Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del Instituto Politécnico Nacional

Cinvestav

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemática Educativa

La temporalización y la tendencia como factores funcionales de la reproducción de un comportamiento continuo a partir de discontinuos. Una resignificación de la Transformada de Laplace en un sistema de control

Tesis

que presenta

Falconery Mauricio Giacoleti Castillo

para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

en la especialidad de

Matemática Educativa

Director de la Tesis:

Dr. Francisco Cordero Osorio

Ciudad de México, julio de 2020

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) el apoyo financiero brindado para realizar mis estudios de maestría.

Falconery Mauricio Giacoleti Castillo

Becario No. 879665

CONACYT
Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

Esta investigación fue financiada por CONACYT, con el Proyecto
"Una categoría de modelación matemática. La pluralidad
epistemológica y la transversalidad de saberes:
los aprendizajes de los significados de la matemática
en las ingenierías y en los diferentes niveles educativos"
Clave 0284259

Dedicatoria

A Eynar, mi hermano; *los recuerdos de nuestras travesuras y aventuras, desde la niñez hasta tu partida, me han acompañado toda esta temporada fuera de casa.*

A mis dos más preciados seres*, quienes, no importando los obstáculos, han dado todo de sí por darme bien a mí; continuamente, desde antes de nacer hasta ahora. A ustedes incansables y amorosos padres, los amo.*

Ustedes… si hubiesen tenido las oportunidades que yo tuve, se que lo hubiesen hecho mejor que yo.

Agradecimientos

La tesis es solo uno de los frutos de toda la experiencia del posgrado; hay otros frutos más, quizá algunos ahora sin cosechar. Sin embargo, hasta hoy valoro la grata cosecha de amistad y aprendizaje humano y académico, al conocer a grandes personas.

*Agradezco **a mis profesores** del área de Educación Superior, cada seminario o charla seguro fue de mucho provecho.*

***A mis compañeras de maestría**, todas ellas cuatro desde que llegué a México hicieron de su compañía algo muy ameno a disfrutar.*

***A los compañeros del programa Soltsa**, cada seminario y cada charla en colectivo o individual fue de mucho provecho para conformar y sacar adelante este proyecto. Este es un logro de todo el programa.*

***Al personal administrativo y técnico** de la Biblioteca y del Departamento de Matemática Educativa, en especial al del área de Educación Superior.*

***A los sinodales** de mi examen de grado, gracias por la lectura del documento y por cada sugerencia y aporte en cada discusión. Sin duda fue muy importante.*

***A quienes formaron parte de la comunidad de estudio** en esta investigación, estudiantes del Instituto Tecnológico de Tuxtla Gutiérrez, en Chiapas, México.*

***A mi familia** (hermanas), a **amigos**, hondureños, de México y Latinoamérica, a **compañeros de casa y de apartamento**. Por cada gesto de hermandad, amistad y afecto, muchas gracias.*

Finalmente, agradezco a las personas que considero mas significativas al alcanzar este logro, a quienes menciono por nombre a continuación:

***A mi asesor, Dr. Francisco Cordero**, un apasionado académico con quien se aprende mucho acerca de esta visión de la Matemática Educativa. Destaco, además, su admirable afecto y sensibilidad humana. Gracias por el incalculable apoyo, doctor.*

***A Luis Miguel**, apreciable amigo. Gracias por invitarme a viajar a México y estudiar este posgrado. Te debo mucho, por toda tu generosidad y empatía hacia mí. Tenemos muchas experiencias compartidas, desde que nos conocimos en Tegucigalpa, pero en CDMX convivimos, disfrutamos y hasta sufrimos varias experiencias juntos.*

*No puedo dejar de agradecer a quien, obviamente, fue, ha sido y es mi Formidable Acompañante Terrenal en esta aventura, **Sindi Lorely**. Has sido mi aliciente en momentos de soledad y la cómplice de mi felicidad. Gracias por cada día y por cada noche de desvelo, donde diste lo mejor de vos para apoyarme en este proyecto. Este también es tu logro, mi amor.*

***A Dios**, mi mejor compañero. Estoy seguro que no me ha dejado y jamás me abandonará. Alabo su fidelidad inconmovible. Todo esto no hubiese sido posible sin Él.*

Falconery Giacoleti

—Escrito entre las nubes, sobrevolando los aires en algún lugar—

CONTENIDO

RESUMEN

Reportamos los resultados de una investigación que da cuenta de la emergencia de la *reproducción continua de comportamientos discontinuos* en una *comunidad de conocimiento matemático de ingenieros electrónicos en formación* (*CCM(IE$_F$)*) cuando diseñan un sistema de control. Se revelan *usos* de la Transformada de Laplace, la cual se resignifica en esta *situación específica* de la comunidad. Realizamos una *inmersión* en la CCM(IE$_F$), articulando algunos elementos del enfoque etnográfico. La investigación se sustenta con la *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa*, en el marco del programa *Sujeto Olvidado y Transversalidad de Saberes (SOLTSA).*

Problematizamos el tratamiento que la Transformada de Laplace tiene en la *matemática escolar*, el cual ocurre con una centración al objeto matemático, privilegiándola como una herramienta algorítmica para resolver ecuaciones diferenciales lineales, dejando de lado su *funcionalidad.*

En contraparte —como centro de la investigación— exhibimos una situación específica del cotidiano de la CCM(IE$_F$), donde entran en juego factores funcionales de la Transformada de Laplace. La situación específica se refiere al diseño de un sistema de control, cuyo fin primordial es reproducir en todo tiempo un comportamiento de temperatura en un rango deseado. En esta problemática local de la comunidad se revela la categoría *Reproducción de Comportamientos*. Estos comportamientos del sistema de control son interpretados con gráficas discontinuas; sin embargo, la reproducción de estos comportamientos se interpreta con gráficas continuas.

Como resultado, presentamos una estructura epistemológica conformada por factores funcionales que la CCM(IE$_F$) pone en funcionamiento al diseñar el sistema de control: la *temporalización* y la *tendencia en un rango*. Estos factores le dan sentido funcional a la reproducción continua de comportamientos discontinuos y dotan de significado a la Transformada de Laplace, la cual se resignifica como una *instrucción que organiza un comportamiento continuo.*

Palabras claves: Sistema de control, ingeniería electrónica, reproducción de comportamientos, comportamiento continuo, comportamiento discontinuo, resignificación de la Transformada de Laplace.

ABSTRACT

We report the results of a research that shows the emergence of the *continuous reproduction of discontinuous behaviors* in a *community of mathematical knowledge of electronic engineers in training* (*CCM(IE_F)*), when they design a *control system*. Uses of the Laplace Transform are revealed, which *resignifies* itself in this specific community situation. We carry out an *immersion* in the CCM(IE_F), articulating elements of the ethnographic approach. The research is supported by the *Socioepistemological Theory of Mathematics Education*, within the framework of the program *Sujeto Olvidado y Transversalidad de Saberes (Soltsa)*.

We problematized the treatment that the Laplace Transform has in *school mathematics*, which occurs with a centering to the mathematical object, privileging it as an algorithmic tool to solve linear differential equations, leaving aside its *functionality.*

On the other hand —as a research center— we show a specific situation of the CCM(IE_F) everyday life, where functional factors of Laplace Transform come into play. The specific situation refers to the design of a control system, in which the primary goal is reproduce, at all times, a desired temperature behavior. In this local community problem, the category *Behavior Reproduction* is revealed. These behaviors of the control system are interpreted with discontinuous graphs; however, the reproduction of these behaviors is interpreted with continuous graphs.

As a result, we present an epistemological structure formed by functional factors that the CCM(IE_F) puts into operation when designing the control system: the *tendency in a range* and the *temporalization*. These factors give functional meaning to the continuous reproduction of discontinuous behavior and give meaning to the Laplace Transform, which is resignified as an *instruction that organizes continuous behavior*.

Keywords: Control system, electronic engineering, behavior reproduction, continuous behavior, discontinuous behavior, resignification of the Laplace Transform.

INTRODUCCIÓN

En el nivel superior del sistema educativo aparece una integral impropia llamada Transformada de Laplace (TL). A diferencia de temas como la derivada o la integral, en los cuales, en el mejor de los casos, los textos o los profesores tratan que el estudiante atribuya significados de esos conceptos a partir de conocimientos previos —generalmente geométricos, como la recta tangente a una gráfica y el área bajo una curva—, la Transformada de Laplace se introduce en el aula como una representación simbólica dada por la integral $\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$; en general, sin ningún referente geométrico o gráfico.

Tal como indica Miranda (2001), esta transformada es instituida en el medio escolar como una herramienta cuyas propiedades son ventajosas para resolver ecuaciones diferenciales lineales, y en ningún momento es construida o motivada por algún medio físico o geométrico, o a partir de un conocimiento previo. En este sentido, la matemática escolar presenta a la Transformada de Laplace carente de un *marco de referencia* de significados y de origen de las condiciones que permitieron su construcción. Giacoleti-Castillo y Cordero (2019) mencionan que el discurso matemático escolar centra su atención en el carácter algorítmico de la fórmula de la Transformada de Laplace y de sus propiedades útiles para resolver ecuaciones diferenciales lineales, prevaleciendo de esta manera el utilitarismo de este conocimiento matemático y no su funcionalidad del cotidiano (Cordero, Gómez, Silva-Crocci y Soto, 2015).

Tal es el caso para resolver una ecuación diferencial del siguiente tipo: $\boldsymbol{ay'' + by' + cy = f}$, donde $\boldsymbol{f}$ es una función escalonada. Esta clase de expresiones aparecen en los cursos de ecuaciones diferenciales, y uno de los métodos frecuentes que los libros de texto utilizan para resolverla es la Transformada de Laplace. El procedimiento[1]

[1] Este procedimiento para resolver una ED con la TL se presentará con más detalle en la sección 2.1.2.

llevado a cabo para encontrar la solución $\boldsymbol{y}$ de la ecuación diferencial (ED) con este método, se resume en los siguientes tres pasos (Zill y Cullen, 2006):

- Aplicar la fórmula indicada de la Transformada de Laplace a cada miembro de la ED (con este paso, la ED se convierte en una ecuación algebraica).
- Resolver la ecuación algebraica
- Aplicar la fórmula indicada de la Transformada Inversa de Laplace a la ecuación algebraica, para encontrar $\boldsymbol{y}$.

Este tratamiento algorítmico genera un discurso matemático escolar de la Transformada de Laplace que no propicia una reflexión acerca de los comportamientos presentes en la ecuación diferencial; al contrario, oscurece el panorama relacionado con la explicación de los comportamientos gráficos de la ecuación diferencial y de su solución.

En contraparte, en esta investigación, en primera instancia, nos cuestionamos acerca de los comportamientos continuos y discontinuos presentes en una ecuación diferencial de la forma descrita anteriormente. Por ejemplo, tomemos una función $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})$ definida de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}) = \begin{cases} \mathbf{-1} & \boldsymbol{si} & \mathbf{0} \leq \boldsymbol{t} < \mathbf{4} \\ \mathbf{3.5} & \boldsymbol{si} & \mathbf{4} \leq \boldsymbol{t} \leq \mathbf{9.8} \\ \mathbf{2} & \boldsymbol{si} & \mathbf{9.8} < \boldsymbol{t} \end{cases}$$

En la Figura 1 se muestra el comportamiento gráfico de la solución $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})$ de la ecuación diferencial de la forma $\boldsymbol{ay''} + \boldsymbol{by'} + \boldsymbol{cy} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})$, que tiende al comportamiento de $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})$. [2] Una característica relevante de la gráfica de la solución de la ecuación diferencial es que tiene un comportamiento continuo, a pesar que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})$

[2] Diversas investigaciones desarrolladas dentro del programa socioepistemológico SOLTSA han dado cuenta de la categoría de conocimiento matemático *Comportamiento Tendencial de las Funciones*. En particular, Cordero, Solís, Buendía, Mendoza y Zaldívar (2016) nos presentan resultados de investigación sobre el *comportamiento tendencial en las ecuaciones diferenciales.*

es discontinua. Es decir, se reproduce un comportamiento continuo a partir de uno discontinuo.

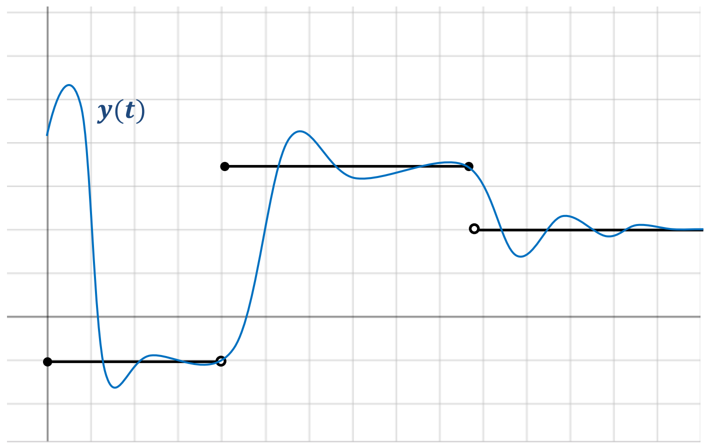


Figura 1. Comportamientos continuo y discontinuo de una ecuación diferencial

Con este tipo de ecuaciones (que involucran discontinuidades) los estudiantes se encuentran en los cursos de ecuaciones diferenciales y en otras asignaturas de las carreras de ingeniería. En tales casos, los libros de texto presentan a la Transformada de Laplace como el método por excelencia para resolver este tipo de ecuaciones diferenciales. Sin embargo, el tratamiento que se le da no propicia un panorama de discusión acerca de la propiedad de continuidad de la solución de la ecuación diferencial; es decir, no aparecen interrogantes ni explicaciones que argumenten el porqué la solución de una ecuación diferencial es continua, dada $\boldsymbol{f}$ discontinua.

En este sentido, en nuestra investigación nos dimos la tarea de encontrar argumentaciones que justificaran esta reproducción continua. Nos propusimos como objetivo, exhibir los *factores funcionales* que relacionan los *comportamientos continuos* y *comportamientos discontinuos* en una situación específica de diseño de sistemas de control, y cómo estos factores *resignifican* a la Transformada de Laplace.

Consideramos la situación de diseño de sistemas de control, dado que es una de las actividades centrales en el quehacer cotidiano de la ingeniería. Mendoza y Cordero (2018) señalan que los dispositivos artificiales construidos por ingenieros se conforman de procesos que se requieren controlar, de tal manera que se puedan reproducir las características y la estructura deseadas. Esto alude a la categoría *Reproducción de Comportamientos*, ya que se buscan reproducir características (comportamientos) deseadas.

En la descripción de los comportamientos deseados en los sistemas de control, se expresan gráficas que típicamente son discontinuas, pero la reproducción de estos comportamientos se interpreta con gráficas continuas. Esto nos motivó a hacer una inmersión en una *comunidad de ingenieros electrónicos* que *diseñan un sistema de control*; de tal manera que nos permitió revelar las argumentaciones funcionales de esta comunidad, concernientes a la reproducción continua de comportamientos discontinuos, en la situación específica de diseño de un sistema de control.

Para exponer el desarrollo de esta investigación, la presentamos a través de seis capítulos. En el Capítulo 1 exponemos las consideraciones iniciales del estudio, donde discutimos principalmente la problemática en que está inmersa la investigación: el estatus de reciprocidad entre la matemática escolar y el cotidiano del ingeniero. Esto permite justificar el planteamiento de la investigación, que atiende una *justificación funcional* propia del cotidiano de la ingeniería electrónica. Además, presentamos algunas investigaciones acerca de la *categoría reproducción de comportamientos* y de la Transformada de Laplace, que fueron fundamentales en el desarrollo de la investigación.

En el Capítulo 2 presentamos un acercamiento a la Teoría de Control y el rol de la Transformada de Laplace en esta área de la ingeniería. Antes de ello, mostramos el tratamiento escolar de esta transformada en los primeros cursos de matemáticas donde aparece: su definición, propiedades principales y un par de ejemplos de su aplicación para resolver ecuaciones diferenciales.

El Capítulo 3 contiene el marco teórico que sustenta la investigación, esto es, la Teoría Socioepistemológica. Se formula el programa *Sujeto Olvidado y Transversalidad* *de Saberes*, en donde se ubicó el estudio. Desde aquí se presentan los constructos teóricos que usamos: marco de referencia, uso del conocimiento matemático, resignificación, comunidad de conocimiento matemático, entre otros. Además, exponemos a la *categoría de modelación* ζ(Mod) como modeladora de los usos del conocimiento matemático, y que conlleva epistemologías de usos, como es el caso de la categoría *reproducción de comportamientos* en la *situación específica de transformación*.

El Capítulo 4 describe la metodología que consideramos en el estudio. Esta consistió en una investigación de tipo cualitativo, articulando algunos elementos del enfoque etnográfico. Presentamos los momentos de la ruta metodológica que transitamos al hacer la inmersión en la comunidad del estudio. Describimos los métodos, técnicas e instrumentos que nos posibilitaron la obtención, el registro y el análisis de los datos, como son: inmersión, observación participante, entrevista no dirigida, unidad de análisis, triangulación de datos, entre otras.

En el Capítulo 5 mostramos los resultados de la investigación. En primera instancia, describimos la situación específica de sistema de control que atiende la comunidad, e interpretamos los elementos funcionales que subyacen en ella. De esta manera, revelamos los usos de la Transformada de Laplace referentes a los comportamientos continuos y discontinuos que emergieron en la situación de la comunidad de estudio.

Finalmente, en el Capítulo 6 presentamos las conclusiones y prospectivas de la investigación. Concluimos enunciando los factores funcionales que relacionan los comportamientos continuos y discontinuos (*la temporalización* y *la tendencia en un rango*) y cómo estos posibilitan la resignificación de la Transformada de Laplace. Además, se presenta una estructura epistemológica de la *construcción de lo matemático* de esta comunidad en la situación de diseño de sistemas de control. Para cerrar, las prospectivas van encaminadas hacia la propuesta de construcción de diseños de situación escolar de socialización —basados en la epistemología de usos de la Transformada de Laplace— que tienen como fin el rediseño del discurso matemático escolar.

Capítulo 1:
Consideraciones Iniciales

1.1- APROXIMACIÓN AL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1.1- Una problemática de la Matemática Educativa: el discurso Matemático Escolar

Al referirnos a la enseñanza y aprendizaje de la matemática, la investigación en Matemática Educativa ha reportado acerca de la importancia de considerar a todos los agentes involucrados en dicho proceso educativo. Sin embargo, el panorama que describen los resultados de investigación —particularmente, aquellos basados en la construcción social del conocimiento— es que la educación matemática está permeada por un discurso matemático escolar (dME) [3] caracterizado por ser hegemónico, de tal manera que dicta la matemática que se debe enseñar y aprender, y excluye el uso del conocimiento matemático del que aprende. En este sentido, Cordero (2016a) menciona que en los modelos educativos siempre hay un sujeto olvidado. Este sujeto tiene varias expresiones: la realidad, el cotidiano, los usos del conocimiento y, en términos más genéricos, la gente. Esta última es significativa porque hace explícito el olvido del que aprende, del trabajador, del nativo y del ciudadano.

Cuando se olvida ese sujeto —es decir, se *excluye*—, obligadamente se cree que solo en el objeto matemático se encuentra la fuente del conocimiento matemático y, consecuentemente, nos *adherimos* al discurso hegemónico de la matemática escolar. De tal manera que podemos ver solo una matemática, aquella en la que se centra la enseñanza en las aulas de clases; sin embargo, no se valoriza la matemática del cotidiano, los usos del conocimiento matemático que se desarrollan en diferentes escenarios. En este sentido, existe una *opacidad* del conocimiento matemático, ya que el dME hace reconocer solo una argumentación del conocimiento matemático, pero *excluye* un conjunto de argumentaciones usadas en la construcción social del

[3] El discurso matemático escolar (dME) se ha reconocido como un sistema de razón que norma y legitima las prácticas y representaciones sociales de los agentes del sistema educativo (Soto, 2010; Soto y Cantoral, 2014).

conocimiento matemático en diferentes contextos y situaciones específicas. Lo anterior, describe los tres fenómenos provocados por el discurso matemático escolar: *exclusión, adherencia* y *opacidad* (Cordero, Gómez, Silva-Crocci y Soto, 2015).

Ante tal problemática, Gómez y Cordero (2010) señalan una vía necesaria para favorecer los usos del conocimiento matemático del cotidiano:

> Es necesario recuperar la parte humana en la construcción del conocimiento y es precisamente el cotidiano lo que permitirá conseguirlo. Por tanto, resulta conveniente ampliar la problemática para lograr que estos elementos tengan cabida. Así, de enfocarse en los estudiantes de matemáticas en el aula, es preciso entender primero el cotidiano de los ciudadanos que se tienen enfrente. Se requiere ver al ciudadano que participa activamente en la vida cotidiana y que la modifica. Es importante que en el aula de matemáticas ya no se piense en el alumno, sino en el ciudadano. (p. 921)

Lo anterior plantea la necesidad de cambiar el foco de atención, de tal manera que se trastoque la matemática escolar: debemos pasar de la centración del objeto matemático a la valorización de los usos del conocimiento matemático. El dME no favorece la construcción del conocimiento matemático y en consecuencia obstaculiza la transformación del estudiante, pues niega la existencia de una pluralidad epistemológica del conocimiento y, por tanto, no permite cuestionar ni trastocar la matemática escolar.

Siguiendo este cometido, dentro de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (Cantoral, 2013), se ha reconocido la necesidad de *rediseñar el discurso matemático escolar* (RdME), con base en una epistemología centrada en la construcción social del conocimiento matemático y no en una epistemología fijada en los objetos.

El actual dME es hegemónico, valida una epistemología que está centrada en los objetos matemáticos, pero se olvida del cotidiano del ciudadano. Tal epistemología se caracteriza por estar alejada de su realidad, tiene una sobrevaloración de la abstracción, la generalidad y las justificaciones razonadas. Mientras que la epistemología del *nuevo discurso matemático escolar* tendrá una centración en el uso del conocimiento matemático; se caracterizará por reconocer la pluralidad epistemológica, favorecerá las prácticas, será funcional y transversal a diversos objetos, dominios, situaciones y escenarios (Cordero, Gómez, Silva-Crocci y Soto, 2015; Cordero, 2017).

Ante este objetivo, derivan interrogantes de cómo es el uso del conocimiento matemático en dominios, escenarios y situaciones específicas. Surge la necesidad, entonces, de realizar estudios que den cuenta del *funcionamiento* y la *forma* del conocimiento matemático desde la condición del ciudadano que usa tal conocimiento. Los resultados de tales investigaciones contribuirán a conformar un marco de referencia (MR) para el rediseño del dME, el cual expresará el uso del conocimiento matemático desde el ciudadano.

1.1.2- El estatus de la reciprocidad entre la Matemática Escolar y el cotidiano del Ingeniero

Este proyecto de investigación se situó dentro del programa socioepistemológico *Sujeto Olvidado y Transversalidad de Saberes (SOLTSA)* (Cordero, 2016a, 2016b). El propósito principal del programa SOLTSA es revelar los usos del conocimiento matemático y sus resignificaciones en las comunidades de conocimiento matemático de la gente: en la escuela, en la profesión y en la ciudad (Cordero, 2017).

Las investigaciones dentro de este programa han reportado que la matemática escolar no tiene un marco de referencia (MR) que atienda la *justificación funcional*[4] que demandan otros dominios de conocimiento, por ejemplo, el dominio de la ingeniería electrónica. Por tal razón, la construcción de este MR es condición *sine qua non* para poder crear la relación recíproca entre la matemática escolar y el cotidiano disciplinar de otros dominios de conocimiento (Cordero, 2016a; 2017). En nuestro caso, la investigación atendió la *justificación funcional* en el cotidiano de la ingeniería electrónica, en el escenario escolar.

La problemática dentro de la ingeniería radica, entonces, en crear la relación recíproca entre la matemática del aula y la realidad del cotidiano del ingeniero. La investigación ha mostrado la ausencia de esta relación; lo que sucede en la matemática escolar es diferente a la realidad del ingeniero (Mendoza, Cordero, Gómez y Solís, 2018).

Por ejemplo, en la matemática escolar una ecuación diferencial $\boldsymbol{y'' + y' + y = f(t)}$ se refiere a un modelo matemático cuyo tratamiento tiene como propósito encontrarle una solución; se aplican diversos métodos y procedimientos algorítmicos para tal fin. Esto privilegia una *justificación razonada* de la matemática, dejando de lado, por ejemplo, las argumentaciones gráficas de los comportamientos de la ecuación diferencial, que emergen en el cotidiano del ingeniero. Ver Figura 1.1.

En contraparte, Cordero, Solís, Buendía, Mendoza y Zaldívar (2016) reportan resultados de diversas investigaciones que dan cuenta del uso del conocimiento matemático en diversos escenarios de la ingeniería. Las argumentaciones de los

[4] La *justificación funcional* tiene que ver con aquello que es de utilidad al humano en una situación específica. Se refiere a que los mecanismos de desarrollo del uso del conocimiento en la situación específica son funcionales, en contraparte de una *justificación razonada*, es decir, lo que norma la justificación funcional no es una proposición lógica o matemática sino aquellas argumentaciones útiles al humano (Cordero y Flores, (2007).

ingenieros, en las situaciones específicas de su cotidiano, responden a una *justificación funcional*, a aquello que les es útil en su quehacer escolar, académico o profesional. En estos escenarios, las argumentaciones que emergen referentes a una ecuación diferencial $\boldsymbol{y}'' + \boldsymbol{y}' + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})$ tienen que ver con comportamientos tendenciales; la atención no está centrada en el objeto matemático, su interés no son los procedimientos algorítmicos. Por el contrario, se ve a la ecuación diferencial como una *instrucción que organiza comportamientos*; la solución $\boldsymbol{y}$ tiende al comportamiento de $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})$ cuando $\boldsymbol{t} \to \infty$ (Cordero y Solís, 2001). En ese sentido, lo que se desea con la ecuación diferencial es *reproducir un comportamiento deseado.*

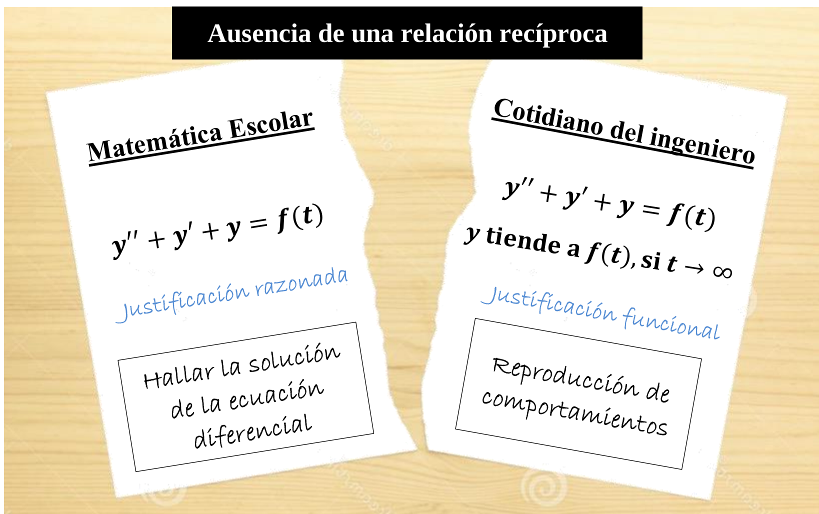


Figura 1.1. Ausencia de una relación recíproca entre la matemática escolar y el cotidiano del ingeniero

Por lo anterior, en concordancia con Mendoza y Cordero (2018), afirmamos que la problemática consiste en que los usos del conocimiento matemático propios del cotidiano del ingeniero son diferentes de la matemática que se enseña en los cursos de ingeniería. En la matemática escolar no existe un MR que responda a una justificación funcional propia de las situaciones del quehacer de los ingenieros. Por tal motivo, nuestra investigación se interesó en revelar los usos del conocimiento matemático propios del ingeniero electrónico en su escenario escolar.

De esta manera, nuestra investigación coadyuva a conformar el nuevo marco de referencia, para el rediseño del discurso matemático escolar (RdME). Este nuevo marco de referencia atenderá la funcionalidad matemática en la ingeniería y construirá y mantendrá la relación recíproca entre la matemática escolar (ME) y el cotidiano del ingeniero en diferentes escenarios y situaciones específicas.

1.1.3– Tratamiento típico de un problema de la matemática escolar en la ingeniería

Con el propósito de mostrar una *justificación razonada* de la matemática escolar en la ingeniería, en contraparte a los usos del conocimiento propios del cotidiano del ingeniero, retomaremos el problema de la ecuación diferencial (ED) que presentamos en la introducción:

$$\boldsymbol{ay'' + by' + cy = f(t)} \qquad \text{con} \qquad \boldsymbol{f(t)} = \begin{cases} \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{si} \quad \boldsymbol{0 \le t < 4} \\ \boldsymbol{3.5} & \boldsymbol{si} \quad \boldsymbol{4 \le t \le 9.8} \\ \boldsymbol{2} & \boldsymbol{si} \quad \boldsymbol{9.8 < t} \end{cases}$$

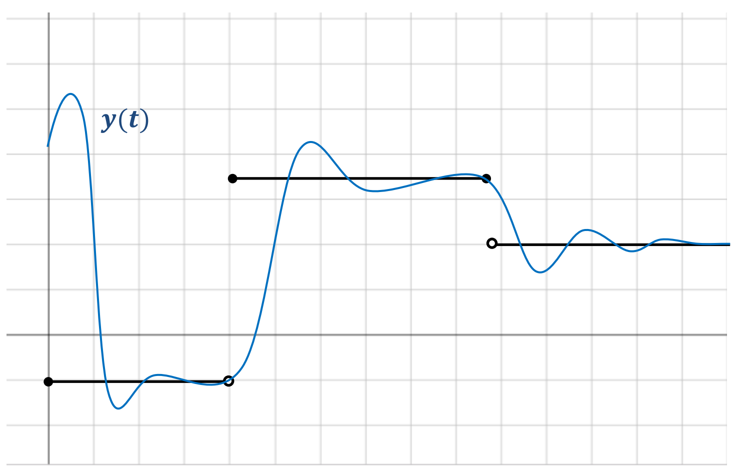


Figura 1. Comportamientos continuo y discontinuo de una ecuación diferencial

Desde una etapa inicial de la investigación, este tipo de ecuaciones diferenciales nos motivó a poner nuestra atención en los comportamientos continuos y discontinuos presentes en la ED; dado que, tal como se muestra en la Figura 1, la solución $\boldsymbol{y(t)}$ es continua a pesar de que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})$ es discontinua; además, que $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})$ tiene un comportamiento que tiende al de la función $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})$.

Dada la discusión que hemos descrito hasta aquí, una pregunta de interés es la siguiente: *¿Cuáles son las argumentaciones que justifican el comportamiento continuo de la solución de una ecuación diferencial?*

Este tipo de ED son comunes en los cursos de ecuaciones diferenciales y en otras asignaturas de las carreras de ingeniería. Sin embargo, la matemática escolar no propicia un escenario de discusión acerca de los comportamientos continuos y discontinuos presentes en esta ecuación diferencial; el tratamiento que le da en estos casos es el de encontrar la solución de dicha ED. Para tal fin, presenta a la Transformada de Laplace como el método por excelencia para resolver este tipo de ecuaciones diferenciales.[5] Pero este tratamiento, en vez de favorecer, oscurece un panorama de discusión que contribuya a responder porqué la solución $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})$ de la ecuación diferencial es continua.

Siguiendo el interés de encontrar argumentaciones que den cuenta de la continuidad de la solución de la ecuación diferencial, al revisar algunos libros de texto de ecuaciones diferenciales y de cálculo (Boyce y Diprima, 1992; Spivak, 1992; y Zill y Cullen, 2006), nos encontramos que su discurso no favorece el discutir la continuidad de la solución de una ecuación diferencial, ya que poco dicen al respecto; presentan algunos elementos referentes a ello, pero de manera dispersa a través del texto.

Los argumentos que se encuentran en algunos de estos libros de texto tienen que ver con que la solución de una ecuación diferencial es una primitiva. Y en otros de estos textos se dice que una primitiva de una función es siempre continua, esto por la

---

[5] En la sección 2.1.2 se presentará con detalle un ejemplo del método de la TL para resolver este tipo de ecuaciones diferenciales.

justificación del *Primer Teorema Fundamental del Cálculo*. Por lo tanto, se puede concluir que la solución de una ecuación diferencial es continua.

Estas argumentaciones de los libros de texto responden a una justificación razonada de la matemática, los cuales, permeados por el discurso matemático escolar, centran su atención en el objeto. Esto deriva en la no valorización de la justificación funcional propia del cotidiano del ingeniero.

A continuación, presentamos una demostración matemática, que es la *justificación razonada* de la continuidad de la solución de una ecuación diferencial. Después de ello, en contraparte, presentaremos el planteamiento de nuestra investigación, que atiende una *justificación funcional* que corresponde a los usos del conocimiento matemático propios del ingeniero electrónico en una situación específica.

Demostración de la continuidad de la solución de una ecuación diferencial lineal, como una justificación razonada en la matemática escolar

El camino para demostrar la continuidad de la solución es el siguiente: primero se considera a la solución de una ecuación diferencial como primitiva de otra función, y segundo, se demuestra que toda primitiva es continua en su intervalo de definición.

Definamos la siguiente ecuación diferencial lineal de *n-ésimo* orden:

$$\boldsymbol{a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)}.$$

Y sea $\boldsymbol{y}$, definida en $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \subseteq \mathbb{R}$, la solución de la ecuación diferencial.

Entonces, por definición de solución de una ecuación diferencial, $\boldsymbol{y}$ tiene al menos $\boldsymbol{n}$ derivadas continuas en $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$. (Zill y Cullen, 2006)

Por lo tanto, por el *Primer Teorema Fundamental del Cálculo*, la primitiva de la *n-ésima* derivada $\boldsymbol{y^{(n)}}$ es $\boldsymbol{y^{(n-1)}}$, y la primitiva de $\boldsymbol{y^{(n-1)}}$ es $\boldsymbol{y^{(n-2)}}$; y así recurrentemente llegamos a que $\boldsymbol{y}$ es la primitiva de $\boldsymbol{y'}$. Y este mismo teorema nos indica que la primitiva de una función es continua en su intervalo de definición (Spivak, 1992).

Presentamos a continuación la demostración de esto último, que es una consecuencia del *Primer Teorema Fundamental del Cálculo*.

Para efectos de esta demostración, se considera a $\boldsymbol{y = G}$, y a $\boldsymbol{y' = g}$. Es decir, $\boldsymbol{G}$ es la primitiva de $\boldsymbol{g}$. Por lo tanto, $\boldsymbol{g}$ es integrable.

Proposición:

Si $\boldsymbol{g}$ es una función integrable en $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \subseteq \mathbb{R}$,

entonces la función $\boldsymbol{G}$ definida por

$$\boldsymbol{G(x) = \int_a^x g}$$

es continua en $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$.

Demostración: Tomemos a $\boldsymbol{x_0} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$. Se requiere demostrar que $\boldsymbol{G}$ es continua en $\boldsymbol{x_0}$. Para ello, se necesita probar que

$$\lim_{h \to 0} \boldsymbol{G(x_0 + h) = G(x_0)}.$$

Se demostrará el equivalente, es decir:

$$\lim_{h \to 0} |\boldsymbol{G(x_0 + h) - G(x_0)}| = \boldsymbol{0}.$$

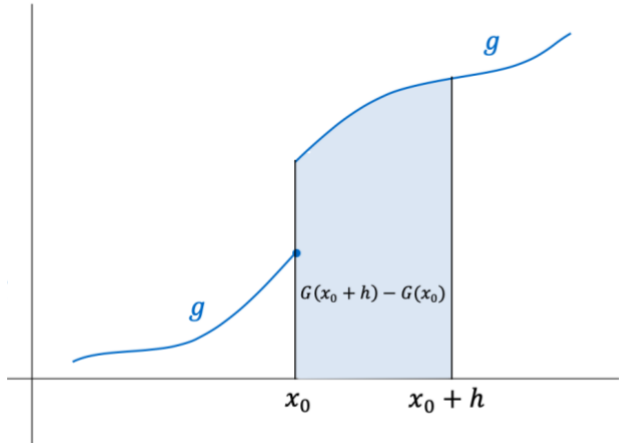


Figura 1.2. Continuidad de la función G

Para probar esto, veamos primero que, por definición de $\boldsymbol{G}$,

$$|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x_0}+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x_0})| = \left|\int_{a}^{x_0+h} g - \int_{a}^{x_0} g\right|$$

$$= \left|\int_{a}^{x_0} g + \int_{x_0}^{x_0+h} g - \int_{a}^{x_0} g\right|$$

$$= \left|\int_{x_0}^{x_0+h} g\right|$$

Como $\boldsymbol{g}$ es integrable en $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$, entonces está acotada en $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$.

Sea $\boldsymbol{M}$ cota de la funcion $\boldsymbol{g}$, tal que $|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})| \leq \boldsymbol{M},\ \forall \boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$. Entonces, por el *Teorema del Valor Extremo*, tenemos que

$$\left|\int_{x_0}^{x_0+h} g\right| \leq \boldsymbol{M}|\boldsymbol{h}|$$

$$|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x_0}+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x_0})| \leq \boldsymbol{M}|\boldsymbol{h}|$$

Luego, si $\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{M}|\boldsymbol{h}| = \boldsymbol{0}$. Por lo tanto,

$$\lim_{h\to 0}|G(x_0 + h) - G(x_0)| = 0$$

Esto prueba que

$$\lim_{h\to 0} G(x_0 + h) = G(x_0)$$

Lo cual quiere decir que la función $\boldsymbol{G}$ es continua en $\boldsymbol{x_0} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$.

Finalmente, como hemos declarado $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{G}$, entonces $\boldsymbol{y}$ —solución de la ecuación diferencial— es continua en $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$; lo cual deseábamos demostrar.

Hemos presentado una demostración de la continuidad de la solución de una ecuación diferencial lineal, la cual corresponde a una *justificación razonada* de esta propiedad. Este tratamiento, dado su centración en el objeto matemático, no favorece un escenario de discusión donde aparezcan argumentos funcionales que den sentido a los comportamientos continuos y discontinuos que suceden en situaciones específicas de comunidades, por ejemplo, de los ingenieros electrónicos.

Con base en la problemática planteada anteriormente, es de suma importancia atender la *justificación funcional* que demandan otros dominios de conocimiento, en particular, la ingeniería. Nuestra investigación, cuyo planteamiento se presenta a continuación, se encamina en ese sentido: revelar los usos del conocimiento matemático propios de los ingenieros electrónicos en una situación específica.

1.2– PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

Ante el cuestionamiento que se había planteado, respecto a los argumentos propios del ingeniero que justifiquen funcionalmente la reproducción continua de un comportamiento a partir de comportamientos discontinuos, nos interesó ir a una comunidad de ingenieros electrónicos en formación y estudiar a esta comunidad en una situación específica de diseño de sistemas de control.

Tomamos una situación de diseño de sistemas de control, ya que esta es una actividad principal del cotidiano del ingeniero electrónico, tanto en su escenario profesional como en su formación (Mendoza y Cordero, 2018). Los sistemas de control son dispositivos diseñados por ingenieros en donde, dado un cierto comportamiento deseado, se ejecutan varias acciones de control (procedimientos) con el propósito de reproducir el comportamiento deseado.

En las señales y acciones que se ejecutan en un sistema de control, ocurren comportamientos que son modelados típicamente por funciones que están definidas de manera discontinua (por ejemplo, la función escalón unitario); sin embargo, la reproducción de los comportamientos en la salida del sistema es continua.

Lo anterior constituyó los elementos que nos permitieron formular la pregunta de investigación de nuestro estudio.

Pregunta de investigación*: ¿Cuáles son los factores funcionales de la Transformada de Laplace que relacionan los comportamientos continuos y comportamientos discontinuos, en una situación específica de diseño de un sistema de control, en estudiantes de ingeniería electrónica?*

Como ya se ha dicho antes, los argumentos funcionales corresponden a los usos del conocimiento matemático propios del ingeniero electrónico. De tal manera que, en contraparte a la matemática escolar, se atiende la justificación funcional en esta situación específica, la cual permite una resignificación del conocimiento matemático; en el caso de nuestra investigación, una resignificación de la Transformada de Laplace. Esto conformó la hipótesis de la investigación, que se enuncia a continuación:

Hipótesis: *Los factores funcionales que relacionan los comportamientos continuos y comportamientos discontinuos en una situación específica de sistema de control, resignifican a la Transformada de Laplace.*

Dadas la pregunta y la hipótesis de la investigación, nos propusimos hacer la inmersión en la comunidad de conocimiento, con el fin de dar cuenta de los factores funcionales de la Transformada de Laplace, de tal manera que esto contribuya a la conformación de un *marco de referencia* que confronte a la matemática escolar. Por tal motivo nos planteamos el siguiente objetivo de investigación:

Objetivo: *Conformar un marco de referencia de la Transformada de Laplace, a partir de los factores funcionales que emergen en una comunidad de ingenieros electrónicos en formación cuando diseñan un sistema de control.*

El *marco de referencia*, conformado por los usos del conocimiento matemático que emerge en la comunidad, responde a una *justificación funcional* propia del ingeniero electrónico en una situación específica. Este marco de referencia coadyuva al rediseño del discurso matemático escolar (RdME), de tal manera que se atiende la funcionalidad matemática en la ingeniería, contribuyendo así a crear una relación recíproca entre el cotidiano del ingeniero y la matemática escolar, que es la problemática que estamos atendiendo.

1.3– ALGUNAS INVESTIGACIONES ACERCA DE LA CATEGORÍA REPRODUCCIÓN DE COMPORTAMIENTOS Y DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

En el planteamiento de la investigación de la sección anterior, hay dos elementos que son de vital importancia: los sistemas de control y la Transformada de Laplace. El primero, es el elemento que define la situación específica de la comunidad del estudio: la situación de diseño de un sistema de control. Y el segundo, es el objeto matemático que se resignifica en la situación específica, cuyos usos y significados emergen en esta comunidad de ingenieros.

Respecto a estos elementos, las investigaciones que se presentan a continuación fueron fundamentales para nuestro estudio:

- Mendoza y Cordero (2018): revela la emergencia de la categoría *Reproducción de Comportamientos* en dos dominios de conocimiento: en una obra matemática de *Lyapunov* y en una Comunidad de Ingenieros Biónicos.
- Miranda (2001): presenta una epistemología de la Transformada de Laplace, basada en los significados de origen y de evolución de esta transformada.

1.3.1– Emergencia de la categoría *Reproducción de Comportamientos* en dos dominios de conocimiento

Mendoza y Cordero (2018) reportan los resultados de una investigación doctoral que dio cuenta de la emergencia de la categoría *Reproducción de Comportamientos* en dos dominios: la obra titulada *The general problem of the stability of motion* de *Lyapunov*, y en la Ingeniería Biónica en un escenario escolar. El análisis se realizó con un doble propósito: problematizar la categoría de *reproducción de comportamientos* en la construcción de la *estabilidad* como objeto matemático, y también mostrar la transversalidad de usos en la obra matemática y otras disciplinas como la ingeniería (ver Figura 1.3). Esta epistemología funcional de la estabilidad expresa la pluralidad del conocimiento matemático cuando suceden tránsitos entre diversos dominios, escenarios y situaciones.

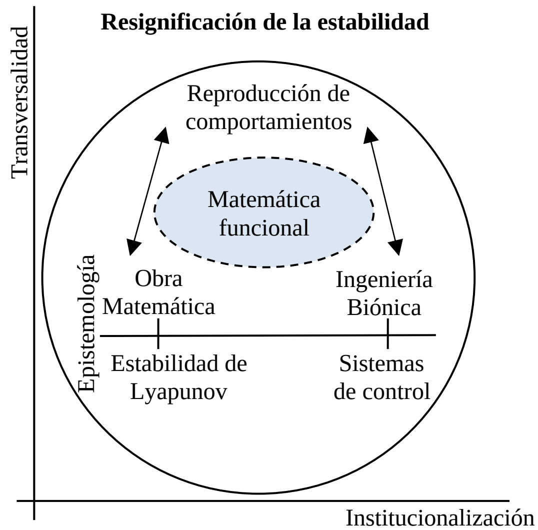


Figura 1.3. Marco de la categoría reproducción de comportamientos (Basado en Mendoza y Cordero, 2018)

Respecto a la estabilidad en la obra matemática, esta investigación reportó que Lyapunov caracteriza el comportamiento de movimientos no perturbados estables conocidos, y busca una función V que pueda permitirle modelar este comportamiento, para decidir cuáles movimientos no perturbados desconocidos son estables y cuáles no lo son. Si esta función V existe, expresa la tendencia en el comportamiento de las soluciones, pues V' indica que las trayectorias permanecen cerca del punto de equilibrio o que tienden hacia este. De esta manera, el uso que Lyapunov le da a la estabilidad, se refiere a *buscar la relación entre dos movimientos, el perturbado y el no perturbado*; no se puede hablar del uno sin el otro. De hecho, esta interpretación da pie para construir comportamientos deseables; es decir, *conocido un comportamiento, dibujar otro que se parezca a ese;* o dicho de otra manera *reproducir un comportamiento* (Mendoza, 2017; Mendoza y Cordero, 2018).

Como se dijo antes, esta investigación mostró también una transversalidad a una comunidad de conocimiento de ingenieros biónicos en formación cuando diseñan un sistema de control. Aquí se reveló la resignificación de los usos de la estabilidad que emergen de la problematización de la categoría *reproducción de comportamientos* en la situación específica de sistemas de control.

Esta situación específica de la comunidad de ingenieros biónicos se refiere a controlar la temperatura de un foco. El objetivo principal es que, dado un valor deseado para la temperatura del foco, este alcance dicho valor. En esta problematización de la situación específica de la comunidad, emerge una epistemología de usos del conocimiento matemático de la estabilidad, que corresponden a una situación de transformación, en donde se identifican significaciones, procedimientos e instrumentos, que derivan en la argumentación de la situación: *la reproducción de comportamientos* (ver Tabla 1.1).

	Situación fundamental	Situación específica
Construcción de lo matemático	**Transformación**	**Diseño de sistemas de control**
Significaciones	Patrones de comportamiento gráfico y analíticos	Comportamiento de la señal de entrada y la señal de salida
Procedimientos	Variación de parámetros	$U(s) = R(s) - B(s)$ Realimentación de $G(s)$
Instrumento	Instrucción que organiza comportamientos	La ecuación diferencial modela el comportamiento de las señales y así la estabilidad del sistema
Argumentación/ Resignificación	Comportamiento tendencial/Reproducción de Comportamientos	Tendencia del comportamiento de $Y(s)$ a $R(s)$

Tabla 1.1. Situaciones fundamental y específica. Transformación y sistemas de control (Mendoza y Cordero, 2018)

> [Los momentos del sistema de control] están sujetos a la Reproducción de un Comportamiento deseado, es decir, que la señal de salida tienda a comportarse como el valor de referencia o señal de entrada. De esta manera

> la estabilidad se significa en el comportamiento de las señales de entrada y salida, provocando procedimientos como la comparación entre la señal de salida y el valor de referencia, modificando los parámetros de la ecuación diferencial que modela el sistema y significándola como un instrumento que se encarga de modelar la estabilidad de la señal de salida y así lograr que se reproduzca el comportamiento inicialmente propuesto. (Mendoza y Cordero, 2018. p. 56)

Los resultados reportados por Mendoza y Cordero (2018) contribuyen al cuerpo teórico del programa socioepistemológico SOLTSA, que busca revelar los usos del conocimiento matemático y sus resignificaciones en las comunidades de conocimiento matemático de la gente (Cordero, 2017).

1.3.2– Una epistemología de la Transformada de Laplace

A partir del reconocimiento del estatus que la Transformada de Laplace (TL) tiene en la matemática escolar, la investigación de Miranda (2001) se propuso, como uno de sus objetivos, desarrollar un análisis histórico de las ideas germinales y de evolución que ha tenido este método, y de esta manera proponer una estructura epistemológica conformada por significados referentes a esta transformada.

Miranda (2001) afirma que, desde sus orígenes y evolución, las integrales asociadas a los desarrollos de la Transformada de Laplace fueron creadas explícitamente como un método operacional con el único propósito de resolver ecuaciones diferenciales o en diferencias. Lo que cambió en cada etapa histórica de desarrollo de la TL fue el tipo de operaciones realizadas para resolver esas ecuaciones diferenciales.

Sobre la base de esas operaciones se reconocen tres periodos en la evolución epistemológica del concepto de la Transformada de Laplace, que Cordero y Miranda (2002) denominan "*Etapas conceptuales de la TL*":

- Etapa de multiplicación: las integrales indefinidas
- Etapa de sustitución: las integrales definidas
- Etapa de multiplicación: las integrales impropias

En la **primera etapa**, la multiplicación es la operación esencial para resolver una ecuación diferencial. En este caso la multiplicación de una ecuación diferencial por una función adecuada (la exponencial e^{mx}) es la manera en que la ecuación de orden n queda transformada en otra ecuación de orden $n-1$, cuya solución se puede conocer (o ya es conocida). Para esta etapa, Euler estudia métodos de solución de ecuaciones diferenciales de orden mayor a uno, mediante el argumento de multiplicar una ecuación diferencial $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$ por un factor e^{mx}, con la finalidad de transformar la ecuación diferencial en una ecuación exacta —dependiendo del parámetro m— y de reducir la ecuación en otra de un grado menor a la original:

$$b_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + b_1 y' + b_0 y = \int \left(a y^{(n)} + \cdots + a y' + a y\right) e^{mx} dx = \int f(x) e^{mx} dx$$

Cordero y Miranda (2002) mencionan que la aplicación de estos argumentos llevó de modo indirecto a la obtención de las integrales indefinidas de la forma $\int f(x) e^{mx} dx$; que sin duda son expresiones que anteceden a la Transformada de Laplace.

La **segunda etapa** concierne a la construcción de diferentes integrales de Laplace a partir de la idea de resolver una ecuación diferencial, sustituyendo una expresión integral definida, donde se pretende conocer la forma del integrando y los límites de integración. El contexto inicial en el que esta etapa de conocimiento se desarrolla es el de la probabilidad. En este sentido, Laplace (1812) afirmó que la solución de una ecuación diferencial o en diferencias $f(s)$ se puede expresar en la forma integral $f(s) = \int_a^b e^{st} U(t) dt$.

La idea era sustituir la integral $f(s) = \int_a^b e^{st} U(t) dt$ en la ecuación a resolver para determinar la función $U(t)$ y los límites de integración a y b. De esta manera la solución de la ecuación diferencial se representaba como una integral de Laplace. Como consecuencia de este periodo aparecen integrales de la forma $\int_a^b f(x) e^{sx} dx$, $\int_a^b f(x) e^{-sx} dx$ y $\int_0^\infty f(x) e^{-sx} dx$.

En la **última etapa**, la Transformada de Laplace aparece como una integral impropia —tal como se conoce en la actualidad—. Según Miranda y Cordero (2002), para esta época, las ecuaciones diferenciales que se resolvían mediante la TL tenían que ver con contextos como ser los problemas de la desintegración radiactiva y de circuitos eléctricos. En estos contextos se buscaba *determinar comportamientos* en *tiempos muy grandes* $(t = \infty)$, a partir de *estados iniciales* (en $t = 0$). Por lo cual, la integral $\int_a^b f(t) e^{-ts} dt$ es formulada como la integral impropia $\int_0^\infty f(t) e^{-ts} dt$.

Por ejemplo, Heaviside utilizó este método interesado en el estudio del *comportamiento de sistemas* con condiciones iniciales, a los que se les aplica un impulso o fuerza repentina en el tiempo $t = 0$. También, Bateman (1910) publicó la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales para calcular la cantidad de sustancias radioactivas; a cada ecuación del sistema la multiplicó por e^{-ts} e integró desde 0 hasta ∞, para así obtener expresiones que lo llevaban luego a la solución del sistema. De esta manera, tanto Heaviside como Bateman, utilizaban lo que actualmente conocemos como Transformada de Laplace, con el propósito de *determinar ciertos comportamientos a partir de estados iniciales*.

La revisión de las ideas que dieron origen y desarrollaron a la Transformada de Laplace, le posibilitó a Miranda (2001) afirmar que la representación $\int_a^b e^{-st} f(t) dt$ posee gran riqueza de contenidos, tal que cada uno de los elementos de esta integral tiene significados propios. Estos se muestran en la siguiente tabla:

<table>
<tr><th rowspan="4">$\int_a^b e^{-st} f(t)dt$</th><th>$f(t)$</th><th>e^{-st}</th><th>$\int_a^b$</th><th>Limites de integración a, b</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Representa una serie de potencias (una función generatriz)</td><td>Factor para hacer converger la integral impropia</td><td rowspan="3">La conversión de una suma Σ cuando las variables son continuas</td><td>Parte de las condiciones para representar una función como una integral de Laplace</td></tr>
<tr><td>Factor para convertir una ecuación diferencial en exacta</td><td rowspan="2">Cálculo de estados estacionarios (en $t = \infty$) a partir de estados iniciales (en $t = 0$)</td></tr>
<tr><td>Representación de voltajes en un sistema</td></tr>
</table>

Tabla 1.2. Significados de la transformada de Laplace (Miranda, 2001)

El elemento exponencial e^{-st} en el método de la Transformada de Laplace, es un *factor de convergencia de la integral*. En la mayor parte de problemas resueltos por Laplace, aparece la integral con la exponencial e^{-sx} definida en un intervalo $[0, \infty]$, donde la integral es convergente (Cordero y Miranda, 2002).

De hecho, hacer que la integral convergiera, fue la intención de Laplace al desarrollar este método. Así lo menciona en el *Ensayo filosófico de las probabilidades*, refiriéndose a esta transformada: "de lo único que se trataba es de reducir la integral definida a una serie convergente. Es lo que he obtenido por un procedimiento que hace converger la serie con rapidez" (Laplace, 1814/1988. pp. 65-66).

En esta epistemología expuesta por Cordero y Miranda (2002), se exhibe que el factor exponencial e^{-st} hace converger siempre la integral. Es decir, e^{-st} tiene la función de *crear comportamientos con tendencia*, de tal manera que permite a la Transformada de Laplace *significar comportamientos tendenciales.*

En las etapas históricas de evolución conceptual de esta transformada, siempre se tuvo la intención de *lograr comportamientos* que *tuviesen cierta forma* (convertir una ED en exacta, la convergencia, entre otros), para determinar las soluciones de las ecuaciones diferenciales. Y particularmente en la última etapa, estos comportamientos se problematizan a través del tiempo: *determinar comportamientos* en tiempos muy grandes ($t = \infty$), a partir de *estados iniciales* ($t = 0$). Esto alude a la categoría *Reproducción de Comportamientos.*

1.3.3- Otras investigaciones acerca de la Transformada de Laplace

Las dos investigaciones que describimos anteriormente son los antecedentes principales que tomamos como base para nuestro estudio, dado que sus resultados revelan significados que aluden a la categoría *reproducción de comportamientos* que problematizamos en nuestra investigación; respecto a los sistemas de control (Mendoza y Cordero, 2018) y a la Transformada de Laplace (Miranda, 2001).

Sin embargo, existen diversos estudios dentro de la Matemática Educativa que han indagado asuntos referentes a la enseñanza y aprendizaje de la Transformada de Laplace, particularmente en las carreras de ingeniería, y que contribuyeron a reflexionar acerca de un panorama de esta transformada en la matemática escolar. En la siguiente tabla sintetizamos algunas de estas investigaciones:

Autores de la investigación	Interés de la investigación	Descripción
Alaniz, May, Baracco y Simunovich (2010)	Analizar errores y dificultades para resolver ecuaciones diferenciales lineales al utilizar la TL	Los estudiantes tienen menos dificultad en resolver ejercicios rutinarios ya que consisten solo en aplicar la técnica aprendida. Y tienen mayor dificultad al resolver el problema aplicado, evidenciando que en este caso se les presentan mayores obstáculos.
Carstensen y Bernhard	Diseño de un curso en teoría de circuitos	La integración de sesiones de laboratorio y de resolución de problemas ofrece nuevas formas de manejar un tema en particular. Los estudiantes traen

(2007)	eléctricos, utilizando la TL	su conocimiento del contexto matemático al laboratorio, pero también pueden usar los gráficos al trabajar en el contexto matemático.
González-Sampayo **(2006)**	Dificultad de la TL en el aprendizaje en los circuitos eléctricos y como una herramienta para resolver problemas del mundo real	Enfatiza en la importancia de la aplicación de en problemas del "mundo real" para que los estudiantes tengan una visión de la relación entre la teoría y el mundo real. Si la TL se mezcla con las otras transformadas sin un enfoque específico, podría causar un problema para los estudiantes de ingeniería cuando tienen que aplicarlo en un problema específico.
Holmberg y Bernhard **(2017)**	Perspectivas de los profesores universitarios sobre el papel de la TL en la enseñanza de la ingeniería.	Muestran la importancia de establecer vínculos explícitos en la enseñanza de la matemática con áreas como la física y la tecnología. Sin embargo, indican que para algunos profesores no existe ningún vínculo entre varias de estas áreas. Además, algunos estudiantes y profesores de ingeniería ven las matemáticas como separadas del mundo, e irrelevantes.
Jáuregui, Ávila y Nesterova **(2007)**	Identificar habilidades al utilizar la Función Escalón Unitario de la TL	Las habilidades que los estudiantes poseen para representar analítica y gráficamente (en términos de la Función Escalón Unitario) las funciones definidas por intervalos se refieren al apoyo de la propiedad correspondiente de la TL.
Juárez e Irassar **(2014)**	Dificultades para resolver ecuaciones diferenciales que contienen una función definida por intervalos	Dificultades en el cálculo de la TL de funciones definidas por intervalos, escritas en forma analítica por partes o dadas en forma gráfica. Dificultades para resolver ecuaciones diferenciales, mediante la TL, cuyo término no homogéneo es una función continua por partes. Dificultades en la resolución de problemas que involucran procesos discontinuos.

Romo (2010)	El papel de la TL en proyectos que desarrollan estudiantes de ingeniería	Se cuestiona sobre el papel que juegan la TL en el desarrollo de las tareas de proyectos de ingeniería y cuál sería la praxeología realmente útil dado el uso de los recursos tecnológicos actuales.
Ruiz, Camarena y del Rivero (2016)	Implementación de software. Conocimientos previos	Se propone evaluar el desarrollo de habilidades operacionales de los estudiantes, al resolver eventos contextualizados de la TL en circuitos eléctricos, al emplear el software Maple 13.

Tabla 1.3. Algunas investigaciones acerca de la Transformada de Laplace

Al referirnos a la enseñanza y aprendizaje de la matemática en general, y particularmente en la ingeniería, sabemos que existen grandes retos que debemos afrontar; por ello, diversas investigaciones en Matemática Educativa se esfuerzan por contribuir en esta dirección. Lo mostrado en la tabla anterior, permite apreciar problemáticas, especialmente de la Transformada de Laplace (habilidades, dificultades, errores, creencias de profesores, etc.), que son estudiadas por diversas líneas de investigación en Matemática Educativa.

Los resultados de la investigación en esta disciplina han posibilitado que se implementen cambios, con el propósito de mejorar las condiciones de la educación de las matemáticas. Sin embargo, en general, estos cambios que se han implementado no han podido obtener los resultados que se anhelan.

Desde nuestra postura socioepistemológica, reconocemos que la problemática reside en el discurso matemático escolar (dME), el cual provoca la ausencia de relación recíproca entre la matemática escolar (ME) y el cotidiano de la gente —particularmente para el interés de nuestra investigación: el cotidiano del ingeniero electrónico—. Con base en este reconocimiento, el esfuerzo de la investigación en Matemática Educativa debe ir dirigido a crear las condiciones para que sucedan esas relaciones reciprocas. La centración no debe estar en los objetos matemáticos sino en la valorización de los usos del conocimiento matemático.

En este sentido, nuestra investigación se enfocó en revelar los usos del conocimiento matemático propios del cotidiano del ingeniero electrónico, en una situación específica del escenario escolar. Específicamente, damos evidencia de los factores funcionales que relacionan los comportamientos discontinuos y comportamientos continuos en un sistema de control, y cómo estos factores resignifican a la Transformada de Laplace.

Capítulo 2:
Un Acercamiento a la Teoría de Control y a la Transformada de Laplace

En las últimas décadas la sociedad en general hace un uso extenso de los sistemas automatizados. Tanto en la vida diaria como en la industria se destacan sistemas de control que regulan magnitudes de temperatura, presión, flujo, seguridad; en las áreas de la electrónica, robótica, mecánica, entre otras. En la actualidad todo es controlado, con el objetivo de optimizar y mejorar el desempeño de los procesos dentro de los sistemas, manteniéndolos dentro de parámetros preestablecidos (Carrillo, 2011). Por ello, dentro de la ingeniería, es necesario el estudio referente al análisis y diseño de los Sistemas de Control. Particularmente en la Ingeniería Electrónica, una de las áreas principales es la *Teoría de control*, ya que gran parte de los dispositivos o maquinarias que diseñan y construyen los ingenieros, requieren controlarse para que funcionen u obtengan los resultados deseados (Ogata, 2010).

La Teoría de Control es el conjunto de conocimientos organizados acerca de los componentes, propósitos y puesta en funcionamiento de los sistemas de control (Hernández, 2010). Dentro de la Teoría de Control se estudian varios elementos matemáticos que intervienen en un sistema de control; entre ellos, la Transformada de Laplace.

En este capítulo presentaremos un acercamiento a la Teoría de Control y el papel que la Transformada de Laplace tiene en esta área de la ingeniería. Antes de ello, mostramos el tratamiento escolar de esta transformada en los primeros cursos de matemáticas donde aparece.

2.1– TRATAMIENTO ESCOLAR DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

La Transformada de Laplace es una de las temáticas de mayor importancia abordadas, particularmente, en los cursos de las carreras de ingeniería. En el sistema escolar aparece por primera vez en los cursos de ecuaciones diferenciales, como un método por excelencia para resolver ecuaciones diferenciales (principalmente, ecuaciones diferenciales lineales). Posteriormente aparece en algunos cursos especializados de ingeniería, como automatización, estabilidad, teoría de control, teoría de sistemas lineales, entre otros. Aquí la Transformada de Laplace es una herramienta fundamental incorporada en los componentes de un sistema de control para su funcionamiento (Hernández, 2010).

A continuación, presentamos cómo la Transformada de Laplace se presenta en la matemática escolar: su definición, propiedades principales y dos ejemplos de su aplicación para resolver una ecuación diferencial.

2.1.1- Definición de la Transformada de Laplace en los libros de texto

Al revisar diferentes programas de estudio de varias escuelas del sistema universitario de México (en particular, en el área de Ingeniería), se ha encontrado que la Transformada de Laplace aparece por primera vez en los cursos de ecuaciones diferenciales, y que casi todos los programas consultados consideran los mismos textos, entre estos, aparecen: Spiegel (1983), Edwards y Penney (1986) y Zill y Cullen (2006). En estos libros, la definición de la Transformada de Laplace es —sin muchas variantes— la siguiente:

Dada una función $f(t)$ *definida para* $t \geq 0$*, la transformada de Laplace de la función* $f(t)$ *es la función* $F(s)$ *definida como* $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$*, para todos los valores de* s *para los cuales la integral converge.*

La Transformada de Laplace además aparece en otros cursos dirigidos a ingeniería —especialmente en Ingeniería Electrónica, Mecánica y Eléctrica—; entre estos cursos están algunos de probabilidad, en donde la Transformada de Laplace aparece junto con las Series de Fourier, teoría de control, y análisis de señales y sistemas. En general, aunque estos cursos son posteriores a los de ecuaciones diferenciales, la definición que presentan de la Transformada de Laplace es similar a la mostrada anteriormente.

Cordero y Miranda (2002) mencionan que, en los textos de ecuaciones diferenciales, la introducción y definición de la Transformada de Laplace no ha variado desde la década de los 50's y se revela la ausencia de argumentos que puedan dar significado gráfico o físico sobre el tipo de problemas que originaron su definición; esto implica que para enseñarla solo se parte de su definición simbólica. En algunos libros se dan referencias de que esta transformada se originó debido a los trabajos de Heaviside y sus métodos operacionales para resolver las ecuaciones diferenciales, pero no se dice cómo fue esto, ya que en esos libros los capítulos sobre soluciones de ecuaciones diferenciales por operadores (o métodos cortos) están desconectados con el capítulo de la Transformada de Laplace, pues no se explica la relación de un método con el otro.

Además, en el sistema educativo la enseñanza de la Transformada de Laplace está limitada a la manipulación de su expresión integral, calculando la transformada de funciones, probando sus propiedades, para después establecer un algoritmo que permite obtener la solución de algunos tipos de ecuaciones diferenciales —comúnmente, ecuaciones diferenciales lineales—.

En ese sentido, esto sirve como punto de partida para mirar la forma en que se introduce y se trata a la Transformada de Laplace en el medio escolar —la cual ocurre con una centración al objeto matemático—, y de esta manera dimensionar su papel predominante en lo habitual de la enseñanza en la Matemática Escolar. En otras palabras, tal como señalan Giacoleti-Castillo y Cordero (2019), el discurso matemático escolar no le da a la Transformada de Laplace otro valor distinto que el algorítmico, centra su atención en el objeto matemático y deja de lado su valor funcional que se desarrolla en situaciones específicas del cotidiano de las comunidades de conocimiento matemático, particularmente de comunidades de ingenieros.

2.1.2- La Transformada de Laplace como método para resolver ecuaciones diferenciales

Como ya se dijo, después que se introduce la definición de la Transformada de Laplace en el medio escolar, los textos presentan sus propiedades que después serán aplicadas para ejercitar en el cálculo de transformadas de varias funciones y para resolver ecuaciones diferenciales. En la siguiente figura se muestran las transformadas de algunas funciones básicas:

$$a)\quad \mathscr{L}\{1\} = \frac{1}{s}$$

$$b)\quad \mathscr{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}},\ n = 1, 2, 3, \ldots \qquad c)\quad \mathscr{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$$

$$d)\quad \mathscr{L}\{\operatorname{sen} kt\} = \frac{k}{s^2 + k^2} \qquad e)\quad \mathscr{L}\{\cos kt\} = \frac{s}{s^2 + k^2}$$

$$f)\quad \mathscr{L}\{\operatorname{senh} kt\} = \frac{k}{s^2 - k^2} \qquad g)\quad \mathscr{L}\{\cosh kt\} = \frac{s}{s^2 - k^2}$$

Figura 2.1. Transformadas de algunas funciones básicas (Zill y Cullen, 2006, p. 196)

En esta figura se presentan transformadas de algunas funciones; estas podrían ser parte de los términos de una ecuación diferencial. Sin embargo, cuando se necesita calcular **transformadas de derivadas**, como $\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\}$, $\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\}$ y de manera general $\mathcal{L}\left\{\frac{d^{(n)}y}{dt^{(n)}}\right\}$, se requiere del siguiente teorema:

Si $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ son continuas en $[0, \infty]$ y de orden exponencial, y si $f^{(n)}(t)$ es continua por tramos en $[0, \infty]$, entonces

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0),$$

donde $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.

Este teorema es utilizado para resolver ecuaciones diferenciales, y en el procedimiento que se realiza, se aplica además la ***Transformada inversa de Laplace*** que se enuncia de la siguiente manera:

Si $F(s)$ representa la Transformada de Laplace de una función $f(t)$, que es $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, entonces decimos que $f(t)$ es la Transformada Inversa de Laplace de $F(s)$, y escribimos $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$.

Algunas transformadas inversas de Laplace se muestran en la siguiente figura:

$$a) \quad 1 = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}$$

$$b) \quad t^n = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\}, n = 1, 2, 3, \ldots \qquad c) \quad e^{at} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\}$$

$$d) \quad \operatorname{sen} kt = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^s + k^2}\right\} \qquad e) \quad \cos kt = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + k^2}\right\}$$

$$f) \quad \operatorname{senh} kt = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2 - k^2}\right\} \qquad g) \quad \cosh kt = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 - k^2}\right\}$$

Figura 2.2. Transformadas inversas de Laplace de algunas funciones (Zill y Cullen, 2006, p. 199)

Ejemplo de resolución de una ecuación diferencial, utilizando la Transformada de Laplace

La siguiente es una ecuación diferencial lineal de segundo orden, con valor inicial (PVI):

$$y'' - 3y' + 2y = e^{-4t}, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 5$$

<u>Solución:</u>

Primero transformamos ambos miembros de la ecuación diferencial, tomando la transformada de cada término, y aplicamos las condiciones iniciales dadas:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} - \mathcal{L}\left\{3\frac{dy}{dt}\right\} + \mathcal{L}\{2y\} = \mathcal{L}\{e^{-4t}\}$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 3[sY(s) - y(0)] + 2Y(s) = \frac{1}{s+4}$$

$$s^2Y(s) - s - 5 - 3sY(s) + 3 + 2Y(s) = \frac{1}{s+4}$$

Al resolver la ecuación para $Y(s)$, se obtiene:

$$(s^2 - 3s + 2)Y(s) = s + 2 + \frac{1}{s+4}$$

$$Y(s) = \frac{s+2}{(s^2 - 3s + 2)} + \frac{1}{(s^2 - 3s + 2)(s+4)}$$

$$Y(s) = \frac{s^2 + 6s + 9}{(s-1)(s-2)(s+4)} = \frac{16/5}{s-1} + \frac{25/6}{s-2} + \frac{1/30}{s+4}$$

Finalmente, al aplicar la Transformada inversa de Laplace $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$, se obtiene la solución de la ecuación diferencial del problema de valor inicial (PVI).

$$y(t) = \frac{16}{5}e^{t} + \frac{25}{5}e^{2t} + \frac{1}{30}e^{-4t}.$$

El método de la Transformada de Laplace resulta sumamente útil para resolver ecuaciones diferenciales de la forma $ay'' + by' + cy = f(t)$, donde $f(t)$ es discontinua. Particularmente cuando $f(t)$ es escalonada, la mayoría de los textos definen primero la Función Escalón Unitario (o también llamada Función de Heaviside), para después presentar la propiedad de traslación de la Transformada de Laplace, que se aplica para este tipo de funciones.

La función escalón unitario (Función de Heaviside), se define como $\mathcal{U}(t-a)$ donde

$$\mathcal{U}(t-a) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq a \\ 1, & t \geq a \end{cases}$$

El teorema de traslación de la Transformada de Laplace se presenta de la siguiente manera:

$$Si\ F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}\ y\ a > 0,\ entonces\ \mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as}F(s).$$

Ejemplo de resolución de una ecuación diferencial con $f(t)$ escalonada

Consideremos un sistema de masa-resorte. El sistema inicialmente está en reposo y equilibrio, por lo cual se tiene que $y'(0) = 0,\ \ y(0) = 0$. La masa es impulsada por una fuerza de entrada $f(t)$, que se muestra a continuación:

$$f(t) = \begin{cases} -10, & \pi \leq t < 2\pi \\ 0, & t \notin [\pi, 2\pi) \end{cases}$$

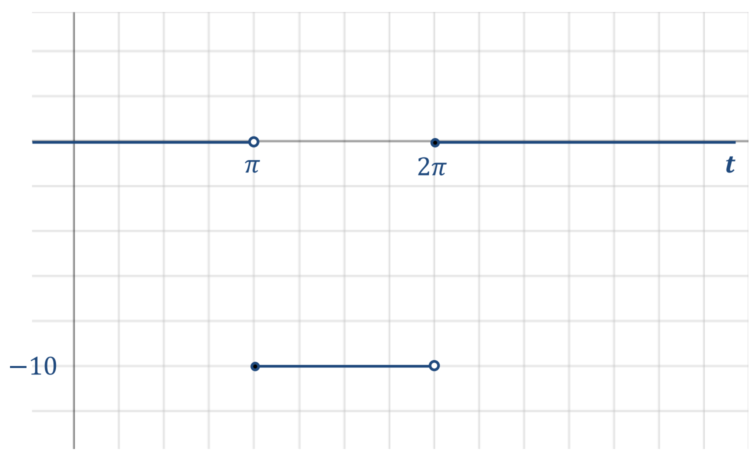


Figura 2.3. Fuerza de entrada al sistema

El propósito es encontrar la posición $y(t)$ de la masa en cualquier instante, que está dada por la solución del siguiente problema de valor inicial (PVI):

$$2y''(t) + 4y'(t) + 10y(t) = f(t)$$

Solución:

La función $f(t)$ puede escribirse como una función escalón unitario, de la siguiente manera:

$$f(t) = -10\mathcal{U}(t-\pi) + 10\mathcal{U}(t-2\pi)$$

Entonces, aplicando el teorema de traslación de la Transformada de Laplace, se obtiene

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = -\frac{10e^{-\pi s}}{s} + \frac{10e^{-2\pi s}}{s}$$

Ahora, se aplica la Transformada de Laplace en ambos miembros de la ecuación diferencial $2y''(t) + 4y'(t) + 10y(t) = f(t)$.

$$\mathcal{L}\{2y''\} + \mathcal{L}\{4y'\} + \mathcal{L}\{10y\} = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$2[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + 4[sY(s) - y(0)] + 10Y(s) = F(s)$$

Consideramos las condiciones iniciales y la expresión de $F(s)$, y despejamos para $Y(s)$:

$$2s^2Y(s) + 4sY(s) + 10Y(s) = \frac{10e^{-2\pi s}}{s} - \frac{10e^{-\pi s}}{s}$$

$$Y(s) = \frac{5e^{-2\pi s}}{s(s^2+2s+5)} - \frac{5e^{-\pi s}}{s(s^2+2s+5)}$$

Y finalmente al aplicar la Transformada inversa de Laplace, se obtiene la solución:

$$y(t) = \left(1 - \frac{1}{2}e^{-(t-2\pi)}(2\cos 2t + \sin 2t)\right)\mathcal{U}(t-2\pi) - \left(1 - \frac{1}{2}e^{-(t-\pi)}(2\cos 2t + \sin 2t)\right)\mathcal{U}(t-\pi)$$

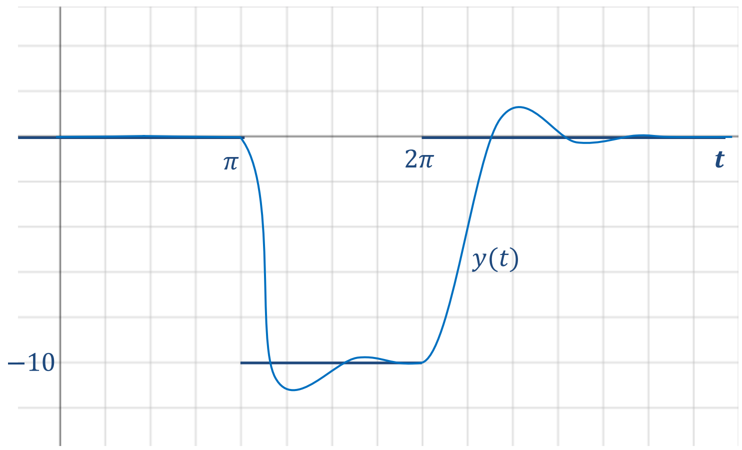


Figura 2.4. Posición de la masa en el tiempo

La gráfica de $y(t)$ que se presenta anteriormente (color azul), describe la posición de la masa en el tiempo. El comportamiento de $y(t)$ muestra el efecto que tiene sobre el sistema la fuerza de entrada $f(t)$ en el intervalo $[\pi, 2\pi]$. Además, después que la fuerza cesa, el comportamiento del sistema tiende al reposo por efecto del amortiguamiento.

2.1.3- Una reflexión acerca de la Transformada de Laplace en la matemática escolar

En las secciones anteriores hemos presentado cómo se trata a la Transformada de Laplace en los cursos de ecuaciones diferenciales. Este tratamiento ocurre con una centración al objeto matemático, en donde, en primera instancia, se presenta su definición sin ningún preámbulo y después se exponen sus propiedades útiles para resolver una ecuación diferencial.

Como se pudo apreciar en los dos ejemplos anteriores, el procedimiento llevado a cabo para encontrar la solución de la ecuación diferencial con el método de la Transformada de Laplace está centrado en la algoritmia. Los pasos de este procedimiento se resumen en la siguiente figura:

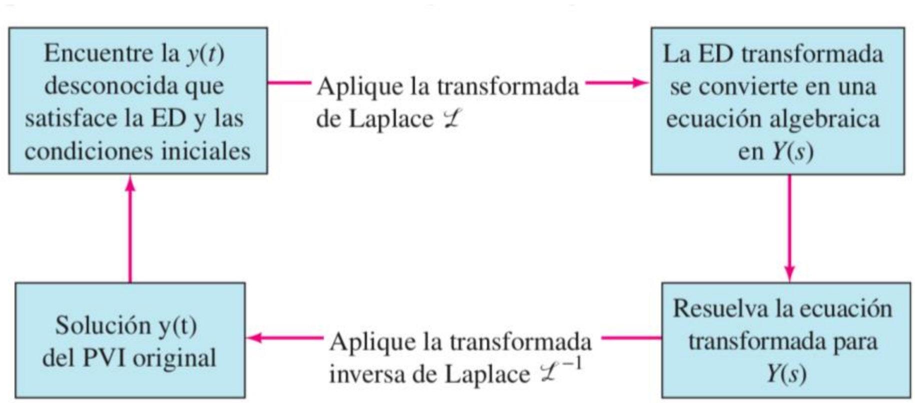


Figura 2.5. Procedimiento de aplicación de la Transformada de Laplace para resolver una ecuación diferencial (ED) con valor inicial (Zill y Cullen, 2006, p. 203)

Este tratamiento centrado en lo algorítmico no propicia el desarrollo de argumentos funcionales referentes a los comportamientos tendenciales presentes en las ecuaciones diferenciales; y más en particular, no favorece las argumentaciones sobre los comportamientos continuos y discontinuos.

Tal es el caso en el último ejemplo que presentamos: la solución $y(t)$ de la ecuación diferencial tiene un comportamiento continuo, y tiende a la gráfica de la función $f(t)$, a pesar que esta es discontinua. Sin embargo, el discurso matemático escolar de la Transformada de Laplace no propicia el reflexionar acerca de estos comportamientos presentes en la ecuación diferencial. Al contrario, este tratamiento oscurece un escenario de discusión que favorezca la justificación funcional que responda a usos del conocimiento matemático propios del cotidiano de las comunidades, por ejemplo, el cotidiano del ingeniero.

Por tal razón, ya que en la matemática escolar la Transformada de Laplace carece de significados (tanto de origen como significados del cotidiano), es necesario que se formule un marco de referencia de la Transformada de Laplace que favorezca las argumentaciones funcionales propias del cotidiano de las comunidades de conocimiento matemático. Nuestra investigación tiene ese objetivo: conformar un marco de referencia de usos de la Transformada de Laplace, cuando una comunidad de ingenieros electrónicos en formación diseña un sistema de control.

2.2- LA TEORÍA DE CONTROL EN LA INGENIERÍA

La teoría de control se basa en los fundamentos ingenieriles organizados para crear y mantener sistemas con comportamientos óptimos y deseados. Analiza la dinámica de todo tipo de sistemas y potencializa el control de estos. La teoría de control no está limitada a un área específica de la ingeniería, sino que es aplicable a toda área de esta profesión, incluso en áreas que a primera instancia no tendrían relación con la ingeniería (Ogata, 2010).

2.2.1- Los sistemas de control

Para responder a la pregunta ¿qué es un sistema de control?, se puede decir que en nuestra vida diaria tenemos muchos propósitos u objetivos que se requieren cumplir; por ejemplo, cada vez que nos bañamos regulamos la temperatura del agua de la ducha, a través de manipular la válvula hasta obtener la temperatura deseada; en las casas o edificios se requiere controlar la temperatura y humedad del espacio para tener un ambiente agradable. Kuo (1996) menciona que "la búsqueda para alcanzar tales objetivos requiere normalmente utilizar un sistema de control que implante ciertas estrategias de control" (p. 2).

Un *sistema de control* es el conjunto de elementos que funcionan de manera concatenada para proporcionar una salida o respuesta deseada (Ogata, 2010). Es decir, en un sistema de control existe cierto valor deseado y entonces se crea dicho sistema para que mediante sus elementos se logre ese valor.

Comúnmente, un sistema de control —al cual se le aplica una *señal* $r(t)$ a manera de *entrada* para obtener una respuesta o *salida* $\boldsymbol{y(t)}$ – puede representarse de la siguiente manera:

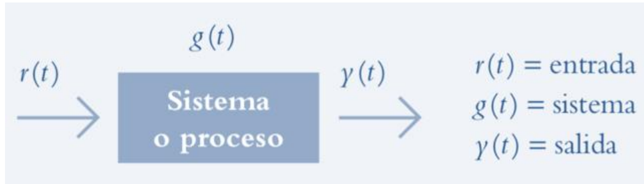


Figura 2.6. Relación de la entrada y salida de sistema de control

La salida que se obtiene del sistema se debe a la interacción de la entrada con el proceso que realiza el sistema. Para Hernández (2010) este vínculo entrada-salida es una relación de causa y efecto con el sistema, por lo que el proceso por controlar (también denominado planta) relaciona la salida con la entrada.

Algunas entradas que se aplican a los sistemas de control son: escalón, rampa e impulso. Estas se muestran en la siguiente figura:

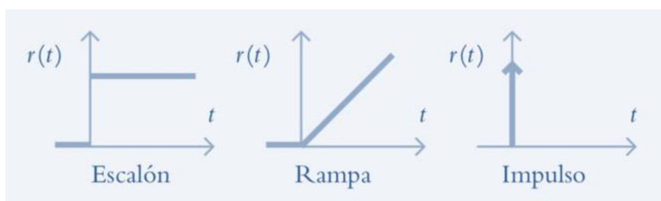


Figura 2.7. Algunas entradas aplicadas a los sistemas de control

La ***entrada escalón*** indica un comportamiento de salto (discontinuo) introducido al sistema de manera constante en el tiempo, mientras que la ***entrada rampa*** supone una referencia con variación continua, y la ***entrada impulso*** se caracteriza por ser una señal de prueba con magnitud muy grande y duración muy corta. La *función respuesta impulso* o *función de transferencia* es la representación matemática del sistema.

Estas entradas también pueden aplicarse al sistema a modo de excitación para anular o corregir ciertas perturbaciones, o para convertirse en una perturbación en sí. Ogata (2010) declara que una ***perturbación*** es una señal que tiende a afectar negativamente el valor de la salida de un sistema. Si la perturbación se genera dentro del sistema, se denomina interna; mientras que una perturbación externa, se genera fuera del sistema (convirtiéndose en una entrada).

Propósitos de un sistema de control

Los propósitos de un sistema de control se pueden resumir en los siguientes dos:

- Detectar un error
- Corregir el error

Dadas las perturbaciones que ocurren en un sistema, existen momentos en los cuales no se está logrando el comportamiento deseado. Es decir, está ocurriendo un ***error*** que es detectado por el sistema. Luego, ya que se detecta el error, el sistema es realimentado llevando a cabo ciertas ***acciones de control***, para corregir dicho error.

Esta ***realimentación*** se refiere a un procedimiento que lleva a cabo el sistema: en presencia de perturbaciones tiende a reducir la diferencia (***señal de error***) entre la salida del sistema y alguna entrada de referencia. Es decir, mediante la realimentación, el sistema tiene que corregir (controlar) la diferencia del comportamiento obtenido en la señal de salida con respecto a la de entrada. La realimentación que se lleve a cabo dependerá de la ***acción de control*** que se ejecute. Esta acción de control tiene que ver con el tipo de excitación que se aplique al sistema, dada la señal de error que se ha detectado (Hernández, 2010).

Para llevar a cabo esta realimentación, en la teoría de control se usan las ***funciones de transferencia,*** que caracterizan las relaciones de entrada-salida de los sistemas que se describen mediante ecuaciones diferenciales lineales. La ***función de transferencia*** de un sistema de control se define como el cociente entre la Transformada de Laplace de la señal de salida (función de respuesta) y la Transformada de Laplace de la señal de entrada (función de excitación), en donde las condiciones iniciales son cero (Ogata, 2010). Es en la función de transferencia donde se aplican los procedimientos para controlar el sistema.

$$Función\ de\ Transferencia\ G(s) = \frac{\mathcal{L}\{señal\ de\ salida\}}{\mathcal{L}\{señal\ de\ entrada\}}$$

O sea que es en la función de transferencia donde se lleva a cabo la realimentación del sistema, con el propósito de corregir el error. Es decir, se aplican acciones de control para reducir la diferencia entre la señal de salida y la señal de entrada, de tal manera que se obtenga el comportamiento deseado del sistema.

Diagrama de Bloques

Para mostrar el rol de cada componente en la teoría de control, por lo general se usa una representación denominada ***diagrama de bloques.*** Un diagrama de bloques de un sistema es una representación gráfica de los roles que lleva a cabo cada componente y el flujo de las señales. Tales diagramas muestran las relaciones existentes entre los diversos componentes. Ogata (2010) señala que, a diferencia de una representación matemática puramente abstracta, un diagrama de bloques tiene la ventaja de indicar de forma más realista el flujo de las señales del sistema real.

En la Figura 2.8 se muestra un ejemplo de un diagrama de bloques de un sistema en lazo cerrado. La salida $C(s)$ se realimenta al punto de suma, donde se compara con la entrada de referencia $R(s)$. La salida $C(s)$ se obtiene multiplicando la función de transferencia $G(s)$ por la entrada al bloque, $E(s)$.

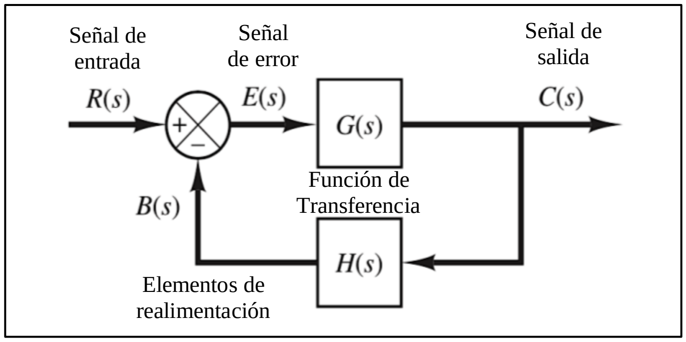


Figura 2.8. Diagrama de bloques de un sistema en lazo cerrado (Ogata, 2010)

Cuando la salida se realimenta al punto de suma para compararse con la entrada, es necesario convertir la forma de la señal de salida en la de la señal de entrada. Esta conversión se consigue mediante el elemento de realimentación, cuya función de transferencia es $H(s)$, como se aprecia en la Figura 2.8. El rol del elemento de realimentación es modificar la salida antes de compararse con la entrada.[6] En este ejemplo, la señal de realimentación que retorna al punto de suma para compararse con la entrada es $B(s) = H(s)C(s)$.

Principio ideal de los sistemas de control

En síntesis, al diseñar un sistema de control *existe un ideal*, el cual consiste en que la planta o proceso que se está controlando *tenga las características deseadas en los momentos que se determina* (Hernández, 2010). Es decir, dado que se tienen ciertos comportamientos deseados, entonces se diseña el sistema para controlar la reproducción de esos comportamientos deseados.

He aquí la categoría *reproducción de comportamientos*. Lo que se desea es reproducir un comportamiento óptimo, y para ello se diseña el sistema de control. Los requisitos impuestos sobre el sistema de control se dan como especificaciones de

[6] Para activar el elemento de realimentación, en la mayoría de los casos un sensor mide la salida de la planta del sistema; esta señal de salida que muestra el sensor se compara con la entrada y, si hay una diferencia, se genera la señal de error que ejecuta la acción de control para realimentar al sistema.

comportamiento (Ogata, 2010). Estas especificaciones de un sistema de control se deben dar antes de que comience el proceso de diseño, para que así se puedan reproducir de manera óptima los comportamientos deseados. Es decir, mediante el diseño del sistema de control, se quiere obtener comportamientos en la señal de salida que tiendan a los comportamientos especificados en las señales de entrada.

2.2.2– La temporalización: el rol del *dominio tiempo* en los sistemas de control

El tiempo es un dominio muy importante en el que se problematizan muchos fenómenos propios del cotidiano de la ingeniería. Por ejemplo, en un circuito eléctrico, un ingeniero estudia los movimientos de las corrientes o voltajes a través del tiempo. En un sistema de control, los fenómenos que se problematizan tienen comportamientos que se desarrollan o varían en el dominio tiempo (por ejemplo: fluidos, temperatura, corrientes eléctricas, entre otros). Además, se requiere que los fenómenos o estructuras que se controlan se comporten de una manera deseada en ciertos momentos de tiempo determinados. Cuando el sistema de control genera una señal de error (que no se está logrando el comportamiento deseado), se ejecuta una acción de control para corregir el error en el menor tiempo posible (Ogata, 2010).

Este rol del tiempo en el diseño de un sistema se refiere a la ***temporalización***, que consiste en controlar en un dominio temporal los fenómenos o comportamientos, es decir, "traerlos" de un dominio desconocido a uno donde se puedan ejecutar acciones de control: el dominio temporal (Hernández, 2010).

Según la Real Academia Española (2014), *temporalizar* se refiere a "convertir lo eterno o espiritual en temporal, o tratarlo como temporal". Esto es algo que se problematiza en un sistema de control: los comportamientos de los fenómenos que ocurrirán en todo el tiempo (en "lo eterno"), se tratan o se controlan en lo temporal (en tiempos determinados), para que el sistema funcione de la manera deseada.

Otra connotación de la temporalización en los sistemas de control tiene que ver con que, cuando el ingeniero diseña el sistema, se adelanta a momentos (de tiempo) futuros, en donde ocurrirán fenómenos que perturbarán al sistema. Es decir, el tratamiento del tiempo no es lineal; no se considera al tiempo solo como un dominio donde ocurren fenómenos y no se puede intervenir en estos. Por el contrario, tal como menciona Hernández (2010), en el diseño del sistema de control el ingeniero programa con antelación lo que quiere que el sistema haga, dados los fenómenos de perturbación que ocurrirán. Es decir, se programan con antelación diferentes acciones para que se ejecuten en momentos (de tiempo) determinados, de manera tal que el sistema controle los comportamientos en el transcurso del tiempo.

En otras palabras, el rol del tiempo como temporalización, permite que los mecanismos del sistema de control se construyan con antelación para que se activen en ciertos momentos futuros donde ocurrirán errores. Esto posibilita que el ingeniero que diseña el sistema de control "se adelante en el tiempo", para controlar los efectos de los fenómenos de perturbación que van a ocurrir en esos momentos futuros, de tal manera que *el funcionamiento del sistema sea óptimo en todo momento.*

Además, en el funcionamiento de un sistema de control es necesario interpretar las señales en el dominio temporal (Ogata, 2010). Para ello, la Transformada inversa de Laplace brinda ese tránsito, de tal manera que transforma las señales del sistema del dominio de Laplace al dominio temporal. Esta interpretación en el dominio temporal permite entender los comportamientos de tales señales, y determinar la obtención de las características deseadas a través del sistema de control.

2.2.3– ¿Qué problematiza la Transformada de Laplace en los sistemas de control?

Como se puede apreciar en la Figura 2.8, en un diagrama de bloques de un sistema de control las señales son expresadas mediante sus Transformadas de Laplace (señal de entrada, señal de salida, función de transferencia, entre otras). Estos elementos permiten que el sistema funcione adecuadamente para reproducir los comportamientos deseados en todo momento (*reproducción de comportamientos de manera continua*).

Tal como se dijo, la Transformada de Laplace está expresada en la función de transferencia de un sistema de control. La función de transferencia $G(s)$ se define como la relación del cociente de la Transformada de Laplace de la señal de salida respecto a la Transformada de Laplace de la señal de entrada de un sistema:

$$Función\ de\ Transferencia \qquad G(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$$

Según Ogata (2010), en el funcionamiento de un sistema de control, cuando se busca que la señal de salida se comporte como la señal de entrada, se hace uso de la realimentación mediante la Función de Transferencia (definida mediante la Transformada de Laplace). Es decir, la función de transferencia $G(s)$ es la que actúa para llevar a cabo los procedimientos de realimentación necesarios para obtener el comportamiento deseado del sistema.

En todo este proceso, la Transformada de Laplace está problematizando las características de los comportamientos del sistema, en el dominio del tiempo. Hernández (2010) señala que cuando un sistema se perturba en ciertos momentos y genera una señal de error, las acciones de control ejecutadas en la función de transferencia (definida mediante la TL) estabilizan al sistema, es decir, controlan su comportamiento en el tiempo. De esta manera, la Transformada de Laplace logra que el comportamiento reproducido en el sistema de control tienda al comportamiento deseado, en *todo momento*. Es decir, logra que esta *reproducción sea de manera continua.*

Capítulo 3:
Marco Teórico

3.1- REDISEÑAR EL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR. UN DESAFÍO

La problemática que hemos planteado en el primer capítulo, parte de haber identificado al discurso matemático escolar (dME) como el meollo de la cuestión, al cual se le ha reconocido como un sistema de razón que norma y legitima las prácticas y representaciones sociales de los agentes del sistema educativo (Soto, 2010; Soto y Cantoral, 2014). Esto ha provocado que la matemática que se enseña y aprende en la escuela no tenga una relación recíproca con los usos del conocimiento matemático del cotidiano. En la matemática escolar no existe un *marco de referencia* que responda a la justificación funcional que demandan otros dominios de conocimiento; por lo tanto, su construcción es necesaria para poder crear esa relación recíproca (Cordero, 2016a; 2017).

Ante tal problemática es necesario cambiar el foco de atención, de tal manera que se trastoque la matemática escolar: se debe pasar de la centración del objeto matemático a la valorización de los usos del conocimiento matemático. El discurso matemático escolar (dME) no favorece la construcción del conocimiento matemático y, consecuentemente, obstaculiza la transformación del que aprende, pues niega la existencia de una pluralidad epistemológica del conocimiento y por lo tanto no permite cuestionar ni trastocar la matemática escolar. De esta manera, el dME es hegemónico, pues valida una epistemología que está centrada en los objetos matemáticos, pero se olvida del conocimiento matemático del cotidiano de la gente (Cordero, Gómez, Silva-Crocci y Soto, 2015; Cordero, 2016a).

Nuestra investigación lleva consigo el propósito de revelar los usos del conocimiento matemático de una comunidad de ingenieros, atendiendo la justificación funcional que desarrolla esta comunidad en el quehacer de su cotidiano en una situación específica. Por tal razón, tenemos como base a la *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa*, la cual desde su principio se ha caracterizado por estar interesada en explicar el enigma de la construcción social del conocimiento matemático y su difusión institucional (Cantoral, 2013).

Desde esta perspectiva teórica se ha reconocido la necesidad de *rediseñar el discurso matemático escolar* (RdME), con base en una epistemología centrada en la construcción social del conocimiento matemático y no en una epistemología fijada en los objetos. Esto no quiere decir olvidarse del objeto matemático, sino, dotarlo de un entorno de usos y significados. De esta manera, la epistemología de este *nuevo discurso matemático escolar* —centrado en el uso del conocimiento matemático— se caracterizará por favorecer la pluralidad epistemológica; será funcional y transversal a diferentes objetos, dominios, situaciones y escenarios (Cordero, 2016a; 2016b; 2017).

3.2– PROGRAMA SOCIOEPISTEMOLÓGICO SUJETO OLVIDADO Y TRANSVERSALIDAD DE SABERES

El discurso matemático escolar (dME) es nocivo, pues ha soslayado un actor principal en la construcción de conocimiento matemático: el cotidiano (*sujeto olvidado*). Es decir, ha soslayado la realidad de los sujetos, lo habitual de los escenarios donde este se sitúa y donde expresa usos rutinarios (Cordero, 2016a).

La matemática escolar (ME) debe responder a los usos y significados de la gente e incorporarlos en la enseñanza de la matemática, reconociendo que las *prácticas sociales* son las generadoras de conocimiento matemático. Cordero (2016b), considera que el constructo *practica social*, en la evolución y desarrollo de la Teoría Socioepistemológica, se ha dotado de un significado tal que valora al *sujeto olvidado*, que es de vital importancia recuperar. De esta manera se considera no solo una epistemología —la dominante—, sino que también se reconoce el conocimiento matemático que la gente produce y usa en su cotidiano.

Con los elementos antes expuestos, se ha formulado el programa socioepistemológico *Sujeto Olvidado y Transversalidad de Saberes (SOLTSA)* (Cordero, 2016a, 2016b). El propósito principal de este programa es revelar los usos del conocimiento matemático y sus resignificaciones en las comunidades de conocimiento matemático de la gente: en la escuela, en la profesión y en la ciudad (ver Figura 3.1). Este programa se desarrolla a través de dos líneas de trabajo simultáneas, que se presentan a continuación:

- *Resignificación del conocimiento matemático:* en esta línea de trabajo se problematizan las categorías de conocimiento matemático que suceden en las comunidades, entre diferentes dominios de conocimiento que obligadamente entran en juego: la matemática escolar, el campo disciplinar y el cotidiano de la comunidad.
- *Impacto educativo:* aquí se problematiza el impacto que tienen las resignificaciones del conocimiento matemático en la escuela. Se conforman los multifactores y estadios que coadyuvan a la alianza de calidad de la docencia de matemáticas. Los multifactores son los elementos que contribuyen a lograr un resultado pero que han estado ausentes y es necesario recuperarlos.

Nuestro proyecto de investigación se ubicó en la primera línea de trabajo, pues el propósito se encaminó a revelar las resignificaciones del conocimiento matemático que suceden en una situación específica de una comunidad de ingenieros en un escenario escolar.

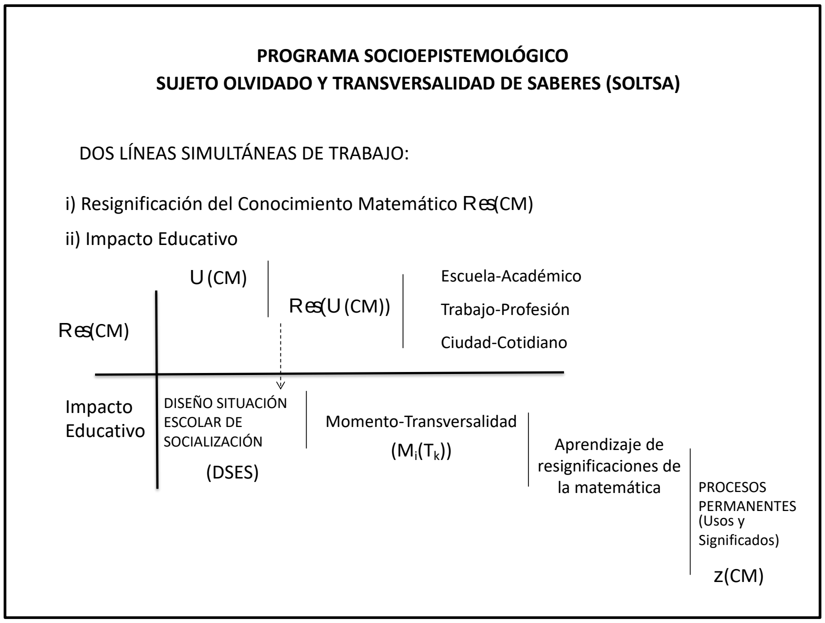


Figura 3.1. Programa Socioepistemológico Sujeto Olvidado y Transversalidad de Saberes (SOLTSA) (Cordero, 2017)

En el programa SOLTSA, mas que estudiar la matemática en sí (los objetos matemáticos), se estudia la *función* del conocimiento matemático. El interés está en la valorización de los usos del conocimiento matemático en situaciones específicas, lo que significa darle un estatus relevante a la matemática funcional, en un nivel horizontal con la matemática escolar.

Los resultados de investigación dentro del programa SOLTSA han contribuido en la conformación de un *marco de referencia* que favorece los usos del conocimiento matemático de las comunidades. El significado de estos resultados, derivan el planteamiento que no es suficiente preguntarse ¿qué es el conocimiento matemático?, sino también ¿qué matemática? El cuestionarse lo anterior, conlleva considerar la pluralidad epistemológica y su transversalidad de saberes (Cordero, 2017).

3.2.1- Marco de referencia

Con estos elementos (la pluralidad epistemológica, horizontalidad y transversalidad de saberes) se conformará el *marco de referencia* (MR), que exprese el uso del conocimiento matemático desde el cotidiano del ciudadano, y contribuya al rediseño del discurso matemático escolar.

Funcionamiento y forma del uso. Su debate y resignificación

Para la conformación del MR, se requiere estudiar al *uso*, caracterizándolo por su *funcionamiento* y su *forma*. El funcionamiento del uso será aquella función orgánica de una situación, que se manifiesta por las *tareas* que componen la situación, y la forma del uso será la clase (tipo) de esas *tareas*. El *funcionamiento* y la *forma* son un binomio inherente al *uso*, de modo que el primero se expresa en las ejecuciones, acciones u operaciones que se desarrollan con la situación, mientras que la *forma* son las maneras cómo se llevan a cabo las tareas o ejecuciones. Las tareas pueden ser actividades, acciones, ejecuciones y alternancias de dominios. Cuando la alternancia de tareas sucede, se genera una nueva función orgánica, que debatirá con las formas de los usos. A este acto de uso se le llamará *resignificación de usos* (Cordero y Flores, 2007; Cordero, Cen y Suárez, 2010).

En este marco de referencia se conjugan varias relaciones, conformando un sistema epistemológico complejo. Una de estas relaciones se enfoca a lo que pudiera ser el conocimiento matemático (CM) institucional, cuya base son los usos (U(CM)) en la matemática escolar, en otros dominios y en el cotidiano, donde se resignifican (Res) al debatir entre sus funcionamientos (Fu) y sus formas (Fo), al paso de la vivencia escolar, del trabajo y de la vida de la ciudad (ver Figura 3.2). La resignificación de los usos es una categoría de conocimiento matemático ζ(CM); es decir, una matemática funcional que expresa un proceso que trastoca y transforma a la matemática escolar y por ende al dME. En este sentido, lo institucional hará que la categoría ζ(CM) se desarrolle y permanezca, se acepte como producto material social, cuyo aprendizaje debe favorecerse (Cordero, 2016a; 2017).

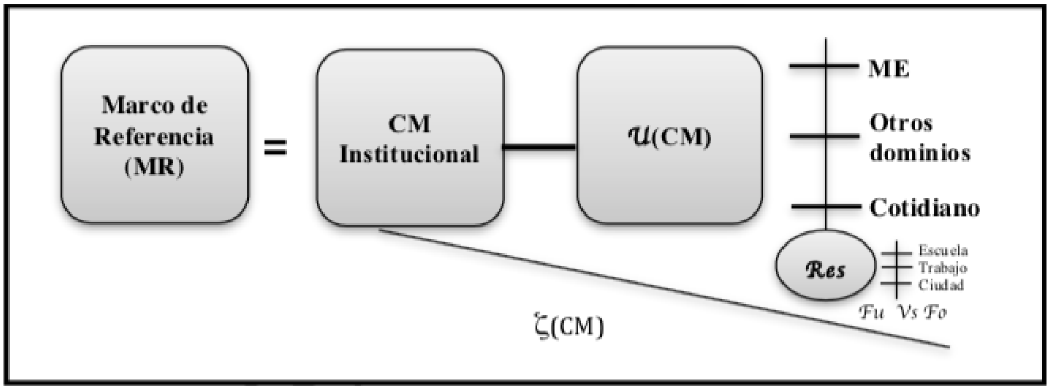


Figura 3.2. Procesos de socialización del conocimiento. El cotidiano y lo funcional (Cordero2016a)

Como ya se dijo, este marco de referencia reconocerá la funcionalidad a través de la transversalidad, y la pluralidad del conocimiento matemático (los dominios multidisciplinares de conocimiento), todo en situaciones específicas. De esta manera, en una dialéctica entre la matemática escolar y el cotidiano, ambos conocimientos se mezclan (se convierten en una sola cosa); es decir, se transforman en una unidad de saberes, de conocimientos en uso de la gente. Esta transformación descentraliza al objeto, y los usos son resignificados entre situaciones y entre escenarios: *el académico-escolar; la profesión-trabajo; y el cotidiano-ciudad* (Cordero, 2016a; 2016b).

3.3- UNA CATEGORÍA DE CONOCIMIENTO MATEMÁTICO: CATEGORÍA DE MODELACIÓN

Los constructos presentados en la sección anterior conforman una categoría del conocimiento matemático denominada *categoría de modelación* ζ(Mod), la cual es un proceso que acompaña a la pluralidad epistemológica y a la transversalidad de saberes, que definen la funcionalidad de las comunidades de conocimiento matemático que suceden en la escuela, en el trabajo y en la ciudad. De esta manera, la ζ(Mod) es algo más robusto que una representación de la realidad o que una aplicación matemática a una situación real (Cordero, 2017).

Esta ζ(Mod) emerge en las situaciones del cotidiano de diversas comunidades de conocimiento matemático, por ejemplo: ingenieros químicos industriales (Pérez-Oxté, 2015), ingenieros biónicos (Mendoza y Cordero, 2018), ingenieros mecatrónicos (Cordero, del Valle y Morales, 2019), docentes de matemáticas (Medina-Lara, 2019), modeladores biomatemáticos (Mota, 2019), entre otras; sin embargo, no es valorizada por el discurso matemático escolar.

3.3.1- El principio de la categoría de modelación como variedad

Ya que la ζ(Mod) es un conocimiento funcional de la matemática, implica valorarla a través de entornos de sus relaciones recíprocas con la realidad. Su estructura está compuesta por los usos del conocimiento matemático y por las resignificaciones de esos usos, en situaciones específicas. Tales situaciones son parte de ese entorno de relaciones recíprocas que suceden en comunidades de conocimiento matemático (CCM) (Cordero, 2017). De esta manera la ζ(Mod) responde a la realidad de las CCM y, al incorporarse en el medio escolar, genera la relación recíproca entre la realidad y la matemática escolar, la cual es la problemática que se atiende.

Esta categoría de modelación se distingue de otras concepciones de modelación matemática en la educación. Por ejemplo, al valorizar los usos del conocimiento matemático de la realidad, la ζ(Mod) considera que el conocimiento no es preexistente a la realidad, tampoco la realidad antecede al conocimiento. Lo que se valoriza es el uso del conocimiento matemático que se construye en la realidad. Es decir, no hay conocimiento sin realidad y no hay realidad sin conocimiento; es un binomio inseparable.

Este es un principio de la ζ(Mod), que la distingue de la modelación matemática. La variedad de esta categoría está ligada a la realidad, ya que responde al conocimiento propio de la realidad. A partir de esto, Cordero (2017) formula la variedad de la ζ(Mod) de la siguiente manera:

Primero, dado un principio (P) de la modelación matemática, donde P es el ciclo que conecta el mundo real y la matemática. Entonces, la variedad en la ζ(Mod) está basada en un principio P' de P. Sin embargo, P' es lo funcional de la relación recíproca entre la matemática y el cotidiano. Este P' genera la categoría de modelación ζ(Mod), es decir, los usos del conocimiento matemático de la gente (Codero, 2017).

Para contrastar, veamos cómo es formulada, en términos generales, la modelación matemática:

a. El principio P asume la existencia de un conocimiento matemático (M) y de una existencia de la realidad (R). Dado R existe un conocimiento matemático específico M' que "matematiza" R: $M'(R)=R'$, donde R' es una interpretación de R.
b. $M'(R)$ es un objeto matemático: es el conocimiento que genera la modelación matemática.

Por otro lado, la variedad de la ζ(Mod) es formulada de la siguiente manera:

1. Ahora, P' es funcional; entonces, no preexisten R ni M.
2. Lo funcional es el uso de la matemática de la gente, U(CM).
3. La gente vive entre situaciones diversas, S_k
4. En el tránsito entre S_k, suceden epistemologías E_j (pluralidad) y transversalidades T_n (resignificaciones).

5. Las S_k podrían estar sobre dominios de conocimiento D_m y en las alternancias entre los D_m.
6. La categoría de modelación es la resignificación de usos, Res(U(CM), cuando sucede un tránsito entre S_k y S_m, incluso en alternancia de dominios. Este es el conocimiento que genera ζ(Mod).

La categoría ζ(Mod) se compone de dos ejes: la institucionalización y la transversalidad de saberes, donde suceden situaciones S_{ij}, dominios D_j y alternancias de escenarios: el académico-escuela, la profesión-trabajo y el cotidiano-ciudad. (Cordero, 2017, p. 21)

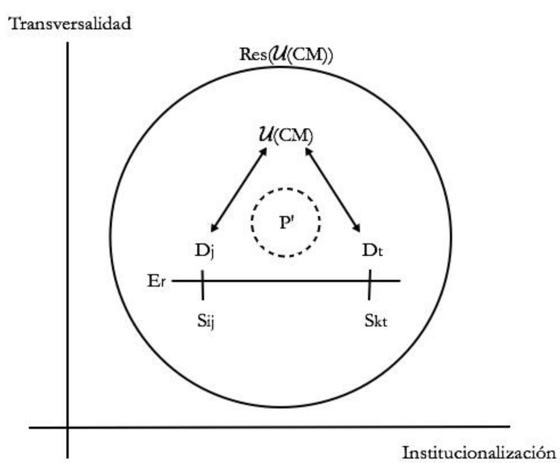


Figura 3.3. Marco del saber matemático de la ζ(Mod) (Cordero, 2017)

3.3.2- Epistemología de lo matemático en las situaciones específicas

Los usos del conocimiento matemático y sus resignificaciones suceden en situaciones específicas del cotidiano de las comunidades. Estos usos que emergen en el cotidiano de las comunidades permiten reconocer el carácter plural y transversal del conocimiento matemático, dado su transito en dominios, escenarios y situaciones específicas. Los resultados de investigación dentro de la Teoría Socioepistemológica han provisto evidencia, que ha permitido formular estructuras epistemológicas referentes a la matemática funcional correspondiente a situaciones específicas de las comunidades de conocimiento matemático.

Las situaciones que se han reportado y configurado en la *Epistemología de lo Matemático* conforman un marco epistemológico de referencia que la matemática escolar ha soslayado, pero que desde la Teoría Socioepistemológica se recuperan y atienden. Estas situaciones son parte de un entorno de relaciones recíprocas que suceden en comunidades de conocimiento matemático (CCM). Cada situación se conforma por elementos sistémicos que construyen lo matemático: significaciones, procedimiento, e instrumento, que derivan la argumentación (resignificaciones) de la situación en cuestión (Cordero, 2017). En la siguiente tabla se encuentran las *situaciones* de las que se ha dado evidencia, que explican el proceso de construcción de *lo matemático*, en el cotidiano de las comunidades de conocimiento.

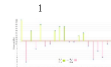
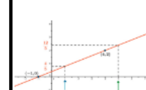
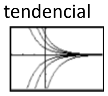
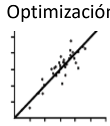
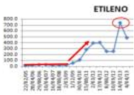
	SITUACIONES					
CONSTRUCCIÓN DE LO MATEMÁTICO	**VARIACIÓN**	**TRANSFORMACIÓN**	**APROXIMACIÓN**	**SELECCIÓN**	**PONDERACIÓN**	**PERIODIZACIÓN**
Significaciones	Flujo Movimiento Acumulación Estado Permanente	Patrones de comportamiento gráficos y analíticos	Límite Derivación Integración Convergencia	Patrón de adaptación	Distribución de comportamiento	Reproducción de comportamientos
Procedimientos	Comparación de dos Estados	Variación de parámetros	Operaciones lógico formales (cociente)	Distinción de cualidades	Equiparar	Comparación de periodos
Instrumentos	Cantidad de variación continua $f(x+h)-f(x)=\alpha h$ $\alpha=f'(x)$	Instrucción que organiza comportamientos $y=Af(Bx+C)+D$	Formas analíticas $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$	Lo estable	Punto de equilibrio $\sum_{1}^{n} x_i-\bar{x}=0$ 	Interpolación 
Argumentación/ Resignificaciones	Predicción $E_0+Variación=E_f$	Comportamiento tendencial 	Analiticidad de las funciones $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+f''(x)\frac{h^2}{2!}+\dots$	Optimización 	Compensación 	Anticipación 

Tabla 3.1. Epistemología de lo matemático (Cordero *et al.*, 2020)

Construcción de lo matemático en la situación específica de transformación

En nuestro estudio, la problematización que la comunidad CCM(IE_F) llevó a cabo en la situación del diseño del sistema de control, corresponde a la construcción de lo matemático en la situación de transformación. En esta situación, las *significaciones* que se ponen en funcionamiento son los patrones de comportamiento gráficos y analíticos; de estas significaciones se derivan *procedimientos*, como la variación de parámetros; los *instrumentos* sobre los que se realizan los *procedimientos* son las instrucciones que organizan comportamientos. Todo esto, en conjunto, genera la *argumentación* de la situación de transformación: el *Comportamiento Tendencial / Reproducción de Comportamientos*.

Construcción de lo matemático	Situación de Transformación
Significaciones	Patrones de comportamiento gráficos y analíticos
Procedimientos	Variación de parámetros
Instrumento	Instrucción que organiza comportamientos
Argumentación	Comportamiento tendencial / Reproducción de comportamientos

Tabla 3.2. Construcción de lo matemático en la situación de transformación (Cordero, 2017)

3.3.3- Categoría Reproducción de Comportamientos

En palabras llanas, la *categoría reproducción de comportamientos* se refiere al siguiente planteamiento: dado un comportamiento requerido, se llevan a cabo procedimientos o acciones sobre un instrumento, con el propósito de obtener el comportamiento que se requiere. Es decir, el comportamiento obtenido tiende a comportarse como el requerido.

Esto alude a la *categoría comportamiento tendencial de las funciones* ζ(ctf), la cual consiste en un "argumento que establece relaciones entre funciones y está compuesto por una colección coordinada de conceptos y situaciones del Cálculo donde se discuten aspectos globales de variación" (Cordero, 1998, p. 56). Esta categoría no corresponde a operaciones lógicas de la matemática escolar; sino que es más cercana a la construcción social del conocimiento matemático de las comunidades, por ello corresponde más bien a una categoría de un marco funcional. En la ζ(ctf), la gráfica de la función es un comportamiento que se mira en forma completa. No se percibe explícitamente un proceso de la función previo a la gráfica, sino que la función y su gráfica se consideran las actividades por realizar (Cordero, 1998).

Diversos resultados de investigación reportan la emergencia de la categoría *reproducción de comportamientos* en diferentes situaciones del cotidiano de comunidades de conocimiento matemático, donde el foco de atención no está en resolver una ecuación, sino en reproducir un comportamiento con tendencia. Por ejemplo, Cordero *et al.* (2016) reportan el uso del comportamiento con tendencia en las ecuaciones diferenciales lineales, como una argumentación gráfica. Aquí el comportamiento tendencial de las soluciones favorece métodos cualitativos y establece relaciones entre las funciones que componen la ecuación diferencial. Uno de los argumentos que emerge en estos casos, consiste en que "una ecuación diferencial lineal es una relación entre funciones que determina comportamientos" (Cordero *et al.*, 2016, p. 40).

En esta misma dirección, Cordero y Solís (2001) afirman que las ecuaciones diferenciales lineales son modelos de estabilidad, que fueron construidos para que una función $y(x)$ tendiera a comportarse como otra función $f(x)$ establecida, salvo con algunas variaciones $y', y'', \dots y^n$. En estos escenarios y en otras situaciones, las argumentaciones funcionales que emergen al tratar una ecuación diferencial $y'' +$

$y' + y = f$, se refieren a que $\boldsymbol{y}$ reproduce un comportamiento similar a f. De esta manera la ecuación diferencial se resignifica como una *instrucción que organiza comportamientos.*

Otro aspecto importante, consiste en que la categoría *reproducción de comportamientos* emerge en comunidades de conocimiento matemático, por ejemplo, en ingenieros biónicos cuando trabajan situaciones de sistemas de control (Mendoza y Cordero, 2018). Esta comunidad, al involucrarse en la situación específica del sistema de control, no centra su atención en los procesos algorítmicos matemáticos, por el contrario, su interés está en los comportamientos tendenciales del sistema. El propósito es que, dado un comportamiento deseado en el sistema de control, se reproduzca ese comportamiento.

De esta manera, esta categoría expresa usos del conocimiento matemático, pues emerge en las situaciones específicas del cotidiano de las comunidades, y responde a una *justificación funcional*, a aquello que es útil en el quehacer escolar, académico o profesional de la gente.

3.4– MODELO DE COMUNIDAD DE CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

Quienes participan en una situación específica son comunidades de conocimiento; es decir, en la construcción del conocimiento matemático subyace la consideración de *ser con otro*. Esto conlleva formular un constructo de participante que esté cercano a comunidad con relación al conocimiento. Es decir, si hay conocimiento entonces existe una comunidad que lo construye (Cordero, 2016a).

De esta manera, la consideración que tenemos de comunidad de conocimiento matemático (CCM) posee elementos que caracterizan lo propio de lo que es comunidad, es decir su naturaleza. No cualquier conjunto de personas agrupadas componen una comunidad; se debe distinguir a la comunidad de conocimiento de la individualidad, de lo público y de la universalidad. En este sentido, Cordero (2011; 2016a) reconoce tres elementos que constituyen una comunidad:

- *Reciprocidad*: se refiere a que el conocimiento de la comunidad se genera por la existencia de un compromiso mutuo.
- *Intimidad*: el uso del conocimiento matemático es propio y privado, no es público.
- *Localidad:* El conocimiento local se da cuando existe una coincidencia de ideas, una jerga disciplinar, trabajo u oficio, intereses, lo regional, entre otros.

Estos tres elementos nos permiten separar lo individual, lo público y lo universal, e identificar lo propio de la comunidad. De ahí la importancia de formular el constructo *Comunidad de Conocimiento Matemático* como una triada (reciprocidad, intimidad y localidad). Dadas las características propias de la construcción de conocimiento de la comunidad, esta se distingue de otras comunidades por dos ejes transversales: la institucionalización y la identidad. El primero es un referente que señala la tradición, la cultura y la historia en el seno de la comunidad; el segundo eje requiere de tres momentos (legitimidad, resistencia y proyecto) que permiten apreciar el uso del conocimiento matemático que distingue a la comunidad (Cordero y Silva-Crocci, 2012; Cordero, 2016a).

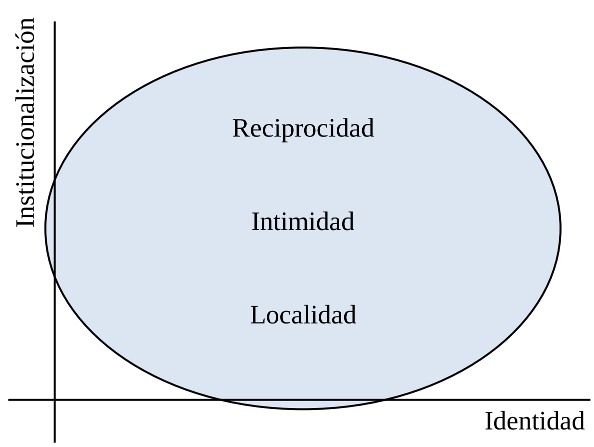


Figura 3.4. Modelo de comunidad de conocimiento matemático (Cordero, 2011; 2016a)

Este constructo se constituyó de vital importancia en nuestra investigación ya que, al tomar en cuenta sus elementos, permitió atender la justificación funcional en el quehacer cotidiano de la comunidad en la que hicimos inmersión, de tal manera que se revelaran los usos del conocimiento matemático que emergen en la situación específica de dicha comunidad.

Capítulo 4:
Marco Metodológico

4.1- BASES PRINCIPALES DE LA INVESTIGACIÓN

El mundo de la investigación es como un edificio en construcción, el cual tiene una base como cimiento, sobre la que se coloca una estructura que está compuesta de varias partes. En el primer capítulo mencionamos que nuestra investigación tiene sus bases en trabajos de investigación desarrollados dentro del programa socioepistemológico Sujeto Olvidado y Transversalidad de Saberes, específicamente en dos investigaciones: la investigación doctoral reportada por Mendoza y Cordero (2018) y en la tesis de doctorado de Miranda (2001).

La primera investigación da cuenta de la emergencia de la categoría Reproducción de Comportamientos en dos dominios de conocimiento: la obra matemática *The general problem of the stability of motion* de *Lyapunov*, y una comunidad de Ingenieros Biónicos en una situación específica de diseño de sistemas de control.

Esta epistemología, al tomarla como base de nuestra investigación, y dada la revisión de literatura especializada (libros de teoría de control de varios autores: Hernández (2010), Kuo (1996) y Ogata (2010)), nos permitió identificar que en los sistemas de control ocurren comportamientos que son modelados típicamente por funciones discontinuas; pero la reproducción de estos comportamientos se interpreta de manera continua.

Además, en esta situación específica —tal como lo refiere la teoría de control— se vislumbra un elemento que siempre está presente en los sistemas de control: la Transformada de Laplace. Este elemento define a la *función de transferencia* $G(s)$, la cual expresa la ecuación diferencial que relaciona la Transformada de Laplace de la señal de salida respecto a la Transformada de Laplace de la señal de entrada (Kuo, 1996). En la epistemología reportada por Mendoza y Cordero (2018), se muestra que la *función de transferencia* $G(s)$ es la que actúa para llevar a cabo los procedimientos de realimentación necesarios para obtener el comportamiento deseado del sistema.

Esto llevó a cuestionarnos cuales serían las argumentaciones funcionales referentes a la Transformada de Laplace que el ingeniero desarrolla en los sistemas de control, y sobre los significados que esta transformada tiene en la reproducción continua a partir de comportamientos discontinuos.

Encaminados en este sentido, consideramos la investigación doctoral de Miranda (2001), quien presenta una epistemología de la Transformada de Laplace, basada en los significados de origen y evolución de esta transformada (ver sección 1.3.2). Esta epistemología hace referencia a la categoría *reproducción de comportamientos*, ya que el rol que la Transformada de Laplace tuvo en su origen y desarrollo siempre se refirió a la intención de *obtener comportamientos que tuviesen cierta forma* para determinar la solución de ecuaciones diferenciales; y entonces se buscaban los mecanismos para obtener esos comportamientos, donde la Transformada de Laplace logra este fin. De esta manera, la Transformada de Laplace permite significar comportamientos tendenciales.

Estos dos estudios, permitieron a nuestra investigación delimitar una situación específica (diseño de sistemas de control) y la resignificación de un objeto matemático (la Transformada de Laplace). De tal manera que nos propusimos dar evidencia de los factores que relacionan funcionalmente los comportamientos discontinuos y comportamientos continuos en un sistema de control, y cómo estos factores resignifican a la Transformada de Laplace.

Es decir, lo que hicimos fue revelar la *reproducción continua de comportamientos discontinuos*. Como resultado, se constituyó una *epistemología de usos* de la Transformada de Laplace, construida a partir de los elementos que emergieron en la comunidad de ingenieros electrónicos cuando diseñan un sistema de control.

4.2– LA CONVENIENCIA DE LA INVESTIGACIÓN CUALITATIVA

Al considerar a la investigación como medio para conocer la realidad, se precisa de una metodología que, según el objetivo de investigación, pueda ofrecernos luz para acercamos a esa realidad. En nuestra investigación, dado el objetivo que nos propusimos alcanzar, convino tomar un enfoque cualitativo, ya que este nos permitiría estudiar de una forma adecuada la realidad del conocimiento que se construye en la comunidad que haríamos inmersión.

Respecto a esta metodología, Martínez (2007) menciona que se caracteriza por valorar la importancia de la realidad como es vivida y percibida por el humano:

> [el enfoque cualitativo] rechaza la pretensión de cuantificar toda la realidad humana; en cambio, valora la importancia que tienen el contexto, la función y el significado de los actos humanos. …valora también y, sobre todo, la importancia de la realidad como es vivida y percibida por el humano: sus ideas, sentimientos y motivaciones. (p. 8)

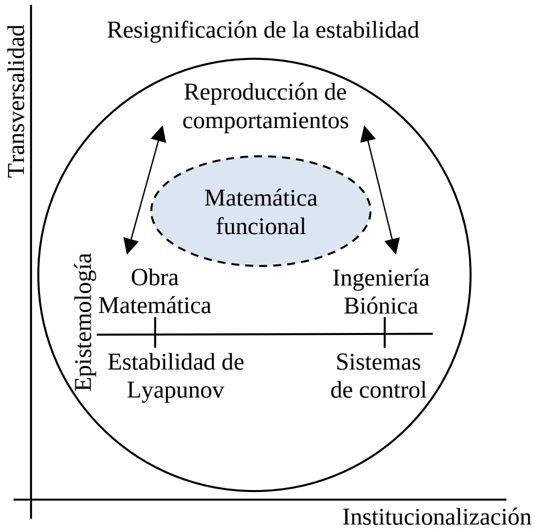
Esto es coherente con nuestra postura acerca del conocimiento matemático y el interés en su valorización, al tomar en cuenta los contextos donde el conocimiento se construye y adquiere significados, dada la función que este tiene en el cotidiano de las comunidades.

4.3– RUTA METODOLÓGICA DE LA INVESTIGACIÓN

En el tránsito que llevamos a cabo desde la conformación del propósito de la investigación hasta la obtención de los resultados, tomamos una ruta metodológica que nos permitió estudiar la matemática funcional en tres momentos:

- Primer momento: reconocimiento de la categoría *reproducción de comportamientos*
- Segundo momento: conformación de la base epistemológica
- Tercer momento: inmersión en la comunidad de conocimiento matemático.

A continuación, presentamos la Figura 4.1 que muestra esta ruta metodológica y después describimos cada uno de los momentos.



Marco de la categoría reproducción de comportamientos

Primer momento

Reconocimiento de la categoría reproducción de comportamientos

Construcción de lo matemático	Situación de Transformación
Significaciones	Patrones de comportamiento gráfico y analíticos
Procedimientos	Variación de parámetros
Instrumento	Instrucción que organiza comportamientos
Argumentación/ Resignificación	Comportamiento tendencial / Reproducción de Comportamientos

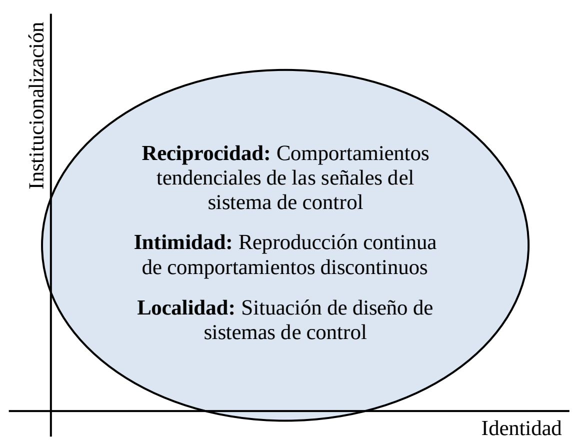
Situación núcleo de transformación

Segundo momento

Conformación de la base epistemológica

Tercer momento

Inmersión en la CCM para evidenciar la emergencia de la categoría



Comunidad de conocimiento matemático (CCM)

Figura 4.1. Ruta metodológica de la investigación

4.3.1- Primer momento: reconocimiento de la categoría reproducción de comportamientos

El trabajo de investigación reportado por Mendoza y Cordero (2018) da cuenta de la emergencia de la categoría reproducción de comportamientos en dos dominios: la obra matemática y la ingeniería biónica. De esta manera se reveló una epistemología de la estabilidad, que expresa la pluralidad del conocimiento matemático cuando suceden transversalidades en diversos dominios y situaciones del cotidiano. Ver Figura 1.3.

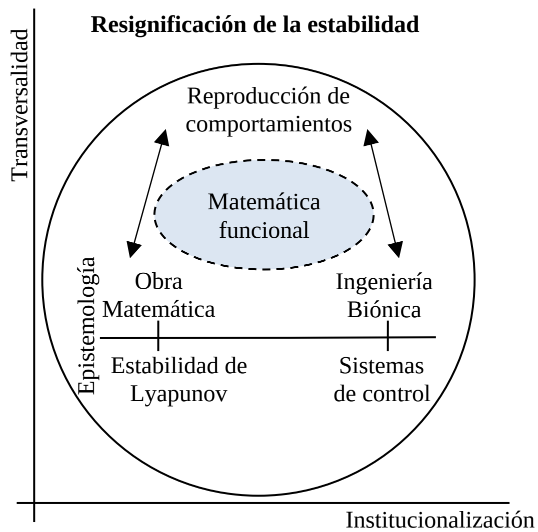


Figura 1.3. Marco de la categoría reproducción de comportamientos (Basado en Mendoza y Cordero, 2018)

Lo anterior nos permitió reconocer la epistemología de usos: categoría *reproducción de comportamientos*; la cual se resignifica cuando sucede un tránsito entre situaciones (la estabilidad de Lyapunov y los sistemas de control) en alternancia de dominios (la obra matemática y la ingeniería biónica).

En nuestra investigación, nos interesamos en revelar las resignificaciones de la categoría *reproducción de comportamientos* en otro dominio de conocimiento;

específicamente, dar evidencia de los factores funcionales que relacionan los comportamientos discontinuos y comportamientos continuos, y cómo estos factores resignifican a la Transformada de Laplace. Esto nos permitió reconocer la situación específica (diseño de sistemas de control), el dominio (ingeniería electrónica) y el escenario (escolar), donde llevaríamos a cabo nuestra investigación.

4.3.2- Segundo momento: conformación de la base epistemológica

Tomando como base la categoría reproducción de comportamientos —argumentación de la situación núcleo de transformación— y apoyándonos en literatura especializada de ingeniería de control (Hernández, 2010; Kuo, 1996 y Ogata, 2010), en un segundo momento reinterpretamos esta epistemología, de acuerdo con la conformación de nuestro propósito de investigación. De aquí se desprendió una estructura epistemológica (Tabla 4.1), que reconoce dos elementos: la Transformada de Laplace y los comportamientos tendenciales (particularmente, comportamientos continuos y discontinuos). Estos dos elementos —acorde a la *teoría de control*— entran siempre en funcionamiento al diseñar sistemas de control.

Esta estructura se erigió como nuestra *base epistemológica*, la cual nos permitió conformar y guiar los instrumentos metodológicos al hacer la inmersión en la comunidad de ingenieros electrónicos en formación. Esta base epistemológica se presenta en la siguiente tabla:

	Situación Núcleo	Situación específica
Construcción de lo matemático	**Transformación**	**Diseño de sistemas de control**
Significaciones	Patrones de comportamiento gráfico y analíticos →	Comportamientos tendenciales en las señales del sistema de control (discontinuos y continuos)
Procedimientos	Variación de parámetros →	Realimentación en la Función de Transferencia (transformada), para lograr un comportamiento deseado.

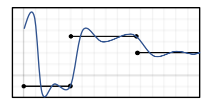
Instrumento	Instrucción que organiza comportamientos	Instrucción que organiza un comportamiento continuo $\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$
Argumentación/ Resignificación	Comportamiento tendencial/Reproducción de Comportamientos	Reproducción de comportamientos (La reproducción continua tiende al comportamiento discontinuo) 

Tabla 4.1. Base epistemológica. Situación núcleo de transformación y la situación específica

En esta estructura se aprecian significados de la epistemología de la Transformada de Laplace reportada por Miranda (2001). Estos significados se refieren al *comportamiento tendencial* que subyace en la transformada, y que juegan un rol fundamental en la situación específica de diseño de sistemas de control (Giacoleti-Castillo y Cordero, 2019). Por ejemplo, la Transformada de Laplace es tratada como un instrumento, donde no se centra la atención en el objeto matemático, sino que es una *instrucción que organiza un comportamiento continuo.* Recordemos que la definición de la Transformada de Laplace se presenta mediante una integral, y la integral connota continuidad; lo que se genera con esta transformada siempre es continuo (por ejemplo: fluidos, área, acumulación, entre otros). Por lo tanto, la argumentación que expresa la Transformada de Laplace es la continuidad de ese comportamiento tendencial.

En la siguiente sección describimos cómo llevamos a cabo la inmersión en la comunidad de ingenieros electrónicos en formación, para evidenciar la emergencia de la argumentación de la situación específica. Luego se describe el enfoque, las técnicas y los instrumentos que utilizamos para adentrarnos en la comunidad, así como también los elementos presentes en el análisis de los datos. En todo esto fue de vital importancia la *base epistemológica* que formulamos, ya que permitió guiarnos acertadamente al momento de hacer la inmersión.

4.3.3– Tercer momento: inmersión en la comunidad de conocimiento matemático

Para poder evidenciar la emergencia de los usos del conocimiento matemático que se generan en la comunidad, fue necesario estar con sus miembros para conocer su ámbito real de trabajo. Esto permitió observar los significados, procedimientos y argumentaciones que se construyen. De esta manera pudimos obtener de primera fuente, información sobre sus problemáticas, vivencias y las relaciones recíprocas que se efectúan en las situaciones de su cotidiano, específicamente en la situación de diseño de sistemas de control.

En este sentido fue imperativo hacer uso de técnicas, métodos e instrumentos que posibilitaran el diálogo del investigador con la comunidad, en las diferentes etapas (obtención, registro, y análisis de datos), además de tomar un enfoque que sea coherente con el objetivo de nuestra investigación.

a) Enfoque etnográfico

Un método que nos posibilitó adentrarnos adecuadamente en la comunidad para conocer sus intereses y problemáticas fue la *inmersión*. Consideramos a la inmersión en un sentido de acompañamiento permanente del investigador con la comunidad de conocimiento matemático de nuestro estudio. En este sentido, nuestra investigación tomó elementos del enfoque etnográfico, considerando algunos señalamientos de Guber (2011).

En nuestra investigación estamos interesados en dar cuenta de la construcción del conocimiento matemático en una situación específica de esta comunidad, desde su realidad. Guber (2011) menciona que con el enfoque etnográfico el investigador, aunque parte de un desconocimiento (parcial o total) de la realidad, tiene el interés de aproximarse a esa realidad para conocerla y comprenderla.

> En tanto enfoque, [la etnografía] constituye una concepción y práctica de conocimiento que busca comprender los fenómenos sociales desde la perspectiva de sus miembros (entendidos como "actores", "agentes" o "sujetos sociales"). La especificidad de este enfoque corresponde, según Walter Runciman (1983), al elemento distintivo de las ciencias sociales: la descripción. (Guber, 2011, p. 16)

El etnógrafo se propone describir e interpretar la realidad de una comunidad, para hacerla visible ante quienes no pertenecen a ella. En nuestro caso —desde la postura socioepistemológica— tenemos el interés de revelar la realidad de su conocimiento matemático, en una situación específica del cotidiano de su profesión. De esta manera, tal como indica Mendoza (2017), compartimos con el enfoque etnográfico el interés de rescatar un sujeto olvidado, en este caso al conocimiento del ingeniero, con su voz, sus interpretaciones y sus usos del conocimiento matemático.

En el siguiente apartado, describimos el primer acercamiento que tuvimos a la comunidad de nuestro estudio, para conocer sus intereses y problemáticas en su cotidiano.

b) La comunidad de conocimiento matemático de ingenieros electrónicos en formación

En el enfoque etnográfico, los fenómenos de las comunidades que se estudian son concebidos como sociales y culturales. Para nosotros el conocimiento matemático que una comunidad construye también es un producto social y cultural. Al respecto, Mendoza (2017) declara lo siguiente:

> En nuestro caso, creemos que en las historias de las comunidades se puede identificar elementos que han permitido que su conocimiento se construya de esa manera y no de otra, aspectos que han hecho parte de la formación de su identidad, así como procesos de institucionalización del conocimiento propio de la ingeniería y de la matemática misma. (p. 92)

Estos dos elementos, la identidad y la institucionalización, son los ejes que conforman el modelo de comunidad de conocimiento matemático, que fue la unidad de análisis de nuestra investigación.

La comunidad del estudio

La comunidad en la que hicimos inmersión la denominamos *comunidad de conocimiento matemático de ingenieros electrónicos en formación* (*CCM*(IE_F)). Está conformada por estudiantes de la carrera de Ingeniería Electrónica del Instituto Tecnológico de Tuxtla Gutiérrez, ubicado en el estado de Chiapas, México.

El perfil de la carrera de Ingeniería Electrónica en esta institución educativa es el siguiente:

> Diseñar, analizar y construir equipos y/o sistemas electrónicos para la solución de problemas en el entorno profesional, aplicando normas técnicas y estándares nacionales e internacionales. Asimismo, crear, innovar y transferir tecnología aplicando métodos y procedimientos en proyectos de ingeniería electrónica, tomando en cuenta el desarrollo sustentable del entorno. (Instituto Tecnológico de Tuxtla Gutiérrez, s.f.)

En este sentido, una de las actividades centrales en el cotidiano del ingeniero electrónico y de la *CCM*(IE_F) es el diseño de sistemas de control, ya que los equipos y/o sistemas electrónicos que ellos construyen están conformados por procesos que necesariamente tienen que controlarse, de tal manera que puedan cumplir con las especificaciones o características deseadas.

Los miembros de la comunidad seleccionados para el estudio cursan la asignatura denominada *Control Avanzado*, que se ubica en el último semestre de su carrera. En el transcurso de esta asignatura se llevan a cabo actividades teóricas y prácticas referentes a la Teoría de Control, por ejemplo: automatización de sistemas, ejecución de un sistema de control, corrección de error de control, entre otras.

Particularmente en esta generación del curso, el profesor les solicitó que como presentación o asignación final desarrollasen, en grupos, un proyecto de su interés que consistiera en el diseño de un sistema de control. El grupo que seleccionamos está conformado por cuatro estudiantes, quienes desarrollaron el proyecto de control denominado *automatización de un sistema de control de temperatura del agua para la cosecha de algas por el método de hidroponía* (Castro *et al*., 2019).

En el proyecto diseñado por este grupo, fue muy evidente la implementación de los elementos de un sistema de control, razón por la cual consideramos conveniente analizarlo como la comunidad de conocimiento matemático en la que haríamos la inmersión. Además, el proyecto de control de este grupo era coherente con nuestro objetivo de investigación y la especificidad del dominio (ingeniería electrónica), del escenario (escolar) y, especialmente, de la situación específica (diseño de sistemas de control) que habíamos delimitado en el primer y segundo momento, donde reconocimos la epistemología de usos, referente a la categoría *reproducción de comportamientos.*

Antes de concluir este inciso sobre la comunidad de nuestro estudio, es importante mencionar que a los miembros del grupo que seleccionamos no los consideramos como individuos aislados de sus demás compañeros, sino que los consideramos y estudiamos como miembros de una comunidad de conocimiento matemático: la de ingenieros electrónicos en formación. En su problemática de diseño del sistema de control desarrollan usos del conocimiento matemático, que están permeados por la reciprocidad, intimidad y localidad de la comunidad a la que pertenecen.

A continuación, en la Figura 4.2, se muestra el modelo de la CCM(IE_F), donde identificamos algunos aspectos de los elementos que constituyen dicha comunidad referentes a su conocimiento, los cuales son:

- *Comportamientos tendenciales de las señales del sistema de control*: conocimiento funcional referente a los elementos del sistema, que los miembros de la comunidad construyen al tener un compromiso mutuo en su proyecto, y al interactuar y dialogar *recíprocamente* con sus compañeros.
- *Reproducción continua de comportamientos discontinuos*: es la categoría de conocimiento matemático que emerge en la CCM(IE_F) y que revela el uso del conocimiento propio y privado, expresión de la *intimidad* de esta comunidad.
- *El diseño del sistema de control de temperatura del agua para la cosecha de algas*: es la problemática local que atiende la comunidad, y esta se da por una coincidencia de ideas, jerga disciplinar de la ingeniería electrónica e *intereses locales* en su escenario escolar.

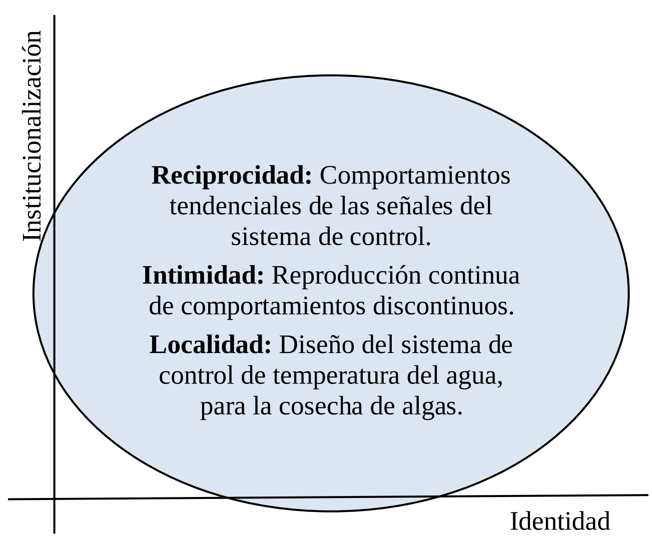


Figura 4.2. Modelo de Comunidad de Conocimiento Matemático de Ingenieros Electrónicos en Formación (CCM(IE_F))

Este modelo de comunidad de conocimiento matemático fue la unidad de análisis que nos permitió estudiar los usos del conocimiento que se desarrollan en la comunidad que hicimos inmersión. Acerca de esta unidad de análisis tratamos en la sección 4.5 de este capítulo.

4.4– OBTENCIÓN Y REGISTRO DE DATOS

Al estar inmersos en la comunidad, el diálogo permanente y recíproco que tuvimos con ellos nos permitió conocer de "viva voz" el conocimiento matemático que ponen en funcionamiento en la situación específica. Esto fue fundamental para obtener datos fidedignos que al analizarlos como evidencia dieron luz acerca de nuestra pregunta de investigación.

En una acepción de etnografía, Guber (2011) menciona que "es el conjunto de actividades que suele designarse como *trabajo de campo*, y cuyo resultado se emplea como evidencia para la descripción" (p.19).

Para obtener y registrar los datos que encontramos en el *trabajo de campo* fue necesario recurrir a varias técnicas que suelen designarse de corte etnográfico: observación participante, y entrevistas no dirigidas. Además, consideramos otras fuentes que contribuyeron a enriquecer el análisis de los datos obtenidos a partir de la inmersión en la comunidad: literatura especializada de Teoría de Control, producción escrita (informe) del proyecto de diseño de sistema de control de la CCM(IE_F).

4.4.1– Observación participante

La observación participante es la técnica por excelencia de la etnografía (Spradley, 1980). Con esta técnica se destaca la experiencia vivida del investigador al estar dentro de la comunidad y tener una relación recíproca con sus miembros. Guber (2011) destaca que la presencia directa del investigador en la comunidad es, indudablemente, una valiosa ayuda para el conocimiento social, ya que evita algunas mediaciones —del incontrolado sentido común de terceros—, ofreciendo a al investigador lo real en toda su complejidad.

El rol de la observación participante es producto de combinaciones sutiles de las actividades de observar y participar (Guber, 2011). Es decir, en ocasiones el investigador se limita solamente a observar, y en otras ocasiones tiene también cierta participación en lo que la comunidad hace —aunque sea de manera leve, y no permanente—. Sin embargo, con esta técnica el investigador "pone el énfasis en su carácter de observador externo, tomando parte de actividades ocasionalmente o cuando le resulta imposible eludirlas" (p. 67).

En la inmersión que hicimos, observamos a la CCM(IE_F) en su quehacer cotidiano del diseño del sistema de control, además de participar en la clase de la asignatura *Control Avanzado.* El enfoque de nuestra observación participante estuvo en las significaciones que la comunidad construye al interactuar y dialogar recíprocamente con sus compañeros y con el mismo conocimiento matemático en la problemática de la situación de diseño del sistema de control. En este sentido, el "lente" para observar fue una articulación realizada a partir de la *base epistemológica* (ver segundo momento en la sección 4.3.2) y la *unidad de análisis* (el modelo de comunidad de conocimiento matemático, con sus elementos de reciprocidad, intimidad y localidad). Esta articulación se presenta en la tabla siguiente:

MCCM	Base Epistemológica
Localidad Problemática de la comunidad (El diseño de sistemas de control)	**Situación específica de diseño de un sistema de control de temperatura del agua, para la cosecha de algas.**
Reciprocidad Diálogo con el otro.	**Significaciones** Comportamientos tendenciales en las señales del sistema de control (discontinuos y continuos)
	Instrumento Instrucción que organiza un comportamiento continuo

Conocimiento que se construye en la interacción mutua con su comunidad.	**Procedimientos** Realimentación en la función de transferencia (transformada), para lograr un comportamiento deseado.
Intimidad Categoría de conocimiento que emerge	**Argumentación** Reproducción de comportamientos (La reproducción continua tiende al comportamiento discontinuo)

Tabla 4.2. Articulación del modelo de comunidad de conocimiento matemático (MCCM) con la base epistemológica

Como se dijo, esta articulación fue nuestra guía que orientó la observación participante; asimismo guio las entrevistas que realizamos a los miembros de la comunidad en el transcurso de la inmersión. Es decir, los elementos de las fichas de observación y de las entrevistas tuvieron una orientación con base en esta articulación (ver anexos).

4.4.2- Entrevistas no dirigidas

Al estar inmersos en la comunidad, fue necesario obtener información acerca de lo que sus miembros expresan de su quehacer en la situación del diseño de control; esto, para conocer de sus propias voces los significados, procedimientos y argumentaciones en su contexto situacional. Para ello, llevamos a cabo entrevistas catalogadas como etnográficas: entrevistas no dirigidas.

Para Guber (2011), la entrevista no dirigida es mas que un conjunto de intercambios discursivos acerca de un tema de interés entre alguien que interroga y otro que responde. La entrevista no dirigida se caracteriza por ser reflexiva, natural y no estructurada; su valor no reside en su carácter referencial de solo informar cómo son las cosas, sino que el investigador hace de la entrevista una reflexividad, tanto para el informante como para él. De esta manera, "el entrevistador está atento a los indicios que provee el informante, para descubrir, a partir de ellos, los accesos a su universo cultural" (p. 75).

En nuestro estudio, las entrevistas no dirigidas se desarrollaron a través del diálogo recíproco con los miembros de la comunidad; tuvieron un carácter espontaneo y natural, partiendo de conversaciones ordinarias que toman en cuenta la situación y el contexto de la comunidad. No obstante, estas entrevistas fueron intencionadas y, como tal, tuvieron una orientación con base en la articulación de la Tabla 4.2.

Otra fuente de información: un profesor de ingeniería electrónica

Además de los miembros de la CCM(IE_F), tomamos otra fuente para las entrevistas: un ingeniero electrónico en su quehacer como profesor de la carrera de ingeniería electrónica. Este ingeniero, además de ser profesor, se desempeña y se ha desempeñado en el escenario de su trabajo profesional, específicamente en el campo de la *Teoría de Control*. También tiene una publicación científica en una revista especializada de ingeniería. Es investigador desde 1999 y colabora en la línea de investigación de Robótica en la Ingeniería Electrónica, en donde ha desarrollado diversos proyectos. La entrevista realizada a este ingeniero se constituyó en otra fuente de información, que tomamos en cuenta como una de las evidencias al hacer la triangulación de datos que describimos en la sección 4.5.2 de este capítulo.

Los instrumentos para el registro de los datos, tanto de la observación participante como de las entrevistas, fueron: fichas de observación, cuaderno de apuntes, grabaciones (audio, videos y fotografías) y apuntes en papel y pizarra (explicaciones escritas de la CCM(IE_F) y del profesor de ingeniería, durante las entrevistas y observaciones).

4.4.3– Literatura especializada de teoría de control

Otro elemento que consideramos como fuente para reforzar los datos obtenidos, es la literatura especializada sobre la Teoría de Control. Revisamos dos libros especializados, de frecuente uso en las comunidades de ingeniería, los cuales se mencionan a continuación:

- *Introducción a los sistemas de control (Hernández, 2010)*: Según el autor, este libro está orientado a profesores y estudiantes de ingeniería interesados en el estudio de los sistemas de control; además, es apto para ingenieros en su práctica profesional que deseen consultarlo, dados sus intereses sobre la Teoría de Control.
- *Ingeniería de Control Moderna (Ogata, 2010):* Es un libro de texto que está escrito especialmente para estudiantes de ingeniería mecánica, eléctrica, electrónica, aeroespacial o química. En este libro se introducen conceptos importantes del análisis y diseño de sistemas de control, que son propios de un curso de este campo.

Esta fuente fue vital en la triangulación de los datos, ya que reforzó las interpretaciones que tuvimos de los usos del conocimiento matemático de la CCM(IE_F), en la situación de diseño del sistema de control.

4.4.4– Producción escrita de la comunidad

La última fuente para la obtención de los datos fue un documento que produjo la comunidad. Elaboraron un informe de su proyecto de diseño del sistema de control, el cual consistió en describir la conformación y funcionamiento de su sistema (Castro *et al.*, 2019). En este documento encontramos elementos muy importantes que aluden a argumentaciones que se desarrollan en esta comunidad.

4.5- ACERCA DEL ANÁLISIS DE DATOS

A continuación, describimos la última sección de la metodología de esta investigación. A partir de la obtención y registro de los datos, después de haberlos procesado, los analizamos utilizando técnicas diversas: revisión documental, análisis descriptivo-interpretativo y triangulación.

Acerca del análisis descriptivo-interpretativo, Toro y Parra (2010) mencionan que está fundamentado en análisis textuales y contextuales. "La información producida sobre el análisis, permite fundamentar la descripción e interpretación, ya que esta se realiza según una estricta lógica rigurosa" (p. 389). En este sentido, al desarrollar nuestro trabajo de campo, posibilitó la descripción del quehacer de la comunidad en la situación específica; así como también —al apoyarnos en elementos teóricos— pudimos interpretar "la realidad" de su conocimiento matemático.

Para realizar este análisis, recurrimos a una unidad que estructurase elementos teóricos y metodológicos, que nos permitiera interpretar la realidad, y de esta manera revelar los usos del conocimiento matemático de la CCM(IE_F). Esto es, la *unidad de análisis*.

4.5.1- Unidad de análisis

Una investigación de corte cualitativo no se trata de un estudio de cualidades separadas, "se trata del estudio de un todo integrado que forma o constituye una *unidad de análisis* y que hace que *algo sea lo que es*: una persona, una entidad étnica, social, empresarial, un producto determinado, etcétera" (Martínez, 2007, p. 8). En nuestra investigación, la *unidad de análisis* la constituye la CCM(IE_F), definida con el *modelo de comunidad de conocimiento matemático* que presentamos en el inciso *b* de la sección de 4.3.3.

En este estudio, analizamos los significados que desarrolla la CCM(IE_F) en la situación de sistemas de control. Para ello, los tres elementos de la *unidad de análisis* (reciprocidad, intimidad y localidad) permitieron apreciar los usos del conocimiento matemático que emergen en esta situación especifica de la comunidad.

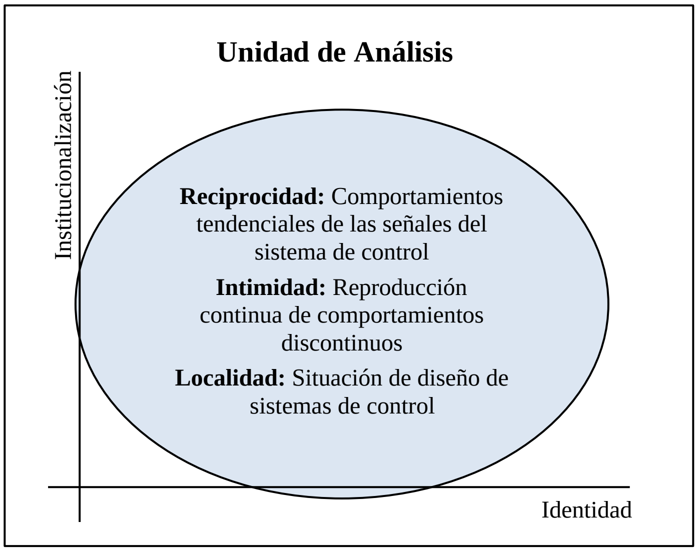


Figura 4.3. Modelo de comunidad de conocimiento matemático como unidad de análisis

4.5.2- Triangulación de datos

En la sección 4.4 describimos las fuentes que tomamos para la obtención de los datos: observación participante, entrevistas no dirigidas (a la CCM(IE_F) y al profesor), literatura especializada de la teoría de control y la producción escrita de la comunidad (informe del proyecto y sus apuntes). Con la información obtenida en estas fuentes, hicimos una triangulación de datos que nos permitió reconocer el conocimiento matemático desde distintos ángulos, de tal manera que, al compararlos y contrastarlos, se conjugaron en la evidencia de información que valida los resultados de la investigación.

La estructura que formulamos para hacer la triangulación está basada en Covián (2005) y en Yojcom (2013); la primera considera tres elementos de información al hacer inmersiones en las comunidades (lo que observamos que hacen, lo que dicen que hacen y lo que escriben que hacen), mientras que Yojcom agrega otro elemento (lo que han dicho otros que hacen).

Con base en lo anterior y dadas las técnicas etnográficas que utilizamos en nuestro estudio, al hacer la inmersión en la comunidad obtuvimos cuatro evidencias de información que constituyeron cuatro aristas de nuestro marco para la triangulación de los datos (ver Figura 4.4).

- *Evidencias observables de la comunidad:* analizamos los apuntes en las fichas de observación, cuadernos de apuntes, fotografías y grabaciones de video.
- *Evidencias verbales de la comunidad:* revisamos las grabaciones de audio y video de las entrevistas realizadas, para analizar sus argumentaciones orales.
- *Evidencias escritas de la comunidad:* analizamos las producciones escritas de la comunidad; como son, el informe del proyecto, además de sus apuntes en papel y pizarra de las explicaciones que realizan.
- *Evidencias de especialistas externos:* consideramos la información obtenida en la entrevista que realizamos al profesor de ingeniería, especialista en Teoría de Control; además de la revisión de la literatura especializada de la disciplina.

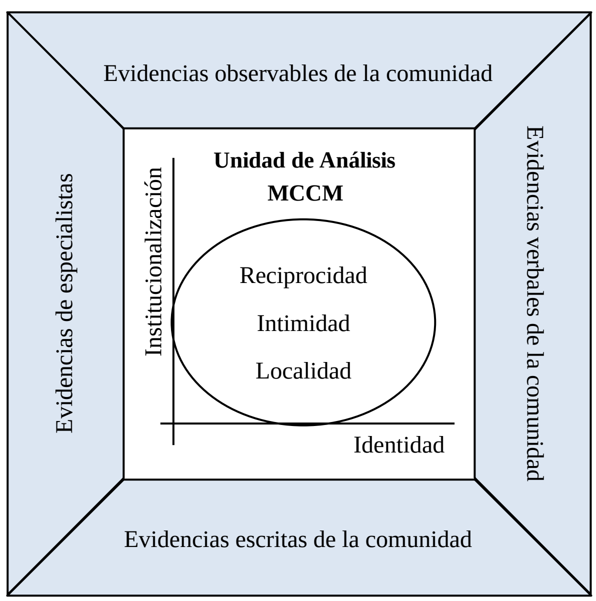


Figura 4.4. Marco para la triangulación de datos

Con este marco llevamos a cabo la triangulación de datos, que tiene como centro la unidad de análisis. Desde la obtención de los datos (en las entrevistas, observaciones, etc.) tuvimos como base de nuestros instrumentos y técnicas al modelo de comunidad de conocimiento matemático (MCCM), que conformó la unidad de análisis, junto con la articulación presentada en la Tabla 4.2 de este capítulo.

A partir de los datos de las evidencias que obtuvimos de las diversas fuentes, realizamos el análisis de los usos del conocimiento matemático que emergieron en la situación específica de diseño del sistema de control. Estos usos los analizamos considerando dos elementos: su *funcionamiento* y su *forma* (Flores y Cordero, 2007).

Usos del conocimiento matemático en la situación específica	
Funcionamiento del uso	**Forma del uso**
Lo constituyeron las tareas o ejecuciones que la comunidad desarrolla con el propósito de diseñar el sistema de control	Son las clases de tareas/ejecuciones, las cuales interpretamos como las maneras en que se llevan a cabo dichas tareas en la situación de diseño del sistema

Tabla 4.3. Funcionamiento y forma del uso del conocimiento matemático en la situación específica

Todos los elementos mencionados en este capítulo nos permitieron llevar a cabo el análisis que evidenció las argumentaciones que emergieron en ($CCM(IE_F)$) en la situación específica de diseño del sistema de control. Esto coadyuvó a revelar los usos del conocimiento matemático acerca de los comportamientos continuos y discontinuos que se desarrollan en esta comunidad, los cuales se presentan en el siguiente capítulo.

Capítulo 5: Usos del Conocimiento Matemático en una Situación Específica de Diseño de Sistemas de Control

5.1– SITUACIÓN ESPECÍFICA DE DISEÑO DEL SISTEMA DE CONTROL EN LA COMUNIDAD (CCM(IE_F))

Ante el cuestionamiento que se había planteado, respecto a los argumentos propios del ingeniero que justifiquen funcionalmente la *reproducción continua de comportamientos discontinuos*, hicimos inmersión en una comunidad de ingenieros electrónicos en formación, para estudiar los usos del conocimiento matemático de esta comunidad en una situación específica de diseño de sistemas de control.

Ogata (2010) define a un *sistema de control* como un equipo en el que un conjunto de elementos funciona de manera concatenada para proporcionar una salida o respuesta deseada. Es decir, dado cierto comportamiento deseado, se diseña un sistema en el cual se ejecutan acciones de control (procedimientos) con el propósito de reproducir el comportamiento deseado.

5.1.1– Automatización de un sistema de control de temperatura del agua para la cosecha de algas

En el capítulo anterior se mencionó que los miembros de la comunidad seleccionados para el estudio son cuatro estudiantes que cursan la asignatura denominada *Control Avanzado*, que se ubica en el último semestre de la carrera de Ingeniería Electrónica. En el transcurso de esta asignatura se llevan a cabo actividades teóricas y prácticas referentes a la Teoría de Control, por ejemplo, diseños y automatización de sistemas.

Como tarea final, el profesor del curso les solicitó a los estudiantes que presentasen un proyecto de su interés, en el cual se ponga en juego el diseño de un sistema de control. El proyecto que desarrolló la CCM(IE_F) se denomina ***automatización de un sistema de control de temperatura del agua para la cosecha de algas por el método de hidroponía*** (Castro *et al.*, 2019). De manera particular, la comunidad inició a diseñar este sistema de control desde tres semestres atrás, en otros cursos donde comienzan a estudiar la teoría de control, y durante ese período han venido modificando las características del sistema para su óptimo funcionamiento. Este proyecto se describe a continuación:

El sistema consiste en controlar el comportamiento de la temperatura del agua contenida en un recipiente rectangular, en el cual se cultivan algas comestibles (Espirulina). La temperatura óptima para el crecimiento de las algas es de 31°C a 39°C. Pero la temperatura del agua en el recipiente tiene un comportamiento que se perturba frecuentemente por la temperatura del ambiente, entre otros factores. Esto produce que en algunos momentos la temperatura del agua esté fuera del rango óptimo. Para evitar este problema, la CCM(IE$_F$) diseña un sistema que controle el comportamiento de la temperatura del agua en un rango deseado de 33–37 °C.[7] El objetivo principal del sistema de control es, entonces, mantener en todo tiempo la temperatura del agua en el rango deseado (Castro *et al.*, 2019).

Para ello, la CCM(IE$_F$) construye el equipo físico (la planta) con los siguientes elementos: un recipiente rectangular con agua y algas, recipientes con agua fría y caliente, sensor de temperatura, placa Arduino y bombas de suministro de agua.

Figura 5.1. Equipo físico del sistema de control

[7] Nótese que al establecer el rango deseado (33–37 °C), se ha dejado un rango de tolerancia de 2 °C en cada extremo respecto a la temperatura óptima para el crecimiento de las algas (31–39 °C).

5.1.2- Dinámica del sistema de control

El sistema de control funciona de tal manera que el sensor toma la temperatura del agua contenida en el recipiente rectangular. El software del Arduino adquiere los datos de temperatura que le proporciona el sensor (procesa los datos cada 5 segundos). Si la temperatura del agua en el recipiente rectangular está fuera del rango deseado, entonces el sistema genera una *señal de error* y activa un procedimiento de realimentación: se ejecuta una *acción de control* para corregir el error, que consiste en activar las bombas para la recirculación de agua de otro recipiente hacia el recipiente rectangular que contiene las algas, con el fin de regresar la temperatura del agua al rango deseado en el menor tiempo posible (Castro *et al.*, 2019).

Es decir, si detecta que la temperatura es mayor a 37 °C, entonces se bombea agua fría desde otro recipiente, y si detecta que es menor a 33 °C, bombea agua caliente. Dado que el sistema está registrando datos de temperatura cada 5 segundos; si en el siguiente registro el comportamiento de la temperatura del agua aún no ha regresado al rango deseado, entonces la recirculación mediante el bombeo continúa. Cuando la temperatura del agua vuelve al rango deseado, la recirculación se detiene.

En los comportamientos de la temperatura del agua que se controla, la CCM(IE_F) identifica los siguientes componentes del sistema de control: rango de temperatura deseado (*señal de entrada*) y temperatura obtenida en el recipiente rectangular (*señal de salida*).

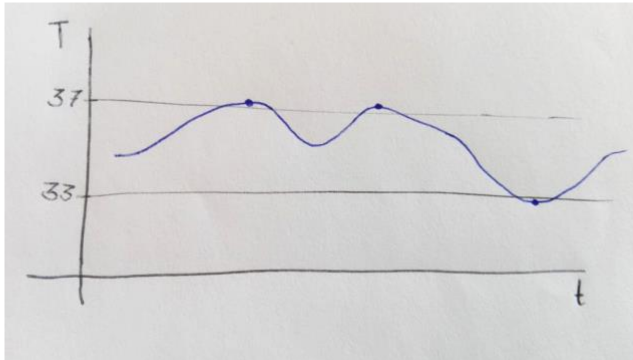


Figura 5.2. Gráfica del comportamiento de la temperatura

En la figura anterior, se muestra una gráfica que se obtuvo de la CCM(IE_F), en la cual se aprecia la señal de salida del sistema —expresada de manera continua— que describe el comportamiento de la temperatura obtenida en cierto intervalo de tiempo (*t*). El comportamiento deseado de la temperatura (T) y el comportamiento de la señal de salida, expresan *tendencia en un rango*, que es el óptimo para el crecimiento de las algas; y esta tendencia se reproduce de manera continua a través del tiempo.

5.1.3– La localidad, intimidad y reciprocidad: elementos que conforman la CCM(IE_F)

En la situación del diseño de sistema de control, esta comunidad desarrolla usos del conocimiento matemático que están permeados por la reciprocidad, intimidad y localidad que la constituyen. Al hacer la inmersión y estudiar esta situación específica de su cotidiano, identificamos aspectos que aluden a estos elementos; los cuales nos permitieron revelar los usos del conocimiento matemático en esta comunidad. Estos se presentan en la tabla siguiente:

Elementos del modelo de comunidad de conocimiento matemático (MCCM)	Aspectos de la CCM(IE_F) en la situación específica de diseño del sistema de control
Reciprocidad	***Comportamientos tendenciales de las señales del sistema de control:*** conocimiento funcional referente a los elementos del sistema, que los miembros de la comunidad construyen al tener un compromiso mutuo en su proyecto, y al interactuar y dialogar recíprocamente con sus compañeros.
Intimidad	***Reproducción continua de comportamientos discontinuos:*** es la categoría de conocimiento matemático que emerge en la CCM(IE_F) y que revela el uso del conocimiento propio y privado, expresión de la intimidad de esta comunidad.
Localidad	***El diseño del sistema de control de temperatura del agua para la cosecha de algas:*** es la problemática local que atiende la comunidad, y esta se da por una coincidencia de ideas, jerga disciplinar de la ingeniería electrónica e intereses locales en su escenario escolar.

Tabla 5.1. Aspectos de la comunidad de ingenieros electrónicos en formación

Dadas las características propias de la construcción de conocimiento de la comunidad, esta se distingue de otras comunidades por dos ejes transversales que la componen: la *institucionalización* y la *identidad* (Cordero, 2016a; Cordero y Silva-Crocci, 2012). Particularmente en la CCM(IE_F), el primer eje está constituido por el conocimiento de la ingeniería electrónica, la teoría de control, la automatización y el análisis de señales de los sistemas. El eje de identidad lo constituyen tres momentos: *legitimidad, resistencia* y *proyecto*. Respecto al primer momento, los miembros de esta comunidad hacen válidos, en la situación específica, los usos del conocimiento matemático referentes a los comportamientos de las señales del sistema de control, es decir, *legitiman* ese conocimiento ya que les permite controlar la temperatura del agua para la cosecha de algas. Además, esto es reflejo de *resistencia* al dME, ya que su interés no está en que el funcionamiento del sistema de control responda a lo que determina la matemática escolar; al contrario, su interés está en que el conocimiento matemático que desarrollan les sea funcional en la situación específica de la comunidad. Finalmente, el funcionamiento del sistema de control que diseñaron les permite estar convencidos que sus argumentos funcionales que emergen en la situación son útiles para el diseño de sistemas de control para la cosecha de algas a una escala mayor (nivel industrial). Esto se esquematiza en la siguiente figura:

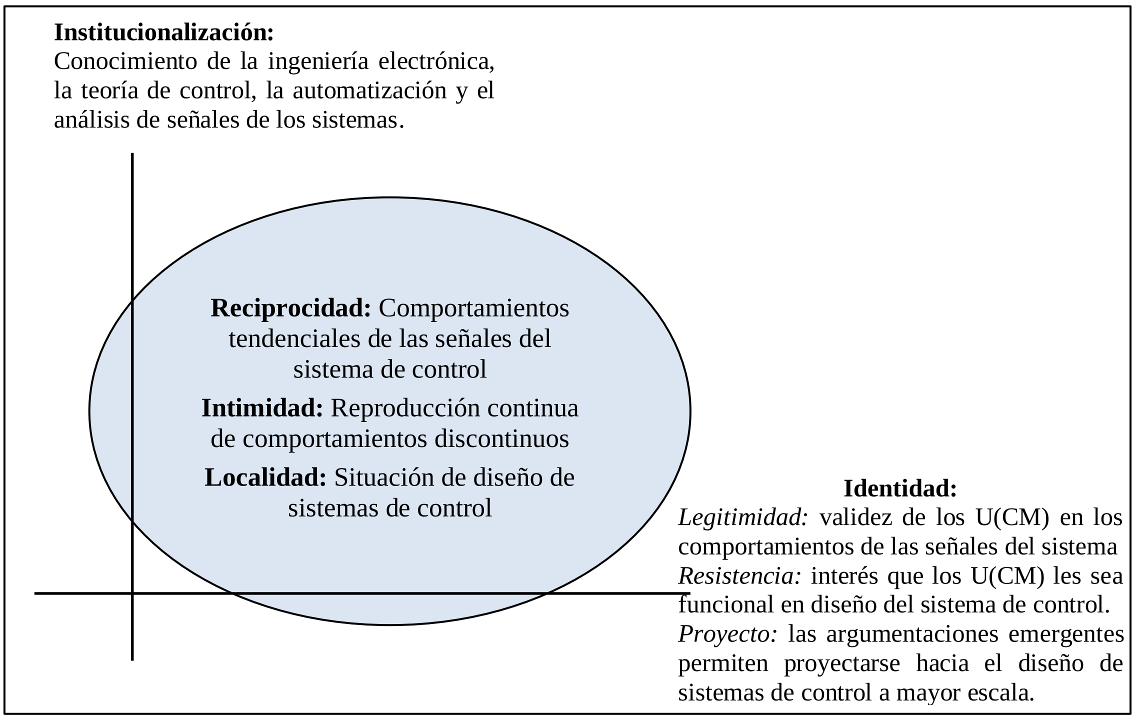


Figura 5.3. Modelo de Comunidad de Conocimiento Matemático de Ingenieros Electrónicos en Formación (CCM(IE_F))

5.2– EMERGENCIA DE LA REPRODUCCIÓN CONTINUA DE COMPORTAMIENTOS DISCONTINUOS EN LA CCM(IE_F)

En esta sección damos evidencia de la emergencia de la *reproducción continua de comportamientos discontinuos* al hacer la inmersión en la comunidad y analizar los usos del conocimiento matemático en la situación específica de diseño del sistema de control que se describió en la sección anterior. Para ello, primero presentamos un principio ideal de los sistemas de control (Hernández, 2010), el cual es puesto en funcionamiento por la CCM(IE_F) en la situación específica que atienden. Después describimos los dos factores que definen funcionalmente la reproducción continua de comportamientos discontinuos, y de esta manera evidenciar su emergencia en esta comunidad.

5.2.1– Un principio ideal en el sistema de control: el comportamiento ideal continuo

Al diseñar un sistema de control existe un *ideal*, el cual consiste en que la planta o proceso que se está controlando *tenga las características deseadas en los momentos que se determina* (Hernández, 2010). Es decir, dado que se tienen ciertos comportamientos deseados, se diseña el sistema para controlar la reproducción de esos comportamientos deseados. He aquí la categoría *reproducción de comportamientos*.

En la entrevista que le hicimos al profesor de ingeniería electrónica, él expresó lo siguiente:

> *En el control existe un ideal, el ideal es que no esté variando fuera de lo que se quiere, que no esté fuera de lo que se desea, que el comportamiento esté en el valor deseado siempre. Ese es un propósito de los sistemas de control.* (Transcripción de entrevista al profesor, 2019)

En la situación específica que atiende la CCM(IE_F), el propósito es reproducir un comportamiento deseado en todo momento, y para ello se diseña el sistema de control. Antes que se comience con el diseño, se conoce un rango de temperatura óptimo para la cosecha de algas. Es decir, a priori se tiene un *principio*, que es el comportamiento ideal del sistema de control: **la temperatura del agua debe mantenerse en el rango deseado (33–37 °C) en todo tiempo.**

El propósito del diseño del sistema de control de esta comunidad es mantener la temperatura del agua en el rango deseado en todo momento. Al respecto, dos estudiantes de la CCM(IE$_F$) mencionan lo siguiente:

> *…necesitamos tener en todo momento la temperatura del agua en ese rango.* (Transcripción de entrevista a la CCM(IE$_F$), 2019)
>
> *Lo que tratamos de enfocarnos es más en mantener templada [la temperatura de] el agua, mantenerla en el rango siempre, en todo momento*. (Transcripción de entrevista a la CCM(IE$_F$), 2019)

Este principio ideal, dadas las características del sistema (reproducción de la temperatura del agua en todo tiempo), lleva a la CCM(IE$_F$) a interpretar que la señal de salida tenga un comportamiento continuo, tal como se observa en la Figura 5.2 y en la que se presenta a continuación:

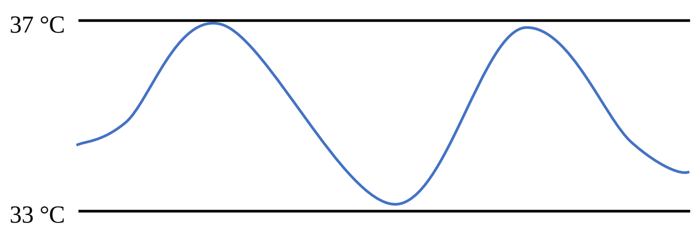


Figura 5.4. Comportamiento ideal del sistema de control

Ogata (2010) menciona que los requisitos que se imponen sobre un sistema de control se dan como especificaciones de comportamiento, y que estas especificaciones deben darse antes de que comience el proceso de diseño, para que así se puedan reproducir de manera óptima los comportamientos deseados. Esto es lo que hizo la CCM(IE$_F$); dado que se tenía un principio ideal de comportamiento para la temperatura del agua, se procedió al diseño del sistema de control.

5.2.2- Factores que definen funcionalmente la reproducción continua de comportamientos discontinuos

Dos factores epistemológicos que en esta comunidad definen funcionalmente la reproducción continua a partir de comportamientos discontinuos son los siguientes:

La temporalización

En la sección 2.2.2 expusimos, bajo la teoría de control, a la temporalización como el *rol del dominio tiempo* en los sistemas de control. Este consiste en problematizar en un *dominio temporal* los fenómenos o comportamientos de un sistema, de tal manera que se puedan ejecutar acciones de control (Hernández, 2010). Este rol del tiempo tiene varias connotaciones: una de ellas es su consideración no lineal. No se considera al tiempo solo como un dominio donde ocurren fenómenos y no se puede intervenir en estos. Por el contrario, en el diseño del sistema de control, el ingeniero programa con antelación diferentes acciones para que se ejecuten en momentos (de tiempo) determinados, de tal manera que el sistema controle los comportamientos en el transcurso del tiempo.

Este tratamiento del tiempo en la situación específica de la CCM(IE_F), permitió que los componentes del sistema se construyesen con antelación para que las *acciones de control* se activaran en ciertos momentos futuros (m_1, m_2, m_3…), donde ocurrirán *errores de control* (temperatura fuera del rango deseado). Al diseñar el sistema de control, se anticiparon en el tiempo para controlar los efectos de las perturbaciones que ocurrirían en esos momentos futuros, con el fin que *el comportamiento de la temperatura del agua sea ideal en todo tiempo.* (Ver Figura 5.5)

La tendencia en un rango

Esta tendencia se refiere al comportamiento en una región, en la cual se desea que ocurra la reproducción del comportamiento en el sistema de control. Como ya se ha dicho, dado el comportamiento deseado, se construyó el sistema para que controle/mantenga ese comportamiento, de tal manera que en todo momento posea una tendencia en el rango deseado (33–37 °C).

A continuación, se presenta una gráfica mostrada por el Arduino (software utilizado en el sistema de control), en la que se aprecia la señal de salida del sistema, la cual posee un comportamiento con tendencia en el rango deseado. (Hemos dibujado las líneas azules para indicar el rango deseado de la temperatura).

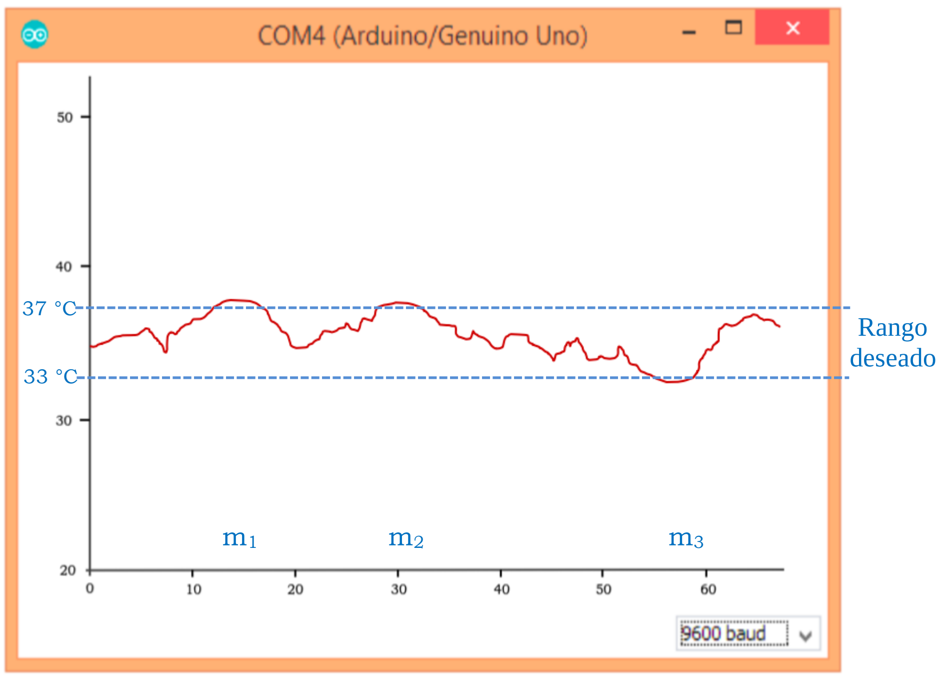


Figura 5.5. Comportamiento de la temperatura en la señal de salida del sistema

En esta situación específica, los comportamientos del sistema de control se problematizaron a través del tiempo (eje horizontal de la gráfica). Esto es acorde con lo señalado por Ogata (2010), quien indica que en el funcionamiento de un sistema de control es necesario interpretar las señales en el *dominio temporal*. En el caso de la CCM(IE_F), esta interpretación les permitió problematizar el comportamiento de la temperatura del agua —que ocurre con una *tendencia en un rango*—, para reproducir las características deseadas.

5.2.3- Funcionalidad de la reproducción continua de comportamientos discontinuos en un sistema de control

Los dos factores descritos en la sección anterior son los que le dan sentido funcional a la *reproducción continua de comportamientos discontinuos*, en la situación específica del diseño de sistema de control. De esta manera, entonces, la reproducción de comportamientos se interpreta con una gráfica continua (ver Figura 5.6). Acerca de esta emergencia damos cuenta en esta sección.

La figura que se presenta a continuación es una gráfica construida por la CCM(IE_F) para explicar el funcionamiento del sistema de control. En dicha figura se observa que el comportamiento de la gráfica de la señal de salida describe una *tendencia* en el rango 33–37 °C, que es el deseado para el crecimiento de las algas; y esta tendencia se reproduce a través del *tiempo*. Es decir, se *reproduce un comportamiento* en *todo tiempo* y este comportamiento reproducido es con *tendencia en un rango*.

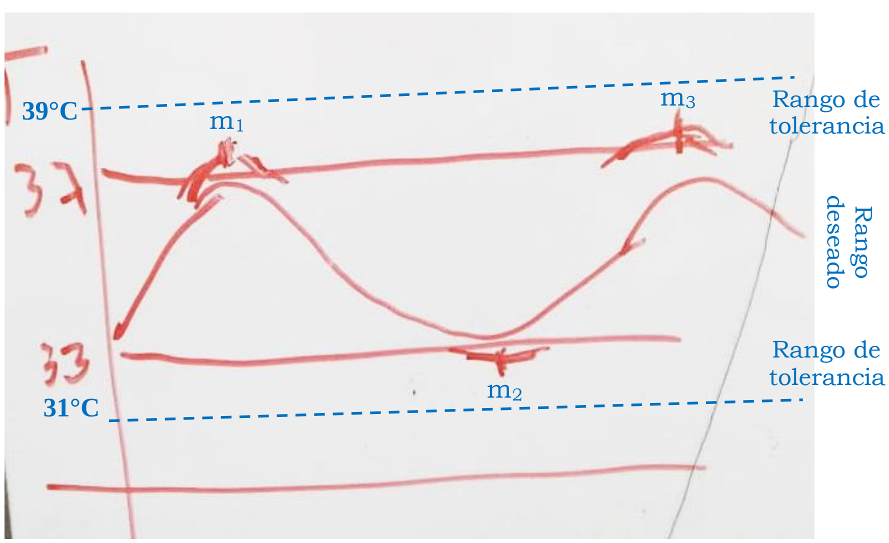


Figura 5.6. Comportamiento continuo a partir de comportamientos discontinuos

Al controlar el comportamiento de la temperatura del agua para la cosecha de algas, la comunidad problematiza la tendencia de ese comportamiento: se desea controlar que la temperatura del agua esté en el rango deseado en todo tiempo. Para este fin, al *temporalizar* se reproduce ese comportamiento deseado, el cual es interpretado como un comportamiento continuo.

El rol del tiempo como temporalización se da cuando la comunidad programa con antelación la acción de control para que se ejecuten en momentos futuros (m_1, m_2, m_3…) donde ocurrirán *errores de control* (temperatura fuera del rango deseado). La acción de control que se ejecuta en esos momentos es la recirculación del agua mediante el bombeo, con el propósito que la temperatura del agua vuelva al rango deseado en el menor tiempo posible, y así evitar que cruce el rango de tolerancia.

Respecto a esto, los miembros de la CCM(IE_F) declaran lo siguiente:

> *Si en algún momento esta temperatura sale del rango deseado, el sistema empieza a trabajar, ya sea para calentar el agua o para enfriarla, dependiendo la temperatura a la que se encuentre. Porque lo que queremos es que siempre esté en ese rango.* (Transcripción de entrevista a la CCM(IE_F), 2019)

> *Cuando [la temperatura] en algún momento alcanza mayor o menor de ese rango, se activan las bombas y la primera bomba suministra el agua, la segunda bomba saca una cantidad de agua, en pocos segundos. Así se recircula el agua. Digamos, se va a suministrar 2 o 3 segundos de agua; después espera 5 segundos, vuelve a tomar los datos del sensor de temperatura y, si está o no está ya en el rango, se activa o no se activa la bomba. Y es a partir de eso que lo tenemos, a partir de cierta cantidad de ciclos mantenemos el rango de temperatura del agua.* (Transcripción de entrevista a la CCM(IE_F), 2019)

En la Figura 5.6 se observa que para explicar el comportamiento de la temperatura en los momentos m_1, m_2, m_3, se hacen trazos que están expresados de manera discontinua. Esto se debe a que las acciones de control se ejecutan solo cuando el sistema detecta que la temperatura del agua se ha salido del rango deseado; no ocurren siempre, sino solo en los momentos (m_1, m_2, m_3) cuando se requiere devolver la temperatura a dicho rango. De esta manera, los comportamientos de la temperatura en estos momentos se expresan con gráficas a trozos, es decir *comportamientos discontinuos.* No obstante, *la reproducción de estos comportamientos se interpreta de manera continua*; esto porque el comportamiento de la temperatura del agua se está controlando siempre, tanto en los momentos m_1, m_2, m_3, como también en todo momento.

Es preciso resaltar que en estos momentos *el comportamiento continuo tiende a los comportamientos discontinuos*. Es decir, el comportamiento de la señal de salida —que se expresa de manera continua— es una reproducción que deviene de los comportamientos discontinuos. Esto se debe a que, en los momentos donde el sistema marca *señal de error*, la temperatura del agua que se reproduce posee un comportamiento dentro del rango de tolerancia, antes de regresar al rango deseado. Es así como este comportamiento reproducido en la salida tiende a los comportamientos discontinuos de los momentos m_1, m_2, y m_3.

Se aprecia, entonces, que cuando la CCM(IE_F) diseña el sistema de control, aparecen gráficas a trozos (que describen comportamientos discontinuos); sin embargo, la reproducción de estos comportamientos es *continua*. Es decir, se ***reproducen comportamientos continuos a partir de comportamientos*** **discontinuos.**

5.3– EPISTEMOLOGÍA DE USOS DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE EN LOS SISTEMAS DE CONTROL

La Transformada de Laplace es un elemento vital en la Teoría de Control, en tanto contribuye a llevar a cabo procedimientos de realimentación mediante la *función de transferencia* en los sistemas de control (Ogata, 2010). Sin embargo, el tratamiento que tiene en la matemática escolar se resumen a tomarla como una herramienta algorítmica para resolver ecuaciones diferenciales lineales. En cambio, en la situación específica de diseño del sistema de control de la CCM(IE_F), se pone en juego una funcionalidad de este conocimiento matemático que permite conformar una epistemología de usos de la Transformada de Laplace.

Los usos de la Transformada de Laplace que presentamos están en correspondencia con la reproducción continua de comportamientos discontinuos y, por ende, con la temporalización y la tendencia en un rango. Además, responden a los propósitos del diseño del sistema de control de esta comunidad, los cuales, en concordancia con la teoría de control, se pueden resumir en dos:

- *Detectar el error:* el sistema de control activa una señal de error, indicando el momento en el que la temperatura del agua se ha salido del rango deseado.
- *Corregir el error:* al detectarse el error, el sistema activa el elemento de realimentación, que ejecuta la acción de control, que consiste en activar las bombas para hacer la recirculación del agua en los recipientes.

Acerca de estos propósitos, el profesor dice lo siguiente:

> *Dos cosas específicas se buscan con el diseño de control: <u>encontrar el error y obviamente corregirlo</u>, o sea eliminar ese error. Entonces ¿qué tienes que aprender en control? saber qué hacer con el error. Por ejemplo, tu ya detectaste que hay un error, tu dices «<u>yo quiero que el sistema que se comporte de tal manera, pero tengo este comportamiento</u>. Ya <u>detecté un error</u>». Eso en teoría de control se llama comparación; «ya <u>hice la comparación y encontré un error</u>». Ahora, ¿qué hacer con ese error para que mi sistema funcione correctamente? entonces en el sistema yo debo <u>ejecutar una acción de control para corregir ese error</u>.* (Transcripción de entrevista al profesor, 2019)

Al respecto, los miembros de la comunidad dicen los siguiente:

> *Uno de los propósitos de los sistemas de control es detectar el error y corregirlo. Eso es lo que hacemos acá. Nosotros estamos cultivando [las algas] de 33 a 37 grados, entonces de esto se basa el sistema de control… determinar si hay una señal de error; en función de esa determinación de si existe un error, tomar una acción.* (Transcripción de entrevista a la CCM(IE_F), 2019)

A fin de lograr los propósitos del diseño del sistema de control, fue necesario que la CCM(IE_F) interpretara, en el dominio temporal, las señales del sistema. Esta interpretación en el dominio temporal permitió entender los comportamientos de tales señales y determinar, mediante el diseño del sistema, la obtención de los comportamientos deseados. Particularmente, en la situación específica de esta comunidad, a la temperatura deseada la denominan *señal de entrada,* y la temperatura que se obtiene en el recipiente rectangular la llaman *señal de salida*. Estos dos componentes del sistema de control definen a la *Función de Transferencia*, que permite la realimentación ejecutada en el sistema, cuando se detecta un error.

En la situación específica de la CCM(IE_F), la interpretación de los comportamientos correspondientes a la *Función de Transferencia* del sistema posibilita a la comunidad llevar a cabo los procedimientos necesarios (las modificaciones, ejecuciones o acciones de control) para que la temperatura del agua se devuelva al rango deseado, cuando se hace la recirculación del agua mediante el bombeo.

5.3.1– Usos de la Transformada de Laplace en el sistema de control

Acerca de la Transformada de Laplace, lo que la CCM(IE_F) pone en juego en el diseño del sistema de control, no es el objeto matemático de esta transformada, sino sus *usos*, los cuales problematizan las características de los comportamientos del sistema en el *dominio temporal*. Es decir, los *usos* de la Transformada de Laplace en el sistema de control se refieren a los *comportamientos tendenciales en el tiempo.*

A continuación, en las tablas 5.2 y 5.3, exponemos dos *usos* de la Transformada de Laplace que se desarrollan en la situación específica de diseño del sistema de control, de la comunidad que estudiamos. Estos *usos* son descritos mediante dos características que los componen: su *funcionamiento* y su *forma* (Cordero y Flores, 2007). El *funcionamiento del uso* lo constituyen las tareas o ejecuciones que la comunidad desarrolla al diseñar el sistema de control; mientras que la *forma* son las clases de esas tareas, las cuales son las maneras cómo se llevan a cabo dichas tareas o ejecuciones en la situación específica del diseño del sistema.

Primer uso de la Transformada de Laplace **Determinar un comportamiento al temporalizar**	
Funcionamiento del uso	**Forma del uso**
Detectar el comportamiento de la temperatura reproducida a través del tiempo	Identificación de la temperatura del agua en el recipiente, y comparación con la temperatura deseada

Tabla 5.2. Primer uso de la Transformada de Laplace

La temperatura del agua del recipiente se compara con el rango de temperatura deseada para la cosecha de las algas. El propósito de comparar las temperaturas es que la *señal de salida* (temperatura obtenida) se comporte, en el *tiempo*, como la *señal de entrada* (temperatura deseada); es decir, reproducir la temperatura deseada para la óptima cosecha de las algas.

> *Es un control retroalimentado; siempre está comparando. Una comparación de lo que se quiere contra lo que se tiene en la señal de salida, determinar si hay un error; en función de esa determinación de si existe un error, tomar una acción.* (Transcripción de entrevista a la CCM(IE_F), 2019)

Segundo uso de la Transformada de Laplace Organizar un comportamiento con tendencia en un rango	
Funcionamiento del uso	**Forma del uso**
Mantener el comportamiento de la temperatura con tendencia en un rango en todo tiempo	Modificar la temperatura del agua en el recipiente, mediante la recirculación

Tabla 5.3. Segundo uso de la Transformada de Laplace

La temperatura del agua que la CCM(IE_F) reproduce en el sistema de control, posee una tendencia en un rango, el rango de temperatura deseado para la cosecha de algas. Como ya se ha dicho, la forma cómo el sistema logra devolver la temperatura del agua al rango deseado, es recirculando agua de otro recipiente, hasta lograr que la temperatura del agua se devuelva al rango deseado.

> *Lo que nosotros controlamos en este proyecto es la temperatura, y necesitamos tener siempre la temperatura del agua en ese rango porque el Fitoplancton (lo que generan las algas) viven en un rango de temperatura de 33 a 37 grados centígrados.* (Transcripción de entrevista a la CCM(IE_F), 2019)

> *Si la temperatura se sale del rango que deseamos que esté, inmediatamente el sistema activa una señal de error y se activan las bombas de recirculación del agua; agua fría o caliente, según la que se necesite. Esto lo hace cada vez que la temperatura se sale [del rango deseado], ya que cada 5 segundos el sensor toma datos y si sigue estando fuera del rango (o sea, no se ha estabilizado la temperatura), entonces vuelve a hacer otro ciclo. Con esos ciclos se mantiene la temperatura del agua en el rango.* (Transcripción de entrevista a la CCM(IE_F), 2019)

Estos usos de la Transformada de Laplace hacen referencia, respectivamente, a los dos propósitos que se describieron al inicio de esta sección: *detectar un error* y *corregirlo.* Precisamente, los usos de la TL se ponen en funcionamiento en el sistema de control cuando, en diversos momentos, se determina el comportamiento de la temperatura del agua y cuando se ejecuta el procedimiento de realimentación del sistema, con el fin de reproducir el comportamiento de la temperatura en el rango deseado. Además, estos usos están dotados de significados referidos a los dos factores epistemológicos que definen funcionalmente la *reproducción continua de comportamientos discontinuos*: la *temporalización* y la *tendencia en un rango*.

5.3.2- Construcción de *lo matemático* en la situación de transformación de la CCM(IE$_F$)

En la problematización de la situación específica de la CCM(IE$_F$), se ponen en funcionamiento elementos alusivos a una *justificación funcional* de la Transformada de Laplace; es decir, se construye conocimiento que corresponde a *lo matemático*, a aquello que es útil a la comunidad en su quehacer cotidiano. Esto se confronta con la matemática escolar que centra su atención al objeto y soslaya los usos del conocimiento matemático del cotidiano.

En el diseño del sistema de control —que es una problemática del quehacer de la comunidad— emerge una epistemología, que constituye un *marco de referencia* de usos de la Transformada de Laplace. En la siguiente tabla se presenta esta estructura epistemológica, que corresponde a la *situación de transformación*, la cual es núcleo de la situación específica de diseño de sistema de control. En esta *construcción de lo matemático,* identificamos significaciones y procedimientos que se ejecutan sobre un instrumento, y que derivan en la argumentación de la situación.

	Situación núcleo	**Situación específica**
Construcción de lo matemático	**Transformación**	**Diseño de sistema de control de la temperatura del agua para cosechar algas**
Significaciones	Patrones de comportamiento gráfico y analíticos	Comportamientos de las señales del sistema (continuos y discontinuos) Temporalización Tendencia en un rango

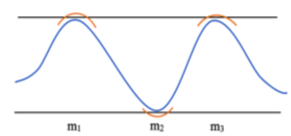
Procedimientos	Variación de parámetros	Comparación de las señales (entrada y salida) y recirculación del agua en los recipientes (Realimentación en la Función de Transferencia para lograr un comportamiento deseado)
Instrumento	Instrucción que organiza comportamientos	Instrucción que organiza un comportamiento continuo $Función\ de\ Transferencia = \frac{TL(señal\ de\ salida)}{TL(señal\ de\ entrada)}$
Argumentación/ Resignificación	Comportamiento tendencial/ Reproducción de Comportamientos	Reproducción continua de comportamientos discontinuos 

Tabla 5.4. Construcción de lo matemático en la situación específica de la CCM(IE_F)

Esta estructura permite apreciar una epistemología de usos de la Transformada de Laplace, la cual posee significados acerca de los *comportamientos tendenciales*, y que juegan un rol fundamental en la situación específica de diseño de sistemas de control. Por ejemplo, la Transformada de Laplace es tratada como un instrumento, en donde no se centra la atención en el objeto, sino que se resignifica como la *instrucción que organiza un comportamiento continuo.* En la matemática escolar, la definición de la Transformada de Laplace se presenta mediante una integral; entonces, dado que la integral connota continuidad (ver sección 1.1.3 del primer capítulo), lo que se genera con esta transformada siempre es continuo (fluidos, área, acumulación, entre otros). Por lo tanto, la argumentación que la Transformada de Laplace expresa en esta situación específica, es la continuidad de ese comportamiento tendencial; es decir, la *reproducción continua de comportamientos discontinuos*.

A manera de cierre

Lo que se ha presentado, conforma un *marco de referencia* de usos de la Transformada de Laplace, y expresa una pluralidad del conocimiento matemático que es transversal a diferentes dominios, escenarios y situaciones de las comunidades de conocimiento. En la situación específica que presentamos en este estudio, la CCM(IE_F) desarrolla usos del conocimiento matemático, en contraparte a la centración al objeto matemático que caracteriza al discurso matemático escolar.

Lo anterior ejemplifica a la *categoría de modelación* ζ(Mod), la cual "es un proceso que acompaña a la pluralidad epistemológica y a la transversalidad de saberes que definen la funcionalidad matemática de las comunidades de conocimiento matemático que suceden en la escuela, en el trabajo y en la ciudad" (Cordero, 2017, p. 31). Tal como indican Mendoza y Cordero (2018), la categoría de modelación no aparece en la matemática escolar habitual para la formación de ingenieros, pero sí aparece en situaciones del cotidiano de comunidades de conocimiento matemático, por ejemplo, de estudiantes de ingeniería biónica o electrónica. En la problematización de la situación específica que desarrolla la CCM(IE_F), emergen argumentaciones que corresponden a una funcionalidad de la matemática, y definen aquello que es útil en su cotidiano. Particularmente, modelan comportamientos tendenciales, los cuales se *resignifican* en la situación de diseño del sistema de control.

Capítulo 6:
Reflexiones Finales

6.1– CONCLUSIONES

Hemos revelado la justificación funcional que da cuenta de los factores que relacionan los comportamientos continuos y comportamientos discontinuos, en la situación específica de diseño de un sistema de control, en una comunidad de ingenieros electrónicos en formación, y cómo estos resignifican a la Transformada de Laplace.

Los factores funcionales que relacionan los comportamientos continuos y discontinuos resultaron ser:

- *La temporalización*
- *La tendencia en un rango*

A partir de estos dos factores, la Trasformada de Laplace se resignifica como la *instrucción que organiza un comportamiento continuo* en el sistema de control.

Todo lo anterior compone una epistemología de usos de la Transformada de Laplace (TL) en la situación específica, la cual confronta a la matemática escolar de la TL, donde se privilegia su carácter algorítmico y utilitario como método para resolver una ecuación diferencial, dejando de lado su valor funcional que responde al quehacer cotidiano de las comunidades en situaciones específicas.

De esta manera, el resultado de esta investigación provee de un entorno de usos y significados al objeto matemático de la Transformada de Laplace, desprovisto de esos entornos en la matemática escolar.

Construcción de lo matemático en la situación de diseño de sistemas de control

La emergencia de los usos del conocimiento matemático en esta comunidad permitió formular una estructura epistemológica que define la *construcción de lo matemático* en la situación del diseño del sistema de control. Esta epistemología constituye un *marco de referencia* de usos de la Transformada de Laplace, en donde se identifican significaciones y procedimientos que se ejecutan sobre un instrumento, y derivan la argumentación de la situación: reproducción continua de comportamientos discontinuos. Esto se presenta en la siguiente tabla:

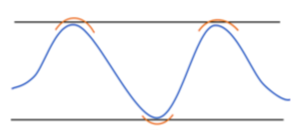
	Situación específica
Construcción de lo matemático	**Diseño de sistema de control de la temperatura del agua para cosechar algas**
Significaciones	Comportamientos de las señales del sistema (continuos y discontinuos) Temporalización Tendencia en un rango
Procedimientos	Comparación de las señales (entrada y salida) y recirculación del agua en los recipientes (Realimentación en la Función de Transferencia para lograr un comportamiento deseado)
Instrumento	Instrucción que organiza un comportamiento continuo $Función\ de\ Transferencia = \frac{TL(señal\ de\ salida)}{TL(señal\ de\ entrada)}$
Argumentación/ Resignificación	Reproducción continua de comportamientos discontinuos 

Tabla 6.1. Construcción de lo matemático en el sistema de control de la CCM(IE_F)

Esta estructura permite apreciar una epistemología de usos de la Transformada de Laplace, la cual posee significados acerca de los *comportamientos tendenciales*, y que tienen un rol fundamental en la situación de diseño de sistemas de control. Por ejemplo, la Transformada de Laplace es tratada como un instrumento, en donde no se centra la atención en el objeto, sino que se resignifica como la *instrucción que organiza un comportamiento continuo.* Por lo tanto, la argumentación que la Transformada de Laplace expresa en esta situación específica, es la continuidad del comportamiento tendencial; es decir, la *reproducción continua de comportamientos discontinuos*.

El marco de referencia presentado en la investigación expresa la pluralidad y transversalidad de los usos del conocimiento matemático, y atiende una *justificación funcional* del ingeniero electrónico en una situación específica. Esta epistemología confronta a la matemática escolar y coadyuva al rediseño del discurso matemático escolar (RdME); de tal manera que responde a la funcionalidad matemática en la ingeniería, y contribuye así a crear una relación recíproca entre la matemática escolar y el cotidiano del ingeniero, en diferentes escenarios y situaciones específicas donde este se sitúa.

6.2- PROSPECTIVAS

El propósito y resultado de esta investigación contribuyen a transformar y trastocar el discurso matemático escolar, para que se favorezca el aprendizaje de resignificaciones de la matemática (Cordero, 2016b). Para este fin, la categoría de modelación ζ(Mod) es el proceso que acompaña a la pluralidad epistemológica y a la transversalidad de saberes. Este proceso tendrá que desarrollarse en el sistema educativo. Será un núcleo del marco de referencia que ayude a resignificar el conocimiento matemático en los diferentes niveles escolares (Cordero, 2016a y 2016b).

En este sentido, tomando como base los resultados presentados en esta tesis, en una investigación posterior se puede estudiar el impacto educativo que tendría la incorporación de la epistemología de usos de la Transformada de Laplace en el sistema educativo, principalmente en el nivel superior. Para ello, se harían inmersiones en comunidades de conocimiento matemático de docentes y de estudiantes, con el propósito de revelar las resignificaciones en las situaciones específicas de estas comunidades y problematizar su impacto educativo.

Diseño de situación escolar de socialización

Cordero (2016b) menciona que para valorizar los procesos de transformación que se pretenden hacer en el discurso matemático escolar, es necesario la conformación de *diseños de situación escolares de socialización* (DSES) (ver Figura 6.1). A través de estos diseños sucederán los aprendizajes de resignificaciones de la matemática, plasmadas en procesos permanentes (usos y significados) en contraparte de objetos terminales (conceptos y definiciones).

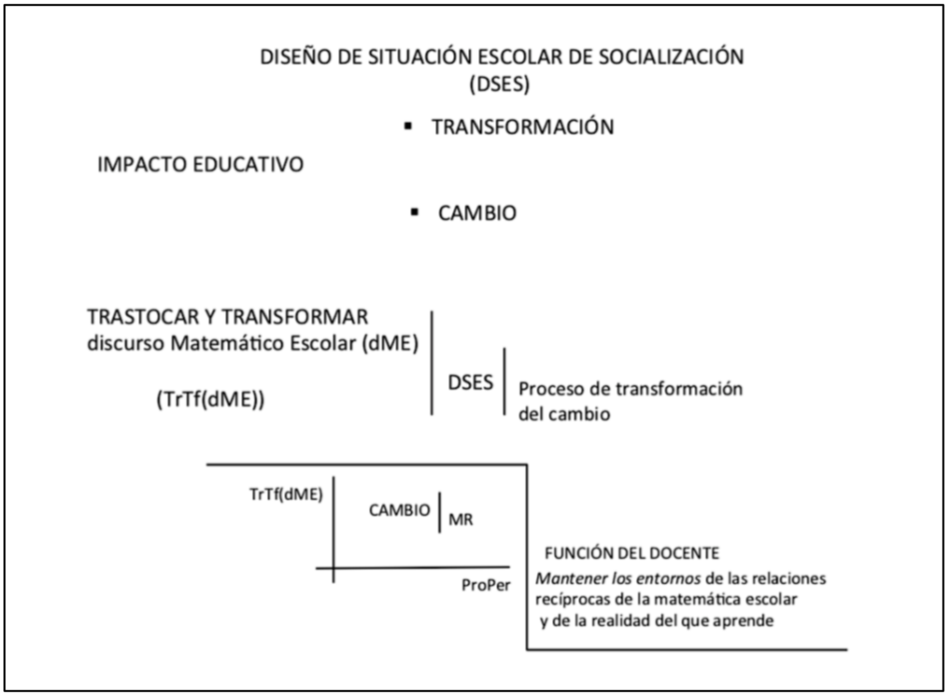


Figura 6.1. Diseño de situaciones escolares de socialización (DSES) (Cordero, 2017)

Estos procesos persiguen trastocar y transformar el discurso matemático escolar, con lo cual ocurrirá un impacto educativo, que evidenciará una transformación y un cambio en la escuela. Para mantener estos procesos, el docente será un agente vital, cuya función será mantener los programas académicos, es decir mantener los entornos de las relaciones recíprocas entre la matemática escolar y la realidad del que aprende. Esto permitirá adentrarse en los diseños de situaciones escolares de socialización (Cordero, 2017).

Propuesta de un esquema para la conformación de diseños de situaciones escolares de socialización de la Transformada de Laplace

La conformación del marco de referencia de usos de la Transformada de Laplace permite formular una propuesta de cómo podría ser el diseño de situaciones escolares de socialización, que tengan como base esta epistemología de usos que favorezca el aprendizaje de resignificaciones.

Con este marco de referencia funcional, los elementos de los DSES que se propongan no estarán centrados en el objeto matemático de la Transformada de Laplace, sino que su propósito será la valorización de la categoría *Reproducción de Comportamientos*. Estos diseños permitirán evidenciar la emergencia de resignificaciones de los *comportamientos tendenciales* en el cotidiano de las comunidades de docentes y de estudiantes, en las cuales se harán inmersiones.

En la Figura 6.2 se presenta un esquema compuesto de elementos que conforman una propuesta de DSES para hacer inmersiones en las comunidades de docentes y estudiantes. El esfuerzo inquisitivo de estas inmersiones sería la confrontación al discurso matemático escolar. Los DSES estarán conformados de momentos que favorecerán los usos de la Transformada de Laplace, y expresarán la pluralidad y transversalidad de la epistemología de usos.

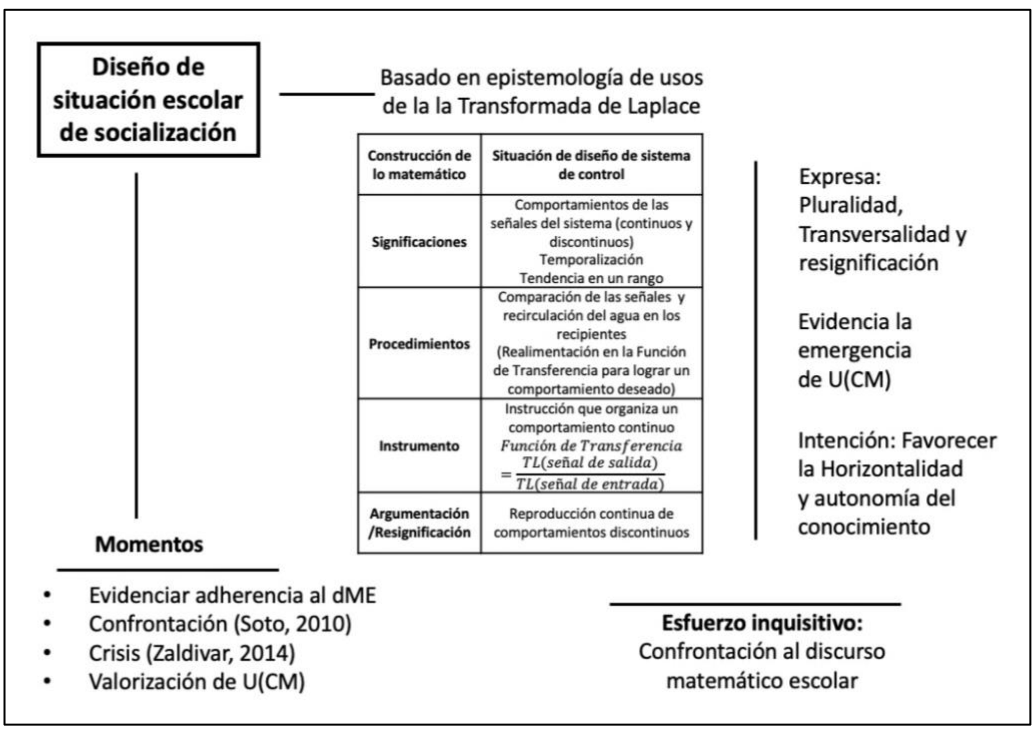


Figura 6.2. Esquema para la conformación de diseños de situaciones escolares de socialización de la Transformada de Laplace

Las inmersiones se podrían llevar a cabo en comunidades de diferentes características. Ya sea en comunidades de docentes o estudiantes de ingeniería, de biología, de química, economía, o de docencia de matemáticas, entre otras. De esta manera, al valorizar los usos del conocimiento matemático que emerjan en la comunidad, se evidenciará la reciprocidad, transversalidad y horizontalidad de los saberes. Con esto se estaría ampliando el marco de referencia de los usos del conocimiento matemático, y de esta manera se favorece el aprendizaje de resignificaciones en el sistema educativo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aguilar, J. (2002). *Un estudio sobre el desarrollo histórico y epistemológico de la transformada de Laplace y sus aplicaciones* (Tesis de doctorado no publicada). Cinvestav-IPN, México.

Alaniz, S., May, G., Baracco, M. y Simunovich, R. (2010). Transformada de Laplace. Dificultades que presentaron los alumnos de la asignatura matemáticas especiales en una evaluación. En M. Ascheri, R. Pizarro y N. Ferreyra (Eds.), *III Memoria de la Reunión Pampeana de Educación Matemática*, 3(1), 285-293. Santa Rosa: Universidad Nacional de La Pampa. ISBN 978-950-863-138-1

Bateman, H. (1910). The solution of a system of differential equationes occurring in the theory of radiactive transformations. *Trans. Camb, Phil., Soc.* 15, 423-427.

Boyce, W., y Diprima, R. (1992). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera.* México: Editorial Limusa.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre la construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa.

Carstensen, A. y Bernhard, J. (2007). Critical aspects for learning in an electric circuit theory course −an example of applying learning theory and design− based educational research in developing engineering education. *Aceptado para su publicación en las actas de la primera Conferencia Internacional sobre Investigación en Enseñanza de la Ingeniería (ICREE),* Honolulu, 22-24 de junio, 2007. Recuperado de http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.518.710&rep=rep1&type=pdf.

Carrillo, A. (2011). *Sistemas automáticos de control. Fundamentos básicos de análisis y modelado.* 2da edición. Santa Rita, Venezuela: Fondo Editorial Unermb. ISBN: 978-980-6792-12-8

Castro, J., Hernández, A., Natarén, A. y Solís G. (2019). *Automatización de un sistema de control de temperatura para la cosecha de algas por el método de hidroponía* (Informe de investigación interno). Instituto Tecnológico de Tuxtla Gutiérrez, México.

Cordero, F. (1998). El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del cálculo y análisis: el caso de comportamiento tendencial de las funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 1, 56-74.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. International Thomson Editores, Vol. 4, Número 2, 103-128, México.

Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías el conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 8(3), 265-286.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte iberoamericano* (pp. 265-286). México: Díaz de Santos-Clame A.C.

Cordero, F. (2011) La modelación y la graficación en la matemática escolar. En L. Rodríguez-Salazar, R. Quintero-Zazueta, A. Hernández (Coords.). *Razonamiento Matemático. Epistemología de la Imaginación. (Re)pensando el papel de la Epistemología en la Matemática Educativa.* (pp. 377-399). España-México: Gedisa-Cinvestav.

Cordero, F. (2016). III Semana de las Pedagogías de la U. Chile. Facultad de Filosofía y Humanidades. Universidad de Chile. Chile. Archivo de resumen.

Recuperado de http://www.filosofia.uchile.cl/agenda/127793/iii-semana-de-las-pedagogias-de-la-uchile.

Cordero, F. (2016a). Modelación, funcionalidad y multidisciplinariedad: el eslabón de la matemática y el cotidiano. En J. Arrieta y L. Díaz (Eds.), *Investigaciones latinoamericanas de modelación de la matemática educativa* (pp. 59-88). Barcelona: Gedisa.

Cordero, F. (2016b). La función social del docente en matemáticas: Pluralidad, transversalidad y reciprocidad. En S. Estrella, M. Goizueta, Guerrero, A. Mena, J. Mena, E. Montoya, ..., D. Zakaryan (Eds.), *XX Actas de las Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (p. 23-30), ISSN 0719-8159. Valparaíso, Chile: Sochiem, Ima-Pucv. Recuperado de http://ima.ucv.cl/congreso/xxjnem/

Cordero, F. (2017). *La matemática y lo matemático. Transversalidad y modelación: un programa socioepistemológico*. Manuscrito en preparación.

Cordero, F., Cen, C. y Suárez, L. (2010) Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(2),187-214.

Cordero, F., del Valle, T. y Morales, A. (2019). Usos de la optimización de ingenieros en formación: el rol de la ingeniería mecatrónica y de la obra de Lagrange. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 22 (2), 185-212. https://doi.org/10.12802/relime.19.2223

Cordero, F., Henríquez, C., Solís, M., Méndez, C., Opazo, C. y De la Cruz, A. (2020). La modelación en la matemática educativa: sus programas de investigación y la docencia. El rol de la transversalidad de saberes matemáticos. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Artículo aceptado para publicación.

Cordero F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(1), 7-38.

Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci, H., y Soto, D. (2015). *El Discurso Matemático Escolar: la Adherencia, la Exclusión y la Opacidad*. Barcelona: Gedisa.

Cordero, F. y Miranda, E. (2002). El Entendimiento de la transformada de Laplace: Una Epistemología como Base de una Descomposición Genética. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 5(2), 133-168.

Cordero, F., y Solís, M. (2001). *Las gráficas de las funciones como una argumentación del cálculo.* Segunda edición. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cordero, F., Solís, M., Buendía, G., Mendoza, E. y Zaldívar, D. (2016). *El comportamiento con tendencia, lo estable y las ecuaciones diferenciales lineales. Una argumentación gráfica.* Barcelona: Gedisa.

Cordero, F., y Silva-Crocci, H. (2012). Matemática Educativa, Identidad y Latinoamerica: el quehacer y la usanza del conocimiento disciplinar. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 15(3), 295-318.

Covián, O. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional:* El caso de la Cultura Maya. Tesis de maestría. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. D. F.: México.

Edwards, C. y Penney, D. (1986). *Ecuaciones diferenciales elementales, con aplicaciones.* Primera edición. México: Prentice Hall Hispanoamericana.

Giacoleti-Castillo, F. y Cordero, F. (2019). Usos y significados de la Transformada de Laplace en una comunidad de ingenieros electrónicos. En D. García-Cuéllar; I. Pérez-Vera (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 32(2), 429-

438. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. ISSN: 2448-6469

González-Sampayo, M. (2006). *Engineering problem solving: The case of the Laplace transform as a difficulty in learning in electric circuits and as a tool to solve real world problems.* (Tesis doctoral no publicada). Institutionen för teknik och naturvetenskap. Norrköping, Suecia.

Gómez, K., y Cordero, F. (2010). Los procesos de difusión del conocimiento matemático en el cotidiano. Un estudio socioepistemológico. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *23*, 919-927. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Guber, R. (2011). *La etnografía. Método, Campo y Reflexividad.* Buenos Aires: Siglo Veintiuno Editores.

Gutiérrez, S. (2012). Laplace, matemático del azar. *Revista Suma*, 71(1), 87-96.

Hernández, R. (2010). *Introducción a los sistemas de control: Conceptos, aplicaciones y simulación con MATLAB*. Primera edición. México: Pearson Educación. ISBN: 978-607-442-842-1

Holmberg, M. y Bernhard, J. (2017). University teacher's perspectives on the role of the Laplace transform in engineering education. *European Journal of Engineering Education*, 42(4), 413-428, DOI: 10.1080/03043797.2016.1190957

Instituto Tecnológico de Tuxtla Gutiérrez (s.f.). Ingeniería Electrónica, Tuxtla Gutiérrez: SEP. Recuperado de: https://www.tuxtla.tecnm.mx/ingenieria-electronica/

Jáuregui, E., Ávila, J. y Nesterova, E. (2007). El aprendizaje del tema "transformada de Laplace de funciones definidas por intervalos" con apoyo del conocimiento previo sobre la función escalón unitario. En C. Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 20, 132-137. Camagüey: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Juárez, A. y Irassar, L. (2014). Sobre el aprendizaje de la transformada de Laplace: algunas dificultades y una propuesta didáctica. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 26, 977-985. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Kuo, B. (1996). *Sistemas de control automático. Séptima edición.* México: Prentice- Hall Hispanoamericana, S.A.

Laplace, P. (1812). Théorie analytique des probabilités. Paris: M. V. Courcier Imprimeur Libraire pour les mathématiques.

Laplace, P. (1988). *Ensayo filosófico sobre las probabilidades* (P. Castillo, Trad.). México: Alianza Editorial. (Obra original publicada en 1814).

Martínez, M. (2007). *La Investigación Cualitativa Etnográfica en Educación. Manual Teórico-Práctico.* Madrid: Editorial Trillas.

Medina-Lara, D. (2019). *Transformación educativa del docente de matemáticas. Un episodio: el uso de la compensación como una resignificación de la media aritmética* (Tesis de doctorado no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Mendoza, E. (2017). *La matemática funcional en una comunidad de conocimiento de ingenieros. El caso de la estabilidad en la electrónica* (Memoria Predoctoral no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Mendoza, E., y Cordero, F. (2018). La modelación en las comunidades de conocimiento matemático. El uso de las matemáticas en ingenieros biónicos. El caso de la estabilidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 11(1), 36-61.

Mendoza, E., Cordero, F., Solís, M. y Gómez, K. (2018). El Uso del Conocimiento Matemático en las Comunidades de Ingenieros. Del Objeto a la Funcionalidad Matemática. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *32*(62), 1219-1243. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a23

Miranda, E. (2001). *Entendimiento de la transformada de Laplace. Caso de una descomposición genética* (Tesis de doctorado no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Mota, C. (2019). *La matemática escolar y la modelación: de la integral a una categoría de acumulación* (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Ogata, K. (2010). *Ingeniería de Control Moderna*. Quinta Edición. Madrid: Pearson Educación, S.A.

Pérez-Oxté, I. (2015). *Los usos de la gráfica en una Comunidad de Ingenieros Químicos Industriales en Formación. Una base para el diseño de una situación de aprendizaje* (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Real Academia Española. (2014). *Diccionario de la lengua española* (23.ª ed.). Recuperado de https://dle.rae.es/temporalizar

Romo A. (2010). Projets d'ingénierie: étude d'une activité pratique dans la formation d'ingénieurs. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 15, 201-218.

Ruiz, L., Camarena P. y Del Rivero S. (2016). Prerrequisitos deficientes con software matemático en conceptos nuevos. Transformada de Laplace. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 21* (69), 349-83.

Soto, D. (2010). El discurso matemático escolar y la exclusión. Una visión socioepistemológica (Tesis de doctorado no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Soto, D. y Cantoral, R. (2014). Discurso Matemático Escolar y Exclusión. Una Visión Socioepistemológica. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *28*(50), 1525-1544. https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a25

Spiegel, M. (1983). *Ecuaciones diferenciales aplicadas*. Tercera edición. México: Prentice Hall Hispanoamericana.

Spivak, M. (1992). *Cálculo infinitesimal.* Segunda Edición. Barcelona: Editorial Reverté.

Spradley, J. (1980). *Participant observation*. Estados Unidos: library of congress cataloging in publication data.

Toro, I. y Parra, R. (2010). *Fundamentos epistemológicos de la investigación y la metodología de la investigación. Cualitativa/cuantitativa.* Bogotá: Fondo Editorial Universidad EAFIT.

Yojcom, D. (2013). *La epistemología de la Matemática maya: una construcción de conocimientos y saberes a través de prácticas* (Tesis de doctorado no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. D. F.: México.

Zill, D. y Cullen, M. (2006). *Matemáticas avanzadas para ingeniería: Ecuaciones diferenciales.* Tercera edición. México: McGraw-Hill.

ANEXOS

Articulación del modelo de comunidad de conocimiento matemático y la situación específica.

<table>
<tr><th>MCCM</th><th>Base Epistemológica</th></tr>
<tr><td>Localidad
Problemática de la comunidad
(El diseño de sistemas de control)</td><td>Situación específica de diseño de un sistema de control de temperatura del agua, para la cosecha de algas.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Reciprocidad
Diálogo con el otro.
Conocimiento que se construye en la interacción mutua con su comunidad.</td><td>Significaciones
Comportamientos tendenciales en las señales del sistema de control (discontinuos y continuos)</td></tr>
<tr><td>Instrumento
Instrucción que organiza un comportamiento continuo</td></tr>
<tr><td>Procedimientos
Realimentación en la función de transferencia (transformada), para lograr un comportamiento deseado.</td></tr>
<tr><td>Intimidad
Categoría de conocimiento que emerge</td><td>Argumentación
Reproducción de comportamientos
(La reproducción continua tiende al comportamiento discontinuo)</td></tr>
</table>

Ficha para observación y entrevistas

MCCM	Base Epistemológica	Elementos a considerar en la observación y entrevistas
Localidad **La problemática de la comunidad (El diseño de sistemas de control)**	**Situación específica (Situación de transformación)**	Problemáticas que comúnmente atiende con el sistema de control (Estabilidad, linealidad, …)
		Situación específica que está controlando
Reciprocidad **Diálogo con el otro. Conocimiento que se construye en la interacción mutua con su comunidad.**	**Significaciones** Comportamientos tendenciales en las señales del sistema de control (discontinuos y continuos)	Elementos que conforman el sistema de control (señales) ¿Qué significados le da a los elementos que conforman el sistema de control?
		Papel que juegan las señales del sistema de control ¿Qué significación tienen las señales del sistema de control?
		Características de las señales (entrada, de salida, y de transferencia) (Funciones continuas o discontinuas) Aquí puedo hacer una síntesis de las significaciones (de las señales -a lo que entra, a lo que sale, la transferencia-) Si su mirada no está puesta en la continuidad tal como la concebimos, habría que inducirlo a que exprese su significación. Lo más probable, el ingeniero no se va a referir a función continua con esta terminología, sino que se referirá a la continuidad con la terminología de los ingenieros.
	Instrumento	Comportamiento que se quiere controlar (estabilidad, interruptor, …)

<table>
<tr><td rowspan="6"></td><td rowspan="3">Instrucción que organiza un comportamiento continuo</td><td>Quizá cuando el ingeniero diga lo que es un sistema de control, no va a expresar las palabras como las que uno está expresando, pero si se podrá encontrar algo (palabras) que sea alusivo a la reproducción de comportamientos.

Quizá dirá algo que hace el sistema de control, y que ese algo es alusivo a la reproducción de comportamiento.</td></tr>
<tr><td>En qué cursos aborda usted este tipo de problemas de control.
Qué temas de matemáticas son base para trabajar con estos problemas de control.</td></tr>
<tr><td>Herramientas que utiliza el ingeniero (Computadoras, software, sensores, …)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Procedimientos
Realimentación en la función de transferencia (transformada), para lograr un comportamiento deseado.</td><td>Procedimientos que lleva a cabo para controlar o reproducir el comportamiento.</td></tr>
<tr><td>Características del comportamiento que se quiere reproducir (continuo, discontinuo, …)</td></tr>
<tr><td>Características del comportamiento que se reproduce</td></tr>
<tr><td>Intimidad
Categoría de conocimiento que emerge</td><td>Argumentación
Reproducción de comportamientos
(La reproducción continua tiende al comportamiento discontinuo)</td><td>Justificación funcional de la continuidad, cuando el ingeniero parte de algo que se comporta discontinuamente y va a reproducir un comportamiento similar a este, pero continuo.
¿Por qué el trazo de la grafica es de esa manera?
¿Qué le hace trazarlo continuo, si en el comportamiento que se quiere reproducir hay discontinuidades (brincos)?</td></tr>
</table>