es decir, ¿qué nos dice esta parte gráfica que te hace pensar que no tiene solución?
L99 V: ¿Las rectas paralelas?
L100 I: Ok. ¿Qué pasaría si las rectas no fueran paralelas? Si por ejemplo esta azul, digamos que fuera así [Figura 5.11]. *¿Allí tenemos solución para el sistema de ecuaciones?*
L101 V: No.
L102 I: No tenemos solución, ¿por qué no tenemos solución?
L104 V: Porque ninguna de las tres [rectas]*se juntan en un mismo punto.*

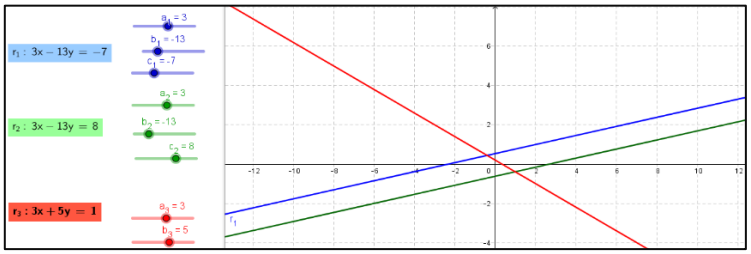


Figura 5.10 Desarrollo de A5S3d en SEL_Soluciones1

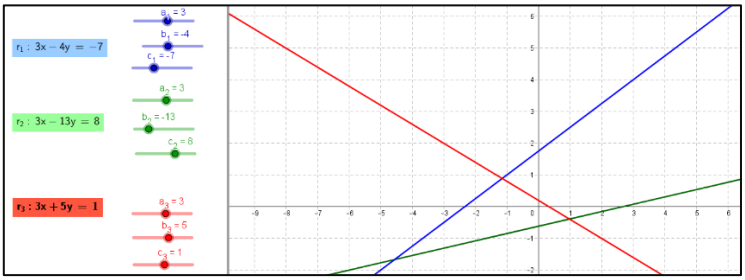


Figura 5.11 Opción a A5S3d en SEL_Soluciones1

En A5S3e, sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas (Figura 5.12), la estudiante identifica que el SEL no tiene solución.

L105 I: ¿Qué es lo que pasa? ¿Tenemos solución aquí? [Figura 5.12]
L106 V: No.
L107 I: Hay dos planos en este caso que son ¿cómo?
L108 V: Paralelos.

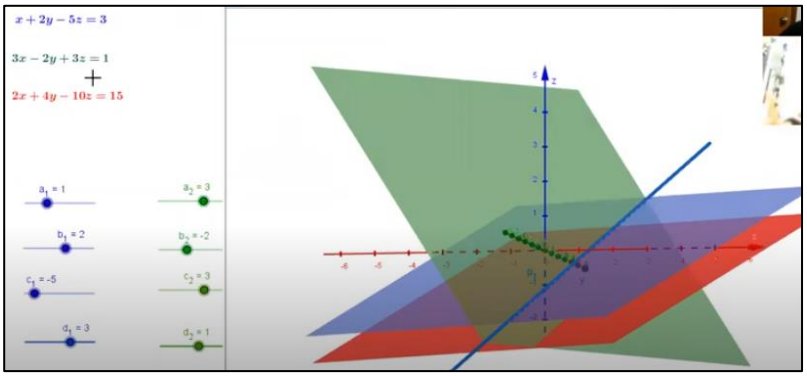


Figura 5.12 Desarrollo de A5S3e en SEL_Soluciones1.

La estudiante identifica que para un SEL de dos ecuaciones con tres incógnitas no hay posibilidad de tener solución única.

L109 I: Voy a empezar a moverlos [Mueve los planos]. *¿Qué observas allí que se forma? Si los planos no son paralelos ¿que se forma?*
L110 V: Una recta.
L111 I: Exactamente, una recta. ¿Hay manera de que se forme un punto?
L112 V: No.
L113 I: Entonces, ¿hay manera de que si yo tengo un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas yo tenga solución única?
L114 V: No.

5.2.6 Actividad 6. Intertextualidad y producción de sentido

Durante el desarrollo de la actividad hubo producción de sentido con respecto a las características de las ecuaciones y los sistemas equivalentes y se cumplieron los objetivos respecto al reconocimiento de las operaciones que permiten obtener sistemas de ecuaciones lineales equivalentes.

Al inicio de la Actividad 6 (A6), cuyo objetivo es identificar las operaciones que permiten obtener sistemas de ecuaciones equivalentes, la estudiante no fue competente para definir o

reconocer ecuaciones equivalentes; su red de relaciones intertextuales con respecto al objeto matemático ecuación, no le permitió hacer una lectura apropiada en lo relacionado con la equivalencia de ecuaciones, lo que nos hace presumir que, en el proceso de aprendizaje de la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita, no tuvo un acercamiento al concepto.

[Tras plantear la ecuación $2x+3=5$ y comprobar la solución]
L115 I: En general ¿Qué es una ecuación equivalente?
[La estudiante piensa unos segundos.]
L116 I: ¿Te suena más o menos? ¿Recuerdas…?
L117 V: No mucho.
L118 I: Qué tal si yo te digo, por ejemplo, la ecuación $2x=2$ *y te pregunto si esta ecuación es equivalente a esta* [$2x+3=5$]. *¿Tú qué me dirías?*
L119 V: No.

Al terminar la actividad la estudiante puede identificar las operaciones que pueden realizarse sobre un SEL para encontrar un sistema equivalente.

L120 I: ¿Cuáles son las operaciones que podemos realizar sobre un sistema para encontrar un sistema de ecuaciones equivalente?
[…]
L121 V: ¿Multiplicación?
L122 I: ¿Multiplicar qué cosa?
L123 V: ¿Un número cualquiera una de las ecuaciones?
L124 I: Ajá. Multiplicar por un número cualquiera toda una ecuación. ¿Qué más?
L125 V: Sumar las dos ecuaciones.
L126 I: ¿Y qué hacer con la suma? Porque sumar solamente no nos da un sistema equivalente. Ya las sumamos y ¿qué hacemos con esa suma?
L127 V: Sustituirla por alguna de las ecuaciones.
L128 I: Y ¿qué otra cosa podemos hacer y que no nos altera el resultado?
L129 V: La última ¿Te acuerdas? La última cosa que hicimos.
L130 I: ¿Cambiar el orden?

5.2.7 Actividad 7. Intertextualidad y producción de sentido

Uno de los objetivos de la Actividad 7 es la integración del método de Gauss al intertexto de los estudiantes, de lo cual observamos evidencia, en el caso de Vanessa, a partir de la segunda sección de la actividad, en la que, además, mediante intervención, se observa que la

estudiante identifica los resultados de las transformaciones algebraicas característicos de SEL sin solución y con infinitas soluciones.

En la primera sección de la actividad se hace una intervención para explicar del método de Gauss para la resolución de SEL.

En A7S2a la estudiante identifica que un SEL no tiene solución al encontrar en su resolución una expresión del tipo $0=c$.

L131 I: Entonces la segunda ecuación sería $0=-14$*, ¿y eso qué significa para nuestro sistema de ecuaciones? ¿Qué pensaste respecto a una ecuación* $0=-14$*?*
L132 V: ¿Que no es posible?
L133 I: Que no es posible y por lo tanto…
L134 V: No tiene… ¿solución?

En la resolución de las ecuaciones la estudiante aplica en forma competente el método de reducción, por lo que se observa que el proceso empieza a formar parte de su objeto mental de sistema de ecuaciones.

[Para determinar la nueva ecuación 2 del SEL (Figura 5.13)]
L135 I: ¿Qué hiciste? Platícame.
L136 V: Multipliqué por dos la ecuación uno.
L137 I: Por dos la ecuación uno ¿y qué más?
L138 V: Y después puse menos y multipliqué por tres la ecuación dos.

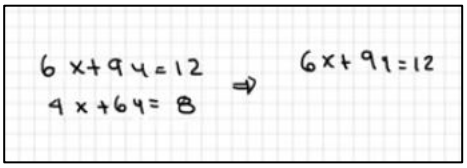


Figura 5.13 Desarrollo de A7 de Vanessa.

Al obtener la expresión $0=0$ y manipular algebraicamente las ecuaciones y obtener dos ecuaciones iguales.

L139 I: ¿Cómo son estas ecuaciones?
L140 V: Iguales.
L141 I: Y gráficamente ¿cómo se verían?
L142 V: Como una sola.
L144 I: Como una sola recta ok. Y una sola recta ¿cuántas soluciones tiene?
L145 V: Infinitas.

Debido a que después del trabajo desarrollado con Vanessa se tomó la decisión de que una parte de la Actividad 7 se realizara con apoyo del SGD GeoGebra, algunos de los SEL de la actividad se modificaron para obtener mejores resultados de la experiencia con la herramienta digital.

5.2.8 Actividad 8. Intertextualidad y producción de sentido

El objetivo de A8 es englobar y recuperar, mediante la resolución de problemas de enunciado, todos los elementos sobre los SEL y su solución analizados en actividades previas. En el desarrollo de la actividad se evidencia la producción de sentido respecto a la resolución de los SEL mediante el método de Gauss, incluso aquellos sin solución o con infinitas soluciones y haciendo uso de la incorporación de la representación gráfica de los SEL. En general, en el desarrollo de la actividad con Vanessa fue necesario el uso de valores concretos para la modelación algebraica de los problemas, particularmente mediante estratos del MAES que permitían evaluar o generar propuestas de ecuaciones. Sin embargo, la estudiante mostró competencia en el proceso de resolución de los SEL y la transferencia de los resultados a las condiciones del problema original.

En A8P1 la estudiante identifica las cantidades desconocidas en el problema y logra mediante un estrato del MAES proponer dos ecuaciones para representar las condiciones.

L146 I: ¿Qué podemos encontrar aquí como condiciones?
L147 V: Que fueron 100 preguntas en total.
[…]
L148 I: ¿Cómo puedo expresar esa otra condición como una ecuación algebraica? o de manera algebraica, ¿cómo represento esto?
L149 V: Como equis menos ye sobre dos…
L150 I: equis menos ye sobre dos, igual a…
L151 V: 71.5

Antes de la intervención, la estudiante no logra identificar las operaciones sobre renglón necesarias para convertir el SEL en un sistema equivalente escalonado.

L152 I: Entonces hay que convertir este sistema de ecuaciones a una forma escalonada o eliminar la equis de esta segunda ecuación, entonces, ¿cómo haríamos eso? Es decir, la ecuación dos, ahora sería ¿cómo?
[La estudiante no responde.]

L153 I: Si te fijas aquí el coeficiente es uno, lo único es que tienen el mismo signo, entonces para que al sumarlos nos de cero, los signos tienen que ser diferentes ¿qué se te ocurre que podamos hacer aquí para que los signos sean diferentes al trabajar con la ecuación uno y la ecuación dos?
L154 V: ¿Cambiarle el signo?
L155 I: Ajá, ¿a cuál se te ocurre que podamos cambiarle el signo? Puede ser a cualquiera, pero la que tú me digas.
L156 V: mmmh ¿a equis?

En A8P2 la estudiante identifica las transformaciones necesarias para escalonar el SEL, sin embargo, una vez realizado este proceso, tiene dificultades para resolver la segunda ecuación del SEL equivalente, con solo una incógnita (Figura 5.14), situación que supera mediante intervención.

L157 I: Entonces ¿qué se te ocurre que podamos hacer con este sistema para resolverlo de manera escalonada?
L158 V: ¿A la ecuación uno multiplicarla por menos tres mil doscientos?
[…]
L159 I: Entonces sería equis más quince igual a veinticinco. Entonces, ¿equis vale cuánto?
L160 V: ¿1.6?

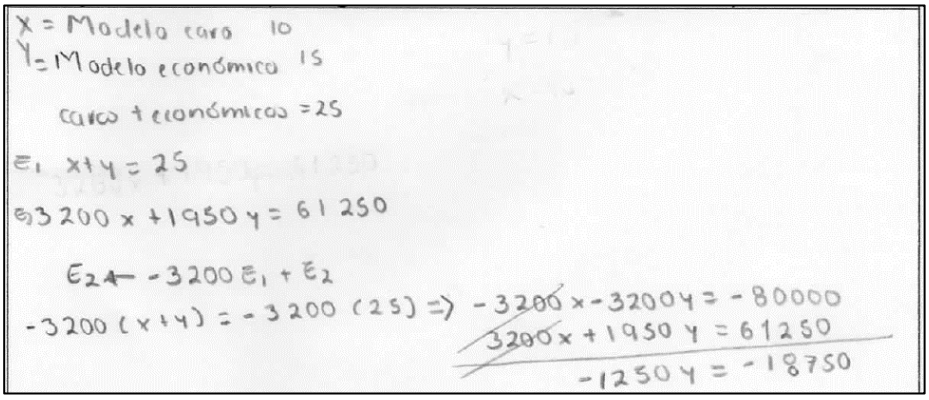


Figura 5.14 Desarrollo de A8P2 de Vanessa.

En A8P3, sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas, una vez identificadas las cantidades desconocidas la estudiante asume que una de las condiciones implica sumar ambas cantidades desconocidas, posiblemente por una generalización de los problemas previos o por la forma en la que se expresan las cantidades desconocidas (Figura 5.15).

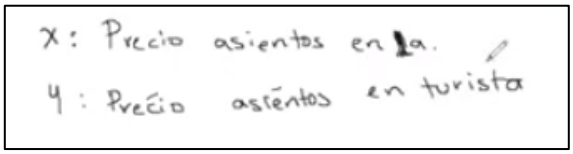


Figura 5.15 Identificación de cantidades desconocidas de A8P3 de Vanessa.

L161 I: Nosotros sabemos que el precio de los asientos de primera [clase] *es equis y el precio de los asientos en turista es ye, y sabemos que si se venden todos nos da 146 mil pesos, entonces, esa sería nuestra primera condición. Entonces, ¿cómo la podemos expresar?*
L162 V: ¿equis más ye?

Mediante la intervención de la investigadora, que induce la aplicación de un estrato del MAES, la estudiante produce sentido a la lectura y logra aproximar las ecuaciones.

L163 I: Digamos que el precio fuera de mil y vendí dos, ¿qué cantidad de dinero tendría si hubiera vendido dos?
L164 V: Dos mil.
L165 I: Es decir la cantidad de asientos vendidos en primera clase la tengo que multiplicar por el precio por asientos entonces ¿cómo puedo expresar que vendí 32 asientos en primera clase?
L166 V: ¿32 equis?
L167 I: ok… más…
L168 V: 50 equis, ¡No! Ye. Igual a 146 mil.

Una vez que se ha encontrado la solución para el subsistema formado por dos de las ecuaciones se pide a la estudiante reflexionar sobre el sistema de ecuaciones en el SSM más concreto del plano de ejes coordenados.

L169 I: ¿De qué manera nosotros podemos asegurar que este sistema de ecuaciones que está conformado por cuántas rectas?
L170 V: Tres.
L171 I: … ¿conformado por tres rectas tiene solución? ¿Te acuerdas? ¿Cómo decíamos que un sistema de tres rectas tiene solución?
L172 V: ¿Cuando las tres se unían en un mismo punto?
L173 I: Ahora yo sé que estas dos [ecuaciones segunda y tercera] *se unen en el punto* $x = 1666.67$ *y* $y = 1333.33$, *¿qué tendría que pasar con la primera?*
[Estudiante no responde.]
L174 I: Es decir, esta es solución de estas dos, ¿cómo me aseguro de que sea solución también de la primera? Yo puedo tomar otras dos [ecuaciones] y volver a

hacer todo el procedimiento, pero si únicamente quiero comprobar que esta solución sea solución de esta primera ecuación, ¿qué me convendría hacer?
L175 V: mmmh, ¿sustituir los datos?
L176 I: Muy bien. Sustituir los valores.
[Una vez que se realizan los cálculos de la sustitución.]
L177 I: 119999.94, ¿eso es igual a 146 mil?
L178 V: No.
L179 I: ¿Qué quiere decir eso?
L180 V: ¿Que no se unirán? ¿En un punto?
L181 I: Sí, exacto, que esta recta no va a pasar por ese punto, entonces, ¿este sistema tiene solución?
L182 V: No.

Informe de Tendencias cognitivas identificadas en la Actividad 8

En A8P1 observamos la tendencia cognitiva 4: imposibilidad de desencadenar operaciones que podían hacerse momento antes. En este desarrollo la estudiante no logra definir la operación sobre renglón necesaria para escalonar el SEL aun cuando previamente había realizado esta acción en diversas ocasiones previas (L152-L156).

En A8P2 podemos ya observar la TC11, la necesidad de dotar de sentido a redes de acciones cada vez más abstractas hasta convertirlas en operaciones (L157-158). Y nuevamente observamos la TC4, la imposibilidad de desencadenar operaciones que podían hacerse momentos antes, al aplicar de forma incorrecta las reglas algebraicas para resolver una ecuación del tipo $x+a=b$ (L159-160 y Figura 5.14).

En A8P3, sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas, encontramos la Tendencia Cognitiva 6, esto es, la articulación de generalizaciones erróneas, atribuible a las características de los dos problemas previos (L161-162).

5.3 El caso de Gabriel

5.3.1 Actividad 1. Intertextualidad y producción de sentido

En el desarrollo de la Actividad 1 con Gabriel encontramos evidencia de producción de sentido con respecto a la caracterización de las ecuaciones lineales. En particular, con respecto a las ecuaciones de primer grado con tres incógnitas y a la posibilidad de que el lado

derecho de las ecuaciones no sea necesariamente cero. Encontramos, además, producción de sentido con respecto a la infinitud de soluciones de una ecuación lineal con dos variables y a la posibilidad de representar una incógnita en términos de otra cantidad desconocida.

El estudiante considera que A1S1a es una ecuación porque "está igualada a cero" y que es una ecuación sí se puede resolver. Identifica que la ecuación es de primer grado con una incógnita y es competente en su resolución.

L1 I: El primer inciso es 3m+1=0 y la pregunta es si consideras o no si es una ecuación.
L2 G: Sí es una ecuación, en definitiva. Una de las justificaciones que se pueden dar es porque está igualada a cero.

Al analizar A1S1a reconsidera que una ecuación deba estar igualada a cero y acepta que no es necesario que después del igual haya un cero.

L3 I: Si estuviera igualada a tres, si fuera por ejemplo 3m+1=3 ¿qué creerías, que es o no es una ecuación?
L4 G: mmmh a mi consideración también podría ser; se puede resolver, pero para resolverla se iguala a cero.

El estudiante considera que A1S1b tiene solución.

L5 G: ahí hay valores a ambos lados del signo de igual… que más… este, bueno, la resolución valdría… x vale un número y es lo poco que puedo recordar.

Identifica que al desarrollar el lado derecho de A1S1b ambos lados son iguales y se obtiene la expresión $0=0$. Se aclara mediante ejemplos que esta expresión es válida para cualquier valor de la variable.

En A1S1c refuerza la idea de que una característica de las ecuaciones es que tienen dos expresiones separadas por un signo de igual.

L6 I: …¿qué le faltaría aquí para ser una ecuación?
L7 G: que esté igualada a algo.

El estudiante considera que la expresión $t=3$ (A1S1d) no es una ecuación ya que necesita una operación. Esto refleja que en su intertexto respecto a las ecuaciones existe una cierta estructura en la que necesita "resolver".

L8 G: para que sea considerada una ecuación yo considero que debe tener por lo menos, este… una… un coeficiente que lo… necesita una… algo que marque una operación.

El estudiante identifica que:

- A1S1e $(3x-2<4)$ no es una ecuación.
- A1S1f $(3t-2=t+1)$ es una ecuación de primer grado con una incógnita y la resuelve en forma competente.
- A1S1fg $(z^2-4=0)$ es una ecuación de segundo grado.
- A1S1h $(x-3y=0)$ es una ecuación de primer grado con dos incógnitas.

En el último caso, el estudiante tuvo dificultades para despejar una de las variables como parte del proceso de resolución que se le solicitaba. Filloy, Rojano y Solares (2010) explican este fenómeno como una dificultad con un segundo nivel de representación de la incógnita. Esto es, cuando la representación de una cantidad desconocida involucra a una segunda incógnita.

L9 I: Yo supongo que te queda equis igual a algo, ¿cierto?, ¿equis igual a qué? ¿O despejaste ye? ¿a quién despejaste?
L10 G: Estoy despejando equis.
L11 I: Perfecto, entonces ¿equis igual a qué?
L12 G: Eso es lo que estoy viendo, pero no estoy…
L13 I: no un valor, es decir si tú despejas de allí a equis ¿qué te queda? ¿equis igual a qué?
L14 G: igual a… me quedaría igual a ye, bueno, ahorita me salió equis vale un tercio de ye, algo así…

Al despejar la variable x y darle valores a y, el estudiante identifica que A1S1h tiene infinitas soluciones.

L15 I: …para cada valor que le dé a ye encontramos un valor diferente de equis, ¿cierto?
L16 G: Sí.
L17 I: Entonces, ¿cuántas soluciones tiene esta ecuación?
L18 G: Son inf… podrían ser inf… son infinitas.

El estudiante considera que A1S1i $(2-3=-1)$ no es una ecuación sino una "operación" y que A1S1j $(2x-3y-z=-1)$ es un producto notable. En este último caso se evidencia una lectura no adecuada, derivada de la falta de familiaridad del estudiante con este tipo de expresiones.

L19 I: ...¿es [$2x-3y-z=-1$] *una ecuación o no es una ecuación?*
L20 G: es una... es un producto, esto es un producto... podría decir que casi es un producto notable... [observa] *es un producto notable.*

Tras afirmar que A1S1j es un producto notable se le pide al estudiante compararla con A1S1h $(x-3y=0)$.

L21 G: Aquí ya son tres variables.
L22 I: ¿Y eso cambia algo?
L23 G: [analiza murmurando] *bueno, las variables son dependientes, está igualada a menos uno... ah no, sí es una ecuación. Ahorita cayendo en cuenta sí es una ecuación.*

En A1S4a para una ecuación de primer grado con una variable proporciona el ejemplo $2x+2=1$, que tiene una estructura tradicional. El lado derecho de la ecuación no es cero, por lo que se modificó su idea inicial.

En A1S4b, explica:

L24 G: es una representación algebraica... tiene características que son... tiene este, bueno el símbolo de la operación.
L25 I:...a qué te refieres con el símbolo de la operación.
L26 G: o sea que marca la operación que se va a realizar, ya sea suma, resta, multiplicación o división.
L27 I: entonces, ¿si no tiene una operación no es una ecuación?
L28 G: Podría decirse que no o puede ser que ya me estén marcando cuánto vale algo.
[…]
L29 G: tiene un término algebraico, dependiendo del tipo de ecuación es el grado que tiene, tiene un término lineal...
L30 I:¿necesariamente tiene un término lineal?
L31 G: mmmh no necesariamente.
...
L32 I: ... un operador, tiene un grado... ¿qué más?...
L33 G: un operador... un grado... qué más... aaah...

L34 I: por ejemplo, con esos elementos que tú me estás diciendo, yo te podría decir… x^2+4 tiene un operador y tiene un grado y así como está x^2+4 ¿es una ecuación? ¿qué le haría falta?
L35 G: bueno, tendría que estar igualada…

Respecto a A1S4c, el alumno identifica la característica que distingue a las ecuaciones de primer grado y expresa la idea de que estas ecuaciones únicamente pueden tener una solución; esto a pesar de que durante el desarrollo de la actividad se trabajó con ecuaciones sin solución y con infinitas soluciones, por lo que consideramos que hasta tener más familiaridad con las diversas posibilidades se integrarían éstas a su intertexto.

L36 I: …específicamente las ecuaciones de primer grado ¿cuál sería su característica?
L37 G: … el exponente máximo es uno, por eso se les nombra de primer grado.
L38 I: ¿te acuerdas cuántas soluciones tienen las ecuaciones de primer grado?, ¿cuántas posibilidades hay?
L39 G: …las ecuaciones de primer grado tienen una solución.
L40 I: ¿crees que pueden tener más soluciones o menos soluciones que una?
L41 G: … no, no pueden tener más soluciones porque el exponente no lo permite.
L42 I: entonces ¿por ahora tu consideras que no pueden tener más soluciones ni menos soluciones que una?
L43 G: Ajá [asiente].

Informe de Tendencias cognitivas identificadas en la Actividad 1

En el proceso de resolución de A1S1h ($x-3y=0$) se observó la Tendencia Cognitiva 4 (L9-L14), es decir, la imposibilidad de desencadenar operaciones que podían hacerse momentos antes, ya que el estudiante mostró competencia en la aplicación de transformaciones necesarias para resolver una ecuación despejando una variable. Consideramos que esta circunstancia se derivó de la falta de familiaridad con procesos de transformación algebraica en ecuaciones con varias variables, al no formar parte del objeto mental del estudiante, el proceso representó un mecanismo inhibitorio (Tendencia Cognitiva 8).

5.3.2 Actividad 2. Intertextualidad y producción de sentido

Con intervención de la investigadora el estudiante fue capaz de realizar las transformaciones algebraicas para resolver las ecuaciones de primer grado con una incógnita de la sección

A2S1, además, observamos producción de sentido con respecto a las posibilidades de que existan ecuaciones de primer grado sin solución y con infinitas soluciones y no únicamente con una solución.

En A2S1b, se obtiene la expresión $1=-6$ y el estudiante interpreta que la expresión original no es una ecuación. Se hace una intervención respecto a la imposibilidad de encontrar un valor de la incógnita que haga que se cumpla la igualdad.

L44 I: ¿tú que crees que significa eso?
L45 G: que no es una ecuación.

En A2S1d, al trasformar la expresión a la forma $6z+13=6z+13$, el estudiante asume que la ecuación no tiene solución.

L46 I: ¿Qué observas ahora?
L47 G: ¡No tiene solución! ¡No tiene solución!
L48 I: ¿Crees que no tiene solución?
L49 G: ¡Esta ecuación no tiene solución!

Al seguir transformando y llegar a la expresión $0=0$ el estudiante recuerda de A1S1b, que este tipo de expresiones tienen infinitas soluciones.

L50 I: ¿qué será?
L51 G: cero igual a cero… ¡ay!, ya no me acuerdo.
…
L52 G: [Se queda pensativo] No, tiene una…esas son una infinita cantidad de soluciones o algo así.

Al identificar en A2S1d que la ecuación tiene infinita cantidad de soluciones el estudiante concluye que las ecuaciones de primer grado con una incógnita pueden tener una, ninguna o infinita cantidad de soluciones. Consideramos que hay producción de sentido respecto a su idea original de que las ecuaciones de primer grado únicamente pueden tener una solución.

Encontramos nuevamente dificultades con respecto a la resolución de A2S2 ya que el estudiante no puede recordar la cantidad de soluciones de una ecuación de primer grado con dos incógnitas. Se hace una intervención para generar sentido a partir del trabajo con valores concretos.

[Al dar valores a una de las variables y obtener los correspondientes valores de la otra variable.]
L53 I: ¿Cuántas parejas que cumplan con esta igualdad podemos encontrar?
L54 G: podría tener… podría decirse que infinita cantidad de parejas.

Informe de Tendencias cognitivas identificadas en la Actividad 3

En A2S1b se llegó a la expresión $1=-6$ y tras un análisis se concluyó que la ecuación original: $2-\left[3-2\left(t+1\right)\right]=4t+2\left[t-\left(3+2t\right)\right]$ no tenía solución. Se evidenció una generalización errónea en A2S1d ya que al llegar a la expresión $6z+13=6z+13$ (L46-L49) el estudiante consideró que la ecuación no tenía solución.

5.3.3 Actividad 3. Intertextualidad y producción de sentido

Gabriel identificó las cantidades desconocidas y en los casos requeridos las relacionó con literales en cada uno de los problemas de enunciado propuestos en esta actividad. Observamos también producción de sentido respecto a que para tener la posibilidad de encontrar solución única de un problema de dos cantidades desconocidas es necesario tener al menos dos condiciones. Que esas condiciones son relaciones entre las cantidades conocidas y desconocidas que pueden expresarse algebraicamente mediante ecuaciones. El estudiante identificó, además, que la solución debe cumplir con todas las condiciones del problema (particularmente en A3P1, con el uso del MIAS) y la conveniencia de usar ecuaciones para resolver SEL, ya que utilizar inferencias no es siempre la manera más eficiente de encontrar la solución. Una de las dificultades detectadas fue la de modelar algebraicamente las condiciones del problema. Sin embargo, se evidenció producción de sentido al utilizar, mediante intervención didáctica, valores concretos para encontrar las relaciones entre las cantidades (estrato del MAES). En todos los casos el estudiante fue capaz de expresar la solución encontrada en términos del problema de enunciado.

El A3P1 se utilizó el método MIAS y eso permitió que el estudiante encontrara las soluciones del problema mediante un análisis sucesivo. En A1S2 se trabajó un problema con las mismas características de la primera parte de A3P1 y el estudiante replicó la estructura, lo que hizo su trabajo más eficiente. Al iniciar A3P1, el estudiante encontró sin problema todas las soluciones posibles, esto es, las seis combinaciones de viajes posibles de los camiones de dos

y cuatro toneladas para transportar 20 toneladas. En la segunda parte utilizó tanto las parejas encontradas previamente como soluciones como los nuevos datos, para encontrar la solución única del problema.

En A3P1 el estudiante es capaz de expresar la solución encontrada en términos del problema. Reconoce que la solución hace que se cumplan las dos condiciones del problema y que con las dos condiciones es posible hallar una solución única.

En A3P2, el estudiante fue capaz de plantear las condiciones del problema en ecuaciones utilizando, mediante intervención, el método MAES (Figura 5.16).

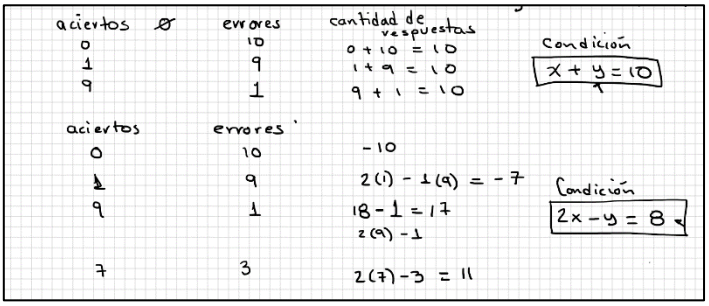


Figura 5.16 Captura de pizarra digital usada en A3P2 con Gabriel.

En A3P3 el estudiante reconoce que el análisis exhaustivo de las posibles soluciones es un método poco eficiente debido a las características de las condiciones.

L55 I: ¿Crees que si a este le damos valores podamos encontrar fácilmente la solución?
L56 G: mmmh…
L57 I: Fíjate cómo son 73.6 unidades…
L58 G: No, yo diría que no tan fácil por una razón: el decimal.

Al encontrar la solución de A3P3 (valores de las dos incógnitas) el estudiante considera que hay dos soluciones en lugar de una. Mediante intervención se concluye que ambos valores conforman una solución.

L59 I: … ¿cuántas soluciones hay aquí?
L60 G: hay dos soluciones.

Nuevamente, durante el desarrollo de esta actividad sentimos la necesidad de reforzar el método MAES con un nuevo problema que propusimos en el desarrollo de la experiencia con Ana (tercer participante del estudio).

5.3.4 Actividad 4. Intertextualidad y producción de sentido

El objetivo de esta actividad es que el estudiante identifique los SEL en su forma algebraica, en el SSM del plano de ejes coordenados y en tablas de valores numéricos que representan las ecuaciones o condiciones de un problema, y que transite entre ellos mediante el reconocimiento de sus elementos con el fin de reforzar el objeto mental de los SEL. Aunque en algunos casos el sentido producido por el estudiante no le permite responder a priori en forma competente, debido a que realiza una lectura estratificada, se observa que existe producción de sentido una vez realizada la intervención y analizada la forma en la que se relacionan los SEL en los diferentes SSM. En el caso de Gabriel, como en el caso de Vanessa, su intertexto personal no les permite realizar una lectura adecuada cuando se trata de diferentes SSM, sino que se evidencia que el trabajo relacionado con ecuaciones está enfocado en las transformaciones algebraicas.

El estudiante utilizó la relación entre las rectas representadas en los planos y las ecuaciones de los SEL para responder a A4S1, sin embargo, no logró relacionar correctamente los SEL con su representación en el SSM del plano de ejes coordenados (Figura 5.17).

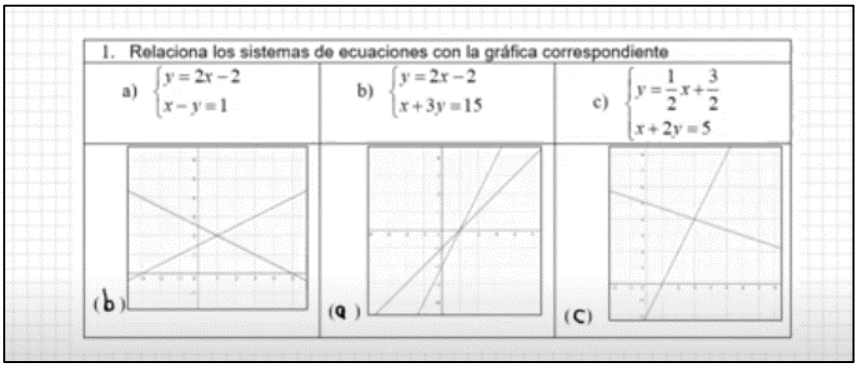


Figura 5.17 Respuesta preliminar de Gabriel a A4S1.

En A4S2 el estudiante no logró relacionar competentemente las condiciones del enunciado y las tablas, ya que para el cálculo del perímetro sumó los valores de x y y (Figura 5.18).

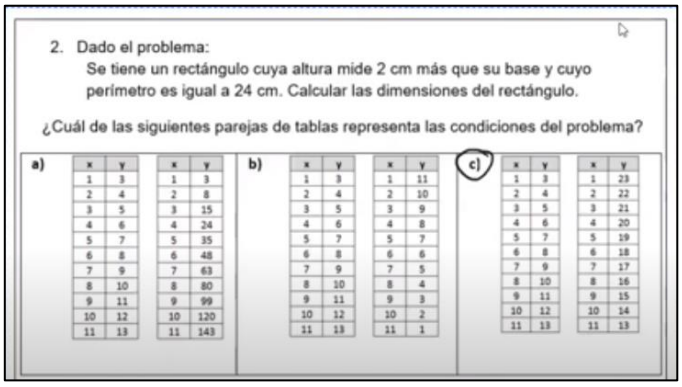


Figura 5.18 Respuesta preliminar de Gabriel a A4S2.

El estudiante logra visualizar su error al relacionar las tablas con las condiciones del enunciado al hacer un análisis de las condiciones.

L61 I: ¿Cómo sería el perímetro?
L62 G: Es dos veces equis más dos veces ye.
L63 I: Ajá, serían $2x+2y=24$*. Entonces en la primera tabla (segunda tabla de la primera opción), si yo multiplico dos por uno más dos por tres tengo que preguntarme si eso es igual a 24… para la segunda tabla del inciso b tendríamos estos dos valores…*
L64 G: ya vi que… ¡creo que me acabo de equivocar!
L65 I: ¿Sí? A ver, ¿qué paso? Platícame.
…
L66 G: Lo único que hice, literalmente fue sumar esto, x *más* y *pero no lo multipliqué por dos.*
L67 I: Sumaste x *más* y *pero no consideraste la fórmula del perímetro.*
L68 G: Entonces es b, es b ¡aaaah!

El estudiante no planteó en forma competente un problema que representara el sistema de ecuaciones propuesto en A4S3 (Figura 5.19).

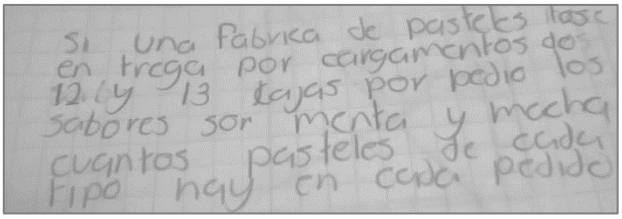


Figura 5.19 Respuesta preliminar de Gabriel a A4S2.

Mediante un análisis del problema planteado por el estudiante en A4S3 se logró agregar la tercera variable que el estudiante no consideró. Sin embargo, encontramos que las

características del sistema de ecuaciones no permitían a los estudiantes una lectura adecuada por lo que se perdía el enfoque en el objetivo, por lo cual se hizo una modificación que es posible observar en el análisis del caso de Ana (tercer participante).

En A4S4 el estudiante relacionó de forma competente las tablas con el SEL. Mientras que en A4S5 el estudiante identificó que para que exista solución del sistema, las tres rectas deberían intersecarse en un punto.

L69 I: Así de entrada como tú lo ves, ¿tiene solución este sistema de ecuaciones?
L70 G: (piensa varios segundos) mmmh yo diría… que no.
L71 I: Que no tiene solución… ¿qué tendría que pasar para que tuviera solución?
L72 G: En mi opinión, por lo menos que las tres rectas al menos se encontraran en un punto por lo menos.

El estudiante no responde de forma categórica si el SEL A4S6 en el SSM del plano de ejes coordenados tiene o no solución.

L73 I: Este sistema de ecuaciones formado por esta recta azul y esta recta roja ¿tiene solución?
L74 G: El sistema no, no tiene… eeeeh, a ver… (unos segundos) sí, podría… sí tendría solución, pero ahorita con el tamaño de la escala no se… no se alcanza a ver… así como si nada más me baso en la imagen de entrada diría que no tiene, pero si la recta se sigue prolongando si va a llegar un momento en que se van a cruzar, aunque ahorita no se vea.

En A4S6 el estudiante duda si el sistema tiene o no solución, por lo que se analiza que la única forma en que dos rectas no se crucen es que sean paralelas.

En A4S5 se pone de manifiesto la producción de sentido respecto a la posibilidad de tener SEL sin solución, aun cuando en A4S6 se evidencia falta de competencia para identificar la diferencia con respecto a otro con solución única en un SSM diferente al algebraico.

5.3.5 Actividad 5. Intertextualidad y producción de sentido

Durante el desarrollo de A5 encontramos evidencia de producción de sentido de Gabriel con respecto a la posibilidad de encontrar sistemas de hasta tres ecuaciones y tres incógnitas con una solución, sin solución y con infinitas soluciones y la forma de identificarlos mediante la inspección de sus formas algebraica, gráfica y tabular.

En A5S1 se explica al estudiante la relación entre los valores de las tablas, las rectas y las ecuaciones del SEL y cómo se observa la solución en cada uno de los SSM mediante el SGD GeoGebra.

En A5S2a el estudiante observa, en el SSM del álgebra, que los coeficientes son iguales, pero tienen signos diferentes; en el SSM del plano de ejes coordenados observa que las rectas se intersecan en el punto $(0,-2)$ y en el SSM de las tablas numéricas los valores $x=0$ y $y=-2$ se repite en ambas tablas. Sin embargo, todavía no identifica que esos valores son la solución o que validan ambas igualdades.

L75 G: Observo que el mismo valor en el que se cruzan se repite acá en las tablas.
L76 I: ¿Y qué significa eso? ¿qué significa ese valor $(0,-2)$ *?*
L77 G: Es el valor en el que se intersecan las dos líneas y que por lo tanto se tendría que comprobar si este valor cumple con la igualdad.

El estudiante identifica en el SSM del plano de ejes coordenados que el SEL A5S2b no tiene solución al observar las rectas paralelas.

L78 G: No tiene solución.
L79 I: No tiene solución ¿y por qué no tiene solución?
L80 G: Por una razón: las rectas son paralelas.

En A5S2b el estudiante identifica elementos que permiten observar cuándo los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas no tienen solución. Mientras que en A5S2c identifica, al observar el SEL en el SSM del plano cartesiano, que las rectas se superponen y que en las tablas los valores coinciden en su totalidad.

L81 I: ¿Qué paso?
L82 G: Están en la misma… una está encima de la otra.
L83 I: ¿Y qué pasa con la parte tabular?
L84 G: ¡Todos los valores coinciden!

Identifica en A5S2c que el SEL tiene infinitas soluciones.

L85 I: … ¿Tiene solución?
L86 G: Tiene solución, pero son infinitas.

En A5S2d el estudiante identifica que la rectas son paralelas y que por lo tanto ningún par de valores en las tablas coincide.

L87 I: ¿Qué pasó con las rectas?
L88 G: …son paralelas.
L89 I: … las tablas ¿qué va a pasar con ellas?
L90 G: Ningún valor va a coincidir.

En A5S3a mediante una inspección al SEL el estudiante identifica que en el SSM del plano de ejes coordenados serían dos rectas paralelas y que las tablas correspondientes no tendrían coincidencias.

L91 I: ¿Cómo quedaría si dividiera la primera ecuación entre dos?
L92 G: eeeh $3x+2y=11$
L93 I: ¿y entonces cómo sería la representación gráfica?
L94 G: serían dos rectas paralelas.
L95 I: ¿y habría coincidencias en la parte tabular?
L96 G: No, no habría coincidencias.

En A5S3b por un error en movimiento de un deslizador se muestra al estudiante un SEL con dos rectas e identifica que el SEL no tiene solución al revisar el SSM del plano de ejes coordenados.

L97 I: ¿Qué puedes observar allí? ¿Hay solución?
L98 G: Para las tres en conjunto, no.
L99 I: Pero el sistema es de tres, entonces ¿hay solución para el sistema?
L100 G: No.

Una vez corregido A5S3b se observa que dos de las rectas se superponen y el estudiante puede identificar que el SEL sí tiene solución.

L101 I: Fíjate qué pasó. [Una de las rectas se superpone a otra].
L102 G: ¡Ah entonces sí tienen! Tienen solución.

Mediante un análisis preliminar de A5S3c el estudiante identifica que no hay rectas paralelas o superpuestas.

L103 I: [Se muestra SEL] *¿Crees que aquí haya rectas paralelas o superpuestas?*
L104 G: (analiza y hace cálculos) …a tercera es… creo que sí, no estoy muy seguro, pero creo que la tercera… sí podría llegar a ser paralela.
L105 I: ¿A cuál?
L106 G: Creo que, a la segunda, estoy entre la tercera y la segunda… si lo divido entre dos… ah, no… entonces creo que no.

En A5S3d el estudiante identifica que dos de las rectas que representan las ecuaciones son paralelas y que por lo tanto el SEL no tiene solución.

Se mueven los deslizadores de la primera ecuación $(3x-13y=-8)$ y antes de mover los deslizadores de la segunda ecuación $(6x-26y=16)$ se le pide al estudiante dividir la ecuación entre dos.

L107 I: ¿Qué te parece si esta la dividimos entre dos?
L108 G: Ah, ok, ok, sería… tres… ¡esta es paralela! ¡esta es paralela! ¡esta es paralela!
L109 I: Vamos a ver ¿no?… ¿por qué dices que es paralela para empezar? Platícame.
L110 G: Porque si lo divido entre tres… espéreme, ¡Ah! si lo divido entre dos… si divido entre dos $6x$*, es* $3x$ *y si divido 26 entre dos son 13, o sea, estos dos valores son iguales, pero los términos independientes ya no lo son, entonces, estas dos, las dos primeritas son paralelas.*
L111 I: ¿Qué pasaría? ¿qué nos quedaría aquí del lado derecho?
L112 G: Nos quedaría ocho.

Una vez representadas las ecuaciones en SEL_Soluciones1.ggb.

L113 I: Entonces ¿qué pasa? ¿tenemos solución?
L114 G: No, no hay solución.

El estudiante reconoce que, aunque un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas no tenga dos rectas paralelas no necesariamente tiene solución. Una vez representado el SEL A5S3d en SEL_Soluciones1.ggb (dos paralelas y una transversal).

L115 I: ¿Tú crees que si estas dos rectas no fueran paralelas tendríamos solución?
L116 G: Si no fueran paralelas sí.
L117 I: La voy a cambiar para que no sean paralelas y tú me dices de acuerdo con eso si tiene o no tiene solución. Voy a cambiar la recta azul… digamos que la pongo aquí [Figura 5.20].
L118 I: ¿El sistema tiene solución?
L119 G: No.
L120 I: No tiene solución, pero tampoco tiene rectas paralelas, ¿cierto?
L121 G: Cierto

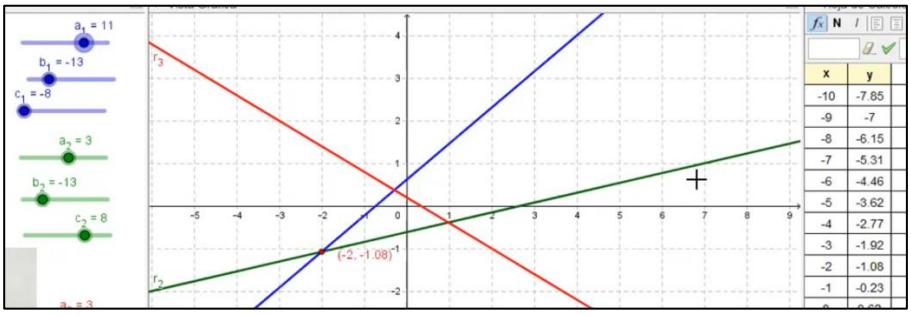
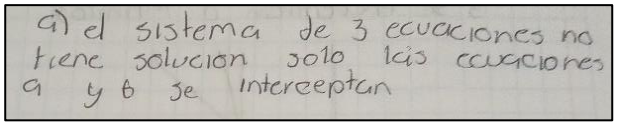


Figura 5.20 Opción a A5S3d dada a Gabriel.

En A5S4 el estudiante reconoce que los valores en los que se intersecan los planos validan las ecuaciones. Pero no concluye que son la solución del SEL.

L122 I: ¿Tú que crees que va a pasar si sustituimos estos valores en el sistema de ecuaciones? Por ejemplo, en la primera ecuación…
L123 G: Dos equis, dos por dos cuatro… ¡tiene que dar dos, tiene que dar dos!
L124 I: Ajá, el lado izquierdo tiene que dar dos.
[…]
L125 I: ¿Qué quiere decir que sea solución de las tres ecuaciones, que es solución de quién?
L126 G: Que los valores encontrados son… sustituidos son… los valores correspondientes a cada una de las incógnitas.
L127 I: … ¿y a qué te refieres con valores correspondientes?
L128 G: Me refiero que, si sustituimos los valores, por ejemplo, si sustituimos los valores de x, y *y* z, *independientemente se va a dar el número que está al lado derecho.*

En A5S5a el estudiante identifica adecuadamente que el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas no tiene solución, esto podría ser una generalización de lo analizado en los SEL previos, sin embargo, su justificación es imprecisa (Figura 5.22); al observar el SEL en SEL_Soluciones3.ggb se confirma que el SEL no tiene solución (Figura 5.23).


a) el sistema de 3 ecuaciones no tiene solucion solo las ecuaciones a y b se intercepten
Figura 5.22 Respuesta a A5S5a de Gabriel.

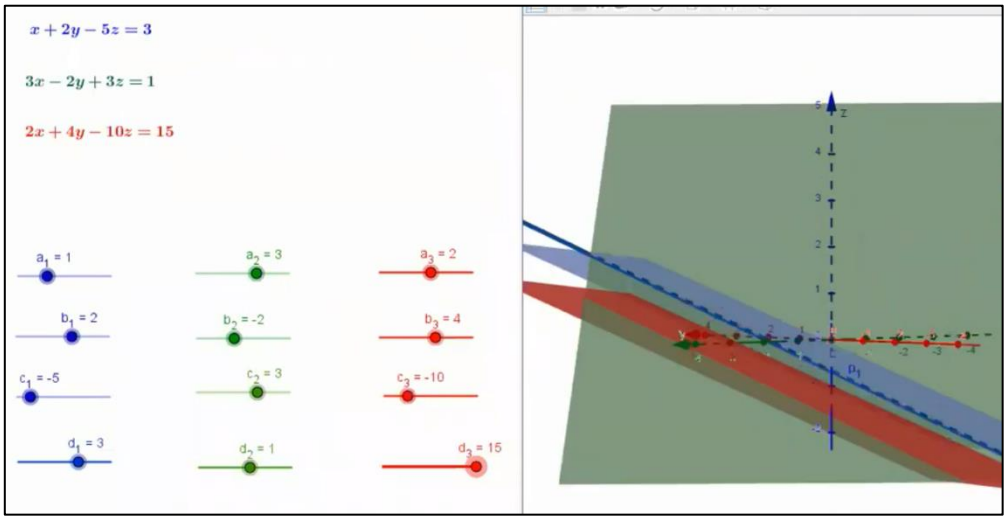


Figura 5.23 Revisión de A5S5a en GeoGebra.

En A5S5b el estudiante considera, previamente a la revisión en la herramienta digital, que un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas podría tener una solución.

L129 I: ¿Tú qué crees que va a pasar cuando tenemos dos planos? ¿Va a haber solución o no va a haber solución?
L130 G: Podría haber solución… podría o no podría haber solución, cualquiera de las dos es posible.
L131 I: ¿Cómo te imaginas que sería, que estarían los dos planos para que haya solución?
L132 G: Eh bueno… una de las razones sería que ambos planos en un punto se cruzaran.

Al reflexionar previamente al uso de la herramienta digital sobre A5S5b (sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas) el estudiante considera que los dos planos pueden cruzarse en un punto.

L133 I: Piensa, imagínate los dos planos que se están cruzando ¿es posible que se crucen en un punto?
L134 G: Sí.

Al hacer la revisión mediante la herramienta digital en el SSM del plano de ejes coordenados, el estudiante observa la posibilidad de que haya infinitas soluciones cuando los planos se intersecan en una recta y la imposibilidad de que haya una solución única del sistema.

L135 I: ¿Aquí cuántas soluciones tenemos?
L136 G: Infinitas. Por lo que estoy viendo son infinitas.

L137 I: Así es.
L138 G: Entonces fue… error de interpretación mío.

El estudiante reconoce que podría no haber intersección de los dos planos.

L139 I: ¿Y siempre se va a formar una recta?
L140 G: ¿Siempre, siempre? No, yo digo que no siempre. Si se juntan dos, sí.
L141 I: ¿y siempre se van a juntar?
L142 G: No, no siempre.
L143 I: ¿Cómo serían si no se juntan?
L144 G: Son paralelos, son paralelos.

En A5S6a el estudiante responde en forma preliminar que para un sistema de tres ecuaciones y dos incógnitas puede haber una o infinitas soluciones y muestra un plano con un ejemplo de un SEL con una solución (Figura 5.24).

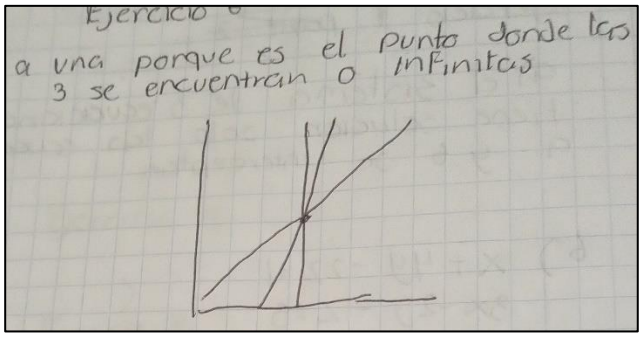


Figura 5.24 Respuesta de Gabriel a A5S6a

Su intertexto no le permite construir aún las tres posibilidades: una, ninguna o infinita cantidad de soluciones. Sin embargo, ahora las preguntas respecto a si hay una, ningún o infinidad de soluciones, tienen sentido para el estudiante y rápidamente se da cuenta cuando por falta de reflexión ha contestado erróneamente.

El estudiante considera que un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas puede haber una o infinita cantidad de soluciones; una vez que se cuestiona sobre las posibilidades en A5S6a concluye que también puede no haber solución.

L145 I: La pregunta es qué número de soluciones es posible y tú aquí me dices que una y efectivamente graficas bien... Pero también si recuerdas es posible que no se intersequen las tres en un punto, que a lo mejor una de estas rectas quede por acá (señalando una recta que corta en puntos diferentes a las otras) y entonces ¿cuántas soluciones tendríamos? ... ¿habría solución?

L146 G: No, si la cruzo por acá no habría solución.

En A5S6b el estudiante recuerda que pueden existir infinita cantidad de soluciones, sin embargo, omite la posibilidad de que no existan soluciones.

L147 I: Entonces para un sistema de dos ecuaciones, pero tres incógnitas ¿cuántas soluciones es posible encontrar? ¿Es posible encontrar una solución?
L148 G: Son infinitas. Como son planos…
L149 I: Así, es, son infinitas si forman una recta es decir si se cruzan ¿y si no se cruzan?
L150 G: No las hay.

En A5S6c el estudiante identifica que puede existir una solución o infinitas soluciones para un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

L151 I: ¿Es posible encontrar una solución?
L152 G: Sí, es posible.
L153 I: ¿Cómo sería esa solución? Es decir, gráficamente, ¿qué veríamos?
L154 G: Gráficamente bueno se vería el plano, y veríamos los…las tres rectas, va a llegar un momento
L155 I: Los tres planos…
L156 G: Los tres planos, puede que llegue o no un momento donde se puedan cruzar.
L157 I: Si se cruzan los tres planos en un punto, tenemos…
L158 G: Solución.
[…]
L159 I: … se empalmen los tres planos y entonces ¿qué tendríamos?
L160 G: Infinita cantidad de soluciones.

5.3.6 Actividad 6. Intertextualidad y producción de sentido

En A6S1 el objetivo es profundizar sobre el concepto de equivalencia para darle sentido al método de reducción de Gauss, ya que consideramos que la equivalencia de ecuaciones forma parte del intertexto de los estudiantes. Aunque al inicio de la actividad el concepto de ecuación equivalente no formaba parte del intertexto del estudiante, durante el desarrollo de la actividad se evidenció producción de sentido con respecto al objeto matemático SEL equivalente y el reconocimiento de algunas de las transformaciones para obtenerlos, así como la ventaja de tener un SEL escalonado para encontrar su solución.

Se inicia la actividad con una pregunta referente a la solución de una ecuación; la respuesta del estudiante evidencia elementos que muestran que su intertexto le permite darle sentido a la pregunta y responder en forma competente, sin embargo, utiliza en su discurso el término sistema de ecuaciones que se ha introducido en las actividades previas.

L161 I: ¿Qué sería la solución de una ecuación?
L162 G: La solución de una ecuación sería algebraicamente sería al momento en que sustituyamos los valores que encontramos en el propio sistema de ecuaciones la igualdad se tiene que cumplir.
L163 I: Bueno en este caso es una ecuación.

En la misma sección se le solicita al estudiante proporcionar una ecuación equivalente a la ecuación $3x+5=11$ y su respuesta es la ecuación $6x+5=11$, es posible que, como se ha descrito previamente, no se ha incorporado previamente en el intertexto del estudiante el concepto de equivalencia en las ecuaciones y haga una lectura que le indique que la equivalencia tiene que ver con la estructura de las ecuaciones.

L164 I: ¿Por qué piensas que son equivalentes?
L165 G: Lo primero, que no es garantía, que en ambas ecuaciones el número a la derecha es el mismo.
L166 I: Ok ¿y qué más?
L167 G: Que en el caso de la segunda ambos son múltiplos, por ejemplo, seis es múltiplo de tres y creo que ya.

Se explica al estudiante que dos ecuaciones equivalentes son ecuaciones con la misma solución y que la propiedad de equivalencia la usamos para resolver ecuaciones y se ejemplifica al resolver la ecuación propuesta y comprobar que en cada paso las ecuaciones encontradas tienen la misma solución. Al preguntar qué serían sistemas de ecuaciones equivalentes, se evidencia que la producción de sentido del estudiante se enfoca en la resolución.

L168 I: Entonces, ¿qué sería un sistema de ecuaciones equivalente?
L169 G: Bueno, el sistema de ecuaciones equivalente sería como tal un grupo de ecuaciones que básicamente son la misma, pero se van a ir simplificando.

El estudiante identifica algunas de las operaciones que permiten obtener sistemas de ecuaciones lineales con la misma solución.

[Una vez multiplicada una de las ecuaciones del sistema de ecuaciones presentado en A6S2 el estudiante lo observa representado en el SSM del plano de ejes coordenados mediante GeoGebra.]
L170 I: Es decir si yo multiplico una de las dos ecuaciones del sistema por un número ¿qué pasa?
L171 G: La solución es la misma.
[Una vez sustituida una de las ecuaciones por la suma de las dos ecuaciones del sistema obtenido en A6S2 y representado en GeoGebra]
L172 I: ¿Qué pasó?
L173 G: El resultado es el mismo.

El estudiante identifica que los SEL escalonados que se le presentan en A6S5 puede resolverlos encontrando y sustituyendo los valores en forma regresiva en las ecuaciones (Figura 5.25).

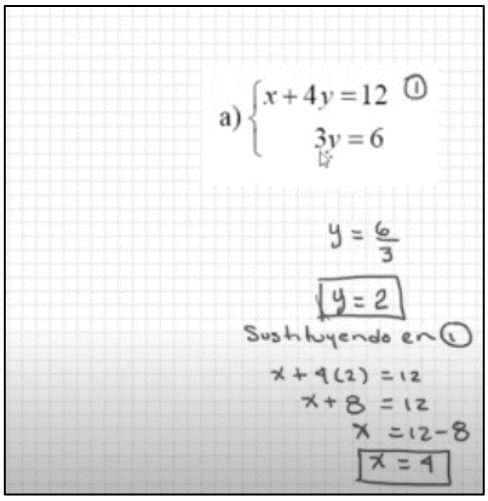


Figura 5.25 Recorte de pizarra digital del desarrollo de A6S5a con Gabriel.

5.3.7 Actividad 7. Intertextualidad y producción de sentido

Esta actividad, enfocada en el uso del método de Gauss y conformada por una serie de sistemas de hasta tres ecuaciones y tres incógnitas con una, ninguna o infinidad de soluciones, se desarrolló con apoyo de los archivos SEL_Reducción2.ggb y SEL_Reducción3.ggb diseñados en el SGD GeoGebra[8]. En el trabajo con Gabriel observamos que propuso en forma

[8] Estos archivos fueron adaptados a las necesidades del Modelo de enseñanza con base en el archivo material-dxaruwxd, revisado el 22 de julio de 2021 en https://www.geogebra.org/m/c4gyVYFG.

competente las operaciones para escalonar los SEL propuestos, lo que evidencia que el método de Gauss se ha incorporado a su intertexto a este nivel del Modelo de enseñanza. Además, empleó la revisión de las formas y transformaciones gráficas como herramienta para determinar la naturaleza de su solución y se observaron los resultados en las transformaciones algebraicas.

Una vez que se plantea al estudiante el proceso para encontrar un sistema equivalente escalonado a un SEL original, empieza a incorporarlo a su objeto mental de sistema de ecuaciones lineales (Figura 5.26).

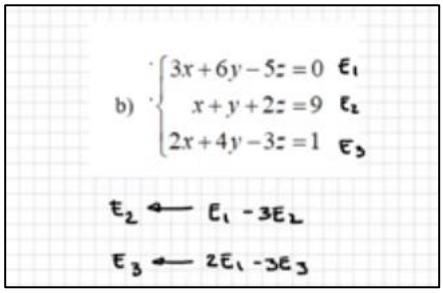


Figura 5.26 Recorte de pizarra del inicio de la resolución de A7S1b.

[Se le pregunta al estudiante el proceso para obtener una nueva ecuación E2 reducida.]
L174 G: Multiplicaría por… la ecuación uno se multiplicaría por uno, valga la… redundancia.
L175 I: Multiplicaríamos por uno la ecuación uno ¿Y luego? ¿Qué más?
L176 G: Y luego sumaríamos la multiplicación… no, se multiplicaría la ecuación dos por menos tres…
L177 I: Y ahora ¿para la ecuación tres? De nuevo utilizando la ecuación uno.
L178 G: La ecuación uno… sería multiplicarlo por… la ecuación uno la multiplicamos por dos.
L179 I: Dos [por la] *ecuación uno. ¿Y luego?*
L180 G: Y luego multiplico la ecuación tres por menos tres.

El estudiante identifica que el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas A7S2a no tiene solución al observar que en el SSM del plano de ejes coordenados aparece como dos rectas paralelas (Figura 5.27).

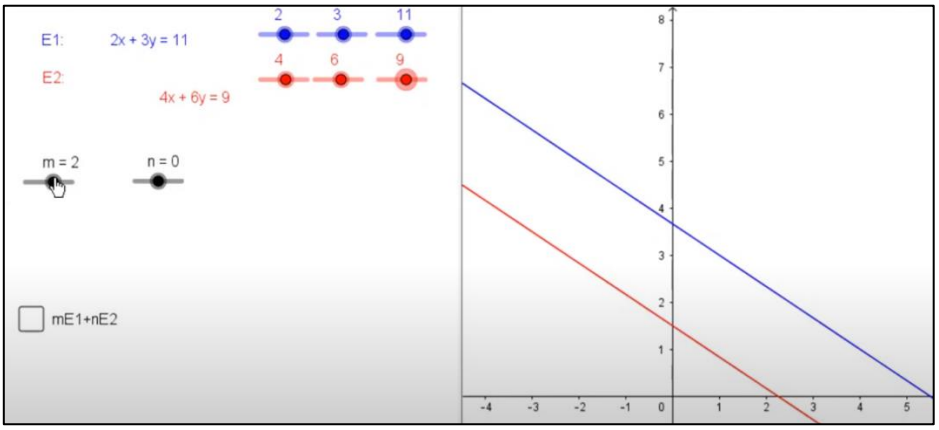


Figura 5.27 Desarrollo de A7S2a en SGD de Gabriel.

L181 I: Vamos a observar. Así de entrada ¿qué ves en la parte gráfica?
L182 G: ¡Que no tiene solución!

Al observar en GeoGebra el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas A7S2b el estudiante identifica que tiene infinita cantidad de soluciones (Figura 5.28).

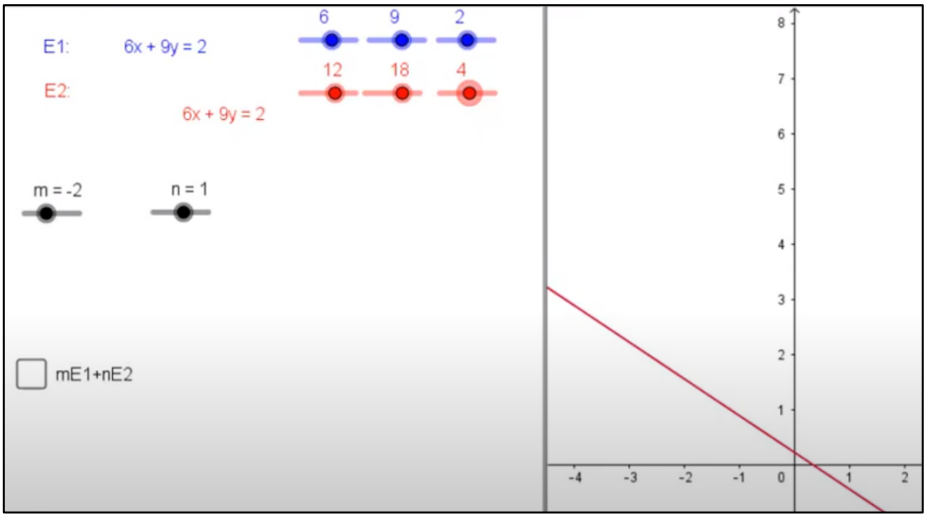


Figura 5.28 Desarrollo de A7S2b en SGD de Gabriel.

L183 I: Fíjate qué es lo que pasó allí. Los coeficientes [deslizadores] *dicen doce, dieciocho y cuatro, pero la ecuación ¿qué dice?*
L184 G: Seis, nueve, más… Es lo mismo… ¡ah! Están… ¡Está una encima de la otra!
L185 I: Así es, entonces, ¿qué fue lo que pasó aquí? ¿cuántas soluciones tiene este sistema de ecuaciones?
L186 G: Tiene infinita cantidad de soluciones.

El estudiante identifica, expresa y representa en SEL_Reducción3.ggb las operaciones para escalonar el sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas A7S2d en forma competente.

L187 I: Ahora tenemos que eliminar la equis de la ecuación dos. Entonces ¿por cuánto hay que multiplicar aquí? ¿Cuánto valdría m y cuánto valdría n? Acuérdate que m se multiplica por ecuación uno.
L188 G: Tendría que multiplicarla por menos… por uno y menos uno.
[Utiliza el SGD para realizar las operaciones y sustituir la ecuación dos]
L189 I: Ahora, para eliminar la equis de la última ecuación utilizando la ecuación uno, ¿por cuánto hay que multiplicar?
L190 G: Tendría que multiplicar esta por… la ecuación tres por cuatro y la ecuación uno por uno.
[Utiliza el SGD para realizar las operaciones y sustituir la ecuación tres.]

Al observar A7S2f en la vista gráfica de GeoGebra (Figura 5.29) el estudiante identificó que no tiene solución, pero tuvo dificultades para identificar que dos de los planos son paralelos.

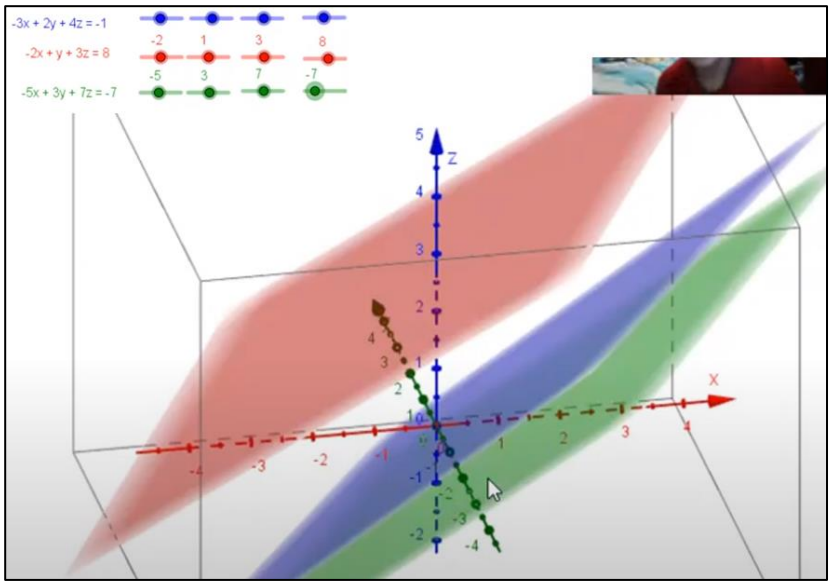


Figura 5.29 Desarrollo de A7S2f en SGD de Gabriel.

[El estudiante mueve los deslizadores para representar el SEL en GeoGebra.]
L192 G: …siete…menos siete… ¡Ah! Parece… ¡No tiene solución!

El estudiante realizó las operaciones y encontró nuevas ecuaciones dos y tres con una estructura $\frac{b_2}{b_3} = \frac{c_2}{c_3} \neq \frac{d_2}{d_3}$.

L193 I: ¿Qué puedes observar en esas dos? ¿Cómo son esos planos entre sí?

[La intención era que observara las ecuaciones e identificara que los planos debían ser paralelos, pero el estudiante únicamente se concentra en la vista gráfica (entorno más concreto), que, al no ofrecer la claridad por las dimensiones, le genera confusión.]
L194 G: Se puede decir que están separadas… el plano rojo y el plano verde están separados, pero en el caso del plano azul está a la mitad, ah no, no, bueno, el plano azul está separando a ambos o no sé si eso parezca…
L195 I: Ahora observa la parte algebraica, por favor. ¿Cómo son esas ecuaciones?
L200 G: Prácticamente es la misma ecuación, el término independiente…la diferencia de ambas es de menos diez y el símbolo [signo].
[…]
L201 I: ¿Y cómo serían esos planos entre sí?
[El estudiante vuelve a manipular la vista gráfica de GeoGebra y murmura.]
L202 I: Tendrían que ser el plano rojo y el verde, puedes cerrar más [la vista], ciérralo más…
[La investigadora dio una serie de indicaciones para hacer más clara la representación gráfica pero el estudiante no logró tener un panorama que le permitiera ver los planos paralelos.]
L203 I: Ahora sí, ¿cómo se ven esos planos, el rojo y el verde?
L204 G: Sobrepuestos… [inaudible]*… tendrían que estar sobrepuestos.*

El estudiante dota de un sentido intermedio la estructura de las ecuaciones, asumiendo que los planos deben ser uno solo. Y en efecto, al alejar demasiado la vista parecían un solo plano.

L205 I: Pero si estuvieran sobrepuestos todos los términos de las ecuaciones serían exactamente iguales […] pero en este caso son iguales los coeficientes, pero la expresión del lado derecho no es igual y por lo tanto los planos no se sobreponen, pero si son ¿cómo?
[El estudiante insiste en la vista gráfica. Se manipula la región gráfica hasta que es muy claro que los planos son paralelos.]
L206 I: ¡Ahí! ¿Cómo son los planos?
L207 G: Me estoy imaginando las paredes de la casita en este momento.
L208 I: Ok. ¿Cómo son los planos?
L209 G: Paralelos entre sí.

Informe de Tendencias cognitivas identificadas en la Actividad 7

Durante el desarrollo de la actividad observamos algunas tendencias cognitivas, por ejemplo, la Tendencia Cognitiva 2, ya que el estudiante dota de sentidos intermedios a los resultados de algunas transformaciones algebraicas e intenta forzar lo que observa en otros SSM para

justificar su inferencia (L193-L204); además identificamos la Tendencia Cognitiva 3, el retorno a situaciones más concretas cuando se presenta una situación de análisis ya que el SSM del plano y el espacio de ejes coordenados significaba para Gabriel un entorno más concreto por lo que centraba sus esfuerzos en identificar la naturaleza de la solución en ese entorno (L193-L204).

5.3.8 Actividad 8. Intertextualidad y producción de sentido

En la última actividad propuesta el objetivo es analizar el tratamiento de problemas de enunciado realizada por los estudiantes con base en los cambios en la red intertextual derivados de las actividades previas. En el caso de Gabriel, con respecto al uso del método cartesiano, observamos que en general en la lectura de los problemas identificó y relacionó con literales las cantidades desconocidas y en algunos casos modeló ecuaciones a partir del análisis de las relaciones entre las cantidades de forma competente; sin embargo, en algunos casos fue necesario el retorno a situaciones más concretas para la producción de sentido respecto a las condiciones y la forma de representarlas en forma algebraica. Con respecto al método de resolución, el estudiante tuvo dificultades para realizar las transformaciones algebraicas para escalonar los SEL al inicio de la actividad, aún cuando fue competente para proponer las operaciones necesarias. Observamos producción de sentido respecto a la resolución de un problema modelado mediante un sistema de tres ecuaciones y dos incógnitas y respecto al uso de recursos derivados de otros SSM al analizar el resultado de un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas mediante intervención.

En A8P1 el estudiante identifica las cantidades desconocidas. Mediante exploraciones analíticas consigue establecer las ecuaciones que representan las condiciones del problema.

[Se establece que una condición es que el total de preguntas es igual a *100* y que por lo tanto si hay *10* aciertos habrá *90* errores.]
L210 I: ¿Cómo podrías plantear esa condición en términos de equis y de ye, es decir, como una ecuación?
L211 G: Entonces sería… ¿Cómo lo plantearía?
L212 I: Yo te dije una cierta cantidad, que era la cantidad de aciertos, ¿qué hiciste para llegar a la cantidad de errores?
L213 G: ¡Ah! resté… bueno, en total son… ¡Ah ya sé cómo es! Es equis menos ye igual a cien.

[…]
L214 I: Tú me dices que equis menos ye es igual a 100, pero qué pasa si equis vale 30 por ejemplo, entonces sería 30 menos 70 igual a cien. Y eso no es correcto, ¿cierto?
L215 G: Ok, entonces sería… 30 menos 70 no es… ¡Ah no! Es equis más ye igual a cien.
[…]
L216 I: Esa es para la primera condición que es la cantidad de preguntas, pero ahora estamos trabajando con los puntos que obtenemos de uno y otro.
L217 G: Entonces es… ¡Ah! Entonces es… ¡ya sé cómo es, ya sé cómo es, ya sé cómo es!
[…]
L218 G: Entonces es equis más… equis menos, si no me equivoco y, menos un medio de ye igual a 71.5, creo que así quedaría.

En A8P2 el estudiante identifica como primer paso identificar las cantidades desconocidas y las define en forma competente; tiene dificultades para establecer la relación entre las cantidades que le permita modelar una de las ecuaciones, pero una vez que se analiza con valores concretos identifica la relación adecuadamente; modela la segunda ecuación sin recurrir a la inferencia de cantidades concretas.

[Una vez que el estudiante define las cantidades desconocidas como la cantidad de teléfonos de dos diferentes precios.]
L219 I: ¿Cuál sería una de las condiciones?
L220 G: Que en total de la suma de los dos teléfonos tiene que dar 61250.
L221 I: Ok, eso es lo que se va a pagar. Entonces ¿cómo podríamos plantear esa condición?
L222 G: Sería… es $x + y = 61200$
L223 I: Espérame un momento, si, por ejemplo, equis que es el número de teléfonos de 3200 fuera cinco, entonces nosotros estaríamos sumando cinco más la cantidad de teléfonos de 1950 y eso tu dirías que da 61250, ¿eso sería correcto?
L224 G: ¡Ah no, no, no! Entonces sería $x + y = 25$
L225 I: La otra condición sí involucra a los 61250, entonces, ¿cómo podríamos plantear esa condición en donde el pago total de todos los teléfonos sería 61250?
[El estudiante murmura]
L226 G: Ok, sería […] *tiene que ser igual a* […] *Ok, la segunda condición sería equis por 3200 más ye por 1950 igual a los 61[sic].*

El estudiante identifica correctamente la operación que le permitirá encontrar un sistema equivalente escalonado, pero en lugar de multiplicar las ecuaciones completas para luego sumarlas, únicamente elimina el término con coeficiente x de la segunda ecuación (Figura 5.30).

L227 I: Nosotros vamos a querer escalonar este sistema, ¿qué operación tendríamos que hacer para lograr ya no tener equis en la segunda ecuación?
L228 G: La primera tendría que multiplicarla por 64 y la segunda por uno.
L229 I: ¿Por uno?
L230 G: Bueno, por menos 64 o bueno, por menos uno.
[El estudiante realiza operaciones y escribe como sistema equivalente escalonado el sistema de ecuaciones que se muestra a la derecha en Figura 5.30.]

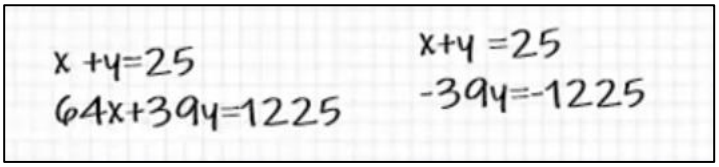
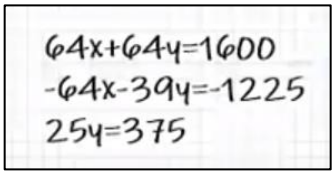


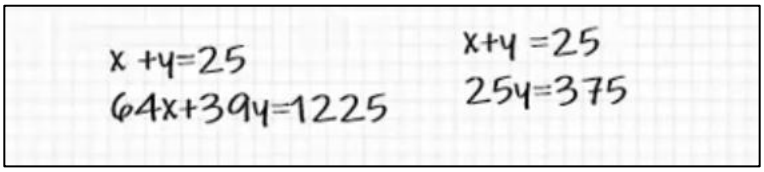
Figura 5.30 Ejemplo de dificultades en A8P2 de Gabriel.

Una vez que la investigadora interviene para guiar el inicio de la operación, para el estudiante toma sentido nuevamente el proceso.

L231 I: Allí sería, toda la primera ecuación que es $x + y = 25$ *la voy a multiplicar por 64, ¿cierto? Y entonces serían* $64x$*, ¿más cuánto?*
L232 G: $64y$
L233 I: Y eso es igual…
L234 G: A 1600.
L235 I: Y de la otra ecuación la tendríamos toda negativa por que la vamos a multiplicar por menos uno. Entonces, ¿puedes continuar allí?
[El estudiante continúa realizando el proceso (Figura 5.31). Y define el SEL equivalente escalonado (Figura 5.32).]



5.31 Corrección de proceso en A8P2 de Gabriel.



5.32 SEL equivalente escalonado en A8P2 de Gabriel.

El estudiante muestra dificultad para identificar cuál sería la siguiente acción en el proceso de resolución una vez que ha definido el SEL escalonado. Es posible que el formato en el que se ve el SEL en la aplicación digital haya resultado confuso para el estudiante, ya que al corregir los espacios y el formato y enfocar al estudiante en las características de la segunda ecuación del sistema, el estudiante retoma el proceso de resolución.

L236 I: Ese sería nuestro nuevo sistema de ecuaciones, ya está escalonado. ¿Y ahora qué podemos hacer?
L237 G: Como todas son positivas se podría sumar, eeeh, se suman.
[La investigadora corrige el formato.]
L238 I: Si te fijas en la segunda ecuación nada más tenemos ye, no tenemos equis. Entonces, ¿qué podemos hacer con esa segunda ecuación? Una vez que escalonamos ¿qué podemos hacer?
[El estudiante murmura intentado encontrar la respuesta.]
L239 I: Podemos trabajar con la segunda ecuación ¿cierto?
L240 G: Sí.
L241 I: ¿Y qué hacemos con esa segunda ecuación?
L242 G: ¡Ah, ya, ya, ya! Todo se divide.
L243 I: Ok, ¿Entre cuánto?
L244 G: Veinticinco.

A partir de las intervenciones descritas, el estudiante continúa el proceso, resuelve el sistema de ecuaciones y expresa la solución en términos del problema.

L245 I: ¿Qué significa $x=10$ *y* $y=15$ *? En términos del problema.*
L246 G: Que se compraron 15 modelos de tres mil, ¡No! Se compraron 10 modelos de 3200 y 15 de 1950.

El estudiante toma la iniciativa para iniciar la resolución del siguiente problema indicando que primero debe identificar las cantidades desconocidas. Con una intervención para guiar su análisis, en A8P3 el estudiante relaciona las dos cantidades desconocidas con dos literales.

[Una vez que se da lectura al problema.]

L247 G: Ok. Ok. Entonces primero son las variables. Equis es igual a asientos de primera clase…
L248 I: Acuérdate que lo tenemos que poner en términos de cantidades, entonces ¿qué son asientos? ¿El precio de los asientos? ¿La cantidad de asientos?
L249 G: ¡Ah no! El precio de los asientos. Sí.
L250 I: Muy bien.

Posteriormente el estudiante identifica las tres condiciones del problema en forma competente.

L251 I: ¿Cuáles condiciones encuentras aquí?
L252 G: La primera condición que encuentro aquí es que tiene 32 asientos de primera clase y 50 de clase turista. Es la primera condición que yo encuentro.
L253 I: Pero allí bueno, son 32 asientos de primera clase y 50 de clase turista, pero ¿qué más? Porque eso en sí no es una condición que podamos escribir como ecuación, entonces, ¿cuál sería?
L254 G: ¡Ah ok, ok! Entonces… aquí la primera condición, entonces son… [El estudiante murmura mientras analiza y verbaliza mientras escribe] $10x+40y=70000$.
L255 I: ¿Qué otra condición observas?
L256 G: Se venden… ok, ok. Entonces sería $32x+50y=146000$. *Y la tercera sería* $20x+20y=60000$.

Para resolver A8P3, sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas el estudiante propone dividir el SEL en dos sistemas de dos ecuaciones. Mediante intervención el estudiante identifica que no es necesario resolver dos sistemas de ecuaciones, sino que puede evaluar la solución de un subsistema de dos ecuaciones en la tercera ecuación.

L257 I: Si te fijas tenemos tres ecuaciones y dos incógnitas. ¿Cómo se te ocurre que podamos resolver este problema?
L258 G: Podríamos trabajarlo como si fueran dos sistemas de ecuaciones. Sí, como dos sistemas de ecuaciones diferentes.
[…]
L259 I: Si hacemos un sistema de ecuaciones de aquí, uno solo, supongo que te refieres a dos sistemas que tengan dos ecuaciones cada uno.
L260 G: Ajá, sí.
L261 I: Bueno, que tal si hacemos uno y encontramos la respuesta [solución]. *¿Qué tendría que pasar con esa respuesta respecto a la otra ecuación?*
L262 G: Tiene que cumplir los aspectos de la… tiene que cumplir las condiciones de la ecuación… que nos plantea la ecuación.

El estudiante elige dos ecuaciones para formar el subsistema y resuelve en forma competente, sin embargo, las dificultades de trabajar con la pizarra electrónica complicaron el proceso debido a la falta de orden en el desarrollo (Figura 5.33). La intervención en este proceso se enfoca en que el estudiante logre una simplificación de las ecuaciones.

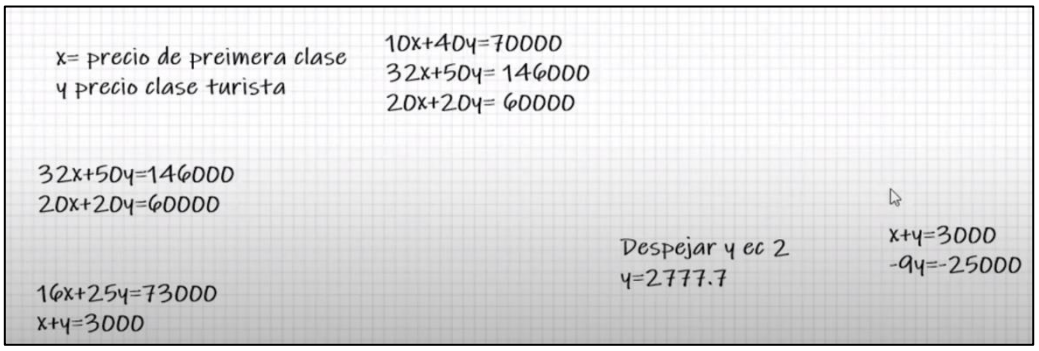


Figura 5.33 Desarrollo de A8P3 de Gabriel.

El estudiante identifica que el siguiente paso en la resolución es probar si la solución del subsistema es válida para la ecuación restante; esto es, la idea original del estudiante para la resolución del sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas que era la de resolver dos subsistemas de dos ecuaciones cada uno se modificó con la intervención realizada al inicio del problema; asumimos que esto es posible debido a que el sentido de la solución y del propio objeto matemático SEL se van incorporado a su intertexto, haciendo más eficiente el proceso de resolución.

L263 I: ¿Qué habíamos dicho que tenía que pasar con esos dos valores?
L264 G: Tenían que cumplir en la segunda ecuación.
[Se interviene para que el estudiante identifique que la ecuación del SEL original que no utilizó en el subsistema fue la primera ecuación.]

El estudiante identifica que los valores encontrados no son solución de la ecuación no considerada en el subsistema y que por lo tanto no son solución del SEL original.

L265 G: Igual a 70 mil, ¿verdad?
L266 I: Debería ser igual a 70 mil. ¿Cuánto es cuarenta por…?
L267 G: ¡No! ¡No dio, no dio!
[…]
L268 I: ¿Te acuerdas qué significaba que encontráramos una solución así, o un valor así? ¿Qué significa eso?
L269 G: Que el sistema no tiene solución.

El estudiante es capaz de hacer una relación en sus propias palabras del resultado encontrado con el problema original.

L270 I: En términos del problema ¿tú qué crees que significa eso?
L271 G: En términos del problema significa que no debo confiar en esta aerolínea [risas].
[Se aclara que dadas las condiciones del problema no se puede saber cuál el valor de las cantidades desconocidas que plantea el problema.]

En A8P4 el estudiante aborda el problema en forma competente iniciando con la definición de las cantidades desconocidas. Se interviene para que el estudiante especifique el tipo de cantidad de que se trata (cantidad, medida, precio, etc.). Posteriormente, el estudiante escribe la ecuación que representa una condición que implica una traducción directa del texto "85 unidades entre automóviles familiares, sedán y deportivos." (Figura 5.34).

L272 I: ¿Qué tendríamos que hacer para empezar?
L273 G: Para empezar, tenemos… equis sería la cantidad de automóviles familiares.
L274 I: Bueno, si quieres ir poniendo o definiendo estas cantidades desconocidas.
[El estudiante escribe *x=autos*]
L275 I: Acuérdate que siempre tratamos de poner de qué estamos hablando: número de autos, cantidad de esto, medida de lo otro, precio de algo, entonces…
[El estudiante corrige y escribe que las cantidades desconocidas son el número de autos de cada tipo (Figura 5.34).]
L276 I: Ahora, ¿qué sigue?
L277 G: Tendría que definir la ecuación.
L279 I: ¿Qué es lo que nos va a ayudar a definir la ecuación?
L280 G: Bueno, ahorita son las variables que son los tipos de autos que se vendieron y el total de todos esos autos fue de 85 unidades.
[Verbaliza y escribe la ecuación.]

Figura 5.34 Inicio de MC para la resolución de A8P4 de Gabriel.

El estudiante muestra dificultades para el planteamiento de la ecuación que involucra el trabajo con cantidades desconocidas aumentadas.

L281 I: Ok. ¿Hay alguna otra condición?
L282 G: Dice… se sabe que si se hubieran vendido nueve unidades más de cada tipo de auto [murmura] Aquí me dice que si se hubieran vendido nueve autos más se habrían vendido el doble de sedán que deportivos. Ahí si ya, como que ya no sé para dónde. Cómo plantearlo.

El estudiante combina las condiciones y relaciona en forma no adecuada las cantidades, por lo que encuentra una ecuación que no le permitiría resolver el problema.

L283 I: ¿Qué te parece si para empezar ignoramos un poco lo de las nueve unidades más? ¿Cómo tú podrías representar que se vendieron el doble de sedán que deportivos?
L284 G: Quedarían dos veces ye.
L285 I: A ver ¿qué tal si lo escribes?
[El estudiante escribe $x+2y+z=94$]
L286 I: ¿Por qué 94? Platícame.
L287 G: Ah, es que de los 85 autos que se vendieron, que están en la primera ecuación, dice que si se hubieran vendido nueve autos más se hubieran vendido el doble de sedán por eso sumé 85 más nueve unidades que se supone querían vender.

En el mismo proceso se interviene para utilizar como recurso retorno a situaciones más concretas un estrato del método MAES. Una vez hecha una intervención para analizar la condición mediante situaciones más concretas el estudiante logra modelar la segunda ecuación.

L288 I: Imagínate que estamos hablando de que tú tienes cierta edad y tienes un hermano pequeño que tiene la mitad de tu edad ¿cómo podrías entonces relacionar estas dos cantidades?
L289 G: Si divido la… si divido mi…
L290 I: Ajá si divides tu edad…
L291 G: Si divido mi edad a la mitad tendría la edad de mi hermano.
L292 I: ¡Muy bien! Si divides el que es el doble a mitad obtienes el otro. ¿Y aquí quién es el doble?
L293 G: ¿El doble? Ah, ok. Ok, ok. ¡Ah! ¡Ya, ya, ya! [Murmura]
L294 I: ¿Cómo puedes representar que se vendieron nueve unidades más de sedán, por ejemplo? Se vendieron ye cantidad de autos sedán. Imagínate que esa cantidad es dos. Si se vendieran nueve más ¿cuántos se habrían vendido?

L295 G: Se habrían vendido 11.
L296 I: Muy bien. ¿Qué hiciste?
L297 G: Sumarlo.
L298 I: Sumarle ¿qué a qué?
L299 G: Los nueve sedanes que se suponía debían vender a los dos que ya vendieron.
L300 I: Entonces si la cantidad de autos sedán [vendidos] *no es dos, sino ye, entonces ¿cómo representas nueve más?*
L301 G: Ooh, ooh ¿cómo sería? Sería… creo que sería algo así [Escribe $(y+9)$].
L302 I: Ok. De esos dijimos que se vendió el doble de los otros si de los otros también se hubieran vendido nueve más. ¿Cómo representamos el número de autos deportivos suponiendo que se vendieron nueve más?
[El estudiante murmura]
L303 I: Acuérdate lo que dijimos antes, de las edades. Es como si hubieras puesto ahorita tu edad.
[El estudiante escribe *(y+9) + (z+9).*].
L304 G: Este lo dividimos, este entre dos. [El estudiante escribe (y+9)/2 + (z+9)]
L305 I: Muy bien, ahora lo que tú estás poniendo allí es la suma de las dos cantidades, pero nosotros no estamos sumando las cantidades, estamos diciendo que el doble de uno es igual al otro.
L306 G: Entonces es… [Murmura y escribe *(y+9)/2 = (z+9).*]

El estudiante identifica que no hay más condiciones y que por lo tanto el sistema tiene dos ecuaciones con tres incógnitas. Mediante el análisis a priori del SEL no es capaz de identificar que tiene infinita cantidad de soluciones, aun cuando en actividades previas se analizaron SEL con la misma cantidad de ecuaciones y variables. El intertexto del estudiante no le permite hacer una lectura de este tipo de SEL, es probable que requiera más familiaridad con este tipo de problemas.

L307 I: Este es nuestro sistema de ecuaciones. ¿Qué podría pasar? Así observándolo, a primera instancia ¿tú crees que vamos a tener una solución, o que no vamos a tener solución o qué vamos a tener muchas soluciones? ¿Tú qué crees que va a pasar?
L308 G: Estoy inclinado entre que podríamos tener muchas soluciones y una solución.
L309 I: Ok. Entonces ¿Qué te parece si tratamos de resolverlo?

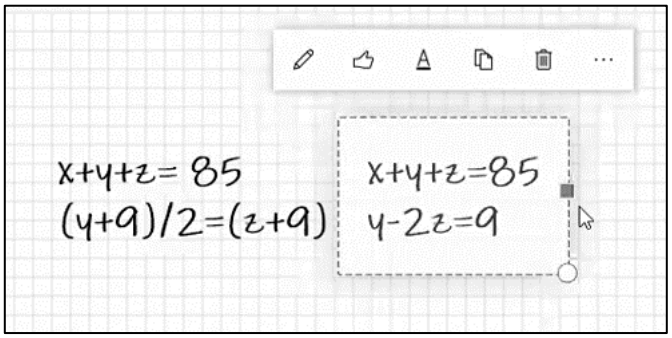


Figura 5.35

[Con base en el SEL obtenido (Figura 5.35)]
L310 I: Pues ahora empezamos a trabajar con ese nuevo sistema de ecuaciones, que es equivalente al anterior. ¿Qué podemos hacer con él?
L311 G: Ya… Prácticamente ya está escalonado.
L312 I: Así es, ya está escalonado.
L313 G: Entonces… [Murmura y escribe *x-y*]
L314 I: Platícame qué estás tratando de hacer porque no estoy entendiendo mucho.
L315 G: ¡Ah! Estoy resolviendo el sistema.
L316 I: ¡Ah, ok! Estás resolviendo el sistema. Entonces si ya está escalonado el sistema, entonces ¿qué es lo que estás haciendo?
L317 G: Nada más simplificándolo más.
L318 I: ¿Qué hacíamos?
L319 G: Se efectuaban las operaciones. Es lo que estoy haciendo.
L320 I: ¿Qué operación estás haciendo? Platícame.
L321 G: Primero como la equis está solita, la bajé luego, luego. Estoy…, bueno, sumé ye menos dos ye y me da menos ye [Sigue sumando las ecuaciones.]
L322 I: ¿Para qué sumábamos dos ecuaciones? ¿Te acuerdas?
L323 G: La sumábamos para encontrar una de las variables, algo así.

Una vez que se hace la intervención para que el estudiante recuerde mediante la revisión de los procesos de resolución del problema previo, el estudiante indica que el siguiente paso es "despejar", pero no es competente para identificar la ecuación con la que debe trabajar, ni cuál variable podría despejar. Presumimos que el intertexto del estudiante está influenciado por la resolución de ecuaciones con una variable, que incluso en las actividades previas se ha reforzado, por lo que al ver una ecuación con dos variables en un momento del proceso de resolución en el que asume que debería haber solo una incógnita, esto representa una dificultad en su razonamiento.

L324 I: Entonces aquí si ya lo tenemos escalonado, ¿qué podemos hacer?

L325 G: Se tendría que despejar.
L326 I: ¿A quién se te ocurre despejar?
L327 G: A la equis. Prácticamente es la que está… No, no, no… tendría que despejar….

Se hace una intervención para que el estudiante analice el sistema de ecuaciones en el SSM del espacio de ejes coordenados. Observamos que el intertexto del estudiante con respecto a los SEL en el espacio de ejes coordenados le permite identificar posibilidades sobre la naturaleza de las soluciones. La intervención se lleva a cabo para el reconocimiento de la verdadera disposición de los planos, ya que mediante el análisis previo el estudiante asume que el sistema podría no tener solución o tener infinitas soluciones. Sin embargo, en forma gráfica el estudiante únicamente considera las posibilidades de que los planos sean paralelos o superpuestos.

L328 I: Piénsalo de esta manera. Lo que nosotros tenemos aquí es un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas. Cuando nosotros teníamos una ecuación de primer grado con tres incógnitas, esa ecuación ¿qué representaba gráficamente?
L329 G: Representaba un plano.
L330 I: Muy bien. Entonces cada una de estas dos ecuaciones que tu acabas de sacar representan un plano. Pero solamente tenemos dos ecuaciones. Entonces, ¿cuántas ecuaciones vamos a tener ahí? ¿Vamos a tener una solución? ¿Es posible tener una solución con dos planos? Trata de recordar eso, trata de visualizarlo.
L331 G: Bueno, podrían ser los planos sobrepuestos, uno sobre el otro, podrían ser paralelos, podríamos tener o infinitas soluciones o ninguna solución.

Una nueva intervención, mediante el análisis de las ecuaciones, le permite al estudiante identificar que en el caso particular los planos no pueden ser paralelos ni superpuestos. Posteriormente, el estudiante reconoce que los planos se intersecan formando una recta y que por lo tanto hay infinitas soluciones para el SEL.

L332 I: ¿Cuántas soluciones hay cuando dos planos se cruzan?
L333 G: Una.
L334 I: ¿Una?
L335 G: ¡Ah no, no, no! Son infinitas, son infinitas.
L336 I: ¿Cómo se cruzan? ¿Qué tipo de figura es donde se cruzan? ¿Te acuerdas?
L337 G: Es una recta. Es una recta si no mal recuerdo.

Se hace una intervención para explicar el por qué el problema de enunciado no puede tener infinitas soluciones, aunque el sistema de ecuaciones sí las tiene.

L338 I: En términos del problema nosotros no podemos tener infinita cantidad de soluciones porque la equis, la ye y la zeta, tienen que ser números enteros porque no podemos hablar de medio auto o de 0.1 auto.
L339 G: Cierto.

Una vez que se ha acordado la infinidad de soluciones del SEL, el estudiante encuentra una solución posible al problema original mediante transformaciones algebraicas y sustituciones numéricas una vez que se le explica que puede despejar una variable de la ecuación $y-2z=9$. Sin embargo, este proceso le presenta una serie de dificultades al estudiante, ya que está centrado en encontrar un valor numérico para una de las variables, por lo que no puede darle sentido a despejar una variable en términos de otra y opta por la producción de un código personal intermedio, ya que trata de despejar las dos variables a la vez.

El estudiante presenta dificultades para identificar la transformación que le permita despejar la variable, debido probablemente a que su intertexto ha incorporado la estructura de SEL escalonados con solución única.

L340 I: ¿Qué te parece si despejas ye de la segunda ecuación? ¿Qué quedaría?
L341 G: ¡Ah, ok, ok! Ye, zeta, igual a [El estudiante escribe *yz*].
L342 I: Fíjate estamos despejando ye de la segunda ecuación, entonces nos estorba ese -2z.
L343 G: Menos dos, ok. Si está multiplicando…
L344 I: Es y-2z, se está restando con la ye.
L345 G: Está restándose, entonces sería ye más… [luego escribe *y=-2z+9*]

Una nueva intervención ayuda a que el estudiante encuentre una solución posible del problema.

L346 I: Si te fijas el valor de ye queda dependiendo del valor de zeta. Entonces ¿qué pasaría si zeta valiera uno? ¿Cuánto valdría ye?
L347 G: Ye vale dos.
L348 I: A ver, chécalo bien.
L349 G: [El estudiante hace la sustitución mentalmente y la verbaliza.] *11, ye vale 11*.

El estudiante mostró dificultades para encontrar la expresión o la transformación que le permitiera encontrar el valor numérico de equis en la solución hipotética. Es posible que las características del problema: tres cantidades desconocidas, únicamente dos ecuaciones y la

multiplicidad de soluciones le hayan representado un obstáculo ya que previamente todos los problemas de enunciado se habían representado con dos cantidades desconocidas y se resolvió un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, por lo que su intertexto le permitía hacer un lectura estratificada; por otra parte, el acomodo de los procesos en la pizarra digital no facilitaban una visualización clara y ordenada de los procesos previos.

L350 I: ¿Y cuánto valdría equis en ese caso?
[El estudiante se queda pensando]
L351 G: ¡Ay! No sé… ya me quedé sin ideas.

El estudiante calculó el valor de equis mediante una intervención en la que se le mostró que al sustituir los valores encontrados para y y z zeta en la ecuación $x+y+z=85$, que es la primera del SEL, puede encontrar el valor de equis. Una vez teniendo valores para las tres cantidades desconocidas el estudiante reconoce que esa solución no es única.

L352 I: Nosotros aquí supusimos, arbitrariamente dijimos: qué tal si zeta vale uno y entonces a partir de ese valor de zeta, encontramos un valor de ye y un valor de equis. Ahora ¿ese es total, es la única solución que podemos encontrar?
L353 G: No. Puede haber más.
L354 I: Ok ¿Y de qué depende?
L355 G: Del valor de zeta.
L356 I: Muy bien. Podemos encontrar diferentes valores de ye y de equis dándole valores a zeta. ¿Pero serían infinitos?
[El estudiante murmura mientras piensa.]
L357 I: Piénsalo así. ¿zeta podría valer cien?
L358 G: Puede valer desde cero hasta 85.
L359 I: Pero la suma de todos. ¿Cierto?
L360 G: Ajá.

El estudiante logra vincular los resultados obtenidos con el problema de enunciado original.

L361 I: Dado este problema o en términos del problema ¿qué podríamos concluir?
L362 G: Que se vendieron… bueno, que no sabe exactamente cuántos automóviles de los tres tipos se vendió.
L363 I: Exactamente. Con esas condiciones no podemos decir cuántos automóviles de cada tipo se vendió, pero sí podemos dar algunas propuestas posibles de esa cantidad de autos. Sí podemos decir: si se hubiera vendido uno de deportivos, pues se habrían vendido once sedán y 73 familiares.

En A8P5 el estudiante identifica como primer paso el definir las cantidades desconocidas. Posteriormente hace una lectura de las condiciones que no le permite proponer una ecuación adecuada. Nuevamente observamos la tendencia a combinar varias condiciones sin considerar adecuadamente las cantidades y sus relaciones.

L364 I: ¿Identificas alguna condición?
[El estudiante murmura mientras piensa. Luego escribe $(x+3)+y+z$.]
L365 I: ¿Cuál es la condición que estás tratando de representar? Platícame.
L366 G: Ah, la condición que dice para hacer los 20 kilos de…, no, sí, bueno, sí. Esta condición que está acá [Señala].
L367 I: 20 kilos de mezcla.
L368 G: Ajá, los 20 kilos de mezcla.
L369 I: Entonces quiere decir que la cantidad de kilos de café tipo A, más la cantidad de café tipo B, más la cantidad de kilos de café de tipo C nos tiene que dar ¿cuánto?
L370 G: Nos tiene que dar 20 kilos [El estudiante termina la ecuación $(x+3)+y+z=20$.]
L371 I: Ese tres ¿Por qué va allí?
L372 G: ¡Ah! Ese más tres por lo que está diciendo que se agregó… contiene tres kilos más del café tipo A. Bueno en este caso la x es el café tipo A y si le agrego los tres kilos extra, por eso va tres.

Una vez que se le explica al estudiante el sentido de su expresión y de que está combinando dos condiciones escribe la ecuación $x+y+z=20$, que es adecuada para una condición. Posteriormente observamos la generación de un error sintáctico debido a la generación de un código personal para relacionar los costos de cada tipo de café.

L373 I: ¿Qué otra condición tenemos?
L374 G: La condición que va es la inversión que dieron para la…
L375 I: Para los 20 kilos.
L376 G: Ajá, para los 20 kilos.
L377 I: Entonces cómo podemos plantear esa condición ¿qué necesitamos para eso?
L378 G: Entonces… [El estudiante asigna una letra a los costos unitarios de cada tipo de café (Figura 5.36).]
L379 I: Esos son los costos de cada tipo de café. Y esos los tenemos que utilizar para saber la condición de la inversión. Entonces qué podemos hacer con esos costos del café.

L380 G: Ok, entonces es… para que me dé el costo de la inversión tendría que ser [Verbaliza mientras escribe $a+b+c=8235$.]

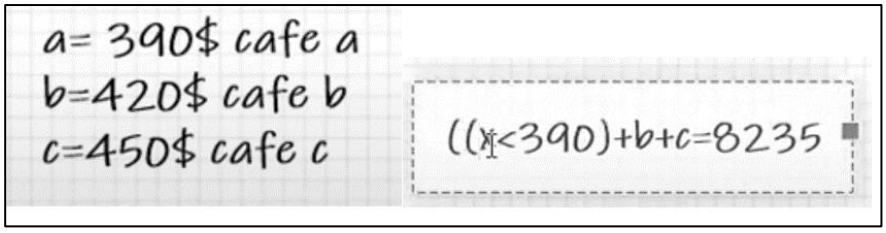


Figura 5.36 Código intermedio generado en A8P5 por Gabriel.

Se realiza una intervención para producir sentido en el estudiante mediante un análisis de sus acciones que desencadene una representación adecuada de la condición.

L381 I: Ok. Aquí lo que estamos diciendo, bueno tú estás definiendo que a es 390, b es 420 y c es 450, entonces lo que estás poniendo aquí es… [hace la suma de 390+420+450] que 1260 es igual a 8235. Eso es lo que se está planteando en esta condición. Pero además no estás involucrando a las variables que tú definiste, que son equis, ye y zeta. Piénsalo de esta manera: si esta mezcla especial llevara dos kilos de café tipo C ¿cuánto pagarías por eso?
L382 G: 900…
L383 I: 900. ¿Qué fue lo que hiciste [para calcular el valor]*?*
L384 G: ¡Ah! Sumé la cantidad de veces que… bueno los dos, cada kilo vale 450.
L385 I: Exacto ¿y si esa cantidad de kilos es zeta?
L386 G: Los números son exactos, bueno son enteros.
L387 I: A ver, pero lo que tú hiciste allí es lo importante. Fíjate si tuvieras dos kilos de café de tipo C, entonces pagarías 900 pesos de ese tipo de café, porque multiplicaste la cantidad de kilos de café que son dos por el costo de cada kilo de café…
L388 G: ¡Ah, ok, ok, ok! Creo que ya vi cómo va el asunto. ¿Cómo va el asunto…? ¡Ah! Ya vi cómo va el asunto. [Modifica la expresión y escribe $x \cdot a$]
L389 I: Ok. Pero a ¿cuánto vale?
L390 G: Ah, ok, entonces es $x \cdot 390$.

El estudiante genera errores sintácticos aun cuando en todos los problemas anteriores utilizó los términos algebraicos con una sintaxis adecuada. Es posible que la producción de códigos personales le provocara confusión ya que incluso hace una lectura errónea de una expresión que se le presenta para desencadenar un sentido intermedio.

L391 I: Muy bien, y algebraicamente ¿cómo se escribe?
L392 G: Algebraicamente… pudiera ser que, así como lo estoy escribiendo, pero…

[El estudiante escribe algunos paréntesis (Figura 5.36)]
L393 I: A ver. Espérame. ¿Qué significa que yo tenga 2x?
L394 G: Que son dos veces la… que son dos kilos de café.

Se hace una intervención para que tenga sentido para el estudiante escribir el término algebraico como $390x$ y lo inconveniente de escribir paréntesis entre cada uno de los términos. Para la última condición del problema se hace una intervención para que el estudiante genere un sentido intermedio mediante un estrato del MAES. Con el retorno a un estrato más concreto el estudiante logra reconocer la relación, pero vuelve a utilizar el código personal intermedio.

L395 I: Ahora nos queda una última condición y esa condición dice ¿qué cosa?
L396 G: Dice que para hacer 20 kilos… dice la mezcla contiene tres kilos más del café tipo A.
L397 I: Que del tipo B. ¿Cómo podemos expresar esa condición? Solamente vamos a pensar en estos dos cafés de tipo A y de tipo B que para nosotros son equis y ye.
[…]
L398 G: Sería… [El estudiante se queda pensando] *¡Ay ya no sé cómo se podría representar!* [dice mientras se lleva las manos a la cabeza]
L399 I: Piensa por ejemplo que del tipo A tenemos ocho kilos. ¿Cuántos tendríamos del tipo B?
L400 G: Ocho kilos… tendríamos cinco.
L401 I: Muy bien. ¿Qué hiciste [para saber el valor]*?*
L402 G: Bueno, de los ocho kilos de café tipo A se le restaron los tres que tiene más y eso me dio cinco.
L403 I: Ajá. Es decir, a la cantidad de kilos de café tipo A le restaste tres kilos y eso fue igual a la cantidad de café del tipo B. Entonces nuestra cantidad de café del tipo A ¿cómo la representamos?
L404 G: Entonces ¡ah, ok! Entonces sería $x-3=b$ [Verbaliza mientras escribe.]
L405 I: A ye.
L406 G: Sí, se me olvidó.
[Se obtiene el SEL de la Figura 5.37]

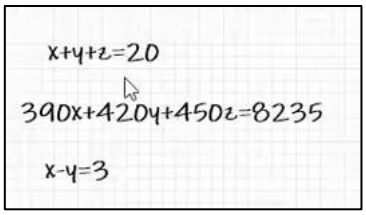


Figura 5.37 SEL de A8P5 de Gabriel.

En el proceso de reducción del SEL, el estudiante hace una generalización (ya que previamente se inició en todos los casos reduciendo la variable x) pues decide iniciar con la tercera variable (z) una vez que se le hace notar que una de las ecuaciones no tiene la variable z. Esto evidencia que existe producción de sentido respecto a diferentes formas de utilizar el método de Gauss.

L407 I: Hay que escalonarlo, ¿qué se te ocurre que podamos hacer?
L408 G: Ok, escalonarlo si ya no tenemos zeta… [Se queda pensativo.] Podríamos trabajar con la dos, la de los números más grandes.
L409 I: ¿Qué podríamos hacer para eliminar la zeta de la segunda ecuación?
L410 G: Multiplicar 450 por toda la ecuación uno y la ecuación dos multiplicarla por uno. Menos uno, perdón, menos uno.

El estudiante aplica el método para reducir x en forma competente (Figura 5.38).

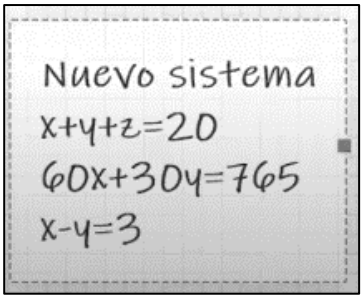


Figura 5.38 Primera etapa del método de Gauss en A8P5 de Gabriel.

Posteriormente elige y de la segunda ecuación como siguiente variable para reducir. En este caso tuvo algunas dificultades con los signos y otras que parecían tener relación con la falta de organización de la escritura en la pizarra electrónica como puede observarse en la Figura 5.38.

L411 I: Entonces, ¿cómo tenemos que trabajar? ¿Qué tenemos que hacer?
L412 G: Entonces tengo que multiplicar la ecuación dos por menos uno y la ecuación tres por 30.
L413 I: La segunda se queda tal cual ¿no? Y la tercera es la que se va a multiplicar por treinta.
L414 G: ¡Ay, ya me atoré! ¡Ya me perdí con los números!
L415 I: A ver, tranquilo.
L416 G: Para que la ye me quede negativa en las… en una de las dos.
L417 I: Si te fijas la ye ya está de diferente signo.

Se explican al estudiante las operaciones propuestas en relación con los signos y posteriormente escribe el resultado de las operaciones mientras las realiza mentalmente, pero presenta dificultades con la suma algebraica, suma el lado sin multiplicar y no elimina ninguna variable por un error en los signos, pero parece no reconocer el sentido de la operación ya que no identifica el error (Figura 5.39). Se hace una intervención para que el estudiante recalcule las operaciones y obtenga una ecuación adecuada.

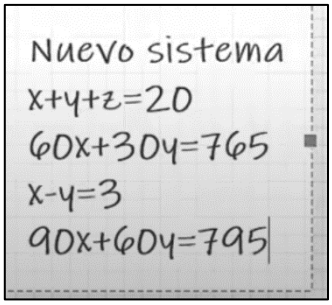


Figura 5.39 Dificultades de Gabriel en la aplicación del método de Gauss.

Se pide al estudiante que reescriba nuevo sistema ya escalonado y sobre este realiza las transformaciones algebraicas necesarias para encontrar los valores de las variables. Finalmente, el estudiante le da un sentido erróneo al conjunto de valores encontrados, probablemente derivada del trabajo con A8P4, en el que existen múltiples soluciones posibles para el problema, por lo que consideramos que se presenta una generalización errónea al encontrar el valor de dos de las variables con base en el valor de la primera ya que, en el problema anterior, propusimos un valor de una variable para encontrar una posible solución al problema.

L418 I: ¿Qué significan esos valores que acabamos de encontrar ahorita de equis, ye y zeta? ¿Qué significan?
L419 G: Que serían una de las… que serían una de las posibles propuestas ¿de lo que se tendría que poner de cada café?
L420 I: ¿Son posibles propuestas? ¿Son posibles soluciones [es una posible solución]? ¿O es la solución?
L421 G: Yo digo que podrían ser posibles soluciones, porque ye depende de equis.
L422 I: Pero nosotros encontramos un valor específico de equis, no lo propusimos.
L423 G: ¡Ah! Entonces es la única solución.

Informe de Tendencias cognitivas identificadas en la Actividad 7

En el proceso de resolución de A8P2 encontramos la Tendencia Cognitiva 7, la presencia de un mecanismo apelativo (escalonar el SEL sin realizar las operaciones sobre renglón) que provocó un proceso erróneo de resolución (L227-L230 y Figura 5.30). Encontramos, además, la Tendencia Cognitiva 4, ya que previamente el estudiante no había tenido dificultades para realizar las transformaciones algebraicas necesarias para resolver SEL escalonados, sin embargo, presenta dificultades para identificar que debe encontrar el valor numérico de la variable y (L236-L244).

En la resolución de A8P4 se evidencia la Tendencia Cognitiva 8 ya que la representación de cantidades desconocidas aumentadas es un mecanismo que inhibe la capacidad del estudiante para modelar la ecuación (L281-282). Además, se observa la Tendencia Cognitiva 5 ya que el estudiante realiza una lectura estratificada que no le permite modelar (transformar) adecuadamente la condición y que le llevaría a errores en la resolución. El estudiante intenta plantear la ecuación mediante el análisis de las relaciones entre cantidades conocidas y desconocidas (MC), sin embargo, combina las condiciones en una misma ecuación relacionando en forma inadecuada las cantidades (L283-L287).

Encontramos en el primer intento de resolución de A8P4 la Tendencia Cognitiva 7, ya que el estudiante a pesar de reconocer que el SEL que modela el problema ya está escalonado, no intenta encontrar el valor numérico de una de las variables, como sí lo efectuó en la resolución de los problemas previos, sino que intenta sumar (como mecanismo apelativo) las ecuaciones como paso a seguir en la resolución del SEL (L310-L323). Una vez iniciado el proceso de resolución encontramos evidencia de la Tendencia Cognitiva 8 (La presencia de mecanismos inhibitorios) ya que en procesos previos fue competente para realizar las transformaciones algebraicas necesarias para despejar una variable en expresiones con una sola literal, consideramos que el hecho de que la ecuación tuviera dos literales fue un mecanismo inhibitorio (L340-L345 y Figura 5.35).

En la etapa de modelar algebraicamente A8P5 observamos la Tendencia Cognitiva 5, al encontrar que nuevamente el estudiante combina condiciones en una misma ecuación sin relacionar en forma adecuada las cantidades conocidas y desconocidas (L364-L372). Además, se evidenció la producción de códigos personales intermedios (L373-380 y Figura

5.36). Consideramos que en la interpretación de la solución de A8P5 el estudiante realizó una generalización errónea (Tendencia Cognitiva 6) ya que consideró que la solución encontrada era una de muchas posibles (L418-L423).

5.4 El caso de Ana

5.4.1 Actividad 1. Intertextualidad y producción de sentido

Al inicio de la Actividad 1 la estudiante caracteriza la ecuación lineal al hacer el análisis de las expresiones algebraicas, sin embargo, observamos producción de sentido en la revisión de resultados como $0=0$ y $a=b$ al resolver las ecuaciones, así como de la naturaleza de la solución de ecuaciones del tipo $ax+by=c$. Además, a través de intervención didáctica con el uso del MIAS, para la estudiante toma sentido la multiplicidad de soluciones del problema de enunciado con una condición y dos cantidades desconocidas y la infinidad de soluciones del modelo algebraico que lo representa.

Con respecto a las expresiones A1S1 la estudiante en general identifica las expresiones que son ecuaciones y aplica las reglas algebraicas adecuadas para resolver de forma competente las ecuaciones de primer grado con una incógnita. Por la terminología que utiliza en A1S1a se observa que su intertexto le permite hacer una lectura de las ecuaciones de primer grado y de algunos elementos como incógnita, variable, igualación y grado de la ecuación.

L1	*I: El primero es 3m+1 y la pregunta es si ¿esto es o no una ecuación? Para ti ¿es o no es una ecuación?*
L2	*A: Sí, sí es una ecuación.*
L3	*I: ¿Por qué?*
L4	*A: Porque cuenta con una variable.*
L5	*I: Ok.*
L6	*A: Tiene la incógnita que es m.*
L7	*I: Muy bien. ¿Alguna otra cosa más?*
L8	*A: Tiene una igualación. Y según yo es de primer grado y solamente cuenta con una variable.*
L9	*I: Muy bien. ¿La pudiste resolver?*
L10	*A: Sí.*

Al iniciar el análisis de A1S1b identifica la expresión como una ecuación, pero no puede hacer una lectura del resultado obtenido al tratar de resolver la ecuación.

[Respecto a A1S1b]
L11 I: Para ti, ¿es o no es una ecuación?
L12 A: Sí, sí es una ecuación. Igual tiene una variable y es una ecuación de segundo grado.
L13 I: Ok. Y ¿la resolviste? ¿La pudiste resolver?
L14 A: Sí, sí, me da como igualación. El igual me da en ceros ambas partes.
L15 I: ¿Cero igual a cero?
L16 A: Ajá. [Asiente.]
L17 I: Y para ti, ¿eso qué significa?
L18 A: Eeeh, pues que… digamos que se despeja, bueno no se despeja se simplifica hasta su mínima expresión y eso es igual a cero.

Mediante una intervención se explica que A1S1b es una ecuación que se cumple para cualquier valor de la variable y que al transformarla algebraicamente para tratar de resolverla obtiene la expresión *0=0*.

La estudiante realiza transformaciones algebraicas sobre A1S1h, ecuación de primer grado con dos incógnitas, pero no encuentra sentido al resultado que obtiene, posiblemente debido a que el intertexto de la estudiante con respecto a la resolución de ecuaciones de primer grado estuviera centrado en encontrar un valor numérico único y al no obtenerlo le hace dudar que la expresión fuera una ecuación.

L19 I: x-3y=0, ¿es o no es una ecuación?
L20 A: Sí es una ecuación, pero realmente tuve como duda.
L21 I: Es una ecuación. ¿De qué tipo sería?
L22 A: Primer grado…
L23 I: Pero con dos incógnitas, ¿cierto?
L24 A: Ajá.
L25 I: Entonces aquí te pide que resuelvas si es posible, ¿tú qué hiciste? [La estudiante explica el proceso para llegar a *x=3y*.]
L26 I: ¿Y hasta aquí llegaste?
L27 A: Sí.

Mediante la intervención didáctica la estudiante identifica que A1S1h tiene infinita cantidad de soluciones tras analizar que al dar valores a una de las variables se obtienen valores para la otra variable.

[Se proponen dos valores para una de las variables y se obtienen valores correspondientes para la otra (Figura 5.40).]
L28 I: Entonces, ¿cuántas soluciones tiene esta ecuación?
L29 A: Tiene dos, ¿no?
L30 I: ¿Dos? ¿Y si le doy tres aquí? [Se escribe 3 en la primera columna y el cálculo para la segunda.]
L31 A: Ah bueno sí.
L32 I: Y le puedo seguir dando, yo le puedo dar punto cinco, un cuarto, etc. Ye puede valer lo que yo quiera. Y equis va a valer dependiendo de lo que valga ye. ¿Entonces cuántas soluciones tiene esta ecuación?
L33 A: Pues son infinitas, muchísimas.

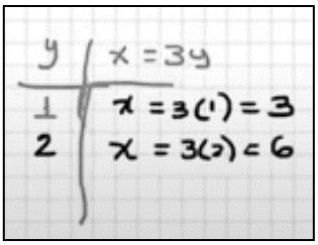


Figura 5.40 Dos soluciones para A1S1h con Ana.

Para A1S1j, ecuación de primer grado con tres incógnitas, la estudiante generaliza el análisis hecho con A1S1h, ecuación de primer grado con dos incógnitas y reconoce que tiene infinita cantidad de soluciones.

L34 I: Aquí tenemos la última $2x-3y-z=-1$. *¿Eso es una ecuación?*
L35 A: Yo puse que sí, es una ecuación y es una de primer grado.
L36 I: Y me podrías decir una ecuación como esta ¿tiene alguna solución? No qué solución, sino si tiene alguna solución.
L37 A: Sí, yo creo que sí tiene solución sin embargo no es como tan tradicional, porque a lo que yo llegué fue a igualar equis a… [La estudiante explica que despejó la variable *x*. Se le recuerda que es un caso parecido a A1S1h.]
L38 I: ¿Cuántas soluciones tendrá esto?
L39 A: Ah yo creo que son infinitas.

Mediante el análisis de A1S2 en el que se hace intervención para trabajar con estratos de los métodos MIAS, la estudiante identifica las soluciones posibles al problema (Figura 5.41).

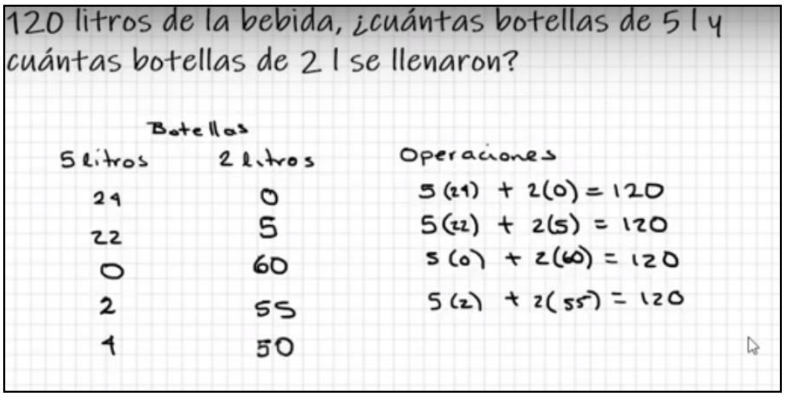


Figura 5.41

Además, con base en las exploraciones sucesivas la estudiante propone en forma competente la ecuación que relaciona las dos cantidades desconocidas e identifica que la expresión algebraica tiene infinita cantidad de soluciones mientras que el problema, por sus condiciones tiene únicamente 13 soluciones posibles.

L40 I: ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el problema? Como expresión algebraica, ¿cómo lo podríamos representar?
L41 A: Creo que la primera parte podría ser, bueno poner una incógnita en la parte del… que acompañe al 5 y ya de ahí saber cuántas botellas se llenarían partiendo de las 120 y de las que ya tienen los dos litros.

Se propone a la estudiante escribir x como encabezado de la columna que representa la cantidad de botellas con capacidad de 5 litros y y como encabezado de la columna que representa la cantidad de botellas con capacidad de 2 litros.

L42 I: Entonces, ¿cómo quedaría la expresión?
L43 A: Quedaría 5x y el dos está acompañado de la ye.
L44 I: 5x+2y ¿igual a?
L45 A: Cero, ah no 120 perdón.
L46 I: Esta sería la expresión algebraica que representa este problema.
L47 A: Ok.
L48 I: Pero ojo porque nuestro problema tiene solamente 13 posibles soluciones. Esta expresión, nosotros ya habíamos visto una expresión como esta en las expresiones anteriores. Esta ecuación ¿cuántas soluciones tiene?
L49 A: [Se queda pensativa unos segundos.] ¡Ah! Son infinitas, tiene las dos variables.

Al finalizar la actividad, a pregunta expresa, la estudiante identifica características de las ecuaciones en general, sin embargo, menciona que “nos llevan a un resultado determinado”

por lo que consideramos que aún no se incorporan a su intertexto las posibilidades de no tener una solución única.

L50 I: Que es una ecuación y qué elementos la componen
L51 A: pues es que podría decir que una ecuación es como un conjunto de factores que nos llevan a un resultado determinado y lleva consigo variables números signos e igualaciones y… ya.

Con respecto a las ecuaciones de primer grado la estudiante menciona que "no está elevada", por lo cual se hace una intervención para puntualizar que su exponente es uno.

L52 I: pero en particular las de primer grado que me dirías con respecto a ellas ¿cómo son?
L53 A: Pues la diferencia es que las de primer grado cuentan con todos los elementos que ya hemos visto pero la diferencia es que… ¿cómo se puede decir? la variable no está elevada.
L54 I: Ok al decir la variable no está elevada lo que supongo que quiere decir es que no se ve que haya un exponente ¿cierto? […] entonces cuando nosotros decimos o vemos que no está elevada a ningún exponente efectivamente está elevado a la 1 y por lo tanto es de primer grado ¿cierto?

5.4.2 Actividad 2. Intertextualidad y producción de sentido

El intertexto de la estudiante le permite realizar a priori transformaciones algebraicas necesarias para la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita que involucran fracciones, símbolos de agrupación y operaciones con variables; observamos producción de sentido en la posibilidad de que no siempre el proceso de resolución lleva a encontrar un único valor de la variable. Al resolver una ecuación de primer grado con dos variables, mediante intervención, la estudiante produce sentido respecto a que esta tiene infinitas soluciones.

La estudiante resuelve en forma competente ecuaciones de primer grado que involucran signos de agrupación y racionales. El intertexto de la estudiante le permite leer y transformar adecuadamente A2S1a y dar sentido a la solución (Figura 5.42).

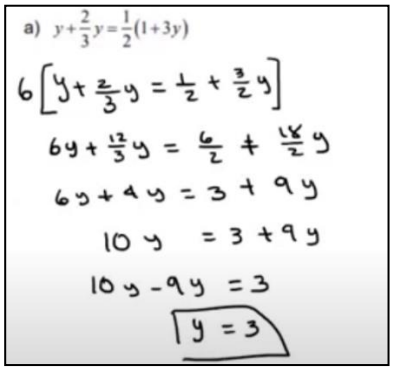


Figura 5.42

En A2S1b, ecuación de primer grado sin solución, la estudiante le da un sentido erróneo al resultado encontrado. La respuesta de la estudiante evidencia que su intertexto respecto a ecuaciones que no tienen una solución única la hace concluir que la variable puede tomar cualquier valor; en A1 se trabajó el caso de identidades o ecuaciones que se cumplen para cualquier valor de la variable y ese caso pudo incorporarse a su red intertextual. Se realizó una intervención para promover la producción de sentido respecto a resultados de la forma $a=b$.

[Una vez que se ha llegado al resultado *0=7*]
L55 I: ¿Qué significa esto para ti?
L56 A: Creo que la… es que yo investigándolo saqué que la proporción es falsa y que cualquier valor… que se le puede dar valor a t.

En A2S1d el intertexto de la estudiante con respecto a resultados del tipo $0=0$ y la intervención para ajustar su discurso le permite identificar que la ecuación tiene infinita cantidad de soluciones.

[Al llegar al resultado *0=0*]
L57 I: ¿Qué supones tú que significa esto 0=0?
L58 A: Habíamos visto que esto significa infinito número de valores ¿no?
L59 I: Y eso ¿qué significa, básicamente?
L60 A: Que la zeta puede ir acompañada de cualquier valor.
L61 I: ¿Te refieres a que la zeta puede tomar cualquier valor?
L62 A: Sí.

Aunque en la primera actividad la estudiante mostraba dudas respecto a que $x-3y=0$ fuera una ecuación, al iniciar A2S2 la estudiante expresa un ejemplo de ecuación de primer grado

con dos incógnitas, con lo que puede deducirse que hubo un cambio en el intertexto de la estudiante.

L63 I: ¿Me podrías dar un ejemplo de una ecuación de primer grado con dos incógnitas?
L64 A: Sí podríamos poner 2x+3=2y+6
[…]
L65 I: ¿cuántas soluciones crees tú que pueda tener una ecuación de primer grado, pero con dos incógnitas.
L66 A: Pues primero podemos tener nada más con una solución por parte de las dos incógnitas, o sea las dos, dos soluciones.
[…]
L67 I: Ahora estamos hablando de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas y tú me dices que entonces podría ser dos soluciones. ¿Qué más podría ser de acuerdo a lo que infieres, a lo que tú piensas?
L68 A: No sé si podría contener infinito…infinito número de soluciones.
L69 I: ¿Y qué más o nada más esas?
L70 E2: No sé… también podríamos abrirnos a la posibilidad de que no podría tener soluciones sino un número simplificado.

El intertexto de la estudiante, que posiblemente está centrado en la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita analizados en los incisos anteriores, no le permite hacer una lectura de la resolución de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, a pesar de que una ecuación del mismo tipo se analizó en A1.

L71 I: Aquí estamos considerando que tenemos una ecuación de primer grado con dos incógnitas. Entonces, ¿qué haríamos para resolverla? ¿qué se te ocurre hacer?
L72 A: Ay en esa ya… ya no se me ocurre nada.

Se hace una intervención para provocar la producción de sentido respecto a que las ecuaciones cuya forma es $ax + by = c$ tienen infinitas soluciones.

5.4.3 Actividad 3. Intertextualidad y producción de sentido

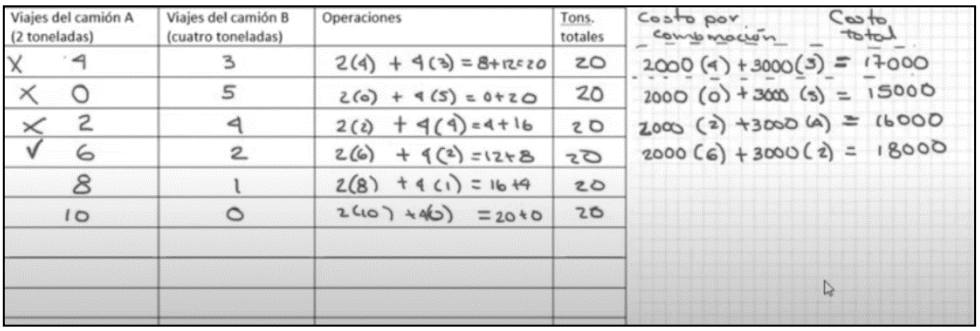
En el desarrollo de la Actividad 3 con Ana, observamos producción de sentido con respecto a la multiplicidad de soluciones de cada una de las condiciones de un problema con dos cantidades desconocidas y cómo es posible encontrar la solución común mediante inferencias. Mediante el uso del MAES la estudiante identificó, como herramienta de apoyo

para la modelación algebraica, el uso de valores concretos para explorar las condiciones y proponer ecuaciones para representarlas. Se establece la necesidad de desvincular el modelo algebraico del contexto para realizar las transformaciones algebraicas, pero en cada problema la estudiante relaciona en forma competente la solución con las condiciones del problema. Aunque no logra definir las ecuaciones con una primera lectura de los problemas de enunciado, consideramos que es importante el uso de estratos más concretos como apoyo para el análisis de las condiciones.

En A3P1 se hace una intervención para la aplicación de un estrato del MIAS en la resolución de un problema de enunciado. Retoma de su intertexto un problema similar, pero hace una lectura estratificada del proceso de análisis que no le permite responder en forma competente; la estudiante expone una solución encontrada mediante prueba y error intentando emular el proceso de análisis de A1S2 (problema de enunciado de llenado de botellas), pero no logra proponer más soluciones y por lo tanto tampoco logra responder cuál es la cantidad de soluciones sin intervención.

[Se da lectura a la primera parte de A3P1]
L73 I: No sé si tuviste oportunidad de revisarlo.
L74 A: Tuve oportunidad de revisarlo, pero me estanqué como que no me acordé bien de la forma en que hicimos el otro, pero sí pues busqué ahí unas soluciones […] en la parte de que por ejemplo el problema anterior en con el que nos habíamos guiado, la solución realmente yo hacía la gráfica de equis y ye y empecé como a lo que hacíamos las primeras sesiones en las que eran… ponía los valores de un lado y ponía valores del otro, ponía valores de un lado y valores del otro y después iba compensando cada uno pero al final no me salían exacto como lo pide el problema.
[…]
L75 I: pues platícame si encontraste alguna solución en particular algún par de valores que tú digas "esto es solución de este problema"
[…]
L76 A: …es que yo lo demás lo igualé o sea intenté darle los mismos valores, bueno, es que dice que no viajó con menos de su capacidad entonces lo que yo estaba haciendo era […] cómo explicarlo, le di a los dos camiones la misma capacidad y el mismo número de viajes y nada más pues me salió tres viajes por parte del camión de cuatro toneladas y cuatro viajes por parte del camión de dos toneladas.

Una vez encontrados los valores que cumplen las dos condiciones del problema (Figura 5.43) la estudiante expresa la solución en términos del problema, considerando una de las condiciones.



Viajes del camión A (2 toneladas)	Viajes del camión B (cuatro toneladas)	Operaciones	Tons. totales	Costo por combinación / Costo total
X 4	3	2(4) + 4(3) = 8+12=20	20	2000 (4) + 3000 (3) = 17000
X 0	5	2(0) + 4(5) = 0+20	20	2000 (0) + 3000 (5) = 15000
X 2	4	2(2) + 4(4) = 4+16	20	2000 (2) + 3000 (4) = 16000
✓ 6	2	2(6) + 4(2) = 12+8	20	2000 (6) + 3000 (2) = 18000
8	1	2(8) + 4(1) = 16+4	20	
10	0	2(10) + 4(0) = 20+0	20	

Figura 5.43

L77 I: Me podrías decir cómo interpretamos esta respuesta en términos del problema
L78 A: Pues el camión hizo seis viajes en total cada uno con un costo de dos mil pesos y el camión hizo dos viajes en total con un costo de tres mil pesos lo que es igual al presupuesto de la nota, 18 mil pesos.
L79 I: Perfecto y entre los dos pues hicieron un transporte de 20 toneladas.

En A3P2, mediante intervención, la estudiante pudo encontrar las ecuaciones relacionadas con las condiciones del problema, a partir de las operaciones aritméticas obtenidas al explorar un posible valor de una de las cantidades desconocidas, esto es, con el uso del método MAES.

L80 I: Aquí dice que hay peluches grandes y peluches pequeños […] que los peluches grandes cuestan 50 pesos más que el doble de los pequeños. Lo que vamos a hacer aquí es digamos que los pequeños cuestan 100 pesos. Entonces, ¿cuánto costarían los grandes?
L81 A: 250
L82 I: Muy bien, 250, ¿qué es lo que tuviste que hacer para saber que los grandes cuestan 250?
L83 A: Pues se encuentra el doble del número y se le suman los 50 pesos que es el total de la diferencia que tiene que haber con grandes y pequeños.

En esta actividad la estudiante no fue competente para resolver el SEL de dos ecuaciones con dos incógnitas obtenido en A3P2. Propone utilizar el método de sustitución, pero asume que el método consiste en el análisis sucesivo de inferencias y no desvincula el sistema en su forma algebraica del contexto. Se hace una intervención para explicar la posibilidad y

conveniencia de desvincular el SEL de su contexto durante la resolución mediante transformaciones algébricas y para la resolución.

[Se le pregunta a la estudiante si recuerda algún método para resolver sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.]
L84 A: Me acuerdo nada más del de sustitución que era como el más sencillo.
L85 I: Ok, entonces, ¿me ayudas con eso? ¿Qué harías aquí? Fíjate como aquí ya está despejada la ye, entonces está perfecto para sustitución. ¿Qué hacemos?
L86 A: Yo creo que si solamente conocemos digo valor más cercano es el de los peluches pequeños podríamos darle un valor semejante al que teníamos antes y desde ahí partir poniendo ese como incógnita ¿tal vez?

En A3P3 la estudiante no logró hacer una lectura que le permitiera identificar las condiciones del problema en forma independiente.

L87 I: Así nada más viendo el problema ¿me podrías decir alguna ecuación que nos represente alguna de las condiciones del problema?
[La estudiante se queda pensativa.]
L88 A: No sé si se deba igualar a diez o a ocho yo creo que es a ocho ¿no?
L89 I: Ok. Hay los dos casos, en un caso igualamos a ocho y en otro en otro caso igualamos a diez. Solamente hay que saber qué es lo que hay que igualar.

Mediante una intervención guiada en un estrato del MAES y el método de reducción por suma y resta se modela y se resuelve el problema.

L90 I: Fíjate que respondió diez preguntas en total, en algunas se equivocó y en otras acertó. Ahorita nada más vamos a enfocarnos en la cantidad de preguntas que eran 10. Supongamos que acertó en tres ocasiones, ¿cuántos errores habría tenido? En total son 10 preguntas.
L91 A: Sólo tuvo siete errores.
L92 I: Muy bien entonces serían cantidad de aciertos [escribe 3] más cantidad de errores que son siete y eso nos da 10. Con esa información ¿crees que podrías decirme una de las condiciones?
L93 A: Tendríamos como valor de equis, tres, como valor de ye, siete y lo tendríamos que igualar a 10.
L94 I: Ok. Pero tres y siete son una suposición que nosotros hicimos porque ese 3 y 7 no necesariamente son así, si la cantidad de aciertos hubiera sido 8 ¿cuántos errores habría tenido?
L95 A: 2
L96 I: Y eso nos daría 10 ¿cierto? es decir estas son cantidades que estamos imaginando, que estamos proponiendo, pero que representan a cantidades

desconocidas. […] Es decir la condición es que entre estas dos nos den 10. Entonces, ¿cómo nos quedaría la ecuación?
L97 A: Sólo quedaría pues la incógnita equis más ye igual a 10 [$x + y = 10$].

En A3P4 la estudiante no definió en forma competente las ecuaciones con base en el problema, el proceso del problema previo y el método de explorar valores aún no forman parte de su intertexto. Al igual que en los casos descritos previamente, encontramos que la estudiante combinó las dos condiciones sin poner una de las cantidades desconocidas en términos de la otra, sino que traduce el enunciado en forma directa, lo cual es una tendencia al modelar condiciones mediante ecuaciones. Encontramos, además, que la estudiante se refiere al coeficiente como "acompañante".

L98 I: Entonces así de entrada analízalo un poquito y dime si encuentras por ahí una ecuación que esté representando una de las condiciones del problema.
[La estudiante propone representar la medida del lado mayor con la letra *x*, cuyo valor es el triple que el lado menor *(y)*]
L99 A: En realidad puedo plantearlo como 3x+y=73.6
L100 I: ¿Esta es tu propuesta de una de las condiciones? ¿o de qué? Platícame.
L101 A: pues sería si queremos encontrar el valor de dos lados tenemos que saber que el lado mayor está pidiendo el triple que el lado menor, entonces eso sería como la primera incógnita o lo primero que queremos saber y el perímetro total es 73.6 y el lado menor es una incógnita, pues, normal no tiene ningún acompañante.

Nuevamente se hace una intervención para modelar las ecuaciones realizando exploraciones mediante valores concretos para darle sentido a las relaciones entre las cantidades desconocidas y para, posteriormente, resolver el SEL.

En todos los casos la estudiante fue competente para expresar en términos de los problemas de enunciado los valores obtenidos de las incógnitas.

Informe de Tendencias cognitivas identificadas en la Actividad 3

En el desarrollo de A3P4 observamos la Tendencia Cognitiva 5, esto es, la lectura realizada por la estudiante para modelar una de las condiciones del problema no es adecuada ya que combina dos condiciones en una única ecuación relacionando las cantidades de manera que la llevaría a errores en la resolución (L98-L101).

5.4.4 Actividad 4. Intertextualidad y producción de sentido

La Actividad 4, cuyo objetivo es que los estudiantes reconozcan los SEL en diferentes sistemas de signos matemáticos, representó un reto para la estudiante, ya que sus respuestas evidencian que su conocimiento de los objetos matemáticos está enfocado en las transformaciones algebraicas; sin embargo, mediante intervenciones didácticas se observó producción de sentido con respecto a la manera en que las tablas de valores numéricos se relacionan con SEL y con las condiciones de un problema, la forma en la que se relacionan los sistemas de dos y tres ecuaciones con dos incógnitas con su representación en el SSM del plano de ejes coordenados y que en este sistema de signos aun cuando no se observe la intersección de dos rectas no paralelas que representan ecuaciones de un SEL, existe solución.

En A4S1 la estudiante tiene problemas para relacionar los SEL en su forma algebraica con los SEL en el SSM del plano de ejes coordenados.

[Se muestra a la estudiante A1S1.]
L102 I: Entonces platícame ¿qué pusiste en estos? ¿Sí los pudiste hacer o quieres que los revisemos juntas?
L103 A: Ay no, ese, el seis y creo que era el cinco. Esos no.

Mediante una intervención se hace la relación de las rectas con las ecuaciones de cada SEL de A4S1 y la estudiante identifica que cada ecuación de primer grado con dos incógnitas representa una recta y viceversa.

En A4S2, en lugar de relacionar directamente las condiciones del problema con los datos numéricos proporcionados, la estudiante menciona haber tratado de encontrar el modelo algebraico como un paso intermedio, rescatando el parecido del enunciado de A4S2 con A3P4 en cual uno de los objetivos era modelar las ecuaciones en forma algebraica. Es posible que, dado que en su intertexto no figuraba la relación directa entre las condiciones en forma de enunciado y las tablas con valores numéricos, la estudiante vinculara el proceso de resolución con el enunciado de situación problemática similar.

L104 I: …lo que nos están pidiendo es que identifiquemos cuál de las siguientes parejas de tablas representa a las condiciones del problema. Entonces, ¿éste si lo pudiste resolver'
L105 A: En este me quedé a medias.

L106 I: Ok, ¿qué hiciste? Platícame.
L107 A: Pues es que en realidad me basé en lo que se había hecho antes en el otro problema que hayamos tenido pues parecido y tuve mucho conflicto porque en el otro, bueno, estaba diciendo que era el doble del otro de sus lados, o el triple, no lo recuerdo bien y aquí solamente nos está diciendo que aumenta con dos centímetros y entonces tuve bastante problema porque no supe bien cómo plantear la ecuación para después encontrar equis y ye.
L108 I: Bueno, de hecho, no es necesario encontrar como tal la ecuación solamente identificar las condiciones…

Se hace una intervención para que en A4S2 la estudiante identifique de qué manera las tablas de valores numéricos se relacionan con las condiciones del problema.

En A4S3 nuevamente se observa la tendencia a construir ecuaciones como un paso intermedio. Es posible que, dado que el intertexto de la estudiante no le permite darle sentido al proceso de construir un problema de enunciado dada la solución, intente construir una ecuación con base en la solución buscando un sentido intermedio; sin embargo, no logra desempeñarse en ese proceso en forma competente. En la ecuación que propone involucra correctamente la igualdad entre dos valores, pero agrega el tercer valor con lo cual se pierde la relación y la igualdad.

L109 I: Ahora vamos a ver este siguiente […] *ya no te estoy dando un problema, sino que te pido que tú pienses en algún problema en donde la respuesta sean esos valores. ¿Se te ocurrió algo?*
L110 A: Solamente se me ocurrió una ecuación de tres términos como habíamos visto antes, pero en realidad planteando el problema, pues no.
L111 I: Bueno, vamos a ver, ¿cuál sería esa ecuación?
L112 A: Solamente enuncié … lo planteé así con una equis 5, ye 2.5 y empecé con eso, pero como ¡Ay, es que hice una cosa muy extraña! Empecé con los resultados y después para atrás.
L113 I: Perfecto platícame ¿qué fue lo que hiciste o como te quedó? Cuéntame.
L114 A: Pues normalmente nada más empecé con equis 5, ye 2.5 y zeta nada más con uno y yo había aprendido algo antes en donde primero buscaba un factor común y desde ahí tenía como que tenía que ir subiendo los valores para después sacar el número más simplificado y que ese fuera el resultado.
L115 I: Entonces, ¿tienes alguna propuesta aquí?
L116 A: No, no. Tal cual no.
L117 I: Entonces, bueno, de acuerdo con lo que me estuviste diciendo ¿qué podríamos hacer aquí?

L118 A: Yo creo que se podría elevar cada uno de estos números a un número que sea múltiplo de todos y ya después irlos simplificando.
L119 I: Por ejemplo, ¿un múltiplo de 5?
L120 A: Por ejemplo, ye es la mitad de lo que vale equis entonces sería elevar ye pues al cuadrado y con z pues yo la dejé así todo el tiempo como que la constante siempre fue uno, uno, uno.
L121 I: ¿Ye al cuadrado o dos ye? [mientras escribe]
L122 A: No, dos ye.
L123 I: ¿y eso sería igual a quién? [Escribe signo de igual.]
L124 A: Igual a… nada más sería a equis y yo lo dejaría nada más con más uno. Bueno más zeta.
[La ecuación queda como $2y = x + z$.]

Posterior a esta discusión, y dada la iniciativa de la estudiante, se hace una intervención para mostrar la forma de construir ecuaciones con la solución planteada y el por qué la solución no era válida para la ecuación propuesta. La estudiante replica en forma competente el método para generar una ecuación a partir de los valores de la solución. Una vez construido el sistema de ecuaciones, la estudiante logra definir un enunciado con condiciones relacionadas a cada una de las ecuaciones.

L125 I: Con base en estas ecuaciones ¿crees que podemos encontrar algún problema? ¿se te ocurre algún problema que cumpla digamos… que sus condiciones se pueden modelar de esta manera? […]
L126 A: Podría ser el… no sé, se me ocurre el valor de una ficha, por ejemplo.
L127 I: El valor de una ficha… ¿que cada uno de estos sea una ficha diferente?
L128 A: Ajá, son fichas diferentes y en el caso de la segunda ecuación son dos fichas de tal tres fichas de tal y solamente una ficha de tal entonces el valor total de todas estas me va a dar 16.5.

En A4S4 la estudiante no logró, sin intervención, identificar el sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas que se relacionaba con las tres tablas de valores numéricos, e incluso con el proceso guiado la estudiante mostró confusión para seguir las sustituciones necesarias para resolver la situación. Al igual que en A4S2 se evidencia que el contexto del uso de tablas para la representación de valores de un SEL no forma parte del objeto mental SEL de la estudiante y representa para ella un mecanismo inhibitorio.

L129 I: Acuérdate que lo que nosotros buscamos es que se cumplan las condiciones de estas ecuaciones
[…]

L130 I: [Se sustituyen valores x=12 y y=0 en la ecuación $x = y - 12$.] *Vamos a ver qué pasa aquí. Son equis igual a ye menos 12 y equis vale 12 y ye vale cero ¿ok? entonces si nosotros sustituyéramos estos estos dos valores, aquí nos quedaría que 12 es igual a 0-12. ¿12 es igual a menos 12?*
L131 A: Sí se está cumpliendo.

En A4S5, el intertexto de la estudiante con respecto a la solución de SEL en el plano de ejes coordenados le permite hacer una lectura de su relación con las intersecciones, pero no logra darle sentido a la inexistencia de solución del sistema de tres ecuaciones y dos incógnitas antes de la intervención, la cual se realiza mediante el tratamiento algebraico.

L132 I: Entonces son tres ecuaciones con dos incógnitas. ¿Qué me puedes decir con respecto a la solución de ese sistema de ecuaciones? ¿Hay solución, no hay solución, cuál sería? ¿Tú que crees?
L133 A: Pues sólo dos de las rectas pasan por el mismo punto.
L134 I: Ok. ¿Cuál es el punto por donde pasan dos de las rectas? ¿Cuáles rectas? ¿Sí alcanzas a ver los colores?
L135 A: Rectas roja y verde pasan por el punto 1.5 en equis y menos 1.5 en ye.
L136 I: ¿Ese es el único punto que tú crees que coinciden dos rectas o hay otros puntos?
L137 A: No, no. Hay otros puntos en el que coincide con la recta azul… azul con roja y azul con verde.
[…]
L138 I: Tenemos tres coincidencias, pero se están cruzando únicamente dos rectas. ¿Qué significa que se cruzan dos rectas en un punto? Digamos que tenemos un sistema de dos ecuaciones que son la recta azul y la recta roja. ¿Qué significaría que se cruzaran en ese punto qué significa ese punto?
L139 A: Que existen nada más dos ecuaciones… por cada recta, por cada cruce de recta y que con la… con el otro punto con el que si checan… bueno… [Se queda pensativa].

Una vez que se ha expresado el SEL algebraicamente, para la estudiante toma sentido la forma gráfica y logra identificar que el SEL no tiene solución; sin embargo, aún no logra vincular las coordenadas de la intersección con el valor de las cantidades desconocidas en el SEL que hacen que validen las ecuaciones y le da un sentido erróneo, relacionado con las pendientes. Es posible que esto se derivara del hecho de que la construcción de las ecuaciones a partir de sus rectas se realizó empleando la pendiente.

L140 I: Son tres ecuaciones que forman un sistema. Y ese sistema está representado aquí gráficamente […] *Entonces la pregunta es este sistema de ecuaciones, como un sistema, ¿tiene solución?*
L141 A: [Piensa unos segundos] *No.*
L142 I: No tiene solución. ¿Por qué crees que no tiene solución?
L143 A: Porque no hay un punto exacto por el que pasen las tres.
[…]
L144 I: Suponemos que las tres rectas pasan por (2,1). Entonces, ¿qué haría este punto (2,1) con cada una de estas ecuaciones? ¿Qué pasaría si lo sustituyéramos acá?
L145 A: [Se queda pensativa] Podríamos saber cuál es el valor, no sé, ¿de las pendientes de cada recta?

En la intervención se aclara que la solución de un SEL son los valores que al ser sustituidos en cada una de las ecuaciones que lo forman, hacen que se cumplan las igualdades. Además, se analiza, relacionando los dos SSM, el por qué el sistema de A4S5 no tiene solución.

Para A4S6 la estudiante consideró que el SEL representado en el plano mediante rectas "no tiene solución, ya que los puntos nunca se intersecan". Una vez que hizo una intervención mediante el uso de GeoGebra para representar las rectas del SEL, para la estudiante tuvo sentido que el SEL sí tiene solución, aunque en la figura la intersección de las rectas no fuera evidente.

L146 I: Este es un sistema de ecuaciones formado por dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y la pregunta es si crees que tiene solución.
L147 A: Por lo que estuve viendo en lo de la tarea más reciente me parece que yo sigo pensando que no existe una solución porque sigo diciendo que los puntos en ningún momento se intersectan no existe un resultado equivalente ni por sustitución ni por suma o resta en las dos ecuaciones.
[La estudiante menciona que no tiene las ecuaciones del SEL expresado en forma gráfica.]
L148 I: ¿Qué te parece si la revisamos de forma gráfica? [Abre GeoGebra.] *Vamos a tratar de graficar* [en GeoGebra] *el sistema de ecuaciones que tenemos acá.* [Se grafica en GeoGebra el SEL.] *Entonces, si te fijas, nosotros aquí solamente alcanzamos a ver hasta el 4 en ye* [en la actividad], *pero aquí ya se alcanza a ver un poco más* [en GeoGebra]. *Entonces, ahora que la ves así, ¿tú qué crees, tiene o no tiene solución?*
L149 A: Sí, sí.

Informe de Tendencias cognitivas identificadas en la Actividad 4

En esta actividad observamos en general la Tendencia Cognitiva 8, ya que la relación de los SEL y su solución en diferentes SSM representaron mecanismos inhibitorios (por ejemplo, L129-L131), para los cuales la forma y tratamiento algebraico representaban un sentido intermedio para la estudiante.

5.4.5 Actividad 5. Intertextualidad y producción de sentido

En la Actividad 5 cuyo objetivo es analizar la clasificación de los SEL de acuerdo con la naturaleza de su solución, la estudiante logra, mediante la intervención didáctica, producción de sentido en la lectura de los sistemas de hasta tres ecuaciones con tres incógnitas sin solución, con una o con infinitas soluciones en los SSM del plano de ejes coordenados, en tablas de valores numéricos correspondientes y en forma algebraica. Sin embargo, consideramos que, para que lo anterior forme parte de su objeto mental, es necesario que la estudiante tenga nuevos acercamientos que le permitan familiarizarse con este tipo de análisis.

En una primera instancia la estudiante no pudo realizar la lectura de A5S1b (vista tabular), evidenciando nuevamente que este SSM representa un mecanismo inhibitorio. Posiblemente porque en el análisis tabular realizado en la actividad previa no se hizo referencia a la solución en este SSM. Por lo tanto, su red intertextual no le permitió responder a una pregunta relacionada con la solución en ese SSM. Sin embargo, al relacionar mediante intervención didáctica los valores de la recta con los de la tabla, la estudiante pudo identificar los valores en los que las tablas coinciden. En cuanto al SSM del plano de ejes coordenados la estudiante identificó adecuadamente las coordenadas.

L150 I: Entonces, bueno, ¿me podrías decir cuáles son los datos en los que coinciden los valores en la representación tabular?
L151 A: Le iba a decir que eso fue como lo que me llegó a fallar, lo de la tabla; en realidad yo solo lo entendí como los valores de equis y de ye, pero en el segundo inciso [inciso c] *me pregunta pues lo mismo, en qué coordenada se intersectan.*
[Se muestra la concordancia entre puntos de las rectas con valores en las tablas]
L152 I: ¿Donde los valores de la primera tabla coinciden exactamente con los valores de la segunda tabla?

L153 A: En el valor de la coordenada (3,1) en las dos partes.

En A5S1d la estudiante no sustituye ambos valores en las ecuaciones, sino un valor en cada ecuación, encontrando el valor de la otra incógnita en cada caso. Es posible que el intertexto personal de la estudiante no le permita darle sentido a la evaluación de los dos valores como solución en las ecuaciones y por lo tanto la motive a enfocarse en procesos resolutivos. El sentido que le habría dado a la lectura del ítem es el de realizar transformaciones para encontrar soluciones. Finalmente se hace una intervención para mostrar a la estudiante que al sustituir los valores en las ecuaciones se cumplen las igualdades.

L154 I: Aquí lo que se pide es que hay que sustituir estos valores en el sistema de ecuaciones y ver qué pasa. ¿Tú los sustituiste?
L155 A: Sí.
L156 I: ¿Y qué pasó?
L157 A: Pues tengo entendido que se puede tomar cualquiera de las ecuaciones para sustituirlo, entonces tomé la primera ecuación para sustituir equis y la segunda ecuación para sustituir ye, entonces al final me salió en la primera ecuación que ye es igual a uno y en la segunda ecuación que equis es igual a tres.

Una vez que se hace la intervención en A5S1d, aclarando el sentido del ítem, la estudiante es capaz de identificar que ambos valores hacen que se cumplan las igualdades en ambas ecuaciones y a pregunta expresa responde que no existen otros valores que hagan que se cumplan las igualdades; sin embargo, sus argumentos no fueron claros, por lo que se realizó la intervención para mostrar, mediante la aplicación digital, que en el SSM del plano de ejes coordenados no podían existir otros valores en los que coincidieran ambas rectas y que en los valores numéricos expresados en la tablas no volverían a repetirse otras parejas de valores por la tendencia de cada valor dentro de las tablas.

L158 I: ¿Tú crees que si sustituimos algún otro valor… o que existe algún otro valor que nosotros podamos sustituir en esas ecuaciones y se cumplan las igualdades?
L159 A: No siempre.
L160 I: No siempre… es decir, ¿sí puede haber alguno?
L161 A: Yo pensaría que en este caso no, porque no puede existir otra igualdad, pero pues en otros casos sí, claro que sí.

Después del análisis la estudiante no concluye en forma puntual que los valores encontrados son la solución única del SEL. Por lo tanto, se realiza una intervención más en esta sección

para aclarar que, aunque cada ecuación tiene infinita cantidad de soluciones, como sistema, el ejemplo únicamente tiene una solución.

L162 I: Ahora la pregunta es ¿qué significa que se cumplan las igualdades? Ya vimos que sí se cumplen, ¿qué significa que se cumplan esas igualdades?
L163 A: Que el punto de intersección es válido.
L164 I: Ok, ese punto de intersección es válido para las dos ecuaciones…

En A5S2a la estudiante logra identificar la solución del sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas en el SSM del plano de ejes coordenados; sin embargo, en primera instancia no logra identificar la coincidencia de la misma pareja en las tablas, lo que es indicador de que no vincula la relación de la solución en los dos SSM.

L165 I: Entonces, ¿qué observas en la representación gráfica en esta parte?
L166 A: Hay una coordenada de (0, -2) y las rectas solamente se van a intersectar en un punto y de ahí no van a volver a encontrarse.
L167 I: Perfecto, entonces el punto en el que se intersecan es (0, -2). Y en la parte tabular, ¿qué observas?
L168 A: [Observa las tablas unos segundos.] *Que no. No hay ninguna coincidencia con los resultados en equis y ye en las dos partes.*
L169 I: ¿Ninguna, ninguna? A ver, vuelve a observar.
L170 A: Ah sí, sí hay. En la coordenada (0, -2)
L171 I: Es igual, ¿cierto? Es igual, tanto en la parte gráfica como en la parte tabular observamos la misma coincidencia en (0, -2).

Encontramos, en las respuestas de la estudiante, evidencia de que existe producción de sentido respecto a las preguntas relacionadas con la solución del SEL en los diferentes SSM. Sin embargo, aún no logra establecer los valores identificados como la solución del SEL.

L172 I: ¿Qué significa? ¿Qué es ese valor (0,-2) para el sistema de ecuaciones?
L173 A: Va a ser con el que se van a sustituir los valores principales de las de las ecuaciones.
L174 I: ¿Y qué va a pasar si sustituimos en las ecuaciones?
L175 A: Va a haber una igualación.

En A5S2b la estudiante logra identificar, con base en los análisis previos y en las preguntas guía, que el SEL no tiene solución al observar rectas paralelas. Además, mediante intervención, identifica las características de las tablas y del SEL en su forma canónica.

L176 I: ¿Cómo son esas rectas entre sí?

L177 A: Paralelas.
L178 I: Y de acuerdo con las características de las rectas paralelas ¿va a haber un momento en el que se van a cruzar, un punto en el que se pueden cruzar?
L179 A: No hay.
L180 I: No hay un punto en el que se van a cruzar. Entonces, si no hay un punto en el que se van a cruzar ¿qué podemos decir de este sistema de ecuaciones? ¿Qué significaba ese punto donde se cruzaban?
L181 A: Que había una solución del sistema y también que podría existir una igualdad. Pero en este caso no. Una igualdad para las ecuaciones.
L182 I: Es decir, este sistema de ecuaciones ¿tiene o no tiene solución?
L183 A: No.

Al observar que las rectas de A5S2c se superponen, la estudiante considera que no puede haber una solución, pero cuando se le sugiere observar las tablas, se da cuenta de que existe infinita cantidad de soluciones. Al transformar algebraicamente las ecuaciones mediante intervención y llevarlas a la forma canónica la estudiante observa que las ecuaciones son iguales.

[Se muestra en GeoGebra, mediante el movimiento de un deslizador cómo las rectas que representan el SEL A5S2c se superponen]
L184 I: ¿Qué pasó?
L185 A: Se sobrepone.
L186 I: Exactamente, se sobrepone. Entonces, lo que observamos aquí es que estas dos rectas se vuelven una. ¿Y tú me puedes decir cuántas soluciones tenemos o si tenemos solución de este sistema de ecuaciones?
L187 A: Yo creo que no. No puede haber una solución.
L188 I: […] *Observa la parte tabular ¿Qué observas aquí?*
L189 A: ¡Ah, ok, ok! Pues existe entonces infinita cantidad de soluciones.
L190 I: Así es. Es decir, las dos rectas se vuelven una y entonces todos los puntos coinciden entonces todos los puntos son solución del sistema de ecuaciones.

Al observar las rectas que representan el SEL A5S2d, la estudiante expresa no estar segura si las rectas son paralelas y por lo tanto si existe solución, lo cual se aclara al realizar transformaciones algebraicas y el análisis de las ecuaciones en su forma canónica mediante intervención.

L191 I: Entonces vamos a observar qué es lo que pasa. ¿Qué puedes observar aquí?
L192 A: Son… no por completo paralelas.

[Se propone la transformación algebraica de las ecuaciones a la forma canónica.]
L193 I: ¿Y qué podemos observar? Nuevamente si este es el sistema de ecuaciones, ¿cómo son los coeficientes de equis y de ye?
L194 A: Son iguales.
L195 I: ¿Y el lado derecho?
L196 A: Tiene signos negativos, pero diferente número.

En A5S2e la estudiante logra identificar que existe infinita cantidad de soluciones mediante inspección de la parte algebraica, lo cual evidencia producción de sentido respecto a los análisis previos.

L197 I: Y ahora ¿cómo ves este sistema de ecuaciones, tendrá o no tendrá solución? ¿Qué te parece si lo manipulas algebraicamente primero? Y me dices qué crees qué pasa con ellos.
[La estudiante realiza transformaciones algebraicas hasta llegar a las ecuaciones en forma canónica.]
L198 I: Y ahora ¿me podría decir qué va a pasar con estas rectas, con este sistema de ecuaciones?
L199 A: Va a ser igual.
L200 I: Ok, las dos rectas van a ser iguales ¿y eso qué significa?
L201 A: Que hay infinita cantidad de soluciones.

En A5S3a la estudiante logra identificar que las rectas son paralelas y, al realizar una inspección algebraica, que no existe solución.

L202 I: Observa el sistema de ecuaciones y dime qué es lo que crees que podría pasar.
L203 A: Podría dividir entre dos la primera ecuación que quedara un resultado de las primeras dos ecuaciones en equis y ye el mismo resultado, pero en la parte de c y habría una diferencia. [Se escribe el resultado de la transformación.]
L204 I: Bueno y entonces ¿cómo serían estas rectas?
L205 A: No tendrían solución.
L206 I: Ok, estas rectas serían paralelas y por lo tanto no hay solución.

En el SEL A5S3b de tres ecuaciones con dos incógnitas, la estudiante infiere en primera instancia que no tiene solución ya que observa que se intersecan únicamente dos rectas, sin embargo, al visualizar en el plano que la otra recta se superpone se da cuenta de que sí tiene solución.

[Se representa mediante SEL_Soluciones1.ggb el sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas A5S3b]
L207 I: Y ahora platícame, ¿crees que este sistema de ecuaciones tiene solución o no tiene solución?
L208 A: Se están contemplando tres ecuaciones y se supone que las tres tendrían que pasar por el mismo punto, entonces, no.
L209 I: Pero ¿cuál es la que crees que no pasa por el mismo punto la [recta] azul, la verde, o la roja?
L210 A: La verde ¿no?
[…]
L211 I: Pero observa aquí en la parte gráfica qué pasa con ella cuando llegamos aquí a menos 20 [se mueve el deslizador] *ahí va la verde y es esa* [Al superponerse con la recta azul en el software dinámico se observa que se pierde bajo la recta azul] *¿Qué pasó con la verde y la azul?*
L212 A: Ya no está.
L213 I: Pero en realidad si está, en realidad sí ésta solo que está ahí debajo de la azul.
L214 A: Aaaah.
L215 I: Entonces la azul y la verde se vuelven una sola. Entonces la verde en realidad también pasa por el mismo punto, aunque aquí no la vemos, pero pasa por el mismo punto. Entonces el sistema ¿tiene no tiene solución?
L216 A: Sí.

Al observar la construcción del SEL A5S3c en el software de geometría dinámica, la estudiante concluye que sí tiene solución al observar que las tres rectas que lo forman se intersecan en el mismo punto. Se hace una intervención para recordar que si se sustituyen en las ecuaciones los valores encontrados se cumplen las igualdades.

[Se muestra el cambio de las formas gráfica y algebraica del SEL mientras se mueven los deslizadores.]
L217 I: ¿Hay solución o no hay solución?
L218 A: Sí.

Para el SEL A5S3d, la estudiante rescata análisis previos e identifica que no existe solución para el SEL ya que su representación en el SSM del plano de ejes coordenados muestra tres rectas que no se intersecan en un mismo punto (hay dos intersecciones ya que dos de las rectas son paralelas). El lenguaje de la estudiante evidencia falta de dominio de los términos adecuados, sin embargo, en sus respuestas es posible interpretar que hay producción de sentido en sus lecturas de las preguntas.

L219 I: ¿Qué pasa gráficamente? ¿Qué puedes observar allí? ¿Tenemos solución?
L220 A: No. ninguna se intersecta, o sea, las tres tienen que cumplir la misma característica y ninguna lo hace. Solamente la tercera [recta roja] *con la verde y la azul.*
L221 I: Entonces se cumplen dos a dos.

Se hace una intervención para puntualizar que las coordenadas de las intersecciones que se observan validan las ecuaciones que las forman, pero no son soluciones del SEL. Además, se modifica una de las rectas para mostrar la posibilidad de observar tres intersecciones y la estudiante concluye, igualmente, que ese caso sería otra representación de un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas sin solución; esto con la finalidad de no fijar la idea de SEL sin solución a rectas paralelas.

En A5S4 la estudiante menciona que los sistemas de ecuaciones solamente tienen dos incógnitas, es posible que su intertexto estuviera influenciado por el trabajo previo, más enfocado en sistemas de dos y tres ecuaciones con dos incógnitas. Además, la estudiante identifica, mediante intervención, que cada ecuación con tres incógnitas corresponde a un plano en el espacio de ejes coordenados y una tabla de valores y que la intersección de los planos es un punto con tres coordenadas que son la solución del sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas.

L222 I: ¿Tú qué crees que pase si sustituyo estos valores de dos, uno y menos uno [punto de intersección de los planos del sistema de A5S4] *en las ecuaciones? ¿Qué crees que pasa?*
L223 A: Podríamos tener lo mismo que con… es que en una ecuación solamente hay dos este… dos incógnitas ¿no?
L224 I: No necesariamente estas son ecuaciones este es un sistema de ecuaciones y son tres ecuaciones y cada una de ellas tiene tres incógnitas.
[…]
L225 I: Si sustituyo los valores en cada una de las variables para dos, uno y menos 1 entonces, ¿qué pasaría? ¿Qué pasaba antes?
L226 A: Se cumplía la igualdad.
L227 I: Entonces ¿tú crees que aquí se cumpliría la igualdad?
L228 A: Sí, ¿no?
L229 I: Sí, debería de cumplirse porque esta es la solución del sistema de ecuaciones.

Antes de iniciar el análisis de A5S5 la estudiante generaliza adecuadamente la idea de que en sistemas de tres incógnitas existen más posibilidades respecto a la naturaleza de la solución, que únicamente sistemas con una solución única; sin embargo, aunque la pregunta se enfocaba en el SSM del espacio de ejes coordenados, la estudiante enfoca parte de la respuesta en la representación algebraica.

L230 I: De entrada, ¿qué te imaginas? ¿Cómo podrían ser esos planos? ¿Tú crees que siempre tengamos soluciones para un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas?
L231 A: No.
L232 I: ¿Cómo podrían ser esos planos?, ¿cómo te los imaginas para que no haya solución?
L233 A: Pues en este caso que falte una ecuación, que falte una incógnita, que los resultados no sean iguales y que no haya una intersección.

5.4.6 Actividad 6. Intertextualidad y producción de sentido

En el desarrollo de la Actividad 6 (A6) cuyo objetivo es que los estudiantes identifiquen los sistemas de ecuaciones equivalentes y las transformaciones algebraicas que permiten obtenerlos, identificamos que hubo producción de sentido respecto a las operaciones que permiten transformar un SEL en otro equivalente y las ventajas de tener un SEL escalonado para su resolución.

En A6S1 la estudiante da una explicación vaga de lo que es la solución de una ecuación; por otra parte, las respuestas de la estudiante respecto a las ecuaciones y los sistemas de ecuaciones equivalentes reflejan el uso de términos correctos, pero que no se habían usado en actividades previas por lo que parecen derivados de una investigación previa al desarrollo de la actividad. La intervención se realiza para puntualizar que para la resolución de ecuaciones se utilizan operaciones con las que se obtienen ecuaciones equivalentes y que lo mismo ocurre con los sistemas de ecuaciones.

L234 I: ¿Qué es la solución de una ecuación? ¿Te acuerdas?
L235 A: Lo que yo me había acordado es que era como los valores numéricos que se les da a las letras, algo así, que son como las variables y las incógnitas.
L236 I: ¿Qué sería una ecuación equivalente a otra?
L237 A: Son ecuaciones que tienen soluciones, pero con raíces idénticas.
L238 I: Ahora, ¿qué sería un sistema de ecuaciones equivalentes?

L239 A: Yo puse que son los que tienen el mismo conjunto de soluciones
L240 I: El mismo conjunto solución.

En A6S2 la estudiante identifica algunas de las operaciones sobre renglón que puede aplicar a un SEL para obtener otro equivalente.

[Una vez que se ha multiplicado una ecuación de A6S2 y se observa el nuevo SEL en GeoGebra.]
L241 I: ¿Qué solución te queda?
L242 A: Me queda la misma.
L243 I: Y eso ¿qué querría decir?
L244 A: Que, aunque se esté multiplicando los valores y se les den diversos… bueno no los valores, aunque se esté multiplicando la ecuación y se le den diversos valores siempre va a ser equivalente.
L245 I: Cuando multiplicamos una de las ecuaciones o incluso las dos ecuaciones por algún número lo que obtenemos justamente es un sistema equivalente. Muy bien.
[Al observar en GeoGebra el sistema equivalente obtenido al sumar las ecuaciones y sustituir el resultado por alguna de las ecuaciones.]
L246 I: ¿Qué solución te queda?
L247 A: Dos para equis y uno para ye.
L248 I: Que es la misma, ¿cierto? Entonces la solución del nuevo sistema de ecuaciones también en la misma, es decir, cuando nosotros sumamos las dos ecuaciones y el resultado de la suma lo sustituimos por alguna de las dos [ecuaciones] *lo que obtenemos que es un sistema ¿de qué tipo?*
L249 A: Equivalente.

En A6S5a, la estudiante no identifica la primera acción para la resolver el sistema escalonado. La intervención permite que la estudiante reconozca el proceso de resolución de SEL escalonados y la aplique en forma competente en la resolución de A6S5b.

L250 I: Con base en lo que acabamos de hacer, ¿Qué se te ocurre que podamos hacer aquí?
L251 A: Se pueden encontrar los valores de cada uno de los términos para después sustituirlo en la primera ecuación, la de hasta arriba.

5.4.7 Actividad 7. Intertextualidad y producción de sentido

Al resolver mediante intervención didáctica los primeros dos SEL se observa en la estudiante producción de sentido con respecto al método de reducción gaussiana. Posteriormente, se emplea la aplicación SEL_Reducción.ggb como apoyo para la resolución de una serie de

SEL de dos y tres ecuaciones e incógnitas con una, ninguna o infinita cantidad de soluciones y, en cada caso se observa producción de sentido mediante el análisis de los resultados de las transformaciones algebraicas y de la observación de sus correspondientes representaciones en forma gráfica y competencia en la proposición de operaciones necesarias para escalonar los SEL.

Mediante intervención en A7S1a se realizó un primer acercamiento al método de reducción gaussiana. El intertexto de la estudiante respecto al método de suma y resta, le permitió la producción de sentido con respecto al método de reducción gaussiana en el caso del sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

[Al inicio del proceso de escalonar el SEL A7S1a.]
L252 I: ¿Qué pasaría si yo multiplico la primera ecuación por cuatro? […] *todo eso multiplicado por cuatro, ¿qué obtenemos?*
L253 A: ¡Ah ya me acordé! Se supone que tenías que… bueno más o menos ahí vagamente… con ese más cuatro volvemos equivalente a… con la ecuación dos.
L254 I: Más que equivalente lo que buscamos es que este valor sea igual al valor que vamos a tener acá.

En A7S1b, sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, la estudiante tuvo varios tropiezos para lograr darle sentido al proceso de reducción del SEL. Para obtener el primer sistema equivalente la estudiante obtuvo de forma competente las operaciones necesarias para la nueva segunda ecuación; sin embargo, la estudiante no podía hacer una lectura del proceso para obtener una tercera nueva ecuación reducida, por lo cual fue necesaria una intervención. El número de ecuaciones en este caso significó un mecanismo inhibitorio para la estudiante.

[Una vez obtenida la segunda ecuación del primer SEL equivalente se ha empezado a cuestionar a la estudiante sobre las operaciones necesarias para obtener la nueva tercera ecuación, pero no logra desvincular la segunda ecuación (Figura 5.44).]
L255 I: ¿Qué tendríamos que hacer? Es más o menos lo mismo que hicimos acá para la ecuación dos, pero ahora sería para la ecuación tres. Hay que hacer alguna operación sobre la ecuación uno y luego alguna operación sobre la ecuación tres y sumarlas, pero ¿qué operación sería?
L256 A: [Se queda pensativa unos segundos.] *Sería la resta.*
L257 I: Ok, pero si las restamos, así como están, pues nos quedaría una equis, menos equis, entonces hay que multiplicarlas primero ¿Por cuánto las multiplicamos?
L258 A: No sé si sería menos uno.

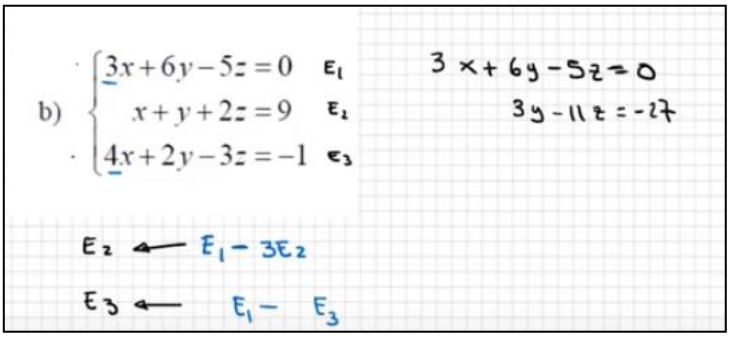


Figura 5.44 Captura de pizarra digital de A7S1b con Ana.

La estudiante identifica en A7S2a las operaciones para reducir el SEL, con las cuales determina el valor de los deslizadores en SEL_Reducción2.ggb (Figura 5.45), con lo cual se puede observar competencia en el uso del método. Sin embargo, realiza el análisis algebraico sin observar la parte gráfica que presenta dos rectas paralelas como representación del SEL en el SSM del plano de ejes coordenados, con lo cual habría determinado la ausencia de solución del sistema.

L259 I: ¿Por qué número se te ocurre que lo podamos hacer?
L260 A: Pues se puede multiplicar la primera ecuación por 2.
L261 I: ¿Y la segunda?
L262 A: Ay esa siempre me falla.
L263 I: Fíjate, si multiplicamos la primera por 2 nos quedaría en la parte de la equis 4x entonces si ahí la sumamos con la otra serían 4x + 4x
L264 A: Ah por menos 2.
L265 I: Y entonces, la segunda, ¿por cuánto la multiplicaríamos?
L266 A: Nada más por… por uno.

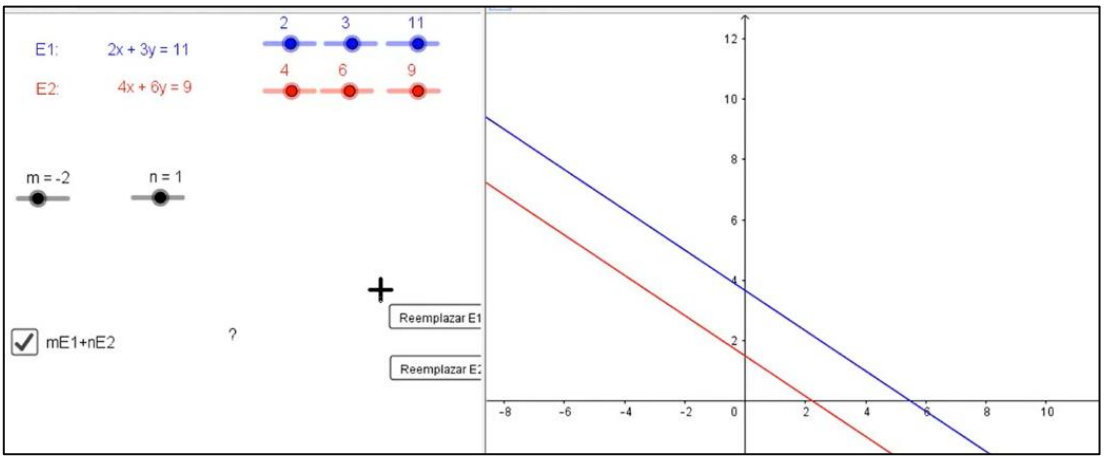


Figura 5.45 Desarrollo de A7S2a en SEL_Reducción2 con Ana.

Una vez que la estudiante realiza el proceso en el SGD y no obtiene una ecuación se le pide observar la parte gráfica y le da sentido al resultado dado por el software. Se realiza una intervención para hacer notar las características de la parte algébrica cuyo análisis llevaría a la conclusión de que el SEL no tiene solución.

[La estudiante activa la casilla de verificación para que la aplicación realice la operación indicada y el resultado es un signo de interrogación.]
L267 I: ¿Qué pasó?
[La estudiante observa y no responde.]
L268 I: Nos sale un signo de interrogación ¿cierto?
L269 A: Ajá.
L270 I: ¿Tú qué crees que significa eso? No nos sale una ecuación, ¿qué pasó?
[La estudiante se queda pensativa.]
L271 I: ¿Puedes observar la parte gráfica?
L272 A: Ah, podría ser porque no tiene solución.

La estudiante concluye que el SEL A7S2b tiene infinita cantidad de soluciones, al hacer, mediante intervención, el análisis algebraico y en el SSM del plano de ejes coordenados.

L273 I: Aquí, si te fijas, ¿qué es lo que pasó?
L274 A: Ya no está el primer coeficiente…
L275 I: ¿Ya no está qué?
L276 A: La primera ecuación.
L277 I: La primera recta. ¿Puedes observar que paso algebraicamente en tu sistema de ecuaciones?
L278 A: Pues quedaron los mismos valores de la primera ecuación solo que por dos.
[…]
L279 I: Mueve por ejemplo un poquito el coeficiente dos, el último [deslizador], muévelo un poquito para que observes nada más que es lo que pasa. […] cuando lo dejamos en dos lo que pasa es que se sobreponen las dos rectas.
L280 A: Ah, se sobreponen.
[…]
L281 I: ¿Tú podrías decirme qué va a pasar si tratamos de reducir estas dos ecuaciones? ¿Qué nos quedaría?
L282 A: ¿Si se restan ambas?
L283 I: Ajá.
L284 A: Pues nada más tendríamos el resultado de la primera ecuación.

L285 I: Al sumarlas nos quedaría cero igual a cero, ¿cierto? Y entonces prácticamente nos quedaría una sola ecuación con dos incógnitas. ¿Cuántas soluciones tiene este sistema de ecuaciones?
L286 A: Son este… son infinitas.

Mediante intervención y con apoyo visual del SGD la estudiante identifica que A7S2c es un sistema con infinita cantidad de soluciones. La estudiante mostró mayor dominio del método, al identificar las operaciones necesarias en la primera etapa de la reducción. Sin embargo, al realizar la siguiente etapa, dado que el coeficiente del primer término de la segunda ecuación era ya el inverso aditivo del coeficiente del primer término de la tercera ecuación, la estudiante tuvo dificultades para identificar los valores de los deslizadores que debían establecerse como $m=1$ y $n=1$. Aunque previamente se analizó el caso de un sistema de dos ecuaciones lineales y tres incógnitas que en su representación en el SSM del espacio de ejes coordenados forman dos planos no paralelos, la estudiante tuvo dificultades para visualizar que la intersección entre ellos es una recta.

L287 I: ¿Cuáles serían esos números por los cuales hay que multiplicar? Primero nos concentramos en la ecuación dos, es decir, tomamos este y este [Ecuaciones 1 y 2]. *Entonces, ¿cuánto por la ecuación uno?*
L288 A: La ecuación uno sería por dos.
L289 I: Ok, ¿y la ecuación dos?
L290 A: por menos siete.
L291 I: Ok ¿y para la ecuación tres? Ahora consideramos esta de aquí y esta de acá, uno y tres.
L292 A: Pues la ecuación uno por cinco y la ecuación tres por menos siete.
L293 I: Perfecto, entonces si te fijas aquí nosotros ya tenemos la operación y lo único que vamos a hacer con esto es alimentar el programita.
[…]
L294 I: La operación que ahora nos permitiría eliminar la a ye de la tercera ecuación […]
L295 A: Pues los estaría multiplicando no sé si puedo hacerlo menos 7 y más 7.
L296 I: Si te fijas ya tenemos el mismo coeficiente que es 14 y menos 14 y de hecho ya con signos diferentes entonces, ¿por cuánto tendríamos que multiplicar la primera y la segunda?
L297 A: Por uno
L298 I: Por uno ambas.
[…]
L299 I: entonces ponemos en m y en n, ponemos uno.

[La estudiante activa la casilla para que se ejecute la operación y se sorprende por el resultado.]
L300 A: Oh.

Continuando con el análisis de A7S2c, en una segunda inspección de la parte algebraica, la estudiante interpreta adecuadamente el resultado obtenido en la aplicación, respecto a que la ecuación dos y la ecuación tres del sistema equivalente son iguales y eso determina dos gráficos superpuestos en el SSM del espacio de ejes coordenados. Por otra parte, no logra, con el análisis algebraico ni con el análisis gráfico, darle sentido a la solución del SEL en primera instancia, sino solo mediante la intervención didáctica.

L301 I: Observa tus dos ecuaciones, ¿qué pasó?
L302 A: Ya eliminé también zeta.
L303 I: Exactamente.
L304 A: Bueno, mejor dicho, ya eliminé todo.
L305 I: Así es, nos queda cero igual a cero. ¿Y eso qué significa? ¿Quieres observar la parte gráfica?
L306 A: Que la ecuación dos y la ecuación tres se sobreponen y la única que sale es la ecuación uno.
L307 I: Ok, nos queda una ecuación uno y una ecuación dos, ¿no? Porque, aunque esas dos se sobreponen pues se vuelven una. Entonces nos quedan, prácticamente, ¿cuántos planos?
L308 A: Dos.
L309 I: Dos planos. Y ya habíamos nosotros platicado cuántas soluciones tenemos si tenemos dos planos que no son paralelos. ¿Cuántas soluciones tenemos allí?
L310 A: Mmmh ¿Qué serían? ¿Solamente dos?
[Se realiza la intervención para que la estudiante logre la interpretación.]
L311 I: ¿Dónde se cruzan estos dos planos? Acuérdate, decíamos, por ejemplo, si tú juntas dos paredes, ¿cómo es esa figura?
L312 A: ¿Solamente hay una… una solución?
L313 I: Una solución sería un punto, pero si tenemos dos planos así [muestra con las manos] *se cortan… es como dos paredes, ¿cómo es la unión de dos paredes? ¿Qué es?*
[La estudiante no responde se queda pensativa.]
L314 I: No sé si quieras darle vuelta a la parte gráfica […] *¿Si te fijas? ¿Qué se forma entre los dos planos?*
L315 A: Sería como una intersección.
L316 I: Ajá. ¿Y esa intersección es un punto?
L317 A: Sí.

L318 I: ¿Es un punto? ¿Tú ves un punto?
L319 A: Sí.
[Se explica a la estudiante, recordándole análisis previos, que se forma una recta como intersección de dos planos.]
L320 I: Lo que se forma es una recta. Entonces una recta en realidad no es un punto solito, son infinita cantidad de puntos, ¿recuerdas? Entonces, ¿cuántas soluciones tendríamos allí? En una recta, de acuerdo con lo que hemos revisado antes…
L321 A: Infinitas.

En A7S2e, la estudiante identifica en forma competente los valores para los deslizadores que corresponden a las operaciones sobre el SEL para reducirlo (Figura 5.46).

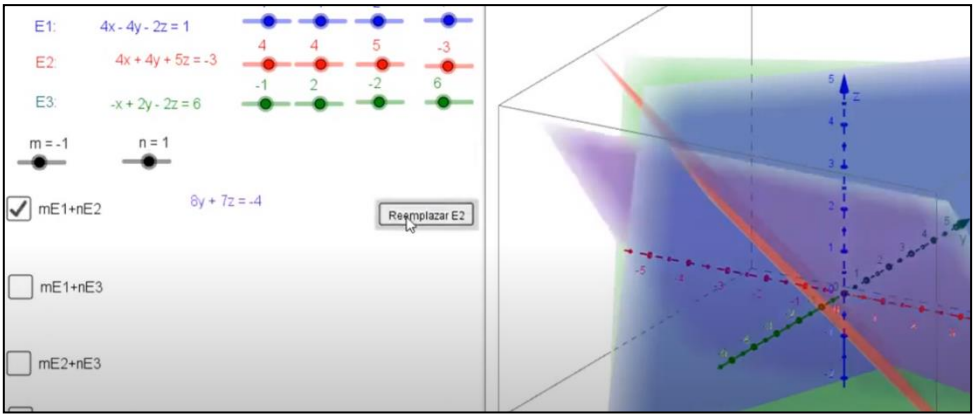


Figura 5.46 Inicio de resolución de A7S2e con Ana.

L322 I: ¿Cómo nos quedaría la operación para trabajar con la segunda ecuación, para obtener una nueva ecuación que no tenga equis?
L323 A: Sería con la primera y segunda ¿verdad?
L324 I: Sí.
L325 A: Menos uno y uno.
[…]
L326 I: Y ahora para la primera y tercera.
L327 A: Sería para la primera menos uno…
L328 I: Fíjate como los signos ya son diferentes
L329 A: Menos uno y menos cuatro para la tercera.
L330 I: O podría ser uno y cuatro…
[…]
L331 I: ¿Cómo nos quedaría el nuevo sistema de ecuaciones y cuál sería la nueva operación para eliminar la ye de la tercera ecuación?
L332 A: Para eliminar ye ¿verdad?

L333 I: Sí.
L334 A: Pues sería menos cuatro y ocho.
L335 I: Fíjate como son múltiplos el 4 y el 8, bueno, el 8 es múltiplo de 4. Entonces a lo mejor podemos encontrar una operación
L336 A: Menos dos y dos.
L337 I: Más o menos …
L338 A: Menos dos y cuatro.
L339 I: ¿A quién multiplicarías por menos dos?
L340 A: A ocho.
L341 I: Ok, podría ser.
L342 A: ¡Ah, ya, ya, ya! Sería uno para ocho y menos dos para cuatro.

La estudiante sustituye adecuadamente los valores y encuentra la solución a partir del SEL equivalente escalonado, la cual verifica posteriormente en el SGD.

En A7S2f la estudiante identifica desde el análisis del sistema en el SSM del plano de ejes coordenados que podría no haber solución.

L343 I: Me gustaría que le dieras un poquito de vuelta a la parte gráfica y la observaras. ¿Qué parece que está pasando allí?
L344 A: Podría decir que ninguna se toca, pero la uno y la tres no están como completamente paralelas.

La estudiante aplica en forma competente el método de reducción y hace un análisis de la parte gráfica y de la parte algebraica pero no identifica en primera instancia que el SEL no tiene solución. Mediante intervención se analizan las características de las transformaciones algebraicas y gráficas que implican la ausencia de solución.

L345 I: Ahora observa la parte algebraica. ¿Cómo son esas ecuaciones en la parte algebraica, la dos y la tres?
L346 A: Son casi iguales.
[…]
L347 I: Y aquí bueno ¿qué podemos deducir una vez que tenemos este nuevo sistema de ecuaciones? […] *¿Qué puedes deducir con respecto a la solución?*
L348 A: Puedo decir que la primera ecuación pues tiene solución y las otras dos no.
L349 I: Acuérdate que es un sistema
L350 A: Ah entonces no tiene solución.
L351 I: Exactamente. […] *en este caso no vamos a encontrar un conjunto de valores que validen las tres ecuaciones a la vez, que gráficamente para nosotros eso*

sería un punto. Pero en este caso pues no existe, no hay manera de que aquí obtengamos un punto; para empezar, tenemos planos paralelos.
[…]
L352 I: ¿Qué observas en esa parte gráfica?
L353 A: Se ve bonito, pero los puntos jamás se tocan con los 3
L354 I: Ok no tenemos un punto de coincidencia para los tres, ¿cierto? Entonces, ¿qué va a pasar si yo manipuló esto algebraicamente? ¿qué pasaría?
L355 A: Los puntos nunca se van a tocar.
L356 I: Los tres planos nunca se van a juntar en un punto. Pero algebraicamente, ¿qué se te ocurre que pueda pasar?
[…]
L357 A: No sé si podrían cancelarse y solamente quedarse con uno o dos términos.
L358 I: ¿Hablas de una ecuación? ¿Que se cancele una ecuación?
L359 A: Ajá
L360 I: ¿Qué pasaría si cancelamos una ecuación y nos quedan solamente dos planos? ¿eso no tendría solución?
L361 A: Sí.
L362 I: Tendría infinitas ¿no? Infinita cantidad de soluciones; pero este sistema que nosotros estamos observando aquí en realidad no tiene solución, no tiene ni una, ni infinitas. No tiene porque los planos pues se cruzan dos a dos pero el otro plano nunca se va a cruzar con el siguiente ni tampoco se van a convertir dos en un solo plano.

La estudiante muestra competencia en el uso del método de reducción. Se hace un análisis, mediante intervención, de un resultado diferente a los anteriores para SEL sin solución; en este caso algebraicamente tenemos una variable con dos valores diferentes (cada uno obtenido de una ecuación), que al graficarse representan planos paralelos.

L363 I: Para eliminar la equis en la segunda ecuación. Tendremos que sumar la primera y la segunda, ¿qué valores para m y n?
L364 A: Menos uno y menos uno.
[…]
L365 I: Ahora para la tercera ecuación.
L366 A: ¿Entre la primera y la tercera?
L367 I: Así es, primera y tercera.
L368 A: En la primera pondría dos y uno [en n].
L369 I: ¿Qué pasó algebraicamente?
L370 A: Los coeficientes se eliminaron, bueno las incógnitas se eliminan y sólo terminan, bueno solo hay un término.

L371 I: Nos quedaría en la primera ecuación zeta está igualada a uno o menos zeta es igual a menos uno y en la segunda ecuación nos queda zeta igual a once tercios. ¿Y gráficamente qué pasó?
L372 A: No hay solución.
L373 I: Si te fijas ahí ya es muy claro que tenemos dos planos paralelos. Entonces en el anterior pues no sabíamos que podría haber ocurrido, pero en este caso pues ya vemos que efectivamente si nosotros manipulamos de forma algebraica […] *tenemos zeta igual a uno y zeta igual a once tercios pues entonces tenemos dos planos paralelos y por lo tanto pues no tenemos solución.*

Informe de Tendencias cognitivas identificadas en la Actividad 7

En la primera sección de esta actividad identificamos la Tendencia Cognitiva 8, ya que durante la intervención para explicar el método de Gauss la estudiante no lograba darle sentido a una parte de la obtención del sistema equivalente reducido para un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas aun cuando ya se había realizado el mismo proceso con un sistema de dos ecuaciones e incógnitas, por lo que consideramos que el número de ecuaciones representó para la estudiante un mecanismo inhibitorio (L225-L258).

Durante el análisis de A7S2c encontramos evidencia de la Tendencia cognitiva 5, ya que la estudiante no lograba darle sentido a la infinitud de soluciones del SEL ni en el análisis algebraico, ni en el gráfico, por lo que consideramos que realizó lecturas en estratos del lenguaje (L301-L319).

5.4.8 Actividad 8. Intertextualidad y producción de sentido

Para iniciar la Actividad 8, se realiza una introducción en la que se indica que es necesario identificar cantidades desconocidas y condiciones que se interpretan como relaciones entre las cantidades desconocidas y otras cantidades para guiar la modelación algebraica de los problemas de enunciado como sistemas de ecuaciones lineales. En general, Ana muestra dificultades para establecer las ecuaciones de los SEL, por lo cual, mediante el uso del MAES se recurre a un estrato más concreto que le permita identificar las relaciones entre las cantidades y darle, de esa forma, sentido a las condiciones del problema. Una vez establecidos los SEL la estudiante usa en forma competente el método de Gauss para la resolución de los SEL con solución única y, mediante intervención logra darle sentido al SEL

sin solución y al SEL con infinitas soluciones. En general, la estudiante relaciona en forma competente las soluciones y los resultados obtenidos de las transformaciones algebraicas con las condiciones de los problemas originales.

En A8P1 la estudiante identifica las cantidades desconocidas; sin embargo, asigna a las literales valores concretos, datos proporcionados en el problema.

L374 I: Entonces lo primero: detectamos cantidades desconocidas. ¿Qué cantidades no conocemos y que nos están preguntando? ¿Cuáles serían?
L375 A: El número de preguntas correctas e incorrectas.
L376 I: Muy bien. Entonces, esas son mis cantidades desconocidas y yo los voy a las voy a poner en términos de variables. Entonces voy a decir equis, dos puntos.
L377 A: Es que de hecho es el que estaba haciendo acá […] *Que le puse equis igual a más uno y ye igual a menos un medio.*
L378 I: Ah, pero si nosotros ponemos equis igual a más uno, entonces estamos ya dándole un valor a la equis la equis no sería una cantidad desconocida.

Se hace una intervención para relacionar las literales a las cantidades desconocidas. Una vez que se definen las variables, la estudiante estructura, mediante intervención, con un estrato del MAES, la primera condición.

L379 I: Si, por ejemplo, el número de respuestas correctas hubiera sido 40, ¿cuántas respuestas incorrectas habría tenido?
L380 A: 60.
L381 I: Muy bien, entonces, ¿cómo podemos nosotros en términos de equis y de ye plantear esa condición?
L382 A: La equis más la ye da igual a 100. [La estudiante escribe $x+y=100$.]

La estudiante presenta algunas dificultades para expresar en forma algebraica la segunda condición. Sin embargo, al regresar a valores concretos logra modelar la ecuación para la segunda condición. Y aplica en forma competente el método de resolución.

L383 I: ¿Cómo podemos nosotros plantear esa condición? Cada respuesta correcta suma un punto y las incorrectas restan en medio punto y el saco 71.5 puntos. ¿Cómo podemos plantear esa condición?
L384 A: ¿Podría ser por ejemplo dejar el valor de equis así, más un medio de ye, tal vez?
L385 I: Nada más que, por ejemplo, vamos a volver a los mismos numeritos que trabajamos ahorita. Si fueron 40 respuestas correctas, entonces él tendría 40 puntos,

pero, si tuvo 60 respuestas incorrectas ¿las sumaríamos? ¿A los 40 puntos buenos le vamos a sumar lo de las incorrectas?
L386 A: Ah no, se le restan.
L387 I: Ajá, entonces, ¿cómo nos quedaría? […]
L388 A: Podría dejarla como equis menos un medio de ye igual al resultado que nos da ¿no? 71.5.
[…]
L389 I: Este sistema de ecuaciones pues lo podemos resolver escalonándolo […] *¿qué habría que hacer?*
L390 A: Pues nada más tendríamos que cambiar el signo en una ecuación y la otra dejarla igual.
[…]
L391 I: ¿Cómo nos quedaría el nuevo sistema de ecuaciones?
[La estudiante escribe el nuevo sistema equivalente escalonado (Figura 5.47)]
L392 I: Tenemos el sistema escalonado, ¿Qué hay que hacer ahí?
L393 A: bueno primero tengo que encontrar el valor, despejar y de la segunda ecuación.
[La estudiante despeja y escribe el valor de ye.]
L394 I: ¿Y ahora qué hacíamos después de encontrar el valor de ye?
L395 A: Lo sustituimos en la ecuación.

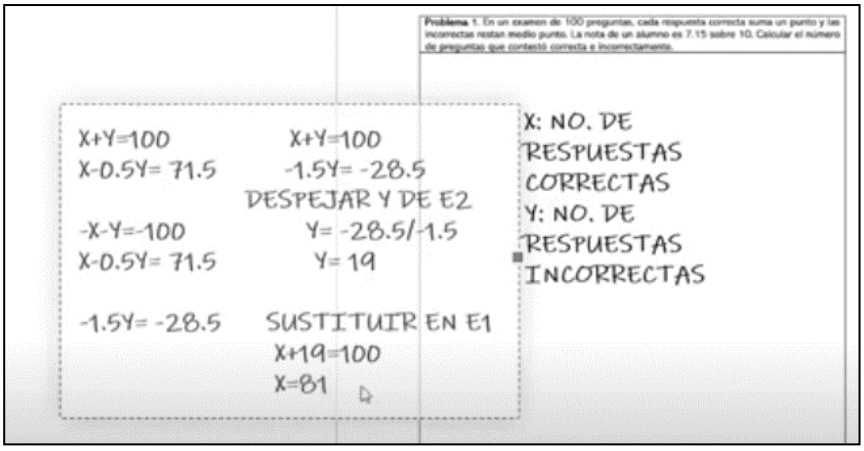


Figura 5.47 Desarrollo de A8P1 con Ana.

En A8P2 la estudiante identifica las cantidades desconocidas y les asigna una literal.

L396 I: ¿Qué es lo primero que tenemos que hacer?
L397 A: Poner las incógnitas.
L398 I: Perfecto, entonces ¿cómo las pondríamos?
L399 A: Podemos poner el primer modelo como equis y el segundo como ye.
[La estudiante escribe x: Modelo barato y y: Modelo caro.]

L400 I: Ahora, ¿qué significa esto de modelo barato y modelo caro, su precio o la cantidad de teléfonos?
L401 A: Sería la cantidad.

Mediante una intervención para motivar el uso de valores concretos la estudiante identifica la primera condición; mientras que la segunda condición la propone sin necesidad de usar valores concretos.

L402 I: Para poder escribir esta condición, además de cuántos teléfonos compró ¿qué más debemos saber?
L403 A: Cuanto costó cada uno.
L404 I: ¿Cómo podemos escribir esa condición?
L405 A: ¡Ay! pues es que no sé si se podría ocupar equis y ye porque no me están diciendo el dinero, sino la cantidad de teléfonos.
L406 I: Ajá. Pero, si, por ejemplo, compraran dos teléfonos caros, ¿cuánto habrían pagado por dos teléfonos caros?
L407 A: 6400.
L408 I: Pero entonces, sí tiene que ver la cantidad de modelos que compró porque ¿qué hiciste para encontrar los 6400?
L409 A: Sumé los dos caros.
L410 I: ¿Y si fueran cinco? ¿Qué harías?
L411 A: Pues los multiplicamos.
L412 I: Y entonces, sí tenemos equis modelos caros, ¿qué tenemos que hacer? equis cantidad de teléfonos del modelo caro.
L413 A: Multiplicarlo por el costo.
[…]
L414 I: ¿Cómo nos quedaría esa condición?
L415 A: Serían… al primero le daríamos el valor de ye y al segundo el valor de equis. [La estudiante escribe *1950x*] *y sólo voy a… ¿lo voy a sumar o lo voy a restar?*
L416 I: A sumarlos, porque a la hora del pago pues ¿qué hacen? te suman lo que costaron todos los modelos baratos más lo que costaron todos los modelos caros para tu cuenta.
L417 A: Y la igualación es el precio total ¿no? [La estudiante escribe *1950x+2300y=61250*].
[…]
L418 I: Ahora ¿puedes encontrar la otra condición que hay aquí?
L419 A: Los 25 empleados.
L420 I: Perfecto. ¿Y qué significa entonces esto de los 25 empleados?
L421 A: Se tiene que… bueno, tenemos que encontrar a qué empleados se les dio los de 3.200 y a quienes los de 1950

L422 I: A cuántos más bien. A cuántos empleados se les dio caros y a cuántos se les dio baratos. Entonces, ¿cómo podríamos expresar esa condición?
L423 A: A este sí se le puede poner solamente el valor de equis más ye igual a 25.

La estudiante muestra competencia en el uso del método de reducción un SEL equivalente escalonado (Figura 5.48) para encontrar los dos valores de la solución del SEL y finalmente relaciona en forma competente la solución y las condiciones con el problema original.

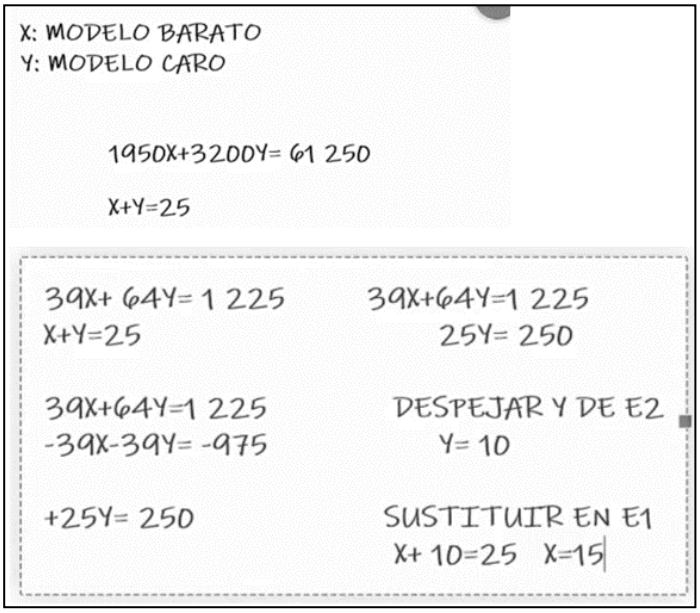


Figura 5.48 Desarrollo de A8P2 con Ana.

L424 I: Ahora ¿qué hacemos?
L425 A: Despejamos ye. [La estudiante encuentra los dos valores de la solución (Figura 5.48).]
[…]
L426 I: ¿Cuántos teléfonos caros se compraron y cuántos teléfonos baratos se compraron?
L427 A: Ah sí, de los caros van a 10 y de los baratos van a ser 15.
L428 I: Y entonces la suma de los dos nos da 25, que es una de las condiciones. ¿Y cómo haríamos para comprobar la otra condición? No lo hacemos, pero platícame cómo lo haríamos.
L429 A: ¿La de los valores?
L430 I: Ajá, los precios.
L431 A: ¡Ah! los precios, sí. Multiplicamos por el precio de uno y el otro por el precio del otro. Bueno 15 por el precio de los caros, 10 por el precio de los caros y 15 por el precio de los baratos y nos tiene que dar el 61 mil 250.

En A8P3 la estudiante identifica las cantidades desconocidas. En la modelación de una de las condiciones la estudiante hace una generalización de una de las condiciones de los problemas previos en los que la suma de las variables se relacionaba con alguna cantidad dentro del problema. Se hace una intervención con valores concretos para confrontar a la estudiante con su razonamiento.

L432 I: Vamos ahora sí a las condiciones. Entonces, ¿puedes encontrar alguna condición?
L433 A: El precio total de todos los boletos.
L434 I: ¿Cómo quedaría esa condición?
L435 A: equis más ye igual a 146 mil pesos.
L436 I: […] *si el precio de los boletos de primera clase fuera de 1000 pesos y el precio de turista fuera 500 pesos entonces equis más ye significa 1000 más 500* […] *el precio de un boleto más el precio de otro boleto, pero en realidad los 146 mil pesos implican que se vendieron todos los boletos y ¿cuántos boletos de cada uno hay? Sí hay que considerar esa parte.*
L437 A: 32 y 50.
L438 I: Entonces, ¿cómo quedaría la condición?
[La estudiante escribe la condición (Figura 5.49).]

Una vez que se ha analizado la primera condición, la estudiante modela en forma competente las otras dos condiciones (Figura 5.49).

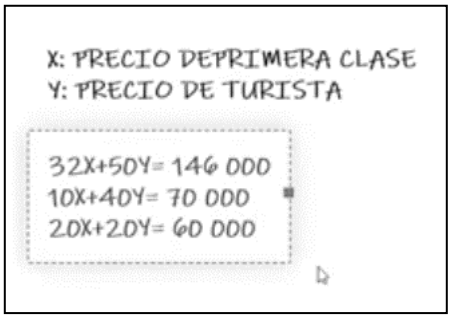


Figura 5.49 Inicio del desarrollo de A8P3 con Ana.

La estudiante identifica que el sistema consta de tres ecuaciones y dos incógnitas y sugiere escalonarlo para resolverlo.

L439 I: Muy bien, ahora quisiera que observes ese sistema de ecuaciones. ¿Cuál es su característica? ¿Cuántas ecuaciones?
L440 A: Son tres ecuaciones.
L441 I: ¿Cuántas incógnitas?

L442 A: Dos.
L443 I: Ok, entonces, ¿qué podemos hacer para resolver este sistema de ecuaciones? ¿Qué se te ocurre que podamos hacer con él?
L444 A: Podemos hacer… sistema escalonado de abajo para arriba.

Se simplifica cada una de las ecuaciones del SEL mediante intervención. La estudiante aplica el método de reducción para obtener un sistema equivalente con una tercera ecuación reducida en la variable *x* (Figura 5.50).

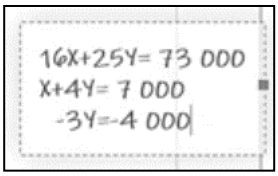


Figura 5.50 SEL equivalente escalonado de A8P3 con Ana.

La estudiante encuentra el valor de la variable *y*. Al encontrar que la solución obtenida de la segunda y de la tercera ecuación no validaba la primera ecuación (Figura 5.51), la estudiante no puede hacer la lectura de que el sistema carece de solución.

L445 I: ¿Qué hacemos ahora?
L446 A: Despejar ye.
L447 I: Despejar ye.
[Se encuentra el valor del *y= 1333.3* a partir de transformar la tercera ecuación]
L448 I: ¿Y ahora que se te ocurre que podamos hacer?
L449 A: Se sustituye ye… en este caso sería en E2 [ecuación 2] *¿O tiene que ser directamente en E1* [ecuación 1]*?*
L450 I: Fíjate cómo ese valor tiene que funcionar para E1 y para E2. Tiene que funcionar para los dos porque los valores de equis y de ye, para que este sistema tenga solución, tienen que funcionar […] *para las tres ecuaciones entonces esa ye debemos sustituirla en la segunda ecuación y en la primera ecuación. Entonces a ver qué es lo que pasa.*
[La estudiante sustituye el valor de *y=1333.3* en la segunda ecuación y obtiene *x=1666.6*]
L451 I: Y ahora pues sustituimos en E1.
[Se explica a la estudiante la diferencia entre sustituir los dos valores obtenidos en la primera ecuación o sustituir únicamente el valor de ye y decide sustituir ambos valores.]
L452 I: Nos da 59999.9 y eso tendría que ser igual ¿a qué?
L453 A: A 73 mil
L454 I: Esto, ¿qué significa?

L455 A: Que no… pues que no son iguales.
L456 I: Y como no son iguales, en términos del sistema de ecuaciones o en términos del problema ¿qué significaría?
L457 A: Que por ejemplo el valor de equis no está bien.

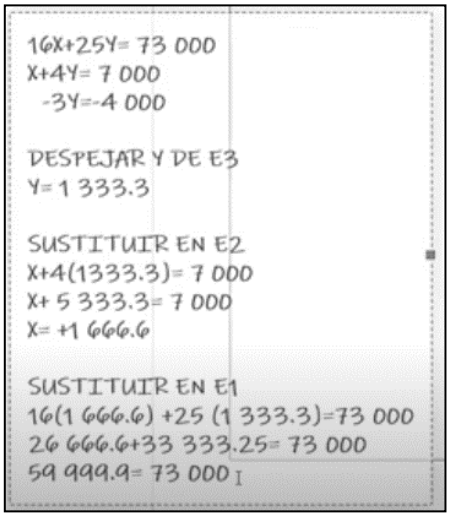


Figura 5.51 Resolución de A8P3 con Ana.

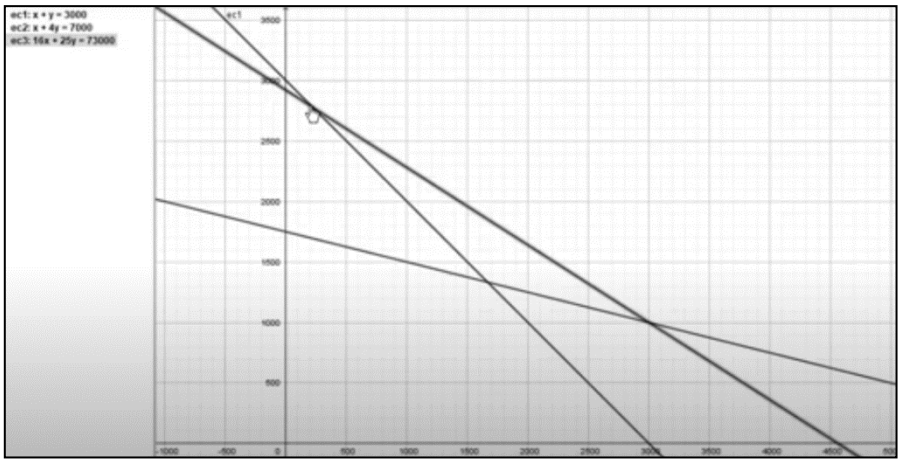


Figura 5.52 A8P3 en SSM del plano de ejes coordenados con Ana.

Mediante intervención, se hace un análisis de condiciones en las que el resultado del método de reducción es una inconsistencia del tipo A=B, en donde se puede concluir que el sistema carece de solución; además, se muestra el sistema en el SSM del plano de ejes coordenados, en donde se observa que el SEL no tiene solución (Figura 5.52); finalmente se interpreta este resultado en términos del problema.

En la resolución de A8P4 la estudiante inicia identificando y definiendo las cantidades desconocidas en forma competente (Figura 5.53).

[Una vez que se da lectura al problema.]
L458 I: Entonces, ¿qué es lo primero que tenemos que hacer?
L459 A: En este caso ya tenemos tres incógnitas ¿no?
L460 I: Así es.
L461 A: Pues en realidad la incógnita principal en la pregunta principal es ¿cuántos automóviles de cada uno se vendieron?
L462 I: Entonces, ¿cuáles serían nuestras cantidades desconocidas o incógnitas?
L463 A: Automóvil familiar, sedán y deportivo.

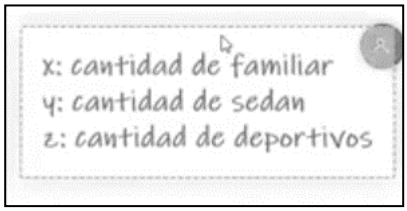


Figura 5.53 Definición de cantidades desconocidas en A8P4 con Ana.

Con respecto a las condiciones del problema A8P4, la estudiante se muestra indecisa en el planteamiento de la primera ecuación, ya que no les da sentido a las cantidades desconocidas, a pesar de haberlas definido momentos antes. Es posible que al haber generalizado de forma errónea la suma de las cantidades desconocidas en el problema previo, en este problema se contenga en su planteamiento.

L464 I: Ahora ¿qué te parece si analizamos las condiciones que nos están dando?
L465 A: La agencia de autos reportó 85 unidades entre estos tres tipos de autos y dicen que si se hubieran vendido…
L466 I: ¿Qué te parece si primero trabajamos con esa condición? Se vendieron en total 85 unidades. Si es esa condición ¿cómo la podemos plantear?
L467 A: Pues es que no sé si poner equis, más ye, más zeta, porque entonces estaría dando el valor de uno.
L468 I: Equis más ye, más zeta, implica que estamos sumando la cantidad de familiares más la cantidad de sedan más la cantidad de deportivos…
L469 A: Y eso es igual a 85.
L470 I: Así es. Esa sería la primera condición.
[La estudiante escribe la condición $x+y+z=85$.]

En el caso de la segunda condición, la relación con las cantidades desconocidas aumentadas resulta en un mecanismo inhibitorio para la estudiante en el proceso de modelar la ecuación.

L471 I: Entonces si por ejemplo quisiéramos saber cuántos cuantos familiares se habrían vendido si se hubieran vendido nueve más de ese tipo ¿cómo podríamos expresar esa cantidad?
L472 A: Pues no sé si serían como 9 equis…
L473 I: Nueve equis significa nueve veces…

Mediante la exploración de cantidades concretas se provoca que la estudiante le dé sentido a la expresión $9x$ y proponga la condición adecuada. Posteriormente, la estudiante combina dos condiciones en una misma ecuación sin relacionar adecuadamente las cantidades de acuerdo con el texto; como se mencionó previamente esta tendencia se ha observado en los tres casos estudiados.

L474 I: Entonces, ¿cómo podemos plantear estas cantidades equis, ye y zeta, cantidad de familiares de sedán y de deportivos si se hubieran vendido nueve unidades más de cada uno? ¿Cómo plantearíamos, digamos, esa cantidad de familiares más nueve unidades? ¿Cómo nos quedaría?
L475 A: Quedaría… yo creo que del lado del 85…
L476 I: ¡Ah! Ojo. Esta es una condición y ya se queda ahí [la planteada previamente]. *Esa condición ya la trabajamos […] es decir, si hubieran vendido 4… si hubieran vendido nueve más ¿cuántos serían?*
L477 A: Los 15.
L478 I: 13 ¿no?
L479 A: Ah no, sí perdón 13.
L480 I: Nueve más cuatro… es decir, a la cantidad de sedan le sumamos ¿cuántos?
L481 A: Nueve.
[…]
L482 I: Ya sabemos que vamos a trabajar con $x+9$, $y+9$ *y* $z+9$, *¿Cómo podemos plantear, si esas fueran las cantidades, que se vendieron el doble de sedán que de deportivos?*
L483 A: Simplemente se le pone a la ye, $2y+9$.
L484 I: A ver, escríbelo y ahorita lo analizamos.
[La estudiante escribe $x+9+2y+9+z$]

Se hace una intervención para que la estudiante le dé sentido a las relaciones entre las cantidades expresadas como la segunda condición en el problema de enunciado y con esta conforma el SEL (Figura 5.54). Posteriormente la estudiante realiza las transformaciones para estructurar el SEL en forma canónica (Figura 5.54).

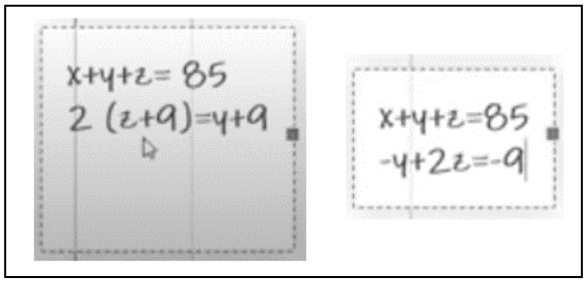


Figura 5.54 SEL inicial y en forma canónica para A8P4 con Ana.

Dado que en un análisis a priori la estudiante no logra darle sentido a la naturaleza de la solución del sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas obtenido, se realiza un análisis mediante intervención para determinar que el SEL tiene infinitas soluciones y que el problema del cual se deriva tiene múltiples soluciones y se proponen algunas de ellas.

L485 I: Si te fijas, bueno, tenemos un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas y de hecho ya está escalonado porque en este caso pues ya no hay equis [en la segunda ecuación]. *Entonces, así como lo ves ¿tú crees que esto tiene solución o podemos resolverlo?*
L486 A: Pues es que diría que no porque… podemos sacar el valor… o mejor dicho no se puede sacar el valor ni de equis ni de ye, solamente el de zeta.
L487 I: ¿Qué te parece si de la segunda ecuación despejas una de las variables? Por ejemplo, la ye.

La estudiante muestra dudas cuando se le propone despejar una variable de la segunda ecuación. Parece no darle sentido al proceso de despejar una variable en términos de otra variable y no como un valor numérico específico.

L488 I: Si quieres poner ahí "despejar y de E2". Y entonces, ¿cómo nos quedaría? ¿ye igual a qué?
L489 A: Pero si despejo ye… ¿qué pasaría con la zeta?
L490 I: Pues nos quedaría del otro lado.
[la estudiante escribe -y]
L491 A: Entonces le pondría ye… ¿Qué haría con esta, con estos? [Señala el término 2z de la segunda ecuación]
[Se explica a la estudiante las transformaciones necesarias para despejar la variable.]
L492 A: ¡Ay! Es que a eso no le entiendo.

Se explica paso a paso la transformación y se hace una intervención para explicar que se pueden encontrar soluciones si se le dan diferentes valores a zeta y toma sentido para la

estudiante que el SEL tiene infinitas soluciones, pero no así el problema de que se deriva, ya que esas soluciones están delimitadas por el contexto.

L493 I: Entonces, ¿cuántas soluciones podríamos tener aquí?
L494 A: Infinitas.
L495 I: En términos de nuestras ecuaciones podemos tener infinitas […] *pero en términos del problema pues equis, ye y zeta que ser números enteros positivos y que su suma pues nos diera un valor de 85.* […] *Por ejemplo, ¿qué pasaría si zeta vale 1?*
[La estudiante escribe $z=1$.]
L496 I: Es una posibilidad, que se haya vendido un carro deportivo. Entonces ¿cuántos carros sedán se habrían vendido, ye sería igual a cuánto?
L497 A: 0.5
L498 I: Ojo, aquí lo tienes, ye es igual a dos veces zeta más 9. [Se señala la ecuación con y despejada.] *¿Te fijas? ye es igual a dos zeta más nueve.*
L499 A: Ah, ok.

Mediante intervención se encuentra una solución y se aclara la posibilidad de tener múltiples soluciones en el contexto, pero infinitas soluciones en el SEL, aislado del problema de enunciado, debido a que se tienen dos ecuaciones y tres incógnitas; además se explica la representación del SEL en el SSM del espacio de ejes coordenados, como dos planos que se intersecan en una recta.

En A8P5 la estudiante identifica las cantidades desconocidas y las relaciona con las literales a, b y c; aunque en todos los casos anteriores se relacionó las cantidades desconocidas con las últimas letras del alfabeto, en esta ocasión la estudiante seleccionó las letras con base en el contexto del problema de enunciado (Figura 5.55).

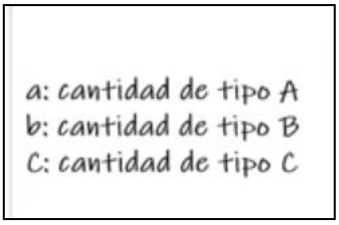


Figura 5.55 Definición de cantidades desconocidas en A8P5 con Ana.

La estudiante logra estructurar (con algunas dificultades) la primera ecuación, al identificar la relación entre las cantidades conocidas y desconocidas. La estudiante muestra dificultades

para identificar cada una de las condiciones del problema, parece no darle sentido de las variables, a pesar de haberlas descrito momentos antes.

L500 I: Ahora vamos a buscar condiciones. ¿Qué condiciones nos dan?
L501 A: Para hacer los 20 kilos de mezcla se invierten 8 mil 235 pesos.
L502 I: […] *ahí son dos condiciones, pero ¿cómo pondrías una de esas condiciones? Piensa en una y trata de escribirla.*
L503 A: Primero tengo que poner el costo total de cada tipo.
L504 I: Para ver cuánto se invirtió, bueno, para hacer esta condición de lo que se pagó por la mezcla. ¿Cómo lo pondrías?
L505 A: Podría poner… nada más sumaron un dato que no me están dando, que es la suma de todos.
L506 I: La suma de todos… te refieres a la suma de la cantidad de [café] *tipo A, de tipo B y de tipo C.*
L507 A: Por un kilo.
L508 I: Pero sí nos están diciendo cuántos kilos de mezcla van a ser, que son los 20 kilos. Entonces en lugar de igualarlo a uno que sería un kilo lo igualamos ¿a cuánto?
L509 A: A 20.
L510 I: Entonces pongo… ¿qué pondré? a más b, más c igual a 20. [La estudiante escribe la condición $a+b+c=20$.]

Se usa el recurso de explorar valores concretos para las cantidades desconocidas (estrato del MAES), mediante intervención didáctica, para que la estudiante logre proponer la segunda y la tercera ecuación a partir de las condiciones.

L511 I: ¿Cómo sacaríamos el costo de esos 20 kilos, si sabemos cuánto cuesta cada tipo?
L512 A: Pues para esta mezcla se están invirtiendo 8 mil 235 y entonces… aquí no lo voy a hacer caso todavía a los 3 kilos más del tipo A ¿verdad?
L513 I: Ese todavía no, ahorita costos.
L514 A: Entonces… ¿cómo lo represento?
L515 I: A ver, por ejemplo, si del café tipo A se le hubieran puesto dos kilos [a la mezcla] *¿cuánto habría pagado por esos dos kilos? ¿cuánto habrían costado esos dos kilos?*
L516 A: ¿Serían 780?
L517 I: Exacto. ¿Qué hiciste?
L518 A: Sumé los 2 kilos del tipo A.
L519 I: Por ejemplo, si fueran 5 kilos.
L520 A: Lo multiplicó por cinco.

I: Entonces, ¿cómo nos quedaría? […] *¿Cómo representamos nosotros la cantidad de kilos del tipo A?*
L521 A: 390.
L522 I: 390 es el costo ¿y la cantidad de kilos?
L523 A: Tan sólo con a.
[La estudiante escribe $390a+420b+450c=$]
L524 I: ¿Igual a cuánto?
L525 A: ¿Igual a 20?
L526 I: Ojo porque estamos hablando de costos.
L527 A: Entonces le voy a dar en el precio de los 20 kilos.
[La estudiante escribe $390a+420b+450c=8235$.]

Para la conformación de la tercera ecuación la estudiante muestra, nuevamente, la tendencia a combinar las condiciones del problema relacionando de forma errónea las cantidades, tanto conocidas, como desconocidas. Además, en este caso, en lugar de utilizar la suma algebraica $n+3$ para expresar que aumenta una cantidad, multiplica la cantidad desconocida $(3n)$.

L528 I: Además nos dicen otra condición, ¿cuál es la otra condición?
L529 A: La mezcla tiene tres kilos más del tipo A que del tipo B.
L530 I: ¿Cómo podemos expresar eso?
L531 A: Podría ser poner 420 entre paréntesis y multiplicar por 3.
L532 I: Los 400 y los 390, todos estos, son precios, son costos, pero aquí estamos hablando de la cantidad de kilos y la cantidad de kilos nosotros lo definimos como a, b y c. Entonces hablamos en términos de a, b y c ¿cómo nos quedaría?
L533 A: a más 3b más c igual a 20 [a+3b+c=20].
[…]
L534 I: nos enfocamos en que hay 3 kilos más del tipo A que del tipo B. Entonces piénsalo en estos términos, por ejemplo, si fueran cinco kilos del tipo A, ¿cuántos kilos del tipo B tendríamos?
L535 A: Dos.

Se guía el proceso de producción de sentido de la expresión $a-3=b$ y con esta ecuación se conforma el SEL (Figura 5.56). La estudiante aplica transformaciones algebraicas para presentar el sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas en forma canónica.

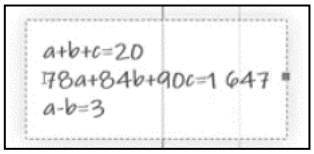
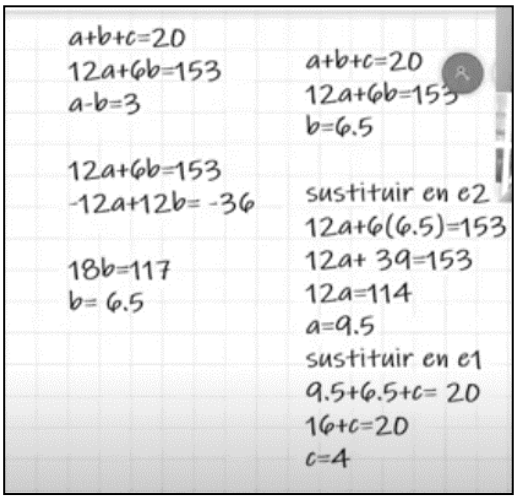


Figura 5.56 SEL para A8P5 con Ana.

Posteriormente, la estudiante inicia el proceso de resolución con el uso del método de reducción gaussiana y lo aplica en forma competente (Figura 5.57). Finalmente interpreta la solución en términos del problema de enunciado.



5.57 Método de Gauss de A8P5 con Ana.

L536 I: Muy bien. Aquí sí tuvimos solución ¿cierto?
L537 A: Ajá.
L538 I: ¿Qué quiere decir estos a, b y c en términos del problema? ¿Qué son este 9.5, 4 y 6.5?
L539 A: Van a ser los valores de […] quiere decir cuántos kilos de cada café se agregan a la mezcla especial de 20.

Informe de Tendencias cognitivas identificadas en la Actividad 8

Identificamos la Tendencia Cognitiva 5 tanto en A8P1 como en A8P3. En el primer caso, aun cuando identifica cuáles son las cantidades desconocidas, la estudiante asigna cantidades dadas en el contexto del problema a cada una de las literales (L374-L377) al hacer una lectura en un estrato del lenguaje. En A8P3 la estudiante no puede concluir a partir de la lectura que el SEL no tiene solución al analizar que la solución encontrada a partir de transformaciones no valida todas las ecuaciones (L449-L457).

La estudiante realiza una generalización errónea (Tendencia Cognitiva 6) al tratar de modelar una de las condiciones de A8P3 (L432-L435), ya que en los problemas previos existía una condición que relacionaba mediante la suma las dos cantidades desconocidas.

En el proceso de modelar A8P4 y A8P5 observamos que al igual que en el caso de Gabriel, para Ana el trabajo de modelar ecuaciones con cantidades aumentadas resulta en un mecanismo inhibitorio (Tendencia Cognitiva 8), ya que, por ejemplo, al tratar de escribir en forma algebraica "si se hubieran vendido nueve unidades más" lo que implica aumentar en nueve la cantidad desconocida, la estudiante multiplica por nueve la cantidad desconocida (L471-L473). Como se mencionó previamente, la tendencia a unir las condiciones sin considerar las relaciones que se establecen entre ellas es un mecanismo apelativo que podría desencadenar procesos erróneos de resolución y que se observa nuevamente en el proceso de modelar estos SEL (Tendencia Cognitiva 7) derivado de la Tendencia Cognitiva 5, una lectura hecha en un estrato del lenguaje que no le permitirá resolver la situación problemática (L474-L484 y L528-L533).

Durante la resolución de A8P4 observamos nuevamente la Tendencia Cognitiva 8, ya que la estudiante realiza una lectura de la ecuación que no le permite darle sentido al hecho de despejar una variable en términos de otra variable (L488-L492), por lo que consideramos que este es un mecanismo inhibitorio que observamos en el mismo ítem en el caso de Gabriel.

Capítulo 6

Conclusiones. Interpretación de datos en términos del MTL

Una vez realizada la toma y el análisis de datos de la experiencia de aprendizaje (Capítulo 5) a manera de conclusiones de la investigación presentamos en este capítulo la interpretación de los datos en términos del Modelo Teórico Local. Iniciamos exponiendo una síntesis de momentos de producción de sentido y desarrollo de competencias de los casos de estudio en cada una de las actividades del Modelo de enseñanza. Posteriormente se ejemplifican las tendencias cognitivas identificadas y la conformación del objeto mental SEL observado en las entrevistas a cada estudiante. Enseguida se proponen modificaciones al Modelo de enseñanza con base en la interpretación de los datos, lo cual abre la posibilidad a nuevas investigaciones. Finalmente se presenta la contrastación de las hipótesis con las observaciones empíricas y con ello se responden las preguntas de investigación.

6.1 Hallazgos con respecto a la producción de sentido y desarrollo de competencias

La forma en la cual los estudiantes abordan las actividades y responden a ellas son diferentes y están vinculadas parcialmente a las características descritas en 5.1. Existen, además, diferencias significativas en el intertexto personal de los estudiantes con respecto a los sistemas de ecuaciones lineales. Estas diferencias son determinantes en la producción de sentido y en el desarrollo de las competencias de cada uno; lo cual se hizo evidente no solo de manera previa, sino durante y posteriormente al desarrollo de las entrevistas con intervención didáctica. En esta sección presentamos una síntesis de momentos de producción de sentido y desarrollo de competencias comunes en los tres casos de estudio y de diferencias significativas derivadas del intertexto personal de cada uno de los estudiantes.

6.1.1 Conclusiones de la Actividad 1

En la Actividad 1 identificamos producción de sentido con respecto a la caracterización de las ecuaciones de primer grado, en particular en ecuaciones con dos variables.

Al iniciar la experiencia de aprendizaje el intertexto personal de los tres estudiantes mostraba características similares con respecto a las ecuaciones de primer grado con una incógnita. Los tres estudiantes mostraron competencia en la aplicación de las transformaciones necesarias para su resolución. También identificaron características de las ecuaciones, tales como las cantidades desconocidas y la igualación de dos expresiones.

Un caso particular fue el de Gabriel, quien afirmaba, al inicio de la actividad, que una característica de una ecuación era estar "igualada a cero". Consideramos que la exposición del estudiante a formas canónicas de la ecuación puede haber motivado esta concepción. Tras la intervención didáctica observamos un cambio en la producción de sentido y una lectura más adecuada (Caso de Gabriel: L1-L4).

En ítems correspondientes a expresiones o a ecuaciones no ordinarias (sin solución o con infinitas soluciones), las intervenciones se produjeron en forma similar. Al iniciar el análisis los estudiantes no podían realizar una lectura adecuada. Consideramos que el intertexto de los estudiantes con respecto a las ecuaciones de primer grado se desarrolló con base en la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita. A partir de las intervenciones hubo producción de sentido con respecto a los resultados encontrados al realizar transformaciones algebraicas (Caso de Gabriel: L5; caso de Ana: L11-L18).

En el caso de ecuaciones de primer grado con dos y tres incógnitas las intervenciones coadyuvaron en la producción de sentido con respecto a la infinidad de soluciones (Caso de Gabriel: L9-L18; caso de Ana: L28-L33). En cuanto al análisis del problema de enunciado en el que se presenta una condición y dos cantidades desconocidas, se evidencia producción se sentido respecto a que puede tener múltiples soluciones, que puede generalizarse en forma algebraica como una ecuación lineal con dos variables y que esas ecuaciones tienen infinita cantidad de soluciones (Figura 5.3 y caso de Ana: L40-L49).

6.1.2 Conclusiones de la Actividad 2

Como se comentó previamente, la actividad 2 fue incorporada al modelo de enseñanza posteriormente al desarrollo de la experiencia piloto. Por esta razón no hay evidencia en el caso de Vanessa para esta actividad. Por otra parte, encontramos que Ana mostró competencia para realizar las transformaciones algebraicas necesarias para la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita que involucran fracciones, símbolos de agrupación y operaciones con cantidades desconocidas. Mientras que Gabriel pudo realizar las transformaciones necesarias, pero requirió intervención en algunos momentos. En ambos casos observamos producción de sentido con respecto a las posibilidades de que existan ecuaciones de primer grado sin solución y con infinitas soluciones y no únicamente con una solución (Caso de Gabriel: L44-L52; caso de Ana: L55-L62).

6.1.3 Conclusiones de la Actividad 3

Mediante el uso del MIAS en la resolución A3P1 identificamos la producción de sentido respecto a la restricción de tener al menos dos condiciones para encontrar una solución única en un problema con dos cantidades desconocidas (Figuras 5.5, 5.16 y 5.43). En problemas posteriores observamos producción de sentido con respecto a que esas condiciones pueden expresarse mediante un sistema de ecuaciones en el que la solución es común a las ecuaciones.

Mediante el uso de valores concretos para la exploración de las condiciones (estratos del MAES) hubo producción de sentido respecto a la relación entre las cantidades conocidas y desconocidas y las propuestas de modelos algebraicos (Caso de Vanessa: L7-L14; caso de Ana: L80-L83). En general, los estudiantes mostraron competencia para expresar los valores de las soluciones en términos de los problemas de enunciado. Mediante intervención, los estudiantes reconocieron la conveniencia del uso de transformaciones algebraicas para resolver SEL sobre el uso de inferencias (L55-L58).

Una de las dificultades detectadas en esta actividad fue la de modelar algebraicamente las condiciones del problema. Sin embargo, se evidencia que mediante intervención didáctica hubo producción de sentido respecto al uso de valores concretos para encontrar las relaciones entre las cantidades (estrato del MAES). Si bien, en general, al finalizar la actividad los

estudiantes no definen en forma competente las ecuaciones con una primera lectura de los problemas de enunciado, encuentran sentido en el uso de estratos más concretos como apoyo para el análisis de las condiciones.

6.1.4 Conclusiones de la Actividad 4

Con respecto a la actividad 4, cuyo objetivo es que los estudiantes identifiquen los SEL en diferentes sistemas matemáticos de signos y que transiten entre ellos mediante el reconocimiento de sus elementos encontramos que, en general, en una primera lectura de los ítems los estudiantes no respondieron en forma competente. El intertexto personal de los estudiantes no les permite realizar una lectura adecuada de los SEL en diferentes SSM. Consideramos que la lectura estratificada que se evidencia (Figuras 5.17, 5.18 y 5.19; caso de Ana: L104-L108, L120-L124) se deriva de que el trabajo de los estudiantes relacionado con ecuaciones estuvo enfocado en las transformaciones algebraicas para su resolución. Una vez realizado el análisis de los ítems de la actividad se observa producción de sentido respecto a la forma en la que se relacionan los SEL y su solución en diferentes SSM (Caso de Gabriel: L61-L68; Caso de Ana: L140-L145).

En el caso de Vanessa se observa producción de sentido respecto a la solución de SEL en el SSM del plano de ejes coordenados; tanto en sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas (Caso de Vanessa: L15-L27), como en sistemas de tres ecuaciones y dos incógnitas (Caso de Vanessa: L30-L43).

En los tres casos el trabajo con tablas de valores numéricos representó dificultades para los estudiantes en una primera lectura. Por ejemplo, en el caso de Ana observamos tendencia a encontrar un modelo algebraico como paso intermedio cuando se le pide relacionar condiciones con valores tabulados (Caso de Ana: L104-L108). Sin embargo, una vez realizado el análisis con intervención didáctica se evidenció competencia para identificar la relación entre las tablas y los demás SSM.

6.1.5 Conclusiones de la Actividad 5

El objetivo de la Actividad 5 es analizar la clasificación de los SEL de acuerdo con la naturaleza de su solución. En esta actividad se evidencia que los estudiantes logran producir sentido en la lectura de los sistemas de hasta tres ecuaciones con tres incógnitas sin solución, con una o con infinitas soluciones. Observamos desarrollo de competencia en la interpretación de la naturaleza de la solución de los SEL en los SSM del plano de ejes coordenados, en tablas de valores numéricos correspondientes y en forma algebraica gracias al apoyo del SGD (Caso de Vanessa: L56-L68, L69-L80; caso de Gabriel: L81-L84, L85-L86, L91-L96; caso de Ana: L150-L153, L165-L171).

6.1.6 Conclusiones de la Actividad 6

El objetivo de A6S1 era profundizar sobre el concepto de equivalencia para darle sentido al método de reducción de Gauss, pues considerábamos que la equivalencia de ecuaciones formaba parte del intertexto de los estudiantes. Al inicio de la actividad identificamos que el concepto de ecuación equivalente no formaba parte del intertexto de los estudiantes (Caso de Vanessa: L115-L119; caso de Gabriel: L164-L167). Durante el desarrollo de la actividad se evidenció producción de sentido con respecto a los objetos matemáticos ecuación equivalente y SEL equivalente. Además, los estudiantes reconocieron algunas transformaciones para obtener SEL equivalentes y la ventaja de tener un SEL escalonado en el proceso de resolución (Caso de Vanessa: L120-L130; caso de Gabriel: L170-L173; L241-L249).

6.1.7 Conclusiones de la Actividad 7

En los tres casos observamos desarrollo de competencias con respecto al método de Gauss. En esta actividad se retomó el uso de las operaciones para obtener un SEL escalonado equivalente con base en lo analizado en la Actividad 6. En los casos de Gabriel y Ana la actividad se desarrolló con apoyo de las herramientas SEL_Reducción2 y SEL_Reducción3 en GeoGebra. Por el uso del SGD el trabajo algebraico consistió principalmente en la identificación de las operaciones por renglón necesarias para encontrar un SEL escalonado equivalente (Caso de Ana: L296-L298, L363-L364; caso de Gabriel: L174-L180). Además, el uso del SGD permitió complementar las transformaciones algebraicas y los resultados

obtenidos con la visualización de la representación de los SEL y sus transformaciones en forma gráfica y producir sentido respecto a los SEL sin solución (Caso de Gabriel: L181-L182; caso de Ana: L267-L272), con una y con infinitas soluciones (Caso de Gabriel: L183-L186; caso de Ana: L284-L286). El trabajo con Vanessa en la Actividad 7 se realizó sin apoyo de herramientas digitales. Las transformaciones algebraicas se realizaron en papel y mediante la pizarra digital y también encontramos que la estudiante dotó de sentido los diferentes casos presentados: SEL sin solución (Caso de Vanessa: L131-L134), con una solución y con infinitas soluciones (Caso de Vanessa: L139-L145).

6.1.8 Conclusiones de la Actividad 8

Con respecto al método de resolución de problemas de enunciado, en general, los estudiantes fueron competentes para identificar las cantidades desconocidas y relacionarlas con literales para su tratamiento algebraico (Figuras 5.14, 5.15, 5.47 y 5.55; caso de Ana: L396-L401, L458-L453). Expresaron, además, la solución o resultados en términos del problema (Caso de Gabriel: L245-L246, L270-L271; caso de Ana: L538-L539).

Una de las mayores dificultades de los estudiantes durante esta actividad fue modelar en ecuaciones las condiciones de los problemas. Sin embargo, mediante el uso de valores concretos, los estudiantes pudieron dar sentido a las relaciones entre las cantidades conocidas y desconocidas, ya sea para reflexionar y proponer una ecuación o para revisar sus inferencias (Caso de Vanessa: L163-L168; caso de Gabriel: L210-L215, L219-L224; caso de Ana: L379-L382, L406-L417).

Aun cuando en la mayoría de las ocasiones se evidencia competencia en el uso del método de resolución de Gauss (Figuras 5.14, 5.32, 5.47, 5.48; caso de Gabriel: L407-L410; caso de Ana: L389-L395, L439-L444), una vez modelado el SEL, hay situaciones en las que los estudiantes no pueden dotar de sentido los resultados de las transformaciones algebraicas (Caso de Ana: L452-L457). Sin embargo, en la mayoría de los SEL, mediante intervención, sí identificaron en forma competente la naturaleza de la solución (Caso de Vanessa: L169-L182; caso de Gabriel: L265-L269, L361-L362; caso de Ana: L493-L499).

6.2 Tendencias cognitivas identificadas

Como se describió en 2.3.2, las tendencias cognitivas son hechos que se presentan de forma reiterada cuando se pretende que en las experiencias de aprendizaje los estudiantes pasen de un estrato del SMS más concreto a uno más abstracto. El sistema matemático de signos del álgebra empleado en el Modelo de Enseñanza que describimos en la sección 4.3 está compuesto por el lenguaje natural, el lenguaje algebraico y los SSM numérico y gráfico. En diversos momentos durante el desarrollo de las actividades tenemos el objetivo de llevar a los estudiantes a estratos más abstractos a partir de la producción de sentido o con apoyo de SSM más concretos. Pretendemos, a partir de una red intertextual, que los estudiantes doten de un sentido adecuado las lecturas de los espacios textuales que se les proporcionan y desarrollen competencia en los métodos de resolución. Cabe destacar que, en algunos casos, las tendencias son apoyos o caminos cognitivos que se observan en forma reiterada, mientras que en otros manifiestan dificultades u obstáculos en las experiencias de enseñanza. Enseguida describimos la forma en la que se evidencian las tendencias cognitivas durante la aplicación del Modelo de enseñanza, ejemplificando algunos de los momentos mediante las referencias a figuras y diálogos.

TC Uno. La presencia de un proceso de abreviación de los textos concretos para poder producir reglas sintácticas nuevas.

Podemos observar esta tendencia en el desarrollo de A5S2 (Figura 5.3) y en A3P2 (Figura 5.16), al usar el MAES para modelar algebraicamente condiciones de problemas de enunciado. La importancia de esta tendencia cognitiva en el desarrollo del Modelo de enseñanza es que permitió los estudiantes establecer sentidos intermedios al intentar utilizar el método cartesiano. Así, mediante estratos del MAES, con el uso de valores concretos, los estudiantes pudieron dotar de sentido a las condiciones de los problemas, proponer ecuaciones y descartar inferencias cuando se daban a priori sentidos no adecuados a la lectura de los problemas.

TC Dos. La dotación de sentidos intermedios.

Esta tendencia cognitiva se evidenció en diversos momentos de la aplicación del Modelo de enseñanza con los tres estudiantes. Consideramos que, al exponer a los estudiantes a objetos

y procesos matemáticos nuevos mediante vías no siempre tradicionales, no podían abordarlos en forma competente sin un proceso que permitiera hacerlos parte de su intertexto. Dada la falta de familiaridad, dotaban de sentidos intermedios algunas lecturas, en ocasiones como herramienta para llegar a sentidos adecuados (Caso de Vanessa: L3:L6; caso de Gabriel: L201-L204 y Figura 5.29) y otras en forma de obstáculos resueltos mediante intervención (Caso de Gabriel: L205-L209).

TC Tres. El retorno a situaciones más concretas cuando se presenta una situación de análisis.

Aunque en forma autónoma no observamos esta tendencia, tratamos de inducirla como una herramienta de apoyo en los procesos cognitivos de los estudiantes. Por ejemplo, el SSM del plano y el espacio de ejes coordenados representaba un medio más concreto que la representación algebraica. Por esta razón, en algunos análisis se proponía la alternativa de visualizar la forma gráfica de los SEL o sus transformaciones algebraicas (Caso de Gabriel: L91-L96).

TC Cuatro. La imposibilidad de desencadenar operaciones que podían hacerse momentos antes.

Observamos que, algunas acciones que los estudiantes realizaban en forma competente en una sesión ya no podían realizarlas en la siguiente. Identificamos, además, dificultades al volver al trabajo de transformaciones algebraicas después del uso de herramientas digitales. Dado que, en el diseño del Modelo de enseñanza las actividades llevan una continuidad consideramos estos hechos dentro de la TC 4. Sin embargo, presumimos que estos casos se derivan de fallas en el proceso de construcción de la red intertextual (Caso de Vanessa: L152-L156; caso de Gabriel: L236-L240).

En diversas ocasiones reconocimos esta tendencia vinculada a la TC Ocho ya que al estar en presencia de mecanismos inhibitorios los estudiantes tendían a “bloqueos” que les impedían realizar operaciones en las que previamente parecían competentes (Caso de Gabriel: L340-L341; caso de Ana: L488-L489).

TC Cinco. Lecturas hechas en estratos del lenguaje que no permitirán resolver la situación problemática.

Un hecho que identificamos en los tres casos de estudio es la tendencia a combinar condiciones de los problemas de enunciado en una misma ecuación sin relacionar adecuadamente las cantidades conocidas y desconocidas (Figura 5.7; caso de Vanessa: L3-L6; caso de Gabriel: L283-L287; caso de Ana: L98-L101). Consideramos lo anterior como una lectura estratificada de los problemas de enunciado derivada, posiblemente, del trabajo con problemas de enunciado modelados con una ecuación de primer grado con una incógnita.

TC Seis. Articulación de generalizaciones erróneas.

Con respecto a las transformaciones algebraicas observamos pocas generalizaciones erróneas en el estudio (Caso de Vanessa: L159-L160; caso de Gabriel: L9-L14). La mayoría de las generalizaciones erróneas que identificamos están relacionadas con sentidos intermedios vinculados al trabajo previo en el propio Modelo de enseñanza (Caso de Vanessa: L161-L162; caso de Gabriel: L46-L49, L316-L323; caso de Ana: L432-L435).

TC Siete. La presencia de mecanismos apelativos que centran el desencadenamiento de procesos erróneos de solución.

En los casos de Gabriel y Ana las transformaciones algebraicas de la Actividad 7 se apoyaron en aplicaciones digitales de uso específico desarrolladas en GeoGebra. Por esta razón, los estudiantes únicamente debían proponer las operaciones necesarias para escalonar los SEL. Esto propició la presencia de un mecanismo apelativo en el proceso de resolución de A8P2 al escalonar el SEL sin realizar las operaciones sobre renglón (Caso de Gabriel: L227-L230 y Figura 5.30). Consideramos que Ana no mostró esta tendencia dada su competencia en el manejo de las transformaciones algebraicas.

TC Ocho. La presencia de mecanismo inhibitorios.

En general encontramos que los estudiantes presentaron dificultades en la modelación de condiciones de problemas de enunciado. En particular observamos mecanismos inhibitorios en la modelación algebraica de condiciones con cantidades desconocidas aumentadas (Caso de Gabriel: L281-282; caso de Ana: L471-L473).

Consideramos que el trabajo de diferentes ítems en los que se requerían relaciones de diferentes SSM con tablas de valores representó para los estudiantes un mecanismo inhibitorio, que podría superarse con un trabajo más centrado en el desarrollo de tablas de

valores a partir de condiciones, ecuaciones y gráficas y las formas de relacionar los diferentes SSM.

Encontramos, en forma reiterada, que los estudiantes no lograban darle sentido al hecho de despejar una variable en términos de otra, pues involucra un segundo nivel de representación de la incógnita (Filloy et al., 2010). Consideramos que las transformaciones algebraicas con más de una cantidad desconocida representaron mecanismos inhibitorios ya que los estudiantes esperaban encontrar un valor numérico (Caso de Gabriel: L9-L14, L340-L345 y Figura 5.35; caso de Ana: L488-L492).

TC Nueve. La presencia de obstrucciones provenientes de la semántica sobre la sintaxis y viceversa.

En lo referente a privilegiar la semántica sobre la sintaxis, observamos un momento durante el desarrollo de A3P2 en el que, una vez modelado el SEL, la estudiante propone resolverlo regresando a las condiciones del problema de enunciado (Caso de Ana: L84-L86). Mientras que el caso de sintaxis sobre semántica lo observamos durante el desarrollo de la experiencia de enseñanza con Vanessa ya que al iniciar la resolución de A3P1 mediante el MIAS la estudiante propone para la resolución "hacer una ecuación" (Caso de Vanessa: L1-L2).

TC Diez. La generación de errores sintácticos debido a la producción de códigos personales intermedios para dotar de sentido a acciones concretas intermedias.

En la resolución de A8P5 encontramos que Gabriel estableció un código personal que provocó diversos errores sintácticos al modelar algebraicamente el problema de enunciado (Caso de Gabriel: L373-L380, L381-L390 y Figura 5.36).

En general, encontramos de especial interés la tendencia a englobar las condiciones de los problemas de enunciado en una misma ecuación sin relacionar adecuadamente las cantidades. Este hecho fue reiterativo en los tres casos de estudio y consideramos que una investigación sobre este fenómeno podría dar luz sobre los elementos que podrían ayudar a superar esta tendencia en los estudiantes. Estimamos, además, que un trabajo más exhaustivo con SEL con infinitas soluciones (como el de A8P4) podría revertir en los estudiantes la tendencia a ver las transformaciones algebraicas en ecuaciones con varias variables como un mecanismo inhibitorio. En el caso de la modelación algebraica, las exploraciones con valores concretos

en el análisis de las condiciones de los problemas de enunciado podrían ser una herramienta útil para el desarrollo de esta competencia.

En 2.6 se detalla el diagrama del diseño de la experimentación propuesto por Filloy y cols. (1999) en el que se muestra que este proceso es recursivo, por lo que a partir de los resultados del análisis e interpretación de los datos del estudio experimental del MTL se genera una nueva problemática con la que se propone una nueva experimentación. Consideramos que la importancia del análisis de las tendencias cognitivas en el estudio de los casos radica en los elementos que aporta con respecto a situaciones que deben tenerse en cuenta para modificar el MTL, en específico, el Modelo de enseñanza propuesto y reiniciar la organización de las etapas de una nueva observación experimental.

6.3 Observaciones sobre el objeto mental SEL de los estudiantes después de la experiencia de aprendizaje

Debemos tener presente, cuando hablamos de objeto mental, que nos referimos al campo semántico (de un individuo) relacionado al concepto, que permite hacer una interpretación adecuada del objeto matemático en todas las situaciones posibles y con el cual el estudiante puede ejecutar procesos o realizar lecturas/transformaciones acordes con la matemática actualmente aceptada. En nuestro caso, el objetivo es que la secuencia de espacios textuales que conforman el Modelo de enseñanza favorezca la producción de sentido de los procesos asociados al objeto matemático Sistema de Ecuaciones Lineales y su solución en diferentes representaciones. Esto para construir un campo semántico en torno a los SEL tan rico como sea posible.

La construcción que los estudiantes lograron del objeto mental SEL una vez realizadas las actividades del Modelo de enseñanza, estuvo influenciada por el propio intertexto de los estudiantes en lo relacionado con las ecuaciones de primer grado con una incógnita y las transformaciones necesarias para resolverlas. Y en especial, por el intertexto determinante en la forma de aprendizaje y de abordar situaciones de enseñanza con las características de los modelos de Comunicación y Enseñanza empleados en la experiencia de aprendizaje.

6.3.1 Objeto mental SEL. El caso de Vanessa

El Modelo de Comunicación, en lo referente a la modalidad de entrevista a distancia, lo encontramos especialmente incómodo para Vanessa. Este tipo de interacción parecía restarle concentración y seguridad al tratar de responder en forma instantánea a los ítems y a las preguntas hechas por la investigadora. Sin embargo, a lo largo de la experiencia, la estudiante desarrolló los elementos en su intertexto que le permitieron dotar de sentido a los espacios textuales respecto a los SEL y su solución. Además, logró hacer una lectura adecuada de problemas de enunciado y abordar parcialmente su resolución en forma competente. Con respecto al uso de diferentes SSM en los SEL, en el caso de Vanessa no hubo el trabajo necesario que le permitiera usar las formas gráficas de los SEL como un estrato más concreto para la producción de sentido en la resolución de los SEL.

6.3.2 Objeto mental SEL. El caso de Gabriel

En el caso de Gabriel observamos que las dificultades con respecto a las transformaciones algebraicas se convirtieron en tropiezos en la aplicación del método de resolución de Gauss (A8), los cuales fueron superados mediante la intervención de la investigadora. Gabriel pudo producir sentido sobre la naturaleza de las soluciones de los SEL usando como apoyo los SSM del plano y el espacio de ejes coordenados, así como los resultados de las transformaciones algebraicas de los SEL. Consideramos, además, que el trabajo en el SMS y la estructura del Modelo de enseñanza no fueron obstáculos para el estudiante. Gabriel mostró falta de competencia en los métodos de resolución y en diferentes momentos de la experiencia la producción de sentido no fue adecuada. Sin embargo, superó las dificultades mediante intervenciones didácticas. Como en los otros casos estudiados, encontramos que Gabriel mostró dificultades para modelar algebraicamente las condiciones de problemas de enunciado, pero fue competente para identificar cantidades desconocidas y reconocer la existencia de múltiples condiciones.

6.3.3 Objeto mental SEL. El caso de Ana

De los tres participantes en el estudio Ana destaca y se muestra cómoda en lo referente al uso de las transformaciones algebraicas. Esto puede evidenciarse, por ejemplo, al terminar la resolución de A7S1b, pues una vez que observa que se han encontrado los valores de las incógnitas la estudiante sonríe y expresa espontáneamente: "Ay, ¡qué bonito!". La habilidad descrita contribuyó al desarrollo de la competencia en el método de Gauss durante su experiencia de aprendizaje. Además, se observa en diferentes momentos de la experiencia de aprendizaje que la estudiante privilegia el uso del álgebra y usa ecuaciones como medio para dotar de sentido el trabajo en otros SSM. Aun cuando lo anterior contribuyó en la producción de sentido y el desarrollo de competencias respecto al trabajo algebraico pudo significar un obstáculo en los otros SSM y en la producción de sentido respecto a la lectura de los problemas de enunciado.

Para concluir esta sección consideramos importante destacar que en los tres casos de estudio identificamos que la caracterización de la ecuación lineal con dos variables favorece la producción de sentido respecto a los SEL. Y que el reconocimiento de las transformaciones de los SEL en sistemas equivalentes mediante el método de reducción gaussiana promueve la concepción de los SEL como un objeto matemático. En lo que respecta a los problemas de enunciado identificamos que mediante los métodos MIAS y MAES se contribuyó en la producción de sentido respecto a la solución de los SEL como el conjunto de valores que son solución de cada condición de los problemas y que estos pueden modelarse y resolverse en forma algebraica. Además, el uso del método de reducción gaussiana para la resolución contribuyó en la concepción de los SEL como un objeto matemático indivisible, en contraposición con los métodos de resolución de igualación, eliminación y sustitución, cuyo objetivo es convertir un SEL en una ecuación, lo que puede dar lugar a la desvinculación de las ecuaciones que conforman el SEL.

6.4 Análisis del Modelo de enseñanza

Con respecto a la Actividad 1 consideramos que en general el propósito de caracterizar la ecuación lineal se cumple en los tres casos de estudio, sin embargo, consideramos que es necesario que los estudiantes se familiaricen más con las ecuaciones con dos y tres variables

y que, además, es conveniente hacer énfasis en el trabajo con tablas de valores numéricos, ya que en A4 encontramos que los estudiantes mostraron dificultades en el trabajo con tablas.

La Actividad 2 se incorporó al Modelo de enseñanza posterior al estudio de Vanessa. Consideramos que, en los casos de Gabriel y Ana, se cumple el objetivo de identificar la naturaleza de las soluciones en ecuaciones de primer grado con una incógnita en A2S1. Lo anterior coadyuva en la producción de sentido respecto a las posibilidades de que los SEL puedan tener una, ninguna o infinidad de soluciones. Nuevamente, en A2S2, consideramos que la construcción de tablas de valores puede contribuir en la producción de sentido con respecto a este SSM.

En la Actividad 3, posterior al trabajo con Gabriel se añadió un problema con la finalidad de hacer una mejor transición del MAES al Método Cartesiano. A partir de esta actividad observamos que, en la modelación algebraica de las condiciones de los problemas de enunciado, el uso de valores concretos es un recurso en el análisis de las relaciones entre las cantidades. Con respecto a los objetivos, los estudiantes identifican la solución como el conjunto de valores que valida las condiciones de los problemas.

En la Actividad 4 identificamos la mayor cantidad de dificultades con respecto a la producción de sentido ya que el uso de diferentes SSM en la forma no tradicional en la que se aborda en la actividad no parecía formar parte del intertexto de los estudiantes. Consideramos que es conveniente introducir A5S1 como primera sección de A4 y A5S4 al final de A4 para promover en los estudiantes la producción de sentido con respecto a los SEL y su solución en diferentes SSM.

Consideramos que, en la Actividad 5, las transformaciones algebraicas para llevar los SEL a la forma canónica podrían organizarse de forma más clara para los estudiantes. Apreciamos importante limitar el trabajo en esta actividad a identificar que la existencia de SEL sin solución, con una o con infinitas soluciones en el plano y el espacio de ejes coordenados y las tablas de valores numéricos, así como el análisis de la forma algebraica canónica, sin aplicar ningún método de resolución.

En la Actividad 6 los tres estudiantes lograron identificar y justificar las operaciones sobre SEL para obtener sistemas equivalentes y dar a los SEL el carácter de objeto matemático.

Debido a que la noción de ecuaciones y sistemas de ecuaciones equivalentes no formaba parte del intertexto de los estudiantes (de este hecho se encuentra también evidencia en 3.2.2) consideramos un trabajo más estructurado para abordar estos objetos matemáticos en esta actividad.

A partir del análisis de la Actividad 7 consideramos adecuado promover, con un trabajo más exhaustivo, la competencia de los estudiantes en el uso del método de Gauss para la reducción de SEL con solución única mediante el uso de las operaciones identificadas en la Actividad 6. Posteriormente, abordar los casos de SEL sin solución y con infinitas soluciones con apoyo del SGD GeoGebra para relacionar los diferentes sistemas de signos del SMS, en particular, mejorar el trabajo con las tablas de valores numéricos.

Después del análisis de datos, juzgamos que la Actividad 8 reúne las características para el desarrollo de los objetivos de su diseño. Sin embargo, todavía se evidencia en los estudiantes falta de competencia en la resolución de los problemas de enunciado, en particular, en la modelación algebraica y de producción de sentido con respecto a los SEL con infinitas soluciones, por lo que en las actividades previas es necesario incluir los elementos para remontar estas dificultades.

Previo a las disposiciones de aislamiento derivadas de la pandemia por el virus SARS-CoV-2, que llevó al ámbito educativo a un trabajo a distancia en México, el desarrollo de la experimentación del presente estudio incluía el llenado de hojas de trabajo que permitieran la observación de las producciones de los estudiantes. En particular, del lenguaje usado y las conexiones para identificar los momentos de producción de sentido. Consideramos que una nueva experimentación con las modificaciones al Modelo de enseñanza mencionadas previamente podría retomarse una vez que se regrese a la educación presencial en el nivel Medio Superior.

6.5 Reflexiones finales. Revisión de hipótesis

En esta sección se contrastan las hipótesis teóricas con las observaciones empíricas. En la sección 2.7.2 planteamos una serie de hipótesis respecto a los procesos cognitivos de los estudiantes de la enseñanza Media Superior respecto al aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales. Las hipótesis están vinculadas a las preguntas de investigación, por lo

que consideramos que con el proceso de analizar las hipótesis damos también respuesta a las preguntas.

Primera hipótesis: *La competencia en la lectura/transformación de las ecuaciones de primer grado con una o varias variables, como parte del intertexto de los estudiantes, es un precursor en la constitución del objeto mental sistema de ecuaciones lineales y favorece la producción de sentido en su aprendizaje.*

En las primeras dos actividades, cuyo enfoque fue el desarrollo de competencias con respecto a las ecuaciones de primer grado, observamos la incorporación al intertexto personal de los estudiantes de elementos como la existencia de ecuaciones de primer grado con infinidad de soluciones o sin solución y la representación gráfica de ecuaciones de primer grado con dos variables. Estos elementos influyeron en las tendencias y referencias en el desarrollo de las siguientes actividades, por lo cual, consideramos que, para la constitución del objeto mental SEL el estudio de la ecuación lineal con una y varias variables es fundamental.

Segunda hipótesis: *Mediante el uso del MIAS y el MAES como herramientas intermedias del MC se favorece competencia y la producción de sentido en la modelación de problemas de enunciado, factibles de representarse algebraicamente como sistema de ecuaciones lineales.*

En la Actividad 3 se inició con el uso de los métodos de resolución de problemas de enunciado. En esta actividad observamos que el uso del MIAS favoreció la producción de sentido con respecto a la solución de un SEL, en particular, que un conjunto de valores puede ser la solución (en contraposición a la idea de que cada valor del conjunto es una solución) y que la solución son los valores que hacen que se cumplan las condiciones del problema. Estos elementos fueron fundamentales en el desarrollo de la Actividad 8. En esta última actividad los estudiantes normalizaron el uso del MAES como herramienta intermedia para la modelación algebraica de los problemas.

Tercera hipótesis: *Se promueve la competencia en la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales de los estudiantes de nivel Medio Superior mediante el uso del objeto matemático sistema de ecuaciones equivalente y del método de reducción gaussiana.*

En la Actividad 6 pudimos observar la incorporación del concepto de equivalencia al intertexto personal de los estudiantes, tanto en ecuaciones como en sistemas de ecuaciones. También observamos producción de sentido con respecto a la utilidad de los sistemas equivalentes para la resolución de SEL. En la Actividad 7, los estudiantes usaron sistemas equivalentes mediante la reducción gaussiana para resolver SEL. El uso de SEL equivalentes mediante el método de resolución de Gauss ofrece un enfoque diferente a los métodos de igualación, eliminación y sustitución en los que el objetivo es convertir un SEL en una ecuación con una incógnita. Estos últimos métodos son importantes en el dominio del álgebra, pero podrían contribuir a la desvinculación de las ecuaciones del SEL, dificultad que se reportó en el análisis previo de los problemas. Además, a diferencia del método de Gauss su generalización a SEL con mayor número de incógnitas y ecuaciones es complejo. Por otra parte, los estudiantes identificaron SEL sin solución, con una y con infinitas soluciones al analizar los resultados obtenidos al hacer uso del método de reducción gaussiana.

Cuarta hipótesis: *El análisis y transformación de los sistemas de ecuaciones lineales en diferentes sistemas de signos matemáticos favorecen la producción de sentido y la competencia en su resolución.*

La revisión de los SEL y sus transformaciones en el software de geometría dinámica se realizó en las actividades 4, 6 y 7. Durante y después de las actividades pudimos observar referencias de los estudiantes a la representación de los SEL en el plano y el espacio de ejes coordenados para hacer conjeturas sobre la solución. Observamos, además, producción de sentido con respecto a la representación en tablas de valores numéricos de los SEL. Por lo anterior consideramos que la revisión simultánea de los SEL y su solución en diferentes SSM favorece la constitución del objeto mental SEL.

Finalmente, consideramos que es posible replantear el MTL para un nuevo estudio mediante los ajustes propuestos al Modelo de enseñanza en la sección 6.4 y un trabajo más exhaustivo que refuerce la constitución de los objetos mentales que se consideran en los objetivos de las actividades.

Referencias

Alcocer, I. (2007). *Dificultades en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales en contextos algebraico y geométrico.* Tesis de Maestría, CINVESTAV-IPN, México.

Allen, G. (2011). *Intertextuality.* Routledge.

Barthes, R. (1994). *El susurro del lenguaje. Más allá de la palabra y de la escritura.* Barcelona: Paidós.

Borja Tecuatl, I. (2016). *Conjunto solución a un sistema de ecuaciones lineales : una mirada desde la perspectiva de la teoría apos.* Ciudad de México: CINVESTAV.

Borja-Tecuatl, I., Trigueros, M., & Oktaç, A. (2013). Difficulties in Using Variables—A Tertiary Transition Study. *16th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*, (págs. 80-94). Denver.

Calabuig, J., García-Raffi, L., & Sánchez Pérez, E. (2015). Álgebra lineal y descomposición en valores singulares. *Modelling in Science Education and Learning, 8*(2), 133-144.

Cortes, A., Vergnaud, G., & Kavafian, N. (1990). From arithmetic to algebra: Negotiating a jump in the learning process. *Proceedings of the l4 th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2*, 27-34.

Cutz, B. (2005). *Un estudio acerca de las concepciones de estudiantes de licenciatura sobre los sistemas de ecuaciones y su solución.* Tesis de maestría, CINVESTAV-IPN, México.

DeVries, D., & Arnon, I. (2004). Solution-what does it mean? Helping linear algebra students develop the concept while improving research tools. *Proceedings of the 28th Conference of the International, 2*, 55-62.

Drijvers, P., Kieran, C., Mariotti, M. A., Ainley, J., Andresen, M., Chan, C., & Meagher, M. (2010). Integrating technology into mathematics education: Theoretical perspectives. *Mathematics education and technology-rethinking the terrain*, 89-132.

Dubinsky, E. (1997). Some thoughts on a first course in linear algebra at the college level. MAA NOTES, 85-106.

Dubinsky, E., & McDonald, M. A. (2002). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. *The teaching and learning of mathematics at university level*, 275-282.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, 103-131.

Filloy, E., & Barquera, É. (2013). Teorema de Tales: errores recurrentes en un modelo de enseñanza con lápiz y papel y otro con geometría dinámica. En T. Rojano, *Las tecnologías digitales en la enseñanza de las matemáticas* (págs. 133-148). México: Trillas.

Filloy, E., & cols. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa. Colección Sociedad Mexicana de Matemática Educativa.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Filloy, E., & Córdoba, J. (2013). La intertextualidad en el uso competente del sistema matemático de signos albebraico. En A. P. Preciado Babb, A. Solares Rojas, I. T. Sandoval Cáceres, & C. Butto Zarzar (Ed.), *Proceedings of the First Meeting between the National Pedagogic University and the Faculty of Education of the University of Calgary* (págs. 127-132). Calgary, Canada: Faculty of Education of the University of Calgary. Obtenido de http://hdl.handle.net/1880/49743

Filloy, E., Puig, L., & Rojano, T. (2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de las Ciencias, 25*(3), 327-342.

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving Equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics, 9*(2), 19-25.

Filloy, E., Rojano, T., & Puig, L. (2008). *Educational algebra: A theoretical and empirical approach.* (Vol. 43). NY: Springer Science & Business Media.

Filloy, E., Rojano, T., & Solares, A. (2010). Problems dealing with unknown quantities and two different levels of representing unknowns. *Journal for Research in Mathematics Education*, *41*(1), 52-80.

García, X. (2015). *Una experiencia de enseñanza de sistemas de ecuaciones lineales en el nivel Medio Básico.* Ciudad de México: CINVESTAV.

Goldenberg, E. P. (1987). Believing is seeing: How preconceptions influence the perception of graphs. *Proceedings of the 11th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1*, 197-204.

Golovina, L. (1980). *Álgebra lineal y algunas de sus aplicaciones.* Moscú: Mir.

Gómez, F. V. (1983). El concepto de «dialoguismo» en Bajtín. Otra forma del diálogo renacentista. *1616: Anuario de la Sociedad Española de Literatura General y Comparada*(5), 47-54.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of algebra. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 390-419.

Kieran, C. (2011). Overall commentary on early algebraization: Perspectives for research and teaching. *Early algebraization,* 579-593.

Kieran, C., & Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, 229-240.

Kieran, C., & Saldanha, L. (2005). Computer algebra systems (CAS) as a tool for coaxing the emergence of reasoning about equivalence of algebraic expressions. *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3*, 193-200.

Lay, D. (2001). *Álgebra lineal y sus aplicaciones* (Primera ed.). México: Pearson.

Manzanero, L. (2007). *Sistemas de Ecuaciones Lineales: Una perspectiva desde la Teoría APOE.* Tesis de Maestría, CINESTAV-IPN, México.

Mares, C. D. (2016). *Aprendizaje de los conceptos de independencia y dependencia lineal desde la teoría APOE.* Ciudad de México: CINVESTAV.

Mora, B. (2001). *Modos de pensamiento en la interpretación de la solución de sistemas de ecuaciones lineales.* Tesis de Maestría, CINVESTAV-IPN, México.

Moreno, L., & Waldegg, G. (2004). *Aprendizaje, matemáticas y tecnología: una visión integral para el maestro.* México: Santillana.

Ochoviet, F. T. (2009). *Sobre el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.* Tesis de Doctorado, CINVESTAV-IPN, Uruguay.

OECD. (2004). *Learning for Tomorrow´s World. First Results from PISA 2003.* OECD.

Oktaç, A., & Trigueros, M. (2010). ¿Cómo se aprenden los conceptos de álgebra lineal? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(4-11), 373-385.

Panizza, M., Sadovsky, P., & Sessa, C. (1999). La ecuación lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito. *Enseñanza de las ciencias, 17*(3), 453-461.

Parraguez, M. G., & Bozt, J. (2012). Conexiones entre los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores y el de solución de sistemas de ecuaciones lineales en R3 desde el punto de vista de los modos de pensamiento. *REIEC*, 49-72.

Peirce, C. (1974). *La ciencia de la semiótica.* (B. Bugni, Trad.) Buenos Aires: Nueva Visión.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, 61-94.

Puig, L. (2003). Signos, textos y sistemas matemáticos de signos. En E. Filloy, *Matemática Educativa: aspectos de la investigación actual* (págs. 174-186). México: FCE/CINVESTAV.

Puig, L. (2008). Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales. *Actas del Décimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (págs. 107-126). Huesca: Universidad de Zaragoza.

Puig, L. (2008). Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos. *Investigación en educación matemática: actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (págs. 107-126). Huesca: Instituto de Estudios Altoaragoneses.

Ramírez, C. (2008). *Concepciones de los estudiantes de nivel superior sobre sistemas de ecuaciones lineales.* Tesis de Maestría, CINVESTAV-IPN, México.

Ricœur, P. (1997). *Estructura y hermenéutica.* (G. Aranzueque, Trad.) Madrid: Universidad Autónoma de Madrid.

Rojano, T. (1994). La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 45-56.

Rojano, T. (2004). Local theoretical models in algebra learning: a meeting point in mathematics education. *Psychology of Mathematics Education*, 37-56.

Rojano, T. (2006). Los principios básicos de los modelos EFIT y EMAT. En T. Rojano, *Enseñanza de las física y las matemática con tecnología: Modelos de transformación de las prácticas y la interacción social en el aula* (págs. 15-23). México: SEP.

Rojano, T. (2010). Modelación concreta en álgebra: balanza virtual, ecuaciones y sistemas matemáticos de signos. *NÚMEROS. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 75*, 5-20.

Rojano, T. (2013). *Las tecnologías digitales en la enseñanza de las matemáticas.* México: Trillas.

Rojano, T., Filloy, E., & Puig, L. (2014). Intertextuality and sense production in the learning of algebraic methods. *Educational Studies in Mathematics, 83*(3), 389-407.

Saussure, F. (1974). *Course in general linguistics.* (A. S. Charles Bally, Ed., & W. Baskin, Trad.) Londres: Fontana.

Segura, S. (2004). Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. *RELIME, 7*, 49-78.

SEP. (2011). Matemáticas. *Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación Básica. Secundaria*. México: SEP. Recuperado el Abril de 2015, de Matemáticas: http://evaluaciondocente.sep.gob.mx/materiales/SEPPROGRAMASDEESTUDIO2011.GUIAPARAELMAESTRO.SECUNDARIA.MATEMATICAS.pdf

SEP. (2017). *Matemáticas I.* Recuperado el abril de 2019, de Secretaría de Educación Pública: https://www.dgb.sep.gob.mx/informacion-academica/programas-de-estudio/CFB/1er-semestre/Matematicas-I.pdf

SEP. (2017b). *Matemáticas. Educación secundaria. Plan y programas de estudio, orientaciones didácticas y sugerencias de evaluación.* Recuperado el 04 de 2019, de https://www.planyprogramasdestudio.sep.gob.mx/descargables/biblioteca/secundaria/mate/1-LPM-sec-Matematicas.pdf

SEP. (s.f.). *Secretaría de Educación Pública.* Recuperado el abril de 2019, de Programas de estudio para el Bachillerato Tecnológico: http://www.sems.gob.mx/work/models/sems/Resource/12615/5/images/BT_Algebra.pdf

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. (J. L. Dorier, Ed.) *On the Teaching of Linear Algebra*, 209-246.

Solares, A. (2007). *Sistemas matemáticos de signos y distintos niveles de representación de la incógnita.* (Tesis de doctorado), CINVESTAV-IPN, Matemática Educativa, México.

Strang, G. (1982). *Álgebra Lineal y sus aplicaciones.* CIudad de México: Fondo Educativo interamericano.

Trejo, E., & Camarena Gallardo, P. (2011). Análisis cognitivo de situaciones problema con sistemas de ecuaciones algebraicas en el contexto del balance de materia. *Educación Matemática, 23*(2), 65-90.

Trigueros, M., Oktaç, A., & Manzanero, L. (2007). Understanding of system of equations in linear algebra. *Proceedings of the 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, (págs. 2359-2368).

UNAM. (2017). Programa Matemáticas IV. Ciudad de México.

Villalobos, I. (2003). La noción de Intertextualidad en Kristeva y Barthes. *Revista Filosofía Universidad de Costa Rica, XLI*(103), 137-145.

Anexos

Anexo A. Herramienta de medición.

1. ¿Qué es un sistema de ecuaciones?

2. ¿Qué es la solución de un sistema de ecuaciones?

3. ¿Es posible tener un sistema de ecuaciones lineales con dos ecuaciones y tres variables que tenga:
   a) Solución única? Explica tu respuesta.

   b) Ninguna solución? Explica tu respuesta.

   c) Infinita cantidad de soluciones? Explica tu respuesta.

4. ¿Es posible tener un sistema de ecuaciones lineales con tres ecuaciones y dos variables que tenga:
   a. Solución única? Explica tu respuesta.

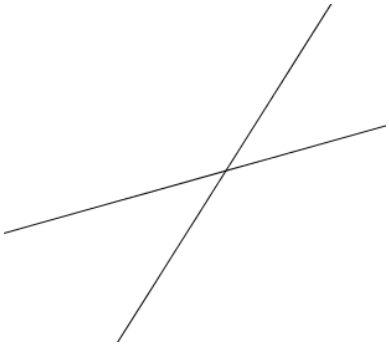
   b. Ninguna solución? Explica tu respuesta.

   c. Infinita cantidad de soluciones? Explica tu respuesta.

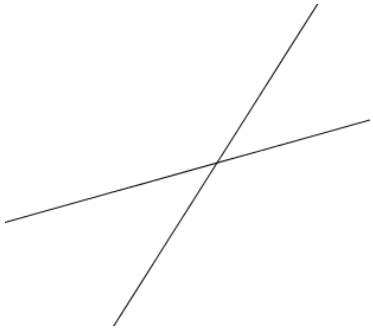
5. ¿Es posible colocar una tercera recta para que el sistema de ecuaciones representado en la gráfica tenga:
    a) Ninguna solución?
    b) Una solución?
    c) Dos soluciones?
    d) Tres soluciones?
    e) Infinita cantidad de soluciones?

Si es posible ¿cómo colocarías la tercera recta?

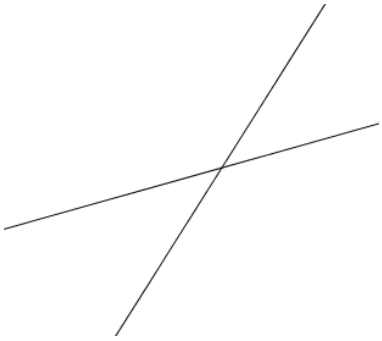
a)



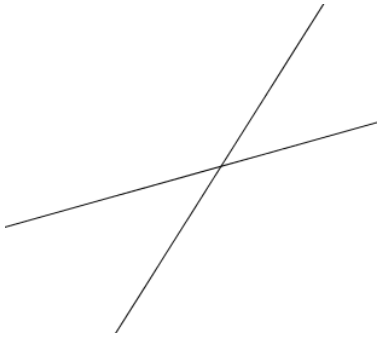
b)



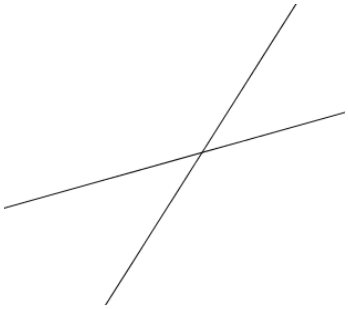
c)



d)

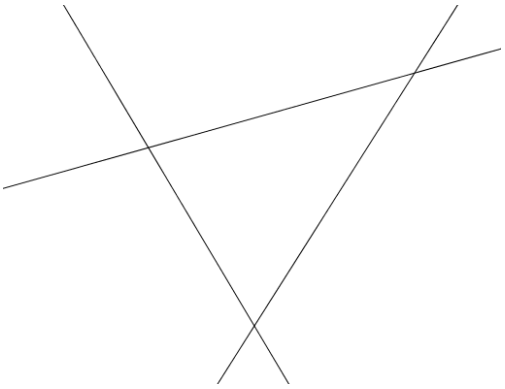


e)



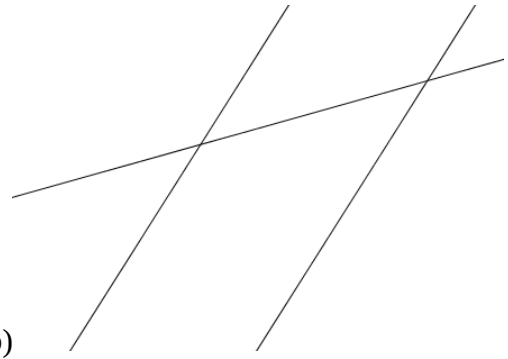
6. Determina el número de soluciones que tendría cada uno de los sistemas de ecuaciones representados en las gráficas, considerando que en cada caso se muestran tres rectas y si existen soluciones señala las soluciones en cada gráfica.

a)



Número de soluciones:

b)



Número de soluciones:

c)

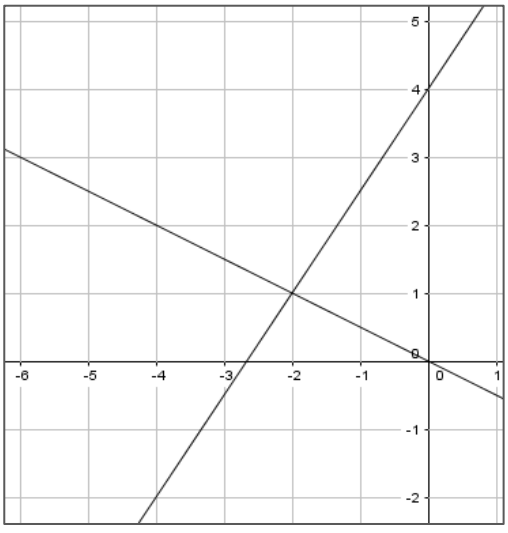
Número de soluciones:

7. Dada la siguiente representación geométrica de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

a) ¿Cuántas soluciones tiene el sistema? Explica tu respuesta.

b) Describe con palabras, ¿cuál es la representación geométrica del conjunto solución?

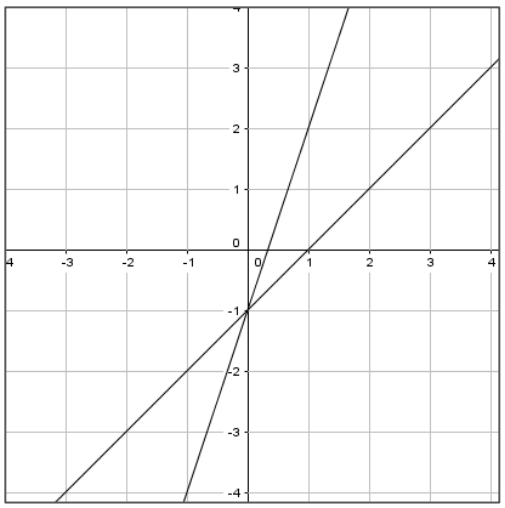
8. Escribe algebraicamente el sistema de ecuaciones representado en el siguiente plano cartesiano.



9. Da un ejemplo de sistema de ecuaciones lineales equivalente a los sistemas dados y explica por qué son equivalentes.

a) $\begin{cases} \boldsymbol{x = 2} \\ \boldsymbol{y - 5z + 3 = 0} \\ \boldsymbol{x + 4z = -1} \end{cases}$

b)



10. Dada la ecuación $\boldsymbol{3x - 2y + z = 4}$

a) ¿Son las triadas ordenadas (1,4,5), (3,1,-3) y (2,5,8) soluciones de la ecuación? Explica tu respuesta.

b) Encuentra el conjunto solución de la ecuación. ¿Cuántas soluciones tiene?

c) Si graficáramos todos los puntos del conjunto solución, describe con palabras, ¿cuál sería la representación geométrica?

11. Considerando el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 4x - y = 5 \\ 4x - y = 0 \end{cases}$$

a) ¿Son los pares ordenados (0,-5), (1,4) y (0,0) soluciones del sistema?

b) Encuentra el conjunto solución del sistema ¿Cuántas soluciones tiene?

12. Considerando el siguiente sistema de ecuaciones, responde los incisos explicando tus respuestas.

$$\begin{cases} 3x + y = 2 \\ x - y = 1 \\ -6x - 2y = k \end{cases}$$

a) ¿Qué valor(es) de k haría(n) que el sistema de ecuaciones tenga solución única?

b) ¿Qué valor(es) de k haría(n) que el sistema no tenga solución?

c) ¿Qué valor(es) de k haría(n) que el sistema tenga infinitas soluciones?

13. En un acuario hay dos especies de peces A y B que se alimentan de dos clases de alimentos. En la tabla siguiente se indica el consumo diario de alimentos de ambas especies y la cantidad de alimento total disponible por clase, en gramos y por día. El problema consiste en calcular la cantidad de peces de cada especie que puede vivir en el acuario sin que sobre alimento de ninguna de las dos clases.

	Especie A	**Especie B**	**Total**
Alimento 1	2	1	25
Alimento 2	4	3	55

Representa algebraicamente el problema.

14. Escribe un problema (con palabras) que pueda representarse mediante el siguiente sistema de ecuaciones.

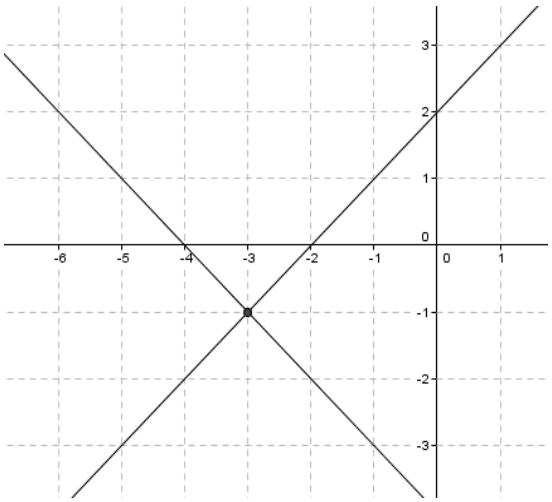
$$m - n = 2$$
$$2m - 3n = 4$$

15. Escribe un sistema de ecuaciones cuya solución sea: $x = 3, y = -2\ y\ z = 3.5$

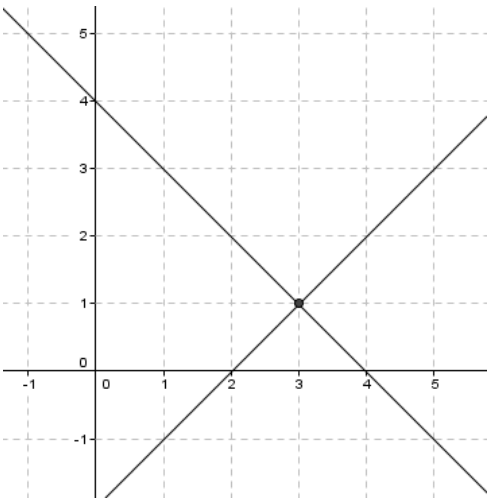
16. ¿Cuál de las siguientes gráficas muestra la representación gráfica del problema? Explica tu respuesta.

Problema: ***La suma de dos números es igual a cuatro y su diferencia es igual a 2.***

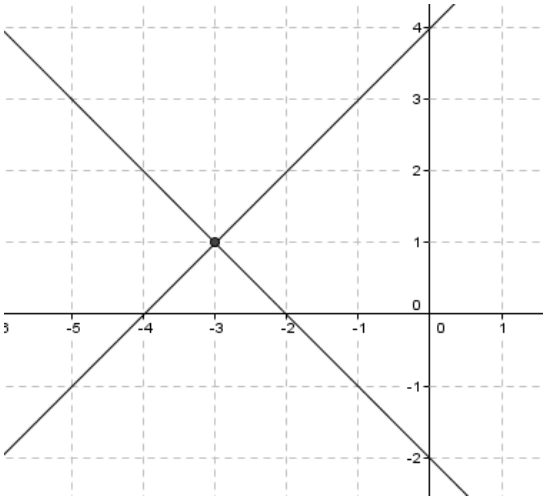
a)



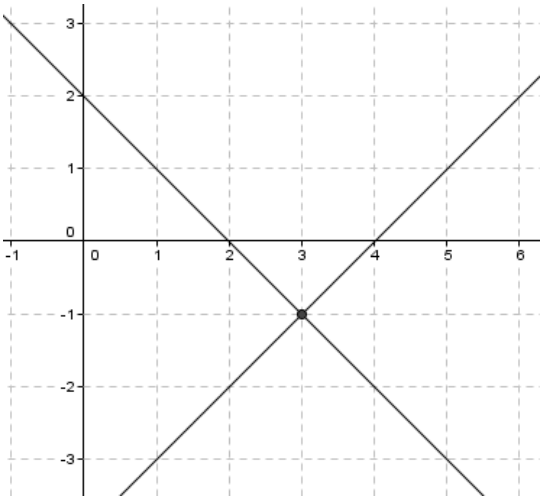
b)



c)



d)



Herramienta de medición. Sección 2

1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones

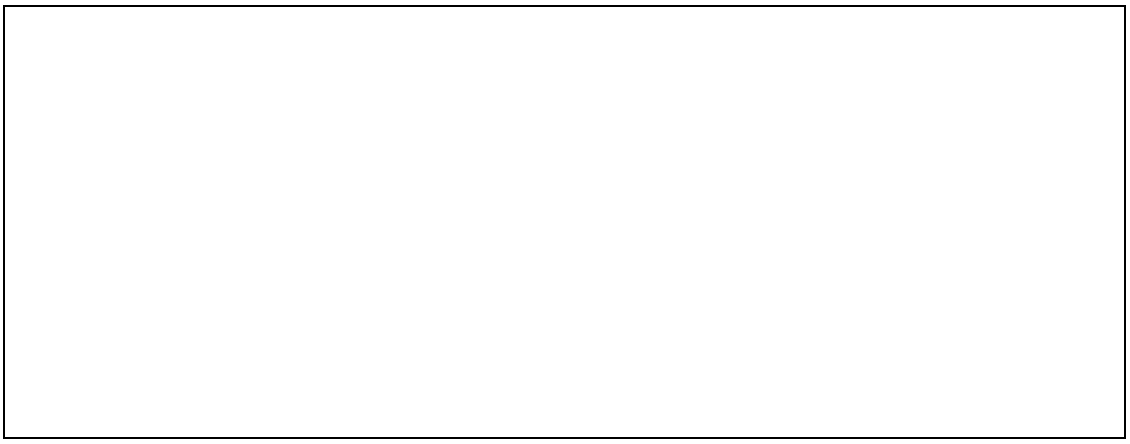
a.
$$\begin{aligned} 6x + 1.5y + 2.5z &= 36.6 \\ -x + y + 3z &= 0 \\ y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 2x - y - 3z &= -2 \\ 3x - 2z &= 1 \end{aligned}$$

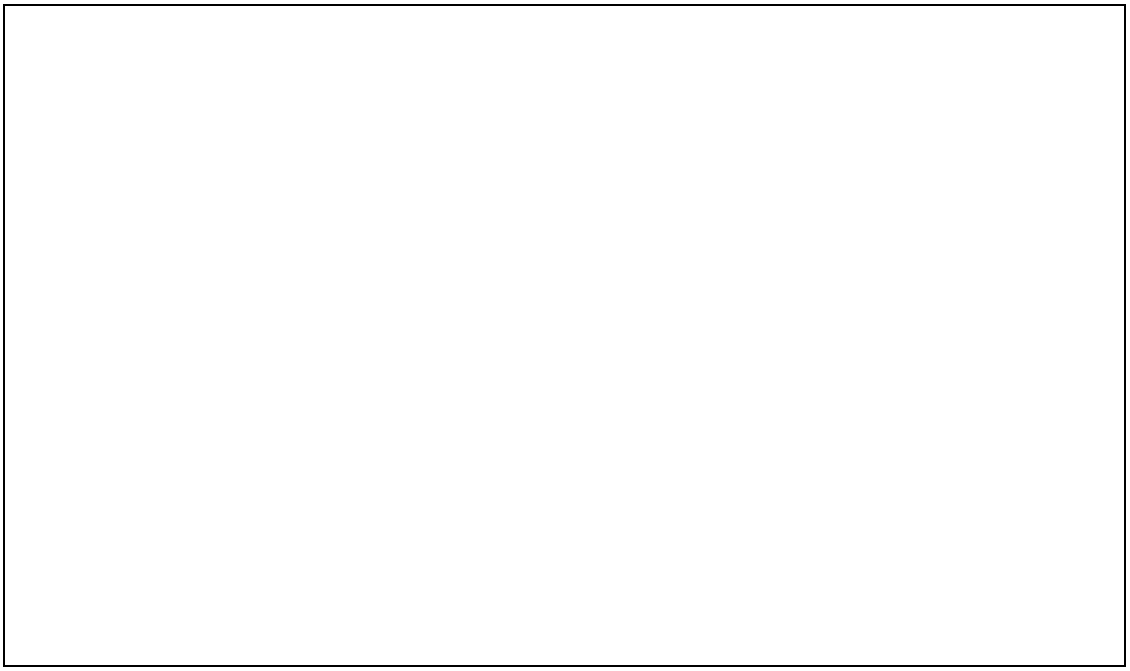
c.
$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ x + y - z &= 0 \end{aligned}$$

d.
$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 10 \\ 2x + 3y &= 9 \\ x + y &= 4 \end{aligned}$$

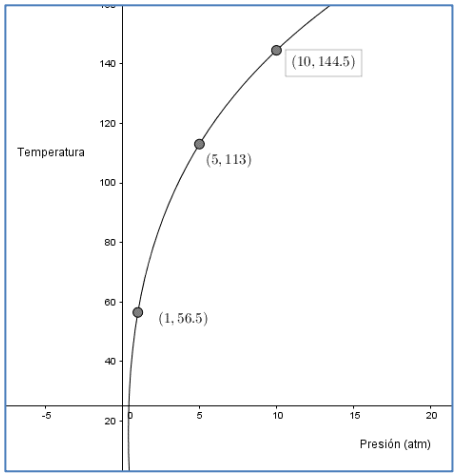
2. Una empresa de alimento para mascotas produce tres tipos de comida para perros: Premium, Adultos y Puppy, todas empacadas en bolsas de 15 kg. Se sabe que el 60 % de Premium y el 50 % de Puppy representan el 30 % de la producción diaria total. El 20 % de Premium, más el 60 % de Puppy más el 60 % de Adultos representan la mitad del total de la producción diaria. Se producen 100 bolsas más de Puppy que de Premium diariamente. Encuentra la producción diaria de bolsas de cada tipo de alimento.



3. Una empresa de software ha lanzado al mercado nuevas versiones de tres programas. El programa Eduplay con un precio de 100 dólares, el programa Statware con un precio de 150 dólares y el programa Greenland con un precio de 200 dólares. La primera semana se vendieron 120 licencias de estos programas, por un total de 12000 dólares. ¿Cuántas licencias de cada programa se vendieron?



4. La siguiente gráfica presenta la temperatura de ebullición de la acetona a diferentes presiones. Calcula la temperatura de ebullición de la acetona, a 2 atm de presión, encontrando los coeficientes de la ecuación de la parábola $p(x) = ax^2 + bx + c$.



Anexo B. El Modelo de Enseñanza.

Actividad 1. Ecuaciones lineales…(A1)

I. Para cada una de las expresiones responde lo que se pide en las tablas. **(A1S1)**

a) $3m+1=4$ **(A1S1a)**	
i) ¿Es una ecuación? Sí/No. Justifica.	iii) Resuelve si es posible.
ii) Si es una ecuación, ¿de qué tipo es?	

b) $(x-1)^2=x^2-2x+1$ **(A1S1b)**	
i) ¿Es una ecuación? Sí/No. Justifica.	iii) Resuelve si es posible.
ii) Si es una ecuación, ¿de qué tipo es?	

c) $3x+5$ **(A1S1c)**	
i) ¿Es una ecuación? Sí/No. Justifica.	iii) Resuelve si es posible.
ii) Si es una ecuación, ¿de qué tipo es?	

d) t=3 ….. **(A1S1d)**	
i) ¿Es una ecuación? Sí/No. Justifica.	iii) Resuelve si es posible.
ii) Si es una ecuación, ¿de qué tipo es?	

e) 3x-2<4 ….. **(A1S1e)**	
i) ¿Es una ecuación? Sí/No. Justifica.	iii) Resuelve si es posible.
ii) Si es una ecuación, ¿de qué tipo es?	

f) $3t-2=t+1$ ….. **(A1S1f)**	
i) ¿Es una ecuación? Sí/No. Justifica.	iii) Resuelve si es posible.
ii) Si es una ecuación, ¿de qué tipo es?	

g) $z^2-4=0$ **(A1S1g)**	
i) ¿Es una ecuación? Sí/No. Justifica.	iii) Resuelve si es posible.
ii) Si es una ecuación, ¿de qué tipo es?	

h) $x-3y=0$ **(A1S1h)**	
i) ¿Es una ecuación? Sí/No. Justifica.	iii) Resuelve si es posible.
ii) Si es una ecuación, ¿de qué tipo es?	

i) $2-3=-1$ **(A1S1i)**	
i) ¿Es una ecuación? Sí/No. Justifica.	iii) Resuelve si es posible.
ii) Si es una ecuación, ¿de qué tipo es?	

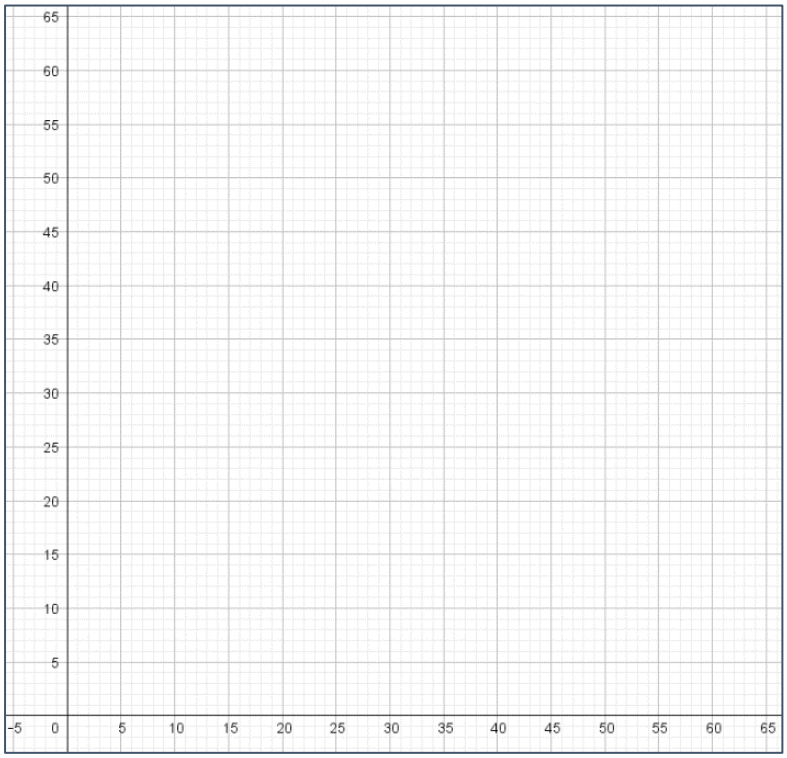
j) $2x-3y-z=-1$ **(A1S1j)**	
i) ¿Es una ecuación? Sí/No. Justifica.	iii) Resuelve si es posible.
ii) Si es una ecuación, ¿de qué tipo es?	

II. Analiza el siguiente problema y responde lo que se pide. **(A1S2)**

1. *Una pequeña empresa de refresco artesanal llena botellas de 5 y 2 litros. Si en un día se embotellaron 120 litros de la bebida, ¿cuántas botellas de 5 litros y cuántas botellas de 2 litros se llenaron?*

a) ¿Cuántas soluciones tiene el problema? ¿Cuáles son? **(A1S2a)**

b) Construye una gráfica que represente el problema. **(A1S2b)**



c) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el problema? ¿Qué tipo de expresión es? **(A1S2c)**

d) ¿Cuántas soluciones tiene esa expresión? **(A1S2d)**

III. Escribe un problema de enunciado que pueda modelarse algebraicamente mediante la expresión. **(A1S3)**

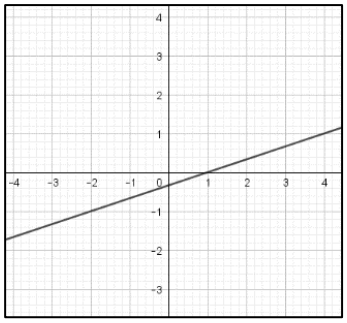
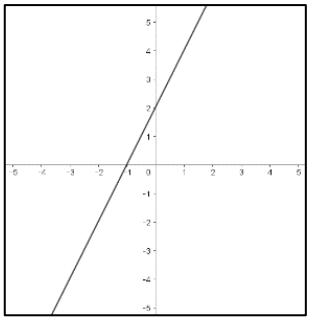
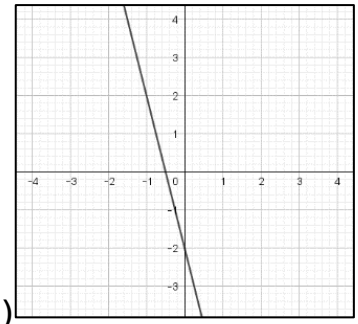
$$5x+3y+z=3500$$

IV. Relaciona las gráficas con las ecuaciones. **(A1S4)**

a) $2x-y=-2$

b) $4x+y=-2$

c) $x-3y=1$

( )  ( )  ( ) 

V. De acuerdo con lo revisado hasta ahora responde lo siguiente. **…(A1S5)**

1. Escribe un ejemplo de ecuaciones de primer grado:

a) Con una variable	
b) Con dos variables	
c) Con tres variables	

2. Describe qué es una ecuación.

3. Describe qué son las ecuaciones de primer grado y cuántas soluciones tienen.

Actividad 2. Resolución de ecuaciones lineales. (A2)

I Resuelve las siguientes ecuaciones. **(A2S1)**

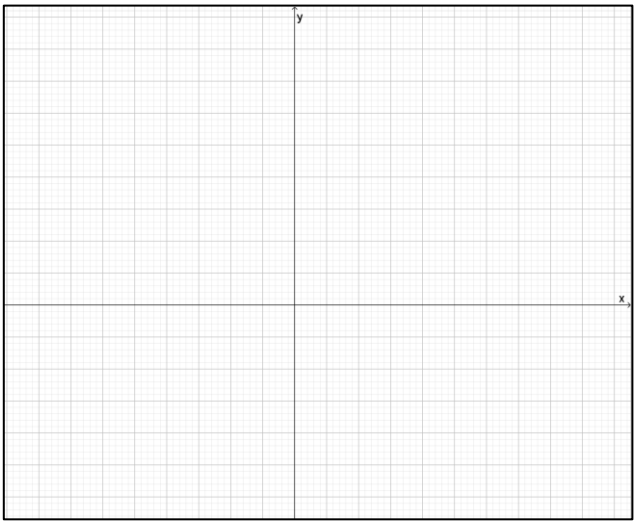
a) $y+\frac{2}{3}y=\frac{1}{2}(1+3y)$ **(A2S1a)**

b) $2-\left[3-2\left(t+1\right)\right]=-2\left[4-\left(3+t\right)\right]$ **(A2S1b)**

c) $-4z+5+2(5z+4)=2(3z+6)+1$ **(A2S1c)**

II Resuelve y grafica la siguiente ecuación. **(A2S2)**

$3x-5y=10$



Actividad 3. Resolución de problemas de enunciado por medio del análisis de las condiciones…(A3)

Resuelve los siguientes problemas:

Problema 1. Una empresa de transporte de material para construcción tiene dos camiones. El camión A con capacidad de dos toneladas y el camión B con capacidad de cuatro toneladas. El supervisor de la empresa quiere saber cuántos viajes hizo cada camión ayer y la información que tiene es que se transportaron 20 toneladas de material a una construcción y que ningún camión viajó con menos de su capacidad. **(A3P1)**

¿Cuántas soluciones tiene el problema? ¿Cuáles son?

Si el supervisor sabe también que por cada viaje del camión A la empresa cobra 2 mil pesos y por cada viaje del camión B 3 mil pesos, y encuentra una copia de la factura en la que se muestra que el pago por los viajes fue de 18 mil pesos. Con esta nueva información, ¿puede resolver su problema? ¿Cuál sería la solución?

Problema 2. Para el 14 de febrero la dueña de una tienda de regalos compró peluches de dos tamaños diferentes. Los peluches grandes cuestan 50 pesos más que el doble de los pequeños. Si compró 15 peluches pequeños y 10 grandes y pagó 4595 pesos. ¿Cuánto costó cada tipo de peluche? **(A3P2)**

Problema 3. Representa algebraicamente el siguiente problema: Hallar la medida de los lados de un rectángulo cuyo lado mayor mide el triple que su lado menor y cuyo perímetro es 73.6 unidades. **(A3P3)**

Problema 4. Ana participó en un juego en el que debía responder 10 preguntas, por cada acierto ganaba dos puntos y por cada error perdía un punto. Si al final Ana obtuvo ocho puntos, ¿cuántos aciertos y cuántos errores tuvo? **(A3P4)**

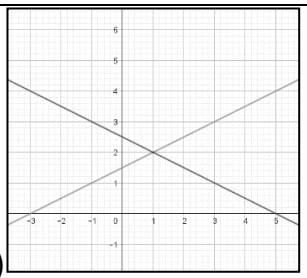
Actividad 4. Sistemas de ecuaciones lineales…(A4)

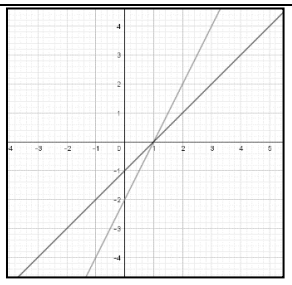
1. Relaciona los sistemas de ecuaciones con la gráfica correspondiente. **(A4S1)**

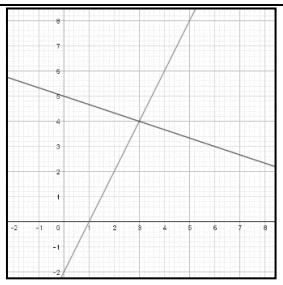
b) $\begin{cases} y = 2x - 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = 2x - 2 \\ x + 3y = 15 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \\ x + 2y = 5 \end{cases}$

( ) 

( ) 

( ) 

2. Dado el problema: **(A4S2)**

Se tiene un rectángulo cuya altura mide 2 cm más que su base y cuyo perímetro es igual a 24 cm. Calcular las dimensiones del rectángulo.

¿Cuál de las siguientes parejas de tablas representa las condiciones del problema?

a)

x	y
1	3
2	4
3	5
4	6
5	7
6	8
7	9
8	10
9	11
10	12
11	13

x	y
1	3
2	8
3	15
4	24
5	35
6	48
7	63
8	80
9	99
10	120
11	143

b)

x	y
1	3
2	4
3	5
4	6
5	7
6	8
7	9
8	10
9	11
10	12
11	13

x	y
1	11
2	10
3	9
4	8
5	7
6	6
7	5
8	4
9	3
10	2
11	1

c)

x	y
1	3
2	4
3	5
4	6
5	7
6	8
7	9
8	10
9	11
10	12
11	13

x	y
1	23
2	22
3	21
4	20
5	19
6	18
7	17
8	16
9	15
10	14
11	13

3. Escribe el anunciado de un problema cuya respuesta sean los siguientes valores. **(A4S3)**

$$x = 5$$
$$y = 1$$

4. ¿Cuál es el sistema de ecuaciones lineales que corresponde a la siguiente terna de tablas? **(A4S4)**

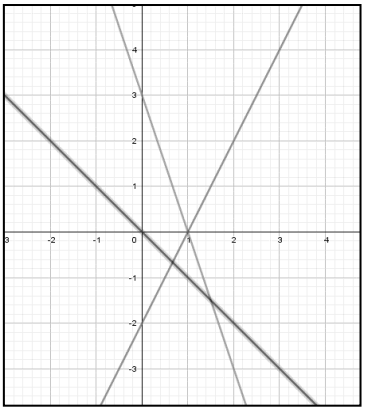
x	*y*
10	14
11	13
12	12
13	11
14	10
15	9
16	8
17	7
18	6
19	5
20	4
21	3

x	*y*
12	0
13	1
14	2
15	3
16	4
17	5
18	6
19	7
20	8
21	9
22	10
23	11

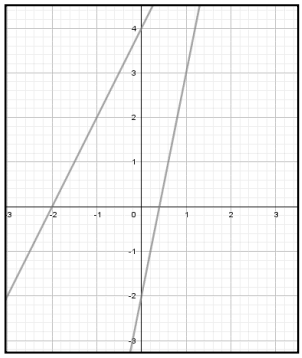
x	*y*
0	0
3	1
6	2
9	3
12	4
15	5
18	6
21	7
24	8
27	9
30	10
33	11

$x+y=24$ a) $x=y-12$ $x-3y=0$	$x+y=24$ b) $x-y=12$ $3x=y$	$x+y=24$ c) $x-y=12$ $x-3y=0$

5. ¿Qué puedes decir sobre la solución del sistema de acuerdo con la gráfica? **(A4S5)**



6. ¿Tiene solución el sistema de ecuaciones lineales representado en la siguiente gráfica? En caso de que exista, ¿cuál es la solución? **…(A4S6)**



Actividad 5. Clasificación de sistemas de ecuaciones lineales…(A5)

1. **Considera la siguiente como una forma general del sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas y realiza lo que se pide en cada inciso**

(A5S1)

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

a) Abre el archivo SEL_Soluciones1.ggb. Usa los deslizadores de la primera ventana del archivo para definir el siguiente sistema de ecuaciones…**(A5S1a)**

$$\begin{aligned} 3x - 4y &= 5 \\ 3x + y &= 10 \end{aligned} \qquad (1)$$

b) ¿Cuáles son los datos en los que coinciden los valores en la representación tabular? **(A5S1b)**

$x =$ y=

c) ¿En qué coordenadas se intersecan las rectas en la representación gráfica?

(A5S1c)

$x =$ y=

d) Sustituye los valores en el sistema de ecuaciones. ¿Se cumplen las igualdades? ¿Qué significa que se cumplan o no las igualdades? **…(A5S1d)**

e) ¿Qué puedes concluir de lo anterior con respecto a un sistema de ecuaciones? **…(A4S1e)**

2. **Usa el archivo SEL_Soluciones1.ggb para representar cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones y registra lo que observas en cada uno de ellos…(A5S2)**

a) $\begin{cases} y = 2x - 2 \\ 2x + y = -2 \end{cases}$ **…(A5S2a)**
Representación algebraica
Representación gráfica
Representación tabular

b) $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 1 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$ **…(A5S2b)**
Representación algebraica
Representación gráfica
Representación tabular

c) $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$ **…(A5S2c)**

Representación algebraica
Representación gráfica
Representación tabular

d) $\begin{cases} y = 2x - 2 \\ 3x - \frac{3}{2}y = 15 \end{cases}$ **…(A5S2d)**

Representación algebraica
Representación gráfica
Representación tabular

e) $\begin{cases} y = 2x - 2 \\ 6x - 3y = 6 \end{cases}$ **…(A5S2e)**

Representación algebraica
Representación gráfica
Representación tabular

3. **Usa el archivo SEL_Soluciones1.ggb para representar cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones y registra lo que observas en cada uno de ellos…(A5S3)**

a) $\begin{cases} 6x+4y=22 \\ 3x+2y=8 \end{cases}$ **(A5S3a)**

b) $\begin{cases} x-2y=10 \\ -2x+4y=-20 \\ 3x+5y=1 \end{cases}$ **(A5S3b)**

c) $\begin{cases} 3x+2y=10 \\ x+y=3 \\ 2x+y=7 \end{cases}$ **(A5S3c)**

d) $\begin{cases} 3x-13y=-8 \\ 6x-26y=16 \\ 3x+5y=1 \end{cases}$ **(A5S3d)**

4. Considera la siguiente como una forma general del sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas y realiza lo que se pide en cada inciso

(A5S4)

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

a) Abre el archivo SEL_Soluciones2.ggb. Usa los deslizadores de la primera ventana del archivo para definir el siguiente sistema de ecuaciones…**(A5S4a)**

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 2 \\ x - 2y - 5z &= 5 \\ 3x + y - 2z &= 9 \end{aligned} \qquad (1)$$

b) ¿Cuáles son los datos en los que coinciden los valores en la representación tabular? …**(A5S4b)**

$x =$	y=	z=

c) ¿En qué coordenadas se intersecan las rectas en la representación gráfica? …**(A5S4c)**

$x =$	y=	z=

d) Si sustituyes los valores en el sistema de ecuaciones, ¿se cumplen las igualdades? ¿Qué significa que se cumplan o no las igualdades?

(A5S4d)

5. Usa el archivo SEL_Soluciones2.ggb para representar cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones y registra lo que observas en cada uno de ellos…(A5S5)

a) $\begin{cases} x + 2y - 5z = 3 \\ 3x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + 4y - 10z = 15 \end{cases}$ **(A5S5a)**

b) $\begin{cases} x + 4y - 2z = 1 \\ 3x - 2y - z = 5 \end{cases}$ **(A5S5b)**

c) $\begin{cases} x+4y-2z=1 \\ -3x-12y+6z=-3 \end{cases}$ **(A5S5c)**

6. **Respecto al número de soluciones responde las siguientes preguntas…(A5S6)**

a) ¿Qué número de soluciones es posible encontrar en sistemas de tres ecuaciones y dos incógnitas? Explica cómo podría ser su forma gráfica…**(A5S6a)**

b) ¿Qué número de soluciones es posible encontrar en sistemas de dos ecuaciones con tres incógnitas? Explica cómo podría ser su forma gráfica…**(A5S6b)**

c) ¿Qué número de soluciones es posible encontrar en sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas? Explica cómo podría ser su forma gráfica…**(A5S6c)**

Actividad 6. Sistemas de ecuaciones lineales equivalentes…(A6)

1. **Responde las siguientes preguntas…(A6S1)**

a) ¿Qué es la solución de una ecuación? ¿Cómo sabemos que un valor o valores son solución de una ecuación? **(A6S1a)**

b) ¿Qué es una ecuación equivalente a otra? Da un ejemplo de una ecuación equivalente a $3x+5=11$ **(A6S1b)**

c) ¿Cómo son entre sí las ecuaciones que vamos obteniendo al resolver una ecuación? **(A6S1c)**

d) ¿Cuáles son las operaciones que podemos realizar sobre una ecuación de primer grado con una incógnita para obtener ecuaciones equivalentes? **(A6S1d)**

e) ¿Qué característica haría que dos sistemas de ecuaciones fueran equivalentes? **(A6S1e)**

f) ¿Cuáles son las operaciones que podemos realizar sobre un sistema de ecuaciones para obtener un sistema de ecuaciones equivalente? **(A6S1f)**

2. Escribe el siguiente sistema de ecuaciones en papel y en el archivo SEL_Soluciones1.ggb para observar su forma gráfica y tabular. (A6S2)

$$3x - 4y = 2$$
$$x + 2y = 4$$

a) Toma nota de la solución del sistema **(A6S2a)**

b) Multiplica ambos miembros de una ecuación por algún número. Y escribe el nuevo sistema de ecuaciones **(A6S2b)**

c) Define el nuevo sistema en el archivo SEL_Soluciones1.ggb y observa la forma gráfica y la forma tabular. **(A6S2c)**

¿Qué observas respecto a la solución del sistema de ecuaciones? ¿Qué se podríamos concluir de lo anterior respecto a los sistemas de ecuaciones?

d) Suma las dos ecuaciones del sistema. Escribe un nuevo sistema de ecuaciones tomando el resultado de la suma y sustituyéndolo por cualquiera de las ecuaciones. **(A6S2d)**

e) Define en el archivo SEL_Soluciones1.ggb el nuevo sistema de ecuaciones y registra tu observación. **(A6S2e)**

f) ¿Qué observas respecto a la solución del nuevo sistema de ecuaciones? **(A6S2f)**

g) ¿Qué se podríamos concluir respecto al nuevo sistema de ecuaciones y el original? **(A6S2g)**

3. Considera nuevamente el sistema de ecuaciones **(A6S3)**

$$3x-4y=2$$
$$x+2y=4$$

a) Usa los deslizadores para representarlo en el archivo SEL_Soluciones1.ggb. Toma nota de la solución del sistema. **(A6S3a)**

b) Cambia el orden de las ecuaciones y escribe el nuevo sistema. ¿Cómo es el nuevo sistema con relación al anterior? **(A6S3b)**

4. ¿Cuáles son las operaciones que podemos realizar sobre un sistema de ecuaciones para obtener un sistema de ecuaciones equivalente? ¿Cuál es la característica de un sistema equivalente en su forma gráfica? **(A6S4)**

5. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales. **(A6S5)**

a) $\begin{cases} x+4y=12 \\ 3y=6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+2y-z=-1 \\ 2y+3z=9 \\ 11z=55 \end{cases}$

Actividad 7. Método de reducción gaussiana para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales…(A7)

1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones realizando operaciones que te permitan obtener un sistema escalonado…**(A7S1)**

a) $\begin{cases} 5x+3y=12 \\ 4x+2y=10 \end{cases}$ **(A7S1a)**

b) $\begin{cases} 3x+6y-5z=0 \\ x+y+2z=9 \\ 4x+2y-3z=-1 \end{cases}$ **(A7S1b)**

2. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones aplicando las operaciones elementales por renglón para obtener un sistema escalonado…**(A7S2)**

a) $\begin{cases} 2x+3y=11 \\ 4x+6y=9 \end{cases}$ **(A7S2a)**

b) $\begin{cases} 6x+9y=2 \\ 4x+6y=\frac{4}{3} \end{cases}$ **(A7S2b)**

c) $\begin{cases} 7x-7y-10z=-3 \\ 2x-4y-6z=-1 \\ 5x-3y-4z=-2 \end{cases}$ **(A7S2c)**

d) $\begin{cases} -2x+y+3z=8 \\ -2x+3y+z=-4 \\ 3x-\frac{9}{2}y-\frac{3}{2}z=6 \end{cases}$ **(A7S2d)**

e) $\begin{cases} 2x-2y-z=0.5 \\ 4x+4y+5z=-3 \\ -x+2y-2z=6 \end{cases}$ **(A7S2e)**

f) $\begin{cases} -3x+2y+4z=-1 \\ -2x+y+3z=8 \\ -5x+3y+7z=-7 \end{cases}$ **(A7S2f)**

g) $\begin{cases} x+y+2z=4 \\ -x-y+z=-1 \\ -2x-2y-z=3 \end{cases}$ **(A7S2g)**

Actividad 8. Resolución de problemas...(A8)

Problema 1. En un examen de 100 preguntas, cada respuesta correcta suma dos puntos y las incorrectas restan medio punto. La nota de un alumno es 7.15 sobre 10. Calcular el número de preguntas que contestó correcta e incorrectamente. **(A8P1)**

Problema 2. El dueño de una empresa gastó $ 61 250.00 pesos en comprar un teléfono a cada uno de sus 25 empleados. El proveedor le vendió dos modelos diferentes, uno con un precio de $ 3200 y el otro de $ 1950 pesos. ¿Cuántos teléfonos de cada modelo compró? **(A8P2)**

Problema 3. Un avión dispone de 32 asientos en primera clase y de 50 asientos en clase turista, cuya venta supone un total de 146000 pesos. En un vuelo se vendieron 10 asientos en primera clase y 40 en turista, obteniendo un total de 70000 pesos y en otro vuelo se vendieron 20 boletos de cada uno obteniendo un total de 60000. ¿Cuál es precio de los asientos en cada clase? **(A8P3)**

Problema 4. En el segundo trimestre del año las ventas reportadas por una agencia de autos fueron de 85 unidades entre automóviles familiares, sedan y deportivos. Se sabe que si se hubieran vendido nueve unidades más de cada tipo de auto se habrían vendido el doble de sedan que deportivos. ¿Cuántos automóviles de cada uno de estos tres tipos se vendieron? **(A8P4)**

Problema 5. Para hacer su mezcla especial, en una cafetería combinan tres tipos de café con los siguientes costos de compra: el café tipo A con un costo de 390 pesos el kilo, el tipo B con un costo de 420 pesos el kilo y el tipo C con un costo de 450 pesos el kilo. Para hacer 20 kilos de mezcla especial invierten $8235 pesos y la mezcla contiene 3 kilos más del tipo A, que del tipo B. ¿Qué cantidades de cada tipo de café se agregan a la mezcla especial? **(A8P5)**