



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

**UNIDAD ZACATENCO
PROGRAMA DE SISTEMAS AUTÓNOMOS DE NAVEGACIÓN AÉREA Y SUBMARINA**

Control de transición de un vehículo multirrotor con ala

T E S I S

Que presenta

M.C. Néstor Abraham Aguillón Balderas

Para obtener el grado de

DOCTOR EN CIENCIAS

en

SISTEMAS AUTÓNOMOS DE NAVEGACIÓN AÉREA Y SUBMARINA

Directores de Tesis:

Dr. Sergio Rosario Salazar Cruz

Dr. Moisés Bonilla Estrada

Ciudad de México.

Junio de 2022

Agradecimientos

A mis asesores, por su guía y consejos.

A mis sinodales, por sus comentarios.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (**CONACyT**), y al Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (**CINVESTAV IPN**); por el apoyo económico recibido para la realización de este trabajo.

Resumen

Resumen

En este trabajo de tesis se aborda el problema de transición hacia adelante de vehículos cuadirrotor tipo *Tail-Sitter* de empuje diferencial. Se propone una estrategia de transición basada en optimización. Se buscan los coeficientes de Fourier óptimos de las variables de velocidad y ángulo de dirección de vuelo que llevan al *Tail-Sitter* de un estado de vuelo estacionario hasta su modo de vuelo de crucero. El funcional de costo considerado busca minimizar el gasto de energía de empuje y de cabeceo. Se consideran restricciones sobre las variables de vuelo y condiciones de frontera. Se evitan grandes cambios de altitud durante la transición, se toman en cuenta los límites de los actuadores, y se evita la región de desplome del ala, con el objetivo de arrojar una trayectoria predecible y segura. El esquema de control propuesto tiene capacidades de rechazo de incertidumbre de modelado y perturbaciones de ancho de banda finito. El esquema de transición obtenido es validado mediante experimentos numéricos de simulación; y es comparado con una metodología similar, basada en optimización.

Abstract

This work tackles the forward transition problem of differential thrust *Tail-Sitter* quad-rotor vehicles. An optimization-based transition strategy is proposed. The optimal Fourier coefficients of the velocity and flight direction angle variables leading the *Tail-Sitter* from a stationary flight state to its cruise flight mode are sought. The considered cost functional seeks to minimize the thrust and pitch energy expenditure. Constraints on flight variables and boundary conditions are considered. Large altitude changes during transition are avoided, actuator limits are taken into account, and the wing stall region is avoided with the goal of yielding a predictable and safe trajectory. The proposed control scheme has modeling uncertainty and perturbations rejection capabilities. The obtained transition scheme is validated by numerical simulation experiments and compared with a similar optimization-based methodology.

Notación

Tabla 1: Tabla de símbolos 1

Símbolo	Descripción
α	ángulo de ataque incremental,
$\bar{\alpha}$	ángulo de ataque,
$\bar{\bar{\alpha}}$	ángulo de ataque nominal,
α_s	ángulo de ataque de desplome,
γ	ángulo de dirección de vuelo longitudinal incremental,
$\bar{\gamma}$	ángulo de dirección de vuelo longitudinal,
$\bar{\bar{\gamma}}$	ángulo de dirección de vuelo longitudinal nominal,
τ_q	momento de cabeceo de entrada incremental,
ρ	densidad del aire,
ϕ	ángulo de alabeo incremental,
$\bar{\phi}$	ángulo de alabeo,
θ	ángulo de cabeceo incremental,
$\bar{\theta}$	ángulo de cabeceo,
$\bar{\bar{\theta}}$	ángulo de cabeceo nominal,
ψ	ángulo de guiñada incremental,
$\bar{\psi}$	ángulo de guiñada,
$\pi_w(s)$	polinomio característico del filtro de Beard-Jones,
$\pi_e(s)$	polinomio característico del error de observación (generador de residuos),
ω_i	velocidad angular del rotor i ,
Ω	velocidad angular en el referencial cuerpo,
μ	viscosidad dinámic del aire,
Σ_k	Representación de estado en el punto de operación k ,
Ξ	vector de posición inercial,
ζ	vector de variables de estado incrementales bajo cambio de variable,
\dot{a}_{ij}	derivada de estabilidad entre las variables incrementales i y j ,
\bar{A}_k	matriz de estado de la dinámica incremental en el punto de operación k ,
$\bar{\bar{A}}_n$	matriz de estado nominal conmutada,
\bar{A}_q	matriz de estado nominal en el envolvente de vuelo cuadirrotor,
\bar{A}_{tr}	matriz de estado nominal en el envolvente de vuelo de transición,
\bar{A}_a	matriz de estado nominal en el envolvente de vuelo avión,

Tabla 2: Tabla de símbolos 2

\overline{A}_{F_n}	matriz de estado nominal en lazo cerrado,
\overline{A}_{FK_n}	matriz de estado del error de estimación de perturbaciones,
\widehat{A}_{FK_n}	matriz de estado del error de estimación, bajo la transformación T ,
b	envergadura del ala,
B	matriz de entradas de la ecuación de estado,
\widehat{B}	matriz de entradas de la ecuación de estado bajo cambio de variable,
c_{ij}	elemento de la matriz de Coriolis en la fila i y columna j ,
C	matriz de salida de la ecuación de estado incremental,
C_D	coeficiente de arrastre del ala,
C_L	coeficiente de sustentación del ala,
C_M	coeficiente de momento de cabeceo del ala,
C_{D_0}	término independiente de C_D ,
C_{D_1}	coeficiente del término lineal de C_D ,
C_{D_2}	coeficiente del término cuadrático de C_D ,
C_{L_0}	ordenada en el origen de C_L ,
C_{L_1}	pendiente de C_L ,
C_{M_0}	ordenada en el origen de C_M ,
C_{M_1}	pendiente de C_M ,
\bar{c}	cuerda media aerodinámica,
d	señal de perturbación externa,
D	fuerza de arrastre del ala,
\overline{D}	fuerza de arrastre del ala nominal,
\dot{D}_α	parcial del arrastre con respecto a α evaluada en la trayectoria nominal,
\dot{D}_v	parcial del arrastre con respecto a v evaluada en la trayectoria nominal,
e	vector de error de observación del filtro de Beard Jones,
\widehat{e}	vector de error de observación bajo cambio de variable,
E	vector de ángulos de Euler,
f	Fuerza total en coordenadas del cuerpo incremental,
F_n	matriz de retroalimentación de estado,
\mathcal{F}	Fuerza de empuje total en coordenadas del cuerpo,
$\overline{\mathcal{F}}$	Fuerza de empuje nominal,
g	aceleración de la gravedad,
$G_o(s)$	función de transferencia entre y y \bar{q}^* en lazo cerrado,
$G_c(s)$	función de transferencia entre y y u en lazo cerrado,
$G_e(s)$	función de transferencia entre \widehat{q}^* y \bar{q}^* en lazo cerrado,
h	porcentaje de la ubicación del centro de gravedad a lo largo de \bar{c} ,
h_0	porcentaje de la ubicación del centro aerodinámico a lo largo de \bar{c} ,
I_n	matriz identidad de dimensiones $n \times n$,

Tabla 3: Tabla de símbolos 3

J	tensor inercia en coordenadas del vector de orientación,
k	índice de los puntos de operación,
k_f	coeficiente de empuje de los motores,
k_τ	coeficiente de momento de los motores,
K	ganancia de inyección de salida del filtro de Beard-Jones,
\widehat{K}	término auxiliar de la ganancia de inyección de salida K ,
\overline{K}	término de sintonización del filtro de Beard Jones,
l	brazo de palanca de los rotores,
L	fuerza de sustentación del ala,
\overline{L}	fuerza de sustentación del ala nominal,
\dot{L}_α	parcial de la sustentación con respecto a α evaluada en la trayectoria nominal,
\dot{L}_v	parcial de la sustentación con respecto a v evaluada en la trayectoria nominal,
\mathcal{L}_{tra}	Lagrangiano del subsistema traslacional,
\mathcal{L}_{rot}	Lagrangiano del subsistema rotacional,
m	masa del vehículo,
M	momento de cabeceo del ala en el centro aerodinámico,
\overline{M}	momento de cabeceo del ala nominal,
\dot{M}_α	parcial del momento con respecto a α evaluada en la trayectoria nominal,
\dot{M}_v	parcial del momento con respecto a v evaluada en la trayectoria nominal,
M_{cg}	momento de cabeceo del ala en el centro de gravedad,
N	número de puntos de operación del vehículo <i>Tail-Sitter</i> ,
$OXYZ$	referencial inercial,
$O_1X_1Y_1Z_1$	referencial auxiliar 1,
$O_2X_2Y_2Z_2$	referencial auxiliar 2,
$O_BX_BY_BZ_B$	referencial cuerpo,
$O_WX_WY_WZ_W$	referencial viento,
P	velocidad angular alrededor de O_BX_B ,
\overline{P}_n	matriz definida positiva solución de la ecuación de Ricatti,
P_{tra}	energía potencial del subsistema traslacional,
P_{rot}	energía potencial del subsistema rotacional,
q	perturbaciones e incertidumbre de la ecuación de estado,
\overline{q}	q mas incertidumbre paramétrica alrededor de \overline{A}_n ,
\overline{q}^*	\overline{q} bajo cambio de variable,
Q	velocidad angular alrededor de O_BY_B ,
\overline{Q}	matriz de ponderación de estados,
R	velocidad angular alrededor de O_BZ_B ,
\overline{R}	Matriz de ponderación de entradas,
R_e	número de Reynolds,
R_b^e	matriz de rotación del referencial cuerpo al inercial,
r_{ij}	elemento de R_b^e en la fila i y columna j ,
R_x	matriz de rotación en x,
R_y	matriz de rotación en y,
R_z	matriz de rotación en z,
S	matriz de entrada de perturbaciones e incertidumbre,

Tabla 4: Tabla de símbolos 4

t	variable de tiempo,
t_k	tiempo discreto en los puntos de operación,
t_N	tiempo total de transición,
T	transformación de coordenadas,
\mathcal{T}_E	Vector de pares de entrada generalizados de los ángulos de Euler,
\mathcal{T}_p	Momento de entrada alrededor de $O_B \mathbf{X}_B$,
\mathcal{T}_q	Momento de cabeceo de entrada en el referencial cuerpo,
$\overline{\mathcal{T}}_q$	Momento de cabeceo de entrada nominal,
\mathcal{T}_r	Momento de entrada alrededor de $O_B \mathbf{Z}_B$,
u	vector de entradas incrementales,
\bar{u}	retroalimentación de estado lineal,
\hat{u}	término de rechazo de perturbaciones,
V	magnitud de velocidad / función candidata de Lyapunov,
\bar{V}	magnitud de velocidad nominal,
\bar{V}_a	umbral de velocidad para modo de vuelo avión,
\bar{V}_h	umbral de velocidad para modo de vuelo cuadrirrotor,
W	transformación entre Ω y dE/dt ,
x	vector de variables de estado incrementales,
\hat{x}	vector de variables de estado incrementales bajo transformación T ,
\mathbf{x}	posición incremental de \mathbf{X} / error de posición de \mathbf{X} ,
$\hat{\mathbf{x}}$	posición incremental bajo cambio de variable,
\mathbf{X}	coordenada a lo largo de $O\mathbf{X}$,
y	vector de salidas incrementales,
\mathbf{z}	posición incremental de \mathbf{Z} / error de posición de \mathbf{Z} ,
$\hat{\mathbf{z}}$	posición incremental bajo cambio de variable,
\mathbf{Z}	coordenada a lo largo de $O\mathbf{Z}$,
$\bar{\mathbf{X}}$	coordenada nominal a lo largo de $O\mathbf{X}$,
$\bar{\mathbf{Z}}$	coordenada nominal a lo largo de $O\mathbf{Z}$,

Siglas y acrónimos

Tabla 5: Tabla de siglas y acrónimos

Símbolo	Descripción
<i>AR</i>	coeficiente de alargamiento del ala,
<i>cg</i>	centro de gravedad,
<i>EVA</i>	envolvente de vuelo avión,
<i>EVC</i>	envolvente de vuelo cuadrirotor,
<i>EVT</i>	envolvente de vuelo de transición,
<i>IAE</i>	integral del valor absoluto del error,
<i>IAET</i>	integral del valor absoluto del error ponderado en el tiempo,
<i>PID</i>	control proporcional integral derivativo (<i>Proportional Integral Derivative</i>),
<i>UAV</i>	vehículo aéreo no tripulado (<i>Unmanned Aerial Vehicle</i>),
<i>VTOL</i>	aterrizaje y despegue vertical (<i>Vertical Take-Off and Landing</i>),

Índice general

Agradecimientos	III
Resumen	V
Notación	VII
Siglas y acrónimos	XII
Índice de tablas	XVII
Índice de figuras	XVIII
1. Introducción	1
1.1. Problema	3
1.2. Hipótesis	3
1.3. Objetivos	4
1.3.1. Objetivo general	4
1.3.2. Objetivos específicos	4
2. Multirrotor híbrido de empuje diferencial	7
2.1. Problema de transición	7
2.2. Marcos de referencia y variables de movimiento	8
2.2.1. Orientación	9
2.2.2. Velocidades angulares	10
2.2.3. Variables de vuelo	11
2.3. Fuerzas aerodinámicas del ala	12
2.3.1. Valores numéricos de los coeficientes aerodinámicos	13
2.4. Empuje y pares de entrada	14
2.5. Envoltentes de vuelo	14
2.6. Recapitulación	15
3. Modelo dinámico del multirrotor híbrido de empuje diferencial	17
3.1. Modelo longitudinal	17
3.1.1. Variables de vuelo nominales e incrementales	17
3.1.1.1. Empuje y ángulo de ataque nominales	18

3.1.1.2.	Ángulo de cabeceo y par de cabeceo de entrada nominales . . .	19
3.1.2.	Dinámica longitudinal incremental	19
3.1.2.1.	Ecuaciones dinámicas de x y z	20
3.1.2.2.	Ecuación dinámica de θ	21
3.1.2.3.	Cambio de variable	22
3.1.2.4.	Ecuación de estado invariante en el tiempo a pedazos	23
3.2.	Recapitulación	24
4.	Planificación de la trayectoria de transición hacia adelante	25
4.1.	Problema de planificación	25
4.2.	Solución aproximada por series de Fourier truncadas	27
4.2.1.	Coeficientes de Fourier	28
4.3.	Recapitulación	28
5.	Control de transición	29
5.1.	Ralimentación de estado estabilizante	29
5.2.	Rechazo activo de perturbaciones	31
5.2.1.	Análisis del error de estimación	32
5.2.2.	Matriz de inyección de salida	33
5.2.3.	Polinomios característicos	35
5.2.4.	Ajuste de las frecuencias de corte del estimador de incertidumbre	36
5.3.	Recapitulación	37
6.	Resultados de simulación	39
6.1.	Planificación de la trayectoria de transición hacia adelante	39
6.1.1.	Problema de planificación	39
6.1.1.1.	Funcional de costo	40
6.1.1.2.	Restricciones	40
6.1.1.3.	Condiciones de frontera	41
6.1.2.	Solución por series de Fourier truncadas	41
6.1.2.1.	Coeficientes de Fourier de la trayectoria de transición	41
6.1.2.2.	Descripción de la trayectoria de transición obtenida	43
6.2.	Control de transición	43
6.2.1.	Retroalimentación de estado estabilizante	43
6.2.1.1.	Dinámica incremental nominal	45
6.2.1.2.	Retroalimentación de estado	45
6.2.1.3.	Estabilidad local de la dinámica incremental	46
6.2.2.	Rechazo activo de perturbaciones	46
6.2.2.1.	Matriz de inyección de salida	46
6.2.2.2.	Sintonización de los filtros pasa altas del estimador de incertidumbre	47
6.3.	Pruebas de simulación	47
6.3.1.	Escenarios de simulación	48
6.3.2.	Resultados de simulación	48
6.3.2.1.	Evaluación de los resultados	49
6.4.	Comparación de metodologías de transición	50

6.4.1.	Sintonización de los parámetros de comparación	51
6.4.2.	Comparación de los resultados	51
6.4.2.1.	Resultados de planificación	51
6.4.2.2.	Resultados de simulación	52
6.4.3.	Observaciones	53
6.5.	Recapitulación	53
7.	Comentarios finales	55
7.1.	Conclusiones generales	55
7.2.	Trabajo futuro	56
7.3.	Publicaciones	56
7.3.1.	Revista	56
7.3.2.	Congreso internacional	56
	Apéndices	59
A.	Coefficientes de la dinámica incremental	59
B.	Coefficientes de la dinámica incremental bajo cambio de variable	59
C.	Matrices de inyección de salida	61
D.	Enlace a los programas de simulación	62
	Bibliografía	63

Índice de tablas

1.	Tabla de símbolos 1	VII
2.	Tabla de símbolos 2	VIII
3.	Tabla de símbolos 3	IX
4.	Tabla de símbolos 4	X
5.	Tabla de siglas y acrónimos	XII
2.1.	Coefficientes aerodinámicos.	13
6.1.	Valores del funcional de costo del problema de optimización, para los números de armónicos $n \in \{4, \dots, 9\}$	41
6.2.	Valores de la condición de estabilidad para todo el envolvente de vuelo	46
6.3.	Valores de los índices de desempeño de los tres escenarios de simulación	50

Índice de figuras

1.1. Vehículo cuadrirrotor tipo <i>Tail-Sitter</i> de empuje diferencial.	4
2.1. Referenciales del vehículo <i>Tail-Sitter</i>	8
2.2. Convención de rotaciones: $R_b^e(E) = R_z(\Psi)R_x(\Phi)R_y(\Theta)$, y proyección de dE/dt sobre el referencial cuerpo.	10
2.3. Variables de vuelo. Γ : ángulo de dirección de vuelo, Θ : ángulo de cabeceo, α : ángulo de ataque, V : magnitud de velocidad de vuelo.	12
2.4. Fuerzas y momentos de entrada.	13
2.5. Coeficientes aerodinámicos	14
3.1. Segmento de trayectoria de transición hacia adelante en el plano vertical.	18
5.1. Nonlinear uncertainty signal rejection	33
5.2. Diagramas de Bode de magnitud de los elementos de la matriz de transferencia $G_q(s)$	37
6.1.	42
6.2. Variables nominales de trayectoria de transición para $n = 4, \dots, 7$	42
6.3. Comportamiento de las variables de transición para $n = 7$ vs. el desplazamiento horizontal \bar{X}	44
6.4. Coeficientes de la matriz de estados, A_k	44
6.5. Diagramas de Bode de magnitud de los filtros pasa altas inducidos por el filtro de estimación de perturbaciones.	47
6.6. Resultados de los tres escenarios de simulación.	49
6.7. Resultados de empuje, ángulo de ataque y momento de cabeceo del tercer escenario de simulación.	49
6.8. Comparación de trayectorias de transición.	52
6.9. Comparación de variables de vuelo de simulación.	54

Introducción

Los vehículos aéreos no tripulados (*UAV*) comunes se clasifican en aeronaves de ala fija, helicópteros de un solo rotor y multihélices [23, 24]. Las aeronaves de ala fija son el tipo más eficiente desde el punto de vista energético, ya que pueden transportar una carga útil más pesada que los helicópteros y los multihélices, a una distancia mayor, y a mayor velocidad de crucero. Los helicópteros de un solo rotor tienen la capacidad de despegue y aterrizaje vertical (*VTOL*), aunque en comparación con los vehículos de ala fija no tienen tanta autonomía de vuelo, y tienen una estructura mecánica considerablemente más compleja. Los multihélices son el tipo de avión pequeño más popular debido a su facilidad de uso. Tienen capacidades *VTOL* y una gran maniobrabilidad, pero su capacidad de carga útil y su autonomía son limitadas. Entre estos, el tipo más popular de multihélice es el cuadricóptero, debido a su diseño estructural simple y a su alta confiabilidad (véase [23] para más detalles).

Los *UAVs* híbridos son aquellos vehículos que combinan algunas ventajas de los *UAVs* de ala fija y de los vehículos *VTOL*, como los cuadricópteros. Estas aeronaves tienen un buen nivel de autonomía, y una gama más amplia de aplicaciones que los *UAVs* comunes. En el estudio de [24], se distinguen dos tipos principales de *UAV* híbridos: los convertiplanos y los *Tail-Sitter*. Los convertiplanos se caracterizan por mantener la orientación de su cuerpo principal sin alteraciones notables en todas sus condiciones de vuelo. Esto puede lograrse mediante el uso de rotores o alas basculantes, y sistemas duales (véase [24] y sus referencias). Estos *UAVs* híbridos son los que se desempeñan mejor durante el vuelo horizontal, pero los mecanismos que necesitan añaden complejidad, peso y arrastre, lo que puede comprometer su desempeño aerodinámico. Los *Tail-sitters*, por otro lado, se caracterizan por mantener su cuerpo principal en orientación vertical durante el despegue y el aterrizaje, mientras que deben cambiar su orientación a una configuración horizontal para pasar al modo de vuelo de crucero. La transición entre estos modos de vuelo puede lograrse mediante el acoplamiento de las superficies de control y el empuje de los rotores (véase [28, 11, 17]), [11, 17]), o simplemente por empuje diferencial (véase [26, 27, 29, 16]). Los *Tail-Sitter* de empuje diferencial suelen ser la configuración más estables durante el despegue y el aterrizaje que sus homólogos.

La transición entre modos de vuelo es el principal reto para los *UAV* híbridos debido a la dinámica no lineal que surge durante dichas maniobras. Se denomina transición hacia adelante a la trayectoria controlada de la aeronave para pasar del modo de vuelo estacionario al modo de vuelo horizontal. Al procedimiento inverso se denomina transición hacia atrás.

En [20] abordan en el problema de planificación de trayectorias de transición de tiempo mínimo y de energía mínima, para una clase particular de *Tail-Sitters*. Formulan dos problemas

de optimización no lineales con condiciones de frontera. Proponen una estrategia de solución numérica, que busca una trayectoria en tiempo discreto. El espacio de búsqueda de la solución está definido por segmentos discretos de trayectoria, que llaman primitivas. El tiempo de solución aumenta exponencialmente con la dimensión del espacio de búsqueda de soluciones.

En [22], se considera el problema de la transición hacia adelante. Estudian un control *PID* común, sometido a una entrada escalón, y trayectorias de transición de tiempo mínimo, tanto con altitud libre como constante. Estos enfoques, aunque sencillos y funcionales, no consideran el ahorro de energía y la seguridad para aplicaciones no académicas. No evitan la región no lineal de la sustentación del ala, que es muy susceptible a las condiciones ambientales, y aumenta mucho la fuerza de arrastre.

En [16], proponen una estrategia de transición óptima en energía, en lazo semiabierto, para las maniobras de transición de vehículos *Tail-Sitters*. Calculan los valores óptimos de Empuje y de ángulo de cabeceo deseado; los cuales son transmitidos al lazo de control de orientación del piloto automático de la aeronave. El problema de planificación de la trayectoria de transición se plantea como un problema de programación no lineal, con restricciones sobre los estados previstos y los valores de entrada de la aeronave. En particular, intentan evitar grandes cambios de altitud durante la transición. En sus experimentos, se muestra que el estado del vehículo difiere significativamente de su predicción, presumiblemente debido a la falta de una estrategia de control en lazo completamente cerrado.

Con respecto a las estrategias de control de transición para los *Tail-Sitter*. En [26], describen un enfoque de control de velocidad para la transición de los aviones de empuje diferencial. Utilizan un marco de referencia que gira con el ángulo de transición. Para un problema similar, en [27], se describe un enfoque de ganancias programadas. Proponen un valor de aceleración grande y constante, junto con un ángulo de paso linealmente decreciente. El programador de ganancias cambia entre las ganancias de retroalimentación después de que se alcanzan algunas condiciones de valores de cabeceo y velocidad. En [29], calculan en línea los valores de orientación deseados y los valores de empuje requeridos para transición. Para ello, es necesario resolver un problema de optimización en cada iteración del lazo de control de posición. La trayectoria de transición se mantiene a una altitud constante, lo que da lugar a grandes valores del ángulo de ataque. En [17], se propone un control robusto no lineal para la transición de UAVs tipo *Tail-Sitter*. La dinámica de la aeronave se descompone en su parte nominal conocida más la incertidumbre, que consiste en términos no lineales, incertidumbre paramétrica y perturbaciones externas. Proporcionan un lazo de control nominal H_∞ más un observador de perturbaciones no lineales. En [11], se discute un esquema de control basado en Lyapunov para la transición de cuadrirrotores tipo *Tail-Sitter*, donde la transición se logra a una altitud constante. La componente de la velocidad vertical se calcula de tal manera que el ángulo de ataque se mantiene constante en su valor óptimo con respecto a la razón de sustentación y arrastre del ala.

En este trabajo se aborda el problema de transición hacia adelante de vehículos cuadrirrotor con ala, tipo *Tail-Sitter* de empuje diferencial. Dicho problema es descompuesto en un subproblema de planificación de trayectorias de transición, y un subproblema de control de seguimiento. Se propone un planificador de transición hacia adelante basado en un problema de optimización no lineal con restricciones y condiciones de frontera. El funcional de costo del planificador penaliza el gasto de energía debido al empuje y al momento de cabeceo. Se imponen restricciones en el ángulo de la trayectoria de vuelo para evitar que la aeronave entre en la región de desplome, que puede dar lugar a comportamientos impredecibles. Además, se consi-

deran restricciones en los valores nominales del empuje y del cambio de altitud. Dado que se restringe el ángulo de ataque nominal, la velocidad de vuelo converge rápidamente a un estado de vuelo horizontal, por lo que la fuerza de sustentación soporta rápidamente el peso de la aeronave. Además, la restricción del ángulo de ataque mantiene la sustentación del ala dentro de su región lineal, aumentando la seguridad del vehículo durante la transición. Para obtener una trayectoria suave y reducir el espacio de búsqueda de soluciones, se propone una aproximación por series de Fourier truncadas para aproximar la velocidad de vuelo deseada y el ángulo de trayectoria de vuelo deseado. Se deduce la dinámica de error linealizada alrededor de la trayectoria de transición obtenida, teniendo en cuenta las incertidumbres y perturbaciones debidas a la linealización, así como al viento. Se propone una ley de control estabilizante basada en retroalimentación de estado, mas un observador de incertidumbre lineal.

Este documento está organizado de la siguiente manera.

- En el capítulo 2, se describe la aeronave *Tail-Sitter* considerada. En el capítulo 3 se obtiene una representación del espacio de estados.
- En el capítulo 4, se describe la metodología de planificación de trayectorias propuesta.
- En el capítulo 5 se formula una ley de control por retroalimentación de estado más un término de rechazo de perturbaciones para la maniobra de transición.
- En el capítulo 6, se evalúa el desempeño en lazo cerrado de la planificación de la transición en tres escenarios de simulación, teniendo en cuenta una perturbación tipo viento; y se compara el enfoque de planificación propuesto con la metodología de [16].
- Por último, el trabajo se resume y se concluye en 7.

1.1. Problema

En este trabajo se aborda el problema de transición hacia adelante de vehículos cuadrirrotor con ala, tipo *Tail-Sitter* de empuje diferencial (ver Fig. 1.1). Este es, el problema de manipular dicho vehículo para pasar de su modo de vuelo tipo cuadrirrotor a su modo de vuelo tipo avión. Se desea que dicha maniobra de transición sea eficiente en términos de gasto de energía; y que lleve al *Tail-Sitter* hasta su modo de vuelo de crucero, de una manera segura.

1.2. Hipótesis

El problema anterior se puede descomponer en dos subproblemas, a saber: un problema de planificación de la trayectoria de transición basado en optimización, y un problema de control de seguimiento de trayectoria.

La trayectoria de transición hacia adelante se puede expresar en términos de la magnitud de velocidad de vuelo y su ángulo de dirección de movimiento. Dichas variables se pueden expresar como series de Fourier truncadas, cuyos coeficientes pueden ser optimizados para minimizar el gasto de energía, y un conjunto de restricciones que aseguren la seguridad del vehículo durante la maniobra de transición. Esto es, se puede evitar la región de desplome del ala, y tomar en cuenta los límites de los actuadores, y un cambio máximo admisible de la altura durante

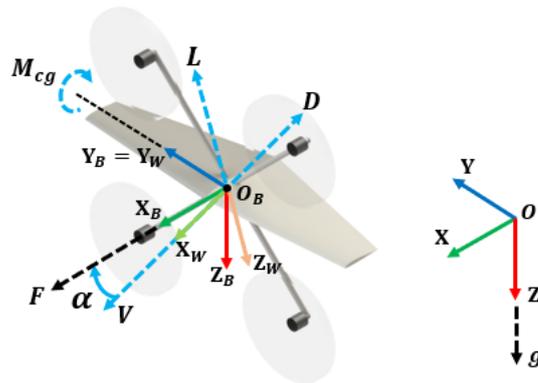


Figura 1.1: Vehículo cuadrirrotor tipo *Tail-Sitter* de empuje diferencial.

la transición. Este enfoque puede reducir el espacio de búsqueda de soluciones, disminuyendo tanto el tiempo de resolución como el del proceso de sintonización de los parámetros de optimización.

El problema de control de transición se puede resolver empleando un enfoque de rechazo de perturbaciones, para compensar la incertidumbre de modelado y las perturbaciones externas, suponiendo que cuentan con un ancho de banda finito.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general

Desarrollar un esquema de transición hacia adelante, basado en optimización, para un vehículo cuadrirrotor tipo *Tail-Sitter* de empuje diferencial. El esquema de planificación de trayectorias debe minimizar el gasto de energía, y llevar al vehículo hasta su modo de vuelo de crucero, evitando la región de desplome del ala. El esquema de control debe contar con capacidades de rechazo de perturbaciones de ancho de banda finito.

1.3.2. Objetivos específicos

- Modelar un vehículo cuadrirrotor tipo *Tail-Sitter* de empuje diferencial en transición, empleando técnicas de linealización con series de Taylor alrededor de una trayectoria de transición y de sus variables nominales asociadas; para obtener el comportamiento dinámico de las variables de vuelo alrededor de su comportamiento esperado.
- Formular un esquema de planificación de trayectorias de transición, empleando un método de optimización con restricciones, para obtener una maniobra de transición deseada que cumpla con los requerimientos de un problema de transición de mínima energía con restricciones.
- Desarrollar un esquema de control de seguimiento de trayectorias de transición; utilizando en el modelo del *Tail-Sitter* para predecir el comportamiento de las variables de vuelo a lo largo de toda la maniobra; y empleando un enfoque de rechazo de perturbaciones, para

atenuar la incertidumbre de modelado y las perturbaciones externas de ancho de banda finito.

- Probar el esquema de transición obtenido en diferentes escenarios de prueba, empleando un software de simulación numérica y las ecuaciones de movimiento no lineales, y comparar sus resultados con un enfoque similar. Esto como primer paso para verificar la validez de la hipótesis de investigación.

Multirrotor híbrido de empuje diferencial

En este trabajo se considera un UAV pequeño tipo *Tail-Sitter* de masa $m = 1.6$ [kg], el cual consiste en un cuadrirrotor con un ala empotrada, como es mostrado en la Fig. 2.1. Este cuenta con un ala trapezoidal con una razón de conicidad de 0.4, un ángulo de flechado nulo sobre el cuarto de cuerda del ala, una envergadura $b = 1.35$ [m], y una razón de aspecto $AR = 6$. El perfil alar es un S5010 reflejado de baja velocidad, especial para alas volantes [25], el cual se encarga de proveer de estabilidad estática longitudinal, y tiene una cuerda media aerodinámica $\bar{c} = 0.165$ [m]. Cuenta con tres envolventes de vuelo, los cuales definen los estados en los que este vehículo vuela como cuadrirrotor, como avión, o en un estado intermedio, llamado de transición. Estos envolventes son detallados en la sección 2.5.

Este es un vehículo subactuado, pues los cuatro motores proveen de un empuje total \mathcal{F} y tres pares de entrada independientes, $\{\mathcal{T}_p, \mathcal{T}_q, \mathcal{T}_r\}$, alrededor de los ejes del marco de referencia del cuerpo, detallados en la siguiente sección. Los pares \mathcal{T}_q y \mathcal{T}_r son generados a través de la diferencia de empuje entre los cuatro motores, por un brazo de palanca $l = 20$ [cm]. Por otro lado, \mathcal{T}_p es generado únicamente por los pares parásitos producidos por las hélices, y es el que proporciona la menor autoridad de control. Sin embargo, la simplicidad mecánica de este vehículo híbrido lo hace una opción atractiva para diversas aplicaciones.

Para propósitos prácticos, se considera que el tensor de inercia de este vehículo es diagonal, debido a que la magnitud de los términos cruzados es lo suficientemente pequeña. Dado que en este trabajo se ataca el problema de transición, el momento de inercia que es relevante es aquel que se obtiene alrededor del eje $O_B Y_B$, dado por $I_y = 0.048$ [kg m²].

En la sección 2.1 se describe el problema de transición de vuelo cuadrirrotor a vuelo de crucero del vehículo *Tail-Sitter* descrito en los párrafos anteriores, en la sección 2.2 se definen los marcos de referencia a utilizar, el formalismo de representación de la orientación, y la descripción de las variables cinemáticas del vehículo, las cuales serán utilizadas por el planificador de trayectoria del capítulo 4. En las secciones 2.3 y 2.4 se describen las fuerzas aerodinámicas y de entrada de los motores. Y finalmente, en la sección 2.5 se definen formalmente los modos de vuelo cuadrirrotor, avión y de transición.

2.1. Problema de transición

El problema de manipular de manera controlada a un vehículo híbrido, para pasar del modo de vuelo estacionario a su modo de vuelo de crucero, se conoce como problema de transición hacia adelante. Este problema se puede descomponer en dos subproblemas a saber: un problema

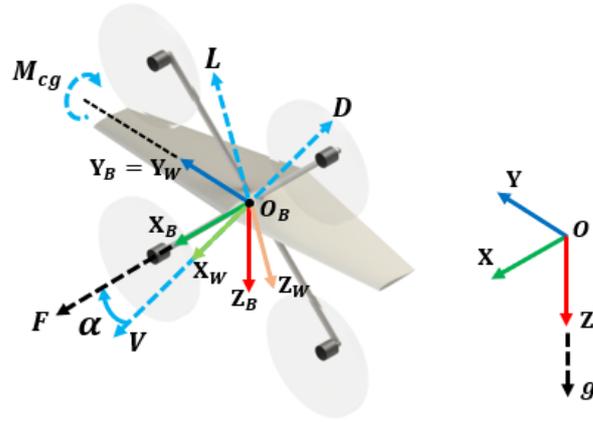


Figura 2.1: Referenciales del vehículo *Tail-Sitter*. Referencial inercial ($OXYZ$), referencial viento ($O_W X_W Y_W Z_W$), y referencial cuerpo ($O_B X_B Y_B Z_B$).

de planificación de la trayectoria de transición, y un subproblema de control de seguimiento. Para el vehículo descrito al inicio de este capítulo, se toman las siguientes consideraciones.

Se considera que, inicialmente, el vehículo se encuentra en un estado de vuelo cuadrirrotor, con los vectores de empuje de los rotores orientados verticalmente, y con una velocidad de vuelo inicial pequeña. Entonces se desea controlar la dinámica longitudinal de dicho vehículo para ejecutar la transición a un estado de vuelo de crucero, el cuál se caracteriza por una dirección de vuelo horizontal, a una velocidad de vuelo constante.

Por seguridad, se requiere evitar la región de desplome del ala, al acotar el ángulo de ataque nominal por debajo del valor de desplome, y evitar maniobras de descenso durante toda la maniobra de transición. Además es deseable respetar las cotas en las variables de entrada, al acotar los valores nominales de empuje y momento de cabeceo de entrada nominales.

Para resolver este problema, en el capítulo 4, se formalizará el problema de planificación de la trayectoria de transición hacia adelante, planteado como un problema de optimización con restricciones; y en el capítulo 5, se propone un esquema de control de seguimiento con capacidades de rechazo activo de perturbaciones.

2.2. Marcos de referencia y variables de movimiento

Se consideran tres marcos de referencia que siguen la convención de la mano derecha, a saber: el referencial inercial, $OXYZ$, el referencial viento, $O_W X_W Y_W Z_W$, y el referencial cuerpo, $O_B X_B Y_B Z_B$, como se muestra en la Fig. 2.1, los cuales son descritos a continuación:

1. El referencial inercial, $OXYZ$, se encuentra fijo en el espacio. El plano OXY es paralelo a la superficie de la tierra, el eje OX apunta a la dirección de vuelo de crucero en modo avión, y el eje OZ apunta hacia el centro de la tierra, paralelo al vector de aceleración de la gravedad [23, § 5.1].
2. El referencial viento, $O_W X_W Y_W Z_W$, tiene su origen, O_W , empotrado al centro de gravedad del vehículo; el eje $O_W X_W$ apunta en la dirección del vector de velocidad; y el eje $O_W Z_W$ apunta en la dirección contraria del vector de fuerza de sustentación del ala (ver la Fig. 2.1). Este sólo está definido cuando el vehículo se encuentra en movimiento.

3. El referencial cuerpo, $O_B \mathbf{X}_B \mathbf{Y}_B \mathbf{Z}_B$, tiene su origen O_B empotrado al centro de gravedad del vehículo; el eje $O_B \mathbf{X}_B$ apunta en la dirección del empuje, y el eje $O_B \mathbf{Y}_B$ es paralelo al plano del ala, y coincide con el eje $O_W \mathbf{Y}_W$ cuando el empuje es paralelo al vector de velocidad.

2.2.1. Orientación

En los vehículos multirrotores tipo *Tail-Sitter*, como el que se considera en este trabajo, es posible encontrarse con un problema de indeterminación en las variables de orientación. Este fenómeno es conocido como el bloqueo de Cardán (*gimbal lock* en inglés), y se presenta cuando el vehículo tiene grandes cambios de orientación. Por ejemplo, al realizar la maniobra de transición, un *Tail-Sitter* comúnmente cabecea aproximadamente $90 [^\circ]$ alrededor de su eje $O_B \mathbf{Y}_B$. Para evitar este problema, definimos la orientación del vehículo de una manera diferente a la convencional, como se describe a continuación.

El vector de posición del centro de gravedad del *Tail-Sitter*, expresado en el referencial inercial, es $\Xi = [\mathbf{X} \ \mathbf{Y} \ \mathbf{Z}]^T$. La orientación se expresa por medio de los ángulos de Euler, $E = [\Phi \ \Theta \ \Psi]^T$, donde, respectivamente, Φ es el ángulo de alabeo, Θ es el ángulo de cabeceo, y Ψ es el ángulo de guiñada. Estos ángulos son definidos por la matriz de rotación del referencial cuerpo al referencial inercial:

$$\begin{aligned} R_b^e(E) &= R_z(\Psi)R_x(\Phi)R_y(\Theta), \\ &= \begin{bmatrix} \cos \Theta \cos \Psi - \sin \Phi \sin \Theta \sin \Psi & -\cos \Phi \sin \Psi & \sin \Theta \cos \Psi + \sin \Phi \cos \Theta \sin \Psi \\ \cos \Theta \sin \Psi + \sin \Phi \sin \Theta \cos \Psi & \cos \Phi \cos \Psi & \sin \Theta \sin \Psi - \sin \Phi \cos \Theta \cos \Psi \\ -\cos \Phi \sin \Theta & \sin \Phi & \cos \Phi \cos \Theta \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

donde

$$R_x(\Phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Phi & \sin \Phi \\ 0 & -\sin \Phi & \cos \Phi \end{bmatrix}, \quad R_y(\Theta) = \begin{bmatrix} \cos \Theta & 0 & -\sin \Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \Theta & 0 & \cos \Theta \end{bmatrix}, \quad R_z(\Psi) = \begin{bmatrix} \cos \Psi & \sin \Psi & 0 \\ -\sin \Psi & \cos \Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

El orden de rotaciones (2.1) define los sistemas referenciales intermedios: $O_1 \mathbf{X}_1 \mathbf{Y}_1 \mathbf{Z}_1$ y $O_2 \mathbf{X}_2 \mathbf{Y}_2 \mathbf{Z}_2$, mostrados en la Fig. 2.2, los cuales definen los ángulos de Euler de la siguiente manera:

- Ψ , es el ángulo entre los ejes $O\mathbf{X}$ y $O_1 \mathbf{X}_1$, medido alrededor del eje $O\mathbf{Z}$.
- Φ , es el ángulo entre los ejes $O_1 \mathbf{Y}_1$ y $O_2 \mathbf{Y}_2$, medido alrededor del eje $O_1 \mathbf{X}_1 = O_2 \mathbf{X}_2$.
- Θ es el ángulo entre los ejes $O_2 \mathbf{Z}_2$ y $O_B \mathbf{Z}_B$, medido alrededor del eje $O_2 \mathbf{Y}_2 = O_B \mathbf{Y}_B$.

Los valores numéricos de los ángulos de Euler se obtienen de los valores de los elementos de la matriz $R_b^e(E) = [r_{ij}] \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ (cf. (2.1)), como

$$\begin{aligned} \Phi &= \arcsin(r_{32}), \\ \Theta &= \arctan\left(\frac{-r_{31}}{r_{33}}\right), \\ \Psi &= \arctan\left(\frac{-r_{12}}{r_{22}}\right). \end{aligned} \quad (2.3)$$

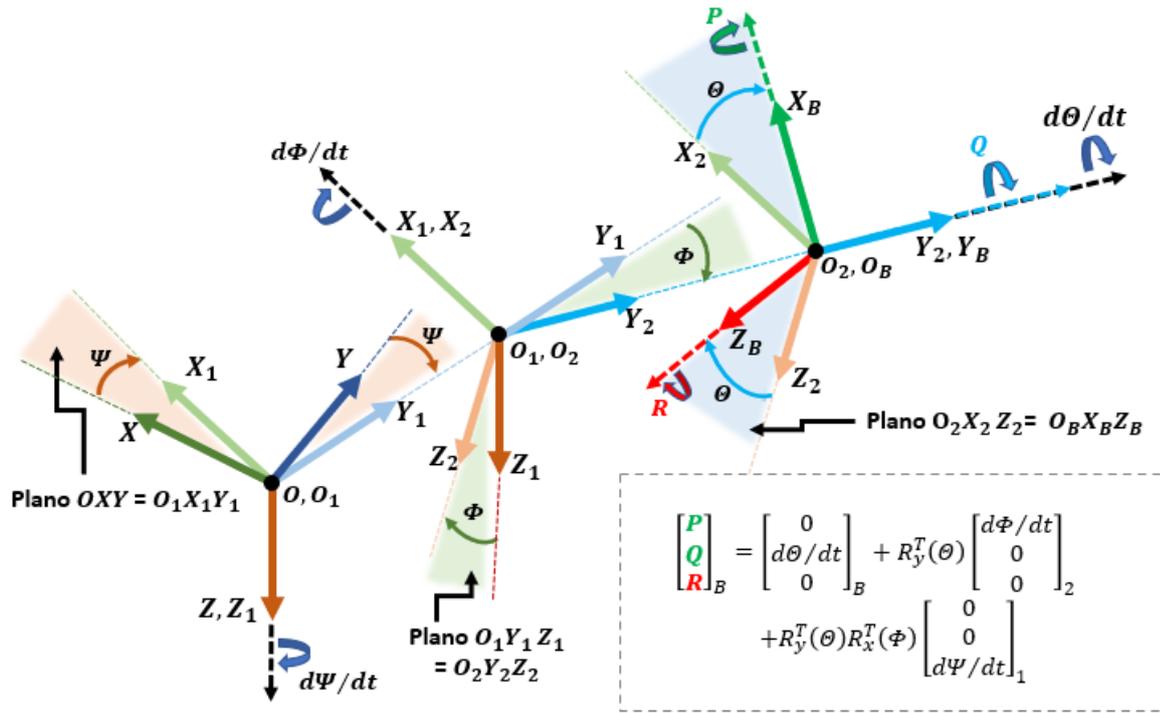


Figura 2.2: Convención de rotaciones: $R_b^e(E) = R_z(\Psi)R_x(\Phi)R_y(\Theta)$, y proyección de dE/dt sobre el referencial cuerpo.

Las ecuaciones de Θ y Ψ en (2.3) son singulares cuando $\Phi = \pi/2$. Esto refleja el fenómeno de bloqueo de cardán, el cual se produce cuando el eje de rotación del ángulo de cabeceo, $O_B Y_B$, es paralelo al eje de rotación del ángulo de guiñada, OZ (véase la Fig. 2.2). Durante este fenómeno, no es posible distinguir entre los ángulos de Θ y de Ψ .

El orden de rotaciones de (2.1) no es el que se encuentra comunmente en la literatura (cf. [10, eq. 2.12], [12, eq. 2.15]). Sin embargo, este orden alternativo presenta el fenómeno de bloqueo de cardán cuando el vehículo alabea 90° , en lugar de cuando el vehículo cabecea 90° , como es común. Esto permite realizar la maniobra de transición sin preocuparse del problema de singularidad. Esto es deseado en el vehículo *Tail-Sitter* considerado, pues cuando el alabeo es $\Phi = \pm\pi/2$ el vector de sustentación del ala no puede compensar el peso del vehículo en el aire, y por lo tanto es una configuración de orientación que se busca evitar.

2.2.2. Velocidades angulares

En esta subsección, se mostrará la relación entre la tasa de cambio de los ángulos de Euler y el vector de velocidades del cuerpo. Para esto, se definen los siguientes vectores:

$$\frac{d}{dt}\vec{\Phi}_2 = \begin{bmatrix} d\Phi/dt \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_2, \quad \frac{d}{dt}\vec{\Theta}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ d\Theta/dt \\ 0 \end{bmatrix}_B, \quad \frac{d}{dt}\vec{\Psi}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d\Psi/dt \end{bmatrix}_1, \quad (2.4)$$

donde el subíndice $i \in \{1, 2, B\}$ hace referencia a que estos están expresados en los referenciales $O_2 X_2 Y_2 Z_2$, $O_B X_B Y_B Z_B$ y $O_1 X_1 Y_1 Z_1$, respectivamente, mostrados en la Fig. 2.2.

La velocidad angular en el referencial cuerpo, $\Omega = [P \ Q \ R]$, se obtiene de la suma de las proyecciones de los vectores (2.4) sobre los ejes de $O_B \mathbf{X}_B \mathbf{Y}_B \mathbf{Z}_B$, como sigue: (ver Fig. 2.2)

$$\begin{aligned} \Omega &= \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} R_y^T(\Theta) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_2, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_b, R_y^T(\Theta) R_x^T(\Phi) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\Phi/dt \\ d\Theta/dt \\ d\Psi/dt \end{bmatrix} \\ &= W(E) \frac{dE}{dt} \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde

$$W(E) = \begin{bmatrix} \cos \Theta & 0 & -\cos \Phi \sin \Theta \\ 0 & 1 & \sin \Phi \\ \sin \Theta & 0 & \cos \Theta \cos \Phi \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

El determinante de $W(E)$ se anula durante el bloqueo de cardán, dado que

$$\det(W(E)) = \cos \Phi, \quad (2.7)$$

lo cual significa que Ω se puede obtener de la tasa de cambio de los ángulos de Euler, dE/dt , siempre que se evite el fenómeno de bloqueo de cardán, el cuál sucede cuando $\Phi = \pm\pi/2$.

2.2.3. Variables de vuelo

En el capítulo 4, será conveniente definir la trayectoria de transición del vehículo *Tail-Sitter* en términos de las siguientes variables de vuelo. Estas son además variables comúnmente utilizadas en la literatura de vehículos aéreos.

Si se suponen condiciones de viento nulas, y que el vehículo no presenta deslizamiento lateral [10, eq. 2.14], entonces la magnitud de velocidad de vuelo, V , en el plano vertical es:

$$V = \sqrt{(d\mathbf{X}/dt)^2 + (d\mathbf{Z}/dt)^2}. \quad (2.8)$$

y coincide con la magnitud de velocidad de viento relativo, que produce la sustentación del ala.

El ángulo de ataque, α , se define como el ángulo entre la línea de la cuerda del perfil del ala y la dirección de la velocidad de vuelo, V , como se muestra en la Fig. 2.3. Este ángulo define la matriz de rotación entre el referencial viento al referencial cuerpo:

$$R_w^b(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

la cual es útil en el modelo matemático de seis grados de libertad presentado en el capítulo 3.

Para valores pequeños del ángulo de alabeo, Φ , el ángulo de cabeceo, Θ , se relaciona con el ángulo de ataque por medio de las fórmulas:

$$\Theta = \alpha + \Gamma \quad (2.10)$$

$$\Gamma = \arctan(-(d\mathbf{Z}/dt)/(d\mathbf{X}/dt)) \quad (2.11)$$

donde Γ es el ángulo de dirección de vuelo (*flight path angle* en inglés) definido como el ángulo entre la dirección de la velocidad de vuelo, V , y el plano horizontal [10, § 2.2.4].

Estas tres importantes variables de vuelo, $\{V, \alpha, \Gamma\}$, y su relación, son mostradas gráficamente en la Fig. 2.3.

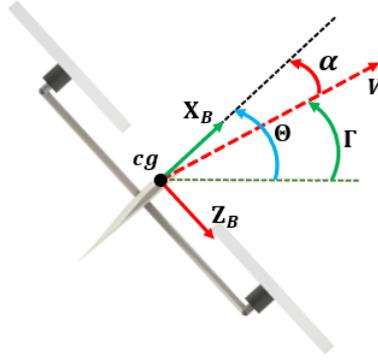


Figura 2.3: Variables de vuelo. Γ : ángulo de dirección de vuelo, Θ : ángulo de cabeceo, α : ángulo de ataque, V : magnitud de velocidad de vuelo.

2.3. Fuerzas aerodinámicas del ala

Una ala presenta dos fuerzas importantes, la fuerza de sustentación, L , y la fuerza de arrastre, D . Así mismo, presenta un momento de cabeceo, M , alrededor de la línea de envergadura al cuarto de cuerda. La fuerza de sustentación permite mantener el vehículo *Tail-Sitter* en el aire durante vuelo de crucero, gastando solamente la energía necesaria para compensar la fuerza de arrastre. El momento de cabeceo del ala debe ser compensado para asegurar la estabilidad en la orientación del vehículo en vuelo tipo avión y de transición. En términos matemáticos, estas variables son dadas por (cf. [10]):

$$\begin{aligned} L(V, \alpha) &= \frac{1}{2} \rho (b^2 / AR) V^2 C_L(\alpha), & D(V, \alpha) &= \frac{1}{2} \rho (b^2 / AR) V^2 C_D(\alpha), \\ M(V, \alpha) &= \frac{1}{2} \bar{c} \rho (b^2 / AR) V^2 C_M(\alpha), \end{aligned} \quad (2.12)$$

donde C_i , $i \in \{L, D, M\}$, son coeficientes aerodinámicos adimensionales, y ρ es la densidad del aire.

En la práctica, los vehículos aéreos de ala fija buscan mantener el ángulo de ataque, α , pequeño y con una variación lenta. Esto permite definir los coeficientes aerodinámicos de una manera simple como

$$\begin{aligned} C_L(\alpha) &= C_{L0} + C_{L1} \alpha, & C_D(\alpha) &= C_{D0} + C_{D1} \alpha + C_{D2} \alpha^2, \\ C_M(\alpha) &= C_{M0} + C_{M1} \alpha. \end{aligned} \quad (2.13)$$

El momento de cabeceo con respecto al centro de gravedad del *Tail-Sitter* es el que afecta realmente su estabilidad en orientación. Este se muestra gráficamente en la Fig. 2.1, y se obtiene como [10, §3.2.1]:

$$M_{cg}(V, \alpha) = M(V, \alpha) + \bar{c}(h - h_0)L(V, \alpha). \quad (2.14)$$

En (2.14), la variable $h_0 = 0.25$ indica la ubicación del centro aerodinámico del ala, al 25 % de \bar{c} , medido con respecto al borde de ataque; y de manera similar, la variable $h = 0.1$ indica que

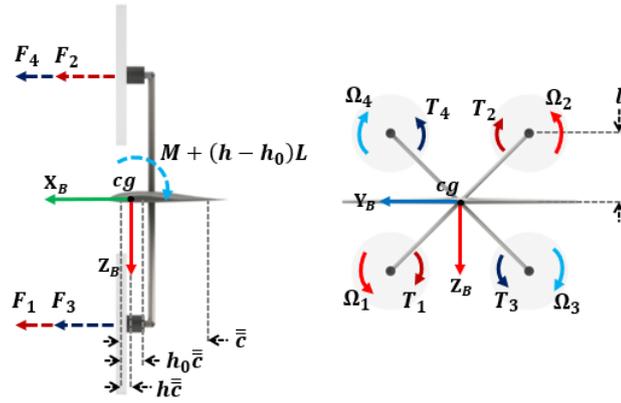


Figura 2.4: Fuerzas y momentos de entrada.

el centro de gravedad se ubica al 10% del \bar{c} . A partir de que $h < h_0$, se produce que la curva de M_{cg} vs α tiene una pendiente negativa, asegurando la estabilidad estática de M_{cg} (cf. [10]). La estabilidad estática de esta variable facilita la estabilización de la variable de orientación de cabeceo durante el vuelo.

2.3.1. Valores numéricos de los coeficientes aerodinámicos

En la práctica, los coeficientes aerodinámicos (2.13) dependen del valor local del número de Reynolds:

$$Re = \frac{\rho V \bar{c}}{\mu}. \quad (2.15)$$

donde μ es la viscosidad dinámica del aire. Para valores casi constantes de ρ y μ , lo cual es el caso considerado, los valores de (2.13) dependen del valor actual de la velocidad de viento relativa, V .

En la Fig. 2.5 se muestran las curvas de sustentación, arrastre y momento de cabeceo al cuarto de cuerda de \bar{c} del ala, obtenidos por medio del *software* de análisis aerodinámico para bajos números de Reynolds *XFLR5* [30], para valores de velocidad en el intervalo de $V = 1$ [m/s] a $V = 15$ [m/s], y valores de ángulo de ataque de 0 [°] a 10 [°], dentro de la región lineal del coeficiente de sustentación.

Para propósitos prácticos, los valores numéricos de cada coeficiente en (2.13) son tomados como los valores promedio de aquellos obtenidos por medio del *software* *XFLR5*. Estos valores son presentados en la Tabla 2.1.

Tabla 2.1: Coeficientes aerodinámicos.

Parameters	Values
(C_{L_0}, C_{L_1})	(0.1875, 0.0660)
$(C_{D_0}, C_{D_1}, C_{D_2})$	(0.0212, 0.0014, 0.0004)
$(C_{M_0}, C_{M_1},)$	(-0.0134, 0.0092)

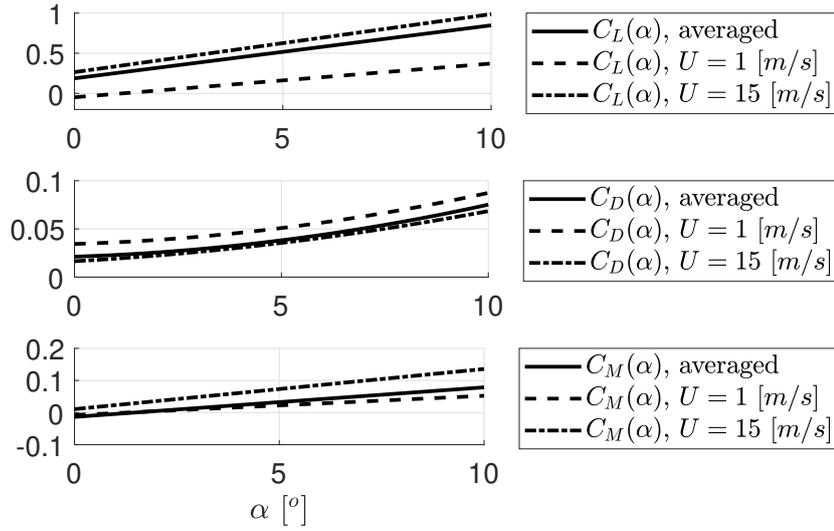


Figura 2.5: Coeficientes aerodinámicos. U denota la magnitud del viento incidente.

2.4. Empuje y pares de entrada

Los cuatro motores del vehículo *Tail-Sitter* considerado (Fig. 2.4) proveen un empuje total \mathcal{F} y tres pares de entrada independientes, $\{\mathcal{T}_p, \mathcal{T}_q, \mathcal{T}_r\}$, alrededor de los ejes del marco de referencia $O_B\mathbf{X}_B$, $O_B\mathbf{Y}_B$ y $O_B\mathbf{Z}_B$, respectivamente. Los pares \mathcal{T}_q y \mathcal{T}_r son generados a través de la diferencia de empuje entre los cuatro motores, mientras que \mathcal{T}_p es generado por los pares parásitos producidos por las hélices, y proporciona la menor autoridad de control. Esto es debido a que la cota superior de la magnitud de \mathcal{T}_p es menor que las de \mathcal{T}_q y \mathcal{T}_r . Por esta razón, los vehículos *Tail-Sitter* de empuje diferencial proveen un grado de rigidez limitado en la dinámica de alabeo durante vuelo de crucero, y en la dinámica de guiñada en modo de vuelo multirroto.

Según la configuración de rotores mostrada en el vehículo de la Fig. 2.4, las variables de control, $\{\mathcal{F}, \mathcal{T}_p, \mathcal{T}_q, \mathcal{T}_r\}$, se relacionan con el cuadrado de las velocidades angulares de los rotores, de la forma [23, 12]

$$\begin{bmatrix} \mathcal{F} \\ \mathcal{T}_p \\ \mathcal{T}_q \\ \mathcal{T}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_f & k_f & k_f & k_f \\ -k_\tau & -k_\tau & k_\tau & k_\tau \\ lk_f & -lk_f & lk_f & -lk_f \\ -lk_f & lk_f & lk_f & -lk_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

donde $k_f, k_\tau > 0$ son los coeficientes de proporcionalidad de empuje y arrastre parásito de los rotores, respectivamente.

2.5. Envolventes de vuelo

La transición hacia adelante yace en tres regiones llamadas envolventes de vuelo [20], definidas por los valores de las variables de movimiento. Se definen tres envolventes de vuelo para la dinámica longitudinal: el envolvente de vuelo cuadrirrotor (*EVC*), el envolvente de vuelo de transición (*EVT*), y el envolvente de vuelo avión (*EVA*). De manera similar que en [20], definimos estos envolventes de vuelo en términos de la velocidad, V , y el ángulo de ataque, α , como sigue:

1. El *EVC* toma lugar cuando el empuje, \mathcal{F} , actúa como la fuerza de sustentación principal. Esto generalmente sucede cuando $\Theta \approx 90^\circ$, el ángulo de dirección, Γ , es libre, y la velocidad, V , es baja. Esto es:

$$EVC = \{(\alpha, V) : |\alpha| < \pi, 0 \leq V < \bar{V}_h\} \quad (2.17)$$

donde $\bar{V}_h = 2$ [m/s] es un valor umbral de velocidad.

2. El *EVT* toma lugar cerca del inicio de la maniobra de transición, cuando la sustentación del ala, L , comienza a tomar relevancia, el coeficiente de sustentación se encuentra en su región lineal, y el empuje, \mathcal{F} , aún es utilizado para mantener a la aeronave en el aire. Esto se define como:

$$EVT = \{(\alpha, V) : |\alpha| \leq \bar{\alpha}_s, \bar{V}_h < V \leq \bar{V}_a\} \quad (2.18)$$

donde $\bar{\alpha}_s = 10$ [°] y $\bar{V}_a = 8$ [m/s] son estimados de los valores de ángulo de ataque y velocidad de desplome del ala. Estos valores son elegidos cercanos a aquellos encontrados usualmente en la literatura [20, 1], y del análisis numérico con el *software XFLR5* [30].

3. El *EVA* toma lugar cuando el ala es la principal fuente de sustentación que mantiene a la aeronave en el aire. Esto sucede cuando la velocidad de vuelo es lo suficientemente grande, con el ángulo de ataque dentro de la región lineal del coeficiente de sustentación. Este envolvente se define como:

$$EVA = \{(\alpha, V) : |\alpha| \leq \bar{\alpha}_s, V \geq \bar{V}_a\}. \quad (2.19)$$

Estos tres envolventes de vuelo definen los rangos de valores de α y V en los que se considera que el vehículo *Tail-Sitter* se encuentra en los modos de vuelo cuadrirrotor, avión o de transición.

2.6. Recapitulación

En este capítulo se presentaron las coordenadas angulares que representan la orientación del vehículo *Tail-Sitter*, Φ , Θ y Ψ . Estas evitan la singularidad de bloqueo de cardan siempre que $\Phi \neq \pm\pi/2$, por el orden de transformaciones (2.1). Se presentó el modelo de las fuerzas aerodinámicas que actúan sobre el centro de gravedad de este vehículo, y los valores numéricos de los coeficientes aerodinámicos asociados (Tabla 2.1). Con esto es posible derivar el modelo matemático completo del vehículo, por ejemplo utilizando el método de Newton-Euler. Además, se definieron las regiones de valores de V y α que definen los modos de vuelo cuadrirrotor, avión, y de transición del vehículo en vuelo.

Modelo dinámico del multirroto híbrido de empuje diferencial

3.1. Modelo longitudinal

El problema de transición de los vehículos *Tail-Sitter* esta restringido al movimiento en el plano vertical, OXZ . Por esta razón, como es común en la literatura de aeronáutica [10], bajo la suposición de valores pequeños en los ángulos de alabeo, Φ , y guiñada, Ψ , la dinámica del vehículo *Tail-Sitter* es desacoplada en sus partes lateral direccional y longitudinal. El movimiento en la dinámica lateral direccional se encuentra restringido al plano OXY ; y las variables asociadas son la coordenada de posición en \mathbf{Y} y los ángulos de alabeo, Φ , y guiñada, Ψ . El movimiento de la dinámica longitudinal se encuentra restringido al plano vertical, OXZ , y las variables asociadas son las coordenadas de posición $\{\mathbf{X}, \mathbf{Z}\}$, y el ángulo de cabeceo, Θ .

Se supone que la dinámica lateral direccional ha sido estabilizada asintóticamente alrededor del punto $[\mathbf{Y} \ \Phi \ \Psi]^T = [0 \ 0 \ 0]$ y $[d\mathbf{Y}/dt \ d\Phi/dt \ d\Psi/dt]^T = [0 \ 0 \ 0]$. Por lo que solamente se consideran las ecuaciones de movimiento longitudinales (cf. [20, 5]):

$$\begin{bmatrix} d^2\mathbf{X}/dt^2 \\ d^2\mathbf{Z}/dt^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix} - \frac{1}{m} \begin{bmatrix} \cos \Gamma & \sin \Gamma \\ -\sin \Gamma & \cos \Gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D(V, \alpha) \\ L(V, \alpha) \end{bmatrix} + \frac{\mathcal{F}}{m} \begin{bmatrix} \cos \Theta \\ -\sin \Theta \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

$$d^2\Theta/dt^2 = (1/I_y)(\mathcal{T}_q + M(V, \alpha) + \bar{c}(h - h_0)L(V, \alpha)). \quad (3.2)$$

donde V , α , y Γ son la magnitud de velocidad, el ángulo de ataque y el ángulo de dirección de vuelo, respectivamente (cf. (2.8), (2.10), y (2.11)).

3.1.1. Variables de vuelo nominales e incrementales

Durante la transición, el *Tail-Sitter* debe seguir una trayectoria de transición. Dada la forma de (3.1) y (3.2), es conveniente describir esta trayectoria en términos de los valores deseados de la magnitud de velocidad de vuelo y su ángulo de dirección, denotados por $\bar{V} = \bar{V}(t)$ y $\bar{\Gamma} = \bar{\Gamma}(t)$, respectivamente, como se muestra en la Fig. 3.1. En esta figura se puede notar que la velocidad deseada en el plano vertical se expresa en términos de \bar{V} y $\bar{\Gamma}$ como

$$d\bar{\mathbf{X}}/dt = \bar{V} \cos(\bar{\Gamma}), \quad d\bar{\mathbf{Z}}/dt = -\bar{V} \sin(\bar{\Gamma}). \quad (3.3)$$

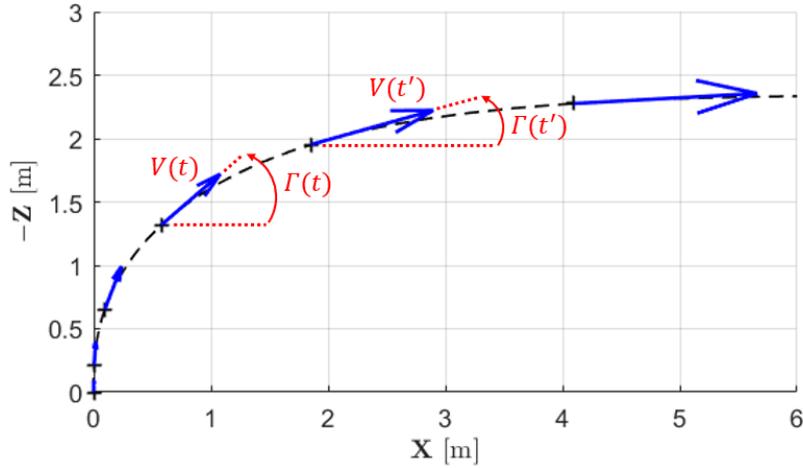


Figura 3.1: Segmento de trayectoria de transición hacia adelante en el plano vertical.

Se descompondrán todas las variables en dos términos, a saber: un término nominal y uno incremental. Para aquellas variables a ser controladas, el término nominal corresponde a su valor de referencia; para las variables de entrada, este corresponde a su valor que será prealimentado; y para las variables restantes, este corresponde al valor predicho a partir del modelo. Los términos incrementales corresponden a aquellos valores pequeños alrededor de los valores nominales, y que suman para reconstruir la variable a la cual corresponden. En lo sucesivo, se denota con letras mayúsculas con barra superior a los términos nominales, y con variables minúsculas a los términos incrementales, a saber:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \bar{\mathbf{X}} + \mathbf{x}; & \mathbf{Z} &= \bar{\mathbf{Z}} + \mathbf{z}; & \Theta &= \bar{\Theta} + \theta; & V &= \bar{V} + v; \\ \Gamma &= \bar{\Gamma} + \gamma; & \alpha &= \bar{\alpha} + \alpha; & \mathcal{F} &= \bar{\mathcal{F}} + f; & \mathcal{T}_q &= \bar{\mathcal{T}}_q + \tau_q. \end{aligned} \quad (3.4)$$

La notación de variables nominales-incrementales permite traducir el seguimiento de la trayectoria de transición en el problema de estabilización de las variables incrementales. Es posible expresar las variables nominales $\bar{\mathcal{F}}$, $\bar{\alpha}$, $\bar{\Theta}$ y $\bar{\mathcal{T}}_q$, en términos de la trayectoria nominal, dada por \bar{V} y $\bar{\Gamma}$, como se describe a continuación.

3.1.1.1. Empuje y ángulo de ataque nominales

En esta subsección se van a encontrar las expresiones de las variables nominales del empuje $\bar{\mathcal{F}}$ y del ángulo de ataque $\bar{\alpha}$ en términos de \bar{V} y $\bar{\Gamma}$. Nótese que la dinámica longitudinal nominal traslacional se obtiene al sustituir cada variable en (3.1) por su valor nominal:

$$\begin{bmatrix} d^2\bar{\mathbf{X}}/dt^2 \\ d^2\bar{\mathbf{Z}}/dt^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix} - \frac{1}{m} \begin{bmatrix} \cos \bar{\Gamma} & \sin \bar{\Gamma} \\ -\sin \bar{\Gamma} & \cos \bar{\Gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{D} \\ \bar{L} \end{bmatrix} + \frac{\bar{\mathcal{F}}}{m} \begin{bmatrix} \cos \bar{\Theta} \\ -\sin \bar{\Theta} \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Entonces, de (3.3) y (3.5) se tiene que

$$\begin{bmatrix} d^2\bar{\mathbf{X}}/dt^2 \\ d^2\bar{\mathbf{Z}}/dt^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \bar{\Gamma} d\bar{V}/dt - \bar{V} \sin \bar{\Gamma} d\bar{\Gamma}/dt \\ -\sin \bar{\Gamma} d\bar{V}/dt - \bar{V} \cos \bar{\Gamma} d\bar{\Gamma}/dt \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Igualando (3.5) y (3.6) se deducen los valores nominales de empuje y sustentación del ala:

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathcal{F}} \\ \bar{\mathcal{L}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{D}/\cos\bar{\alpha} \\ -\bar{D}\tan\bar{\alpha} \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} g \sin\bar{\Gamma}/\cos\bar{\alpha} \\ g(\cos\bar{\Gamma} - \sin\bar{\Gamma}\tan\bar{\alpha}) \end{bmatrix} - m \begin{bmatrix} -d\bar{V}/dt/\cos\bar{\alpha} \\ \tan\bar{\alpha}d\bar{V}/dt - \bar{V}d\bar{\Gamma}/dt \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Para ángulos de ataque pequeños, se tiene que $\cos\bar{\alpha} \approx 1$ y $\sin\bar{\alpha} \approx \bar{\alpha}$. Entonces, a partir de la expresión de la sustentación nominal $\bar{\mathcal{L}}$ en (3.7) se obtiene el ángulo de ataque nominal:

$$\bar{\alpha} \approx \frac{mg \cos\bar{\Gamma} + m\bar{V}d\bar{\Gamma}/dt - \frac{1}{2}\rho(b^2/AR)\bar{V}^2 C_{L_0}}{\frac{1}{2}\rho(b^2/AR)\bar{V}^2 (C_{L_1} + C_{D_0}) + mg \sin\bar{\Gamma} + m\bar{V}d\bar{\Gamma}/dt}. \quad (3.8)$$

3.1.1.2. Ángulo de cabeceo y par de cabeceo de entrada nominales

En esta subsección se van a encontrar las expresiones de las variables nominales de ángulo de cabeceo $\bar{\Theta}$ y del momento de cabeceo de entrada $\bar{\mathcal{T}}_q$ en términos de \bar{V} y $\bar{\Gamma}$. De (2.10) y (3.8), el ángulo de cabeceo nominal es

$$\bar{\Theta} = \bar{\Gamma} + \bar{\alpha}. \quad (3.9)$$

Suponiendo que $\bar{\alpha}$ varía lentamente, las primeras dos derivadas temporales de $\bar{\Theta}$ son (cf. (3.9) y (3.2))

$$\begin{aligned} d\bar{\Theta}/dt &= d\bar{\Gamma}/dt, \\ d^2\bar{\Theta}/dt^2 &= d^2\bar{\Gamma}/dt^2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

La dinámica longitudinal nominal rotacional se obtiene al sustituir cada variable en (3.2) por su valor nominal:

$$d^2\bar{\Theta}/dt^2 = (1/I_y) (\bar{\mathcal{T}}_q + \bar{M} + \bar{c}(h - h_0)\bar{L}). \quad (3.11)$$

Entonces, de (3.10) y (3.11) se deduce la ecuación del momento de cabeceo de entrada

$$\bar{\mathcal{T}}_q = I_y d^2\bar{\Gamma}/dt^2 - \bar{M} - \bar{c}(h - h_0)\bar{L}. \quad (3.12)$$

3.1.2. Dinámica longitudinal incremental

En la subsección anterior se presentó la dinámica nominal de las variables: $\bar{\mathbf{X}}$, $\bar{\mathbf{Z}}$ y $\bar{\Theta}$, en términos de la trayectoria de transición: \bar{V} y $\bar{\Gamma}$. Alrededor de ésta se desarrolla la dinámica de las variables incrementales longitudinales: \mathbf{x} , \mathbf{z} , θ . Es necesario estabilizar la dinámica incremental para asegurar el seguimiento de la trayectoria de transición. A continuación se desarrollan las ecuaciones de movimiento de las variables incrementales longitudinales. Estas serán dadas en una representación de estado en donde la matriz de estados, A , es constante a pedazos. Esto permite expresar las variables de posición incrementales en un conjunto de ejes de coordenada cuerpo nominales a lo largo de toda la trayectoria.

3.1.2.1. Ecuaciones dinámicas de \mathbf{x} y \mathbf{z}

En esta subsección se van a obtener las ecuaciones de movimiento de las variables incrementales de posición \mathbf{x} y \mathbf{z} en términos de las variables \bar{V} y $\bar{\Gamma}$. Estas se obtienen sustrayendo la dinámica nominal traslacional (3.5) de (3.1), para obtener:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} d^2\mathbf{x}/dt^2 \\ d^2\mathbf{z}/dt^2 \end{bmatrix} &= -\frac{1}{m} \begin{bmatrix} \cos \Gamma & \sin \Gamma \\ -\sin \Gamma & \cos \Gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ L \end{bmatrix} + \frac{1}{m} \begin{bmatrix} \cos \bar{\Gamma} & \sin \bar{\Gamma} \\ -\sin \bar{\Gamma} & \cos \bar{\Gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{D} \\ \bar{L} \end{bmatrix} \\ &+ \frac{\mathcal{F}}{m} \begin{bmatrix} \cos \Theta \\ -\sin \Theta \end{bmatrix} - \frac{\bar{\mathcal{F}}}{m} \begin{bmatrix} \cos \bar{\Theta} \\ -\sin \bar{\Theta} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Para simplificar (3.13), se obtienen las expansiones en series de Taylor de las fuerzas de sustentación, L , y arrastre del ala, D , dadas en (2.12), hasta sus términos de primer orden, alrededor del punto $(\bar{V}, \bar{\alpha})$:¹

$$\begin{aligned} L(V, \alpha) &= \bar{L} + \dot{L}_\alpha \alpha + \dot{L}_v v + O(\delta_1), \\ D(V, \alpha) &= \bar{D} + \dot{D}_\alpha \alpha + \dot{D}_v v + O(\delta_1), \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde $\delta_1 = \alpha^2 + v^2$, y

$$\begin{aligned} \bar{L} &= L(\bar{V}, \bar{\alpha}), & \dot{L}_\alpha &= \left. \frac{\partial L}{\partial \alpha} \right|_{\bar{V}, \bar{\alpha}}, & \dot{L}_v &= \left. \frac{\partial L}{\partial V} \right|_{\bar{V}, \bar{\alpha}}, \\ \bar{D} &= D(\bar{V}, \bar{\alpha}), & \dot{D}_\alpha &= \left. \frac{\partial D}{\partial \alpha} \right|_{\bar{V}, \bar{\alpha}}, & \dot{D}_v &= \left. \frac{\partial D}{\partial V} \right|_{\bar{V}, \bar{\alpha}}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

En términos de los coeficientes aerodinámicos dados por (2.13), los coeficientes de primer orden de (3.15) son:

$$\begin{aligned} \dot{L}_\alpha &= 0.5\rho(b^2/AR)\bar{V}^2 C_{L_1}, \\ \dot{L}_v &= \rho(b^2/AR)\bar{V}(C_{L_0} + C_{L_1}\bar{\alpha}), \\ \dot{D}_\alpha &= 0.5\rho(b^2/AR)\bar{V}^2(C_{D_1} + 2C_{D_2}\bar{\alpha}), \\ \dot{D}_v &= \rho(b^2/AR)\bar{V}(C_{D_0} + C_{D_1}\bar{\alpha} + C_{D_3}\bar{\alpha}^2). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Entonces, al sustituir (3.14) en (3.13) se obtiene

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} d^2\mathbf{x}/dt^2 \\ d^2\mathbf{z}/dt^2 \end{bmatrix} &= -\frac{1}{m} \begin{bmatrix} \cos \bar{\Gamma} & \sin \bar{\Gamma} \\ -\sin \bar{\Gamma} & \cos \bar{\Gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ -\gamma & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{D} \\ \bar{L} \end{bmatrix} - \frac{1}{m} \begin{bmatrix} \cos \bar{\Gamma} & \sin \bar{\Gamma} \\ -\sin \bar{\Gamma} & \cos \bar{\Gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{D}_\alpha & \dot{D}_v \\ \dot{L}_\alpha & \dot{L}_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ v \end{bmatrix} \\ &+ \frac{1}{m} \begin{bmatrix} \cos \bar{\Theta} & -\bar{\mathcal{F}} \sin \bar{\Theta} \\ -\sin \bar{\Theta} & -\bar{\mathcal{F}} \cos \bar{\Theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O(\delta_2) \\ O(\delta_2) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

donde $\delta_2 = \alpha^2 + v^2 + f^2 + \theta^2$.

¹Una función escalar $f(t, \xi)$ se dice que es $f(t, \xi) = O(\varepsilon)$ en el intervalo $[t_1, t_2]$, si existen constantes $K, \varepsilon^* > 0$ tales que $|f(t, \xi)| < K|\varepsilon|$ cuando $|\varepsilon| < \varepsilon^*$ for all $t \in [t_1, t_2]$ (cf. [14, § 98]).

Con respecto a las variables incrementales de magnitud de velocidad, v , y el ángulo de dirección de vuelo, γ , mostradas en (3.17), si se expande en series de Taylor las ecuaciones (2.8) y (2.11), alrededor de \bar{V} y $\bar{\Gamma}$, se obtiene (recordar (3.3), (3.4) y (2.10)):

$$\begin{bmatrix} v \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \bar{\Gamma} & -\sin \bar{\Gamma} \\ -(\sin \bar{\Gamma}/\bar{V}) & -(\cos \bar{\Gamma}/\bar{V}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\mathbf{x}/dt \\ d\mathbf{z}/dt \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O(\alpha_3) \\ O(\alpha_3) \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

$$\alpha = \theta - \gamma$$

donde $\alpha_3 = (d\mathbf{x}/dt)^2 + (d\mathbf{z}/dt)^2$. Entonces, al sustituir (3.18) en (3.17) se obtienen las ecuaciones dinámicas de las variables incrementales de posición \mathbf{x} y \mathbf{z} :

$$\begin{bmatrix} d^2\mathbf{x}/dt^2 \\ d^2\mathbf{z}/dt^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{a}_{\mathbf{xx}} & \dot{a}_{\mathbf{xz}} \\ \dot{a}_{\mathbf{zx}} & \dot{a}_{\mathbf{zz}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\mathbf{x}/dt \\ d\mathbf{z}/dt \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{a}_{\mathbf{x}f} & \dot{a}_{\mathbf{x}\theta} \\ \dot{a}_{\mathbf{z}f} & \dot{a}_{\mathbf{z}\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ \theta \end{bmatrix} + q_{ho} \quad (3.19)$$

donde q_{ho} es un término de incertidumbre, conformado por los términos de alto orden de (3.17) y (3.18), a saber: $q_{ho} = O((d\mathbf{x}/dt)^2 + (d\mathbf{z}/dt)^2 + f^2 + \theta^2)$. Las expresiones de los coeficientes $\dot{a}_{ij} = \dot{a}_{ij}(\bar{V}, \bar{\Gamma})$, $i \in \{\mathbf{x}, \mathbf{z}\}$, $j \in \{\mathbf{x}, \mathbf{z}, \theta\}$, de (3.19) son:

$$\begin{aligned} \dot{a}_{\mathbf{xx}} = & -(\dot{D}_v \cos \bar{\Gamma} + (\sin \bar{\Gamma}/\bar{V})\dot{D}_\alpha) \cos \bar{\Gamma}/m - (\dot{L}_v \cos \bar{\Gamma} + (\sin \bar{\Gamma}/\bar{V})\dot{L}_\alpha) \sin \bar{\Gamma}/m \\ & + (\sin \bar{\Gamma}/\bar{V})(\bar{L} \cos \bar{\Gamma} - \bar{D} \sin \bar{\Gamma})/m \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \dot{a}_{\mathbf{xz}} = & -(-\dot{D}_v \sin \bar{\Gamma} + (\cos \bar{\Gamma}/\bar{V})\dot{D}_\alpha) \cos \bar{\Gamma}/m - (-\dot{L}_v \sin \bar{\Gamma} + (\cos \bar{\Gamma}/\bar{V})\dot{L}_\alpha) \sin \bar{\Gamma}/m \\ & + (\cos \bar{\Gamma}/\bar{V})(\bar{L} \cos \bar{\Gamma} - \bar{D} \sin \bar{\Gamma})/m \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \dot{a}_{\mathbf{zx}} = & (\dot{D}_v \cos \bar{\Gamma} + (\sin \bar{\Gamma}/\bar{V})\dot{D}_\alpha) \sin \bar{\Gamma}/m - (\dot{L}_v \cos \bar{\Gamma} + (\sin \bar{\Gamma}/\bar{V})\dot{L}_\alpha) \cos \bar{\Gamma}/m \\ & - (\sin \bar{\Gamma}/\bar{V})(\bar{L} \sin \bar{\Gamma} + \bar{D} \cos \bar{\Gamma})/m \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \dot{a}_{\mathbf{zz}} = & (-\dot{D}_v \sin \bar{\Gamma} + (\cos \bar{\Gamma}/\bar{V})\dot{D}_\alpha) \sin \bar{\Gamma}/m - (-\dot{L}_v \sin \bar{\Gamma} + (\cos \bar{\Gamma}/\bar{V})\dot{L}_\alpha) \cos \bar{\Gamma}/m \\ & - (\cos \bar{\Gamma}/\bar{V})(\bar{L} \sin \bar{\Gamma} + \bar{D} \cos \bar{\Gamma})/m \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\dot{a}_{\mathbf{x}f} = \cos \bar{\Theta}/m \quad (3.24)$$

$$\dot{a}_{\mathbf{z}f} = -\sin \bar{\Theta}/m \quad (3.25)$$

$$\dot{a}_{\mathbf{x}\theta} = -(\bar{\mathcal{F}} \sin \bar{\Theta} + \dot{D}_\alpha \cos \bar{\Gamma} + \dot{L}_\alpha \sin \bar{\Gamma})/m \quad (3.26)$$

$$\dot{a}_{\mathbf{z}\theta} = -(\bar{\mathcal{F}} \cos \bar{\Theta} - \dot{D}_\alpha \sin \bar{\Gamma} + \dot{L}_\alpha \cos \bar{\Gamma})/m \quad (3.27)$$

3.1.2.2. Ecuación dinámica de θ

En esta subsección se va a obtener la ecuación de movimiento de la variable de ángulo de cabeceo incremental θ en términos de las variables \bar{V} y $\bar{\Gamma}$. Esta se obtiene al restar la dinámica nominal de cabeceo (3.10) en (3.2) para obtener

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = (1/I_y) (\tau_q + M(V, \alpha) - \bar{M} + \bar{c}(h - h_0) (L(V, \alpha) - \bar{L})). \quad (3.28)$$

Para simplificar (3.28), se obtiene la expansión en serie de Taylor del momento de cabeceo, M dado en (2.12), al cuarto de \bar{c} , hasta su término de primer orden, alrededor del punto $(\bar{V}, \bar{\alpha})$:

$$M(V, \alpha) = \bar{M} + \dot{M}_\alpha \alpha + \dot{M}_v v + O(\alpha^2 + v^2), \quad (3.29)$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{M} &= M(\bar{V}, \bar{\alpha}), \\ \dot{M}_\alpha &= \left. \frac{\partial M}{\partial \alpha} \right|_{\bar{V}, \bar{\alpha}} = 0.5 \bar{c} \rho (b^2 / AR) \bar{V}^2 C_{M_1}, \\ \dot{M}_v &= \left. \frac{\partial M}{\partial V} \right|_{\bar{V}, \bar{\alpha}} = \bar{c} \rho (b^2 / AR) \bar{V} C_M(\bar{\alpha}). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Entonces, al sustituir (3.14), (3.18) y (3.29) en (3.28), se obtiene la ecuación dinámica del ángulo de cabeceo incremental:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = (1/I_y) \tau_q + \dot{a}_{\theta \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \dot{a}_{\theta \mathbf{z}} \frac{d\mathbf{z}}{dt} + \dot{a}_{\theta \theta} \theta + q_\theta, \quad (3.31)$$

donde q_θ es un término de incertidumbre que contiene los términos de alto orden de (3.29), es decir: $q_\theta = O((d\mathbf{x}/dt)^2 + (d\mathbf{z}/dt)^2)$ (recordar (3.18)). Las expresiones de coeficientes $\dot{a}_{\theta j} = \dot{a}_{\theta j}(\bar{V}, \bar{\Gamma})$, $j \in \{\mathbf{x}, \mathbf{z}, \theta\}$ son

$$\dot{a}_{\theta \mathbf{x}} = (1/I_y) \left(\left(\dot{M}_\alpha + \bar{c}(h - h_0) \dot{L}_\alpha \right) \sin \bar{\Gamma} + \left(\dot{M}_v + \bar{c}(h - h_0) \dot{L}_v \right) \cos \bar{\Gamma} \right), \quad (3.32)$$

$$\dot{a}_{\theta \mathbf{z}} = (1/I_y) \left(\left(\dot{M}_\alpha + \bar{c}(h - h_0) \dot{L}_\alpha \right) \cos \bar{\Gamma} - \left(\dot{M}_v + \bar{c}(h - h_0) \dot{L}_v \right) \sin \bar{\Gamma} \right), \quad (3.33)$$

$$\dot{a}_{\theta \theta} = (1/I_y) \left(\dot{M}_\alpha + \bar{c}(h - h_0) \dot{L}_\alpha \right). \quad (3.34)$$

3.1.2.3. Cambio de variable

El modelo incremental (3.34), obtenido en la subsección anterior, se encuentra expresado en el plano vertical inercial $O\mathbf{X}\mathbf{Z}$. Para propósitos prácticos, como lo presentaremos a continuación, es más conveniente expresar este modelo en las coordenadas cuerpo nominales, $O_B \bar{\mathbf{X}}_B \bar{\mathbf{Y}}_B$, obtenidas a través de la transformación $R_B^I(E)$ evaluada en el punto $E = [0 \ \bar{\Theta} \ 0]^T$ (cf. (2.1)). Esto es debido a que, en coordenadas del cuerpo, la variable de empuje incremental f actúa sobre la dinámica incremental a través de un coeficiente constante. Entonces, a partir de (2.1), definimos el siguiente transformación de coordenadas

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{z}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \bar{\Theta} & -\sin \bar{\Theta} \\ \sin \bar{\Theta} & \cos \bar{\Theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} d\hat{\mathbf{x}}/dt \\ d\hat{\mathbf{z}}/dt \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \bar{\Theta} & -\sin \bar{\Theta} \\ \sin \bar{\Theta} & \cos \bar{\Theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\mathbf{x}/dt \\ d\mathbf{z}/dt \end{bmatrix} + \frac{d\bar{\Theta}}{dt} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{z}} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Aplicando el cambio de variable (3.35) en las ecuaciones dinámicas incrementales (3.19) y (3.31) se obtienen

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} d^2\widehat{\mathbf{x}}/dt^2 \\ d^2\widehat{\mathbf{z}}/dt^2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{a}_{21}(t) & \dot{a}_{23}(t) \\ \dot{a}_{41}(t) & \dot{a}_{43}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{x}} \\ \widehat{\mathbf{z}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{a}_{22}(t) & \dot{a}_{24}(t) \\ \dot{a}_{42}(t) & \dot{a}_{44}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\widehat{\mathbf{x}}/dt \\ d\widehat{\mathbf{z}}/dt \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/m & \dot{a}_{25}(t) \\ 0 & \dot{a}_{45}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_{\mathbf{x}} \\ q_{\mathbf{z}} \end{bmatrix}, \\ \frac{d^2\theta}{dt^2} &= (1/I_y)\tau_q + \dot{a}_{61}\widehat{\mathbf{x}} + \dot{a}_{62}\frac{d\widehat{\mathbf{x}}}{dt} + \dot{a}_{63}\widehat{\mathbf{z}} + \dot{a}_{64}\frac{d\widehat{\mathbf{z}}}{dt} + \dot{a}_{65}\theta + q_{\theta}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

donde las expresiones de los coeficientes $\dot{a}_{ij} = \dot{a}_{ij}(\overline{V}, \overline{T})$, $i \in \{2, 4, 6\}$, $j \in \{1, 2, 3, 5\}$ son dadas en detalle en el Apéndice B. Se puede observar que la variable de entrada incremental f en (3.36) actúa sobre las nuevas variables incrementales a través de un coeficiente constante.

Particionando al tiempo de transición, y definiendo la variable de tiempo discreto $t_k = t_N(k/N)$, $k \in \{0, 1, \dots, N\}$, donde t_0 y t_N corresponden al tiempo inicial y final de transición, respectivamente, para obtener

$$\{[t_0, t_1), [t_1, t_2), \dots, [t_{N-1}, t_N]\} \quad (3.37)$$

Entonces el modelo incremental transformado (3.36) se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} d^2\widehat{\mathbf{x}}/dt^2 \\ d^2\widehat{\mathbf{z}}/dt^2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{a}_{21k} & \dot{a}_{23k} \\ \dot{a}_{41k} & \dot{a}_{43k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{x}} \\ \widehat{\mathbf{z}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{a}_{22k} & \dot{a}_{24k} \\ \dot{a}_{42k} & \dot{a}_{44k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\widehat{\mathbf{x}}/dt \\ d\widehat{\mathbf{z}}/dt \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/m & \dot{a}_{25k} \\ 0 & \dot{a}_{45k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_{\mathbf{x}k} \\ q_{\mathbf{z}k} \end{bmatrix}, \\ \frac{d^2\theta}{dt^2} &= (1/I_y)\tau_q + \dot{a}_{61k}\widehat{\mathbf{x}} + \dot{a}_{62k}\frac{d\widehat{\mathbf{x}}}{dt} + \dot{a}_{63k}\widehat{\mathbf{z}} + \dot{a}_{64k}\frac{d\widehat{\mathbf{z}}}{dt} + \dot{a}_{65k}\theta + q_{\theta k}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

donde $\dot{a}_{ijk} = \dot{a}_{ij}(t_k)$ si $t \in [t_k, t_{k+1})$, $k \in \{0, N-1\}$; y la incertidumbre paramétrica producida por el proceso de discretización de los coeficientes $\dot{a}_{ij}(t)$ es considerada en las nuevas variables de incertidumbre q_{jk} , $j \in \{\mathbf{x}, \mathbf{z}, \theta\}$.

3.1.2.4. Ecuación de estado invariante en el tiempo a pedazos

A partir del modelo incremental invariante en el tiempo a pedazos (3.38), se obtiene finalmente la representación de estados de la dinámica longitudinal incremental del vehículo *Tail-Sitter* ($\Sigma_k(A_k, B, S, C)$, $k \in \{0, \dots, N\}$):

$$dx/dt = A_k x + B u + S q, \quad y = C x, \quad (3.39)$$

donde

$$\begin{aligned} x &= [x_{\mathbf{x}} \quad x_{\mathbf{z}} \quad x_{\theta}]^T, \quad y = [\widehat{\mathbf{x}} \quad \widehat{\mathbf{z}}]^T, \quad u = [f \quad \tau_q]^T, \quad q = [q_{\mathbf{x}k} \quad q_{\mathbf{z}k} \quad q_{\theta k}]^T, \\ x_{\mathbf{x}} &= [\widehat{\mathbf{x}} \quad d\widehat{\mathbf{x}}/dt]^T, \quad x_{\mathbf{z}} = [\widehat{\mathbf{z}} \quad d\widehat{\mathbf{z}}/dt]^T, \quad x_{\theta} = [\theta \quad d\theta/dt]^T, \end{aligned} \quad (3.40)$$

y

$$\begin{aligned} A_k &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dot{a}_{21k} & \dot{a}_{22k} & \dot{a}_{23k} & \dot{a}_{24k} & \dot{a}_{25k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dot{a}_{41k} & \dot{a}_{42k} & \dot{a}_{43k} & \dot{a}_{44k} & \dot{a}_{45k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dot{a}_{61k} & \dot{a}_{62k} & \dot{a}_{63k} & \dot{a}_{64k} & \dot{a}_{65k} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/m & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/I_y \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Nótese que q en (3.40) es un término de incertidumbre que tiene en cuenta los términos no lineales (de orden superior) de la dinámica del *Tail-Sitter*, el cual tiende a cero a medida que el movimiento de la aeronave se aproxima a la trayectoria deseada.

El coeficiente \hat{a}_{45k} de la matriz de estado A_k en (3.41) es diferente de cero en los tres envolventes de vuelo, como se muestra en (B.1) del apéndice B. Esto implica que la matriz A_k puede ser transformada a una forma controlador a bloques; un bloque para el subsistema \mathbf{x} , y otro para el subsistema $\mathbf{z} - \theta$; por lo tanto, el par (A, B) es controlable.

3.2. Recapitulación

En este capítulo se derivó el modelo matemático del vehículo *Tail-Sitter* alrededor de su maniobra de transición. Se definió la trayectoria de transición en términos de los valores deseados de la magnitud de velocidad, \bar{V} , y del ángulo de dirección de vuelo, \bar{T} , de acuerdo a la ecuación (3.3). Se implementó la transformación de coordenadas (3.35), la cual permite expresar los errores de seguimiento de trayectoria en un conjunto de N ejes cuerpo nominales a lo largo de la trayectoria de transición. A partir de esto, se derivó la ecuación de estado lineal invariante en el tiempo a pedazos (3.39), la cual toma en cuenta la incertidumbre de modelado y las posibles perturbaciones externas. Esto último permite definir un esquema de control lineal con rechazo activo de perturbaciones [13], como se presenta en el capítulo 5.

Planificación de la trayectoria de transición hacia adelante

En este capítulo se formaliza el problema de planificación de trayectorias de transición de vehículos *Tail-Sitter*, para resolver el problema de transición introducido en la sección 2.1; y se desarrolla una solución.

4.1. Problema de planificación

Problema 1.

Se desea encontrar los valores nominales de la velocidad de vuelo, \bar{V} , y el ángulo de trayectoria de vuelo, $\bar{\Gamma}$, para que el Tail-Sitter ejecute la maniobra de transición hacia adelante de manera eficiente en términos de energía.

Se supone que el Tail-Sitter se mueve lentamente, dentro del QFE, y se encuentra con sus rotores orientados verticalmente; y debe terminar su transición dentro del EVA con un ángulo de trayectoria de vuelo de $\Gamma = 0$ [°], a velocidad de vuelo de crucero.

Además, es deseable que la solución satisfaga las siguientes restricciones. A lo largo de toda la maniobra, el Tail-Sitter debe evitar la región de desplome del ala. Se deben tomar en cuenta los límites de los actuadores. Y se debe limitar el cambio máximo de altitud durante la maniobra de transición. ■

El Problema 1 plantea el problema de optimización de la trayectoria de transición en términos de energía. El gasto energético de transición es debido al empuje total y a la entrada de momento de cabeceo. Las suposiciones ahí mencionadas definen condiciones de frontera, las cuales serán formalizadas más adelante. La restricción sobre la región de desplome del ala tiene el propósito de aumentar la confiabilidad de predicción del comportamiento del *Tail-Sitter* a través de (3.1) y (3.2), y para aumentar la seguridad del vehículo. Mayormente, esta se traduce en acotar los valores nominales del ángulo de ataque, pero también implica limitar las maniobras que generan una pérdida de altitud. Finalmente, al tomar en cuenta los límites de los actuadores, obtenemos una trayectoria de transición realizable.

El problema anterior se puede formular matemáticamente como un problema de programación no lineal, el cual busca que las variables \bar{V} y $\bar{\Gamma}$, definidas en $t \in [t_0, t_N]$, minimicen el

criterio

$$\min_{\bar{V}, \bar{T}} \int_{t_0}^{t_N} \mu \left(\beta \left(\bar{\mathcal{F}} / \bar{\mathcal{F}}_{\text{máx}} \right)^2 + (1 - \beta) \left(d^2 \bar{\alpha} / dt^2 / d^2 \bar{\alpha} / dt^2_{\text{máx}} \right)^2 \right) dt, \quad (4.1)$$

sujeto a (3.3) y a las siguientes restricciones:

$$\bar{\mathcal{F}} = \left(\bar{D} + mg \sin \bar{T} + m(d\bar{V}/dt) \right) / \cos \bar{\alpha}, \quad (4.2)$$

$$\bar{\alpha} = \frac{mg \cos \bar{T} + m\bar{V} \frac{d\bar{T}}{dt} - \frac{1}{2} \rho \frac{b^2}{AR} \bar{V}^2 C_{L_0}}{\frac{1}{2} \rho \frac{b^2}{AR} \bar{V}^2 (C_{L_1} + C_{D_0}) + mg \sin \bar{T} + m \frac{d\bar{V}}{dt}}, \quad (4.3)$$

$$\bar{\mathcal{T}}_q = I_y d^2 \bar{T} / dt^2 - \bar{M} - \bar{c}(h - h_0) \bar{L}. \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \bar{V} &\in [\bar{V}_{\text{mín}}, \bar{V}_{\text{máx}}] \text{ [m/s]}, \quad \bar{T} \in [0, 90] \text{ [}^\circ\text{]}, \quad \bar{\mathcal{F}} \in [0, \bar{\mathcal{F}}_{\text{máx}}] \text{ [N]}, \\ |\bar{\mathcal{T}}_q| &\leq \bar{\mathcal{T}}_{\text{máx}} \text{ [Nm]}, \quad |\bar{\alpha}| \leq \bar{\alpha}_{\text{máx}} \text{ [}^\circ\text{]}, \quad |d\bar{\alpha}/dt| \leq d\bar{\alpha}/dt_{\text{máx}} \text{ [}^\circ\text{/s]}, \\ |d^2 \bar{\alpha} / dt^2| &\leq d^2 \bar{\alpha} / dt^2_{\text{máx}} \text{ [}^\circ\text{/s}^2\text{]}, \quad |\bar{\mathbf{Z}}(t_0) - \bar{\mathbf{Z}}(t_N)| \leq \delta \bar{\mathbf{Z}}_{\text{máx}} \text{ [m]}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

y las siguientes condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \bar{V}(0) &= \bar{V}_{\text{mín}} \text{ [m/s]}, \quad \bar{T}(0) = \pi/2 \text{ [rad]}, \quad d\bar{V}/dt(0) = 0 \text{ [m/s}^2\text{]}, \\ d\bar{T}/dt(0) &= 0 \text{ [rad/s]}, \quad \bar{V}(t_N) = \bar{V}_{\text{máx}} \text{ [m/s]}, \quad \bar{T}(t_N) = 0 \text{ [rad]}, \\ d\bar{V}/dt(t_N) &= 0 \text{ [m/s}^2\text{]}, \quad d\bar{T}/dt(t_N) = 0 \text{ [rad/s]}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

El funcional de costo (4.1) sigue una estructura similar a la utilizada en [8]. Es decir, se trata de una combinación convexa de dos términos normalizados: i) la integral del empuje nominal al cuadrado y normalizada por $\bar{\mathcal{F}}_{\text{máx}}$; ii) la integral de la aceleración del ángulo de ataque nominal al cuadrado y normalizada por $d^2 \bar{\alpha} / dt^2_{\text{máx}}$. El primer término penaliza el gasto de energía de empuje, mientras que el segundo penaliza valores grandes de la entrada de momento de cabeceo nominal. El coeficiente $\beta \in [0, 1]$ determina la importancia relativa de minimizar el gasto de energía en empuje y la suavidad del cabeceo, mientras que μ es un factor de escala introducido por razones de estabilidad numérica.

Las ecuaciones (4.2), (4.3), y (4.4) relacionan la aceleración del ángulo de ataque nominal, $d^2 \bar{\alpha} / dt^2$, y el empuje nominal, $\bar{\mathcal{F}}$, con las variables de transición \bar{V} y \bar{T} . Las variables nominales \bar{D} , \bar{M} , y \bar{L} son la aproximación de Taylor de orden cero de las fuerzas aerodinámicas (2.12).

Dentro del *EVT*, las maniobras de pérdida de altitud aumentan las posibilidades de entrar en la región de desplome del ala y dar lugar a comportamientos imprevisibles. Por esta razón, se considera la restricción \bar{T} que se muestra en (4.5), pero puede ser relajada a criterio del diseñador para diferentes configuraciones de vehículos *Tail-Sitter*. La restricción sobre $\bar{\mathcal{F}}$ en (4.5) permite realizar la transición con un excedente de empuje para el rechazo de perturbaciones, el cual se tratará en el capítulo 5. Los límites sobre $\bar{\alpha}$ y $d\bar{\alpha}/dt$ ayudan a validar (2.13), dado que estas ecuaciones requieren valores pequeños y de variación lenta del ángulo de ataque. La cota sobre la magnitud de $\bar{\mathcal{T}}_q$ limita el empuje nominal máximo de cada rotor de modo que este no exceda de $(\bar{\mathcal{F}}_{\text{max}} + \delta \bar{\mathcal{F}}_{\text{max}}) / 4$ [N], donde $\delta \bar{\mathcal{F}}_{\text{max}} = \bar{\mathcal{T}}_{\text{máx}} / l$ es el excedente de empuje

nominal máximo de cada rotor, donde l es el brazo de palanca de los rotores (véase la Fig. 2.1). Nótese que la cota de $\bar{T}_{\text{máx}}$ debe elegirse mayor que el momento de cabeceo del ala en vuelo de crucero, dado que este debe ser el valor máximo de \bar{T}_q . Finalmente, la última restricción en (4.5) evita un aumento excesivo de la altitud al final de la transición.

4.2. Solución aproximada por series de Fourier truncadas

Las metodologías convencionales de planificación de trayectorias de transición definen el espacio de búsqueda de soluciones a partir de segmentos discretos de trayectoria (cf. [20, 16]). Este enfoque, sin embargo, incrementa sustancialmente la dimensión del espacio de búsqueda a medida que se incrementa el tiempo de transición, o se requiere una trayectoria mas fina. Más aún, la dimensión de este espacio se multiplica si se agregan los segmentos de las derivadas de la trayectoria; por ejemplo para definir restricciones o condiciones de frontera.

Para reducir el espacio de búsqueda de soluciones, seguimos un enfoque similar al de [9] y aproximamos la velocidad de vuelo deseada \bar{V} y el ángulo de la trayectoria de vuelo deseada $\bar{\Gamma}$ por medio de series de Fourier truncadas:

$$\begin{aligned}\bar{V} &= a_0 + \sum_{i=1}^n (a_i \cos(i\pi t/t_N) + b_i \sin(i\pi t/t_N)), \\ \bar{\Gamma} &= c_0 + \sum_{i=1}^n (c_i \cos(i\pi t/t_N) + d_i \sin(i\pi t/t_N)).\end{aligned}\tag{4.7}$$

La solución aproximada (4.7) tiene la propiedad de ser infinitamente derivable, y no necesita un ajuste de curva posterior, a diferencia de las soluciones arrojadas a través de otras metodologías de diseño de trayectorias, lo cual permite implementarla directamente.

Los cuatro primeros coeficientes de las series de Fouriers (4.7), a saber: (a_0, a_1, b_1, b_2) y (c_0, c_1, d_1, d_2) , se deducen analíticamente de las condiciones de frontera (4.6). Esto es:

$$a_0 = \frac{\bar{V}_{\text{máx}} + \bar{V}_{\text{mín}}}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n (1 + (-1)^i) a_i,\tag{4.8}$$

$$a_1 = \frac{\bar{V}_{\text{máx}} - \bar{V}_{\text{mín}}}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n (1 - (-1)^i) a_i,$$

$$b_1 = -\frac{1}{2} \sum_{i=2}^n i (1 - (-1)^i) b_i, \quad b_2 = -\frac{1}{4} \sum_{i=2}^n i (1 + (-1)^i) b_i,\tag{4.9}$$

y

$$c_0 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n (1 + (-1)^i) c_i, \quad c_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n (1 - (-1)^i) c_i,\tag{4.10}$$

$$d_1 = -\frac{1}{2} \sum_{i=2}^n i (1 - (-1)^i) d_i, \quad d_2 = -\frac{1}{4} \sum_{i=2}^n i (1 + (-1)^i) d_i.\tag{4.11}$$

Como resultado, el espacio de búsqueda de soluciones consiste únicamente de los coeficientes de las series de Fourier (4.7), a partir de los índices $i \geq 2$ para a_i y c_i , y $j \geq 3$ para b_j y d_j . En la siguiente subsección se habla de algunas opciones de paquetería de *software* para la solución de problemas de optimización no lineal, y algunas consideraciones práctica.

4.2.1. Coeficientes de Fourier

Para resolver el problema planteado en la sección anterior, es necesario implementar un algoritmo de solución de problemas de optimización no lineal. En *MATLAB*[®] existe la función *fmincon*, la cual acepta tanto restricciones lineales como no lineales, y utiliza métodos basados en gradiente.

El problema de programación no lineal (4.1)-(4.5) se resuelve utilizando la función *fmincon* de *MATLAB*[®], utilizando un punto de prueba inicial cero. Para esto, se buscan los coeficientes restantes de (4.7), los cuales dan valor a los coeficientes (4.8) a (4.11), y que minimizan el criterio (4.1), satisfaciendo las restricciones (4.2)-(4.5).

Se debe tener en cuenta que el tiempo de solución aumenta con el número de armónicos, n , de la serie de Fourier truncada (4.7). Sin embargo, como se verá en el capítulo 6 sección 6.1, a partir de cierto valor de n , un incremento en el número de armónicos sólo aportará una mejora marginal en el rendimiento global. Por lo tanto, una buena práctica es elegir el valor más pequeño de n que proporciona un rendimiento satisfactorio, a criterio del diseñador.

4.3. Recapitulación

El problema de planificación de trayectorias es planteado matemáticamente como un problema de programación no lineal. La solución planteada busca los coeficientes óptimos de las series de Fourier truncadas de la velocidad, \bar{V} , y del ángulo de dirección de vuelo, \bar{T} , que definen la trayectoria de transición deseada; la cual minimiza un criterio de energía, y satisface restricciones sobre las variables de vuelo y condiciones de frontera. Este enfoque arroja una dimensión reducida del espacio de búsqueda de soluciones.

Control de transición

En el capítulo 3 se planteó que es posible llevar a cabo la maniobra de transición hacia adelante de un vehículo *Tail-Sitter* al estabilizar sus variables incrementales longitudinales x , z y θ ; dado que su dinámica (3.39) esta definida por una trayectoria de transición adecuada, como la presentada en el capítulo 4.

Para ejecutar de forma segura la maniobra de transición, es necesario estabilizar al sistema (3.39) atenuando la incertidumbre procedente de los errores de modelado y las perturbaciones externas, englobadas en la variable q . Por lo tanto, en este capítulo proponemos la ley de control

$$u = \begin{bmatrix} f \\ \tau_q \end{bmatrix} = \bar{u} + \hat{u}, \quad (5.1)$$

donde \bar{u} es un término de control nominal que se encarga de estabilizar al sistema (3.39) en una vecindad de la trayectoria de transición, suponiendo $q = 0$, es decir, se estabiliza a: $\Sigma_k(A_k, B, C)$, $k \in \{1, \dots, N\}$, el cual consiste en una retroalimentación de estado lineal [2, 6]; y donde \hat{u} es un término de rechazo activo de perturbaciones, basado en el filtro Beard-Jones [3], el cual se encarga de compensar los efectos de la incertidumbre q sobre la salida incremental y de (3.39). En las siguientes secciones detallamos estos dos términos de control.

5.1. Ralimentación de estado estabilizante

En el capítulo 4 se obtuvo una trayectoria de transición que hace válido el modelo incremental en espacio de estados (3.39). En el capítulo 3 se presentó una partición del tiempo de transición (3.37), la cual define los N intervalos de tiempo, $[t_{k-1}, t_k)$, $k \in \{0, \dots, N\}$, en los cuales (3.39) es invariante a pedazos. Sin pérdida de generalidad, suponemos que, nominalmente, el *EVC* tiene lugar durante el intervalo $t \in [t_0, t_Q)$, el *EVT* cuando $t \in [t_Q, t_T)$, y el *EVA* cuando $t \in [t_T, t_N]$ (cf. sección 2.5); donde $[t_0, t_Q) \cup [t_Q, t_T) \cup [t_T, t_N] = [t_0, t_N]$. En cada uno de los envolventes de vuelo, se selecciona una matriz nominal \bar{A}_n , $n \in \{q, tr, a\}$, de entre los valores de A_k dados por (3.41); donde q , tr y a hacen referencia a la matriz nominal del modo cuadirrotor, de transición y avión, respectivamente. Estas matrices definen la dinámica nominal

de las variables incrementales en cada envolvente

$$dx/dt = \begin{cases} \bar{A}_q x + B\bar{u} & \text{si } t \in [t_0, t_Q) \\ \bar{A}_{tr} x + B\bar{u} & \text{si } t \in [t_Q, t_T) \\ \bar{A}_a x + B\bar{u} & \text{si } t \in [t_T, t_N] \end{cases} . \quad (5.2)$$

El objetivo del término de retroalimentación \bar{u} es estabilizar las $N + 1$ representaciones de estado (3.39) en ausencia de incertidumbre (cf. [21] y el Teorema 2.1 de [18]), es decir

$$\begin{aligned} dx/dt &= A_k x + Bu, \\ y &= Cx. \end{aligned} \quad (5.3)$$

donde $k \in \{0, \dots, N\}$.

Para diseñar \bar{u} , se procede como en la sección 2 de [6]. Esto es, con las matrices de estado \bar{A}_n , $n \in \{q, tr, a\}$, en (5.2) definen las ecuaciones de Riccati

$$\bar{A}_n^T \bar{P}_n + \bar{P}_n \bar{A}_n - \bar{P}_n B \bar{R}^{-1} B^T \bar{P}_n = -\bar{Q}, \quad (5.4)$$

donde $\bar{Q} \geq 0$ y $\bar{R} > 0$ son matrices simétricas de ponderación a proponer, y $\bar{P}_n > 0$, $n \in \{q, tr, a\}$, son las matrices solución de (5.4). La matriz \bar{Q} pondera la desviación del origen del estado de la dinámica incremental, y \bar{R} pondera el gasto de energía de las entradas incrementales. Como se mencionó al final del capítulo 3, los pares (A_k, B) de (3.39) son controlables; por lo tanto, se asegura la existencia de las matrices $\bar{P}_n > 0$ (cf. [15] o el Teorema 6.1 de [19]). Entonces, definiendo $F_n = \bar{R}^{-1} B^T \bar{P}_n$, $n(k) \in \{q, tr, a\}$, se propone una ley de retroalimentación de estado para cada envolvente de vuelo:

$$\bar{u} = \begin{cases} -F_q x & \text{si } t \in [t_0, t_Q) \\ -F_{tr} x & \text{si } t \in [t_Q, t_T) \\ -F_a x & \text{si } t \in [t_T, t_N] \end{cases} . \quad (5.5)$$

Dado un par de matrices (\bar{Q}, \bar{R}) , es necesario asegurar que la ley de control (5.5) estabiliza la dinámica incremental (5.3) para toda $k \in \{0, \dots, N\}$.

A partir de la ecuación de estado (5.3), y la realimentación de estado (5.5), se obtiene el sistema en lazo cerrado

$$dx/dt = \left(A_k - B \bar{R}^{-1} B^T \bar{P}_n \right) x, \quad (5.6)$$

donde $k \in \{0, \dots, N\}$. Y a partir de la solución $\bar{P}_n > 0$ de la ecuación de Riccati (5.4), se define la función candidata de Lyapunov

$$V(x) = x^T \bar{P}_n x \quad (5.7)$$

Al derivar (5.7) con respecto al tiempo, a lo largo de las trayectorias solución de (5.3) en cada envolvente de vuelo $n \in \{q, tr, a\}$, se obtiene (recordar (5.4) y (5.5))

$$\begin{aligned} dV/dt &= x^T \bar{P}_n dx/dt + (dx/dt)^T \bar{P}_n x \\ &= x^T \bar{P}_n \left(A_k - B \bar{R}^{-1} B^T \bar{P}_n \right) x + x^T \left(A_k^T - \bar{P}_n B \bar{R}^{-1} B^T \right) \bar{P}_n x \\ &= x^T \left(\bar{P}_n A_k + A_k^T \bar{P}_n - 2 \bar{P}_n B \bar{R}^{-1} B^T \bar{P}_n \pm \left(\bar{P}_n \bar{A}_n + \bar{A}_n^T \bar{P}_n \right) \right) x \\ &= -x^T \bar{Q} x - x^T F_n^T \bar{R} F_n x + x^T \left((A_k - \bar{A}_n)^T \bar{P}_n + \bar{P}_n (A_k - \bar{A}_n) \right) x \end{aligned} \quad (5.8)$$

De (5.8) se deduce que una condición suficiente para que (5.7) sea una función de Lyapunov de (5.3) es que se cumpla el siguiente criterio:

$$\lambda_k^* = \lambda_{\min} \left(\bar{Q} + F_n^T \bar{R} F_n + (\bar{A}_n - A_k)^T \bar{P}_n + \bar{P}_n (\bar{A}_n - A_k) \right) > 0 \quad (5.9)$$

para toda $k \in \{0, \dots, N\}$.

El criterio (5.9) permite saber si la ley de control \bar{u} dada por (5.5) estabiliza la dinámica incremental sin perturbaciones (5.3) a lo largo de toda la maniobra de transición. En caso de que el criterio no se satisfaga, es necesario proponer un nuevo par de matrices $\{\bar{Q}, \bar{R}\}$ para (5.4), o bien un nuevo conjunto de matrices de estado nominales $\{\bar{A}_q, \bar{A}_{tr}, \bar{A}_a\}$ para (5.2), hasta satisfacer (5.9).

5.2. Rechazo activo de perturbaciones

De la ley de control completa (5.1), y la retroalimentación de estado, \bar{u} dada en (5.5), el sistema en lazo cerrado es:

$$\begin{aligned} dx/dt &= \bar{A}_{F_n} x + B\hat{u} + S\bar{q}_n, \\ y &= Cx. \end{aligned} \quad (5.10)$$

El término¹ $S\bar{q}_n = Sq_n + (A_k - \bar{A}_n)x$ en (5.10) define la nueva variable de incertidumbre \bar{q}_n , la cual comprende el término de perturbación q y la incertidumbre alrededor del sistema nominal en lazo cerrado en el envolvente de vuelo actual. La matriz de estados en lazo cerrado es

$$\bar{A}_{F_n} = [a_{f_{nij}}] = \begin{cases} \bar{A}_q + BF_q & \text{si } t \in [t_0, t_Q) \\ \bar{A}_{tr} + BF_{tr} & \text{si } t \in [t_Q, t_T) \\ \bar{A}_a + BF_a & \text{si } t \in [t_T, t_N] \end{cases} \quad (5.11)$$

donde $a_{f_{nij}}$ denota el elemento de \bar{A}_{F_n} en la i -ésima fila y la j -ésima columna.

En [7], los autores introdujeron el cambio de variable

$$\zeta = x + M_n \mathcal{C}_{(M_n, S)} \Psi(d/dt) \bar{q}_n \quad (5.12)$$

donde $\mathcal{C}_{(M_n, S)} = [S \quad M_n S \quad \dots \quad M_n^5 S]$, $\Psi(d/dt) = [I_3 \quad I_3 \frac{d}{dt} \quad \dots \quad I_3 \frac{d^5}{dt^5}]^T$, y M_n y W_n son soluciones de las ecuaciones algebraicas $\bar{A}_{F_n} M_n + B W_n = I$ y $C M_n = 0$ (cf. (2.4) y (2.12) de [7]). Con tal cambio de variable, la descripción del espacio de estados (5.10) toma la forma (2.13) y (2.14) de [7]. A saber:

$$\begin{aligned} d\zeta/dt &= \bar{A}_{F_n} \zeta + B(\hat{u} + \bar{q}_n^*), \\ y &= C\zeta, \end{aligned} \quad (5.13)$$

donde $\bar{q}_n^* = W_n \mathcal{C}_{(M_n, S)} \Psi(d/dt) \bar{q}_n$ es un término de perturbación en la imagen de B . El sistema (5.13) es externamente equivalente al sistema incremental en lazo cerrado (5.10), en el sentido de que tienen el mismo comportamiento de entrada y salida.

¹Dado que los coeficientes de A_k se encuentran en su segunda, cuarta y tercera fila, los valores de $(A_k - \bar{A}_n)x$ son elementos de la imagen de S .

De (5.13), se observa que si se reproduce exactamente a \bar{q}_n^* , esta puede ser cancelada directamente por \hat{u} . Sin embargo, dado que en la práctica esto no es posible, entonces \bar{q}_n^* debe ser estimada para compensar sus efectos. Esto se puede lograr utilizando un filtro de Beard-Jones, como se mostró en [7]. En la sección 3 de [7], se propone el siguiente estimador de la incertidumbre basado en el filtro de Beard-Jones

$$\begin{aligned} d\hat{x}/dt &= \bar{A}_{FK_n}\hat{x} - K_n y + B\hat{u}, \\ \hat{q}^* &= -H_n^\ell(C\hat{x} - y), \end{aligned} \quad (5.14)$$

donde \hat{q}_n^* es una estimación de \bar{q}_n^* ; $\bar{A}_{FK_n} = \bar{A}_{F_n} + K_n C$, donde $K_n \in \mathbb{R}^{6 \times 2}$ es una ganancia de inyección de salida que depende del envolvente de vuelo actual, como se detalla en la subsección 5.2.2, y tal que \bar{A}_{FK_n} es una matriz Hurwitz; $H_n = -C\bar{A}_{FK_n}^{-1}B$, y el superíndice ℓ denota inversa por la izquierda². En el Lema 2 de [7], se muestra que el filtro (5.14) compensa una señal de perturbación de ancho de banda finito; donde el error de compensación resultante es acotado, por una cota que depende del valor propio mas pequeño de la matriz \bar{A}_{FK_n} .

En [4] se muestra que la función de transferencia entre \hat{u} e y dada por (5.14) presenta un polo en el origen. Debido a eso, se mostró experimentalmente que dicho filtro funciona correctamente en vuelo estacionario, pero puede producir problemas debido a fenómenos de deriva de integración durante el seguimiento de trayectorias. Para superar este problema, el estimador de incertidumbre (5.14) fue mejorado al incluir un término de atenuación, $0 < \varepsilon < 1$, como sigue (cf. (3.3) de [4]):

$$\begin{aligned} d\hat{x}/dt &= \bar{A}_{FK_n}\hat{x} - K_n y + B\hat{u}, \\ \hat{u} &= -(1 - \varepsilon)\hat{q}^* \\ &= -(1 - \varepsilon)H_n^\ell(y - C\hat{x}). \end{aligned} \quad (5.15)$$

El término de atenuación ε en (5.15) mueve el polo en el origen de la función de transferencia entre \hat{u} e y en (5.14) hacia el semiplano izquierdo del plano complejo, corrigiendo el fenómeno de deriva de integración mencionado en el párrafo anterior.

Para obtener un filtro que proporcione un estimado adecuado de la variable de incertidumbre \bar{q}_n^* , es necesario que el estimador sea estable, como se explica a continuación.

5.2.1. Análisis del error de estimación

La dinámica del error de estimación de incertidumbre $e = \hat{x} - x$ es definida por el sistema generador de residuos (cf. (3.5) de [7], y (3.4) y (3.5) de [4]):

$$\begin{aligned} de/dt &= \bar{A}_{FK_n}e - B\bar{q}_n^* \\ \hat{u} &= H_n^\ell C e \end{aligned} \quad (5.16)$$

A partir del sistema incremental externamente equivalente (5.13) y el sistema generador de residuos (5.16), el sistema completo en lazo cerrado es descrito por medio de la siguiente

² \bar{A}_{FK_n} es invertible dado que es Hurwitz.

representación de estados

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} de/dt \\ d\zeta/dt \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{A}_{FK_n} & 0 \\ (1-\varepsilon)BH_n^l C & \bar{A}_{F_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \zeta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -B \\ B \end{bmatrix} \bar{q}_n^* \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \zeta \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

La función de transferencia de (5.17) que relaciona la salida y con la incertidumbre \bar{q}_n^* , es (ver Fig. 5.1)

$$G_o(s) = G_c(s)G_q(s), \quad (5.18)$$

donde $G_q(s)$ es la función de transferencia que relaciona la entrada de incertidumbre \bar{q}_n^* con el error de compensación $\hat{q}_n^* = \bar{q}_n^* - \hat{q}_n^*$

$$G_q(s) = (I_2 - G_e(s)), \quad (5.19)$$

$G_e(s)$ en (5.19) es la función de transferencia del generador de residuos (5.16)

$$G_e(s) = H_n^l C (sI_6 - \bar{A}_{FK_n}) B \quad (5.20)$$

y $G_c(s)$ en (5.18) es la función de transferencia que relaciona la salida del sistema y con el error de incertidumbre \hat{q}_n^*

$$G_c(s) = C (sI_6 - \bar{A}_{F_n})^{-1} B, \quad (5.21)$$

En la Fig. 5.1, se muestra el diagrama de bloques de (5.18). $G_e(s)$ presenta un efecto de filtrado pasa bajas. Entonces, por (5.19), esto implica que $G_q(s)$ actúa como filtro pasa altas sobre la señal de perturbación \bar{q}_n^* . La frecuencia de corte de $G_q(s)$ se debe elegir suficientemente más grande que el ancho de banda de \hat{q}_n^* , para atenuar sus efectos de la salida y de (5.10). La matriz de transferencia $G_q(s)$ mostrada en (5.19) modela la eficacia de compensación del estimador de incertidumbre (5.15).

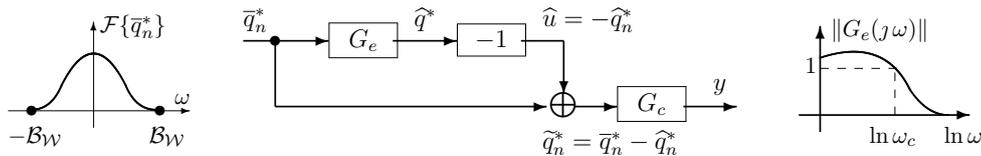


Figura 5.1: Rechazo de la señal de incertidumbre \bar{q}_n^* a través del estimador (5.15) para $\varepsilon = 0$.

En la siguiente subsección se detalla la forma y los valores de la ganancia de inyección de salida K_n para obtener un estimador de perturbaciones estable.

5.2.2. Matriz de inyección de salida

Para obtener una matriz de estados \bar{A}_{FK_n} Hurwitz en la ecuación del estimador de perturbaciones (5.15), se propone una matriz K_n de la forma

$$K_n = T_n \left(\bar{K}_n - \hat{K} \right), \quad (5.22)$$

donde T_n es la matriz de similaridad

$$T_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_{f_n22} & 0 & \frac{a_{f_n26}}{a_{f_n45}} & \frac{a_{f_n26}a_{f_n66}}{a_{f_n45}} & a_{f_n24} + \frac{a_{f_n26}(a_{f_n66}^2 + a_{f_n65})}{a_{f_n45}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{f_n42} & 0 & 0 & 1 & a_{f_n44} + a_{f_n66} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_{f_n45}} & \frac{a_{f_n66}}{a_{f_n45}} & \frac{a_{f_n66}^2 + a_{f_n65}}{a_{f_n45}} \\ 0 & a_{f_n62} & \frac{1}{a_{f_n45}} & \frac{a_{f_n66}}{a_{f_n45}} & \frac{a_{f_n66}^2 + a_{f_n65}}{a_{f_n45}} & a_{f_n64} + \frac{a_{f_n66}(a_{f_n66}^2 + a_{f_n65}) + a_{f_n65}a_{f_n66}}{a_{f_n45}} \end{bmatrix}, \quad (5.23)$$

y las ganancias \widehat{K} y \overline{K}_n son las matrices de inyección de salida

$$\widehat{K} = \begin{bmatrix} k_{12} & 0 \\ k_{11} & 0 \\ 0 & k_{24} \\ 0 & k_{23} \\ 0 & k_{22} \\ 0 & k_{21} \end{bmatrix}, \quad \overline{K}_n = \begin{bmatrix} -a_{f21} & \overline{k}_{12} \\ -a_{f22} & \overline{k}_{22} \\ a_{f41}a_{f65} - a_{f45}a_{f61} & \overline{k}_{32} \\ a_{f41}a_{f_n66} + a_{f42}a_{f65} - a_{f45}a_{f62} & \overline{k}_{42} \\ a_{f42}a_{f_n66} - a_{f41} & \overline{k}_{52} \\ -a_{f42} & \overline{k}_{62} \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

donde $\overline{k}_{12} = -a_{f23} - (a_{f25}(a_{f66}^2 + a_{f65}))/a_{f45}$, $\overline{k}_{22} = -a_{f24} - (a_{f26}(a_{f66}^2 + a_{f65}))/a_{f45}$, $\overline{k}_{32} = a_{f43}a_{f65} - a_{f45}a_{f63}$, $\overline{k}_{42} = a_{f43}a_{f66} + a_{f44}a_{f65} - a_{f45}a_{f64}$, $\overline{k}_{52} = a_{f44}a_{f66} - a_{f65} - a_{f43}$, $\overline{k}_{62} = -a_{f44} - a_{f66}$. La forma de K_n dada en (5.22) permite simplificar el proceso de diseño, como se mostrará a continuación.

La matriz T_n define el cambio de variable $w = T_n \widehat{x}$ en el filtro de Beard-Jones (5.15), con el cual se obtiene el sistema transformado

$$dw/dt = \left(\widehat{A}_{FK_n} + (1 - \varepsilon) \widehat{B}_n H_n^\ell \widehat{C}_n \right) w - \left(\left(\overline{K}_n - \widehat{K} \right) + \widehat{B}_n H_n^\ell \right) y \quad (5.25)$$

$$\widehat{u} = (1 - \varepsilon) H_n^\ell (\widehat{C}_n w - y), \quad (5.26)$$

donde

$$\widehat{A}_{FK_n} = T_n \overline{A}_{FK_n} T_n^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -k_{12} & 0 & \frac{a_{f25}}{a_{f45}} & \frac{a_{f25}a_{f66}}{a_{f45}} & 0 \\ 1 & -k_{11} & 0 & \frac{a_{f26}}{a_{f45}} & \frac{a_{f26}a_{f66}}{a_{f45}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -k_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -k_{22} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -k_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{K_x} & A_{K_n} \\ 0 & A_{K_z} \end{bmatrix}, \quad (5.27)$$

$$\widehat{B}_n = T_n B = \begin{bmatrix} 1/m & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & a_{f45}/I_y \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \widehat{C}_n = C T_n^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad (5.28)$$

$$H_n^\ell = \begin{bmatrix} mk_{12} & -m \frac{a_{f25}(k_{22} + a_{f66}k_{21})}{a_{f45}} \\ 0 & I_y \frac{a_{f_n24}}{a_{f45}} \end{bmatrix}. \quad (5.29)$$

La matriz de estados (5.27) es triangular superior a bloques. Las submatrices A_{K_x} y A_{K_z} se encuentran en forma observador, y corresponden a los subsistemas de las variables \mathbf{x} y $\{\mathbf{z}, \theta\}$, respectivamente. Los coeficientes k_{ij} , $i \in \{1, 2\}$, $j \in \{1, \dots, 4\}$, determinan la ubicación de los valores propios de A_{K_x} y A_{K_z} . Y por lo tanto, los polos de la matriz de estados del filtro de Beard-Jones \bar{A}_{FK_n} en (5.15).

5.2.3. Polinomios característicos

Por la forma triangular superior a bloques de \bar{A}_{FK_n} , mostrada en (5.27), $G_e(s)$ tiene una forma triangular superior, y si es Hurwitz, los elementos de su diagonal son filtros pasa bajas. Dado que $G_q(s)$ es dada por la resta mostrada en (5.19), y si el estimador de perturbaciones (5.15) es Hurwitz, entonces

$$\begin{aligned}\tilde{q}_n^*(s) &= G_q(s)\bar{q}_n^*(s), \\ G_q(s) &= \begin{bmatrix} G_x(s) & -G_n(s) \\ 0 & G_z(s) \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (5.30)$$

donde $G_x(s)$ y $G_z(s)$ son filtros pasa altas que atenúan la incertidumbre \bar{q}_n^* , siempre que ésta sea de ancho de banda finito, como se muestra en (3.10) de [4] (cf. Fig 5.1). $G_n(s)$, por otro lado, es una función de transferencia de baja ganancia (véase la subsección 6.2.2 para más detalles, y la Fig. 6.5 para los gráficos de Bode de (5.30)).

Para asegurar que la función de transferencia del error de compensación (5.16) sea Hurwitz, se analiza el polinomio característico de $G_e(s)$, denotado por $\pi_e(s)$, y tal que

$$\begin{aligned}\pi_e(s) &= \det(sI - \bar{A}_{FK_n}) \\ &= \pi_{ex}(s)\pi_{ez}(s)\end{aligned}\quad (5.31)$$

donde $\pi_{ex}(s)$ y $\pi_{ez}(s)$ son los polinomios característicos de las submatrices A_{K_x} y A_{K_z} de \bar{A}_{FK_n} , respectivamente, dados en (5.27), es decir

$$\begin{aligned}\pi_{ex}(s) &= \det(sI - A_{K_x}) = s^2 + k_{11}s + k_{12} \\ \pi_{ez}(s) &= \det(sI - A_{K_z}) = s^4 + k_{21}s^3 + k_{22}s^2 + k_{23}s + k_{24}\end{aligned}\quad (5.32)$$

Si se eligen adecuadamente los valores de k_{ij} , $i \in \{1, 2\}$, $j \in \{1, \dots, 4\}$ en (5.22) de tal manera que (5.32) son Hurwitz, entonces se obtiene que los elementos de la diagonal de $G_e(s)$ forman filtros pasa bajas que permiten estimar la incertidumbre \bar{q}^* (ver Fig. 5.1).

La matriz de estado $\hat{A}_{FK_n} + (1 - \varepsilon)\hat{B}_n H_n^\ell \hat{C}_n$ del estimador (5.25) tiene el polinomio característico

$$\begin{aligned}\pi_w(s) &= \det\left(sI - \hat{A}_{FK_n} - (1 - \varepsilon)\hat{B}_n H_n^\ell \hat{C}_n\right) \\ &= (s\bar{\pi}_{wx}(s) + \varepsilon k_{12})(s\bar{\pi}_{wz}(s) + \varepsilon k_{24})\end{aligned}\quad (5.33)$$

donde $\bar{\pi}_{wx}(s)$ y $\bar{\pi}_{wz}(s)$ son polinomios que se relacionan con los de $G_e(s)$ en (5.32) como

$$\begin{aligned}\bar{\pi}_{wx}(s) &= (\pi_{ex}(s) - k_{12})/s = s + k_{11}, \\ \bar{\pi}_{wz}(s) &= (\pi_{ez}(s) - k_{24})/s = s^3 + k_{21}s^2 + k_{22}s + k_{23}.\end{aligned}\quad (5.34)$$

La matriz de transferencia $G_q(s)$ se expresa en términos de los polinomios (5.32) y (5.34) como

$$G_q(s) = \begin{bmatrix} (s\bar{\pi}_{wx} + \varepsilon k_{12})/\pi_{ex}(s) & -G_n(s) \\ 0 & (s\bar{\pi}_{wz} + \varepsilon k_{24})/\pi_{ez}(s) \end{bmatrix}. \quad (5.35)$$

donde

$$G_n(s) = \frac{m s \pi_n(s)}{I_y \pi_e(s)}, \quad n \in \{q, tr, a\} \quad (5.36)$$

$$\begin{aligned} \pi_n(s) = & k_{12} a_{f26} s^2 + ((k_{12} - k_{22} - k_{21} a_{f66}) a_{f25} + (k_{12} a_{f66} + k_{12} k_{21}) a_{f26}) s \\ & + ((k_{12} - k_{11} k_{21}) a_{f66} - k_{11} k_{22} + k_{12} k_{21}) a_{f25} + (k_{12} k_{22} + k_{12} k_{21} a_{f66}) a_{f26} \end{aligned}$$

5.2.4. Ajuste de las frecuencias de corte del estimador de incertidumbre

Los elementos k_{ij} de la ganancia de inyección de salida \hat{K} en (5.22) deben ser elegidos de tal manera que ambos pares de polinomios (5.32) y (5.34) sean Hurwitz, de modo que se asegure la estimación y compensación del término de incertidumbre \bar{q}_n^* . En la práctica, es deseable evitar oscilaciones en la estimación y el rechazo de la incertidumbre, al evitar polos complejos conjugados. Entonces, se propone que los polinomios en (5.32) y (5.34) tomen la forma:

$$\bar{\pi}_{wx}(s) = (s + a_x), \quad (5.37)$$

$$\pi_{ex}(s) = s\bar{\pi}_{wx}(s) + b_x = (s + \rho_x)^2, \quad (5.38)$$

$$\bar{\pi}_{wz}(s) = (s + a_z)(s^2 + a_z s + b_z), \quad (5.39)$$

$$\pi_{ez}(s) = s\bar{\pi}_{wz}(s) + c_z = (s + \rho_z)^2(s + r\rho_z)^2, \quad (5.40)$$

donde $a_x = 2\rho_x$, $b_x = \rho_x^2$, $a_z = (r + 1)\rho_z$, $b_z = 2r\rho_z^2$, y $c_z = r^2\rho_z^4$; y el coeficiente de amortiguamiento relativo del polinomio de segundo orden en (5.39) es $(r + 1)/\sqrt{8r}$.

Al igualar los polinomios (5.32) y (5.34) con su forma propuesta en (5.37)-(5.40), se obtienen las expresiones de los elementos de $\hat{K} = [k_{ij}]$:

$$\begin{aligned} k_{11} = 2\rho_x, \quad k_{12} = \rho_x^2; \\ k_{21} = 2(r + 1)\rho_z, \quad k_{22} = (r^2 + 4r + 1)\rho_z^2, \quad k_{23} = 2r(r + 1)\rho_z^3, \quad k_{24} = r^2\rho_z^4. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Al elegir $\rho_x > 0$ se obtienen polos reales y negativos en $\pi_{ex}(s)$ y $\bar{\pi}_{wx}(s)$; y con $\rho_z > 0$ y $r > 0$ se obtienen polos Hurwitz en $\pi_{ez}(s)$ y $\bar{\pi}_{wz}(s)$. El valor de r se puede ajustar para evitar polos complejos conjugados, y obtener raíces reales y negativas en $\bar{\pi}_{wz}(s)$.

Las frecuencias de corte de los filtros pasa altas $G_x(s)$ y $G_z(s)$ en (5.19) se ajustan con la magnitud de ρ_x y ρ_z , respectivamente. Estas pueden ser sintonizadas a través de experimentos numéricos, para obtener valores mayores al ancho de banda de la incertidumbre, para asegurar su rechazo de la salida y de la ecuación de estado incremental (5.10). En la Fig. 5.2, se muestran ejemplos de los diagramas de Bode de magnitud de los elementos de la matriz de transferencia $G_q(s)$. Aquí, las frecuencias de corte obtenidas se encuentran alrededor de los 9 [rad/s].

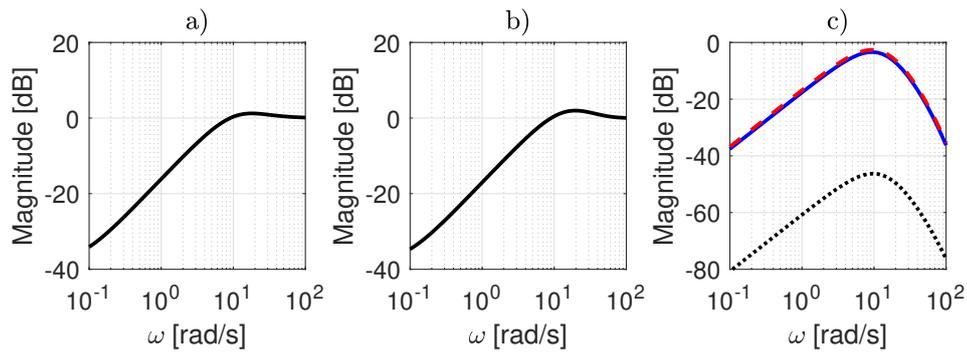


Figura 5.2: Diagramas de Bode de magnitud de los elementos de la matriz de transferencia $G_q(s)$. a) $G_x(s)$; b) $G_z(s)$; y c) $G_n(s)$ en los tres envoltentes de vuelo.

5.3. Recapitulación

En este capítulo se presentó una ley de control de dos términos (5.1). Esto es, una retroalimentación de estado lineal, (5.5), que estabiliza la dinámica del error de seguimiento de trayectoria, en ausencia de perturbaciones. Y un término de rechazo de perturbaciones, (5.15), cuya función es atenuar los efectos de la incertidumbre de modelo en el seguimiento de posición.

Utilizando la retroalimentación de estado dada en la sección 5.1, la estabilidad de la dinámica de error de seguimiento no perturbada es asegurada por medio de un criterio de estabilidad basado en Lyapunov, (5.9), en todos los puntos de operación del vehículo *Tail-Sitter*. La metodología presentada de rechazo de perturbaciones, sección 5.2, asegura la atenuación de los efectos de las perturbaciones en la salida del sistema incremental, para señales de perturbación de ancho de banda finito.

Resultados de simulación

En este capítulo se ejemplifica la manera de implementar la metodología de planificación de trayectorias de transición de *Tail-Sitters* de empuje diferencial, presentada en el capítulo 4; y la metodología de control del capítulo 5. Y además, se lleva a cabo una comparación con una metodología similar, presentada en [16]. Los programas de *MATLAB*[®] y *Simulink*[®] correspondientes son dados en el enlace del Apéndice D.

Para esto, se considera un vehículo *Tail-Sitter* de empuje diferencial con los siguientes parámetros físicos.

El ala del *Tail-Sitter* es de perfil reflejado S5010, especial para alas volantes de baja velocidad [25]; de alargamiento: $AR = 6$, envergadura: $b = 1.35$ [m], y cuerda aerodinámica media: $\bar{c} = 0.165$ [m]. Se considera que el centro aerodinámico del ala se encuentra al 25 % de \bar{c} , es decir: $h_0 = 0.25$; y el centro de gravedad, c.g, se encuentra al 10 % de \bar{c} , es decir: $h = 0.1$. Los coeficientes aerodinámicos del ala con respecto al centro aerodinámico son: $(C_{L_0}, C_{L_1} [\text{rad}/^\circ]) = (0.1875, 0.0660)$, $(C_{D_0}, C_{D_1} [\text{rad}/^\circ], C_{D_2} [\text{rad}^2/^\circ]) = (0.0212, 0.0014, 0.0004)$, y $(C_{M_0}, C_{M_1} [\text{rad}/^\circ]) = (-0.0134, 0.0092)$. El brazo de palanca de los rotores es $l = 20$ [cm], la aceleración de la gravedad es: $g = 9.81$ [m, s⁻²], y la densidad del aire es: $\rho = 1.2$ [kg/m³]. La masa total de la aeronave es $m = 1.6$ [kg], y suponemos una relación empuje-peso máxima de 1.6. El momento de inercia con respecto al eje $O_B Y_B$ es $I_y = 0.048$ [kg m²]. La velocidad de crucero de este vehículo es de $V_c = 15$ [m/s].

(6.1)

6.1. Planificación de la trayectoria de transición hacia adelante

En esta sección se obtiene la trayectoria de transición para el vehículo *Tail-Sitter* con las características dadas en el cuadro (6.1), utilizando la metodología del capítulo 4.

6.1.1. Problema de planificación

El problema considerado de planificación de la trayectoria de transición del vehículo descrito en (6.1) consiste en encontrar los coeficientes de Fourier de \bar{V} y \bar{T} en (4.7), tales que minimicen la funcional de costo (4.1), y que cumplan con (4.2)-(4.6).

Este problema de planificación tiene tres elementos importantes, a saber: la funcional de costo (4.1), las restricciones (4.2)-(4.5), y las condiciones de frontera (4.6); cuyos detalles son dados a continuación.

6.1.1.1. Funcional de costo

En la funcional de costo (4.1), se considera un tiempo de transición de $t_N = 5$ [s], valores de $\beta = 0.6$ y $\mu = 20$, un empuje máximo de $\bar{\mathcal{F}}_{\text{máx}} = 20$ [N], y una aceleración angular máxima del ángulo de ataque de $d^2\bar{\alpha}/dt^2_{\text{máx}} = 101.55$ [$^\circ/s^2$].

El intervalo de tiempo de transición de 5 [s] es mayor al que se presenta en metodologías similares como [16], donde este intervalo se define en 2 [s]. Sin embargo, en dicha publicación solo se busca llevar al *Tail-Sitter* dentro del EVA, mientras que en este trabajo de tesis se busca llevar al vehículo hasta su modo de vuelo de crucero. Más adelante, en la subsección 6.1.2.1, se muestra que la elección de 5 [s] hace que el vehículo *Tail-Sitter* aquí considerado sea llevado al EVA en aproximadamente 2 [s].

El valor de $\beta = 0.6$ hace más relevante la minimización del gasto de energía de empuje sobre la minimización del gasto de energía de cabeceo. El valor de $\mu = 20$ fue elegido suficientemente grande para estabilizar la solución numérica del problema de optimización, después de algunas iteraciones de solución.

Dado que la relación de empuje-peso máxima de los rotores es de 1.6, la cota $\bar{\mathcal{F}}_{\text{máx}} = 20$ [N] proporciona un superávit de empuje para rechazo de perturbaciones. Esto es, como $m = 1.6$ [kg], se tiene que $\bar{\mathcal{F}}_{\text{máx}}/(9.81 m) \leq 1.3 < 1.6$ (cf. el cuadro (6.1)).

El valor de $d^2\bar{\alpha}/dt^2_{\text{máx}} = 101.55$ [$^\circ/s^2$] fue seleccionado después de algunas iteraciones del proceso de solución del problema de planificación de trayectoria. Este valor arrojó oscilaciones considerablemente pequeñas en la gráfica del ángulo de ataque, como se verá más adelante en la Fig. 6.2.

6.1.1.2. Restricciones

La restricción (4.2) define la manera en que se calcula $\bar{\mathcal{F}}$ en la funcional de costo (4.1), a partir de los valores de \bar{V} y \bar{T} . Por otro lado, los valores de $d^2\bar{\alpha}/dt^2$ se obtienen a partir de la derivada por diferencias finitas de los valores de $\bar{\alpha}$, dados por (4.3). Y la restricción (4.4) define la forma de calcular el $\bar{\mathcal{T}}_q$ a partir de \bar{V} y \bar{T} .

En (4.5) se definen restricciones de cotas en algunas variables importantes durante la transición. La cota de momento de cabeceo nominal se toma como $\bar{\mathcal{T}}_{\text{máx}} = 0.35$ [Nm], justo arriba del valor de momento para vuelo de crucero. Esto implica que, para un brazo de palanca de $l = 0.2$ [m] (cf. el cuadro (6.1)), el empuje nominal máximo de cada rotor está acotado por $(\bar{\mathcal{F}}_{\text{máx}} + 0.35/0.2)/4 \approx 5.44$ [N]. Para una relación máxima de empuje-peso de 1.6, el empuje máximo de cada rotor es de $1.6 mg/4 \approx 6.28$ [N]. Esto deja un excedente de empuje de $6.28 - 5.44 \approx 0.84$ [N] para rechazo de perturbaciones en cada rotor. La cota máxima de ángulo de cabeceo se fija en $\bar{\alpha}_{\text{máx}} = 9$ [$^\circ$] para dejar un excedente en grados del ángulo de ataque antes del desplome del ala. Y se fija $d\bar{\alpha}/dt_{\text{máx}} = 15$ [$^\circ/s$] para evitar pendientes muy grandes en la gráfica del ángulo de ataque nominal. Por último, se fija $\delta\bar{\mathbf{Z}}_{\text{máx}} = 3.5$ [m], considerando que un *Tail-Sitter* vuela habitualmente por encima de los 10 [m].

6.1.1.3. Condiciones de frontera

En las condiciones de frontera (4.6) del problema de planificación, la condición final de velocidad se toma igual al valor de velocidad de vuelo de crucero $\bar{V}(t_N) = 15$ [m/s] (cf. el cuadro (6.1)). Y la condición inicial de velocidad se toma como $\bar{V}(0) = 0.5$ [m/s]. En la práctica, este valor inicial se puede ajustar al valor de velocidad que toma el vehículo *Tail-Sitter* al momento de despegar del suelo.

Las condiciones de frontera (4.6) definen los primeros coeficientes de Fourier de \bar{V} y \bar{T} , dados por (4.8)-(4.11).

6.1.2. Solución por series de Fourier truncadas

El espacio de búsqueda de la solución del problema de programación no lineal (4.1)-(4.5) (4.8)-(4.11) consiste en los coeficientes de Fourier de \bar{V} y \bar{T} en (4.7), para un número de n armónicos, menos los coeficientes (4.8)-(4.11), definidos por las condiciones de frontera (4.6).

Al aumentar el número de armónicos, n , aumenta el número de coeficientes de \bar{V} y \bar{T} , y por lo tanto la complejidad de la trayectoria de transición. Sin embargo, a partir de cierto valor de n , su incremento sólo aportan una mejora marginal en el rendimiento global de la trayectoria. Por lo tanto, se busca elegir el valor más pequeño de n que proporciona un rendimiento satisfactorio, como se discute a continuación.

6.1.2.1. Coeficientes de Fourier de la trayectoria de transición

El problema de planificación (4.1)-(4.5) y (4.8)-(4.11) es un problema de programación no lineal, que se resuelve utilizando la herramienta *fmincon* de *MATLAB*[®], con coeficientes de Fourier iniciales cero.

En la Tabla 6.1, se muestra el rendimiento de la trayectoria de transición, para $n = 4, \dots, 9$ armónicos. Entre $n = 7$ y $n = 8$ armónicos, el costo se redujo un 1.4%; y entre $n = 8$ y $n = 9$, un 1.32%. Sin embargo, entre $n = 7$ y $n = 9$, el costo sólo se reduce un 2.7%, y el número de coeficientes de Fourier en (4.7) aumenta cuatro unidades por cada incremento de n . Esto es, entre $n = 7$ y $n = 9$, el espacio de búsqueda pasa de dimensión 22 a dimensión 30; lo cual significa un aumento de 36.4%, aproximadamente.

Tabla 6.1: Valores del funcional de costo (4.1), para los números de armónicos $n \in \{4, \dots, 9\}$, arrojados por la función *fmincon* de *MATLAB*[®]

n	4	5	6	7	8	9
costo	21.433	21.03	20.24	20.0	19.72	19.46

En la Fig 6.1, se muestran las gráficas de costo y dimensión del espacio de búsqueda vs. el número de armónicos. A partir de esta figura, se tiene como candidatos de n los valores de $n = 6$ y $n = 7$. Para elegir finalmente el valor de n , se procede a analizar las gráficas de las variables de transición.

En la Fig. 6.2, se presentan las gráficas de algunas variables de transición importantes: \bar{V} , \bar{T} , $\bar{\alpha}$, $\bar{\mathcal{F}}$, $\bar{\mathbf{X}}$ y $\bar{\mathbf{Z}}$, obtenidas a partir de las trayectorias de transición correspondientes a $n \in \{4, \dots, 7\}$. Se observa que las gráficas de todas estas variables son similares, y la solución $n - 1$ se acerca cada vez mas a la solución n , conforme n es incrementada. No obstante, la trayectoria

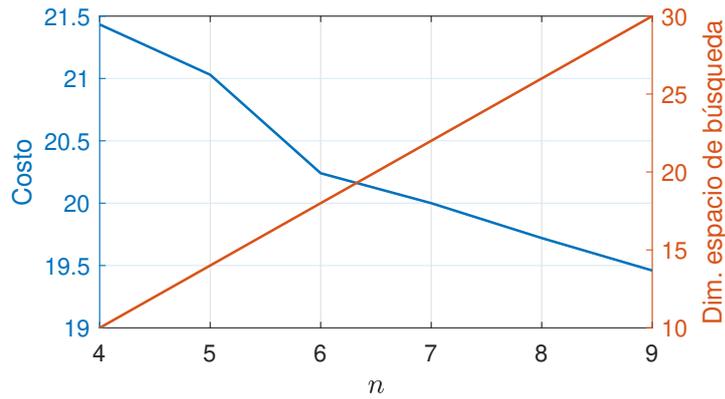


Figura 6.1: Gráficas de costo y dimensión del espacio de búsqueda vs. número de armónicos

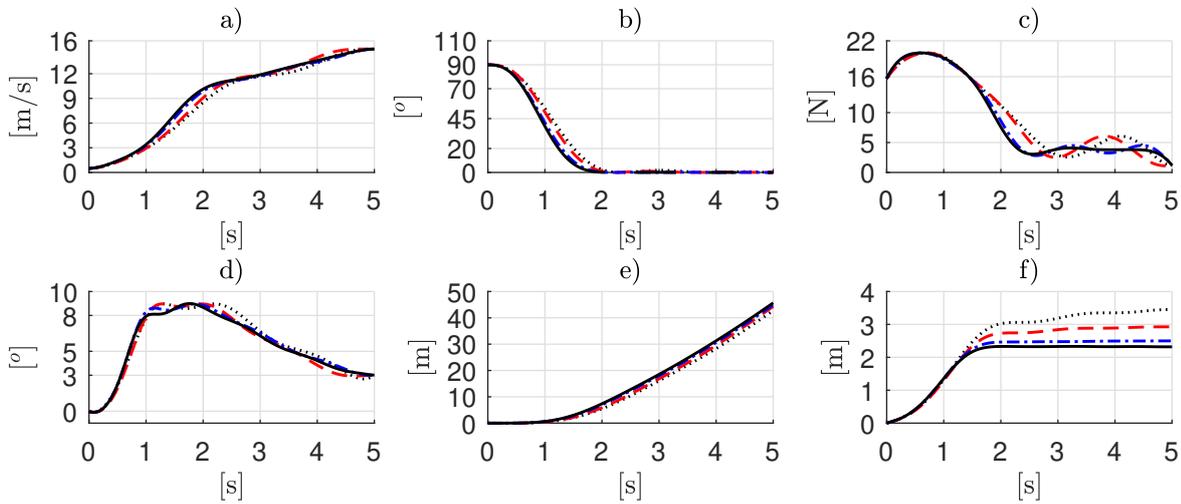


Figura 6.2: Variables nominales de trayectoria de transición para $n = 4$ (líneas negras punteadas), $n = 5$ (líneas rojas discontinuas), $n = 6$ (líneas azules discontinuas punteadas), y $n = 7$ (líneas negras sólidas). a) magnitud de velocidad, $\bar{V}(t)$ [m/s]; b) ángulo de trayectoria de vuelo, $\bar{T}(t)$ [°]; c) empuje, $\bar{F}(t)$ [N]; d) ángulo de ataque, $\bar{\alpha}(t)$ [°]; e) desplazamiento horizontal, \bar{X} ; f) altitud, $-\bar{Z}$.

correspondiente a $n = 7$ provee oscilaciones aceptablemente pequeñas en las gráficas de \bar{F} y $\bar{\alpha}$ en las Figs. 6.2 c) y d). Además, a partir de las gráficas de $\bar{\alpha}$, \bar{V} y \bar{T} en las Figs. 6.2 a) b) d), se deduce que el *Tail-Sitter* alcanza un estado nominal de vuelo horizontal dentro del *EVA* alrededor del instante de tiempo $t = 2$ [s] (cf. 2.5), cuando el desplazamiento horizontal es apenas de $\bar{X}(2) < 10$ [m]; como se muestra en la Fig. 6.2 e). Y el aumento total de altitud durante la transición es de unos 2.5 [m] (ver Fig. 6.2 f)), lo cuál se encuentra por debajo del límite de 3.5 [m].

A partir de la tabla 6.1 y la discusión de la Fig. 6.2, se selecciona la trayectoria de transición correspondiente a una serie de Fourier truncada de orden $n = 7$, dado que proporciona un buen compromiso entre rendimiento (Tabla 6.1), oscilaciones (Fig. 6.2), y número de coeficientes. Entonces, al aplicar la función *fmincon* al problema de programación no lineal (4.1)-(4.5) y

(4.8)-(4.11), para $n = 7$, se obtienen los siguientes coeficientes:

$$\begin{aligned} [a_2, \dots, a_7] &= [-0.5508 \quad -1.0201 \quad -0.028172 \quad -0.73844 \quad -0.090254 \quad 0.17624], \\ [b_3, \dots, b_7] &= [-0.73891 \quad -0.71278 \quad -0.13198 \quad 0.7155 \quad 0.16367], \\ [c_2, \dots, c_7] &= [0.096767 \quad 0.79257 \quad 0.1018 \quad -0.35144 \quad -0.03448 \quad 0.04057], \\ [d_3, \dots, d_7] &= [0.095528 \quad -0.51333 \quad 0.012621 \quad 0.19701 \quad 0.028603]. \end{aligned} \quad (6.2)$$

6.1.2.2. Descripción de la trayectoria de transición obtenida

En la figura 6.3 se muestra el comportamiento de algunas variables de transición nominales para $n = 7$ armónicos vs. la variable de desplazamiento horizontal \bar{X} . Además, se distinguen los instantes en los que el vehículo *Tail-Sitter* se mueve entre los tres envolventes de vuelo. El intervalo de tiempo de transición se divide en $N = 15$ subintervalos, donde $t_k = t_N(k/N)$, $k = 0, \dots, N$. Los valores discretos de las variables de transición en los instantes de tiempo t_k son resaltados con cruces.

En la Fig. 6.3 a) se muestran los valores de la velocidad nominal, \bar{V} , y se resaltan las regiones de valores que corresponden a los tres envolventes de vuelo del vehículo. El vehículo sale del *EVC* para entrar al *EVT* alrededor de $\bar{X} = 1$ [m]. Después el *Tail-Sitter* entra nominalmente al *EVA*, alrededor de $\bar{X} = 4$ [m]. En la Fig. 6.3 b) se muestra el camino de posición nominal, descrito en el plano horizontal inercial. Se divide el plano con una línea azul punteada, para indicar el instante en el que se cambia del *EVT* al *EVA*. Se puede notar que, dentro del *EVA*, el desplazamiento vertical es prácticamente nulo, y el vehículo se desplaza horizontalmente. En la Fig. 6.3 c) se muestran las fuerzas que actúan nominalmente sobre el *Tail-Sitter*. Aquí se observa que, después de entrar al *EVA*, la sustentación del ala del *Tail-Sitter* se vuelve la más relevante; y después, a partir de $\bar{X} = 10$ [m], la sustentación del ala es prácticamente igual al peso del *Tail-Sitter*. En la Figs. 6.3 d) y e) se muestran el ángulo de ataque y el momento de cabeceo de entrada nominales, respectivamente. Aquí se observa que, a partir del *EVA*, el ángulo de ataque y el momento de cabeceo de entrada se mueven suave y gradualmente a su valor de vuelo de crucero.

6.2. Control de transición

En esta sección se calcula la ley de control, $u = \bar{u} + \hat{u}$, propuesta en el capítulo 5, la cual consiste en un término de retroalimentación de estado mas un término de rechazo activo de perturbaciones. Esta se obtiene a partir del sistema incremental (3.39) con los parámetros del vehículo descrito en el cuadro (6.1), y de la trayectoria de transición obtenida en la sección 6.1.

6.2.1. Retroalimentación de estado estabilizante

En esta subsección se calcula el término de control por retroalimentación de estado, \bar{u} de (5.1), desarrollado en la sección 5.1.

El objetivo de \bar{u} es estabilizar el sistema incremental (3.39), en ausencia de perturbaciones, para todo $k \in \{0, \dots, 15\}$, de acuerdo a la partición dada en la subsección 6.1.2.2. En la Fig. 6.4 se muestra la evolución temporal de los coeficientes de la matriz de estados A_k en (3.41).

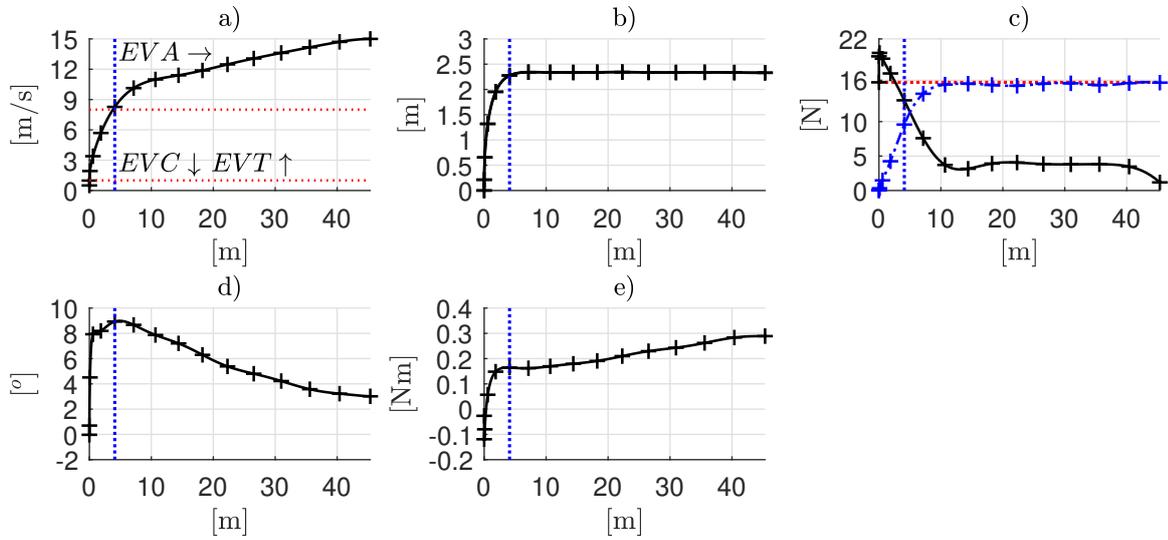


Figura 6.3: Comportamiento de las variables de transición para $n = 7$ vs. el desplazamiento horizontal \bar{X} . a) $-\bar{Z}$ [m] vs. \bar{X} [m]; b) \bar{V} vs. \bar{X} ; c) $mg = 15.696$ [N] (línea roja punteada), \bar{F} [N] (línea sólida negra), \bar{L} [N] (línea azul discontinua punteada) vs. \bar{X} [m]; d) $\bar{\alpha}$ [°] vs. \bar{X} [m]; e) \bar{T}_q [Nm] vs. \bar{X} [m].

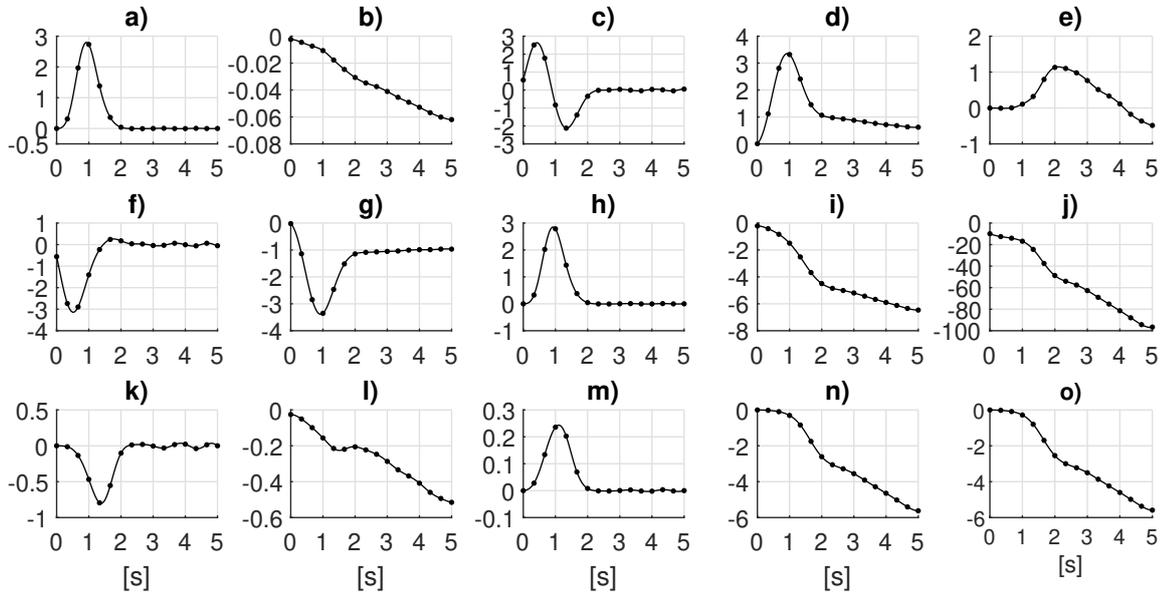


Figura 6.4: Coeficientes de la matriz de estados, $A_k = \dot{a}_{ij}$, $i \in \{2, 4, 6\}$, $j \in \{1, \dots, 5\}$ vs. \bar{X} . a) \dot{a}_{21} , b) \dot{a}_{22} , y así sucesivamente.

6.2.1.1. Dinámica incremental nominal

En la Fig. 6.3 de la subsección 6.1.2.2 se presentó una partición del intervalo de tiempo de transición, definida por la variable de tiempo discreta $t_k = k/N$, $k \in \{0, \dots, N\}$, de $N = 15$ subintervalos de la forma $[t_{k-1}, t_k)$; en los cuales (3.39) es invariante a pedazos. En la Fig. 6.3 b), se muestra que el *EVC* tiene lugar durante el intervalo $t \in [t_0, t_1)$, el *EVT* cuando $t \in [t_1, t_4)$, y el *EVA* cuando $t \in [t_4, t_{15})$ (cf. sección 2.5); donde $[t_0, t_1) \cup [t_1, t_4) \cup [t_4, t_{15}) = [0, 5]$ [s]. Para obtener la dinámica nominal de las variables incrementales en cada envolvente de vuelo (5.2), se sigue la metodología del capítulo 5, sección 5.1. Esto es, en cada uno de los envoltentes de vuelo (cf. (5.2)), se seleccionan las siguientes matrices nominales¹

$$\bar{A}_q = A_k|_{k=1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.288 & -0.005 & 2.436 & 1.073 & -0.009 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2.672 & -1.103 & 0.304 & -0.452 & -12.813 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.015 & -0.054 & 0.029 & -0.028 & -0.028 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.3)$$

$$\bar{A}_{tr} = A_k|_{k=3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2.749 & -0.012 & -0.861 & 3.328 & 0.082 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1.461 & -3.375 & 2.821 & -1.534 & -17.375 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.496 & -0.163 & 0.248 & -0.325 & -0.303 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.4)$$

$$\bar{A}_a = A_k|_{k=9} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.01 & -0.041 & 0.127 & 0.898 & 0.776 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.185 & -1.073 & 0.012 & -5.156 & -61.346 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.04 & -0.284 & 0.003 & -3.499 & -3.446 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.5)$$

6.2.1.2. Retroalimentación de estado

Las matrices de ponderación \bar{Q} y \bar{R} en la ecuación de Riccati (5.4) se seleccionan de la siguiente manera:

$$\bar{Q} = \text{diag}\{1, 1, 1, 1, 20, 1\}, \quad \bar{R} = \text{diag}\{1/100, 1\}. \quad (6.6)$$

Los elementos de \bar{Q} favorecen la velocidad de convergencia del ángulo de cabeceo, el cual se relaciona con el ángulo de ataque, y es crucial para evitar el desplome del ala. Los elementos de \bar{R} limitan el gasto de energía del término de retroalimentación \bar{u} .

Las soluciones de las ecuaciones de Riccati (5.4) con las matrices de estado \bar{A}_n , $n \in \{q, tr, a\}$, en (6.3)-(6.5), y las matrices de ponderación (6.6), proporcionan las siguientes matrices de retroalimentación de estado para \bar{u} en (5.5):

¹Las matrices \bar{A}_q , \bar{A}_{tr} y \bar{A}_a se obtienen al evaluar A_k en (3.41) en los puntos $\bar{V}_k = \bar{V}(t_k)$ y $\bar{I}_k = \bar{I}(t_k)$ en (4.7), para $k = 1, 3, 9$, respectivamente (cf. (6.2) y (4.8)-(4.11)).

Tabla 6.2: Valores de la condición de estabilidad (5.9) para $k \in \{1, \dots, 10\}$.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
λ_k^*	0.1431	1.0	0.3408	1.0	0.5937	0.2740	0.7229	0.8917
k	8	9	10	11	12	13	14	15
λ_k^*	0.9554	1.0	0.9702	0.8866	0.7765	0.6485	0.4156	0.2753

$$\begin{aligned}
 F_q &= \begin{bmatrix} -15.5337 & -12.7731 & 2.7043 & 5.194 & -16.6315 & -0.64201 \\ -0.82565 & -0.214 & 1.0569 & 1.1251 & -7.4383 & -1.3077 \end{bmatrix} \\
 F_{tr} &= \begin{bmatrix} -12.468 & -13.1234 & 15.9303 & 3.5747 & -18.3101 & -0.69861 \\ 0.35964 & -0.23287 & 1.6258 & 0.80055 & -7.3155 & -1.3028 \end{bmatrix} \\
 F_a &= \begin{bmatrix} -9.9555 & -11.3702 & 0.91528 & -0.29466 & -1.5729 & -0.057221 \\ 0.082133 & -0.019074 & 0.99586 & 0.61018 & -10.2881 & -1.4098 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

6.2.1.3. Estabilidad local de la dinámica incremental

En la Tabla 6.2 se muestran los valores numéricos de la condición de estabilidad, λ_k^* dada en (5.9), para la retroalimentación de estado \bar{u} con las ganancias (6.7), y las matrices nominales $\{\bar{A}_q, \bar{A}_{tr}, \bar{A}_a\}$ dadas en (6.3)-(6.5).

Dado que $\lambda_k^* > 0$ en la Tabla 6.2 para toda $k \in \{0, \dots, 15\}$, se concluye que el término de control \bar{u} estabiliza localmente la dinámica incremental. Esto es, en ausencia de perturbaciones o incertidumbre, la dinámica incremental nominal (5.2) es asintóticamente estable.

6.2.2. Rechazo activo de perturbaciones

En esta subsección se calcula el término de rechazo activo de perturbaciones, \hat{u} de (5.1), desarrollado en la sección 5.2.

Este término se obtiene a partir del estimador de perturbaciones basado en el filtro de Beard Jones (5.15), con la matriz de inyección de salida propuesta en (5.22). Las ganancias de inyección de salida son propuestas como en (5.41). Los valores de las frecuencias de corte de los filtros pasa altas en la diagonal de (5.35), así como el valor de $0 < \varepsilon \ll 1$, son ajustados a partir de experimentos numéricos, utilizando diagramas de Bode de magnitud. Los detalles son dados a continuación.

6.2.2.1. Matriz de inyección de salida

La transformación T_n y el término \bar{K}_n , en la matriz de inyección de salida (5.22), se obtienen a partir de los elementos de la matriz de estados del sistema en lazo cerrado (5.11) con \bar{u} dada por (5.5) y (6.7), evaluados en la trayectoria \bar{V} y \bar{T} con los coeficientes de Fourier (6.2) y (4.8)-(4.11). Sus valores numéricos, para cada envolvente de vuelo, se pueden consultar en el apéndice C.

El término $\hat{K} = [k_{ij}]$ en (5.22), se obtiene de (5.24) y (5.41). El factor de escala r en (5.40) se elige como $r = 6$, para que el polinomio (5.39) tenga raíces reales. La magnitud de $\rho_x > 0$

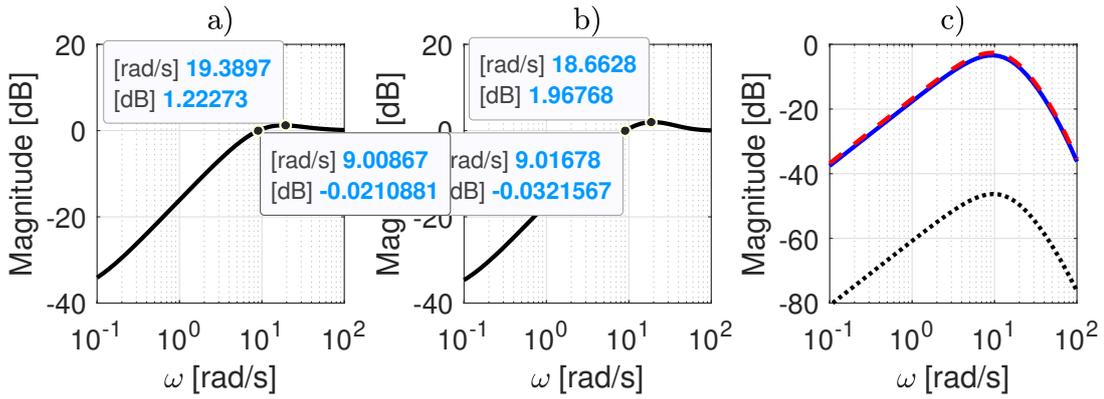


Figura 6.5: Diagramas de Bode de magnitud de los filtros pasa altas inducidos por el filtro de estimación de perturbaciones. a) $G_x(s)$; b) $G_z(s)$; c) $G_n(s)$, en el EVC (línea sólida azul), en el EVT (línea roja discontinua), y en el EVA (línea negra punteada).

y $\rho_z > 0$ en los polinomios (5.38) y (5.40) determinan las frecuencias de corte de los filtros pasa altas en la diagonal de (5.35). Estas frecuencias deben ser suficientemente grandes para compensar la incertidumbre de modelado, como se detalla a continuación.

6.2.2.2. Sintonización de los filtros pasa altas del estimador de incertidumbre

Se desea que las frecuencias de corte de $G_x(s)$ y $G_z(s)$ sean superiores a² 6 [rad/s] (cf. la sección III de [4]), con un nivel de atenuación menor a -30 [dB] a bajas frecuencias. Esto asegura que la ley de control \hat{u} pueda compensar perturbaciones de ancho de banda menor a 6 [rad/s].

Para sintonizar los filtros pasa altas $G_x(s)$ y $G_z(s)$ en la diagonal de (5.35), se graficaron sus diagramas de Bode de magnitud para diferentes valores de ε , ρ_x y ρ_z .

Después de algunos experimentos, se encontró que $\varepsilon = 0.012$, $\rho_x = 12.73$ y $\rho_z = 16.52$ proporcionan frecuencias de corte de 9 [rad/s] tanto en $G_x(s)$ como en $G_z(s)$, con un nivel de atenuación a bajas frecuencias menor a -30 [dB], como se muestra en las Figs. 6.5 a) y b). Y en la Fig. 6.5 c) se muestra el diagrama de Bode de magnitud de $G_n(s)$, el cual permanece por debajo de los 0 [dB] para todo el espectro de frecuencias. Los valores correspondientes de los elementos de \hat{K} en (5.24) son

$$k_{11} = 25.45, \quad k_{12} = 162; \quad (6.8)$$

$$k_{21} = 231.28, \quad k_{22} = 16648, \quad k_{23} = 378710, \quad k_{24} = 2681300. \quad (6.9)$$

6.3. Pruebas de simulación

Para probar al esquema de control desarrollado en las secciones 6.1 y 6.2, se simula el vehículo *Tail-Sitter* con los parámetros indicados en el cuadro (6.1), utilizando el modelo longitudinal dado en (3.1) y (3.2). El tiempo de simulación se establece en seis segundos, donde los primeros cinco segundos corresponden a la maniobra de transición, y el último segundo al modo

²Más adelante, se considerará una perturbación externa con un ancho de banda menor a 5 [rad/s].

de vuelo de crucero. Los valores de empuje y momento de cabeceo en (3.1) y (3.2) se obtienen como en (3.4), a partir de (4.2), (4.4) y (5.1). Se consideran condiciones iniciales nulas, excepto $dZ/dt(0) = -0.35$ [m/s].

6.3.1. Escenarios de simulación

Con el propósito de mostrar la capacidad de rechazo de perturbaciones de la ley de control (5.1), se consideran tres escenarios de simulación. El rendimiento de esta capacidad es cuantificado utilizando dos índices de desempeño, los cuales evalúan el desempeño global y el presentado hacia el final de la transición.

Se consideran los siguientes tres escenarios de simulación:

1. En el primer escenario, se considera que la dinámica incremental (3.39) del vehículo *Tail-Sitter* presenta únicamente incertidumbre de modelado en q ; y la ley de control u en (5.1) no toma en cuenta el término de rechazo activo de perturbaciones, es decir: $\hat{u} = 0$ y $u = \bar{u}$, donde \bar{u} es dado por (5.5) y (6.7). Este escenario fija una base de lo mínimo que se desea mejorar con la ley de control completa.
2. En el segundo escenario, se mantiene que $u = \bar{u}$. No obstante, para evaluar el desempeño del término de estabilización local \bar{u} bajo perturbaciones del viento, se añade a la derecha de (3.1) el término de perturbación externa (cf. sección III de [4]):

$$d = \sin \left(1.1\pi \left(\frac{\pi t}{t_N} \right) + 1 \right) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \quad (6.10)$$

Es decir, el término de incertidumbre q ahora consiste de incertidumbre de modelado y de perturbaciones externas. La perturbación d en (6.10) tiene ancho de banda finito, menor a 5 [rad/s].

3. En el tercer escenario, se mantiene la perturbación externa d , pero se toma la ley de control completa (5.1) como fue calculada en la sección 6.2. El objetivo de \hat{u} es rechazar los efectos tanto de la incertidumbre de modelado y de la perturbación d de la salida de la dinámica incremental (3.39) del *Tail-Sitter* con los parámetros dados en la caja (6.1).

6.3.2. Resultados de simulación

En la Fig. 6.6, se muestran los resultados del seguimiento de la trayectoria en los tres escenarios de simulación. Los resultados del primer escenario se muestran en líneas rojas discontinuas, los del segundo escenario en líneas azules discontinuas punteadas y los del tercer escenario en líneas negras sólidas.

En la Fig. 6.6 a), se muestra la trayectoria de transición realizada por el *Tail-Sitter*, en coordenadas inerciales; aquí se puede notar que la altitud del *Tail-Sitter* no se ve muy afectada por la presencia de la perturbación d . En las Figs. 6.6 b) y c), se muestran las normas euclidianas de la salida $y = [\mathbf{x} \quad \mathbf{z}]^T$ y de su derivada temporal dy/dt , respectivamente, $\|y\|$ y $\|dy/dt\|$. En estas figuras, se puede notar que el filtro Beard-Jones reduce significativamente las variaciones tanto de y como de dy/dt , en presencia de una perturbación externa.

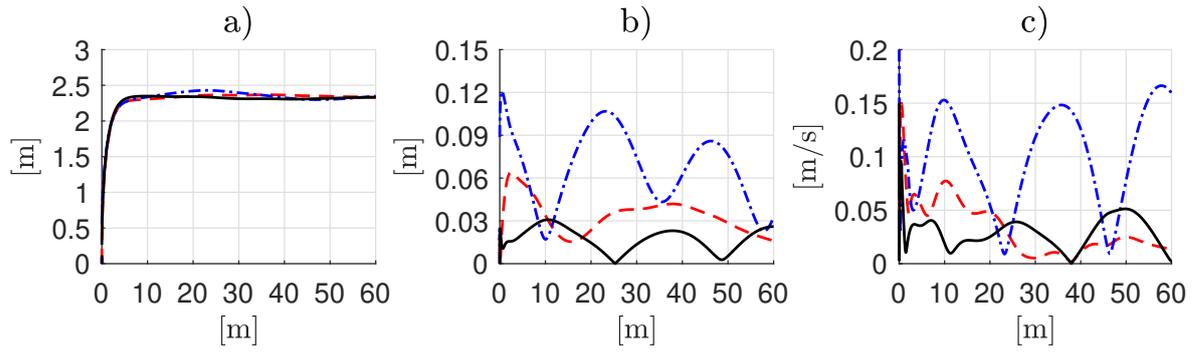


Figura 6.6: Resultados de simulación del primer escenario (líneas rojas discontinuas), del segundo escenario (líneas azules discontinuas punteadas), y del tercer escenario (líneas negras sólidas). a) $-\bar{Z}$ vs. \bar{X} , b) $\|y\|$ vs. \bar{X} , y c) $\|dy/dt\|$ vs. \bar{X} .

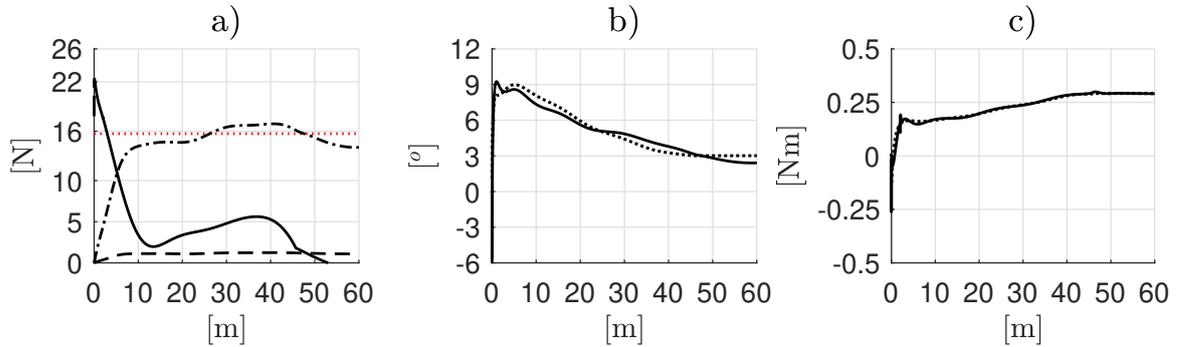


Figura 6.7: Resultados de empuje, ángulo de ataque y momento de cabeceo del tercer escenario de simulación. a) fuerzas sobre el vehículo; b) ángulo de ataque; c) momento de cabeceo de entrada.

En la Fig. 6.7, se muestran las gráficas de las fuerzas que actúan sobre el *Tail-Sitter*, la entrada del momento de cabeceo, y el ángulo de ataque, correspondientes únicamente al tercer escenario de simulación.

En la Fig. 6.7 a), se observa que, a pesar de la adición de la fuerza de perturbación, d , la fuerza total de empuje se mantiene por debajo de los 25 [N], que es aproximadamente 1.6 veces el peso *Tail-Sitter* (cf. el límite de empuje en el cuadro (6.1)). En la Fig. 6.7 b), se muestra el ángulo de ataque obtenido, el cual permanece acotado por debajo de $\alpha_s = 10$ [°], evitando el desplome del ala durante vuelo horizontal. En la Fig. 6.7 c), se muestra el momento de cabeceo de entrada resultante, que permanece casi igual a su valor nominal a pesar de la perturbación d .

6.3.2.1. Evaluación de los resultados

Para evaluar el rendimiento del seguimiento de la trayectoria durante la maniobra de transición, se proponen los siguientes índices de desempeño:

1. La integral del valor absoluto del error (IAE):

$$IAE(y) = \frac{1}{t_N} \int_0^{t_N} \|y\| dt, \quad (6.11)$$

arroja el valor medio de la norma de y a lo largo de la maniobra de transición

Tabla 6.3: Valores de los índices de desempeño de los tres escenarios de simulación

Escenario	IAE(y)	IAET(y)	IAE(dy/dt)	IAET(dy/dt)
1	0.04082	0.04788	0.04603	0.03954
2	0.08082	0.09236	0.1463	0.1577
3	0.02065	0.02385	0.04398	0.04416

2. La integral del valor absoluto del error ponderado en el tiempo (IAET):

$$IAET(y) = \frac{2}{t_N^2} \int_0^{t_N} t \|y\| dt, \quad (6.12)$$

arroja el valor medio ponderado en el tiempo de la norma de y .

El índice de desempeño IAE en (6.11) proporciona información global del desempeño del esquema de control. Por otro lado, el índice de desempeño $IAET$ en (6.12) provee información del desempeño del control hacia el final de la maniobra de transición, donde se presentan mayores velocidades de vuelo y la estabilidad es más importante para la seguridad del vehículo.

En la Tabla 6.3, se muestran los índices de desempeño (6.11) y (6.12) tanto de y como de dy/dt . Los índices de desempeño de y del primer escenario son aproximadamente dos veces mas grandes que los del del tercer escenario. Similarmente, los índices de desempeño de y del segundo escenario son dos veces mas grades que los del primer escenario y cuatro veces mas grandes que los del tercer escenario. Esto significa que el término de rechazo activo de perturbaciones basado en el filtro de Beard-Jones, \hat{u} en (5.15), introducido en el tercer escenario, mejora significativamente el desempeño del control de transición, tanto en un sentido global (IAE), como hacia el final de la maniobra ($IAET$). Además, los índices de rendimiento de dy/dt del primer y tercer escenario son casi iguales y más de tres veces menores que los del segundo escenario, lo cual implica una mejora en el seguimiento de velocidad nominal de la trayectoria de transición.

6.4. Comparación de metodologías de transición

En esta sección se compara el esquema de transición hacia adelante basado en optimización, presentado en las secciones 6.1, 6.2 y 6.3, con una metodología similar, propuesta en [16].

En [16], los autores proponen una estrategia de transición basada en optimización, con un esquema de control parcialmente en lazo cerrado. En dicho trabajo se buscan los valores óptimos del empuje nominal, \bar{F} , y del ángulo de cabeceo de referencia, $\bar{\Theta}$, que llevan a un vehículo *Tail-Sitter* controlado en orientación del *EVC* al *EVA*. El funcional de costo propuesto en [16] busca minimizar el gasto de energía de empuje y evitar valores excesivamente grandes del ángulo de cabeceo incremental, $\theta = \Theta - \bar{\Theta}$. Además, se consideran restricciones sobre las variables de vuelo, las cuales aseguran la transición entre envolventes de vuelo y evitan grandes cambios de altitud durante la maniobra de transición.

En este trabajo de tesis, se propone una estrategia de transición basada en optimización, con un esquema de control en lazo cerrado con capacidades de rechazo de perturbaciones. Se

buscan los coeficientes de Fourier óptimos de velocidad, \bar{V} , y ángulo de dirección, $\bar{\Gamma}$, que llevan a un vehículo *Tail-Sitter* del *EVC* al *EVA*, y hasta su modo de vuelo de crucero. El funcional de costo considerado busca minimizar el gasto de energía de empuje y de cabeceo. Se consideran restricciones sobre las variables de vuelo y condiciones de frontera. Se evitan grandes cambios de altitud durante la transición, y se evita la región de desplome del ala, con el objetivo de arrojar una trayectoria predecible y segura.

6.4.1. Sintonización de los parámetros de comparación

Para aplicar la técnica presentada en [16] en el vehículo *Tail-Sitter* descrito en el cuadro (6.1), se necesitan tres curvas para los coeficientes de sustentación, arrastre y momento de cabeceo, definidas sobre el intervalo $\alpha \in (-180, 180)$ [°]. Para esto, se tomaron las curvas mostradas en la Fig. 3 de [16], pero se modificaron de tal manera que satisfacen (2.13) para $\alpha < 10$ [°]. Los valores de $\bar{\mathcal{F}}$ y $\bar{\Theta}$, hallados por la metodología de [16], se prealimentan a la aeronave, cuya dinámica del ángulo de cabeceo se supone que está controlada en orientación por su piloto automático.

Entonces, para aplicar la metodología de [16] al *Tail-Sitter* con los parámetros del cuadro (6.1), se tomaron $\tau = 0.1$, $t_0 = 0$ [s], $d\mathbf{X}(t_0)/dt = d\mathbf{Z}(t_0)/dt = 0$ [m/s], y $\Theta(t_0) = 90$ [°], los cuales son los mismos valores de [16]. Por otro lado, para obtener resultados comparables con los presentados en la sección (6.1), se tomó $\eta = 0.6$, un tiempo de transición de $t_N = 5$ [s], un límite superior igual a cero en la tasa de altitud $d\mathbf{Z}/dt \in [-1, 0]$ [m/s], un ángulo de cabeceo final máximo cercano al ángulo de ataque de vuelo de crucero $\Theta(t_f) \leq 5$ [°], y una velocidad final igual a la velocidad de crucero $d\mathbf{X}(t_f)/dt \geq 15$ [m/s]; también límites de velocidad horizontal de $d\mathbf{X}/dt \in [0, 20]$ [m/s], un ángulo de cabeceo $\Theta \in [0, 90]$ [°], un ángulo de cabeceo nominal $\bar{\Theta} \in [0, 90]$ [°], y un empuje nominal $\bar{\mathcal{F}} \in [0, 20]$ [N], donde $\bar{\mathcal{F}}(t_0) = mg$. Además, para emular el control de orientación del piloto automático, se toma³ $\tau_q = 400(\bar{\Theta} - \Theta) - 50d\Theta/dt$.

El problema de planificación de [16] se resuelve mediante la herramienta *fmincon* de *MATLAB*[®], con una malla temporal de $N = 50$ divisiones. El espacio de búsqueda de soluciones está definido por los incrementos de las variables $\bar{\mathcal{F}}$ y $\bar{\Theta}$ entre cada instante de tiempo de la malla temporal. Se definieron límites⁴ de 1 [N] y 10 [°] en los incrementos de $\bar{\mathcal{F}}$ y $\bar{\Theta}$, respectivamente, para suavizar las gráficas de las soluciones obtenidas.

6.4.2. Comparación de los resultados

En esta subsección se compara la trayectoria de transición hacia adelante obtenida a través de la metodología de [16], con la obtenida en la sección 6.1 de este trabajo de tesis.

La comparación se realiza con el primer escenario de simulación, presentado en la subsección 6.3.1, con el *Tail-Sitter* del cuadro (6.1) bajo ambas metodologías de transición.

6.4.2.1. Resultados de planificación

En la Fig. 6.8, se contrasta la solución obtenida del problema de transición de [16] (en líneas azules discontinuas), contra la solución de este trabajo de tesis (en líneas negras sólidas); el peso

³Con esta ley de control, se asigna un polo en -10 y otro en -40 en la dinámica de cabeceo, de manera que (3.2) puede considerarse como $d\Theta/dt = (\bar{\Theta} - \Theta)/\tau$, $\tau = 0.1$

⁴Estos límites no son mencionados en [16], pero introducirlos fue útil para obtener soluciones suficientemente buenas para ser comparadas con las obtenidas en este trabajo de tesis.

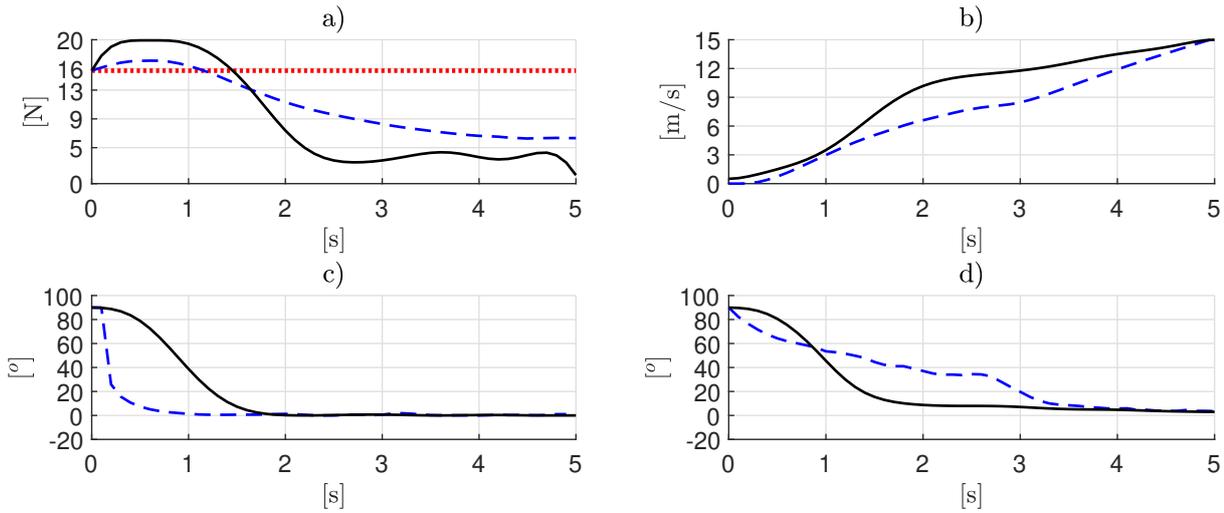


Figura 6.8: Comparación de trayectorias de transición vs. el tiempo de transición, $t \in [0, 5]$. a) $\overline{\mathcal{F}}$. b) \overline{V} . c) \overline{T} . d), $\overline{\Theta}$.

del vehículo se muestra con una línea roja punteada. En la Fig. 6.8 a), se muestra el empuje, $\overline{\mathcal{F}}$; en la Fig. 6.8 b), se muestra la velocidad estimada, \overline{V} ; en la Fig.), se muestra el ángulo de trayectoria de vuelo, \overline{T} ; y en la Fig. 6.8 d), se muestra el ángulo de cabeceo, $\overline{\Theta}$.

En la Fig. 6.8 a), se observa que la metodología de [16] proporciona el menor empuje máximo. Sin embargo, también arroja los mayores valores de empuje finales. Debido a esto último, se tiene que la energía de empuje, $E = \int_0^{t_f} \overline{\mathcal{F}}^2 dt$, para [16] es de $E = 678,26 [N^2s]$, y para la solución de esta tesis es de $E = 656,46 [N^2s]$. La razón por la que la metodología de [16] proporciona valores de empuje mayores hacia el final de la maniobra es porque en esta tesis se restringe $d\overline{V}/dt(t_f) = 0$, con el propósito terminar la maniobra de transición en el modo de vuelo de crucero. De la Fig. 6.8 b), se puede notar que la velocidad de vuelo de la metodología de esta tesis converge a 15 [m/s], más rápido que con la metodología de [16]. Esto se debe a que los valores de $\overline{\alpha}$ están limitados, por lo que la sustentación del ala sólo puede aumentarse incrementando la velocidad \overline{V} . En 6.8 c), se puede notar que el ángulo de trayectoria de vuelo de esta tesis converge a cero más lentamente que con la metodología de [16]. Esto se debe de nuevo a las restricciones sobre $\overline{\alpha}$, que no permiten grandes diferencias entre $\overline{\Theta}$ y \overline{T} (cf. (2.10)); y por la restricción sobre \mathcal{T}_q , que no permite grandes valores de $d\overline{\Theta}/dt$.

6.4.2.2. Resultados de simulación

En la Fig. 6.9, se muestran los resultados de la simulación numérica en *MATLAB*[®] *Simulink*[®] de la metodología de [16] (en líneas azules discontinuas), en contraste con los resultados del primer escenario de simulación de la subsección 6.3.1 (en líneas negras sólidas). En la Fig. 6.9 a), se muestra la posición del *Tail-Sitter* simulado, en el plano *OXZ*; en la Fig. 6.9 b), se muestra la gráfica de sustentación; en la Fig. 6.9 c), se muestra el ángulo de ataque obtenido; y en la Fig. 6.9 d), se muestra el momento de cabeceo de entrada.

En la Figura 6.9 a), se observa que la solución propuesta en [16] arroja una trayectoria de transición más corta, con un cambio de altitud menor que la solución obtenida en esta tesis. Sin embargo, según las Figs. 6.9 b) y c), con el método de esta tesis el *Tail-Sitter* entra en el modo

de vuelo horizontal cerca de $t = 2$ [s]. Es decir, a partir de $t = 2$ [s], el peso del *Tail-Sitter* está siendo soportado por la sustentación del ala, a una velocidad de vuelo superior a 10 [m/s]; mientras que con la metodología de [16], esto ocurre a $t = 3, 5$ [s], como se señala en la Fig. 6.9 a). Además, el enfoque de esta tesis lleva al *Tail-Sitter* simulado al modo de vuelo de crucero, dado que se satisfacen las condiciones de frontera (4.6). Además, en la Fig. 6.9 d), se muestra que el ángulo de ataque estimado de [16] supera los 40 [°], mientras que el de esta tesis se mantiene por debajo de los 10 [°], dentro de la región lineal de la sustentación del ala; la cual en la práctica presenta un comportamiento más predecible que la región no lineal. Finalmente, en la Fig. 6.9 e), se muestra que el momento de cabeceo de entrada del enfoque de [16] supera los 0.4 [Nm], mientras que la solución de esta tesis se mantiene por debajo de los 0.3 [Nm], y con menos oscilaciones (*cf.* restricciones (4.5)).

6.4.3. Observaciones

Los experimentos numéricos de solución de los problemas de planificación arrojaron que el tiempo de resolución de la metodología propuesta en [16] es mayor que el de la metodología de esta tesis. Esto fue debido a que la técnica de [16] utiliza un espacio de búsqueda de soluciones de dimensión $\dim = 100$, debido a la malla temporal de $N = 50$; mientras que la técnica de esta tesis tiene un espacio de búsqueda de dimensión $\dim = 22$, y arroja una trayectoria suave parametrizada en el tiempo. Además, la técnica de [16] fue difícil de sintonizar para encontrar una solución que satisfaga todas las restricciones; es decir, utilizando esta técnica, sólo se logró obtener una solución satisfactoria tras un largo proceso de ajuste de los valores de las restricciones, pues las soluciones resultaron muy sensibles a estos; y fue necesario agregar límites en los incrementos de $\bar{\mathcal{F}}$ y $\bar{\Theta}$, que no son mencionados en [16].

En resumen, la metodología de esta tesis mostró ser más fácil de sintonizar, al no ser tan sensible a los valores de las restricciones; no requiere de un ajuste de curvas posterior, al arrojar trayectorias parametrizadas en el tiempo; y es más eficiente que la técnica de [16], al tener un espacio de búsqueda de menor dimensión. Además, dado que genera ángulos de ataque más pequeños, mantiene al *Tail-Sitter* dentro de una región más predecible por el modelo, y le proporciona una mayor seguridad al vehículo.

6.5. Recapitulación

En este capítulo se ejemplificó la forma de aplicar el esquema de transición hacia adelante propuesto en los capítulos 4 y 5, sobre un vehículo *Tail-Sitter* simulado, con parámetros dados en el cuadro (6.1).

Se presentaron tres escenarios de simulación. En el primero de ellos se supone que la perturbación en la dinámica del error de seguimiento consiste únicamente de incertidumbre de modelado. Aquí, la ley de control es una retroalimentación de estado para todos los puntos de operación del vehículo *Tail-Sitter*, (5.5). En el segundo escenario se mantiene la retroalimentación de estado, pero se agrega una fuerza de perturbación periódica, (6.10), en la dinámica traslacional (3.1). En el tercer escenario se agrega el término de control de rechazo activo de perturbaciones, (5.15), para compensar la incertidumbre de modelado y las perturbaciones externas. Los resultados de simulación muestran que este último término mejora el seguimiento de trayectoria de transición en presencia de perturbaciones (Tabla 6.3); manteniendo el empuje,

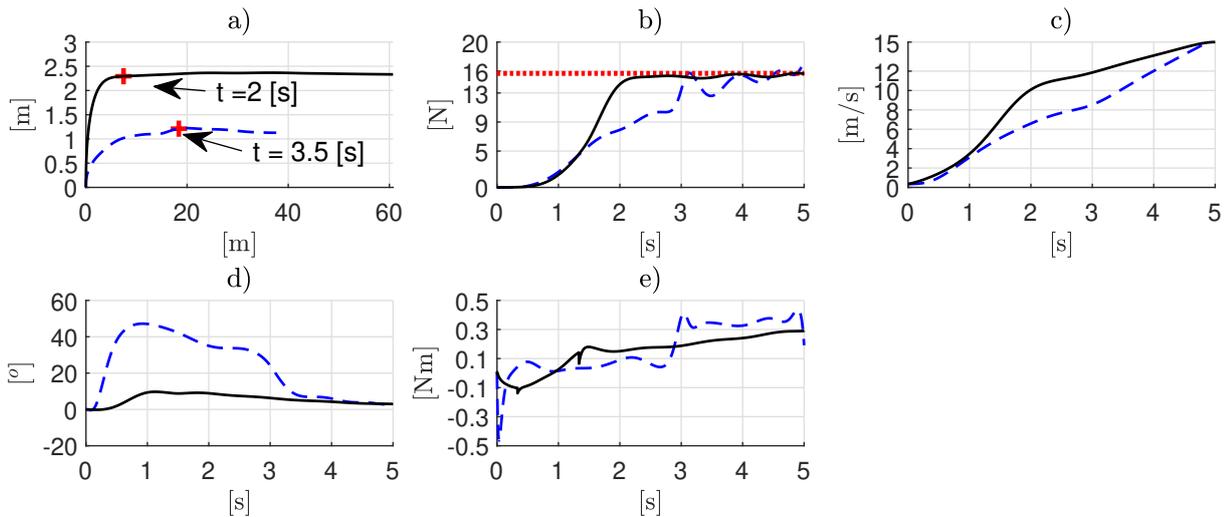


Figura 6.9: Comparación de variables de vuelo de simulación. a) \bar{X} vs. $-\bar{Z}$. b) L vs. t . c) V vs. t . d) α vs. t . e) \mathcal{T}_q vs. t .

el ángulo de ataque, y el momento de cabeceo de entrada dentro de sus límites (Fig. 6.7).

Se comparó el esquema de transición presentado en los capítulos 4 y 5 con una metodología similar, presentada en [16]. Se mostró que el enfoque de esta tesis lleva al *Tail-Sitter* simulado al *EVA* en menor tiempo, de una manera mas suave, con un gasto de energía de empuje similar; mientras mantiene, en todo momento, el coeficiente de sustentación del ala dentro de su región lineal. Más aún, la metodología de planificación de esta tesis es más fácil de sintonizar, y con un espacio de búsqueda reducido; y la trayectoria de transición resultante es suave, dada en función del tiempo, y lleva al *Tail-Sitter* hasta el modo su vuelo de crucero.

Comentarios finales

En este trabajo de tesis, se abordó el problema de la transición hacia adelante para un cuadrirrotor con ala, tipo *Tail-Sitter*, de empuje diferencial. Dicho problema se descompuso en dos subproblemas, a saber: un problema de planificación de trayectoria, y un problema de control de seguimiento de trayectorias sujeto a perturbaciones. En la sección 7.1 se resume la metodología de resolución de estos dos subproblemas, así como la metodología de validación de la solución propuesta, y se presentan las conclusiones generales. En la sección 7.2 se discute el trabajo futuro. Y finalmente, en la sección 7.3 se muestran los productos obtenidos a partir de este trabajo.

7.1. Conclusiones generales

En el capítulo 2 se presentó la descripción del vehículo tipo de *Tail-Sitter* considerado en este trabajo de tesis. Este es un cuadrirrotor con ala sin superficies de control, con capacidades de vuelo de crucero. Se introdujeron las variables de vuelo, y aquellos valores de estas que definen los estados de vuelo cuadrirrotor, avión, y de transición.

En el capítulo 3 se derivó el modelo dinámico de las variables de vuelo del *Tail-Sitter* considerado, alrededor de la trayectoria de transición. Dicha trayectoria se toma en términos de los valores deseados de magnitud de velocidad, \bar{V} , y del ángulo de dirección de vuelo, \bar{T} . La dinámica del error de seguimiento se expresa como una ecuación de estado invariante a pedazos, la cual toma en cuenta la incertidumbre de modelado y las posibles perturbaciones externas.

En el capítulo 4 se abordó el problema de planificación de trayectoria de transición. Este es formulado matemáticamente como un problema de optimización no lineal con restricciones. La metodología de solución propuesta aproxima la solución óptima utilizando series de Fourier truncadas; lo que permite reducir la dimensión del espacio de búsqueda de soluciones, y arroja una trayectoria de transición suave, parametrizada en el tiempo.

En el capítulo 5 se propuso una ley de control de transición; la cual consiste en una retroalimentación de estado lineal, que estabiliza localmente la dinámica del error de seguimiento de trayectoria, en ausencia de perturbaciones; y un término de rechazo activo de perturbaciones, que atenúa la incertidumbre de modelado y las posibles perturbaciones externas de ancho de banda finito.

En el capítulo 6 se ejemplificó la forma de aplicar el esquema de transición hacia adelante propuesto en los capítulos 4 y 5. Este esquema se puso a prueba en tres escenarios de simulación, donde se consideró una perturbación externa de ancho de banda finito. Se mostraron las ventajas

del enfoque de esta tesis, comparando este esquema con uno similar, publicado recientemente en [16].

El método de planificación de trayectoria de transición presentado en este trabajo de tesis arroja una trayectoria suave, parametrizada en el tiempo; que lleva rápidamente al vehículo *Tail-Sitter* considerado de su modo de vuelo cuadrirrotor a su modo de vuelo avión, y hasta su modo de vuelo de crucero. Además, evita la región de desplome del ala, la cual es impredecible por su naturaleza no lineal y fuerte sensibilidad a las condiciones ambientales. La aproximación por series de Fourier truncadas de este enfoque permite reducir la dimensión del espacio de búsqueda de soluciones, y reducir el tiempo de solución. Y mostró ser menos sensible a los valores numéricos de las restricciones que otra metodología de optimización similar.

La ley de control propuesta, para seguimiento de trayectoria de transición, tiene capacidades de rechazo de perturbaciones de ancho de banda finito; y puede compensar incertidumbre de modelado y perturbaciones externas. Su diseño depende del modelo longitudinal del vehículo *Tail-Sitter* de empuje diferencial, y de la trayectoria de transición. Los resultados de simulación muestran un seguimiento eficiente de la trayectoria de transición en presencia de perturbaciones; manteniendo el empuje, el ángulo de ataque, y el momento de cabeceo de entrada dentro de sus límites definidos.

7.2. Trabajo futuro

Como trabajo futuro, se realizarán los experimentos en tiempo real. Y se desea extender esta técnica a otros modos de vuelo, como la transición del modo de vuelo avión al modo de vuelo cuadrirrotor, el modo de vuelo de merodeo (*loiter* en inglés), o el modo de vuelo de crucero con evasión de obstáculos. Esto se puede lograr estableciendo nuevas restricciones y términos de minimización, particulares para cada modo de vuelo.

La dimensión reducida del espacio de búsqueda de soluciones, obtenida con el enfoque de series de Fourier truncadas, podría ser explotada en un esquema de control predictivo por modelo; para generar secciones de trayectoria actualizadas en línea.

7.3. Publicaciones

7.3.1. Revista

M Bonilla, N A Aguillón, M A Ortiz Castillo, Jean Jacques Loiseau, M Malabre, V Azhmyakov, S Salazar, *Stabilization of a class of switched dynamic systems: the Riccati-equation-based Approach*, IMA Journal of Mathematical Control and Information, 2021;, dnab022, <https://doi.org/10.1093/imamci/dnab022>

N A Aguillón, M Bonilla, S Salazar, D Bonilla, M Saska, *On the Forward Transition Trajectory Planning of Tail-Sitters*, Autonomous Robots (sometido).

7.3.2. Congreso internacional

N.A. Aguillón, M. Bonilla, S. Salazar, M. Malabre, V. Azhmyakov. *On the Take-Off of a Single-Wing Quadrotor*. Proceedings of 2021 European Control Conference (ECC), pp. 2020-

2025, Rotterdam, Netherlands, June 29 - July 2, 2021.

Apéndices

A. Coeficientes de la dinámica incremental

Aquí mostramos la forma cerrada de los coeficientes de la dinámica incremental.

$$\begin{aligned}
\dot{a}_{\mathbf{xx}} &= -(\dot{D}_v \cos \bar{\Gamma} + (\sin \bar{\Gamma}/\bar{V})\dot{D}_\alpha) \cos \bar{\Gamma}/m \\
&\quad - (\dot{L}_v \cos \bar{\Gamma} + (\sin \bar{\Gamma}/\bar{V})\dot{L}_\alpha) \sin \bar{\Gamma}/m (\sin \bar{\Gamma}/\bar{V})(\bar{L} \cos \bar{\Gamma} - \bar{D} \sin \bar{\Gamma})/m, \\
\dot{a}_{\mathbf{xz}} &= -(-\dot{D}_v \sin \bar{\Gamma} + (\cos \bar{\Gamma}/\bar{V})\dot{D}_\alpha) \cos \bar{\Gamma}/m \\
&\quad - (-\dot{L}_v \sin \bar{\Gamma} + (\cos \bar{\Gamma}/\bar{V})\dot{L}_\alpha) \sin \bar{\Gamma}/m + (\cos \bar{\Gamma}/\bar{V})(\bar{L} \cos \bar{\Gamma} - \bar{D} \sin \bar{\Gamma})/m, \\
\dot{a}_{\mathbf{zx}} &= (\dot{D}_v \cos \bar{\Gamma} + (\sin \bar{\Gamma}/\bar{V})\dot{D}_\alpha) \sin \bar{\Gamma}/m \\
&\quad - (\dot{L}_v \cos \bar{\Gamma} + (\sin \bar{\Gamma}/\bar{V})\dot{L}_\alpha) \cos \bar{\Gamma}/m - (\sin \bar{\Gamma}/\bar{V})(\bar{L} \sin \bar{\Gamma} + \bar{D} \cos \bar{\Gamma})/m, \\
\dot{a}_{\mathbf{zz}} &= (-\dot{D}_v \sin \bar{\Gamma} + (\cos \bar{\Gamma}/\bar{V})\dot{D}_\alpha) \sin \bar{\Gamma}/m \\
&\quad - (-\dot{L}_v \sin \bar{\Gamma} + (\cos \bar{\Gamma}/\bar{V})\dot{L}_\alpha) \cos \bar{\Gamma}/m - (\cos \bar{\Gamma}/\bar{V})(\bar{L} \sin \bar{\Gamma} + \bar{D} \cos \bar{\Gamma})/m, \\
\dot{a}_{\theta\mathbf{x}} &= (1/I_y) \left((\dot{M}_\alpha - \bar{c}(h - h_0)\dot{L}_\alpha) \sin \bar{\Gamma} + (\dot{M}_v - \bar{c}(h - h_0)\dot{L}_v) \cos \bar{\Gamma} \right), \\
\dot{a}_{\theta\mathbf{z}} &= (1/I_y) \left((\dot{M}_\alpha - \bar{c}(h - h_0)\dot{L}_\alpha) \cos \bar{\Gamma} - (\dot{M}_v - \bar{c}(h - h_0)\dot{L}_v) \sin \bar{\Gamma} \right), \\
\dot{a}_{\theta\theta} &= (1/I_y) \left(\dot{M}_\alpha - \bar{c}(h - h_0)\dot{L}_\alpha \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{a}_{\mathbf{x}f} &= \cos \bar{\Theta}/m, \quad \dot{a}_{\mathbf{z}f} = -\sin \bar{\Theta}/m, \\
\dot{a}_{\mathbf{x}\theta} &= -(\bar{\mathcal{F}} \sin \bar{\Theta} + \dot{D}_\alpha \cos \bar{\Gamma} + \dot{L}_\alpha \sin \bar{\Gamma})/m, \\
\dot{a}_{\mathbf{z}\theta} &= -(\bar{\mathcal{F}} \cos \bar{\Theta} - \dot{D}_\alpha \sin \bar{\Gamma} + \dot{L}_\alpha \cos \bar{\Gamma})/m,
\end{aligned}$$

B. Coeficientes de la dinámica incremental bajo cambio de variable

A continuación mostramos la forma cerrada de los coeficientes de la dinámica incremental bajo el cambio de variable (3.35). Y en la Fig. 6.4, mostramos su gráfica vs. la posición horizontal nominal \bar{X} .

$$\begin{aligned}
\dot{a}_{21} &= \frac{d\bar{\Theta}^2}{dt} - \frac{d\bar{\Theta}}{dt}(\bar{L} - \dot{D}_\alpha + \dot{L}_v \bar{V} - \dot{D}_\alpha \cos 2\bar{\alpha} + \bar{L} \cos 2\bar{\alpha} + \bar{D} \sin 2\bar{\alpha} \\
&\quad + \dot{L}_\alpha \sin 2\bar{\alpha} - \dot{L}_v \bar{V} \cos 2\bar{\alpha} - \dot{D}_v \bar{V} \sin 2\bar{\alpha})/(2m\bar{V}) \\
\dot{a}_{22} &= -(\bar{D} + \dot{L}_\alpha - \bar{D} \cos 2\bar{\alpha} - \dot{L}_\alpha \cos 2\bar{\alpha} - \dot{D}_\alpha \sin 2\bar{\alpha} \\
&\quad + \bar{L} \sin 2\bar{\alpha} + \dot{D}_v \bar{V} - \dot{L}_v \bar{V} \sin 2\bar{\alpha} + \dot{D}_v \bar{V} \cos 2\bar{\alpha})/(2m\bar{V}) \\
\dot{a}_{23} &= -\frac{d^2\bar{\Theta}}{dt^2} - \frac{d\bar{\Theta}}{dt}(\bar{D} + \dot{L}_\alpha - \bar{D} \cos 2\bar{\alpha} - \dot{L}_\alpha \cos 2\bar{\alpha} - \dot{D}_\alpha \sin 2\bar{\alpha} \\
&\quad + \bar{L} \sin 2\bar{\alpha} + \dot{D}_v \bar{V} - \dot{L}_v \bar{V} \sin 2\bar{\alpha} + \dot{D}_v \bar{V} \cos 2\bar{\alpha})/(2m\bar{V}) \\
\dot{a}_{24} &= -2\frac{d\bar{\Theta}}{dt} + (\bar{L} - \dot{D}_\alpha + \dot{L}_v \bar{V} - \dot{D}_\alpha \cos 2\bar{\alpha} + \bar{L} \cos 2\bar{\alpha} + \bar{D} \sin 2\bar{\alpha} \\
&\quad + \dot{L}_\alpha \sin 2\bar{\alpha} - \dot{L}_v \bar{V} \cos 2\bar{\alpha} - \dot{D}_v \bar{V} \sin 2\bar{\alpha})/(2m\bar{V}) \\
\dot{a}_{25} &= (\dot{L}_\alpha \sin \bar{\alpha} - \dot{D}_\alpha \cos \bar{\alpha})/m, \\
\dot{a}_{41} &= \frac{d^2\bar{\Theta}}{dt^2} + \frac{d\bar{\Theta}}{dt}(\bar{D} + \dot{L}_\alpha + \bar{D} \cos 2\bar{\alpha} + \dot{L}_\alpha \cos 2\bar{\alpha} + \dot{D}_\alpha \sin 2\bar{\alpha} \\
&\quad - \bar{L} \sin 2\bar{\alpha} + \dot{D}_v \bar{V} + \dot{L}_v \bar{V} \sin 2\bar{\alpha} - \dot{D}_v \bar{V} \cos 2\bar{\alpha})/(2m\bar{V}) \\
\dot{a}_{42} &= 2\frac{d\bar{\Theta}}{dt} - (\bar{L} - \dot{D}_\alpha + \dot{L}_v \bar{V} + \dot{D}_\alpha \cos 2\bar{\alpha} - \bar{L} \cos 2\bar{\alpha} - \bar{D} \sin 2\bar{\alpha} \\
&\quad - \dot{L}_\alpha \sin 2\bar{\alpha} + \dot{L}_v \bar{V} \cos 2\bar{\alpha} + \dot{D}_v \bar{V} \sin 2\bar{\alpha})/(2m\bar{V}) + 2\frac{d\bar{\Theta}}{dt} \\
\dot{a}_{43} &= \frac{d\bar{\Theta}^2}{dt} - \frac{d\bar{\Theta}}{dt}(\bar{L} - \dot{D}_\alpha + \dot{L}_v \bar{V} + \dot{D}_\alpha \cos 2\bar{\alpha} - \bar{L} \cos 2\bar{\alpha} - \bar{D} \sin 2\bar{\alpha} \\
&\quad - \dot{L}_\alpha \sin 2\bar{\alpha} + \dot{L}_v \bar{V} \cos 2\bar{\alpha} + \dot{D}_v \bar{V} \sin 2\bar{\alpha})/(2m\bar{V}) + 2\frac{d\bar{\Theta}}{dt} \\
\dot{a}_{44} &= -(\bar{D} + \dot{L}_\alpha + \bar{D} \cos 2\bar{\alpha} + \dot{L}_\alpha \cos 2\bar{\alpha} + \dot{D}_\alpha \sin 2\bar{\alpha} \\
&\quad - \bar{L} \sin 2\bar{\alpha} + \dot{D}_v \bar{V} + \dot{L}_v \bar{V} \sin 2\bar{\alpha} - \dot{D}_v \bar{V} \cos 2\bar{\alpha})/(2m\bar{V}) \\
\dot{a}_{45} &= -(\bar{\mathcal{F}} + \dot{L}_\alpha \cos \bar{\alpha} + \dot{D}_\alpha \sin \bar{\alpha})/m.
\end{aligned} \tag{B.1}$$

$$\begin{aligned}
\dot{a}_{61} &= \frac{1}{I_y} \frac{d\bar{\Theta}}{dt} \left(\left(\dot{M}_\alpha - \bar{c}(h-h_0)\dot{L}_\alpha \right) \cos \bar{\alpha} + \left(\dot{M}_v - \bar{c}(h-h_0)\dot{L}_\alpha \right) \sin \bar{\alpha} \right), \\
\dot{a}_{62} &= -\frac{1}{I_y} \left(\left(\dot{M}_\alpha - \bar{c}(h-h_0)\dot{L}_\alpha \right) \sin \bar{\alpha} - \left(\dot{M}_v - \bar{c}(h-h_0)\dot{L}_v \right) \cos \bar{\alpha} \right), \\
\dot{a}_{63} &= -\frac{1}{I_y} \frac{d\bar{\Theta}}{dt} \left(\left(\dot{M}_\alpha - \bar{c}(h-h_0)\dot{L}_\alpha \right) \sin \bar{\alpha} - \left(\dot{M}_v - \bar{c}(h-h_0)\dot{L}_v \right) \cos \bar{\alpha} \right), \\
\dot{a}_{64} &= \frac{1}{I_y} \left(\left(\dot{M}_\alpha - \bar{c}(h-h_0)\dot{L}_\alpha \right) \cos \bar{\alpha} + \left(\dot{M}_v - \bar{c}(h-h_0)\dot{L}_v \right) \sin \bar{\alpha} \right), \\
\dot{a}_{65} = \dot{a}_{\theta\theta} &= \frac{1}{I_y} \left(\dot{M}_\alpha - \bar{c}(h-h_0)\dot{L}_\alpha \right)
\end{aligned}$$

C. Matrices de inyección de salida

En (C.1) se muestran los valores de la matriz T_n en los tres envolventes de vuelo, donde $\det(T_q) = -0.0102$, $\det(T_{tr}) = -0.0037$, $\det(T_a) = -0.00029049$. En (C.2) se muestran los valores de \bar{K}_n , en los tres envolventes de vuelo.

$$\begin{aligned}
T_q &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -8.9 & 0 & 0 & -1.3 & 33.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & -27.2 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1 & 2.7 & -58.5 \\ 0 & -5.4 & -0.1 & 2.7 & -58.5 & 1201.8 \end{bmatrix}, \\
T_{tr} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -8.3853 & 0 & 0.0289 & -0.7861 & 23.0839 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 \\ 0 & -3.4511 & 0 & 0 & 1.0000 & -28.3648 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0607 & 1.6493 & -35.4885 \\ 0 & -5.4268 & -0.0607 & 1.6493 & -35.4885 & 728.8628 \end{bmatrix}, \\
T_a &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -7.1450 & 0 & 0.0006 & -0.0180 & 1.1243 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1.0713 & 0 & 0 & 1 & -34.2810 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0170 & 0.4982 & -10.9241 \\ 0 & -0.6590 & -0.0170 & 0.4982 & -10.9241 & 222.2259 \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{C.1}$$

$$\begin{aligned}
\bar{K}_q &= \begin{bmatrix} 21.1235 & -727.8508 \\ 8.8849 & -33.3647 \\ 266.9505 & 238.2396 \\ 95.9599 & 306.7817 \\ 5.9780 & 154.1709 \\ 0.0210 & 27.2000 \end{bmatrix}, \quad \bar{K}_{tr} = \begin{bmatrix} 4.5575 & -451.5349 \\ 8.3853 & -23.0839 \\ 344.3339 & 130.5479 \\ 474.3117 & 397.0407 \\ 95.0113 & 183.0280 \\ 3.4511 & 28.3648 \end{bmatrix}, \\
\bar{K}_a &= \begin{bmatrix} 6.2 & -1.5 \\ 7.1 & -1.1 \\ 133.4 & 1215.1 \\ 188.9 & 1622.2 \\ 31.3 & 361.1 \\ 1.1 & 34.3 \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{C.2}$$

D. Enlace a los programas de simulación

<https://www.dropbox.com/sh/zd0jrlka730idrZ/AAAZ0JnF6iiqf40wYwrv3y7xa?dl=0>

Bibliografía

- [1] I.H. Abbott and A.E. Von Doenhoff. *Theory of Wing Sections. Including a Summary of Airfoil data*. Dover, New York, USA, 1 edition, 1959.
- [2] N A Aguillón, M Bonilla, S Salazar, Michel Malabre, and V Azhmyakov. On the Take-Off of a Single-Wing Quadrotor. In *European Control Conference ECC21*, Rotterdam, Netherlands, June 2021.
- [3] R.V. Beard. *Failure Accomodation in Linear Systems Through Self-Reorganization*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1971.
- [4] L A Blas, M Bonilla, S Salazar, Michel Malabre, and V Azhmyakov. Robust tracking scheme for an experimental quadrotor. In *European Control Conference ECC21*, Rotterdam, Netherlands, June 2021.
- [5] M Bonilla, N A Aguillón, M A Ortiz Castillo, Jean Jacques Loiseau, M Malabre, V Azhmyakov, and S Salazar. Stabilization of a class of switched dynamic systems: the Riccati-equation-based Approach. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 08 2021. dnab022.
- [6] M Bonilla, N A Aguillón, M A Ortiz Castillo, Jean Jacques Loiseau, M Malabre, V Azhmyakov, and S Salazar. Stabilization of a class of switched dynamic systems: the Riccati-equation-based Approach. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 08 2021.
- [7] M. Bonilla, L.A. Blas, V. Azhmyakov, M. Malabre, and S. Salazar. Robust structural feedback linearization based on the nonlinearities rejection. *Journal of the Franklin Institute*, 357(4):2232 – 2262, 2020.
- [8] Daniel Bonilla Licea, Moisés Bonilla, Mounir Ghogho, Samson Lasaulce, and Vineeth S. Varma. Communication-aware energy efficient trajectory planning with limited channel knowledge. *IEEE Transactions on Robotics*, 36(2):431–442, 2020.
- [9] Daniel Bonilla Licea, Moisés Bonilla, Mounir Ghogho, and Michel Malabre. Uav trajectory planning for delay tolerant communications. In *2019 IEEE 58th Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 4166–4171, 2019.
- [10] M.V. Cook. *Flight Dynamics Principles. A Linear Systems Approach to Aircraft Stability and Control*. Elsevier, USA, 3 edition, 2013.

- [11] Alejandro Flores, A Montes de Oca, and Gerardo Flores. A simple controller for the transition maneuver of a tail-sitter drone. In *2018 IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 4277–4281. IEEE, 2018.
- [12] L.R. García, A.E. Dzul, R. Lozano, and C. Pégard. *Quad Rotorcraft Control. Vision-Based Hovering and Navigation*. Springer-Verlag, London, 1 edition, 2013.
- [13] Bao-Zhu Guo and Zhi-Liang Zhao. *Active disturbance rejection control for nonlinear systems: An introduction*. John Wiley & Sons, 2016.
- [14] G.H. Hardy. *A Course of Pure Mathematics*. Cambridge University Press, 10 edition, 1967.
- [15] Thomas Kailath. *Linear systems*, volume 156. Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1980.
- [16] Boyang Li, Jingxuan Sun, Weifeng Zhou, Chih-Yung Wen, Kin Huat Low, and Chih-Keng Chen. Transition optimization for a vtol tail-sitter uav. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 25(5):2534–2545, 2020.
- [17] Zhaoying Li, Lixin Zhang, Hao Liu, Zongyu Zuo, and Cunjia Liu. Nonlinear robust control of tail-sitter aircrafts in flight mode transitions. *Aerospace Science and Technology*, 81:348–361, 2018.
- [18] Daniel Liberzon. *Switching in systems and control*. Birkhäuser Boston, 2003.
- [19] Daniel Liberzon. *Calculus of variations and optimal control*. Princeton University Press, 2012.
- [20] Roberto Naldi and Lorenzo Marconi. Optimal transition maneuvers for a class of v/stol aircraft. *Automatica*, 47(5):870 – 879, 2011.
- [21] K.S. Narendra and J. Balakrishnan. A common lyapunov function for stable lti systems with commuting a-matrices. *journal of aircraft*, 39:2469–2471, 1994.
- [22] Atsushi Oosedo, Satoko Abiko, Atsushi Konno, and Masaru Uchiyama. Optimal transition from hovering to level-flight of a quadrotor tail-sitter uav. *Autonomous Robots*, 41(5):1143–1159, 2017.
- [23] Quan Quan. *Introduction to multicopter design and control*. Springer, Singapore, 2017.
- [24] Adnan S Saeed, Ahmad Bani Younes, Chenxiao Cai, and Guowei Cai. A survey of hybrid unmanned aerial vehicles. *Progress in Aerospace Sciences*, 98:91–105, 2018.
- [25] M.S. Selig, C.A. Lyon, P. Gigure, C.N. Ninham, and J.J. Guglielmo. *Summary of Low-Speed Airfoil Data*, volume 2. SoarTech Publications, Virginia, USA, 1 edition, 1996.
- [26] B. Theys, G. De Vos, and J. De Schutter. A control approach for transitioning vtol uavs with continuously varying transition angle and controlled by differential thrust. In *2016 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, pages 118–125, 2016.
- [27] D. Vorsin and S. Arogeti. Flight transition control of a multipurpose uav. In *2017 13th IEEE International Conference on Control Automation (ICCA)*, pages 507–512, 2017.

- [28] Jingyang Zhong and Wang Chen. Transition characteristics for a small tail-sitter unmanned aerial vehicle. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2021.
- [29] J. Zhou, X. Lyu, Z. Li, S. Shen, and F. Zhang. A unified control method for quadrotor tail-sitter uavs in all flight modes: Hover, transition, and level flight. In *2017 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, pages 4835–4841, 2017.
- [30] İbrahim Halil Güzelbey, Yüksel Eraslan, and Mehmet Hanifi Doğru. Numerical investigation of different airfoils at low reynolds number in terms of aerodynamic performance of sailplanes by using xflr5. *Karadeniz Fen Bilimleri Dergisi*, (1):47–65, June 2018.