



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS  
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO  
NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

# **Cohomología de Farrell de Grupos Modulares de Superficies no Orientables.**

**T E S I S**

Que presenta

**Nestor Colin Hernandez**

Para obtener el grado de

**DOCTOR EN CIENCIAS**

**EN LA ESPECIALIDAD DE  
MATEMÁTICAS**

Director de la tesis:

**Dr. Miguel Alejandro Xicoténcatl Merino**



# Agradecimientos

De manera muy especial quisiera agradecer al Dr. Miguel Alejandro Xicoténcatl Merino por la paciencia, las enseñanzas y todo el apoyo que me brindó durante estos años. A mis sinodales Dra. Rita Jimenez, Dr. Miguel Ángel Maldonado, Dr. Jesús González y Dr. Ernesto Lupercio así como también a los revisores de mi tesis Dr. Luis Paris, Dr. Bernardo Uribe y Dr. Eduardo Gonzales por tomarse el tiempo de revisar la presente tesis, las atenciones recibidas y sus valiosos comentarios. También quisiera agradecer a mi compañero Higinio Serrano por las valiosas charlas que tuvimos, algunas partes de esta tesis fueron solventadas gracias a estas charlas.

En lo personal quiero agradecer a mis padres José Colín y Catalina Hernández por su incondicional apoyo, quienes en todo momento buscaron que tuviera la comodidad necesaria para poder realizar este trabajo. A mis amigos con quienes he pasado gratos momentos y que regalan a mi vida algo de ellos. A mis hermanos y familiares que han estado al pendiente tanto de mi vida académica como de la personal, gracias por su apoyo incondicional.

Agradezco a todo el personal administrativo del Departamento de Matemáticas, principalmente a Roxana Martínez, por la disposición y ayuda mostrada.

Finalmente agradezco el apoyo del CONACYT a través de la beca de doctorado No. 494867 que permitió el financiamiento de mis estudios de doctorado y al CINVESTAV por proporcionarme un sitio en el cual pude adquirir conocimientos de esta ciencia que tanto me apasiona, las matemáticas.



# Resumen

En este trabajo se estudia la componente  $p$ -primaria de la cohomología de Farrell de los grupos modulares de superficies no orientables  $\mathcal{N}_g^k$ . Para ésto, probamos que  $\mathcal{N}_g^k$  tiene cohomología  $p$ -periódica siempre que exista un subgrupo de orden  $p$ , más aún, demostramos que el  $p$ -periodo de  $\mathcal{N}_g^k$  es igual a 4. Bajo dichas circunstancias podemos usar la siguiente descripción de la componente  $p$ -primaria:

$$\widehat{H}^*(\mathcal{N}_g^k, \mathbb{Z})_{(p)} \cong \prod_{\mathbb{Z}_p \in S} \widehat{H}^*(N(\mathbb{Z}_p), \mathbb{Z})_{(p)},$$

donde  $N(\mathbb{Z}_p)$  son los normalizadores de subgrupos de orden  $p$  y  $S$  es un conjunto de representantes de las clases de conjugación de tales subgrupos. Por tal motivo, clasificamos las clases de conjugación de subgrupos de orden  $p$  y mostramos que los normalizadores pueden ser pensados como subgrupos del grupo modular  $\widetilde{\mathcal{N}}_h^t$  donde  $(h, t)$  se encuentran relacionados con  $g$  y  $p$  a través de la ecuación de Riemann-Hurwitz:

$$g - 2 = p(h - 2) + t(p - 1).$$

Finalmente, ejemplificamos los métodos descritos para el caso del grupo modular  $\mathcal{N}_p^k$  para un primo impar  $p$ .



# Abstract

The present work is devoted to the study of the  $p$ -primary component of the Farrell cohomology of the mapping class group of non-orientable surfaces  $\mathcal{N}_g^k$ . For this, we prove that  $\mathcal{N}_g^k$  has  $p$ -periodic cohomology whenever there is a subgroup of order  $p$  in  $\mathcal{N}_g^k$ , furthermore, we prove that the  $p$ -period of  $\mathcal{N}_g^k$  is equal to 4. Under such circumstances we can use the following description of the  $p$ -primary component:

$$\widehat{H}^*(\mathcal{N}_g^k, \mathbb{Z})_{(p)} \cong \prod_{\mathbb{Z}_p \in S} \widehat{H}^*(N(\mathbb{Z}_p), \mathbb{Z})_{(p)},$$

where  $N(\mathbb{Z}_p)$  are the normalizers of subgroups of order  $p$  and  $S$  is a set of representatives of the conjugacy classes of such subgroups. For this reason, we classify the conjugacy classes of subgroups of order  $p$  and show that the normalizers can be thought of as subgroups of the mapping class group  $\widetilde{\mathcal{N}}_h^t$  where  $(h, t)$  are related to  $g$  and  $p$  through the Riemann-Hurwitz equation:

$$g - 2 = p(h - 2) + t(p - 1).$$

Finally, we exemplify the methods described for the case of the mapping class group  $\mathcal{N}_p^k$  for an odd prime  $p$ .





# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>III</b>
<b>Resumen</b>	<b>V</b>
<b>Abstract</b>	<b>VII</b>
<b>Introducción</b>	<b>XI</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Grupos modulares de superficies . . . . .	1
1.2. Superficies de Klein. . . . .	10
1.3. Cohomología de Grupos . . . . .	19
1.4. Cohomología de Farrell. . . . .	23
<b>2. Teorema de Realización de Nielsen.</b>	<b>35</b>
2.1. Relacion entre $\mathcal{N}_g^k$ y $Mod(S_{g-1}; 2k)$ . . . . .	37
2.2. Espacio de Teichmüller de una Superficie de Klein . . . . .	40
2.3. Teorema de realización de Nielsen . . . . .	44
2.4. Sobre la existencia de secciones $s : Mod(N_g) \rightarrow Diff(N_g)$ . . . . .	47
<b>3. La <math>p</math> torsión y <math>p</math>-periodicidad de <math>\mathcal{N}_g^k</math></b>	<b>55</b>
3.1. Subgrupos de orden $p$ en $\mathcal{N}_g^k$ . . . . .	56
3.2. Representaciones y Cohomología . . . . .	60
3.3. La $p$ -periodicidad de $\mathcal{N}_g^k$ . . . . .	63
<b>4. Clases de Conjugación</b>	<b>75</b>
4.1. Datos de punto fijo en superficies orientables . . . . .	76
4.2. Datos de punto fijo en superficies no orientables . . . . .	84

4.3. Relación con el Caso Orientable . . . . .	91
4.4. Conjugación de Nielsen para el caso no orientable . . . . .	96
4.5. Caso de puntos Marcados . . . . .	103
4.6. Aplicación de los datos de punto fijo al $p$ -periodo de $\mathcal{N}_g^k$ . . . . .	104
4.7. Número de Clases de Conjugación . . . . .	105
<b>5. La <math>p</math> torsión de la cohomología de Farrell de <math>\mathcal{N}_p^k</math>, <math>k = 1, 2</math>.</b>	<b>111</b>
5.1. Homomorfismo del Normalizador $N(\mathbb{Z}_p) \leq \mathcal{N}_g^k$ a $\mathcal{N}_h^{(k,t)}$ . . . . .	112
5.2. El normalizador $N(\mathbb{Z}_p) < \mathcal{N}_p^k$ , $k = 1, 2$ . . . . .	121
5.3. La $p$ torsión de la cohomología de Farrell de $\mathcal{N}_p^k$ . . . . .	126
<b>A. Teoría de Birman-Hilden</b>	<b>129</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>138</b>

# Introducción

El grupo modular de una superficie orientable  $S_g$  de género  $g$  es el grupo de componentes conexas del grupo de difeomorfismos de  $S_g$  que preservan la orientación, al cual lo denotamos como  $\Gamma_g$ , mientras que el grupo modular puro de  $S_g$  con  $k$  puntos marcados  $\Gamma_g^k$  se define similarmente, agregando la condición de que cada difeomorfismo deja fijo individualmente un conjunto de  $k$  puntos distinguidos (puntos marcados). En el caso que la superficie sea no orientable  $N_g$ , la definición de estos grupos es análoga e incluye todos los difeomorfismos. La notación empleada será  $\mathcal{N}_g^k$  e incluye al caso sin puntos marcados cuando  $k = 0$ , donde simplificamos la notación  $\mathcal{N}_g$ .

Iniciando con los trabajos de Max Dehn, los grupos modulares de superficies se ha convertido en un tema central en las matemáticas debido a su profunda y variada conexión con otras ramas de las matemáticas, tales como topología en dimensiones bajas, teoría geométrica de grupos, teoría de Teichmüller, geometría algebraica, teoría de 3 variedades, teoría de números, por mencionar algunas. Desde mitades del siglo anterior su estudio ha ido en constante aumento de tal forma que en nuestros días podemos encontrar una vasta cantidad de artículos donde se estudian diversos aspectos de interés del grupo modular así como sus conexiones. Entre estas investigaciones se encuentran las dedicadas a cuestiones cohomológicas y en la que diversos matemáticos como J. Harer, G. Mislin, S. Morita, B. Farb, N. Wahl y U. Tillmann han contribuido. Por ejemplo, existen resultados referentes a la dimensión cohomológica virtual [Iva84, Har86, LGGM18]; la cohomología racional [Mor87, Mor01]; la estabilidad homológica [Wah07, Wah12]; las componentes  $p$ -primarias de la cohomología entera [Xia92a, Lu01]; la cohomología módulo 2 para superficies de géneros pequeños [HX18, MX20]; entre otras más.

El reciente estudio de grupos modulares de superficies no orientables  $\mathcal{N}_g^k$  ha estimulado la necesidad de trasladar los resultados del caso orientable al no orientable, desarrollando

nuevos métodos para establecer una relación directa entre estos dos casos. Su estudio ha cobrado más importancia en la comunidad matemática y ahora podemos encontrar estudios referentes a cuestiones cohomológicas, relaciones con los grupos de trenzas, teoría de Teichmüller en el caso no orientable, entre otros más.

En la década de los 90's, Y. Xia y Q. Lu en [Xia90, Xia92b, Xia95, Lu98, Lu01, Lu02], explotaron diferentes propiedades del grupo modular de una superficie orientable  $\Gamma_g^k$  para poder determinar las componentes  $p$ -primarias de la cohomología de Farrell  $\widehat{H}^*(\Gamma_g^k; \mathbb{Z})$ . Debido a la estrecha relación que existe entre la cohomología usual y la cohomología de Farrell, su cálculo nos permite determinar la cohomología usual  $H^*(\Gamma_g^k; \mathbb{Z})$  en dimensiones superiores a la dimensión cohomológica virtual. En el caso de los grupos modulares de una superficie no orientable  $\mathcal{N}_g$ , G. Hope y U. Tillmann en [HT09] estudiaron la periodicidad de la cohomología de Farrell  $\widehat{H}^*(\mathcal{N}_g; \mathbb{Z})$ , determinando las condiciones que se requieren para que ésta sea  $p$ -periódica. Sin embargo, sus métodos no fueron suficientes para determinar la cohomología de Farrell  $\widehat{H}^*(\mathcal{N}_g; \mathbb{Z})$ , ni se considera el caso de puntos marcados debido a que se requiere adaptar nuevas herramientas del caso orientable a este caso.

El objetivo principal de este trabajo es estudiar la cohomología de Farrell  $\widehat{H}^*(\mathcal{N}_g^k; \mathbb{Z})$  de los grupos modulares de superficies no orientables con puntos marcados  $\mathcal{N}_g^k$ . Con este fin, desarrollamos conexiones con el caso orientable y extendemos algunos resultados ya obtenidos del caso orientable a nuestro caso de interés. Uno de tales resultados es el teorema de realización de Nielsen (en el caso no orientable), en cuya demostración se usa teoría de Teichmüller en superficies de Klein.

Los teoremas 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 a continuación constituyen la contribución original de esta tesis.

Recordemos que la cohomología de Farrell  $\widehat{H}^*(\Gamma; \mathbb{Z})$  es una generalización natural de la cohomología de Tate para aquellos grupos  $\Gamma$  que tienen dimensión cohomológica virtual finita. Una de las propiedades más importantes de  $\widehat{H}^*(\Gamma; \mathbb{Z})$  es que ésta coincide con la cohomología usual  $H^*(\Gamma; \mathbb{Z})$  en dimensiones superiores a la  $\text{vcd}(\Gamma)$  y sólo detectan la parte de torsión del grupo en cuestión. Una razón por la cual la cohomología de Farrell se convierte en una herramienta útil en el estudio de la cohomología de grupos modulares de superficies, es debido a que bajo condiciones favorables, la componente  $p$ -primaria  $\widehat{H}^*(\Gamma; \mathbb{Z})_{(p)}$  resulta ser periódica i.e. existe  $m$  tal que  $\widehat{H}^i(\Gamma; \mathbb{Z}) \cong \widehat{H}^{i+m}(\Gamma; \mathbb{Z})$  para todo  $i$ . En tal ca-

so decimos que  $\Gamma$  tiene cohomología  $p$ -periódica. En el caso de los grupos modulares de superficies no orientables  $\mathcal{N}_g^k$  con  $k$  puntos marcados, probamos el siguiente resultado:

**Teorema 1** *Sea  $g > 2$  y  $p$  un primo impar. Si  $\mathcal{N}_g^k$  contiene un subgrupo de orden  $p$ , entonces  $\mathcal{N}_g^k$  tiene cohomología  $p$ -periódica.*

Más aún, usando representaciones de grupos y generalizando la teoría de datos de punto fijo de J. Nielsen [Nie37] al caso de superficies no orientables, seremos capaces de probar que el  $p$ -periodo de la cohomología de Farrell de  $\mathcal{N}_g^k$  es igual a 4:

**Teorema 2** *Sea  $g > 2$  y  $p$  un primo impar. Si  $\mathcal{N}_g^k$  contiene  $p$ -torsión, entonces el  $p$ -periodo de  $\mathcal{N}_g^k$  es igual a 4.*

Un teorema clásico y que desempeña un papel importante en nuestro trabajo es el problema de realización de Nielsen, el cual fue formulado en la década de los 30's por el matemático danés J. Nielsen y pregunta si los subgrupos finitos del grupo modular pueden actuar sobre una superficie  $S_g$  por difeomorfismos, esto es, si todo subgrupo finito  $G \leq \text{Mod}(S_g)$  se puede levantar de manera isomorfa a un grupo  $\tilde{G} \subset \text{Diff}(S_g)$ . Dicho problema fue resuelto en la década de los 80's por S. Kerckhoff en [Ker83] para el caso de una superficie orientable. En esta dirección, extendemos el teorema de realización de Nielsen al grupo modular de una superficie no orientable  $\mathcal{N}_g^k$ , usando teoría de Teichmüller y superficies de Klein. A saber, en el capítulo 2 probamos:

**Teorema 3** *Todo subgrupo finito  $G \subset \text{Mod}(\mathcal{N}_g; k)$  actuando en  $\mathcal{T}_k(\mathcal{N}_g)$  fija algún punto de  $\mathcal{T}_k(\mathcal{N}_g)$ .*

Por su parte, Morita en [Mor87] y [Mor01] discute el problema de realización de Nielsen en el caso de subgrupos que son infinitos, en particular se pregunta si existe una sección  $s : \text{Mod}(S_g) \rightarrow \text{Diff}^+(S_g)$  para la proyección natural  $p : \text{Mod}(S_g) \rightarrow \text{Diff}^+(S_g)$ . A partir de sus resultados sobre la cohomología de  $H^*(\text{Mod}(S_g); \mathbb{Q})$ , Morita probó que no existe una sección para género mayor a 5. Siguiendo argumentos similares y con ayuda de clases características definidas en el caso no orientable probaremos el siguiente resultado:

**Teorema 4** *Si  $g \geq 35$ , entonces la proyección  $p : \text{Diff}(\mathcal{N}_g) \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{N}_g)$  no admite secciones.*

Regresando a la cohomología, los Teoremas 1 y 2 aseguran que el grupo modular  $\mathcal{N}_g^k$  tiene cohomología  $p$ -periódica siempre que el grupo  $\mathcal{N}_g^k$  contenga  $p$ -torsión. En tal caso podemos usar la siguiente descripción de la componente  $p$ -primaria.

**Teorema [Brown]** *Sea  $\Gamma$  un grupo con dimensión cohomológica virtual finita y con cohomología  $p$ -periódica. Entonces*

$$\widehat{H}^*(\Gamma, M)_{(p)} \cong \prod_{\mathbb{Z}_p \in S} \widehat{H}^*(N(\mathbb{Z}_p), M)_{(p)},$$

donde  $N(\mathbb{Z}_p)$  es el normalizador del subgrupo de orden  $p$  y  $S$  es un conjunto de representantes de las clases de conjugación de subgrupos de  $\Gamma$  de orden  $p$ .

Del teorema anterior deducimos que la componente  $p$ -primaria de  $H^*(\mathcal{N}_g^k; \mathbb{Z})$  se encuentra dada por el producto (sobre las clases de conjugación) de las componentes  $p$ -primarias de la cohomología de los normalizadores de subgrupos de  $\mathcal{N}_g^k$  de orden  $p$ . Por esta razón es necesario clasificar las clases de conjugación de subgrupos de orden  $p$ , así como calcular la cohomología de sus normalizadores.

Con el fin de clasificar las clases de conjugación de subgrupos de orden  $p$ , introducimos los datos de punto fijo  $\sigma_k(\alpha)$  para  $\alpha \in \mathcal{N}_g^k$  así como la noción adecuada de congruencia y extendemos uno de los resultados de Nielsen [Nie37] al caso de los grupos modulares de superficies no orientables.

**Teorema 5** *Sean  $\alpha, \alpha' \in \mathcal{N}_g^k$  dos elementos de orden  $p$ , entonces  $\alpha$  es conjugado a  $\alpha'$  si y sólo si  $\sigma_k(\alpha) \cong \sigma_k(\alpha')$ .*

Por otro lado, la cohomología de los normalizadores de subgrupos de orden  $p$  es estudiada a partir del cubriente ramificado obtenido de la acción de un subgrupo  $\mathbb{Z}_p \leq \mathcal{N}_g^k$  de orden  $p$  en  $N_g$  por difeomorfismos. Determinamos así un método que nos permite relacionar al normalizador  $N(\mathbb{Z}_p) \leq \mathcal{N}_g^k$  con un grupo modular de género más pequeño, a saber, el grupo modular  $\widetilde{\mathcal{N}}_h^t$ , donde  $(h, t)$  satisfacen la ecuación de Riemann-Hurwitz:

$$g - 2 = p(h - 2) + t(p - 1).$$

**Teorema 6** *Sean  $\mathbb{Z}_p = \langle \alpha \rangle$  un subgrupo de  $\mathcal{N}_g^k$ . Sean  $h \geq 0$  y  $t \geq k$  enteros que satisfacen la ecuación de Riemann-Hurwitz  $g - 2 = p(h - 2) + t(p - 1)$ . Entonces existe un homomorfismo inyectivo*

$$I : N(\mathbb{Z}_p) / \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathcal{N}_h^{(k,t)} \leq \widetilde{\mathcal{N}}_h^t,$$

donde  $N(\mathbb{Z}_p)$  es el normalizador de  $\mathbb{Z}_p$  en  $\mathcal{N}_g^k$  y

$$\mathcal{N}_h^{(k,t)} = \pi_0 \text{Diff}(N_h, \text{fija}\{p_1, \dots, p_k\}, \text{permuta}\{p_{k+1}, \dots, p_t\}) \leq \widetilde{\mathcal{N}}_h^t$$

Finalmente, ejemplificamos los métodos anteriores en el caso de una superficie no orientable de género  $g = p$ . En este caso, el grupo  $\mathcal{N}_p^k$  siempre contiene subgrupos de orden  $p$  y la componente  $p$ -primaria de  $\widehat{H}^*(\mathcal{N}_p^k; \mathbb{Z})$  está dada como sigue.

**Teorema 7** *Sea  $p$  un número primo impar. Entonces*

$$\widehat{H}^i(\mathcal{N}_p^k; \mathbb{Z})_{(p)} = \begin{cases} (\mathbb{Z}_p)^{\frac{p-1}{2}} & i \equiv 0 \pmod{4} \\ 0 & i \equiv 1, 2, 3 \pmod{4} \end{cases} \quad \text{para } k = 1, 2$$

$$\widehat{H}^i(\mathcal{N}_p^k; \mathbb{Z})_{(p)} = 0 \quad \text{para } k > 2$$

La tesis está organizada como sigue:

En el capítulo 1 recordamos algunos resultados básicos sobre: grupos modulares de superficies no orientables, haciendo particular énfasis en el caso de superficies no orientables, la teoría de superficies de Klein y la doble cubierta orientable, cohomología de grupos y la cohomología de Farrell de grupos de vcd finita.

En el capítulo 2 estudiamos a los espacios de Teichmüller de una superficie de Klein y recordamos las relaciones entre los grupos modulares de una superficie no orientable y orientable y los espacios de Teichmüller correspondientes. Vía estas relaciones probamos el Teorema 3. En la parte final de este capítulo se recuerdan de manera breve las clases características de haces de superficies no orientables y se usan para probar el Teorema 4 sobre la no existencia de secciones de la proyección natural  $p : \text{Diff}(N_g) \rightarrow \mathcal{N}_g^k$  para género mayor que 35.

En el capítulo 3 estudiamos la  $p$ -torsión y el fenómeno de  $p$ -periodicidad de la cohomología de Farrell en los grupos modulares  $\mathcal{N}_g^k$ . Se relaciona la  $p$ -torsión con el cubriente ramificado obtenido de la acción por difeomorfismos de  $\mathbb{Z}_p \leq \mathcal{N}_g^k$  en  $N_g$ , trasladando así el estudio de la  $p$ -torsión a encontrar soluciones de la ecuación de Riemann-Hurwitz. Se demuestra el Teorema 1, el cual establece que  $\mathcal{N}_g^k$  tiene cohomología  $p$ -periódica siempre que  $\mathcal{N}_g^k$  tenga  $p$ -torsión. Usando que para todo subgrupo finito  $G \leq \mathcal{N}_g^k$  existe una estructura dianalítica tal que  $G$  actúa por automorfismos en la superficie de Klein  $N_g$  es posible definir una representación  $\rho : G \rightarrow GL_2(\mathbb{R})$ . Se prueba que existe una clase no trivial  $(B\rho)^*(c_1) \in$

$H^2(G; \mathbb{Z})$  en el caso de que  $G = \mathbb{Z}_p$  y usando el invariante de Yagita obtenemos que el  $p$ -periodo  $p(\mathcal{N}_g^k) \leq 4$ , lo que demuestra de manera parcial el Teorema 2. A partir de aquí y debido a que  $\mathcal{N}_g^k$  contiene cohomología  $p$ -periódica, el cálculo de  $\widehat{H}^*(\mathcal{N}_g^k; \mathbb{Z})_{(p)}$  se reduce a estudiar la cohomología de los normalizadores de subgrupos de orden  $p$  y las clases de conjugación de éstos.

En el capítulo 4 clasificamos a las clases de conjugación de subgrupos de orden  $p$  de  $\mathcal{N}_g^k$ , extendiendo la noción de dato de punto fijo de J. Nielsen en [Nie37] al caso de una superficie no orientable. Usando esta clasificación probamos el Teorema 5 y como una aplicación de los datos de punto fijos completamos la demostración del Teorema 2.

En el capítulo 5 probamos el Teorema 6 de donde se deduce que para todo  $\mathbb{Z}_p \leq \mathcal{N}_g^k$  su normalizador  $N(\mathbb{Z}_p)$  puede ser pensado como una extensión de un subgrupo  $G \leq \widetilde{\mathcal{N}}_h^t$  por  $\mathbb{Z}_p$ :

$$1 \rightarrow \mathbb{Z}_p \rightarrow N(\mathbb{Z}_p) \rightarrow G \rightarrow 1,$$

donde  $(h, t)$  satisfacen la ecuación de Riemann-Hurwitz. En el caso del grupo modular  $\mathcal{N}_p^k$  cuando  $k = 1, 2$ , se prueba que  $G \cong \mathbb{Z}_2$  con lo cual determinamos que  $N(\mathbb{Z}_p) \cong D_{2p}$ , donde  $D_{2p}$  denota el grupo diédrico de orden  $2p$ . Finalizamos el capítulo con el cálculo de  $\widehat{H}^*(\mathcal{N}_p^k; \mathbb{Z})_{(p)}$  del Teorema 7.



# Capítulo 1

## Preliminares

En este capítulo recordaremos algunos conceptos básicos con los que trabajaremos a lo largo de esta tesis. Lo dividiremos en tres partes. En la primera sección estudiaremos los grupos modulares de superficies no orientables. La segunda sección está dedicada a estudiar las superficies de Klein que emplearemos para definir el espacio de Teichmüller de una superficie no orientable y probar el Teorema de Realización de Nielsen en el caso de una superficie no orientable. En la sección 3 recordaremos algunos resultados de cohomología de grupos y dimensiones cohomológicas, recordaremos además la cohomología de Tate definida para un grupo finito. Finalmente, en la sección 4 daremos un breve recordatorio sobre la cohomología de Farrell concluyendo con algunas cuestiones cohomológicas de los grupos modulares de superficies.

### 1.1. Grupos modulares de superficies

El estudio de los grupos modulares de superficies no orientables es un tema de creciente interés en la comunidad matemática, con ello se han establecido conexiones con el caso orientable que a su vez nos permiten extender algunos de los resultados ya obtenidos al caso no orientable. En esta sección comenzamos presentando algunos resultados básicos sobre grupos modulares centrando nuestra atención al caso de superficies no orientables.

Sea  $\Sigma_g$  una superficie compacta, conexa y sin frontera de género  $g$  y  $X = \{x_1, \dots, x_k\}$  un subconjunto finito de  $\Sigma_g$  de cardinalidad  $k \geq 0$ , llamados también *puntos marcados*. Denotamos por  $\widetilde{Diff}(\Sigma_g; k)$  al grupo de difeomorfismos de  $\Sigma_g$  que dejan fijo el conjunto de puntos

marcados  $X$ , mientras que usamos la notación  $Diff(\Sigma_g; k)$  para el grupo de difeomorfismos que dejan fijo cada punto marcado de manera individual. Si  $\Sigma_g$  es orientable, denotamos por  $\widetilde{Diff}^+(\Sigma_g; k)$  al subgrupo formado por todos los elementos de  $\widetilde{Diff}(\Sigma_g; k)$  que preservan la orientación, de manera similar denotamos como  $Diff^+(\Sigma_g; k)$  al subgrupo de  $Diff(\Sigma_g; k)$  de los difeomorfismos que preservan la orientación. El grupo modular de  $\Sigma_g$  con  $k$  puntos marcados se define como

$$Mod(\Sigma_g; k) := \begin{cases} \widetilde{Diff}^+(\Sigma_g; k) / \widetilde{Diff}_0(\Sigma_g; k) & \text{si } \Sigma_g \text{ es orientable} \\ \widetilde{Diff}(\Sigma_g; k) / \widetilde{Diff}_0(\Sigma_g; k) & \text{si } \Sigma_g \text{ es no orientable,} \end{cases}$$

donde  $\widetilde{Diff}_0(\Sigma_g; k)$  es el subgrupo de todos los elementos en  $\widetilde{Diff}(\Sigma_g; k)$  que son isotópicos a la identidad. De manera similar definimos el grupo modular puro de la superficie  $S$  con  $k$  puntos marcados

$$PMod(\Sigma_g; k) := \begin{cases} Diff^+(\Sigma_g; k) / Diff_0(\Sigma_g; k) & \text{si } \Sigma_g \text{ es orientable} \\ Diff(\Sigma_g; k) / Diff_0(\Sigma_g; k) & \text{si } \Sigma_g \text{ es no orientable,} \end{cases}$$

donde  $Diff_0(\Sigma_g; k)$  es el subgrupo de todos los elementos en  $Diff(\Sigma_g; k)$  que son isotópicos a la identidad. Notemos que  $PMod(\Sigma_g; k)$  es un subgrupo de  $Mod(\Sigma_g; k)$  y es posible probar que ambos grupos están relacionados por la siguiente sucesión exacta corta:

$$1 \rightarrow PMod(\Sigma_g; k) \rightarrow Mod(\Sigma_g; k) \rightarrow \mathcal{S}_k \rightarrow 1,$$

donde  $\mathcal{S}_k$  denota al grupo simétrico sobre  $k$  letras. Adicionalmente, si la superficie  $\Sigma_g$  es orientable, también se considera el grupo  $Mod^\pm(\Sigma_g; k)$  formado por todas las clases de isotopía de difeomorfismos que preservan o no la orientación, dicho grupo es llamado el grupo modular extendido de  $S$  con  $k$  puntos marcados. Finalmente, si el conjunto de puntos marcados  $X$  es vacío, omitimos  $k$  en la notación y solo escribimos  $Diff(\Sigma_g)$ ,  $Diff^+(\Sigma_g)$ ,  $Mod(\Sigma_g)$  y  $Mod^\pm(\Sigma_g)$ .

**Observación 1.1.1** Existen otras variaciones en la definición de los grupos modulares de superficies que usaremos en este trabajo. A saber, si  $\Sigma_g$  una superficie compacta, conexa, sin frontera de género  $g$  y  $X = \{z_1, \dots, z_k\}$  el conjunto de puntos marcados, denotamos por  $\Sigma_g^k$  a la superficie  $\Sigma_g \setminus X$  y definimos el grupo modular de la superficie  $\Sigma_g^k$  como

$$Mod(\Sigma_g^k) := \begin{cases} \pi_0 Diff^+(\Sigma_g^k) & \text{si } \Sigma_g^k \text{ es orientable} \\ \pi_0 Diff(\Sigma_g^k) & \text{si } \Sigma_g^k \text{ es no orientable.} \end{cases}$$

No es difícil ver que

$$Mod(\Sigma_g^k) \cong Mod(\Sigma_g; k).$$

Es importante recordar que si tenemos dos homeomorfismos homotópicos de una superficie compacta  $\Sigma_g$  (distinta del anillo o el disco cerrado), entonces son isotópicos. Más aún, existe una equivalencia entre el concepto de homeomorfismos y difeomorfismos para superficies: todo homeomorfismo de una superficie compacta es isotópico a un difeomorfismo de la superficie. Con ello obtenemos definiciones equivalentes del grupo modular de una superficie  $Mod(\Sigma_g; k)$ , donde podemos emplear homeomorfismos en lugar de difeomorfismos y clases de homotopía en lugar de clases de isotopía.

**Notación.** En lo que sigue, denotamos como  $\Sigma = \Sigma_g^k$  a una superficie conexa, sin frontera, de género  $g$ , con un conjunto finito de  $k$  puntos removidos. Para enfatizar que una superficie es orientable escribiremos  $S = S_g^k$  y del mismo modo usaremos  $N = N_g^k$  para una superficie no orientable. En algunas ocasiones omitiremos el subíndice  $g$  y el superíndice  $k$ , infiriendo ambos del contexto. Finalmente, cuando se requiera y sin hacer mención, pensaremos a un elemento  $f \in \widetilde{Diff}(\Sigma_g; k)$  como un elemento de  $Diff(\Sigma_g^k)$  simplemente tomando su restricción a la superficie  $\Sigma_g^k$  removiendo los  $k$  puntos marcados.

Si  $N_g$  denota a una superficie no orientable de género  $g$ , a lo largo de este trabajo emplearemos la siguiente notación:

$$\mathcal{N}_g^k = PMod(N_g; k) \quad \text{y} \quad \widetilde{\mathcal{N}}_g^k = Mod(N_g; k).$$

Cuando el conjunto de puntos marcados es vacío, denotaremos simplemente a  $Mod(N_g)$  como  $\mathcal{N}_g$ . En el caso de una superficie orientable  $S_g$  de género  $g$ , en algunas ocasiones emplearemos la siguiente notación:

$$\Gamma_g^k = PMod(S_g; k) \quad \text{y} \quad \widetilde{\Gamma}_g^k = Mod(S_g; k).$$

De igual modo si el conjunto de punto marcados es vacío, omitimos a  $k$  en la notación y escribimos  $\Gamma_g$ .

Aunque en este trabajo nos centramos en estudiar al grupo modular  $\mathcal{N}_g^k$ , en numerosas ocasiones haremos uso de las demás variaciones del grupo modular, como  $Mod(S_g; k)$ ,  $Mod^\pm(S_g; k)$  y  $\widetilde{\mathcal{N}}_g^k$ , por tal motivo nuestro interés de recordar algunas de las variaciones de la definición del grupo modular y con ello establecer una notación estándar.

### Representación gráfica de una superficie no orientable.

Sea  $\Sigma$  una superficie compacta, conexa y sin frontera. Como bien sabemos, si  $\Sigma$  es orientable, entonces  $\Sigma$  es una esfera  $S^2$  o es la suma conexa de  $g$  toros  $T$ ; mientras que si la superficie  $\Sigma$  es no orientable, entonces  $\Sigma$  es la suma conexa de  $g$  planos proyectivos  $\mathbb{R}P^2$ . En ambos casos el número  $g$  es el género de la superficie  $\Sigma$ . Recordemos que un *crosscap* es una representación gráfica de la banda de Möbius donde tomamos el disco unitario y removemos el interior de un disco de radio menor. Sobre la circunferencia de la frontera del disco removido identificamos los puntos de manera antipodal, representando esta identificación con una cruz como se muestra en la Figura 1.1.

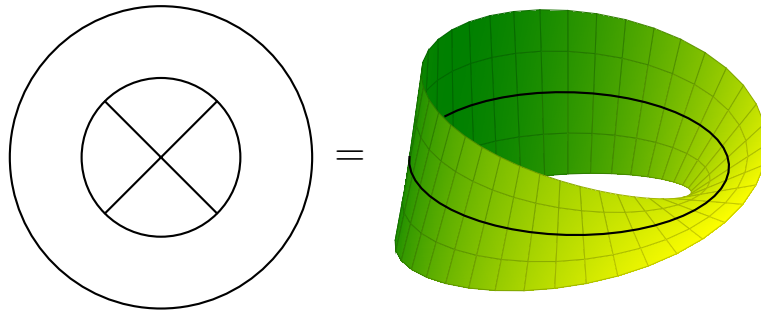


Figura 1.1: Representación de un crosscap.

**Ejemplo 1.1.2** Toda superficie no orientable  $N_g$  de género  $g$  se representa como sigue: consideremos la superficie orientable  $S_{g_1,b}$  de género  $g_1$  con  $b$  componentes frontera, donde  $2g_1 + b = g$ . Pegando  $b$  crosscaps a cada una de las componentes de frontera de la superficie  $S_{g_1,b}$  obtenemos una representación gráfica de la superficie  $N_g$ . En la Figura 1.2 se muestran las diferentes representaciones gráficas de una superficie no orientable de género 5.

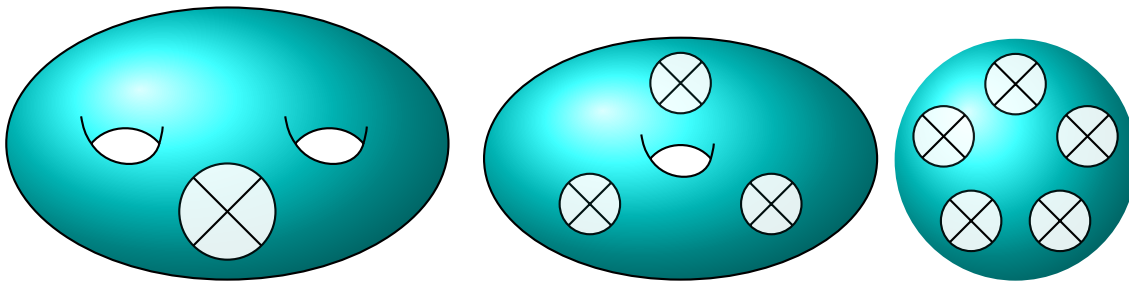


Figura 1.2: Representaciones gráficas de una superficie no orientable de género 5.

*Homeomorfismos de una superficie no orientable.*

**Elementos de orden finito.** Tomemos como modelo de una superficie  $N_g$  a la esfera con  $g$  crosscaps de tal forma que “el centro” de cada crosscap se encuentra separado uno del otro por un ángulo de  $2\pi/g$ . Entonces una rotación por un ángulo  $2\pi/g$  sobre el eje de simetría nos define un homeomorfismo de orden  $g$ . En la Figura 1.3 podemos ver un ejemplo para el caso de género 3 y 5.

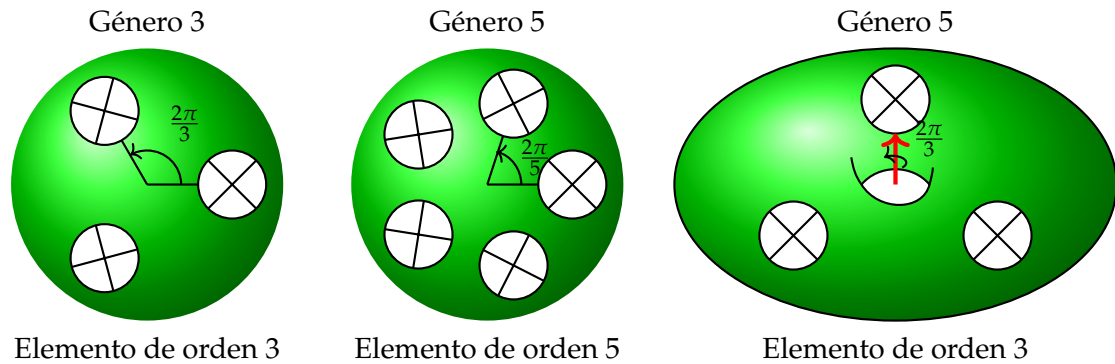


Figura 1.3: Elementos de orden finito de una superficie no orientable de género 3 y 5.

Otros ejemplos de homeomorfismos de orden finito pueden obtenerse de tomar la superficie  $N_g$  obtenida de un toro  $T^2$  añadiendo  $g - 2$  crosscaps de manera simétrica. Rotamos un ángulo de  $2\pi/(g - 2)$  y obtenemos un homeomorfismo de orden  $g - 2$ . En la Figura 1.3 mostramos un ejemplo para una superficie de género 5. En general, una forma de obtener elementos de orden finito a partir de una superficie orientable la cual posee cierta simetría, es añadir crosscaps de manera que la simetría de la superficie orientable se preserve. De este modo se pueden obtener elementos de orden finito en una superficie no orientable.

**Punctured Slide.** Describiremos un homeomorfismo de la banda de Möbius con un punto marcado. Consideremos el rectángulo  $[-1, 1] \times [0, 1]$  con un punto removido  $(0, \frac{1}{2})$  cociente con la relación  $(x, 0) \sim (-x, 1)$  como un modelo para la banda de Möbius. Denotemos este modelo por  $M$ . Definimos el “punctured slide”  $v$  por la fórmula:

$$v([x, y]) = \begin{cases} [x, y + 1 - |x|] & \text{para } y \leq |x|, \\ [-x, y - |x|] & \text{para } y \geq |x|, \end{cases}$$

donde  $[x, y]$  denota la clase del punto  $(x, y)$  en  $M$ . Sea  $S$  la simetría definida como  $S([x, y]) = [x, 1 - y]$  y consideremos la conjugación  $g = SfS$ . Tenemos que

$$g([x, y]) = \begin{cases} [x, y + |x| - 1] & \text{para } y \geq 1 - |x|, \\ [-x, y + |x|] & \text{para } y \leq 1 - |x|, \end{cases}$$

es fácil mostrar que  $vg = gv = id$ , así que  $g = v^{-1}$ . En la Figura 1.4 podemos observar el efecto que tienen los homeomorfismos  $v$  y  $g$  sobre un arco que une la frontera de la banda de Möbius  $M$ .

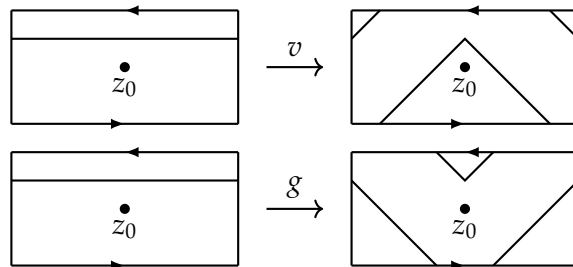


Figura 1.4: Punctured Slide.

Ahora usaremos el modelo de crosscap de la banda de Möbius al que denotaremos como  $M'$ . Elegimos un homeomorfismo de  $M$  a  $M'$  tal que la composición  $S' = hSh^{-1}$  es el homeomorfismo inducido por la reflexión del disco sobre la línea que contiene al punto marcado y el centro del disco removido. Poniendo  $v' = hvh^{-1}$  tenemos que  $S'v'S' = f'^{-1}$ . Este homeomorfismo  $v'$  puede ser descrito de la siguiente forma. Consideremos una curva simple cerrada  $\beta$  que inicia en el punto marcado  $z_0$  que pasa por el crosscap y regresa al punto  $z_0$ . Tomemos una vecindad tubular del lazo  $\beta$ , el homeomorfismo es definido de tal forma que los puntos dentro de la vecindad tubular son empujados continuamente a lo largo de la curva  $\beta$  y de tal manera que los puntos en la frontera de la vecindad tubular permanecen fijos, mientras que los puntos que se encuentran fuera de la vecindad tubular se mantienen fijos, i.e. fuera de la vecindad tubular es la identidad.

De manera general, para una superficie no orientable  $N_g$  con al menos un punto marcado, es posible definir un homeomorfismo  $v : N_g \rightarrow N_g$  llamado *punctured slide* de la siguiente forma. Tomemos un disco en la superficie  $N_g$  que contenga en su interior únicamente a un crosscap y un punto marcado. Puesto que el disco contiene a un crosscap y el punto marcado, entonces éste es homeomorfo a una banda de Möbius  $M$  con un punto marcado y tiene sentido hablar del punctured slide sobre el disco. El homeomorfismo  $v : N_g \rightarrow N_g$  se define como el punctured slide dentro del disco y fuera de éste se define como la identidad.

En la Figura 1.5 se muestra el efecto que tiene el punctured slide sobre un arco que une a la frontera.

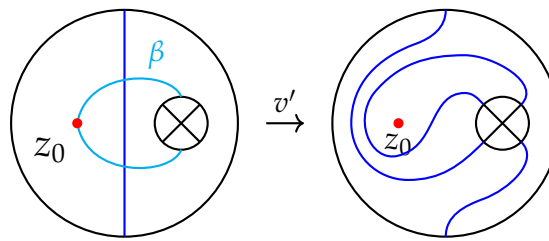


Figura 1.5: Punctured slide de un crosscap con un punto marcado.

**Crosscap Slide o Y-homeomorfismo.** Consideremos un disco con dos crosscaps el cual es homeomorfo a una botella de Klein con una componente frontera. Definimos el homeomorfismo  $y$  de manera similar al punctured slide, reemplazando el punto marcado por uno de los dos crosscaps. De igual modo que el punctured slide, podemos definir el crosscap slide para una superficie no orientable  $N_g$  de género al menos 2. En la Figura 1.6 mostramos el efecto que tiene el crosscap slide sobre un arco que une la frontera.

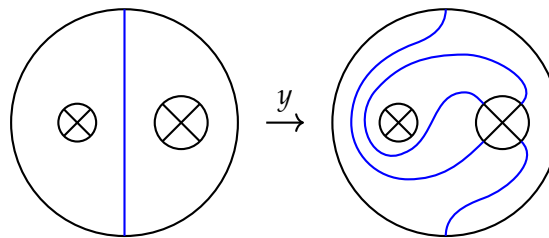


Figura 1.6: Crosscap slide o Y-homeomorfismo.

**Medios giros de Dehn.** En el caso que tengamos un disco con dos puntos marcados  $z_1, z_2$ , definimos un elemento  $\sigma$  que intercambia los dos puntos marcados y tal que  $\sigma^2$  es isotópico a un giro de Dehn sobre la curva frontera del disco. La Figura 1.7 muestra el efecto que tiene sobre un arco que une la frontera.

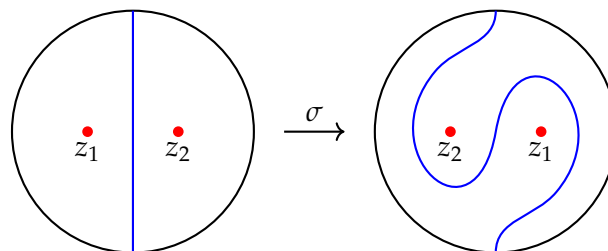


Figura 1.7: Medio giro de Dehn.

### Ejemplos en género bajo de $\mathcal{N}_g^k$ .

Para los siguientes ejemplos es bueno recordar que si tenemos una superficie  $\Sigma$  con frontera  $\partial\Sigma$ , denotamos por  $Diff(\Sigma; \partial\Sigma)$  al grupo de difeomorfismos de  $\Sigma$  cuya restricción en la frontera  $\partial\Sigma$  es la identidad. El *grupo modular de  $\Sigma$  relativo a  $\partial\Sigma$*  es definido como:

$$Mod(\Sigma; \partial\Sigma) := \pi_0 Diff(\Sigma; \partial\Sigma).$$

**La banda de Möbius  $M$ .** Si la superficie es no orientable de género 1 con una componente frontera, se tiene que ésta es homeomorfa a la banda de Möbius  $M$ . A través de la cubierta universal de la banda de Möbius (ver Proposición 5 de [Par14]), se prueba que:

$$Mod(M; \partial M) = \{1\}.$$

**El plano proyectivo  $\mathbb{R}P^2$ .** El grupo modular del plano proyectivo está relacionado con el grupo modular de la esfera  $S^2$  a través de la doble cubierta orientable. Una forma de probar que este grupo es trivial, es demostrando primero que todo difeomorfismo  $f : \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$  es isotópico a un difeomorfismo  $\hat{f} : \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$  que deja fija a una curva  $\alpha$  que divide al plano proyectivo en un disco  $D^2$  y en una banda de Möbius  $M$ . Así pues, el difeomorfismo  $\hat{f}$  se puede restringir tanto al disco  $D^2$  como a la banda de Möbius  $M$ , de tal forma que cada restricción es la identidad en la frontera. Como  $Mod(D^2; \partial D^2) = Mod(M; \partial M)$  son triviales, entonces ambos difeomorfismos son isotópicos a la identidad y así es posible probar que el difeomorfismo  $f$  es isotópico a la identidad de  $\mathbb{R}P^2$ .

$$\mathcal{N}_1 = \{1\}$$

**La botella de Klein  $\mathbb{K}$ .** El grupo modular  $\mathcal{N}_2$  de una superficie no orientable de género 2 es generado por la clase de isotopía de dos homeomorfismos  $y$  y  $t_a$ , donde  $t_a$  es el giro de Dehn sobre una “curva orientable separante”  $a$  en  $N_2$  (ver Figura 1.8) y el homeomorfismo  $y$  es el crosscap slide (o Y-homeomorfismo) entre los dos crosscaps (ver Proposición 20 de [Par14]). Así pues,

$$\mathcal{N}_2 \cong \langle [t_a] \rangle \times \langle [y] \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$



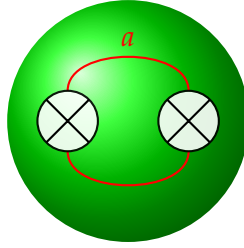


Figura 1.8: Curva separante  $a$  en una botella de Klein.

**La superficie no orientable de género tres  $N_3$ .** Para esta superficie consideremos la siguiente construcción. Sea  $T_0$  un toro menos un disco en su interior y  $M_0$  una banda de Möbius. Sabemos que  $N_3$  es la unión de  $T_0 \cup M_0$  por su frontera en común, así que todo difeomorfismo de  $N_3$  es isotópico a uno que deja  $T_0$  y  $M_0$  invariantes (Proposición 2.2 en [MBGA06]). Esto permite mostrar que el homomorfismo natural

$$\mathcal{N}_3 \rightarrow \text{Aut}(H_1(N_3; \mathbb{Z}) / \text{Torsión}(H_1(N_3; \mathbb{Z})))$$

es un isomorfismo. Finalmente como

$$H_1(N_3) \cong H_1(T_0, \partial T_0) \oplus H_1(M_0, \partial M_0) \cong \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}_2,$$

se obtiene que

$$\mathcal{N}_3 \cong GL(2, \mathbb{Z}).$$

**Plano Proyectivo con puntos marcados.** Concluimos esta sección recordando los generadores del grupo modular del plano proyectivo  $\mathbb{R}P^2$  con puntos marcados. Con esto es posible encontrar los grupos modulares en el caso de uno y dos puntos marcados. Para esto agreguemos la siguiente notación. Consideremos al plano proyectivo como la esfera con un crosscap y tomemos un disco  $D$  que contenga al crosscap y a los puntos marcados. Denotemos a los puntos marcados como  $z_1, \dots, z_k$  y para cada  $z_j$  tomemos un lazo  $\beta_j$  que pasa por el crosscap y regresa al punto marcado  $z_j$  como se muestra en la Figura 1.9. Denotemos por  $v_j$  al punctured slide obtenido por deslizar el punto  $z_j$  a lo largo de la curva  $\beta_j$  como se describió anteriormente. Para cada  $i$ , denotemos por  $\sigma_i$  el medio giro de Dehn cuyo soporte se encuentra contenido en una vecindad tubular del segmento de línea que une los puntos  $z_i$  y  $z_{i+1}$ .

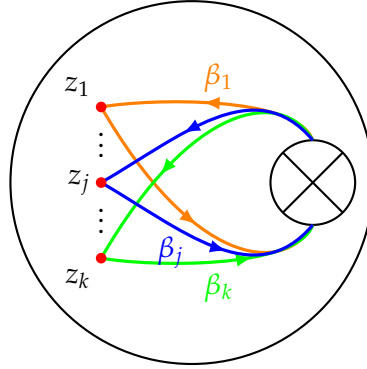


Figura 1.9: Lazos  $\beta_j$ 's dentro del disco  $D$  utilizados para definir los punctured slides  $v_j$ .

Con este breve recordatorio, enunciamos el siguiente teorema que será importante en los cálculos de la cohomología de Farrell. La referencia empleada es [Kor02] y [Sze04].

**Teorema 1.1.3** *Consideremos el plano proyectivo  $\mathbb{R}P^2$  con  $k$  puntos marcados  $\{z_1, \dots, z_k\}$  y para cada  $j = 1, \dots, k$  sea  $v_j$  la clase de isotopía del punctured slide obtenido por deslizar el punto marcado  $z_j$ , además, para cada  $i = 1, \dots, k - 1$  sea  $\sigma_i$  el medio giro de Dehn que intercambia los puntos marcados  $z_i$  y  $z_{i+1}$ . Entonces  $\mathcal{N}_1^k$  esta generado normalmente por los elementos  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ ; mientras que  $\widetilde{\mathcal{N}}_1^k$  esta generado por  $\{v_1, \sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}\}$ . Particularmente*

1.  $\mathcal{N}_1^1 \cong \langle v_1 \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \cong \widetilde{\mathcal{N}}_1^1$ .

2.  $\mathcal{N}_1^2 \cong \langle v_1 \rangle \times \langle v_2 \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ .

3.  $\widetilde{\mathcal{N}}_1^2 \cong \langle v_1, \sigma_1 \rangle \cong D_8$ . □

## 1.2. Superficies de Klein.

Toda superficie orientable  $S_g$  puede ser dotada de una estructura analítica que hace de ésta una superficie de Riemann. Similarmente, las superficies no orientables  $N_g$  admiten estructuras dianalíticas y con ello obtenemos las superficies de Klein como una generalización natural de la superficies de Riemann. Dedicamos esta sección a recordar algunas definiciones y construcciones básicas que nos serán de utilidad en futuras secciones, además recordaremos la construcción de la doble cubierta orientable de la superficie  $N_g$  con  $k$  puntos marcados. Las principales referencias empleadas son [AG71] y [SS92].

Recordemos que si  $A$  es un conjunto abierto de  $\mathbb{C}$  y  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  una función continua cuyas derivadas parciales existen, se definen

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Diremos que el mapeo  $f$  es *analítico* si  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$  y *antianalítico* si  $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$  sobre  $A$ . Si el mapeo  $f$  es analítico o antianalítico en cada componente conexa  $V$  de  $A$  decimos que el mapeo es *dianalítico*.

Por otra parte, para cada componente conexa  $V$  y un mapeo dianalítico no constante  $f$ , introducimos la siguiente notación:

$$\tau_V(f) := \begin{cases} 0 & \text{si } f \text{ es analítico,} \\ 1 & \text{si } f \text{ es antianalítico.} \end{cases}$$

Con ello obtenemos el siguiente resultado sobre la composición de dos mapeos dianalíticos.

**Proposición 1.2.1** Sean  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  y  $g : B \rightarrow \mathbb{C}$  dos mapeos dianalíticos tales que  $f(A) \subset B$ . Entonces  $h = g \circ f$  es dianalítica. Si además,  $A$  y  $B$  son conexos y tanto  $f$  como  $g$  son no constantes, entonces

$$\tau_A(h) \equiv \tau_B(g) + \tau_A(f) \quad \text{mód } (2).$$

Con este breve recordatorio, recordamos a las estructuras dianalíticas y las superficies de Klein.

Sea  $\Sigma$  una superficie suave. Un atlas  $\mathcal{U} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$  de la superficie  $\Sigma$  se dice ser *dianalítico* si todas las funciones de transición son dianalíticas; si las funciones de transición son analíticas (conformes, holomorfas) el atlas  $\mathcal{U}$  se dice ser *analítico* (conforme, holomorfo). Si la superficie tiene puntos removidos (puntos marcados o pinchazos), se requiere adicionalmente que cada punto removido tenga una vecindad conformemente equivalente al disco sin el origen en  $\mathbb{C}$  (sin esta condición, una vecindad de un punto removido también podría ser conformemente equivalente a un cilindro). Cada pareja  $(U_i, \varphi_i)$  es llamada una *carta dianalítica o analítica* según sea el caso. Dos atlas dianalíticos (analíticos)  $\mathcal{U}$  y  $\mathcal{V}$  son equivalentes si  $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$  es una atlas dianalítico (analítico). A una clase de equivalencia de atlas dianalíticos  $\mathfrak{X}$  le llamamos una *estructura dianalítica*. De manera similar se define una *estructura analítica (compleja o conforme)*. Además, si la superficie  $\Sigma$  es orientable, denotamos como  $\mathcal{M}(\Sigma)$  al conjunto de todas las estructuras analíticas sobre la superficie  $\Sigma$  que coinciden con la orientación y que son compatibles con la estructura diferenciable; si la superficie

$\Sigma$  es no orientable, el conjunto  $\mathcal{M}(\Sigma)$  está formado por todas las estructuras dianalíticas sobre la superficie  $\Sigma$  que son compatibles con la estructura diferenciable de  $\Sigma$ .

Sea  $\Sigma$  una superficie conexa, sin frontera, posiblemente con un conjunto finito de puntos removidos y con una estructura suave. Un atlas  $\mathcal{U} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$  de la superficie  $\Sigma$  se dice ser *dianalítico* si todas las funciones de transición son dianalíticas; si las funciones de transición son analíticas (conformes, holomorfas) el atlas  $\mathcal{U}$  se dice ser *analítico* (conforme, holomorfo). Si la superficie tiene puntos removidos (puntos marcados o pinchazos), se requiere adicionalmente que cada punto removido tenga una vecindad conformemente equivalente al disco unitario sin el origen en  $\mathbb{C}$  (sin esta condición, una vecindad de un punto removido también podría ser conformemente equivalente a un cilindro). Cada pareja  $(U_i, \varphi_i)$  es llamada una *carta dianalítica o analítica* según sea el caso. Dos atlas dianalíticos (analíticos)  $\mathcal{U}$  y  $\mathcal{V}$  son equivalentes si  $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$  es una atlas dianalítico (analítico). A una clase de equivalencia de atlas dianalíticos  $\mathfrak{X}$  le llamamos una *estructura dianalítica*. De manera similar se define una *estructura analítica (compleja o conforme)*. Además, si la superficie  $\Sigma$  es orientable, denotamos por  $\mathcal{M}(\Sigma)$  al conjunto de todas las estructuras analíticas sobre la superficie  $\Sigma$  que coinciden con la orientación y que son compatibles con la estructura diferenciable; si la superficie  $\Sigma$  es no orientable, el conjunto  $\mathcal{M}(\Sigma)$  está formado por todas las estructuras dianalíticas sobre la superficie  $\Sigma$  que son compatibles con la estructura diferenciable de  $\Sigma$ .

**Definición 1.2.2** *Una superficie de Klein es una superficie topológica  $\Sigma$  junto con una estructura dianalítica  $\mathfrak{X}$ . Si la estructura  $\mathfrak{X}$  es analítica entonces  $\Sigma$  es una superficie de Riemann.*

**Ejemplo 1.2.3** *Es bien conocido que para toda superficie compacta, conexa, de género  $g$  y sin frontera  $\Sigma_g$  existe una estructura dianalítica  $\mathfrak{X}$  (ver [AG71], Teorema 1.7.1). Consideremos una superficie de género  $g$  con  $k$  puntos marcados  $\Sigma_g^k$  cuya característica de Euler es negativa  $\chi(\Sigma_g^k) < 0$ , i.e. la superficie es hiperbólica. En este caso, la cubierta universal de  $\Sigma_g^k$  es el plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2$  y podemos ver a  $\Sigma_g^k$  como el cociente de  $\mathbb{H}^2$  por el grupo de transformaciones cubrientes  $\Gamma$ . Al ser éstas isometrías de  $\mathbb{H}^2$ , se tiene que  $\Gamma$  es un grupo cristalográfico no euclidiano (grupo NEC) que es isomorfo a  $\pi_1(\Sigma_g^k)$ . Como el grupo  $\Gamma$  no contiene elementos de torsión, entonces la proyección induce una estructura dianalítica  $\mathfrak{X}$  en el espacio cociente  $\mathbb{H}^2/\Gamma$  y así  $\Sigma_g^k$  es una superficie de Klein. Más aún, si la superficie  $\Sigma_g^k$  es orientable,  $\Gamma$  es un grupo Fuchsiano y obtenemos una superficie de Riemann.  $\square$*

**Notación.** En lo siguiente emplearemos la notación  $\Sigma$  o  $(\Sigma, \mathfrak{X})$  para referirnos a una superficie de Klein (o de Riemann), de manera indistinta. La mayoría de las veces que empleemos la notación  $(\Sigma, \mathfrak{X})$  será para enfatizar que estudiaremos la estructura dianalítica (o compleja).

**Definición 1.2.4** Un morfismo de superficies de Klein  $f : (\Sigma, \mathfrak{X}) \rightarrow (\Sigma', \mathfrak{Y})$  o un mapeo dianalítico es un mapeo  $f : \Sigma \rightarrow \Sigma'$  tal que para todo  $x \in \Sigma$  existen cartas dianalíticas  $(U, \phi) \in \mathfrak{X}$  y  $(V, \psi) \in \mathfrak{Y}$  alrededor de  $x$  y  $f(x)$  respectivamente, tales que  $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$  es un mapeo dianalítico en  $\phi(U)$ . Si las superficies  $(\Sigma, \mathfrak{X})$  y  $(\Sigma', \mathfrak{Y})$  son superficies de Riemann, el mapeo  $f$  es un morfismo si  $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$  es un mapeo analítico si  $f$  preserva la orientación o antianalítico si la invierte. Denotamos por  $\text{Aut}(\Sigma; \mathfrak{X})$  al grupo formado por todos los isomorfismos de la superficie  $\Sigma$ .

A continuación, enlistamos una serie de resultados sobre las superficies de Klein, que serán de utilidad en capítulos posteriores. Los detalles pueden ser consultados en [AG71].

**Proposición 1.2.5** Si  $(\Sigma, \mathfrak{X})$  es una superficie de Klein y  $\Sigma$  es orientable, entonces existen dos estructuras analíticas  $\mathfrak{X}_1$  y  $\mathfrak{X}_2$  que son dianalíticamente equivalentes a  $\mathfrak{X}$  y una de éstas coincide con la orientación de  $\Sigma$ , es decir, para alguna  $i = 1, 2$  se tiene que  $\mathfrak{X}_i \in \mathcal{M}(\Sigma)$ .

**Proposición 1.2.6** Sean  $\Sigma, \Sigma'$  y  $\Sigma''$  superficies de Klein y sean  $f : \Sigma \rightarrow \Sigma'$  y  $g : \Sigma' \rightarrow \Sigma''$  dos mapeos continuos no constantes. Sea  $h = g \circ f : \Sigma \rightarrow \Sigma''$ .

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{f} & \Sigma' \\ & \searrow h & \downarrow g \\ & & \Sigma'' \end{array}$$

Si cualesquiera dos de las tres funciones  $f, g$  y  $h$  son dianalíticas, entonces la tercera es dianalítica. El mismo resultado es válido para el caso de superficies de Riemann, donde los mapeos pueden ser analíticos o antianalíticos y en cuyo caso se satisface:

$$\tau(h) \equiv \tau(f) + \tau(g) \pmod{2}.$$

**Proposición 1.2.7** Sean  $\Sigma$  una superficie y  $(\Sigma', \mathfrak{X})$  una superficie de Klein y sea  $f : \Sigma \rightarrow \Sigma'$  un mapeo continuo. Entonces se cumple lo siguiente:

1. Existe a lo más una estructura dianalítica en  $\Sigma$  tal que  $f$  es un mapeo dianalítico.
2. Si  $\Sigma$  es orientable, entonces existe a lo más una estructura analítica que coincide con la orientación de  $\Sigma$  tal que el mapeo  $f$  es dianalítico.
3. Si  $\Sigma$  es orientable y además  $(\Sigma', \mathfrak{X})$  es una superficie de Riemann, entonces existe a lo más una estructura analítica en  $\Sigma$  tal que el mapeo  $f$  es analítico si preserva la orientación o antianalítico si invierte la orientación.

**Proposición 1.2.8** Sean  $(\Sigma, \mathfrak{X})$  una superficie de Klein y  $G \leq \text{Aut}(\Sigma; \mathfrak{X})$  un grupo de automorfismos que actúa de manera propia y discontinua en  $\Sigma$ . Entonces el cociente  $\Sigma' = \Sigma/G$  posee una única estructura dianalítica  $\mathfrak{Y}$  tal que la proyección natural  $\pi : (\Sigma, \mathfrak{X}) \rightarrow (\Sigma', \mathfrak{Y})$  es un mapeo dianalítico.

Lo siguiente que haremos, será definir la estructura pullback empleando las proposiciones anteriores.

**Estructura Pullback.** Para todo elemento  $f \in \text{Diff}(\Sigma)$  y  $\mathfrak{X} \in \mathcal{M}(\Sigma)$  definimos la estructura pullback  $f^*\mathfrak{X} \in \mathcal{M}(\Sigma)$  de la siguiente forma:

Sea  $\mathcal{U} = \{(U_i, z_i)\}_{i \in I}$  un atlas dianalítico o analítico según sea el caso, el cual pertenece a la estructura  $\mathfrak{X}$ . Definimos el atlas  $f^*\mathcal{U} := \{(U'_i, z'_i)\}_{i \in I}$ , donde  $U'_i = f^{-1}(U_i)$  y  $z'_i = z_i \circ f|_{U'_i}$  para todo  $i \in I$ . Por otro lado, denotemos por  $j : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  a la función  $j(z) = -\bar{z}$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ , donde  $\bar{z}$  es el conjugado del número complejo  $z$ . Definimos el atlas  $\overline{f^*\mathcal{U}} := \{(U'_i, \bar{z}'_i)\}_{i \in I}$ , donde  $U'_i = f^{-1}(U_i)$  y  $\bar{z}'_i = j \circ z_i \circ f|_{U'_i}$  para todo  $i \in I$ .

Si la superficie  $\Sigma$  es no orientable, entonces el atlas  $f^*\mathcal{U}$  es dianalítico y definimos a  $f^*\mathfrak{X}$  como la estructura dianalítica que contiene al atlas  $f^*\mathcal{U}$ .

Si la superficie  $\Sigma$  es orientable, tenemos que los atlas  $f^*\mathcal{U}$  y  $\overline{f^*\mathcal{U}}$  son analíticos. Si  $f$  preserva la orientación, entonces el atlas  $f^*\mathcal{U}$  coincide con la orientación de  $\Sigma$ ; si  $f$  invierte la orientación, entonces  $\overline{f^*\mathcal{U}}$  coincide con la orientación de  $\Sigma$ . Definimos la estructura analítica  $f^*\mathfrak{X}$  como la estructura generada por alguno de los dos atlas analíticos  $f^*\mathcal{U}$  o  $\overline{f^*\mathcal{U}}$  que coincida con la orientación de  $\Sigma$ .

La estructura pullback  $f^*\mathfrak{X}$  que hemos definido, satisface que el difeomorfismo

$$f : (\Sigma, f^*\mathfrak{X}) \rightarrow (\Sigma, \mathfrak{X})$$

es un morfismo. Particularmente, si  $\Sigma$  es orientable, entonces  $f : (\Sigma, f^*\mathfrak{X}) \rightarrow (\Sigma, \mathfrak{X})$  es analítico si  $f$  preserva la orientación o antianalítico si  $f$  invierte la orientación.

**Observación 1.2.9** Como consecuencia de la Proposición 1.2.7, dados  $f \in \text{Diff}(\Sigma)$  y  $\mathfrak{X} \in \mathcal{M}(\Sigma)$  la estructura  $f^*\mathfrak{X} \in \mathcal{M}(\Sigma)$  es única. Esto significa que si  $\mathfrak{Y} \in \mathcal{M}(\Sigma)$  es una estructura tal que  $f : (\Sigma, \mathfrak{Y}) \rightarrow (\Sigma, \mathfrak{X})$  es un morfismo, entonces  $f^*\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}$ .

**Definición 1.2.10** Para todos  $f \in \text{Diff}(\Sigma)$  y  $\mathfrak{X} \in \mathcal{M}(\Sigma)$  definimos la estructura inducida (o pullback) bajo  $f$  como la única estructura  $f^*\mathfrak{X} \in \mathcal{M}(\Sigma)$  tal que  $f : (\Sigma, f^*\mathfrak{X}) \rightarrow (\Sigma, \mathfrak{X})$  es un morfismo.

### *Doble cubierta orientable de una superficie de Klein*

Para toda superficie de Klein  $(\Sigma, \mathfrak{X})$  es posible construir tres dobles cubiertas: la doble cubierta analítica, la doble cubierta orientable y la doble cubierta de Schottky; cuando la superficie es conexa, sin frontera y con un número finito de puntos removidos, la doble cubierta analítica y la orientable coinciden. A continuación estudiamos la doble cubierta orientable de una superficie no orientable  $N_g$  con  $k$  puntos removidos, la cual será de utilidad para establecer la relación entre los grupos modulares  $\widetilde{N}_g^k$  y  $\text{Mod}(S_{g-1}; 2k)$ ; y entre los espacios de Teichmüller  $\mathcal{T}_k(N_g)$  y  $\mathcal{T}_{2k}(S_{g-1})$ .

**Definición 1.2.11** Una doble cubierta orientable de una superficie de Klein no orientable  $(\Sigma, \mathfrak{X})$  es una superficie de Riemann  $(S, \mathfrak{X}^0)$  junto con un mapeo dianalítico  $\pi : S \rightarrow \Sigma$  que es una doble cubierta no ramificada de  $\Sigma$  y una involución  $\sigma : S \rightarrow S$  antianalítica tales que  $\pi \circ \sigma = \pi$ . Denotaremos a la doble cubierta orientable como  $(S, \pi, \sigma)$  o simplemente por  $\pi : S \rightarrow \Sigma$ .

**Observación 1.2.12** La existencia de la doble cubierta orientable de una superficie de Klein compacta puede consultarse en el Teorema 1.6.7 de [AG71]. Se sabe que ésta es única salvo isomorfismo de superficies de Klein: si  $(S', \pi', \sigma')$  es otra doble cubierta orientable de  $\Sigma$ , entonces existe un único isomorfismo analítico  $f : S' \rightarrow S$  tal que  $\pi' = \pi \circ f$ . Siguiendo la misma idea, es posible probar el mismo resultado para el caso de una superficie con puntos marcados.

**Observación 1.2.13** *En la literatura, una pareja  $(S, \sigma)$  conformada por una superficie de Riemann  $S$  y una involución  $\sigma : S \rightarrow S$  antianalítica se conoce como una superficie de Riemann simétrica. No es difícil ver que el espacio de órbitas  $\Sigma = S/\langle\sigma\rangle$  obtenido de la acción de  $\sigma$  es una superficie de Klein. Recíprocamente, toda superficie de Klein  $\Sigma$  se puede obtener a partir de una superficie de Riemann simétrica  $(S, \sigma)$  vía la doble cubierta orientable  $(S, \sigma, \pi)$ . Así pues, la construcción de la doble cubierta orientable define una equivalencia entre la categoría de superficies de Klein y la categoría de superficies de Riemann simétricas (ver [Bra12], Sección 4 para más detalles).*

**Estructura Pullback definida por una doble cubierta orientable.** Sea  $(S, \pi, \sigma)$  la doble cubierta orientable de una superficie de Klein no orientable  $N$ . Para cualquier  $\mathfrak{X} \in \mathcal{M}(N)$ , definimos la *estructura pullback*  $\pi^*\mathfrak{X} \in \mathcal{M}(S)$  como sigue.

Tomemos un atlas  $\mathcal{U} = \{(U_i, z_i)\}_{i \in I}$  representante de una estructura  $\mathfrak{X}$ . Podemos suponer que los abiertos  $U_i$  forman una cubierta trivializante para  $\pi$ , es decir,  $\pi^{-1}(U_i) = V_i^1 \cup V_i^2$ , con  $V_i^1 \cap V_i^2 = \emptyset$  y  $\pi : V_i^j \rightarrow U_i$  es un homeomorfismo para todo  $i \in I$  y  $j = 1, 2$ . Definimos el atlas  $\pi^*\mathcal{U} := \{(V_i^j, w_i^j) \mid i \in I \text{ y } j = 1, 2\}$ , donde  $V_i^1$  y  $V_i^2$  son los abiertos que componen a  $\pi^{-1}(U_i)$  y  $w_i^j = z_i \circ \pi|_{V_i^j}$  para todo  $i \in I$  y  $j = 1, 2$ . El atlas así definido  $\pi^*\mathcal{U}$  es dianalítico y define una estructura dianalítica  $\mathfrak{Y}$  en la superficie  $S$ . Por la Proposición 1.2.5 existe una estructura analítica en  $S$  que coincide con la orientación y que es equivalente a  $\mathfrak{Y}$ , dicha estructura es definida como la *estructura pullback o inducida* de  $\mathfrak{X}$  bajo  $\pi$  y es denotada como  $\pi^*\mathfrak{X}$ . Notemos que por definición, el mapeo

$$\pi : (S, \pi^*\mathfrak{X}) \rightarrow (N, \mathfrak{X})$$

es dianalítico, mientras que por la Proposición 1.2.7 la estructura  $\pi^*\mathfrak{X} \in \mathcal{M}(S)$  es única en el siguiente sentido: si  $\mathfrak{Z} \in \mathcal{M}(S)$  es tal que el mapeo

$$\pi : (S, \mathfrak{Z}) \rightarrow (N, \mathfrak{X})$$

es dianalítico, entonces  $\pi^*\mathfrak{X} = \mathfrak{Z}$ . Más aún:

**Observación 1.2.14** *Si  $(S, \pi, \sigma)$  es la doble cubierta orientable de la superficie  $N$ , entonces para toda  $\mathfrak{X} \in \mathcal{M}(N)$  la involución*

$$\sigma : (S, \pi^*\mathfrak{X}) \rightarrow (S, \pi^*\mathfrak{X})$$

*es antianalítica con respecto a la estructura pullback  $\pi^*(\mathfrak{X})$ , es decir,  $\sigma^*(\pi^*\mathfrak{X}) = \pi^*\mathfrak{X}$  o lo que es lo mismo  $\sigma \in \text{Aut}(S; \pi^*\mathfrak{X})$ .*



### *Construcción de la doble cubierta orientable.*

A continuación describiremos un modelo de la doble cubierta orientable de una superficie no orientable  $N_g$  de género  $g$ . En general, debido a que la doble cubierta orientable es única salvo isomorfismos de superficies de Klein (ver Observación 1.2.12), podemos emplear cualquier modelo de doble cubierta de una superficie de Klein no orientable, sólo nos basta con tener una involución antianalítica sin puntos fijos en la superficie orientable, .

*Caso sin puntos marcados.* Si  $N_g$  es una superficie no orientable, compacta, conexa y sin frontera de género  $g$ , la doble cubierta orientable puede ser construida como sigue. Sea  $S_{g-1}$  una superficie orientable compacta, conexa y sin frontera de género  $g - 1$  encajada en  $\mathbb{R}^3$  tal que  $S_{g-1}$  es invariante bajo reflexiones en los planos  $xy$ ,  $yz$  y  $xz$ . Consideremos el homeomorfismo  $\sigma : S_{g-1} \rightarrow S_{g-1}$  dado por

$$\sigma(x, y, z) = (-x, -y - z),$$

el cual invierte la orientación. Bajo la acción de  $\sigma$  en  $S_{g-1}$ , el espacio de órbitas  $S_{g-1}/\langle\sigma\rangle$  es homeomorfo a la superficie no orientable  $N_g$  y el mapeo cociente

$$\pi : S_{g-1} \rightarrow N_g$$

es una doble cubierta orientable (topológica) de  $N_g$ . En la Figura 1.10 mostramos el modelo descrito de la doble cubierta orientable de  $N_g$ . Más aún, si  $N_g$  es una superficie de Klein, dotamos a la superficie  $S_{g-1}$  con la estructura pullback  $\pi^* \mathfrak{X} \in \mathcal{M}(S)$ . Con respecto a dicha estructura el mapeo  $\pi : S_{g-1} \rightarrow N_g$  es dianalítico y por la Nota 1.2.14 la involución  $\sigma : S \rightarrow S$  es antianalítica. Así pues,  $(S_{g-1}, \pi, \sigma)$  es una doble cubierta de la superficie de Klein  $N_g$ .

*Caso de puntos marcados.* Consideremos el conjunto de puntos marcados  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  de  $N_g$  y sea  $\tilde{X} = \pi^{-1}(X)$  el conjunto de puntos marcados de  $S_{g-1}$ . Si  $\tilde{x}_i \in S_{g-1}$  es tal que  $\pi(\tilde{x}_i) = x_i$  para toda  $i = 1, \dots, k$ , entonces

$$\tilde{X} = \{\tilde{x}_1, \sigma(\tilde{x}_1), \tilde{x}_2, \sigma(\tilde{x}_2), \dots, \tilde{x}_k, \sigma(\tilde{x}_k)\}.$$

Removamos el conjunto de puntos marcados  $X$  y  $\tilde{X}$  de  $N_g$  y  $S_{g-1}$  respectivamente, obteniendo las superficies  $N_g^k$  y  $S_{g-1}^{2k}$ . Por el ejemplo 1.2.3, podemos dotar a la superficie  $N_g^k$  de una estructura dianalítica  $\mathfrak{X}$ . Un argumento similar del caso compacto muestra que  $(S_{g-1}^{2k}, \pi, \sigma)$  es una doble cubierta orientable de la superficie de Klein  $N_g^k$ .

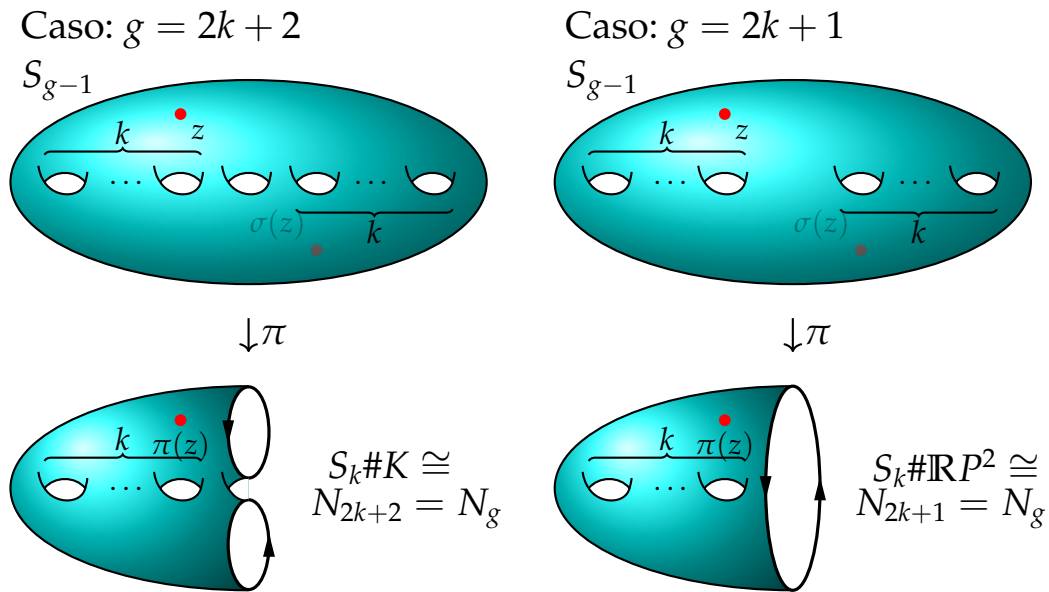


Figura 1.10: Doble cubierta orientable de  $N_g$ .

**Observación 1.2.15** Si  $(S_{g-1}, \pi, \sigma)$  es la doble cubierta orientable de  $N_g$  y tomamos una estructura  $\mathfrak{X} \in \mathcal{M}(S_{g-1})$ , entonces no podemos afirmar que dicha estructura dote a  $S_{g-1}/\langle \sigma \rangle = N_g$  de una estructura de superficie de Klein. Tal afirmación es cierta cuando la involución  $\sigma$  es un mapeo dianalítico con la estructura  $\mathfrak{X}$ , ver Proposición 1.2.8. Más adelante, veremos que aquellas estructuras para las cuales se cumple que  $\sigma$  es antianalítica, estarán relacionadas con el espacio de Teichmüller de una superficie no orientable.

### 1.3. Cohomología de Grupos

La cohomología de grupos es una serie de técnicas que usa herramientas de álgebra homológica y topología algebraica para estudiar grupos discretos. En esa sección recordaremos las nociones de dimensión cohomológica y cohomología de Tate, mismas que serán generalizadas más adelante al considerar la cohomología de Farrell. Algunos de los detalles pueden ser encontrados en [Bro82b], mientras que referencias más específicas serán mencionadas a lo largo de la sección.

Recordemos que para cualquier grupo  $\Gamma$  y  $\Gamma$ -módulo  $M$  los grupos de homología y cohomología de  $\Gamma$  con coeficientes en  $M$  son definidos como

$$H_n(\Gamma; M) := \text{Tor}_n^{\mathbb{Z}\Gamma}(\mathbb{Z}; M),$$

$$H^n(\Gamma; M) := \text{Ext}_{\mathbb{Z}\Gamma}^n(\mathbb{Z}; M).$$

Si  $\Gamma$  es un grupo discreto y los coeficientes son  $\mathbb{Z}$  como  $\Gamma$ -módulo trivial, es bien conocido que existe un isomorfismo

$$H^n(\Gamma; \mathbb{Z}) \cong H^n(B\Gamma; \mathbb{Z}),$$

donde  $B\Gamma$  denota al espacio clasificante de  $\Gamma$  y puede ser tomado (salvo homotopía) como cualquier espacio  $K(\Gamma, 1)$ .

**Ejemplo 1.3.1** Si  $\Gamma = \Gamma_g$ , Earle-Eells [EE69] y Gramain [Gra73] demostraron que si  $g \geq 2$ , entonces  $\text{Diff}_0(S_g) \simeq *$ . Luego, a partir de la sucesión exacta corta de grupos topológicos

$$1 \rightarrow \text{Diff}_0(S_g) \rightarrow \text{Diff}(S_g) \rightarrow \Gamma_g \rightarrow 1$$

tenemos que  $B\text{Diff}^+(S_g)$  es un  $K(\Gamma_g, 1)$  y por lo tanto

$$H^*(\Gamma_g; \mathbb{Z}) \cong H^*(B\text{Diff}^+(S_g); \mathbb{Z}).$$

Es decir, la cohomología de  $\Gamma_g$  define clases características de haces de superficies, ver [Mor87] y [Mor01]. En el caso de una superficie no orientable, Gramain en [Gra73] probó que si  $g \geq 3$  entonces  $\text{Diff}_0(N_g) \simeq *$  y análogamente se tiene que

$$H^*(\mathcal{N}_g; \mathbb{Z}) \cong H^*(B\text{Diff}(N_g); \mathbb{Z}).$$

### Dimensión Cohomológica.

**Definición 1.3.2** Sea  $\Gamma$  un grupo discreto. Decimos que una resolución proyectiva  $P = (P_i)_{i \geq 0}$  de  $\mathbb{Z}$  sobre  $\mathbb{Z}\Gamma$  tiene longitud  $n$  si  $P_n \neq 0$  y  $P_i = 0$  para toda  $i > n$ , es decir, la resolución  $P$  es de la siguiente forma

$$0 \rightarrow P_n \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Definimos la dimensión cohomológica de  $\Gamma$ , denotada por  $\text{cd}(\Gamma)$ , como la longitud mínima de las posibles resoluciones proyectivas de  $\mathbb{Z}$  sobre  $\mathbb{Z}\Gamma$ .

La siguiente proposición nos da propiedades de la dimensión cohomológica.

**Proposición 1.3.3** Sea  $\Gamma$  un grupo discreto. Entonces se cumple lo siguiente:

1.  $\text{cd}(\Gamma) = \inf\{n \mid H^i(\Gamma; -) = 0 \text{ para } i > n\}$ ;
2.  $\text{cd}(\Gamma) \leq n$  si y sólo si para cualquier sucesión exacta de  $\mathbb{Z}\Gamma$ -módulos

$$0 \rightarrow K \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

donde todos los  $P_i$  son proyectivos, entonces  $K$  es proyectivo.

3.  $\text{cd}(\Gamma) \leq \text{gd}(\Gamma) = \text{dimensión geométrica de } \Gamma$  (i.e. la mínima dimensión de un  $K(\Gamma, 1)$ -complejo). Si  $\text{cd}(\Gamma) \geq 3$ , entonces la igualdad se cumple.
4. Si  $\text{cd}(\Gamma) < \infty$ , entonces  $\Gamma$  es libre de torsión.
5.  $\text{cd}(\Gamma) = 0$  si y sólo si  $\Gamma$  es trivial. Más aún,  $\text{cd}(\Gamma) = 1$  si y sólo si  $\Gamma$  es libre y no trivial.
6. Si  $\Gamma' < \Gamma$ , entonces  $\text{cd}(\Gamma') \leq \text{cd}(\Gamma)$ .
7. Si

$$1 \rightarrow \Gamma' \rightarrow \Gamma \rightarrow \Gamma'' \rightarrow 1$$

es una sucesión exacta de grupos, entonces  $\text{cd}(\Gamma) \leq \text{cd}(\Gamma') + \text{cd}(\Gamma'')$ .

8. **Teorema de Serre.** Si  $[\Gamma : \Gamma'] < \infty$  y  $\Gamma$  es libre de torsión, entonces  $\text{cd}(\Gamma') = \text{cd}(\Gamma)$ .

Existe una generalización de la dimensión cohomológica, a saber la dimensión cohomológica virtual, especialmente útil en el caso de grupos infinitos. Consideremos  $\Gamma$  un grupo discreto y  $\Gamma'$  un subgrupo libre de torsión y de índice finito. Observemos que si tomamos otro

subgrupo  $\Gamma''$  con las mismas características el Teorema de Serre implica

$$\text{cd}(\Gamma') = \text{cd}(\Gamma' \cap \Gamma'') = \text{cd}(\Gamma''),$$

lo cual nos permite formular la siguiente definición.

**Definición 1.3.4** *La dimensión cohomológica virtual de un grupo  $\Gamma$ , denotada como  $\text{vcd}(\Gamma)$ , se define como la dimensión cohomológica de cualquier subgrupo libre de torsión de índice finito. Si  $\Gamma$  no posee un subgrupo libre de torsión de índice finito, entonces  $\text{vcd}(\Gamma) = \infty$ .*

Recientemente N. Bárcenas, D. Degrijse y I. Patchkoria en [BDP17] obtuvieron la primera interpretación geométrica de la dimensión cohomológica virtual, análoga a la interpretación de la dimensión cohomológica (ver 3 de la Proposición 1.3.3). Dicha interpretación se obtiene a través de la dimensión geométrica estable de acciones propias de  $\Gamma$ , denotada por  $\underline{\text{gd}}_{st}(\Gamma)$  y se define como la mínima dimensión que posee un modelo estable del espacio clasificante  $\underline{E}\Gamma$  con una acción propia de  $\Gamma$ .

En la siguiente proposición, resumimos algunos resultados sobre la dimensión cohomológica virtual similares a los descritos en la Proposición 1.3.3.

**Proposición 1.3.5** *Sea  $\Gamma$  un grupo que contiene un subgrupo libre de torsión de índice finito. Entonces se cumple lo siguiente:*

1.  $\text{vcd}(\Gamma) = \underline{\text{gd}}_{st}(\Gamma)$ .
2. Si  $\Gamma$  es libre de torsión y  $\text{vcd}(\Gamma) < \infty$ , entonces  $\text{cd}(\Gamma) < \infty$ .
3.  $\text{vcd}(\Gamma) = 0$  si y sólo si  $\Gamma$  es un grupo finito.
4.  $\Gamma' \leq \Gamma$ , entonces  $\text{vcd}(\Gamma') \leq \text{vcd}(\Gamma)$ .
5. Si

$$1 \rightarrow \Gamma' \rightarrow \Gamma \rightarrow \Gamma'' \rightarrow 1$$

*es una sucesión exacta de grupos y además  $\text{cd}(\Gamma') < \infty$  y  $\text{vcd}(\Gamma'') < \infty$ , entonces  $\text{vcd}(\Gamma) < \infty$ .*

6. Si  $[\Gamma : \Gamma'] < \infty$ , entonces  $\text{vcd}(\Gamma) = \text{vcd}(\Gamma')$ .

### Cohomología de Tate.

En esta parte recordamos la cohomología de Tate de un grupo finito  $G$ . Sea  $\varepsilon : P \rightarrow \mathbb{Z}$  una resolución proyectiva de  $\mathbb{Z}$  sobre  $\mathbb{Z}G$ . Es posible extender la resolución  $P$  a un complejo acíclico  $\widehat{P} = (P_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  de módulos proyectivos como sigue.

Definimos  $P_{-1} := \mathbb{Z}G$  y un homomorfismo inyectivo  $i_0 : \mathbb{Z} \rightarrow P_{-1}$  dado por  $i_0(1) := \sum_{g \in G} g$ . Extendemos la resolución definiendo el homomorfismo  $\partial_0 : P_0 \rightarrow P_{-1}$  como la composición  $i_0 \circ \varepsilon$ . Así tenemos la siguiente parte de la sucesión:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & P_n & \xrightarrow{\partial_n} & \cdots & \xrightarrow{\partial_2} & P_1 & \xrightarrow{\partial_1} & P_0 & \xrightarrow{\partial_0} & P_{-1} \\ & & & & & & & & \searrow \varepsilon & & \nearrow i_0 \\ & & & & & & & & & & \mathbb{Z} \end{array}$$

La sucesión anterior conserva la exactitud, pues  $\ker(\partial_0) = \ker(\varepsilon) = \text{Im}(\partial_1)$ . Para construir la siguiente ponemos

$$C := \text{coker}(i_0), \quad P_{-2} := P_{-1} \otimes C \quad \text{y} \quad i_{-1} : C \rightarrow P_{-2} \quad \text{definido por} \quad i_{-1}(c) := \sum_{g \in G} g \otimes g^{-1}c.$$

Notemos que hay un homomorfismo suprayectivo  $j_{-1} : P_{-1} \rightarrow P_{-1}/\text{Im}(\partial_0) = C$  de tal forma que  $\ker(j_{-1}) = \text{Im}(\partial_0)$ . Finalmente, definimos  $\partial_{-1} : P_{-1} \rightarrow P_{-2}$  como la composición  $i_{-1} \circ j_{-1}$  de tal forma que obtenemos el siguiente nodo de la sucesión:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & P_n & \xrightarrow{\partial_n} & \cdots & \xrightarrow{\partial_2} & P_1 & \xrightarrow{\partial_1} & P_0 & \xrightarrow{\partial_0} & P_{-1} & \xrightarrow{\partial_{-1}} & P_{-2} \\ & & & & & & & & \searrow j_{-1} & & \nearrow i_{-1} \\ & & & & & & & & & & & & C \end{array}$$

Nuevamente la sucesión es exacta pues  $\ker(\partial_{-1}) = \ker(j_{-1}) = \text{Im}(\partial_0)$ . De manera inductiva, proseguimos con esta construcción obteniendo así un complejo acíclico  $\widehat{P} = (P_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  de  $\mathbb{Z}G$ -módulos proyectivos que extiende a la resolución  $\varepsilon : P \rightarrow \mathbb{Z}$ . Un resultado conocido, afirma que cualesquiera dos complejos acíclicos de  $\mathbb{Z}G$ -módulos proyectivos que extienden a  $P$ , son homotópicamente equivalentes. Así introducimos la siguiente definición.

**Definición 1.3.6** Sean  $G$  un grupo finito,  $\varepsilon : P \rightarrow \mathbb{Z}$  una resolución proyectiva de  $G$ -módulos y  $\widehat{P}$  un complejo acíclico de  $G$ -módulos proyectivos que extiende a  $P$ . Dado un  $G$ -módulo  $M$ , definimos la cohomología de Tate del grupo  $G$  como

$$\widehat{H}^*(G; M) := H^*(\text{Hom}_G(\widehat{P}; M))$$

Observemos que si  $G$  es un grupo finito, es posible definir el homomorfismo norma para cualquier  $G$ -módulo  $M$

$$N : M \rightarrow M \quad \text{dado por} \quad N(m) := \sum_{g \in G} g \cdot m.$$

Además,  $N$  induce un homomorfismo  $\bar{N} : M_G \rightarrow M^G$  que da lugar al siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{N} & M \\ \downarrow & & \uparrow \\ H_0(G; M) \cong M_G & \xrightarrow{\bar{N}} & H^0(G; M) \cong M^G \end{array}$$

No es difícil ver que la cohomología de Tate contiene tanto la cohomología y la homología del grupo  $G$  de la siguiente forma:

$$\hat{H}^i(G; M) = \begin{cases} H^i(G; M) & i > 0. \\ \text{coker}(\bar{N}) & i = 0 \\ \text{ker}(\bar{N}) & i = -1 \\ H_{-i-1}(G; M) & i < -1 \end{cases}$$

Por ejemplo, si  $\mathbb{Z}$  es un  $G$ -módulo trivial se tiene además:

$$\begin{aligned} \hat{H}^{-1}(G; \mathbb{Z}) &= 0 \\ \hat{H}^0(G; \mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}/|G| \cdot \mathbb{Z} \end{aligned}$$

La cohomología de Tate posee propiedades similares a las de la cohomología ordinaria, tales como productos cup, mapeos de restricción y transfer; sucesiones espectrales, por mencionar algunas.

### 1.4. Cohomología de Farrell.

Como una generalización de la cohomología de Tate, F. T. Farrell en [Far77] introdujo otra teoría de cohomología aplicable a una una clase mas extensa de grupos, a saber, los grupos con dimensión cohomológica virtual finita. La finalidad de Farrell fue medir la falla de cualquier grupo  $\Gamma$  para ser un grupo de dualidad.

Para definir la cohomología de Farrell se usa una construcción similar a la descrita en la cohomología de Tate. Comenzamos con un grupo  $\Gamma$  de dimensión cohomológica virtual

finita y una resolución proyectiva  $\varepsilon : P = (P_i)_{i \geq 0} \rightarrow \mathbb{Z}$  de  $\Gamma$ -módulos. A partir de estos se construye un complejo acíclico  $\widehat{P} = (\widehat{P}_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  de  $\Gamma$ -módulos proyectivos que coincidirá con  $P$  en dimensiones mayores que la dimensión cohomológica virtual de  $\Gamma$ .

Sea  $\varepsilon : P \rightarrow \mathbb{Z}$  una resolución proyectiva de  $\Gamma$  y supongamos además que  $\text{vcd}(\Gamma) < \infty$ , digamos igual a  $n$ . Sea  $\Gamma'$  un subgrupo libre de torsión de índice finito, entonces  $\text{cd}(\Gamma') = n$ . Consideremos el  $\Gamma$ -módulo  $K = \text{Im}\{P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1}\}$ , entonces

$$0 \rightarrow K \rightarrow P_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\partial_0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon} 0$$

es una sucesión exacta de  $\Gamma$ -módulos de longitud  $n$ , donde los  $P_i$  son proyectivos. Particularmente es una sucesión exacta de  $\Gamma'$ -módulos, así por la Proposición 1.3.3 tenemos que  $K$  es un  $\Gamma'$ -módulo proyectivo. Definimos

$$\widehat{P}_{n-1} := \mathbb{Z}\Gamma \otimes_{\Gamma'} K \text{ y un homomorfismo } i_n : K \rightarrow \widehat{P}_{n-1} \text{ dado por } i(x) = \sum_{\gamma \in S} \gamma \otimes \gamma^{-1}x$$

donde  $S$  es un conjunto de representantes de las clases  $\Gamma/\Gamma'$ . Notemos que  $\widehat{P}_{n-1}$  es un  $\Gamma$ -módulo proyectivo pues  $K$  es  $\Gamma'$  proyectivo y el producto tensorial es tomado sobre  $\mathbb{Z}\Gamma'$ . Así, hemos construido el módulo  $n-1$  de la resolución

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\partial_{m+1}} & P_m & \xrightarrow{\partial_m} & \dots & \xrightarrow{\partial_{n+2}} & P_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & P_n & \xrightarrow{\widehat{\partial}_n} & \widehat{P}_{n-1} \\ & & & & & & & & \searrow \partial_n & & \nearrow i_n \\ & & & & & & & & & & K \end{array}$$

Similarmente a la construcción de la cohomología de Tate, definimos

$$C := \text{coker}(i_n), \widehat{P}_{n-2} := \widehat{P}_{n-1} \otimes C \text{ y } i_{n-1} : C \rightarrow P_{n-2} \text{ definido por } i_{n-1}(c) := \sum_{\gamma \in S} \gamma \otimes \gamma^{-1}c,$$

obteniendo el siguiente nodo de la sucesión:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\partial_{m+1}} & P_m & \xrightarrow{\partial_m} & \dots & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & P_n & \xrightarrow{\widehat{\partial}_n} & \widehat{P}_{n-1} & \xrightarrow{\widehat{\partial}_{n-1}} & \widehat{P}_{n-2} \\ & & & & & & & & \searrow & & \nearrow i_{n-1} \\ & & & & & & & & & & K \end{array}$$

Procediendo de este modo, construimos una resolución  $\widehat{P} = (\widehat{P}_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  de  $\Gamma$ -módulos proyectivos tales que  $P_i = \widehat{P}_i$  para toda  $i \geq n$ . Es decir tenemos una resolución acíclica de la siguiente forma:

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+2}} P_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} P_n \xrightarrow{\widehat{\partial}_n} \widehat{P}_{n-1} \xrightarrow{\widehat{\partial}_{n-1}} \dots \xrightarrow{\widehat{\partial}_{-m+1}} \widehat{P}_{-m} \xrightarrow{\widehat{\partial}_{-m}} \dots$$



A la 3-tupla  $(\widehat{P}, P, \varepsilon)$  se le conoce como *resolución completa* de  $\Gamma$ . Formalmente una resolución completa está formada por un complejo acíclico  $\widehat{P} = (\widehat{P}_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  de  $\Gamma$ -módulos proyectivos junto con una resolución proyectiva  $\varepsilon : P \rightarrow \mathbb{Z}$  de  $\Gamma$ -módulos de tal forma que  $P_i = \widehat{P}_i$  para  $i \geq \text{vcd}(\Gamma)$ . Es posible mostrar que cualesquiera dos resoluciones completas son homotópicamente equivalentes y así podemos introducir la siguiente definición.

**Definición 1.4.1** Sean  $\Gamma$  un grupo con  $\text{vcd}(\Gamma) < \infty$  y  $(\widehat{P}, P, \varepsilon)$  una resolución completa de  $\Gamma$ . Dado un  $\Gamma$ -módulo  $M$ , definimos la cohomología de Farrell de  $\Gamma$  como

$$\widehat{H}^*(\Gamma; M) := H^*(\text{Hom}_\Gamma(\widehat{P}; M)).$$

**Observación 1.4.2** Si  $\Gamma$  es un grupo finito, entonces  $\text{vcd}(\Gamma) = 0$  y una resolución completa de  $\Gamma$  es la resolución definida en la cohomología de Tate. Luego la cohomología de Farrell coincide con la cohomología de Tate cuando  $\Gamma$  es un grupo finito.

A continuación listamos algunas de las propiedades más importantes de la cohomología de Farrell.

**Proposición 1.4.3** Sea  $\Gamma$  un grupo con  $n = \text{vcd}(\Gamma) < \infty$ .

1.  $\widehat{H}^i(\Gamma; M) = H^i(\Gamma; M)$  para  $i > n$ .
2.  $\widehat{H}^n(\Gamma; M) = \text{coker}\{\text{tr} : H^n(\Gamma'; M) \rightarrow H^n(\Gamma; M)\}$ , donde  $\Gamma'$  es un subgrupo libre de torsión de índice finito y  $\text{tr}$  denota el "transfer".
3.  $\widehat{H}^*(\Gamma; M) = 0$ , si  $\Gamma$  es libre de torsión.
4.  $\widehat{H}^*(\Gamma; M)$  son grupos de torsión.
5. Existen mapeos de restricción y transfer así como productos cup.
6. Existe una sucesión espectral de Hochschild-Serre asociada a una sucesión exacta corta de grupos con  $\text{vcd}$  finita.

$$1 \rightarrow \Gamma' \rightarrow \Gamma \rightarrow \Gamma'' \rightarrow 1$$

Si  $\Gamma''$  es libre de torsión esta sucesión toma la forma

$$E_2^{p,q} = H^p(\Gamma''; \widehat{H}^q(\Gamma')) \Rightarrow \widehat{H}^{p+q}(\Gamma).$$

Mientras que si  $\Gamma'$  es libre de torsión la sucesión espectral toma la forma

$$E_2^{p,q} = \widehat{H}^p(\Gamma''; H^q(\Gamma')) \Rightarrow \widehat{H}^{p+q}(\Gamma).$$

### Cohomología periódica.

Existe una propiedad interesante en la cohomología de Farrell de ciertos grupos. Por ejemplo, la cohomología de un grupo cíclico de  $n$  elementos está dada por:

$$\hat{H}^i(\mathbb{Z}_n; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}_n & i \text{ par.} \\ 0 & i \text{ impar.} \end{cases}$$

y en particular, su cohomología es periódica (de periodo 2). Más aún, dicha propiedad es detectada en el anillo de cohomología  $\hat{H}^*(\mathbb{Z}_n; \mathbb{Z})$  ya que podemos encontrar un elemento invertible de grado 2 (esto es posible pues se permite que existan clases de cohomología en grados negativos). A esta propiedad le llamamos cohomología periódica y su definición formal es la siguiente.

**Definición 1.4.4** *Un grupo  $\Gamma$  con  $\text{vcd}(\Gamma) < \infty$ , se dice tener cohomología periódica, si para algún entero  $d \neq 0$  existe un elemento  $u \in \hat{H}^d(\Gamma; \mathbb{Z})$  que es invertible en el anillo de cohomología  $\hat{H}^*(\Gamma; \mathbb{Z})$ . Esto quiere decir que el producto cup*

$$u \cup \_ : \hat{H}^n(\Gamma; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} \hat{H}^{n+d}(\Gamma; \mathbb{Z})$$

*es un isomorfismo para toda  $n$ . El menor entero  $d > 0$  que cumple lo anterior es llamado el periodo de  $\Gamma$ .*

En busca de observar un fenómeno de periodicidad en cualquier grupo  $\Gamma$  (no necesariamente con cohomología periódica), podemos restringirnos a la componente  $p$ -primaria de la cohomología de Farrell  $\hat{H}^*(\Gamma; \mathbb{Z})_{(p)}$ . Esto es posible ya que por (4) de la Proposición 1.3.5 los grupos  $\hat{H}^*(\Gamma; \mathbb{Z})$  son de torsión. Notemos que  $\hat{H}^*(\Gamma; \mathbb{Z})_{(p)}$  es nuevamente un anillo graduado y tiene sentido preguntarse si existe algún elemento invertible de grado no cero en  $\hat{H}^*(\Gamma; \mathbb{Z})_{(p)}$ . En tal caso, diremos que  $\Gamma$  tiene cohomología  $p$ -periódica.

**Definición 1.4.5** *Sea  $p$  un número primo y  $\Gamma$  un grupo con  $\text{vcd}(\Gamma) < \infty$ . Decimos que  $\Gamma$  tiene cohomología  $p$ -periódica si la componente  $p$  primaria  $\hat{H}^*(\Gamma; \mathbb{Z})_{(p)}$  contiene un elemento invertible de grado  $d$  no cero. Esto quiere decir que el producto cup*

$$u \cup \_ : \hat{H}^n(\Gamma; \mathbb{Z})_{(p)} \xrightarrow{\cong} \hat{H}^{n+d}(\Gamma; \mathbb{Z})_{(p)}$$

*es un isomorfismo para toda  $n$ . El menor entero  $d > 0$  que satisface la propiedad anterior es llamado el  $p$ -periodo de  $\Gamma$  y lo denotamos por  $p(\Gamma)$ .*

Como los grupos de la cohomología de Farrell son de torsión, es claro que  $\Gamma$  tiene cohomología periódica si y sólo si  $\Gamma$  tiene cohomología  $p$ -periódica para todo primo  $p$ . De hecho tenemos lo siguiente:

$$\widehat{H}^*(\Gamma; \mathbb{Z}) \cong \prod_p \widehat{H}^*(\Gamma; \mathbb{Z})_{(p)}$$

donde  $p$  corre sobre todos los primos tales que  $\Gamma$  tiene  $p$  torsión.

En general, para estudiar el fenómeno de periodicidad en un grupo, no es necesario encontrar un elemento invertible, basta con verificar algunos criterios que daremos en las siguientes proposiciones.

**Proposición 1.4.6** *Las siguientes condiciones son equivalentes para un grupo finito  $\Gamma$ .*

1.  $\Gamma$  tiene cohomología periódica.
2. Para algún  $d \neq 0$ ,  $\widehat{H}^d(\Gamma; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/|\Gamma|\mathbb{Z}$ .
3. Para algún  $d \neq 0$ ,  $\widehat{H}^d(\Gamma; \mathbb{Z})$  contiene un elemento de orden  $|\Gamma|$ .
4. Todo subgrupo abeliano de  $\Gamma$  es cíclico.
5. Todo  $p$  subgrupo abeliano elemental de  $\Gamma$  tiene rango menor o igual a 1, donde un  $p$  subgrupo abeliano elemental de rango  $r \geq 0$  es un grupo isomorfo a  $(\mathbb{Z}_p)^r = \mathbb{Z}_p \times \dots \times \mathbb{Z}_p$  ( $r$  factores).
6. Los subgrupos de Sylow de  $\Gamma$  son cíclicos o grupos cuaterniones generalizados.

**Proposición 1.4.7** *Para cualquier grupo finito  $\Gamma$  y todo primo  $p$  que divide a  $|\Gamma|$ , las siguientes condiciones son equivalentes:*

1.  $\Gamma$  tiene cohomología  $p$ -periódica.
2. El anillo  $\widehat{H}^*(\Gamma; \mathbb{Z}_p)$  contiene un elemento invertible de grado no cero.
3. Todo  $p$  subgrupo abeliano elemental de  $\Gamma$  tiene rango  $\leq 1$ .
4. Los  $p$  subgrupos de Sylow de  $\Gamma$  son cíclicos o grupos cuaterniones generalizados.

**Proposición 1.4.8** *Para un grupo  $\Gamma$  de vcd finita (no necesariamente un grupo finito), las siguientes condiciones son equivalentes:*

1.  $\Gamma$  tiene cohomología  $p$ -periódica.
2. Existe un entero  $d \neq 0$  tal que para todo  $i \in \mathbb{Z}$ ,  $\widehat{H}^i(\Gamma; M)_{(p)} \cong \widehat{H}^{i+d}(\Gamma; M)_{(p)}$  para todo  $\Gamma$ -módulo  $M$ .
3. Todo  $p$  subgrupo abeliano elemental de  $\Gamma$  tiene rango  $\leq 1$ .
4. Todo subgrupo finito de  $\Gamma$  tiene cohomología  $p$ -periódica.

El cálculo del  $p$ -periodo  $p(\Gamma)$  de un grupo  $\Gamma$  con cohomología  $p$ -periódica es importante, pues garantiza el cálculo de la componente  $p$ -primaria de la cohomología de Farrell  $\widehat{H}^*(\Gamma; \mathbb{Z})_{(p)}$  con sólo determinar los primeros  $p(\Gamma)$  grupos de  $\widehat{H}^*(\Gamma; \mathbb{Z})_{(p)}$ . En el caso de un grupo finito  $G$ , el cálculo del  $p$ -periodo se encuentra determinado por los siguientes dos teoremas de R. Swan en [Swa60].

**Teorema 1.4.9** *Si los 2-subgrupos de Sylow de un grupo finito  $\Gamma$  son cíclicos, el 2-periodo es 2. Si los 2-subgrupos de Sylow de un grupo finito  $\Gamma$  son un grupo cuaternión generalizado, entonces el 2-periodo es 4.*

**Teorema 1.4.10** *Supongamos que  $p$  es un primo impar y que el grupo finito  $\Gamma$  tiene cohomología  $p$ -periódica. Sea  $P$  un  $p$ -subgrupo de Sylow, entonces*

$$p(\Gamma) = 2|N(P)/C(P)|,$$

donde  $N(P)$  y  $C(P)$  denotan el normalizador y centralizador de  $P$  respectivamente.

**Ejemplo 1.4.11** *Cohomología de Farrell de  $D_{2p}$ . El grupo diédrico de orden  $2p$  es el grupo formado por las simetrías de un polígono regular de  $p$  lados, el cual tiene la siguiente presentación:*

$$D_{2p} = \langle x, y \mid x^p = y^2 = 1, yxy^{-1} = x^{-1} \rangle.$$

Este grupo puede verse también como el producto semidirecto  $\mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_2$ , donde  $\mathbb{Z}_2$  actúa en  $\mathbb{Z}_p$  mandando al generador de  $\mathbb{Z}_p$  a su inverso multiplicativo. Cuando  $p$  es un primo impar, por la Proposición 1.4.6 el grupo  $D_{2p}$  tiene cohomología periódica, pues sus 2 y  $p$ -subgrupos abelianos

elementales son  $\mathbb{Z}_2$  y  $\mathbb{Z}_p$  respectivamente. Mientras que por el Teorema 1.4.9 el 2-periodo es igual a 2 y por el Teorema 1.4.10 el  $p$ -periodo está dado por

$$p(D_{2p}) = 2 \cdot |N(\mathbb{Z}_p)/C(\mathbb{Z}_p)| = 2 \cdot |D_{2p}/\mathbb{Z}_p| = 4.$$

Así pues, el periodo de  $D_{2p}$  es igual a 4, por lo que sólo nos basta con determinar los primeros cuatro grupos de la cohomología de Farrell (Tate) de  $\widehat{H}^*(D_{2p}; \mathbb{Z})$  para determinar completamente su cohomología de Farrell. Notemos primero que el mapeo  $\overline{N} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  es multiplicación por  $2p$  (el orden del grupo) y además, debido a las interpretaciones de los primeros grupos de homología y cohomología se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \widehat{H}^0(D_{2p}; \mathbb{Z}) &= \text{coker}(\overline{N}) = \mathbb{Z}/2p\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_{2p}, \\ \widehat{H}^1(D_{2p}; \mathbb{Z}) &\cong H^1(D_{2p}; \mathbb{Z}) = \text{Hom}(D_{2p}, \mathbb{Z}) = 0, \\ \widehat{H}^2(D_{2p}; \mathbb{Z}) &\cong \widehat{H}^{-2}(D_{2p}; \mathbb{Z}) \cong H_1(D_{2p}; \mathbb{Z}) \cong (D_{2p})_{ab} = \mathbb{Z}_2, \\ \widehat{H}^3(D_{2p}; \mathbb{Z}) &\cong \widehat{H}^{-1}(D_{2p}; \mathbb{Z}) = \ker(\overline{N}) = 0. \end{aligned}$$

Luego la cohomología de Farrell de  $D_{2p}$  es la siguiente:

$$\widehat{H}^i(D_{2p}; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}_{2p} & i \equiv 0 \pmod{4}, \\ 0 & i \equiv 1 \pmod{4}, \\ \mathbb{Z}_2 & i \equiv 2 \pmod{4}, \\ 0 & i \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

□

Existen resultados que complementan a los anteriores y que permiten calcular el  $p$ -periodo en el caso general de un grupo  $\Gamma$  con vcd finita. Éstos son similares a los descritos en los teoremas anteriores y pueden ser consultados en [GMX92].

**Teorema 1.4.12** *Sea  $p$  un número primo y  $N$  un grupo de dimensión cohomológica virtual finita el cual tiene cohomología  $p$ -periódica. Supongamos que existe  $H \triangleleft N$  tal que  $H \cong \mathbb{Z}_p$ . Entonces el  $p$ -periodo de  $N$  tiene la forma*

$$2[N : C(H)]p^k$$

donde  $C(H)$  denota el centralizador de  $H$  en  $N$  y  $k \geq 0$  es un entero.

**Teorema 1.4.13** *Sea  $\Gamma$  un grupo con vcd finita y cohomología  $p$ -periódica. Supongamos que  $\Gamma$  contiene solo un número finito de clases de conjugación de subgrupos de orden  $p$ . Entonces el  $p$ -periodo de  $\Gamma$  está dado por*

$$p(\Gamma) = 2 \cdot \text{mcm}\{[N(\mathbb{Z}_p) : C(\mathbb{Z}_p)] \mid \mathbb{Z}_p \in S\} \cdot p^k$$

para algún entero  $k \geq 0$ , donde  $S$  es un conjunto de representantes de las clases de conjugación de subgrupos de orden  $p$  de  $\Gamma$

Otra forma de encontrar el  $p$ -periodo de un grupo con vcd finita es mediante el invariante de Yagita descrito en [GMX94], para ello recordamos su definición.

Sea  $\Gamma$  un grupo con vcd y sea  $\pi$  cualquier subgrupo de orden primo  $p$ . Puesto que  $\pi$  se inyecta en todo cociente de la forma  $\Gamma/\Delta$ , donde  $\Delta$  es un subgrupo normal libre de torsión de índice finito en  $\Gamma$ , la imagen  $\text{Im}(H^k(\Gamma; \mathbb{Z}) \rightarrow H^k(\pi; \mathbb{Z}))$  del mapeo de restricción en cohomología es no cero para algún grado  $k$ . Al aplicar reducción módulo  $p$  el anillo  $H^*(\pi; \mathbb{Z})$  se mapea sobre  $\mathbb{F}_p[u] \subset H^*(\pi; \mathbb{F}_p)$ , con  $u$  un generador de  $H^2(\pi; \mathbb{F}_p)$ . Así, existe un valor máximo  $m = m(\pi, \Gamma)$  tal que

$$\text{Im}(H^*(\Gamma; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(\pi; \mathbb{F}_p)) \subset \mathbb{F}_p(u^m) \subset H^*(\pi; \mathbb{F}_p).$$

Notemos que  $m(\pi, \Gamma)$  se encuentra acotado por  $m(\pi, \Gamma/\Delta)$ , donde  $\Delta$  denota como antes, un subgrupo normal libre de torsión de índice finito. Como  $\Gamma/\Delta$  es finito, concluimos que  $m(\pi, \Gamma)$  está acotado por una cota que depende sólo de  $\Gamma$  (ver [Yag85]).

**Definición 1.4.14** *Sea  $\Gamma$  un grupo con vcd finita y  $p$  un primo tal que  $\Gamma$  contiene  $p$ -torsión. Definimos el invariante de Yagita denotado por  $Y(\Gamma, p)$  como*

$$Y(\Gamma, p) := 2 \cdot \text{mcm}\{m(\pi, \Gamma) \mid \pi \leq \Gamma \text{ y } \pi \cong \mathbb{Z}_p\}$$

donde  $m(\pi, \Gamma)$  se encuentra descrito anteriormente.

El siguiente teorema relaciona el invariante de Yagita con el  $p$ -periodo de un grupo. Su demostración puede ser encontrada en la Proposición 4.1.1 de [Xia90].

**Teorema 1.4.15** *El invariante de Yagita coincide con el  $p$ -periodo de un grupo  $\Gamma$  con  $\text{vcd}(\Gamma) < \infty$  que tiene cohomología  $p$ -periódica:*

$$Y(\Gamma, p) = p(\Gamma).$$

Mencionamos otro resultado respecto a la periodicidad y el  $p$ -periodo para extensiones de grupos.

**Proposición 1.4.16** *Sea  $1 \rightarrow \Gamma' \rightarrow \Gamma \rightarrow \Gamma'' \rightarrow 1$  una sucesión exacta tal que  $\text{cd}(\Gamma') < \infty$  y  $\text{vcd}(\Gamma'') < \infty$ . Si  $\Gamma''$  tiene cohomología  $p$ -periódica, entonces  $\Gamma$  tiene cohomología  $p$ -periódica. Más aún  $\mathfrak{p}(\Gamma) \mid \mathfrak{p}(\Gamma'')$ .*

Concluimos con un resultado de vital importancia en los cálculos de la cohomología de Farrell de los grupos modulares de superficies, el cual establece que si el grupo  $\Gamma$  tiene cohomología  $p$ -periódica, entonces el cálculo de la componente  $p$  primaria de la cohomología de Farrell  $\hat{H}^*(\Gamma; M)_{(p)}$  se reduce a encontrar la cohomología de los normalizadores de subgrupos de orden  $p$  y sus clases de conjugación.

**Teorema 1.4.17 (Brown [Bro82b])** *Sea  $\Gamma$  un grupo con  $\text{vcd}$  finita y con cohomología  $p$ -periódica. Entonces*

$$\hat{H}^*(\Gamma, M)_{(p)} \cong \prod_{\mathbb{Z}_p \in S} \hat{H}^*(N(\mathbb{Z}_p), M)_{(p)},$$

donde  $N(\mathbb{Z}_p)$  es el normalizador del subgrupo de orden  $p$  y  $S$  es un conjunto de representantes de las clases de conjugación de subgrupos de orden  $p$  de  $\Gamma$ .

### *Grupos modulares de superficies y $p$ -periodicidad.*

Usando el invariante de Yagita, Q. Lu en [Lu01] demuestra el siguiente teorema para grupos modulares  $\Gamma_g^n$  de superficies orientables con puntos marcados.

**Teorema 1.4.18 (Lu [Lu01])** *Para  $g \geq 1$ ,  $n \geq 1$  y un primo  $p$  tal que  $\Gamma_g^n$  contiene  $p$  torsión, entonces  $\Gamma_g^n$  tiene cohomología  $p$ -periódica y  $\mathfrak{p}(\Gamma_g^n) = 2$ .*

En capítulos posteriores, trataremos de extender este resultado al caso de superficies no orientables con puntos marcados  $\mathcal{N}_g^k$ . Procediendo de manera análoga solo garantizamos que el  $p$ -periodo será 2 o 4, sin embargo, al introducir más herramientas al caso no orientable y usando el Teorema 1.4.13 seremos capaces de concluir que el periodo siempre es igual a 4, obteniendo una sutil diferencia con el caso orientable.

Siguiendo con los grupos modulares de superficies orientables, en el caso sin puntos marcados  $\Gamma_g$ , el  $p$ -periodo fue estudiado por H. Glover, G. Mislin y Y. Xia en [GMX92]. En dicho

trabajo calculan el  $p$ -periodo de  $\Gamma_g$  usando el Teorema 1.4.13 y concluyen con el siguiente resultado.

**Teorema 1.4.19 (Glover-Mislin-Xia [GMX92])** *Sea  $p$  un primo impar.*

*Si  $g \equiv 1 \pmod{p}$  y  $\Gamma_g$  tiene cohomología  $p$ -periódica, entonces  $p(\Gamma_g) = 2 \cdot (p - 1)$ .*

*Si  $g \not\equiv 1 \pmod{p}$ , entonces  $p(\Gamma_g)$  divide a  $2 \cdot (p - 1)$ .*

Adicionalmente, en [GMX94] se determinó el invariante de Yagita  $Y(\Gamma_g, p)$  para el caso de un primo regular; mientras que el caso general de un primo impar  $p$  obtuvieron resultados parciales. Con los teoremas anteriores, podemos ver el grado de dificultad que implicó el cálculo del  $p$ -periodo para  $\Gamma_g$ ; además, podemos apreciar como éste y el género  $g$  están estrechamente relacionados con el primo  $p$ , contrastado con el caso de puntos marcados, donde inesperadamente se obtuvo el mismo valor de 2, siempre que el grupo  $\Gamma_g^n$  contenga  $p$ -torsión, no importando el género ni los puntos marcados. Es importante destacar la generalidad con la que concluye dicho resultado.

Con los resultados anteriores, referentes a la periodicidad de  $\Gamma_g^k$  (incluyendo el caso sin puntos marcados con  $k = 0$ ) y gracias al Teorema 1.4.17, el cálculo de la componente  $p$ -primaria de  $\widehat{H}^*(\Gamma_g^k; \mathbb{Z})$  se redujo a encontrar la cohomología de los normalizadores de subgrupos de orden  $p$  y clasificar las clases de conjugación de éstos. Siguiendo este camino, Y. Xia y Q. Lu explotaron diferentes propiedades de  $\Gamma_g^k$  que permitieron determinar  $\widehat{H}^*(\Gamma_g^k; \mathbb{Z})_{(p)}$  para géneros específicos, como puede consultarse en [Xia90, Xia92a, Xia92b, Xia95, Lu98, Lu01, Lu02].

En el caso de los grupos modulares de una superficie no orientable  $\mathcal{N}_g$ , G. Hope y U. Tillmann en [HT09] estudiaron la periodicidad de la cohomología de Farrell  $\widehat{H}^*(\mathcal{N}_g; \mathbb{Z})$ , obteniendo el siguiente resultado:

**Teorema 1.4.20 (Hope-Tillmann [HT09])**  *$\mathcal{N}_g$  tiene cohomología  $p$ -periódica a menos que una de las siguientes condiciones se cumpla:*

1. *El primo  $p = 2$ .*
2. *El primo  $p$  es impar,  $g = l \cdot p + 2$  para algún  $l > 0$  y para  $0 \leq t < p$  con  $l \equiv -t \pmod{p}$  donde se tiene que  $l + t + 2p > tp$ .*



A diferencia del caso orientable, los métodos empleados por Hope y Tillmann no fueron suficientes para determinar el  $p$ -periodo de  $\mathcal{N}_g$ , ni la cohomología de Farrell  $\widehat{H}^*(\mathcal{N}_g; \mathbb{Z})$ . Además, el caso de puntos marcados  $\mathcal{N}_g^k$  no fue considerado, debido a que se requiere adaptar nuevas herramientas del caso orientable a este caso. Sin embargo, es importante destacar que en la parte final del artículo [HT09], Hope y Tillmann dejan abiertas las siguientes tres cuestiones que surgen de su estudio:

1. El cálculo del  $p$ -periodo de  $\mathcal{N}_g$ .
2. Si es posible adaptar las herramientas que uso Q. Lu en [Lu98, Lu01] en el caso de puntos marcados  $\mathcal{N}_g^k$  y con esto estudiar el fenómeno de periodicidad en  $\mathcal{N}_g^k$ , esperando obtener un resultado semejante al Teorema 1.4.18.
3. El cálculo de la dimensión cohomológica virtual de  $\mathcal{N}_g$ .

Como se ha mencionado en párrafos anteriores, en este trabajo probamos que  $\mathcal{N}_g^k$  tiene cohomología  $p$ -periódica siempre que exista  $p$ -torsión en  $\mathcal{N}_g^k$  y que  $k \geq 1$ ; en tal caso determinamos que  $p(\mathcal{N}_g^k) = 4$ . Con esto cubrimos la segunda cuestión. Más aún, adaptaremos herramientas que son útiles en el caso orientable al caso de superficies no orientables y gracias al Teorema 1.4.17, nos permitirá determinar  $\widehat{H}^*(\mathcal{N}_p^k; \mathbb{Z})_{(p)}$  para el caso de un primo impar  $p$ . En cuanto a la primera cuestión, en este trabajo sólo nos centramos en el caso de puntos marcados  $\mathcal{N}_g^k$ , sin embargo, esta parte puede ser estudiada empleando las herramientas que desarrollamos en los siguientes capítulos, en particular, puede resultar útil usar el Teorema 1.4.13 junto con la teoría de los datos de punto de fijo de los elementos de  $\mathcal{N}_g$ . Finalmente, la tercera cuestión ya había sido estudiada por Ivanov en [Iva84] y puede consultarse [HSSTN20] para más información al respecto.



## Capítulo 2

# Teorema de Realización de Nielsen.

En 1932, J. Nielsen formuló la pregunta de si los subgrupos finitos del grupo modular pueden actuar sobre  $S_g$  por difeomorfismos, esto es, si todo grupo finito  $G$  se puede levantar de manera isomorfa a un grupo  $\tilde{G} \subset \text{Diff}(S_g)$ . En el caso de una superficie orientable  $S_g$  sin puntos marcados, Nielsen resolvió parcialmente este problema para grupos cíclicos, otros casos especiales fueron estudiados por distintos autores durante varios años, ver [Zie81]. Es bien conocido que para  $g \geq 2$  la superficie  $S_g$  admite distintas métricas hiperbólicas de curvatura constante  $-1$  y en este contexto S. Kerckhoff en [Ker83] dio una respuesta positiva al *problema de realización de Nielsen*.

**Teorema 2.0.1 (Kerckhoff [Ker83])** *Todo subgrupo finito de  $\text{Mod}(S_g)$  puede realizarse como un grupo de isometrías de alguna estructura hiperbólica en  $S_g$ .*

Más aún, el grupo modular  $\text{Mod}(S_g)$  actúa mediante pullbacks sobre el espacio de todas las métricas hiperbólicas en  $S_g$ , el llamado espacio de Teichmüller  $\mathcal{T}(S_g)$ . Es bien sabido que el espacio  $\mathcal{T}(S_g)$  es homeomorfo a una bola de dimensión  $6g - 6$  y la acción de  $\text{Mod}(S_g)$  en  $\mathcal{T}(S_g)$  es propia y discontinua. Entonces el Teorema 2.0.1 es equivalente al siguiente:

**Teorema 2.0.2 (Kerckhoff [Ker83])** *Todo subgrupo finito de  $\text{Mod}(S_g)$  actuando en  $\mathcal{T}(S_g)$  tiene un punto fijo en  $\mathcal{T}(S_g)$ .*

En el caso de una superficie orientable  $S_g$  con  $k$  puntos marcados, el espacio de Teichmüller  $\mathcal{T}_k(S_g)$  se define de manera similar y S. Wolpert prueba en [Wol87] que todo subgrupo finito que actúa en el espacio  $\mathcal{T}_k(S_g)$  a través de isometrías de Weil-Petersson, tiene un punto

fijo en  $\mathcal{T}_k(S_g)$ . Se sabe además que el grupo modular  $Mod(S_g; k)$  actúa por isometrías de Weil-Petersson en el espacio  $\mathcal{T}_k(S_g)$ . Más aún, si  $Mod^\pm(S_g; k)$  denota el grupo modular extendido, es decir, el grupo que considera todos los difeomorfismos sin importar si preservan la orientación, entonces todo grupo de isometrías de Weil-Petersson es isomorfo a un subgrupo de  $Mod^\pm(S_g; k)$  (ver [MW02]). Así pues, el resultado de S. Wolpert extiende el problema de realización de Nielsen al caso de subgrupos finitos de  $Mod^\pm(S_g; k)$ :

**Teorema 2.0.3 (Wolpert [Wol87])** *Todo subgrupo finito de  $Mod^\pm(S_g; k)$  que actúa en el espacio de Teichmüller  $\mathcal{T}_k(S_g)$  tiene un punto fijo en  $\mathcal{T}_k(S_g)$ .*

El propósito de este capítulo es extender el resultado anterior al caso del grupo modular de una superficie no orientable con  $k$  puntos marcados  $Mod(N_g; k)$ . Aunque este resultado es conocido entre los expertos, hasta donde sabemos no existe una demostración en la literatura, siendo éste uno de nuestros principales intereses. Es bien sabido que el espacio de Teichmüller se puede definir de manera equivalente vía estructuras conformes o complejas en superficies de Riemann. En este sentido, toda superficie no orientable se puede dotar de una estructura dianalítica que la hace una superficie de Klein y el correspondiente espacio de Teichmüller se define como el espacio cociente de todas las estructuras dianalíticas en  $N_g$  módulo el grupo de difeomorfismos isotópicos a la identidad. Al extender de este modo la teoría de Teichmüller, el problema de realización de Nielsen para el caso no orientable se deduce del caso clásico al pasar a la doble cubierta orientable. El resultado principal es el siguiente:

**Teorema 2.0.4** *Todo subgrupo finito  $G \subset Mod(N_g; k)$  actuando en  $\mathcal{T}_k(N_g)$  fija algún punto de  $\mathcal{T}_k(N_g)$ .*

Por su parte, Morita en [Mor87] y [Mor01] discute el problema de realización de Nielsen en el caso del grupo  $Mod(S_g)$ , preguntandose para que género  $g$  existen secciones  $s : Mod(S_g) \rightarrow Diff^+(S_g)$ . Con sus resultados sobre la cohomología  $H^*(Mod(S_g); \mathbb{Q})$  prueba que no existe una sección para género mayor a 5. Siguiendo argumentos similares al de Morita y usando clases características definidas en el caso no orientable, probamos que no existe una sección  $s : Mod(N_g) \rightarrow Diff(N_g)$  para género  $g \geq 35$ . Se sabe además que para género 3 existe una sección  $s : Mod(N_3) \rightarrow Diff(N_3)$  (ver [MBGA06]), por lo que sería conveniente conocer a partir de que género  $g$  no es posible construir una sección  $s : Mod(N_g) \rightarrow Diff(N_g)$ .

En lo que sigue y tal como mencionamos en el capítulo anterior, denotamos como  $\Sigma = \Sigma_g^k$  a una superficie conexa, sin frontera, de género  $g$ , con un conjunto finito de  $k$  puntos removidos, donde  $g$  y  $k$  satisfacen la ecuación  $2 - g - k < 0$ , a menos que se indique lo contrario (con esta condición garantizamos que las superficies son hiperbólicas). Para enfatizar que una superficie es orientable escribiremos  $S = S_g^k$  y del mismo modo usaremos  $N = N_g^k$  para una superficie no orientable. En la mayoría de los casos, omitiremos el subíndice  $g$  y el superíndice  $k$ , infiriendo ambos del contexto. En algunas partes de este capítulo, omitiremos la notación  $\widetilde{\mathcal{N}}_g^k$  y  $\widetilde{\Gamma}_g^k$  de manera que utilizaremos  $Mod(N_g; k)$  y  $Mod(S_g; k)$ , esto con fines principalmente estéticos. Finalmente, cuando se requiera y sin hacer mención, pensaremos a un elemento  $f \in \widetilde{Diff}(\Sigma_g; k)$  como un elemento de  $Diff(\Sigma_g^k)$  simplemente tomando su restricción a la superficie  $\Sigma_g^k$  removiendo los  $k$  puntos marcados.

## 2.1. Relación entre $\mathcal{N}_g^k$ y $Mod(S_{g-1}; 2k)$

En esta sección, recordaremos la relación establecida en [LGM18] entre los grupos modulares  $\mathcal{N}_g^k$  y  $Mod(S_{g-1}; 2k)$  inducida por la doble cubierta orientable  $\pi : S_{g-1} \rightarrow N_g$ .

Recordemos que en la Sección 1.2 dimos un modelo de la doble cubierta orientable de la superficie de Klein no orientable  $N_g$  que consta de una 3-tupla  $(S_{g-1}, \pi, \sigma)$ , donde  $S_{g-1}$  es una superficie orientable de género  $g$  simétrica respecto a los planos  $xy, yz$  y  $xz$ ,  $\sigma : S_{g-1} \rightarrow S_{g-1}$  es una involución que invierte la orientación dada por

$$\sigma(x, y, z) = (-x, -y - z)$$

y  $\pi : S_{g-1} \rightarrow N_g$  es el mapeo cociente obtenido de la acción de  $\sigma$  en la superficie  $S_{g-1}$ . Para el caso de puntos marcados, consideramos el conjunto distinguido  $X = \{z_1, z_2, \dots, z_k\}$  de  $N_g$  y denotamos como  $\widetilde{X} = \pi^{-1}(X)$ . Si  $\tilde{z}_i \in S_{g-1}$  es tal que  $\pi(\tilde{z}_i) = z_i$ , entonces

$$\widetilde{X} = \{\tilde{z}_1, \sigma(\tilde{z}_1), \tilde{z}_2, \sigma(\tilde{z}_2), \dots, \tilde{z}_k, \sigma(\tilde{z}_k)\}.$$

El siguiente lema prueba que para todo  $f \in \widetilde{Diff}(N_g; k)$  siempre es posible elegir un levantamiento canónico que preserva la orientación. De manera particular, si  $f \in Diff(N_g; k)$  tiene orden finito e impar, entonces su levantamiento canónico pertenece a  $Diff^+(S_{g-1}; 2k)$ , lo cual será útil al estudiar representaciones de subgrupos  $\mathbb{Z}_p \leq \mathcal{N}_g^k$  en el siguiente capítulo.

**Lema 2.1.1** Sea  $(S_{g-1}, \pi, \sigma)$  la doble cubierta orientable de la superficie no orientable  $N_g$  y sea  $f \in \widetilde{\text{Diff}}(N_g; k)$ . Entonces  $f$  admite dos levantamientos uno de los cuales preserva la orientación y será denotado por  $\tilde{f} \in \widetilde{\text{Diff}}^+(S_{g-1}; 2k)$ . Más aún, si  $f \in \text{Diff}(N_g; k)$  y tiene orden impar, entonces  $\tilde{f} \in \text{Diff}^+(S_{g-1}; 2k)$  y tiene el mismo orden que  $f$ . De manera más general, si  $f$  es de orden impar y tiene  $n$  puntos fijos, entonces  $\tilde{f}$  tiene el mismo orden con  $2n$  puntos fijos.

Demostración

Notemos que  $\pi' := f \circ \pi : S_{g-1} \rightarrow N_g$  es una doble cubierta no ramificada de  $N_g$  y es tal que  $\pi' \circ \sigma = \pi'$ . Eligiendo adecuadamente las estructuras en  $S_{g-1}$  y  $N_g$ , tenemos que  $(S_{g-1}, \pi', \sigma)$  es una doble cubierta orientable de  $N_g$ . Así, por la unicidad de la doble cubierta orientable, existe un isomorfismo analítico  $\tilde{f} : S_{g-1} \rightarrow S_{g-1}$  tal que  $\pi' = \pi \circ \tilde{f}$ , i.e. el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} S_{g-1} & \xrightarrow{\tilde{f}} & S_{g-1} \\ \pi \downarrow & \searrow \pi' & \downarrow \pi \\ N_g & \xrightarrow{f} & N_g \end{array}$$

Luego el difeomorfismo  $\tilde{f} : S_{g-1} \rightarrow S_{g-1}$  es un levantamiento de  $f$  que preserva la orientación y claramente  $\sigma \circ f$  es el otro levantamiento. Además, si  $X$  es el conjunto de puntos marcados de  $N_g$  y  $\tilde{X} = \pi^{-1}(X)$  es el conjunto de puntos marcados de  $S_{g-1}$ , entonces por la conmutatividad del diagrama, se tiene que  $\tilde{f}(\tilde{X}) = \tilde{X}$ , de esto se sigue que  $\tilde{f} \in \widetilde{\text{Diff}}^+(S_{g-1}; 2k)$ .

Ahora, supongamos que  $f \in \text{Diff}(N_g; k)$  tiene orden impar digamos  $p$  y consideremos el levantamiento  $\tilde{f} \in \widetilde{\text{Diff}}^+(S_{g-1}; 2k)$ . Como  $f^p = id_{N_g}$ , entonces  $\tilde{f}^p$  es un levantamiento de la identidad (transformación cubriente) por lo cual

$$\tilde{f}^p = \sigma \quad \text{o} \quad \tilde{f}^p = id_{S_{g-1}},$$

pero debido a que  $\tilde{f}$  preserva la orientación y  $p$  es impar, entonces  $\tilde{f}^p$  también preserva la orientación y de esto se sigue que

$$\tilde{f}^p = id_{S_{g-1}}.$$

Por otro lado, recordemos que

$$\tilde{X} = \{\tilde{z}_1, \sigma(\tilde{z}_1), \tilde{z}_2, \sigma(\tilde{z}_2), \dots, \tilde{z}_k, \sigma(\tilde{z}_k)\}$$

y como  $f \in \text{Diff}(N_g; k)$ , entonces para toda  $j = 1, \dots, k$  se tiene que

$$\tilde{f}(\{\tilde{z}_j, \sigma(\tilde{z}_j)\}) = \{\tilde{z}_j, \sigma(\tilde{z}_j)\}.$$

Afirmamos que  $\tilde{f}(\tilde{z}_j) = \tilde{z}_j$  para toda  $j = 1, \dots, k$ . En efecto, supongamos que existiera una  $j_0 = 1, \dots, k$  para el cual  $\tilde{f}(\tilde{z}_{j_0}) = \sigma(\tilde{z}_{j_0})$ . Como  $p$  es impar, entonces  $\tilde{f}^p(\tilde{z}_{j_0}) = \sigma^p(\tilde{z}_{j_0}) = \sigma(\tilde{z}_{j_0})$ , pero  $\tilde{f}^p = \text{id}_{S_{g-1}}$  lo que implica que  $\tilde{z}_{j_0} = \sigma(\tilde{z}_{j_0})$  lo cual no puede suceder debido a que la involución  $\sigma$  no contiene puntos fijos. Así pues, hemos probado que  $\tilde{f}(\tilde{z}_j) = \tilde{z}_j$  para toda  $j = 1, \dots, k$ , i.e.  $\tilde{f} \in \text{Diff}^+(S_{g-1}; 2k)$  lo que prueba la segunda afirmación del lema. La última afirmación es probada de manera similar a la anterior, reemplazando el conjunto de puntos marcados  $X$  con el conjunto de puntos fijos de  $f$ . ■

De acuerdo a la proposición anterior, para cualquier difeomorfismo  $f \in \widetilde{\text{Diff}}(N_g; k)$  existe una forma natural de elegir un levantamiento  $\tilde{f} \in \widetilde{\text{Diff}}^+(S_{g-1}; 2k)$ . Definimos el homomorfismo

$$\rho : \widetilde{\text{Diff}}(N_g; k) \rightarrow \widetilde{\text{Diff}}^+(S_{g-1}; 2k) \quad f \mapsto \tilde{f},$$

y notemos que  $\rho$  induce un homomorfismo en los correspondientes grupos modulares

$$\phi : \text{Mod}(N_g; k) \rightarrow \text{Mod}(S_{g-1}; 2k) \quad [f] \mapsto [\rho(f)].$$

Más aún, si  $p_1 : \widetilde{\text{Diff}}(N_g; k) \rightarrow \text{Mod}(N_g; k)$  y  $p_2 : \widetilde{\text{Diff}}^+(S_{g-1}; 2k) \rightarrow \text{Mod}^+(S_{g-1}; 2k)$  son los homomorfismos que mandan a un difeomorfismo a su clase de isotopía, entonces el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\text{Diff}}(N_g; k) & \xrightarrow{\rho} & \widetilde{\text{Diff}}^+(S_{g-1}; 2k) \\ p_1 \downarrow & & \downarrow p_2 \\ \text{Mod}(N_g; k) & \xrightarrow{\phi} & \text{Mod}(S_{g-1}; 2k) \end{array}$$

El siguiente teorema fue probado en [HT09] en el caso sin puntos marcados, mientras que el caso general fue tratado en [LGGM18]. Lo incluimos aquí ya que tendrá un papel importante en este trabajo.

**Teorema 2.1.2 (Hope-Tillmann [HT09], Daciberg-Guaschi-Maldonado [LGGM18])** *Sea  $N_g$  una superficie no orientable y sea  $S_{g-1}$  su doble cubierta orientable. Entonces:*

1. Si  $g \geq 3$ , entonces  $\phi : Mod(N_g) \rightarrow Mod(S_{g-1})$  es inyectivo.
2. Si  $k \geq 1$ , entonces  $\phi : Mod(N_g; k) \rightarrow Mod(S_{g-1}; 2k)$  es inyectivo para toda  $g \geq 1$ . □

Nuestro interés a lo largo de este trabajo es estudiar el grupo modular puro de una superficie no orientable  $\mathcal{N}_g^k$ . Con tal motivo, restringimos el homomorfismo anterior a nuestro caso de interés vía el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 Diff(N_g; k) & \xrightarrow{\hat{i}} & \widehat{Diff}(N_g; k) & \xrightarrow{\rho} & \widehat{Diff}^+(S_{g-1}; 2k) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{N}_g^k & \xrightarrow{i} & Mod(N_g; k) & \xrightarrow{\phi} & Mod(S_{g-1}; 2k) \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & \tilde{\phi} & & 
 \end{array}$$

Como se puede observar,  $\tilde{\phi} : \mathcal{N}_g^k \rightarrow Mod(S_{g-1}; 2k)$  es inyectivo pues es la composición de dos homomorfismos inyectivos. Con el fin de no agregar notación adicional, emplearemos a  $\phi$  para referirnos tanto a la restricción a  $\mathcal{N}_g^k$  de  $\phi : Mod(N_g; k) \rightarrow Mod(S_{g-1}; 2k)$  así como también al homomorfismo definido en todo  $Mod(N_g; k)$ , entendiéndose la diferencia del contexto en el que trabajemos.

## 2.2. Espacio de Teichmüller de una Superficie de Klein

El espacio de Teichmüller puede ser definido de distintas formas, todas ellas equivalentes entre sí, cada una de las cuales resulta útil para estudiar propiedades específicas de este espacio. Una de estas definiciones es a través de estructuras conformes o complejas en una superficie de Riemann. En este sentido y ya que toda superficie se puede dotar de una estructura dianalítica o de superficie de Klein, resulta natural extender la definición



del espacio de Teichmüller como el cociente del espacio de todas las estructuras dianalíticas módulo el grupo de difeomorfismos isotópicos a la identidad. El objetivo principal de esta sección es establecer una relación entre los espacios de Teichmüller de las superficies orientables y no orientables a través de la doble cubierta orientable.

Sea  $\Sigma = \Sigma_g^k$  una superficie conexa, sin frontera de género  $g$  y con un conjunto de  $k$  puntos marcados y sea  $\widetilde{Diff}_0(\Sigma_g; k)$  el subgrupo de  $\widetilde{Diff}(\Sigma_g; k)$  de todos los difeomorfismos isotópicos a la identidad. Diremos que dos estructuras  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \in \mathcal{M}(\Sigma)$  son *Teichmüller equivalentes* si existe un difeomorfismo  $f \in \widetilde{Diff}_0(\Sigma_g; k)$  tal que el mapeo  $f : (\Sigma, \mathfrak{X}) \rightarrow (\Sigma, \mathfrak{Y})$  es un mapeo dianalítico; si  $\Sigma$  es una superficie de Riemann requerimos de hecho que  $f : (\Sigma, \mathfrak{X}) \rightarrow (\Sigma, \mathfrak{Y})$  sea un mapeo analítico. Equivalentemente, existe  $f \in \widetilde{Diff}_0(\Sigma_g; k)$  tal que  $\mathfrak{X} = f^*\mathfrak{Y}$ .

**Definición 2.2.1** *El espacio de Teichmüller de una superficie de Klein  $\Sigma$ , al cual denotamos por  $\mathcal{T}_k(\Sigma_g)$ , es el espacio de clases de equivalencia de Teichmüller de todas las estructuras en  $\mathcal{M}(\Sigma)$ . Los elementos del espacio  $\mathcal{T}_k(\Sigma_g)$  serán denotados por  $[\mathfrak{X}]$ .*

Notemos que la acción del grupo  $\widetilde{Diff}(\Sigma_g; k)$  en  $\mathcal{M}(\Sigma)$  por pullbacks se restringe a una acción del grupo  $\widetilde{Diff}_0(\Sigma_g; k)$  y podemos ver al espacio de Teichmüller como el cociente

$$\mathcal{T}_k(\Sigma_g) = \mathcal{M}(\Sigma) / \widetilde{Diff}_0(\Sigma_g; k).$$

De este modo, la acción del grupo  $\widetilde{Diff}(\Sigma; k)$  en  $\mathcal{M}(\Sigma)$  induce una acción en  $\mathcal{T}_k(\Sigma_g)$  dada por:

$$\alpha \cdot [\mathfrak{X}] = [f^*\mathfrak{X}],$$

para todo  $\alpha = [f] \in Mod(\Sigma_g; k)$  y  $[\mathfrak{X}] \in \mathcal{T}_k(\Sigma_g)$ . Por otro lado, el conjunto  $\mathcal{M}(\Sigma)$  está dotado de una topología natural y damos a  $\mathcal{T}_k(\Sigma_g)$  la topología cociente, bajo la cual resulta ser homeomorfo a  $\mathbb{R}^{6g-6+2k}$  en el caso de una superficie orientable y a  $\mathbb{R}^{3g-6+2k}$  en el caso de una superficie no orientable (ver [PP16], Teorema 2.2).

Estamos en condiciones de establecer la relación entre los espacios de Teichmüller de una superficie no orientable y orientable. Consideremos la doble cubierta orientable  $(S, \pi, \sigma)$  de una superficie de Klein  $N$  y recordemos que para todo  $\mathfrak{X} \in \mathcal{M}(N)$ , el pullback  $\pi^*\mathfrak{X}$  es la única estructura en  $\mathcal{M}(S)$  tal que el mapeo  $\pi : (S, \pi^*\mathfrak{X}) \rightarrow (N, \mathfrak{X})$  es dianalítico. Dicha asignación induce un mapeo de espacios de Teichmüller:

$$\pi^* : \mathcal{T}_k(N_g) \rightarrow \mathcal{T}_{2k}(S_{g-1}) \quad [\mathfrak{X}] \mapsto [\pi^*\mathfrak{X}],$$

el cual puede usarse para identificar a  $\mathcal{T}_k(N_g)$  como subespacio de  $\mathcal{T}_{2k}(S_{g-1})$  gracias al siguiente resultado.

**Lema 2.2.2** *Sea  $(S, \pi, \sigma)$  la doble cubierta orientable de una superficie de Klein no orientable  $N$ . Entonces el mapeo inducido por la doble cubierta*

$$\pi^* : \mathcal{T}_k(N_g) \rightarrow \mathcal{T}_{2k}(S_{g-1})$$

*es inyectivo.*

Demostración

Sean  $[\mathfrak{X}], [\mathfrak{Y}] \in \mathcal{T}_k(N_g)$  tales que  $\pi^*([\mathfrak{X}]) = \pi^*([\mathfrak{Y}])$ , es decir,  $[\pi^*\mathfrak{X}] = [\pi^*\mathfrak{Y}]$ . Por definición, existe  $h \in \widetilde{Diff}_0(S_{g-1}; 2k)$  tal que  $h : (S, \pi^*\mathfrak{X}) \rightarrow (S, \pi^*\mathfrak{Y})$  es analítico. Consideremos los siguientes mapeos:

$$(S, \pi^*\mathfrak{X}) \xrightarrow{\sigma} (S, \pi^*\mathfrak{X}) \xrightarrow{h} (S, \pi^*\mathfrak{Y}) \xrightarrow{\sigma} (S, \pi^*\mathfrak{Y}).$$

Por la Nota 1.2.14 sabemos que la involución  $\sigma$  es antianalítica con respecto a las estructuras  $\pi^*\mathfrak{X}$  y  $\pi^*\mathfrak{Y}$ , luego la composición  $\sigma \circ h \circ \sigma$  es un mapeo analítico. Por otro lado,  $\sigma \circ h \circ \sigma \simeq \sigma \circ id \circ \sigma \simeq id \simeq h$  y ya que  $h$  y  $\sigma \circ h \circ \sigma$  son analíticos, entonces por la unicidad de los Teoremas de Teichmüller en el caso de puntos marcados (ver [FM12], Teorema 11.8 y [Hub06], Corolario 7.2.3), se tiene que  $\sigma \circ h \circ \sigma = h$ . Así, existe  $\widehat{h} : N \rightarrow N$  tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} (S, \pi^*\mathfrak{X}) & \xrightarrow{h} & (S, \pi^*\mathfrak{Y}) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ (N, \mathfrak{X}) & \xrightarrow{\widehat{h}} & (N, \mathfrak{Y}) \end{array}$$

Ahora bien, como  $\pi \circ h$  y  $\pi$  son dianalíticos, entonces por la Proposición 1.2.6 el mapeo  $\widehat{h} : (N, \mathfrak{X}) \rightarrow (N, \mathfrak{Y})$  es dianalítico. Resta probar que  $\widehat{h} \in \widetilde{Diff}_0(N_g; k)$ . Notemos que el homomorfismo  $\phi : Mod(N_g; k) \rightarrow Mod(S_{g-1}; 2k)$  inducido por la doble cubierta orientable  $\pi : S \rightarrow N$  satisface que

$$\phi([\widehat{h}]) = [h] = 1,$$

pero por el Teorema 2.1.2, se sabe que  $\phi$  es inyectivo y de esto se sigue que  $\widehat{h} \in \widetilde{Diff}_0(N_g; k)$  probando el resultado. ■

En el siguiente resultado se determina la imagen de  $\pi^* : \mathcal{T}_k(N_g) \rightarrow \mathcal{T}_{2k}(S_{g-1})$ . La demostración del caso compacto es encontrada en [SS92], Teorema 4.5.1 y la extendemos aquí al caso de puntos marcados.

**Teorema 2.2.3** *Sea  $(S, \sigma, \pi)$  la doble cubierta orientable de la superficie de Klein no orientable  $N$  y  $\pi^* : \mathcal{T}_k(N_g) \rightarrow \mathcal{T}_{2k}(S_{g-1})$  el mapeo inducido en espacios de Teichmüller por  $\pi : S \rightarrow N$ . Entonces*

$$\pi^*(\mathcal{T}_k(N_g)) = \{[\mathfrak{X}] \in \mathcal{T}_{2k}(S_{g-1}) \mid [\sigma^*\mathfrak{X}] = [\mathfrak{X}]\} =: \mathcal{T}_{2k}(S_{g-1})^{\sigma^*}.$$

### Demostración

Si  $\mathfrak{Y}$  es una estructura dianalítica en  $N$ , entonces la estructura  $\pi^*\mathfrak{Y}$  en  $S$  es tal que la involución  $\sigma : (S, \pi^*\mathfrak{Y}) \rightarrow (S, \pi^*\mathfrak{Y})$  es antianalítica, por lo que  $\sigma^*(\pi^*\mathfrak{Y}) = \pi^*\mathfrak{Y}$ . Esto implica que  $\pi^*[\mathfrak{Y}] = [\pi^*\mathfrak{Y}] \in \mathcal{T}_{2k}(S_{g-1})^{\sigma^*}$ .

Procedemos a probar la contención contraria. Sea  $[\mathfrak{X}] \in \mathcal{T}_{2k}(S_{g-1})$  tal que  $[\sigma^*\mathfrak{X}] = [\mathfrak{X}]$ . Por definición existe  $f \in \widetilde{Diff}_0(S_{g-1}; 2k)$  tal que  $\sigma^*\mathfrak{X} = f^*\mathfrak{X}$ , así tenemos que la siguiente composición es antianalítica

$$(S, \mathfrak{X}) \xrightarrow{\sigma} (S, f^*\mathfrak{X}) \xrightarrow{f} (S, \mathfrak{X}).$$

Sea  $\tau := f \circ \sigma : S \rightarrow S$  y notemos que  $\tau^2 \simeq id$ . No es difícil ver que  $\tau^2 = id$ . Como  $\tau$  es antianalítica con respecto a la estructura  $\mathfrak{X}$ , el grupo  $\langle \tau \rangle$  es un grupo de automorfismos de la superficie de Klein  $(S, \mathfrak{X})$ . Luego, por la Proposición 1.2.8, existe una única estructura dianalítica  $\mathfrak{Y}'$  en la superficie  $N' = S/\langle \tau \rangle$  tal que la proyección canónica  $\pi' : (S, \mathfrak{X}) \rightarrow (N', \mathfrak{Y}')$  es dianalítica.

Por otro lado, fijemos una estructura  $\mathfrak{Z} \in \mathcal{M}(N)$  (digamos la descrita en el Ejemplo 1.2.3) y consideremos el mapeo identidad  $id : (S, \mathfrak{X}) \rightarrow (S, \pi^*\mathfrak{Z})$ . Por [Hub06], Corolario 7.2.3 (ver también [FM12], Teorema 11.8), existe un mapeo de Teichmüller  $h : (S, \pi^*\mathfrak{Z}) \rightarrow (S, \mathfrak{X})$  tal que  $h \simeq id$  y consideremos ahora la siguiente composición

$$(S, \pi^*\mathfrak{Z}) \xrightarrow{\sigma} (S, \pi^*\mathfrak{Z}) \xrightarrow{h} (S, \mathfrak{X}) \xrightarrow{\tau} (S, \mathfrak{X}).$$

Por la nota 1.2.14, la involución  $\sigma$  es antianalítica con respecto a la estructura  $\pi^*\mathfrak{Z}$ . Si  $K_{\tau \circ h \circ \sigma}$  y  $K_h$  denotan las dilataciones de los mapeos  $\tau \circ h \circ \sigma$  y  $h$  respectivamente (ver [FM12,

[Hub06, SS92]), entonces  $K_{\tau \circ h \circ \sigma} = K_h$  ya que  $\tau$  y  $\sigma$  son antianalíticas. Además, notemos que

$$\tau \circ h \circ \sigma \simeq \tau \circ \sigma \simeq f \circ \sigma^2 \simeq id \simeq h,$$

así por la unicidad de los Teoremas de Teichmüller (ver [FM12], Teorema 11.9 y [Hub06], Corolario 7.2.3), se tiene que  $\tau \circ h \circ \sigma = h$ . Luego existe un homeomorfismo  $\widehat{h} : N \cong S/\langle \sigma \rangle \rightarrow N' \cong S/\langle \tau \rangle$  tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{h} & S \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ N & \xrightarrow{\widehat{h}} & N' \end{array}$$

Definamos la estructura dianalítica  $\mathfrak{Y} := \widehat{h}^* \mathfrak{Y}' \in \mathcal{M}(N)$  y consideremos el diagrama conmutativo obtenido del anterior al adicionar las siguientes estructuras

$$\begin{array}{ccc} (S, \pi^* \mathfrak{Y}) & \xrightarrow{h} & (S, \mathfrak{X}) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ (N, \mathfrak{Y}) & \xrightarrow{\widehat{h}} & (N', \mathfrak{Y}') \end{array}$$

Como los mapeos  $\pi$ ,  $\pi'$  y  $\widehat{h}$  son dianalíticos con respecto a las estructuras correspondientes, entonces por [AG71], Teorema 1.4.3 se tiene que  $h : (S, \pi^* \mathfrak{Y}) \rightarrow (S, \mathfrak{X})$  es analítico. Pero  $h \simeq id$ , así por definición  $\mathfrak{X}$  y  $\pi^* \mathfrak{Y}$  son Teichmüller equivalentes y por lo tanto  $[\mathfrak{X}] = [\pi^* \mathfrak{Y}] = \pi^*([\mathfrak{Y}])$ . Esto completa la demostración del teorema. ■

## 2.3. Teorema de realización de Nielsen

Finalmente, en esta sección probamos el teorema de realización de Nielsen para el caso de superficies no orientables con puntos marcados. La idea principal es usar la doble cubierta orientable  $(S, \pi, \sigma)$  de una superficie de Klein  $N$  y las inyecciones de las secciones anteriores:

$$\pi^* : \mathcal{T}_k(N_g) \rightarrow \mathcal{T}_{2k}(S_{g-1}),$$

$$\phi : \text{Mod}(N_g; k) \rightarrow \text{Mod}(S_{g-1}; 2k).$$

Mostraremos primero que dichas funciones son compatibles con respecto a las acciones de los grupos modulares en los respectivos espacios de Teichmüller. Acto seguido, usamos los resultados de S. Kerckhoff y S. Wolpert para completar la demostración.

**Lema 2.3.1** *Para toda  $[\mathfrak{X}] \in \mathcal{T}_k(N_g)$  y  $\alpha \in \text{Mod}(N_g; k)$ , se cumple lo siguiente*

$$\pi^*(\alpha \cdot [\mathfrak{X}]) = \phi(\alpha) \cdot \pi^*([\mathfrak{X}]).$$

Demostración

Notemos que para todo  $\alpha \in \text{Mod}(N_g; k)$ ,  $[\mathfrak{X}] \in \mathcal{T}_k(N_g)$  y  $f \in \widetilde{\text{Diff}}(N_g; k)$  representante de la clase  $\alpha$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \pi^*(\alpha \cdot [\mathfrak{X}]) &= \pi^*([f] \cdot [\mathfrak{X}]) = [\pi^*(f^* \mathfrak{X})] \\ \phi(\alpha) \cdot \pi^*([\mathfrak{X}]) &= [\rho(f)] \cdot [\pi^* \mathfrak{X}] = [\rho(f)^*(\pi^* \mathfrak{X})]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si probamos que para todo  $f \in \widetilde{\text{Diff}}(N_g; k)$  y  $\mathfrak{X} \in \mathcal{M}(N)$  se cumple que

$$\rho(f)^*(\pi^* \mathfrak{X}) = \pi^*(f^* \mathfrak{X}),$$

entonces se sigue el resultado. Así pues, sean  $f \in \widetilde{\text{Diff}}(N_g; k)$  y  $\mathfrak{X} \in \mathcal{M}(N)$ . Por la definición de pullback, los mapeos  $\pi : (S, \pi^* \mathfrak{X}) \rightarrow (N, \mathfrak{X})$  y  $f : (N, f^* \mathfrak{X}) \rightarrow (N, \mathfrak{X})$  son dianalíticos y  $\rho(f) : (S, (\rho(f))^*(\pi^* \mathfrak{X})) \rightarrow (S, \pi^* \mathfrak{X})$  es analítico. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} (S, \rho(f)^*(\pi^* \mathfrak{X})) & \xrightarrow{\rho(f)} & (S, \pi^* \mathfrak{X}) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ (N, f^* \mathfrak{X}) & \xrightarrow{f} & (N, \mathfrak{X}) \end{array}$$

Como los mapeos  $\pi \circ \rho(f)$  y  $f$  son dianalíticos, por la Proposición 1.2.6 se tiene que  $\pi : (S, \rho(f)^*(\pi^* \mathfrak{X})) \rightarrow (N, f^* \mathfrak{X})$  es dianalítica. Así, por la unicidad del pullback se concluye que

$$\pi^*(f^* \mathfrak{X}) = \rho(f)^*(\pi^* \mathfrak{X}),$$

como se quería demostrar. ■

A continuación probamos el resultado principal del capítulo.

**Teorema 2.3.2** *Todo subgrupo finito  $G \subset \text{Mod}(N_g; k)$  actuando en  $\mathcal{T}_k(N_g)$  fija algún punto de  $\mathcal{T}_k(N_g)$ .*

Demostración

Recordemos que la doble cubierta orientable  $(S, \pi, \sigma)$  de la superficie  $N$  induce un homomorfismo inyectivo (ver Teorema 2.1.2)

$$\phi : \text{Mod}(N_g; k) \rightarrow \text{Mod}(S_{g-1}; 2k) \quad [f] \mapsto [\rho(f)].$$

Definimos  $H$  como el subgrupo de  $\text{Mod}^\pm(S_{g-1}; 2k)$  generado por  $\phi(G)$  y  $[\sigma]$ . Notemos que este grupo es isomorfo a  $G \times \mathbb{Z}_2$ , ya que para todo  $f : N_g \rightarrow N_g$  el correspondiente levantamiento  $\tilde{f} : S_{g-1} \rightarrow S_{g-1}$  conmuta con  $\sigma$ . Por el Teorema 2.0.3 existe un elemento  $[\mathfrak{Y}] \in \mathcal{T}_{2k}(S_{g-1})$  que se mantiene fijo bajo la acción de todo elemento de  $H$ . Luego, para toda  $\alpha \in G$  se satisface que

$$\phi(\alpha) \cdot [\mathfrak{Y}] = [\mathfrak{Y}] \tag{2.1}$$

y además

$$[\sigma^* \mathfrak{Y}] = [\sigma] \cdot [\mathfrak{Y}] = [\mathfrak{Y}].$$

Por el Teorema 2.2.3, se sigue que existe un elemento  $[\mathfrak{X}] \in \mathcal{T}_k(N_g)$  tal que

$$[\mathfrak{Y}] = \pi^*([\mathfrak{X}]). \tag{2.2}$$

Afirmamos que dicho  $[\mathfrak{X}]$  es un punto fijo para la acción del grupo  $G$  en el espacio  $\mathcal{T}_k(N_g)$ . En efecto, si  $\alpha \in G$ , entonces por el lema anterior y las ecuaciones (2.1) y (2.2) tenemos que

$$\pi^*(\alpha \cdot [\mathfrak{X}]) = \phi(\alpha) \cdot \pi^*([\mathfrak{X}]) = \phi(\alpha) \cdot [\mathfrak{Y}] = [\mathfrak{Y}] = \pi^*([\mathfrak{X}]).$$

Finalmente, por el Lema 2.2.2 sabemos que  $\pi^*$  es inyectivo y por lo tanto  $\alpha \cdot [\mathfrak{X}] = [\mathfrak{X}]$ . ■

De manera particular:

**Teorema 2.3.3** *Todo subgrupo finito  $G$  de  $\mathcal{N}_g^k$  puede ser realizado como un grupo de automorfismos para una estructura dianalítica  $\mathfrak{X}$  de  $N_g$ .*

Finalmente, los casos especiales que no fueron incluidos en nuestros argumentos, es decir aquellos que no satisfacen la condición  $2 - g - k < 0$ , son los grupos  $\text{Mod}(\mathbb{R}P^2)$ ,  $\text{Mod}(\mathbb{R}P^2; 1)$ ,  $\text{Mod}(\mathbb{R}P^2; 2)$  y  $\text{Mod}(K)$ , donde  $\mathbb{R}P^2$  es el plano proyectivo y  $K$  es la botella de Klein. Sin embargo, todos estos grupos son finitos (ver Sección 1.1 o [Kor02]) y es bien sabido que satisfacen el Teorema de realización de Nielsen.

## 2.4. Sobre la existencia de secciones $s : Mod(N_g) \rightarrow Diff(N_g)$ .

Consideremos una superficie compacta orientable de género  $g$  y sea  $p : Diff^+(S_g) \rightarrow Mod(S_g)$  la proyección natural. El problema de realización de Nielsen es un caso particular de la siguiente pregunta: ¿Para qué subgrupos  $G \subset Mod(S_g)$  existe un homomorfismo  $s : G \rightarrow Diff^+(S_g)$  tal que  $p \circ s = id$ , i.e. para que subgrupos  $G$  la proyección  $p$  admite una sección sobre  $G$ ? Y similarmente en el caso no orientable para  $p : Diff(N_g) \rightarrow Mod(N_g)$ . En este sentido, cuando la superficie es el toro  $T^2$  es bien sabido que  $Mod(T^2) = SL(2, \mathbb{Z})$  y en este caso es posible definir una sección directamente al considerar la acción natural de  $SL(2, \mathbb{Z})$  en el espacio cociente  $T^2 \cong \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ . En el caso de una superficie no orientable, en [MBGA06] se muestra que  $Mod(N_3) = GL(3, \mathbb{Z})$ . Usando este hecho y el blow up del toro visto como variedad algebraica real, se prueba además la existencia de una sección  $s : Mod(N_3) \rightarrow Diff(N_3)$ . Luego todo subgrupo de  $Mod(T^2)$  o de  $Mod(N_3)$  es realizable como un subgrupo de difeomorfismos de  $T^2$  y  $N_3$  respectivamente, sin importar si es finito. Así, es natural preguntarse para que valores de  $g$  es posible construir secciones  $s : Mod(S_g) \rightarrow Diff^+(S_g)$  y  $s : Mod(N_g) \rightarrow Diff(N_g)$ . En esta dirección, S. Morita en [Mor87] y [Mor01] demuestra que para  $g \geq 5$  no existe una sección  $s : Mod(S_g) \rightarrow Diff^+(S_g)$ .

Un problema interesante es tratar de responder dicha cuestión en el caso de las superficies no orientables. El propósito de esta sección, es adaptar el argumento de S. Morita [Mor87] y [Mor01] al caso de superficies no orientables. Probamos que no existe una sección  $s : Mod(N_g) \rightarrow Diff(N_g)$  para género  $g \geq 35$ , donde la estimación del género  $g \geq 35$  es debida a la cota obtenida para el rango estable de  $Mod(N_g)$ . En caso que la cota del rango estable sea mejorada, el resultado abarcaría más casos.

### *Breve recordatorio de clases características de haces de superficies.*

Sea  $p : E \rightarrow B$  un haz de superficies, suave y orientado, al cual denotaremos por  $\xi$  y sea  $T_v E$  el haz tangente vertical. El haz  $T_v E$  es un haz vectorial real orientado de dimensión 2 y así tiene asociada una clase de Euler  $e(T_v(E)) \in H^2(E; \mathbb{Z})$ . Podemos considerar el haz  $T_v E$  como un haz de líneas complejo y de esta forma su clase de Euler coincide con la primera clase de Chern. Definimos las clases de Mumford-Miller-Morita para el haz  $\xi$  por

$$\kappa_n(\xi) := \pi_1(e(T_v E)^{n+1}) \in H^{2n}(B; \mathbb{Z}),$$

donde  $\pi_! : H^*(E; \mathbb{Z}) \rightarrow H^{*-2}(B; \mathbb{Z})$  es el *umkehr map*, o *integración sobre la fibra* (en cohomología). Dicha definición no puede ser generalizada directamente al caso no orientable, pues la clase de Euler y el *umkehr map* sólo existen para haces de superficies orientados. El concepto necesario para tal generalización es el *transfer de Becker-Gottlieb*. En lo que sigue, recordaremos la definición dada en [ERW08].

Sea  $p : E \rightarrow B$  un haz fibrado suave con fibra difeomorfa a una variedad compacta  $F$  (no necesariamente de dimensión 2). El *transfer* es un mapeo estable en la dirección opuesta, de manera más precisa, es un mapeo entre los espectros suspensión

$$\text{tr}_p : \Sigma^\infty B_+ \rightarrow \Sigma^\infty E_+.$$

Recordemos que la cohomología del espectro suspensión  $\Sigma^\infty X_+$  de un espacio  $X$  coincide con la cohomología usual de  $X$ . Así podemos considerar la composición

$$\text{tr}_p^* \circ p^* : H^*(B; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(B; \mathbb{Z})$$

y para todo  $x \in H^*(B; \mathbb{Z})$  tenemos que

$$\text{tr}_p^* \circ p^*(x) = \chi(F) \cdot x,$$

donde  $\chi(F)$  denota la característica de Euler de la fibra. Más aún, si  $q : \tilde{E} \rightarrow E$  es otro haz fibrado con fibras compactas, entonces  $p \circ q$  es también un haz fibrado. En esta situación, la composición de los *transfers* es homotópico a el *transfer* de las composiciones

$$\text{tr}_{p \circ q} \simeq \text{tr}_q \circ \text{tr}_p.$$

El *transfer* de un haz fibrado orientado  $p : E \rightarrow B$  está estrechamente relacionado con el *umkehr map*. Para todo  $x \in H^*(E; \mathbb{Z})$  se tiene que

$$\text{tr}_p^*(x) = p_!(x \cup e(T_v E)).$$

La identidad anterior implica que para las clases de Mumford-Miller-Morita de un haz de superficies orientable  $\xi (p : E \rightarrow B)$ , se tiene

$$\kappa_n(\xi) = \text{tr}_p^*(e(T_v E)^n).$$

Debido a la identidad  $p_1(L) = e(L)^2$  para la clase de Pontrjagin de un haz vectorial orientado de dimensión 2, se tiene que

$$\kappa_{2n}(\xi) = \text{tr}_p^*(p_1(T_v E)^n).$$



De esta forma, las clases  $\kappa_n(\xi)$  pueden ser generalizadas al caso no orientable. N. Wahl define en [Wah07] las clases

$$\zeta_i(\eta) := \text{tr}_p^*(p_1(T_v E)^i) \in H^{4i}(B; \mathbb{Z}),$$

para  $\eta$  un haz de superficies no orientable  $p : E \rightarrow B$ , donde  $p_1(T_v E) \in H^4(E; \mathbb{Z})$  es la primera clase de Pontrjagin del haz tangente vertical.

Existe una estrecha relación entre las clases  $\kappa_i(\xi)$  y  $\zeta_i(\eta)$  cuando tenga sentido la comparación, esto es, tenemos dos haces de superficies sobre el mismo espacio base  $B$  para los que además tenemos definidas las clases  $\kappa_i(\xi)$  y  $\zeta_i(\eta)$ . En este sentido, a partir de un haz de superficies no orientado  $\eta$  con fibra la superficie  $N_g$ , siempre es posible construir un haz de superficies orientado con el mismo espacio base a través de la doble cubierta orientable de modo que ambos haces estén relacionados de manera natural. Con este fin, daremos las siguientes definiciones y recordaremos la relación existente del Teorema 3.1 de [ERW08].

Sea  $\eta$  un haz de superficies  $p : E \rightarrow B$  cuya fibra es la superficie  $N_g$  y su grupo estructural es  $\text{Diff}(N_g)$ . Consideremos el  $\text{Diff}(N_g)$ -haz principal asociado  $Q \rightarrow B$ , el cual tiene la propiedad que  $Q \times_{\text{Diff}(N_g)} N_g \cong E$ . Además, consideremos la doble cubierta orientable  $\pi : S_{g-1} \rightarrow N_g$  y el homomorfismo  $\rho : \text{Diff}(N_g) \rightarrow \text{Diff}(S_{g-1})$  que manda  $f \in \text{Diff}(N_g)$  a su levantamiento que preserva la orientación  $\tilde{f} \in \text{Diff}^+(S_{g-1})$ . El homomorfismo  $\rho$  induce una acción del grupo  $\text{Diff}(N_g)$  en la superficie  $S_{g-1}$  a través de difeomorfismos que preservan la orientación. Definimos el mapeo

$$c : Q \times_{\text{Diff}(N_g)} S_{g-1} \rightarrow Q \times_{\text{Diff}(N_g)} N_g \quad [x, y] \mapsto [x, \pi(y)].$$

Así, tenemos un haz de superficies orientado  $\tilde{\eta}$

$$q : \tilde{E} := Q \times_{\text{Diff}(N_g)} S_{g-1} \rightarrow B$$

dado por la composición  $q = p \circ c$  cuya fibra es la superficie  $S_{g-1}$ .

$$\begin{array}{ccc} \tilde{E} & \xrightarrow{c} & E \\ & \searrow q & \swarrow p \\ & & B \end{array}$$

Llamamos al espacio  $\tilde{E}$  la *doble cubierta orientable fibrada de E* y el haz  $\tilde{\eta}$  será llamado *el haz de superficies orientado inducido por la doble cubierta orientable del haz  $\eta$* . La relación entre ambos haces es la siguiente:

**Teorema 2.4.1 (Ebert-Randall-Williams [ERW08])** *Sea  $\eta$  un haz de superficies no orientable con fibra la superficie  $N_g$  y sea  $\tilde{\eta}$  el haz de superficies orientado inducido por la doble cubierta orientable del haz  $\eta$ . Entonces, para toda  $n \geq 0$  las siguientes relaciones se cumplen:*

1.  $\kappa_{2n}(\tilde{\eta}) = 2 \cdot \zeta_n(\eta)$ .
2.  $2 \cdot \kappa_{2n+1}(\tilde{\eta}) = 0$ .

Denotemos por  $\eta$  el haz universal de superficies no orientado con fibra  $N_g$

$$N_g \rightarrow \text{EDiff}(N_g) \underset{\text{Diff}(N_g)}{\times} N_g \rightarrow \text{BDiff}(N_g)$$

y por  $\zeta$  el haz universal de superficies orientado con fibra  $S_{g-1}$

$$S_{g-1} \rightarrow \text{EDiff}^+(S_{g-1}) \underset{\text{Diff}^+(S_{g-1})}{\times} S_{g-1} \rightarrow \text{BDiff}(S_{g-1})$$

y consideremos las correspondientes clases características características:

$$\zeta_i(\eta) \in H^{4i}(\text{BDiff}(N_g); \mathbb{Z}) \quad \text{y} \quad \kappa_i(\zeta) \in H^{2i}(\text{BDiff}(S_{g-1}); \mathbb{Z}).$$

Recordemos que si  $g \geq 3$ , entonces las proyecciones  $p_1 : \text{Diff}(N_g) \rightarrow \text{Mod}(N_g)$  y  $p_2 : \text{Diff}^+(S_{g-1}) \rightarrow \text{Mod}(S_{g-1})$  inducen equivalencias homotópicas en los espacios clasificantes  $Bp_1 : \text{BDiff}(N_g) \rightarrow \text{BMod}(N_g)$  y  $Bp_2 : \text{BDiff}^+(S_{g-1}) \rightarrow \text{BMod}(S_{g-1})$  (ver [Gra73]) que a su vez inducen isomorfismos en cohomología

$$\begin{aligned} Bp_1^* : H^*(\text{BMod}(N_g); \mathbb{Z}) &\xrightarrow{\cong} H^*(\text{BDiff}(N_g); \mathbb{Z}). \\ Bp_2^* : H^*(\text{BMod}(S_{g-1}); \mathbb{Z}) &\xrightarrow{\cong} H^*(\text{BDiff}^+(S_{g-1}); \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Por otro lado, al ser  $\text{Mod}(N_g)$  y  $\text{Mod}(S_{g-1})$  grupos discretos, entonces existen isomorfismos

$$\begin{aligned} I_1 : H^*(\text{BMod}(N_g); \mathbb{Z}) &\xrightarrow{\cong} H^*(\text{Mod}(N_g); \mathbb{Z}) \\ I_2 : H^*(\text{BMod}(S_{g-1}); \mathbb{Z}) &\xrightarrow{\cong} H^*(\text{Mod}(S_{g-1}); \mathbb{Z}), \end{aligned}$$

Vía estas identificaciones, los haces de superficies universales  $\eta$  y  $\zeta$  y sus correspondientes clases  $\zeta_i(\eta) \in H^{4i}(\text{BDiff}(N_g); \mathbb{Z})$  y  $\kappa_i(\zeta) \in H^{2i}(\text{BDiff}^+(S_{g-1}); \mathbb{Z})$  corresponden a clases de la cohomología de  $H^{4i}(\text{Mod}(N_g); \mathbb{Z})$  y  $H^{2i}(\text{Mod}(S_{g-1}); \mathbb{Z})$  respectivamente, las cuales denotaremos como  $\zeta_i$  y  $\kappa_i$  y llamaremos *clases universales*. De manera explícita, las clases  $\zeta_i$  y  $\kappa_i$  están definidas por

$$\begin{aligned} \zeta_i &:= I_1((Bp_1^*)^{-1}(\zeta_i(\eta))) \in H^{4i}(\text{Mod}(N_g); \mathbb{Z}) \\ \kappa_i &:= I_2((Bp_2^*)^{-1}(\kappa_i(\zeta))) \in H^{2i}(\text{Mod}(S_{g-1}); \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Es conveniente recordar la cohomología racional de  $Mod(N_g)$  en el rango estable. Se sabe que para grados  $* \leq (g-3)/4$  los grupos de cohomología de  $H^*(Mod(N_g); \mathbb{Z})$  son independientes del género  $g$ . Llamamos a este rango de grados el *rango estable*. Combinando los resultados de Galatius, Madsen, Tillmann y Weiss en [GMTW09] y de Wahl en [Wah07] se tiene que el morfismo natural

$$\mathbb{Q}[\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \dots] \rightarrow H^*(Mod(N_g); \mathbb{Q})$$

es un isomorfismo en el rango estable. Particularmente, las clases  $\zeta_i \neq 0$  para  $i \leq (g-3)/4$ . El siguiente resultado provee una relación explícita entre las clases universales de Miller-Morita-Mumford y las clases  $\zeta_i$  definidas en el caso no orientable.

**Lema 2.4.2** *Sea  $\kappa_{2i} \in H^{4i}(Mod(S_{g-1}); \mathbb{Z})$ , entonces*

$$\phi^*(\kappa_{2i}) = 2 \cdot \zeta_i.$$

Demostración

Consideremos el homomorfismo  $\rho : Diff(N_g) \rightarrow Diff^+(S_{g-1})$  dado por mandar a un difeomorfismo  $f$  a su levantamiento que preserva la orientación  $\tilde{f}$ . Sabemos que el homeomorfismo  $\rho$  induce mapeos entre los espacios clasificantes  $B\rho : BDiff(N_g) \rightarrow BDiff^+(S_{g-1})$  y sus espacios totales  $E\rho : EDiff(N_g) \rightarrow EDiff^+(S_{g-1})$ . Recordemos además, que el grupo  $Diff(N_g)$  actúa en  $S_{g-1}$  vía el homomorfismo  $\rho : Diff(N_g) \rightarrow Diff^+(S_{g-1})$ . Luego, como el mapeo  $E\rho \times id : EDiff(N_g) \times S_{g-1} \rightarrow EDiff^+(S_{g-1}) \times S_{g-1}$  preserva las acciones de  $Diff(N_g)$  y  $Diff(S_{g-1})$  en los respectivos espacios induce un mapeo entre los espacios cocientes

$$c' : EDiff(N_g) \times_{Diff(N_g)} S_{g-1} \rightarrow EDiff^+(S_{g-1}) \times_{Diff^+(S_{g-1})} S_{g-1}$$

que da lugar al siguiente diagrama conmutativo de  $S_{g-1}$ -haces de superficies:

$$\begin{array}{ccc} S_{g-1} & \xlongequal{\quad} & S_{g-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ EDiff(N_g) \times_{Diff(N_g)} S_{g-1} & \xrightarrow{c'} & EDiff^+(S_{g-1}) \times_{Diff^+(S_{g-1})} S_{g-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ BDiff(N_g) & \xrightarrow{B\rho} & BDiff^+(S_{g-1}). \end{array}$$

Notemos que el lado derecho del diagrama anterior es el haz universal  $\xi$ , mientras que el lado izquierdo es el haz de superficies orientado  $\tilde{\eta}$  inducido por la doble cubierta orientable del haz  $\eta$ . Así, por la naturalidad de las clases características se tiene que

$$B\rho^*(\kappa_{2i}(\xi)) = \kappa_{2i}(B\rho^*(\xi)) = \kappa_{2i}(\tilde{\eta}),$$

pero el Teorema 2.4.1 implica que

$$\kappa_{2i}(\tilde{\eta}) = 2 \cdot \zeta_i(\eta),$$

luego

$$B\rho^*(\kappa_{2i}(\xi)) = 2 \cdot \zeta_i(\eta). \quad (2.3)$$

Por otro lado, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \text{Diff}(N_g) & \xrightarrow{p_1} & \text{Mod}(N_g) \\ \rho \downarrow & & \downarrow \phi \\ \text{Diff}^+(S_{g-1}) & \xrightarrow{p_2} & \text{Mod}(S_{g-1}) \end{array}$$

induce el siguiente diagrama al pasar a la cohomología de espacios clasificantes

$$\begin{array}{ccc} H^*(B\text{Mod}(S_{g-1}); \mathbb{Z}) & \xrightarrow{Bp_2^*} & H^*(B\text{Diff}^+(S_{g-1}); \mathbb{Z}) \\ B\phi^* \downarrow & & \downarrow B\rho^* \\ H^*(B\text{Mod}(N_g); \mathbb{Z}) & \xrightarrow{Bp_1^*} & H^*(B\text{Diff}(N_g); \mathbb{Z}), \end{array}$$

Como bien sabemos, las proyecciones  $p_1 : \text{Diff}(N_g) \rightarrow \text{Mod}(N_g)$  y  $p_2 : \text{Diff}^+(S_{g-1}) \rightarrow \text{Mod}(S_{g-1})$  inducen equivalencias homotópicas en los espacios clasificantes y por ende los mapeos inducidos  $Bp_1^*$  y  $Bp_2^*$  son isomorfismos para  $g \geq 3$ . Así, la conmutatividad del diagrama anterior implica

$$B\phi^*((Bp_2^*)^{-1}(\kappa_{2i}(\xi))) = (Bp_1^*)^{-1}(B\rho^*(\kappa_{2i}(\xi))),$$

pero por la Ecuación 2.3 se tiene que

$$B\phi^*((Bp_2^*)^{-1}(\kappa_{2i}(\xi))) = (Bp_1^*)^{-1}(2 \cdot \zeta_i(\eta)) = 2 \cdot (Bp_1^*)^{-1}(\zeta_i(\eta)). \quad (2.4)$$

Ahora, puesto que los grupos  $\text{Mod}(N_g)$  y  $\text{Mod}(S_{g-1})$  son grupos discretos, entonces existen isomorfismos

$$\begin{aligned} I_1 : H^*(B\text{Mod}(N_g); \mathbb{Z}) &\xrightarrow{\cong} H^*(\text{Mod}(N_g); \mathbb{Z}) \\ I_2 : H^*(B\text{Mod}(S_{g-1}); \mathbb{Z}) &\xrightarrow{\cong} H^*(\text{Mod}(S_{g-1}); \mathbb{Z}), \end{aligned}$$

los cuales son tales que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 H^*(BMod(S_{g-1}); \mathbb{Z}) & \xrightarrow[\cong]{I_2} & H^*(Mod(S_{g-1}); \mathbb{Z}) \\
 B\phi^* \downarrow & & \downarrow \phi^* \\
 H^*(BMod(N_g); \mathbb{Z}) & \xrightarrow[\cong]{I_1} & H^*(Mod(N_g); \mathbb{Z})
 \end{array}$$

De aquí obtenemos que

$$\phi^*(\kappa_{2i}) = I_1(B\phi^*(I_2^{-1}(\kappa_{2i}))),$$

luego por la definición de la clase universal  $\kappa_{2i} = I_2((Bp_2^*)^{-1}(\kappa_{2i}(\xi)))$  se sigue que

$$\phi^*(\kappa_{2i}) = I_1(B\phi^*((Bp_2^*)^{-1}(\kappa_{2i}(\xi)))),$$

mientras que por la Ecuación 2.4 tenemos

$$\phi^*(\kappa_{2i}) = I_1(2 \cdot (Bp_1^*)^{-1}(\zeta_i(\eta))) = 2 \cdot I_1((Bp_1^*)^{-1}(\zeta_i(\eta)))$$

y finalmente por la definición de la clase universal  $\zeta_i$  concluimos que  $\phi^*(\kappa_{2i}) = 2 \cdot \zeta_i$ . ■

El siguiente lema es similar al Teorema 4.20 de [Mor01] cambiando el contexto a superficies no orientables. Dicho lema será usado en la demostración del teorema principal de la sección.

**Lema 2.4.3** *Sea  $p : Diff(N_g) \rightarrow Mod(N_g)$  la proyección natural y sea  $p^* : H^*(Mod(N_g); \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(Diff_\delta(N_g); \mathbb{Q})$  el homomorfismo inducido en cohomología por la proyección, donde  $Diff_\delta(N_g)$  denota al grupo  $Diff(N_g)$  dotado con la topología discreta. Si  $\zeta_i \in H^{4i}(Mod(N_g); \mathbb{Q})$  es la  $i$ -ésima clase universal, entonces para todo  $i \geq 2$ , se cumple que*

$$p^*(2 \cdot \zeta_i) = 0.$$

### Demostración

Consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 Diff_\delta(N_g) & \xrightarrow{p_1} & Mod(N_g) \\
 \rho \downarrow & & \downarrow \phi \\
 Diff_\delta^+(S_{g-1}) & \xrightarrow{p_2} & Mod(S_{g-1})
 \end{array} \tag{2.5}$$

donde  $Diff_\delta^+(S_{g-1})$  es el grupo  $Diff^+(S_{g-1})$  dotado con la topología discreta. Puesto que  $i \geq 2$ , entonces por el Teorema 4.20 de [Mor01] se tiene que para el homomorfismo inducido

en cohomología por la proyección

$$p_2^* : H^*(\text{Mod}(S_{g-1}); \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(\text{Diff}_\delta^+(S_{g-1}); \mathbb{Z})$$

se cumple que

$$p_2^*(\kappa_{2i}) = 0.$$

Ahora, el diagrama 2.5 se convierte en el siguiente al pasar a cohomología

$$\begin{array}{ccc} H^*(\text{Mod}(S_{g-1}); \mathbb{Q}) & \xrightarrow{p_2^*} & H^*(\text{Diff}_\delta^+(S_{g-1}); \mathbb{Q}) \\ \phi^* \downarrow & & \downarrow \rho^* \\ H^*(\text{Mod}(N_g); \mathbb{Q}) & \xrightarrow{p_1^*} & H^*(\text{Diff}_\delta(N_g); \mathbb{Q}), \end{array}$$

La conmutatividad del diagrama anterior implica que

$$p_1^*(\phi^*(\kappa_{2i})) = \rho^*(p_2^*(\kappa_{2i}))$$

pero  $p_2^*(\kappa_{2i}) = 0$  para  $i \geq 2$ , por lo tanto  $p_1^*(\phi^*(\kappa_{2i})) = 0$  para  $i \geq 2$ . Finalmente, por el lema anterior tenemos que  $\phi^*(\kappa_{2i}) = 2 \cdot \zeta_i$  y con ello concluimos que  $p_1^*(2 \cdot \zeta_i) = 0$ . ■

Finalmente demostramos el resultado principal de la sección.

**Teorema 2.4.4** Si  $g \geq 35$ , entonces la proyección  $p : \text{Diff}(N_g) \rightarrow \text{Mod}(N_g)$  no admite secciones.

#### Demostración

Notemos que si  $g \geq 35$ , entonces la clase  $\zeta_2 \in H^8(\text{Mod}(N_g); \mathbb{Q})$  se encuentra en el rango estable y por tanto es no cero. Supongamos ahora que existe un homomorfismo  $s : \text{Mod}(N_g) \rightarrow \text{Diff}(N_g)$  tal que  $p \circ s = \text{id} : \text{Mod}(N_g) \rightarrow \text{Mod}(N_g)$ . Dotemos a  $\text{Diff}(N_g)$  con la topología discreta y consideremos la clase  $2 \cdot \zeta_2 \in H^8(\text{Mod}(N_g); \mathbb{Q})$ , entonces

$$s^*(p^*(2 \cdot \zeta_2)) = 2 \cdot \zeta_2 \neq 0.$$

Pero esto contradice la conclusión del lema anterior que  $p^*(2 \cdot \zeta_2) = 0$ . ■

## Capítulo 3

# La $p$ torsión y $p$ -periodicidad de $\mathcal{N}_g^k$

En este capítulo, estudiamos la  $p$ -torsión y el fenómeno de  $p$ -periodicidad de la cohomología de los grupos modulares  $\mathcal{N}_g^k$ . La idea que seguimos para estudiar la  $p$ -torsión es la siguiente: por el teorema de realización de Nielsen todo subgrupo  $\mathbb{Z}_p \leq \mathcal{N}_g^k$  actúa en la superficie  $N_g$  por difeomorfismos y vía esta acción obtenemos un cubriente ramificado  $q : N_g \rightarrow N_h$  con  $t$  puntos de ramificación. Asociado a este cubriente tenemos la ecuación de Riemann-Hurwitz

$$g - 2 = p(h - 2) + t(p - 1).$$

De esta forma trasladamos el estudio de la  $p$ -torsión a encontrar soluciones  $(h, t)$  de la ecuación de Riemann-Hurwitz. Por otro lado, probamos que si  $p$  es un primo impar, entonces no es posible tener un subgrupo isomorfo a  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$  en  $\mathcal{N}_g^k$ , lo cual significa que  $\mathcal{N}_g^k$  tiene cohomología  $p$ -periodica (ver 1.4.8). Fijando una estructura de superficie de Klein en  $N_g$  para la cual  $\mathbb{Z}_p \leq \mathcal{N}_g^k$  actúa por autormorfismos, podemos considerar la diferencial en el primer punto marcado  $df_{z_1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  para todo  $f \in \text{Diff}(N_g; k)$ , de este modo se obtiene una representación  $\rho : \text{Diff}(N_g; k) \rightarrow GL_2(\mathbb{R})$ . Restringiendo dicha representación a  $\mathbb{Z}_p$  se prueba que existe una clase no trivial  $(B\rho)^*(c_1) \in H^2(\mathbb{Z}_p; \mathbb{Z})$  y usando el invariante de Yagita obtenemos que el  $p$ -periodo  $p(\mathcal{N}_g^k) \leq 4$ .

Es importante enfatizar que los resultados referentes a la  $p$ -periodicidad de la cohomología de  $\mathcal{N}_g^k$  que a continuación se estudian, implican que el cálculo de la componente  $p$ -primaria de  $\widehat{H}^*(\mathcal{N}_g^k; \mathbb{Z})$  se reduce a encontrar la cohomología de los normalizadores de subgrupos de orden  $p$  y las clases de conjugación de éstos (ver Teorema 1.4.17). Por tal motivo, en los siguientes capítulos clasificamos a las clases de conjugación de subgrupos de orden

$p$  de  $\mathcal{N}_g^k$ , así como también estudiaremos a los normalizadores de estos subgrupos, con esto podemos establecer un método que nos permite determinar  $\widehat{H}^*(\mathcal{N}_g^k; \mathbb{Z})_{(p)}$  salvo ciertas consideraciones que se deben de tener en cuenta.

### 3.1. Subgrupos de orden $p$ en $\mathcal{N}_g^k$

En esta sección estableceremos condiciones que garantizan la existencia de subgrupos de orden  $p$  en el grupo modular de superficies no orientable  $\mathcal{N}_g^k$ , similares a las obtenidas en el caso orientable por Q. Lu en [Lu01]. Dichas condiciones son establecidas a través de la ecuación de Riemann-Hurwitz. Clásicamente la ecuación de Riemann-Hurwitz se encuentra asociada al cubriente ramificado obtenido de la acción por homeomorfismos de un grupo  $G$  en una superficie  $S$ . Ésta nos da una relación entre los puntos de ramificación, el género de la superficie  $S$ , el género de la superficie cociente obtenida por la acción del grupo  $G$  y el orden de  $G$  de la siguiente forma:

$$\chi(S) = |G| \cdot \chi(S/G) - |G| \cdot \sum_{i=1}^t \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) \quad (3.1)$$

donde  $t$  es el número de puntos de ramificación y  $m_i$  es el índice de ramificación de cada punto de ramificación. A partir de la ecuación anterior, daremos condiciones que garantizan la existencia de subgrupos de orden  $p$  en el grupo modular  $\mathcal{N}_g^k$ , donde  $p$  es un primo impar.

**Proposición 3.1.1** *Si  $\mathcal{N}_g$  contiene un subgrupo de orden  $p$ , entonces la ecuación*

$$g - 2 = p(h - 2) + t(p - 1)$$

*tiene una solución entera no negativa con  $h \geq 1$ .*

#### Demostración

Sea  $\mathbb{Z}_p$  un subgrupo cíclico de orden  $p$  de  $\mathcal{N}_g^k$ , entonces por el Teorema 2.3.3 existe  $f \in \text{Diff}(N_g)$  tal que  $\langle f \rangle \cong \mathbb{Z}_p$ . El grupo  $\langle f \rangle$  actúa en la superficie  $N_g$  por difeomorfismos y el espacio de órbitas es homeomorfo a una superficie no orientable de género  $h$ . Sea  $t$  el número de puntos fijos del difeomorfismo  $f : N_g \rightarrow N_g$  y consideremos el cubriente ramificado:

$$q : N_g \rightarrow N_g / \langle f \rangle \cong N_h.$$



Notemos que cada punto de ramificación tiene índice de ramificación igual a  $p$  y así, por la ecuación de Riemann-Hurwitz (Ecuación 3.1) se tiene que

$$g - 2 = p(h - 1) + t(p - 1),$$

concluyendo la demostración. ■

Como se aprecia en el siguiente resultado, el recíproco de la proposición anterior es válido en el caso que  $t \neq 0$ .

**Proposición 3.1.2** *Si  $g - 2 = p(h - 2) + t(p - 1)$  tiene solución entera  $(h, t)$  con  $h, t \geq 1$ , entonces  $\mathcal{N}_g^k$  contiene un subgrupo de orden  $p$ .*

Demostración

Sea  $\Gamma$  el grupo NEC cuya presentación algebraica es:

$$\Gamma = \langle d_1, \dots, d_h, x_1, \dots, x_t \mid x_1^p = x_2^p = \dots = x_t^p = x_1 \cdot \dots \cdot x_t \cdot d_1^2 \cdot \dots \cdot d_h^2 = 1 \rangle.$$

Consideremos la presentación del grupo  $\mathbb{Z}_p = \langle y \mid y^p = 1 \rangle$  y definamos un homomorfismo

$$\theta : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_p$$

dado en los generadores de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \theta(x_1) &= y^{1+\epsilon} \\ \theta(x_i) &= y \quad i = 2, \dots, t. \\ \theta(d_1) &= y^{\frac{-t-\epsilon}{2}} \\ \theta(d_j) &= 1 \quad j = 2, \dots, h. \end{aligned}$$

donde  $\epsilon = 1$  si  $t$  es impar o  $\epsilon = 0$  si  $t$  es par. Puesto que  $\theta : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_p$  preserva todas las relaciones del grupo  $\Gamma$ ,  $\theta$  es en efecto un homomorfismo y además es suprayectivo. Por otro lado, como  $\ker(\theta)$  es un subgrupo normal de  $\Gamma$ , se tiene que  $\ker(\theta)$  es un grupo NEC. Más aún, por el Teorema 1.2.2 de [BGC<sup>+</sup>10] y ya que el orden de la imagen de los generadores elípticos  $x_i$  es igual a  $p$ , entonces el orden de los periodos propios de  $\ker(\theta)$  es igual a 1, es decir, no existen generadores elípticos en  $\ker(\theta)$ . Así pues, la signatura de  $\ker(\theta)$  es igual a

$$\text{sig}(\ker(\theta)) = (g'; -; [-]).$$

Luego  $\ker(\theta)$  es isomorfo al grupo fundamental  $\pi_1(N_{g'})$  de una superficie no orientable de género  $g'$ . Por otro lado, por la ecuación de Riemann-Hurwitz para grupos NEC (ver Teorema 1.1.8 de [BGC<sup>+</sup>10]), se tiene que

$$\begin{aligned}\text{Área}(\ker(\theta)) &= \text{Área}(\Gamma) \cdot [\Gamma : \ker(\theta)] \\ g' - 2 &= \left( h - 2 + t \left( 1 - \frac{1}{p} \right) \right) \cdot p \\ g' - 2 &= p(h - 2) + t(p - 1)\end{aligned}$$

y puesto que  $g - 2 = p(h - 2) + t(p - 1)$ , se tiene que  $g' = g$ . Así,  $\ker(\theta)$  es un grupo NEC de superficies, isomorfo al grupo fundamental  $\pi_1(N_g)$ , por lo cual  $N_g \cong \mathbb{H}^2 / \ker(\theta)$  lo que implica que  $N_g$  se encuentra dotada de una estructura de superficie de Klein  $\mathfrak{X}$ . Finalmente, hemos definido un epimorfismo  $\theta : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_p$  de tal forma que  $\ker(\theta)$  es isomorfo al grupo fundamental  $\pi_1(N_g)$ , luego por el Teorema 1 de [Sin71] tenemos que  $\mathbb{Z}_p$  es un subgrupo de  $\text{Aut}(N_g; \mathfrak{X})$  y por tanto es un subgrupo de  $\mathcal{N}_g$ . ■

En el caso del grupo modular con puntos marcados  $\mathcal{N}_g^k$  tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 3.1.3**  $\mathcal{N}_g^k$  contiene un subgrupo de orden  $p$  si y sólo si la ecuación  $g - 2 = p(h - 2) + t(p - 1)$  tiene una solución  $(h, t)$  con  $h \geq 1$ ,  $t \geq k$  enteros.

### Demostración

*Suficiencia.* La demostración es similar a la Proposición 3.1.2 y la omitimos.

*Necesidad.* Probemos el resultado por inducción sobre el número de puntos marcados. Supongamos que  $\mathcal{N}_g^1$  tiene un subgrupo de orden  $p$  digamos  $G \cong \mathbb{Z}_p$ . Tenemos la siguiente sucesión exacta de Birman para el caso no orientable

$$1 \rightarrow \pi_1(N_g) \xrightarrow{i} \mathcal{N}_g^1 \xrightarrow{s} \mathcal{N}_g \rightarrow 1.$$

Afirmamos que  $s(y) \neq 1$  para todo  $y \in G \setminus \{1\}$ . En efecto, supongamos que existe  $y \in G \setminus \{1\}$  tal que  $s(y) = 1$ , entonces  $y \in \ker(s)$ . Ahora, por la exactitud de la sucesión exacta, existe  $z \in \pi_1(N_g)$  tal que  $i(z) = y$ , notemos además que  $z \neq 1$  pues  $y \neq 1$  y la función  $i : \pi_1(N_g) \rightarrow \mathcal{N}_g^1$  es inyectiva. Por otro lado, tenemos que  $i(z^p) = y^p = 1$  y entonces por la inyectividad de  $i$  se sigue que  $z^p = 1$ , lo cual es una contradicción, pues  $\pi_1(N_g)$  es libre de torsión. Con ello concluimos con la afirmación:  $s(y) \neq 1$  para todo  $y \in G \setminus \{1\}$ .

Por lo anterior, tenemos que  $s|_G : G \rightarrow s(G)$  es un isomorfismo. Luego  $\mathcal{N}_g$  contiene un subgrupo de orden  $p$ . Así, por la Proposición 3.1.1 existen  $h \geq 1$  y  $t \geq 1$  que satisfacen la ecuación de Riemann-Hurwitz

$$g - 2 = p(h - 2) + t(p - 1),$$

lo que prueba el resultado para  $\mathcal{N}_g^1$ .

Inductivamente, supongamos que el resultado es válido para  $\mathcal{N}_g^k$ , es decir, si  $\mathcal{N}_g^k$  contiene un subgrupo de orden  $p$ , entonces la ecuación  $g - 2 = p(h - 2) + t(p - 1)$  tiene una solución entera con  $t \geq k, h \geq 1$ . Probaremos el resultado para  $\mathcal{N}_g^{k+1}$ .

Supongamos que  $\mathcal{N}_g^{k+1}$  contiene un subgrupo de orden  $p$ . Como en el caso  $\mathcal{N}_g^1$ , tenemos una sucesión exacta de Birman

$$1 \rightarrow \pi_1(N_g^k) \rightarrow \mathcal{N}_g^{k+1} \rightarrow \mathcal{N}_g^k \rightarrow 1,$$

donde  $N_g^k$  es la superficie obtenida de  $N_g$  removiendo los primeros  $k$  puntos marcados. Argumentos similares al caso  $\mathcal{N}_g^1$ , prueban que  $\mathcal{N}_g^k$  tiene un subgrupo de orden  $p$ . La demostración se sigue de la hipótesis de inducción. ■

Para ejemplificar el uso del resultado anterior, a continuación mencionamos algunos ejemplos de grupos modulares  $\mathcal{N}_g^k$  donde existen subgrupos de orden  $p$ .

#### Ejemplo 3.1.4

▷ **Género  $g = p$ .** La ecuación  $g - 2 = p(h - 2) + t(p - 1)$  tiene una única solución  $(h, t) = (1, 2)$ . Así, el grupo modular  $\mathcal{N}_p^k$  tiene un subgrupo de orden  $p$  cuando  $k = 0, 1, 2$ . Se sigue que todo difeomorfismo de orden  $p$  en  $N_p$  tiene 2 puntos fijos y el espacio de orbitas de la acción del difeomorfismos sobre la superficie  $N_p$  es  $\mathbb{R}P^2$ . Para  $k \geq 3$ , el grupo modular  $\mathcal{N}_p^k$  no tiene un subgrupo de orden  $p$ . En la Figura 3.1 observamos el caso de una superficie de género 3 junto con un elemento de orden 3 y el espacio de órbitas de la acción.

▷ **Género  $g = p + 1$ .** La ecuación  $g - 2 = p(h - 2) + t(p - 1)$  tiene una única solución  $(h, t) = (2, 1)$ . Así, el grupo modular  $\mathcal{N}_{p+1}^k$  tiene un subgrupo de orden  $p$  cuando  $k = 0, 1$ . Se sigue que todo difeomorfismo de orden  $p$  en  $N_{p+1}$  tiene 1 punto fijo y el espacio de órbitas de la acción del difeomorfismos sobre la superficie  $N_{p+1}$  es la botella de Klein. Para  $k \geq 2$ , el grupo modular  $\mathcal{N}_{p+1}^k$  no tiene un subgrupo de orden  $p$ .

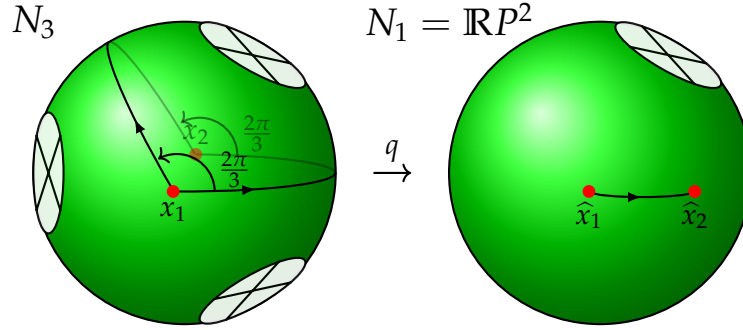


Figura 3.1: Elemento de orden 3 y efecto de la acción en la superficie  $N_3$ .

▷ **Género**  $g = 2p - 1$ . La ecuación  $g - 2 = p(h - 2) + t(p - 1)$  tiene una única solución  $(h, t) = (1, 3)$ . El grupo modular  $\mathcal{N}_{2p-1}^k$  tiene un subgrupo de orden  $p$  para  $k = 0, 1, 2, 3$ . Para  $k \geq 4$ , el grupo modular  $\mathcal{N}_{2p-1}^k$  no tiene un subgrupo de orden  $p$ .  $\square$

### 3.2. Representaciones y Cohomología

Dado un  $G \leq \text{Diff}(N_g; 1)$ , identificamos el espacio tangente  $T_{z_1}N_g$  con  $\mathbb{R}^2$  y definimos una representación  $\rho : G \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{R})$  dada por la diferencial en el punto  $z_1$ :

$$\rho : G \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{R}) \quad f \mapsto df_{z_1} : T_{z_1}N_g \rightarrow T_{z_1}N_g. \quad (3.2)$$

Al pasar a cohomología de espacios clasificantes, tenemos un morfismo inducido

$$H^*(B\text{GL}_2(\mathbb{R}), \mathbb{Z}) \xrightarrow{(B\rho)^*} H^*(BG; \mathbb{Z}).$$

Cuando el grupo  $G$  es finito, hay un estudio extensivo de tales representaciones y en particular existen clases de cohomología asociadas a la representación  $\rho$  (ver [Mis94] y [Tho86]). El objetivo principal de la sección es encontrar un elemento  $\zeta \in H^*(B\text{GL}_2(\mathbb{R}); \mathbb{Z})$  de tal forma que  $(B\rho)^*(\zeta) \neq 0$  en el caso de un grupo  $G$  de orden  $p$ . Con este fin, el siguiente resultado muestra que en tal situación, se tiene que la representación en cuestión es fiel.

**Lema 3.2.1** Sean  $\Sigma_g$  una superficie cerrada y  $G$  un subgrupo finito de  $\text{Diff}(\Sigma_g; 1)$ . Identifiquemos a  $T_{z_1}\Sigma_g$  con  $\mathbb{R}^2$ . Definimos una representación de  $G$

$$\rho : G \rightarrow GL_2(\mathbb{R})$$

por  $\rho(f) := df_{z_1} : T_{z_1}S \rightarrow T_{z_1}S$  para  $f \in G$ . Entonces  $\rho$  es una representación fiel.

Demostración

Como  $z_1 \in \Sigma_g$  es un punto fijo bajo los elementos de  $G$ , entonces existe una estructura dianalítica  $\mathfrak{X}$  (o analítica) y una carta dianalítica  $(D_{z_1}, \phi)$  de tal forma que para todo  $g \in G$ , si  $n = |G|$  y  $\Delta$  denota el disco unitario en el plano complejo  $\mathbb{C}$ , entonces  $\phi \circ g \circ \phi^{-1} : \Delta \rightarrow \Delta$  es el mapeo dado por

$$z \mapsto e^{2\pi mi/n} z \quad \text{para algún } m \in \{0, 1, \dots, n-1\},$$

salvo una composición con una reflexión en el plano complejo. Notemos que así, la acción en el espacio tangente de cualquier elemento  $\rho(f) : T_{z_1}\Sigma_g \rightarrow T_{z_1}\Sigma_g$  se encuentra determinada por una rotación  $z \mapsto e^{i\theta} z$  donde  $\theta = 2\pi m/n$  y el entero  $m$  depende del mapeo  $f$ . Así pues, si  $\rho(f) = id$ , entonces  $m = 0$  y de esto se sigue que  $f = id$  en  $D_{z_1}$ . Debido a que el difeomorfismo  $f$  fija un conjunto infinito de puntos, entonces en virtud de (1) Proposición 4.1.1 tenemos que  $f = id$  en  $N_g$ , concluyendo el resultado. ■

**Teorema 3.2.2** Sea  $\rho : G \rightarrow GL_2^+(\mathbb{R})$  una representación fiel de un grupo cíclico  $G$  no trivial, entonces existe  $c_1 \in H^2(BGL_2^+(\mathbb{R}); \mathbb{Z})$  tal que

$$(B\rho)^*(c_1) \neq 0 \quad \text{en } H^2(BG; \mathbb{Z}).$$

Demostración

Como  $\rho$  es una representación fiel de un grupo finito  $G$  en  $GL_2^+(\mathbb{R})$ , entonces  $\text{Im}(\rho)$  es un subgrupo finito compacto de  $GL_2^+(\mathbb{R})$  y puesto que  $SO(2)$  es el subgrupo compacto maximal de  $GL_2^+(\mathbb{R})$  se tiene que existe  $A \in GL_2^+(\mathbb{R})$  tal que  $A \cdot \text{Im}(\rho) \cdot A^{-1} \subset SO(2)$ . Definimos la representación  $\rho' : G \rightarrow SO(2)$  dada por

$$\rho'(g) := A \cdot \rho(g) \cdot A^{-1} \quad \text{para todo } g \in G.$$

Si  $i : SO(2) \hookrightarrow GL_2^+(\mathbb{R})$  es la inclusión usual,  $\Phi_A : GL_2^+(\mathbb{R}) \rightarrow GL_2^+(\mathbb{R})$  es el isomorfismo de conjugación por la matriz  $A$  y  $f : SO(2) \rightarrow U(1)$  es el homeomorfismo canónico entre  $SO(2)$  y  $U(1) = S^1$ , entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 G & \xrightarrow{\rho} & GL_2^+(\mathbb{R}) & \xrightarrow[\cong]{\Phi_A} & GL_2^+(\mathbb{R}) \\
 & \searrow \rho' & & \nearrow i & \\
 & & SO(2) & \xrightarrow[\cong]{f} & U(1) \hookrightarrow GL_1(\mathbb{C})
 \end{array}$$

Consideremos la representación unitaria definida como la composición  $f \circ \rho' : G \rightarrow U(1)$ . Como  $\rho$  es fiel, entonces  $f \circ \rho'$  es fiel, luego por [Mis94] Sección 4.1, se tiene que existe  $\tilde{c}_1 \in H^2(BU(1); \mathbb{Z})$  (la primera clase universal de Chern) tal que

$$(B(f \circ \rho'))^*(\tilde{c}_1) \neq 0, \text{ es decir } (Bf \circ B\rho')^*(\tilde{c}_1) \neq 0 \text{ en } H^2(BG; \mathbb{Z}),$$

esto implica que

$$(B\rho')^*((Bf)^*(\tilde{c}_1)) \neq 0 \text{ donde } (Bf)^*(\tilde{c}_1) \in H^2(BSO(2); \mathbb{Z}).$$

Puesto que  $f^* : H^*(BU(1); \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(BSO(2); \mathbb{Z})$  es un isomorfismo, entonces  $(Bf)^*(\tilde{c}_1)$  es el generador de  $H^2(BSO(2); \mathbb{Z})$ . Por otro lado, como el mapeo inducido por la inclusión  $i : SO(2) \hookrightarrow GL_2^+(\mathbb{R})$  en espacios clasificantes es una equivalencia homotópica, entonces existe  $c_1 \in H^2(BGL_2^+(\mathbb{R}); \mathbb{Z})$  tal que

$$(Bi)^*(c_1) = (Bf)^*(\tilde{c}_1).$$

Lo anterior implica que:

$$(B\rho')^*((Bi)^*(c_1)) = (B\rho')^*((Bf)^*(\tilde{c}_1)) \neq 0 \tag{3.3}$$

El siguiente diagrama muestra lo descrito anteriormente.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \neq 0 & & H^2(BG; \mathbb{Z}) & \xleftarrow{(B\rho)^*} & H^2(BGL_2^+(\mathbb{R}); \mathbb{Z}) & \xleftarrow{(B\Phi)^*} & H^2(BGL_2^+(\mathbb{R}); \mathbb{Z}) & & c_1 \\
 & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow \\
 & & & & H^2(BSO(2); \mathbb{Z}) & \xleftarrow{(Bf)^*} & H^2(BU(1); \mathbb{Z}) & & \\
 & & & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow \\
 & & & & (Bf)^*(\tilde{c}_1) & \xleftarrow{(Bf)^*} & \tilde{c}_1 & & 
 \end{array}$$

Notemos ahora que  $(B\Phi)^*(c_1) = \pm c_1$  ya que  $\Phi : GL_2^+(\mathbb{R}) \rightarrow GL_2^+(\mathbb{R})$  es un isomorfismo. De esto último y de la conmutatividad del diagrama anterior se tiene que

$$(B\rho')^*((Bi)^*(c_1)) = (B\rho)^*((B\Phi)^*(c_1)) = (B\rho)^*(\pm c_1) = \pm(B\rho)^*(c_1),$$

pero por la Ecuación 3.3, el lado izquierdo de la ecuación es no cero. Así concluimos que

$$(B\rho)^*(c_1) \neq 0,$$

demostrando lo deseado. ■

### 3.3. La $p$ -periodicidad de $\mathcal{N}_g^k$ .

En secciones anteriores, establecimos las condiciones que se requieren para que el grupo modular de una superficie no orientable  $\mathcal{N}_g^k$  tenga un subgrupo de orden  $p$  y a su vez estudiamos la representación obtenida por la diferencial de los subgrupos de orden  $p$  de  $\text{Diff}(N_g; 1)$ . Continuando con el estudio de las propiedades cohomológicas de  $\mathcal{N}_g^k$ , estableceremos que su dimensión cohomológica virtual es finita y con ello su cohomología de Farrell está definida. Probamos que si el grupo modular  $\mathcal{N}_g^k$  tiene un subgrupo de orden  $p$ , entonces  $\mathcal{N}_g^k$  tiene cohomología  $p$ -periódica. Más aún, demostraremos que si  $\mathcal{N}_g^k$  contiene  $p$ -torsión, entonces el  $p$ -periodo de  $\mathcal{N}_g^k$  es menor o igual a 4. Para ver esto último, usaremos los resultados de las secciones anteriores referentes a las representaciones de subgrupos de orden  $p$  en conjunto con el invariante de Yagita.

**Teorema 3.3.1** *El grupo  $\mathcal{N}_g^1$  tiene las siguientes propiedades:*

1.  $\text{vcd}(\mathcal{N}_g^1) < \infty$
2. Para todo  $g > 2$  y todo primo impar  $p$ , si  $\mathcal{N}_g^1$  tiene  $p$ -torsión, entonces  $\mathcal{N}_g^1$  tiene cohomología  $p$ -periódica.

#### Demostración

(1) Tenemos una sucesión exacta de Birman

$$1 \rightarrow \pi_1(N_g) \rightarrow \mathcal{N}_g^1 \rightarrow \mathcal{N}_g \rightarrow 1 \quad \text{para } g > 2.$$

Por el Corolario 2.2 de [HT09] sabemos que  $\text{vcd}(\mathcal{N}_g) < \infty$ , además, es bien conocido que  $\text{cd}(\pi_1(N_g)) < \infty$ . El resultado se sigue de la Proposición 1.3.5.

(2) Supongamos que  $\mathcal{N}_g^1$  no tiene cohomología  $p$ -periódica para algún primo impar  $p$ . Entonces por (3) de la Proposición 1.4.8 existe

$$\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \subset \mathcal{N}_g^1,$$

es decir,  $\langle \alpha \rangle \times \langle \tau \rangle \subset \mathcal{N}_g^1$ . Por el Teorema de Realización de Nielsen, existen  $f, f_0 \in \text{Diff}(N_g, 1)$  representantes de  $\alpha$  y  $\tau$  respectivamente, tales que

$$f^p = 1; \quad f_0^p = 1; \quad f_0 f = f f_0.$$

Por la Proposición 2.1.1, existen  $\tilde{f}, \tilde{f}_0 \in \text{Diff}^+(S_{g-1}; 2)$  levantamientos a la doble cubierta orientable  $\pi : S_{g-1} \rightarrow N_g$  de  $f$  y  $f_0$  respectivamente, los cuales preservan la orientación. No es difícil ver que los levantamientos satisfacen

$$\tilde{f}^p = 1, \quad \tilde{f}_0^p = 1, \quad \text{y} \quad \tilde{f}_0 \tilde{f} = \tilde{f} \tilde{f}_0.$$

Además, notemos que los puntos marcados en  $S_{g-1}$  son las dos preimágenes bajo  $\pi : S_{g-1} \rightarrow N_g$  de  $z_1$ . Denotemos a una de éstas como  $\tilde{z}_1 \in S_{g-1}$ . Así pues,  $\langle \tilde{f} \rangle \times \langle \tilde{f}_0 \rangle \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$  actúa en  $S_{g-1}$  como grupo de difeomorfismos que fijan  $\tilde{z}_1$ . Fijemos una base en  $T_{\tilde{z}_1} S_{g-1} \cong \mathbb{R}^2$ , entonces tenemos una representación de  $\langle \tilde{f} \rangle \times \langle \tilde{f}_0 \rangle$  vía la diferencial

$$\rho : \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \rightarrow GL_2^+(\mathbb{R}).$$

Por el Lema 3.2.1 se tiene que  $\rho$  es una representación fiel, luego

$$\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \cong \rho(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p) \subset GL_2^+(\mathbb{R}).$$

Como  $SO(2)$  es el subgrupo maximal compacto de  $GL_2^+(\mathbb{R})$ , entonces existe  $A \in GL_2^+(\mathbb{R})$  tal que

$$\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \cong A \cdot \rho(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p) \cdot A^{-1} \subset SO(2),$$

pero esto es una contradicción debido a que todos los subgrupos finitos de  $SO(2)$  son cíclicos. Por tanto concluimos que si  $\mathcal{N}_g^1$  contiene un subgrupo de orden  $p$ , entonces  $\mathcal{N}_g^1$  tiene cohomología  $p$ -periódica. ■



En el caso general del grupo modular  $\mathcal{N}_g^k$  con  $k$  puntos marcados, la demostración de la primera parte del teorema anterior se sigue usando la sucesión exacta de Birman

$$1 \rightarrow \pi_1(\mathcal{N}_g^k) \rightarrow \mathcal{N}_g^{k+1} \rightarrow \mathcal{N}_g^k \rightarrow 1,$$

mientras que para la segunda parte el argumento es similar al descrito en el teorema anterior. Por completez lo incluimos en el siguiente resultado y su demostración será omitida.

**Teorema 3.3.2** *El grupo  $\mathcal{N}_g^k$  tiene las siguientes propiedades:*

1.  $\text{vcd}(\mathcal{N}_g^k) < \infty$
2. *Para todo  $g > 2$  y todo primo impar  $p$ , si  $\mathcal{N}_g^k$  tiene  $p$ -torsión, entonces  $\mathcal{N}_g^k$  tiene cohomología  $p$ -periódica. ■*

De este modo hemos establecido que el grupo  $\mathcal{N}_g^k$  tiene cohomología  $p$ -periódica siempre que exista un subgrupo de orden  $p$ , mientras que en el Teorema 3.1.3 establecimos condiciones que garantizan la existencia de subgrupos de orden  $p$  en  $\mathcal{N}_g^k$ , cubriéndose así los primeros objetivos del capítulo. La siguiente parte está dedicada a estudiar el  $p$ -periodo de la cohomología de Farrell  $\widehat{H}^*(\mathcal{N}_g^k; \mathbb{Z})$ , que como mencionamos al inicio de la sección, con el uso del invariante de Yagita y los resultados sobre representaciones y cohomología de la sección anterior, nos permitirán obtener una cota para el  $p$ -periodo. Posteriormente, en el siguiente capítulo probaremos que el  $p$ -periodo es igual a 4, adaptando nuevas herramientas al caso no orientable. Con este propósito, enunciaremos una serie de lemas que nos ayudarán a determinar el  $p$ -periodo.

**Lema 3.3.3** *Sea  $i : SO(2) \hookrightarrow SO(3)$  la inclusión natural y  $Bi : BSO(2) \rightarrow BSO(3)$  el correspondiente mapeo entre espacios clasificantes. Entonces el homomorfismo inducido en  $H^4(-; \mathbb{Z})$*

$$(Bi)^* : H^4(BSO(3); \mathbb{Z}) \rightarrow H^4(BSO(2); \mathbb{Z}),$$

*es un isomorfismo.*

### Demostración

Consideremos la fibración inducida por la inclusión  $i : SO(2) \rightarrow SO(3)$  al pasar a espacios clasificantes:

$$S^2 \rightarrow BSO(2) \xrightarrow{Bi} BSO(3).$$

Un resultado clásico (ver [Bro82a] y [Fes83]) determina la cohomología entera de  $BSO(3)$ :

$$H^*(BSO(3); \mathbb{Z}) \cong \frac{\mathbb{Z}[v_3, p'_4]}{\langle 2v_3 \rangle},$$

donde los subíndices indican el grado de cada generador. Por otro lado, la cohomología de la fibra es

$$H^*(S^2; \mathbb{Z}) = \frac{\mathbb{Z}[u_2]}{\langle u_2^2 \rangle},$$

con  $u_2 \in H^2(S^2; \mathbb{Z})$ . Al considerar la sucesión espectral de Serre en cohomología, el término  $E_2$  está dado por:

$$E_2^{p,q} \cong H^p(BSO(2); H^q(S^2; \mathbb{Z})).$$

Sabemos que dicha sucesión converge a  $H^*(BSO(3); \mathbb{Z})$  y esto implica que existe una filtración de  $H^4(BSO(2); \mathbb{Z})$

$$0 \subset E_\infty^{4,0} = F^4 H^4 \subset F^3 H^4 \subset F^2 H^4 \subset F^1 H^4 \subset F^0 H^4 = H^4(BSO(2); \mathbb{Z})$$

de tal forma que

$$E_\infty^{p,4-p} \cong F^p H^4 / F^{p+1} H^4 \quad \text{para } 0 \leq p \leq 4.$$

Como bien sabemos, el homomorfismo inducido  $(Bi)^* : H^4(BSO(3); \mathbb{Z}) \rightarrow H^4(BSO(2); \mathbb{Z})$  es la composición del homomorfismo de arista

$$e_{BSO(3)} : H^4(BSO(3); \mathbb{Z}) \cong E_2^{4,0} \twoheadrightarrow E_3^{4,0} \twoheadrightarrow E_4^{4,0} \twoheadrightarrow E_\infty^{4,0}$$

y de la inclusión obtenida por la filtración

$$E_\infty^{4,0} = F^4 H^4 \hookrightarrow F^0 H^4 = H^4(BSO(2); \mathbb{Z}).$$

Analizando las primeras páginas de la sucesión espectral, vemos que el homomorfismo de arista  $e_{BSO(3)} : H^4(BSO(3)) \cong E_2^{4,0} \twoheadrightarrow E_\infty^{4,0}$  es la identidad, pues todos los diferenciales que llegan a  $E_r^{4,0}$  son cero como se aprecia en los siguientes diagramas.

		Página $E_2^{*,*}$							Página $E_3^{*,*}$				
$H^*(S^2; \mathbb{Z})$	4	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	
	3	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	
	2	$\mathbb{Z}$	0	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	2	$\mathbb{Z}$	0	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	
	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	
	0	$\mathbb{Z}$	0	0	$\mathbb{Z}_2$	$E_2^{4,0} \cong \mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	$\mathbb{Z}_2$	$E_3^{4,0} = E_2^{4,0}$	
		0	1	2	3	4			0	1	2	3	4
		$H^*(BSO(3); \mathbb{Z})$							$H^*(BSO(3); \mathbb{Z})$				

		Página $E_\infty^{*,*}$					
$H^*(S^2; \mathbb{Z})$	4	$H^4/F^1H^4 \cong E_\infty^{0,4} =$					
	4	0	0	0	0	0	
	3	0	$0 = E_\infty^{1,3} \cong F^1H^4/F^2H^4$			0	0
	2	$\mathbb{Z}$	0	$0 = E_\infty^{2,2} \cong F^2H^4/F^3H^4$		$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$
	1	0	0	0	$0 = E_\infty^{3,1} \cong F^3H^4/F^4H^4$		0
0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}_2$	$E_4^{4,0} = E_2^{4,0} \cong F^4H^4$	
		0	1	2	3	4	

Finalmente, de la página  $E_\infty$  mostrada en el diagrama anterior obtenemos que

$$E_\infty^{4,0} = F^4H^4 = F^3H^4 = F^2H^4 = F^1H^4 = F^0H^4 = H^4(BSO(2); \mathbb{Z}),$$

por lo que la inclusión  $E_\infty^{4,0} = F^4H^4 \hookrightarrow F^0H^4 = H^4(BSO(2); \mathbb{Z})$  es la identidad. Con ello, probamos que la composición

$$H^4(BSO(3); \mathbb{Z}) \cong E_2^{4,0} \rightarrow E_\infty^{4,0} \hookrightarrow H^4(BSO(2); \mathbb{Z})$$

es la identidad, concluyendo que  $(Bi)^* : H^4(BSO(3); \mathbb{Z}) \rightarrow H^4(BSO(2); \mathbb{Z})$  es un isomorfismo. ■

Es bien sabido que

$$H^*(BSO(2); \mathbb{Z}) \cong H^*(BU(1); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[c_1]$$

con  $c_1$  (de grado 2), es la primera clase de Chern. Con la notación anterior, tenemos el siguiente lema.

**Lema 3.3.4** *Existe un elemento  $p_4 \in H^4(BO(2); \mathbb{Z})$  no cero, tal que  $(B\iota)^*(p_4) = c_1^2$ , donde  $\iota$  es el mapeo de inclusión  $SO(2) \hookrightarrow O(2)$ .*

Demostración

Consideremos el siguiente triángulo conmutativo

$$\begin{array}{ccc} SO(2) & & \\ \downarrow \iota & \searrow i & \\ O(2) & \xrightarrow{\rho} & SO(3) \end{array}$$

donde  $\rho : O(2) \rightarrow SO(3)$  es el homomorfismo definido por

$$\rho(A) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \det(A) \end{pmatrix}$$

y la función  $i : SO(2) \rightarrow SO(3)$  es la inclusión usual. Por el lema anterior se tiene que  $(Bi)^* : H^4(BSO(3); \mathbb{Z}) \rightarrow H^4(BSO(2); \mathbb{Z})$  es un isomorfismo, entonces para  $c_1^2 \in H^4(BSO(2); \mathbb{Z})$  existe  $p'_4 \in H^4(BSO(3); \mathbb{Z})$  tal que

$$(Bi)^*(p'_4) = c_1^2.$$

Del triángulo anterior, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo al pasar a cohomología de espacios clasificantes:

$$\begin{array}{ccccc} & & H^4(BSO(2); \mathbb{Z}) & & c_1^2 \\ & & \uparrow (Bi)^* & \swarrow (Bi)^* & \swarrow \\ & & H^4(BO(2); \mathbb{Z}) & \xleftarrow{(B\rho)^*} & H^4(BSO(3); \mathbb{Z}) & \xleftarrow{p'_4} & c_1^2 \end{array}$$

Finalmente, al definir  $p_4 := (B\rho)^*(p'_4)$  se tiene que  $p_4 \in H^4(BO(2); \mathbb{Z})$  y cumple con la propiedad deseada. ■

**Proposición 3.3.5** *Sea  $p_1 : \text{Diff}(N_g; 1) \rightarrow \mathcal{N}_g^1$  la proyección natural. Entonces el mapeo inducido en espacios clasificantes  $Bp_1 : \text{BDiff}(N_g; 1) \rightarrow B\mathcal{N}_g^1$  es una equivalencia homotópica para  $g > 2$ .*

Demostración

Consideremos la fibración

$$\text{Diff}(N_g; 1) \xrightarrow{i} \text{Diff}(N_g) \xrightarrow{r} N_g$$

donde  $r$  es el mapeo de evaluación el punto  $z_1$ . Tenemos una sucesión exacta larga en grupos de homotopía:

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \pi_n(\text{Diff}(N_g; 1), id) \rightarrow \pi_n(\text{Diff}(N_g), id) \rightarrow \pi_n(N_g, z_1) \rightarrow \pi_{n-1}(\text{Diff}(N_g; 1), id) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow \pi_1(\text{Diff}(N_g; 1), id) \rightarrow \pi_1(\text{Diff}(N_g), id) \rightarrow \pi_1(N_g, z_1) \rightarrow \\ \rightarrow \pi_0(\text{Diff}(N_g; 1), id) \rightarrow \pi_0(\text{Diff}(N_g), id) \rightarrow \pi_0(N_g, z_1). \end{aligned}$$

En [Gra73] se prueba que la componente conexa de la identidad en  $\text{Diff}(N_g)$  es contractible para  $g > 2$ , por lo que  $\pi_i(\text{Diff}(N_g), id) = 0$  para  $i \geq 1$  y  $g > 2$ . También sabemos que  $\pi_i(N_g, z_1) = 0$  para  $i \neq 1$ . Así, de la sucesión exacta se tiene que  $\pi_i(\text{Diff}(N_g; 1), id) = 0$  para todo  $i \geq 1$  y  $g > 2$ , dicho de otra forma

$$\pi_i(\text{Diff}_0(N_g; 1)) = 0 \quad \text{para todo } i \geq 0 \text{ y } g > 2.$$

Puesto que a  $\text{Diff}_0(N_g; 1)$  tiene el mismo tipo de homotopía de un CW-complejo, entonces  $\text{Diff}_0(N_g; 1)$  es contractible. Así pues,  $p_1 : \text{Diff}(N_g; 1) \rightarrow \mathcal{N}_g^1$  es una equivalencia homotópica y por lo tanto induce una equivalencia homotópica en los espacios clasificantes  $Bp_1 : \text{BDiff}(N_g; 1) \rightarrow B\mathcal{N}_g^1$ , demostrando el resultado. ■

**Observación 3.3.6** *Es importante notar que el resultado anterior establece un isomorfismo en cohomología*

$$H^*(\text{BDiff}(N_g; 1); \mathbb{Z}) \cong H^*(\mathcal{N}_g^1; \mathbb{Z}),$$

*Dicho isomorfismo nos da una conexión entre las clases características de haces de superficies con fibra una superficie no orientable  $N_g$  con un punto marcado y la cohomología de los grupos modulares  $\mathcal{N}_g^1$ . A través de esta conexión, podemos definir clases características de haces de superficies vía la cohomología de  $H^*(\mathcal{N}_g^1; \mathbb{Z})$  o viceversa, es decir, podemos encontrar elementos en la cohomología de  $H^*(\mathcal{N}_g^1; \mathbb{Z})$  vía clases características de haces de superficies.*

El siguiente resultado restringe de manera considerable el  $p$ -periodo de los grupos modulares de superficies no orientables  $\mathcal{N}_g^k$ . La demostración usa fuertemente el invariante de Yagita en conjunto con las representaciones de subgrupos de orden  $p$  del grupo modular  $\mathcal{N}_g^k$ . Más aún, en el siguiente capítulo probaremos que el  $p$ -periodo del grupo modular  $\mathcal{N}_g^k$  es de hecho igual a 4.

**Teorema 3.3.7** *Sea  $g > 2$ , y  $p$  un primo impar. Si  $\mathcal{N}_g^1$  contiene  $p$ -torsión, entonces el  $p$ -periodo de  $\mathcal{N}_g^1$  es menor o igual a 4, es decir,  $p(\mathcal{N}_g^1) \leq 4$ .*

### Demostración

Recordemos que el invariante de Yagita para un grupo  $\Gamma$  con dimensión cohomológica virtual finita está definido como

$$Y(\Gamma, p) := 2 \cdot \text{mcm}\{m(\pi, \Gamma) \mid \pi \leq \Gamma \text{ y } \pi \cong \mathbb{Z}_p\},$$

donde  $m(\pi, \Gamma) = m$  es el valor máximo tal que

$$\text{Im}(H^*(\Gamma; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(\pi; \mathbb{F}_p)) \subset \mathbb{F}_p(u^m) \subset H^*(\pi; \mathbb{F}_p),$$

con  $u$  generador de  $H^2(\pi; \mathbb{F}_p)$ . Mostraremos que el invariante de Yagita  $Y(\mathcal{N}_g^1, p) \leq 4$ .

Sea  $\pi \leq \mathcal{N}_g^1$  tal que  $\pi \cong \mathbb{Z}_p$ . Por el Teorema de Realización de Nielsen, existe un subgrupo  $\tilde{\pi} < \text{Diff}(N_g; 1)$  tal que  $\tilde{\pi} \cong \pi$  y se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\pi} & \xrightarrow{\tilde{i}} & \text{Diff}(N_g; 1) \\ \tilde{p}_1 \cong \downarrow & & \downarrow p_1 \\ \pi & \xrightarrow{i} & \mathcal{N}_g^1 \end{array}$$

donde  $p_1 : \text{Diff}(N_g; 1) \rightarrow \pi_0(\text{Diff}(N_g; 1)) = \mathcal{N}_g^1$  es la proyección natural y  $\tilde{p}_1$  es la restricción de  $p_1$  al grupo  $\tilde{\pi}$ .

Fijamos una base en el espacio tangente  $T_{z_1} N_g$  identificándolo con  $\mathbb{R}^2$ . Obtenemos así una representación dada por mandar un difeomorfismo de  $\text{Diff}(N_g; 1)$  en su diferencial en el punto  $z_1$ :

$$\rho : \text{Diff}(N_g, 1) \rightarrow GL_2(\mathbb{R}), \quad f \mapsto df_{z_1}.$$

Definimos la representación

$$\bar{\rho} := \rho \circ \tilde{i} : \tilde{\pi} \xrightarrow{\tilde{i}} \text{Diff}(N_g; 1) \xrightarrow{\rho} GL_2(\mathbb{R}).$$

Como  $\tilde{\pi}$  es de orden impar, entonces  $\text{Im}(\bar{\rho}) \subset GL_2^+(\mathbb{R})$ . Denotemos por  $\tilde{\rho} : \tilde{\pi} \rightarrow GL_2^+(\mathbb{R})$  a la representación restringida a su imagen, teniéndose el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\pi} & \xrightarrow{\tilde{\rho}} & GL_2^+(\mathbb{R}) \\ \tilde{i} \downarrow & & \downarrow \iota \\ \text{Diff}(N_g; 1) & \xrightarrow{\rho} & GL_2(\mathbb{R}) \end{array}$$

donde  $\iota : GL_2^+(\mathbb{R}) \rightarrow GL_2(\mathbb{R})$  es la inclusión usual. Por el Lema 3.2.1 tenemos que la representación  $\tilde{\rho}$  es fiel, entonces por el Lema 3.2.2 existe una clase  $c_1 \in H^2(BGL_2^+; \mathbb{Z})$  tal que

$$v := (B\tilde{\rho})^*(c_1) \neq 0 \text{ en } H^2(\tilde{\pi}; \mathbb{Z}). \quad (3.4)$$

Notemos que las inclusiones  $SO(2) \rightarrow GL_2^+(\mathbb{R})$  y  $O(2) \rightarrow GL_2(\mathbb{R})$  inducen equivalencias homotópicas en espacios clasificantes que conmutan con  $B\iota : BGL_2^+(\mathbb{R}) \rightarrow BGL_2(\mathbb{R})$ . Así, por el Lema 3.3.4 existe  $p'_4 \in H^4(BGL_2(\mathbb{R}); \mathbb{Z})$  tal que

$$(B\iota)^*(p'_4) = c_1^2. \quad (3.5)$$

Consideremos el diagrama obtenido al pasar a cohomología de espacios clasificantes:

$$\begin{array}{ccc} H^4(B\tilde{\pi}; \mathbb{Z}) & \xleftarrow{(B\tilde{\rho})^*} & H^4(BGL_2^+(\mathbb{R}); \mathbb{Z}) \\ (B\tilde{i})^* \uparrow & & \uparrow (B\iota)^* \\ H^4(B\text{Diff}(N_g; 1); \mathbb{Z}) & \xleftarrow{(B\rho)^*} & H^4(BGL_2(\mathbb{R}); \mathbb{Z}) \end{array}$$

Definamos

$$p_4 := (B\rho)^*(p'_4) \text{ en } H^4(B\text{Diff}(N_g; 1); \mathbb{Z}).$$

Por la conmutatividad del diagrama anterior se tiene que

$$B\tilde{i}^*(p_4) = (B\tilde{i})^*((B\rho)^*(p'_4)) = (B\tilde{\rho})^*((B\iota)^*(p'_4)),$$

así por las Ecuaciones 3.4 y 3.5 tenemos

$$B\tilde{i}^*(p_4) = (B\tilde{\rho})^*(c_1^2) = v^2 \neq 0 \text{ en } H^4(B\tilde{\pi}; \mathbb{Z}).$$

Ahora, consideremos el siguiente diagrama conmutativo de espacios clasificantes:

$$\begin{array}{ccc} B\tilde{\pi} & \xrightarrow{B\tilde{i}} & BDiff(N_g; 1) \\ \cong \downarrow B\tilde{\rho}_1 & & Bp_1 \downarrow \simeq \\ B\pi & \xrightarrow{Bi} & B\mathcal{N}_g^1 \end{array}$$

Por la Proposición 3.3.5, el mapeo vertical del lado derecho es una equivalencia homotópica y por tanto induce un isomorfismo en cohomología, mientras que el inducido por el mapeo vertical del lado izquierdo es un isomorfismo. Relacionamos a  $p_4$  y  $v$  con sus respectivas imágenes en  $H^4(B\mathcal{N}_g^1; \mathbb{Z})$  y  $H^2(B\pi; \mathbb{Z})$  respectivamente; del mismo modo los identificamos con las correspondientes clases  $w' \in H^4(\mathcal{N}_g^1; \mathbb{Z})$  y  $w \in H^2(\pi; \mathbb{Z})$  y así se tiene que

$$i^*(w') = w^2 \neq 0 \text{ en } H^4(\pi; \mathbb{Z}).$$

De esto último concluimos que las únicas posibilidades para  $m(\pi, \mathcal{N}_g^1)$  son los valores 1 y 2 puesto que si  $u$  es el generador de  $H^2(\pi; \mathbb{F}_p)$ , entonces

$$\text{Im}(H^*(\mathcal{N}_g^1; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(\pi; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(\pi; \mathbb{F}_p)) \subset \mathbb{F}_p[u^2] \subset \mathbb{F}_p[u]$$

o bien

$$\text{Im}(H^*(\mathcal{N}_g^1; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(\pi; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(\pi; \mathbb{F}_p)) \subset \mathbb{F}_p[u].$$

Como  $\pi$  fue cualquier subgrupo de orden primo  $p$ , por la definición del invariante de Yagita se tiene que  $Y(\mathcal{N}_g^1, p) \leq 4$ . Así por el Teorema 1.4.15 concluimos que

$$p(\mathcal{N}_g^1) \leq 4$$

como se quería demostrar. ■



Finalmente, acotamos el  $p$ -periodo de  $\mathcal{N}_g^k$  para  $k$  arbitrario.

**Teorema 3.3.8** *Sea  $g > 2$  y  $p$  un primo impar. Si  $\mathcal{N}_g^k$  contiene un subgrupo de orden  $p$ , entonces el  $p$ -periodo de  $\mathcal{N}_g^k$  es menor o igual a 4, es decir,  $p(\mathcal{N}_g^k) \leq 4$ .*

Demostración

Probemos el resultado por inducción sobre el número de puntos marcados.

El caso  $k = 1$  es probado en el teorema anterior. Supongamos que el resultado es válido para  $\mathcal{N}_g^k$ , es decir, si  $\mathcal{N}_g^k$  contiene un subgrupo de orden  $p$ , entonces el  $p$ -periodo de  $\mathcal{N}_g^k$  es menor o igual a 4. Consideremos la sucesión exacta de Birman

$$1 \rightarrow \pi_1(N_g^k) \rightarrow \mathcal{N}_g^{k+1} \rightarrow \mathcal{N}_g^k \rightarrow 1,$$

donde  $N_g^k$  es la superficie obtenida de  $N_g$  removiendo los  $k$  puntos marcados. Por la Proposición 1.4.16 tenemos que  $p(\mathcal{N}_g^{k+1}) \mid p(\mathcal{N}_g^k)$  y puesto que por hipótesis de inducción  $\mathcal{N}_g^k$  es menor que 4, entonces  $p(\mathcal{N}_g^{k+1}) \leq 4$ . Por inducción concluimos lo deseado. ■



## Capítulo 4

# Clases de Conjugación

El propósito de este capítulo es determinar las clases de conjugación de los subgrupos de orden  $p$  de  $\mathcal{N}_g^k$ . En este sentido, en el caso de una superficie orientable Jacob Nielsen en [Nie37] introdujo los datos de punto fijo para cualquier homeomorfismo  $f : S_g \rightarrow S_g$  de orden finito y probó que dos homeomorfismos de orden  $p$  son conjugados si y sólo si tienen los mismos datos de punto fijo, estableciendo así una primera conexión con las clases de conjugación:

**Teorema (Nielsen [Nie37])** *Dos elementos de orden  $p$  son conjugados en  $\text{Homeo}^+(S_g)$  si y sólo si tienen los mismos datos de punto fijo. El mismo resultado es válido en el caso de  $\text{Homeo}^+(S_g, k)$ .*

Usando el hecho que todo subgrupo de orden  $p$  de  $\Gamma_g^k$  es realizado por un difeomorfismo del mismo orden, combinado con la invarianza homotópica de los datos de punto fijo, se puede extender el resultado de Nielsen al caso de los elementos de orden  $p$  de  $\Gamma_g^k$ .

**Teorema (Xia [Xia90], Lu [Lu98])** *Dos elementos de orden  $p$  en  $\Gamma_g^k$  son conjugados si y sólo si tienen los mismos datos de punto fijo.*

Este último resultado establece una relación entre los datos de punto fijo y las clases de conjugación de subgrupos de orden  $p$ , trasladando el problema de determinar las clases de conjugación a un problema puramente combinatorio.

En este capítulo generalizamos los resultados anteriores al caso de superficies no orientables. Con este fin, definimos los datos de punto fijo para un elemento de orden primo impar

$p$  de  $\text{Homeo}(N_g)$  e introducimos una relación de congruencia que nos permitirá comparar los datos de punto fijo. Usando el Teorema de Realización de Nielsen en el caso no orientable, extendemos nuestra definición a cualquier elemento de orden  $p$  de  $\mathcal{N}_g^k$ , con ello extendemos el teorema anterior al grupo modular  $\mathcal{N}_g^k$ . Si la pareja  $(h, t)$  satisface la ecuación de Riemann-Hurwitz  $(g - 2) = p(h - 2) + t(p - 1)$ , probamos que existe una correspondencia biyectiva entre las clases de conjugación de subgrupos de orden  $p$  de  $\mathcal{N}_g^k$  y las clases de congruencia de las  $t$ -tuplas  $(1, \beta_2, \dots, \beta_k \mid \beta_{k+1}, \dots, \beta_t)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Clases de congruencia de } t - \text{tuplas} \\ (1, \beta_2, \dots, \beta_k \mid \beta_{k+1}, \dots, \beta_t) \\ \text{con } 0 < \beta_j < p \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Clases de conjugación de subgrupos} \\ \text{de orden } p \text{ en } \mathcal{N}_g^k \text{ que} \\ \text{actúan en } N_g \text{ dejando } t \text{ puntos fijos} \end{array} \right\}$$

A partir de esta correspondencia demostramos que el número de clases de conjugación de subgrupos de orden  $p$  de  $\mathcal{N}_g^k$  es igual a  $(p - 1)/2$ . Finalmente, como una aplicación de los resultados descritos en el capítulo completaremos el Teorema 3.3.7 sobre el  $p$ -periodo de  $\mathcal{N}_g^k$ , probando que el  $p$ -periodo siempre es igual a 4 cuando  $\mathcal{N}_g^k$  tiene un subgrupo de orden  $p$ .

## 4.1. Datos de punto fijo en superficies orientables

En esta sección recordamos la noción de datos de punto fijo para un homeomorfismo de orden finito introducida en [Nie37] por J. Nielsen para el caso de una superficie orientable. Recordaremos algunos resultados que nos serán de utilidad para extender la teoría de J. Nielsen al caso de superficies no orientables. La siguiente proposición es un recordatorio sobre resultados de acciones de grupos finitos en una superficie cerrada orientable, ver [FK80]. Es posible trasladar este resultado con algunas modificaciones al caso no orientable.

**Proposición 4.1.1** *Sean  $S$  una superficie cerrada, orientable y  $G$  un grupo finito que actúa vía homeomorfismos que preservan la orientación en  $S$ . Para todo punto  $p \in S$  denotemos por  $G_p$  al estabilizador de la acción de  $G$  en  $S$ . Entonces se cumple lo siguiente.*

1. El conjunto de puntos  $p$  donde el estabilizador  $G_p$  es no trivial es un conjunto finito.
2. Existe una estructura  $\mathfrak{X}$  de superficie de Riemann en  $S$  tal que  $G$  es un grupo de automorfismos para dicha estructura.

3. Para todo  $p \in S$  y todo conjunto abierto  $U_p$  que contiene a  $p$  existe una vecindad de  $p$ ,  $D_p \subset U_p$  homeomorfa a un disco (donde el origen corresponde a  $p$ ) que es estabilizada por  $G_p$ .
4. Para todo punto  $p \in S$ , el estabilizador  $G_p$  es un grupo cíclico.
5. Si  $G$  es un grupo de automorfismos de una estructura  $\mathfrak{X}$ , entonces dado un punto  $p \in S$  existe una carta  $(D_p, \phi) \in \mathfrak{X}$  tal que para todo  $g \in G_p$  se tiene que  $\phi \circ g \circ \phi^{-1} : \Delta \rightarrow \Delta$  es el mapeo dado por

$$z \mapsto e^{2\pi mi/n} z \quad \text{para algún } m \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \quad \text{donde } n = |G_p|,$$

es decir,  $G_p$  actúa como un grupo de rotaciones en  $D_p$ .

En lo que sigue del capítulo, emplearemos la notación  $\text{Homeo}(\Sigma)$  para el grupo de homeomorfismos de la superficie  $\Sigma$ . Si la superficie  $\Sigma$  es orientable, consideramos  $\text{Homeo}^+(\Sigma)$  al subgrupo de  $\text{Homeo}(\Sigma)$  de todos los homeomorfismos que preservan la orientación. Similarmen-  
te tenemos las versiones con puntos marcaods  $\text{Homeo}(\Sigma; k)$  y  $\text{Homeo}^+(\Sigma; k)$ .

*Datos de punto fijo para un elemento  $f \in \text{Homeo}^+(S_g)$  de orden finito.*

Sea  $f$  de orden finito  $n$  y consideremos el grupo el grupo  $G := \langle f \rangle \cong \mathbb{Z}_n$ . Como  $G$  actúa en la superficie  $S_g$  a través de homeomorfismos, entonces por la Proposición 4.1.1 existe una estructura de superficie de Riemann  $\mathfrak{X}$  tal que  $G$  es un grupo de automorfismos. Sea  $\text{Sing}(G)$  el conjunto formado por los elementos de  $S_g$  donde el estabilizador  $G_p$  es no trivial; a los elementos de  $\text{Sing}(G)$  le llamamos *puntos singulares* de  $f$  y por la Proposición 4.1.1 sabemos que este conjunto es finito. Sea  $Y = \{y_1, \dots, y_i\}$  un conjunto de representantes de las órbitas de los elementos de  $\text{Sing}(G)$  para  $y_i$  fijo, si el orden de  $G_{y_i}$  es  $\alpha_i$ , entonces

$$G_{y_i} = \langle f^{n/\alpha_i} \rangle.$$

Con la estructura de superficie de Riemann  $\mathfrak{X}$  existe una carta coordenada  $(D_{y_i}, \phi)$  alrededor de  $y_i$  tal que  $G_{y_i} = \langle f^{n/\alpha_i} \rangle$  actúa por rotaciones en  $D_{y_i}$  (ver (5) Proposición 4.1.1). En particular existe  $m \in \{1, \dots, \alpha_i - 1\}$  tal que el homeomorfismo  $f^{n/\alpha_i}$  se ve como una rotación por un ángulo  $2\pi m/\alpha_i$  en  $D_{y_i}$ .

Sea  $\beta_i$  un entero tal que  $f^{\beta_i n/\alpha_i}$  se ve localmente como una rotación por un ángulo  $2\pi/\alpha_i$  en dirección positiva con respecto a la orientación de la superficie  $S_g$ . Como  $f^{\beta_i n/\alpha_i}$  genera

a  $G_{y_i}$ , se tiene que  $\beta_i$  es primo relativo a  $\alpha_i$ , por lo que no se pierde información al considerar el cociente  $\beta_i/\alpha_i$ . Llevando a cabo este procedimiento para cada punto singular  $y_i$  obtenemos una  $t$ -tupla desordenada

$$(\beta_1/\alpha_1, \beta_2/\alpha_2, \dots, \beta_t/\alpha_t).$$

**Definición 4.1.2** Con la notación anterior para un elemento  $f \in \text{Homeo}^+(S_g)$  de orden finito  $n$ , decimos que la  $t$ -tupla desordenada

$$\sigma(f) = (\beta_1/\alpha_1, \beta_2/\alpha_2, \dots, \beta_t/\alpha_t)$$

son los datos de punto fijo de  $f$ , donde  $t$  es el número de órbitas de los puntos singulares de la acción del homeomorfismo  $f$ . Si  $\text{Sing}(\langle f \rangle)$  es vacío, entonces  $\sigma(f)$  es la tupla vacía.

**Observación 4.1.3** Pensar en  $t$ -tuplas desordenadas significa que dos  $t$ -tuplas  $(\beta_1, \dots, \beta_t)$  y  $(\beta'_1, \dots, \beta'_t)$  se consideran iguales si existe una permutación  $\delta : \{1, \dots, t\} \rightarrow \{1, \dots, t\}$  tal que  $\beta_i = \beta'_{\delta(i)}$  para todo  $i = 1, \dots, t$ .

En adelante, nuestra atención se centrará en estudiar elementos de orden un primo impar  $p$ , por lo que sólo consideraremos homeomorfismos de orden  $p$  de  $S_g$ .

Sea  $f : S_g \rightarrow S_g$  un homeomorfismo de orden un primo impar  $p$ . El conjunto de puntos singulares de la acción de  $G = \langle f \rangle \cong \mathbb{Z}_p$  está formado por los puntos fijos de  $f$ . Notemos que en los puntos singulares  $y \in \text{Sing}(G)$  se tiene que  $G_y = G$ , por tanto  $\alpha_i = p$ . Omitimos  $\alpha_i$  y fijamos las  $\beta_i$  bajo la suposición que  $0 < \beta_i < p$ , para todo  $i$ . Si  $f$  actúa en  $S_g$  dejando  $t$  puntos fijos, entonces podemos escribir

$$\sigma(f) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t),$$

donde  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t)$  son enteros desordenados y  $0 < \beta_i < p$ , para todo  $i$ .

*Datos de punto fijo para  $f \in \text{Homeo}^+(S_g; k)$  de orden un primo impar.*

En el caso de puntos marcados, la definición de los datos de punto fijo es análoga bajo la consideración adicional que los puntos marcados son puntos fijos del homeomorfismo en cuestión y con ello agregamos una condición adicional al comparar dos  $t$ -tuplas de datos de punto fijo.

**Definición 4.1.4** Sea  $f \in \text{Homeo}^+(S_g, k)$  un elemento de orden primo impar  $p$ . Definimos los datos de punto fijo de  $f$  como

$$\sigma_k(f) := (\beta_1, \dots, \beta_k \mid \beta_{k+1}, \dots, \beta_t).$$

donde  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$  es una  $k$ -tupla ordenada correspondiente a los datos de punto fijo de los puntos marcados  $z_1, z_2, \dots, z_k$ , mientras que  $(\beta_{k+1}, \beta_{k+2}, \dots, \beta_t)$  corresponden a los puntos fijos de  $f$  restantes vista como  $(t - k)$ -tupla desordenada con  $0 < \beta_j < p$ , para todo  $j$ . Dos tales  $t$ -tuplas  $(\beta_1, \dots, \beta_k \mid \beta_{k+1}, \dots, \beta_t)$  y  $(\beta'_1, \dots, \beta'_k \mid \beta'_{k+1}, \dots, \beta'_t)$  se consideran iguales, si existe una permutación  $\delta : \{k + 1, \dots, t\} \rightarrow \{k + 1, \dots, t\}$  tal que

$$\begin{aligned} \beta_j &= \beta'_j & \text{para } j = 1, \dots, k. \\ \beta_i &= \beta'_{\delta(i)} & \text{para } i = k + 1, \dots, t. \end{aligned}$$

En [Nie37] J. Nielsen probó el siguiente resultado, estableciendo una relación entre la clase de conjugación de un elemento de orden  $p$  y sus datos de punto fijo.

**Teorema 4.1.5 (Nielsen [Nie37])** Dos elementos de orden  $p$  son conjugados en  $\text{Homeo}^+(S_g)$  si y sólo si tienen los mismos datos de punto fijo. El mismo resultado es válido en el caso de  $\text{Homeo}^+(S_g, k)$ .

Para trasladar el resultado anterior al grupo modular de superficies  $\Gamma_g$  y  $\Gamma_g^k$ , la definición de datos de punto fijo es extendida a cualquier elemento de orden  $p$  de  $\Gamma_g$  y  $\Gamma_g^k$ , vía el siguiente resultado:

**Teorema 4.1.6 (Symons [Sym88])** Si  $f, f' \in \text{Homeo}^+(S_g)$  son dos elementos de orden un primo impar  $p$  que son homotópicos, entonces sus datos de punto fijo son los mismos. El mismo resultado es válido para el caso de  $\text{Homeo}^+(S_g; k)$ .

A partir del resultado anterior y el Teorema de Realización de Nielsen, extendemos la definición de datos de punto fijo al grupo modular de superficies  $\Gamma_g^k$ .

**Definición 4.1.7** Sea  $\alpha \in \Gamma_g$  un elemento de orden  $p$  y sea  $f \in \text{Diff}^+(S_g)$  un elemento de orden  $p$  en la clases de isotopía de  $\alpha$ . Definimos los datos de punto fijo de  $\alpha$  como

$$\sigma(\alpha) := \sigma(f) = (\beta_1, \dots, \beta_t).$$

Análogamente definimos los datos de punto fijo para un elemento  $\alpha \in \Gamma_g^k$  de orden  $p$  como

$$\sigma_k(\alpha) := \sigma_k(f) = (\beta_1, \dots, \beta_k \mid \beta_{k+1}, \dots, \beta_t),$$

donde  $f$  es un representante de orden  $p$  de la clase de isotopía de  $\alpha$ .

Como resultado de los Teoremas 4.1.5 y 4.1.6 junto con la definición anterior, en [Lu98] se enuncia y prueba el siguiente resultado:

**Teorema 4.1.8 (Lu [Lu98])** Sean  $\alpha, \alpha' \in \Gamma_g^k$  dos elementos de orden  $p$ . Entonces  $\alpha$  y  $\alpha'$  son conjugados si y sólo si tienen los mismos datos de punto fijo.

Con estos resultados, Q. Lu en [Lu98] establece una conexión entre las clases de conjugación de subgrupos de orden  $p$  y los datos de punto fijo. Nuestro objetivo en las siguientes secciones será extender la definición de datos de punto fijo a los homeomorfismos de orden  $p$  de  $\text{Homeo}(N_g; k)$ , así como también extender los resultados anteriores al caso no orientable. Esto nos será de utilidad para establecer una conexión entre las clases de conjugación de subgrupos de orden  $p$  y los datos de punto fijo.

Antes de proseguir, veremos como los datos de punto fijo de un elemento  $f \in \text{Homeo}^+(S_g; k)$  de orden  $p$  pueden ser interpretados de otras formas, a saber, vía la acción de monodromía obtenida por la acción de  $f$  en la superficie  $S_g$  y a través de grupos Fuchsianos. Este breve recordatorio tiene como finalidad motivar la definición de los datos de punto fijo en el caso no orientable. Adicionalmente, estas interpretaciones serán de utilidad en las pruebas de las siguientes secciones.

### *Interpretación de los datos de punto fijo vía la acción de monodromía*

Sea  $f \in \text{Homeo}^+(S_g)$  un homeomorfismo de orden  $p$  y sean  $\{z_1, \dots, z_t\}$  los puntos fijos del homeomorfismo  $f$  y

$$\sigma(f) = (\beta_1, \dots, \beta_t).$$

Consideremos la acción del mapeo  $f$  en la superficie  $S_g$ . Como bien sabemos, el cociente por  $f$  es una superficie orientable  $S_h \cong S_g / \langle f \rangle$  donde  $h$  satisface la ecuación de Riemann-Hurwitz  $2g - 2 = p(2h - 2) + t(p - 1)$  y el mapeo cociente

$$q : S_g \rightarrow S_g / \langle f \rangle \cong S_h$$

es un cubriente ramificado en los puntos fijos del homeomorfismo  $f$ . Removiendo de la superficie  $S_g$  los puntos fijos y sus respectivas imágenes en  $S_h$ , obtenemos un mapeo cubriente en el sentido usual  $q : S_g^t \rightarrow S_h^t$ . Fijemos un punto base  $z_0 \in S_g^t$ , entonces tenemos



la siguiente sucesión exacta:

$$1 \rightarrow \pi_1(S_g^t, z_0) \xrightarrow{q_*} \pi_1(S_h^t, q(z_0)) \xrightarrow{\theta} \langle f \rangle = \mathbb{Z}_p \rightarrow 1$$

El homomorfismo  $\theta$  es la acción de monodromía del cubriente. Explícitamente: dado  $[\gamma] \in \pi_1(S_h^t, q(z_0))$ , tomamos un representante  $\gamma : [0, 1] \rightarrow S_h^t$  de la clase  $[\gamma]$  y consideramos el levantamiento  $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow S_g^t$  que cumple que  $\tilde{\gamma}(0) = z_0$ . Entonces existe  $\beta$  tal que  $\tilde{\gamma}(1) = f^\beta(z_0)$ , lo que implica que la monodromía es definida como:

$$\theta([\gamma]) = f^\beta.$$

Identificamos al grupo  $\langle f \rangle$  como los enteros módulo  $p$  y usamos la notación  $\theta([\gamma]) = \beta$ , entendiéndose que  $\beta \in \mathbb{Z}_p$ . Ahora, sean  $x_i \in \pi_1(S_h^t, q(z_0))$  las clases de los lazos simples (orientados positivamente) que rodean a los puntos  $q(z_i)$ , para todo  $i = 1, \dots, t$  de modo que tenemos una presentación canónica del grupo fundamental  $\pi_1(S_h^t; q(z_0))$  dada por:

$$\langle x_1, \dots, x_t, a_1, b_1, \dots, a_h, b_h \mid x_1 \cdot \dots \cdot x_t \cdot [a_1, b_1] \cdot \dots \cdot [a_h, b_h] = 1 \rangle.$$

**Proposición 4.1.9** *Con la notación anterior, si  $f \in \text{Homeo}^+(S_g)$  es un elemento de orden  $p$  cuyos puntos fijos son  $z_1, \dots, z_t$  y  $\theta : \pi_1(S_h^t; q(z_0)) \rightarrow \mathbb{Z}_p$  es la monodromía del cubriente obtenido por la acción de  $f$  en la superficie  $S_g$ , entonces*

$$\sigma(f) = (\theta(x_1), \dots, \theta(x_t)),$$

donde  $x_i$  son las clases de los lazos simples orientados positivamente que rodean a los puntos  $q(z_i)$ . El mismo resultado es válido para un elemento de orden  $p$  de  $\text{Homeo}^+(S_g; k)$ .

#### Demostración

Dotamos a  $S_g$  de una estructura de superficie de Riemann  $\mathfrak{X}$  tal que  $\langle f \rangle$  actúa por automorfismos (ver (2) Proposición 4.1.1). Consideremos un punto fijo  $z_j \in S_g$  y para la estructura  $\mathfrak{X}$  tomemos un abierto  $D_{z_j}$  tal que  $f$  se ve localmente como una rotación para dicha estructura (ver (5) Proposición 4.1.1). Sea

$$D_j := q(D_{z_j}) \quad \text{y} \quad \omega : I \rightarrow S_h^t$$

un lazo simple orientado positivamente basado en un punto  $y \in D_j - \{q(z_j)\}$  de tal forma que rodea al punto  $q(z_j)$  y que además está completamente contenido en  $D_j$ . Tomemos un

camino simple  $\delta : [0, 1] \rightarrow S_h^t$  orientado positivamente tal que  $\delta(0) = q(z_0)$  y  $\delta(1) = y$ . Tenemos un lazo bien definido con punto base en  $q(z_0)$  dado por

$$\gamma = \bar{\delta} * \omega * \delta,$$

el cual es un representante de la clase  $x_i$ . Ahora, el camino  $\delta : I \rightarrow S_h^t$  se levanta a un camino  $\tilde{\delta} : I \rightarrow S_g^t$  entre  $z_0$  y un punto  $\tilde{y} \in S_g^t$  donde  $\tilde{y}$  pertenece a la preimagen  $q^{-1}(\{y\})$ . Por otro lado, fijemos a  $\tilde{y} \in S_g$  como punto inicial del levantamiento del lazo  $\omega : I \rightarrow S_h^t$  y puesto que el mapeo  $f^{\beta_i}$  es localmente una rotación de un ángulo de  $2\pi/p$  dentro del abierto  $D_j$ , entonces el punto final de  $\tilde{\omega}$  es  $f^{\beta_i}(\tilde{y})$ . Tenemos que el camino  $f^{\beta_i} \circ \tilde{\delta} : I \rightarrow S_g^t$  inicia en  $f^{\beta_i}(z_0)$  y termina en  $f^{\beta_i}(\tilde{y})$  (otro levantamiento de  $\delta$  con distinto punto inicial). Luego, el levantamiento de  $\gamma : I \rightarrow S_h^t$  es el camino definido por la concatenación:

$$\tilde{\gamma} = \left( \overline{f^{\beta_i} \circ \tilde{\delta}} \right) * \tilde{\omega} * \tilde{\delta}.$$

Con lo que concluimos que  $\tilde{\gamma}(1) = f^{\beta_i}(z_0)$  y por lo tanto  $\theta(x_i) = \beta_i$ . ■

### *Interpretación de los datos de punto fijo vía grupos Fuchsianos.*

En esta parte describimos los datos de punto fijo en términos de grupos Fuchsianos. Recordemos que un grupo Fuchsiano  $\Gamma$  es un grupo discreto de isometrías del plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2$  y es bien conocido que  $\Gamma$  se encuentra caracterizado de manera algebraica a través de su *signatura*  $\text{sig}(\Gamma)$ , y a partir de ésta tenemos presentaciones bien conocidas de estos grupos. Un resultado clásico, establece que cualquier superficie de Riemann puede ser uniformizada como un cociente del plano hiperbólico por un grupo Fuchsiano. Por otro lado, dado un homeomorfismo  $f$  de orden finito podemos uniformizar a la superficie  $S_g$  con un grupo Fuchsiano  $K$  de tal forma que  $f$  es un mapeo conforme sobre  $S_g$ . De esta forma, es posible uniformizar a la superficie cociente  $S_h$  que se obtiene de la acción de  $f$  en  $S_g$  vía homeomorfismos, a través de un grupo Fuchsiano  $\Gamma$ . Usando la presentación algebraica del grupo Fuchsiano  $\Gamma$  definiremos un epimorfismo  $\theta : \Gamma \rightarrow \langle f \rangle$ , el cual nos relacionará los datos de punto fijo del homeomorfismo  $f$ . A continuación describimos brevemente esta idea.

Sea  $f \in \text{Homeo}^+(S_g)$  un elemento de orden  $p$ , con  $t$  puntos fijos. Por la Proposición 4.1.1 podemos dotar a la superficie  $S_g$  de una estructura de superficie de Riemann  $\mathfrak{X}$  tal que  $f$

es conforme. Por el Teorema de uniformización de superficies de Riemann existe un grupo Fuchsiano  $K_g$  isomorfo a  $\pi_1(S_g)$  tal que  $\mathbb{H}^2/K_g \cong S_g$  como superficies de Riemann. Como  $f$  es conforme, entonces  $f$  se levanta a una isometría  $\gamma : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$  y definimos el grupo Fuchsiano

$$\Gamma := \langle K_g, \gamma \rangle.$$

Tenemos que  $\mathbb{H}^2/\Gamma \cong S_g/\langle f \rangle \cong S_h$  donde  $h$  satisface la ecuación de Riemann-Hurwitz

$$2g - 2 = p(2h - 2) + t(p - 1).$$

Puesto que  $K_g \triangleleft \Gamma$ , entonces para todo elemento  $u \in \Gamma$  existe un homeomorfismo inducido  $u' : \mathbb{H}^2/K_g \rightarrow \mathbb{H}^2/K_g$  definido para toda  $z \in \mathbb{H}^2$  como

$$K_g \cdot z \mapsto K_g \cdot u(z),$$

que hace que el siguiente diagrama sea conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}^2 & \xrightarrow{u} & \mathbb{H}^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_g \cong \mathbb{H}^2/K_g & \xrightarrow{u'} & S_g \cong \mathbb{H}^2/K_g \end{array} .$$

Con la notación anterior, definimos el homomorfismo  $\theta : \Gamma \rightarrow \langle f \rangle$  dado por

$$\theta(u) = u' \quad \text{para todo } u \in \Gamma.$$

Así pues, obtenemos una sucesión exacta

$$1 \rightarrow K_g \rightarrow \Gamma \xrightarrow{\theta} \langle f \rangle \rightarrow 1.$$

Identificamos al grupo  $\langle f \rangle$  con los enteros módulo  $p$  de tal forma que  $f \equiv 1 \pmod{p}$ . Así,  $\theta(u) = 1$  implica que  $u' = f$ . Por otro lado, puesto que  $\Gamma$  es un grupo Fuchsiano cuya signatura es igual a  $\text{sig}(\Gamma) = (h, +, (p)^t)$ , entonces  $\Gamma$  tiene una presentación algebraica dada por

$$\langle x_1, \dots, x_t, a_1, b_1, \dots, a_h, b_h \mid x_1 \cdot \dots \cdot x_t \cdot [a_1, b_1] \cdot \dots \cdot [a_h, b_h] = x_1^p = \dots = x_t^p = 1 \rangle.$$

Como es de esperarse, prosiguiendo de manera similar a la interpretación vía la acción de monodromía, las imágenes bajo  $\theta$  de las transformaciones elípticas  $x_i$ , que a su vez contienen un único punto fijo  $\tilde{z}_i$  en  $\mathbb{H}^2$ , son los datos de punto fijo del homeomorfismo  $f$ . El siguiente resultado es probado en [Har71], Teorema 7.

**Proposición 4.1.10** *Con la notación anterior, sean  $f \in \text{Homeo}^+(S_g)$  un elemento de orden  $p$ ,  $t$  el número de puntos fijos de  $f$  y  $\Gamma$  el grupo Fuchsiano descrito anteriormente junto con la sucesión exacta*

$$1 \rightarrow K_g \rightarrow \Gamma \xrightarrow{\theta} \mathbb{Z}_p = \langle f \rangle \rightarrow 1$$

donde  $\Gamma$  tiene una presentación algebraica dada por

$$\langle x_1, \dots, x_t, a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid x_1 \cdot \dots \cdot x_t \cdot [a_1, b_1] \cdot \dots \cdot [a_g, b_g] = x_1^p = \dots = x_t^p = 1 \rangle.$$

Entonces se tiene que

$$\sigma(f) = (\theta(x_1), \dots, \theta(x_t)).$$

## 4.2. Datos de punto fijo en superficies no orientables

En esta sección extendemos los resultados de la sección anterior al caso de una superficie no orientable. Como hemos visto, los datos de punto fijo pueden ser interpretados vía grupos Fuchsianos y a través de la monodromía que se obtiene del cubriente ramificado por la acción del homeomorfismo  $f$ . El enfoque que emplearemos será vía estas dos interpretaciones. Como punto de partida, seguiremos las ideas de J. Nielsen [Nie37] en el caso orientable, a partir de las cuales seremos capaces de obtener las generalizaciones buscadas.

Sea  $f : N_g \rightarrow N_g$  un mapeo de orden  $p$  cuyos puntos fijos son  $z_1, \dots, z_t$  y consideremos la superficie cociente  $N_g / \langle f \rangle \cong N_h$ . Por Riemann-Hurwitz la pareja  $(h, t)$  satisface la ecuación

$$g - 2 = p(h - 2) + t(p - 1).$$

El mapeo cociente  $q_N : N_g \rightarrow N_h$  es un cubriente ramificado cuyos puntos de ramificación son los puntos fijos del mapeo  $f$ . Removamos de la superficie  $N_g$  los puntos fijos del mapeo  $f$  y denotemos a la superficie resultante como  $N_g^t$ , del mismo modo removemos las imágenes de los puntos fijos en la superficie  $N_h$  y así obtenemos un cubriente en el sentido usual

$$q_N : N_g^t \rightarrow N_h^t,$$

cuyo grupo de transformaciones cubrientes es el generado por  $\langle f \rangle \cong \mathbb{Z}_p$ . Fijemos un punto  $z_0 \in N_g$  y su imagen en  $q_N(z_0) \in N_h$ , entonces el cubriente  $q_n : N_g^t \rightarrow N_h^t$  tiene asociada la

siguiente sucesión exacta corta:

$$1 \rightarrow \pi_1(N_g^t, z_0) \xrightarrow{q_{N^*}} \pi_1(N_h^t, q_N(z_0)) \xrightarrow{\theta} \langle f \rangle \rightarrow 1,$$

donde el epimorfismo  $\theta$  es la acción de monodromía del cubriente  $q_N : N_g^t \rightarrow N_h^t$ . Explícitamente, para una clase  $[\gamma] \in \pi_1(N_h^t, q_N(z_0))$ , denotemos por  $\tilde{\gamma}$  a su levantamiento en  $N_g^t$  con punto inicial en  $z_0$ , entonces  $f^k(z_0) = \tilde{\gamma}(1)$  para alguna  $k = 0, 1, \dots, p-1$  y el homomorfismo  $\theta$  está dado por  $\theta([\gamma]) = f^k$ . Identificamos al grupo  $\langle f \rangle$  con los enteros módulo  $p$  con  $f \equiv 1 \pmod{p}$ .

Usemos la presentación usual del grupo fundamental de la superficie  $N_h^t$ :

$$\pi_1(N_h^t, z_0) = \langle x_1, \dots, x_t, d_1, \dots, d_h \mid x_1 \cdot \dots \cdot x_t \cdot d_1^2 \cdot d_2^2 \cdot \dots \cdot d_h^2 = 1 \rangle,$$

donde  $x_i$  es la clase de un lazo simple alrededor de un punto de ramificación en  $q(z_i)$ , definimos

$$\beta_i := \theta(x_i) \quad \text{para } i = 1, \dots, t.$$

**Definición 4.2.1** Con la notación anterior, sea  $f \in \text{Homeo}(N_g)$  un elemento de orden un primo impar  $p$ . Definimos los datos de punto fijo de  $f$  como la  $t$ -tupla desordenada

$$\sigma(f) := (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t),$$

donde los  $\beta_i$ 's son pensados como elementos de  $\mathbb{Z}_p$ .

A diferencia del caso de superficies orientables donde podemos elegir los generadores  $x_i$  de modo que coincidan con la orientación de la superficie (esto con la finalidad que los datos de punto fijo coincidan con sus imágenes del epimorfismo  $\theta$ ), en el caso no orientable no tenemos definida una orientación global, lo que hace que la definición de los datos de punto fijo dependa de la elección local de una orientación de los generadores  $x_i$  que a su vez depende de la presentación elegida de  $\pi_1(N_h^t, z_0)$ . Para ser mas específicos, al considerar la doble cubierta orientable  $\pi : S_{g-1} \rightarrow N_g$ , para cada  $x_i$  existen dos levantamientos, uno de los cuales preserva la orientación mientras que el otro la invierte y no hay una elección canónica del levantamiento de  $x_i$  que nos permita saber con exactitud cual levantamiento preservará la orientación. Para lidiar con este problema es conveniente agregar la siguiente noción de congruencia dentro de los datos de punto fijo y así poder comparar los comportamientos locales en cada punto fijo.

**Definición 4.2.2** Dados  $f, f' \in \text{Homeo}(N_g)$  de orden  $p$ , decimos que sus respectivos datos de punto fijos son congruentes, denotado por  $\sigma(f) \cong \sigma(f')$  si existen  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_t \in \{-1, 1\}$  tales que

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t) = (\varepsilon_1 \cdot \beta'_1, \varepsilon_2 \cdot \beta'_2, \dots, \varepsilon_t \cdot \beta'_t)$$

como  $t$ -tuplas desordenadas. Notemos que la relación de congruencia es una relación de equivalencia sobre el conjunto de los datos de punto fijo de los homeomorfismos de orden  $p$ .

Es importante notar que para todo homeomorfismo  $f : N_g \rightarrow N_g$  de orden  $p$ , los datos de punto fijo  $\sigma(f^k)$  de las potencias de  $f$  se encuentran relacionadas con los datos de punto fijo de  $\sigma(f)$  como se muestra en el siguiente resultado:

**Proposición 4.2.3** Sean  $f \in \text{Homeo}(N_g)$  de orden  $p$  y  $\sigma(f) = (\beta_1, \dots, \beta_t)$  sus datos de punto fijo. Entonces:

1. Si  $r \in \mathbb{Z}$  y no es múltiplo de  $p$ , entonces  $\sigma(f^r) \cong (m \cdot \beta_1, m \cdot \beta_2, \dots, m \cdot \beta_t)$  donde  $m \in \mathbb{Z}$  es tal que  $m \cdot r \equiv 1 \pmod{p}$ .
2.  $\sigma(f) \cong \sigma(f^{-1})$ .

### Demostración

El punto (2) se sigue de (1) debido a que en el caso de la potencia  $f^{-1}$  se tiene que  $m = -1$  y así por (1) se concluye que  $\sigma(f^{-1}) \cong (-\beta_1, \dots, -\beta_t)$ . Procedemos a demostrar (1).

Notemos que tanto  $f$  como  $f^r$  tienen los mismos puntos fijos, además  $\langle f \rangle = \langle f^r \rangle \cong \mathbb{Z}_p$ , por lo que los espacios de órbitas son iguales  $N_h \cong N_g / \langle f \rangle = N_g / \langle f^r \rangle$ . En ambos casos el epimorfismo

$$\pi_1(N_h) \xrightarrow{\theta} \mathbb{Z}_p$$

es el mismo, la diferencia radica en la forma que se elige el generador de  $\mathbb{Z}_p$ . Consideremos la presentación usual del grupo

$$\pi_1(N_h^t) = \langle x_1, \dots, x_t, d_1, \dots, d_h \mid x_1 \cdot \dots \cdot x_t \cdot d_1^2 \cdot d_2^2 \cdot \dots \cdot d_h^2 = 1 \rangle.$$

Si  $\sigma(f^r) = (\beta'_1, \dots, \beta'_i, \dots, \beta'_t)$ , entonces por la definición de dato de punto fijo se tiene que para todo  $i = 1, \dots, t$

$$\theta(x_i) = (f^r)^{\beta'_i} = f^{\beta_i}. \quad (4.1)$$

Sea  $m$  tal que  $r \cdot m \equiv 1 \pmod{p}$ , entonces

$$f^{\beta_i} = (f^{r \cdot m})^{\beta_i} = (f^r)^{m \cdot \beta_i}$$

y ya que por la Ecuación 4.1 se tiene que  $f^{\beta_i} = (f^r)^{\beta'_i}$  concluimos

$$\beta'_i \equiv m \cdot \beta_i \pmod{p},$$

teniéndose lo deseado. ■

En el resto de la sección estableceremos un resultado similar a la Proposición 4.2.4, relacionando los datos de punto fijo de cualquier homeomorfismo de orden  $p$  con la estructura adicional de la superficie  $N_g$  y su cociente  $N_h$ , las cuales son uniformizadas de tal forma que obtenemos grupos NEC relacionados con una sucesión exacta y con lo cual interpretamos los datos de punto fijo a través del epimorfismo  $\theta : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_p$ .

Sea  $f \in \text{Homeo}(N_g)$  un elemento de orden  $p$  y sean  $z_1, \dots, z_t$  los puntos fijos de  $f$ . Vía la doble cubierta orientable y la Proposición 4.1.1 podemos dotar a la superficie  $N_g$  de una estructura dianalítica  $\mathfrak{X}$  tal que  $\langle f \rangle$  es un grupo de automorfismos, o dicho de otra forma, el mapeo  $f : (N_g, \mathfrak{X}) \rightarrow (N_g, \mathfrak{X})$  es dianalítico. Por el Teorema de Uniformización de Superficies de Klein, existe un grupo no euclidiano cristalográfico  $K_g$  isomorfo al grupo fundamental de  $N_g$  tal que la superficie cociente  $\mathbb{H}^2/K_g$  es isomorfa a  $N_g$  como superficies de Klein. Sea  $\gamma : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$  el levantamiento del mapeo  $f : N_g \rightarrow N_g$ , como  $f$  es dianalítico, entonces  $\gamma : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$  es una isometría. Definimos el grupo NEC

$$\Gamma := \langle K_g, \gamma \rangle,$$

así espacio cociente  $\mathbb{H}^2/\Gamma$  es homeomorfo a  $N_g/\langle f \rangle$  el cual a su vez es homeomorfo a la superficie  $N_h$ , donde  $h$  satisface la ecuación de Riemann-Hurwitz

$$g - 2 = p(h - 2) + t(p - 1).$$

Por otro lado, puesto que  $K_g \triangleleft \Gamma$ , entonces para todo elemento  $u \in \Gamma$  existe un homeomorfismo inducido  $u' : \mathbb{H}^2/K_g \rightarrow \mathbb{H}^2/K_g$  definido para cada  $z \in \mathbb{H}^2$  como

$$K_g \cdot z \mapsto K_g \cdot u(z)$$

que hace que el siguiente diagrama sea conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}^2 & \xrightarrow{u} & \mathbb{H}^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ N_g \cong \mathbb{H}^2/K_g & \xrightarrow{u'} & N_g \cong \mathbb{H}^2/K_g \end{array} .$$

Con la notación anterior, definimos el epimorfismo  $\theta : \Gamma \rightarrow \langle f \rangle \cong \mathbb{Z}_p$  dado por

$$\theta(u) = u' \quad \text{para todo } u \in \Gamma$$

y de esta forma se obtiene una sucesión exacta corta

$$1 \rightarrow K_g \rightarrow \Gamma \xrightarrow{\theta} \langle f \rangle \cong \mathbb{Z}_p \rightarrow 1$$

Como bien sabemos,  $\Gamma$  es un grupo NEC y su signatura es  $\text{sig}(\Gamma) = (h, +, [(p)^t])$ , donde  $t$  es el número de puntos fijos de  $f$ . Entonces  $\Gamma$  tiene una presentación algebraica dada por

$$\langle x_1, \dots, x_t, d_1, \dots, d_h \mid x_1 \cdot \dots \cdot x_t \cdot d_1^2 \cdot \dots \cdot d_h^2 = x_1^p = \dots = x_t^p = 1 \rangle.$$

donde los generadores elípticos  $x_i$  se ordenan de tal forma que si  $\tilde{z}_i \in \mathbb{H}^2$  es el punto fijo de  $x_i$ , entonces el punto fijo  $z_i \in N_g$  corresponde a  $K_g \cdot \tilde{z}_i$  al identificar  $N_g$  con  $\mathbb{H}^2/K_g$ . La relación entre el epimorfismo  $\theta : \Gamma \rightarrow \langle f \rangle$  y los datos de punto fijos de  $f$  es la siguiente:

**Proposición 4.2.4** *Con la notación anterior, si  $f \in \text{Homeo}(N_g)$  es un elemento de orden  $p$  y  $\theta : \Gamma \rightarrow \langle f \rangle$  denota el epimorfismo obtenido por la acción de  $f$  en  $N_g$ , donde  $\Gamma$  es el grupo NEC cuya presentación algebraica es*

$$\langle x_1, \dots, x_t, d_1, \dots, d_h \mid x_1 \cdot \dots \cdot x_t \cdot d_1^2 \cdot \dots \cdot d_h^2 = x_1^p = \dots = x_t^p = 1 \rangle,$$

entonces

$$\theta(x_i) = f^{\beta_i}$$

para todo  $i = 1 \dots t$ , donde  $\sigma(f) = (\beta_1, \dots, \beta_t)$  y cada  $\beta_i$  es el dato de punto fijo asociado al punto fijo  $z_i \in N_g$

Demostración

Vía las identificaciones de  $\mathbb{H}^2/K_g$  y de  $\mathbb{H}^2/\Gamma$  con las superficies  $N_g$  y  $N_h$  respectivamente, denotamos a los mapeos cubrientes por:  $q_k : \mathbb{H}^2 \rightarrow N_g$  y  $q_\Gamma : \mathbb{H}^2 \rightarrow N_h$  los cuales son tales que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{H}^2 & \\ q_k \swarrow & & \searrow q_\Gamma \\ N_g & \xrightarrow{q} & N_h \end{array} \quad (4.2)$$



Sean  $z_1, \dots, z_t$  los puntos fijos del homeomorfismo  $f : N_g \rightarrow N_g$  y  $\sigma(f) = (\beta_1 \dots, \beta_t)$  los datos de punto fijo de  $f$ . Consideremos el generador elíptico  $x_i \in \Gamma$ , el cual tiene un único punto fijo en  $\mathbb{H}^2$ . Por simplicidad, pensaremos a  $\mathbb{H}^2$  como el disco de Poincaré y podemos suponer que el punto fijo de  $x_i$  es el origen, si no lo fuera, basta con conjuguar por una transformación de Möbius que mande el punto fijo al origen y trasladar los resultados a  $x_i$  a través de esta conjugación. De esta forma tenemos que

$$q_\Gamma(x_i(0)) = q(z_i).$$

Como bien sabemos, en el modelo del disco de Poincaré la transformación elíptica  $x_i$ , al ser de orden  $p$ , es una rotación por un ángulo de  $2\pi/p$ . Tomemos un punto  $w_0 \in \mathbb{H}^2$  tal que el conjunto  $D := \{w \in \mathbb{H}^2 \mid |w| \leq |w_0|\}$  se encuentre contenido en un abierto recubridor de  $q_K : \mathbb{H}^2 \rightarrow N_g$  que no contenga ninguna preimagen de los puntos fijos de  $f$ , esto es que  $q_K|_D : D \rightarrow q_K(D)$  sea un homeomorfismo en donde  $D$  no contiene ninguna preimagen de los puntos fijos de  $f$ . Consideremos el camino  $\omega^\Gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$  dado por  $\omega^\Gamma(s) := e^{2\pi is/p} \cdot w_0$  y definamos

$$\omega := q_\Gamma \circ \omega^\Gamma : [0, 1] \rightarrow N_h^t.$$

Notemos que

$$\omega(0) = q_\Gamma(\omega^\Gamma(0)) = q_\Gamma(w_0)$$

y además, debido a que  $x_i : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$  es una rotación por un ángulo de  $2\pi/p$ , entonces

$$\omega(1) = q_\Gamma(\omega^\Gamma(1)) = q_\Gamma(e^{2\pi i/p} \cdot w_0) = q_\Gamma(x_i(w_0)),$$

pero por definición de  $q_\Gamma$  se tiene que  $q_\Gamma(x_i(w_0)) = q_\Gamma(w_0)$ . Así pues,  $\omega(0) = \omega(1)$ , por lo que  $\omega : [0, 1] \rightarrow N_h^t$  es un lazo basado en  $q_\Gamma(w_0)$  el cual rodea a  $q(z_i)$ . Tomemos a  $q_\Gamma(w_0)$  como punto base de  $N_h^t$ , entonces el lazo  $\omega : [0, 1] \rightarrow N_h^t$  es un representante de la clase del lazo que rodea a  $q(z_i)$  que tiene la misma orientación local o tiene orientación opuesta. Sin pérdida de generalidad, supongamos que el lazo  $\omega$  tiene la misma orientación local, pues si no fuera el caso basta con componer el camino  $\omega^\Gamma$  con la conjugación compleja y

hacer el siguiente análisis para este nuevo camino. Ahora, consideremos el levantamiento  $\tilde{\omega} : [0, 1] \rightarrow N_g^t$  a través del cubriente  $q : N_g^t \rightarrow N_h^t$  de tal forma que  $\tilde{\omega}(0) = q_K(w_0)$ . Entonces por definición de dato de punto de fijo se tiene que

$$\tilde{\omega}(1) = f^{\beta_i}(q_K(w_0)). \quad (4.3)$$

Además, puesto que el levantamiento  $\tilde{\omega}$  se encuentra completamente contenido en  $q_K(D)$  y en este abierto  $q_K|_D : D \rightarrow q_K(D)$  es un homeomorfismo, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} & & & & N_g \\ & & & \nearrow & \downarrow q \\ I & \xrightarrow{\omega^\Gamma} & \mathbb{H}^2 & \xrightarrow{q_\Gamma} & N_h \\ & \searrow \tilde{\omega} & \nearrow q_K & & \end{array}$$

de donde deducimos que

$$\tilde{\omega}(1) = q_K(\omega^\Gamma(1)) = q_K(e^{2\pi i/p} w_0).$$

Luego, como  $x_i$  es una rotación por un ángulo de  $2\pi/p$ , se tiene que

$$\tilde{\omega}(1) = q_K(x_i(w_0)).$$

Por otro lado, por la definición del epimorfismo  $\theta : \Gamma \rightarrow \langle f \rangle$  (antes de identificar a  $\langle f \rangle$  con  $\mathbb{Z}_p$ ), el homeomorfismo  $\theta(x_i) : N_g \rightarrow N_g$  se encuentra definido por  $\theta(x_i)(q_K(w)) := q_K(x_i(w))$ , luego

$$\tilde{\omega}(1) = \theta(x_i)(q_K(w_0)).$$

Ahora, por la Ecuación 4.3 se tiene que:

$$\theta(x_i)(q_K(w_0)) = f^{\beta_i}(q_K(w_0))$$

y por la unicidad de las transformaciones cubrientes  $\theta(x_i) = f^{\beta_i}$ . Finalmente, si vemos a  $\langle f \rangle$  como los enteros módulo  $p$ , entonces  $\theta(x_i) = \beta_i$ . El resultado se sigue llevando a cabo el razonamiento para cada generador elíptico  $x_i$ . ■

### 4.3. Relación con el Caso Orientable

Para cualquier homeomorfismo  $f : N_g \rightarrow N_g$  estableceremos ahora una relación entre los datos de punto fijo  $\sigma(f)$  y de su levantamiento  $\tilde{f} : S_{g-1} \rightarrow S_{g-1}$  vía la doble cubierta orientable  $\pi : S_{g-1} \rightarrow N_g$ . Esta relación nos da la pauta para trasladar los resultados del caso de superficies orientables a nuestro caso de interés: las superficies no orientables. En lugar de emplear la notación usada en capítulos anteriores para la involución  $\sigma : S_{g-1} \rightarrow S_{g-1}$  de la doble cubierta orientable  $(S_{g-1}, \pi, \sigma)$ , a partir de aquí y en lo que resta de este trabajo usaremos  $J : S_{g-1} \rightarrow S_{g-1}$  para referirnos a esta involución i.e.  $J(x, y, z) = (-x, -y - z)$  para toda  $(x, y, z) \in S_{g-1}$  y se tiene que  $N_g \cong S_{g-1}/\langle J \rangle$ .

**Teorema 4.3.1** *Sea  $f : N_g \rightarrow N_g$  un homeomorfismo de orden  $p$  y consideremos su levantamiento  $\tilde{f} : S_{g-1} \rightarrow S_{g-1}$  a la doble cubierta orientable que preserva la orientación. Si  $z_1, \dots, z_t$  son los puntos fijos de  $f$ , entonces se cumple lo siguiente:*

1. El homeomorfismo  $\tilde{f} : S_{g-1} \rightarrow S_{g-1}$  tiene orden  $p$  y sus puntos fijos son

$$\{\tilde{z}_1, J(\tilde{z}_1), \dots, \tilde{z}_t, J(\tilde{z}_t)\}$$

donde  $\pi(\tilde{z}_i) = z_i$  para toda  $i = 1, \dots, t$ .

2. Si los datos de punto fijo se ordenan de tal forma que

$$\sigma(f) = (\beta_1, \dots, \beta_t) \quad \text{y} \quad \sigma(\tilde{f}) = (\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_{2t-1}, \tilde{\beta}_{2t}),$$

donde  $\beta_i$  es el dato correspondiente al punto  $z_i$  y  $\tilde{\beta}_{2i-1}, \tilde{\beta}_{2i}$  son los datos correspondientes a los puntos  $\tilde{z}_i$  y  $J(\tilde{z}_i)$  respectivamente, entonces

$$\tilde{\beta}_{2i-1} = -\tilde{\beta}_{2i} = \varepsilon_i \cdot \beta_i \quad \text{para algún} \quad \varepsilon_i \in \{-1, 1\} \quad \text{y toda} \quad i = 1, \dots, t.$$

Es decir, podemos reordenar los datos de punto fijo de  $\tilde{f} : S_{g-1} \rightarrow S_{g-1}$  de tal forma que

$$\sigma(\tilde{f}) = (\beta_1, -\beta_1, \dots, \beta_t, -\beta_t).$$

#### Demostración

El punto (1) se sigue del Lema 2.1.1. Procedemos a demostrar (2). Consideremos la acción de los homeomorfismos  $\langle f \rangle$  y  $\langle \tilde{f} \rangle$  en las superficies  $N_g$  y  $S_{g-1}$  respectivamente. Entonces

los espacios de órbitas  $N_g/\langle f \rangle$  y  $S_{g-1}/\langle \tilde{f} \rangle$  son homeomorfos a  $N_h$  y  $S_{h-1}$  respectivamente, donde  $h$  satisface la ecuación de Riemann-Hurwitz

$$g - 2 = p(h - 2) + t(p - 1).$$

Consideremos los mapeos cocientes  $q_S : S_{g-1} \rightarrow S_{h-1}$  y  $q_N : N_g \rightarrow N_h$ . Como  $J \circ \tilde{f} = \tilde{f} \circ J$ , entonces existe  $\hat{J} : S_{h-1} \rightarrow S_{h-1}$  tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} S_{g-1} & \xrightarrow{J} & S_{g-1} \\ q_S \downarrow & & \downarrow q_S \\ S_{h-1} & \xrightarrow{\hat{J}} & S_{h-1} \end{array}$$

Puesto que  $J : S_{g-1} \rightarrow S_{g-1}$  es una involución que invierte la orientación, entonces  $\hat{J} : S_{h-1} \rightarrow S_{h-1}$  cumple con la misma propiedad. Afirmamos que  $\hat{J} : S_{h-1} \rightarrow S_{h-1}$  es una involución sin puntos fijos, en efecto, supongamos que existe algún punto fijo, digamos  $z \in S_{g-1}$  tal que

$$\hat{J}(q_S(z)) = q_S(z).$$

Por la conmutatividad del diagrama anterior se tiene que  $\hat{J}(q_S(z)) = q_S(J(z))$ , lo que implica que  $q_S(J(z)) = q_S(z)$ . Así pues, existe  $k_0 \geq 0$  tal que

$$\tilde{f}^{k_0}(z) = J(z). \tag{4.4}$$

Por otro lado, puesto que  $\tilde{f}$  es el levantamiento a la doble cubierta orientable  $\pi : S_{g-1} \rightarrow N_g$  se tiene que

$$f^{k_0}(\pi(z)) = \pi(\tilde{f}^{k_0}(z)) = \pi(J(z)) = \pi(z),$$

luego  $\pi(z)$  es un punto fijo del mapeo  $f^{k_0}$  y por ende es un punto fijo de  $f$ . Lo anterior implica que existe  $i_0 = 1, \dots, t$  tal que  $\pi(z) = z_{i_0}$ , por lo que  $z = \tilde{z}_{i_0} \circ z = J(\tilde{z}_{i_0})$ , pero por la Ecuación (4.4) y lo anterior deducimos que

$$\tilde{z}_{i_0} = J(\tilde{z}_{i_0}),$$

lo cual es una contradicción, pues la involución  $J : S_{g-1} \rightarrow S_{g-1}$  no tiene puntos fijos. Por lo tanto hemos probado nuestra afirmación: la involución  $\hat{J} : S_{h-1} \rightarrow S_{h-1}$  no tiene puntos fijos.

Consideremos el espacio de órbitas obtenido por la acción de  $\hat{J}$  en la superficie  $S_{h-1}$  el cual es homeomorfo a la superficie  $N_h$ . Debido a que  $\hat{J} : S_{h-1} \rightarrow S_{h-1}$  es una involución que invierte la orientación y sin puntos fijos, entonces el mapeo cociente  $\pi' : S_{h-1} \rightarrow N_h$  es un modelo de la doble cubierta orientable de  $N_h$  y es tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} S_{g-1} & \xrightarrow{\pi} & N_g \\ q_S \downarrow & & \downarrow q_N \\ S_{h-1} & \xrightarrow{\pi'} & N_h. \end{array}$$

Al remover todos los puntos fijos de los homeomorfismos  $f : N_g \rightarrow N_g$  y  $\tilde{f} : S_{g-1} \rightarrow S_{g-1}$  obtenemos un diagrama conmutativo dado por mapeos cubrientes en el sentido usual

$$\begin{array}{ccc} S_{g-1}^{2t} & \xrightarrow{\pi} & N_g^t \\ q_S \downarrow & & \downarrow q_N \\ S_{h-1}^{2t} & \xrightarrow{\pi'} & N_h^t \end{array}$$

Fijemos un punto base  $z_0 \in N_g^t$  y sea  $\tilde{z}_0 \in S_{g-1}^{2t}$  el punto base en  $S_{g-1}^{2t}$ . Denotemos como

$$z'_0 = q_N(z_0) \quad \text{y} \quad \tilde{z}'_0 = q_S(\tilde{z}_0)$$

los puntos bases de  $N_h^t$  y  $S_{h-1}^{2t}$  respectivamente. El diagrama anterior da lugar al siguiente diagrama de sucesiones exactas de grupos fundamentales:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & & 1 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & \pi_1(S_{g-1}^{2t}, \tilde{z}_0) & \xrightarrow{\pi_*} & \pi_1(N_g^t, z_0) & \longrightarrow & \langle J \rangle \longrightarrow 1 \\ & & q_{S*} \downarrow & & q_{N*} \downarrow & & \phi \downarrow \cong \\ 1 & \longrightarrow & \pi_1(S_{h-1}^{2t}, \tilde{z}'_0) & \xrightarrow{\pi'_*} & \pi_1(N_h^t, z'_0) & \longrightarrow & \langle \hat{J} \rangle \longrightarrow 1 \\ & & \theta_S \downarrow & & \theta_N \downarrow & & \\ & & \langle \tilde{f} \rangle & \xrightarrow[\Phi]{\cong} & \langle f \rangle & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 1 & & 1 & & \end{array} \tag{4.5}$$

Consideremos la presentación usual del grupo fundamental de  $N_h^t$  con punto base  $z'_0$

$$\pi_1(N_h^t, z'_0) = \langle x_1, \dots, x_t, d_1, \dots, d_h \mid x_1 \cdot \dots \cdot x_t \cdot d_1^2 \cdot d_2^2 \cdot \dots \cdot d_h^2 = 1 \rangle$$

y empleemos la siguiente notación

$$z'_i = q_N(z_i) \quad \text{y} \quad \tilde{z}'_i = q_S(\tilde{z}_i) \quad \text{para toda} \quad i = 1, \dots, t.$$

Sea  $\gamma_i : [0, 1] \rightarrow N_h^t$  un lazo alrededor del punto  $z'_i$  con punto base en  $z'_0$  que represente al generador  $x_i$  y sea  $\tilde{\gamma}_i : [0, 1] \rightarrow S_{h-1}^{2t}$  el levantamiento de  $\gamma_i$  a la doble cubierta orientable  $\pi' : S_{h-1} \rightarrow N_h$  tal que  $\tilde{\gamma}_i(0) = \tilde{z}'_0$ . De hecho, sabemos que  $\tilde{\gamma}_i$  es un lazo con punto base  $\tilde{z}'_0$  y que además rodea al punto  $\tilde{z}'_i$  o al punto  $\hat{J}(\tilde{z}'_i)$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que rodea a  $\tilde{z}'_i$  (si este no fuera el caso basta con cambiar el orden de los datos de punto fijo de  $\tilde{f}$  y renombrar  $\tilde{z}'_i$  como  $\hat{J}(\tilde{z}'_i)$ ). Tomemos un camino  $\tilde{\delta} : [0, 1] \rightarrow S_{h-1}^{2t}$  simple de tal forma que

$$\tilde{\delta}(0) = \tilde{z}'_0 \quad \text{y} \quad \tilde{\delta}(1) = \hat{J}(\tilde{z}'_0)$$

como se ilustra en la Figura 4.1. Es importante aclarar que el modelo de la doble cubierta orientable de  $N_h$  descrito en la figura no es el mismo que hemos utilizado en la demostración, donde empleamos como involución a  $\hat{J} : S_{h-1} \rightarrow S_{h-1}$ , sin embargo podemos pasar de un modelo a otro a través de los respectivos homeomorfismos sin afectar los datos de punto fijo.

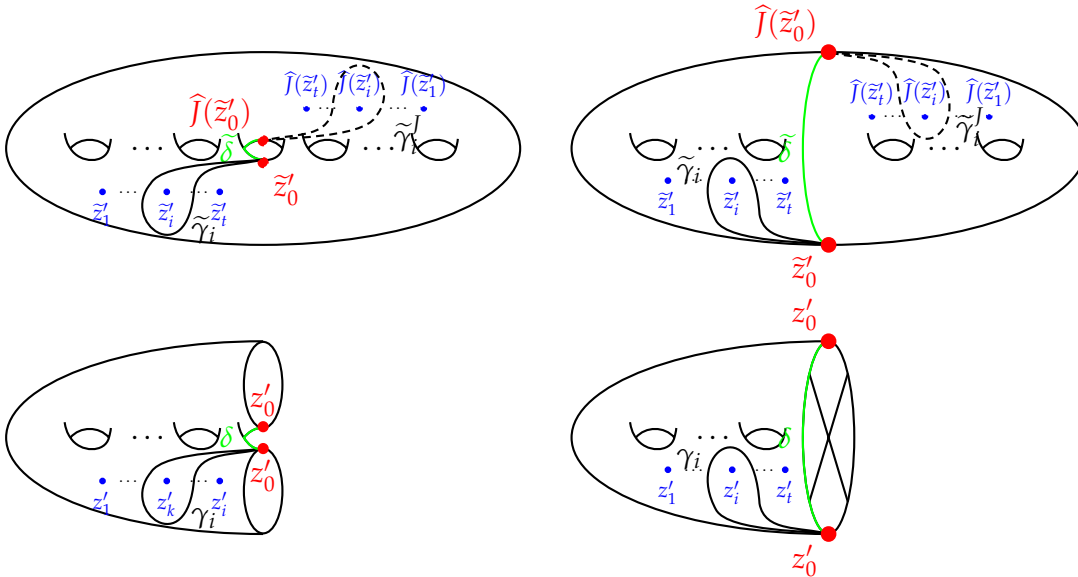


Figura 4.1: Relación entre los lazos y las dobles cubiertas orientables.

Recordemos que  $\tilde{\gamma}_i : [0, 1] \rightarrow S_{h-1}^{2t}$  es un lazo basado en  $\tilde{z}'_0$  que rodea a  $\tilde{z}'_i$ . Ahora, definimos el lazo  $\tilde{\gamma}_i^J : [0, 1] \rightarrow S_{h-1}^{2t}$  con punto base  $\tilde{z}'_0$  dado por la siguiente concatenación:

$$\tilde{\gamma}_i^J := \tilde{\delta} * (\hat{J} \circ \tilde{\gamma}_i) * \tilde{\delta}.$$

Notemos que el lazo tiene orientación opuesta a  $\tilde{\gamma}_i$  y además rodea al punto  $J(\tilde{z}'_i)$ . Sean  $\tilde{x}_i$  y  $\tilde{x}'_i$  las clases en el grupo fundamental  $\pi_1(S_{h-1}, \tilde{z}'_0)$  de los lazos  $\tilde{\gamma}_i$  y  $\tilde{\gamma}'_i$ . Puesto que los lazos  $\tilde{\gamma}_i$  y  $\tilde{\gamma}'_i$  rodean a los puntos  $q_S(\tilde{z}_i)$  y  $q_S(J(\tilde{z}_i))$  respectivamente, entonces por la relación de los datos de punto fijo vía la acción de monodronía de la Proposición 4.1.9 tenemos que existe  $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$  tal que

$$\theta_S(\tilde{x}_i) = \varepsilon_i \cdot \tilde{\beta}_{2i-1} \quad \text{y} \quad \theta_S(\tilde{x}'_i) = -\varepsilon_i \cdot \tilde{\beta}_{2i}, \quad (4.6)$$

donde  $\varepsilon_i = 1$  si  $\tilde{\gamma}_i$  tiene preserva la orientación de  $S_{g-1}$  y  $\varepsilon_i = -1$  si invierte la orientación de  $S_{g-1}$ .

Por otro lado, notemos que el camino definido por la composición  $\delta := \pi_h \circ \tilde{\delta} : [0, 1] \rightarrow N_h$  es un lazo con punto base en  $z'_0$  y que además

$$\pi_h \circ \tilde{\gamma}'_i = \delta * \gamma_i * \delta^{-1},$$

luego por el diagrama conmutativo de grupos fundamentales (4.5) y la definición de datos de puntos fijo de  $f$  se tiene que

$$\begin{aligned} \theta_S(\tilde{x}_i) &= \theta_N(\pi_{h*}(\tilde{x}_i)) = \theta_N(x_i) = \beta_i \\ \theta_S(\tilde{x}'_i) &= \theta_N(\pi_{h*}(\tilde{x}'_i)) = \theta_N([\delta] \cdot x_i \cdot [\delta^{-1}]) = \theta_N(x_i) = \beta_i, \end{aligned}$$

pero por la Ecuación 4.6 concluimos que

$$\tilde{\beta}_{2i-1} = -\tilde{\beta}_{2i} = \varepsilon_i \cdot \beta_i.$$

Como esto se cumple para todo  $i = 1, \dots, t$ , hemos probado el resultado. ■

**Observación 4.3.2** Con la notación del teorema anterior, si conocemos  $\sigma(\tilde{f})$  y se ordenan de tal forma que  $(\tilde{\beta}_{2i-1}, \tilde{\beta}_{2i})$  correspondan a los datos de punto fijo de los puntos  $\tilde{z}_i$  y  $J(\tilde{z}_i)$ , entonces

$$\sigma(f) = (\varepsilon_1 \cdot \tilde{\beta}_2, \dots, \varepsilon_t \cdot \tilde{\beta}_{2t}), \quad \text{para ciertas } \varepsilon_i \in \{-1, 1\},$$

o de otra forma

$$\sigma(f) \cong (\tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_{2t}).$$

Así pues, salvo congruencia, los datos de punto fijo tanto de  $f$  como de  $\tilde{f}$  solo dependen de la  $t$ -tupla  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t)$  y son los siguientes:

$$\sigma(\tilde{f}) = (\beta_1, -\beta_1, \dots, \beta_t, -\beta_t) \quad \text{y} \quad \sigma(f) \cong (\beta_1, \dots, \beta_t).$$

**Corolario 4.3.3** Sean  $f, f' \in \text{Homeo}(N_g)$  dos elementos de orden  $p$  y sean  $\tilde{f}, \tilde{f}' \in \text{Homeo}^+(S_{g-1})$  sus levantamientos a la doble cubierta orientable que preservan la orientación. Entonces  $\sigma(\tilde{f}) = \sigma(\tilde{f}')$  si y sólo si  $\sigma(f) \cong \sigma(f')$ .

Demostración

Podemos ordenar los datos de punto fijo de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \sigma(\tilde{f}) &= (\beta_1, -\beta_1, \dots, \beta_t, -\beta_t) & \sigma(f) &\cong (\beta_1, \dots, \beta_t) \\ \sigma(\tilde{f}') &= (\beta'_1, -\beta'_1, \dots, \beta'_t, -\beta'_t) & \sigma(f') &\cong (\beta'_1, \dots, \beta'_t). \end{aligned}$$

El resultado se sigue de la observación anterior y el Teorema 4.3.1. ■

**Observación 4.3.4** Como vemos en el resultado anterior, si  $\tilde{f} : S_{g-1} \rightarrow S_{g-1}$  es el levantamiento que preserva la orientación del homeomorfismo  $f : N_g \rightarrow N_g$ , entonces sus datos de punto fijo se encuentran relacionados a pares. Un pregunta interesante es analizar el siguiente caso: supongamos que tenemos un homeomorfismo  $\hat{f} : S_{g-1} \rightarrow S_{g-1}$  de orden  $p$ , cuyo conjunto de puntos fijos son  $\{\tilde{z}_1, J(\tilde{z}_1), \tilde{z}_2, J(\tilde{z}_2), \dots, \tilde{z}_t, J(\tilde{z}_t)\}$  y es tal que sus datos de puntos fijos están relacionados de la siguiente forma

$$\beta_{2i-1} = -\beta_{2i} \quad \text{para todo } i \in \{1, \dots, 2t\}.$$

¿Es posible encontrar un homeomorfismo isotópico a  $\hat{f}$  de tal forma que conmute con  $J$ ? Lo que podemos probar hasta ahora es que el homeomorfismo  $\hat{f} : N_g \rightarrow N_g$  es conjugado a un elemento que conmuta con  $J$ .

## 4.4. Conjugación de Nielsen para el caso no orientable

En esta sección probaremos las extensiones de los Teoremas 4.1.5 y 4.1.8 estableciendo que dos elementos de  $\text{Homeo}(N_g)$  de orden  $p$  son conjugados si y sólo si tienen los mismos datos de punto fijo; así mismo extenderemos este resultado al caso del grupo modular  $\mathcal{N}_g$ .

El siguiente lema establece que para un grupo NEC  $\Gamma$  de signatura  $(h; -; [(p)^t])$  y un epimorfismo  $\theta : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_p$ , siempre podemos elegir un sistema de generadores canónicos de tal forma que las imágenes de los generadores elípticos coinciden con sus imágenes originales salvo signo y que la imagen bajo  $\theta$  del resto de los generadores sea igual a cero, salvo el primero de éstos. La demostración del lema es similar a la del Teorema 1 de [BEMS15], sin embargo, reformulamos el enunciado para nuestros fines.



**Lema 4.4.1** Sea  $\Gamma$  un grupo NEC de signatura  $(h; -; [(p)^t])$  y sea  $\theta : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_p$  un epimorfismo tal que  $\ker(\theta)$  es isomorfo al grupo fundamental de una superficie no orientable  $\pi_1(N_g)$ ; pongamos  $\theta(x_i) = \beta_i$  para todo  $i = 1, \dots, t$ . Entonces para toda colección  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_t$  con  $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ , existe una presentación algebraica de  $\Gamma$

$$\langle x'_1, \dots, x'_t, d'_1, \dots, d'_h \mid x'_1 \cdot \dots \cdot x'_t \cdot d'^2_1 \cdot \dots \cdot d'^2_h = x'^p_1 = \dots = x'^p_t = 1 \rangle,$$

tal que

$$\begin{aligned} \theta(x'_i) &= \varepsilon_i \cdot \beta_i && \text{para } i = 1, \dots, t \\ \theta(d'_j) &= 0 && \text{para } j = 2, \dots, h \end{aligned}$$

y  $\theta(d'_1)$  está determinada por la siguiente ecuación:

$$\varepsilon_1 \cdot \beta_1 + \dots \varepsilon_t \cdot \beta_t + 2 \cdot \theta(d'_1) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Demostración

Tenemos la presentación usual de  $\Gamma$

$$\Gamma = \langle x_1, \dots, x_t, d_1, \dots, d_h \mid x_1 \cdot \dots \cdot x_t \cdot d^2_1 \cdot \dots \cdot d^2_h = x^p_1 = \dots = x^p_t = 1 \rangle.$$

Ahora, consideremos los siguientes isomorfismos de  $\Gamma$  descritos en [BGC<sup>+</sup>10] dados en la siguiente tabla (a nivel de generadores), así como el efecto del epimorfismo  $\theta : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_p$  en las imágenes. Por convención, omitimos los generadores que permanecen fijos.

$\gamma :$	$\Gamma \rightarrow \Gamma$	Efecto de $\theta$
	$d_1 \mapsto x_t \cdot d_1$	$\theta(d_1) + \theta(x_t)$
	$x_t \mapsto x_t d_1 x_t^{-1} d_1^{-1} x_t^{-1}$	$-\theta(x_t)$
$\rho_i :$	$\Gamma \rightarrow \Gamma$	Efecto de $\theta$
	$x_i \mapsto x_i x_{i+1} x_i^{-1}$	$\theta(x_{i+1})$
	$x_{i+1} \mapsto x_i$	$\theta(x_i)$
$\alpha_j :$	$\Gamma \rightarrow \Gamma$	Efecto de $\theta$
	$d_j \mapsto d_j^2 x_{j+1} d_j^{-2}$	$\theta(d_{j+1})$
	$d_{j+1} \mapsto d_j$	$\theta(d_j)$

Aquí  $i = 1, \dots, t-1$  y  $j = 1, \dots, h-1$ . Usando los automorfismos  $\gamma$  y  $\rho_i$  podemos encontrar un sistema de generadores tales que  $\theta(x'_i) = \varepsilon_i \cdot \beta_i$  para todo  $i = 1, \dots, t$ . Utilizando los automorfismos  $\alpha_j$  podemos permutar los generadores  $d'_j$  de tal forma que  $\theta(d'_j) = 0$  para  $j \geq m$  y  $\theta(d'_j) \neq 0$  para  $j < m$  con  $1 \leq m \leq h$ . Supongamos que  $m > 2$ , entonces existe  $b$  tal que

$$\theta(d'_1) + b \cdot \theta(x'_t) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Aplicando  $(\gamma\alpha_1\gamma\alpha_1)^b$  obtenemos un nuevo sistema de generadores tal que  $\theta(x''_i) = \theta(x'_i) = \varepsilon_i \cdot \beta_i$  para  $i = 1, \dots, r$ ,  $\theta(d''_j) = 0$  para  $j \geq m$  y  $\theta(d''_1) = 0$ . Reordenando los  $d''_j$ , producimos un nuevo sistema de generadores tal que  $\theta(d''_j) = 0$  para  $j \geq m-1$ . Repitiendo este proceso obtenemos un sistema de generadores donde  $\theta(d''_j) = 0$  para  $j > 1$  y  $\theta(d''_1)$  está determinado por la ecuación:

$$\theta(x''_1) + \dots + \theta(x''_t) + 2 \cdot \theta(d''_1) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Lo que prueba el resultado. ■

El siguiente teorema es uno de los resultados más importantes de este capítulo, pues generaliza el Teorema 4.1.5 de conjugación de Nielsen, que relaciona los datos de punto con la clase de conjugación de un homeomorfismo de orden  $p$ .

**Teorema 4.4.2** Sean  $f, f' \in \text{Homeo}(N_g)$  dos homeomorfismos de orden  $p$ , entonces  $f$  y  $f'$  son conjugados si y sólo si  $\sigma(f) \cong \sigma(f')$ .

#### Demostración

*Necesidad.* Supongamos que  $f$  y  $f'$  son conjugados, entonces  $\tilde{f}$  y  $\tilde{f}'$  son conjugados, luego por el Teorema 4.1.5 se tiene que  $\sigma(\tilde{f}) = \sigma(\tilde{f}')$  y finalmente por el Corolario 4.3.3 concluimos que  $\sigma(f) \cong \sigma(f')$ .

*Suficiencia.* Supongamos que  $\sigma(f) \cong \sigma(f')$ , es decir, si

$$\sigma(f) = (\beta_1, \dots, \beta_t) \quad \text{y} \quad \sigma(f') = (\beta'_1, \dots, \beta'_t),$$

entonces existe una permutación  $\delta : \{1, \dots, t\} \rightarrow \{1, \dots, t\}$  tal que para toda  $i = 1, \dots, t$ , se tiene que  $\beta_i = \varepsilon_i \cdot \beta'_{\delta(i)}$ , con  $\varepsilon_i = 1, -1$ . Cambiando el orden de los puntos fijos de  $f'$ , podemos suponer que

$$\beta_i = \varepsilon_i \cdot \beta'_i, \quad \text{para toda } i = 1, \dots, t. \quad (4.7)$$

Como en la Proposición 4.2.4, dotamos a  $N_g$  de la estructuras dianalíticas  $\mathfrak{X}$  y  $\mathfrak{X}'$  tales que  $\langle f \rangle$  y  $\langle f' \rangle$  son grupos de automorfismos para tales estructuras. Uniformizamos las superficies de Klein  $(N_g, \mathfrak{X})$  y  $(N_g, \mathfrak{X}')$  obteniendo dos grupos NEC  $K$  y  $K'$  isomorfos al grupo fundamental de la superficie  $N_g$  de tal forma que  $N_g \cong \mathbb{H}^2/K$  y  $N_g \cong \mathbb{H}^2/K'$  como superficies de Klein, con las estructuras  $\mathfrak{X}$  y  $\mathfrak{X}'$  respectivamente. Sean  $\gamma, \gamma' : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$  los levantamientos de  $f : \mathbb{H}^2/K \rightarrow \mathbb{H}^2/K$  y  $f' : \mathbb{H}^2/K' \rightarrow \mathbb{H}^2/K'$ , respectivamente. Definimos los grupos NEC

$$\Gamma := \langle K, \gamma \rangle \quad \text{y} \quad \Gamma' := \langle K', \gamma' \rangle$$

y los epimorfismos:

$$\theta : \Gamma \rightarrow \langle f \rangle \quad \text{y} \quad \theta' : \Gamma' \rightarrow \langle f' \rangle$$

asociados a los homeomorfismos  $f$  y  $f'$  respectivamente, tales que  $\ker(\theta) \cong \ker(\theta') \cong \pi_1(N_g)$ .

Por el Lema 4.4.1 los grupos  $\Gamma$  y  $\Gamma'$  tienen presentaciones algebraicas

$$\begin{aligned} \Gamma &\cong \langle x_1, \dots, x_t, d_1, \dots, d_h \mid x_1 \cdots x_t \cdot d_1^2 \cdots d_h^2 = x_1^p = \dots = x_t^p = 1 \rangle, \\ \Gamma' &\cong \langle x'_1, \dots, x'_t, d'_1, \dots, d'_h \mid x'_1 \cdots x'_t \cdot d_1'^2 \cdots d_h'^2 = x_1'^p = \dots = x_t'^p = 1 \rangle, \end{aligned}$$

tales que

$$\theta(d_j) = \theta'(d'_j) = 0 \quad \text{para } j = 2, 3, \dots, h,$$

$$\theta(x_i) = \beta_i \quad \text{y} \quad \theta'(x'_i) = \varepsilon_i \cdot \beta'_i \quad \text{para } i = 1, \dots, t.$$

Notemos que por la Ecuación 4.7 se tiene que  $\theta'(x'_i) = \beta_i$  para todo  $i = 1, \dots, t$ . Definimos un isomorfismo entre  $\psi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$  que manda  $x_i \mapsto x'_i$  y  $d_j \mapsto d'_j$  para todo  $i = 1, \dots, t$  y  $j = 1, \dots, h$ . Si  $\alpha : \langle f \rangle \rightarrow \langle f' \rangle$  es definido por  $\alpha(f) = f'$ , entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \xrightarrow{\theta} & \langle f \rangle \\ \psi \downarrow & & \downarrow \alpha \\ \Gamma' & \xrightarrow{\theta'} & \langle f' \rangle \end{array} \quad (4.8)$$

Por el Teorema 3 de [Mac67], el isomorfismo  $\psi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$  es realizado geoméricamente, esto significa que existe un homeomorfismo  $\tau : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$  tal que

$$\psi(u) = \tau u \tau^{-1} \quad \text{para toda } u \in \Gamma. \quad (4.9)$$

Puesto que el isomorfismo  $\psi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$  también se restringe a  $\psi : \ker(\theta) \rightarrow \ker(\theta')$ , se tiene que  $\tau : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$  induce los siguientes homeomorfismos

$$\begin{aligned} \widehat{h} : \mathbb{H}^2/\Gamma &\rightarrow \mathbb{H}^2/\Gamma' & h : \mathbb{H}^2/\ker(\theta) &\rightarrow \mathbb{H}^2/\ker(\theta') \\ \Gamma \cdot z &\mapsto \Gamma' \cdot \tau(z) & \ker(\theta) \cdot z &\mapsto \ker(\theta') \cdot \tau(z), \end{aligned}$$

y son tales que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}^2 & \xrightarrow{\tau} & \mathbb{H}^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{H}^2/\ker(\theta) & \xrightarrow{h} & \mathbb{H}^2/\ker(\theta') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{H}^2/\Gamma & \xrightarrow{\widehat{h}} & \mathbb{H}^2/\Gamma'. \end{array}$$

Por otro lado, usando el diagrama anterior tenemos que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{H}^2 & \xrightarrow{\tau^{-1}} & \mathbb{H}^2 & \xrightarrow{\gamma} & \mathbb{H}^2 & \xrightarrow{\tau} & \mathbb{H}^2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{H}^2/\ker(\theta') & \xrightarrow{h^{-1}} & \mathbb{H}^2/\ker(\theta) & \xrightarrow{f} & \mathbb{H}^2/\ker(\theta) & \xrightarrow{h} & \mathbb{H}^2/\ker(\theta') \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{H}^2/\Gamma' & \xrightarrow{\widehat{h}^{-1}} & \mathbb{H}^2/\Gamma & \xrightarrow{id} & \mathbb{H}^2/\Gamma & \xrightarrow{\widehat{h}} & \mathbb{H}^2/\Gamma' \end{array}$$

Vemos que el renglón de abajo es la identidad, por lo que  $\tau\gamma\tau^{-1} \in \Gamma'$ . Ahora, por la definición de  $\theta' : \Gamma' \rightarrow \langle f' \rangle$  y por los dos renglones de arriba tenemos que

$$\theta'(\tau\gamma\tau^{-1}) = h \circ f \circ h^{-1}.$$

Pero por la Ecuación (4.9) sabemos que  $\psi(\gamma) = \tau\gamma\tau^{-1}$  y por la conmutatividad del diagrama (4.8) se tiene

$$\theta'(\tau\gamma\tau^{-1}) = \theta'(\psi(\gamma)) = \alpha(\theta(\gamma)) = \alpha(f) = f',$$

por lo tanto

$$h \circ f \circ h^{-1} = f',$$

concluyendo la demostración. ■

Si  $f$  es un mapeo de orden  $p$  con un punto fijo, sabemos que localmente se ve como una rotación alrededor de este punto y que su inverso  $f^{-1}$  se ve localmente como una rotación en sentido opuesto. A diferencia del caso orientable, donde podemos dotar globalmente de una orientación y comparar estos comportamientos, en el caso no orientable no es posible hacer tal distinción, ya que no podemos dar una orientación global, lo que permite que ambas rotaciones sean iguales de manera local. Esta libertad se muestra en el siguiente corolario.

**Corolario 4.4.3** *Si  $f$  es un mapeo de orden  $p$  en  $N_g$ , entonces  $f$  es conjugado a  $f^{-1}$ .*

Demostración

Por la Proposición 4.2.3 se tiene que  $\sigma(f) \cong \sigma(f^{-1})$ . El resultado se sigue del teorema anterior. ■

Finalmente, definimos los datos de punto fijo para aquellos elementos de  $\mathcal{N}_g$  que sean de orden  $p$ . Para esto necesitamos ver primero que los datos de punto fijo no dependen de la clase de homotopía.

**Teorema 4.4.4 (Invarianza homotópica)** *Si  $f, f' \in \text{Homeo}(N_g)$  son dos elementos de orden  $p$  tales que  $f$  es homotópico a  $f'$ , entonces  $\sigma(f) \cong \sigma(f')$ .*

Demostración

Tenemos que los levantamientos  $\tilde{f}, \tilde{f}' \in \text{Homeo}^+(S_{g-1})$  a la doble cubierta orientable de los homeomorfismos  $f, f' \in \text{Homeo}(N_g)$  preservan la homotopía, entonces por el Teorema 4.1.6 se tiene que  $\sigma(\tilde{f}) = \sigma(\tilde{f}')$ . El resultado se sigue del Corolario 4.3.3. ■

Con el anterior resultado, se tiene las condiciones para introducir la siguiente definición.

**Definición 4.4.5** *Sea  $\alpha \in \mathcal{N}_g$  un elemento de orden  $p$ . Por el teorema de Realización de Nielsen sabemos que existe  $f \in \text{Diff}(N_g)$  del mismo orden en la clase de isotopía de  $\alpha$ . Definimos los datos de punto fijo de  $\alpha$  como*

$$\sigma(\alpha) := \sigma(f).$$

Con esta noción de datos de punto fijo para los elementos del grupo modular  $\mathcal{N}_g$ , se tienen los siguientes resultados:

**Teorema 4.4.6** Sean  $\alpha, \alpha' \in \mathcal{N}_g$  dos elementos de orden  $p$ , entonces  $\alpha$  es conjugado a  $\alpha'$  si y sólo si  $\sigma(\alpha) \cong \sigma(\alpha')$ .

Demostración

Antes de proceder a la demostración, sean  $f, f' \in \text{Diff}(N_g)$  representantes de la clase de isotopía de  $\alpha$  y  $\alpha'$  respectivamente tales que  $f^p = id = f'^p$ .

*Necesidad.* Supongamos que  $\alpha, \alpha' \in \mathcal{N}_g$  son conjugados, entonces existe  $\eta \in \mathcal{N}_g$  tal que

$$\eta\alpha\eta^{-1} = \alpha'.$$

Vía el homeomorfismo inyectivo  $\phi : \mathcal{N}_g^k \rightarrow \text{Mod}(S_{g-1}; 2k)$  del Teorema 2.1.2, tenemos que

$$\phi(\eta)\phi(\alpha)\phi(\eta)^{-1} = \phi(\alpha'),$$

por lo que  $\phi(\alpha)$  y  $\phi(\alpha')$  son conjugados, entonces por el Teorema 4.1.8 se tiene que

$$\sigma(\phi(\alpha)) = \sigma(\phi(\alpha')).$$

Por otro lado, si  $\tilde{f}, \tilde{f}' \in \text{Diff}(N_g)$  son los levantamientos a la doble cubierta orientable que preserva la orientación, sabemos que por definición:

$$\sigma(\phi(\alpha)) = \sigma(\tilde{f}) \quad \sigma(\phi(\alpha')) = \sigma(\tilde{f}'),$$

y así

$$\sigma(\tilde{f}) = \sigma(\tilde{f}'),$$

luego por el Teorema 4.3.1 tenemos que  $\sigma(f) \cong \sigma(f')$ . Así por definición se sigue que

$$\sigma(\alpha) \cong \sigma(\alpha').$$

*Suficiencia.* Supongamos que  $\sigma(\alpha) \cong \sigma(\alpha')$ , por definición de dato de punto fijo se tiene que

$$\sigma(f) \cong \sigma(f').$$

Por el Teorema 4.4.2 se tiene que  $f$  y  $f'$  son conjugados, luego  $\alpha, \alpha' \in \mathcal{N}_g$  son conjugados, concluyendo con el resultado. ■

El siguiente corolario es consecuencia directa de la definición de datos de punto fijo y del teorema anterior, por lo cual omitimos su demostración.

**Corolario 4.4.7** Sea  $\alpha \in \mathcal{N}_g$  un elemento de orden  $p$ . Entonces  $\alpha$  y  $\alpha^{-1}$  son conjugados.

## 4.5. Caso de puntos Marcados

En el caso de puntos marcados podemos aplicar los resultados con la restricción de que los primeros  $k$  datos de puntos fijos, correspondientes a los  $z_i$  puntos marcados  $i = 1, \dots, k$ , sean congruentes uno a uno.

**Definición 4.5.1 (Datos de punto fijo)** Sean  $f, f' \in \text{Homeo}(N_g, k)$  dos elementos de orden  $p$ . Definimos sus datos de punto fijo de la misma forma que en el caso sin puntos marcados

$$\sigma_k(f) = (\beta_1, \dots, \beta_k \mid \beta_{k+1}, \dots, \beta_t),$$

con la condición de que  $(\beta_1, \dots, \beta_t)$  sea una  $k$ -tupla ordenada asociada a los datos de punto fijo de los  $k$  puntos marcados. Decimos que  $\sigma_k(f)$  y  $\sigma_k(f')$  son congruentes denotado por  $\sigma_k(f) \cong \sigma_k(f')$ , si  $(\beta_1, \dots, \beta_k) \cong (\beta'_1, \dots, \beta'_k)$  como  $k$ -tuplas ordenadas y  $(\beta_{k+1}, \dots, \beta_t) \cong (\beta'_{k+1}, \dots, \beta'_t)$  como  $(t - k)$ -tuplas desordenadas.

Resultados análogos a los descritos en la sección anterior son obtenidos de manera semejante con la definición anterior y por completez los enunciamos en esta sección omitiendo su demostración.

**Proposición 4.5.2** Sean  $f \in \text{Homeo}(N_g; k)$  de orden  $p$  y  $\sigma_k(f) = (\beta_1, \dots, \beta_k \mid \beta_{k+1}, \dots, \beta_t)$  sus datos de punto fijo. Entonces:

1. Si  $r \in \mathbb{Z}$  y no es múltiplo de  $p$ , entonces

$$\sigma(f^r) \cong (m \cdot \beta_1, m \cdot \beta_2, \dots, m \cdot \beta_k \mid m \cdot \beta_{k+1}, \dots, m \cdot \beta_t)$$

donde  $m \in \mathbb{Z}$  es tal que  $m \cdot r \equiv 1 \pmod{p}$ .

2.  $\sigma_k(f) \cong \sigma_k(f^{-1})$ .

**Teorema 4.5.3** Sean  $f, f' \in \text{Homeo}(N_g; k)$  son dos elementos de orden  $p$ , entonces  $f$  y  $f'$  son conjugados si y sólo si  $\sigma_k(f) \cong \sigma_k(f')$

**Teorema 4.5.4** Si  $f, f' \in \text{Homeo}(N_g; k)$  son dos elementos de orden  $p$  tales que  $f$  es homotópico a  $f'$ , entonces  $\sigma_k(f) \cong \sigma_k(f')$ .

Con el resultado anterior, extendemos la definición de datos de punto fijo a  $\mathcal{N}_g^k$ .

**Definición 4.5.5** Sea  $\alpha \in \mathcal{N}_g^k$  un elemento de orden  $p$ . Por el teorema de Realización de Nielsen sabemos que existe  $f \in \text{Diff}(\mathcal{N}_g; k)$  del mismo orden. Definimos los datos de punto fijo de  $\alpha$  como

$$\sigma_k(\alpha) := \sigma_k(f).$$

**Teorema 4.5.6** Sean  $\alpha, \alpha' \in \mathcal{N}_g^k$  dos elementos de orden  $p$ , entonces  $\alpha$  es conjugado a  $\alpha'$  si y sólo si  $\sigma_k(\alpha) \cong \sigma_k(\alpha')$ .

**Corolario 4.5.7** Sea  $\alpha \in \mathcal{N}_g^k$  un elemento de orden  $p$ . Entonces  $\alpha$  y  $\alpha^{-1}$  son conjugados.

## 4.6. Aplicación de los datos de punto fijo al $p$ -periodo de $\mathcal{N}_g^k$ .

En el capítulo anterior, acotamos el  $p$ -periodo del grupo modular  $\mathcal{N}_g^k$  probando que

$$p(\mathcal{N}_g^k) \leq 4,$$

sin embargo los métodos descritos no fueron suficientes para concluir que  $p(\mathcal{N}_g^k)$  era igual a 2 o 4. En esta sección, como una primera aplicación de los datos de punto fijo, deducimos que  $p(\mathcal{N}_g^k) = 4$ .

**Proposición 4.6.1** Sean  $p$  un primo impar y  $\mathbb{Z}_p = \langle \alpha \rangle \leq \mathcal{N}_g^k$ , con  $k \geq 1$ , entonces

$$[N(\mathbb{Z}_p) : C(\mathbb{Z}_p)] = 2.$$

### Demostración

Como bien sabemos, si  $\alpha$  es un generador de  $\mathbb{Z}_p$ , entonces

$$[N(\mathbb{Z}_p) : C(\mathbb{Z}_p)] = |\{m \in \{1, \dots, p-1\} \mid \alpha^m \text{ es conjugado a } \alpha\}|.$$

Notemos primero que  $\alpha$  es conjugado consigo mismo y además por el Corolario 4.5.7,  $\alpha$  es conjugado a  $\alpha^{-1}$ . Veamos ahora que  $\alpha$  y  $\alpha^{-1}$  son las únicas dos potencias  $\alpha^m$  que son conjugadas a  $\alpha$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que el generador  $\alpha$  es elegido de tal forma que

$$\sigma_k(\alpha) = (1, \beta_2, \dots, \beta_k \mid \beta_{k+1}, \dots, \beta_t),$$

si no fuera el caso basta con elevar  $\alpha$  a una potencia  $n$  tal que  $\alpha^n$  tenga como primer dato de punto fijo al 1 y así tomar a  $\alpha^n$  como el nuevo generador de  $\mathbb{Z}_p$ . Supongamos ahora que



$\alpha$  es conjugado a  $\alpha^m$ , entonces por el Teorema 4.5.6 se tiene que  $\sigma_k(\alpha) \cong \sigma_k(\alpha^m)$ , mientras que la Proposición 4.5.2 establece que:

$$\sigma_k(\alpha^m) = (l, l \cdot \beta_2, \dots, l \cdot \beta_k \mid l \cdot \beta_{k+1}, \dots, l \cdot \beta_t),$$

con  $l \cdot m \equiv 1 \pmod{p}$ . De lo anterior deducimos que

$$(1, \beta_2, \dots, \beta_k \mid \beta_{k+1}, \dots, \beta_t) \cong (l, l \cdot \beta_2, \dots, l \cdot \beta_k \mid l \cdot \beta_{k+1}, \dots, l \cdot \beta_t).$$

Por la definición de congruencia, tenemos que  $l = 1$  o  $l = -1$ . Por otro lado, debido a que  $l \cdot m \equiv 1 \pmod{p}$ , entonces  $m = 1$  o  $-1$ , es decir,  $\alpha$  solo puede ser conjugado a  $\alpha$  y  $\alpha^{-1}$ , concluyendo que  $[N(\mathbb{Z}_p) : C(\mathbb{Z}_p)] = 2$ . ■

**Teorema 4.6.2** *Sea  $g > 2$ , y  $p$  un primo impar. Si  $\mathcal{N}_g^k$  contiene  $p$ -torsión, entonces el  $p$ -periodo de  $\mathcal{N}_g^k$  es igual a 4, es decir,  $p(\mathcal{N}_g^1) = 4$ .*

Demostración

Por el Teorema 1.4.13 se tiene la siguiente expresión para el  $p$ -periodo.

$$p(\mathcal{N}_g^k) = 2 \cdot \text{mcm}\{[N(\mathbb{Z}_p) : C(\mathbb{Z}_p)] \mid \mathbb{Z}_p \in S\} \cdot p^m$$

donde  $S$  es un conjunto de representantes de las clases de conjugación de subgrupos de orden  $p$  y  $m \geq 0$ . Notemos que por la proposición anterior  $[N(\mathbb{Z}_p) : C(\mathbb{Z}_p)] = 2$  para todo subgrupo  $\mathbb{Z}_p \leq \mathcal{N}_g^k$ . Así la fórmula se convierte en

$$p(\mathcal{N}_g^k) = 4 \cdot p^m.$$

Por otro lado, el Teorema 3.3.8 establece que  $p(\mathcal{N}_g^k) \leq 4$ , que al combinarse con el argumento anterior implica que  $p(\mathcal{N}_g^k) = 4$ . ■

## 4.7. Número de Clases de Conjugación

En esta última sección, se hará uso de los resultados referentes a los datos de punto fijo en el caso no orientable para clasificar las clases de conjugación de subgrupos de orden  $p$  de  $\mathcal{N}_g^k$ . Para ejemplificar los resultados, tratamos los casos  $\mathcal{N}_p^1$  y  $\mathcal{N}_p^2$  donde  $p$  es un primo impar y la solución a la ecuación de Riemann Hurwitz para subgrupos de orden  $p$  es  $(h, t) = (1, 2)$  (ver Ejemplo 3.1.4).

**Lema 4.7.1** Sean  $p$  un primo impar,  $(1, \beta_2, \dots, \beta_t)$  una  $t$  tupla de enteros tales que  $1 \leq \beta_i < p$  y  $h \geq 1$  tal que

$$g - 2 = p(h - 2) + t(p - 1).$$

Entonces existe  $f \in \text{Diff}(N_g)$  con  $t$  puntos fijos tal que  $f^p = 1$  y

$$\sigma(f) \cong (1, \beta_2, \dots, \beta_t)$$

### Demostración

Consideremos un grupo NEC cuya presentación algebraica es la siguiente:

$$\Gamma = \langle d_1, \dots, d_h, x_1, \dots, x_t \mid x_1^p = x_2^p = \dots = x_t^p = x_1 \cdot \dots \cdot x_t \cdot d_1^2 \cdot \dots \cdot d_h^2 = 1 \rangle,$$

con lo cual tenemos que  $\text{sig}(\Gamma) = (h, -, (p)^t)$ . Consideremos la representación del grupo  $\mathbb{Z}_p = \langle y \mid y^p = 1 \rangle$  y sea  $\mu := 1 + \sum_{i=2}^t \beta_i$ . Ponemos:

$$\epsilon(\mu) := \begin{cases} 1 & \text{si } \mu \text{ es par} \\ -1 & \text{si } \mu \text{ es impar} \end{cases} \quad \delta(\mu) := \begin{cases} -\mu & \text{si } \mu \text{ es par.} \\ -(p-1) - (\mu-1) & \text{si } \mu \text{ es impar} \end{cases}$$

y definimos un homomorfismo  $\theta : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_p$  por:

$$\begin{aligned} \theta(x_1) &= y^{\epsilon(\mu)} \\ \theta(x_i) &= y^{\beta_i} \quad i = 2, \dots, t. \\ \theta(d_1) &= y^{\frac{\delta(\mu)}{2}} \\ \theta(d_j) &= 1 \quad j = 2, \dots, h. \end{aligned}$$

Puesto que las relaciones del grupo  $\Gamma$  se preservan, tenemos que  $\theta$  es en efecto un homomorfismo, más aún,  $\theta$  es un epimorfismo pues  $\theta(x_1)$  es igual a  $y$  o  $y^{-1}$  donde ambos son generadores de  $\mathbb{Z}_p$ . Por otro lado, debido a que  $\ker(\theta) \triangleleft \Gamma$ , la definición del homomorfismo  $\theta$  y que  $(h, t)$  son tales que satisfacen la ecuación de Riemann-Hurwitz, es posible probar que  $\ker(\theta)$  es un grupo isomorfo al grupo fundamental  $\pi_1(N_g)$  y así tenemos que el subgrupo  $\mathbb{Z}_p$  es un grupo de automorfismos de la superficie  $N_g$ . Consideremos un elemento  $\gamma \in \Gamma$  tal que  $\theta(\gamma) = y$ . Como  $\ker(\theta) \triangleleft \Gamma$ , entonces  $\gamma$  induce un mapeo en el cociente  $f : \mathbb{H}^2 / \ker(\theta) \rightarrow \mathbb{H}^2 / \ker(\theta)$  tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}^2 & \xrightarrow{\gamma} & \mathbb{H}^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{H}^2 / \ker(\theta) & \xrightarrow{f} & \mathbb{H}^2 / \ker(\theta) \end{array}$$

Notemos que  $f$  satisface  $f^p = 1$  pues  $\gamma^p \in \ker(\theta)$ . Además, por el análisis de los datos de punto fijo de la Proposición 4.2.4 y ya que  $\theta(x_1) = y^{\epsilon(\mu)}$  y  $\theta(x_i) = y^{\beta_i}$ , se tiene que

$$\sigma(f) \cong (1, \beta_2, \dots, \beta_t),$$

demostrando lo deseado. ■

**Teorema 4.7.2** Sean  $g > 2$ ,  $k \geq 1$  y  $(h, t)$  enteros con  $h \geq 1$  y  $t \geq k$  que satisfacen la ecuación de Riemann-Hurwitz  $g - 2 = p(h - 2) + t(p - 1)$ . Entonces el número de  $t$ -tuplas diferentes  $(1, \beta_2, \dots, \beta_k \mid \beta_{k+1}, \dots, \beta_t)$  salvo congruencia, es el mismo número de clases de conjugación de subgrupos de orden  $p$  en  $\mathcal{N}_g^k$  que actúan en  $N_g$  dejando  $t$  puntos fijos. Es decir, hay una correspondencia biyectiva

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Clases de congruencia de } t\text{-tuplas} \\ (1, \beta_2, \dots, \beta_k \mid \beta_{k+1}, \dots, \beta_t) \\ \text{con } 0 < \beta_j < p \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Clases de conjugación de subgrupos} \\ \text{de orden } p \text{ en } \mathcal{N}_g^k \\ \text{que actúan en } N_g \text{ dejando } t \text{ puntos fijos} \end{array} \right\}$$

Demostración

Denotemos por  $\mathcal{C}$  el conjunto de las clases de conjugación de subgrupos de orden  $p$  de  $\mathcal{N}_g^k$ , que actúan en  $N_g$  dejando  $t$  puntos fijos. Sea  $\mathcal{T}$  el conjunto de las clases de congruencia de  $t$ -tuplas  $(1, \beta_2, \dots, \beta_k \mid \beta_{k+1}, \dots, \beta_t)$ . Denotaremos por  $[G]$  la clase de conjugación del subgrupo  $G$  y por  $[1, \beta_2, \dots, \beta_k \mid \beta_{k+1}, \dots, \beta_t]$  la clase de congruencia de la  $t$ -tupla  $(1, \beta_2, \dots, \beta_k \mid \beta_{k+1}, \dots, \beta_t)$ .

Notemos que para todo subgrupo  $G \leq \mathcal{N}_g^k$  de orden  $p$  existe un generador  $\alpha_G \in \mathcal{N}_g^k$  tal que

$$\sigma_k(\alpha_G) = (1, \beta_2, \dots, \beta_k \mid \beta_{k+1}, \dots, \beta_t).$$

Más aún, afirmamos que si  $G$  y  $G'$  son dos grupos de orden  $p$  que son conjugados, entonces  $\sigma_k(\alpha_G) \cong \sigma_k(\alpha_{G'})$ . En efecto, como  $G$  y  $G'$  son conjugados, entonces existe  $m \in \{1, \dots, p - 1\}$  tal que  $\alpha_G$  y  $\alpha_{G'}^m$  son conjugados, por el Teorema 4.5.6 se tiene que

$$\sigma_k(\alpha_G) \cong \sigma_k(\alpha_{G'}^m).$$

Si  $\sigma_k(\alpha_{G'}) = (1, \beta'_2, \dots, \beta'_k \mid \beta'_{k+1}, \dots, \beta'_t)$  y  $0 < l < p$  es tal que  $m \cdot l \equiv 1 \pmod{p}$ , por la Proposición 4.5.2 tenemos que

$$\sigma_k(\alpha_{G'}^m) = (l \cdot \beta_2, \dots, l \cdot \beta_k \mid l \cdot \beta_{k+1}, \dots, l \cdot \beta_t).$$

Luego, como  $\sigma_k(\alpha_G) \cong \sigma_k(\alpha_{G'}^m)$ , entonces  $l = 1$  o  $l = p - 1$ , pero  $m \cdot l \equiv 1 \pmod{p}$ , por lo que  $m = 1$  o  $-1$ , en cualquier caso se tiene que  $\sigma_k(\alpha_G) \cong \sigma_k(\alpha_{G'})$  como se afirmaba.

Definimos la función

$$\Phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{T} \quad \text{dada por} \quad [G] \mapsto [\sigma_k(\alpha_G)].$$

Por la discusión anterior, la función  $\Phi$  está bien definida. Resta probar que es una biyección.

*Inyectividad.* Sean  $[G]$  y  $[H]$  dos clases de conjugación de  $\mathcal{C}$  tales que  $\Phi([G]) = \Phi([H])$ , entonces

$$[\sigma_k(\alpha_G)] = [\sigma_k(\alpha_H)].$$

Luego,  $\sigma_k(\alpha_G)$  y  $\sigma_k(\alpha_H)$  son congruentes y por el Teorema 4.5.6  $\alpha_G$  es conjugado a  $\alpha_H$ , así pues  $G$  y  $H$  son subgrupos conjugados lo que prueba la inyectividad.

*Suprayectividad.* Sea  $[1, \beta_2, \dots, \beta_k \mid \beta_{k+1}, \dots, \beta_t]$  una clase de congruencia cuyo representante es la  $t$ -tupla  $(1, \beta_2, \dots, \beta_k \mid \beta_{k+1}, \dots, \beta_t)$ . Por el Lema 4.7.1 existe  $f \in \text{Diff}(N_g)$  de orden  $p$  con  $t$  puntos fijos tal que

$$\sigma(f) = (1, \beta_2, \dots, \beta_t).$$

Conjugando a  $f$  con un mapeo isotópico a la identidad  $g$  que manda los primeros  $k$  puntos fijos a los puntos marcados, podemos suponer que  $f \in \text{Diff}(N_g; k)$  y  $(1, \beta_2, \dots, \beta_k)$  corresponden a los datos de punto fijo de los puntos marcados (notemos que esto es posible debido a que sus datos de punto fijo no se alteran bajo conjugación ni homotopía). Luego, el subgrupo  $G := \langle [f] \rangle < \mathcal{N}_g^k$ , cumple que  $\Phi([G]) = [1, \beta_2, \dots, \beta_k \mid \beta_{k+1}, \dots, \beta_t]$ . ■

**Proposición 4.7.3** *El número de clases de conjugación de subgrupos de orden  $p$  en  $\mathcal{N}_p^1$  y  $\mathcal{N}_p^2$  está determinado por las 2-tuplas  $(1 \mid \beta_2)$  tales que  $1 \leq \beta_2 \leq \frac{p-1}{2}$ .*

### Demostración

En el caso de la superficie  $N_p$  de género  $p$ , existe una única solución a la ecuación de Riemann-Hurwitz  $(h, t) = (1, 2)$ . Luego por el Teorema 4.7.2 el número de clases de conjugación es igual al número de clases de congruencia de las 2-tuplas  $(1 \mid \beta_2)$ . Notemos que las 2-tuplas posibles son:

$$(1 \mid 1), (1 \mid 2), (1 \mid 3), \dots, (1 \mid p-2), (1 \mid p-1)$$

y bajo la relación de congruencia tenemos que

$$(1 \mid 1) \cong (1 \mid p-1), (1 \mid 2) \cong (1 \mid p-2), \dots, \left(1 \mid \frac{p-1}{2}\right) \cong \left(1 \mid \frac{p+1}{2}\right)$$

Así, los posibles valores para  $\beta_2$  salvo congruencia son  $1 \leq \beta_2 \leq \frac{p-1}{2}$ , demostrando el resultado. En el caso de 2 puntos marcados, la demostración es idéntica. ■



## Capítulo 5

# La $p$ torsión de la cohomología de Farrell de $\mathcal{N}_g^k$ , $k = 1, 2$ .

En capítulos anteriores, probamos que  $\mathcal{N}_g^k$  tiene cohomología  $p$ -periódica si contiene un subgrupo de orden  $p$ , luego el Teorema 1.4.17 establece que si  $S$  es un conjunto de representantes de las clases de conjugación de subgrupos de orden  $p$  de  $\mathcal{N}_g^k$ , entonces la cohomología de Farrell del grupo modular  $\mathcal{N}_g^k$  está determinada por:

$$\hat{H}^*(\mathcal{N}_g^k; \mathbb{Z})_{(p)} \cong \prod_{\mathbb{Z}_p \in S} \hat{H}^*(N(\mathbb{Z}_p), \mathbb{Z})_{(p)}$$

En este sentido, en el capítulo anterior establecimos una correspondencia biyectiva entre las clases de conjugación de subgrupos de orden  $p$  y las clases de congruencia de las  $t$ -tuplas  $(1, \beta_2 \dots \beta_k \mid \beta_{k+1}, \dots, \beta_t)$ , trasladando el estudio de las clases de conjugación a un problema puramente combinatorio. El ingrediente final para obtener la componente  $p$ -primaria de la cohomología de Farrell, es desarrollar técnicas que nos permitan calcular la cohomología de los normalizadores  $N(\mathbb{Z}_p)$  para los representantes  $\mathbb{Z}_p$  de las clases de conjugación. Con este fin, en este capítulo se define para cada  $\mathbb{Z}_p \leq \mathcal{N}_g^k$ , un homomorfismo inyectivo

$$I : N(\mathbb{Z}_p) / \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathcal{N}_h^{(k,t)}$$

donde  $(h, t)$  satisfacen la ecuación de Riemann-Hurwitz

$$g - 1 = p(h - 1) + t(p - 1) \text{ con } t \geq k \text{ y}$$

$$\mathcal{N}_h^{(k,t)} = \pi_0 \text{Diff}(N_h, \text{fija}\{p_1, \dots, p_k\}, \text{permuta}\{p_{k+1}, \dots, p_t\}).$$

Finalizamos el capítulo aplicando las técnicas descritas en esta tesis al caso de una superficie  $N_p$  de género un primo impar  $p$ . Determinaremos el normalizador  $N(\mathbb{Z}_p)$  para cualquier subgrupo de orden  $p$  y usando los resultados descritos a lo largo de este trabajo, seremos capaces de concluir con el siguiente teorema que determina  $\widehat{H}^*(\mathcal{N}_p^k; \mathbb{Z})_{(p)}$  en el caso de un primo impar  $p$ .

**Teorema.** *Sea  $p$  un número primo impar. Entonces*

$$\widehat{H}^i(\mathcal{N}_p^k; \mathbb{Z})_{(p)} = \begin{cases} (\mathbb{Z}_p)^{\frac{p-1}{2}} & i \equiv 0 \pmod{4} \\ 0 & i \equiv 1, 2, 3 \pmod{4} \end{cases} \quad \text{para } k = 1, 2$$

$$\widehat{H}^i(\mathcal{N}_p^k; \mathbb{Z})_{(p)} = 0 \quad \text{para } k > 2.$$

## 5.1. Homomorfismo del Normalizador $N(\mathbb{Z}_p) \leq \mathcal{N}_g^k$ a $\mathcal{N}_h^{(k,t)}$

Nuestro objetivo en esta sección es establecer un homomorfismo

$$\widehat{I} : N(\mathbb{Z}_p) \rightarrow \mathcal{N}_h^{(k,t)}$$

para todo subgrupo  $\mathbb{Z}_p$  del grupo modular  $\mathcal{N}_g^k$ , donde la pareja  $(h, t)$  satisface la ecuación de Riemann-Hurwitz y

$$\mathcal{N}_h^{(k,t)} := \pi_0 \text{Diff}(N_h; \text{fija}\{p_1, \dots, p_k\}, \text{permuta}\{p_{k+1}, \dots, p_t\}).$$

Con esta finalidad, en el apéndice A hacemos un breve recordatorio de la teoría de Birman-Hilden, enunciando los resultados principales a usar en esta sección. Las demostraciones pueden ser consultadas en [MW21].

Recordemos que para cualquier difeomorfismo  $f \in \text{Diff}(N_g; k)$ , a través de la doble cubierta orientable  $\pi : S_{g-1} \rightarrow N_g$ , existe una forma natural de elegir un levantamiento  $\tilde{f} \in \widetilde{\text{Diff}}^+(S_{g-1}; 2k)$  y con esta elección definimos el homomorfismo

$$\rho : \text{Diff}(N_g; k) \rightarrow \widetilde{\text{Diff}}^+(S_{g-1}; 2k) \quad f \mapsto \tilde{f},$$

el cual induce un homomorfismo inyectivo de grupos modulares

$$\phi : \mathcal{N}_g^k \rightarrow \text{Mod}(S_{g-1}; 2k) \quad [f] \mapsto [\rho(f)].$$



Sea  $\mathbb{Z}_p$  un subgrupo de orden  $p$  del grupo modular  $\mathcal{N}_g^k$ , entonces por el Teorema 2.3.3 existe una estructura dianalítica  $\mathfrak{X}$  y un difeomorfismo  $f \in \text{Diff}(N_g; k)$  de orden  $p$  tal que

$$\langle f \rangle \cong \mathbb{Z}_p \leq \mathcal{N}_g^k \quad \text{y} \quad \langle \tilde{f} \rangle \cong \phi(\mathbb{Z}_p) \leq \text{Mod}(S_{g-1}; 2k).$$

Sea  $t$  el número de puntos fijos de  $f$ , entonces  $\tilde{f}$  tiene  $2t$  puntos fijos (ver Lema 2.1.1). Bajo la acción de  $f : N_g \rightarrow N_g$  en  $N_g$ , el espacio de órbitas  $N_g / \langle f \rangle$  es homeomorfo a  $N_h$ , mientras que  $S_{g-1} / \langle \tilde{f} \rangle$  es homeomorfo a  $S_{h-1}$  bajo la acción de  $\tilde{f} : S_{g-1} \rightarrow S_{g-1}$ , donde  $h$  satisface la ecuación de Riemann-Hurwitz

$$g - 2 = p(h - 2) + t(p - 1).$$

Consideremos los mapeos cocientes

$$q_S : S_{g-1} \rightarrow S_{h-1} \quad \text{y} \quad q_N : N_g \rightarrow N_h.$$

Como  $J \circ \tilde{f} = \tilde{f} \circ J$ , entonces existe  $\hat{J} : S_{h-1} \rightarrow S_{h-1}$  tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} S_{g-1} & \xrightarrow{J} & S_{g-1} \\ q_S \downarrow & & \downarrow q_S \\ S_{h-1} & \xrightarrow{\hat{J}} & S_{h-1} \end{array}$$

Puesto que  $J : S_{g-1} \rightarrow S_{g-1}$  es una involución que invierte la orientación, entonces  $\hat{J} : S_{h-1} \rightarrow S_{h-1}$  cumple con la misma propiedad.

Además, notemos que la involución  $\hat{J} : S_{h-1} \rightarrow S_{h-1}$  no tiene puntos fijos (ver demostración del Teorema 4.3.1). Así pues, tenemos que el espacio de órbitas  $S_{h-1} / \langle \hat{J} \rangle$  es homeomorfo a  $N_h$  y que el mapeo cociente  $\pi_h : S_{h-1} \rightarrow N_h$  es un modelo de la doble cubierta orientable de  $N_h$ . Emplearemos la notación  $\pi_g : S_{g-1} \rightarrow N_g$  para referirnos a la doble cubierta orientable de la superficie  $N_g$ . No es difícil ver que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} S_{g-1} & \xrightarrow{\pi_g} & N_g \\ q_S \downarrow & & \downarrow q_N \\ S_{h-1} & \xrightarrow{\pi_h} & N_h. \end{array} \tag{5.1}$$

Consideremos el cubriente ramificado  $q_S : S_{g-1} \rightarrow N_{h-1}$ . Denotamos por  $S\text{Mod}(S_{g-1}; 2k)$  al subconjunto de  $\text{Mod}(S_{g-1}; 2k)$  de las clases de isotopía que tienen un representante que

preserva fibras y a  $LMod(S_{h-1}; 2t)$  el subconjunto de  $Mod(S_{h-1}; 2t)$  formado por todas las clases de isotopía que tienen un representante que se levanta bajo el cubriente  $q_S : S_{g-1} \rightarrow S_{h-1}$ . Notemos que si  $[u] \in SMod(S_{g-1}; 2k)$ , con  $u : S_{g-1} \rightarrow S_{g-1}$  representante de la clase que preserve fibras del cubriente  $q_S : S_{g-1} \rightarrow S_{h-1}$ , entonces existe  $v \in Diff(S_{h-1}; 2t)$  tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} S_{g-1} & \xrightarrow{u} & S_{g-1} \\ q_S \downarrow & & \downarrow q_S \\ S_{h-1} & \xrightarrow{v} & S_{h-1}. \end{array}$$

Así, definimos una una función natural

$$\Psi_S : SMod(S_{g-1}; 2k) \rightarrow LMod(S_{h-1}; 2t) \quad [u] \mapsto [v].$$

Claramente la función  $\Psi_S$  está bien definida por el Teorema A.2. Similarmente, afirmamos que en el caso del cubriente ramificado  $q_N : N_g \rightarrow N_h$  existe una función natural

$$\Psi_N : S\mathcal{N}_g^k \rightarrow L\widetilde{\mathcal{N}}_h^t \quad [w] \mapsto [y].$$

donde  $w \in Diff(N_g; k)$  preserva fibras y  $y \in Diff(N_h; t)$  es tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} N_g & \xrightarrow{w} & N_g \\ q_N \downarrow & & \downarrow q_N \\ N_h & \xrightarrow{y} & N_h. \end{array}$$

Nuestro objetivo es demostrar que la función  $\Psi_N$  está bien definida. De manera más general, podemos preguntarnos si para cualquier cubriente ramificado con un número finito de hojas  $q : N \rightarrow \Sigma$ , donde  $N$  es una superficie no orientable ¿es posible probar que la función natural  $\Psi : SMod(N) \rightarrow LMod(\Sigma; t)$  está bien definida? El resultado se puede trasladar al caso no orientable a partir de la doble cubierta orientable de  $S$  y de  $\Sigma$ , sin embargo, esto se sale de nuestros objetivos y sólo nos centramos en el caso del cubriente ramificado  $q_N : N_g \rightarrow N_h$  el cual es obtenido por la acción de un homeomorfismo de la superficie  $N_g$  de orden  $p$ , dejando abierta la pregunta que formulamos. La idea que seguimos para

probar que  $\Psi_N$  está bien definida, es expresar a  $\Psi_N$  como composición de funciones bien definidas.

**Proposición 5.1.1** Sean  $\mathbb{Z}_p$  un subgrupo de  $\mathcal{N}_g^k$  y  $f \in \text{Diff}(N_g; k)$  de orden  $p$  tal que  $\mathbb{Z}_p \cong \langle f \rangle$ . Sean  $t$  el número de puntos fijos de  $f$  y  $h$  el entero que satisface la ecuación de Riemann-Hurwitz  $g - 2 = p(h - 2) + t(p - 1)$ . Denotemos por  $q_N : N_g \rightarrow N_h$  el cubriente ramificado obtenido por la acción de  $\mathbb{Z}_p$  en la superficie  $N_h$ . Entonces la función natural obtenida por el cubriente ramificado  $q_N : N_g \rightarrow N_h$

$$\Psi_N : S\mathcal{N}_g^k \rightarrow L\widetilde{\mathcal{N}}_h^t$$

está bien definida.

### Demostración

Denotemos por  $\phi : \mathcal{N}_g^k \rightarrow \text{Mod}(S_{g-1}; 2k)$  y  $\phi' : \widetilde{\mathcal{N}}_h^t \rightarrow \text{Mod}(S_{h-1}; 2t)$  los homomorfismos obtenidos por las dobles cubiertas orientables  $\pi_g : S_{g-1} \rightarrow N_g$  y  $\pi_h : S_{h-1} \rightarrow N_h$  descritas en la discusión anterior. Por el Teorema 2.1.2 ambos homomorfismos son inyectivos y por tanto existe la función inversa sobre su imagen. En particular existe  $(\phi')^{-1} : \text{Im}(\phi') \rightarrow \widetilde{\mathcal{N}}_h^t$ . Por otro lado, por la Proposición A.2 la función  $\Psi_S : S\text{Mod}(S_{g-1}; 2k) \rightarrow L\text{Mod}(S_{h-1}; 2t)$  obtenida del cubriente ramificado  $q_S : S_{g-1} \rightarrow S_{h-1}$  está bien definida.

Para probar que la función  $\Psi_N : S\mathcal{N}_g^k \rightarrow L\widetilde{\mathcal{N}}_h^t$  está bien definida, veremos que

$$\Psi_N = (\phi')^{-1} \circ \Psi_S \circ \phi|_{S\mathcal{N}_g^k} : S\mathcal{N}_g^k \rightarrow L\widetilde{\mathcal{N}}_h^t,$$

para lo cual probaremos las siguientes dos contenciones:

1.  $\text{Im}(\phi|_{S\mathcal{N}_g^k}) \subset S\text{Mod}(S_{g-1}; 2k)$ .
2.  $\text{Im}(\Psi_S \circ \phi|_{S\mathcal{N}_g^k}) \subset \text{Im}(\phi')$ .

Sea  $\alpha \in S\mathcal{N}_g^k$ , entonces por definición existe  $w \in \text{Diff}(N_g, k)$  representante de la clase  $\alpha$  que preserva fibras y un difeomorfismo  $y \in \widetilde{\text{Diff}}(N_h; t)$  tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} N_g & \xrightarrow{w} & N_g \\ q_N \downarrow & & \downarrow q_N \\ N_h & \xrightarrow{y} & N_h \end{array} \quad (5.2)$$

Tomemos los levantamientos  $\tilde{w} \in \widetilde{Diff}^+(S_{g-1}; 2k)$  y  $\tilde{y} \in \widetilde{Diff}^+(S_{h-1}; 2t)$  vía las dobles cubiertas orientables  $\pi_g : S_{g-1} \rightarrow N_g$  y  $\pi_h : S_{h-1} \rightarrow N_h$  respectivamente. Observemos que:

$$\begin{aligned}
\pi_h \circ q_S \circ \tilde{w} &= q_N \circ \pi_g \circ \tilde{w} && \text{por el diagrama 5.1,} \\
&= q_N \circ w \circ \pi_g && \text{por ser } \tilde{w} \text{ levantamiento de } w \text{ bajo } \pi_g : S_{g-1} \rightarrow N_g \\
&= y \circ q_N \circ \pi_g && \text{por el diagrama 5.2,} \\
&= y \circ \pi_h \circ q_S && \text{por el diagrama 5.1,} \\
&= \pi_h \circ \tilde{y} \circ q_S && \text{por ser } \tilde{y} \text{ levantamiento de } y \text{ bajo } \pi_h : S_{h-1} \rightarrow N_h,
\end{aligned}$$

de donde  $\pi_h \circ q_S \circ \tilde{w} = \pi_h \circ \tilde{y} \circ q_S$  y de aquí se sigue que existe  $k \in \{0, 1\}$  tal que

$$q_S \circ \tilde{w} = \hat{J}^k \circ \tilde{y} \circ q_S. \quad (5.3)$$

Luego  $\hat{J}^k \circ \tilde{y} : S_{g-1} \rightarrow S_{g-1}$  es un levantamiento de  $\tilde{w} : S_{h-1} \rightarrow S_{h-1}$  bajo el cubriente  $q_S : S_{g-1} \rightarrow S_{h-1}$ . Como los levantamientos de homeomorfismos que preservan la orientación en una cubierta ramificada también preservan la orientación, se sigue que  $k = 0$ , pues en caso contrario  $\hat{J} \circ \tilde{y} : S_{g-1} \rightarrow S_{g-1}$  sería un levantamiento de  $\tilde{w} : S_{h-1} \rightarrow S_{h-1}$  que invierte la orientación, lo cual no puede suceder. Así, se obtiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
S_{g-1} & \xrightarrow{\tilde{w}} & S_{g-1} & & \\
\downarrow q_S & \searrow \pi_g & \downarrow q_S & \searrow \pi_g & \\
N_g & \xrightarrow{w} & N_g & & \\
\downarrow q_N & \searrow \pi_h & \downarrow q_N & \searrow \pi_h & \\
S_{h-1} & \xrightarrow{\tilde{y}} & S_{h-1} & & \\
\downarrow q_S & \searrow \pi_g & \downarrow q_S & \searrow \pi_g & \\
N_h & \xrightarrow{y} & N_h & & 
\end{array}$$

donde vemos que  $[\tilde{w}] \in SMod(S_{g-1}; 2k)$ ,  $[\tilde{y}] \in LMod(S_{h-1}; 2t)$  y

$$\Psi_S([\tilde{w}]) = [\tilde{y}] \quad (5.4)$$

para el cubriente ramificado  $q_S : S_{g-1} \rightarrow S_{h-1}$ . Por otro lado, por la definición de  $\phi : \mathcal{N}_g^k \rightarrow Mod(S_{g-1}; 2k)$  y  $\phi' : \widetilde{\mathcal{N}}_h^t \rightarrow Mod(S_{h-1}; 2t)$ , tenemos que  $\phi([w]) = [\tilde{w}] \in SMod(S_{g-1}; 2k)$  lo que prueba la contención (1), mientras que por la Ecuación 5.4 y la definición de las funciones  $\phi$  y  $\phi'$  obtenemos

$$\Psi_S(\phi([w])) = \phi'([y]), \quad (5.5)$$

lo que prueba la contención (2). Por las contenciones (1) y (2) tenemos que la composición  $\phi'^{-1} \circ \Psi_S \circ \phi|_{S\mathcal{N}_g^k} : S\mathcal{N}_g^k \rightarrow L\widetilde{\mathcal{N}}_h^t$  está bien definida. Finalmente, notemos que  $\Psi_N([w]) = [y]$  y que por la Ecuación 5.5 se tiene que

$$\Psi_N([w]) = [y] = \phi'^{-1} \circ \Psi_S \circ \phi|_{S\mathcal{N}_g^k}([w]).$$

Como  $\alpha = [w] \in S\mathcal{N}_g^k$  fue un elemento arbitrario, entonces

$$\Psi_N = \phi'^{-1} \circ \Psi_S \circ \phi|_{S\mathcal{N}_g^k},$$

concluyendo que  $\Psi_N : \mathcal{N}_g^k \rightarrow \widetilde{\mathcal{N}}_h^t$  está bien definida. ■

**Teorema 5.1.2** Sean  $\mathbb{Z}_p = \langle \alpha \rangle$  un subgrupo de  $\mathcal{N}_g^k$ . Sean  $h \geq 0$  y  $t \geq k$  enteros que satisfacen la ecuación de Riemann-Hurwitz  $g - 2 = p(h - 2) + t(p - 1)$ . Entonces existe un homomorfismo inyectivo

$$I : N(\mathbb{Z}_p)/\mathbb{Z}_p \rightarrow \mathcal{N}_h^{(k,t)},$$

donde  $N(\mathbb{Z}_p)$  es el normalizador de  $\mathbb{Z}_p$  en  $\mathcal{N}_g^k$  y

$$\mathcal{N}_h^{(k,t)} = \pi_0 \text{Diff}(N_h; \text{fija}\{p_1, \dots, p_k\}, \text{permuta}\{p_{k+1}, \dots, p_t\}) \leq \widetilde{\mathcal{N}}_h^t.$$

### Demostración

Por el Teorema 2.3.3 existe una estructura dianalítica  $\mathfrak{X}$  de  $N_g^k$  y un difeomorfismo  $f \in \text{Diff}(N_g; k)$  que representa a la clase  $\alpha$  tales que

$$f^p = \text{id}_{N_g} \text{ y } \tilde{f}^p = \text{id}_{S_{g-1}},$$

donde  $f : (N_g, \mathfrak{X}) \rightarrow (N_g, \mathfrak{X})$  es un mapeo dianalítico y  $\tilde{f} : (S_{g-1}, \pi^* \mathfrak{X}) \rightarrow (S_{g-1}, \pi^* \mathfrak{X})$  es analítico. Consideramos el cubriente ramificado obtenido por la acción de  $f : N_g \rightarrow N_g$

$$q : N_g \rightarrow N_g / \langle f \rangle \cong N_h.$$

Por la Proposición 5.1.1 hay una función bien definida

$$\Psi : S\mathcal{N}_g^k \rightarrow L\widetilde{\mathcal{N}}_h^t, \quad [w] \mapsto [y]$$

donde  $w \in \text{Diff}(N_g; k)$  y  $y \in \widetilde{\text{Diff}}(N_h; t)$  son tales que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} N_g & \xrightarrow{w} & N_g \\ q \downarrow & & \downarrow q \\ N_h & \xrightarrow{y} & N_h \end{array} .$$

Probaremos primero que  $N(\mathbb{Z}_p) \subset S\mathcal{N}_g^k$ , con ello obtendremos que la función restricción de  $\Psi$  a  $N(\mathbb{Z}_p)$  está bien definida.

Sea  $\theta \in N(\mathbb{Z}_p)$ , entonces  $\theta[f]\theta^{-1} = [f]^r$  para algún  $0 < r < p$ . Sea  $\phi : \mathcal{N}_g^k \rightarrow \text{Mod}(S_{g-1})$  el homomorfismo inyectivo obtenido vía la doble cubierta orientable  $\pi : S_{g-1} \rightarrow N_g$  y consideremos  $\phi(\theta)$ ,  $\phi([f]) = [\tilde{f}] \in \text{Mod}(S_{g-1}; 2k)$ . Entonces

$$\phi(\theta)\phi([f])\phi(\theta)^{-1} = \phi([f]) \quad \text{o de otra forma} \quad \phi(\theta) = [\tilde{f}]^r \phi(\theta) [\tilde{f}]^{-1}. \quad (5.6)$$

Tomemos un representante casiconforme  $\hat{w} \in \widetilde{\text{Diff}}(S_{g-1}; 2k)$  de la clase de  $\phi(\theta)$ . Por los Teoremas de Teichmüller en el caso de puntos marcados, existe un único mapeo  $\tilde{w} \in \widetilde{\text{Diff}}(S_{g-1}; 2k)$  homotópico a  $\hat{w} : S_{g-1} \rightarrow S_{g-1}$  tal que  $\tilde{w}$  tiene la menor dilatación para la estructura  $\pi^*\mathcal{X}$ . Como  $\tilde{f} : S_{g-1} \rightarrow S_{g-1}$  es un mapeo analítico para la estructura  $\pi^*\mathcal{X}$ , entonces

$$K_{\tilde{f} \circ \tilde{w} \circ \tilde{f}^{-1}} = K_{\tilde{w}},$$

mientras que por la Ecuación 5.6 se tiene que

$$[\tilde{w}] = [\tilde{f}]^r [\tilde{w}] [\tilde{f}]^{-1}.$$

Así pues, el mapeo  $\tilde{f}^r \circ \tilde{w} \circ \tilde{f}$  tiene la misma dilatación que  $\tilde{w}$  y ambas son homotópicas, entonces por la unicidad de los teoremas de Teichmüller se sigue que

$$\tilde{w} = \tilde{f}^r \circ \tilde{w} \circ \tilde{f}^{-1} \Rightarrow \tilde{w} \circ \tilde{f} \circ \tilde{w}^{-1} = \tilde{f}^r \quad (5.7)$$

Un argumento similar, prueba que  $J\tilde{w}J = \tilde{w}$ , ya que  $J$  es un mapeo antianalítico con la estructura  $\pi^*\mathcal{X}$  y no afecta la dilatación del mapeo  $\tilde{w}$ . Luego, el mapeo  $\tilde{w} : S_{g-1} \rightarrow S_{g-1}$  preserva fibras de la doble cubierta orientable  $\pi : S_{g-1} \rightarrow N_g$  y por lo tanto existe un mapeo  $w : N_g \rightarrow N_g$  tal que  $\tilde{w} : S_{g-1} \rightarrow S_{g-1}$  es un levantamiento de  $w$ , o dicho de otra forma  $\phi([w]) = [\tilde{w}]$ . Además, por la ecuación (5.7) se tiene que

$$w \circ f \circ w^{-1} = f^r,$$

lo que implica que  $w : N_g \rightarrow N_g$  es un mapeo que preserva fibras del cubriente ramificado  $q : N_g \rightarrow N_h$ , es decir  $[w] \in S\mathcal{N}_g^k$ . Ahora, como

$$\phi(\theta) = [\tilde{w}] = \phi([w])$$

y por la inyectividad de  $\phi : \mathcal{N}_g^k \rightarrow \text{Mod}(S_{g-1}; 2k)$  (ver Teorema 2.1.2) se tiene que

$$\theta = [w] \in S\mathcal{N}_g^k,$$

lo que prueba que  $N(\mathbb{Z}_p) \subset S\mathcal{N}_g^k$ . Con ello garantizamos que el homomorfismo restricción  $\Psi_{N|N(\mathbb{Z}_p)} : N(\mathbb{Z}_p) \rightarrow L\widetilde{\mathcal{N}}_h^t$  está bien definido.

Por otro lado, si  $[w] \in S\mathcal{N}_g^k$  es tal que  $\Psi([w]) = 1$ , entonces el representante  $w \in \text{Diff}(N_g; k)$  que preserva fibras de la clase  $[w]$  es una transformación cubriente de  $q : N_g \rightarrow N_h$ . Luego  $w = f^s$  para algún entero  $0 \leq s \leq p - 1$ , por lo que  $\ker(\Psi) \subset \langle [f] \rangle = \mathbb{Z}_p$ . Por otro lado, es claro que  $\mathbb{Z}_p = \langle [f] \rangle \subset \ker(\Psi)$ , por lo tanto  $\mathbb{Z}_p = \ker(\Psi)$ .

Finalmente, no es difícil ver que  $\text{Im}(\Psi_{N|N(\mathbb{Z}_p)}) \subset \mathcal{N}_h^{(k,t)}$ , concluyendo que el homomorfismo restricción  $\Psi_{N|N(\mathbb{Z}_p)} : N(\mathbb{Z}_p) \rightarrow L\widetilde{\mathcal{N}}_h^t$  induce un homomorfismo inyectivo

$$I : N(\mathbb{Z}_p)/\mathbb{Z}_p \rightarrow \mathcal{N}_h^{(k,t)},$$

lo que prueba el resultado. ■

**Observación 5.1.3** *El homomorfismo  $I : N(\mathbb{Z}_p)/\mathbb{Z}_p \rightarrow \mathcal{N}_g^{(k,t)}$  del teorema anterior es definido de la siguiente forma: para todo  $[w] \in N(\mathbb{Z}_p)$ , donde  $w \in \text{Diff}(N_g; k)$  es un representante que preserva fibras del cubriente ramificado  $q : N_g \rightarrow N_h$ , se tiene que existe*

$$y \in \text{Diff}(N_h; \text{fija}\{p_1, \dots, p_k\}, \text{permuta}\{p_{k+1}, \dots, p_t\})$$

tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} N_g^t & \xrightarrow{w} & N_g^t \\ q \downarrow & & \downarrow q \\ N_h^t & \xrightarrow{y} & N_h^t. \end{array}$$

Entonces  $I : N(\mathbb{Z}_p)/\mathbb{Z}_p \rightarrow \mathcal{N}_g^{(k,t)}$  está definido por:

$$I(\overline{[y]}) := \Psi_N([y]) = [w],$$

donde  $\overline{[y]}$  denota la clase de  $[y] \in N(\mathbb{Z}_p)$  en  $N(\mathbb{Z}_p)/\mathbb{Z}_p$ .

El teorema anterior, establece que para todo subgrupo  $\mathbb{Z}_p$  de orden  $p$  de  $\mathcal{N}_g^k$  existe una conexión entre  $N(\mathbb{Z}_p)/\mathbb{Z}_p$  y el grupo modular  $\widetilde{\mathcal{N}}_h^t$  de una superficie de género  $h$ , donde  $(h, t)$  son soluciones de la ecuación de Riemann-Hurwitz. Si comprendemos más acerca de la imagen  $I(N(\mathbb{Z}_p)/\mathbb{Z}_p)$ , entonces podremos determinar  $N(\mathbb{Z}_p)/\mathbb{Z}_p$ . En esta dirección, el siguiente lema determina los elementos de  $\mathcal{N}_h^{(k,t)}$  que pertenecen a la imagen de  $I$  y como éstos pueden ser caracterizados por la acción de monodromía del subgrupo  $\mathbb{Z}_p$  en la superficie  $N_g$ .

**Lema 5.1.4** Sea  $\mathbb{Z}_p \leq \mathcal{N}_g^k$  y  $(h, t)$  soluciones de la ecuación de Riemann-Hurwitz  $g - 2 = p(h - 2) + t(p - 1)$ . Consideremos el cubriente ramificado  $q : N_g \rightarrow N_h$  obtenido de la acción de  $\mathbb{Z}_p$  por difeomorfismos en  $N_g$  y removamos los puntos de ramificación. Si  $\theta$  es el epimorfismo obtenido de la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \pi_1(N_g^t) \xrightarrow{q_*} \pi_1(N_h^t) \xrightarrow{\theta} \mathbb{Z}_p \rightarrow 0,$$

entonces:

1.  $\text{Im}(I : N(\mathbb{Z}_p)/\mathbb{Z}_p \rightarrow \mathcal{N}_h^{(k,t)}) = \{[y] \in \mathcal{N}_h^{(k,t)} \mid y \text{ se levanta bajo } q : N_g^t \rightarrow N_h^t\}$
2. Un difeomorfismo  $y : N_h^t \rightarrow N_h^t$  se levanta a un difeomorfismo  $w : N_g^t \rightarrow N_g^t$  si y sólo si  $y_*(\ker(\theta)) = \ker(\theta)$ .
3.  $\text{Im}(I) = \{[y] \in \mathcal{N}_h^{(k,t)} \mid y_*(\ker(\theta)) = \ker(\theta)\}$

### Demostración

1. Si  $[y] \in \text{Im}(I : N(\mathbb{Z}_p)/\mathbb{Z}_p \rightarrow \mathcal{N}_h^{(k,t)})$ , entonces existe  $[w] \in N(\mathbb{Z}_p)$  tal que

$$I([\overline{w}]) = [y].$$

Por definición del homomorfismo  $I$  en la Observación 5.1.3 se tiene que  $w \in \text{Diff}(N_g; k)$  es un levantamiento de  $y$  probando la primera contención. Para la contención opuesta, supongamos que  $[y] \in \mathcal{N}_h^{(k,t)}$  es tal que tal que  $y : N_h^t \rightarrow N_h^t$  se levanta a  $w \in \text{Diff}(N_g; k)$ , esto significa que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} N_g^t & \xrightarrow{w} & N_g^t \\ q \downarrow & & \downarrow q \\ N_h^t & \xrightarrow{y} & N_h^t. \end{array}$$

Ahora, por definición de  $I : N(\mathbb{Z}_p)/\mathbb{Z}_p \rightarrow \mathcal{N}_h^{(k,t)}$  en la Observación 5.1.3 se tiene que

$$I([\overline{w}]) = [y].$$

resta probar que  $[w] \in N(\mathbb{Z}_p)$ . Así pues, consideremos  $f \in \text{Diff}(N_g; k)$  el difeomorfismo que realiza a  $\mathbb{Z}_p$ , esto es  $\mathbb{Z}_p \cong \langle f \rangle$ . Notemos que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} N_g^t & \xrightarrow{w} & N_g^t & \xrightarrow{f} & N_g^t & \xrightarrow{w^{-1}} & N_g^t \\ q \downarrow & & \downarrow q & & \downarrow q & & \downarrow q \\ N_h^t & \xrightarrow{y} & N_h^t & \xrightarrow{id} & N_h^t & \xrightarrow{y^{-1}} & N_h^t \end{array}$$



Notemos además que el último renglón horizontal del anterior diagrama es la identidad, luego  $w \circ f \circ f^{-1}$  es una transformación cubriente de  $q : N_g^t \rightarrow N_h^t$ , pero el grupo de transformaciones cubrientes es igual a  $\langle f \rangle$ , por lo que existe  $s = 1, 2, \dots, p$  tal que  $w \circ f \circ w^{-1} = f^s$ . Así pues, tenemos que  $[w] \in N(\mathbb{Z}_p)$  lo que prueba la segunda contención y por lo tanto la afirmación.

2. Recordemos que  $y \circ q$  se levanta a  $w : N_g^t \rightarrow N_g^t$  si y sólo si

$$(y \circ q)_*(\pi_1(N_g^t)) \subset q_*(\pi_1(N_g^t)).$$

Por otro lado, por la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \pi_1(N_g^t) \xrightarrow{q_*} \pi_1(N_h^t) \xrightarrow{\theta} \mathbb{Z}_p \rightarrow 0$$

se tiene que  $q_*(\pi_1(N_g^t)) = \ker(\theta)$ . Así pues  $y \circ q : N_g^t \rightarrow N_h^t$  se levanta a  $w : N_g^t \rightarrow N_g^t$  si y sólo si

$$y_*(\ker(\theta)) \subset \ker(\theta).$$

Por lo tanto  $y : N_h^t \rightarrow N_h^t$  se levanta a un difeomorfismo  $w : N_g^t \rightarrow N_g^t$  si y sólo si  $y \circ q$  y  $y^{-1} \circ q$  se levantan y esto sucede si y sólo si

$$y_*(\ker(\theta)) \subset \ker(\theta) \quad \text{y} \quad y_*^{-1}(\ker(\theta)) \subset \ker(\theta).$$

De esto último se sigue el resultado.

La afirmación (3) se sigue de (1) y (2). ■

## 5.2. El normalizador $N(\mathbb{Z}_p) < \mathcal{N}_p^k$ , $k = 1, 2$

En el Ejemplo 3.1.4 vimos que para una superficie  $N_p$  de género  $p$  un primo impar, los grupos modulares  $\mathcal{N}_p^1$  y  $\mathcal{N}_p^2$  tienen  $p$ -torsión. Además vimos que hay una única solución a la ecuación de Riemann-Hurwitz cuyos valores son  $(h, t) = (1, 2)$ . Consideremos a  $\mathbb{Z}_p \leq \mathcal{N}_p^k$  y el difeomorfismo  $f \in \text{Diff}(N_p; k)$  que realiza a  $\mathbb{Z}_p$  para  $k = 1, 2$  (ver Teorema 2.3.3). Entonces, vía la acción del difeomorfismo  $f$  en la superficie  $N_p$  obtenemos el cubriente ramificado

$$q : N_p \rightarrow N_1 = \mathbb{R}P^2$$

con dos puntos de ramificación. En la sección anterior probamos que  $q : N_p \rightarrow N_1 = \mathbb{R}P^2$  induce un homomorfismo inyectivo

$$I : N(\mathbb{Z}_p)/\mathbb{Z}_p \rightarrow \mathcal{N}_1^{(k,2)} \cong \mathcal{N}_1^2, \quad \text{para } k = 1, 2.$$

Por otro lado, si  $z_1, z_2 \in \mathbb{R}P^2$  son los puntos marcados de  $\mathbb{R}P^2$  y  $v_1, v_2 : \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$  son los punctured slides definidos sobre los puntos marcados  $z_1$  y  $z_2$  (ver Sección 1.1), entonces por el Teorema 1.1.3 se tiene que

$$\mathcal{N}_1^2 \cong \langle [v_1] \rangle \times \langle [v_2] \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

Luego, para todo  $\mathbb{Z}_p \leq \mathcal{N}_p^k$  existe un homomorfismo inyectivo

$$I : N(\mathbb{Z}_p)/\mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong \langle [v_1] \rangle \times \langle [v_2] \rangle, \quad \text{con } k = 1, 2.$$

El objetivo de esta sección es probar que  $\text{Im}(I) = \langle [v_1] \cdot [v_2] \rangle \cong \mathbb{Z}_2$  para todo  $\mathbb{Z}_p \leq \mathcal{N}_p^k$ , con  $k = 1, 2$ . Con este fin, el siguiente resultado muestra el efecto de los punctured slides sobre los generadores de  $\pi_1(\mathbb{R}P^2 \setminus \{z_1, z_2\})$  para su presentación canónica.

**Lema 5.2.1** Sean  $z_1, z_2 \in \mathbb{R}P^2$  los puntos marcados de  $\mathbb{R}P^2$ . Denotemos como  $N_1^2 = \mathbb{R}P^2 \setminus \{z_1, z_2\}$  y sea

$$\pi_1(N_1^2, z_0) = \langle x_1, x_2, d \mid x_1 \cdot x_2 \cdot d^2 = 1 \rangle$$

la presentación usual del grupo  $\pi_1(N_1^2, z_0)$ . Entonces el efecto de los isomorfismos inducidos por los punctured slides  $v_i : \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$  para  $i = 1, 2$  y su composición  $v_1 \circ v_2$  sobre los generadores de  $\pi_1(N_1^2, z_0)$  es el descrito en el siguiente cuadro:

Generador	Imagen bajo $v_{1*}$	Imagen bajo $v_{2*}$	Imagen bajo $(v_2 \circ v_1)_*$
$x_1$	$d \cdot x_1^{-1} \cdot d^{-1}$	$x_2^{-1} \cdot x_1 \cdot x_2$	$d \cdot x_1^{-1} \cdot d^{-1}$
$x_2$	$d \cdot x_1 \cdot d^{-1} \cdot x_2 \cdot d \cdot x_1^{-1} \cdot d^{-1}$	$d \cdot x_2^{-1} \cdot d^{-1}$	$d \cdot x_1 \cdot x_2^{-1} \cdot x_1^{-1} \cdot d^{-1}$
$d$	$d \cdot x_1$	$d \cdot x_2$	$d^{-1}$

Cuadro 5.1: Efecto de los punctured slides  $v_1$  y  $v_2$  junto con  $v_1 \circ v_2$

### Demostración

Para ver el efecto de cada punctured slide consideremos un disco que contenga en su interior a los puntos marcados y el crosscap. Ahora, sean  $\gamma_1, \gamma_2, \delta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}P^2$  lazos basados en  $z_0$  que son representantes de las clases  $x_1, x_2, d \in \pi_1(N_1^2; z_0)$  respectivamente como se

muestra en la Figura 5.1 (a). Tomemos además los lazos  $\beta_1, \beta_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}P^2$  basado en  $z_1$  y el lazo  $\beta_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}P^2$  basado en  $z_2$ , sobre los cuales definimos los punctured slides  $v_1$  y  $v_2$  como se muestran en la Figura 5.1 (b).

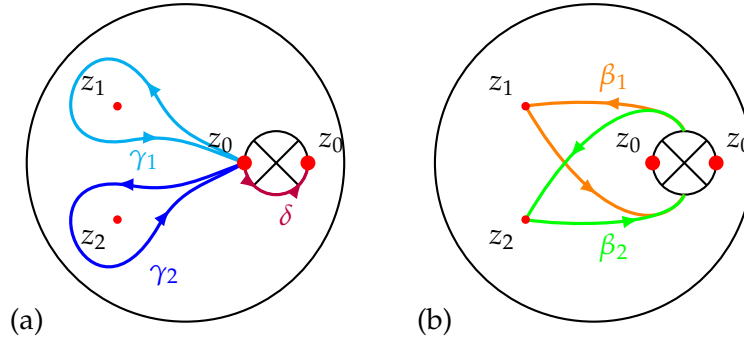


Figura 5.1: (a) Lazos representantes de las clases  $x_1, x_2$  y  $d$ . (b) Lazos  $\beta_1, \beta_2$  sobre los que se definen los punctured slides  $v_1$  y  $v_2$ .

Recordemos que el punctured slide  $v_1 : \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$  está definido por “empujar” los puntos de un entorno tubular de la curva  $\beta_1$  a lo largo de ésta. En la Figura 5.2 vemos el efecto de  $v_1$  sobre cada uno de los lazos  $\gamma_1, \gamma_2$  y  $\delta$ , con esto deducimos que el efecto de  $v_1$  sobre los generadores  $x_1, x_2$  y  $d$  es el descrito en el cuadro 5.1. Con argumentos similares, es posible probar el resultado para los homeomorfismos  $v_2 : \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$  y  $v_1 \circ v_2 : \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ . ■

**Teorema 5.2.2** Sea  $\mathbb{Z}_p \leq \mathcal{N}_p^k$  con  $k = 1, 2$ . Consideremos el homomorfismo inyectivo

$$I : N(\mathbb{Z}_p)/\mathbb{Z}_p \rightarrow \mathcal{N}_1^2 \cong \langle [v_1] \rangle \times \langle [v_2] \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2,$$

entonces

$$\text{Im}(I) = \langle [v_1] \cdot [v_2] \rangle \cong \mathbb{Z}_2.$$

De manera particular  $N(\mathbb{Z}_p)/\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}_2$ .

Demostración

Sea  $q : N_p \rightarrow \mathbb{R}P^2$  el cubriente ramificado obtenido de la acción de  $\mathbb{Z}_p$  en la superficie  $N_p$  y consideremos la sucesión exacta de grupos fundamentales obtenida de  $q : N_p \rightarrow \mathbb{R}P^2$  al remover los puntos de ramificación y sus imágenes:

$$1 \rightarrow \pi_1(N_p^2) \xrightarrow{q_*} \pi_1(\mathbb{R}P^2 \setminus \{p_1, p_2\}) = \langle x_1, x_2, d_1 \mid x_1 \cdot x_2 \cdot d^2 = 1 \rangle \xrightarrow{\theta} \mathbb{Z}_p \rightarrow 1.$$

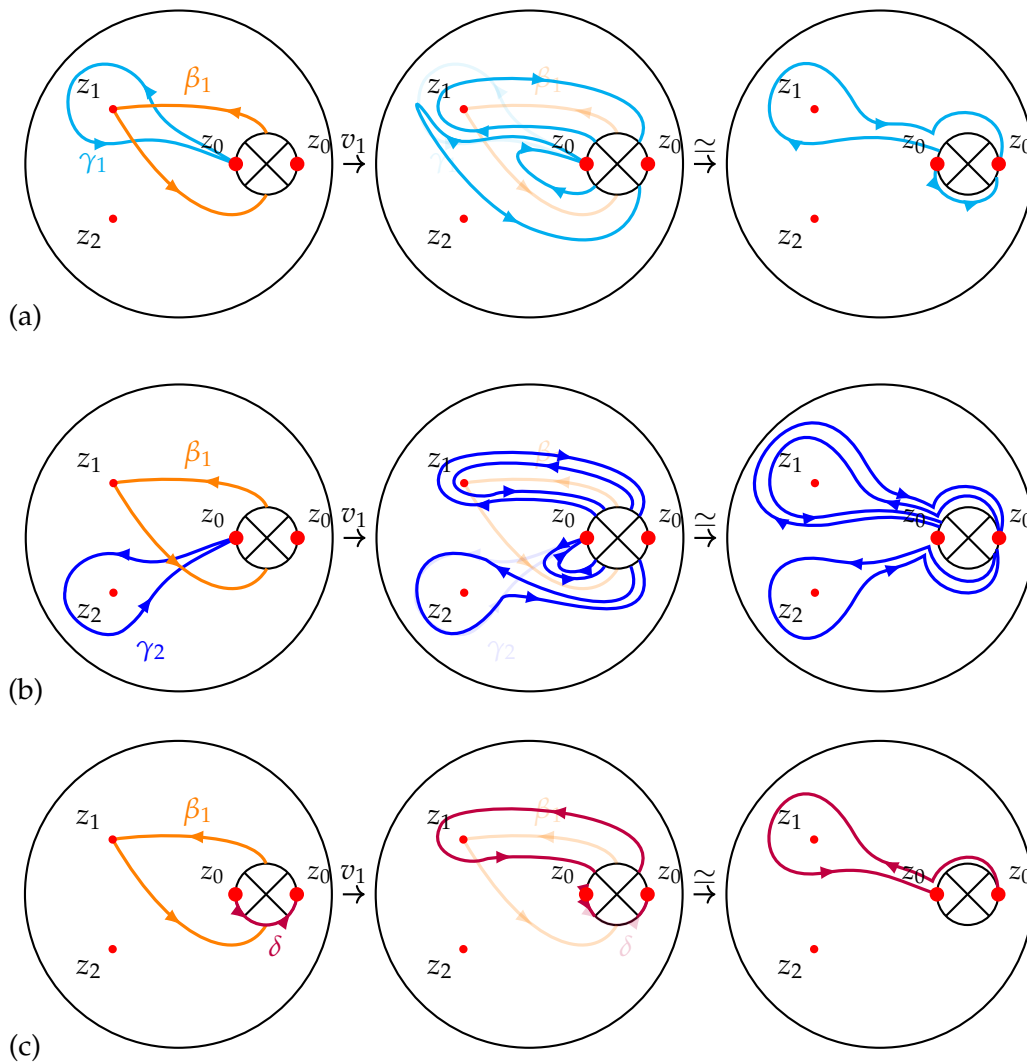


Figura 5.2: (a) Efecto de  $v_1$  sobre  $\gamma_1$ . (b) Efecto de  $v_1$  sobre  $\gamma_2$ . (c) Efecto de  $v_1$  sobre  $\delta$ .

Por el Lema 5.1.4, tenemos que

$$\text{Im}(I) = \{[y] \in \mathcal{N}_1^2 \mid y_*(\ker(\theta)) = \ker(\theta)\},$$

con lo cual nuestro objetivo es probar que:

$$v_{i*}(\ker(\theta)) \neq \ker(\theta) \quad \text{para } i = 1, 2 \quad \text{y que} \quad (v_1 \circ v_2)_*(\ker(\theta)) = \ker(\theta).$$

Como  $\theta(x_1)$  y  $\theta(x_2)$  son distintos de cero (son los datos de punto fijo de un generador de  $\mathbb{Z}_p$ ), entonces existen enteros  $l_1, l_2 \in \{1, \dots, p-1\}$  tales que

$$l_1 \cdot \theta(x_1) + l_2 \cdot \theta(x_2) \equiv 0 \quad \text{mód } (p), \quad (5.8)$$

luego  $x_1^{l_1} \cdot x_2^{l_2} \in \ker(\theta)$ . Ahora, por el Lema 5.2.1, se tiene que las imágenes de  $x_1^{l_1}$  y  $x_2^{l_2}$  bajo los punctured slides  $v_1$  y  $v_2$  están descritas por el siguiente cuadro:

Elemento	Imagen bajo $v_{1*}$	Imagen bajo $v_{2*}$
$x_1^{l_1}$	$d \cdot x_1^{-l_1} \cdot d^{-1}$	$x_2^{-1} \cdot x_1^{l_1} \cdot x_2$
$x_2^{l_2}$	$d \cdot x_1 \cdot d^{-1} \cdot x_2^{l_2} \cdot d \cdot x_1^{-1} \cdot d^{-1}$	$d \cdot x_2^{-l_2} \cdot d^{-1}$

Así pues,

$$\begin{aligned}\theta(v_{1*}(x_1^{l_1} \cdot x_2^{l_2})) &= -l_1 \cdot \theta(x_1) + l_2 \cdot \theta(x_2) \\ \theta(v_{2*}(x_1^{l_1} \cdot x_2^{l_2})) &= l_1 \cdot \theta(x_1) - l_2 \cdot \theta(x_2),\end{aligned}$$

luego por la Ecuación 5.8 sumado al hecho que  $p \neq 2$  y cada  $\theta(x_i)$  es no cero, se tiene

$$v_{1*}(x_1^{l_1} \cdot x_2^{l_2}) \notin \ker(\theta) \quad \text{y} \quad v_{2*}(x_1^{l_1} \cdot x_2^{l_2}) \notin \ker(\theta).$$

De lo anterior se sigue que  $v_{i*}(\ker(\theta)) \neq \ker(\theta)$  para  $i = 1, 2$ , luego por el Lema 5.1.4, se tiene que  $[v_1], [v_2] \notin \text{Im}(I)$ .

Ahora probemos que  $(v_1 \circ v_2)_*(\ker(\theta)) = \ker(\theta)$ . Por el Lema 5.2.1 tenemos el siguiente cuadro:

Generador	Imagen bajo $(v_2 \circ v_1)_*$	Imagen bajo $\theta \circ (v_2 \circ v_1)_*$
$x_1$	$d \cdot x_1^{-1} \cdot d^{-1}$	$-\theta(x_1)$
$x_2$	$d \cdot x_1 \cdot x_2^{-1} \cdot x_1^{-1} \cdot d^{-1}$	$-\theta(x_2)$
$d$	$d^{-1}$	$-\theta(d)$

Notemos primero que todo  $w \in \pi_1(\mathbb{R}P^2 \setminus \{p_1, p_2\}) = \langle x_1, x_2, d \mid x_1 \cdot x_2 \cdot d^2 = 1 \rangle$  tiene una expresión de la siguiente forma

$$w = \prod_{i=1}^{\alpha} x_1^{n_i} x_2^{m_i} d^{k_i}.$$

Aplicando  $\theta$  a  $w$  se obtiene

$$\theta(w) = \sum_{i=1}^{\alpha} (n_i \cdot \theta(x_1) + m_i \cdot \theta(x_2) + k_i \cdot \theta(d)).$$

Por otro lado, la tabla anterior muestra el efecto de la composición  $(v_2 \circ v_1)_*$  sobre los generadores  $x_1$ ,  $x_2$ , y  $d$  y de esto se deduce

$$\theta(v_1 \circ v_{2*}(w)) = \sum_{i=1}^{\alpha} (n_i \cdot [-\theta(x_1)] + m_i \cdot [-\theta(x_2)] + k_i \cdot [-\theta(d)]) = -\theta(w).$$

De esto último concluimos que  $w \in \ker(\theta)$  si y sólo si  $\theta(v_1 \circ v_2^*(w)) \in \ker(\theta)$ , con lo cual tenemos la igualdad de conjuntos deseada  $(v_2 \circ v_1)_*(\ker(\theta)) = \ker(\theta)$ . Así, por el Lema 5.1.4,  $[v_1] \cdot [v_2] \in \text{Im}(I)$ , probando el resultado. ■

En vista del resultado anterior, notamos que el normalizador es una extensión de  $\mathbb{Z}_2$  por  $\mathbb{Z}_p$

$$1 \rightarrow \mathbb{Z}_p \rightarrow N(\mathbb{Z}_p) \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow 1,$$

luego, las únicas posibilidades para  $N(\mathbb{Z}_p)$  son las siguientes:

$$N(\mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_2 \quad \circ \quad N(\mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_2 \cong D_{2p}.$$

Más aún, en la siguiente sección probaremos que de hecho  $N(\mathbb{Z}_p) \cong D_{2p}$ .

### 5.3. La $p$ torsión de la cohomología de Farrell de $\mathcal{N}_p^k$

En esta sección determinamos la componente  $p$ -primaria del grupo modular  $\mathcal{N}_p^k$  con  $p$  un primo impar. Recordemos que el Teorema 3.1.3 garantiza que el grupo  $\mathcal{N}_g^k$  tiene  $p$ -torsión cuando  $k = 1, 2$ , debido a que la única solución  $(h, t)$  a la ecuación de Riemann-Hurwitz es  $(h, t) = (1, 2)$ . Por este mismo resultado, para  $k \geq 3$  se tiene que  $\mathcal{N}_g^k$  no contiene  $p$ -torsión y de lo cual concluimos que

$$\widehat{H}^*(\mathcal{N}_p^k; \mathbb{Z})_{(p)} = 0 \quad \text{para } k \geq 3.$$

Regresando al caso en que  $k = 1, 2$  donde el grupo  $\mathcal{N}_p^k$  contiene  $p$ -torsión, por el Teorema 3.3.2 tenemos que  $\text{vcd}(\mathcal{N}_p^k)$  es finita y  $\mathcal{N}_p^k$  tiene cohomología  $p$ -periódica. Así pues, podemos usar la descripción de  $\widehat{H}^*(\mathcal{N}_p^k; \mathbb{Z})_{(p)}$  dada por el Teorema 1.4.17

$$\widehat{H}^*(\mathcal{N}_g^k; \mathbb{Z})_{(p)} \cong \prod_{\mathbb{Z}_p \in S} \widehat{H}^*(N(\mathbb{Z}_p); \mathbb{Z})_{(p)},$$

donde  $N(\mathbb{Z}_p)$  son los normalizadores de subgrupos de orden  $p$  y  $S$  es un conjunto de representantes de las clases de conjugación de tales subgrupos. En el Capítulo 4 clasificamos las clases de conjugación de subgrupos de orden  $p$  a través de los datos de punto fijo, con lo cual, en la Proposición 4.7.3 determinamos que el número de clases de conjugación de subgrupos de orden  $p$  de  $\mathcal{N}_p^k$  es igual a  $\frac{p-1}{2}$ . A su vez, en el Teorema 5.2.2 de la sección anterior probamos que para todo  $\mathbb{Z}_p \leq \mathcal{N}_p^k$  el normalizador es una extensión de  $\mathbb{Z}_2$  por  $\mathbb{Z}_p$ .

Con esta recapitulación vemos que para finalizar con el cálculo de  $\widehat{H}^*(\mathcal{N}_p^k; \mathbb{Z})_{(p)}$  sólo nos resta conocer  $\widehat{H}^*(N(\mathbb{Z}_p); \mathbb{Z})_{(p)}$ , misma que determinamos en el siguiente resultado.

**Teorema 5.3.1** *Sea  $\mathbb{Z}_p \leq \mathcal{N}_p^k$ , con  $k = 1, 2$ , entonces*

$$N(\mathbb{Z}_p) \cong D_{2p},$$

Por tanto

$$\widehat{H}^i(N(\mathbb{Z}_p); \mathbb{Z})_{(p)} = \begin{cases} \mathbb{Z}_p & i \equiv 0 \pmod{4} \\ 0 & i \equiv 1, 2, 3 \pmod{4} \end{cases}$$

Demostración

Por la Proposición 5.2.2 tenemos un isomorfismo

$$I : N(\mathbb{Z}_p) / \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_2,$$

por lo que  $N(\mathbb{Z}_p)$  es un grupo de orden  $2p$ . Así, las únicas posibilidades para  $N(\mathbb{Z}_p)$  son las siguientes dos

$$N(\mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_2 \quad \text{o} \quad N(\mathbb{Z}_p) \cong D_{2p}.$$

Por otro lado, en la Proposición 4.6.1 probamos que  $[N(\mathbb{Z}_p) : C(\mathbb{Z}_p)] = 2$  con lo cual se tiene que

$$N(\mathbb{Z}_p) \cong D_{2p}.$$

Finalmente, la cohomología de Farrell del grupo  $D_{2p}$  (ver Ejemplo 1.4.11) está dada por

$$\widehat{H}^i(D_{2p}; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}_{2p} & i \equiv 0 \pmod{4} \\ 0 & i \equiv 1, 3 \pmod{4} \\ \mathbb{Z}_2 & i \equiv 2 \pmod{4} \end{cases}$$

Así pues, la componente  $p$ -primaria de la cohomología del normalizador es la siguiente:

$$\widehat{H}^i(N(\mathbb{Z}_p); \mathbb{Z})_{(p)} = \begin{cases} \mathbb{Z}_p & i \equiv 0 \pmod{4} \\ 0 & i \equiv 1, 2, 3 \pmod{4} \end{cases}$$

obteniéndose lo deseado. ■

Finalmente, determinamos la componente  $p$ -primaria de la cohomología de Farrell del grupo modular  $\mathcal{N}_p^k$ .

**Teorema 5.3.2** *Sea  $p$  un número primo impar. Entonces*

$$\widehat{H}^i(\mathcal{N}_p^k; \mathbb{Z})_{(p)} = \begin{cases} (\mathbb{Z}_p)^{\frac{p-1}{2}} & i \equiv 0 \pmod{4} \\ 0 & i \equiv 1, 2, 3 \pmod{4} \end{cases} \quad \text{para } k \equiv 1, 2$$

$$\widehat{H}^i(\mathcal{N}_p^k; \mathbb{Z})_{(p)} = 0 \quad \text{para } k > 2$$

*Demostración*

Por el Teorema 3.1.3 tenemos que el grupo  $\mathcal{N}_g^k$  tiene  $p$ -torsión para  $k = 1, 2$ , debido a que la única solución  $(h, t)$  a la ecuación de Riemann-Hurwitz es  $(h, t) = (1, 2)$ . Mientras que para  $k \geq 3$ , por este mismo resultado se tiene que  $\mathcal{N}_g^k$  no contiene  $p$ -torsión y de lo cual concluimos que

$$\widehat{H}^*(\mathcal{N}_p^k; \mathbb{Z})_{(p)} = 0 \quad \text{para } k \geq 3.$$

Consideremos el caso en que  $k = 1, 2$  donde  $\mathcal{N}_p^k$  tiene  $p$ -torsión. Por el Teorema 3.3.2 tenemos que  $\text{vcd}(\mathcal{N}_p^k)$  es finita y puesto que  $\mathcal{N}_p^k$  tiene  $p$ -torsión para  $k = 1, 2$ , entonces  $\mathcal{N}_p^k$  tiene cohomología  $p$ -periódica. Así pues, podemos usar la fórmula de Brown para  $\widehat{H}^*(\mathcal{N}_p^k; \mathbb{Z})_{(p)}$  dada por el Teorema 1.4.17:

$$\widehat{H}^*(\mathcal{N}_p^k; \mathbb{Z})_{(p)} \cong \prod_{\mathbb{Z}_p \in S} \widehat{H}^*(N(\mathbb{Z}_p); \mathbb{Z})_{(p)},$$

donde  $N(\mathbb{Z}_p)$  es el normalizador de subgrupos de orden  $p$  y  $S$  es un conjunto de representantes de las clases de conjugación de subgrupos de orden  $p$ . Ahora, por la Proposición 4.7.3 determinamos hay  $\frac{p-1}{2}$  clases de conjugación de subgrupos de orden  $p$  en  $\mathcal{N}_p^k$ . Finalmente por la proposición anterior, para todo subgrupo  $\mathbb{Z}_p \leq \mathcal{N}_p^k$  se tiene que la cohomología su normalizador  $N(\mathbb{Z}_p)$  está dada por

$$\widehat{H}^i(N(\mathbb{Z}_p); \mathbb{Z})_{(p)} = \begin{cases} \mathbb{Z}_p & i \equiv 0 \pmod{4} \\ 0 & i \equiv 1, 2, 3 \pmod{4} \end{cases}$$

así pues

$$\widehat{H}^i(\mathcal{N}_p^k; \mathbb{Z})_{(p)} = \begin{cases} (\mathbb{Z}_p)^{\frac{p-1}{2}} & i \equiv 0 \pmod{4} \\ 0 & i \equiv 1, 2, 3 \pmod{4} \end{cases}$$

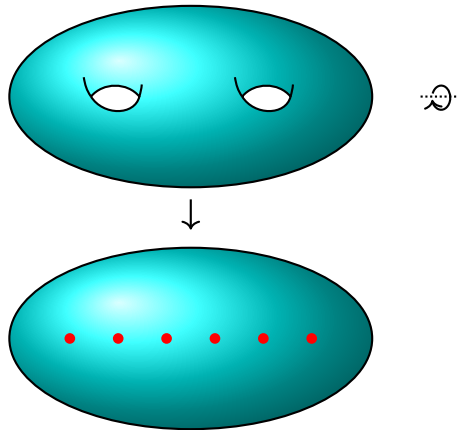
probando el resultado ■



## Apéndice A

# Teoría de Birman-Hilden

Este apéndice se encuentra basado en el artículo [MW21] y describimos brevemente algunos de los resultados de nuestro interés. En los años 70's J.S. Birman y H. Hilden escribieron una serie de artículos ahora clásicos, relacionando los grupos modulares y espacios cubrientes. La principal innovación de Birman y Hilden fue relacionar el grupo modular  $Mod(S_2)$  con el grupo modular  $Mod(S^2; 6)$  de la esfera con 6 puntos marcados a través del cubriente ramificado  $S_2 \rightarrow S_0^6$ :



De manera general, sean  $S, \Sigma$  superficies orientables y  $p : S \rightarrow \Sigma$  un mapeo cubriente ramificado. Decimos que  $f : S \rightarrow S$  preserva fibras si para cada  $x \in X$  existe una  $y \in X$  tal que  $f(p^{-1}(x)) = p^{-1}(y)$ ; en otras palabras,  $f$  manda fibras en fibras.

Dados dos mapeos homotópicos que preserven fibras en  $S$ , de manera natural nos preguntamos si ellos son homotópicos mediante homeomorfismos que preserven fibras. Si la

respuesta es afirmativa para todas las parejas de homeomorfismos, decimos que el mapeo cubriente  $p$  tiene la propiedad de **Birman-Hilden**. El primer resultado sobre esta propiedad, fue anunciado por J. S. Birman y S. Hilden en [BH72] y demostrado en [BH73], estableciendo condiciones para que el mapeo cubriente  $p : S \rightarrow \Sigma$  tenga la propiedad de Birman-Hilden. Generalizaciones de este resultado fueron establecidas durante varios años y una de estas fue dada por C. Maclachlan y W. J. Harvey en [MH75], la cual es la siguiente:

**Teorema A.1** *Sea  $p : S \rightarrow \Sigma$  un mapeo cubriente regular de tipo finito y ramificado (finite-sheeted regular branched covering map), donde  $S$  es una superficie hiperbólica. Entonces  $p$  tiene la propiedad de Birman-Hilden.*

En el resto del apéndice, recordamos algunos resultados que relacionan los grupos modulares de las superficies  $S$  y  $\Sigma$  a través de  $p : S \rightarrow \Sigma$ , para ello emplearemos la siguiente notación. Sea  $X = \{x_1, \dots, x_k\}$  el conjunto de puntos ramificados en  $\Sigma$  bajo  $p : S \rightarrow \Sigma$ , consideramos a  $X$  como el conjunto de puntos marcados de  $\Sigma$  y así trabajaremos con el grupo modular  $Mod(\Sigma; k)$ .

Denotamos por  $LMod(\Sigma; k)$  al subgrupo de  $Mod(\Sigma)$  que consta de todas las clases que tienen un representante que se levanta a un homeomorfismo de  $S$ . Este grupo es llamado *el grupo modular levantable* de  $X$ . También denotamos por  $SMod(S)$  al subgrupo de  $Mod(S)$  que consta de las clases de todos los homeomorfismos de  $S$  que preservan fibras. Enfatizamos que dos homeomorfismos en  $S$  son identificados en  $SMod(S)$  si difieren por una isotopía que no necesariamente preserve fibras y también que las preimágenes de puntos ramificados no son puntos marcados. Los homeomorfismos que preservan fibras también se conocen como homeomorfismos simétricos; estos son exactamente los levantamientos de homeomorfismos levantables de  $\Sigma$ . El grupo  $SMod(S)$  es llamado *el grupo modular simétrico* de  $S$ .

Notemos que para todo elemento  $\alpha \in LMod(\Sigma; k)$ , podemos elegir un representante  $f \in \widetilde{Diff}^+(\Sigma; k)$  para el cual existe un levantamiento  $\tilde{f} \in Diff(S)$ . Claramente tenemos que  $[\tilde{f}] \in SMod(S)$ . Denotemos por  $D$  el subgrupo de  $SMod(S)$  que consta de todas las clases de isotopía de las transformaciones de Deck. Existe una función natural

$$\Phi : LMod(\Sigma; k) \rightarrow SMod(S)/D, \quad \alpha = [f] \mapsto [\tilde{f}] \cdot D$$

Por otro lado, para cualquier elemento  $\gamma \in SMod(S)$  podemos elegir un representante  $g \in Diff^+(S)$  que preserva fibras, por lo cual existe  $\hat{g} \in \widetilde{Diff}^+(\Sigma; k)$  que hace el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{g} & S \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ \Sigma & \xrightarrow{\hat{g}} & \Sigma \end{array}$$

Claramente  $\hat{g}$  se levanta y por lo tanto  $[\hat{g}] \in LMod(\Sigma; k)$ . Así existe una función natural

$$\Psi : SMod(S) \rightarrow LMod(\Sigma), \quad \gamma = [g] \mapsto [\hat{g}]$$

Con esta notación, tenemos el siguiente resultado (ver Proposición 1.3 de [MW21]).

**Teorema A.2** *Sea  $p : S \rightarrow \Sigma$  un mapeo cubriente finito y ramificado donde  $S$  es una superficie hiperbólica sin frontera. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- *$p$  tiene la propiedad de Birman-Hilden.*
- *El mapeo natural  $\Phi : LMod(\Sigma) \rightarrow SMod(S)/D$  es inyectivo.*
- *El mapeo natural  $\Psi : SMod(S) \rightarrow LMod(\Sigma)$  está bien definido.*
- *$SMod(S)/D \cong LMod(\Sigma)$ .*



# Bibliografía

- [AG71] N.L. Alling and N. Greenleaf, *Foundations of the theory of klein surfaces*, Lecture Notes in Mathematics, Springer Berlin Heidelberg, 1971.
- [BDP17] N. Bárcenas, D. Degrijse, and I. Patchkoria, *Stable finiteness properties of infinite discrete groups*, *Journal of Topology* **10** (2017), no. 4, 1169–1196 (English).
- [BEMS15] E. Bujalance, J. Etayo, E. Martínez, and B. Szepietowski, *On the connectedness of the branch loci of non-orientable unbordered klein surfaces of low genus*, *Glasgow Mathematical Journal* **57** (2015), 211–230.
- [BGC<sup>+</sup>10] E. Bujalance, E.B. García, F.J. Cirre, J.M. Gamboa, and G. Gromadzki, *Symmetries of compact riemann surfaces*, *Lecture Notes in Mathematics*, no. v. 2007, Springer, 2010.
- [BH72] J.S. Birman and H.M. Hilden, *Isotopies of homeomorphisms of Riemann surfaces and a theorem about Artin's braid group*, *Bulletin of the American Mathematical Society* **78** (1972), no. 6, 1002 – 1004.
- [BH73] ———, *On isotopies of homeomorphisms of riemann surfaces*, *Annals of Mathematics* **97** (1973), no. 3, 424–439.
- [Bra12] C. Braun, *Moduli spaces of klein surfaces and related operads*, *Algebraic Geometric and Topology* **12** (2012), no. 3, 1831 – 1899.
- [Bro82a] E.H. Brown, *The cohomology of  $bso_n$  and  $bo_n$  with integer coefficients*, *Proceedings of the American Mathematical Society* **85** (1982), no. 2, 283–288.
- [Bro82b] K.S. Brown, *Cohomology of groups*, *Graduate Texts in Mathematics*, Springer, 1982.

- [EE69] C.J. Earle and J. Eells, *A fibre bundle description of Teichmüller theory*, Journal of Differential Geometry **3** (1969), no. 1-2, 19 – 43.
- [ERW08] J. Ebert and O. Randall-Williams, *On the divisibility of characteristic classes of non-oriented surface bundles*, Topology and its Applications **156** (2008), no. 2, 246–250.
- [Far77] F. T. Farrell, *An extension of tate cohomology to a class of infinite groups*, Journal of Pure and Applied Algebra **10** (1977), no. 2, 153–161.
- [Fes83] M. Feshbach, *The integral cohomology rings of the classifying spaces of  $o(n)$  and  $so(n)$* , Indiana University Mathematics Journal **32** (1983), no. 4, 511–516.
- [FK80] H. M. Farkas and I. Kra, *Riemann surfaces*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 71, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1980. MR 583745
- [FM12] B. Farb and D. Margalit, *A primer on mapping class groups*, Princeton Mathematical Series, vol. 49, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012. MR 2850125
- [GMTW09] S. Galatius, I. Madsen, U. Tillmann, and M. Weiss, *The homotopy type of the cobordism category*, Acta Mathematica **202** (2009), no. 2, 195 – 239.
- [GMX92] H. Glover, G. Mislin, and Y. Xia, *On the farrell cohomology of mapping class groups*, Inventiones Mathematicae **109** (1992), 535–545.
- [GMX94] H. Glover, G. Mislin, and Y. Xia, *On the yagita invariant of mapping class groups*, Topology **33** (1994), no. 3, 557–574.
- [Gra73] A. Gramain, *Le type d’homotopie du groupe des difféomorphismes d’une surface compacte*, Annales scientifiques de l’École Normale Supérieure **4e série, 6** (1973), no. 1, 53–66 (fr).
- [Har71] W. J. Harvey, *On branch loci in teichmüller space*, Transactions of the American Mathematical Society **153** (1971), 387–399.
- [Har86] J.L. Harer, *The virtual cohomological dimension of the mapping class group of an orientable surface*, Invent. Math. **84** (1986), no. 1, 157–176. MR 830043
- [HSSTN20] C.E. Hidber, L. J. Sánchez-Saldaña, and A. Trujillo-Negrete, *On the dimension of the mapping class groups of a non-orientable surface*, 2020.

- [HT09] G. Hope and U. Tillmann, *On the farrell cohomology of the mapping class group of non-orientable surfaces*, Proceedings of the American Mathematical Society **137** (2009), no. 1, 393–400.
- [Hub06] J. H. Hubbard, *Teichmüller theory and applications to geometry, topology, and dynamics*, Teichmüller Theory, vol. 1, Matrix Editions, 2006.
- [HX18] C.E. Hidber and M.A. Xicoténcatl, *The mod 2 cohomology of the mapping class group of the Klein bottle with marked points*, J. Pure Appl. Algebra **222** (2018), no. 6, 1478–1488. MR 3754434
- [Iva84] N.V. Ivanov, *On the virtual cohomology dimension of the Teichmüller modular group*, Topology (Leningrad, 1982), Lecture Notes in Math., vol. 1060, Springer, Berlin, 1984, pp. 306–318. MR 770250
- [Ker83] S.P. Kerckhoff, *The nielsen realization problem*, Annals of Mathematics **117** (1983), no. 2, 235–265.
- [Kor02] M. Korkmaz, *Mapping class groups of nonorientable surfaces*, Geometriae Dedicata **89** (2002), 107–131.
- [LGGM18] D. Lima Gonçalves, J. Guaschi, and M. Maldonado, *Embeddings and the (virtual) cohomological dimension of the braid and mapping class groups of surfaces*, Confluentes Mathematici **10** (2018), no. 1, 41–61 (en). MR 3869010
- [Lu98] Q. Lu, *Cohomological properties of the punctured mapping class groups*, Ph.D. thesis, The Ohio State University, 1998.
- [Lu01] ———, *Periodicity of the punctured mapping class group*, Journal of Pure and Applied Algebra **155** (2001), no. 2, 211–235.
- [Lu02] ———, *Farrell cohomology of low genus pure mapping class groups with punctures*, Algebraic and Geometric Topology **2** (2002), no. 1, 537–562.
- [Mac67] A. M. Macbeath, *The classification of non-euclidean plane crystallographic groups*, Canadian Journal of Mathematics **19** (1967), 1192–1205.
- [MBGA06] J. M. Márquez-Bobadilla and F. J. González-Acuña, *On the homeotopy group of the non orientable surface of genus three*, Revista Colombiana de Matemáticas, ISSN 0034-7426 **40** (2006), 75 – 79.

- [MH75] C. Maclachlan and W. J. Harvey, *On Mapping-Class Groups and Teichmüller Spaces*, Proceedings of the London Mathematical Society **s3-30** (1975), no. 4, 496–512.
- [Mis94] G. Mislin, *Mapping class groups, characteristic classes and bernoulli numbers*, CRM Proceedings and Lecture Notes, Centre de Recherches Mathématiques, 1994, pp. 103–131.
- [Mor87] S. Morita, *Characteristic classes of surface bundles.*, Inventiones mathematicae **90** (1987), 551–578.
- [Mor01] ———, *Geometry of characteristic classes*, Iwanami series in modern mathematics, American Mathematical Society, 2001.
- [MW02] H. Masur and M. Wolf, *The weil-petersson isometry group*, Geometriae Dedicata (2002), no. 93, 177–190.
- [MW21] D. Margalit and R. R. Winarski, *Braids groups and mapping class groups: The birman–hilden theory*, Bulletin of the London Mathematical Society **53** (2021), no. 3, 643–659.
- [MX20] M.A. Maldonado and M.A. Xicoténcatl, *On the cohomology of the mapping class group of the punctured projective plane*, Q. J. Math. **71** (2020), no. 2, 539–555. MR 4112675
- [Nie37] J. Nielsen, *Die struktur periodischer transformationen von flächen*, Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab. Mathemastisk-fysiske Meddelelser, Levin & Munks-gaard, 1937.
- [Par14] L. Paris, *Mapping class groups of non-orientable surfaces for beginners*, Winter Braids Lect. Notes **1** (2014), no. Winter Braids IV (Dijon, 2014), Exp. No. 3, 17. MR 3703250
- [PP16] A. Papadopoulos and R. C. Penner, *Hyperbolic metrics, measured foliations and pants decompositions for non-orientable surfaces*, Asian Journal of Mathematics **20** (2016), no. 1, 157–182.
- [Sin71] D. Singerman, *Automorphisms of compact non-orientable riemann surfaces*, Glasgow Mathematical Journal **12** (1971), no. 1, 50–59.



- [SS92] M. Seppälä and T. Sorvali, *Geometry of Riemann surfaces and Teichmüller spaces*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 169, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1992. MR 1202043
- [Swa60] R. G. Swan, *The  $p$ -period of finite group*, Illinois Journal of Mathematics **4** (1960), no. 3, 341 – 346.
- [Sym88] P. Symonds, *The cohomology representation of an action of  $c_p$  on a surface*, Transactions of the American Mathematical Society **306** (1988), no. 1, 389–400.
- [Sze04] B. Szepietowski, *Involutions in mapping class groups of non-orientable surfaces*, Collect. Math. **55** (2004), no. 3, 253–260. MR 2099216
- [Tho86] C. B. Thomas, *Characteristic classes and the cohomology of finite groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 9, Cambridge University Press, Cambridge, 1986. MR 878978
- [Wah07] N. Wahl, *Homological stability for the mapping class groups of non-orientable surfaces*, Inventiones mathematicae **171** (2007), no. 2, 389–424.
- [Wah12] ———, *Homological stability for mapping class groups of surfaces*, vol. III, Advanced Lectures in Mathematics, no. 26, International Press, 2012 (English).
- [Wol87] S. A. Wolpert, *Geodesic length functions and the Nielsen problem*, Journal of Differential Geometry **25** (1987), no. 2, 275 – 296.
- [Xia90] Y. Xia, *Farrell-tate cohomology of the mapping class group*, Ph.D. thesis, The Ohio State University, 1990.
- [Xia92a] ———, *The  $p$ -torsion of the Farrell-Tate cohomology of the mapping class group  $\Gamma_{p-1}$* , J. Pure Appl. Algebra **78** (1992), no. 3, 319–334. MR 1163284
- [Xia92b] ———, *The  $p$ -torsion of the Farrell-Tate cohomology of the mapping class group  $\Gamma_{(p-1)/2}$* , Topology '90 (Columbus, OH, 1990), Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ., vol. 1, de Gruyter, Berlin, 1992, pp. 391–398. MR 1184423
- [Xia95] ———, *On the cohomology of  $\Gamma_p$* , Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), no. 9, 3659–3670. MR 1303129
- [Yag85] N. Yagita, *On the dimension of spheres whose product admits a free action by nonabelian group*, The Quarterly Journal of Mathematics **36** (1985), no. 1, 117–127.

- [Zie81] H. Zieschang, *Finite groups of mapping classes of surfaces*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 1981.