CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemática Educativa

Parámetros como elementos de control en Sistemas de Ecuaciones Lineales, una exploración con profesores

Tesis que presenta:

Luis Enrique Hernández Zavala

Para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias

En la especialidad de:

Matemática Educativa

Directora de la tesis:

Dra. Claudia Margarita Acuña Soto

Ciudad de México Agosto, 2021

Agradecimientos

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo brindado para llevar a cabo esta investigación, promoviendo con ello el desarrollo científico del país.

Luis Enrique Hernández Zavala

CVU – 1010051

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a mi familia, por apoyarme a lo largo de estos años que hemos estado acortando distancias, todos mis logros no serían posibles sin su paciencia, confianza, comprensión y su apoyo incondicional en cada decisión que he tomado. Aunque nos vayamos lejos la familia va con nosotros, estará ahí siempre, en los hábitos, en los gestos, en las decisiones que tomemos, jamás estaremos solos.

Y a mi otra familia que encontré en estos últimos años, Juli, Maxi, Piña, Selvin, Eleany y muchos más. Gracias por tantas aventuras, por aquellas charlas y reflexiones, por compartir tantos momentos académicos y principalmente, de la vida. Con mucho cariño les agradezco.

Agradezco a Diana, por apoyarme en los momentos difíciles y por escucharme siempre, por su apoyo incondicional.

Agradezco a mis sinodales, por sus reflexiones. Gracias a la Dra. Asuman Oktaç, al Dr. Vicente Liern, al Dr. Francisco Cordero y al Dr. Nehemías Moreno.

Finalmente, quiero expresar mi más grande y sincero agradecimiento a la Dra. Claudia Margarita Acuña por creer en mis ideas, por su paciencia, por tantas enseñanzas a lo largo de este proceso y por su calidez humana.

A todos ustedes, gracias totales.

Contenido

Resumen

Los parámetros son entidades algebraicas que aparecieron en la antigüedad para ampliar el uso de las variables cuando las situaciones requerían establecer diferencia en el papel de estas, lo que diversificó el significado de la variable. Este tipo especial de variable es actualmente utilizado en muchos de los ámbitos de la matemática aplicada y es aprendido en las escuelas en los niveles de licenciatura.

En este trabajo abordamos el caso de los Sistemas de Ecuaciones Lineales (SEL) 2x3 y sus infinitas soluciones, lo que inicialmente propondremos a profesores de distintos niveles educativos, bajo el supuesto de que la idea de parámetro como *variable de control* se puede incorporar partiendo de los conocimientos básicos de métodos tradicionales de solución de los SEL. Nuestro objetivo es investigar la forma cómo los profesores de esos niveles adoptan la idea de parámetro enfatizando su carácter dual, como variable o como constante según se requiera.

Para este fin usamos una secuencia de artefactos como mediadores semióticos en una práctica reflexiva, bajo la perspectiva de la Teoría de la Objetivación (Radford,2020) en la que pusimos en funcionamiento procesos cognitivos y procedimentales como: 1) La definición de parámetro de naturaleza dual, 2) Un programa que permite obtener el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales de dimensión *mxn,* 3) Un análisis gráfico-dinámico de las soluciones y 4) Problemas en contexto.

Los datos obtenidos y que fueron analizados, se apoyan en la verbalización entre los profesores y el investigador durante las actividades desarrolladas y cuyas transcripciones dieron cuenta de una praxis reflexiva. Encontramos que, si bien los profesores dieron sentido al parámetro, así como a las soluciones infinitas y válidas, es cierto que cada uno logró significados distintos, los que consideramos están asociados a los intereses individuales, así como de los saberes particulares de cada uno.

Las preguntas de investigación que orientaron nuestro trabajo son las siguientes:

1. ¿Cuáles son las ventajas de utilizar a los parámetros como variables de control en SEL, apoyados en una secuencia de artefactos semióticos?

2. ¿Qué efecto tiene la evidencia gráfica para la interpretación de las soluciones infinitas cuando se cuenta con representaciones que simulan la variación de los parámetros?

3. ¿Qué efecto tiene el uso de los parámetros cuando son empleados en problemas en contexto?

Abstract

Parameters are algebraic entities that appeared in ancient times to broaden the use of variables when situations required establishing a difference in the role of these, which diversified the meaning of the variable. This special type of variable is currently used in many fields of applied mathematics and is learned in schools at the undergraduate level.

In this study we address the case of *2x3* Systems of Linear Equations (SEL) and their infinite solutions, which we will initially propose to teachers of different levels, under the assumption that the idea of parameter as a control variable can be incorporated starting from the basic knowledge of traditional methods of solution of SEL. Our objective is to investigate how teachers at these levels adopt the idea of parameter emphasizing its dual character as a variable or as a constant as required.

To this end we used a sequence of artifacts as semiotic mediators in a reflective practice under the perspective of Objectification Theory (Radford,2020) in which we operationalized cognitive and procedural processes such as: 1). The definition of dual nature parameter, 2). A program that allows to compute mxn matrices, 3). A graph-dynamic analysis of solutions and 4). Problems in context.

The data obtained and analyzed are based on the verbalization between the teachers and the researcher during the activities developed and whose transcriptions showed a reflective praxis. We found that, although the teachers gave meaning to the parameter, as well as to the infinite and valid solutions, it is true that for each one it achieved different meanings, which we consider are associated to individual interests, as well as to their knowledge.

The research questions that guided our work are the following:

1. What are the advantages of using parameters as control variables in SEL, supported by a sequence of semiotic artifacts?

2. What is the effect of graphical evidence for the interpretation of infinite solutions when using representations that simulate the variation of the parameters?

3. What effect does the use of the parameters have when they are used in contextual problems?

Introducción

Los sistemas de ecuaciones lineales (SEL) son uno de los contenidos más ampliamente estudiados en las escuelas, ya que proporcionan múltiples ventajas para el uso e interpretación de las estructuras algebraicas y la resolución de problemas lineales, no así, los parámetros que aparecen repentinamente en algunos libros de texto para resolver problemáticas puntuales y de los que no encontramos ninguna introducción explícita en la exploración que llevamos a cabo.

Bajo la hipótesis de que los parámetros nos permiten atender los casos de las infinitas soluciones en los SEL, procedimos a proponer a profesores en servicio, que imparten cursos donde se instruyen los métodos de solución de los SEL, un caso con infinitas soluciones, y donde los parámetros permiten no sólo dar sentido al caso infinito, sino que dan herramientas para obtener aquellas soluciones que son válidas dependiendo de condiciones establecidas de antemano.

En la literatura en Educación Matemática se ha discutido sobre las características y diferencias entre las variables, constantes y parámetros. Con respecto al uso de la variable Ursini y Trigueros (2001) distinguen tres usos: como incógnita, número general y variable relacionada. La incógnita funciona como la indicación de un número potencial, el número general está relacionado con la indistinta posibilidad de sustitución y finalmente, la variable está ligada a un proceso de variación general. Por otro lado, las constantes son cantidades fijas.

En relación con lo anterior, a los parámetros se les ha dado el estatus de variables de un tipo superior, que hacen variar lo que de por sí ya varía (Drijvers, 2001). Para fines prácticos, los parámetros aparecen en la matemática como variables activas o como contenedores de valores o variables que son usadas hasta que sea conveniente, mientras tanto, permanecen inactivas, por lo que se les puede usar como constantes sin serlo.

Los parámetros son presentados en este trabajo desde un punto de vista pragmático, como *variables de control* que enfatizan su naturaleza como variables y como constantes, que se presentan bajo una expresión general para toda posible solución de la que podemos elegir aquellas soluciones válidas de todas las disponibles, lo que da gran capacidad operativa e interpretativa a las soluciones.

En este trabajo pretendemos investigar la forma cómo esta propuesta es adoptada por una muestra de 5 profesores de los niveles básico, medio y superior de Educación Matemática, a partir de la hipótesis de que se requiere poner en funcionamiento una red de artefactos semióticos que permitirían desarrollar una re-construcción de sus saberes respecto a este contenido.

La red de artefactos se compone de los siguientes elementos: 1) Una definición de parámetro como variable de control, 2) Un procedimiento para reducir un SEL *2x3* a uno *2x2* a través de la parametrización, 3) Un análisis gráfico y dinámico de las soluciones infinitas para elegir las que son válidas y 4) Un ejemplo de problema en contexto que funge como puente entre los distintos artefactos. Los datos fueron tomados a lo largo de entrevistas-intervención con cada profesor y con la participación del investigador.

En este trabajo definimos una solución válida como aquella que cumple con las condiciones particulares impuestas en un problema contextual, para poder resolver el problema planteado. Todas las soluciones resuelven el problema, pero hay soluciones que no son aceptables, por ello se hace hincapié en que esas son válidas para dar solución al problema particular. Además, las soluciones válidas si pueden ser infinitas, pero las infinitas no necesariamente son válidas para el problema en cuestión.

Encontramos que, en todos los casos la mediación semiótica promovida por los artefactos (Radford, 2020) se logró, lo que fue manifestado verbalmente por los profesores, sin embargo, estos procesos fueron de distinta índole, lo que dependió sobre todo de los intereses y procesos de interpretación de cada uno de los participantes. Identificamos que hubo a quienes esta experiencia les proporcionó un procedimiento más a los ya conocidos para resolver SEL, y quienes lograron relacionar las soluciones infinitas con las válidas, tanto en la representación gráfica como en el problema en contexto y finalmente, aquellos que además de lo anterior dieron sentido al parámetro como un controlador de la variación de un objeto que varía a su vez, como menciona Drijvers (2001).

Concluiremos este trabajo con un apartado que pretende sentar las bases de las líneas de investigación futuras que pueden ser continuación de este trabajo en el doctorado que pretendemos desarrollar en esta institución.

1. Antecedentes

1.1 Introducción

En los antecedentes que vamos a plantear para esta investigación, exploramos los contenidos que son conocidos por los profesores de distintos niveles de la educación matemática respecto a los sistemas de ecuaciones lineales (SEL), sus soluciones y el tratamiento de los parámetros en estos materiales, por ello nos dimos a la tarea de revisar los libros de texto usualmente utilizados para la enseñanza de los SEL, con el objetivo de detectar y establecer de manera general los contenidos básicos en la instrucción de estos temas en los niveles secundaria, preparatoria y en el caso de los contenidos relativos a los parámetros, recurrimos a los libros de licenciatura, que es cuando son abordados en la instrucción matemática.

A continuación, estaremos desarrollando estos temas haciendo énfasis en las preferencias sobre el tipo de sistemas estudiados y los tipos de soluciones atendidos en la instrucción, así como la falta de información con la que se introducen los parámetros cuando son requeridos en el nivel superior.

1.2 Los profesores y los libros de texto

En este apartado presentamos algunos resultados relativos a la relación que existe entre los saberes de los profesores de matemáticas, los libros de texto y su contenido, y sus implicaciones en la enseñanza, debido a que nuestra investigación requiere de conocer cuáles son los contenidos matemáticos sobre los parámetros y los SEL que son usados por los profesores en sus clases, bajo el supuesto de que estos conocimientos son la base para llevar a cabo la intervención que desarrollaremos para presentar a los parámetros como variables de control.

A continuación, estaremos mencionando y comentando contenidos sobre los SEL de algunos programas de estudio y de libros sugeridos por estos, que van desde secundaria hasta la licenciatura con el objeto de tener un panorama general de lo que se enseña y que es, en principio, lo que suponemos que un profesor conoce sobre el tema.

1.2.1 La relación libros de texto y los profesores

Respecto a la relación entre los contenidos de los libros y los saberes de los profesores sobre SEL, tenemos que Mesa & Griffiths (2011) investigan el rol que desempeñan los libros de texto para la enseñanza de la matemática desde la perspectiva de los profesores, en particular en la descripción de su uso con el objetivo de enseñar.

Entre los principales resultados obtenidos los autores encontraron que los profesores usaban sus libros de texto como base para diseñar tareas, pruebas, exámenes y proyectos, asimismo, consideran la dificultad de las tareas, la disponibilidad de las respuestas, su percepción de la capacidad de los estudiantes para manejar el trabajo, y la posibilidad de practicar con el material sugerido en ellos. De manera que, para ellos, los libros de texto son la principal herramienta de trabajo para la enseñanza de la matemática que los circunscribe al contenido tratado en este.

Además, es en el libro de texto donde se concentra el conocimiento del que puede disponer el profesor como su fuente básica, de manera que averiguar cuáles son los tratamientos de los contenidos de los libros nos proporciona una base elemental del conocimiento de este.

Para tener un panorama general del tratamiento que algunos libros dan a los SEL y en particular la forma cómo se abordan los distintos tipos de soluciones se planteará en seguida una revisión y análisis de libros de texto de los niveles educativos anteriormente mencionados.

1.3 SEL en libros de texto

En la revisión de los contenidos relativos a los planes de estudio que actualmente son utilizados en las escuelas de secundaria y bachillerato en México, encontramos que el primer acercamiento que se tiene con los SEL es en la educación secundaria. En el plan de estudios actual de este nivel educativo (SEP, 2017) que está organizado a partir de una división en distintos ejes temáticos y 12 temas específicos, en el caso de los SEL revisamos los contenidos relacionados con el eje temático: *Número, álgebra y variación* y en específico el tema *Ecuaciones.*

En el tema de *Ecuaciones* (lineales) notamos que un objetivo en el primer grado es que el alumno resuelva problemas mediante la formulación y solución algebraica de ecuaciones lineales. Una característica en este nivel es que se solicita el planteamiento de ecuaciones de este tipo y se espera que el estudiante encuentre la solución mediante procesos algebraicos, la experiencia reiterada de esta actividad hace que encontrar soluciones sea vista como una actividad vinculada a las ecuaciones y su tratamiento procedimental, esto es, la formulación de ecuaciones implica resolverlas algebraicamente para encontrar la solución que en general es única y numérica.

En el segundo grado de secundaria se proponen como objetivos resolver problemas mediante la formulación y solución algebraica de SEL con dos incógnitas y será en este grado en el único que se tocará este tema (SEP,2017). La diferencia en este grado es evidente en la actividad de formulación de problemas que, en general son planteados contextualmente, lo que contribuiría a dar sentido a la solución única y numérica que será encontrada luego de la manipulación algebraica.

Se enfatiza, además, la importancia no sólo de que los alumnos aprendan a manipular algebraicamente ecuaciones lineales y a utilizar las propiedades aprendidas con ellas, lo que se traslada en gran medida a los procedimientos que se usarán para resolver los sistemas de ecuaciones $2x2$ mediante distintos métodos.

Los métodos algebraicos, específicamente los de sustitución e igualación, y el método gráfico que hace énfasis en la solución del sistema como la intersección entre dos rectas son los preferidos. Además, se pretende que los alumnos recurran a los distintos procedimientos para justificar sus soluciones, de manera que los contenidos sobresalientes es usar los procedimientos algebraicos en situación en la que la solución es también única y numérica, pero que debe satisfacer a todas las ecuaciones involucradas.

Enseguida presentamos un problema (véase Figura 1.1) de un libro sugerido por este plan de estudios en donde se involucra tanto la representación algebraica como gráfica:

Resolver un sistema de ecuaciones lineales significa encontrar el o los valores de cada **incógnita**. Una solución de un sistema de ecuaciones es un conjunto de valores que **satisfacen todas las ecuaciones a la vez** o simultáneamente. Los sistemas de ecuaciones lineales pueden tener una **solución única**, un **conjunto** con un **número infinito de soluciones** o **no tener solución**.

1. Reúnete con dos compañeros. Resuelvan los sistemas de ecuaciones lineales por ensayo y error. Luego contesten las preguntas en su cuaderno.

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ -x + 2y = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + 2y = 15 \\ -6x + 4y = -30 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 3y = 10 \\ 4x + 12y = 16 \end{cases}$$

a. ¿Cuántas posibles soluciones encontraron? ¿Fue fácil o difícil hallarlas?
b. ¿Puede haber otras soluciones? ¿Por qué?
c. ¿Pueden asegurar que estos sistemas tienen únicamente las soluciones que hallaron?

Figura 1.1 Tratamiento de SEL (Trigueros, et al., 2019, Pág.65)

Aunque se atienden sobre todo las soluciones únicas y numéricas, en este texto no se deben dejar de comentar las otras posibilidades de solución para los SEL, como lo es el caso de las infinitas soluciones que debían ser por lo menos mencionadas en la educación matemática.

Trigueros, M., Sandoval, I., Lozano, M., Mercedes, L., Emanuel, C. & Schulmaister, M. (2019) mencionan que es conveniente que se analicen las condiciones para la existencia de una solución única, a partir de una coordinación entre los tratamientos gráfico y algebraico con el fin de dar sentido a las soluciones en cada tipo de representación (véase Figura 1.2).

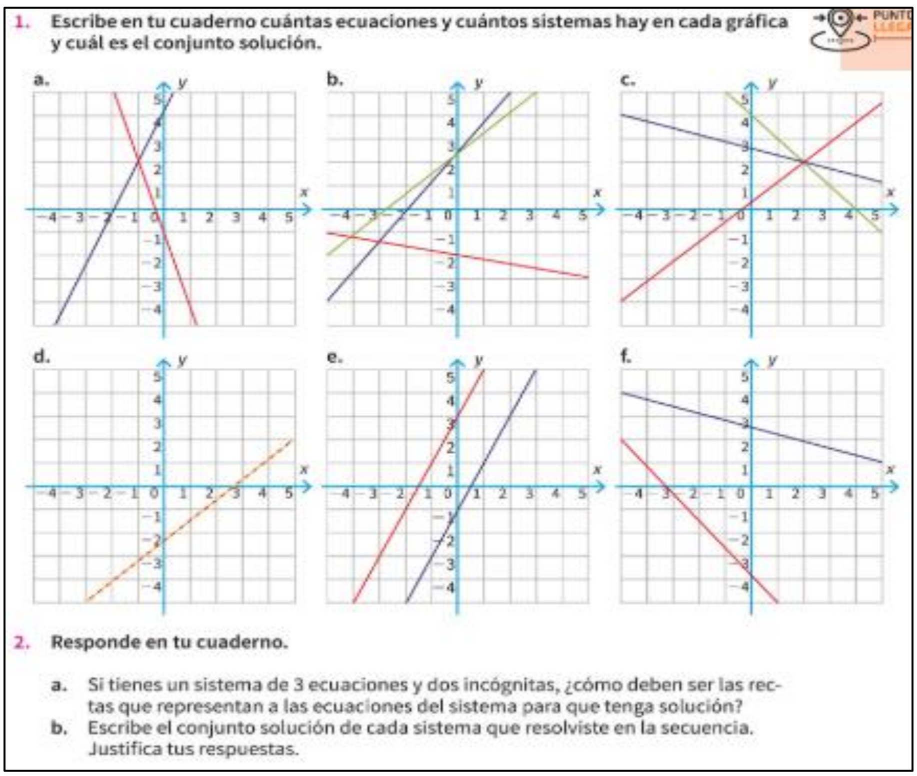


Figura 1.2 Representación gráfica SEL (Trigueros, et al., Pág.69)

Sin embargo, podemos apreciar que este tratamiento no aparece con frecuencia entre los libros que recomienda la SEP para el aprendizaje de los SEL (Bosch & Meda, 2018; Riva Palacio & Santana; 2019; Martínez & Contreras, 2019; Block, García & Balbuena, 2019) lo que hace pensar que los profesores o desconocen el caso de las infinitas soluciones para los SEL o por lo menos no lo consideran relevante, debido a que no está presente en muchos de los libros texto.

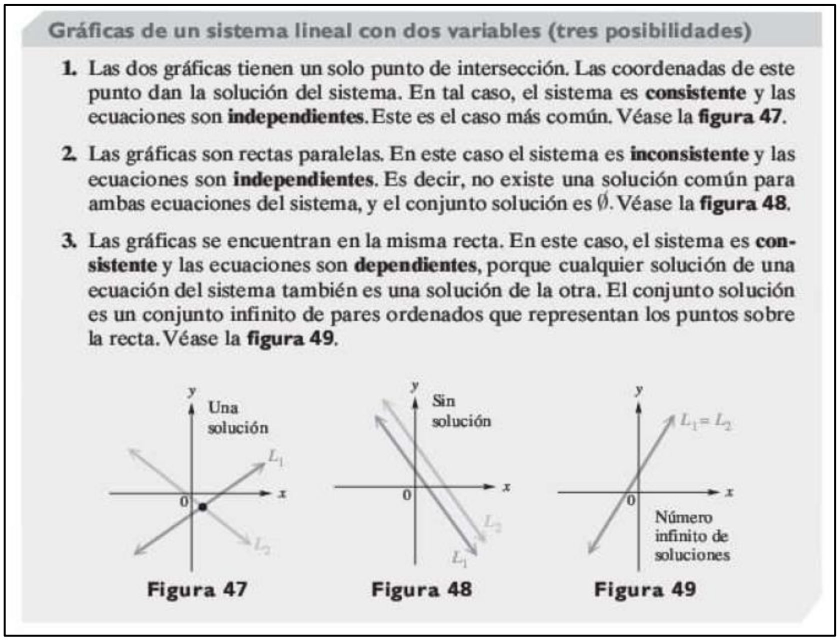
Los SEL también aparecen entre los contenidos de nivel bachillerato, después de revisar el plan de estudios que propone la Dirección General del Bachillerato

(DGB,2018) nos damos cuenta de que los SEL sólo se trabajan en el primer semestre según este programa, en el bloque *VI Ecuaciones lineales.*

En ese bloque se espera que los alumnos trabajen con ecuaciones lineales con una, dos y tres variables, además del trabajo con sistemas con dos y tres variables. Y que desarrollen determinadas habilidades, como encontrar el valor de incógnitas asociadas a un problema, también se requiere que el estudiante proponga problemas para resolver con ecuaciones lineales, en particular que usen los métodos analíticos y gráficos.

También revisamos el Programa de estudio de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) correspondiente a la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH), y observamos que los SEL sólo son tratados en el primer semestre en la *Unidad 4 Sistemas de Ecuaciones Lineales.* En este programa observamos similitudes con el que se presentó en el programa antes mencionado, por ejemplo, el trabajo con sistemas de ecuaciones de dos y tres variables se trabaja sólo con sistemas cuadrados $2x2$ y $3x3$, excepcionalmente se incluyen sistemas no cuadrados como ejercicios, pero no se les da relevancia a los problemas asociados a esta posibilidad.

En lo que respecta a los libros de texto de matemáticas que el CCH recomienda en este nivel, encontramos que en particular el libro *Matemática: Razonamiento y aplicaciones* escrito por Miller, Heeren y Hornsby (2013) quienes respecto a las soluciones de los SEL comentan que: *"Debido a que la gráfica de una ecuación lineal con dos variables es una recta, existen 3 posibilidades de solución en el conjunto solución de un sistema lineal" (pág.376)* en este texto se atienden los tipos de solución en el plano de manera gráfica (véase Figura.1.3).



Gráficas de un sistema lineal con dos variables (tres posibilidades)

1. Las dos gráficas tienen un solo punto de intersección. Las coordenadas de este punto dan la solución del sistema. En tal caso, el sistema es **consistente** y las ecuaciones son **independientes**. Este es el caso más común. Véase la **figura 47**.
2. Las gráficas son rectas paralelas. En este caso el sistema es **inconsistente** y las ecuaciones son **independientes**. Es decir, no existe una solución común para ambas ecuaciones del sistema, y el conjunto solución es $\emptyset$. Véase la **figura 48**.
3. Las gráficas se encuentran en la misma recta. En este caso, el sistema es **consistente** y las ecuaciones son **dependientes**, porque cualquier solución de una ecuación del sistema también es una solución de la otra. El conjunto solución es un conjunto infinito de pares ordenados que representan los puntos sobre la recta. Véase la **figura 49**.

Figura 1.3 Tipos de solución SEL con dos variables (Miller, Heeren & Hornsby, 2013, Pág.377)

En la Figura 1.3 se presenta un análisis gráfico de cada posibilidad (solución única, infinitas soluciones y no solución de un SEL en dos variables) como información general y se insiste en los métodos de resolución de SEL (igualación, eliminación y sustitución). Al igual que en nivel secundaria sólo se trabaja con sistemas cuadrados y las soluciones infinitas toman la forma de dos rectas que coinciden, sin embargo, este caso únicamente es mencionado.

Por otro lado, en la Figura 1.4, observamos que, en el caso donde se obtienen infinitas soluciones, estas no se interpretan como una relación parametrizada, como lo hacen Ursini y Trigueros (2004), sino que sólo se centran en establecer pares ordenados, producto de la parametrización, lo que no contribuye a la idea de variabilidad y deja en suspenso la idea de soluciones múltiples, mientras que da la idea de puntos asociados sólo a los pares ordenados, es decir, las soluciones se establecen como valores en las entradas de n-adas, sin insistir en la continuidad de estas soluciones.

En lo que respecta a la presencia del parámetro relacionado con los SEL con soluciones infinitas en estos niveles, este aparece cuando se grafica o se interpretan las soluciones infinitas, pero aunque son usados no son presentados explícitamente en ningún momento, en ningún plan de estudios ni en los libros de texto se hace referencia a ellos, a pesar de que es fundamental para la interpretación de los problemas en contexto (Ursini & Trigueros, 2004; Oktaç, 2018; Rodríguez, et al. 2019; Zandieh & Andrews-Larson, 2019).

Observemos el siguiente ejemplo:

Este enunciado verdadero, es decir, $0 = 0$, indica que la solución de una ecuación también es solución de la otra, de modo que el conjunto solución es un conjunto infinito de pares ordenados. Las dos ecuaciones son dependientes.

El conjunto solución de un sistema de ecuaciones dependientes se escribe como un conjunto de pares ordenados expresando x en términos de y, como se muestra a continuación. Se elige cualquier ecuación y se despeja x. Nosotros seleccionamos arbitrariamente la ecuación (3).

$$-4x + y = 2 \quad (3)$$

$$x = \frac{2-y}{-4}$$

$$x = \frac{y-2}{4} \quad \text{Se multiplica por } \frac{-1}{-1}.$$

El conjunto solución se expresa como

$$\left\{\left(\frac{y-2}{4}, y\right)\right\}.$$

Los pares ordenados del conjunto solución se pueden obtener seleccionando valores de y y calculando los valores correspondientes de x. Por ejemplo,

$$\text{si } y = -2, \text{ entonces } x = \frac{-2-2}{4} = -1$$

y la solución es el par ordenado $(-1, -2)$.

Figura 1.4 SEL con infinitas soluciones (Miller, Heeren & Hornsby, 2013, Pág.380)

En el ejemplo anterior notemos que para resolver el sistema se despeja cualquiera de las variables involucradas, acción que puede confundir a los alumnos si no se han aclarado este tipo de recursos, que consiste en despejar una de las variables (x en este caso) y luego presentar el conjunto solución mediante una pareja ordenada donde la expresión $\frac{y-2}{4}$ se coloca en la primera entrada y la segunda por y, procedimiento que puede estar condenando a la confusión al estudiante que ve desaparecer la x para luego encontrarla en la siguiente línea.

En este ejemplo, el uso de una nomenclatura para parametrizar el sistema puede ser obscuro para los alumnos cuando no se introduce adecuadamente, ni se explicita la parametrización. Sin embargo, si el autor hubiera considerado introducir y tratar los parámetros adecuadamente, esta ambigüedad no se hubiera presentado.

En el caso en el que se introducen SEL con tres variables, encontramos que en este libro (Miller, Heeren & Hornsby, 2013) se privilegia el método de eliminación (véase Figura 1.5) además de que no se hace uso del análisis gráfico. En este libro de texto como en (DGB,2018) no se profundiza en los distintos tipos de solución para los SEL.

A continuación, los autores plantean el siguiente SEL de dimensión 3x3:

Los métodos de solución de sistemas con dos variables se pueden ampliar para resolver sistemas de ecuaciones con tres variables como el siguiente.

$$\begin{aligned} 4x + 8y + z &= 2 \\ x + 7y - 3z &= -14 \\ 2x - 3y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

Sistema de tres ecuaciones con tres variables.

(En algunos casos, tal vez falten una o más variables en una o más ecuaciones del sistema. Como ejemplo, véase los **ejercicios 47 a 52** de la página **384**).

La gráfica de una ecuación lineal con tres variables es un *plano*, no una recta. Como la gráfica de cada ecuación es un plano, cuya gráfica es tridimensional, el método gráfico no es un método práctico de solución. Sin embargo, ilustra el número de soluciones posibles de estos sistemas, como se observa en la **figura 50**.

Solución por eliminación de sistemas lineales con tres variables

Paso 1 **Elimine una variable.** Utilice el método de eliminación en dos ecuaciones cualesquiera para suprimir una de las variables. El resultado es una ecuación con dos variables.

Paso 2 **Elimine otra vez la misma variable.** Elimine la *misma* variable usando *otras* dos ecuaciones *cualesquiera*. El resultado es una ecuación con las mismas dos variables del paso 1.

Paso 3 **Elimine una variable diferente y resuelva.** Emplee el método de eliminación para excluir una segunda variable usando las dos ecuaciones con dos variables que resultaron de los pasos 1 y 2. El resultado es una ecuación con una variable que da el valor de esa variable.

Paso 4 **Obtenga un segundo valor.** Sustituya el valor de la variable calculada en el paso 3 en cualquiera de las ecuaciones con dos variables (obtenidas en el paso 1 o en el paso 2) para calcular el valor de una segunda variable.

Paso 5 **Obtenga un tercer valor.** Utilice los valores de las dos variables de los pasos 3 y 4 para calcular el valor de la tercera variable sustituyéndolas en cualquiera de las ecuaciones originales.

Paso 6 **Obtenga el conjunto solución.** Verifique la solución en todas las ecuaciones originales. Luego, escriba el conjunto solución.

Figura 1.5 Solución por método de eliminación (Miller, Heeren & Hornsby, 2013, Pág.381-382)

Plantear los pasos para encontrar una distribución triangular contribuye a que los estudiantes supongan que los SEL se resuelven eliminando variables sin importar la cantidad de variables y ecuaciones con las que se cuenten, y también parece que los sistemas son únicamente de dimensión $2x2$ o $3x3$ ya que nunca se menciona que haya otra posibilidad.

De manera general, como producto del análisis de los contenidos de los libros en los niveles educativos explorados, suponemos que los profesores de secundaria y bachillerato tienen un manejo de los SEL en términos de los procedimientos de soluciones únicas, así como el uso de sus respectivas representaciones gráficas, las cuales ocasionalmente se asocian a las algebraicas, y en el caso en que se vinculan a estas queda la idea de que las soluciones infinitas no sirven para resolver el sistema planteado.

Asimismo, otro problema es la práctica común de trabajar sólo con sistemas cuadrados, esto sucede en casi todos los niveles educativos. Práctica que promueve entre los alumnos la idea de que todo SEL útil, es decir con soluciones productivas, es cuadrado, y esta es una idea que se mantiene hasta el nivel terciario (Oktaç, 2018; Zandieh & Andrews-Larson, 2019).

Finalmente, encontramos que los planes de estudio y por ende los libros de texto asociados, privilegian el trabajo procedimental sobre el geométrico, donde se interpreta la solución de un SEL como el punto de intersección de rectas (en $\mathbb{R}^2$) o como la intersección de planos en el espacio (en $\mathbb{R}^3$), esto con el objetivo de resolver SEL para obtener soluciones numéricas, contribuyendo con ello, a la reducción de las actividades a los procedimientos y al conocimiento de los distintos métodos de solución.

Además, la representación gráfica de los sistemas de tres variables es con frecuencia marginal en los libros de texto, por lo que los profesores deciden ocasionalmente no abordar este tipo de sistemas de manera gráfica. Y, al igual que en los libros de secundaria, se privilegian los sistemas cuadrados.

En general, en lo que respecta al tratamiento con sistemas con infinitas soluciones en el nivel medio básico notamos dos cosas, por un lado, no se profundiza en esta situación y cuando se comenta sólo se le descarta sin resolverlo. Por otro lado, no se presentan problemas o ejemplos que permitan a los alumnos interpretar y dar sentido a este objeto matemático.

Por lo tanto, una de nuestras hipótesis de trabajo es que en ocasiones se soslayan temas, como el uso explícito de los parámetros, que podrían ser relevantes para la comprensión de determinados objetos matemáticos, como es el caso del estudio de soluciones infinitas en los sistemas de ecuaciones lineales.

En el siguiente apartado, analizaremos libros de texto que son comúnmente usados en las facultades de ciencias e ingeniería, con el objetivo de examinar el tratamiento dado a los parámetros en SEL.

1.4 Parámetros y SEL en libros de texto universitarios

1.4.1 Introducción

En este apartado nos enfocaremos en el análisis de algunos libros de texto de Álgebra Lineal que comúnmente son utilizados y sugeridos en Ciencias e Ingeniería para conocer la manera cómo los parámetros son introducidos entre los estudiantes, y cuáles son las razones que se presentan para incluirlos en las soluciones de los SEL.

Por otro lado, debido a que una de las hipótesis generales de trabajo de esta investigación es que los parámetros deben ser considerados con base en su carácter dual, como constante o como variable, asunto que discutiremos más adelante, es lo que nos interesa saber, si en los libros se hace referencia a este carácter dual o no.

A continuación, con los objetivos antes mencionados, estaremos revisando el libro de texto de Espinosa et. al. (2004) sugerido para las carreras pertenecientes a la División de Ciencias Básicas e Ingeniería de la Universidad Autónoma Metropolitana (UAM), después revisamos los libros de texto que son propuestos en los programas de la Facultad de Ciencias de la UNAM comenzando con el libro de Hoffman (1971), después el de Curtis (1984) y por último la obra de Rincón (2006).

1.4.2 Análisis de libros de texto de licenciatura

En lo que respecta a las carreras relacionadas con la Ingeniería, analizamos la obra de Espinosa et. al. (2004) *Solución de sistemas de ecuaciones lineales mediante el método de Gauss-Jordan.*

En el capítulo II, se presentan SEL que son resueltos mediante el método de reducción de Gauss-Jordan. En este capítulo, los parámetros son expresados de manera implícita, es decir, parecen ser parte del procedimiento, como se muestra en la Figura 1.6:

La última matriz está en su forma escalonada reducida, ya no se puede reducir más, de donde obtenemos:

$$x + \frac{5}{8}z = \frac{3}{2}$$
$$y - \frac{9}{16}z = -\frac{1}{4}$$

despejando x, y

$$x = \frac{3}{2} - \frac{5}{8}z$$
$$y = -\frac{1}{4} + \frac{9}{16}z$$

luego x, y dependen de z, si $z = t$, $t \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\begin{aligned} x &= \frac{3}{2} - \frac{5}{8}t \\ y &= -\frac{1}{4} + \frac{9}{16}t\ ; \quad t \in \mathbb{R}. \\ z &= t \end{aligned}$$

Es decir, el sistema de ecuaciones tiene una infinidad de soluciones ya que para cada valor de t habrá un valor para x, y, z.

Figura 1.6 Uso de parámetro en un SEL (Espinosa et. al., 2004, Pág.17)

Aquí percibimos que no hay introducción que justifique la aparición del parámetro t, el cual, si bien es necesario para dar una solución del SEL no hay criterio que diga cómo ni cuándo usarlo, acción que es sugerida cuando se hace referencia a *"…ya no se puede reducir más"* y a continuación se busca una variable común que da pie a la introducción del parámetro.

Eludir dicha explicación puede generar la idea errónea de que simplemente se sustituye una variable por otra, en este caso de $z = t$ sugerido por el hecho de "*que no se puede reducir más* [el sistema]" *(pág.17)* y aún tenemos variables que trabajar, pero esto tampoco se aclara, ni se explica por qué el método usado para resolver así lo requiere y esto parece ser parte del procedimiento.

El problema anterior es un ejemplo usual donde se tienen más variables que ecuaciones, caso que inevitablemente conduce a la infinidad de soluciones, donde se obtiene una o varias expresiones algebraicas de dos o más variables que son dependientes una de las otras.

La consigna original en este tipo de problemas es encontrar un valor numérico para las incógnitas x, y, z, y el parámetro sirve como intermediario para ese objetivo, en esta situación su carácter dual es el que permite obtener una solución a través de una expresión parametrizada para luego obtener las soluciones al dar valores a t, pero nada de esto se dice.

Esta práctica es común a lo largo de este capítulo, además de que se acostumbra a usar la literal t para el parámetro lo que se pretende haría la diferencia entre las variables y estos. Consideramos que esta nomenclatura refleja una necesidad de uso, pero no se apoya con un fundamento algebraico, sino que se relaciona aparentemente con cierto tipo de significado, es decir, t es un parámetro, pero x no, lo cual, si bien establece una advertencia para el usuario, no aclara la naturaleza de las variables frente a los parámetros, sólo permite que el estudiante perciba una diferencia de notación entre ellos y tome precauciones.

En el capítulo III, *Análisis de sistemas de ecuaciones lineales que involucran constantes adicionales para que el sistema tenga o no solución*, observamos un enfoque particular en el tratamiento de los SEL, como podemos ver en el siguiente ejemplo (véase Fig.1.7) en el que se introduce al parámetro como una constante.

En esta parte se dan ejemplos de sistemas de ecuaciones lineales donde se determinan valores de constantes para que el sistema tenga o no solución.

15) Obtener el valor de λ para que el sistema de ecuaciones:

$$2x + y = 6$$
$$x + \lambda y = 4$$

tenga:

a) Solución única.

b) Infinidad de soluciones.

c) Carencia de solución.

Figura 1.7 Uso de parámetro en un SEL (Espinosa et. al., 2004, Pág.25)

El uso de λ en el siguiente ejercicio no se aclara que se trata de un parámetro, y promueve la idea, como en el caso comentado anteriormente, que el tipo de letra es el que permite distinguirlo de las variables comunes, es decir, λ es introducido en el SEL sin que medie explicación alguna sobre la función que tiene como constante, en este caso en los tres momentos mencionados en el ejercicio.

También analizamos algunos libros de texto de Álgebra Lineal, que son recomendados en la bibliografía de los planes de estudio de las distintas carreras que se ofertan en la Facultad de Ciencias de la UNAM (Actuaría, Ciencias de la computación, Física, Física Biomédica y Matemáticas). En particular analizamos *Linear Algebra* de Hoffman (1971), *Linear Algebra an Introductory Approach* de Curtis (1984) y *Álgebra Lineal* de Rincón (2006).

Un objetivo específico para lograr en el plan general de la UNAM es: resolver SEL utilizando diferentes herramientas de Álgebra lineal, un ejemplo es el que presenta Hoffman (1971) en el capítulo 1 *Linear Equations* donde se introduce al lector el concepto de campo para definir un SEL de la siguiente manera:

Suppose F is a field. We consider the problem of finding n scalars (elements of F) $x_1, \ldots, x_n$ which satisfy the conditions

$$
\begin{array}{ll}
 & A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots + A_{1n}x_n = y_1 \\
\text{(1-1)} & A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \cdots + A_{2n}x_n = y_2 \\
 & \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\
 & A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \cdots + A_{mn}x_n = y_m
\end{array}
$$

where $y_1, \ldots, y_m$ and A_{ij}, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, are given elements of F. We call (1-1) a **system of m linear equations in n unknowns.**

Figura 1.8 Definición de SEL (Hoffman, 1971, Pág.3)

En este texto se usa un lenguaje que permite economizar el trabajo con los SEL, también se proporcionan teoremas y métodos que servirán para resolverlos.

En cuanto a la presencia y uso de parámetros, estos aparecen, pero no como parte explícita del contenido, sino nuevamente como un recurso útil para las necesidades de solución, como se puede observar en la Figura 1.9, con la asignación de un *c* para obtener la solución del sistema que es presentado como una matriz.

EXAMPLE 5. Suppose F is the field of rational numbers, and

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

The row-equivalence of A with the final matrix in the above sequence tells us in particular that the solutions of

$$
\begin{aligned}
2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 0 \\
x_1 + 4x_2 \qquad\quad - x_4 &= 0 \\
2x_1 + 6x_2 - x_3 + 5x_4 &= 0
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
x_3 - \tfrac{11}{3}x_4 &= 0 \\
x_1 \qquad + \tfrac{17}{3}x_4 &= 0 \\
x_2 \qquad - \tfrac{5}{3}x_4 &= 0
\end{aligned}
$$

are exactly the same. In the second system it is apparent that if we assign any rational value c to x_4 we obtain a solution $(-\frac{17}{3}c, \frac{5}{3}, \frac{11}{3}c, c)$, and also that every solution is of this form.

Figura 1.9 Presencia de parámetro como un valor *C* (Hoffman, 1971, Pág.9)

En este problema, el parámetro se muestra mediante la sustitución de una variable (x_4) por una literal (c), el texto dice: *"es evidente que si asignamos cualquier valor racional c a x_4 obtenemos una solución …" (pág.9)* en este caso los parámetros parecen ser de utilidad procedimental y que, bajo ciertas condiciones, como la evidencia que se menciona, se debe desarrollar como parte de una especie de ritual de sustitución.

El parámetro nunca aparece en el libro como una redefinición de una variable por otra, con diferentes propiedades, aunque es el parámetro el que permite expresar la solución general, obscureciendo de esta manera el doble papel de este, así como las condiciones mediante las cuales aparece y puede ser usado.

Cuando los libros presentan las soluciones de los SEL que tienen más variables que ecuaciones, el uso de ciertos procedimientos imperantes nos sugieren que debemos llegar necesariamente a sistemas triangulares, los que son muy útiles, pero esto hace que la variable que aparece en el extremo inferior derecho sea la que se sustituya obligadamente por el parámetro y en ningún caso se comenta que es posible usar el parámetro asociado con otra variable de las disponibles en el sistema, lo que incrementa la apariencia de que esta y no otra es la variable que debe ser sustituida.

Este procedimiento, como ya hemos visto, termina siendo parte de un aparente ritual que se lleva a cabo en la resolución de los SEL y deja de lado la posibilidad de usar otras variantes para resolver el mismo sistema, enseguida proponemos las formulaciones para $x_1, x_{2\ y}\ x_3$ para el parámetro *c:*

Con $x_1 = c$ la solución es $\left(c, \frac{-5c}{17}, \frac{-11c}{17}, \frac{-3c}{17}\right)$ la cual cumple para cada ecuación.

Con $x_2 = c$ la solución es $\left(\frac{-17c}{5}, c, \frac{11c}{5}, \frac{3c}{5}\right)$ la cual, si verificamos, es válida para cada ecuación.

Con $x_3 = c$ la solución es $\left(\frac{-17c}{11}, \frac{5c}{11}, c, \frac{3c}{11}\right)$ que también es válida para el SEL.

Como podemos observar, aquí hemos obtenido 3 formulaciones distintas de solución para el sistema mencionado, las cuales son linealmente dependientes, es decir, mediante una serie de operaciones de producto y/o suma se pueden obtener otras expresiones equivalentes, que describe el mismo conjunto solución.

Este tratamiento no es mencionado por el autor en este tipo de problemas, asimismo, en la línea que explicita: *"…y también que toda solución es de esta forma*

$\left(\frac{-17c}{3}, \frac{5}{3}, \frac{11c}{3}, c\right)$" (pág.9) nos da una imagen incompleta del conjunto solución, además de que no es correcta en este caso, la solución correcta con $x_4 = c$ es la siguiente: $\left(\frac{-17c}{3}, \frac{5c}{3}, \frac{11c}{3}, c\right)$.

De manera que, para cada procedimiento en el que elijamos una variable particular, tendremos una expresión que nos proporciona el conjunto solución, y entonces contamos con cuatro distintas formas de expresar el mismo conjunto en este caso, de manera que las soluciones del sistema en cuestión tienen cuatro distintas formas de representarse.

En la mencionada cita, el autor también declara que: *"toda solución es de esta forma" (pág.9)* lo que se entiende de tres maneras 1) Que existe una única forma general para obtener soluciones, lo cual es un error, 2) Esta solución parametrizada es la única y posible solución, lo cual también es un error y 3) Todas las variables se pueden expresar en términos de x_4 lo que pareciera que se debe usar esta variable y no otra.

En lo que respecta al libro de Curtis (1984) (véase Figura 1.10) ahí se plantea la solución general del SEL, en la cual de manera repentina aparecen los parámetros λ y μ, sin embargo, en este caso, son tomados como dos números reales arbitrarios, lo que podría dar la idea de que se trata de variables, pero no se hace mención de ello, aunque pareciera que la nota: "*donde λ y μ son números reales arbitrarios*" *(pág.66)* hace referencia a la variabilidad, pero en realidad sólo se establece el dominio de definición.

Example B. Find the general solution (i.e., all solutions) of the system of nonhomogeneous equations

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0. \end{aligned}$$

By Theorem (8.9), the general solution is given by

$$u = x_0 + x$$

where x_0 is a solution of the nonhomogeneous system and x ranges over the solutions of the homogeneous system. Applying the results of Example A of Section 8 and Example A of this section, we have for the general solution,

$$\begin{aligned} u &= \langle -1, 1, 0, 0\rangle + \lambda\langle -\tfrac{5}{4}, 1, \tfrac{1}{4}, 0\rangle + \mu\langle -1, 0, 0, 1\rangle \\ &= \langle -1 - \tfrac{5}{4}\lambda - \mu, 1 + \lambda, \tfrac{1}{4}\lambda, \mu\rangle. \end{aligned}$$

where λ and μ are arbitrary real numbers.

Figura 1.10 Uso de parámetros λ *y* μ (Curtis, 1984, Pág.66)

De forma paralela, en el libro de Rincón (2006) se proponen soluciones generales donde aparecen parámetros, de los que tampoco se aclara su naturaleza, ni bajo qué condiciones deben usarse, por lo que el estudiante debe interpretar cuál situación es la que lo obliga a usarlos como parte del aparente ritual de resolución, con la diferencia que aquí (véase Figura 1.11) se introduce un parámetro t que pertenece al campo F sin aclarar porque motivo debe ser considerado.

Ejemplo 71 *Consideremos el sistema*

$$x+2y+z=1$$
$$x+2y-z=2$$

cuya matriz aumentada es $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \bowtie \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, *intercambiando la segunda columna con la tercera, obtenemos*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

el sistema correspondiente tiene solución

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in F,$$

intercambiando los renglones (en realidad, coordenadas) 2 y 3 obtenemos las soluciones del sistema original:

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in F.$$

Figura 1.11 Uso de parámetro t (Rincón, 2006, Pág.134**)**

En suma, en este apartado nos enfocamos en detectar el uso que se da a los parámetros en las soluciones de los SEL en algunos de los libros de texto universitarios, en los que notamos similitudes. Por un lado, encontramos que los parámetros aparecen cuando el SEL tiene infinitas soluciones, sin embargo, nunca se aclara por qué y para qué deben usarse, lo que hace del parámetro un comodín o como parte de un aparente ritual de sustitución para resolver sistemas con más variables que ecuaciones, si bien el parámetro es usado como una constante (Espinosa et. al., 2004, Pág.25) o como una variable (Hoffman, 1971, Pág.9) no se hace explicito su papel, lo cual invisibiliza el carácter dual de este.

Con base en el análisis anterior, entendemos la importancia instructiva de los procedimientos algebraicos, que son usados para postular y resolver SEL, sin embargo, para dar un uso eficiente al parámetro como el que se lleva a cabo en la vida cotidiana como la Economía, la Medicina o cualquier Ciencia que requiera de SEL y que sea imperante enfrentarse a infinitas soluciones, los parámetros permiten encontrar soluciones válidas en este tipo de casos (Liern & Acuña, 2020).

1.5 A manera de síntesis

En este capítulo analizamos libros de texto tanto de educación básica-media hasta de nivel terciario, debido a que consideramos que sus contenidos son el conocimiento base con el que cuentan los profesores para su práctica docente y que es la información que requerimos para el planteamiento del parámetro como variable de control.

En esta inspección de los planes de estudio y los libros de texto de educación básica y media superior observamos que:

1) En los SEL y sus soluciones se hace énfasis en los procedimientos algebraicos donde se espera que los alumnos utilicen algún método (eliminación, sustitución o graficación) donde el objetivo final es resolver tales sistemas.
2) Sólo se abordan sistemas cuadrados, las soluciones son únicas y numéricas.
3) El caso de SEL con infinitas soluciones no es contemplado en los contenidos, se menciona sólo en muy pocos libros, por lo que es posible que algunos profesores no lo consideren como un contenido relevante en la instrucción.

En lo relativo a los parámetros en el nivel terciario, la aparición de estos se da de manera repentina como parte de una especie de ritual de sustitución, donde el parámetro es usado como una constante o como una variable según convenga, pero no se menciona ni se aclara por qué esto es posible, obscureciendo de esta manera su carácter dual, provocando que el estudiante se oriente a través de frases como "*no se puede reducir más*" o "*es evidente que si asignamos cualquier valor racional c a x_4 obtenemos una solución …*" o en el peor de los casos se entera de que debe usar otro tipo de "*variable*" cuando cambia el tipo de letra.

La inspección desarrollada nos indica que, los conocimientos base respecto a el tratamiento de los Sistemas de Ecuaciones Lineales se centra en los distintos procedimientos para resolverlos y que pocas veces se hace referencia a las soluciones infinitas, las que no se resuelven y en el mejor de los casos se les acompaña de representaciones gráficas que muestran dos rectas sobre puestas.

Por lo anterior, pensamos que es posible aprovechar la información procedimental adquirida por parte de los profesores para adoptar al parámetro, en particular como una *variable de control*, de manera que se amplíen los recursos para resolver los sistemas con soluciones infinitas con la propuesta que planteamos en esta investigación.

Por lo tanto, nuestro objetivo de investigación se relaciona con la indagación de la forma cómo los profesores de distintos niveles educativos, con conocimientos de resolución de SEL, adoptan la propuesta del uso pragmático del parámetro como una variable de control, enfatizando su papel como variable o como constante, para abordar las infinitas soluciones de SEL de dimensión 2x3.

En adelante estaremos abordando el marco referencial que apoya la presente investigación.

2. Marco Referencial

2.1 Introducción

El marco teórico que sustenta esta investigación hace referencia a la Teoría de la Objetivación (TO). La TO ha sido utilizada para interpretar el desarrollo del conocimiento de los estudiantes cuando enfrentan nuevos saberes, sin embargo, en este caso estaremos proponiendo a los profesores un conocimiento que, sin ser completamente desconocido, no es manejado como parte de la enseñanza institucional.

En esta investigación abordamos la introducción de una idea pragmática de los parámetros, con un enfoque que sugiere el uso del parámetro como un elemento de control mediante el uso de tres tipos de artefactos.

Dado que propondremos la idea de parámetro como un artefacto que es usado para resolver SEL con soluciones infinitas, este marco teórico nos proporciona una base para entender el proceso de su adopción haciendo uso de los siguientes constructos: la práctica reflexiva, el uso de artefactos, la mediación semiótica y el conocimiento co-producido.

En nuestra postura respecto al tratamiento dual del parámetro, como variable y constante, consideramos de importancia el tratamiento histórico dado a este concepto, por lo que mencionaremos algunos momentos de este proceso histórico debido a que los parámetros resolvieron problemas que involucraban tanto a las variables como a las constantes.

En lo que respecta a la enseñanza de los SEL y de los parámetros entre los estudiantes, estaremos revisando resultados de investigación con el objeto de apreciar qué tipo de problemáticas son enfrentadas por los profesores en la enseñanza de esos contenidos.

También incluiremos en la propuesta entornos que funcionan como artefactos para el desarrollo de la mediación semiótica, estos artefactos son de carácter gráfico y contextual. Semióticamente están diferenciados, pero en ambos casos proporcionan recursos para la interpretación de las soluciones infinitas y para establecer aquellas que son válidas, dando sentido al uso del parámetro.

A continuación, en el primer punto describiremos los aspectos teóricos de la Teoría de la Objetivación, que servirán de sustento para esta investigación.

2.2 Teoría de la Objetivación

La Teoría de la Objetivación (TO) de Luis Radford está inspirada inicialmente en el materialismo dialéctico y en la escuela histórico-cultural de Vygotski. Alejándose de las aproximaciones subjetivistas del aprendizaje (como el empirismo y el constructivismo) y de las epistemologías tradicionales sujeto-objeto. En esta teoría se concibe la enseñanza y el aprendizaje de la matemática como un único proceso que implica tanto el saber como el ser.

Los aspectos antes mencionados descansan sobre cuatro principios fundamentales: el *epistemológico*, en el cual se reconoce que conocer es una instanciación del saber; el *ontológico*, donde se reconoce una diferencia entre el *saber potencial y actual*, esto quiere decir que el saber es una posibilidad, mientras que el conocimiento es la actualización del saber educativo, en donde el aprendizaje es concebido como un proceso cultural de objetivación vinculado a un principio ético, en el que se considera al sujeto como condicionado por un conjunto de relaciones sociales y culturales (Radford, 2015).

Para la TO, el objetivo de la Educación Matemática reside en un esfuerzo político, social, histórico y cultural dirigido a la creación dialéctica de sujetos reflexivos y éticos que se posicionan críticamente en prácticas matemáticas, constituidas histórica y culturalmente y que reflexionan sobre nuevas posibilidades de acción y pensamiento (Radford, 2020).

Como resultado, la atención al aprendizaje de la matemática no se enfoca únicamente en el contenido matemático (la dimensión del saber), sino que también se centra en el ser (en la dimensión del sujeto). Al enfocarse en el saber y en el ser, la TO redefine los conceptos de saber y aprendizaje de manera coherente con una aproximación histórico-cultural, donde estos conceptos son reformulados, no como dos procesos diferentes, sino como uno mismo, es decir, como desarrollados por profesores y estudiantes en una *labor conjunta*, a través de la cual se producen saberes relativos a la matemática.

2.2.1 Labor conjunta

De acuerdo con Radford (2020) el saber se define como un sistema de sistemas, es decir, un sistema de procesos corpóreos, sensibles y materiales de acción y reflexión, constituidos histórica y culturalmente. La idea principal, es que al nacer cada sujeto se encuentra frente a un sistema de formas de pensar y concebir el mundo (sistemas de pensamiento matemático, científico, legal, etc.) en el que se va a sumergir. Ese saber que ya estaba allí frente a nosotros al momento de nuestro nacimiento, está siempre en movimiento y transformación continua y cambia de cultura en cultura.

El saber es producido en la actividad humana y es más que una tecnología para hacer algo. El saber, en efecto, se considera altamente estético, simbólico y político. Desde este punto de vista, el saber no puede ser algo así como una cosa de la que podamos *"apropiarnos"* o que podamos *"poseer"* es decir, el saber no es algo que se adquiere o que se transmite, tampoco es algo que el alumno o profesor construyen, sino que está constituido por sistemas de acción y de reflexión incrustados en la cultura, esta idea se refiere a la información que está en la frontera entre lo matemáticamente aceptado y lo que se transforma en saber cultural. De manera resumida, como lo hace notar Radford (2020) el saber: es algo que está en la cultura y que podemos (o no) encontrar en el curso de nuestra vida, dependiendo de las redes culturales-históricas-políticas de acceso a este y que operan ubicuamente en nuestra sociedad.

En cuanto al aprendizaje, en la TO este se determina en función de dos procesos simultáneos y entrelazados, tales procesos son el de *objetivación* y *subjetivación*. Dichos procesos aparecen ligados al concepto central de la TO, es decir el concepto de actividad, el cual es teorizado como una labor conjunta (la labor conjunta entre el profesor y los estudiantes).

Radford (2014) propone la idea de labor como *"una forma social de acción conjunta que incluye nociones de expresión del sujeto que labora"* (pág.137). Esto quiere decir, que en la labor conjunta nos relacionamos con las dimensiones físicas (ostensivas) y conceptuales del mundo, de acuerdo con las formas de pensar y actuar asociadas a los sistemas de ideas y a los significados que se encuentran a disposición en la cultura. Finalmente, como expresa Radford (2004) *"las actividades que realiza un individuo no son simplemente de él, pues dichas actividades han sido configuradas en el curso de un proceso filogenético" (pág. 7).*

2.2.2 Mediación Semiótica

Respecto al proceso de aprendizaje, en este marco se constituye a partir de la interacción social del sujeto y de los recursos semióticos que medien en el desarrollo de la actividad asociada a la resolución de problemas. De manera que los medios semióticos de objetivación (objetos, gestos, sistemas de signos) son instrumentos que poseen una carga histórica y cultural en el proceso de objetivación, y que permiten *"una forma estable de conciencia"* para hacer aparecer la intencionalidad de la labor y organizar las acciones que se desarrollan para lograr el objetivo de esta (Radford, 2010).

Desde la perspectiva de la TO, el pensamiento como expresión de la actividad cognitiva deja de ser un concepto mental. Por lo que Radford (2006) lo define como *"una reflexión mediatizada del mundo, de acuerdo con la forma o modo de la actividad de los individuos" (p. 107).* Por lo tanto, el pensamiento al ser una práctica social es encarnado en recursos semióticos presentes en el sistema cultural sobre el que subyace. Es decir, el pensamiento es mediatizado por los recursos semióticos que emergen en el transcurso de la actividad y que, al estar inmersos en una cultura, vienen cargados de los significados propios de ella.

2.2.3 Práctica Reflexiva

Desde el punto de vista de la TO, lo que caracteriza al pensamiento no reside solamente en su naturaleza semióticamente mediatizada, sino sobre su modo de ser en tanto que praxis reflexiva. De manera que, la actividad reflexiva del pensamiento es la que sintetiza los objetos matemáticos, pues estos se entienden como *"patrones fijos de actividad reflexiva incrustada en un mundo en cambio constante de la práctica social mediatizada por los artefactos" (Radford, 2006, pág. 111).*

Por lo tanto, de acuerdo con este marco, una de las fuentes de adquisición del saber, resulta de nuestro contacto con el mundo material, pero se señala que la inteligencia no está encarnada en los artefactos, sino que es necesario el uso de estos en actividades de reflexión. De modo que, un principio fundamental aquí, es el concepto de lo que el autor ha llamado la *práctica reflexiva.* Esta contempla que los artefactos median simbólicamente el aprendizaje, que estos están histórica y culturalmente determinados, que dejan su huella en este proceso y que la interacción social juega un papel fundamental para que esa reflexión llegue a buen término.

En fin, de manera resumida, el saber en la TO es concebido como el producto de una praxis cognitiva reflexiva y mediatizada. Esto quiere decir que lo que conocemos y la manera en que llegamos a conocerlo esta circunscrito por posiciones ontológicas y procesos de producción de significados, que dan forma a cierta clase de racionalidad que deviene en subjetivación. De acuerdo con Radford (2004) la naturaleza reflexiva del saber debe entenderse en el sentido de Ilyenkov (1977) es decir, *"como la componente distintiva que hace de la cognición una reflexión intelectual del mundo externo según las formas de la actividad de los individuos" (pág. 252).* De acuerdo con lo anterior, el carácter mediatizado del saber se refiere al papel que desempeñan los objetos, artefactos e instrumentos en la realización de la praxis cognitiva (en la

TO no se hace referencia a la praxis como una práctica contemplativa, sino a la actividad humana sensual y concreta desarrollada con un objetivo).

2.2.4 Artefactos

Desde el punto de vista de Radford (2006) para la Teoría de la Objetivación la producción de significados se focaliza y se desarrolla a través del uso de artefactos y la interacción social, estos son recursos que operan de manera vinculada y es en esa interacción donde la relación sujeto-objeto tiene importancia para que el alumno logre apropiarse del saber cultural y de los objetos subyacentes en la actividad reflexiva. En ese sentido, los artefactos se establecen como una parte constitutiva del objeto en la actividad reflexiva, y esta puede llevar a una toma de conciencia progresiva de algo que con su presencia nos objeta, esto es, a lo que se le llama *proceso de objetivación*, como una elaboración activa de significados.

De modo que, debemos tener en cuenta que el *proceso de objetivación* se establece a partir de dos fuentes de elaboración de significados: la interacción social y la interacción por intermedio de los artefactos (objetos, instrumentos o sistemas de signos). Así pues, los artefactos forman lo que en la TO se conoce como recursos semióticos (Radford, 2010), que poseen una inteligencia histórica y cultural depositada en ellos y, al mediatizar la actividad, se convierten en medios semióticos de objetivación. Estas características permiten entender que *"el aprendizaje es esencialmente un proceso social de objetivación mediado por una actividad semiótica multisistémica"* (Radford, 2006). Por lo que, los artefactos no se refieren únicamente al objeto, sino que este sólo alcanza la categoría de herramienta de mediación semiótica cuando es parte de una práctica reflexiva, para y a través de él.

2.2.5 Conocimiento y saberes

Como se ha venido comentando y de acuerdo con Radford (2015) la TO descansa en el materialismo dialéctico, por lo que este marco sostiene la idea materialista dialéctica del conocimiento, la cual hace una distinción entre el saber *Potencial* (algo que puede suceder, es decir, pura posibilidad) y el saber *Actual* (lo que está pasando). Lo que incluye al saber cómo sujeto de posibilidades de desarrollo del pensamiento en el que es posible tomar cursos de acción o imaginar nuevas formas de pensar y hacer las cosas, etc.

Entonces, el saber cómo posibilidad (lo potencial) se refiere a que el conocimiento no es inmediato, es decir, para lograr que este se convierta en un objeto de pensamiento y conciencia, tiene que ponerse en movimiento. Es decir, tiene que adquirir determinaciones culturales (Radford, 2015). De forma que la única manera en que el conocimiento puede adquirir sentido y determinaciones culturales es a través de actividades específicas (prácticas reflexivas).

De forma concreta, el saber (potencial) puede convertirse en un objeto de pensamiento (que es actualizado) e interpretación sólo si es puesto en movimiento y se convierte en un objeto de los sentidos y la conciencia a través de actividades reflexivas específicas sensuales y mediadas por signos (Radford, 2015).

2.2.6 Tipos de Artefactos en esta investigación

En esta investigación proponemos poner en funcionamiento la articulación de un conjunto de artefactos semióticos de distinto tipo, que al ser coordinados, permiten que el saber potencial (la existencia de infinitas soluciones de un SEL, así como los métodos de solución) pueda convertirse en un objeto de pensamiento e interpretación al ser puestos en movimiento a través de una práctica reflexiva por parte de los profesores, lo que posibilitará que ese conocimiento se actualice, es decir, se convierta en un objeto de los sentidos y la consciencia, por medio de la interpretación del parámetro como *variable de control* en las actividades de resolución e interpretación de SEL y el análisis de problemas en contexto con condiciones específicas, mediadas por signos y artefactos que serán progresivamente planteados: *la variable de control, la representación gráfica y los problemas en contexto.*

Lo anterior con el objetivo de llegar a formular una idea parametrizada de solución, de parámetro como variable de control, de solución infinita como la unión de soluciones válidas, de la gráfica como objeto matemático, y del problema en contexto.

Los artefactos que se articulan en esta investigación se refieren a:

- La consideración del parámetro como una variable de control con carácter dual, es decir, que esta funciona como una constante o como una variable y con apoyo en ella se logra una expresión parametrizada, luego de transformar el SEL rectangular a un sistema cuadrado, que es resuelto mediante un programa que calcula el conjunto solución de un SEL. Este artefacto se basa en una definición del parámetro y un procedimiento para el cálculo de la solución parametrizada.

- Las representaciones gráficas asistidas por un software de geometría dinámica para los conjuntos solución en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ mediante la interpretación simultánea de los planos y las rectas asociadas a través del uso de un deslizador (que muestra la variación de la variable de control) para visualizar las soluciones válidas dinámicamente, de manera que estas pueden ser mostradas asociadas a sus propiedades, para luego tomar una decisión sobre las más convenientes.

- φ El análisis y solución de problemas en contexto con condiciones específicas, lo que contribuye a dar cuerpo y sentido a la toma de decisiones sobre aquellas que son válidas, dadas condiciones específicas, aun siendo un conjunto continuo.

La articulación de todos estos artefactos permitiría momentos de actividad reflexiva y la producción de nuevos saberes respecto a la idea de solución infinita de los SEL, como aquellos que cumplen con las condiciones establecidas, la idea de parámetro como *variable de control* y la de infinitas soluciones controladas mediante esta y que son aplicadas a condiciones en contexto.

Para que se logré la activación de todos estos artefactos y se contribuya con la coproducción de nuevos saberes, conjeturamos que se requiere de una práctica reflexiva promovida por el investigador junto con los profesores de nuestra muestra, en donde estos artefactos entran en juego y son esencialmente de dos tipos distintos:

- φ **De tipo procedimental:** se refieren a las acciones, procedimientos, métodos, etc. que se realizan sobre el objeto de estudio (SEL y parámetros) para obtener las soluciones.
- φ **De tipo cognitivo:** son aquellos que contribuyen a la comprensión de los objetos, partiendo de una definición adecuada para el tratamiento de los parámetros, interpretando las soluciones parametrizadas desde el punto de vista del álgebra y la gráfica, lo que permite reflexionar sobre sus propiedades, las condiciones establecidas por los SEL sobre las infinitas soluciones y estar en posibilidad de tomar decisiones sobre estas.

Desde nuestro punto de vista, el proceso de actualización del conocimiento matemático entre profesores puede ser visto a través de los componentes de la cultura y la socialización del saber, en el terreno de una labor conjunta, la que hará uso de artefactos culturales para desarrollar una mediación semiótica, a través de una práctica reflexiva que ponga en movimiento tales artefactos. Lo que en esta investigación significa poner en movimiento un sistema de artefactos, que hemos diseñado con el fin de introducir la idea del parámetro como *variable de control* entre los docentes, lo que probablemente será una aportación novedosa para ellos, debido a que este planteamiento no aparece en los libros de texto como parte de los contenidos relevantes a desarrollar, lo que nos hace suponer que estos no han tenido oportunidad de incluirlo como parte de sus saberes.

En la siguiente sección, se ilustra brevemente el desarrollo histórico del concepto de parámetro, seguido de resultados de investigación relativos al papel del contexto en la educación matemática, posteriormente presentamos una postura sobre el rol de la visualización en la matemática y en la educación.

2.3 El parámetro desde una perspectiva histórica.

En este apartado se esboza brevemente el desarrollo histórico del concepto de parámetro, que se ha venido ligando al concepto de variable al ser considerado un tipo especial de esta (Furinghetti & Paola, 1994; Ursini & Trigueros, 2001; Drijvers, 2001,2003).

En el desarrollo histórico del concepto de variable y posteriormente con el de parámetro, se reconocen tres etapas: (1) La retórica o etapa temprana (2) la etapa sincopada o intermedia y (3) la simbólica o etapa final. (Harper, 1987; Drijvers 2003; Merzbach & Boyer, 2011).

La etapa retorica comprende un periodo de tiempo desde la antigüedad (Griegos, Egipcios & Babilonios) hasta la época de Diofanto (hacia el año 250 D.C.) esta se caracteriza porque los problemas y sus soluciones se resolvían en lenguaje común (no matemático-simbólico) que ya mostraba cierta estructura procedimental, además, las palabras no se abreviaban y no habían símbolos para las incógnitas.

La etapa sincopada o intermedia abarca un periodo desde Diofanto hasta Viète (1540 - 1603) en la cual se introdujeron notaciones de forma abreviada, un ejemplo es la introducción del símbolo de potencia por Simon Stevin (1548-1620) y algunos símbolos para representar cantidades desconocidas, por ejemplo, Diofanto utilizaba ζ para representar incógnitas, él resolvía ecuaciones con una y dos incógnitas, pero utilizando el mismo símbolo.

En este periodo se requirió un sistema simbólico fácil de utilizar para facilitar el trabajo algebraico y para encontrar soluciones a ecuaciones algebraicas, sin embargo, el tratamiento tenía como objetivo encontrar el valor numérico de la incógnita(s), es decir, las soluciones eran números y no expresiones algebraicas generales como sucedió tiempo después. Con respecto a la solución de ecuaciones, en los escritos de los babilonios como en el primer libro de Diofanto, sólo se trataban problemas con el mismo número de incógnitas que de ecuaciones. (Van der

Waerden, 1983 como se citó en Drijvers, 2003). Sin embargo, en sus últimos libros, Diofanto resolvió sistemas con más variables que ecuaciones, cuyas soluciones son infinitas (a las que llamó sistemas de ecuaciones indeterminados) y las que actualmente requieren de los parámetros para escribirlas de forma general.

Con el tiempo se utilizaron letras diferentes para las distintas incógnitas, pero aún no aparecían soluciones generales que después se abordaron en términos de los parámetros. Además, entre el año 250 y el 1600 D.C, los algebristas fueron ampliando el tipo de ecuaciones que podían resolverse, en un inicio las cuadráticas y posteriormente las cúbicas (Tartaglia, 1535; Cardano, 1539; Ferrari, 1547), pero todas tenían coeficientes numéricos y las soluciones se expresaban exclusivamente en este tipo de términos, lo que conlleva un problema, que las *"soluciones generales"* con letras no podían expresarse, a falta del concepto de parámetro. En el siglo XIII, Jordanus Nemorarius (1225 - 1260) en su obra *De Numeris Datis* utilizó variables literales para las incógnitas, pero también para los valores conocidos (constantes), es decir, para lo que hoy tenemos como parámetros.

El punto de partida de la última etapa, la simbólica, fue con François Viète (1540 - 1603) y la publicación de su obra *The Analytic Art*, donde presentaba un nuevo sistema simbólico, en el cual utilizó una vocal para representar una cantidad desconocida o indeterminada y una consonante para representar una magnitud o un número que se suponía conocido o dado (constante) (Merzbach & Boyer, 2011). Posteriormente, la comunidad matemática comenzó a adoptar este nuevo sistema simbólico, tal como sucedió con Descartes, quién utilizaba las letras del principio del alfabeto para los valores dados y conocidos, y las letras del final del alfabeto para las incógnitas (Fauvel & Gray, 1987).

A raíz de los trabajos de Viète, es como Newton, Leibniz, Euler, L'Hôpital entre otros, pudieron desarrollar el concepto de función, donde las antiguas incógnitas tienen el carácter de una cantidad que cambia dinámicamente (cantidades cambiantes), como las variables actuales y como postula L'Hôpital (1696) en su obra *Analyse des Infiniment Petits,* se presentaron de la siguiente manera:

Definition I Variable quantities are those that continually increase or decrease; and constant or standing quantities, are those that continue the same while others vary. (Pág.313)

Con respecto a la definición anterior, Fauvel y Gray (1987) comentan: *"Como las ordenadas y abscisas de una parábola son cantidades variables, pero el parámetro es una cantidad constante o fija"* hasta este momento el parámetro es un sinónimo de cantidad constante, sin embargo, cuando aparece como parte de una expresión parametrizada, esta adquiere el carácter de una cantidad que varía, por ello se dice que hace variar a lo que de por si varía (Drijvers, 2001).

En lo que respecta a la Educación Matemática, el parámetro se ha enfatizado en sus dos funciones, además de que se le considera como una variable de orden superior (Furinghetti & Paola, 1994; Drijvers, 2001) debido la capacidad de representar la variación de algo que de por si varía, también encontramos en los libros de texto que es usado como una variable al mismo tiempo que una constante, lo que lo hace un tipo de variable muy potente en los casos de abordar las soluciones infinitas, a las que hace referencia una expresión parametrizada.

Los SEL con infinitas soluciones requieren del uso de parámetros, pero si estos no son planteados a partir de su doble papel y sólo aparecen repentinamente bajo cierto discurso ambiguo, entonces no es posible que el estudiante se percate de sus propiedades y ventajas para resolver SEL con infinitas soluciones.

2.4 Problemas en contexto

La Educación Matemática actualmente ha enfatizado la importancia de las ventajas del uso de entornos adecuados para presentar a los estudiantes situaciones de interés asociados a la matemática y a la realidad que ellos conocen, en general estos son promovidos para aprovechar la cercanía a los problemas, con el fin de dar sentido a los contenidos matemáticos como una ventaja para el aprendizaje. Sin embargo, el uso de problemas en contexto puede ser trivializado si no se aclara qué de ese entorno puede ser fundamento de una mejor enseñanza.

Por lo general, las principales razones para el uso de contextos en el aprendizaje de la matemática sugieren que pueden animar a los estudiantes a descubrir, explorar, negociar, discutir, comprender y utilizar las matemáticas, pero estas actividades no están intrínsecamente relacionadas con el uso de los contextos; más bien parecen estar más relacionadas con una visión de las matemáticas basadas en los procesos de resolución (Boaler, 1993).

De acuerdo con Boaler (1993) los contextos sólo mejorarán la transferencia del aprendizaje, en la medida en que hagan que las matemáticas sean más significativas para el individuo. Por lo que la autora sugiere que los contextos tal y como se utilizan generalmente, no son útiles, y que los factores que determinan su utilidad o bien son complejos y tienen poco que ver con una descripción llana de un acontecimiento de la vida cotidiana, o son representaciones de los acontecimientos del mundo real que los estudiantes acabarán encontrando de cualquier manera.

Si bien, los problemas contextuales pueden proporcionar experiencia con situaciones problemáticas de la vida real, por sí solos no contribuyen en la generación de sentido y significado sobre los objetos matemáticos, sin contar con los procesos de reflexión que son requeridos para lograr la solución de estos problemas, por lo que se debe motivar para que comprendan la importancia del vínculo matemático con los problemas.

En relación con la idea anterior, desde el punto de vista de Greer (1997), los problemas contextuales compuestos típicamente por una estructura matemática incrustada en un contexto más o menos realista, pueden servir idealmente como herramientas para la modelización matemática o la resolución de problemas, que puede considerarse, *''como el vínculo entre 'dos caras' de la matemática, a saber, su fundamentación en aspectos de la realidad y el desarrollo de estructuras formales abstractas'' (pág. 300).*

Lo que es importante en los problemas en contexto es la apreciación y la comprensión de la posible generalización de lo que se aprende y de las similitudes de estos con futuros problemas y de la posible aplicación a otros problemas o situaciones. Lo cual sólo puede derivar de un examen y una reflexión de las estructuras (matemáticas) y procesos subyacentes que conectan las experiencias (de la vida cotidiana). Por lo tanto, los contextos pueden fomentar estas percepciones, pero sólo a través de una estimulación del interés por la idea matemática y del compromiso del estudiante en su solución, mediante la generación de discusión y negociación de la actividad y su estructura matemática subyacente (Boaler, 1993).

En relación con la idea anterior, y ligado con el proceso de modelación en el que frecuentemente se presentan situaciones contextuales Verschaffel (2002) ratifica que este tiene como objetivo encontrar un equilibrio adecuado entre el reconocimiento de los elementos del mundo real tratados y evocados por el problema contextual, y la búsqueda de una estructura subyacente que permita utilizar el potencial de las matemáticas para comprender y resolver eficazmente el problema.

En ese sentido, para abordar tanto la estructura matemática como los elementos contextuales de los problemas, Chapman (2006) hizo una interesante distinción entre dos modos complementarios de concebir y tratar los problemas contextuales a saber, por un lado, propone un modo orientado hacia lo paradigmático (estructura matemática) y por el otro, uno orientado a lo narrativo (contexto social) lo que nos indica que la contextualidad puede estar ubicada en la matemática o en aspectos fuera de ella.

Según Chapman (2006) el conocimiento paradigmático, requeriría un enfoque sobre modelos o estructuras matemáticas que son universales y libres de contexto, en otras palabras, la aproximación a la solución de un problema contextual de este tipo implicaría estrategias y formas de pensar que son independientes de un contexto social particular, centrándose en la estructura matemática formal que subyace al problema. Por otro lado, el conocimiento narrativo, se centra en el contexto social del problema. Es decir, implica centrarse en la descripción del problema contextual para comprender o relacionar el argumento, la trama, los personajes, los objetos, las situaciones, las acciones, las relaciones y/o intenciones.

Desde nuestro punto de vista, debe quedar claro que el contexto en los problemas debe tener un equilibrio entre el reconocimiento de los elementos del mundo real tratados y evocados por el problema, y la estructura matemática subyacente que permita comprender y resolver eficazmente este.

De hecho, los problemas en contexto también pueden dar sentido a los tratamientos matemáticos usados en la resolución de problemáticas particulares, que por su naturaleza son de índole matemática, debido a que es mediante el conocimiento narrativo que es posible dar sentido a las estructuras involucradas en situaciones conocidas.

En el caso de los profesores, los problemas en contexto tienen una función distinta, más que de convencer de la utilidad de los instrumentos matemáticos en términos de su generalización y carácter paradigmático, el problema en contexto puede ser un puente para dar cuerpo a conceptos que, aunque se manejan correctamente, la cantidad de procedimientos que se deben desarrollar alrededor de ciertos contenidos no deja espacio para conocer lo que estaríamos llamando *"aplicaciones"* de los conceptos, por ello consideramos que una presentación del parámetro, como la que pretendemos en este trabajo, necesitaría del acompañamiento de estructuras que permitieran reinterpretar los alcances de los propios sistemas de ecuaciones lineales, que en términos del marco teórico de apoyo se trataría de provocar una re-construcción del saber, que incluye al parámetro y algunas maneras contextuales de darle sentido.

Otro de los recursos que tiene por objetivo dar cuerpo a las ideas de parámetro, solución infinita y solución válida es el uso de la representación gráfica, por ello vamos a introducir elementos básicos relativos a la visualización que debe ser usada para la representación gráfica de estos conceptos matemáticos.

2.5 La visualización y las representaciones gráficas

En la Educación Matemática la visualización ha sido objeto de estudio debido al papel relevante que tiene en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, en particular porque la matemática es una ciencia simbólica que para ser estudiada hace uso de representaciones que serán apreciadas visualmente como base del conocimiento matemático. En el caso que nos ocupa, requerimos poner en funcionamiento a la visualización cuando puede ser usada para proporcionar evidencia de las propiedades gráfico-simbólicas de las soluciones infinitas y las que son válidas en las representaciones propuestas, que incluyen parámetros. Por lo que enseguida vamos a analizar la concepción que se tiene de ella en la educación matemática.

Para aclarar a qué nos referimos cuando hablamos de visualización en matemáticas, consideramos la diferencia que plantea de Duval (1999) quien afirma que no es lo mismo mirar (visión) que visualizar matemáticamente (visualización).

El autor afirma que la visualización no debe ser reducida a la visión, dado que la visualización hace visible todo aquello que no es accesible a la vista como en el caso del aprendizaje de la matemática. Además, sugiere que la visión necesita ser explorada mediante movimientos físicos, porque nunca da una aprehensión completa del objeto estudiado. Mientras que a través de la visualización se puede obtener de inmediato una aprehensión completa de cualquier organización de relaciones (en particular matemáticas) en gran medida debido a que esta está en las relaciones y propiedades que son la base de la visualización matemática.

Por otro lado, se debe hacer distinción entre visualización y representaciones visuales. Con respecto a ello, y desde el punto de vista de Duval (2013) la visualización es: *"el reconocimiento, más o menos espontáneo y rápido, de lo que es matemáticamente relevante en cualquier representación visual dada o producida" (pág.160)* y las representaciones visuales son frecuentemente utilizadas tanto en la matemática como en la enseñanza de esta, y cumplen diferentes funciones, como lo es: el tratamiento matemático, la exploración heurística en la resolución de problemas y como herramienta educativa para ayudar a la adquisición de conceptos matemáticos.

Finalmente, la visualización debe ser promovida para aprender matemáticas y esta es una actividad intencional, por lo que no se puede suponer en el aprendizaje de la matemática que la sola imagen ahorra mil palabras.

La visualización eventualmente se apoya del uso de los *diagramas o representaciones* que, para los fines de visualización matemática, estas representaciones gráficas están organizadas según el punto de vista de Nemirovski y Tierney (2001) sólo por sus propiedades de posición, cualidad que las caracteriza como *homogéneas* y por esta razón son apoyos adecuados para el trabajo de representación matemática. Este tipo de representación incluye a las gráficas cartesianas lo que permite que estas representaciones puedan ser regidas por las expresiones algebraicas de manera unívoca.

Con base en lo anterior, la visualización desempeña un papel relevante cuando es coordinada con otros tipos de representaciones algebraicas y gráficas, para dar sentido a las soluciones de los SEL con infinitas soluciones cuando presentamos representaciones gráficas que deben ser consideradas tanto en lo que respecta a su continuidad y puede servir para interpretar aspectos como la variabilidad del parámetro y la diferencia entre zonas del conjunto solución en el caso de este trabajo, así como de su carácter discreto.

En el curso de esta investigación propondremos a los profesores no sólo imágenes convincentes sobre las soluciones asociadas a las expresiones paramétricas de los SEL abordados, sino que ellos mismos estarían en posibilidad de interactuar con una versión gráfica de los objetos matemáticos que representan estas soluciones, para elegir posteriormente las que sean válidas.

2.6 Investigaciones sobre el aprendizaje de los SEL

2.6.1 Introducción

En este apartado presentamos algunos resultados de investigación que muestran las dificultades que los alumnos tienen cuando trabajan con SEL. La literatura de investigación muestra que esas dificultades están relacionadas con la comprensión de variables, funciones y conjuntos, además de los obstáculos que representa la operatividad y particularmente la idea de solución, todos estos resultados manifiestan obstáculos que los profesores enfrentan en su labor docente, por ello son relevantes en esta investigación.

2.6.2 Resultados sobre la resolución de SEL y el conjunto solución

Antes de pasar a comentar algunos resultados de investigación que nos parecen relevantes sobre el aprendizaje de los SEL, haremos un breve comentario sobre la importancia de la adecuada interpretación del signo de igualdad en álgebra, particularmente porque es un signo que en el tratamiento algebraico va a adquirir varios significados y en particular se vincula a la idea de cierto tipo de solución cuando se le asigna el papel de indicador operativo, por lo que termina vinculándose al tipo de solución única.

En Kieran (1981) se reportan los resultados sobre el significado y uso del signo igual *(=)* en estudiantes de distintos niveles educativos (desde educación básica hasta universitaria). Tales resultados muestran que la mayoría de los alumnos interpretan el signo igual como un símbolo operacional, lo que para los alumnos denota *"una señal para hacer algo"* es decir, como una señal cuyo fin es obtener una respuesta, en otras palabras, encontrar una solución luego de operar.

La investigación en Educación matemática ha detectado que signos como el de la igualdad tienen más de un significado operativo. Kieran (1981) establece que se debe hacer una tratamiento del signo de igualdad en función de sus significados asociados, de un símbolo que separa un problema y su respuesta, a ser interpretado como una relación de equivalencia. Y en un nivel más avanzado, se debería interpretar este signo como un símbolo operador.

En nuestro caso requerimos del tratamiento del signo de igualdad como una relación de equivalencia, lo que podría facilitar la comprensión de la idea de sistema equivalente.

En lo que respecta a las ecuaciones lineales, un resultado reportado por Panizza, Sadovsky y Sessa (1996) sugiere que, cuando los alumnos trabajan con ecuaciones lineales con una incógnita, manifiestan concepciones según las cuales la ecuación es una igualdad numérica y las variables son números por descubrir, haciendo uso de sus conocimientos sobre aritmética sin haber adoptado los significados algebraicos, cambio que debe ser promocionado para lograr el aprendizaje del álgebra.

También se menciona una inclinación de los estudiantes en el reconocimiento de los SEL en términos de sus ecuaciones como un todo, Panizza, Sadovsky, & Sessa (1999) reportan que estudiantes que tenían experiencia previa con el manejo de SEL con dos incógnitas, no podían concebir una ecuación de este tipo por sí misma, es decir, que fuese pensada cómo un objeto con cierto significado fuera del sistema.

En este sentido llama la atención que el estudiante considere que un sistema sea solamente un arreglo de números y luego no pueda detectar los subarreglos del mismo, lo que podría complicar la interpretación matemática de los vectores que lo componen. El arreglo alfanumérico es el signo asociado al sistema, pero es la representación de ecuaciones específicas que pueden no tener un significado en sí mismas; esta discrepancia entre el signo y el significado es mencionado por Duval (1999) como la confusión del estudiante entre la *representación y lo representado* y de esta manera, el estudiante asigna propiedades de la representación al objeto representado.

Los resultados obtenidos por estos autores mostraron que algunos alumnos tienen la concepción de que una ecuación con dos variables siempre tiene solución única y no reconocen que habría una infinidad de parejas de números como solución. No sería extraño decir que, si los estudiantes tienen dificultades para interpretar la solución de una ecuación lineal con una o dos incógnitas, es muy probable que esto tuviera repercusiones en sus concepciones sobre los tipos de solución de los sistemas con soluciones infinitas.

Respecto a la relación entre la solución de ecuaciones lineales y SEL, Rojano, Filloy y Solares (2003, 2004) encontraron que, cuando los estudiantes han trabajado ampliamente con la solución de ecuaciones lineales, tienden a dar sentido con más facilidad al método de resolución por sustitución que a los otros métodos (igualación, sustitución y gráfico) en el cual le atribuyen valores específicos a la incógnita, es decir, optaban por utilizar métodos aritméticos, más que algebraicos o gráficos. Este resultado nos sugiere que los estudiantes usan los recursos que tienen bien aprendidos ante problemas nuevos de interpretación y que los distintos métodos les parecerían ajenos unos de otros, por ello es importante y que es dicho en términos de Radford (2015) el saber potencial se actualice como saber actual.

En relación con la interpretación de las soluciones de los SEL, DeVries y Arnon (2004) llevaron a cabo un estudio con estudiantes de Álgebra lineal, con el objetivo de averiguar las ideas que poseían sobre la solución de una ecuación (o de un sistema) y a partir de ello realizar una descomposición genética de ese concepto. Las respuestas revelaron varias concepciones erróneas en los ellos sobre el concepto de solución de una ecuación (o sistema). DeVries y Arnon reportaron que algunos confunden la solución de una ecuación (o un sistema) con la constante que, en muchos casos, está escrita a la derecha de una ecuación (o sistema). Es decir, cuando la ecuación está escrita de la forma $ax = k$ con k real.

También reportaron que algunos estudiantes confunden el concepto de solución con el proceso de resolver una ecuación (o sistema). Es decir, cuándo se cuestiona a los alumnos: *"¿cómo es una solución de una ecuación (o sistema)?"*, en respuesta los alumnos lo resuelven, es decir, logran describir correctamente el procedimiento para resolver la ecuación, sin embargo, no entienden que la expresión encontrada es la solución y no el proceso. Este reporte hace énfasis en la confusión entre proceso de solución y solución.

Desde nuestro punto de vista, estos resultados también pueden mostrar que el estudiante supone que las soluciones siempre son números y ocasionalmente las confunde con los procesos involucrados, en parte como producto de la interpretación de la igualdad como una instrucción operativa.

Otro tipo de problemáticas aparecen cuando se hace uso de la gráfica de los SEL, Mora (2001) realizó un estudio sobre algunas dificultades asociadas a la interpretación de las soluciones de SEL (véase Figura 2.1) en esta gráfica los estudiantes responden que el sistema tiene 3 soluciones, lo que refleja que el alumno asocia la solución de un SEL a la intersección de dos rectas. Consideramos que este tipo de interpretaciones se deben a que el estudiante confunde la intersección con la idea general de solución gráfica de un SEL, lo que será una mala interpretación, en particular cuando las soluciones son infinitas y el estudiante no detecta infinitas intersecciones, pero no es la misma para todas las rectas, como podemos ver en la siguiente imagen.

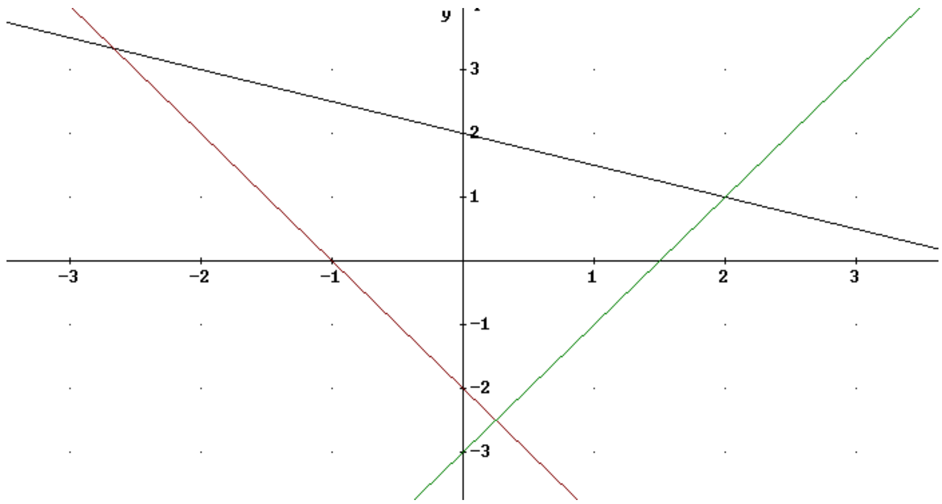


Figura 2.1 Representación Gráfica de un SEL 3x2 (Eslava & Villegas, 1998, citado por Mora, 2001)

En su investigación, Mora (2001) estudió los significados que los estudiantes atribuyen a expresiones del tipo $0 = 0$ o $0 = r$ donde r es un número real distinto de cero, que pueden resultar de resolver un SEL en los casos en los que estos son indeterminados. El objetivo de su investigación fue explicar la conexión en los modos de pensamiento analítico y sintético-geométrico (Sierpinska, 2000) a través de una secuencia de problemas, que permitieron poner en juego estos dos modos de pensamiento enfocados a la construcción de la noción de solución de un SEL. En la secuencia que se aplicó a los alumnos aparecían sistemas de ecuaciones que no tenían solución y otros que tenían infinitas soluciones.

También, en lo que respecta a la interpretación del conjunto solución, Alcocer (2007) realizó un estudio con estudiantes de Ingeniería, con el objetivo de examinar las dificultades relacionadas con el concepto de solución de un SEL en los contextos analítico y geométrico, tomando en consideración los casos de solución única, infinitas soluciones y el caso sin solución.

Alcocer (2007) reportó que, en el contexto geométrico los alumnos consideran como solución de un SEL los puntos de intersección de las rectas del sistema tomadas en pares, o los puntos de intersección de las rectas del sistema con los ejes coordenados. Este resultado muestra que los alumnos tienen fuertemente arraigada la idea de que la solución de un SEL como intersección de dos rectas cualesquiera, como antes comentamos donde domina la imagen referida sobre la idea de solución.

Otro resultado reportado por el mismo autor es el que afirma que estos creen que el número de soluciones de un sistema está relacionado con el número de incógnitas del sistema, es decir, piensan que si un sistema tiene dos incógnitas entonces tendrá dos soluciones, si tiene tres incógnitas tendrá tres soluciones, etc. Tampoco pudieron distinguir los diferentes casos de solución para un SEL. Estos errores permanecieron aún después de un curso de Álgebra lineal.

Nuevamente observamos la importancia que tiene trabajar la diferencia entre la solución de una ecuación, los valores numéricos para las variables y la idea de solución del sistema que satisface a todas las ecuaciones simultáneamente. Y hacer énfasis que esta puede ser un número o una expresión paramétrica, que para el caso del uso de los parámetros será esencial.

En la dirección de los diferentes tipos de solución para los SEL, Trigueros, Oktaç y Manzanero (2007) realizaron bajo el marco teórico APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) una investigación con el objetivo de identificar las dificultades que presentan los estudiantes universitarios de un curso introductorio de Álgebra lineal, cuando estudian SEL en lo referente a la interpretación de los diferentes tipos de solución. Entrevistaron a 6 de ellos sobre sus nociones sobre SEL y se reportó que ningún estudiante mostró tener una construcción mental de *objeto* para el concepto de conjunto solución, y que pocos de ellos mostraron haber construido un *proceso* adecuado para la solución, en el caso de sistemas con tres variables. Tres de los seis tuvieron dificultades para comprender el significado de solución, o conjunto de soluciones, también tuvieron dificultades para establecer los diferentes usos de la variable (cómo incógnita, número general y variables relacionadas) en las expresiones empleadas (como en Ursini & Trigueros, 2001).

Las autoras sugieren que, para evitar que surjan esas dificultades, se debe presentar a los alumnos todos los casos posibles de solución de un SEL utilizando diferentes representaciones y no limitarlos a la solución de ejemplos prototípicos. Recomiendan, además, utilizar problemas no triviales que provoquen la reflexión, incluyendo aquellos que involucren parámetros o que sean presentados en un contexto geométrico.

En el contexto del uso de software para el aprendizaje de los SEL, Mallet, (2007) realizó una investigación en la cual se expuso a estudiantes de matemáticas un nuevo método de enseñanza que utilizaba representaciones visuales, algebraicas y basadas en datos en Maple, para comprender qué son las *"ecuaciones lineales"*, qué representan los *"SEL"* y, por último, qué significa una *"solución"* o *"conjunto de* *soluciones"*. Los resultados muestran que los estudiantes son más activos en su aprendizaje con este método, mismo que ayudó a los alumnos en la interpretación de las soluciones que consideraban, por ejemplo que: *"un número infinito de puntos en una línea"*, *"una línea en la que los planos se intersectan"*, sin embargo, hay otras que no son ciertas como la que dice *"dos planos pueden intersecarse, pero nunca los tres a la vez"* pero muestran que los estudiantes ponen en funcionamiento la imaginación espacial., en el caso de los profesores es posible que, participando de una experiencia equivalente, podríamos promover ideas sobre las propiedades de las soluciones cuando estas son parametrizadas.

El uso simultáneo de distintas representaciones permite ligar las soluciones de los SEL con sus representaciones gráficas, lo que al parecer da al estudiante la posibilidad de considerarlas al margen de los métodos de solución mejorando la perspectiva sobre lo que significa la solución de un SEL y poniendo en funcionamiento la imaginación espacial.

Finalmente, las dificultades reportadas en las investigaciones anteriores se refieren a interpretaciones asociadas con las variables, que consideran son números por descubrir en las ecuaciones; confunden la solución de una ecuación (o un sistema) con las constantes y también asocian el número de variables con el de soluciones. Respecto a los procedimientos, se reporta que algunos estudiantes adoptan con más facilidad el método de resolución por sustitución de los SEL, debido al procedimiento de solución de una ecuación; otros, sin embargo, no comprenden que la expresión encontrada es la solución y no el proceso.

En relación a los SEL asociados a sus representaciones gráficas, los problemas se manifiestan en ocasiones en la consideración de que una solución es una intersección entre dos rectas, las que incluso pueden ser los ejes coordenados. Las propuestas que han pretendido dar sentido a las soluciones de los SEL consideran interpretaciones como: *"un número infinito de puntos en una línea"* y *"una línea en la que los planos se intersectan"* con la ayuda de softwares. En particular, observamos la importancia que tiene trabajar la diferencia entre la solución de una ecuación, valores numéricos para las variables y la idea de solución del sistema que satisface a todas las ecuaciones simultáneamente, que se deben tener en cuenta para la posterior adquisición de la solución algebraica y que en el caso de los profesores sería de gran importancia que estos tuviesen en cuenta estas consideraciones, en particular para el caso del uso de los parámetros.

En este trabajo, a diferencia de otras aportaciones, no estamos tan interesados en la detección por parte del profesor de la variabilidad del parámetro puesto en juego en la solución de SEL con infinitas soluciones, por lo que optamos por plantear a los parámetros bajo una idea pragmática que permita al profesor identificar la situación en la que el parámetro se introduce y que luego hace las veces de variable de control, según sea necesario en la situación, además, el control se manifiesta cuando teniendo el conjunto solución parametrizado, es posible elegir soluciones válidas según las condiciones establecidas en la problemática a resolver.

En la siguiente sección de este apartado abordaremos resultados sobre el uso e interpretación de los parámetros en el Álgebra.

2.6.3 Resultados sobre el uso de parámetros

Una de las primeras investigaciones que relaciona los parámetros con las ecuaciones lineales y cuadráticas, de la que tenemos conocimiento es la de Šedivý (1976) quien lo propuso a estudiantes de 15-16 años, quienes lograron una definición *"informal"* de estos como: *"Los parámetros que son propuestos, son variables que pueden ser reemplazadas por constantes donde queda al menos otra variable"* algunos los llamaron brevemente *"variables de una clase superior"*, *"variables guía"*, etc. Enfatizó el papel de estos con preguntas como: *"¿Qué significan las palabras <<Resolver una ecuación* $E\ (p, x)$ *con un parámetro p>>?"* a la que los estudiantes formularon una definición casi correcta en el siguiente sentido: *"Esto significa definir completamente el mapeo* $p \rightarrow T_p$ *(para cada valor admisible de* p *y* T_p *como el conjunto verdad determinado por* p*)"*. Esta respuesta demuestra la comprensión de los alumnos sobre el parámetro luego de un proceso de solución de problemas a lo largo de mucho tiempo, la que fue expresada como una función con un dominio y codominio bien definidos.

En el trabajo de Šedivý podemos observar que, para interpretar a los parámetros como cierto tipo de variables en el dominio de las funciones, se requirió de un proceso muy largo, en donde el énfasis estuvo puesto en la definición de los dominios y contradominios usados en la actividad, de manera que se observara directamente cual es la variabilidad de los parámetros usados.

De manera más sencilla, nos inclinamos por la idea de considerarlo como un tipo de variable con ciertas propiedades, como la de hacer las veces de constante, que en esa investigación se considera como intuitiva, pero que para los fines del cálculo de las soluciones infinitas es suficiente indicando la necesidad de la parametrización.

En Furinghetti y Paola (1994) se reportan los resultados concernientes a una investigación sobre el uso de parámetros en el Álgebra y su relación con los conceptos de variable e incógnita. Las autoras aplicaron un cuestionario para establecer cómo los estudiantes perciben las diferencias entre aquellos conceptos, además se analizó la noción de parámetro en sus aspectos manipulativos y conceptuales. El cuestionario usado en esa investigación pretendía determinar 3 aspectos sobre la comprensión de los alumnos: 1) El rol de los parámetros, las incógnitas y las variables; 2) El uso de notación y lenguaje matemático y 3) La influencia del contexto en el tratamiento de los parámetros.

Sobre el primer aspecto las autoras plantearon la siguiente pregunta: *"la ecuación* $(1-k)x^2 + 2kx + 3 = 0$ *no tiene soluciones si* $k = 1$ *¿es verdad o falso? "(pág.360)* De esta pregunta las autoras observaron que los estudiantes tienden a sustituir el valor dado para k en la ecuación y luego la resuelven, es decir, el impulso de calcular emerge como una práctica que es constante en las respuestas de los alumnos a lo largo del cuestionario.

El análisis sobre los distintos tipos de variables que esperaban los investigadores no parece ser una práctica usual para los estudiantes, lo que puede ser resultado del dominio de las prácticas operativas trabajadas a lo largo de mucho tiempo.

Sobre el aspecto relacional del uso de notación y el lenguaje matemático, los resultados de estas autoras muestran que los estudiantes casi siempre clasifican x e y como incógnitas, mientras que a las literales del tipo a, b, c, etc. se les atribuye el rol de parámetro o coeficiente. Las autoras mencionan que interpretar x e y cómo incógnitas significan: *"subrayar el aspecto de resolución algorítmico en lugar del aspecto formal evocado por la variable".*

Nosotros consideramos que esta inclinación de asignación a las variables de cierto tipo de letras para diferenciarlas de los parámetros es frecuente, incluso podríamos decir lo mismo de las constantes, y que se deba en parte a la instrucción, como podemos ver en los libros de matemáticas, pero si esta asignación tiene motivos instruccionales luego no es modificada y posteriormente causan efectos de una asociación que puede ser incorrecta, además que propicia la asociación entre las letras y su propiedades.

Con respecto a la influencia del parámetro en un entorno contextualizado, se reporta que este tiene un significado operativo específico, dependiendo de la situación, las autoras encuentran que este tratamiento es mejor usado por los alumnos, por ejemplo, a raíz de la pregunta: *"¿cuál es la ecuación asociada con las siguientes líneas rectas?"* (véase Figura 2.2) ellos lograron comprender el significado del parámetro como un elemento que determina la posición de las entidades geométricas. Sin embargo, otro resultado reveló que tienen dificultades con la dualidad entre parámetros que pueden variar en $\mathbb{R}$, como lo hacen las variables, pero que son fijados dado el problema, y además, consideran que el dominio de los parámetros no puede ser un conjunto discreto.

En este resultado apreciamos que el uso de las constantes m y b que determinan la posición de las rectas posiblemente sea mejor detectado en su papel de variable, porque cuando se aborda la representación gráfica se insiste en que estas constantes también varían para obtener las familias de rectas y por tanto están funcionando como variables y como constantes de $y = mx+b$, sin embargo, no encontramos que ese hecho se mencione en los libros ni en los programas.

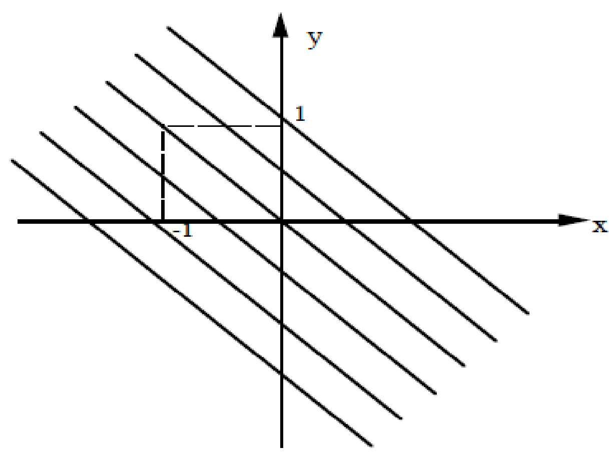


Figura 2.2 Gráfico de $x + y = k$ (Furinghetti & Paola, 1994)

Para lograr construir el significado asociado a los parámetros, consideramos que se debe ofrecer un contexto donde las variables, incógnitas y parámetros tengan un uso específico. El rol del parámetro transita en distintas direcciones (cómo incógnita, variable o incluso constante) dependiendo del uso que se le atribuya en determinado contexto, por ello consideramos que es importante establecer este carácter para hacer un buen uso de sus posibilidades.

Respecto al uso de parámetros en ambientes computarizados, Drijvers (2001) realizó una investigación con estudiantes de secundaria, quienes usaron una calculadora simbólica TI-89 durante un periodo de 5 semanas, con el objetivo de introducir la noción de parámetro. Respecto a la naturaleza de la noción de parámetro el autor menciona lo siguiente:

> *El parámetro es una variable <<extra>> en una expresión o función algebraica que se generaliza sobre una clase de expresiones, sobre una familia de funciones, sobre un conjunto de gráficos. El parámetro puede considerarse una meta variable: la a en $y = ax + b$, puede desempeñar los mismos papeles que una variable 'ordinaria', como un marcador de posición, una incógnita o cantidad cambiante, pero actúa en un nivel superior al de una variable. (pág.2)*

Con base en lo anterior, Drijvers (2003) establece que para el aprendizaje del concepto de parámetro se requiere seguir una trayectoria de tres pasos:

1) **El parámetro como marcador de posición:** es utilizado de esta manera si se trata de un lugar vacío en el que se pueden introducir valores numéricos y de donde estos se pueden recuperar. El valor en el lugar vacío puede ser un valor fijo, conocido o desconocido.
2) **Como cantidad cambiante (parámetro de deslizamiento):** el parámetro sigue representando un valor numérico, sin embargo, existe una variación sistemática de este valor, y entonces este adquiere un carácter dinámico.
3) **Como generalizador:** el parámetro se utiliza para generalizar entre clases de situaciones en casos concretos, de expresiones, fórmulas y soluciones. El parámetro ya no es un número específico, sino que representa a un número cualquiera o a un conjunto de números.

Además, el parámetro puede tomar cualquier valor en $\mathbb{R}$ y puede variar sobre un conjunto de forma dinámica o representar un conjunto dependiendo del contexto.

Los resultados obtenidos por el autor haciendo uso del ambiente computarizado se dirigieron a establecer las diferencias entre variable, incógnita y parámetro, estos muestran que, si los estudiantes son conscientes de los diferentes roles de las literales, entonces están en mejor posición para interpretar los procedimientos y sobre todo las soluciones obtenidas. En esta investigación algunos estudiantes fueron capaces de distinguir entre los diferentes roles de las literales, mientras que otros parecían confundidos por la cantidad de variables involucradas en los problemas propuestos, inhabilitándolos para la interpretación correcta de las soluciones.

También, con respecto al uso de parámetros en el álgebra, Ursini y Trigueros (2004) desarrollaron una investigación con el propósito de identificar las dificultades e interpretaciones de los estudiantes de bachillerato y primer año de universidad, cuando trabajan en la resolución de problemas que involucran parámetros. Las autoras centran su análisis en la interpretación, la simbolización y la manipulación de estos en diferentes contextos, para ello utilizaron como marco teórico el modelo de 3 usos de la variable (3UV) que proponen Ursini y Trigueros (2001) donde la variable puede tomar los siguientes papeles: 1) Número general, 2) Incógnita o 3) Como una variable relacionada con otra (una variable en función de otra). Por otro lado, para las autoras los parámetros son números generales de segundo orden, que asumen el papel de incógnita o de variable relacionada, dependiendo del contexto.

Con base en ello, diseñaron un cuestionario donde los reactivos estaban relacionados con la interpretación, la manipulación y la simbolización de los diferentes usos de la variable. Los resultados muestran que los estudiantes interpretan al parámetro como un número general y tienen dificultades para diferenciarlo de las demás variables que intervienen en una expresión algebraica, sin embargo, cuando se asocian a un referente geométrico donde los parámetros son usados como números generales fue más sencillo para los estudiantes interpretarlo correctamente, ellos le dieron un significado particular dependiendo del contexto.

Sobre la manipulación de los parámetros, reportan que gran parte de los estudiantes no pudieron atribuir un significado específico al parámetro, en consecuencia, no pudieron manipularlo. Las autoras sugieren que cuando se encuentra una expresión que involucra parámetros, primero se debe establecer el rol de cada símbolo (de cada literal) y entonces proceder a manipular la expresión según las exigencias del problema. En relación con la simbolización, los resultados muestran que, cuando se enfrentan a generalizaciones verbales de segundo orden y se les pide que lo expresen simbólicamente, la mayoría escribieron expresiones que no reflejaban el significado de la declaración; los que lograron simbolizarla, mostraron dificultad para interpretar el significado de los símbolos utilizados.

Este resultado muestra, desde nuestro punto de vista, que para los alumnos el símbolo asociado a un parámetro, podría ser sólo una etiqueta para un determinado dato o valor y no necesariamente es usado para simbolizar una expresión algebraica que establece la solución, es decir, tienen dificultades para explicar los diferentes papeles que los parámetros desempeñan en diferentes casos.

Nosotros estamos más inclinados a que el profesor y el estudiante identifiquen el uso de la variable, que para los fines de la resolución de SEL en esencia se concentra en la incógnita, en tanto que debe ser calculada como número general o que afecta a otra variable en el caso del parámetro, la solución la encontramos en una aproximación pragmática que considera al parámetro como una variable de control, que en particular se comporta como variable, pero también como constante y actualmente consideramos la posibilidad de plantearlo como una variable activa y una inactiva.

2.7 A manera de síntesis

Finalmente, los resultados comentados anteriormente muestran distintos tipos de conflictos en los que se aprecian ideas que los alumnos formulan sin considerar un panorama general de los objetos matemáticos aprendidos, por ejemplo, cuando hacen énfasis en aspectos como la idea de que la ecuación es una igualdad aritmética y las variables son números por descubrir, por lo que esto se resuelve encontrando la solución, que de manera general se obtiene *"despejando"*, por ello no es de extrañar que confundan la solución con el proceso de resolución, o que los estudiantes consideren que una ecuación con dos variables siempre tiene solución única o tantas soluciones como variables.

En las investigaciones mencionadas encontramos que hay muchos conflictos en lo referente a la idea de solución, ya sea por su naturaleza (numérica o gráfica como intersección) o por el número de ellas (una, varias como cuando se asocian a la cantidad de variables o el caso de infinitas soluciones).

Respecto a los resultados asociados a las variables, incógnitas y parámetros, pese a que Drijvers (2001) considera que, si los estudiantes comprendieran las diferencias entre variables y parámetros estarían en mejor posición para interpretar los procedimientos y sobre todo las soluciones asociadas. La realidad es que parece ser una tarea que requiere de un entorno que les haga percibir la diferencia en su funcionamiento, al parecer es de gran importancia darles un uso que les permita establecerla para lograr el sentido de que un parámetro es una variable que hace variar a otras variables o de que puede comportarse como una constante bajo ciertas circunstancias, lo que nos hace considerar la importancia del acompañamiento de los problemas en contexto para dar sentido a las soluciones infinitas y las restricciones para las que son válidas en los SEL, particularmente en los 2x3 de nuestra propuesta.

En este trabajo pretendemos proponer a los profesores el tratamiento de los parámetros explicitando sus funciones como variable y como constante para establecer su naturaleza y de esta manera sus ventajas en la solución de los SEL con infinitas soluciones y recuperamos la idea de que el parámetro deba hacer funciones como: 1) El parámetro como marcador de posición, 2) Como cantidad cambiante (parámetro de deslizamiento) y 3) Como generalizador, lo que pensamos pueda observarse a través de la construcción de gráficas dinámicas de los conjuntos solución.

2.8 Problema de Investigación

En este trabajo investigamos las ventajas que tiene presentar a los parámetros como *variables de control,* por ello vamos a indagar la forma cómo es adoptada por los profesores cuando destacamos su función dual, como variable y como constante o variable inactiva.

Los parámetros serán usados en el caso de las soluciones infinitas de los sistemas de ecuaciones lineales (SEL) por ello vamos a trabajar con profesores que cuentan con los conocimientos básicos obtenidos de los libros de texto de secundaria, preparatoria y licenciatura sobre los SEL, que incluyen el caso de las infinitas soluciones para investigar el efecto de este recurso desde el punto de vista procedimental, visual y de aplicación.

2.8.1 Hipótesis de trabajo o supuestos iniciales

1. Para abordar el tratamiento de los parámetros como *variables de control,* se requiere que el profesor tenga los conocimientos básicos asociados a los procedimientos de solución de los SEL, así como de la consideración de que estos pueden tener una, ninguna o infinitas soluciones.

2. Es necesario orquestar una secuencia de artefactos semióticos que van desde la definición del parámetro como *variable de control,* hasta el cálculo de soluciones infinitas a partir del proceso de parametrización y de aquellas que son válidas mediante la toma de sentido a través de la resolución de problemas en contexto. Además de la construcción de gráficas dinámicas en el caso de las soluciones infinitas.

Los artefactos propuestos en esta investigación no son puestos en funcionamiento de manera aleatoria, estos se plantean siguiendo una trayectoria específica, en donde unos apoyen a los otros y se activen de manera gradual, de forma que las progresivas experiencias permitan ir desarrollando el sentido y la utilidad del parámetro en relación a su manejo procedimental, su interpretación gráfica y aquel que está asociado a un problema contextual.

2.8.2 Hipótesis de Investigación

1. Si presentamos a los parámetros como *variables de control*, destacando su doble naturaleza, de variable y de constante, entonces el profesor estará en condiciones de dar sentido a las expresiones paramétricas asociadas a las soluciones infinitas, para estar en posibilidad de elegir aquellas que son válidas y perfectamente útiles para resolver los problemas planteados.

2. Cuando establecemos al parámetro como *variable de control*, es importante contar con representaciones gráficas que permitan visualizar de forma dinámica a las soluciones infinitas, así como el trabajo de interpretación cuando los problemas están asociados a problemas contextuales.

2.8.3 Objetivos de Investigación

Pondremos en funcionamiento una secuencia de artefactos semióticos que permitan al profesor interpretar las soluciones infinitas asociadas a soluciones válidas en SEL, con base en la definición del parámetro como una *variable de control* del que se destaca su doble naturaleza. Con el objeto de indagar si los saberes de los profesores sobre los métodos de solución de SEL, como base inicial, serían suficientes para mediar semióticamente al parámetro cuando se debe resolver e interpretar las soluciones infinitas, y observar qué tipo de prácticas reflexivas desarrollan en este proceso.

2.8.4 Preguntas de Investigación

1. ¿Cuáles son las ventajas de utilizar a los parámetros como variables de control en SEL, apoyados en una secuencia de artefactos semióticos?

2. ¿Qué efecto tiene la evidencia gráfica para la interpretación de las soluciones infinitas cuando se cuenta con representaciones que simulan la variación de los parámetros?

3. ¿Qué efecto tiene el uso de los parámetros cuando son empleados en problemas en contexto?

3. Metodología

3.1 Introducción

Con el objetivo de llevar a cabo una investigación sobre el uso y aplicación del parámetro como *variable de control*, pusimos en funcionamiento un conjunto de artefactos de carácter cognitivo y procedimental, esto con el propósito de dar sentido al uso del parámetro en la obtención de las soluciones válidas en SEL 2x3.

Con este objetivo en mente, trabajamos con un conjunto de profesores en servicio, que suponíamos contaban con conocimientos básicos sobre la solución de SEL, así como de sus posibles tipos, para abordar el caso de las soluciones infinitas y el uso justificado del parámetro en SEL 2x3. Para ello, nos propusimos: 1) Plantear un enfoque haciendo énfasis en su papel como variable y como constante; 2) Un tratamiento para la reducción del sistema rectangular a un sistema cuadrado; 3) El uso de una representación gráfica y dinámica de las soluciones y finalmente, lo aterrizamos en 4) Problemas contextuales que requerían condiciones específicas, con lo cual se lograba dar un uso visible y constatable a la infinidad de soluciones a través del parámetro.

3.2 Método

El tipo de estudio que se llevó a cabo en esta investigación es de carácter cualitativo, el cual, según Leavy (2014) se caracteriza en general por los enfoques inductivos de la creación de conocimientos, que están destinados a generar significado, así como para la adquisición de una profunda comprensión (es decir, información detallada a partir de una pequeña muestra).

Además, utilizamos este enfoque para explorar el efecto que tiene el tratamiento del parámetro como *variable de control*; para investigarlo con rigor y aprender sobre el fenómeno social; para desentrañar los significados que la gente atribuye a actividades, situaciones, eventos o artefactos; o para construir una comprensión profunda sobre alguna dimensión de la vida social (Leavy, 2014) asociada al uso e interpretación de las infinitas soluciones en un SEL.

Consideramos pertinente llevar a cabo una *investigación mediada por internet* (IMR por sus siglas en inglés). Utilizamos la IMR como una alternativa viable a los métodos tradicionales offline debido a la naturaleza de esta investigación, donde los softwares computacionales nos han permitido tender un puente entre los profesores y los contenidos propuestos, incluyendo la intervención del investigador, con el objeto de propiciar una práctica reflexiva, además, de que este fue el tipo de interacción posible bajo las condiciones actuales de la pandemia.

Los estudios de este tipo se caracterizan por desarrollarse dentro de la Web 2.0, lo que permite una fácil y accesible actividad de colaboración en línea y de interacción social, asimismo, una de las ventajas de esta metodología, es la eficiencia en cuanto a costos y tiempo, la ampliación del alcance geográfico y el acceso a poblaciones de difícil acceso (Leavy, 2014).

El método desarrollado en esta investigación se apoyó en una dinámica que se caracterizó por llevar a cabo entrevistas semiestructuradas-tipo intervención, esto de manera virtual con los profesores de nuestra muestra; con respecto a eso, Leavy (2014) menciona que, mediante las entrevistas semiestructuradas, se pueden aprovechar mejor las posibilidades de producción de conocimientos que ofrecen los diálogos, al dar mucho más margen para el seguimiento de los distintos ángulos que el entrevistador considere importantes; simultáneamente, el entrevistador tiene más posibilidades de hacerse visible como participante productor de conocimientos en el propio proceso, en lugar de esconderse detrás de una guía de entrevista preestablecida, lo que promueve una actividad reflexiva que hemos mencionado en nuestro marco teórico.

En el caso de esta investigación, dado que pretendemos dar elementos para una práctica reflexiva, nos inscribimos en la línea de la IMR y las posibilidades que ofrecen los instrumentos de charla en tiempo real, (como Skype, Zoom, Facebook, Blackboard, GoogleMeets, etc.) para los enfoques de entrevistas sincrónicas en la IMR se amplían y expanden, ofreciendo a los investigadores una gran selección de opciones a menudo gratuitas o de bajo costo, suponiendo, por supuesto, que los posibles participantes tengan o puedan tener acceso al equipo informático necesario (Leavy, 2014).

En este estudio realizamos un total de 7 entrevistas-intervención de manera individual, con profesores en servicio con conocimientos sobre la resolución de SEL. Estas fueron realizadas a través de la plataforma virtual Zoom, en una sesión (por profesor) de aproximadamente 90 minutos. Sin embargo, sólo se tomaron en cuenta los datos obtenidos de 5 entrevistas-intervención.

3.3 Participantes

Como se mencionó anteriormente, la población de estudio inicialmente estuvo integrada por 7 profesores de distintos niveles educativos. Sin embargo, la muestra final de profesores se redujo a 5, debido a que 2 de ellos tuvieron problemas institucionales para terminar con la actividad.

La edad de los profesores estaba en un rango de 24 a 30 años, en donde 2 eran mujeres y 3 varones. En la siguiente tabla se muestra el perfil docente de cada profesor. Estos están marcados como P1 hasta P5, donde P1 hace referencia al Profesor 1. En la tabla 3.1 se muestra el nivel docente donde se desempeña cada profesor:

Profesor	P1	P2	P3	P4	P5
Nivel de docencia	Preparatoria Abierta	Licenciatura Humanidades	Licenciatura Sociales	Secundaria	Secundaria
Edad (años)	26	26	30	25	25

Tabla 3.1 Nivel de docente de los profesores

3.4 Perfil educativo de los profesores

En la siguiente tabla se muestra el perfil docente de cada profesor:

Profesor	P1	P2	P3	P4	P5
Perfil Docente	Licenciatura en Matemática Educativa	Licenciatura en Matemática Educativa	Licenciatura en Matemática Educativa y Maestría en Economía Matemática	Licenciatura en Educación Secundaria (especialidad en Telesecundaria)	Licenciatura en Educación Secundaria (especialidad en Telesecundaria)

Tabla 3.2 Perfil docente de los profesores.

3.5 Instrumentos

Como instrumento de investigación, hicimos uso de un *cuaderno de trabajo* que tenía por objetivo ser el vehículo a través del cual se interactuó con los profesores, apoyándonos en él se desarrollaron una serie de actividades que fueron planteadas mediante entrevistas-intervención online, por medio de la plataforma virtual Zoom.

El cuaderno de trabajo está basado en el proyecto de código abierto Jupyter (como se muestra en la Figura 3.1) el cual es una plataforma computacional que permite utilizar diferentes lenguajes (Julia, Python y R). La base en la cual se sustenta es la interfaz web Jupyter Notebook, que combina la ejecución de código de programación, inclusión de texto, además de escritura de lenguaje matemático en LaTeX, video, y todo lo que se pueda visualizar con un navegador, todo ello con el propósito de tener una conexión dinámica con los profesores, pudiendo desarrollar una comunicación que constaba de pantallas compartidas, interacción instantánea y manipulación gráfica compartida, así como diálogo constante.

Lo anterior nos permitió poner en funcionamiento el conjunto de artefactos que antes hemos mencionado y de los que fueron de dos tipos, cognitivos y procedimentales.

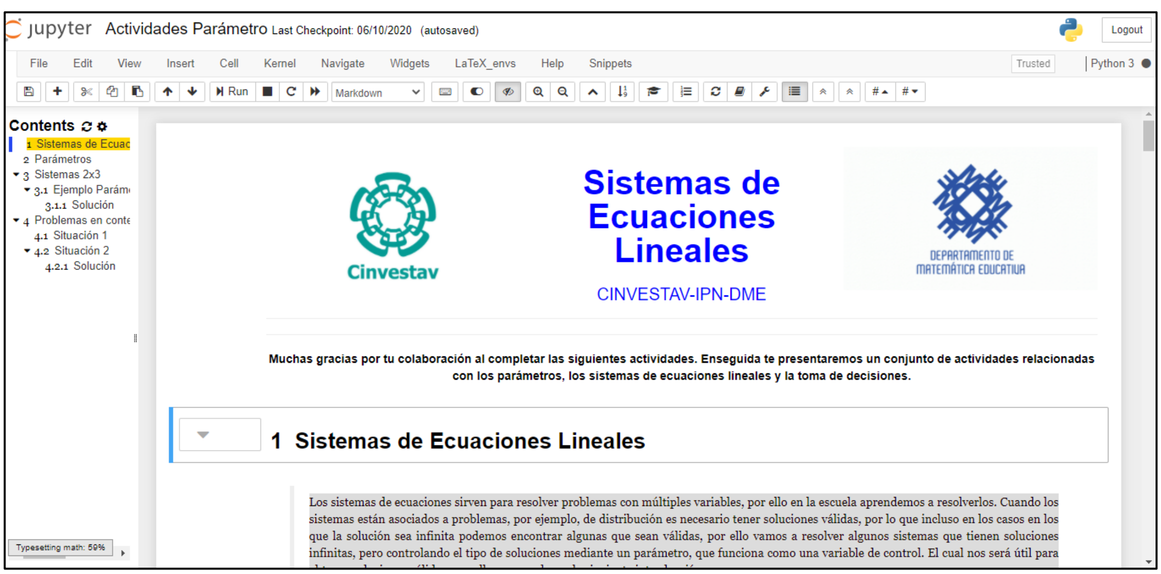


Figura 3.1 Interfaz Jupyter Notebook.

A continuación, describimos en que consiste cada uno de estos artefactos y finalmente la forma cómo todos ellos se combinaron para promocionar la práctica reflexiva en torno a la variable de control y las soluciones infinitas.

La coordinación sucesiva de artefactos puesta en funcionamiento estuvo conformada por los siguientes momentos:

1. Planteamiento de la definición de parámetro como símbolo, utilizado como signo dual: como constante y como variable, además de su uso como variable de control.
2. Uso de un artefacto procedimental que consiste en: la parametrización de un SEL 2x3 para transformarlo en uno 2x2.
3. El uso de un programa que calcula el conjunto solución de un SEL.
4. La visualización de la representación gráfica y el uso del deslizador, como artefacto visual.
5. La toma de sentido contextual, mediante los problemas con condiciones específicas.

Los tipos de artefactos tanto de tipo cognitivo como procedimental se muestran enseguida:

Artefactos	
Tipo de artefacto	Descripción
Cognitivo	El parámetro es utilizado como signo dual, el cual funciona como variable de control.
	La visualización de la representación gráfica y el uso del deslizador, como artefacto visual.
	La toma de sentido de problemas en contexto con condiciones específicas.
Procedimental	El método de parametrización de un SEL.
	El uso de un programa que calcula el conjunto solución de un SEL.

Tabla 3.3 Artefactos Semióticos (Fuente: elaboración propia)

La trayectoria de la intervención que se siguió en cada sesión se desarrolló a través del siguiente recorrido: Inicio de entrevista-intervención; Breve recordatorio sobre los Sistemas de Ecuaciones Lineales; Introducción de la definición de parámetro enfatizando su carácter dual; Introducción a los sistemas 2x3; Tratamiento del parámetro como variable de control; Situaciones donde se pueden utilizar los parámetros; Cierre de la intervención.

El instrumento de investigación constó de 4 apartados, en cada uno se buscaba atender objetivos específicos para promocionar la práctica reflexiva de los profesores.

Para los fines de planteamiento del instrumento de investigación de manera virtual, vamos a describir el tratamiento sucesivo de los apartados propuestos:

1. **Sistemas de Ecuaciones Lineales.**
2. **Parámetros.**
3. **Sistemas 2x3.**
   3.1 Ejemplo Parámetro como Variable de Control.
4. **Problemas en contexto y Parámetros.**

El primer apartado del instrumento se tituló: **Sistemas de Ecuaciones Lineales**, como se muestra en la Figura 3.2:

1 Sistemas de Ecuaciones Lineales

Los sistemas de ecuaciones sirven para resolver problemas con múltiples variables, por ello en la escuela aprendemos a resolverlos. Cuando los sistemas están asociados a problemas, por ejemplo, de distribución es necesario tener soluciones válidas, por lo que incluso en los casos en los que la solución sea infinita podemos encontrar algunas que sean válidas, por ello vamos a resolver algunos sistemas que tienen soluciones infinitas, pero controlando el tipo de soluciones mediante un parámetro, que funciona como una variable de control. El cual nos será útil para obtener soluciones válidas, por ello vamos a hacer la siguiente introducción.

El recurso de usar parámetros como variables de control no puede ser generalizado, sin embargo, vale la pena considerar este recurso para problemas que pueden ser contextualizados en la vida real.

Una ecuación de la forma $ax + by = k$, con a, b y k constantes, se define como una ecuación lineal en las variables x, y.

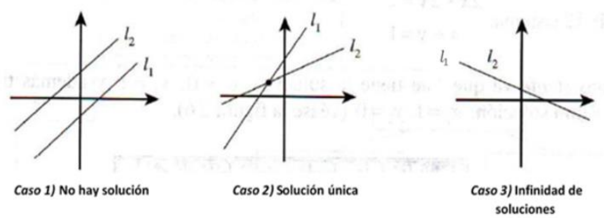
Un sistema $2x2$ en $\mathbb{R}^2$ representa líneas rectas. El resolver el sistema significa tener un punto que pertenezca a las rectas del sistema al mismo tiempo, entonces pueden ocurrir tres casos a saber:

Figura 3.2 Apartado 1 Sistemas de Ecuaciones Lineales.

Este apartado tenía como objetivo actualizar a los profesores en el tema sobre los SEL con 2 y 3 variables y sus soluciones, de manera algebraica y su representación gráfica en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ (ver Figura 3.3 y 3.4). Así también, se buscaba indagar sobre las nociones que tenían a cerca del tratamiento dado a las soluciones en general y a las infinitas en particular, incluso considerando la forma cómo ellos transmiten este tipo de saberes a sus estudiantes.

Enseguida mostramos parte el contenido trabajado en las siguientes viñetas:

Un sistema $2x2$ en $\mathbb{R}^2$ representa líneas rectas. El resolver el sistema significa tener un punto que pertenezca a las rectas del sistema al mismo tiempo, entonces pueden ocurrir tres casos a saber:



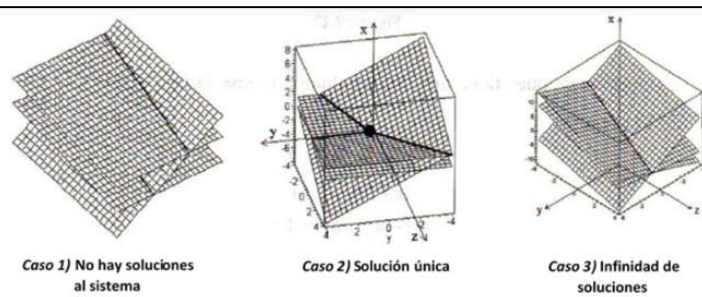
Caso 1) No hay ningún punto en común en ambas rectas. De manera gráfica el sistema se representa como dos líneas paralelas.

Caso 2) Existe un único punto en común en ambas rectas. De manera gráfica el sistema se representa como la intersección de ambas rectas en ese único punto.

Caso 3) Hay un número infinito de puntos en común en ambas rectas. De manera gráfica el sistema se representa como dos líneas traslapadas una sobre otra (son todos los puntos de $\mathbb{R}^2$ que están sobre la recta $l_1 = l_2$)es decir, representan una única línea recta.

Figura 3.3 Apartado 1 SEL y soluciones en $\mathbb{R}^2$.

Dado que estábamos interesados en SEL con infinitas soluciones, propusimos el caso de los sistemas 2x3.



Caso 1) No hay ningún punto en común en los tres planos, aunque haya intersección por parejas de planos.

Caso 2) Existe un único punto en común en los tres planos. De manera gráfica el sistema se representa como el punto de intersección de los tres planos P_1, P_2, P_3.

Caso 3) Existe más de un punto en común en los tres planos; de hecho, si hay más de un punto en común, podemos hablar de toda una recta común, por ello existe una infinidad de puntos que satisfacen al sistema.

En este trabajo vamos a abordar esta última situación, en la que habrá una infinidad de soluciones, pero donde incluiremos una variable de control llamada *parámetro*.

Figura 3.4 Apartado 1 SEL y soluciones en $\mathbb{R}^3$.

En particular, en este primer momento se comentaron los tipos de solución que pueden obtenerse al trabajar con sistemas con tres variables, como sigue:

1) El caso de solución única, que de manera geométrica se puede interpretar como la intersección de n planos en un punto.

2) El caso que no existe solución al sistema, de manera geométrica se puede interpretar como n planos paralelos, sin ningún punto de intersección común. Y las variantes de este caso, por ejemplo: un sistema de $3x3$ donde 2 planos se intersectan en un punto común, pero un tercero no se interseca en ese punto con otros dos.

3) El caso que se tienen infinitas soluciones. Aunque en el material que se presentó por escrito, aparece únicamente el caso de una recta resultado de intersección, se explicaron las dos posibilidades que pueden ocurrir. 1) Cuando todos los puntos de n planos coinciden en uno solo. 2) Cuando los planos se intersectan en una recta en el espacio. Debido al objetivo de la investigación, centramos la atención en este último caso.

El segundo apartado del cuestionario llevaba por título: **Parámetros,** donde se planteó la definición del parámetro, como se muestra en la Figura 3.5**,** el objetivo de esta sección era presentar el uso del parámetro en los sistemas con infinitas soluciones. Aquí definimos al parámetro como un signo que funge como un símbolo dual y que, para fines prácticos, nos permite reescribir por medio de la parametrización, al sistema $2x3$ en uno $2x2$.

2 Parámetros

> **El parámetro es una variable especial, que sirve como una variable de control con un carácter dual (como una constante y como una variable) es decir, cuando es necesario varía y cuando no lo es, puede ser considerada como una constante dependiendo de las circunstancias.**

> **Enseguida abordaremos sistemas que tienen infinitas soluciones y analizaremos la manera de aprovechar los parámetros para controlar las soluciones y elegir la que sea adecuada a nuestros fines.**

Figura 3.5 Apartado 2 Parámetros. Funcionalidad del parámetro.

En el tercer apartado: **Sistemas $2x3$** se planteó el caso de un SEL $2x3$ (como se muestra en la Figura 3.6) de manera que pudiéramos observar el conjunto solución y su representación gráfica, en este caso en particular describía los puntos sobre una recta en el espacio.

3 Sistemas 2x3

> Un caso particular, son los sistemas formados por 2 ecuaciones y 3 variables. En este tipo de sistemas, el conjunto solución está descrito por una recta. Esto significa que el sistema tiene una infinidad de soluciones.

> Analicemos el siguiente sistema, observe que normalmente diríamos que este sistema no tiene solución:

$$I = \begin{cases} x + y + z = 14 \\ x + 3y + 2z = 29 \end{cases} \tag{1}$$

> **El siguiente programa te permite calcular las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales de 3 incógnitas con 2 variables. Para calcular la solución de un sistema, solo introduce los coeficientes de cada ecuación.**

Figura 3.6 Apartado 3-Sistemas 2x3.

En este apartado existieron algunas imprecisiones en el material escrito, sin embargo, en las sesiones estas fueron aclaradas. Por ejemplo, en el caso donde se abordan los sistemas 2x3, no necesariamente el conjunto solución está descrito por una recta, sino que también puede corresponder a un plano. También, en el comentario donde se dice: *"observe que normalmente diríamos que este sistema no tiene solución"* se refiere a las concepciones que podrían tener los participantes con respecto a este tipo de sistemas. Por último, el desacierto mostrado en la siguiente línea: *"un sistema de ecuaciones lineales de 3 incógnitas con 2 variables"* se debería corregir como: *"un sistema de ecuaciones lineales de 2 ecuaciones con 3 variables"*.

Aquí se mostró el SEL $\boldsymbol{I}$ y su representación gráfica en $\mathbb{R}^3$ (ver Figura 3.7) de manera que los profesores tuvieran la posibilidad de visualizar el sistema (planos en el espacio) y establecer otros objetos como la recta que describe el conjunto solución de ese sistema.

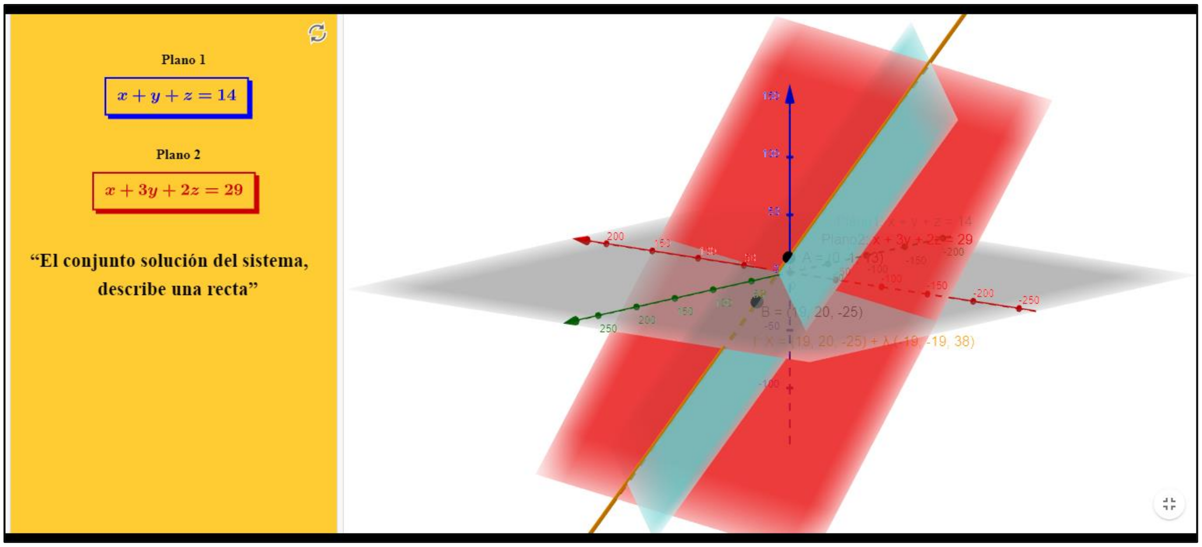


Figura 3.7 Representación de SEL I en $\mathbb{R}^3$.
Para ver el funcionamiento ir a: https://www.geogebra.org/m/zhcrtxut

Posteriormente, se presentó un método de parametrización de un SEL *2x3*, el cual consistió en hacer un cambio de variable $z = \lambda$ en el sistema de ecuaciones, con el objetivo de reducir el SEL *2x3* a uno *2x2* haciendo uso de una de las funciones del parámetro: como una constante (variable inactiva) (ver Figura 3.8).

Como podemos observar, el conjunto de puntos que pertenecen a los dos planos es una recta, por ello se justifica que haya una infinidad de puntos que son solución, para controlar estas soluciones vamos a introducir un parámetro en el sistema.

Sea λ un parámetro y sea $z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces el sistema I se reescribiría de la siguiente manera:

$$I = \begin{cases} x + y + \lambda = 14 \\ x + 3y + 2\lambda = 29 \end{cases} \tag{2}$$

$$J = \begin{cases} x + y = 14 - \lambda \\ x + 3y = 29 - 2\lambda \end{cases} \tag{3}$$

Notemos que, para resolver el sistema de manera algebraica, el parámetro λ toma el rol de una constante. Es decir, el sistema se transforma de un 2x3 a uno 2x2, el cual es más fácil de manipular algebraicamente. De manera gráfica su representación es la siguiente:

Representación Gráfica

Figura 3.8 Parametrización del SEL *2x3*.

En este procedimiento se plantea la idea de reducir un sistema 2x3 a uno 2x2, lo cual facilitaría el trabajo algebraico y coloca a los profesores en un terreno conocido, sin embargo, pese a que esto no aplica a todo sistema y requiere que se cumplan ciertas condiciones, en nuestro caso es posible colocar las ecuaciones en función de dos de variables.

Para el tratamiento de otros sistemas de ecuaciones lineales de manera similar, se requiere que estos cumplan el Teorema de la función implícita, el cual detallamos enseguida.

Teorema de la Función la implícita

Sea $f: A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ una función de clase C^k. Supongamos que $(x_0, y_0) \in A$ y verifica que $f(x_0, y_0) = 0 \in \mathbb{R}^m$.

$$\text{Sea } \triangle = det \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{bmatrix}$$

Si $\triangle\,(x_0, y_0) \neq 0$, entonces existe un entorno de x_0, $u \subset \mathbb{R}^n$, un entorno v de y_0 en $\mathbb{R}^m$ y una única función $g: u \to v$ de manera que $f(x_0, y_0) = 0$ $\forall x \in u$. Además, g es de clase C^k.

Este teorema establece las condiciones suficientes para que se pueda despejar una variable en términos de una u otras variables, o si un conjunto de ecuaciones de varias variables permite establecer a una o varias de ellas como función de las otras.

Otra manera de constatar que podemos despejar una variable respecto a otra se apoya en considerar el rango de los sistemas, que se asocia a el número de vectores linealmente independientes que las componen, en particular:

Para un sistema con matriz asociada A de dimensión nxm, basta con que se cumpla la siguiente condición para poder despejar una variable en términos de las otras:

- Alguno de los determinantes de los menores de orden igual o menor al mínimo entre n y m debe ser distinto de cero.

Lo que es equivalente a tener vectores columna o fila linealmente independientes, a partir de los cuales podemos expresar a los restantes.

Este resultado, aunque no se advirtió a los profesores, si se hizo hincapié en que la variable estaba contenida en el parámetro, haciendo uso precisamente de su función como constante, dejando claro que la variable no había desaparecido de la ecuación, sino que esta formaba parte de ella.

A modo de ejemplo, consideremos el siguiente sistema I:

$$I = \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$$

Para saber si podemos transformar x en un parámetro λ consideremos el siguiente menor cuadrado de tamaño $2x2$, y calculamos su determinante:

$$det \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = det \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

De lo anterior concluimos que la variable x no puede transformarse en un parámetro, pero se comprueba fácilmente que el resto de las variables sí.

Para y:

$$det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = det \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Entonces podemos transformar y en un parámetro, $y = \lambda$, de lo que se obtiene el siguiente sistema paramétrico:

$$\begin{cases} x + z = 3 - \lambda \\ 2x + z = 4 - \lambda \end{cases}$$

Y donde su conjunto solución es el siguiente:

$$x = 1, \quad z = 2 - \lambda, \quad y = \lambda. \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Para z:

$$det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = det \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Se comprueba entonces que se puede transformar z en un parámetro, $z = \lambda$, de lo que se obtiene el siguiente sistema paramétrico:

$$\begin{cases} x + y = 3 - \lambda \\ 2x + y = 4 - \lambda \end{cases}$$

Y donde su conjunto solución es el siguiente:

$$x = 1, \quad y = 2 - \lambda, \quad z = \lambda. \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto, en este ejemplo observamos que el procedimiento de parametrización es válido únicamente para las variables y y z.

En suma, en un sistema de este tipo, la cantidad de parámetros que se pueden introducir viene dada por las particularidades del sistema. En este caso, el número de ecuaciones, el número de incógnitas y el rango de la matriz son los que determinan el número de variables que se pueden convertir en parámetros.

En este apartado entran en funcionamiento dos tipos de artefactos, uno cognitivo y otro procedimental. Por una parte, el artefacto cognitivo permite utilizar al parámetro como constante (variable inactiva), por el otro lado, procedimentalmente el cambio de variable permite parametrizar el sistema.

Haciendo uso de un applet en GeoGebra (ver Figura 3.9) se mostró la representación gráfica del sistema parametrizado (una proyección en $\mathbb{R}^2$ de la representación original en $\mathbb{R}^3$) acompañada de un deslizador que permite interpretar al parámetro dinámicamente como una variable de control.

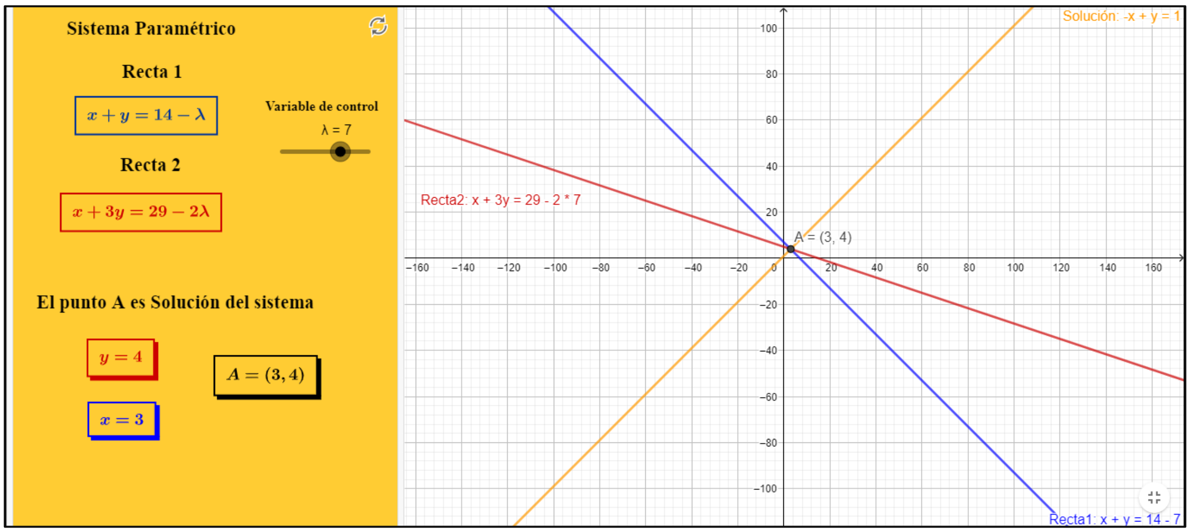


Figura 3.9 Representación gráfica del sistema parametrizado.
Para ver el funcionamiento ir a: https://www.geogebra.org/m/djqjsax9

El tratamiento dual del parámetro fue explicitado ampliamente a cada profesor, lo que permitió observar las relaciones, propiedades y beneficios que iban desde una interpretación gráfica convincente, al cálculo de soluciones particulares; también permitió observar el vínculo de la variable de control con estas soluciones.

Además, se calculó el conjunto solución del SEL (ver Figura 3.10), a través de un programa, el cual fue diseñado exprofeso por el autor, debido a que pretendíamos centrar la atención en el tratamiento de los parámetros, por lo que obviamos los cálculos. Este programa requería solamente de introducir los coeficientes o expresiones algebraicas de un SEL de n ecuaciones con m variables.

Ahora introducimos un parámetro en el sistema, en este caso $\lambda = z$. El siguiente programa te permite calcular el sistema paramétrico. Para calcular la solución introduce los datos de tus ecuaciones.

Introduce los datos de la primera ecuación :

```
Cuál es el coeficiente de x: 1
Cuál es el coeficiente de y: 1
Cuál es el coeficiente de z: 1
Cuál es el término constante: 14
```

Tu ecuación paramétrica 1 *es* :

$x + y = 14 - \lambda$

Introduce los datos de la segunda ecuación :

```
Cuál es el coeficiente de x: 1
Cuál es el coeficiente de y: 3
Cuál es el coeficiente de z: 2
Cuál es el término constante: 29
```

Tu ecuación paramétrica 2 *es* :

$x + 3y = 29 - 2\lambda$

Tu sistema parámetrico es el siguiente :

$x + y = 14 - \lambda$

$x + 3y = 29 - 2\lambda$

```
sympy.matrices.dense.MutableDenseMatrix
```

La solución paramétrica del sistema es :

$$\left\{x : \frac{13}{2} - \frac{\lambda}{2},\ y : \frac{15}{2} - \frac{\lambda}{2}\right\}$$

con $\lambda = z$

Figura 3.10 Uso de la calculadora del conjunto solución de un SEL.

En el escrito de este apartado se menciona que el programa permite *"calcular el sistema"* esto hace referencia a que te permite *"calcular el conjunto solución de un sistema"*, lo mismo ocurre en la Figura 3.16. Cabe aclarar que los participantes tenían claro que la ecuación tenía la forma de $ax + by + cx = k$. Además, hubiera sido más adecuado incluir la tercera variable en el conjunto solución paramétrico, sin embargo, el código del programa lo proporciona en este formato, por lo que es necesario recuperar la tercera variable después del cálculo.

Dado que los objetivos de esta investigación estaban dirigidos a la justificación del uso del parámetro, se consideró que, pese a que este programa atiende SEL de cualquier tamaño, recurrimos a reducirlos a sistemas cuadrados parametrizados para que el profesor detectara el uso del parámetro como parte del proceso de solución.

En este caso, el programa funge como un artefacto de tipo procedimental y aunque mediante este programa se obtiene el conjunto solución de un SEL de cualquier dimensión, proceder a la parametrización permite dirigir la atención al funcionamiento del parámetro como variable de control (ver Figura 3.11).

Al resolver el sistema $\boldsymbol{J}$ de manera algebraica por alguno de los métodos conocidos (eliminación, sustitución, etc.) se obtiene la siguiente solución paramétrica:

$$y = \frac{15-\lambda}{2}, x = \frac{13-\lambda}{2}, \lambda \in \mathbb{R} \tag{4}$$

Sin embargo, necesitamos obtener la solución del sistema original. Para ello utilizamos la solución obtenida anteriormente y tomando en cuenta que $z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ obtenemos la solución del sistema $\boldsymbol{I}$ es decir:

$$x = \frac{13-\lambda}{2}, y = \frac{15-\lambda}{2},\ z = \lambda;\ \lambda \in \mathbb{R} \tag{5}$$

Recordemos que el conjunto solución de un sistema 2x3 describe una recta. Entonces la manera de encontrar los puntos de esa recta es utilizando la solución paramétrica que hemos obtenido, de la siguiente manera:

*El parámetro λ ahora toma el rol de variable, que varía sobre todo $\mathbb{R}$.

*Podemos fijar un valor de λ dependiendo de nuestras necesidades.

Por ejemplo, si hacemos variar a λ en el intervalo [0,13] podemos obtener todos los puntos que sean positivos en la recta. De manera gráfica lo podemos analizar de la siguiente manera:

Figura 3.11 Solución paramétrica del SEL *2x3*.

Debido al objetivo de la investigación, recurrimos a ejemplos de sistemas 2x3 y en el escrito se menciona que la solución de un sistema de tamaño 2x3 puede describir una recta, sin embargo, en las sesiones con los participantes se aclaró que también puede ocurrir el caso en donde el conjunto solución de un sistema de este tipo puede estar descrito por un plano, pero debido al objetivo de la parametrización, este último caso no fue abordado, lo que supone que es necesario mencionarlo al término de la experiencia.

Es importante comentar que, cuando se menciona que *"los puntos que sean positivos en la recta"* en realidad se hace referencia al valor de sus coordenadas, también es importante comentar que se debe precisar que a fin de cuentas una solución parametrizada incluye potencialmente todas las soluciones y determinarla significa hacer una elección en cada caso, que estará en los términos de las condiciones del problema.

En la última parte de esta sección, se presentó a los profesores un applet en GeoGebra (ver Figura 3.12), en el cual se pudo observar y analizar la representación gráfica del conjunto solución en $\mathbb{R}^2$ (familia de rectas) y en $\mathbb{R}^3$ (recta como la intersección de planos en el espacio) del SEL original y el paramétrico simultáneamente, además de un deslizador que permite observar de manera dinámica la variación, el vínculo del parámetro y las soluciones particulares de forma gráfica. La relación entre ambas representaciones se expuso a los profesores como una proyección del espacio tridimensional en planos paralelos.

Con respecto la interpretación gráfica y algebraica, aunque no se comentó a los profesores, se debería atender la idea que las soluciones del sistema parametrizado y el original no son las mismas, sino que son dos conjuntos equivalentes, es decir, dos conjuntos solución que mantienen ciertas propiedades y características, que permiten resolver el mismo sistema, ya sea visto en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$.

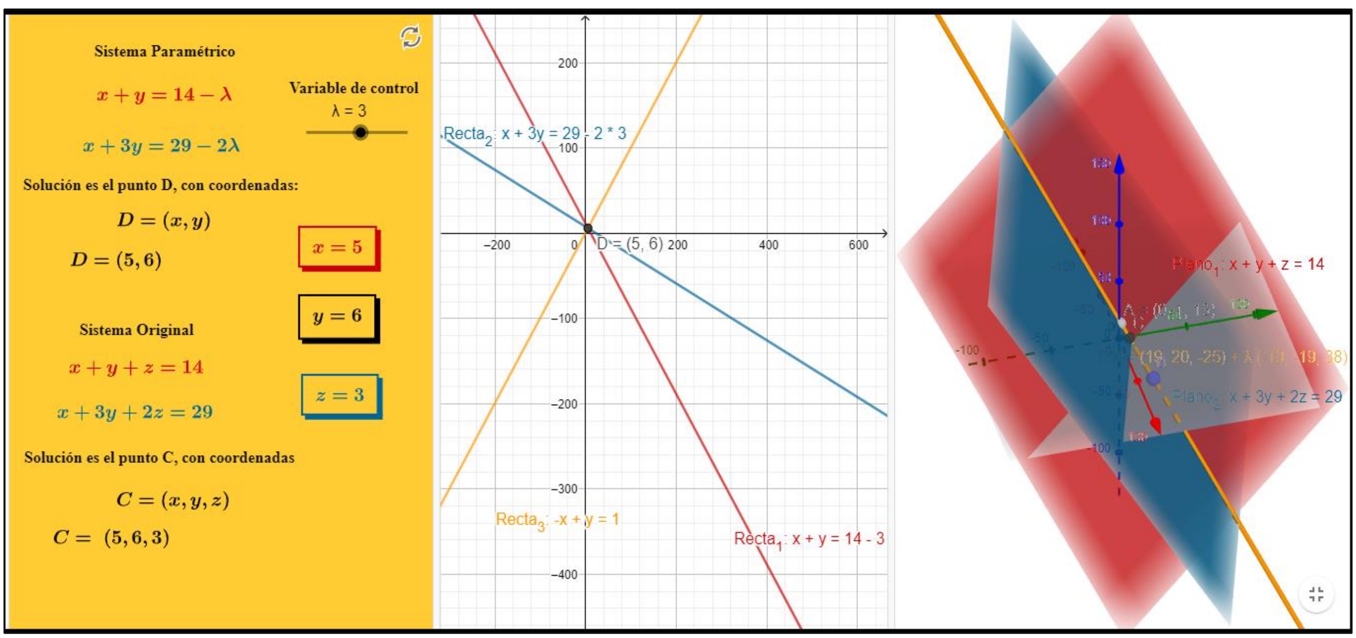


Figura 3.12 Applet GeoGebra: variación del parámetro.
Para ver el funcionamiento ir a: https://www.geogebra.org/m/xjsrzutk

En la subsección 3.1: **Ejemplo Parámetro como Variable de Control** se mostró una situación donde se planteó un modelo a partir de un SEL 2x3 con condiciones específicas (ver Figura 3.13). En esta sección se pusieron en funcionamiento distintos artefactos de ambos tipos, que al ser coordinados permitirían a los profesores dar sentido a la *variable de control* y a la posibilidad de manipular las soluciones infinitas mediante la toma de decisiones sobre soluciones válidas.

3.1 Ejemplo Parámetro como Variable de Control

Example 1 La siguiente tabla da el número de miligramos de vitaminas A y B contenidas en un gramo de cada uno de los alimentos x; y; z. Se debe preparar una mezcla que contenga exactamente 14 mg. de A y 29 mg. de B. Encuentre la mayor cantidad de gramos de y que se pueda utilizar en la mezcla. ¿Cuál es la menor cantidad de gramos de y que se puede utilizar en la mezcla?

	x	y	z
A	1	1	1
B	1	3	2

$$I = \begin{cases} x + y + z = 14 \\ x + 3y + 2z = 29 \end{cases} \tag{6}$$

Representación Gráfica

Figura 3.13 Subsección 3.1-Ejemplo 1.

El ejemplo anterior fue presentado a los profesores como un problema contextual que puede ser resuelto mediante un sistema de ecuaciones lineales, sin embargo, luego de la experiencia detectamos que nos referimos a la menor cantidad de gramos requeridas en el problema, lo que puede inducir a una incorrecta interpretación, en el sentido de que se asocie al parámetro con un valor particular, lo que hace que distorsione su sentido intrínseco como variable. Además, se detectó un inconsistencia en el uso de unidades. Este diseño se puede mejorar haciendo las adecuaciones presentadas en la siguiente Figura 3.14.

3.1 Ejemplo: Parámetro como variable de control

Example 1 La siguiente tabla muestra el número de miligramos de vitaminas A y B contenidas en un gramo de cada uno de los alimentos x; y; z.

	x	y	z
A	1	1	1
B	1	3	2

Se debe preparar una mezcla que contenga exactamente 14 mg de A y 29 mg de B. El sistema I es el modelo matemático asociado a la situación planteada:

$$I = \begin{cases} x + y + z = 14 \\ x + 3y + 2z = 29 \end{cases}$$

a)Resuelva el sistema I en términos de un parámetro λ.

b)Determine el conjunto solución del sistema paramétrico, de manera que la solución sea adecuada a una situación real.

c)¿Se puede determinar la mayor cantidad de miligramos de y que puedan estar contenidos en la mezcla?

Figura 3.14 Subsección 3.1-Ejemplo 1. Versión con adecuaciones.

En este apartado se discutió y analizó con los profesores la resolución del ejemplo 1, cabe destacar que el SEL que modela la situación es el mismo de la sección anterior. Para resolver el problema era necesario el uso y la coordinación de los artefactos anteriores. En este momento la variable de control se asoció a las condiciones específicas, que justifican la existencia de soluciones válidas.

Además, a partir del applet de la Figura 3.12 se analizaron las soluciones a través del deslizador, lo que permitió observar de forma gráfica y dinámica al parámetro y su vínculo con las soluciones particulares, de manera que los profesores podrían tomar una decisión sobre las soluciones que podrían válidas en ese conjunto.

La coordinación de los artefactos antes mencionados y el análisis de los problemas en contexto con condiciones específicas, pretendían promover una práctica reflexiva sobre la *variable de control*, el manejo de las soluciones infinitas y las soluciones válidas.

En la última sección del cuaderno: **Problemas en contexto y parámetros**, se presentó un nuevo problema contextual y su respectivo modelo matemático (véase Figura 3.15), en primera instancia se analizó el enunciado y el SEL que modela la situación y se establecieron las condiciones que se debían cumplir para que la solución tuviera sentido. Además, se plantearon ideas sobre la resolución del problema para hacer uso del método de parametrización antes planteado y de la función dual del parámetro.

4.1 Situación 1

Exercise 2 Una pequeña parte de los ingresos de dos sucursales bancarias dependen del tiempo dedicado a dos acciones de atención al público A, B y otra de verificación de datos C. Mientras que en las dos primeras el tiempo dedicado aumenta los ingresos, en la tercera es, al contrario. En la primera sucursal se estima que por cada hora dedicada semanalmente a A y B se obtiene un beneficio de USD 1.2 y USD 2, respectivamente, mientras que cada hora dedicada a C supone una pérdida de USD 3. En la segunda sucursal, cada hora dedicada semanalmente a A y B, proporciona un beneficio de USD 2.1 y USD 3.2, respectivamente, y cada hora dedicada a C supone una pérdida de USD 4.

¿Cuántas horas semanales deberían dedicarse en cada sucursal si con estas tres acciones deben obtener un beneficio de USD 110 y USD 200 en las sucursales 1 y 2, respectivamente?

El siguiente sistema de 2 ecuaciones con 3 incógnitas es el modelo matemático de la situación planteada:

$$I = \begin{cases} 1.2x + 2y - 3.1z = 110 \\ 2.1x + 3.2y - 4z = 200 \end{cases} \tag{14}$$

Figura 3.15 Subsección 4.1- Ejemplo 2.

De igual manera, como se realizó en las situaciones anteriores, se calculó el conjunto solución del sistema original y del sistema paramétrico mediante el programa. Posteriormente se estableció un intervalo de soluciones válidas (un subconjunto continuo) (véase Figura 3.16).

> **Ahora introducimos un parámetro en el sistema, en este caso $\lambda = z$. El siguiente programa te permite calcular el sistema paramétrico. Para calcular la solución introduce los datos de tus ecuaciones.**

Introduce los datos de la primera ecuación :

```
Cuál es el coeficiente de x: 1.2
Cuál es el coeficiente de y: 2
Cuál es el coeficiente de z: -3.1
Cuál es el término constante: 110
```

***Tu ecuación paramétrica* 1 *es* :**

$1.2x + 2.0y = 3.1\lambda + 110.0$

Introduce los datos de la segunda ecuación :

```
Cuál es el coeficiente de x: 2.1
Cuál es el coeficiente de y: 3.2
Cuál es el coeficiente de z: -4
Cuál es el término constante: 200
```

***Tu ecuación paramétrica* 2 *es* :**

$2.1x + 3.2y = 4.0\lambda + 200.0$

Tu sistema parámetrico es el siguiente :

$1.2x + 2.0y = 3.1\lambda + 110.0$

$2.1x + 3.2y = 4.0\lambda + 200.0$

```
sympy.matrices.dense.MutableDenseMatrix
```

La solución paramétrica del sistema es :

$\{x : 133.333333333333 - 5.33333333333333\lambda,\ y : 4.75\lambda - 24.9999999999999\}$

con $\lambda = z$

Figura 3.16 Programa que obtiene el conjunto solución de un SEL.

Enseguida se analizó y discutió de forma algebraica el conjunto solución (véase Figura 3.17), y las posibilidades de tomar subconjuntos de soluciones válidas, que cumplieran con las condiciones impuestas por el problema.

En este caso, el intervalo de soluciones válidas se calculó dependiendo de las condiciones impuestas por el problema en contexto, de manera que la solución fuera lo más apegada a la realidad. En este ejemplo se busca y se acota un intervalo donde las coordenadas solo sean positivas, traducido al contexto real de la situación, se refiere a las horas semanales que tendría que trabajar una persona para cumplir con las condiciones impuestas por el problema. Y teniendo en cuenta que el tiempo únicamente transcurre hacia delante, por tanto, los puntos con coordenadas negativas no son soluciones válidas.

4.1.1 Solución

Por lo tanto la solución del sistema paramétrico es:

$$x = \frac{16}{3}(-\lambda + 25),\ y = \frac{1}{4}(19\lambda - 100),\ z = \lambda;\ \lambda \in \mathbb{R} \tag{15}$$

Sin embargo, para que la solución sea válida, tenemos que analizar el intervalo en donde las soluciones sean válidas:

La solución es válida en el intervalo:

$$\lambda \in [\frac{100}{19}, 25] \tag{16}$$

Un ejemplo de solución válida es el siguiente:

Si

$$x = h.\,sem.\ para\ A \tag{17}$$
$$y = h.\,sem.\ para\ B \tag{18}$$
$$z = h.\,sem.\ para\ C \tag{19}$$

Podemos elegir un valor para λ en ese intervalo

Representación Gráfica

Figura 3.17 Solución paramétrica del SEL *2x3*.

Por último, se hizo un análisis gráfico del problema mediante un applet en GeoGebra (véase Figura 3.18), en el cual se pudo observar en un mismo plano el sistema paramétrico y el original (sus representaciones en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$) y por ende el conjunto solución asociado a cada uno. En este punto se hizo variar el deslizador (parámetro) en el intervalo que con anterioridad fue propuesto, lo que expuso visualmente la relación entre el parámetro y las soluciones particulares.

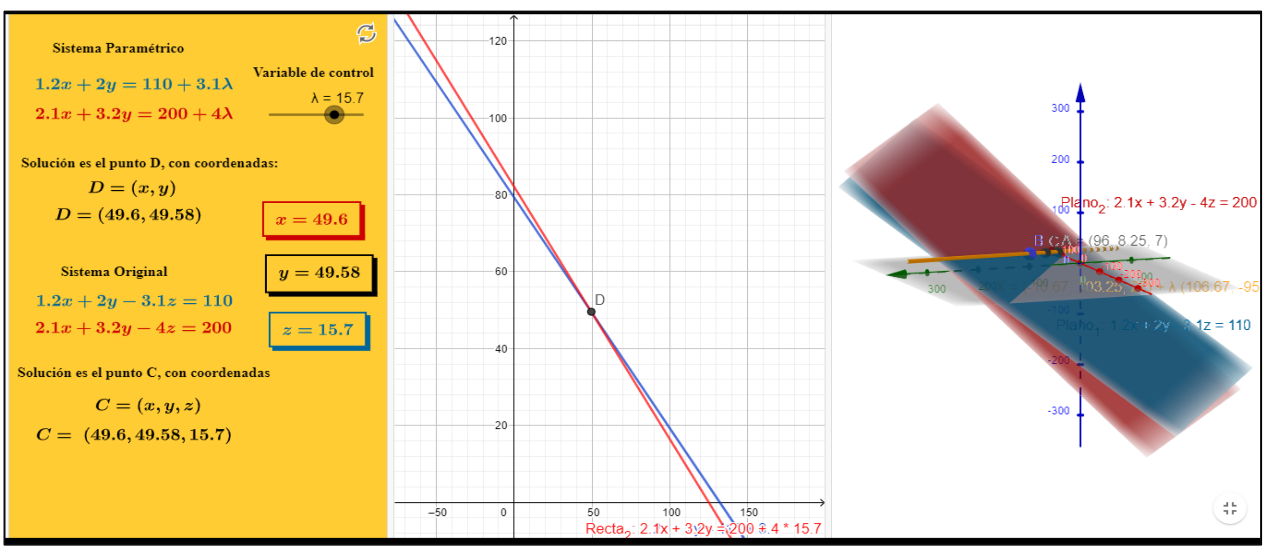


Figura 3.18 Applet GeoGebra: variación del parámetro situación 4.1
Para ver el funcionamiento ir a: https://www.geogebra.org/m/x6bypxzc

3.6 Toma de datos

Los datos que van a ser la base del análisis para establecer el efecto que tuvo este tratamiento, de los parámetros como variable de control, entre los profesores encuestados, se apoyan en las grabaciones de cada una de las sesiones de trabajo, de los diálogos de los profesores y el investigador durante el desarrollo de las actividades de intervención; diálogos que fueron transcritos en su totalidad.

Los datos presentados en este trabajo recopilan las transcripciones más significativas de las entrevistas que consideramos ilustrativas para el desarrollo de la investigación.

Las transcripciones de cada sesión de trabajo pueden consultarse en la siguiente dirección de internet https://drive.google.com/drive/folders/1E0yo-iDdi0b2pEBrypKUTJUx3PpdUchO?usp=sharing mientras que aquellas que fueron más relevantes aparecen en el Anexo 1 de la página 109 de este escrito.

A continuación, presentamos un esquema general del proceso de la entrevista-intervención, el cual esboza la trayectoria que se siguió en la sesión con los profesores.

3.7 Esquema General de intervención

Un objetivo de la investigación es indagar cómo los profesores, que tienen antecedentes de enseñanza de SEL, podrían adoptar el uso del parámetro como una variable de control, considerando una aproximación pragmática apoyada en los aspectos de su naturaleza dual. Para dar cuenta de cómo se planteó ese proceso, en este apartado presentamos un esquema general de la intervención realizada con ellos.

La intervención se desarrolló en 7 partes a saber:

1. Inicio de entrevista-intervención.
2. Breve recordatorio sobre los Sistemas de Ecuaciones Lineales.
3. Introducción de la definición del parámetro enfatizando su carácter dual.
4. Introducción a los sistemas 2x3.
5. Tratamiento del parámetro como variable de control.
6. Situaciones donde se pueden utilizar los parámetros.
7. Cierre de la intervención.

Cada parte tenía una intencionalidad específica, en la cual el investigador planteó una serie de preguntas a los profesores. En las partes 4, 5 y 6 se plantearon algunos problemas, para los cuales, en colaboración con el investigador, se buscaron estrategias de resolución.

A continuación, mostramos a detalle la trayectoria de cada momento de la intervención.

1. Inicio de entrevista-intervención

Al inicio de la intervención se explicó a los profesores el contenido que se abordaría en la sesión: los sistemas de ecuaciones lineales, los parámetros y, por último, la toma de decisiones a través de la elección de soluciones válidas para los SEL con infinitas soluciones.

Las preguntas que guiaron la discusión en esta parte fueron las siguientes:

1. ¿Conoces los parámetros?
2. ¿Has usado a los parámetros en algún dominio de la matemática?

2. Breve recordatorio sobre los Sistemas de Ecuaciones Lineales

En esta parte de la sesión se hizo un breve recordatorio sobre los SEL y sus métodos de solución en dos y tres variables. Se hizo énfasis en la representación gráfica del conjunto solución de los sistemas.

Las preguntas que guiaron la discusión en esta parte fueron las siguientes:

1. ¿Sabes qué representa de manera gráfica una ecuación lineal de dos variables?
2. ¿Sabes qué representa de manera gráfica una ecuación lineal de tres variables?
3. ¿Alguna vez has impartido el tema sobre sistemas de ecuaciones lineales?
4. ¿Qué significaba resolver un sistema de ecuaciones lineales $2x2$?
5. ¿Conoces sistemas con soluciones infinitas?
6. ¿Presentas este caso a tus estudiantes?
7. ¿Cómo explicas este caso a tus alumnos?
8. ¿Qué significa resolver un sistema de ecuaciones lineales $3x3$?

3. Introducción de una definición de parámetro

Aquí se presentó a los profesores nuestra propuesta del parámetro, como una variable de control con naturaleza dual, en donde el carácter de constante se manifestaba cuando la variable no estaba activa. Se explicó cuál es su función en los SEL con infinitas soluciones y su relación con aquellas que son válidas.

4. Introducción a los sistemas 2x3

En este momento de la sesión se introdujo a los profesores a los sistemas de dimensión $2x3$. En un comienzo se plantearon las siguientes preguntas:

1. ¿Conoces los sistemas de ecuaciones lineales rectangulares?
2. ¿Has resuelto un sistema $2x3$?

Después se presentó al profesor el siguiente sistema y su representación gráfica, junto a las siguientes preguntas:

$$I = \begin{cases} x + y + z = 14 \\ x + 3y + 2z = 29 \end{cases}$$

3. ¿Qué estrategias de resolución utilizarías para resolverlo?
4. ¿El sistema tiene solución?
5. En tu práctica docente, cuando se presenta este tipo de sistemas ¿qué les dices a tus alumnos?
6. ¿Les mencionas que no tiene solución, que tienen infinitas soluciones o no se los presentas? La primera parte de esta pregunta está motivada por el hecho de que algunos de los profesores creen que, si se trata del caso infinito, entonces no se resuelve y por tanto no hay soluciones.

Enseguida se presentó y explicó el método de parametrización del SEL al introducirlo y hacer uso de uno de sus papeles, como una expresión que podemos tomar como constante advirtiendo que la variable z no desaparece, sino que es manipulada como un parámetro:

$$I = \begin{cases} x + y + z = 14 \\ x + 3y + 2z = 29 \end{cases} \qquad J = \begin{cases} x + y = 14 - \lambda \\ x + 3y = 29 - 2\lambda \end{cases}$$

Con respecto a esto se hicieron las siguientes preguntas:

7. ¿Podrías resolver el sistema J?
8. ¿Cómo resolverías este sistema de manera algebraica?
9. ¿Te imaginas cómo es la representación gráfica de este sistema?

Después se presentó un applet de Geogebra con la representación del sistema J y se discutió sobre la familia de rectas que daban significado a las soluciones, mediante las siguientes preguntas:

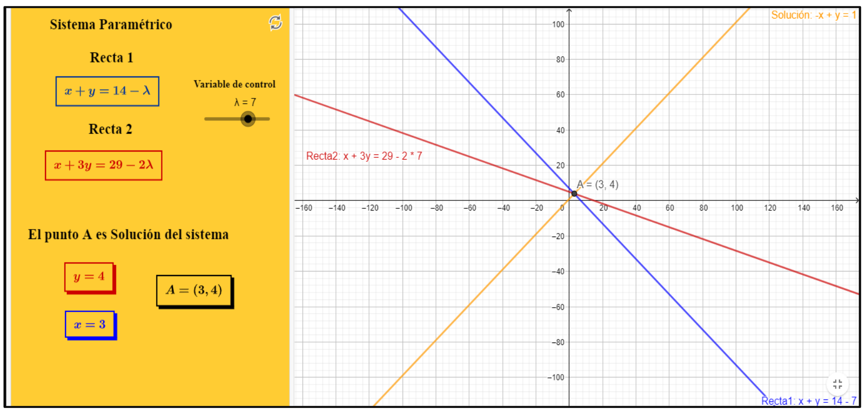


Figura 3.19 Conjunto solución del sistema paramétrico

10. ¿Qué puedes deducir de esta representación asociada al SEL que se estaba trabajando?
11. ¿Qué significado tienen esas rectas?
12. ¿Qué significado tiene la recta amarilla?
13. ¿Observas qué sucede cuando hacemos variar la variable de control que aparece en la gráfica?

Enseguida se calculó el conjunto solución del sistema paramétrico mediante el programa desarrollado por el investigador. Lo que permitió que los profesores interpretaran las infinitas soluciones como familias de rectas asociadas a la expresión paramétrica. Y se discutió la idea de tomar intervalos (cerrados y acotados) de soluciones, como preparación para la resolución del problema en contexto, esta discusión se desarrolló mediante las siguientes preguntas:

14. ¿Podrías establecer un intervalo donde las soluciones sean positivas?
15. ¿Podrías establecer un intervalo donde las soluciones son negativas?

Por último, se presentó un applet con la representación gráfica del sistema original y el parametrizado. Y se explicó la relación entre ambas representaciones cuando se hace variar el parámetro, que aparece como una proyección del espacio tridimensional en el plano, de ahí que fundamentamos que se trate de conjuntos solución equivalentes.

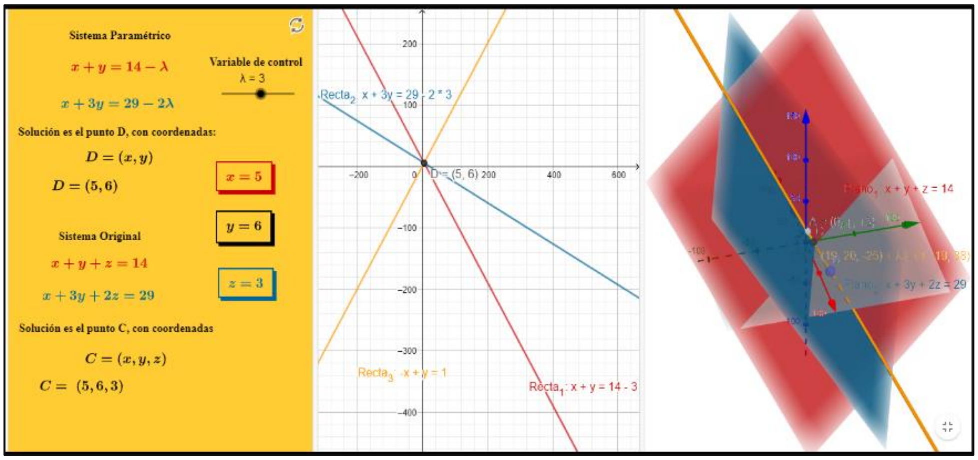


Figura 3.20 Conjunto solución en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Con respecto a esta representación se hicieron las siguientes preguntas:

16. ¿Observas la relación entre ambas representaciones?
17. ¿Qué puedes deducir cuando se mueve el deslizador (la variable de control)?
18. ¿Te queda clara la idea de variable de control?
19. ¿Hasta ahora qué te parece este enfoque que te estamos proponiendo?
20. ¿Lo implementarías en tus clases?

5. El parámetro como variable de control.

En esta parte de la sesión se presentó al profesor el siguiente problema contextual que involucra una sistema 2x3 con soluciones infinitas, pero con condiciones específicas. En este caso el investigador orientó al profesor en la resolución del problema.

La siguiente tabla muestra el número de miligramos de vitaminas A y B contenidas en un gramo de cada uno de los alimentos x; y; z.

	x	y	z
A	1	1	1
B	1	3	2

Se debe preparar una mezcla que contenga exactamente 14 mg de A y 29 mg de B. Encuentre la mayor cantidad de miligramos de y que se puedan utilizar en la mezcla. ¿Cuál es la menor cantidad de miligramos que se pueden utilizar en la mezcla?

$$I = \begin{cases} x + y + z = 14 \\ x + 3y + 2z = 29 \end{cases}$$

Se hizo notar que el sistema que modela esta situación es el mismo que el analizado en la sección anterior. En este caso el investigador orientó al profesor para encontrar una estrategia de solución, lo cual se realizó en el contexto gráfico.

En el contexto gráfico se analizó la representación del conjunto solución del sistema mediante el deslizador, el cual permitió observar de forma gráfica y dinámica al parámetro y a las soluciones particulares, de manera que el profesor tuviera la posibilidad de identificar las soluciones para poder decidir por aquellas que resolvían razonablemente el problema.

Las preguntas que guiaron la discusión fueron las siguientes:

1. ¿Qué condiciones están dadas por el problema?
2. ¿Qué significado tiene obtener soluciones negativas?
3. ¿Qué significado tiene obtener soluciones positivas?
4. ¿Qué tipo de soluciones son válidas en este problema?
5. ¿En qué intervalo las soluciones son válidas?
6. ¿Se podría determinar una cantidad que podemos considerar como máxima de miligramos de y que pueden estar contenidos en la mezcla?
7. ¿Podríamos acercarnos a la menor?

6. Situaciones donde se pueden utilizar los parámetros.

En esta parte de la intervención se presentó el siguiente problema en contexto. Y se pidió al profesor que pensara en una estrategia de resolución empleando los recursos planteados momentos antes.

Una pequeña parte de los ingresos de dos sucursales bancarias dependen del tiempo dedicado a dos acciones de atención al público A, B y otra de verificación de datos C. Mientras que en las dos primeras el tiempo dedicado aumenta los ingresos, en la tercera es al contrario. En la primera sucursal se estima que por cada hora dedicada semanalmente a A y B se obtiene un beneficio de 1.2 USD y 2 USD, respectivamente, mientras que cada hora dedicada a C supone una pérdida de 3 USD. En la segunda sucursal, cada hora dedicada semanalmente a A y B, proporciona un beneficio de 2.1 USD y 3.2 USD, respectivamente, y cada hora dedicada a C supone una pérdida de 4 USD.

¿Cuántas horas semanales deberían dedicarse en cada sucursal, si con estas tres acciones deben obtener un beneficio de 110 USD y 200 USD en las sucursales 1 y 2, respectivamente?

El siguiente sistema de 2 ecuaciones con 3 incógnitas es el modelo matemático asociado a la situación planteada.

$$I = \begin{cases} 1.2x + 2y - 3.1z = 110 \\ 2.1x + 3.2y + 4z = 200 \end{cases}$$

En un primer momento se realizaron las siguientes preguntas:

1. ¿Crees que el sistema tenga solución?
2. ¿Cómo resolverías este sistema?
3. ¿Introducirías un parámetro para resolverlo?
4. ¿De qué manera introducirías el parámetro?
5. Algebraicamente ¿cómo resolverías el sistema?

Después de que el profesor planteara el sistema paramétrico, el investigador lo auxiliaría con el programa que calcula el conjunto solución de un sistema de tamaño *nxm*. De manera que la atención del profesor se enfocara en el análisis del conjunto solución para obtener una o varias soluciones válidas.

Las preguntas que guiaron la discusión fueron las siguientes:

1. ¿Qué condiciones están impuestas por el problema?
2. ¿Tiene algún sentido obtener soluciones negativas?

3. ¿Tiene algún sentido obtener soluciones positivas?
4. ¿Qué tipo de soluciones son válidas en este problema?
5. ¿En qué intervalo las soluciones serían válidas?

Por último, se hizo un análisis del problema en el contexto gráfico, en donde era posible observar de manera dinámica el conjunto solución, las soluciones particulares, y el intervalo de soluciones válidas.

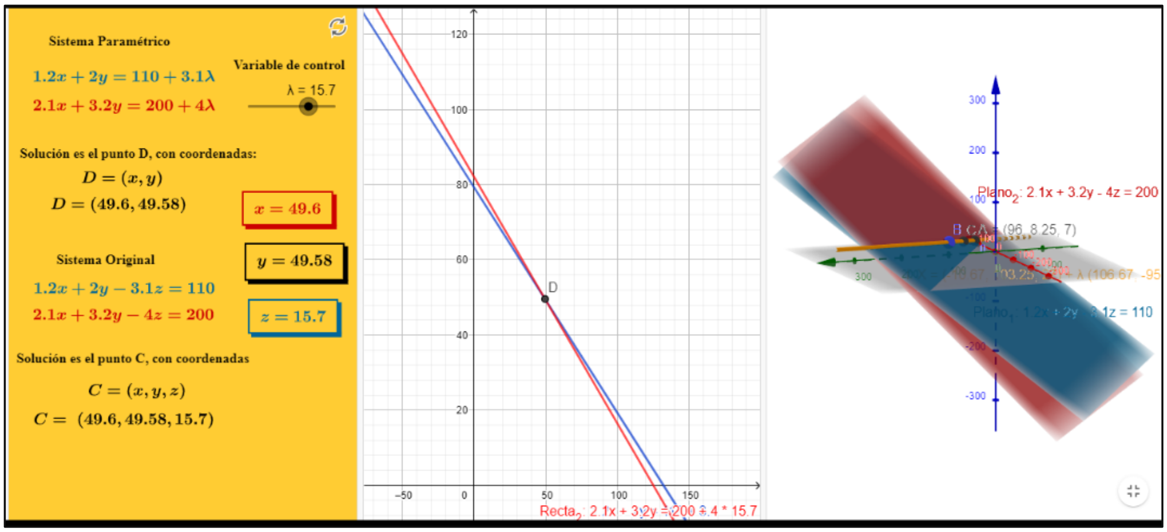


Figura 3.21 Conjunto solución en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$-situación 2

Las preguntas que guiaron la discusión en esta parte fueron las siguientes:

1. ¿De qué manera podemos visualizar el intervalo de soluciones válidas?
2. ¿Qué ocurre si tomamos un valor fuera de ese intervalo?
3. ¿De qué manera puedes elegir una solución válida?
4. ¿Podrías proporcionar una solución que sea válida para este problema?
5. ¿Cuál es la o las soluciones?

7. Cierre de la intervención.

En el último momento de la entrevista-intervención, a modo de reflexión se le hicieron las siguientes preguntas al profesor:

1. Con respecto al caso de las infinitas soluciones en un SEL ¿cuál es tu concepción con respecto a la utilidad de estas?

2. Con respecto a la idea de utilizar al parámetro como variable de control ¿qué opinas?
3. ¿Te fue de ayuda la representación gráfica?
4. ¿El problema contextual fue de ayuda para comprender el uso del parámetro?
5. ¿Te parece útil este enfoque?
6. ¿Lo introducirías en tus clases?

4. Análisis y Resultados

4.1 Introducción

En esta investigación hemos puesto en funcionamiento un grupo de artefactos semióticos que proponen un uso alternativo del parámetro como una *variable de control*, una programa para resolver SEL, transitando posteriormente por representaciones gráficas del conjunto solución de dichos sistemas y finalmente su aplicación en problemas contextuales con condiciones específicas, que dan sentido a la elección de soluciones válidas de entre las correspondientes infinitas.

Todo con el objetivo de ampliar el concepto de parámetro en SEL entre docentes de distintos niveles educativos, quienes imparten este contenido sin el uso de parámetros. Esto mediante un proceso en el que abordamos las soluciones infinitas en términos de sus aspectos procedimentales, gráficos y de sus aplicaciones. Ampliación que se llevó a cabo a través de intervenciones-discusiones sobre el tema.

Los datos proporcionados por los diálogos transcritos de las intervenciones-discusiones serán propuestos a continuación, en estos, los sujetos están marcados como P1 hasta P5 dependiendo de su aparición a lo largo de la sesión.

El perfil docente de los profesores en estos datos es el siguiente:

Profesor	P1	P2	P3	P4	P5
Nivel de docencia	Preparatoria Abierta	Licenciatura Humanidades	Licenciatura en Ciencias Sociales	Secundaria	Secundaria

Tabla 4.1 Nivel donde imparten clases los profesores.

4.2 Resultados Generales

A continuación, haremos referencia a algunos de los resultados más relevantes (ver transcripciones en la página 109) que han sido detectados a través de las transcripciones de los encuentros con los profesores, bajo los siguientes momentos:

1. Antecedentes sobre Sistemas de Ecuaciones Lineales y parámetros.
2. Parámetro como variable de control con carácter dual y método de parametrización del sistema.
3. Uso de la representación gráfica para dar sentido visual a las infinitas soluciones con un deslizador.
4. Aplicación del uso del parámetro en problemas en contexto con condiciones específicas, que dan sentido a la parametrización de las soluciones.

A lo largo de estas transcripciones haremos consideraciones puntuales sobre los efectos de la experiencia de cada profesor en términos de sus comentarios y observaciones en cada uno de los momentos referidos.

1. Antecedentes sobre Sistemas de Ecuaciones Lineales y Parámetros.

Aquí damos cuenta de las nociones que tienen inicialmente los profesores acerca de la solución y su naturaleza de un SEL con 2 y 3 variables, y sobre el caso de un SEL con infinitas soluciones en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

34.I: ¿Has enseñado sistemas de ecuaciones lineales en $\mathbb{R}^3$, en tus clases de bachillerato?

35.P1: Sí, … en el libro nada más… me viene ese tema que es 3x3, que también me da la representación, que si no hay soluciones… pero me ponen 2 planos, no los tres, que si no se intersectan no hay soluciones, que si se cruzan en un punto la solución es única, y que si los dos planos son exactamente el mismo pues el sistema es sin solución, son infinitas soluciones.

46.P1: Pero cuando te dicen por ejemplo "tienes dos ecuaciones con tres incógnitas, ahí automáticamente siempre te dicen ¡no!, no lo puedes resolver porque te falta una ecuación".

23.P2: []… sistemas de ecuaciones en donde no teníamos pues una solución única y lo que hacíamos para dar solución a ese sistema de ecuaciones es poner algunos parámetros…

64. P2: No vieron ese tipo de caso [infinidad de soluciones] cuando estuvieron en la secundaria o en la preparatoria, entonces sí tienes razón, en esa partecita de infinidad de soluciones no se aborda, o al menos los profesores no lo ven necesario en abordar, al menos mencionarlo.

30.P3: Sí, hacíamos más que nada tabulaciones con cierto valor después generalizábamos con, por ejemplo …, tomábamos cinco valores y con esos cinco valores generalizamos … que para cualquier valor cumplía la solución.

44.P4: Sí, o sea que hay varios puntos de intersección, ¿sí verdad?

65.I: Una pregunta, ¿qué pasaría si tienes más variables que ecuaciones?

66.P4: Ah caray…

67.I: ¿Tú crees que se puede resolver o que no se puede resolver esto?

68.P4: Pues a simple vista en lo particular yo diría ¿pues cómo la resolvería? porque si tengo más variables que ecuaciones, pues sustituiría las variables de la x las variables de la y y pues las reduciría prácticamente.

22.I: En tus clases ¿alguna vez abordaste esta esta cuestión de las infinitas soluciones?

23.P5: No, la verdad no.

24.P5: Es que bueno… yo siento que… es más… más complicado verlo de esta manera porque la mayoría de los docentes no lo conoce.

77.P5: …se trabajaban dos ecuaciones, pero tenían tres variables… entonces me di cuenta de que reduciendo términos pues te daba la respuesta, pero no saqué ni el valor de x ni de y ni de z.

De lo anterior observamos que:

Para P1 un sistema que no es cuadrado no tiene solución; P2 considera que tiene un manejo adecuado de los parámetros; P3 tiene una concepción discreta sobre la naturaleza de las soluciones infinitas; P4 asocia las soluciones de un sistema con intersecciones de puntos, y por último P5 desconoce los sistemas con 3 variables.

En términos generales, podemos observar que los profesores muestran un pensamiento discreto para las soluciones que son interpretadas como intersecciones de rectas, este conocimiento, es el que consideramos refleja los saberes disponibles de estos profesores para la actividad. Con respecto al conjunto solución infinito de un SEL, algunos profesores consideran que no se le puede trabajar o que nunca lo han enfrentado, pero que cuando se presenta no se resuelve.

Sus antecedentes parecen mostrar que sólo abordan los sistemas $2x2$ y $3x3$ de manera que, entre los profesores domina una cultura que establece que los sistemas de ecuaciones lineales sólo tienen sentido cuando hay soluciones únicas.

2. Parámetro como variable de control con carácter dual y método de parametrización del sistema.

El siguiente momento tenía como objetivo introducir el caso de un SEL de tamaño $2x3$, además de la propuesta del parámetro como variable de control con un carácter dual, como variable y constante según sea requerido, asimismo se pretendía presentar un método para la parametrización de un SEL $2x3$, de ese momento tenemos los siguientes fragmentos:

93. P1: … ¡porque es lo básico ¡ya que se transformó a un sistema de dos variables, eso ya lo saben resolver [los alumnos], saben lo que es una constante, pueden trabajar con una constante…

71.P2: []…. el lambda ya se transforma en una constante y por lo tanto ya no tenemos un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas [expresión de gusto] …

86.P2: Pues fíjate que… yo creo que para los alumnos sí será un poquito más… más fácil poder abordarlo… si están trabajando con sistemas de ecuaciones de tres incógnitas, en este caso con tres incógnitas y dos ecuaciones, sí… pero al final de cuentas los estamos regresando a algo que ellos ya saben [un sistema 2x2]…

57.P3: …Humm … ¿Entonces los parámetros van a estar dentro de ese intervalo que ustedes proponen? … [expresión pensativa]

106.I: Hasta este momento ¿qué te parece este enfoque que proponemos?

106.P3: Pues está muy bien, porque estás reduciendo un sistema de 2x3… lo estás convirtiendo en un sistema 2x2, entonces ya en un sistema 2x2 pues ya estaría más fácil…

160.P4: Sí, o sea tú lo puedes mover [la variable de control] de acuerdo con lo que se indique en el problema y es la que te va a permitir obtener los valores de x y y al sustituir lambda por una variable…

176.P4: Sí, y de manera algebraica el *3x3* se convierte en *2x2*, y así puedes encontrar todas las soluciones de esta recta [en el contexto gráfico].

187.I: Y, ¿tú lo llevarías a tus clases, esta idea de parámetro, para trabajar con el problema de que tienes infinitas soluciones?

188.P4: Pues sí, porque te permitiría… una… no confundir más al alumno, dos… sería un poquito… pues ahora sí que más fácil y conocer lo que es la variable de control, lo que es el parámetro prácticamente, porque es la que te permite saber si va a ser variable o va a ser constante…

100.P5: … en este caso, aquí uno lo puede manejar, o lo maneja uno … como una constante, ¡y ya no tenemos un sistema de dos ecuaciones con tres variables, sino que es un sistema de dos ecuaciones con dos variables ¡

En este momento encontramos que:

P1 adopta la funcionalidad del parámetro como variable de control y el método de parametrización del sistema.; P2 a pesar de considerar que tenía un buen manejo del uso de los parámetros, no tenía claridad sobre estas características asociadas a este, por lo que es nuevo para él obtener soluciones del sistema; P3 manifiesta una concepción de que el parámetro con carácter dual le permite acotar las soluciones ; P4 es consciente de que el parámetro, como variable de control, le permite manipular las infinitas soluciones; P5 comprende el método de parametrización del sistema y la funcionalidad dual del parámetro.

Podemos destacar que el planteamiento logra que los profesores P3, P4 y P5 muestren un momento de práctica reflexiva, en la que establecen que la definición dada y un procedimiento cercano al conocido les proporciona una herramienta para resolver SEL con infinitas soluciones, situación que para todos es nueva.

En términos generales, los profesores aceptan y adoptan el método de parametrización del sistema de manera favorable, así como la funcionalidad del parámetro con carácter dual, lo que los coloca en mejor sitio para transformar sus saberes en la dirección de la variable de control.

De manera que este método les facilita el trabajo algebraico con sistemas $2x3$ considerando la reducción de variables, sin embargo, el artefacto que representa el parámetro en este punto no es pensado como un símbolo matemático, sino como un indicador o vehículo para deshacerse de una variable. Asimismo, los profesores muestran indicios de concepciones de que el parámetro como variable de control les permite manipular las soluciones infinitas, en este momento consideramos que se actualiza el significado del parámetro de manera potencial, pero no se aprecia la naturaleza de la variabilidad de este símbolo.

Por otro lado, para todos los profesores fue sorpresivo conocer explícitamente el carácter dual del parámetro, una vez que lo adoptaron todo cobró sentido para resolver los sistemas que les eran desconocidos, considerando su utilidad en la disminución de variables.

Nos llamó la atención la falta de observaciones sobre la propuesta de la calculadora del conjunto solución de un sistema, porque entre otras cosas, pone en entredicho la labor que ellos desarrollan durante todo el curso con sus estudiantes, la cual se centra en la manipulación de los distintos métodos de solución, no obstante, los profesores no parecieron percatarse de esta implicación.

Esta situación es relevante en lo que respecta a la conveniencia del uso de este recurso en clases normales de Álgebra lineal, lo que podría plantear una línea de investigación a futuro, dado que presentar este artefacto a los profesores para acortar la presentación de la propuesta, es una cosa, y otra es usarlo como un recurso para la enseñanza. Al respecto, ya empiezan a manifestarse en el entorno de la educación matemática la presencia de dispositivos que resuelven una ecuación mediante softwares y los efectos que esto puede tener en la enseñanza del Álgebra y el Álgebra lineal (Jankvist, Misfeldt & Aguilar, 2019).

3. Representación gráfica y uso del deslizador para el manejo de la variable de control.

Luego de que los profesores adoptaran la idea de parámetro como variable de control, se les presentó la representación gráfica en $\mathbb{R}^3$(véase Figura 4.1), del sistema paramétrico y de la proyección de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$(véase Figura 4.2), así como el vínculo entre la variación del parámetro y las soluciones particulares.

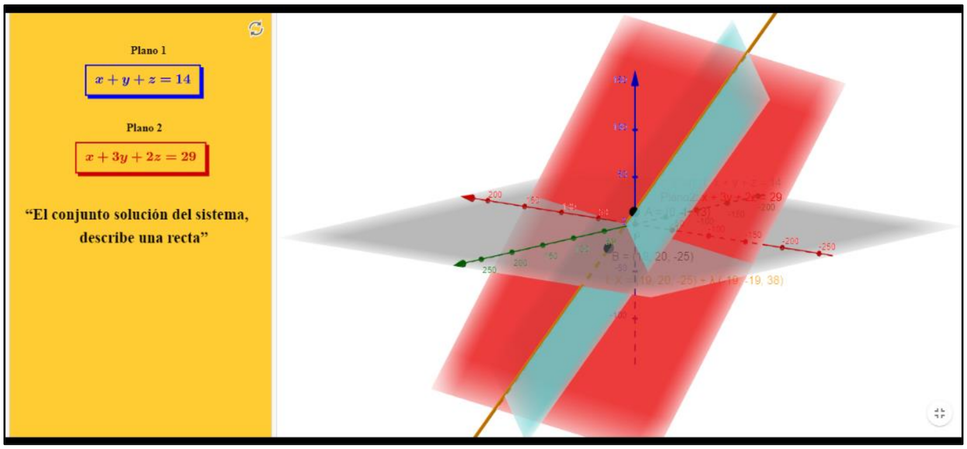


Figura 4.1 Representación de SEL *I* en $\mathbb{R}^3$.

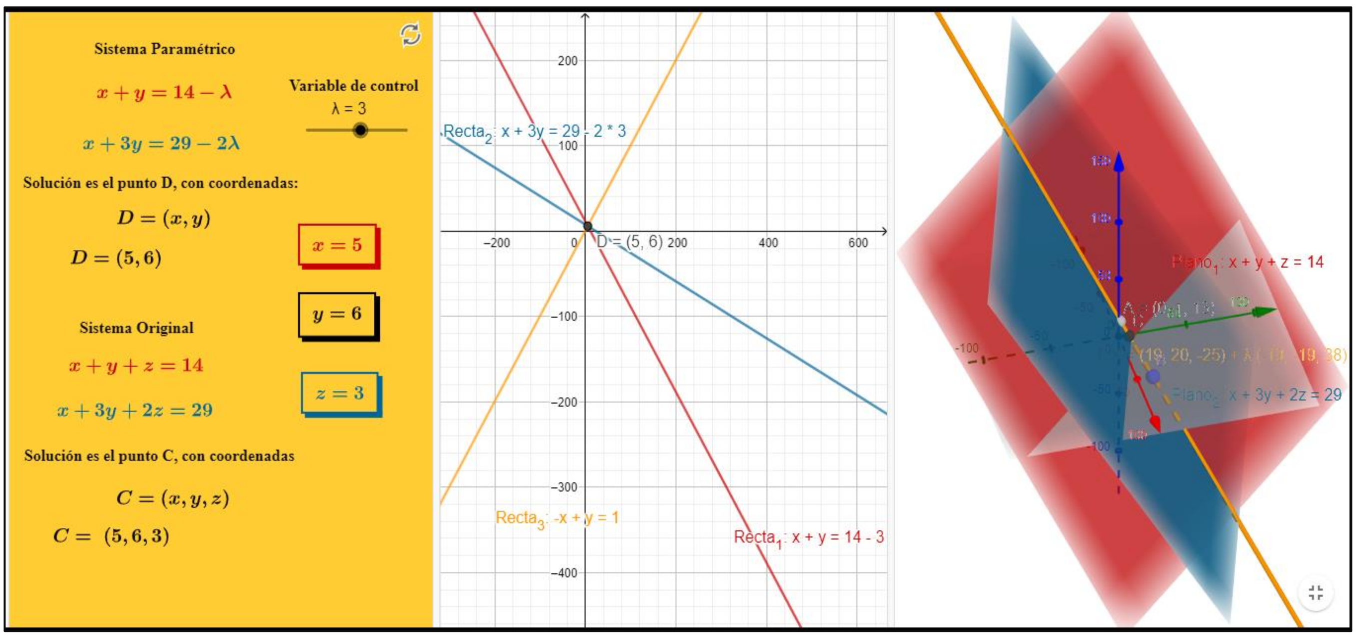


Figura 4.2 Applet GeoGebra: proyección $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

Enseguida citamos partes de los diálogos que tuvieron lugar durante el trabajo de interpretación gráfica.

108. P1: ¿Y en algún momento *y* llega a ser negativo?...
110. P1: …! ¡Ah sí, cuando pasas de lambda mayor que 15!…
113. P1: … ¡Sí¡, porque tú puedes controlar si quieres que las soluciones sean positivas o negativas, o si quieres que *y* sea positiva o negativa, tú puedes hacer variar el parámetro, y va a tomar el rol de constante cuando fijes el valor del parámetro…

116.P2: Me lo imagino, al momento de que tú le mueves la línea en el plano de dos dimensiones, la línea azul y la roja se van subiendo… se van bajando y … ¿aquí no se mueve nada verdad?... el punto que es de la línea naranja del plano de tres dimensiones es el que se va moviendo…

89.P3: Sí, entonces ahí está cuando cambias de lambda de, como constante, ahora la vas a estar tomando como variable ¿no?
106.P3: []… estás reduciendo un sistema de dos por tres … lo estás convirtiendo en un sistema dos por dos… []en un problema pues estaría estableciendo solamente los parámetros para lambda, ¿cuáles serían las soluciones para tal ecuación si los parámetros, para lambda fuesen de como tú los pusiste de -20 a 20 o de -5 a 5?... dependiendo de esos parámetros que uno dé.

160.P4: []…tú lo puedes mover de acuerdo con lo que se indique en el problema y es la [variable de control] que te va a permitir obtener los valores de x y y al sustituir lambda por una variable, prácticamente.
176.P4: Sí, y de manera algebraica la $2 x 3$ se convierte en $2 x 2$, y así puedes encontrar todas las soluciones de esta recta.

106.P5: Ya sería $\mathbb{R}^2$, que serían rectas.
110.P5: Bueno, pero aquí entonces nada más tiene una solución, ¿no?

De manera general, podemos comentar respecto estos datos que:

P1 da sentido a la gráfica en la que puede observar que tiene control sobre las soluciones, que se muestran las cotas que diferencia entre ellas y la variabilidad del parámetro; P2 identifica el vínculo entre la variación del parámetro y las soluciones particulares sobre la gráfica simultáneamente; P3 destaca la variación de lambda en un intervalo específico, que es lo que permite obtener soluciones particulares, pensamiento producto de una práctica reflexiva (línea 106); P4 se enfoca en el procedimiento que le permite trabajar con menos variables y por ello el parámetro es sólo el medio para lograrlo, y finalmente, P5 logra aterrizar el cambio de dimensión de los objetos gráficos, lo que llama *"encontrar soluciones únicas"* (particulares), aunque no destaca la relación entre las gráficas y las soluciones asociadas.

Para los profesores encuestados, la representación gráfica favorece en gran medida la comprensión y la visualización de los SEL y sus soluciones, tanto en $\mathbb{R}^2$ como en $\mathbb{R}^3$. Además, esta representación gráfica, permite a los profesores, en general, observar el vínculo entre el parámetro y las soluciones particulares obtenidas mediante el uso del parámetro como variable de control, de manera que el conjunto infinito de soluciones particulares puede ser calculado y manipulado. Esto influye en un cambio en la percepción de los profesores sobre la naturaleza de este tipo de soluciones, de forma que ahora está en posibilidad de tener control sobre ellas, es aquí donde consideramos que se está mediando semióticamente al parámetro ya que es asociado a la variabilidad de infinitas soluciones a través de un proceso finito que proporciona soluciones particulares.

4.Problemas en contexto usando el parámetro como variable de control.

En este momento se les presentó a los profesores problemas en contexto con condiciones específicas, con el objetivo de que resolvieran la situación utilizando el parámetro, lo que les permitiría analizar y tomar decisiones sobre las infinitas soluciones de un SEL $2x3$.

A continuación, mostramos los diálogos más representativos de las entrevistas en lo referente a la aplicación del siguiente problema en contexto.

3.1 Ejemplo Parámetro como Variable de Control

Example 1 La siguiente tabla da el número de miligramos de vitaminas A y B contenidas en un gramo de cada uno de los alimentos x; y; z. Se debe preparar una mezcla que contenga exactamente 14 mg. de A y 29 mg. de B. Encuentre la mayor cantidad de gramos de y que se pueda utilizar en la mezcla. ¿Cuál es la menor cantidad de gramos de y que se puede utilizar en la mezcla?

	x	y	z
A	1	1	1
B	1	3	2

$$I = \begin{cases} x + y + z = 14 \\ x + 3y + 2z = 29 \end{cases} \tag{6}$$

Representación Gráfica

Figura 4.3 Problema contextual.

Los diálogos más representativos se muestran enseguida:

165. P1: []… tenía que ser en un problema dado, ¿para que tuviera más sentido verdad? ... para mí… pues son infinitas soluciones y pues … puedo utilizar todas, y ya con ese problema, son todas la positivas … ya vemos en qué intervalo … porque también hasta que yo vi las gráficas que me enseñaste, vi que fijando lambda igual a 15 … y se volvía negativa.

211.I: … ¿tú sin dudar introducirías [en tus clases] esta idea de parámetro como una variable de control?

211.P1: Sí, sin dudarlo. Porque no te sales en sí de que tenga infinitas soluciones, porque vemos que puede tener… pues infinitas soluciones, nada más que estamos viendo que no vamos a utilizar las infinitas, sino que vamos a utilizar un intervalo que nos ayude a resolver el problema.

137.P2: El intervalo pues … por ejemplo … nos podemos basar en el que es la x ¿no?… lambda no puede ser más de 13 … porque si es mayor de 13 pues … esto (indica la solución) …queda negativo y pues x no puede ser negativo … entonces… podría ser que lambda empezará de 0 a 13.

144.P2: ¡Ahí está! … muy bien … entonces tomas lambda desde 0 … ¿verdad? ¡desde 0 a 13! … entonces cuando lambda vale 0 es lo máximo que puede valer y … ¿verdad?

131.P3: Entonces con $\lambda = 13$ los puntos x van desde 0 para arriba, o sea puros positivos.

169.P3: Entonces si tú variable de control la pones de 0 a 13 … entonces tu resultado va a ser puros números positivos…

217.P3: …. pues te tienes que acercar más a cierta respuesta… bueno ahora sí que ya no serían infinidad de respuestas en todos los números reales, sino que en un acotamiento de un intervalo buscar la que se aproxime más a la que me beneficie más...

220.I: ¿Y te parece útil este enfoque?

221.P3: Sí, sí estaría útil porque generalmente lo desechan, este tercer caso, de que tiene soluciones infinitas, entonces ahora ya no lo desechamos, sino que estamos proponiendo un intervalo para ciertas respuestas, entonces haciendo el análisis de ese intervalo de respuestas, podemos encontrar una respuesta aproximada que cumpla las condiciones del problema.

224.I: ¿Te convenció esta idea de variable de control?

227.P3: Sí, porque estás haciendo el análisis [gráfico] de los valores que satisfacen, o sea pues ya no están esos valores volando, sino que ya están interactuando uno por uno, ya sea en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$ o de manera algebraica.

179.P4: … de manera general vimos que todos los números iban a ser positivos, entonces tú tienes que tomar … pues ahora sí … que tu variable de control va a ser del 0 al 13, y ya tú decides cuál del 0 al 13… puede ser 7, 8 o 10 ¿verdad? tu variable de control ya depende del problema.

150.P5: Porque no puedes tener gramos negativos…

156.P5: Entonces, todas las soluciones que estén en ese intervalo de 0 a 13… como … van a ser positivas… pueden ser soluciones de este problema, aunque en este caso nos está pidiendo la mayor cantidad de gramos de y es decir, la mayor cantidad de gramos que sean positivos.

195.P5: … sí, me gusta esta propuesta, ya que por lo general no se trabaja con este caso, el que tiene infinitas soluciones, porque la idea… la idea común es que cuando se llega a ese caso pues no tiene solución y pues se desecha ese sistema y no se trabaja con él, y aquí estás presentando una manera de darle sentido a ese caso de las infinitas soluciones, me gusta esta propuesta y si la llevaría sin dudar a mis clases.

En este momento notamos que, con respecto a estos datos:

Para P1 los problemas en contexto le permiten manipular de cierta manera la infinidad de soluciones y se centra en la posibilidad de decidir sobre estas. El profesor da muestras de un diálogo interno y a fin de cuentas, de una práctica reflexiva a partir de la experiencia (línea 165); P2 interpreta la variación del parámetro dentro del intervalo en el contexto de los problemas, sus observaciones se inscriben en una práctica reflexiva (líneas 137 y 144) ; P3 identifica el intervalo de las soluciones válidas completando su idea de los beneficios del parámetro y para dar sentido al problema recurre a la gráfica; para P4 los problemas en contexto le permiten dar sentido al parámetro como variable de control, con apoyo en la gráfica y el sentido que aporta el problema. Notamos también un momento de práctica reflexiva que coordina todos los artefactos puestos en funcionamiento y finalmente, P5 da sentido a las soluciones del problema como valores dentro de un intervalo, también como producto de una práctica reflexiva.

En esta puesta en marcha de los distintos artefactos observamos que, para los profesores fueron necesarios los problemas en contexto con condiciones específicas, ya que, por un lado, ayudan a darle sentido al método de parametrización y, por otro lado, la variación del parámetro, la elección de soluciones particulares, y el análisis de las situaciones, permite a estos ser capaces de manipular, acotar y obtener soluciones válidas de un sistema con infinitas soluciones. De esta manera ellos pueden dotar de significado y dar sentido a las soluciones infinitas, por lo que consideramos que se ha logrado una co-producción del significado del parámetro como lo hemos propuesto entre el investigador y los profesores, como pudimos ver en sus comentarios.

A continuación, analizaremos los resultados puntuales de cada profesor.

4.3 Observaciones sobre el desempeño de los profesores

En lo que sigue comentaremos la respuesta de cada profesor sobre el parámetro y cómo se desarrolló una práctica reflexiva en cada uno de ellos.

Hemos observado que P1 responde de manera general a la actividad de la siguiente manera:

1. En los antecedentes P1 considera que los SEL que no son cuadrados no tienen solución.
2. Adopta satisfactoriamente la definición de carácter dual
3. No obstante, le dio sentido a lo anterior realmente cuando se hizo el transito al registro gráfico.
4. Los problemas en contexto le permiten manipular y trabajar de cierta manera con la infinidad de soluciones, sin embargo, sólo centra su atención en la posibilidad de decidir sobre las soluciones particulares.

Por lo tanto, podemos decir que, para P1 la propuesta que se le presentó la redujo a un método para encontrar soluciones y decidir sobre ellas, no apreciando la naturaleza dual del parámetro. Los momentos de práctica reflexiva se asociaban a los procedimientos.

En términos generales, P2 responde a la actividad como se muestra a continuación:

1. En los antecedentes P2 considera que tiene un manejo adecuado de los parámetros, sin embargo, desconoce la definición o funcionalidad del parámetro.
2. P2 adopta el parámetro como variable de control de manera satisfactoria porque le explica aspectos que no conocía.
3. P2 por medio del registro gráfico, fue capaz de identificar el vínculo de la variable de control y las soluciones particulares.
4. Con respecto a los problemas en contexto, interpretó la variación del parámetro dentro de un intervalo, lo que le permitió manipular y dar sentido y significado las infinitas soluciones.

Para P2, pese a considerar que conoce el tratamiento paramétrico, desconocía la forma de abordar las soluciones infinitas y la relación de variación entre las soluciones, lo que fue posible por la interpretación gráfica y los problemas en contexto. Este fue uno de los casos en los que la práctica reflexiva pudo ser observada con mayor claridad.

Notamos que de manera general P3 responde a la actividad de la siguiente manera:

1. Como parte de los antecedentes de P3, detectamos una concepción discreta sobre la naturaleza de las infinitas soluciones.
2. Con respecto a la propuesta, a P3 la naturaleza dual le permite una metodología de solución a los SEL con infinitas soluciones.
3. P3 destaca la posibilidad de la variación de lambda en un intervalo dado, que es lo que permite obtener soluciones particulares.
4. Los problemas en contexto complementaron su idea de los beneficios del parámetro como variable de control.

En conclusión, P3 fue capaz identificar un intervalo de variación de soluciones válidas, lo que permitió dar sentido, por un lado, a la variable de control y, por otro lado, a las infinitas soluciones. En este caso encontramos otro ejemplo de que la práctica reflexiva como co-producción entre el investigador y el profesor es posible.

Observamos que la respuesta a la actividad para P4, en términos generales, fue de la siguiente manera:

1. Como antecedente tenemos que P4 asocia las soluciones de un sistema con los puntos de intersección.
2. P4 es consciente de que el parámetro, como variable de control con carácter dual, sirve como una herramienta matemática que le permite resolver SEL *2x3*.
3. La variación gráfica entre las soluciones le permite establecer los valores de las variables y, a fin de cuentas, de las soluciones asociadas.
4. Los problemas en contexto finalmente son los que le acercan a la idea del control sobre las soluciones infinitas, asociadas a la posibilidad de elegir la más adecuada.

En esta actividad de práctica reflexiva, el profesor P4 fue capaz de establecer la variabilidad de aquello que varía, fundamentalmente en el caso gráfico, como en la formulación de Drijvers (2001) más que como soluciones válidas en el caso del problema en contexto.

Observamos que P5 responde de manera general a la actividad como se muestra a continuación:

1. En los antecedentes de P5 detectamos que desconoce los sistemas con 3 variables.
2. La definición de la naturaleza dual fue adoptada sin conflicto.
3. P5 logró aterrizar el cambio de dimensión de los objetos de $\mathbb{R}^3$a $\mathbb{R}^2$en la gráfica, pero no lo vincula a las soluciones.
4. Los problemas en contexto con condiciones específicas posibilitaron a P5 para dar sentido a las soluciones del problema, en este caso como valores dentro de un intervalo de solución.

Consideramos que P5 despliega un pensamiento apoyado en las representaciones gráficas, particularmente producto del efecto del deslizador para detectar soluciones particulares, aunque no adoptó la idea de las soluciones válidas con base en la gráfica. Respecto al problema en contexto, P5 pudo interpretar adecuadamente cómo obtener las soluciones, pero no las relaciones de variabilidad.

En este caso se logró instaurar al parámetro con carácter dual, pero sólo como una explicación para obtener soluciones en condiciones distintas a las conocidas.

De lo anterior podemos observar que, si bien en todos los casos hubo un avance respecto a adquirir un conjunto de artefactos que pretendían plantear la idea de parámetro como variable de control, también es cierto que los procesos de práctica reflexiva fueron distintos en cada caso.

Los profesores respondieron con ideas que van desde incluirlo como uno de sus muchos procedimientos asociados a la solución de SEL, hasta quienes pudieron determinar la relación de variabilidad de soluciones que variaban (Drijvers, 2001) y el vínculo entre las soluciones infinitas y aquellas que son válidas, tanto en la aproximación gráfica, como en los problemas en contexto, donde los saberes iniciales fueron expandidos en una co-producción del saber, mediante una práctica reflexiva fomentada en los profesores mediante la propuesta y el investigador.

5. Conclusiones

5.1 Introducción

El trabajo de investigación aquí desarrollado ha tenido como propósito dar cuenta de las ventajas que tiene plantear, entre profesores en servicio que van desde nivel secundaria hasta el nivel de licenciatura, la idea del parámetro como una variable de control con base en su doble naturaleza, la cual les permita resolver y dar sentido a los SEL con soluciones infinitas y considerar las que son válidas. Para lo cual pusimos en funcionamiento una serie de artefactos semióticos que fueron movilizados conjuntamente entre los profesores y el investigador, de lo que podemos proponer las siguientes conclusiones.

5.2 Conclusiones

La puesta en marcha de la presente investigación nos permite afirmar que los profesores de nuestra muestra conocen la temática relativa a los Sistemas de Ecuaciones Lineales y los distintos procedimientos para resolverlos, y que sólo algunos de ellos habían oído hablar de los parámetros, pero en su mayoría no los habían usado para resolver SEL con infinitas soluciones, además, gran parte de los profesores compartían la idea de que, si las soluciones son infinitas, el sistema no será resuelto.

Podemos concluir que los profesores lograron afirmar que:

1. Es posible resolver los sistemas con infinitas soluciones.

2. Los parámetros son especiales, pueden tomar el rol como constantes y variables y sirven para reducir un SEL *2x3* a uno *2x2*.

3. Que de las soluciones infinitas es posible elegir las que son válidas.

La intervención fue necesaria ya que esta provocó una reconstrucción de los saberes de los profesores mediante una práctica reflexiva, así como de todos los artefactos puestos en funcionamiento: la parametrización, la interpretación gráfica, el análisis y la solución de problemas en contexto.

Este proceso dio como resultado distintos tipos de logros, dependiendo en gran medida de cada profesor y de sus antecedentes e intereses, como comentamos enseguida:

- φ El profesor P1 redujo la propuesta a un método para encontrar soluciones y decidir sobre ellas.
- φ P2 desconocía la forma de abordar las soluciones infinitas y la relación de variación entre las soluciones, reconocimiento que fue posible mediante interpretación gráfica y los problemas en contexto.
- φ El profesor P3 mostró un cambio en su concepción sobre la naturaleza de las infinitas soluciones y fue capaz de identificar un intervalo de variación de soluciones válidas, lo que permitió dar sentido a las infinitas.
- φ A través del desarrollo de su práctica reflexiva, el profesor P4 fue capaz de establecer la variabilidad de aquello que ya varía, fundamentalmente en el caso gráfico.
- φ El profesor P5, apoyado en las gráficas y como producto del efecto del deslizador, detecta soluciones particulares. En este caso el parámetro fue parte de una metodología para obtener soluciones en condiciones distintas a las conocidas.

Con base en lo anterior podemos afirmar que la práctica reflexiva provocó una actualización de los saberes de los profesores, quienes aceptaron unánimemente al parámetro como un auxiliar para resolver SEL 2x3, pero como antes hemos mostrado, su relevancia y aprehensión resultó desigual.

5.3 Respuestas a las preguntas de Investigación

Mediante el análisis de los resultados obtenidos responderemos enseguida a las preguntas de investigación formuladas en esta investigación:

1. ¿Cuáles son las ventajas de utilizar a los parámetros como variables de control en SEL, apoyados en una secuencia de artefactos semióticos?

a. La introducción de una definición útil para resolver SEL con infinitas soluciones.
b. La reconstrucción de la idea de soluciones infinitas y de las válidas.
c. Una herramienta con significados asociados a la variabilidad y al control del usuario.
d. Uso y sentido para las soluciones válidas de conjuntos de soluciones infinitas.

2. ¿Qué efecto tiene la evidencia gráfica para la interpretación de las soluciones infinitas cuando se cuenta con representaciones que simulan la variación de los parámetros?

La evidencia gráfica permite desarrollar un cambio de perspectiva en gran parte de los profesores, que va desde un pensamiento de que no es posible manipular las soluciones infinitas, hasta verlas a través del parámetro, como una variable que permite tener control sobre ellas, de manera que podían analizar el rango de variación para elegir aquellas que son válidas.

3. ¿Qué efecto tiene el uso de los parámetros cuando son empleados en problemas en contexto?

Los problemas en contexto fungen como puentes entre los distintos artefactos que se ponen en funcionamiento, es decir, su efecto permite organizar toda la información (propiedades, relaciones, procedimientos, etc.) en este caso. A través de ellos los profesores fueron capaces de organizar los aspectos gráficos de los conjuntos solución, el método de parametrización, así como la interpretación del parámetro en su naturaleza dual en los datos concretos del problema.

5.4 Reflexiones Finales

A partir de los resultados obtenidos mediante nuestra propuesta, podemos concluir con los siguientes hallazgos relativos a las ventajas de presentar al parámetro como una variable de control de naturaleza dual:

- φ Observamos que la representación gráfica da oportunidad de asociar la continuidad de las soluciones infinitas con aquellas que son particulares y pertenecen a ese conjunto.

- φ Partir de una definición pragmática del parámetro en su naturaleza dual permitió un acercamiento conceptual a las propiedades de los SEL y sus soluciones, además, adquirir la idea de parámetro como variable de control establece un puente cognitivo que permite visualizar la relación de variabilidad entre las variables que a su vez varían, dando paso a una conceptualización de las soluciones particulares y las que son válidas cuando son promovidos los recursos gráficos y contextuales.

- φ Ya que los profesores ponen en funcionamiento distintos tipos de pensamiento (pragmático principalmente) cuando interpretan los parámetros en los SEL propuestos, encontramos diferencias en la forma como se da sentido a las propiedades conceptuales que le proporcionan tanto la parametrización, como la gráfica y el problema en contexto.

- φ Si apoyamos la instrucción con una representación gráfica y dinámica de las soluciones de un SEL (*2x2* o *2x3*) esta podría contribuir en gran medida a una mejor comprensión de estos objetos matemáticos, en el caso particular de una representación de una solución mediante un punto que cambia de posición, ampliando la idea discreta y única que incrementa la presentación estática. Esta propuesta de tratamiento gráfico se apoya en las consideraciones de Drijvers (2001) en lo que respecta a identificar la variación de las variables.

- φ Dado el planteamiento de los problemas en contexto en los SEL, estos demuestran ser un puente útil entre los distintos artefactos semióticos puestos en funcionamiento, debido a que las soluciones infinitas tienden a interpretarse como aquellas que se obtienen mediante la parametrización.

En el siguiente apartado estaremos planteando las ideas y líneas de investigación que pretendemos desarrollar en un posible trabajo doctoral.

6. Consideraciones Adicionales

6.1 Consideraciones para el futuro estudio de doctorado

En este capítulo presentamos algunas consideraciones adicionales que surgieron de la investigación desarrollada en la tesis de maestría junto con su posterior reflexión, las cuales nos han sugerido posibles líneas de investigación que debían ser ampliadas y profundizadas en un estudio que puede ser desarrollado en un trabajo doctoral.

6.1.1 Introducción

En la investigación de maestría se tenía como objetivo la introducción de la idea del parámetro como variable de control en SEL, entre profesores, para ampliar la idea de solución en el caso de soluciones infinitas apoyándonos en ese enfoque.

Para enfrentar este proyecto partimos del supuesto que los profesores contaban con los conocimientos básicos que se encuentran en los libros de texto como saberes potenciales, y procedimos a desarrollar una actividad de co-producción entre el investigador y ellos, para lograr el desarrollo de una práctica reflexiva que tuviera en cuenta la idea de solución infinita, propuestas gráficas y problemas contextuales, lo que dio como resultado una experiencia que fundamentó una idea pragmática del parámetro.

La actividad se desarrolló a partir del planteamiento del parámetro como variable de control y sus usos como constante y como variable, siendo este concepto desconocido o no definido correctamente, en el mejor de los casos, entre los profesores.

El uso pragmático del parámetro enfatizando su carácter dual permitió a los profesores poner en funcionamiento un recurso interpretativo y operativo para abordar SEL no resueltos anteriormente, que tomaron sentido a través de la coordinación de: una reducción de la dimensión de los sistemas, de un recurso gráfico y otro mediante el uso de un problema en contexto.

Los principales resultados que se derivaron de ese estudio son los siguientes:

- Los profesores desconocen el uso de los parámetros más allá de indicaciones parciales en los libros, y en contados casos asocian la parametrización con la expresión que permite obtener soluciones particulares.

- φ Los profesores consideran que un sistema con infinitas soluciones no se aborda porque no se puede manejar y el problema se descarta.

- φ Los profesores sienten que están en un terreno conocido si los sistemas son cuadrados, mientras que los que no lo son, les provocan problemas. Aprovechando esta situación hemos transformado los SEL rectangulares a cuadrados, de manera que, para los profesores se justifica el uso del parámetro.

- φ Cuando pueden tender un puente con ayuda de los parámetros entre los SEL rectangulares y cuadrados, los profesores se sienten con las herramientas necesarias para abordar la situación y justifican el papel de los parámetros asociado a esta utilidad.

- φ Una vez que se tiene la solución parametrizada, los profesores muestran interés y sorpresa al observar la representación gráfica de las soluciones y el carácter dinámico de la variación de estas, las que además están sujetas a ciertas restricciones de posición asociadas a los posibles valores y, por tanto, esto afecta su validez en el problema, lo que hace del parámetro una verdadera variable de control. En este momento es cuando el parámetro excede su papel de auxiliar para expresar la solución (paramétrica) y permite apreciar la variabilidad asociada a objetos que varían, idea difícil de establecer como mencionan Ursini y Trigueros (2004).

- φ Los profesores pueden distinguir entre las soluciones infinitas y las válidas a partir de la gráfica y el problema en contexto, así como la posibilidad de usar estas últimas para resolver problemas que antes quedaban sin solución.

- φ Los problemas en contexto acaban por dar sentido a lo que significa: infinitas soluciones, solución de un SEL y en particular, una solución, que además es válida a través de los significados asociados al problema en contexto.

- φ Encontramos que, todos los profesores re-construyen su saber en un práctica reflexiva, sin embargo, cada uno logra ampliar sus saberes de diferentes maneras, que van desde los que adquieren un procedimiento adicional para resolver los sistemas a aquellos que logran la idea de variable de control, como un puente cognitivo que permite la visualización de la relación de variabilidad entre las variables que a su vez varían.

- φ Derivado de reflexiones de este trabajo, y para futuras investigaciones, en adelante optaremos por presentar al parámetro como una variable activa e inactiva, en lugar de establecer su naturaleza como constante.

En el trabajo de maestría pudimos establecer la importancia procedimental, teórica y sobre todo formativa a través de una adecuada introducción de los parámetros en el estudio de los SEL, dejando claro los aspectos y ventajas que estos tienen cuando se enfrentan a situaciones donde los SEL tienen infinitas soluciones que se dejan de lado en la educación formal.

La investigación mostró que los profesores terminan dando sentido a la propuesta en diversos entornos y que los requisitos necesarios para el tratamiento de este contenido no parecen hacer diferencia entre los saberes requeridos para este proceso y aquel que se necesitaría para proponerlo a los estudiantes universitarios, lo que nos coloca ante la posibilidad de extender esta investigación al estudio de la introducción del parámetro como variable de control entre los estudiantes de estos niveles, para inspeccionar el efecto interpretativo que está postura podría tener, particularmente cuando tendrían a su disposición un recurso potente para hacer frente a las soluciones infinitas que pueden ser manejadas en su forma paramétrica, dando a esta estructura un sentido del que, hemos visto, carece en los textos del nivel superior y posiblemente en el respectivo tratamiento en clase.

También será importante inspeccionar de qué manera es posible incorporar la idea de parámetro con base en su naturaleza dual (como variable activa e inactiva), no solamente para resolver los SEL y aceptar la viabilidad de las infinitas soluciones, sino para incorporar a los parámetros como variables especiales en el álgebra, que son especialmente útiles en estudios de la matemática aplicada.

Enseguida mostramos el marco teórico básico que pretendemos utilizar en el trabajo doctoral.

6.2 Marco teórico

El marco teórico en el cual dirigiremos la investigación doctoral se enmarca en la Teoría de la Objetivación (TO). Con base en los principios de esta teoría proponemos poner en funcionamiento una serie de artefactos semióticos que sirvan como mediadores del conocimiento matemático para la producción de significados, como se realizó en la investigación de maestría.

6.2.1 La teoría de la objetivación

La Teoría de la Objetivación es una teoría de enseñanza y aprendizaje de la matemática inspirada en el materialismo dialéctico y en la escuela de pensamiento de Vygotsky. En esta se concibe la enseñanza y el aprendizaje de la matemática como un único proceso que implica tanto el saber cómo el ser. En esta teoría el saber es definido como una labor conjunta entre el profesor y los estudiantes.

Consideraremos la postura que toma Radford (2020) con respecto al saber matemático, este lo define como un sistema de procesos corpóreos, sensibles y materiales de acción y reflexión, constituidos histórica y culturalmente. Además, para la TO el saber no es algo que se construya o del cual nos podamos apropiar o poseer, no es un tipo de mercancía ni una entidad psicológica, más bien el saber es algo que está en la cultura y que podemos (o no) encontrar en el curso de nuestra vida. El encuentro con sistemas de pensamiento culturales e históricamente constituidos es lo que se define como objetivación.

De este marco teórico, un aspecto a considerar es lo que Radford (2010) denomina *Mediación Semiótica*; el autor plantea que el proceso de aprendizaje de la matemática se constituye a partir de la interacción social entre un sujeto y los recursos semióticos (incrustados en la cultura) que fungen como mediadores en el desarrollo de una actividad asociada a la resolución de problemas. Es decir, la interacción entre el saber matemático y el sujeto se da por medio de recursos semióticos (objetos, gestos, sistemas de signos, etc.) los cuales son instrumentos que poseen una carga histórica y cultural en este proceso, y que vienen cargados de los significados propios de estos.

También consideramos relevante en la investigación doctoral el uso de *artefactos* para la producción de significados. En términos de la TO, Radford (2006) establece que estos son una de las principales fuentes de adquisición del saber, y son resultado de nuestro contacto con el mundo material, sin embargo, señala que la inteligencia no está encarnada en los artefactos (objetos, instrumentos o sistemas de signos), sino que es necesario el uso de ellos en actividades de reflexión, de modo que el alumno logre apropiarse del saber cultural y de los objetos subyacentes en la actividad reflexiva. De manera que los artefactos forman lo que en la TO se conoce como recursos semióticos, que poseen una inteligencia histórica y cultural depositada en ellos y al mediatizar la actividad, se convierten en medios semióticos de objetivación.

La *praxis reflexiva* es otro constructo teórico que será fundamental en el desarrollo de la futura investigación doctoral. Este contempla que los artefactos median simbólicamente el aprendizaje, de modo que el encuentro con el saber se da como el producto de una praxis cognitiva reflexiva y mediatizada. El carácter mediatizado del saber se refiere al papel que desempeñan los objetos, artefactos e instrumentos en la realización de la praxis cognitiva.

Por lo tanto, es imperante establecer la importancia de los artefactos en la producción de significados, dado que estos se establecen como una parte constitutiva del objeto (matemático) en la actividad reflexiva, y esta puede llevar a una toma de conciencia progresiva de algo que con su presencia nos objeta, esto es a lo que se le llama proceso de objetivación, como una elaboración activa de significados. Por lo tanto, los artefactos no se refieren únicamente al objeto, sino que estos sólo alcanzan la categoría de herramienta de mediación semiótica cuando son parte de una práctica reflexiva para y a través de él.

6.2.2 Consideraciones finales

Finalmente, para llevar a cabo una investigación que atienda la presentación del parámetro como variable de control, pretendemos poner en funcionamiento con los estudiantes inicialmente una secuencia de artefactos de medicación semiótica, que logren dar sentido y significado a las soluciones infinitas, pero en esta ocasión pretendemos que:

1. Los estudiantes exploten la potencialidad operativa de la doble naturaleza del parámetro, de manera que este pase a ser un recurso procedimental para identificar en qué casos es conveniente usar la propiedad del parámetro como variable activa e inactiva y las consecuencias de ese uso.

2. Una vez que se han apropiado de su uso dual, podríamos abordar el cambio de SEL rectangulares a cuadrados como una aplicación de esa naturaleza, aprovechando su conocimiento sobre los métodos de solución.

3. Haríamos uso del recurso gráfico para dar una idea confiable de cómo se pueden interpretar las soluciones infinitas, abordando especialmente la relación entre una solución y su representación, cuidando de establecer la diferencia entre punto gráfico y solución algebraica, para evitar la mala interpretación que surge cuando no se hace esta diferencia, también induciríamos un análisis sobre las distintas propiedades de las soluciones infinitas para elegir aquellas que sean válidas.

4. Propondríamos problemas en contexto, para dar cuerpo a las soluciones válidas asociadas a los SEL con infinitas y parametrizadas soluciones, enfatizando la importancia de las condiciones específicas para la toma de decisiones y detectar cómo estas cambian con relación a las necesidades impuestas, lo que nos podría permitir tocar algunos aspectos de la modelización matemática.

La puesta en marcha de la actividad que tome en cuenta las anteriores consideraciones podría atenderse a través de la siguiente metodología.

6.3 Metodología

Desarrollaremos la investigación a través de un enfoque de tipo cualitativo interpretativo, de acuerdo con Leavy (2014) este se caracteriza por los enfoques inductivos de la creación de conocimientos que están destinados a generar significado, así como para la adquisición de una profunda comprensión del fenómeno social para investigarlo con rigor y aprender sobre él; para desentrañar los significados que la gente atribuye a actividades, situaciones, eventos o artefactos; o para construir una comprensión profunda sobre alguna dimensión de la vida social.

En ese sentido, la investigación consistirá de un cuerpo con tres elementos:

1. **Una intervención formativa:** Se presentará a los alumnos un enfoque pragmático del uso del parámetro como variable de control, sumado con una serie de actividades para instaurar en los alumnos los procedimientos asociados a la parametrización de un sistema mediante la naturaleza dual del parámetro.

2. **Una intervención acción**: Para esta intervención proponemos usar la gráfica como un objeto matemático. Los conjuntos solución representados de manera gráfica-dinámica en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. En particular en esta intervención, deseamos establecer la idea de control sobre las soluciones de un conjunto infinito.

3. **Una intervención discusión:** Para esta plantearemos una serie de problemas contextuales con condiciones específicas que originen el análisis y discusión, primero en grupos pequeños para luego promover discusiones con todos los estudiantes y el profesor.

La población con la que pretendemos trabajar, en principio, sería un grupo de estudiantes de licenciatura a lo largo de un semestre completo, y la puesta en marcha se plantearía en tres momentos: al comienzo, a la mitad y al final del semestre:

- En un primer momento aplicaremos un cuestionario con el fin de detectar el tratamiento de las soluciones de los SEL y la interpretación que tienen sobre las soluciones infinitas y su uso.

- En una segunda intervención estaríamos introduciendo al parámetro como variable de control, y en este caso trabajaríamos la transformación de los sistemas rectangulares a cuadrados para justificar el uso de este tipo de variable y analizaríamos sus representaciones gráficas con las previsiones de hacer diferencia entre las soluciones y sus representaciones.

- A final del semestre tendríamos, en principio, una nueva intervención para plantear algunos problemas en contexto asociados a SEL con infinitas soluciones, recuperando la experiencia de la transformación de sistemas rectangulares a cuadrados, con el fin de establecer el significado asociado a las condiciones particulares de los problemas. En esta intervención estaríamos usando el recurso gráfico y el de la toma de decisiones.
  Y, por último, realizaríamos un cuestionario final con el fin de establecer el significado logrado, asociado a los parámetros como variables de control, a las infinitas soluciones y a la validez de estas en la toma de decisiones.

También realizaremos entrevistas semiestructuradas considerando los resultados obtenidos para profundizar en las respuestas de los estudiantes.

La toma de los datos se realizará mediante videograbaciones de las intervenciones y de las sesiones de las entrevistas semiestructuradas con los estudiantes de la muestra elegida, además de contar con los resultados de los cuestionarios a priori y a posteriori.

Finalmente, pasaremos a establecer las que consideramos podrían ser las tareas y posibles preguntas de investigación.

6.4 Tareas y preguntas de investigación para un estudio de doctorado

Creemos que investigaciones futuras se podrían desarrollar en la vía de seguir las consideraciones antes mencionadas, a partir de las cuales planteamos nuevas tareas y preguntas de investigación que podrían devenir en un trabajo doctoral.

Como hemos propuesto con anterioridad, conjeturamos que la idea parámetro como variable de control se puede desarrollar en alumnos de licenciatura que cuenten con los conocimientos básicos de los métodos de resolución de SEL y considerando que, los estudiantes no tienen intereses en la dirección del uso de estos como un procedimiento del cual echar mano, consideramos la posibilidad de establecerlo como un instrumento para la toma decisiones y un recurso que da sentido a las soluciones que, siendo infinitas pueden ser manipuladas según convenga, en particular en una aproximación que incluya problemas contextuales para justificar y dar sentido al uso del parámetro.

Bajo esta perspectiva consideramos que investigaciones futuras se pueden desarrollar en esta línea y que pueden dar pie a plantear las siguientes preguntas de investigación iniciales:

- ¿Cuáles serían las transformaciones en los saberes de los estudiantes de un curso de licenciatura cuando el parámetro es propuesto como variable de control?

- ¿El uso pragmático de los parámetros podría hacer viable el concepto de este como *variable de segundo orden*, esto es, como una variable que hace variar a lo que de por si varía?

- ¿Qué efecto tiene la trasformación de sistemas rectangulares a cuadrados en la convicción y significado asociado en los estudiantes respecto al papel del parámetro para obtener soluciones infinitas?

- ¿Cuál sería la ventaja de reducir el trabajo procedimental mediante una calculadora del conjunto solución de un SEL? con la intención de ampliar el tratamiento de los distintos tipos de solución de problemas en contexto.

Para el desarrollo de la futura investigación proponemos el siguiente cronograma de actividades:

Cronograma general								
Año	**1**		**2**		**3**		**4**	
Semestre	1	2	3	4	5	6	7	8
Asistencia a seminarios de doctorado.								
Lectura reflexiva y crítica para la consolidación y ampliación del marco teórico.								
Rediseño y adaptación de actividades y puesta en marcha de la investigación: intervenciones 1 y 2								
Recolección y organización de los datos; profundización del marco de referencia; revisión final de texto predoctoral y participación en congreso internacional.								
Examen predoctoral y rediseño de las actividades.								
Segunda puesta en marcha de la investigación: intervenciones y actividades.								
Estancia doctoral. Recopilación, organización y análisis de los datos.								
Escritura de un artículo en una revista indexada de alto impacto y participación en congreso internacional.								
Revisión final de Tesis.								
Examen doctoral.								

Tabla 6.1 Cronograma de doctorado.

7. Referencias

Alcocer, I. (2007). *Dificultades en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales en contextos algebraico y geométrico.* [Tesis de Maestría]. CINVESTAV-IPN. México.

Balbuena, H., Block, D. & García, S. (2019). *Matemáticas 2. Secundaria. Conecta Más.* Ediciones SM.

Boaler, J. (1993). The Role of Contexts in the Mathematics Classroom: Do they Make Mathematics More" *Real"? For the learning of mathematics*, Vol. *13*(2), 12-17.

Bosch, C. & Meda, A. (2018). *Matemáticas 2.* Editorial Castillo.

Boyer, C. B., & Merzbach, U. C. (2011). *A history of mathematics*. John Wiley & Sons.

Chapman, O. (2006). Classroom practices for context of mathematics word problems. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. *62*(2), 211-230.

Curtis, C. (1894). *Linear Algebra an Introductory Approach.* Undergraduate Texts in Mathematics, Springer.

DeVries, D. & Arnon, I. (2004). Solution—What Does It Mean? Helping Linear Algebra Students Develop the Concept While Improving Research Tools. *International Group for the Pyschology of Mathematics Education.*

Dirección General del Bachillerato (SEMS). (2018). Plan de estudios de matemáticas. México.

Dirección General del Bachillerato (SEMS). (2019). Plan de estudios de matemáticas. México.

Drijvers, P. (2001). The concept of parameter in a computer algebra environment. In *PME conference* (Vol. 2, 2-385).

Drijvers, P. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment: Design research on the understanding of the concept of parameter*. [Tesis doctoral]. Universidad Utrecht.

Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. *Basic Issues for Learning.* 1-26.

Duval, R. (2014). Commentary: Linking epistemology and semio-cognitive modeling in visualization. *ZDM*, Vol. *46*(1), 159-170.

Espinosa, J., Benitez, L., Rivera, I. & Zubieta, C. (2004). *Solución de sistemas de ecuaciones lineales mediante el método de Gauss-Jordan*. Consejo Editorial de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería de la Unidad Azcapotzalco de la UAM.

Fauvel, J., & Gray, J. (1987). *The history of mathematics: a reader*. Macmillan Education.

Filloy, E., Rojano, T. & Solares, A. (2003). "Two Meanings of the Equal Sign and Senses of Substitution and Comparison Methods", in N. A. Pateman, B. Dogherty & J. Zilliox (Eds.) *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, 223-229).

Filloy, E., Rojano, T., & Solares, A. (2004). Arithmetic/Algebraic Problem-Solving and the Representation of Two Unknown Quantities. *In Proceedings of the 28th Conference of the International (*Vol. 2, 391-398).

Furinghetti, F. & Paola, D. (1994). Parameters, unknowns and variables: a little difference? In J.P. da Ponte & J.F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 2,368-375).

Greer, B. (1997). Modelling reality in mathematics classrooms: The case of word problems. *Learning and instruction*, Vol. *7*(4), 293-307.

Harper, E. (1987). Ghosts of diophantus. *Educational studies in mathematics*, Vol. *18*(1), 75-90.

Hoffman, K. & Kunze, R. (1971). *Linear Algebra.* Prentice-Hall, Inc.

Ilyenkov, E. V. (1977). *Dialectical Logic: Essays on its History and Theory*. Progress Publishers.

Jankvist, U. T., Misfeldt, M., & Aguilar, M. S. (2019). What happens when CAS procedures are objectified? the case of "solve" and "desolve". *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 101(1), 67-81.

Kieran, C. (1981). Concepts Associated with the Equality Symbol. *Educational Studies in Mathematics,* Vol. 12, 317–326.

L. Hôpital. (1696). *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*. Paris.

Leavy, P. (2014). *The Oxford handbook of qualitative research*. Oxford University Press, USA.

Liern & Acuña (2020) Toma de decisiones mediante el uso de parámetros en los sistemas de ecuaciones lineales. *Bolema: Boletim de Educação Matemática.* (En prensa).

Mallet, D. G. (2007). Multiple representations for systems of linear equations via the computer algebra system Maple. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, Vol. 2, 16-31.

Martínez, P. & Contreras, L. (2019). *Matemáticas 2.* Editorial Santillana.

Mesa, V., & Griffiths, B. (2011). Textbook mediation of teaching: an example from tertiary mathematics instructors. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. *79*, 85-107.

Miller, C., Heeren, V. & Hornsby, J. (2013). *Matemática: Razonamiento y aplicaciones.* Editorial Pearson.

Mora, B. (2001). *Modos de pensamiento en la interpretación de la solución de sistemas de ecuaciones lineales*. [Tesis de Maestría]. CINVESTAV-IPN. México.

Naucalpan, P. (2010). Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades.

Nemirovsky, R., & Tierney, C. (2001). Children creating ways to represent changing situations: On the development of homogeneous spaces. *Educational studies in mathematics*, Vol. *45*, 67-102.

Nemorarius, J. (1981). *De numeris datis*. Universitat of California Press.

Okeeffe, L. (2013). A framework for textbook analysis. *International Review of Contemporary Learning Research.* Vol. 1, 1-13.

Oktaç A. (2018) Conceptions About System of Linear Equations and Solution. In Stewart S., Andrews-Larson C., Berman A., Zandieh M. (Eds) *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra (*71-101*).* ICME-13 Monographs. Springer.

Panizza, M., Sadovsky, P. & Sessa, C. (1999). La ecuación lineal con dos variables: Entre la unicidad y el infinito. *Enseñanza de las Ciencias*, Vol. 17, 453–461.

Panizza, M., Sadovsky, P. y Sessa, C. (1996). Los primeros aprendizajes algebraicos. Cuando las letras entran en la clase de matemática. *Reunión anual de la Unión Matemática Argentina.*

Radford, L. (2004). La généralisation mathématique comme processus sémiotique. In G. Arrigo (Ed.), *Atti del Convegno di didattica della matemática (*11-27*).* Alta Scuola Pedagogica. Locarno: Suisse.

Radford, L. (2005). Body, Tool, and Symbol: Semiotic Reflections on Cognition. In E. Simmt and B. Davis (Eds.), *Proceedings of the 2004 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (111-117).

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*, 103-129.

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, Vol. 12, 1-19.

Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, Vol. 7, 132-150.

Radford, L. (2015). Methodological Aspects of the Theory of Objectification. *Perspectivas da Educação Matemática,* Vol. 8, 547-567.

Radford, L. (2020). A journey through the theory of objectification. In S. Takeco Gobara & L. Radford (Eds.), *Teoria da Objetivação: Fundamentos e aplicações para o ensino e aprendizagem de ciências e matemática* (15-42). São Paulo, Brazil: Livraria da Física.

Rincón, H. (2006). *Álgebra Lineal.* Publidisa Mexicana SA de CV.

Riva Palacio, M. & Santana. (2019). *Matemáticas 2 Espacios Creativos.* Editorial Santillana.

Robitaille, D., & K. Travers, (1992), *International Studies of Achievement in Mathematics*, In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Education* (687-709). New York: Macmillan Publishing Company.

Rodríguez, J., Mena, A., Mena, J., Vásquez, P. & Del Valle, M. (2019). Construcción cognitiva del conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, Vol. 37, 71-92.

Secretaria de Educación Pública. (2017). México.

Šedivý, J. (1976). A note on the role of parameters in mathematics teaching. *Educational studies in mathematics,* Vol. 7, 121-126.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (209–246). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Trigueros M., Oktaç, A. & Manzanero, L. (2007). Understanding of systems of equations in linear algebra, In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.). *Proceedings of the 5th Congress of european society for research in mathematics education* (2359-2368). Larnaca, Chipre: ERME.

Trigueros, M., Sandoval, I., Lozano, M., Mercedes, L., Emanuel, C. & Schulmaister, M. (2019). *Matemáticas 2 Secundaria.* Editorial Santillana.

Ursini, S. & Trigueros, M. (2001). A model for the uses of variable in elementary algebra, In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.). *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, PME25* (Vol. 4, 327-334) Freudentlhal Institute. Faculty of Mathematics and Computer Science.

Ursini, S., & Trigueros, M. (2004). How Do High School Students Interpret Parameters in Algebra?. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 4, 361-368.

Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H., & Houang, R. T. (2002). *According to the book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks.* Springer Science & Business Media.

Van der Waerden, B. L. (1980). The (2: n) table in the Rhind Papyrus. *Centaurus XXIII*, Vol. *23*, 259-274.

Verschaffel, L. (2002) Taking the modeling perspective seriously at the elementary level: Promises and pitfalls, In A.D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the PME 26 (*Vol. 1, 64–80*)*, University of East Anglia, Norwich.

Zandieh, M., & Andrews-Larson, C. (2019). Symbolizing while solving linear systems. *ZDM*, Vol. 51, 1183-1197.

8. Anexos

Anexo 1

Enseguida mostraremos los fragmentos de los diálogos que se llevaron a cabo con los profesores con quienes realizamos una entrevista-intervención. Para las transcripciones de todas las sesiones con los profesores ver: https://drive.google.com/drive/folders/1E0yo-iDdi0b2pEBrypKUTJUx3PpdUchO?usp=sharing

Transcripción de diálogos relevantes de la sesión llevada a cabo con el Profesor 1

11.I: ¿Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$ una ecuación qué representa de manera gráfica? ¿Recuerdas?

12.P1: Amm… dos ecuaciones y dos incógnitas.

13.I: Ok, una ecuación lineal en $\mathbb{R}^2$ representa una recta.

14.I: Por otro lado, también está el trabajo de manera gráfica en $\mathbb{R}^3$, sin embargo, no es muy común que se aborde ese tema. ¿tendrás una idea de qué representa una ecuación lineal en $\mathbb{R}^3$?

15.P1: ¿Un plano?

25.P1: Yo me baso mucho en el libro, y vienen primero los métodos, vienen los tres métodos, el método de sustitución, el de eliminación y el de igualación. Y a mí me gusta ver los tres casos, que pasa de manera gráfica y algebraica en los tres casos, con solución, sin solución, e infinitas soluciones. Y ya después veo el método gráfico, agarro una de las ecuaciones que vi, cualquier método y las gráfico, entonces digo, *"así como se ve en el método algebraico, así se representa en el método gráfico"*.

31.P1: Sí, porque en el caso dos, el de solución única, es en donde está el punto de intersección, sin embargo, en el caso de las infinitas soluciones vemos que puede ser este punto, o puede ser este (señala puntos en la recta). Porque interseca en toda la recta. También vemos la que no es solución pues vemos que en ningún punto se cruzan dado que son paralelas y no llegan a cruzarse.

39.I: En este trabajo definimos lo que es un parámetro, dado que ningún libro te lo define, sino que solamente se introduce el parámetro sin explicación alguna. Entonces definimos el parámetro cómo: una variable especial, que sirve como una variable de control con un carácter dual (como una constante y como una variable) es decir, cuando es necesario varía y cuando no lo es, puede ser considerada como una constante dependiendo de las circunstancias.

40.P1: Ok.

41.I: Enseguida te presentaré algunas situaciones en donde abordaremos sistemas que tienen infinitas soluciones y vamos a analizar la manera de aprovechar esta variable especial *"parámetro"* para controlar las soluciones, y además de controlarlas vamos a poder elegir una que sea adecuada a nuestros fines.

45.I: Entonces el trabajo aquí que nosotros estamos proponiendo es cómo trabajar con esa infinidad de soluciones.

46.P1: Pero cuando te dicen por ejemplo *"tienes dos ecuaciones con tres incógnitas"* ahí automáticamente siempre te dicen *"no, no lo puedes resolver porque te falta una ecuación"*.

48.I: Por ejemplo, tenemos este sistema, el sistema I cómo como tú dijiste, se dice que normalmente este sistema no tiene solución porque te hace falta una ecuación verdad, pero no. Tenemos que es $x + 10 + 7 = 14 x + 13 + 12 = 29$ por ejemplo, ¿qué harías para resolver ese sistema?

49.P1: No sabría cómo resolverlo.

58.I: En tus clases cuando se presenta este tipo de problema ¿qué les dices a tus alumnos, les dices que no tiene solución o que tienen infinitas soluciones o no se los presentas?

59.P1: No pues no lo presento.

64.I: En este caso vamos a definir λ como un parámetro y vamos a igualar λ igual a una variable, en este caso elegimos la variable z. que se puede hacer esto con cualquiera de las variables. Pero en este caso nosotros proponemos que sea z, y con λ en los reales, es decir puede tomar un numero en los reales.

67.I: ¿Cómo resolverías este sistema de manera algebraica? ¿Lo podrías resolver?

68.P1: Sí, pues ya nada más tenemos a x y y como incógnitas…

69.I: Exactamente, en este caso λ si te das cuenta, cuando resuelves de manera algebraica funciona como una constante ¿verdad?

70.P1: Sí, me di cuenta, que es lo que decías, que podría ser constante y variable.

84. I: ¿Implementarías este enfoque en tus clases?

93. P1: Sí, sin duda, porque es lo básico, ya que se transformó a un sistema de dos variables, eso ya lo saben resolver, saben lo que es una constante, pueden trabajar con una constante.

105. I: Si observas, al mover el parámetro un poco en ese intervalo, por ejemplo, en lambda igual a -0.8, tenemos $z = -0.8$, por lo tanto, la solución del sistema es negativa.

106. I: Si.

107. I: Ahora, si movemos el parámetro un poco del intervalo [0,13], en este caso veamos en 13, la solución es positiva. Si lambda es mayor que 13 (mueve el parámetro a 13.1) la solución es negativa, ya que x es negativa.

108. P1: ¿Y en algún momento y llega a ser negativo?

109. I: Sí, si puede llegar a ser negativa…

110. P1: Ah sí cuando pasas de $\lambda > 15$.

112. I: ¿Te percatas por qué tiene sentido llamarle variable de control?

113. P1: Sí, porque tú puedes controlar si quieres que las soluciones sean positivas o negativas, o si quieres que y sea positiva o negativa, tú puedes hacer variar el parámetro, y va a tomar el rol de constante cuando fijes el valor del parámetro.

123. I: Aquí entra en juego la cuestión que tenías, de ¿por qué no tomamos en cuenta las soluciones negativas?

124. P1: Ajá…

125. I: La respuesta es que, por ejemplo, queremos encontrar la mayor cantidad de gramos de y, por lo tanto, no podemos tener una cantidad negativa, por ejemplo, no podemos tener una cantidad de -50 gramos de y

129. I: Si te das cuenta aquí tiene sentido por qué no tomar las negativas.

130. P1: Sí, porque no puedes tener cantidades negativas de gramos, no es posible.

133. I: Que es *"ecuación"*, sin embargo, para que la solución sea válida, tenemos que analizar el intervalo en donde las soluciones sean validas, ¿cuál es ese intervalo?

134. P1: Entre 0 y 13, donde las soluciones sean positivas.

138. I: Por lo tanto, se justifica que las soluciones estén en el intervalo [0,13]. ¿Y por qué cero? de cero porque si z es menor que cero…

139. P1: Sí, entonces la solución es negativa.

142. I: Un ejemplo de solución válida es el siguiente. Si…, podemos elegir un valor para λ en ese intervalo. Tú que puedes deducir, si nos pide la mayor cantidad de y y la menor cantidad de y**.**

143. P1: ¿0 y 13?

144. I: Exactamente. La menor sería 0 con $\lambda = 0$, y la mayor sería 13 con $\lambda = 13$.

145. P1: Para que todas sean positivas.

162. I: Y, si te das cuenta ya rompes con todo ese discurso de que en los sistemas con infinitas soluciones no se puede obtener una solución.

163. P1: Sí, me quedó claro.

164. I: Hasta aquí, qué comentarios tienes.

165. P1: Pues, ya me aclaraste dudas, y tal vez me faltaba eso último, de que tenía que ser en un problema dado, para que tuviera más sentido verdad para mí, porque así a primera instancia, pues son infinitas soluciones y pues puedo utilizar todas, y ya con ese problema, son todas la positivas, ya vemos en qué intervalo, porque también hasta que yo vi las gráficas que me enseñaste, vi que fijando $\lambda = 15$, y se volvía negativa. Y pues, está muy bien, le entendí muy bien a todo lo que explicaste, las gráficas y lo algebraico.

206.I: Ok. ¿Qué te pareció este enfoque, que te proponemos?

207.P1: Muy bien, ese último ejercicio ya me aclaro mis dudas…

208.P1: Sí, pues esto depende de lo que te pide, si es un problema…

209.I: Sí, por esta razón el parámetro con una variable de control se justifica con este tipo de problemas o situaciones que se asemejan a la vida real, para que tenga sentido.

210.P1: Si.

211.I: Y… ¿te convence esta propuesta del parámetro como un variable de control?

211.P1: Si, pues de hecho ya vimos que si aplica en muchos problemas, bueno problemas como estos dos.

211.I: Y, ¿tú sin dudar introducirías esta idea de parámetro como una variable de control?

211.P1: Si, sin dudarlo, porque no te sales en sí de que tenga infinitas soluciones, porque vemos que puede tener… pues infinitas soluciones, nada más que estamos viendo que no vamos a utilizar las infinitas, sino que vamos a utilizar un intervalo que nos ayude a resolver el problema.

Transcripción de diálogos relevantes de la sesión llevada a cabo con el Profesor 2

18.P2: Ah sí sí sí, pues al momento de definir, yo utilizaba esto de los parámetros cuando nosotros teníamos sistemas de ecuaciones, cuando las soluciones, no eran finitas o sea no era, no era única… []…dejábamos en un sistema de ecuaciones de tres incógnitas con tres ecuaciones por ejemplo, entonces a veces las soluciones no eran finitas, no era única, entonces establecemos ciertos parámetros de tal manera que una de 2 incógnitas la dejábamos en función de una, por ejemplo la incógnita y y la z la dejábamos en función de una, exactamente y pues ya dependiendo de lo que valiera la incógnita x, si, pues es como iba a valer y e iba a valer z y esa iba a ser una solución pero teníamos una solución infinita…

23.P2: Entonces es bien importante el álgebra lineal ahí y si como te digo, a veces te digo en la maestría nos quedaban así, sistemas de ecuaciones en donde no teníamos pues una solución única y lo que hacíamos para dar solución a ese sistema de ecuaciones es poner algunos parámetros…

24.I: []….en esta propuesta, en la cual nosotros estamos proponiendo que el parámetro es una variable de control, la cual nos permite obtener soluciones válidas…

36.P2: No vieron ese tipo de caso cuando estuvieron en la secundaria o en la preparatoria, entonces si tienes razón en esa partecita de infinidad de soluciones no se aborda…

48.I: Y, el trabajo de eso va a ser como se le da sentido a todos los puntos que están sobre esa línea, dado que son soluciones del sistema.

52.I: Esta variable de control tiene un carácter dual, es decir, funciona como una constante y con una variable…

59.P2: Ok, puede ser considerada dependiendo de las circunstancias o del contexto del problema, del modelo matemático.

63.P2: Pues podría reducirlo con la forma escalonada podría eliminarla la parte de la x ¿no? x y luego al final dejar… dejarlo de forma escalonada y luego ya después dejar a una de las dos variables y luego sustituirla porque me va a quedar en función de una, por ejemplo, despejar y, y me va a quedar en función de z y luego ese valor de y lo sustituyó en la primera y ya me queda x z.

64.P2: Entonces la x dejarla en función de z, si me explico, luego si hay que dejarla en función de z y ya me quedaría la variable x y la variable y en función de la variable de control ¿no?, que en este caso sería z.

71.P2: []….ya el λ ya se transforma en una constante y por lo tanto ya no tenemos un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas, sino que tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas porque λ es una constante, entonces aquí por ejemplo podemos utilizar el [método]de eliminación.

78.P2: Y en este caso λ puede ser lo que él quiera y a través del valor de λ se establece el valor de x y el valor de y y, exacto…

80.I: Aquí podemos ver la representación del sistema original, eso está en $\mathbb{R}^3$, en el espacio…

85.P2: Pues fíjate que yo creo que para los alumnos si será un poquito más… más fácil…[]… creo que queda bastante claro en cuestión a que cada uno de esos puntos de esa línea, que tienen coordenadas x y z pues son las soluciones del sistema, entonces creo, que creo que sí es bastante claro y aparte sí, sí, sí ayuda a esa parte de hacerla la z una constante cuando se resuelve el sistema.

89.P2: Entonces lo que hacemos para no trabajar con tres dimensiones pues hacemos algo que se llaman "isocuantas" en donde fijamos una variable… justamente como tú lo estás diciendo, una variable por ejemplo, $z = 0$ y hacemos como una proyección…

115.P2: Exacto, si, se va cambiando verdad dependiendo del cambio de la variable de control, ok, muy bien, excelente.

116.P2: Me lo imagino, al momento de que tú le mueves la línea en el plano de dos dimensiones la línea azul y la roja se van subiendo se van bajando y aquí no se mueve nada verdad el punto que es de la línea naranja del plano de tres dimensiones es el que se va moviendo…

126.P2: Entonces A representa la vitamina A ¿verdad? ..., la vitamina A contenidas en un gramo de alimentos x, y, z ahí está, x, y, z representan los alimentos, se debe preparar una mezcla que contenga exactamente 14 miligramos de A y 29 miligramos de B.

127.P2: Ok sí, sí, excelente si, ya, ya quedó, ¿es la proporción verdad?

137.P2: El intervalo pues, por ejemplo, nos podemos basar en el que es la x no, … λ no puede ser más de 13 porque si es mayor de 13 pues esto queda negativo y pues x no puede ser negativo, entonces podría ser que λ empezará de cero a 13.

144.P2: Ahí está, muy bien, entonces tomas λ desde cero, verdad, desde cero a 13, entonces cuando λ vale 0 es lo máximo que puede valer y ¿verdad?

173.P2: Entonces nada más se despeja, bueno se pone como λ por ejemplo aquí yo pondría $\lambda = y$, y despejaría y me quedaría $x = 160 + \lambda$, y $z = 40 + \lambda$ y λ sería la variable de control.

Transcripción de diálogos relevantes de la sesión llevada a cabo con el Profesor 3

12.I: ¿Tienes alguna concepción, alguna noción sobre ella [de parámetro]?

13.P3: Pues simplemente, sí, que usábamos siempre el parámetro … para ciertos parámetros para las ecuaciones con ciertos parámetros para resolver ecuaciones diferenciales, este es como el concepto que yo tengo, o sea como las variables que vamos a utilizar para solucionarlo.

14.I: Y, ¿qué función tenían desde tu perspectiva? ¿qué función cumplen los parámetros en una ecuación diferencial o en una ecuación lineal?

15.P3: Pues los lineamientos para llegar a tal solución de las ecuaciones.

29.I: ¿Y, tus alumnos lo comprendían, sobre esta idea de infinitas soluciones?

30.P3: Sí, hacíamos más que nada tabulaciones con cierto valor después generalizábamos con por ejemplo tomábamos cinco valores y con esos cinco valores generalizamos que para cualquier valor cumplía la solución.

46.I: Y, ha trabajado con sistemas que no sean cuadrados, por ejemplo, de dos ecuaciones con tres variables.

47.P3: Mmmm… dos ecuaciones con tres variables nada más en la facultad cuando estábamos en programación para programarlas, teníamos que hacer igual con los mismos procedimientos eliminación o por sustitución o reducción de términos.

56.I: Para poder controlar todas estas soluciones nosotros estamos proponiendo pues si se utiliza siempre un parámetro, pero nosotros estamos proponiendo cómo utilizar este parámetro, qué función va a tener ese parámetro para poder controlar las soluciones, esa infinidad de soluciones y poder tomar un intervalo o intervalos que nos sirvan para tomar una decisión, o para tomar soluciones válidas.

57.P3: ¿Entonces esos parámetros van a estar dentro de ese intervalo que ustedes proponen, que tú propongas?

69.P3: Aquí ustedes están tomando bueno tú estás tomando el sistema de parámetro para los valores que le vas a dar a z.

74.I: Siempre que tenga un sistema de ese estilo se van a interceptar en una recta, entonces el problema es ¿cómo tomar soluciones de esta recta?, de toda esta infinidad de soluciones que están en esta recta y ¿cómo darle sentido?

75.P3: Entonces el azul es el plano de la primera ecuación y el rojo es la segunda ecuación.

76.I: Exactamente.

77.P3: Y, la amarilla es donde se intersectan ambos planos.

78.I: Sí, este es el conjunto solución de este sistema.

81.I: Y, aquí entra en juego la primera parte o una de las funciones del parámetro, que sí recuerdas era como una constante o como una variable.

82.P3: ¿Entonces aquí se está usando como constante no?

88.I: Si te das cuenta estamos trabajando ya con rectas.

89.P3: Sí entonces ahí está cuando cambias de lambda de como constante ahora la vas a estar tomando como variable ¿no?

94.I: Y, aquí, por ejemplo, el parámetro aquí ya lo tenemos con una variable de control porque si movemos el parámetro que está pasando, se están moviendo las rectas.

95.P3: Ok, si, lo veo.

96.I: Y, que está pasando también, estamos obteniendo distintos puntos.

97.P3: Si, distintas soluciones.

98.I: Exactamente, distintas soluciones, que son las soluciones de las distintas rectas que nosotros estamos ahora trabajando.

100.I: Si te das cuenta qué sucede, que todas las soluciones que estamos viendo se mueven en esta recta.

101.P3: En ese parámetro que tú estás dando de $-20\ a\ 20$.

102.I: Pero no sólo en este en este intervalo de -20 a 20, sino que a este parámetro tú le puedes dar cualquier valor real y te vas a mover en toda la recta siempre.

103.I: ¿Tienes algunas dudas?

104.P3: Está muy bien, pues ahí diste el parámetro de $-20\ a\ 20$ pero como λ estaba en los números reales entonces lo puedes expandir en toda esta recta de los números ¿no?

106.P3: Pues está muy bien, porque estás reduciendo un sistema de $2x3$ lo estás convirtiendo en un sistema $2x2$, entonces ya en un sistema dos por dos pues ya estaría más más fácil, ya lo que es lo que estarías estableciendo a lo mejor en un problema pues estaría estableciendo solamente los parámetros para λ, cuáles serían las soluciones para tal ecuación si los parámetros para λ fuesen de como tú los pusiste de $-20\ a\ 20$ o de $-5\ a\ 5$ dependiendo de esos parámetros que uno dé.

111.P3: Claro, igual y se podría asociar con las integrales definidas, yo lo podría estar asociando con eso, por ejemplo, en una integral definida, te dan el intervalo para esa integral, entonces ahora en este sistema 2x3 estás dando un intervalo, pero en este caso los parámetros para tu λ o algo similar.

113.P3: Igual y sí porque les estaría bueno como dando una pequeña introducción cuando defines una ecuación en cierto intervalo de valores en la recta, en el plano.

130.I: Entonces el intervalo donde van a estar todas las soluciones positivas va a ser de 0 a 13.

131.P3: Entonces con $\lambda = 13$ los puntos x van desde 0 para arriba, o sea puros positivos.

134.P3: Ahí ya depende de los parámetros que, no sé uno como docente o que el libro, que no sé si propones un libro que tú des, por ejemplo, podría ser cuáles serían los valores para que y tenga soluciones positivas.

139.P3: Ok bueno entonces allí pues primero empezaremos a hacerlo, sustituir z por el parámetro λ o bueno λ por cualquiera ya sea $x\ y\ o\ z$, después la despejamos y empezamos a darle valores a λ para que cumpla con esa menor cantidad de gramos...

156.P3: Pues sí, sí, o sea es muy útil si queremos enseñarles cómo serían las soluciones en el plano, entonces en lugar de descartarla por tener una infinidad de soluciones podemos hacer que hagan operaciones lógicas con ciertos parámetros que te pida un problema.

158.P3: También encontrar en caso de que no les des el parámetro que encuentren dicho parámetro para que cumpla la solución, el intervalo, ese intervalo en el cual las soluciones son válidas.

169.P3: Entonces si tú variable de control la pones de 0 a 13 entonces tu resultado va a ser puros números positivos, tus coordenadas.

217.P3: Pues me gusta, esta buena la propuesta o sea estás haciendo los análisis para acercarte a una respuesta que sea más apegada ahora sí que a las ganancias, bueno en ese problema de las ganancias que ambas personas trabajen a la par y que la tercera persona que trabaje menos porque pues te está generando pérdidas.

217.P3: Y en la otra, la anterior también, pues te tienes que acercar más a cierta respuesta ya, no, bueno ahora sí que ya no serían infinidad de respuestas en todos los números reales, sino que en un acotamiento de un intervalo buscar la que se aproxime más a la que me beneficie más de alimentos.

221.P3: Sí, si estaría útil porque, así como dices generalmente lo desechan este tercer caso, de que tiene soluciones infinitas entonces ahora ya no lo desechamos, sino que estamos poniendo un intervalo para ciertas respuestas, entonces haciendo el análisis de ese intervalo de respuestas, podemos encontrar una respuesta aproximada que cumpla las condiciones del problema.

227.P3: Sí, por qué estás haciendo el análisis de los valores que satisfacen, o sea pues ya no están esos valores volando, sino que ya los están interactuando uno por uno ya sean $\mathbb{R}^2$o en $\mathbb{R}^3$ o de manera algebraica.

Transcripción de diálogos relevantes de la sesión llevada a cabo con el Profesor 4

2.P4: En segundo grado la verdad, no conozco realmente los temas…

43.I: ¿Te queda claro qué significa que exista más de una solución o que existan infinitas soluciones?

44.P4: Sí, o sea que hay varios puntos de intersección, ¿sí verdad?

45.I: Sí, exactamente, que son un montón de puntos, una infinidad de puntos, en ocasiones esa idea de infinidad de puntos es la que causa veces conflicto en los estudiantes, el cómo se le da significado esa idea de que hay infinitas soluciones en sistema de ecuaciones lineales.

46.I: Ok, si observas este gráfico, los tres planos, se intersectan, pero se intersectan en una línea recta. Este caso es el que vamos a estar trabajando, cuando las ecuaciones en su representación gráfica se intersectan en una línea recta, es decir, su solución describe una línea recta.

51.P4: ¿Parámetros?... sí, si la he escuchado en los libros de texto viene, um…. lo había escuchado pues pero que la haya manejado yo en la asignatura de matemáticas en el momento no, ahorita, en este ciclo no sé si me vaya a encontrar con esa palabra, con parámetros, pero sí la había escuchado.

62.P4: Pues está bien porque yo el caso tres [el de infinitas soluciones en un sistema con 3 variables], lo desconocía hasta el momento, ahorita que tú comentas que también, bueno en el caso tres, que son tres variables, digo ah… bueno pues yo nada más conocía x y y, que son prácticamente las básicas, o sea nunca se manejaba la z.

63.P4: Te comentaba, que pues ahora con el parámetro, a lo que lo relacionó con lo del caso 3 es que este parámetro pues lo definiste de esta manera, porque te va a permitir identificar si es una variable constante o no constantes, o variable.

68.P4: Pues a simple vista en lo particular yo diría ¿pues como la resolvería? porque si tengo más variables que ecuaciones, pues sustituiría las variables de la x las variables de la y y pues las reduciría prácticamente.

83.I: Y, ¿qué te parece hasta ahora esta idea de las infinitas soluciones y de los sistemas con tres variables? por ejemplo, para enseñarlo a los alumnos.

84.P4: Pues así sin saberlo, sí, o sea primero lo tendría que estudiar yo, para poderlo pues darle una solución y a su vez puede enseñarse, pero ahorita a mí se me complica, porque el caso 3 y en planos y cosas así, dije *"Ah caray, sistemas con infinitas soluciones"* porque prácticamente nada más el que yo conozco que se practica más es el que se intersecta solamente en uno [plano].

113.I: En este caso el parámetro yo voy a querer que el parámetro tenga la función de constante y como va a tener la función de constante nuestro sistema ya no depende de tres variables, sino que ya depende de dos.

114.P4: Sí, que es en x y en y.

115.I: Exactamente.

116.I: ¿Y, que logras observar aquí?

117.P4: Que ya tenemos un sistema de 2x2.

118.I: Exactamente, y ¿si recuerdas que representaba de manera gráfica un sistema de 2x2?

119.P4: Sí, van a representar rectas.

120.I: Sí, vamos a pasar de estar trabajando con planos, que en ocasiones es difícil de visualizar, a trabajar con rectas.

121.P4: Ajá, entonces por eso se convierte z en λ, para poder estar trabajando con rectas, y trabajar con las infinitas soluciones…ah ok, muy bien.

156.P4: Pero se debe tomar en cuenta nada más los números enteros ¿verdad?

159.I: ¿Te quedó claro la idea de variable de control?

160.P4: Sí, o sea tú lo puedes mover de acuerdo con lo que se indique en el problema y es la que te va a permitir obtener los valores de x y y al sustituir λ por una variable, prácticamente.

162.P4: Y, si pues la idea de que en lugar de estar trabajando con planos vas a estar trabajando con rectas nada más.

168.P4: Entonces prácticamente este programa te permite darte prácticamente la solución, y lo que es la gráfica como tal ¿verdad?

174.P4: Pues la verdad si es un poquito más… yo desconocía el enfoque, es la primera vez que tengo un encuentro con este tipo de enfoque y más que nada lo que comentabas de 3x3 yo dije -*"ah caray ¿qué es eso?"*- pero pues ya y en cuanto a los casos o sea el caso 3 que es el de infinitas soluciones, que es el prácticamente el de la intersección de planos en una recta, pues ahora sí que al convertirlo con… o al asociar a λ con las variables, pues ahora sí que me permite tener un… una mayor comprensión, más que nada también para realizarlo manualmente sabes… es mucho mejor porque ahorita tú me estás mostrando de manera por medio de un programa y a la vez yo lo asocio de cómo hacerlo manualmente, o sea pues nada más lo sustituyes y pues ya se determina lo que es el valor, pero ya al convertir lo que es, $z = \lambda$, yo dije *"ah que padre"* o sea no era cosa del otro mundo.

178.I: Y, dime, ¿qué te parece la idea de la variable de control?

179.P4: No pues súper bien, bueno la variable del control ahorita me explicabas de lo del 0 al 13 pues ahora sí que…. de manera general vimos que iban a ser todos los números iban a ser positivos, entonces e igual tú tienes que tomar, pues ahora sí que, tu variable de control va a ser del cero al 13, y ya tú decides cuál del 0-13… puede ser 7 8 o 10 ¿verdad? tu variable de control, ya depende del problema, y pues está súper bien, o sea si lo manejas abiertamente pues tienes muchos valores, muchos puntos de intersección, pero si lo estableces solamente a un valor, ejemplo a 13 como dijimos pues ahora sí que nada más va a ser esta variable del control.

188.P4: Pues sí, porque te permitiría 1… no confundir más al alumno, 2 sería un poquito, pues ahora sí que más fácil y conocer lo que es la variable de control, lo que es el parámetro prácticamente, porque la que te permite si va a ser variable o va a ser constante, entonces pues sí, ya en lo particular cuando me encuentre con este tipo de temas, que hasta el momento no me ha tocado, pues sí, sí lo implementaría.

212.P4: Entonces prácticamente este sistema de ecuaciones lineales solamente te va a permitir realizarlo, llevarlo a cabo cuando tienes lo que son 3 tres variables verdad.

214.P4: O sea, entonces con cualquier ecuación que tenga tres variables, tú puedes utilizar este tipo de procedimientos, o tiene que ser cómo el ejemplo que acabas de leer tiene que ser algo relacionado con este tipo de problemas, para poder utilizar la variable de control, ¿no?

225.P4: []…yo no conocía ni siquiera el caso 3, tampoco conocía lo de el parámetro, específicamente lo de la variable de control, entonces yo creo que esto, pues este enfoque que tú le estás dando, pues yo creo que si, como docentes pues si nos ayudaría demasiado, al momento de abordar ya sea problemas contextualizados con un enfoque de ecuaciones lineales con infinitas soluciones.

Transcripción de diálogos relevantes de la sesión llevada a cabo con el Profesor 5

14.I: ¿Alguna vez hubiese escuchado la palabra parámetro?

15.P5: No, no la he escuchado.

50.I: Y, en ese caso como estamos trabajando en tres dimensiones eso representan planos, ¿habías escuchado esta palabra antes, en ecuaciones lineales?

51.P5: Lo de planos, en arquitectura nada más.

77.P5: Ahora que estoy viendo la ecuación, vi un problema de ese sentido cuando tuve ese curso que hace un momento mencioné, se trabajaban dos ecuaciones pero tenían tres variables, pero aquí el detalle fue que de todos los profesores incluso había algunos ingenieros que era se supone que eran los *"mejores"* no pudieron con el problema y supone que era un problema que iba a venir en la olimpiada de los alumnos, entonces una maestra dijo no pues x y z valen lo mismo y se hizo bolas y yo me di cuenta que nada más reduciendo… porque no te pedía cuánto valía cada una, si no nada más te pedía cuántas iba a pagar totalmente en el problema, entonces me di cuenta que reduciendo términos pues te daba la respuesta, pero no saque ni el valor de x ni de y ni de z.

105.I: Y, de manera gráfica ya no vamos a estar trabajando con planos como como te presenté ahorita que eran planos en $\mathbb{R}^3$.

106.P5: Ya sería $\mathbb{R}^2$., que serían rectas.

107.I: Exacto, será en $\mathbb{R}^2$., que serían rectas.

108.P5: Ok.

109.I: Ok, si te das cuenta no estamos trabajando en $\mathbb{R}^3$. en el espacio, sino que estamos trabajando en $\mathbb{R}^2$. en el plano cartesiano.

110.P5: Bueno, pero aquí entonces nada más tiene una solución, ¿no?

123.I: Se me hace muy interesante, pero aquí lo que me interesaría ver es cómo aplicarlo o enseñarlo en o sea pues en clases [el parámetro como variable de control con carácter dual]

145.P5: Ammm la primera sería de la manera algebraica, introduciendo un parámetro para resolverlo como un sistema $2 x 2$.

147.P5: Y, después encontrar la solución paramétrica que ya la teníamos.

149.I: Y, ahora lo que tenemos que hacer es observar, primero, por ejemplo, en este problema las soluciones negativas no tendrían sentido.

150.P5: Porque no puedes tener gramos negativos.

156.P5: Entonces, todas las soluciones que estén en ese intervalo de 0 a 13 como van a ser positivas pueden ser soluciones de este problema, aunque en este caso nos está pidiendo la mayor cantidad de gramos de y es decir, la mayor cantidad de gramos que sean positivos.

195.P5: Aunque, si me gusta esta propuesta, ya que por lo general no se trabaja con este caso, el que tiene infinitas soluciones, porque la idea… la idea común es que cuando se llega a ese caso pues no tiene solución y pues se desecha ese sistema y no se trabaja con él, y aquí estás presentando una manera de darle sentido a ese caso, de las infinitas soluciones, me gusta esta propuesta [el parámetro como variable de control con carácter dual].