



Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del Instituto Politécnico Nacional

Unidad Zacatenco
Departamento de Control Automático

Controlabilidad de la ecuación de calor

TESIS

Que presenta

EDWIN ADRIÁN MAYÉN CASTILLO

Para Obtener el Grado de

MAESTRO EN CIENCIAS

En la Especialidad de

CONTROL AUTOMÁTICO

Directores de la Tesis

Dr. Jorge Alberto León Vázquez

Dra. Liliana Peralta Hernández

Agradecimientos

Agradezco a mi asesor, el Dr. Jorge Alberto León, por guiarme en cada una de las etapas de este trabajo, pues él ha compartido su valioso conocimiento y consejos, por lo que ha sido un honor haber podido ser su alumno y trabajar a su lado.

Agradezco a mi asesora, la Dra. Liliana Peralta, pues gracias a su apoyo, competencia y educación he aprendido que la responsabilidad, disciplina y perseverancia son esenciales para alcanzar cualquier meta.

Quiero agradecer al Dr. Víctor Hernández, porque ha tenido la paciencia y el cuidado de explicarme los temas tratados en este trabajo, sus enseñanzas han sido indispensables para dar este paso en mi formación académica; en especial quiero agradecerle debido a que no tenía ninguna obligación de hacerlo.

Agradezco al Cinvestav por permitirme utilizar sus instalaciones, así como a los profesores del Departamento de Control Automático por brindarme su sabiduría en las clases impartidas.

Agradezco al CONACyT por la beca y darme la oportunidad de continuar con mis estudios de posgrado.

Doy agradecimiento a mi familia por todo el amor, cariño, confianza y apoyo que me han dado no solo en esta etapa, sino durante toda mi vida.

Agradezco a mis amigos Jorge Antonio Santos y Saúl Jordán Gómez por estar conmigo en momentos difíciles, darme sus consejos y acompañarme en esta trayectoria de mi vida.

Agradezco a mis compañeros de maestría José Arturo Clemente y Jorge Alberto Lozada por su apoyo, ya que además de brindarme su amistad, han compartido conmigo sus conocimientos y experiencia en el campo de las matemáticas.

Resumen

Un problema de control clásico se formula considerando un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en dimensión finita. Luego, decimos que el sistema es exactamente controlable en un intervalo de tiempo, si existe un control, tal que es posible alcanzar cualquier estado en un tiempo final (mayor a cero), a partir de una condición inicial dada en el tiempo cero. Esta teoría de control está bien fundamentada, sin embargo, al considerar otro tipo de sistemas, la controlabilidad exacta no siempre se logra. Por ejemplo, un sistema de ecuaciones diferenciales parciales, como la ecuación de calor, no es exactamente controlable, por lo que en esta tesis se propone reemplazar el problema de controlabilidad exacta por uno de controlabilidad a cero, es decir, a partir de un dato inicial dado para la ecuación de calor, deberemos probar la existencia de un control tal que sea posible alcanzar el estado final cero. Primero, para lograr la controlabilidad a cero de la ecuación de calor, utilizaremos herramientas matemáticas proporcionadas en la teoría de control para ecuaciones diferenciales parciales, como el método de unicidad de Hilbert propuesto en [Lio88a]. Luego, debido a que uno de los principales propósitos del presente trabajo es hacer una analogía entre la teoría de control para ecuaciones diferenciales parciales y la teoría de control clásica para ecuaciones diferenciales ordinarias, aplicaremos el método de unicidad de Hilbert a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, analizando a fondo la herramienta principal que proporciona este método, que es la desigualdad de observabilidad, con la cual es posible demostrar que para ecuaciones ordinarias, la observabilidad implica la controlabilidad exacta. Análogamente, para la ecuación de calor, la desigualdad de observabilidad permite probar que la observabilidad implica la controlabilidad a cero. Finalmente, probaremos la desigualdad de observabilidad a través de estimaciones con peso para la desigualdad de Carleman clásica (ver [Pue19, Cho16]).

Abstract

A classical control problem is formulated by considering a system of ordinary differential equations in finite dimension. Then, we say that the system is exactly controllable in a time interval, if there is a control, such that it is possible to reach any state in a final time (greater than zero), from an initial condition given at time zero. This control theory is well founded, however, when considering other types of systems, exact controllability is not always achieved. For example, a system of partial differential equations, such as the heat equation, is not exactly controllable, so in this thesis we propose to replace the exact controllability problem by one of null controllability, i.e., starting from a given initial data for the heat equation, we will have to prove the existence of a control such that it is possible to reach the zero final state. First, to achieve the null controllability of the heat equation, we will use mathematical tools provided in the control theory for partial differential equations, such as the Hilbert uniqueness method proposed in [Lio88a]. Then, since one of the main purposes of the present work is to make an analogy between the control theory for partial differential equations and the classical control theory for ordinary differential equations, we will apply Hilbert's uniqueness method to a system of ordinary differential equations, analyzing in depth the main tool provided by this method, which is the observability inequality, with which it is possible to show that for ordinary equations, observability implies exact controllability. Similarly, for the heat equation, observability implies null controllability. Finally, we will prove the observability inequality through weighted estimates for the classical Carleman inequality (see [Pue19, Cho16]).

Índice general

Índice general	5
Introducción	7
1. Preliminares	9
1.1. Introducción a los espacios de Hilbert	9
1.1.1. Nociones básicas	9
1.1.2. Espacio dual	12
1.2. Espacios de Sobolev	14
1.2.1. Espacios L^p	15
1.2.2. Derivada débil	16
1.2.3. El espacio H_0^1	20
1.2.4. El espacio H^{-1}	21
1.3. Convergencia débil	21
1.4. Existencia y unicidad de soluciones débiles para ecuaciones parabólicas	22
1.4.1. Motivación	23
1.4.2. Existencia y unicidad	25
2. Controlabilidad de sistemas lineales en dimensión finita (EDO)	27
2.1. Controlabilidad exacta y controlabilidad a cero para EDOs	28
2.2. Observabilidad para EDOs	32
2.2.1. Desigualdad de observabilidad	32
2.2.2. Relación entre observabilidad y controlabilidad exacta	37
2.3. Criterio de controlabilidad de Kalman	47
3. Controlabilidad a cero de la ecuación de calor	51
3.1. Controlabilidad de la ecuación de calor	52
3.1.1. Controlabilidad aproximada	52
3.1.2. Controlabilidad a cero	53
3.2. Observabilidad de la ecuación de calor	55
3.2.1. Desigualdad de observabilidad (EDPs)	55
3.2.2. Relación entre la observabilidad y la controlabilidad a cero	60
3.3. Desigualdad de Carleman	66
3.3.1. Funciones de peso	66

3.3.2. Relación entre la desigualdad de Carleman y la desigualdad de observabilidad	68
3.3.3. Prueba de la desigualdad de Carleman	72
Conclusiones	103
Bibliografía	105

Introducción

En la ciencia moderna se pueden encontrar diversas aplicaciones donde se requiere, en gran medida, de la búsqueda de soluciones e interpretaciones de modelos matemáticos basados en ecuaciones diferenciales parciales (EDPs). En el estudio de las EDPs, surgen problemas con condiciones de frontera que son una consecuencia casi inevitable del uso de las matemáticas para resolver problemas del mundo real. Las EDPs se clasifican según su tipo, orden y linealidad. En la actualidad, no se conoce una teoría que demuestre una solución general para todos los modelos de las EDPs, sin embargo, existe una vasta literatura (por ejemplo [Bre10, Eva10, Tro10]), enfocada a proponer distintos métodos que se utilizan para probar la existencia y unicidad de soluciones de EDPs (con condiciones de frontera) particulares, que son cruciales para distintos campos de la ciencia e ingeniería. Una de las clasificaciones más importantes de las EDPs lineales son las ecuaciones parabólicas de segundo orden, que son una generalización de la ecuación de calor. La importancia de la ecuación de calor radica en que muchas de sus variaciones se encuentran en ramas relevantes de las matemáticas y la física. Por ejemplo, en [Dav17] se aprovecha la linealidad de la ecuación de calor para resolver y proponer un control para la EDP de Black-Scholes. También está relacionada con el movimiento Browniano fraccionario (ver [MW12]).

En la literatura se proponen algunos métodos para la demostración de la existencia y unicidad de soluciones para las ecuaciones parabólicas con condiciones de frontera; por ejemplo, en [Eva10] se enfatiza la importancia de encontrar soluciones a través de herramientas matemáticas tales como desigualdades, integración por partes, fórmula de Green, convolución, estimados de energía, principio del máximo. En [Eva10, Rob01] se presenta el método de Galerkin, en donde se construye una solución aproximada que se obtiene a partir de transformar el sistema de EDPs a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs), luego se establece la existencia de la solución a través de la convergencia débil. Otro método se da a partir de la teoría de semigrupos (explicado en [Eva10, Bre10, ABHN11]), que construye una solución más regular que la proporcionada por el método de Galerkin, sin embargo, esta técnica requiere que algunos de los términos de la ecuación parabólica sean independientes del tiempo (a diferencia del método de Galerkin que trabaja sin esta restricción). Por otro lado, en textos como [Man85, Roa82], la fórmula de Green se utiliza como una función auxiliar para la construcción de una solución de la ecuación de calor.

La demostración de la existencia y unicidad de las ecuaciones parabólicas permite estudiar la controlabilidad de la ecuación de calor. Este tema ha sido ampliamente investigado en los últimos años, dando como resultado una gran variedad de artículos sobre el tema donde se analizan diversas variantes de la ecuación de calor (por ejemplo [Zua97, FCZ00, LW97, Pue19]).

En la teoría de control clásica, un problema de controlabilidad exacta consiste probar la existencia de un control, tal que sea posible llevar el estado inicial en el tiempo cero, a un objetivo deseado en el tiempo final (mayor a cero). Sin embargo, la ecuación de calor no es exactamente controlable debido al efecto regularizante (ver [Zua02]). En textos como [Fat66, Zua97], se propone reemplazar el problema de la controlabilidad exacta por uno de optimización, de manera que podemos plantear un control que nos lleve de un estado inicial, hacia el estado final cero. Este es un problema de controlabilidad a cero.

Una de las contribuciones principales de esta tesis, es hacer una analogía entre la teoría de control para EDPs y la teoría de control clásica para EDOs, por lo que estudiaremos herramientas matemáticas que tienen su base en la teoría de control de EDPs y las aplicaremos a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en dimensión finita, presentando así, el método de unicidad de Hilbert penalizado (HUM), propuesto en [Pue19, MZ10, Zua02] para demostrar la controlabilidad a cero de la ecuación de calor en dimensión uno con condiciones de frontera tipo Dirichlet homogéneas. Primero aplicaremos el método HUM a un sistema de EDOs y lo dividiremos por etapas para analizar a fondo las herramientas matemáticas proporcionadas en este método. En la sección 2.1 se muestra que para EDOs la controlabilidad exacta es equivalente a la controlabilidad a cero. Posteriormente mencionamos que la noción de controlabilidad y optimización son dos conceptos íntimamente relacionados, puesto que el método HUM permite encontrar la trayectoria de coste mínimo con la cual es posible llegar de un estado inicial a un objetivo deseado. Luego, el método HUM adapta el sistema de EDOs planteado inicialmente a un sistema de minimización sin restricciones llamado sistema adjunto. En la sección 2.2.1 se introduce la herramienta matemática fundamental que permite demostrar la controlabilidad exacta para un sistema de EDOs, y es la desigualdad de observabilidad, ya que a través de ella es posible probar que la observabilidad es equivalente a la controlabilidad exacta. En la sección 2.3 se expone el criterio de controlabilidad de Kalman el cual unifica los conceptos de controlabilidad exacta, controlabilidad a cero y observabilidad, probando que un problema de controlabilidad exacta está bien fundamentado para EDOs.

De manera similar, en la sección 3.2.1 planteamos una desigualdad de observabilidad para el sistema adjunto de la ecuación de calor, y junto con otras herramientas dadas en la sección 1.4, demostraremos que la observabilidad implica la controlabilidad a cero del sistema. Finalmente, introducimos la desigualdad de Carleman, con la cual podemos probar la desigualdad de observabilidad propuesta para el sistema adjunto de la ecuación de calor.

Esta tesis está organizada de la siguiente manera. En el Capítulo 1 damos una introducción a los espacios en donde se desarrolla la teoría de EDPs, e introducimos algunas herramientas de utilidad para la demostración de la controlabilidad a cero de la ecuación de calor. En el Capítulo 2 se presenta el método de unicidad de Hilbert aplicado a EDOs, lo que nos permite hacer una analogía de la teoría de control clásica con la teoría de control para EDPs. En el Capítulo 3 demostramos la controlabilidad a cero de la ecuación de calor. Posteriormente, demostraremos la desigualdad de observabilidad y la desigualdad de Carleman. En el Capítulo 3.3.3 daremos una conclusión sobre los resultados obtenidos en esta tesis.

Preliminares

En este capítulo se establecerán algunas de las herramientas necesarias que serán utilizadas para los resultados del Capítulo 3, donde se analiza el problema de la controlabilidad a cero de la ecuación de calor. Vamos a aplicar estas herramientas a la teoría de ecuaciones diferenciales parciales (EDPs). Las EDPs pueden clasificarse según su tipo, orden y linealidad (ver [Eva10]). En esta tesis haremos un particular énfasis a las ecuaciones parabólicas (ver [Eva10, Bre10, Tro10]). Esto es así debido a que las ecuaciones parabólicas son una generalización de la ecuación de calor, por lo que de inicio, definiremos los espacios vectoriales en donde se desarrollan este tipo de ecuaciones, es decir, los espacios de Sobolev (consultar [Eva10, Bre10, Tro10]).

1.1. Introducción a los espacios de Hilbert

En esta sección, daremos nociones básicas que nos permitirán definir los espacios de Hilbert. También enunciaremos algunos otros conceptos y teoremas importantes que se emplearán en secciones posteriores.

1.1.1. Nociones básicas

Para poder definir un espacio de Hilbert es necesario introducir el concepto de espacio de Banach debido a que todos los espacios de Hilbert son espacios de Banach. Dicho esto, a continuación mencionaremos propiedades y conceptos tomados de [Ber76] y [DM99].

Definición 1.1.1 (Norma) *Sea V un espacio vectorial, una función $\|\cdot\|_V : V \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada norma si esta satisface los axiomas siguientes:*

1. $\|x\|_V \geq 0$.
2. $\|x\|_V = 0$ sí y solo si $x = 0$.
3. $\|\alpha x\|_V = |\alpha| \|x\|_V \quad \forall x \in V, \alpha \in \mathbb{R}$.
4. $\|x + y\|_V \leq \|x\|_V + \|y\|_V$ para todo $x, y \in V$.

El subíndice en la notación $\|\cdot\|_V$ de la Definición 1.1.1 denota el espacio en donde esa norma está definida. Debido a la gran variedad de espacios con los cuales se trabajará en este texto, se usará un subíndice distinto que dependerá del espacio en donde se esté definiendo la norma a utilizar.

Definición 1.1.2 (Espacio normado) *Un espacio vectorial con una norma definida en él es llamado espacio vectorial normado o espacio normado. Es decir, es un par $(V, \|\cdot\|_V)$, donde V es un espacio vectorial.*

Definición 1.1.3 (Sucesión de Cauchy) *Una sucesión de vectores $\{x_n\}$ en un espacio normado se llama sucesión de Cauchy, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $M \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_m - x_n\|_V < \varepsilon$ para todo $m, n > M$, con $m, n \in \mathbb{N}$.*

Dados los conceptos anteriores podemos definir ahora la noción de espacio de Banach.

Definición 1.1.4 (Espacio de Banach) *Un espacio vectorial normado $(V, \|\cdot\|_V)$ es llamado completo si toda sucesión de Cauchy en V converge a un elemento de V . Un espacio vectorial normado completo es llamado espacio de Banach.*

Ya hemos mencionado que todos los espacios de Hilbert, son espacios de Banach. Así que para poder definir lo que es un espacio de Hilbert se dará el concepto fundamental que transforma un espacio de Banach en un espacio de Hilbert.

Definición 1.1.5 (Producto interno) *Sea V un espacio vectorial. Un mapeo $(\cdot, \cdot)_V : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ es llamado producto interno en V si para todo $x, y, z \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se cumplen los siguientes axiomas:*

1. $(x, y)_V = (y, x)_V$.
2. $(\alpha x + \beta y, z)_V = \alpha(x, z)_V + \beta(y, z)_V$.
3. $(x, x)_V \geq 0$.
4. $(x, x)_V = 0 \implies x = 0$.

El subíndice en la notación $(\cdot, \cdot)_V$ de la Definición 1.1.5 denota el espacio en donde ese producto interno está definido. Debido a la gran variedad de espacios con los cuales se trabajará en este texto, se usará un subíndice distinto que dependerá del espacio en donde se esté definiendo el producto interno a utilizar.

Ahora podemos dar la definición de espacios de Hilbert, cabe señalar que denotaremos con H a estos espacios definidos en el campo de los reales.

Definición 1.1.6 (Espacio de Hilbert) *Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial con producto interno $(H, (\cdot, \cdot)_H)$, el cual es un espacio métrico completo, con respecto a la siguiente norma:*

$$\|v\|_H = \sqrt{(v, v)_H}.$$

Los espacios de Hilbert generalizan y extienden muchos conceptos conocidos en el álgebra lineal a espacios de dimensión arbitraria, a continuación presentaremos algunos de estos.

Definición 1.1.7 (Expansión ortogonal) *Sea V un espacio vectorial con producto interno y sea $u, v \in V$. Decimos que u y v son ortogonales ($u \perp v$) si $(u, v)_V = 0$.*

Definición 1.1.8 (Sistema ortogonal) Sea $\{e_n\}_{n \in I} \subset V \setminus \{0\}$, donde I es un conjunto de índices, $\{e_n\}_{n \in I}$ es llamado sistema ortogonal si $e_n \perp e_m$ con $n \neq m$. Además, si $\|e_n\|_V = 1 \forall n \in I$ el sistema se llama ortonormal. Si $I = \mathbb{N}$ al sistema le llamamos sucesión ortonormal.

De igual manera se define el concepto del i -ésimo coeficiente de Fourier y de la serie de Fourier:

Definición 1.1.9 Sea $\{e_n\}$ una sucesión ortogonal en un espacio de Hilbert. Entonces, para cualquier vector $x \in H$, el i -ésimo coeficiente de Fourier se define como

$$(x, e_n)_H,$$

mientras que la serie de Fourier se define como

$$\sum_{i=1}^{\infty} e_n(x, e_n)_H.$$

Dadas estas definiciones podemos enunciar la siguiente desigualdad.

Definición 1.1.10 (Desigualdad de Bessel) Sea $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión ortonormal en un espacio con producto interno H . Entonces

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(x, e_n)_H|^2 \leq \|x\|_H^2. \quad (1.1)$$

Gracias a la desigualdad de Bessel podemos afirmar que la serie de la ecuación (1.1) es finita y pertenece al espacio de Hilbert, sin embargo, no es suficiente para decir que un vector $x \in H$ es igual a su expansión de Fourier para un sistema ortonormal cualquiera, para ello se enunciará lo siguiente:

Definición 1.1.11 Una sucesión ortonormal $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en un espacio de Hilbert es completa si el único vector $y \in H$ tal que $y \perp e_n \forall n \in \mathbb{N}$ es el cero.

Teorema 1.1.12 Sea $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión ortonormal completa en un espacio de Hilbert H . Entonces si $x \in H$,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} e_n(x, e_n)_H.$$

La demostración del Teorema 1.1.12 se puede consultar en [You88].

Definición 1.1.13 Una base ortonormal en un espacio de Hilbert H es una sucesión ortonormal completa.

Para poder continuar debemos dar el concepto de conjunto generado en un espacio vectorial (ver [You88, Hei19]).

Definición 1.1.14 Sea $\mathcal{F} = \{e_n\}_{n \in I}$ una sucesión de vectores en un espacio vectorial V , donde I es un conjunto de índices. El conjunto generado por \mathcal{F} , denotado por $\text{span}(\mathcal{F})$, es el conjunto de todas las combinaciones finitas lineales de los elementos de \mathcal{F} , es decir

$$\text{span}(\mathcal{F}) = \text{span}\{e_n\}_{n \in I} = \left\{ \sum_{i=1}^N c_i e_{n_i} \text{ tal que } N > 0, n_i \in I, c_i \text{ es un escalar} \right\}.$$

La cerradura del conjunto generado por \mathcal{F} lo denotaremos de la siguiente manera

$$\overline{\text{span}}(\mathcal{F}) = \overline{\text{span}}\{e_n\}_{n \in I}.$$

Con la definición anterior podemos dar ahora el siguiente teorema, el cual muestra una equivalencia entre la Definición 1.1.11 y el Teorema 1.1.12 (su demostración se puede ver en [You88]).

Teorema 1.1.15 Sea $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión ortonormal en un espacio de Hilbert H . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- a) $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es completa .
- b) $\overline{\text{span}}\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}} = H$.
- c) $\|x\|_H^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)_H|^2 \quad \forall x \in H$.

1.1.2. Espacio dual

Un concepto ampliamente utilizado en este documento es el de espacio dual [Ber76]. Para definir el espacio dual daremos algunas nociones previas. Primero estableceremos el concepto de funcional como un mapeo que va de un espacio normado a los reales. Para los propósitos de este texto, dicho espacio normado se tratará de un espacio de Hilbert, a menos que se especifique lo contrario. Además, un funcional es lineal si cumple con la siguiente definición:

Definición 1.1.16 Sea H un espacio de Hilbert, un funcional $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ es lineal si es aditivo, es decir, para cualquier $x, y \in H$, se tiene que

$$f(x + y) = f(x) + f(y),$$

y homogéneo, es decir, para cualquier $x \in H$, y cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$

$$f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Ahora analizaremos la continuidad de un funcional lineal a través de la siguiente definición (ver [Poz08, Hei19, Bru66]).

Definición 1.1.17 Sea $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional lineal en un espacio de Hilbert H (con norma $\|\cdot\|_H$) y $x \in H$, decimos que f es continuo en $x_0 \in H$, si dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $\|x - x_0\|_H < \delta$, entonces $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Los siguientes dos lemas dan una equivalencia de la Definición 1.1.17 (sus pruebas se inquieren en [Poz08, Bru66] respectivamente).

Lema 1.1.18 *Sea f un funcional lineal definido en un espacio de Hilbert H . Si f es continuo en el punto $0 \in H$, entonces es continuo en cualquier punto $x_0 \in H$.*

Lema 1.1.19 *Si un funcional lineal f definido en un espacio de Hilbert H es continuo en un punto, entonces es continuo en cualquier punto de H , y además, es uniformemente continuo.*

Con lo anterior podemos afirmar lo siguiente:

Observación 1.1.20 *Para un funcional lineal $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ definido en un espacio de Hilbert H , los siguientes enunciados son equivalentes:*

- f es continuo en algún punto de H .
- f es continuo en el punto $0 \in H$.
- f es continuo (en todo punto de H).
- f es uniformemente continuo.

Más aún, la linealidad del funcional f permite expresar su continuidad como el mapeo de un conjunto acotado a los reales. Para explicar esto detalladamente daremos la siguiente definición:

Definición 1.1.21 *Un funcional lineal $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ definido en un espacio de Hilbert H se dice acotado si existe un número real $M > 0$, tal que para todo $x \in H$*

$$|f(x)| \leq M\|x\|_H. \quad (1.2)$$

Además, la norma del funcional lineal acotado f se define como

$$\|f\|_H = \sup_{\substack{x \in H \\ \|x\|_H \leq 1}} |f(x)|.$$

De la definición anterior podemos observar que, usando la linealidad de f , obtenemos

$$\left| f\left(\frac{x}{\|x\|_H}\right) \right| = \left| \frac{f(x)}{\|x\|_H} \right| = \frac{|f(x)|}{\|x\|_H},$$

de donde podemos ver que f está acotado, satisfaciendo la desigualdad (1.2), si y solo si

$$\sup_{\substack{x \in H \\ \|x\|_H \leq 1}} |f(x)| \leq M,$$

es decir, f es un funcional acotado en la bola unitaria cerrada $\{x \in H : \|x\|_H \leq 1\}$. Por lo tanto, un funcional lineal acotado es un mapeo que asigna elementos de un conjunto acotado (bola unitaria cerrada) a los reales. Finalmente damos el siguiente teorema que da la equivalencia entre la continuidad y la acotación de un funcional lineal (su demostración se da en [Bru66]).

Teorema 1.1.22 *Un funcional lineal es acotado si y solo si es continuo.*

Dicho lo anterior podemos definir ahora el concepto de espacio dual.

Definición 1.1.23 *Sea V^* el conjunto de todos los funcionales lineales y continuos definidos sobre un espacio normado $(V, \|\cdot\|_V)$. Entonces V^* es un espacio de Banach con la siguiente norma*

$$\|f\|_{V^*} = \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V \leq 1}} |f(x)|,$$

donde f es un funcional lineal.

Es decir, sobre el espacio vectorial V , construimos funcionales lineales y continuos que van de V a los reales. Entonces todos los funcionales lineales y continuos que se puedan definir están en V^* . El espacio V^* es llamado el dual de V .

Definición 1.1.24 (Producto de dualidad) *Sea H un espacio de Hilbert, si $f \in H^*$, denotamos para $x \in H$,*

$$f(x) = (f, x)_{H^*, H},$$

al producto de dualidad que hay entre el funcional f y x .

La conexión entre los espacios de Hilbert y su espacio dual está dado por el siguiente teorema cuya demostración se ve en [You88].

Teorema 1.1.25 (Riesz-Fréchet) *Sea H un espacio de Hilbert y $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional lineal continuo. Entonces existe un único $y \in H$ tal que*

$$f(x) = (x, y)_H,$$

para todo $x \in H$. Además, $\|y\|_H = \|f\|_{H^*}$.

1.2. Espacios de Sobolev

Para los fines de este trabajo, los espacios de Sobolev son de suma importancia. En estos espacios se encuentran las soluciones de las ecuaciones diferenciales parciales que estudiaremos posteriormente en este capítulo. Para poder definirlos primero daremos definiciones básicas de la teoría de espacios L^p y algunos conceptos importantes que nos ayudarán a definir el concepto de derivada débil. Finalmente se anexarán algunos teoremas importantes que junto con los ya vistos en la sección anterior se utilizarán para la demostración de la existencia y unicidad de soluciones débiles de ecuaciones parabólicas (ver sección 1.4).

1.2.1. Espacios L^p

La importancia de este tema radica en que los espacios de Sobolev son sub-espacios de los espacios L^p . Las siguientes definiciones mencionadas en [Tro10, Hei19, DM99] nos ayudarán a definir las normas L^p y así construir el concepto de los espacios de Sobolev. Sea un espacio de medida (E, \mathcal{F}, μ) , cuya tripleta consiste de un conjunto E no vacío, de una σ -álgebra \mathcal{F} de subconjuntos de E y de una medida μ en \mathcal{F} .

Definición 1.2.1 Dada una función medible $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, se dice que f es integrable si

$$\int_E |f| d\mu < \infty,$$

dotado con la norma

$$\|f\|_{L^1(E)} = \|f\|_1 = \int_E |f| d\mu.$$

Definición 1.2.2 Sea $1 \leq p < \infty$, denotaremos por $L^p(E)$ al espacio formado por las funciones medibles tal que $|f|^p$ son integrables en E , es decir

$$L^p(E) = \{f : E \rightarrow \mathbb{R} \text{ medible} \mid |f|^p \in L^1(E)\},$$

es decir

$$\int_E |f|^p d\mu < \infty,$$

dotado con la norma

$$\|f\|_{L^p(E)} = \|f\|_p = \left(\int_E |f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Definición 1.2.3 Denotamos con $L^\infty(E)$ al espacio de todas las funciones medibles y esencialmente acotadas, equipadas con la siguiente norma

$$\|f\|_{L^\infty(E)} = \text{ess sup}_{E, \mu} |f(x)| := \inf \{c \in \overline{\mathbb{R}}_+ : \mu(\{x \in E : |f(x)| > c\}) = 0\},$$

donde $\overline{\mathbb{R}}_+ = \{a \in \mathbb{R} \text{ tal que } 0 \leq a \leq \infty\}$ y además, “ess sup” significa el supremo esencial de una función, es decir, el ínfimo de todas las cotas superiores esenciales de f . Si $c \in \overline{\mathbb{R}}_+$ es una cota superior esencial de f , entonces la desigualdad $|f(x)| \leq c$ se cumple μ -c.t.p., esto es,

$$\mu(\{x \in E : |f(x)| > c\}) = 0.$$

El siguiente teorema da una definición más concreta de los espacios L^p (su demostración se puede ver en [Mal95]).

Teorema 1.2.4 Sea (E, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida, y sea $1 \leq p < \infty$. Entonces $L^p(E)$ es un espacio vectorial equipado con la norma $\|\cdot\|_p$.

Además, el teorema que se menciona a continuación (cuya demostración se puede consultar en [Bru66]), muestra que el espacio $(L^p(E), \|\cdot\|_p)$ es un espacio de Banach. Por lo tanto, $L^p(E)$ es un espacio vectorial normado completo.

Teorema 1.2.5 *Sea (E, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida. Entonces $L^p(E)$, con $1 \leq p < \infty$, es un espacio de Banach, y su norma es $\|\cdot\|_p$.*

Un caso de particular interés para los propósitos de esta tesis es cuando $p = 2$, debido a que $L^2(E)$ es un espacio de Hilbert. Enunciaremos lo dicho anteriormente en el siguiente teorema:

Teorema 1.2.6 *Sea (E, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida y $f, g \in L^2(E)$. Entonces $L^2(E)$ es un espacio de Hilbert cuando el producto interno está definido por*

$$(f, g)_{L^2(E)} = \int_E fg \, d\mu. \quad (1.3)$$

La demostración del Teorema 1.2.6 se puede consultar en [Mal95, Bru66], donde se explica que el producto interno (1.3) está bien definido en $L^2(E)$ gracias a la desigualdad de Hölder (ver [Eva10, DM99]). Por otro lado, las herramientas proporcionadas en la sección 1.1 son de gran utilidad para analizar $L^2(E)$ por ser un espacio de Hilbert.

El teorema que se menciona a continuación será útil para definir funcionales lineales y continuos en los espacios L^p , y tiene su base en los Teoremas 1.1.23 y 1.1.25.

Teorema 1.2.7 (Representación de Riesz para L^p) *Sea $1 < p < \infty$ y q su exponente conjugado. Si $\phi \in (L^p)^*$, donde $\phi : L^p \rightarrow \mathbb{R}$, entonces existe un único $u \in L^q$, tal que*

$$\phi(f) = \int_E uf \, d\mu, \quad \forall f \in L^p,$$

con la norma

$$\|u\|_q = \|\phi\|_{(L^p)^*}.$$

Por lo tanto, $(L^p)^* = L^q$, es decir, el dual del espacio L^p es L^q .

1.2.2. Derivada débil

Antes de introducir los espacios de Sobolev debemos extender el concepto de derivada. Para ello haremos una analogía con un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs). Un requisito para la controlabilidad de un sistema de EDOs es la existencia y unicidad de una solución para el mismo, además, esta solución deberá ser continua, lo que quiere decir que es una función suave y, por lo tanto, derivable en el sentido fuerte (o clásico). Sin embargo, para EDPs, esto no es así, puesto que la solución viene dada en el sentido débil, y se encuentra dentro de algún espacio de Sobolev. La noción de solución débil para una EDP (como se define en [Eva10, Bre10, Tro10, OR76]), se refiere a una función, la cual no es necesariamente suave (o infinitamente diferenciable) e incluso podría ser no derivable, sin embargo, satisface nuestro sistema en algún sentido. Este sentido se basa en lo que definiremos como noción de

distribución, la cual permite reescribir nuestra EDP de tal manera que no aparezcan derivadas en la solución, utilizando funciones de prueba (ya que todas las derivadas pasan a esta función de prueba por medio de la integración por partes), las cuales deben de ser infinitamente diferenciables con soporte compacto. Es por este motivo que una EDP puede tener soluciones que no son necesariamente diferenciables, puesto que esta formulación débil en el sentido de distribuciones permite encontrar dichas soluciones. Entonces una EDP se puede expresar en términos de normas de Lebesgue, pues al poseer una solución que solo es integrable, esta se encuentra en el espacio L^p .

Para definir la derivada débil en el sentido de distribución (ver [OR76, VH94]), damos antes los siguientes conceptos.

Definición 1.2.8 *Tenemos que:*

1. $C(0, 1)$ es el espacio de funciones continuas sobre $(0, 1)$.
2. $C^k(0, 1)$ es el espacio de funciones k -veces continuamente diferenciables sobre $(0, 1)$ ($k \in \mathbb{N}$).
3. $C^\infty(0, 1) = \bigcap_k C^k(0, 1)$.
4. $C_0(0, 1)$ es el espacio de funciones continuas con soporte compacto sobre $(0, 1)$.
5. $C_0^k(0, 1) = C^k(0, 1) \cap C_0(0, 1)$.
6. $C_0^\infty(0, 1) = C^\infty(0, 1) \cap C_0(0, 1)$.

Ahora definiremos el conjunto de funciones de prueba dado por $\mathcal{D}(0, 1) = C_0^\infty(0, 1)$, que además tiene la siguiente noción de convergencia:

Definición 1.2.9 *Sea $\{\varphi_i\}$ una sucesión de funciones de $\mathcal{D}(0, 1)$. Diremos que $\{\varphi_i\}$ converge en $\mathcal{D}(0, 1)$ a φ si existe un conjunto compacto $K \subset (0, 1)$, tal que, $\text{supp } \varphi_i \subset K$ para toda $i \in \mathbb{N}$, y si además*

$$\varphi'_i \rightarrow \varphi' \text{ uniformemente en } K,$$

es decir

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} |\varphi'_i(x) - \varphi'(x)| = 0,$$

donde φ'_i , φ' denota la derivada de la función correspondiente.

Dicho esto daremos el concepto de distribución.

Definición 1.2.10 *Diremos que T es una distribución en $(0, 1)$ si*

$$T : \mathcal{D}(0, 1) \rightarrow \mathbb{R},$$

es lineal, continua, y además

$$\lim_{i \rightarrow \infty} T(\varphi_i) = T(\varphi),$$

para toda φ_i que converge en $\mathcal{D}(0, 1)$ a φ . Aquí $T(\varphi) = (T, \varphi)_{\mathcal{D}^*(0,1), \mathcal{D}(0,1)}$ (donde la notación $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{D}^*(0,1), \mathcal{D}(0,1)}$ expresa el producto de dualidad entre $T \in \mathcal{D}^*(0, 1)$ y $\varphi \in \mathcal{D}(0, 1)$). El espacio $\mathcal{D}^*(0, 1)$ es el dual de $\mathcal{D}(0, 1)$ y también es conocido como el espacio de distribuciones sobre $(0, 1)$.

Ya que hemos definido la noción de distribución que caracteriza al conjunto de funciones de prueba $\mathcal{D}(0, 1)$, vamos a dar el siguiente ejemplo, el cual da una motivación para definir la derivada débil.

Ejemplo 1.2.11 Dada una función $f \in C([0, 1])$, encontraremos una función u que satisfaga

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{en } [0, 1], \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Una solución de (1.4) en el sentido clásico (o fuerte) es una función de clase C^2 en $[0, 1]$ que satisface (1.4) en el sentido usual (la solución de este tipo de sistemas se puede ver en [CL55]). Sin embargo, dados nuestros propósitos, vamos a utilizar la integración por partes para encontrar otra solución (en el sentido débil). Para ello multiplicamos la ecuación (1.4) por $\varphi(x) \in \mathcal{D}(0, 1)$, e integramos en $(0, 1)$ para obtener

$$-\int_0^1 u'' \varphi(x) dx + \int_0^1 u \varphi(x) dx = \int_0^1 f \varphi(x) dx,$$

entonces podemos integrar por partes algunos términos, es decir

$$-\int_0^1 u'' \varphi(x) dx = -u' \varphi(x) \Big|_0^1 + \int_0^1 u' \varphi'(x) dx.$$

Dado que $\varphi \in \mathcal{D}(0, 1)$, los términos evaluados en los puntos de frontera desaparecen, por lo que

$$\int_0^1 u' \varphi'(x) dx + \int_0^1 u \varphi(x) dx = \int_0^1 f \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0, 1), \quad (1.5)$$

En el ejemplo 1.2.11 observamos que la ecuación (1.5) hace sentido para $u \in C^1([0, 1])$, e incluso es suficiente con saber que $u, u' \in L^1(0, 1)$ (mientras que (1.4) requiere que la solución u tenga dos derivadas). Este sentido del cual hablamos es la noción de derivada débil y lo exponemos en la siguiente definición:

Definición 1.2.12 (Derivada débil) Sea una función $u \in L^2(0, 1)$. Decimos que $u = u(x)$ es débilmente diferenciable, con derivada débil $u' \in L^2(0, 1)$ si

$$\int_0^1 u'(x) \varphi(x) dx = - \int_0^1 u(x) \varphi'(x) dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0, 1).$$

Retomando el Ejemplo 1.2.11 diremos que la función $u \in C^1([0, 1])$, la cual satisface (1.5) es solución débil de (1.4). Incluso podemos decir que si u es dos veces diferenciable, entonces la derivada en el sentido clásico es equivalente a la derivada débil, sin embargo, si $u \in C^1([0, 1])$ la derivada débil no implica la derivada en el sentido clásico. Por lo tanto, una derivada clásica también es una derivada débil.

Por otro lado, vamos a enunciar el siguiente teorema que nos va a servir más adelante (su demostración se puede ver en [NS82, AF03]).

Teorema 1.2.13 *El espacio de funciones $C_0^\infty(0, 1)$ es denso en $L^p(0, 1)$, con $1 \leq p < \infty$.*

Derivado del teorema anterior, damos la siguiente proposición tal como en [VH94].

Proposición 1.2.14 *El espacio de funciones de prueba $\mathcal{D}(0, 1)$ es denso en $L^p(0, 1)$, con $1 \leq p < \infty$.*

Ahora vamos a definir los espacios de Sobolev, los cuales son importantes para nuestros propósitos, pues están equipados con la norma L^p , lo que permite hacer las manipulaciones necesarias para trabajar con las expresiones complejas que surgen en el estudio de las EDPs, ya que estos espacios combinan el concepto de formulación débil mencionado anteriormente y el de normas de Lebesgue. Denotaremos a los espacios de Sobolev como $W^{m,p}$, donde m representa el número de derivadas débiles que puede tener una función, mientras que p es el orden de integración. Dicho lo anterior ahora definiremos estos espacios en dimensión uno.

Definición 1.2.15 *Sea $1 \leq p \leq \infty$, el espacio de Sobolev $W^{1,p}(0, 1)$ se define como*

$$W^{1,p}(0, 1) = \left\{ u \in L^p(0, 1) \mid \exists u' \in L^p(0, 1) \text{ que satisfice} \right. \\ \left. \int_0^1 u\varphi' = - \int_0^1 u'\varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_0^1(0, 1) \right\},$$

es decir, el conjunto de funciones que están en $L^p(0, 1)$ y tienen derivada débil. Además, $W^{1,p}(0, 1)$ está equipado con la siguiente norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(0,1)} = \left(\|u\|_{L^p(0,1)}^p + \|u'\|_{L^p(0,1)}^p \right)^{1/p}.$$

Análogamente, para $p = \infty$, $W^{1,\infty}(0, 1)$ se equipa con la norma

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(0,1)} = \max \|u'\|_{L^\infty(0,1)}.$$

Cabe destacar que $W^{1,p}(0, 1)$ es un subespacio de $L^p(0, 1)$, y ya que por el Teorema 1.2.5, $L^p(0, 1)$ es un espacio de Banach, $W^{1,p}(0, 1)$ también es un espacio de Banach. Enunciamos esto en el siguiente teorema (cuya demostración se da en [AF03]).

Teorema 1.2.16 *El espacio $W^{1,p}(0, 1)$ es un espacio de Banach.*

1.2.3. El espacio H_0^1

En esta sección vamos a comenzar estudiando el espacio de Sobolev cuando $p = 2$, es decir, $W^{1,2}(0, 1)$. Similar a lo que sucede en el Teorema 1.2.16, dado que $W^{1,2}(0, 1)$ es un subespacio de $L^2(0, 1)$, por el Teorema 1.2.6, $W^{1,2}(0, 1)$ hereda una propiedad importante de $L^2(0, 1)$, la cual es ser un espacio de Hilbert (ver [Tro10, AF03, Bre10]). Hacemos entonces la siguiente notación:

$$H^1(0, 1) := W^{1,2}(0, 1),$$

es decir,

$$H^1(0, 1) = \left\{ u \in L^2(0, 1) \mid \exists u' \in L^2(0, 1) \text{ que satisfice} \right. \\ \left. \int_0^1 u\varphi' = - \int_0^1 u'\varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_0^1(0, 1) \right\},$$

equipado con la norma

$$\|u\|_{H^1(0,1)} = \left(\|u\|_{L^2(0,1)}^2 + \|u'\|_{L^2(0,1)}^2 \right)^{1/2},$$

y con el producto escalar

$$(u, v)_{H^1(0,1)} = (u, v)_{L^2(0,1)} + (u', v')_{L^2(0,1)} = \int_0^1 (uv + u'v') dx.$$

En la Sección 1.4 se estudia la existencia y unicidad de soluciones débiles para ecuaciones parabólicas en dimensión uno, con condiciones de frontera tipo Dirichlet homogénea (ver [Bre10, Eva10, Tro10]), es decir, la solución de nuestra ecuación parabólica es igual a cero en la frontera $\Sigma = \{0, 1\} \times (0, T)$, para un tiempo $T > 0$, y donde $\{0, 1\}$ son los puntos de frontera del conjunto $(0, 1)$. Dicho esto, el valor de la solución $y \in H^1$ de la ecuación parabólica evaluada en la frontera Σ debe ser cero. El problema radica en que Σ , dado como un subconjunto de \mathbb{R}^2 , tiene medida cero (ver [DM99, Tro10]), por lo que el valor de la función $y \in L^2(0, 1)$ evaluada en Σ puede ser arbitrario sin afectar a y como elemento de $L^2(0, 1)$. Para resolver este problema vamos a mencionar la noción de cerradura de un conjunto (ver [Tro10, DM99]). Sea $E \subset \mathcal{H}$, donde \mathcal{H} es un espacio de Hilbert con norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$. La cerradura de E se denota por

$$\bar{E} = \{x \in \mathcal{H} \mid x \text{ es el límite de una sucesión } \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E\}.$$

Decimos que el conjunto $E \subset \mathcal{H}$ es denso en \mathcal{H} si $\bar{E} = \mathcal{H}$. Con esta noción podemos dar la definición del espacio H_0^1 .

Definición 1.2.17 *La cerradura del conjunto de funciones de prueba $\mathcal{D}(0, 1)$ en $H^1(0, 1)$ es denotado como $H_0^1(0, 1)$.*

Observamos que H_0^1 es un espacio de Hilbert equipado con la norma $\|\cdot\|_{H^1}$. Además, por definición, $\mathcal{D}(0, 1)$ es denso en $H_0^1(0, 1)$. Por lo tanto, los elementos de H_0^1 pueden ser considerados como funciones que evaluadas en la frontera Σ son iguales a cero.

1.2.4. El espacio H^{-1}

Denotaremos con H^{-1} al dual del espacio H_0^1 , es decir, el espacio H^{-1} es el conjunto de todos los funcionales lineales y continuos que están bien definidos en H_0^1 . Con ayuda de la Definición 1.1.24 introducimos el producto de dualidad entre $H^{-1}(0, 1)$ y $H_0^1(0, 1)$.

Definición 1.2.18 Denotaremos con $(\cdot, \cdot)_{H^{-1}, H_0^1}$ al producto de dualidad entre $H^{-1}(0, 1)$ y $H_0^1(0, 1)$, es decir que dado un funcional lineal y continuo $f \in H^{-1}(0, 1)$, y un elemento $u \in H_0^1(0, 1)$ se tiene

$$f(u) = (f, u)_{H^{-1}, H_0^1}.$$

Con lo anterior podemos dar una definición concreta del espacio H^{-1} (ver [Eva10]).

Definición 1.2.19 Sea $f \in H^{-1}(0, 1)$ un funcional lineal y continuo definido en $H_0^1(0, 1)$. Entonces f esta equipado con la siguiente norma

$$\|f\|_{H^{-1}(0,1)} = \sup \left\{ (f, u)_{H^{-1}, H_0^1} \mid u \in H_0^1(0, 1), \|u\|_{H_0^1(0,1)} \leq 1 \right\}.$$

Finalmente enunciamos el siguiente teorema cuya demostración se puede consultar en [Eva10].

Teorema 1.2.20 (Caracterización de H^{-1}) Supongamos que $f \in H^{-1}(0, 1)$. Entonces existen funciones f_0, f_1, \dots, f_n en $L^2(0, 1)$ tal que

$$(f, v)_{H^{-1}, H_0^1} = \int_0^1 \left(f_0 v + \sum_{i=1}^n f_i v_x \right) dx, \quad (1.6)$$

$\forall v \in H_0^1(0, 1)$ y donde $v_x = \frac{\partial v}{\partial x}$. Además

$$\|f\|_{H^{-1}(0,1)} = \inf \left\{ \left(\int_0^1 \sum_{i=0}^n |f_i|^2 dx \right)^{1/2} \mid f \text{ satisface (1.6) para } f_0, \dots, f_n \in L^2(0, 1) \right\}.$$

1.3. Convergencia débil

Para esta sección denotaremos con \mathcal{B} a los espacios de Banach definidos en el campo de los reales. Además, el dual de \mathcal{B} lo definiremos como \mathcal{B}^* , y el producto de dualidad entre estos espacios lo denotaremos como $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{B}^*, \mathcal{B}}$. Dicho esto damos la siguiente definición:

Definición 1.3.1 Decimos que una sucesión en un espacio de Banach $\{u_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{B}$ converge débilmente a una función $u \in \mathcal{B}$, denotado como

$$u_k \rightharpoonup u,$$

si

$$(u^*, u_k)_{\mathcal{B}^*, \mathcal{B}} \rightharpoonup (u^*, u)_{\mathcal{B}^*, \mathcal{B}},$$

para cada funcional lineal y continuo acotado $u^* \in \mathcal{B}^*$.

De la definición anterior podemos observar que si $u_k \rightarrow u$, entonces $u_k \rightharpoonup u$. También es cierto que cualquier sucesión que converge débilmente es acotada. Además, si $u_k \rightharpoonup u$, entonces

$$\|u\|_{\mathcal{B}} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|u_k\|_{\mathcal{B}}.$$

Ahora enunciamos el siguiente teorema (el cual se puede consultar en [Eva10]).

Teorema 1.3.2 (Compacidad débil) *Sea \mathcal{B} un espacio de Banach, y $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}$ una sucesión acotada. Entonces existe una subsucesión $\{u_{k_j}\}_{j=1}^{\infty} \subset \{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $u \in \mathcal{B}$ tal que*

$$u_{k_j} \rightharpoonup u.$$

Es decir, las sucesiones acotadas en un espacio de Banach son débilmente precompactas (existe una subsucesión que converge débilmente a una función en ese espacio). En particular, una sucesión acotada en un espacio de Hilbert contiene una subsucesión débilmente convergente.

1.4. Existencia y unicidad de soluciones débiles para ecuaciones parabólicas

En esta sección vamos a estudiar la existencia y unicidad de soluciones débiles para ecuaciones parabólicas en dimensión uno. Las ecuaciones parabólicas son una generalización de la ecuación de calor, por lo que, encontrar una solución débil para las ecuaciones parabólicas es imprescindible para el control de la ecuación de calor.

Vamos a comenzar definiendo una ecuación parabólica. Para ello sea el conjunto $(0, 1)$, cuyos puntos de frontera son denotados por $\Gamma = \{0, 1\}$. Definimos $Q = (0, 1) \times (0, T)$, para algún tiempo $T > 0$. Ahora sea $y : \bar{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ una función dependiente del tiempo $t \in (0, T)$ y una variable $x \in (0, 1)$, hacemos la siguiente notación:

$$\begin{cases} y_x = \frac{\partial y}{\partial x}, & y_{xx} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \\ y_t = \frac{\partial y}{\partial t}, & y_{tt} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \end{cases}$$

Además, establecemos $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$ y consideramos la siguiente ecuación:

$$\begin{cases} y_t + Ay = v & \text{en } Q, \\ y(x, t) = 0 & \text{para } (x, t) \in \Sigma, \\ y(x, 0) = y_0 & \text{en } (0, 1), \end{cases} \quad (1.7)$$

donde $v : Q \rightarrow \mathbb{R}$ y $y_0 : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$. Por último A es un operador diferencial de segundo orden. Este operador puede tener la forma de divergencia o no divergencia (ver [Eva10]). Para esta tesis usaremos la forma de divergencia, que es la siguiente:

$$Ay = -(a(x, t)y_x)_x + b(x, t)y_x + c(x, t)y, \quad (1.8)$$

con $x \in (0, 1)$, y donde $a(x, t), b(x, t), c(x, t) \in L^\infty(Q)$, $v \in L^2(Q)$, $y_0 \in L^2(0, 1)$.

Decimos que la ecuación (1.7) es de tipo parabólico si cumple con la siguiente desigualdad (llamada condición de elipticidad), para una constante $\alpha > 0$

$$a(x, t) \geq \alpha.$$

Ahora vamos a dar el siguiente ejemplo que da un caso específico de las ecuaciones parabólicas. Dicha ecuación resultante es la ecuación de calor.

Ejemplo 1.4.1 *Para el operador (1.8) y la ecuación (1.7) se tiene $a(x, t) \equiv 1$, $b(x, t) \equiv c(x, t) \equiv v \equiv 0$. Entonces $Ay = -y_{xx}$, y la ecuación (1.7) se transforma en la ecuación de calor. Además, observamos que para $\alpha = 1$ se satisface la condición de elipticidad.*

1.4.1. Motivación

Vamos a dar una motivación para la definición de solución débil de la ecuación parabólica (1.7). Para ello haremos una analogía con el Ejemplo 1.2.11 visto con anterioridad. Primero vamos a suponer temporalmente que la solución $y = y(x, t)$ de (1.7) es infinitamente diferenciable, por lo que podemos multiplicar la ecuación (1.7) por una función suave del conjunto de funciones de prueba $z_0 \in \mathcal{D}(0, 1)$, e integrar en el conjunto $(0, 1)$. Tal como pasa en el Ejemplo 1.2.11, deberemos integrar algunos términos por partes. Luego, observamos que $z_0 = 0$ en la frontera. Ahora, recordamos que el conjunto de funciones de prueba $\mathcal{D}(0, 1)$ es denso en el espacio $H_0^1(0, 1)$, por lo que podemos reemplazar la función z_0 por $z \in H_0^1(0, 1)$. La ecuación resultante de multiplicar $z \in H_0^1(0, 1)$ por (1.7) se satisface para $y \in H_0^1(0, 1)$. Como se mencionó en la Sección 1.2.3, si la solución y pertenece al espacio H_0^1 , entonces podemos cumplir con las condiciones de frontera de la ecuación parabólica (1.7).

Vamos a detallar analíticamente lo dicho en el párrafo anterior. Comenzamos dando la siguiente definición:

Definición 1.4.2 *Sea $1 \leq p < \infty$. El espacio $L^p(0, T; (0, 1))$ consta de todas las funciones medibles $u : [0, T] \rightarrow (0, 1)$ con*

$$\|u\|_{L^p(0, T; (0, 1))} := \left(\int_0^T \|u(t)\|_{L^2(0, 1)}^p dt \right)^{1/p} < \infty.$$

Además,

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; (0, 1))} := \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{L^2(0, 1)} < \infty.$$

Ahora, para esta sección vamos a considerar a la solución y de (1.7) como un mapeo que va del intervalo $[0, T]$ al espacio $H_0^1(0, 1)$, en lugar de tomarla como una función que evalúa a las variables x , y juntas, es decir

$$y : [0, T] \rightarrow H_0^1(0, 1),$$

tal que

$$[y(t)](x) := y(x, t) \quad \text{en } Q.$$

De manera similar definimos

$$v : [0, T] \rightarrow L^2(0, 1),$$

tal que

$$[v(t)](x) := v(x, t) \quad \text{en } Q.$$

Efectuamos el producto interno entre la ecuación (1.7) con una función fija $z \in H_0^1(0, 1)$, por lo que se tiene

$$(y_t, z)_{L^2(0,1)} + (Ay, z)_{L^2(0,1)} = (v, z)_{L^2(0,1)}. \quad (1.9)$$

Recordamos que $(\cdot, \cdot)_{L^2(0,1)}$ denota el producto interno en $L^2(0, 1)$ (ver Teorema 1.2.6), es decir

$$(v, z)_{L^2(0,1)} = \int_0^1 v z \, dx. \quad (1.10)$$

Sustituyendo (1.8) en (1.9) y desarrollando el producto interno de este término como en la ecuación (1.10) se tiene

$$(Ay, z)_{L^2(0,1)} = \int_0^1 (Ay)z \, dx = \int_0^1 - (a(x, t)y_x)_x z + (b(x, t)y_x) z + c(x, t)yz \, dx. \quad (1.11)$$

Integramos por partes el primer término de (1.11)

$$\begin{aligned} \int_0^1 - (a(x, t)y_x)_x z \, dx &= - (a(x, t)y_x) z \Big|_0^1 + \int_0^1 a(x, t)y_x z_x \, dx \\ &= \int_0^1 a(x, t)y_x z_x \, dx, \end{aligned} \quad (1.12)$$

esto debido a que $z \in H_0^1(0, 1)$. Sustituyendo (1.12) en (1.11) se tiene

$$(Ay, z)_{L^2(0,1)} = \int_0^1 a(x, t)y_x z_x + b(x, t)y_x z + c(x, t)yz \, dx.$$

Establecemos $(Ay, z)_{L^2(0,1)} = B[y, z; t]$, donde $B : H_0^1 \times H_0^1 \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces la ecuación (1.9) se convierte en

$$(y_t, z)_{L^2(0,1)} + B[y, z; t] = (v, z)_{L^2(0,1)}. \quad (1.13)$$

Ahora, de la ecuación (1.7) podemos observar que

$$y_t = v - Ay = f^0 + f_x^1 \quad \text{en } Q, \quad (1.14)$$

con

$$\begin{cases} f_0 := v - b(x, t)y_x - c(x, t)y, \\ f_j := a(x, t)y_x. \end{cases} \quad (1.15)$$

Gracias al Teorema 1.2.20 y a las ecuaciones (1.13),(1.14), podemos suponer que y_t es un elemento de H^{-1} .

Para poder continuar mencionamos el siguiente teorema (su demostración se puede consultar en [Eva10]), el cual dice que la solución del sistema (1.7) perteneciente al espacio de Sobolev H_0^1 , puede redefinirse como una función continua, proporcionando una manera más sencilla de trabajar en este espacio. Además, esta función que se ha redefinido es continua en el espacio $[0, T]$, lo que permite satisfacer las condiciones iniciales de nuestra ecuación parabólica (1.7).

Teorema 1.4.3 *Supongamos $y \in L^2(0, T; H_0^1(0, 1))$, con $y_t \in L^2(0, T; H^{-1}(0, 1))$. Entonces*

$$y \in C([0, T]; L^2(0, 1)).$$

El mapeo

$$t \mapsto \|y(t)\|_{L^2(0,1)}^2,$$

es absolutamente continuo, con

$$\frac{d}{dt} \|y(t)\|_{L^2(0,1)}^2 = 2(y_t, y(t))_{L^2(0,1)},$$

para $0 \leq t \leq T$ c.t.p. Además, se tiene la siguiente desigualdad

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|y(t)\|_{L^2(0,1)} \leq C \left(\|y\|_{L^2(0,T;H_0^1(0,1))} + \|y_t\|_{L^2(0,T;H^{-1}(0,1))} \right),$$

donde la constante C depende solo de T .

Luego de la ecuación (1.15) podemos intuir que es factible encontrar una solución débil tal que $y_t \in H^{-1}(0, 1)$, para el tiempo $0 \leq t \leq T$ c.t.p.

Definición 1.4.4 *Una función $y \in L^2(0, T; H_0^1(0, 1))$, con $y_t \in L^2(0, T; H^{-1}(0, 1))$, es una solución débil de la ecuación parabólica (1.7) si se cumple*

$$(y_t, z)_{H^{-1}, H_0^1} + B[y, z; t] = (\mathbf{v}, z)_{L^2(0,1)},$$

para cada $z \in H_0^1(0, 1)$ y en $0 \leq t \leq T$, c.t.p. (donde recordamos que $(\cdot, \cdot)_{H^{-1}, H_0^1}$ denota el producto de dualidad entre $H^{-1}(0, 1)$ y $H_0^1(0, 1)$), y además,

$$[y(0)](x) = y_0.$$

1.4.2. Existencia y unicidad

Dados los propósitos de esta tesis, nos basaremos en el método de Galerkin (los detalles de este método se dan en [Eva10]) para la demostración de la existencia y unicidad de soluciones débiles para ecuaciones parabólicas. La idea básica de este método consiste en aproximar la solución $y : [0, T] \rightarrow H_0^1(0, 1)$ de la ecuación parabólica (1.7), a través de funciones $y_m : [0, T] \rightarrow E_m$, donde $E_m \subset H_0^1(0, 1)$ es un subespacio de dimensión finita de tamaño m . Para nuestro análisis $E_m = (w_1, \dots, w_m)$, $m \in \mathbb{N}$, donde podemos considerar que $w_m = w_m(x)$ son

funciones suaves. La solución aproximada $y_m(t)$ se encuentra en el espacio de dimensión finita generado por E_m , tal que $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}}^\infty$ es una base ortogonal de $H_0^1(0, 1)$ y $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}}^\infty$ es una base ortonormal de $L^2(0, 1)$. Esto es así debido a que para obtener $y_m(t)$, hacemos la proyección de la ecuación parabólica (1.7) sobre E_m . Al hacer esta proyección obtenemos un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs), cuya solución se da por la teoría de EDOs (ver [CL55]). Cada $y_m(t)$ satisface una estimación de energía dada por el siguiente teorema (cuya demostración se da en [Eva10]).

Teorema 1.4.5 (Estimación de energía) *Existe una constante C , que depende de T , $(0, 1)$, y de los coeficientes de (1.8), tal que*

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq T} \|y_m(t)\|_{L^2(0,1)} + \|y_m\|_{L^2(0,T;H_0^1(0,1))} + \|y_{m,t}\|_{L^2(0,T;H^{-1}(0,1))} \\ \leq C (\|\mathbf{v}\|_{L^2\{0,T;L^2(0,1)\}} + \|y_0\|_{L^2(0,1)}). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Estas estimaciones son uniformes para cada $m \in \mathbb{N}$, lo que permite tomar el límite $m \rightarrow \infty$ y obtener la solución completa de la ecuación parabólica (1.7). Para explicar esto más a fondo, de la ecuación (1.16), vemos que la sucesión $\{y_m\}_{m=1}^\infty$ está acotada uniformemente en $L^2(0, T; H_0^1(0, 1))$, y $\{y_{m,t}\}_{m=1}^\infty$ está acotado en $L^2(0, T; H^{-1}(0, 1))$. Entonces, por el Teorema 1.3.2, existe una subsucesión $\{y_{m_i}\}_{i=1}^\infty \subset \{y_m\}_{m=1}^\infty$ y una función $y \in L^2(0, T; H_0^1(0, 1))$, con $y_t \in L^2(0, T; H^{-1}(0, 1))$, tal que

$$\begin{cases} \mathbf{y}_{m_i} \rightharpoonup \mathbf{y} & \text{débilmente en } L^2(0, T; H_0^1(0, 1)), \\ \mathbf{y}_{m_i,t} \rightharpoonup y_t & \text{débilmente en } L^2(0, T; H^{-1}(0, 1)). \end{cases}$$

Este argumento es la base para demostrar la existencia de una solución débil de las ecuaciones parabólicas. Mencionamos entonces el siguiente teorema (su demostración se puede ver en [Eva10]).

Teorema 1.4.6 (Existencia de soluciones débiles) *Existe una solución débil de (1.7)*

La unicidad se da en el siguiente teorema (cuya demostración se puede consultar en [Eva10]).

Teorema 1.4.7 (Unicidad de las soluciones débiles) *Una solución débil de (1.7) es única.*

Controlabilidad de sistemas lineales en dimensión finita (EDO)

Para el estudio del control de la ecuación de calor deberemos explicar antes algunas definiciones aplicadas a ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) en dimensión finita, esto con el fin de presentar algunas ideas clave que podrán ayudarnos posteriormente a explorar técnicas utilizadas para la demostración de la controlabilidad y observabilidad de las ecuaciones parciales en una dimensión.

Comenzaremos explicando algunas nociones de control clásico, para ello definimos la siguiente notación. Sea $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función dependiente del tiempo, entonces

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Además, sea $m, n > 0$ con $m, n \in \mathbb{N}$, y consideramos el siguiente sistema para un tiempo $T > 0$.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & t \in (0, T), \\ x(0) = x^0, \end{cases} \quad (2.1)$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $x^0 \in \mathbb{R}^n$ es el dato inicial. La variable $x(t)$ representa el estado, y $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$, representa el control.

Tal como se describe en [Kuo62], para facilidad de expresión y manipulación, el sistema (2.1), el cual es dinámico, lineal e invariante en el tiempo, está dado en la forma de espacio de estados. De esta manera, el conocimiento de la variable $x(t)$, en cualquier instante de tiempo $t_0 > 0$ y la información sobre la entrada aplicada en este mismo momento t_0 , son suficientes para determinar el estado del sistema en cualquier momento $t > t_0$. Se necesita encontrar una forma para modificar el comportamiento de la ecuación (2.1) expresado en términos de la variable $x(t)$, por medio de acciones de control que se aplican a la entrada del sistema a través de la variable $u(t)$. En la práctica lo que se requiere es tener menos controles que ecuaciones (estados), es decir, que $m < n$.

Ahora, deberemos ver que el sistema tenga una solución. En [Kai80] se obtiene una solución para la ecuación (2.1), es decir, dada una condición inicial $x^0 \in \mathbb{R}^n$ y una función $u(t) \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$, el sistema (2.1) tiene una única solución $x(t)$, caracterizada por la fórmula de variación de las constantes

$$x(t) = e^{At}x^0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s) ds, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.2)$$

La ecuación (2.2) nos dice como es la solución de (2.1), y es bien conocida para las EDOs lineales de dimensión finita. Sabiendo esto, ahora nos enfocaremos en estudiar la controlabilidad de este sistema.

Como ya se ha mencionado, el objetivo de este capítulo es explorar algunos conceptos aplicados a las ecuaciones diferenciales ordinarias, como una motivación para entender las definiciones que se utilizarán para la controlabilidad y observabilidad de la ecuación de calor en el Capítulo 3.

2.1. Controlabilidad exacta y controlabilidad a cero para EDOs

La existencia de un control que permite llevar el estado inicial de un sistema lineal de EDOs a un estado final deseado está ligado al concepto de controlabilidad exacta. En control clásico, la noción de controlabilidad y controlabilidad exacta son idénticas, sin embargo, para ser más explícitos y evitar confusiones, en este texto se utiliza el término controlabilidad exacta. Por otro lado, la controlabilidad a cero consiste en encontrar un control que lleve el estado inicial de un sistema lineal de EDOs al estado final cero. Veremos más adelante que un sistema de EDOs es exactamente controlable si y solo si es controlable a cero. Toda esta teoría está bien fundamentada, e incluso existe el criterio de controlabilidad de Kalman (ver [Kai80, LÓ9]) que da una condición suficiente y necesaria para demostrar la controlabilidad exacta de un sistema de EDOs, algo que no pasa para EDPs. En [Zua02, FR71] se explica porque la controlabilidad exacta no se logra para un sistema de EDPs (esto también se analiza en el Capítulo 3).

Dicho lo anterior damos la siguiente definición:

Definición 2.1.1 *El sistema (2.1) se dice exactamente controlable al tiempo $T > 0$, si dado cualquier dato inicial $x^0 \in \mathbb{R}^n$ y cualquier dato final $x^1 \in \mathbb{R}^n$ existe un control $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ tal que la solución de (2.1) satisface*

$$x(T) = x^1.$$

Para enfocar de una mejor manera el concepto de controlabilidad exacta, daremos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.1.2 *Sea el sistema (2.1) donde*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad x^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix},$$

entonces se tiene que

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) + u, \\ \dot{x}_2(t) = x_2(t). \end{cases}$$

Usando la ecuación (2.2), tenemos que

$$\begin{cases} x_1(t) = e^t x_1^0 + \int_0^t e^{(t-s)} u(s) ds, \\ x_2(t) = e^t x_2^0. \end{cases}$$

Observamos que este sistema no es exactamente controlable, pues x_2 está determinado únicamente por x_2^0 . \square

Ejemplo 2.1.3 Sea el sistema (2.1), tal que se tiene un solo control y dos estados ($n=2$, $m=1$). Consideremos entonces

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix},$$

con condiciones iniciales y finales

$$x^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}, \quad x^1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Por lo tanto tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = u(t) - x_1(t). \end{cases} \quad (2.4)$$

En (2.4), observamos que una de las ecuaciones está siendo afectada explícitamente por el control $u(t)$, sin embargo, determinar la solución del sistema por medio de la fórmula de variación de constantes no es sencillo debido a la complejidad del cálculo de la matriz exponencial, por lo que deberemos utilizar otro método para corroborar que en este ejemplo el sistema es exactamente controlable. Para ello, dado (2.3) arbitrario, es posible construir una función suave $z(t)$ de modo que

$$\begin{cases} z(0) = x_1^0, & z(T) = x_1^1, \\ \dot{z}(0) = x_2^0, & \dot{z}(T) = x_2^1. \end{cases} \quad (2.5)$$

Dicha función podemos construirla seleccionando, por ejemplo, un polinomio cúbico (ya que es posible obtener su segunda derivada) tal que

$$\begin{cases} z(t) = at^3 + bt^2 + ct + d, \\ \dot{z}(t) = 3at^2 + 2bt + c, \\ \ddot{z}(t) = 6at + 2b. \end{cases} \quad (2.6)$$

donde a, b, c, d son constantes. Luego, de (2.5) y (2.6) podemos deducir que $z(0) = d = x_1^0$ y $\dot{z}(0) = c = x_2^0$. De la misma manera, se sigue que

$$\begin{cases} z(T) = x_1^1 = aT^3 + bT^2 + x_2^0T + x_1^0, \\ \dot{z}(T) = x_2^1 = 3aT^2 + 2bT + x_2^0, \end{cases}$$

lo que implica el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1^1 - x_1^0 - x_2^0T &= aT^3 + bT^2, \\ x_2^1 - x_2^0 &= 3aT^2 + 2bT. \end{aligned}$$

Resolvemos utilizando el método de Gauss-Jordan, entonces, denotamos con i_1, i_2 para referirnos a la primer y segunda fila de la siguiente matriz, por lo que se tiene

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cc|c} T^3 & T^2 & x_1^1 - x_1^0 - x_2^0 T \\ 3T^2 & 2T & x_2^1 - x_2^0 \end{array} \right) \xrightarrow{i_2 T = i_2} \left(\begin{array}{cc|c} T^3 & T^2 & x_1^1 - x_1^0 - x_2^0 T \\ 3T^3 & 2T^2 & x_2^1 T - x_2^0 T \end{array} \right) \xrightarrow{i_2 - 3i_1 = i_2} \\ & \left(\begin{array}{cc|c} T^3 & T^2 & x_1^1 - x_1^0 - x_2^0 T \\ 0 & -T^2 & -3x_1^1 + 3x_1^0 + 2x_2^0 T + x_2^1 T \end{array} \right) \xrightarrow{i_1 + i_2 = i_1} \\ & \left(\begin{array}{cc|c} T^3 & 0 & -2x_1^1 + 2x_1^0 + x_2^0 T + x_2^1 T \\ 0 & -T^2 & -3x_1^1 + 3x_1^0 + 2x_2^0 T + x_2^1 T \end{array} \right). \end{aligned}$$

Dividiendo la primer fila de este último resultado entre T^3 y la segunda fila entre $-T^2$ se tiene

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{-2x_1^1 + 2x_1^0 + x_2^0 T + x_2^1 T}{T^3} \\ 0 & 1 & \frac{3x_1^1 - 3x_1^0 - 2x_2^0 T - x_2^1 T}{T^2} \end{array} \right).$$

Por lo tanto obtenemos los valores de las constantes de la ecuación (2.6), es decir

$$\begin{cases} a = \frac{-2x_1^1 + 2x_1^0 + x_2^0 T + x_2^1 T}{T^3}, & c = x_2^0, \\ b = \frac{3x_1^1 - 3x_1^0 - 2x_2^0 T - x_2^1 T}{T^2}, & d = x_1^0. \end{cases}$$

Ahora, tomaremos $u(t) = \ddot{z}(t) + z(t)$ debido a que por (2.5), tenemos que tanto $x_1(t)$ como la función $z(t)$ tienen las mismas condiciones iniciales y finales, es decir, por la linealidad y continuidad de (2.1), así como la existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones diferenciales, $x_1(t)$ coincide con $z(t)$. Luego se tiene que

$$\ddot{x}_1(t) = \dot{x}_2(t) = u(t) - x_1(t) \implies \ddot{x}_1(t) + x_1(t) = u(t) = \ddot{z}(t) + z(t),$$

entonces se satisfacen los requerimientos de controlabilidad. \square

Vemos que en el Ejemplo 2.1.3, la ecuación $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$, de (2.4) es afectada indirectamente por el control $u(t)$, lo cual se observa más claramente al construir la función $z(t)$, por lo que es posible alcanzar cualquier estado final por medio de acciones de control y dado un dato inicial. Gracias a la diversidad de formas en que se puede establecer $z(t)$, podemos advertir que $u(t)$ no es único, sino que existe una infinidad de controles. Esto se ejemplifica de una mejor manera en [DOP02], donde se hace un análisis de la controlabilidad exacta de la ecuación de calor con coeficientes de difusión discontinua, aquí el objetivo es proporcionar un control, de varios que existen, tal que se pueda hallar la trayectoria ideal que nos permita llegar de una condición inicial dada a un estado final, es decir se deberán calcular acciones de control tal que se determine el valor óptimo de las variables que definen el sistema en cada instante de tiempo, dentro de un intervalo dado.

En [Zua02] se define la controlabilidad exacta como la posibilidad de llegar cualquier estado final x^1 dada una condición inicial x^0 y un control $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$. Por lo tanto, observamos

que hay una equivalencia entre alcanzar cualquier vector de \mathbb{R}^n y la controlabilidad exacta. Escribiremos esto formalmente, para ello definiremos el siguiente conjunto, al cual llamaremos conjunto de estados alcanzables

$$R(T, x^0) = \{x(T) \in \mathbb{R}^n \mid x \text{ es solución de (2.1) con } u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)\},$$

por lo tanto, se tiene que

$$\text{Controlabilidad exacta} \iff R(T, x^0) = \mathbb{R}^n,$$

para cualquier $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Por esta definición de controlabilidad exacta y dado que el sistema (2.1) es lineal, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $x^1 \equiv 0$. Por otro lado si $x^1 \neq 0$, se puede resolver

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) & \text{con } t \in (0, T), \\ y(T) = x^1, \end{cases}$$

y definir $z(t) = x(t) - y(t)$, donde

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ x(0) = x^0. \end{cases}$$

Dado que $z(t) = x(t) - y(t) \Rightarrow \dot{z}(t) = \dot{x}(t) - \dot{y}(t)$, entonces

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{y}(t) \\ &= Ax(t) + Bu(t) - Ay(t) \\ &= A(x(t) - y(t)) + Bu(t) \\ &= Az(t) + Bu(t). \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t).$$

Luego $z(0) = x(0) - y(0) = x^0 - y(0)$, entonces tenemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + Bu, \\ z(0) = x^0 - y(0), \end{cases}$$

Observamos que $z(T) = x(T) - y(T)$, sustituyendo $y(T)$, tenemos

$$\begin{aligned} z(T) &= x(T) - y(T), \\ &= x(T) - x^1. \end{aligned}$$

Si $z(T) = 0 \implies x(T) = x^1$.

Esta noción se utilizará más adelante, y dice que si tenemos un sistema lineal el cual queremos controlar para alcanzar un estado final, es más factible reducir el problema de manera que podamos estudiar la controlabilidad que nos lleva hacia un estado final cero. Por lo tanto, cuando tengamos un problema de control para un sistema tal que se requiera llegar a cualquier estado final, podemos proponer un sistema auxiliar con el que podamos simplificar a un problema de encontrar la controlabilidad del sistema de un dato inicial a cero. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 2.1.4 *El sistema (2.1)*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & t \in (0, T), \\ x(0) = x^0. \end{cases}$$

se dice controlable a cero en tiempo $T > 0$ si dado cualquier dato inicial $x^0 \in \mathbb{R}^n$ existe $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ tal que $x(T) = 0$.

Entonces, de la definición anterior se tiene que:

$$\text{controlabilidad a cero} \iff 0 \in R(x^0, T),$$

para cualquier $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Como consecuencia de esto tenemos:

$$\text{controlabilidad a cero} \iff \text{Controlabilidad exacta.}$$

Como conclusión, podemos decir entonces que el sistema (2.1) es controlable a cero si y solo si $0 \in R(T, x^0)$.

2.2. Observabilidad para EDOs

La razón por la cual se estudiará el concepto de observabilidad es porque éste implica la controlabilidad exacta y viceversa. La manera en como se relaciona la observabilidad y la controlabilidad exacta es a través de una desigualdad, conocida como desigualdad de observabilidad. Esta idea fue introducida por J.L. Lions en [Lio88a, Lio88b], a través de un procedimiento llamado el método de unicidad de Hilbert (HUM). Tal como se describe en [Ped00], el método de unicidad de Hilbert permite caracterizar el espacio donde se encuentra el dato inicial para garantizar la controlabilidad exacta y así poder identificar uno o varios controles óptimos, es decir, con este método se encuentra una trayectoria ideal que nos permite llegar de una condición inicial dada a un estado final, tal que se minimice el costo de energía. Es útil mencionar que el método HUM se utiliza para el estudio de la controlabilidad exacta, mientras que una variante de este método se usa para el estudio de la controlabilidad aproximada, lo cual se verá en el Capítulo 3. En varios artículos como en [Zua02, Zua97] se menciona que utilizar el método HUM en la ecuación de calor resulta ser bastante complicado, sin embargo este método es de utilidad si se desea estudiar otros casos específicos de las ecuaciones diferenciales parciales, como la ecuación de onda [Kom89]. En esta sección se estudiará el método HUM como introducción para establecer varios conceptos que nos ayudarán más adelante. Dividiremos el método HUM por etapas, las cuales se explicarán a lo largo de las siguientes subsecciones. En la subsección 2.2.1 se plantea la desigualdad de observabilidad, mientras que en la subsección 2.2.2 se demuestra que la observabilidad implica la controlabilidad exacta.

2.2.1. Desigualdad de observabilidad

Explicaremos el método de unicidad de Hilbert paso a paso para deducir la relación entre la observabilidad y la controlabilidad exacta. Este método se estudia en [Lio88a, Ben93], sin

embargo, debido a que en la presente sección se analiza la observabilidad para un sistema de EDOs, haremos algunas variaciones de este procedimiento de una manera similar a como se explica en [Lag91, CGL94].

En la primera etapa del método HUM se considera el sistema lineal que deseamos controlar, este sistema fue descrito en la sección anterior en la ecuación (2.1). Para la segunda etapa del método HUM debemos definir el sistema adjunto homogéneo de la ecuación (2.1), para ello se introducirá el concepto de operador adjunto [Kub12, DM99]. Denotamos con A^* como la matriz adjunta de A , es decir, aquella con la propiedad

$$(Ax, y)_{\mathbb{R}^n} = (x, A^*y)_{\mathbb{R}^n}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

y entonces, podemos considerar el sistema adjunto homogéneo correspondiente a la ecuación (2.1), con $\varphi = \varphi(t)$, es decir

$$\begin{cases} -\dot{\varphi} = A^*\varphi, & \text{con } t \in (0, T), \\ \varphi(T) = \varphi_T. \end{cases} \quad (2.7)$$

Para cada $\varphi_T \in \mathbb{R}^n$, el sistema (2.7) puede ser resuelto hacia atrás en el tiempo. Podemos aplicar un cambio de variable ($t \rightarrow T-t$) a la ecuación (2.7) para generar un nuevo sistema que pueda ser resuelto hacia adelante en el tiempo. Para ello definimos $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(T-t)$, que implica $\dot{\tilde{\varphi}}(t) = -\dot{\varphi}(T-t)$, y $A^*\tilde{\varphi}(t) = A^*\varphi(T-t)$, por lo que $\dot{\tilde{\varphi}}(t) - A^*\tilde{\varphi}(t) = -\dot{\varphi}(T-t) - A^*\varphi(T-t) = 0$ por (2.7). Además $\tilde{\varphi}(0) = \varphi_T$, entonces podemos formar la siguiente ecuación

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\varphi}}(t) = A^*\tilde{\varphi}(t), & \text{con } t \in (0, T), \\ \tilde{\varphi}(0) = \tilde{\varphi}_0. \end{cases} \quad (2.8)$$

La continuidad de la solución $\tilde{\varphi}$ para este nuevo sistema y los criterios de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales ordinarias se aplican a (2.8) como por ejemplo en [CL55], por lo que podemos decir que la ecuación (2.7) cumple con esta misma teoría para EDOs, entonces existe una única solución $\varphi \in L^2(0, T; \mathbb{R}^n)$ para nuestro sistema adjunto que además es continua. Dicho esto se sigue la tercer etapa del método de unicidad de Hilbert. De igual manera que se hizo con la matriz A , denotamos como B^* a la matriz adjunta de B , tal que satisface lo siguiente

$$(Bu, \varphi)_{\mathbb{R}^n} = (u, B^*y)_{\mathbb{R}^m},$$

para todo $\varphi \in \mathbb{R}^n$, y $u \in \mathbb{R}^m$.

Ahora daremos el siguiente lema, el cual propone una relación de dualidad. En [Lag91], se menciona que dicha relación de dualidad caracteriza los estados finales alcanzables del sistema adjunto mediante la acción de controles.

Lema 2.2.1 *Un dato inicial $x^0 \in \mathbb{R}^n$ de (2.1) es controlado a cero al tiempo $T > 0$, usando un control $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$, si y solo si:*

$$\int_0^T (u(t), B^*\varphi(t))_{\mathbb{R}^m} dt + (x^0, \varphi(0))_{\mathbb{R}^n} = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\varphi_T \in \mathbb{R}^n$ arbitrario y φ la solución de la ecuación (2.7). Tomamos la ecuación $\dot{x} = Ax + Bu$ y calculamos

$$(\dot{x}, \varphi)_{\mathbb{R}^n} = (Ax, \varphi)_{\mathbb{R}^n} + (Bu, \varphi)_{\mathbb{R}^n}. \quad (2.9)$$

Ahora efectuamos el producto interno en \mathbb{R}^n entre la ecuación $-\dot{\varphi} = A^*\varphi$, y la solución x del sistema (2.1)

$$\begin{aligned} -(\dot{\varphi}, x)_{\mathbb{R}^n} &= (A^*\varphi, x)_{\mathbb{R}^n} \\ &= (\varphi, Ax)_{\mathbb{R}^n} \\ &= (Ax, \varphi)_{\mathbb{R}^n}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

De las ecuaciones (2.10) y (2.9) se tiene que

$$(\dot{x}, \varphi)_{\mathbb{R}^n} + (\dot{\varphi}, x)_{\mathbb{R}^n} = (Bu, \varphi)_{\mathbb{R}^n}.$$

Por las propiedades del producto interno y el Teorema 1.4.3 tenemos

$$(\dot{x}, \varphi)_{\mathbb{R}^n} + (x, \dot{\varphi})_{\mathbb{R}^n} = \frac{d}{dt} (x, \varphi)_{\mathbb{R}^n} = (Bu, \varphi)_{\mathbb{R}^n},$$

que es equivalente a la siguiente ecuación

$$\int_0^T \frac{d}{dt} (x, \varphi)_{\mathbb{R}^n} dt = \int_0^T (Bu, \varphi)_{\mathbb{R}^n} dt,$$

Aplicamos el Teorema fundamental del cálculo para obtener

$$(x(T), \varphi(T))_{\mathbb{R}^n} - (x(0), \varphi(0))_{\mathbb{R}^n} = \int_0^T (Bu, \varphi)_{\mathbb{R}^n} dt.$$

Como $\varphi(T) = \varphi_T$ y $x(0) = x^0$, entonces

$$\begin{aligned} (x(T), \varphi_T)_{\mathbb{R}^n} - (x^0, \varphi(0))_{\mathbb{R}^n} &= \int_0^T (Bu, \varphi)_{\mathbb{R}^n} dt \\ &= \int_0^T (u, B^*\varphi)_{\mathbb{R}^m} dt. \end{aligned}$$

usando nuestra hipótesis observamos que

$$x(T) = 0,$$

con lo cual se demuestra nuestro resultado. \square

El Lema 2.2.1 resulta ser una herramienta muy útil, pues es fundamental al momento de deducir la desigualdad de observabilidad y para demostrar algunos otros conceptos que se exponen más adelante.

Ahora, para la etapa 4 del método HUM, introducimos el funcional cuadrático, $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, propuesto en [CGL94], cuyos puntos críticos caracterizan el control. Tenemos entonces

$$J(\varphi_T) = \frac{1}{2} \int_0^T \|B^* \varphi(t)\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt + (x^0, \varphi(0))_{\mathbb{R}^n}, \quad (2.11)$$

donde φ es la solución del sistema adjunto (2.7) con dato inicial $\varphi_T \in \mathbb{R}^n$ al tiempo $T > 0$. Lo que veremos a continuación, es que la igualdad del Lema 2.2.1, es una condición de optimalidad para este funcional y el punto crítico es el control que buscamos y nos lleva de un dato inicial x^0 a cero. Enunciaremos entonces el siguiente lema.

Lema 2.2.2 *Suponga que el funcional J definido en (2.11) tiene un minimizador $\hat{\varphi}_T \in \mathbb{R}^n$ y sea $\hat{\varphi}$ la solución del sistema adjunto (2.7) con dato inicial $\hat{\varphi}_T$. Entonces*

$$u = B^* \hat{\varphi},$$

es un control para el sistema (2.1) con dato inicial x^0 .

DEMOSTRACIÓN. Si $\hat{\varphi}_T$ es un punto donde J alcanza su mínimo, entonces la derivada de Gateaux del funcional J , en el punto $\hat{\varphi}_T$, en la dirección φ_T , es igual a cero, es decir

$$\nabla J(\hat{\varphi}_T) \varphi_T = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{J(\hat{\varphi}_T + h\varphi_T) - J(\hat{\varphi}_T)}{h} = 0, \quad \forall \varphi_T \in \mathbb{R}^n. \quad (2.12)$$

Sabemos que φ es solución del sistema (2.7) con dato inicial φ_T . Ahora sea $\hat{\varphi}$ solución del siguiente sistema

$$\begin{cases} -\dot{\hat{\varphi}} = A^* \hat{\varphi}, & \text{con } t \in (0, T), \\ \hat{\varphi}(T) = \hat{\varphi}_T. \end{cases} \quad (2.13)$$

De las ecuaciones (2.7) y (2.13) se obtiene

$$\begin{cases} -\dot{\hat{\varphi}} - h\dot{\varphi} = A^* \hat{\varphi} + hA^* \varphi, & \text{con } t \in (0, T), \\ \hat{\varphi}(T) + h\varphi(T) = \hat{\varphi}_T + h\varphi_T, \end{cases}$$

que es equivalente al siguiente sistema con solución $(\hat{\varphi} + h\varphi)$

$$\begin{cases} -\frac{d}{dt}(\hat{\varphi} + h\varphi) = A^*(\hat{\varphi} + h\varphi), & \text{para } t \in (0, T), \\ \hat{\varphi}(T) + h\varphi(T) = (\hat{\varphi}_T + h\varphi_T). \end{cases} \quad (2.14)$$

Gracias a los sistemas (2.13) y (2.14) podemos calcular la derivada direccional (2.12), y de (2.11) se sigue

$$\begin{aligned} \nabla J(\hat{\varphi}_T) \varphi_T &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{2} \int_0^T \|B^*(\hat{\varphi}(t) + h\varphi(t))\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt + (x^0, \hat{\varphi}(0) + h\varphi(0))_{\mathbb{R}^n} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \int_0^T \|B^* \hat{\varphi}(t)\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt - (x^0, \hat{\varphi}(0))_{\mathbb{R}^n} \right]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Desarrollamos por separado los términos de la ecuación (2.15), es decir, para el primer sumando se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^T \|B^* (\hat{\varphi}(t) + h\varphi(t))\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt &= \frac{1}{2} \int_0^T (B^* (\hat{\varphi}(t) + h\varphi(t)), B^* (\hat{\varphi}(t) + h\varphi(t)))_{\mathbb{R}^m} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \|B^* \hat{\varphi}(t)\|_{\mathbb{R}^m}^2 + h^2 \|B^* \varphi(t)\|_{\mathbb{R}^m}^2 \\ &\quad + 2h (B^* \hat{\varphi}(t), B^* \varphi(t))_{\mathbb{R}^m} dt, \end{aligned} \quad (2.16)$$

y además, aplicamos las propiedades del producto interno para el segundo sumando de (2.15)

$$(x^0, \hat{\varphi}(0) + h\varphi(0))_{\mathbb{R}^n} = (x^0, \hat{\varphi}(0))_{\mathbb{R}^n} + h (x^0, \varphi(0))_{\mathbb{R}^n}. \quad (2.17)$$

Sustituimos los resultados (2.16), (2.17) en (2.15) y eliminando términos semejantes obtenemos

$$\begin{aligned} \nabla J(\hat{\varphi}_T)\varphi_T &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{2} \int_0^T h^2 \|B^* \varphi(t)\|_{\mathbb{R}^m}^2 + 2h (B^* \hat{\varphi}(t), B^* \varphi(t))_{\mathbb{R}^m} dt + h (x^0, \varphi(0))_{\mathbb{R}^n} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\int_0^T \frac{h}{2} \|B^* \varphi(t)\|_{\mathbb{R}^m}^2 + (B^* \hat{\varphi}(t), B^* \varphi(t))_{\mathbb{R}^m} dt + (x^0, \varphi(0))_{\mathbb{R}^n} \right]. \end{aligned}$$

Aplicamos el límite $h \rightarrow 0$, e igualando la derivada direccional a cero se obtiene

$$\int_0^T (B^* \hat{\varphi}, B^* \varphi)_{\mathbb{R}^m} dt + (x^0, \varphi(0))_{\mathbb{R}^n} = 0 \quad \forall \varphi_T \in \mathbb{R}^n.$$

Definiendo $u = B^* \hat{\varphi}$ y usando el Lema 2.2.1 se obtiene el resultado. \square

En el Lema 2.2.2 tratamos con un problema de minimización para el funcional J , el cual puede ser resuelto usando la derivada de Gateaux. Luego, si J tiene mínimo en $\hat{\varphi}_T$, entonces podemos representar el control u mediante la multiplicación de la matriz B^* por la solución del sistema adjunto $\hat{\varphi}$, es decir, gracias al Lema 2.2.2 obtenemos un método que nos permite plantear el control u de una manera sencilla a través del mínimo del funcional J , que es el dato inicial del sistema adjunto.

Siguiendo con la quinta etapa del metodo de unicidad de Hilbert, enunciaremos la siguiente definición que introduce la desigualdad de observabilidad y nos permite satisfacer una de las hipótesis para que un funcional J tenga un minimizador. Esta definición puede consultarse en [Zua02, CGL94].

Definición 2.2.3 *Sea φ la solución del sistema adjunto (2.7). Se dice que el sistema (2.7) es observable al tiempo $T > 0$ si existe una constante universal $C_0 > 0$ tal que*

$$\int_0^T \|B^* \varphi\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt \geq C_0 \|\varphi(0)\|_{\mathbb{R}^n}^2, \quad (2.18)$$

para toda condición inicial $\varphi_T \in \mathbb{R}^n$.

La desigualdad (2.18) es importante porque permite saber que la información de nuestro sistema está determinada únicamente por el dato $\varphi(0)$.

Ahora sea el mapeo

$$\begin{aligned} M : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ \varphi_T &\longmapsto \varphi(0) \end{aligned}$$

donde φ es la solución correspondiente al dato inicial φ_T . El mapeo M es una transformación lineal con inversa acotada y por lo tanto se obtiene

$$\int_0^T \|B^* \varphi\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt \geq C_{O_2} \|\varphi(T)\|_{\mathbb{R}^n}^2, \quad (2.19)$$

que es una segunda variante de la desigualdad de observabilidad (2.18).

2.2.2. Relación entre observabilidad y controlabilidad exacta

Finalmente daremos la sexta, y última etapa del método HUM, donde se demuestra que el sistema (2.1) es exactamente controlable si y solo si, se satisface la desigualdad de observabilidad (2.18) para el sistema adjunto correspondiente. Observamos que la importancia de la desigualdad de observabilidad radica en que ayuda a demostrar la controlabilidad exacta. Sin embargo, antes de continuar, introduciremos algunas definiciones y teoremas que nos ayudarán a demostrar esta última etapa. Seguido de esto probaremos que el funcional J posee un único mínimo. Con ello podremos demostrar que la observabilidad implica la controlabilidad exacta para un sistema de EDOs. Por último exponemos el criterio de controlabilidad de Kalman, el cual es bien conocido en la teoría de control [Kai80, Kuo62, Poz08], y proporciona una manera sencilla para determinar la controlabilidad exacta de un sistema de EDOs. Entonces la importancia de este criterio radica en que es equivalente a la controlabilidad exacta.

Lema 2.2.4 *Sea la siguiente norma*

$$\|\varphi_T\|_{\mathcal{A}} = \left[\int_0^T \|B^* \varphi(t)\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt \right]^{1/2}, \quad (2.20)$$

donde denotamos $\|\cdot\|_{\mathcal{A}} \equiv \|\cdot\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^m)}$. Entonces, existen constantes $c_1, c_2 > 0$, tal que se satisface la siguiente equivalencia de normas

$$c_1 \|\varphi_T\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|\varphi_T\|_{\mathcal{A}} \leq c_2 \|\varphi_T\|_{\mathbb{R}^n}.$$

DEMOSTRACIÓN. Observamos que la equivalencia $c_1 \|\varphi_T\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|\varphi_T\|_{\mathcal{A}}$, ya está dada por la segunda variante de la desigualdad de observabilidad (2.19), por lo que $C_{O_2} = c_1$. Falta demostrar la equivalencia $\|\varphi_T\|_{\mathcal{A}} \leq c_2 \|\varphi_T\|_{\mathbb{R}^n}$, para ello de (2.20) se sigue que

$$\|\varphi_T\|_{\mathcal{A}}^2 = \int_0^T \|B^* \varphi(t)\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt.$$

De la desigualdad de Hölder (ver [Eva10, DM99]), con $p = 1$ y $q = \infty$, obtenemos

$$\|\varphi_T\|_{\mathcal{A}}^2 \leq T \max_{t \in [0, T]} \|B^* \varphi(t)\|_{\mathbb{R}^m}^2. \quad (2.21)$$

Ahora sea $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y además $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^m} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, definimos $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^{m,n}} : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que para una matriz $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ su norma inducida se define como

$$\|\mathcal{M}\|_{\mathbb{R}^{m,n}} = \sup_{\substack{v \in \mathbb{R}^n \\ v \neq 0}} \frac{\|\mathcal{M}v\|_{\mathbb{R}^m}}{\|v\|_{\mathbb{R}^n}}. \quad (2.22)$$

Lo anterior implica que para $B^* \in \mathbb{R}^{m \times n}$, y $\varphi(t) \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, obtendremos

$$\|B^*\|_{\mathbb{R}^{m,n}} = \sup_{\substack{v \in \mathbb{R}^n \\ v \neq 0}} \frac{\|B^*v\|_{\mathbb{R}^m}}{\|v\|_{\mathbb{R}^n}} \geq \frac{\|B^*\varphi(t)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|\varphi(t)\|_{\mathbb{R}^n}}.$$

Multiplicando ambos lados de la desigualdad anterior por $\|\varphi(t)\|_{\mathbb{R}^n}$ tenemos

$$\|B^*\varphi(t)\|_{\mathbb{R}^m} \leq \|B^*\|_{\mathbb{R}^{m,n}} \|\varphi(t)\|_{\mathbb{R}^n},$$

lo que implica

$$\|B^*\varphi(t)\|_{\mathbb{R}^m}^2 \leq \|B^*\|_{\mathbb{R}^{m,n}}^2 \|\varphi(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2. \quad (2.23)$$

Sustituyendo (2.23) en (2.21) se tiene

$$\|\varphi_T\|_{\mathcal{A}}^2 \leq T \max_{t \in [0, T]} \|B^*\varphi(t)\|_{\mathbb{R}^m}^2 \leq C_{B^*} \max_{t \in [0, T]} \|\varphi(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2, \quad (2.24)$$

con $C_{B^*} = T \|B^*\|_{\mathbb{R}^{m,n}}^2$.

Por otro lado tomamos la ecuación (2.7), de nuestro sistema adjunto homogéneo

$$-\dot{\varphi}(t) = A^* \varphi(t),$$

y efectuamos el producto interno en ambos lados de la igualdad con $\varphi(t) \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$-(\dot{\varphi}(t), \varphi(t))_{\mathbb{R}^n} = (A^* \varphi(t), \varphi(t))_{\mathbb{R}^n}.$$

Sea $-(\dot{\varphi}(t), \varphi(t))_{\mathbb{R}^n} = -\frac{1}{2}(\dot{\varphi}(t), \varphi(t))_{\mathbb{R}^n} - \frac{1}{2}(\varphi(t), \dot{\varphi}(t))_{\mathbb{R}^n}$, se sigue que

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\varphi(t), \varphi(t))_{\mathbb{R}^n} = -\frac{1}{2} ((\dot{\varphi}(t), \varphi(t))_{\mathbb{R}^n} + (\varphi(t), \dot{\varphi}(t))_{\mathbb{R}^n}) = (A^* \varphi(t), \varphi(t))_{\mathbb{R}^n},$$

lo que implica,

$$-\frac{d}{dt} \|\varphi(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2 = 2(A^* \varphi(t), \varphi(t))_{\mathbb{R}^n}.$$

Aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz a la igualdad anterior

$$-\frac{d}{dt} \|\varphi(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2 \leq 2 \|A^* \varphi(t)\|_{\mathbb{R}^n} \|\varphi(t)\|_{\mathbb{R}^n},$$

y utilizamos (2.22) como antes, y se tiene

$$-\frac{d}{dt}\|\varphi(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2 \leq C_{A^*}\|\varphi(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2,$$

con $C_{A^*} = 2\|A^*\|_{\mathbb{R}^n, n}$ como constante, y hacemos la siguiente integral en ambos lados de la desigualdad

$$-\int_t^T \frac{d}{dt}\|\varphi(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2 dt \leq C_{A^*} \int_t^T \|\varphi(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2 dt,$$

para obtener

$$-\|\varphi(T)\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \|\varphi(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2 \leq C_{A^*} \int_t^T \|\varphi(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2 dt.$$

Reescribimos la expresión anterior haciendo el siguiente cambio de variable

$$\|\varphi(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2 \leq \|\varphi_T\|_{\mathbb{R}^n}^2 + C_{A^*} \int_t^T \|\varphi(s)\|_{\mathbb{R}^n}^2 ds.$$

Empleando la desigualdad de Gronwall para ecuaciones que se resuelven hacia atrás en el tiempo (ver [SY09]), se tiene que

$$\|\varphi(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2 \leq \|\varphi_T\|_{\mathbb{R}^n}^2 e^{C_{A^*}(T-t)}$$

de donde se sigue que

$$\max_{t \in [0, T]} \|\varphi(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2 \leq \|\varphi_T\|_{\mathbb{R}^n}^2 \left(\max_{t \in [0, T]} e^{C_{A^*}(T-t)} \right) = C'_{A^*} \|\varphi_T\|_{\mathbb{R}^n}^2, \quad (2.25)$$

con $C'_{A^*} = e^{TC_{A^*}}$. Entonces de (2.24) y (2.25) obtendremos

$$\|\varphi_T\|_{\mathcal{A}}^2 \leq C_{B^*} \max_{t \in [0, T]} \|\varphi(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2 \leq c_2^2 \|\varphi_T\|_{\mathbb{R}^n}^2$$

con $c_2^2 = C'_{A^*} C_{B^*}$. □

Ahora describiremos el denominado método directo del cálculo de variaciones mediante el siguiente lema (ver [Rin18, Poz08]).

Lema 2.2.5 (Método directo del cálculo de variaciones) *Sea $(H, (\cdot, \cdot)_H)$ un espacio de Hilbert, y sea $J : H \rightarrow \mathbb{R}$ continuo, convexo y coercivo. Entonces J alcanza su mínimo en H . Más aún, si J es estrictamente convexo, el mínimo es único.*

Mencionamos la siguiente definición que se plantea en [Poz08], y establece la condición para que el funcional J sea coercivo.

Definición 2.2.6 *Sea $(H, (\cdot, \cdot)_H)$ un espacio de Hilbert. Un funcional $J : H \rightarrow \mathbb{R}$ se dice coercivo si para cualquier $u \in H$ se tiene*

$$\lim_{\|u\|_H \rightarrow \infty} J(u) = +\infty.$$

Por el Lema 2.2.5, hace falta ver que el funcional J , cumpla con algunas propiedades. Para ello daremos la siguiente proposición.

Proposición 2.2.7 *El funcional J definido en la ecuación (2.11) es continuo, estrictamente convexo y coercivo.*

DEMOSTRACIÓN. Iniciamos probando la continuidad. Sea $\epsilon_0 > 0$. De (2.11) se sigue que

$$|J(\varphi_T) - J(\varphi_{T_0})| = \left| \frac{1}{2} \int_0^T \|B^* \varphi(t)\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt + (x^0, \varphi(0))_{\mathbb{R}^n} - \frac{1}{2} \int_0^T \|B^* \varphi_0(t)\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt - (x^0, \varphi_0(0))_{\mathbb{R}^n} \right|.$$

Agrupamos términos semejantes

$$|J(\varphi_T) - J(\varphi_{T_0})| = \left| \frac{1}{2} \int_0^T \|B^* \varphi(t)\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt - \|B^* \varphi_0(t)\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt + (x^0, \varphi(0))_{\mathbb{R}^n} - (x^0, \varphi_0(0))_{\mathbb{R}^n} \right|. \quad (2.26)$$

Analizamos por separado los términos de la ecuación anterior, entonces tenemos

$$\frac{1}{2} \int_0^T \|B^* \varphi(t)\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt - \|B^* \varphi_0(t)\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt = \frac{1}{2} \int_0^T (B^* \varphi(t), B^* \varphi(t))_{\mathbb{R}^m} - (B^* \varphi_0(t), B^* \varphi_0(t))_{\mathbb{R}^m} dt.$$

Sumamos $0 = (B^* \varphi(t), B^* \varphi_0(t))_{\mathbb{R}^m} - (B^* \varphi(t), B^* \varphi_0(t))_{\mathbb{R}^m}$, y luego

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^T \|B^* \varphi(t)\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt - \|B^* \varphi_0(t)\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt &= \frac{1}{2} \int_0^T (B^* \varphi(t), B^* \varphi(t))_{\mathbb{R}^m} - (B^* \varphi_0(t), B^* \varphi_0(t))_{\mathbb{R}^m} \\ &\quad + (B^* \varphi(t), B^* \varphi_0(t))_{\mathbb{R}^m} - (B^* \varphi(t), B^* \varphi_0(t))_{\mathbb{R}^m} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T (B^* \varphi(t) - B^* \varphi_0(t), B^* \varphi(t) + B^* \varphi_0(t))_{\mathbb{R}^m} dt. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Por otro lado, por propiedades del producto interno, se tiene que

$$(x^0, \varphi(0))_{\mathbb{R}^n} - (x^0, \varphi_0(0))_{\mathbb{R}^n} = (x^0, \varphi(0) - \varphi_0(0))_{\mathbb{R}^n}. \quad (2.28)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.28) y (2.27) en (2.26) obtenemos

$$|J(\varphi_T) - J(\varphi_{T_0})| = \left| \frac{1}{2} \int_0^T (B^* \varphi(t) - B^* \varphi_0(t), B^* \varphi(t) + B^* \varphi_0(t))_{\mathbb{R}^m} dt + (x^0, \varphi(0) - \varphi_0(0))_{\mathbb{R}^n} \right|.$$

Aplicamos la desigualdad del triángulo a la ecuación anterior, entonces

$$|J(\varphi_T) - J(\varphi_{T_0})| \leq \left| \frac{1}{2} \int_0^T (B^* \varphi(t) - B^* \varphi_0(t), B^* \varphi(t) + B^* \varphi_0(t))_{\mathbb{R}^m} dt \right| + |(x^0, \varphi(0) - \varphi_0(0))_{\mathbb{R}^n}|. \quad (2.29)$$

Examinamos cada término por separado, es decir

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2} \int_0^T (B^* \varphi(t) - B^* \varphi_0(t), B^* \varphi(t) + B^* \varphi_0(t))_{\mathbb{R}^m} dt \right| \\ & \leq \frac{1}{2} \left(\int_0^T \|B^* (\varphi(t) - \varphi_0(t))\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \|B^* (\varphi(t) + \varphi_0(t))\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Ahora, sabemos que φ es solución de (2.7). Sea $\varphi_0(t)$, solución de el siguiente sistema

$$\begin{cases} -\dot{\varphi}_0 = A^* \varphi_0, & \text{con } t \in (0, T), \\ \varphi_0(T) = \varphi_{T_0}, \end{cases} \quad (2.31)$$

para φ_{T_0} arbitrario. Restamos (2.31) de (2.7), para obtener el siguiente sistema, cuya solución es $(\varphi(t) - \varphi_0(t))$

$$\begin{cases} -\frac{d}{dt}(\varphi - \varphi_0) = A^*(\varphi - \varphi_0), & \text{con } t \in (0, T), \\ \varphi(T) - \varphi_0(T) = (\varphi_T - \varphi_{T_0}). \end{cases} \quad (2.32)$$

Sumamos (2.31) y (2.7), para obtener el siguiente sistema, cuya solución es $(\varphi(t) + \varphi_0(t))$

$$\begin{cases} -\frac{d}{dt}(\varphi + \varphi_0) = A^*(\varphi + \varphi_0), & \text{con } t \in (0, T), \\ \varphi(T) + \varphi_0(T) = (\varphi_T + \varphi_{T_0}). \end{cases} \quad (2.33)$$

Aplicamos (2.20) a los sistemas (2.32) y (2.33), entonces

$$\|\varphi_T - \varphi_{T_0}\|_{\mathcal{A}} = \left[\int_0^T \|B^* (\varphi(t) - \varphi_0(t))\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.34)$$

y además

$$\|\varphi_T + \varphi_{T_0}\|_{\mathcal{A}} = \left[\int_0^T \|B^* (\varphi(t) + \varphi_0(t))\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.35)$$

Sustituimos (2.34) y (2.35) en (2.30)

$$\left| \frac{1}{2} \int_0^T (B^* \varphi(t) - B^* \varphi_0(t), B^* \varphi(t) + B^* \varphi_0(t))_{\mathbb{R}^m} dt \right| \leq \frac{1}{2} \|\varphi_T - \varphi_{T_0}\|_{\mathcal{A}} \|\varphi_T + \varphi_{T_0}\|_{\mathcal{A}}.$$

Aplicando el Lema 2.2.4 tenemos que

$$\|\varphi_T - \varphi_{T_0}\|_{\mathcal{A}} \leq c_{2,1} \|\varphi_T - \varphi_{T_0}\|_{\mathbb{R}^n},$$

y además

$$\|\varphi_T + \varphi_{T_0}\|_{\mathcal{A}} \leq c_{2,2} \|\varphi_T + \varphi_{T_0}\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Si hacemos $C_3 = \frac{1}{2}c_{2,1}c_{2,2}$, entonces

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2} \int_0^T (B^* \varphi(t) - B^* \varphi_0(t), B^* \varphi(t) + B^* \varphi_0(t))_{\mathbb{R}^m} dt \right| &\leq C_3 \|\varphi_T - \varphi_{T_0}\|_{\mathbb{R}^n} \|\varphi_T + \varphi_{T_0}\|_{\mathbb{R}^n} \\ &= C_3 \|\varphi_T - \varphi_{T_0}\|_{\mathbb{R}^n} \|\varphi_T + \varphi_{T_0} - \varphi_{T_0} + \varphi_{T_0}\|_{\mathbb{R}^n} \\ &= C_3 \|\varphi_T - \varphi_{T_0}\|_{\mathbb{R}^n} \|\varphi_T - \varphi_{T_0} + 2\varphi_{T_0}\|_{\mathbb{R}^n}. \end{aligned}$$

Por la desigualdad del triángulo tenemos que

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2} \int_0^T (B^* \varphi(t) - B^* \varphi_0(t), B^* \varphi(t) + B^* \varphi_0(t))_{\mathbb{R}^m} dt \right| \\ \leq \|\varphi_T - \varphi_{T_0}\|_{\mathbb{R}^n} (C_3 \|\varphi_T - \varphi_{T_0}\|_{\mathbb{R}^n} + 2C_3 \|\varphi_{T_0}\|_{\mathbb{R}^n}). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Por otro lado, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz al segundo sumando de (2.29), se tiene

$$|(x^0, \varphi(0) - \varphi_0(0))_{\mathbb{R}^n}| \leq \|x^0\|_{\mathbb{R}^n} \|\varphi(0) - \varphi_0(0)\|_{\mathbb{R}^n}. \quad (2.37)$$

Aplicamos la desigualdad de observabilidad (2.18) al sistema (2.32)

$$C \|\varphi(0) - \varphi_0(0)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \left[\int_0^T \|B^* (\varphi(t) - \varphi_0(t))\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Por lo tanto de (2.37) se sigue que

$$|(x^0, \varphi(0) - \varphi_0(0))_{\mathbb{R}^n}| \leq \frac{1}{C} \|x^0\|_{\mathbb{R}^n} \left[\int_0^T \|B^* (\varphi(t) - \varphi_0(t))\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.38)$$

Usamos la ecuación (2.20) y el Lema 2.2.4, entonces

$$|(x^0, \varphi(0) - \varphi_0(0))_{\mathbb{R}^n}| \leq \frac{1}{C} \|x^0\|_{\mathbb{R}^n} \|\varphi_T - \varphi_{T_0}\|_{\mathcal{A}} \leq C_4 \|x^0\|_{\mathbb{R}^n} \|\varphi_T - \varphi_{T_0}\|_{\mathbb{R}^n},$$

con $C_4 = \frac{1}{C}c_{2,3}$, donde $c_{2,3}$ es la constante de equivalencia entre normas. Sustituyendo las desigualdades (2.36) y (2.38) en (2.29), se tiene

$$\begin{aligned} |J(\varphi_T) - J(\varphi_{T_0})| &\leq \|\varphi_T - \varphi_{T_0}\|_{\mathbb{R}^n} (C_3 \|\varphi_T - \varphi_{T_0}\|_{\mathbb{R}^n} + 2C_3 \|\varphi_{T_0}\|_{\mathbb{R}^n}) \\ &\quad + C_4 \|x^0\|_{\mathbb{R}^n} \|\varphi_T - \varphi_{T_0}\|_{\mathbb{R}^n} \\ &= \|\varphi_T - \varphi_{T_0}\|_{\mathbb{R}^n} (C_3 \|\varphi_T - \varphi_{T_0}\|_{\mathbb{R}^n} + 2C_3 \|\varphi_{T_0}\|_{\mathbb{R}^n} + C_4 \|x^0\|_{\mathbb{R}^n}). \end{aligned}$$

Supongamos $\varphi_T \in \mathbb{R}^n$ tan cerca como sea posible $\varphi_{T_0} \in \mathbb{R}^n$, tal que se satisfaga

$$0 < \|\varphi_T - \varphi_{T_0}\|_{\mathbb{R}^n} < 1,$$

entonces

$$|J(\varphi_T) - J(\varphi_{T_0})| \leq \|\varphi_T - \varphi_{T_0}\|_{\mathbb{R}^n} (C_3 + 2C_3 \|\varphi_{T_0}\|_{\mathbb{R}^n} + C_4 \|x^0\|_{\mathbb{R}^n}).$$

Por lo tanto si

$$\|\varphi_T - \varphi_{T_0}\|_{\mathbb{R}^n} \leq \min \left\{ 1, \frac{\epsilon_0}{C_3 + 2C_3\|\varphi_{T_0}\|_{\mathbb{R}^n} + C_4\|x^0\|_{\mathbb{R}^n}} \right\},$$

entonces $|J(\varphi_T) - J(\varphi_{T_0})| \leq \epsilon_0$.

Ahora probaremos la convexidad estricta (vea [Ser18, Poz08]). De (2.11) se sigue

$$J((1-\alpha)\varphi_{T_1} + \alpha\varphi_{T_2}) = \frac{1}{2} \int_0^T \|((1-\alpha)\varphi_1 + \alpha\varphi_2)\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt + (x^0, (1-\alpha)\varphi_1(0) + \alpha\varphi_2(0))_{\mathbb{R}^n}. \quad (2.39)$$

Analizamos los términos por separado de la ecuación anterior, es decir

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^T \|B^*((1-\alpha)\varphi_1 + \alpha\varphi_2)\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T (B^*(1-\alpha)\varphi_1 + B^*\alpha\varphi_2, B^*(1-\alpha)\varphi_1 + B^*\alpha\varphi_2)_{\mathbb{R}^m} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \|B^*(1-\alpha)\varphi_1\|_{\mathbb{R}^m}^2 + 2(B^*(1-\alpha)\varphi_1, B^*\alpha\varphi_2)_{\mathbb{R}^m} + \|B^*\alpha\varphi_2\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T (1-\alpha)^2 \|B^*\varphi_1\|_{\mathbb{R}^m}^2 + 2\alpha(1-\alpha)(B^*\varphi_1, B^*\varphi_2)_{\mathbb{R}^m} + \alpha^2 \|B^*\varphi_2\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt. \end{aligned} \quad (2.40)$$

De (2.40) examinamos individualmente el término

$$\frac{1}{2} \int_0^T 2\alpha(1-\alpha)(B^*\varphi_1, B^*\varphi_2)_{\mathbb{R}^m} dt.$$

Sea $B^*\varphi_1 \neq B^*\varphi_2$, entonces, $0 < \|B^*\varphi_1 - B^*\varphi_2\|_{\mathbb{R}^n}^2 = \|B^*\varphi_1\|_{\mathbb{R}^n}^2 - 2(B^*\varphi_1, B^*\varphi_2)_{\mathbb{R}^n} + \|B^*\varphi_2\|_{\mathbb{R}^n}^2 \implies 2(B^*\varphi_1, B^*\varphi_2)_{\mathbb{R}^n} < \|B^*\varphi_1\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \|B^*\varphi_2\|_{\mathbb{R}^n}^2$, por lo tanto

$$\frac{1}{2} \int_0^T 2\alpha(1-\alpha)(B^*\varphi_1, B^*\varphi_2)_{\mathbb{R}^m} dt < \frac{1}{2} \int_0^T \alpha(1-\alpha)\|B^*\varphi_1\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \alpha(1-\alpha)\|B^*\varphi_2\|_{\mathbb{R}^n}^2 dt. \quad (2.41)$$

Ahora sea

$$\alpha(1-\alpha) = (1 - (1-\alpha))(1-\alpha) = (1-\alpha) - (1-\alpha)^2,$$

y además

$$\alpha(1-\alpha) = \alpha - \alpha^2.$$

Estos resultados los sustituimos en (2.41), y se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^T 2\alpha(1-\alpha)(B^*\varphi_1, B^*\varphi_2)_{\mathbb{R}^m} dt &< \frac{1}{2} \int_0^T (1-\alpha)\|B^*\varphi_1\|_{\mathbb{R}^n}^2 - (1-\alpha)^2\|B^*\varphi_1\|_{\mathbb{R}^n}^2 \\ &+ \alpha\|B^*\varphi_2\|_{\mathbb{R}^n}^2 - \alpha^2\|B^*\varphi_2\|_{\mathbb{R}^n}^2 dt. \end{aligned}$$

Sustituyendo este resultado en (2.40) y reduciendo términos semejantes obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^T \|B^* ((1-\alpha)\varphi_1 + \alpha\varphi_2)\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt &< \frac{1}{2} \int_0^T (1-\alpha) \|B^* \varphi_1\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \alpha \|B^* \varphi_2\|_{\mathbb{R}^n}^2 dt \\ &= (1-\alpha) \frac{1}{2} \int_0^T \|B^* \varphi_1\|_{\mathbb{R}^n}^2 dt + \alpha \frac{1}{2} \int_0^T \|B^* \varphi_2\|_{\mathbb{R}^n}^2 dt. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Por otro lado, aplicamos las propiedades del producto interno al segundo término de (2.39), tenemos

$$(x^0, (1-\alpha)\varphi_1(0) + \alpha\varphi_2(0))_{\mathbb{R}^n} = (1-\alpha) (x^0, \varphi_1(0))_{\mathbb{R}^n} + \alpha (x^0, \varphi_2(0))_{\mathbb{R}^n}. \quad (2.43)$$

Reemplazamos la desigualdad (2.42) y la ecuación (2.43) en (2.39), agrupamos términos semejantes, entonces

$$\begin{aligned} J((1-\alpha)\varphi_{T_1} + \alpha\varphi_{T_2}) &< (1-\alpha) \left[\frac{1}{2} \int_0^T \|B^* \varphi_1\|_{\mathbb{R}^n}^2 dt + (x^0, \varphi_1(0))_{\mathbb{R}^n} \right] \\ &+ \alpha \left[\frac{1}{2} \int_0^T \|B^* \varphi_2\|_{\mathbb{R}^n}^2 dt + (x^0, \varphi_2(0))_{\mathbb{R}^n} \right], \end{aligned}$$

con lo cual se demuestra la convexidad estricta.

Finalmente, vamos a probar la coercividad. Para ello usaremos la desigualdad de observabilidad (2.18). Además, observamos que el funcional J no depende explícitamente del dato inicial φ_T , por lo que la ecuación (2.20) será de utilidad. Luego, por la definición 2.2.6 deberemos determinar que

$$\lim_{\|\varphi_T\|_{\mathbb{R}^n} \rightarrow \infty} J(\varphi_T) = +\infty,$$

es cierto. Entonces, tenemos que

$$J(\varphi_T) = \frac{1}{2} \int_0^T \|B^* \varphi(t)\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt + (x^0, \varphi(0))_{\mathbb{R}^n}.$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la desigualdad de Young (ver [Eva10, DM99]) al término $(x^0, \varphi(0))_{\mathbb{R}^n}$ en la ecuación anterior tenemos

$$|(x^0, \varphi(0))_{\mathbb{R}^n}| \leq \|x^0\|_{\mathbb{R}^n} \|\varphi(0)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \frac{\gamma}{2} \|x^0\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \frac{1}{2\gamma} \|\varphi(0)\|_{\mathbb{R}^n}^2, \quad \forall \gamma > 0. \quad (2.44)$$

Usamos (2.44) en el funcional $J(\varphi_T)$

$$J(\varphi_T) \geq \frac{1}{2} \int_0^T \|B^* \varphi(t)\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt - \frac{\gamma}{2} \|x^0\|_{\mathbb{R}^n}^2 - \frac{1}{2\gamma} \|\varphi(0)\|_{\mathbb{R}^n}^2, \quad (2.45)$$

lo que nos da una cota por abajo del funcional. Entonces hemos dividido un término sin signo en dos con signo. Sabemos que el sistema adjunto (2.7) es observable, entonces $\exists C > 0$ tal que

$$C\|\varphi(0)\|_{\mathbb{R}^n}^2 \leq \int_0^T \|B^*\varphi(t)\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt,$$

lo que implica

$$-C\|\varphi(0)\|_{\mathbb{R}^n}^2 \geq -\int_0^T \|B^*\varphi(t)\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt. \quad (2.46)$$

Si tomamos $\gamma = \frac{2}{C}$ donde $C > 0$ es la constante de la desigualdad de observabilidad (2.18), entonces

$$C = \frac{2}{\gamma} \implies \frac{1}{C} = \frac{\gamma}{2}. \quad (2.47)$$

Luego aplicamos (2.46) y (2.47) a la desigualdad (2.45), para obtener

$$\begin{aligned} J(\varphi_T) &\geq \frac{1}{2} \int_0^T \|B^*\varphi(t)\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt - \frac{1}{C} \|x^0\|_{\mathbb{R}^n}^2 - \frac{1}{4} \int_0^T \|B^*\varphi(t)\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt \\ &\geq \frac{1}{4} \int_0^T \|B^*\varphi(t)\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt - \frac{1}{C} \|x^0\|_{\mathbb{R}^n}^2, \end{aligned}$$

donde el término $-\frac{1}{C}\|x^0\|_{\mathbb{R}^n}^2$ es constante, y además por (2.20) se tiene que

$$\frac{1}{4}\|\varphi_T\|_{\mathcal{A}}^2 = \frac{1}{4} \int_0^T \|B^*\varphi(t)\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt,$$

por lo tanto

$$J(\varphi_T) \geq \frac{1}{4} \int_0^T \|B^*\varphi(t)\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt - \frac{1}{C} \|x^0\|_{\mathbb{R}^n}^2 = \frac{1}{4} \|\varphi_T\|_{\mathcal{A}}^2 - \frac{1}{C} \|x^0\|_{\mathbb{R}^n}^2.$$

Usando el Lema 2.2.4, de equivalencia de normas, podemos dar una cota por abajo, entonces

$$J(\varphi_T) \geq \frac{1}{4}c_1^2 \|\varphi_T\|_{\mathbb{R}^n}^2 - \frac{1}{C} \|x^0\|_{\mathbb{R}^n}^2.$$

Luego, tomando el siguiente límite, tenemos

$$\lim_{\|\varphi_T\|_{\mathbb{R}^n} \rightarrow \infty} J(\varphi_T) \geq \lim_{\|\varphi_T\|_{\mathbb{R}^n} \rightarrow \infty} \left(C_2 \|\varphi_T\|_{\mathbb{R}^n}^2 - \frac{1}{C} \|x^0\|_{\mathbb{R}^n}^2 \right) = +\infty,$$

donde $C_2 = \frac{1}{4}c_1^2$. Con esto, y por la Definición 2.2.6, se ha demostrado que el funcional es coercivo. \square

El siguiente teorema dice que para definir la controlabilidad de un sistema, hace falta demostrar que existe una desigualdad de observabilidad para el sistema adjunto y viceversa.

Teorema 2.2.8 *El sistema (2.1) es exactamente controlable si y solo si el adjunto (2.7) es observable al tiempo T .*

DEMOSTRACIÓN. Primero demostraremos que la observabilidad implica la controlabilidad. De acuerdo al Lema 2.2.2, la controlabilidad se tiene, si para cualquier $x^0 \in \mathbb{R}^n$, el funcional J definido por

$$J(\varphi_T) = \frac{1}{2} \int_0^T \|B^* \varphi(t)\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt + (x^0, \varphi(0))_{\mathbb{R}^n},$$

tiene un mínimo. Gracias al Lema 2.2.5, sabemos que $J(\varphi_T)$ tiene un minimizador, y por el Lema 2.2.2, ese minimizador es $\hat{\varphi}_T$, que a su vez es el dato inicial del sistema adjunto (2.7), cuya solución es $\hat{\varphi}$. Por lo tanto se tiene un control $u = B^* \hat{\varphi}$, para el sistema (2.1).

Ahora probaremos que la controlabilidad implica la observabilidad. Suponemos que el sistema (2.1) es controlable al tiempo T . Suponemos que el adjunto (2.7) no es observable, es decir, existe

$$\left\{ \begin{array}{l} (\varphi_T^k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n, \quad \text{tal que,} \quad \|\varphi_T^k\|_{\mathbb{R}^n} = 1, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T \|B^* \varphi^k(t)\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt = 0, \end{array} \right. \quad (2.48)$$

donde φ^k es la solución del adjunto con dato inicial φ_T^k . La ecuación (2.48), permite observar que la desigualdad de observabilidad no se cumple. Por (2.48) existe una subsucesión $(\varphi_T^k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\varphi_T^k \rightarrow \varphi_T$ cuando $k \rightarrow \infty$ y $\|\varphi_T\|_{\mathbb{R}^n} = 1$.

Por el Lema 2.2.1 y dado que (2.1) es controlable, sabemos que para cualquier dato inicial $x^0 \in \mathbb{R}^n$, existe $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ tal que

$$\int_0^T (u(t), B^* \varphi^k(t))_{\mathbb{R}^m} dt + (x^0, \varphi^k(0))_{\mathbb{R}^n} = 0,$$

para cualquier $\varphi_T^k \in \mathbb{R}^n$, donde φ^k es la solución del adjunto (2.7) con dato inicial φ_T^k . Si tomamos $u = B^* \varphi^k(t)$ se tiene

$$\int_0^T \|B^* \varphi^k(t)\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt = - (x^0, \varphi^k(0))_{\mathbb{R}^n}.$$

Aplicamos el límite cuando $k \rightarrow \infty$ en ambos lados de la ecuación anterior

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T \|B^* \varphi^k(t)\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt = \lim_{k \rightarrow \infty} - (x^0, \varphi^k(0))_{\mathbb{R}^n},$$

por lo tanto tenemos

$$0 = - (x^0, \varphi(0))_{\mathbb{R}^n}.$$

Dado que $x^0 \in \mathbb{R}^n$ es arbitrario (porque suponemos que (2.1) es controlable y no importa con que dato inicial)

$$\varphi(0) \implies \varphi_T = 0.$$

Esto contradice $\|\varphi_T\| = 1$. El fallo está en suponer que el adjunto no es observable. \square

2.3. Criterio de controlabilidad de Kalman

En esta sección estudiaremos un criterio de controlabilidad, el cual fue introducido por Kalman en [Kal60b], y es un concepto que se utiliza con bastante frecuencia en la teoría de control, tal como se menciona en [L09, Kuo62]. Este resultado permite establecer si nuestro sistema (2.1) es controlable. Con este fin definiremos la siguiente matriz, a la cual llamaremos matriz de controlabilidad

$$K \stackrel{\text{def}}{=} (B|AB|\dots|A^{n-1}B) \in \mathbb{R}^{n \times mn},$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Los detalles del criterio de controlabilidad de Kalman se explican en [KFA69], donde se dice que el sistema (2.1) es exactamente controlable si la matriz K es de rango completo. Además en [Kal60a], se da una aplicación de este resultado para un problema clásico de control óptimo. Enunciaremos lo dicho anteriormente de una manera formal en el siguiente teorema

Teorema 2.3.1 *El sistema (2.1) es exactamente controlable en algún tiempo $T > 0$ si y solo si*

$$\text{rango}(K) = \text{rango}(B|AB|\dots|A^{n-1}B) = n.$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\text{rango}(K) < n$, entonces $\ker(K) \neq 0$, es decir existe $\varphi_T \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, tal que $\varphi_T^* K = 0$. De ahí se sigue que

$$\varphi_T^* K = \varphi_T^* [B|AB|\dots|A^{n-1}B] = [\varphi_T^* B|\varphi_T^* AB|\dots|\varphi_T^* A^{n-1}B],$$

lo que implica

$$\varphi_T^* B = \varphi_T^* AB = \varphi_T^* A^{n-1}B = 0. \quad (2.49)$$

Por el teorema de Cayley-Hamilton se tiene que para constantes $c_0 \dots c_{n-1}$ se deduce

$$A^n = c_0 I + c_1 A + \dots + c_{n-1} A^{n-1}.$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación anterior por φ_T^* y la matriz B se tiene

$$\varphi_T^* A^n B = c_0 \varphi_T^* B + c_1 \varphi_T^* AB + \dots + c_{n-1} \varphi_T^* A^{n-1} B,$$

y, por (2.49) obtenemos que $\varphi_T^* A^n B = 0$. Entonces podemos decir que para toda $j \in \mathbb{N}$, $\varphi_T^* A^j B = 0$. Dado a que la matriz exponencial se define como

$$e^{At} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(At)^j}{j!},$$

tenemos que $\varphi_T^* e^{At} B = 0$, lo que implica

$$B^* e^{A^* t} \varphi_T = 0. \quad (2.50)$$

Por otro lado gracias a la fórmula de variación de constantes (2.2) la solución del sistema al tiempo T es

$$x(T) = e^{AT}x^0 + \int_0^T e^{A(T-s)}Bu(s) ds.$$

Efectuamos el siguiente producto interno entre la ecuación anterior y $\varphi_T \in \mathbb{R}^n$

$$(\varphi_T, x(T))_{\mathbb{R}^n} = (\varphi_T, e^{AT}x^0)_{\mathbb{R}^n} + \int_0^T (\varphi_T, e^{A(T-s)}Bu(s))_{\mathbb{R}^n} ds.$$

Utilizando la noción de operador adjunto tenemos

$$(\varphi_T, x(T))_{\mathbb{R}^n} = (x^0, e^{A^*T}\varphi_T)_{\mathbb{R}^n} + \int_0^T (u(s), B^*e^{A^*(T-s)}\varphi_T)_{\mathbb{R}^m} ds,$$

por lo tanto, de (2.50) se sigue que

$$(\varphi_T, x(T))_{\mathbb{R}^n} = (x^0, e^{A^*T}\varphi_T)_{\mathbb{R}^n} = (\varphi_T, e^{AT}x^0)_{\mathbb{R}^n}. \quad (2.51)$$

Ahora, el conjunto de estados alcanzables es equivalente a escribirlo de la siguiente manera

$$R(T, x^0) = \left\{ e^{AT}x^0 + \int_0^T e^{A(T-s)}Bu(s)ds, \quad u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m) \right\}.$$

Lo que la ecuación (2.51) dice, es que φ_T es ortogonal al espacio vectorial $R(T, x^0) - e^{AT}x^0$, y por lo tanto el conjunto de estados alcanzables es diferente de \mathbb{R}^n . Dicho de otra forma, la proyección de la solución x al tiempo T en $\varphi(T)$ es independiente del valor del control. Entonces el sistema es no controlable. Gracias a la fórmula de variación de constantes

Ahora asumiremos que el sistema (2.1) no es exactamente controlable, esto es, el conjunto de estados alcanzables es diferente de \mathbb{R}^n . Por lo tanto, existe $\varphi_T \neq 0$, el cual es ortogonal al espacio vectorial $R(T, x^0) - e^{AT}x^0$. De la fórmula de variación de constantes (2.1) obtenemos el siguiente resultado (tal como ya se hizo en el paso anterior)

$$(\varphi_T, x(T))_{\mathbb{R}^n} = (x^0, e^{A^*T}\varphi_T)_{\mathbb{R}^n} + \int_0^T (u(s), B^*e^{A^*(T-s)}\varphi_T)_{\mathbb{R}^m} ds,$$

y como φ_T es ortogonal a $R(T, x^0) - e^{AT}x^0$, entonces se sigue que para cualquier control u , obtenemos

$$\int_0^T (u(s), B^*e^{A^*(T-s)}\varphi_T)_{\mathbb{R}^m} ds = 0.$$

Aplicamos la ecuación anterior al caso particular para el control $u(t) = B^*e^{A^*(T-t)}\varphi_T$. Sea $T = t$, entonces $u(T) = B^*\varphi_T = 0$. Derivamos $u(t) = B^*e^{A^*(T-t)} = 0$, respecto de t y tomamos $T = t$, entonces por continuidad tenemos

$$u(T) = B^*\varphi_T = 0, \quad \frac{d}{dt}(u(T)) = -B^*A^*\varphi_T = 0, \quad \dots, \quad \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(u(T)) = \pm B^*(A^*)^{n-1}\varphi_T = 0,$$

y por tanto se sigue

$$B^*(A^*)^j\varphi_T = 0 \quad \forall j \geq 0.$$

Esto implica que $\varphi_T \perp \text{rango}(K^*)$, y además por definición de la matriz exponencial

$$B^*e^{A^*t}\varphi_T = 0, \quad \forall t \in [0, T],$$

por lo que se demuestra que $\varphi_T \in \ker(K^*)$, y por ello el núcleo de la matriz de controlabilidad no puede ser reducido a $\{0\}$. \square

Para concretizar este concepto, examinemos el siguiente ejemplo

Ejemplo 2.3.2 Consideremos el sistema (2.1) representado por las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Calculamos entonces, las matrices que permiten determinar la matriz de controlabilidad, es decir

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^2B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora calculamos la matriz de controlabilidad, entonces:

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & | & 1 & 0 & | & 2 & 0 \\ 1 & 0 & | & 1 & 0 & | & 1 & 0 \\ 1 & 0 & | & 1 & 0 & | & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observamos que las dos últimas líneas de la matriz de controlabilidad son iguales, por lo que se tiene $\text{rango}(K) = 2 \leq n = 3$, por lo tanto, esta representación de estado no es controlable.

Controlabilidad a cero de la ecuación de calor

El objetivo de este capítulo es proporcionar un análisis completo del problema de controlabilidad a cero para la ecuación de calor en una dimensión. El concepto de controlabilidad exacta fue explicado en el Capítulo 2, y consiste en alcanzar un estado final deseado para un sistema de EDOs a partir de una condición inicial dada, a través de la existencia de un control. Ahora en este capítulo se dará la noción de controlabilidad en un sentido más débil. Una vez hecho esto, procederemos a analizar la observabilidad de la ecuación de calor.

Recordemos entonces la siguiente notación. Sea el conjunto $(0, 1)$, cuyos puntos de frontera son denotados por $\Gamma = \{0, 1\}$. Definimos $Q = (0, 1) \times (0, T)$, para algún tiempo $T > 0$. Ahora sea $y : Q \rightarrow \mathbb{R}$ una función dependiente del tiempo $t \in (0, T)$, y una variable $x \in (0, 1)$, hacemos la siguiente notación:

$$\begin{cases} y_x = \frac{\partial y}{\partial x}, & y_{xx} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \\ y_t = \frac{\partial y}{\partial t}, & y_{tt} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \end{cases}$$

Además, definimos \mathcal{O} como el dominio de control, el cual es un conjunto abierto tal que $\mathcal{O} \subset (0, 1)$. Denotamos $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$ y consideramos la siguiente ecuación:

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} = v\chi_{\mathcal{O}} & \text{en } Q, \\ y(x, t) = 0 & \text{para } (x, t) \in \Sigma, \\ y(x, 0) = y_0 & \text{en } (0, 1), \end{cases} \quad (3.1)$$

donde $y = y(x, t)$ es el estado, $v = v(x, t) \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$ es el control y $\chi_{\mathcal{O}}$ es la función característica del conjunto \mathcal{O} .

Al sistema (3.1) se le conoce como la ecuación de calor en una dimensión y es ampliamente estudiada en [Eva10, Tro10, CGL94, FR71, LW97, Zua02, Zua97]. Cabe destacar que la ecuación (3.1) es un caso específico de las ecuaciones parabólicas. Recordamos los Teoremas 1.4.6 y 1.4.7 (ver sección 1.4.2), donde se enuncia la existencia y unicidad soluciones débiles para las ecuaciones parabólicas. De ahí que introducimos entonces el siguiente teorema, que además se relaciona con el Teorema 1.4.3.

Teorema 3.0.1 *Para cualquier control $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$ y condición inicial $y_0 \in L^2(0, 1)$, existe una única solución para la ecuación (3.1) tal que*

$$y \in L^2(0, T; H_0^1(0, 1)) \quad \text{con} \quad y_t \in L^2(0, T; H^{-1}(0, 1)),$$

lo que implica

$$y \in C([0, T]; L^2(0, 1)).$$

Note que la solución del sistema parabólico (3.1) satisface que, $y \in C([0, T]; L^2(0, 1)) \cap L^2(0, T; H_0^1(0, 1))$.

3.1. Controlabilidad de la ecuación de calor

En esta sección examinaremos los conceptos de controlabilidad aproximada y controlabilidad a cero para la ecuación de calor. Motivados por la metodología para controlar un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (visto en el Capítulo 2), queda deducir si la ecuación de calor es controlable a cero. Para esto abordaremos el problema de la controlabilidad a cero usando una variación del método de unicidad de Hilbert, es decir, primero damos el sistema adjunto a la ecuación (3.2), ya que el control de la ecuación de calor viene dada por la solución de su sistema adjunto, y esta solución minimiza una función cuadrática J , como la que se propone en el Capítulo 2. Veremos más adelante que la principal variación del método HUM utilizada para este capítulo consiste en agregar un término de penalización extra al funcional J utilizado anteriormente. El mínimo de este funcional se alcanza en el espacio de Hilbert $L^2(0, 1)$ y esta definido a partir de una desigualdad, que es la desigualdad de observabilidad para el sistema adjunto. Esta herramienta es sumamente importante, ya que recordemos que el sistema adjunto de la ecuación de calor se dice observable si se satisface la desigualdad de observabilidad, por lo que podemos concluir que la observabilidad implica la controlabilidad a cero. Finalmente se destaca el hecho de que la estrategia para demostrar que la observabilidad implica la controlabilidad a cero, es diferente a como se hizo para ecuaciones diferenciales ordinarias, pero algunas de las nociones siguen siendo las mismas. Dicho esto procedemos a dar primero la noción de controlabilidad aproximada.

3.1.1. Controlabilidad aproximada

Comencemos definiendo el conjunto de estados alcanzables para el sistema (3.1), entonces tenemos que con $y_0 \in L^2(0, 1)$ y $T > 0$ se tiene

$$R_c(T; y_0) = \{y(\cdot, T) : y \text{ es solución de (3.1) con } v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))\}.$$

Luego, el sistema (3.1) sería exactamente controlable si ocurriera que $R_c(T; y_0) = L^2(0, 1)$, sin embargo esto no es posible debido al llamado efecto regularizante de la ecuación de calor explicado en [Zua02] y dice que la solución de (3.1) al tiempo $t = T$ es suave en $(0, 1) \setminus \overline{\mathcal{O}}$. Entonces, en general no es posible encontrar un control $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, 1))$ tal que $y(T) = y_1$, ya que por el efecto regularizante $y(\cdot, T) \in C^\infty((0, 1) \setminus \overline{\mathcal{O}})$ y $y_1 \in L^2(0, 1)$, el estado que final

que queremos alcanzar es arbitrario en el espacio de las funciones cuadrado integrables. La controlabilidad aproximada de la ecuación de calor es analizado en [Pue19, FCZ00, Zua02] donde se plantean diversos métodos y herramientas para atacar este problema. Basado en esos artículos, damos la noción de controlabilidad aproximada

Definición 3.1.1 *Sea la ecuación (3.1). Dada una condición inicial $y_0 \in L^2(0, 1)$, y un estado final que se desea alcanzar $y_1 \in L^2(0, 1)$, se dice que (3.1) es aproximadamente controlable si para toda $\varepsilon > 0$, es posible encontrar un control $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$ tal que $y(\cdot, 0) = y_0$, y además*

$$\|y(\cdot, T) - y_1\|_{L^2(0,1)} < \varepsilon.$$

Por lo tanto, decimos que el conjunto de estados alcanzables $R_c(T.y_0)$ es denso en $L^2(0, 1)$, para todo $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$. Con esto podemos ahora cuestionarnos si el sistema es controlable a cero (problema en el cual nos enfocaremos), es decir, verificar que $0 \in R_c(T.y_0)$ para todo $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$. Esto será analizado a fondo en la siguiente subsección. Finalmente mencionamos que la controlabilidad a cero implica la controlabilidad aproximada (ver por ejemplo [Zua02, FCZ00, MZ01]).

3.1.2. Controlabilidad a cero

Como ya se ha visto, un problema de controlabilidad consiste en describir el conjunto de estados finales alcanzables. El problema de controlabilidad a cero es similar, con la diferencia de que el estado final alcanzable es cero. Más formalmente decimos que, dado $T > 0$, y para cada $y_0 \in L^2(0, 1)$ deberemos encontrar un control $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$ tal que la solución asociada a la ecuación (3.1) satisfaga

$$y(x, T) = 0, \quad \forall x \in (0, 1).$$

Observamos entonces que por el Teorema 3.0.1 hacer esta evaluación es significativa. Siguiendo el método de unicidad de Hilbert, para poder controlar a cero la ecuación (3.1), adaptaremos este sistema de minimización restringida a un sistema adjunto de minimización sin restricciones, el cual se expresa de la siguiente forma, con $\varphi(\cdot, t) = \varphi$

$$\begin{cases} -\varphi_t - \varphi_{xx} = 0 & \text{en } Q, \\ \varphi = 0 & \text{en } \Gamma \times (0, T), \\ \varphi(\cdot, T) = \varphi_T & \text{en } (0, 1), \end{cases} \quad (3.2)$$

donde para cada dato inicial $\varphi_T \in L^2(0, 1)$, este sistema puede ser resuelto hacia atrás en el tiempo. Podemos aplicar un cambio de variable ($t \rightarrow T - t$) a la ecuación (3.2) para generar un nuevo sistema que pueda ser resuelto hacia adelante en el tiempo. Para ello definimos temporalmente $\kappa = T - t$, y además $\tilde{\varphi}(\cdot, t) = \varphi(\cdot, \kappa)$, lo que implica $\tilde{\varphi}_t = -\varphi_\kappa$, y $\tilde{\varphi}_{xx} = \varphi_{xx}$, entonces tenemos que $\tilde{\varphi}_t - \tilde{\varphi}_{xx} = -\varphi_\kappa - \varphi_{xx} = 0$, por (3.2). También se tiene que $\tilde{\varphi}(\cdot, 0) = \varphi_T$,

entonces podemos formar la siguiente ecuación

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_t - \tilde{\varphi}_{xx} = 0 & \text{en } Q, \\ \tilde{\varphi}(\cdot, t) = 0 & \text{en } \Gamma \times (0, T), \\ \tilde{\varphi}(\cdot, 0) = \tilde{\varphi}_T & \text{en } (0, 1). \end{cases} \quad (3.3)$$

Los criterios de existencia y unicidad de soluciones débiles para ecuaciones parabólicas, así como el Teorema 3.0.1 se aplican al sistema (3.3), entonces podemos saber que existe una única solución débil $\varphi \in C([0, T]; L^2(0, 1)) \cap L^2((0, T); H_0^1(0, 1))$ para nuestro sistema adjunto.

Ahora sea y_1 un estado final que se desea alcanzar para el sistema (3.1) a través de un control v . Consideramos el siguiente conjunto

$$C(T, y_0, y_1) = \{v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T)) \mid v \text{ satisface } y(\cdot, T) = y_1 \\ \text{para la ecuación de calor (3.1) con solución } y\}.$$

Es decir, $C(T, y_0, y_1)$ es el conjunto conformado por todos los controles v tal que permiten llevar la solución de (3.1) desde un estado inicial y_0 en $t = 0$, hasta un estado final y_1 en $t = T$. Tomemos entonces dentro de este conjunto al control de norma mínima en $L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$ (llamado control HUM, e introducido en [Lio88a]), es decir, la solución al siguiente problema de minimización

$$\min_{C(T, y_0, y_1)} J^*(v) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathcal{O}} v^2(\cdot, t) \, dxdt. \quad (3.4)$$

En general, el problema (3.4) no tiene solución, esto por el efecto regularizante de la ecuación de calor, lo que impide que se logre la condición de controlabilidad exacta $y(x, T) = y_1$. A través de la dualidad en optimización convexa (ver [GY02]), y siguiendo [CGL94], la minimización de J^* puede ser reemplazada por el problema de minimización sin restricciones del funcional J , similar al Capítulo 2 pero adaptado a nuestra ecuación de calor, entonces

$$J(\varphi_T) := \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathcal{O}} |\varphi|^2 \, dxdt + (\varphi(\cdot, 0), y_0)_{L^2(0,1)}. \quad (3.5)$$

Aquí φ_T minimiza el funcional J . En [MZ10] se analiza en detalle que la minimización de (3.5) esta mal planteado para la ecuación de calor. Para solucionar este problema, en este mismo artículo se propone utilizar el metodo de regularización donde se agrega el término $\varepsilon \|\varphi_T\|_{L^2(0,1)}$ al funcional $J(\varphi_T)$, es decir

$$J_\varepsilon(\varphi_T) := \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathcal{O}} |\varphi|^2 \, dxdt + \varepsilon \|\varphi_T\|_{L^2(0,1)} + (\varphi(\cdot, 0), y_0)_{L^2(0,1)}. \quad (3.6)$$

De igual manera en [MZ10], se da una explicación de como este funcional relaciona intimamente la controlabilidad a cero con la controlabilidad aproximada de (3.1) utilizando series de Fourier.

3.2. Observabilidad de la ecuación de calor

En esta sección comenzaremos dando la herramienta fundamental que nos ayudará a demostrar la controlabilidad a cero y es la llamada desigualdad de observabilidad para la ecuación de calor. Esta desigualdad se relaciona con las propiedades de continuidad, coercividad y convexidad del funcional J_ε , con lo cual podremos demostrar que este funcional tiene un único mínimo. Posteriormente probaremos que la observabilidad implica la controlabilidad a cero para el sistema (3.1). Cabe destacar que la manera en como esto se demostrará es muy diferente a como se hizo para ecuaciones diferenciales ordinarias en el Capítulo 2, ya que aquí construiremos una sucesión de controles $(v_\varepsilon)_\varepsilon$ que llevarán la solución al tiempo T a una vecindad del cero. Luego tendiendo $\varepsilon \rightarrow 0$, demostraremos la controlabilidad a cero. De igual manera, para demostrar que la observabilidad implica la controlabilidad a cero deberemos hacer un análisis del costo del control, es decir, detallaremos que la norma del control tiene una cota a través de los estados iniciales y finales de (3.1). Varias de las herramientas utilizadas para ODEs, se incluyan también en esta sección.

3.2.1. Desigualdad de observabilidad (EDPs)

Comenzamos enunciando a siguiente proposición, en donde se plantea la desigualdad de observabilidad para el sistema adjunto (3.2).

Proposición 3.2.1 *El sistema adjunto (3.2) se dice observable en tiempo $T > 0$ si existe una constante universal $C_o > 0$ tal que*

$$\|\varphi(\cdot, 0)\|_{L^2(0,1)}^2 \leq C_o \int_0^T \int_{\mathcal{O}} |\varphi|^2 dxdt, \quad \forall \varphi_T \in L^2(0,1) \quad (3.7)$$

La importancia de la desigualdad (3.7) radica en que si se cumple para el sistema adjunto (3.2), entonces se implica la controlabilidad a cero para la ecuación de calor (3.1). Para poder demostrar esta implicación el funcional J_ε debe satisfacer el Lema 2.2.5 (tal como pasa con las EDOs). Dicho esto damos la siguiente proposición.

Proposición 3.2.2 *El funcional J_ε definido en la ecuación (3.6) es estrictamente convexo, continuo y coercivo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\varepsilon_0 > 0$. Notemos que

$$\begin{aligned} |J_\varepsilon(\varphi_T) - J_\varepsilon(\varphi_{T_0})| = & \left| \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathcal{O}} |\varphi|^2 dxdt + \varepsilon \|\varphi_T\|_{L^2(0,1)} + (\varphi(\cdot, 0), y_0)_{L^2(0,1)} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathcal{O}} |\varphi_0|^2 dxdt - \varepsilon \|\varphi_{T_0}\|_{L^2(0,1)} - (\varphi_0(\cdot, 0), y_0)_{L^2(0,1)} \right|. \end{aligned}$$

Agrupando términos semejantes

$$|J_\varepsilon(\varphi_T) - J_\varepsilon(\varphi_{T_0})| = \left| \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathcal{O}} |\varphi|^2 - |\varphi_0|^2 \, dxdt + \varepsilon \left(\|\varphi_T\|_{L^2(0,1)} - \|\varphi_{T_0}\|_{L^2(0,1)} \right) + (\varphi(\cdot, 0), y_0)_{L^2(0,1)} - (\varphi_0(\cdot, 0), y_0)_{L^2(0,1)} \right|. \quad (3.8)$$

El primer sumando puede escribirse como

$$\frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathcal{O}} |\varphi|^2 - |\varphi_0|^2 \, dxdt = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathcal{O}} (\varphi + \varphi_0)(\varphi - \varphi_0) \, dxdt. \quad (3.9)$$

Usamos la desigualdad del triángulo en el segundo término

$$\varepsilon \left(\|\varphi_T\|_{L^2(0,1)} - \|\varphi_{T_0}\|_{L^2(0,1)} \right) \leq \varepsilon \|\varphi_T - \varphi_{T_0}\|_{L^2(0,1)}.$$

Aplicaremos las propiedades del producto interno al tercer sumando de la igualdad (3.8)

$$(\varphi(\cdot, 0), y_0)_{L^2(0,1)} - (\varphi_0(\cdot, 0), y_0)_{L^2(0,1)} = (\varphi(\cdot, 0) - \varphi_0(\cdot, 0), y_0)_{L^2(0,1)}. \quad (3.10)$$

Sustituyendo las expresiones (3.9)-(3.10) en la ecuación (3.8) se obtiene la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} |J_\varepsilon(\varphi_T) - J_\varepsilon(\varphi_{T_0})| &\leq \left| \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathcal{O}} (\varphi + \varphi_0)(\varphi - \varphi_0) \, dxdt + \varepsilon \|\varphi_T - \varphi_{T_0}\|_{L^2(0,1)} \right. \\ &\quad \left. + (\varphi(\cdot, 0) - \varphi_0(\cdot, 0), y_0)_{L^2(0,1)} \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathcal{O}} (\varphi + \varphi_0)(\varphi - \varphi_0) \, dxdt \right| + \varepsilon \|\varphi_T - \varphi_{T_0}\|_{L^2(0,1)} \\ &\quad + |(\varphi(\cdot, 0) - \varphi_0(\cdot, 0), y_0)_{L^2(0,1)}|. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Analizamos cada término de la desigualdad anterior. Para el primer sumando utilizamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathcal{O}} (\varphi + \varphi_0)(\varphi - \varphi_0) \, dxdt \right| &= \frac{1}{2} |((\varphi + \varphi_0), (\varphi - \varphi_0))|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))} \\ &\leq \frac{1}{2} \|\varphi + \varphi_0\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))} \|\varphi - \varphi_0\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))}, \end{aligned}$$

y como $\mathcal{O} \subset (0, 1)$, se tiene que

$$\left| \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathcal{O}} (\varphi + \varphi_0)(\varphi - \varphi_0) \, dxdt \right| \leq \frac{1}{2} \|\varphi + \varphi_0\|_{L^2(Q)} \|\varphi - \varphi_0\|_{L^2(Q)}. \quad (3.12)$$

Ahora, sea φ y φ_0 las respectivas soluciones de los siguientes sistemas

$$\begin{cases} -\varphi_t - \varphi_{xx} = 0 & \text{en } Q, \\ \varphi = 0 & \text{en } \Gamma \times (0, T), \\ \varphi(x, T) = \varphi_T(x) & \text{en } (0, 1), \end{cases} \quad (3.13)$$

$$\begin{cases} -\varphi_{0,t} - \varphi_{0,xx} = 0 & \text{en } Q, \\ \varphi_0 = 0 & \text{en } \Gamma \times (0, T), \\ \varphi_0(x, T) = \varphi_{T_0}(x) & \text{en } (0, 1). \end{cases} \quad (3.14)$$

Si restamos (3.14) de (3.13), obtenemos

$$\begin{cases} -(\varphi - \varphi_0)_t - (\varphi - \varphi_0)_{xx} = 0 & \text{en } Q, \\ \varphi - \varphi_0 = 0 & \text{en } \Gamma \times (0, T), \\ \varphi(x, T) - \varphi_0(x, T) = \varphi_T(x) - \varphi_{T_0}(x) & \text{en } (0, 1). \end{cases} \quad (3.15)$$

Por el Teorema 3.0.1 existe una única solución $(\varphi - \varphi_0)$ para el sistema (3.15). Luego aplicamos el Teorema (1.4.5) para obtener la siguiente estimación de energía

$$\begin{aligned} \|(\varphi - \varphi_0)_t\|_{L^2(0,T;H^{-1}(0,1))} + \|\varphi - \varphi_0\|_{L^2(0,T;H_0^1(0,1))} + \max_{t \in [0,T]} \|\varphi(\cdot, t) - \varphi_0(\cdot, t)\|_{L^2(0,1)} \\ \leq C_e \left(\|\varphi_T - \varphi_{T_0}\|_{L^2(0,1)} \right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Por otro lado, si sumamos las ecuaciones (3.13) y (3.14) tenemos que

$$\begin{cases} -(\varphi + \varphi_0)_t - (\varphi + \varphi_0)_{xx} = 0 & \text{en } Q, \\ \varphi + \varphi_0 = 0 & \text{en } \Gamma \times (0, T), \\ \varphi(x, T) + \varphi_0(x, T) = \varphi_T(x) + \varphi_{T_0}(x) & \text{en } (0, 1). \end{cases} \quad (3.17)$$

Por el Teorema 3.0.1 existe una única solución $(\varphi + \varphi_0)$ para el sistema (3.17). Luego aplicamos el Teorema (1.4.5) para obtener la siguiente estimación de energía

$$\begin{aligned} \|(\varphi + \varphi_0)_t\|_{L^2(0,T;H^{-1}(0,1))} + \|\varphi + \varphi_0\|_{L^2(0,T;H_0^1(0,1))} + \max_{t \in [0,T]} \|\varphi(\cdot, t) + \varphi_0(\cdot, t)\|_{L^2(0,1)} \\ \leq C_e \left(\|\varphi_T + \varphi_{T_0}\|_{L^2(0,1)} \right). \end{aligned} \quad (3.18)$$

De (3.16), (3.18) y (3.12) se sigue que

$$\left| \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathcal{O}} (\varphi + \varphi_0) (\varphi - \varphi_0) dxdt \right| \leq C_e \|\varphi_T + \varphi_{T_0}\|_{L^2(0,1)} \|\varphi_T - \varphi_{T_0}\|_{L^2(0,1)},$$

donde C_e depende de las constantes de los estimados de energía y varía de línea a línea.

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathcal{O}} (\varphi + \varphi_0) (\varphi - \varphi_0) dxdt \right| &\leq C_e \|\varphi_T - \varphi_{T_0} + 2\varphi_{T_0}\|_{L^2(0,1)} \|\varphi_T - \varphi_{T_0}\|_{L^2(0,1)} \\ &\leq \|\varphi_T - \varphi_{T_0}\|_{L^2(0,1)} \left(C_e \|\varphi_T - \varphi_{T_0}\|_{L^2(0,1)} \right. \\ &\quad \left. + 2C_e \|\varphi_{T_0}\|_{L^2(0,1)} \right). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Analizamos ahora el siguiente término de la desigualdad (3.11). Para ello aplicamos la desigualdad Cauchy-Schwarz

$$\left| (\varphi(\cdot, 0) - \varphi_0(\cdot, 0), y_0)_{L^2(0,1)} \right| \leq \|\varphi(\cdot, 0) - \varphi_0(\cdot, 0)\|_{L^2(0,1)} \|y_0\|_{L^2(0,1)}. \quad (3.20)$$

Ahora usamos la desigualdad de observabilidad (3.7) en el sistema (3.15), entonces se tiene que

$$\|\varphi(\cdot, 0) - \varphi_0(\cdot, 0)\|_{L^2(0,1)}^2 \leq C_0 \|\varphi - \varphi_0\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0,T))}^2,$$

y utilizamos este resultado en (3.20) para obtener

$$\left| (\varphi(\cdot, 0) - \varphi_0(\cdot, 0), y_0)_{L^2(0,1)} \right| \leq C_0 \|y_0\|_{L^2(0,1)} \|\varphi - \varphi_0\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0,T))},$$

donde C_0 depende de la constante de observabilidad y varía de línea a línea. Dado que $\mathcal{O} \subset (0, 1)$, obtenemos

$$\left| (\varphi(\cdot, 0) - \varphi_0(\cdot, 0), y_0)_{L^2(0,1)} \right| \leq C_0 \|y_0\|_{L^2(0,1)} \|\varphi - \varphi_0\|_{L^2(Q)}.$$

Aplicando la desigualdad (3.16) como antes, se obtiene

$$\left| (\varphi(\cdot, 0) - \varphi_0(\cdot, 0), y_0)_{L^2(0,1)} \right| \leq C_e \left(C_0 \|y_0\|_{L^2(0,1)} \|\varphi_T - \varphi_{T_0}\|_{L^2(0,1)} \right), \quad (3.21)$$

De (3.19), (3.21) y (3.11) se sigue

$$\begin{aligned} |J_\varepsilon(\varphi_T) - J_\varepsilon(\varphi_{T_0})| &\leq \|\varphi_T - \varphi_{T_0}\|_{L^2(0,1)} \left(C_e \|\varphi_T - \varphi_{T_0}\|_{L^2(0,1)} + 2C_e \|\varphi_{T_0}\|_{L^2(0,1)} \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon + C_e C_0 \|y_0\|_{L^2(0,1)} \right). \end{aligned}$$

Supongamos $\varphi_T \in L^2(0, 1)$ tan cerca como sea posible $\varphi_{T_0} \in L^2(0, 1)$, tal que se satisfaga

$$0 < \|\varphi_T - \varphi_{T_0}\|_{L^2(0,1)} < 1,$$

entonces

$$|J_\varepsilon(\varphi_T) - J_\varepsilon(\varphi_{T_0})| < \|\varphi_T - \varphi_{T_0}\|_{L^2(0,1)} \left(C_e + 2C_e \|\varphi_{T_0}\|_{L^2(0,1)} + \varepsilon + C_e C_0 \|y_0\|_{L^2(0,1)} \right).$$

Por lo tanto si

$$\|\varphi_T - \varphi_{T_0}\|_{L^2(0,1)} \leq \min \left\{ 1, \frac{\epsilon_0}{C_e + 2C_e \|\varphi_{T_0}\|_{L^2(0,1)} + \varepsilon + C_e C_0 \|y_0\|_{L^2(0,1)}} \right\},$$

entonces $|J_\varepsilon(\varphi_T) - J_\varepsilon(\varphi_{T_0})| \leq \epsilon_0$.

Ahora probaremos la convexidad estricta (ver [Ser18, Poz08]). De (3.6) se sigue

$$\begin{aligned} J_\varepsilon((1-\alpha)\varphi_{T_1} + \alpha\varphi_{T_2}) &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathcal{O}} |(1-\alpha)\varphi_1 + \alpha\varphi_2|^2 \, dxdt \\ &\quad + \varepsilon \|(1-\alpha)\varphi_{T_1} + \alpha\varphi_{T_2}\|_{L^2(0,1)} \\ &\quad + ((1-\alpha)\varphi_{T_1} + \alpha\varphi_{T_2}, y_0)_{L^2(0,1)}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Desglosamos el miembro derecho de la ecuación (3.22) y examinamos los términos individualmente. Para el primero usamos el hecho de que $2\varphi_1\varphi_2 < \varphi_1^2 + \varphi_2^2$, si $\varphi_1, \varphi_2 > 0$, y $\varphi_1 \neq \varphi_2$. Por lo tanto

$$\frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathcal{O}} 2\alpha(1-\alpha)\varphi_1\varphi_2 \, dxdt < \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathcal{O}} (\alpha(1-\alpha)\varphi_1^2 + \alpha(1-\alpha)\varphi_2^2) \, dxdt.$$

Note que $\alpha(1-\alpha) = (1 - (1-\alpha))(1-\alpha) = (1-\alpha) - (1-\alpha)^2$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathcal{O}} |(1-\alpha)\varphi_1 + \alpha\varphi_2|^2 \, dxdt &< \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathcal{O}} ((1-\alpha)^2\varphi_1^2 + 2\alpha(1-\alpha)\varphi_1\varphi_2 + \alpha^2\varphi_2^2) \, dxdt \\ &< \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathcal{O}} ((1-\alpha)\varphi_1^2 + \alpha\varphi_2^2) \, dxdt. \end{aligned}$$

Por lo tanto, de la desigualdad del triángulo y las propiedades del producto interno obtenemos

$$\begin{aligned} J_\varepsilon((1-\alpha)\varphi_{T_1} + \alpha\varphi_{T_2}) &< (1-\alpha) \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathcal{O}} \varphi_1^2 \, dxdt + \alpha \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathcal{O}} \varphi_2^2 \, dxdt \\ &\quad + (1-\alpha)\varepsilon \|\varphi_{T_1}\|_{L^2(0,1)} + \alpha\varepsilon \|\varphi_{T_2}\|_{L^2(0,1)} \\ &\quad + (1-\alpha)(\varphi_{T_1}, y_0)_{L^2(0,1)} + \alpha(\varphi_{T_2}, y_0)_{L^2(0,1)}, \end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned} J_\varepsilon((1-\alpha)\varphi_{T_1} + \alpha\varphi_{T_2}) &< (1-\alpha) \left(\frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathcal{O}} \varphi_1^2 \, dxdt + \varepsilon \|\varphi_{T_1}\|_{L^2(0,1)} + (\varphi_{T_1}, y_0)_{L^2(0,1)} \right) \\ &\quad + \alpha \left(\frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathcal{O}} \varphi_2^2 \, dxdt + \varepsilon \|\varphi_{T_2}\|_{L^2(0,1)} + (\varphi_{T_2}, y_0)_{L^2(0,1)} \right) \\ &= (1-\alpha)J_\varepsilon(\varphi_{T_1}) + \alpha J_\varepsilon(\varphi_{T_2}), \end{aligned}$$

con lo que concluimos que J_ε es estrictamente convexo.

Finalmente se demostrará la coercividad. Entonces, utilizando la desigualdad de observabilidad (3.7) y la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene que

$$J_\varepsilon(\varphi_T) \geq \frac{1}{2C_o} \|\varphi(\cdot, 0)\|_{L^2(0,1)}^2 + \varepsilon \|\varphi_T\|_{L^2(0,1)} - \|\varphi(\cdot, 0)\|_{L^2(0,1)} \|\varphi_0\|_{L^2(0,1)}.$$

Ahora, acomodando el miembro derecho de la desigualdad anterior se tiene

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(\varphi_T) &\geq \varepsilon \|\varphi_T\|_{L^2(0,1)} + \frac{1}{2C_o} \left(\left(\|\varphi(\cdot, 0)\|_{L^2(0,1)} - C_o \|y_0\|_{L^2(0,1)} \right)^2 - C_o^2 \|y_0\|_{L^2(0,1)}^2 \right) \\ &\geq \varepsilon \|\varphi_T\|_{L^2(0,1)} + \frac{1}{2C_o} \left(-C_o^2 \|y_0\|_{L^2(0,1)}^2 \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto obtenemos que

$$J_\varepsilon(\varphi_T) \geq \varepsilon \|\varphi_T\|_{L^2(0,1)} - \frac{C_o}{2} \|y_0\|_{L^2(0,1)}^2.$$

Tomamos el límite cuando el término $\|\varphi_T\|_{L^2(0,1)}$ tiende a infinito en ambos lados

$$\lim_{\|\varphi_T\|_{L^2(0,1)} \rightarrow \infty} J_\varepsilon(\varphi_T) \geq \lim_{\|\varphi_T\|_{L^2(0,1)} \rightarrow \infty} \varepsilon \|\varphi_T\|_{L^2(0,1)} - \frac{C_o}{2} \|y_0\|_{L^2(0,1)}^2 = +\infty,$$

lo que demuestra que el funcional J_ε es coercivo. \square

3.2.2. Relación entre la observabilidad y la controlabilidad a cero

Como ya se ha dicho, si la desigualdad de observabilidad (3.7) se cumple para el sistema adjunto (3.2), entonces nuestra ecuación parabólica (3.1) será controlable. Este hecho se detalla en el siguiente teorema, cuya prueba puede ser demostrada usando la Proposición 3.2.2.

Teorema 3.2.3 *La desigualdad de observabilidad (3.7) implica la controlabilidad a cero de la ecuación (3.1), es decir, existe $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$ tal que $y(x, T) = 0$ en el conjunto $(0, 1)$.*

DEMOSTRACIÓN. Para facilitar la lectura, dividiremos esta prueba en tres pasos.

–*Paso 1: Construcción de controles aproximados.* En este paso construiremos una sucesión de controles $(v_\varepsilon)_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, uniformemente acotada tal que

$$\|y_\varepsilon(\cdot, T)\|_{L^2(0,1)} \leq \varepsilon. \quad (3.23)$$

Por la Proposición 3.2.2, y el Lema 2.2.5, sabemos, que el funcional J_ε posee un único mínimo, el cual denotaremos como $\varphi_{T,\varepsilon} \in L^2(0, 1)$. La solución del adjunto asociada a $\varphi_{T,\varepsilon}$ será denotada por φ_ε . Definimos ahora el siguiente sistema, cuyo control es $v_\varepsilon = \varphi_\varepsilon \chi_{\mathcal{O}}$

$$\begin{cases} y_{\varepsilon,t} - y_{\varepsilon,xx} = v_\varepsilon = \varphi_\varepsilon \chi_{\mathcal{O}} & \text{en } Q, \\ y_\varepsilon(x, t) = 0 & \text{para } (x, t) \in \Sigma, \\ y_\varepsilon(x, 0) = y_0 & \text{en } (0, 1). \end{cases} \quad (3.24)$$

Sin olvidar que el sistema (3.24) esta asociado a (3.1), definimos $y_1 := y(x, T)$ cuando $v \equiv 0$. Primero supongamos que $\varphi_{T,\varepsilon} = 0$, por lo tanto

$$\begin{cases} -\varphi_{\varepsilon,t} - \varphi_{\varepsilon,xx} = 0 & \text{en } Q, \\ \varphi_\varepsilon = 0 & \text{para } (x, t) \in \Sigma, \\ \varphi_\varepsilon(x, T) = 0 & \text{en } (0, 1). \end{cases} \quad (3.25)$$

Con esto, podemos afirmar lo siguiente

$$\varphi_{T,\varepsilon} = 0 \iff \|y_1\|_{L^2(0,1)} \leq \varepsilon.$$

La implicación $\varphi_{T,\varepsilon} = 0 \implies \|y_1\|_{L^2(0,1)} \leq \varepsilon$ se deduce de que el sistema (3.25) $\implies \varphi_\varepsilon = 0$. Por otro lado la implicación $\|y_1\|_{L^2(0,1)} \leq \varepsilon \implies \varphi_{T,\varepsilon} = 0$ es trivial, pues ya se cumple la condición deseada.

Ahora supongamos que $\varphi_{T,\varepsilon} \neq 0$, y calculemos la derivada de Gateaux del funcional J_ε , es decir

$$\nabla J_\varepsilon(\varphi_{T,\varepsilon}) \varphi_T = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{J(\varphi_{T,\varepsilon} + h\varphi_T) - J(\varphi_{T,\varepsilon})}{h}$$

Sean φ_ε y φ las soluciones del sistema correspondiente a las condiciones iniciales $\varphi_{T,\varepsilon}$ y φ_T , respectivamente. Entonces $(\varphi_\varepsilon + h\varphi)$ es solución con condición inicial $(\varphi_{T,\varepsilon} + h\varphi_T)$ del siguiente sistema

$$\begin{cases} -(\varphi_\varepsilon + h\varphi)_t - (\varphi_\varepsilon + h\varphi)_{xx} = 0 & \text{en } Q, \\ (\varphi_\varepsilon + h\varphi) = 0 & \text{para } (x, t) \in \Sigma, \\ \varphi_\varepsilon(x, T) + h\varphi(x, T) = (\varphi_{T,\varepsilon} + h\varphi_T) & \text{en } (0, 1). \end{cases}$$

De ahí que

$$\begin{aligned} \nabla J_\varepsilon(\varphi_{T,\varepsilon}) \varphi_T &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathcal{O}} |\varphi_\varepsilon + h\varphi|^2 dxdt + \varepsilon \|\varphi_{T,\varepsilon} + h\varphi_T\|_{L^2(0,1)} \right. \\ &\quad \left. + (\varphi_\varepsilon(\cdot, 0), y_0)_{L^2(0,1)} + h(\varphi(\cdot, 0), y_0)_{L^2(0,1)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathcal{O}} |\varphi_\varepsilon|^2 dxdt - \varepsilon \|\varphi_T\|_{L^2(0,1)} - (\varphi_\varepsilon(\cdot, 0), y_0)_{L^2(0,1)} \right]. \end{aligned}$$

Desarrollando la expresión elevada al cuadrado del primer término, agrupando y eliminando términos semejantes se tiene

$$\begin{aligned} \nabla J_\varepsilon(\varphi_{T,\varepsilon}) \varphi_T &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\int_0^T \int_{\mathcal{O}} \left(\varphi_\varepsilon \varphi + \frac{h}{2} \varphi^2 \right) dxdt \right. \\ &\quad \left. + \frac{\varepsilon}{h} \left(\sqrt{\|\varphi_{T,\varepsilon}\|_{L^2(0,1)}^2 + h^2 \|\varphi_T\|_{L^2(0,1)}^2 + 2h(\varphi_{T,\varepsilon}, \varphi_T)_{L^2(0,1)}} - \sqrt{\|\varphi_{T,\varepsilon}\|_{L^2(0,1)}^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + (\varphi(\cdot, 0), y_0)_{L^2(0,1)} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\int_0^T \int_{\mathcal{O}} \left(\varphi_\varepsilon \varphi + \frac{h}{2} \varphi^2 \right) dxdt \right. \\ &\quad \left. + \frac{\varepsilon}{h} \left(\frac{h^2 \|\varphi_T\|_{L^2(0,1)}^2 + 2h(\varphi_{T,\varepsilon}, \varphi)_{L^2(0,1)}}{\sqrt{\|\varphi_{T,\varepsilon}\|_{L^2(0,1)}^2 + \sqrt{\|\varphi_{T,\varepsilon}\|_{L^2(0,1)}^2 + h^2 \|\varphi_T\|_{L^2(0,1)}^2 + 2h(\varphi_{T,\varepsilon}, \varphi)_{L^2(0,1)}}}} \right) \right. \\ &\quad \left. + (\varphi(\cdot, 0), y_0)_{L^2(0,1)} \right]. \end{aligned}$$

Tomamos el límite cuando $h \rightarrow 0$, entonces, para cualquier $\varphi_T \in L^2(0, 1)$ obtenemos

$$\nabla J_\varepsilon(\varphi_{T,\varepsilon}) \varphi_T = \int_0^T \varphi_\varepsilon \varphi dxdt + \frac{\varepsilon}{\|\varphi_{T,\varepsilon}\|_{L^2(0,1)}} (\varphi_{T,\varepsilon}, \varphi_T)_{L^2(0,1)} + (\varphi(\cdot, 0), y_0)_{L^2(0,1)},$$

donde, si $\nabla J_\varepsilon(\varphi_{T,\varepsilon}) \varphi_T = 0$ entonces se tiene la siguiente condición de optimalidad para el funcional $J_\varepsilon(\varphi_T)$

$$0 = \int_0^T \varphi_\varepsilon \varphi \, dx dt + \frac{\varepsilon}{\|\varphi_{T,\varepsilon}\|_{L^2(0,1)}} (\varphi_{T,\varepsilon}, \varphi_T)_{L^2(0,1)} + (\varphi(\cdot, 0), y_0)_{L^2(0,1)}. \quad (3.26)$$

Evaluaremos esta condición de optimalidad en el punto crítico, es decir, tomando $\varphi_T = \varphi_{T,\varepsilon}$ en (3.26) obtendremos

$$0 = \int_0^T \int_{\mathcal{O}} |\varphi_\varepsilon|^2 \, dx dt + \varepsilon \|\varphi_{T,\varepsilon}\|_{L^2(0,1)} + (\varphi_\varepsilon(\cdot, 0), y)_{L^2(0,1)}. \quad (3.27)$$

Repetimos este mismo paso para la desigualdad de observabilidad (3.7). Se tomará $\varphi_\varepsilon = \varphi$, y tendremos

$$\|\varphi_\varepsilon(\cdot, 0)\|_{L^2(0,1)}^2 \leq C_o \int_0^T \int_{\mathcal{O}} |\varphi_\varepsilon|^2 \, dx dt \quad (3.28)$$

que es el resultado de evaluar (3.7) en el óptimo. Recordamos que $v_\varepsilon = \varphi_\varepsilon \chi_{\mathcal{O}}$, y lo sustituimos en la igualdad (3.27)

$$\|v_\varepsilon\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0,T))}^2 + \varepsilon \|\varphi_{T,\varepsilon}\|_{L^2(0,1)} = -(\varphi_\varepsilon(\cdot, 0), y)_{L^2(0,1)},$$

aplicamos entonces la desigualdad de Cauchy-Schwarz al lado derecho de la igualdad y posteriormente usamos la desigualdad (3.28)

$$\|v_\varepsilon\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0,T))}^2 + \varepsilon \|\varphi_{T,\varepsilon}\|_{L^2(0,1)} \leq \sqrt{C_o} \|v_\varepsilon\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0,T))} \|y_0\|_{L^2(0,1)}.$$

De la desigualdad anterior se tiene

$$\begin{aligned} \|v_\varepsilon\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0,T))}^2 &\leq \sqrt{C_o} \|v_\varepsilon\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0,T))} \|y_0\|_{L^2(0,1)} - \varepsilon \|\varphi_{T,\varepsilon}\|_{L^2(0,1)} \\ &\leq \sqrt{C_o} \|v_\varepsilon\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0,T))} \|y_0\|_{L^2(0,1)}, \end{aligned}$$

de donde se implica

$$\|v_\varepsilon\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0,T))} \leq \sqrt{C_o} \|y_0\|_{L^2(0,1)}. \quad (3.29)$$

La desigualdad (3.29) dice que el control v_ε está acotado uniformemente respecto a ε , lo cual será utilizado posteriormente para acotar de igual manera la solución y su derivada.

Ahora, por el Teorema 1.4.3 sabemos

$$\frac{d}{dt} (y_\varepsilon, \varphi)_{L^2(0,1)} = (y_{\varepsilon,t}, \varphi)_{L^2(0,1)} + (y_\varepsilon, \varphi_t)_{L^2(0,1)},$$

y por las ecuaciones (3.1) y (3.2) se tiene

$$\begin{cases} y_t = y_{xx} + v \chi_{\mathcal{O}}, \\ \varphi_t = -\varphi_{xx}, \end{cases}$$

entonces podemos decir que

$$\frac{d}{dt} (y_\varepsilon, \varphi)_{L^2(0,1)} = \int_0^1 y_{\varepsilon,xx} \varphi \, dx + \int_0^1 v_\varepsilon \chi_{\mathcal{O}} \varphi \, dx - \int_0^1 \varphi_{xx} y_\varepsilon \, dx. \quad (3.30)$$

Integraremos por partes el primer término de la ecuación (3.30), entonces

$$\int_0^1 y_{\varepsilon,xx} \varphi \, dx = y_{\varepsilon,x}(x, t) \varphi(x, t) \Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 y_{\varepsilon,x} \varphi_x \, dx,$$

pero $\varphi(1, t) = \varphi(0, t) = 0$ por las condiciones de frontera de (3.2), por lo tanto

$$\int_0^1 y_{\varepsilon,xx} \varphi \, dx = - \int_0^1 y_{\varepsilon,x} \varphi_x \, dx. \quad (3.31)$$

De igual manera integramos por partes el tercer término de la ecuación (3.30)

$$- \int_0^1 \varphi_{xx} y_\varepsilon \, dx = - \varphi_x(x, t) y_\varepsilon(x, t) \Big|_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 y_{\varepsilon,x} \varphi_x \, dx,$$

pero $y_\varepsilon(1, t) = y_\varepsilon(0, t) = 0$ por las condiciones de frontera de (3.1), por lo tanto

$$\int_0^1 y_{\varepsilon,xx} \varphi \, dx = \int_0^1 y_{\varepsilon,x} \varphi_x \, dx. \quad (3.32)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.31) y (3.32) en (3.30), e integrando en el intervalo $[0, T]$ se tiene que

$$\int_0^T \frac{d}{dt} (y_\varepsilon, \varphi)_{L^2(0,1)} \, dt = \int_0^T (v_\varepsilon \chi_{\mathcal{O}}, \varphi)_{L^2(0,1)} \, dt.$$

Aplicamos el Teorema fundamental del cálculo, entonces

$$(y_\varepsilon(T), \varphi(T))_{L^2(0,1)} - (y_\varepsilon(0), \varphi(0))_{L^2(0,1)} = \int_0^T \int_{\mathcal{O}} v_\varepsilon \varphi \, dx dt. \quad (3.33)$$

Sustituyendo los datos conocidos $\varphi(x, T) = \varphi_T$, $y_\varepsilon(x, 0) = y_0$, y $v_\varepsilon = \varphi_\varepsilon \chi_{\mathcal{O}}$ en la ecuación (3.33) se tiene

$$(y_\varepsilon(\cdot, T), \varphi_T)_{L^2(0,1)} - (y_0, \varphi(\cdot, 0))_{L^2(0,1)} = \int_0^T \int_{\mathcal{O}} \varphi_\varepsilon \varphi \, dx dt. \quad (3.34)$$

Sustituimos la ecuación (3.34) en (3.26) y eliminamos términos semejantes. Obtenemos para $\varphi_T \in L^2(0, 1)$ arbitrario la siguiente ecuación

$$\left| \int_0^1 y_\varepsilon(\cdot, T) \varphi_T \, dx \right| = \left| - \frac{\varepsilon}{\|\varphi_{T,\varepsilon}\|_{L^2(0,1)}} \int_0^1 \varphi_{T,\varepsilon} \varphi \, dx \right|.$$

Aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz al lado derecho de la ecuación anterior

$$\left| \int_0^1 y_\varepsilon(\cdot, T) \varphi_T dx \right| \leq \varepsilon \|\varphi_T\|_{L^2(0,1)}, \quad \forall \varphi_T \in L^2(0,1).$$

En particular si $\varphi_T = y_\varepsilon(\cdot, T)$ se tiene

$$\|y_\varepsilon(\cdot, T)\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \varepsilon \|y_\varepsilon(\cdot, T)\|_{L^2(0,1)}, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

lo que implica (3.23).

–*Paso 2: límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.* La desigualdad (3.23) nos dice que podemos controlar la ecuación de calor en alguna zona cercana de cero. El siguiente paso es tender $\varepsilon \rightarrow 0$ para obtener

$$y(\cdot, T) = 0, \quad \text{c.t.p. en } (0, 1).$$

donde y es la solución de (3.1) y así poder satisfacer las condiciones de la controlabilidad a cero.

Para demostrarlo deberemos utilizar la desigualdad (3.29). Ésta nos dice que para cualquier $\varepsilon > 0$ es posible encontrar un control v_ε uniformemente acotado respecto de ε y que depende únicamente del dato inicial y de la constante de observabilidad C_o . Así, podemos construir una sucesión de controles $(v_\varepsilon)_\varepsilon$ uniformemente acotada en $L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$, y por el Teorema 1.3.2, existe una subsucesión $(v_\varepsilon)_{\varepsilon_j} \subset (v_\varepsilon)_\varepsilon$ tal que

$$v_\varepsilon \rightharpoonup v \quad \text{en } L^2(\mathcal{O} \times (0, T)). \quad (3.35)$$

Gracias al Teorema 3.0.1 sabemos $y \in L^2(0, T; H_0^1(0, 1))$ y $y_t \in L^2(0, T; H^{-1}(0, 1))$, entonces utilizando ahora el Teorema 1.4.5 podemos decir que

$$\begin{aligned} & \|y_{\varepsilon,t}\|_{L^2(0,T;H^{-1}(0,1))} + \|y_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H_0^1(0,1))} + \max_{t \in [0,T]} \|y_\varepsilon(t)\|_{L^2(0,1)} \\ & \leq C_e \left(\|y_0\|_{L^2(0,1)} + \|v_\varepsilon\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0,T))} \right), \end{aligned}$$

donde la constante C_e depende de T , y del conjunto $(0, 1)$. Dado que nuestro control v_ε esta acotado en $L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$, por la desigualdad (3.29) se tiene

$$\begin{aligned} & \|y_{\varepsilon,t}\|_{L^2(0,T;H^{-1}(0,1))} + \|y_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H_0^1(0,1))} + \max_{t \in [0,T]} \|y_\varepsilon(t)\|_{L^2(0,1)} \\ & \leq C_{o,1} \|y_0\|_{L^2(0,1)}, \end{aligned}$$

con $C_{o,1} = C_e(1 + \sqrt{C_o})$. Por lo tanto, gracias a la Teorema 1.3.2, podemos decir que existe una función \tilde{y} tal que

$$\begin{cases} y_\varepsilon \rightharpoonup \tilde{y} & \text{en } L^2(0, T; H_0^1(0, 1)). \\ y_{\varepsilon,t} \rightharpoonup \tilde{y}_t & \text{en } L^2(0, T; H^{-1}(0, 1)). \end{cases}$$

Dado que $H_0^1(0, 1) \hookrightarrow L^2(0, 1)$, en particular, tenemos

$$y_\varepsilon \rightharpoonup \tilde{y} \quad \text{en } L^2(Q). \quad (3.36)$$

–*Paso 3: verificación del problema límite.* En el último paso vamos a ver que el control límite v obtenido en (3.35) y el estado \tilde{y} obtenido en (3.36) verifican el problema de control deseado.

Sea $F \in L^2(Q)$ arbitraria y consideremos el sistema adjunto

$$\begin{cases} -\psi_t - \psi_{xx} = F & \text{en } Q, \\ \psi = 0 & \text{para } (x, t) \in \Sigma, \\ \psi(x, T) = 0 & \text{en } (0, 1). \end{cases} \quad (3.37)$$

Análogo al procedimiento utilizado para obtener (3.33), obtenemos que ψ solución de (3.37) y y solución de (3.1) con el control v obtenido en (3.35) satisfacen

$$-(y_0, \psi(0))_{L^2(0,1)} = - \int_0^T \int_0^1 y F dx dt + \int_0^T \int_{\mathcal{O}} v \psi dx dt. \quad (3.38)$$

Argumentando de la misma manera, podemos ver que la solución y_ε de (3.24) con control v_ε y ψ solución de (3.37) verifican

$$-(y_0, \psi(0))_{L^2(0,1)} = - \int_0^T \int_0^1 y_\varepsilon F dx dt + \int_0^T \int_{\mathcal{O}} v_\varepsilon \psi dx dt. \quad (3.39)$$

Usando la convergencia débil mostrada en (3.35) y (3.36) en (3.39), obtenemos

$$-(y_0, \psi(0))_{L^2(0,1)} = - \int_0^T \int_0^1 \tilde{y} F dx dt + \int_0^T \int_{\mathcal{O}} v \psi dx dt, \quad (3.40)$$

por tanto, igualando (3.38) y (3.40), se tiene

$$\int_0^T \int_0^1 (y - \tilde{y}) F dx dt = 0, \quad \forall F \in L^2(Q),$$

de donde se concluye que $\tilde{y} = y$ c.t.p. en Q , es decir, \tilde{y} verifica el sistema (3.1).

Por último, vamos a ver que el sistema (3.1) también satisface la restricción de control, i.e., $y(\cdot, T) = 0$. Para esto, consideremos el control v obtenido a partir de (3.35) y el sistema adjunto

$$\begin{cases} -\phi_t - \phi_{xx} = 0 & \text{en } Q, \\ \phi = 0 & \text{para } (x, t) \in \Sigma, \\ \phi(x, T) = \phi_T & \text{en } (0, 1). \end{cases} \quad (3.41)$$

con $\phi_T \in L^2(0, 1)$ arbitrario.

Argumentando como antes, podemos demostrar que ϕ solución de (3.41) y (3.1) satisfacen la relación

$$(y(T), \phi_T)_{L^2(0,1)} - (y_0, \phi(0))_{L^2(0,1)} = \int_0^T \int_{\mathcal{O}} v \phi dx dt, \quad (3.42)$$

mientras que las soluciones de los sistemas (3.24) y (3.41) verifican

$$(y_\varepsilon(T), \phi_T)_{L^2(0,1)} - (y_0, \phi(0))_{L^2(0,1)} = \int_0^T \int_{\mathcal{O}} v_\varepsilon \phi dx dt. \quad (3.43)$$

De (3.23), podemos tender ε a 0 para obtener que $y_\varepsilon(\cdot, T) \rightarrow 0$ en $L^2(0, 1)$. Esto, junto con la convergencia (3.35) nos permiten pasar al límite en (3.43) de donde concluimos

$$-(y_0, \phi(0))_{L^2(0,1)} = \int_0^T \int_{\mathcal{O}} v \phi dx dt. \quad (3.44)$$

Juntando (3.42) y (3.44), obtenemos

$$(y(T), \phi_T)_{L^2(0,1)} = 0,$$

y como $\phi_T \in L^2(0, 1)$ es arbitrario, $y(\cdot, T) = 0$ c.t.p. Esto concluye la prueba. \square

3.3. Desigualdad de Carleman

Como ya se ha visto en la sección pasada, para poder controlar a cero la ecuación de calor, es indispensable contar con la desigualdad de observabilidad (3.7), tal que esta se satisfaga para el sistema adjunto (3.2). En esta sección nos enfocaremos en probar la desigualdad de observabilidad dada su importancia. La prueba que veremos para demostrarla se basa en estimaciones con peso llamadas desigualdades de Carleman globales. Este es un método utilizado para estudiar el control de ecuaciones parabólicas. La estrategia de estimaciones con peso fue introducida por Imanuvilov y Fusikov en [FI96, FI94]. Recordamos que las EDPs pueden clasificarse según su tipo, orden y linealidad (ver [Eva10]), por esta razón, existen variaciones de la Desigualdad de Carleman. Por ejemplo, en [FM16, Ler19] se plantean diferentes desigualdades de Carleman, que se utilizan para estudiar la controlabilidad a cero y la observabilidad de distintos tipos de EDPs, como ecuaciones parabólicas (degeneradas o no degeneradas), ecuaciones elípticas, etc. Otro ejemplo se da en [LZ19], donde se emplea una estimación de Carleman particular para resolver ecuaciones estocásticas con operadores parabólicos. Por lo tanto, la desigualdad de Carleman es importante para el estudio de la estabilidad de sistemas de EDPs. Para los propósitos de esta tesis se usa la desigualdad de Carleman clásica planteada en [Cho16, Sec20], y una identidad de peso llamada identidad de Carleman. Dicho lo anterior comenzaremos este capítulo estableciendo algunas funciones de peso con las cuales vamos a poder definir la desigualdad de Carleman clásica. Posteriormente, demostraremos la desigualdad de observabilidad (3.7) a través de la desigualdad de Carleman clásica de una manera similar a como se hace en [Pue19, FCZ00]. Finalmente, demostraremos la desigualdad de Carleman.

3.3.1. Funciones de peso

Recordamos primero la notación ya usada anteriormente y agregaremos algunas nuevas. Sea el conjunto $(0, 1)$ cuyos puntos de frontera se denotan con $\Gamma = \{0, 1\}$. Se ha definido

\mathcal{O} , como el dominio de control, el cual es un conjunto abierto tal que $\mathcal{O} \subset (0, 1)$ y además $Q = (0, 1) \times (0, T)$, $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$. Ahora definiremos $\mathcal{O}_0 \subset\subset \mathcal{O}$ lo que significa que el conjunto \mathcal{O}_0 esta compactamente contenido en \mathcal{O} , o dicho de otra manera $\overline{\mathcal{O}_0} \subset \mathcal{O}$. Por último denotaremos con $\mathcal{I} = (0, 1) \setminus \mathcal{O}_0$.

La desigualdad de Carleman adopta la siguiente forma simplificada

$$\int_0^T \int_0^1 \rho^2 |\varphi|^2 dx dt \leq C_o \int_0^T \int_{\mathcal{O}} \rho^2 |\varphi|^2 dx dt,$$

donde $\rho = \rho(x, t)$ es una función continua y estrictamente positiva. Para mostrar una desigualdad de Carleman necesitamos definir varias funciones de peso. Vamos a considerar un peso η que satisface la siguiente hipótesis.

Hipótesis 3.3.1 *Sea $\mathcal{O}_0 \subset\subset \mathcal{O}$. Entonces existe una función $\eta \in C^4([0, 1])$ tal que para algún $\delta > 0$ se satisface lo siguiente*

$$\begin{cases} \eta > 0 & \text{en } (0, 1), \\ |\eta_x| \geq \delta & \text{en } \mathcal{I}, \\ \eta_x(0) > 0, \\ \eta_x(1) < 0. \end{cases}$$

Definimos ahora, para $(x, t) \in Q$ y $\lambda > 0$

$$\alpha(x, t) = \frac{e^{4\lambda\|\eta\|_\infty} - e^{\lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta(x))}}{t(T-t)}, \quad (3.45)$$

y además

$$\xi(x, t) = \frac{e^{\lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta(x))}}{t(T-t)}, \quad (3.46)$$

donde $\alpha, \xi > 0$. Observamos que $\alpha \uparrow +\infty$, $\xi \uparrow +\infty$, cuando $t \rightarrow 0^+$, $t \rightarrow T^-$. Definimos otro peso, para $s > 0$

$$\rho(x, t) = e^{-2s\alpha}.$$

Vemos que cuando $\alpha \uparrow +\infty$, entonces $\rho(x, t) \rightarrow 0$.

Ahora enunciaremos la desigualdad de Carleman clásica.

Lema 3.3.2 *Consideremos la función η que satisface la Hipótesis 3.3.1, y definimos α y ξ como antes. Entonces existen constantes positivas λ_1, s_1, C_1 que dependen solo de los conjuntos*

$(0, 1)$ y \mathcal{O} tal que para cualquier $\lambda \geq \lambda_1$ y cualquier $s \geq s_1$

$$\begin{aligned} & s^{-1} \int_0^T \int_0^1 e^{-2s\alpha\xi^{-1}} \left(|q_t|^2 + |q_{xx}|^2 \right) dxdt + s\lambda^2 \int_0^T \int_0^1 e^{-2s\alpha\xi} |q_x|^2 dxdt \\ & \quad + s^3\lambda^4 \int_0^T \int_0^1 e^{-2s\alpha\xi^3} |q|^2 dxdt \\ & \leq C_1 \left(\int_0^T \int_0^1 e^{-2s\alpha} |q_t + q_{xx}|^2 dxdt + s^3\lambda^4 \int_0^T \int_{\mathcal{O}} e^{-2s\alpha\xi^3} |q|^2 dxdt \right), \end{aligned} \quad (3.47)$$

para todo $q \in C^4([0, 1] \times [0, T])$, con $q = 0$ en $\Gamma \times (0, T)$. Más aún, $s_1 = C(T + T^2)$ donde $C > 0$ depende de los conjuntos $(0, 1)$ y \mathcal{O} .

3.3.2. Relación entre la desigualdad de Carleman y la desigualdad de observabilidad

Vamos a ver como nos ayuda la desigualdad de Carleman a probar la desigualdad de observabilidad con un procedimiento similar al que se utiliza en [FCZ00, DFCGBZ02, Pue19]. Usaremos que $C > 0$ es una constante genérica que depende a lo más de los conjuntos $(0, 1)$ y \mathcal{O} , y que puede cambiar de línea a línea. Primero notemos que las funciones definidas en el Lema 3.3.2 nos permiten construir la desigualdad de Carleman (3.47).

Sea el sistema adjunto (2.7) con condición inicial $\varphi_T \in L^2(0, 1)$, y cuya solución es $\varphi \in C([0, T]; L^2(0, 1)) \cap L^2(0, T; H_0^1(0, 1))$. Por el Teorema 1.2.13, es posible tomar un dato inicial $\varphi_T \in C_c^\infty([0, 1])$, para la ecuación (2.7) con solución $\varphi \in C^\infty([0, 1] \times [0, T])$. Luego, por densidad, el Lema 3.3.2 se satisface para el sistema (2.7). Dicho lo anterior, fijamos $\lambda = \lambda_1$, y de (3.47) se tiene

$$\begin{aligned} s^3\lambda_1^4 \int_0^T \int_0^1 e^{-2s\alpha\xi^3} |\varphi|^2 dxdt & \leq \left(\int_0^T \int_0^1 e^{-2s\alpha} |\varphi_t + \varphi_{xx}|^2 dxdt \right. \\ & \quad \left. + s^3\lambda_1^4 \int_0^T \int_{\mathcal{O}} e^{-2s\alpha\xi^3} |\varphi|^2 dxdt \right). \end{aligned}$$

De (2.7) se tiene que $\varphi_t + \varphi_{xx} = 0$, por lo tanto

$$s^3\lambda_1^4 \int_0^T \int_0^1 e^{-2s\alpha\xi^3} |\varphi|^2 dxdt \leq C_1 \left(s^3\lambda_1^4 \int_0^T \int_{\mathcal{O}} e^{-2s\alpha\xi^3} |\varphi|^2 dxdt \right), \quad (3.48)$$

$\forall s \geq s_1 = C(T + T^2)$, y $\forall \varphi_T \in L^2(0, 1)$. Ahora sea la función η , tal que satisface la Hipótesis 3.3.1. Tomando $\min_{x \in [0, 1]} \eta(x) = 0$, y dado que $\lambda = \lambda_1$ entonces tenemos la siguiente cota por debajo para (3.46)

$$t^{-1}(T - t)^{-1} \leq \xi.$$

Si tomamos $\max_{x \in [0, 1]} \eta(x) = \|\eta\|_\infty$, deducimos una cota por arriba para (3.46), lo que implica

$$t^{-1}(T - t)^{-1} \leq \xi \leq Ct^{-1}(T - t)^{-1}. \quad (3.49)$$

Eliminamos términos semejantes en (3.48) y aplicamos (3.49), entonces

$$\int_0^T \int_0^1 e^{-2s\alpha} t^{-3} (T-t)^{-3} |\varphi|^2 dx dt \leq C \int_0^T \int_0^1 e^{-2s\alpha} t^{-3} (T-t)^{-3} |\varphi|^2 dx dt. \quad (3.50)$$

A continuación deberemos encontrar una cota por debajo y por arriba para el siguiente término

$$\frac{1}{\mathcal{P}(x, t)} = e^{-2s\alpha} t^{-3} (T-t)^{-3} = \left(e^{-2s \frac{\alpha_0}{t(T-t)}} \right) t^{-3} (T-t)^{-3}, \quad (3.51)$$

donde $\alpha_0 = \alpha_0(x) = e^{4\lambda\|\eta\|_\infty} - e^{\lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta(x))}$. Fijamos temporalmente $\eta(x) = \eta_1$ en cualquier punto $x \in [0, 1]$, tal que $\alpha_0^1 = e^{4\lambda\|\eta\|_\infty} - e^{\lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta_1)}$ es una constante. Reescribimos la ecuación (3.51) de la siguiente manera

$$\mathcal{P}^x(t) = e^{2s \frac{\alpha_0^1}{t(T-t)}} t^3 (T-t)^3 = e^{2s \frac{\alpha_0^1}{\tau}} \tau^3 = \mathcal{J}^x(\tau). \quad (3.52)$$

Aquí $\tau = t(T-t)$, por lo que derivando esta función e igualando a cero obtenemos que $\tau_t = T - 2t = 0 \implies t = \frac{T}{2} \implies \max_{t \in [0, T]} \tau = \frac{T^2}{4}$, de ahí que $\tau \in [0, \frac{T^2}{4}]$. Ahora encontraremos el mínimo de la función $\mathcal{J}^x(t)$, para ello obtendremos su derivada e igualamos a cero, para posteriormente sustituir este resultado en la función original. Entonces

$$\frac{d}{dt} \mathcal{J}^x(\tau) = 3\tau^2 e^{\frac{2s\alpha_0^1}{\tau}} - 2s\alpha_0^1 \tau e^{\frac{2s\alpha_0^1}{\tau}} = 0,$$

lo que implica $\hat{\tau} = \frac{2}{3}s\alpha_0^1$. Luego, $\mathcal{J}^x(\hat{\tau}) = \left(\frac{2}{3}s\alpha_0^1\right)^3 e^3$ es el mínimo. Por otro lado, aplicando la regla de l'Hôpital podemos determinar que

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \mathcal{J}^x(\tau) = \infty,$$

lo que nos dice que la función $\mathcal{J}^x(\tau)$ decrece para valores $\tau \in (0, \hat{\tau})$ e incrementa para $\tau > \hat{\tau}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \min_{t \in [0, T]} \mathcal{P}^x(t) &= \min_{\tau \in [0, \frac{T^2}{4}]} \mathcal{J}^x(\tau) \\ &= \begin{cases} \mathcal{J}^x(\tau) = \left(\frac{2}{3}s\alpha_0^1\right)^3 e^3 & \text{si } \frac{T^2}{4} \geq \frac{2}{3}s\alpha_0^1, \\ \mathcal{J}^x\left(\frac{T^2}{4}\right) = \frac{T^6}{2^6} e^{\frac{8s\alpha_0^1}{T^2}} & \text{si } \frac{T^2}{4} < \frac{2}{3}s\alpha_0^1. \end{cases} \end{aligned}$$

Otra manera de identificar el mínimo es graficando la función $\mathcal{P}^x(t)$, tal como se muestra en la figura 3.3.2, donde ponemos de ejemplo que $2s\alpha_0^1 = 12$, $T = 2$, y observamos que el mínimo de esta función se da cuando $t = \frac{T}{2} \implies \tau = \frac{T^2}{4}$. Ahora, sabemos que $m_0 = \min_{x \in [0, 1]} \alpha(x) \leq$

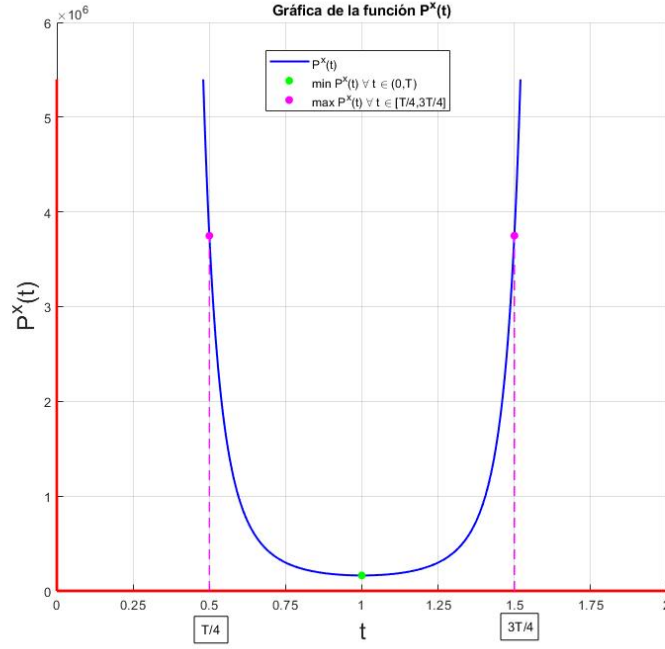


Figura 3.1: Gráfica de la función $\mathcal{P}^x(t)$ con $2s\alpha_0^1 = 12$, y $T = 2$.

$\alpha(x) \implies m_0 \leq \alpha_0^1$, por lo tanto si

$$s \geq s_2 = \max \left\{ s_1, \frac{3T^2}{8m_0} \right\}, \quad (3.53)$$

entonces tenemos

$$\min_{t \in [0, T]} \mathcal{P}^x(t) \geq \frac{T^6}{2^6} e^{-\frac{8m_0 s}{T^2}},$$

lo que implica que hemos encontrado una cota superior para (3.51), es decir

$$e^{-2s\alpha} t^{-3} (T-t)^{-3} \leq \frac{2^6}{T^6} e^{-\frac{8m_0 s}{T^2}}, \quad \forall s_2 \leq s. \quad (3.54)$$

Recordando que C es una constante que puede cambiar de línea a línea, y por el Lema 3.3.2 tenemos que $s_1 = C_s(T + T^2)$, de (3.53) se sigue que

$$s_2 \leq s_3 = C(T + T^2), \quad \text{con } C = \max \left\{ C_s, \frac{3}{8m_0} \right\}.$$

Fijamos $s = s_3$, entonces de (3.54) obtenemos

$$e^{-2s\alpha} t^{-3} (T-t)^{-3} \leq \frac{2^6}{T^6} e^{-C_1(1+\frac{1}{T})} \quad \forall (x, t) \in Q. \quad (3.55)$$

Ahora determinaremos una cota por debajo para (3.51), para ello, dado (3.52), sabemos que $\tau = t(T - t) \in \left[0, \frac{T^2}{4}\right]$, sin embargo, la función $\mathcal{J}^x(\tau)$ no está acotada por arriba, ya que $\mathcal{J}^x(0) = \infty$ por lo que restringiremos la función τ a valores para $t \in \left[\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}\right]$, lo que implica que $\tau \in \left[\frac{3T^2}{16}, \frac{T^2}{4}\right]$. Con esto y dado que $\mathcal{J}^x(\tau)$ es simétrica (como se muestra en la figura 3.3.2), entonces el máximo para esta función se da al evaluarla en el punto $\tau = \frac{3T^2}{16}$, de ahí que

$$\max_{t \in \left[\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}\right]} \mathcal{P}^x(t) = \max_{\tau \in \left[\frac{3T^2}{16}, \frac{T^2}{4}\right]} \mathcal{J}^x(\tau) = \left(\frac{3T^2}{16}\right)^3 e^{\frac{4}{3} \frac{8s\alpha_0^1}{T^2}}.$$

Puesto que $M_0 = \max_{x \in [0,1]} \alpha(x) \geq \alpha(x) \implies M_0 \geq \alpha_0^1$, por lo tanto, para $s \geq \frac{T^2}{8m_0} \geq \frac{T^2}{8M_0}$ se tiene

$$\max_{t \in \left[\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}\right]} \mathcal{P}^x(t) \geq \left(\frac{3T^2}{16}\right)^3 e^{\frac{4}{3} \frac{8sM_0}{T^2}}.$$

Si tomamos $s \geq s_3$ obtenemos una cota inferior para (3.51), es decir

$$e^{-2s\alpha} t^{-3} (T-t)^{-3} \geq \left(\frac{16}{3T}\right)^3 e^{-\frac{4}{3} \frac{8M_0 s}{T^2}}.$$

Fijamos $s = s_3$, entonces de la desigualdad anterior se sigue

$$\left(\frac{16}{3T}\right)^3 e^{-C_2(1+\frac{1}{T})} \leq e^{-2s\alpha} t^{-3} (T-t)^{-3}, \quad \forall (x, t) \in [0, 1] \times \left[\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}\right]. \quad (3.56)$$

Aplicando (3.55) y (3.56) a (3.50) se obtiene

$$\left(\frac{16}{3T}\right)^3 e^{-C_2(1+\frac{1}{T})} \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \int_0^1 |\varphi|^2 dx dt \leq \frac{2^6}{T^6} e^{-C_1(1+\frac{1}{T})} \int_0^T \int_{\mathcal{O}} |\varphi|^2 dx dt,$$

lo que implica

$$\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \int_0^1 |\varphi|^2 dx dt \leq C_o \int_0^T \int_{\mathcal{O}} |\varphi|^2 dx dt, \quad (3.57)$$

para alguna constante $C_o > 0$, que depende de T , $(0, 1)$ y \mathcal{O} . Finalmente, acotaremos el término a la izquierda de la desigualdad (3.57). Para ello de nuestra ecuación (3.2) se tiene que

$$-\varphi_t = \varphi_{xx} \implies \varphi_t = -\varphi_{xx}.$$

Hacemos el producto interno en $L^2(0, 1)$ con φ , entonces

$$(\varphi_t, \varphi)_{L^2(0,1)} = -(\varphi_{xx}, \varphi_t)_{L^2(0,1)}.$$

Ahora sea $(\varphi_t, \varphi)_{L^2(0,1)} = \frac{1}{2} (\varphi_t, \varphi)_{L^2(0,1)} + \frac{1}{2} (\varphi, \varphi_t)_{L^2(0,1)}$, por lo que de la ecuación anterior se sigue que

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} (\varphi, \varphi)_{L^2(0,1)} \right) = \frac{1}{2} \left((\varphi_t, \varphi)_{L^2(0,1)} + (\varphi, \varphi_t)_{L^2(0,1)} \right) = - \int_0^1 \varphi \varphi_{xx} dx,$$

de ahí que

$$\frac{d}{dt} \|\varphi(\cdot, t)\|_{L^2(0,1)} = -2 \int_0^1 \varphi \varphi_{xx} dx.$$

Integramos por partes el lado derecho de la ecuación anterior y por las condiciones de frontera de (3.2) se tiene

$$\frac{d}{dt} \|\varphi(\cdot, t)\|_{L^2(0,1)} = 2 \int_0^1 |\varphi_x|^2 dx \geq 0.$$

Integramos ambos extremos de la desigualdad en el intervalo $[0, t]$, y aplicando el Teorema fundamental del cálculo tenemos que

$$\|\varphi(\cdot, t)\|_{L^2(0,1)} \geq \|\varphi(\cdot, 0)\|_{L^2(0,1)},$$

de donde se sigue

$$\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \|\varphi(\cdot, t)\|_{L^2(0,1)} dt \geq \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \|\varphi(\cdot, 0)\|_{L^2(0,1)} dt.$$

Dado que el término $\|\varphi(\cdot, 0)\|_{L^2(0,1)}$ no depende del parámetro t obtenemos

$$\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \int_0^1 |\varphi|^2 dx dt \geq \frac{T}{2} \|\varphi(\cdot, 0)\|_{L^2(0,1)}.$$

Sustituyendo este resultado en (3.57) tenemos

$$\|\varphi(\cdot, 0)\|_{L^2(0,1)} \leq C \int_0^T \int_{\mathcal{O}} |\varphi|^2 dx dt,$$

que es la desigualdad de observabilidad (3.7).

3.3.3. Prueba de la desigualdad de Carleman

En esta sección probaremos la desigualdad de Carleman del Lema 3.3.2. Para ello y como ya se ha hecho antes, a partir del conjunto $\mathcal{O}_o \subset \subset \mathcal{O}$ definimos el peso η , tal que satisface la Hipótesis 3.3.1. Ahora consideramos los siguientes cambios de variable que nos permitirán simplificar algunas ecuaciones más adelante,

$$\begin{cases} \psi = e^{-s\alpha} q, \\ g = e^{-s\alpha} f, \\ f = q_t + q_{xx}. \end{cases} \quad (3.58)$$

Recordamos los pesos de las ecuaciones (3.45), (3.46). Calculando α_x , se tiene que

$$\alpha_x = -\lambda\eta_x \left(\frac{e^{\lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta(x))}}{t(T-t)} \right).$$

Por lo tanto tenemos que

$$\alpha_x = -\lambda\xi\eta_x. \quad (3.59)$$

Siguiendo el mismo procedimiento tenemos que

$$\xi_x = \lambda\xi\eta_x. \quad (3.60)$$

A continuación, a partir de (3.58) vamos a estimar una expresión a la cual llamaremos la identidad de Carleman. Entonces tenemos que

$$f = q_t + q_{xx}.$$

Multiplicamos ambos lados de la ecuación anterior por el término $e^{-s\alpha}$

$$e^{-s\alpha} f = e^{-s\alpha} (q_t + q_{xx}).$$

Por (3.58), sabemos que $g = e^{-s\alpha} f$, además $\psi = e^{-s\alpha} q \implies q = e^{s\alpha} \psi$, entonces

$$e^{-s\alpha} [(e^{s\alpha} \psi)_t + (e^{s\alpha} \psi)_{xx}] = g. \quad (3.61)$$

Calculamos primero el término $(e^{s\alpha} \psi)_t$ utilizando las fórmulas de derivación clásicas, es decir

$$(e^{s\alpha} \psi)_t = e^{s\alpha} \psi_t + e^{s\alpha} s\alpha_t \psi = e^{s\alpha} (\psi_t + s\alpha_t \psi). \quad (3.62)$$

Ahora calculamos el término $(e^{s\alpha} \psi)_{xx}$. Para ello estimamos primero $(e^{s\alpha} \psi)_x$, luego

$$(e^{s\alpha} \psi)_x = e^{s\alpha} \psi_x + e^{s\alpha} s\alpha_x \psi.$$

De (3.45) tenemos que

$$(e^{s\alpha} \psi)_x = e^{s\alpha} \psi_x + e^{s\alpha} s\lambda\xi\eta_x \psi.$$

Por lo tanto

$$(e^{s\alpha} \psi)_{xx} = (e^{s\alpha} \psi_x + e^{s\alpha} s\lambda\xi\eta_x \psi)_x. \quad (3.63)$$

Ahora calculamos por separado los términos de (3.63), entonces

$$\begin{aligned} (e^{s\alpha} \psi_x)_x &= e^{s\alpha} \psi_{xx} + e^{s\alpha} s\alpha_x \psi_x \\ &= e^{s\alpha} \psi_{xx} - e^{s\alpha} s\lambda\xi\eta_x \psi_x. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Para el segundo término de (3.63) tenemos

$$(e^{s\alpha} s\lambda\xi\eta_x \psi)_x = e^{s\alpha} (s\lambda\xi_x \eta_x \psi + s\lambda\xi \eta_{xx} \psi + s\lambda\xi \eta_x \psi_x) + e^{s\alpha} (s^2 \alpha_x \lambda\xi \eta_x \psi).$$

Por (3.45) y (3.46) se tiene que

$$(e^{s\alpha} s\lambda\xi\eta_x\psi)_x = e^{s\alpha}(s\lambda^2\xi|\eta_x|^2\psi + s\lambda\xi\eta_{xx}\psi + s\lambda\xi\eta_x\psi_x) - e^{s\alpha}(s^2\lambda^2\xi^2|\eta_x|^2\psi). \quad (3.65)$$

Sustituimos las ecuaciones (3.64) y (3.65) en (3.63) para obtener

$$(e^{s\alpha}\psi)_{xx} = e^{s\alpha}(\psi_{xx} - 2s\lambda\xi\eta_x\psi_x - s\lambda^2\xi|\eta_x|^2\psi - s\lambda\xi\eta_{xx}\psi + s^2\lambda^2\xi^2|\eta_x|^2\psi). \quad (3.66)$$

Sustituyendo (3.62), (3.66) en (3.61) tenemos

$$\begin{aligned} g &= e^{-s\alpha} [e^{s\alpha} (\psi_t + s\alpha_t\psi + \psi_{xx} - 2s\lambda\xi\eta_x\psi_x - s\lambda^2\xi|\eta_x|^2\psi - s\lambda\xi\eta_{xx}\psi + s^2\lambda^2\xi^2|\eta_x|^2\psi)] \\ &= \psi_t + s\alpha_t\psi + \psi_{xx} - 2s\lambda\xi\eta_x\psi_x - s\lambda^2\xi|\eta_x|^2\psi - s\lambda\xi\eta_{xx}\psi + s^2\lambda^2\xi^2|\eta_x|^2\psi. \end{aligned}$$

Sumamos los términos $-s\lambda^2\xi|\eta_x|^2\psi$, $s\lambda\xi\eta_{xx}\psi$ en ambos lados de la ecuación anterior, entonces

$$g + s\lambda\xi\eta_{xx}\psi - s\lambda^2\xi|\eta_x|^2\psi = -2s\lambda^2\xi|\eta_x|^2\psi - 2s\lambda\xi\eta_x\psi_x + \psi_t + s^2\lambda^2\xi^2|\eta_x|^2\psi + \psi_{xx} + s\alpha_t\psi.$$

Hacemos la siguiente notación

$$A\psi = -2s\lambda^2\xi|\eta_x|^2\psi - 2s\lambda\xi\eta_x\psi_x + \psi_t, \quad (3.67)$$

$$B\psi = s^2\lambda^2\xi^2|\eta_x|^2\psi + \psi_{xx} + s\alpha_t\psi, \quad (3.68)$$

$$g_{s,\lambda} = g + s\lambda\xi\eta_{xx}\psi - s\lambda^2\xi|\eta_x|^2\psi. \quad (3.69)$$

Tenemos entonces la identidad de Carleman que nos ayudará a probar la desigualdad del Lema 3.3.2, es decir

$$A\psi + B\psi = g_{s,\lambda}. \quad (3.70)$$

Definimos además

$$\begin{cases} A_1 = -2s\lambda^2\xi|\eta_x|^2\psi, & A_2 = -2s\lambda\xi\eta_x\psi_x, & A_3 = \psi_t, \\ B_1 = s^2\lambda^2\xi^2|\eta_x|^2\psi, & B_2 = \psi_{xx}, & B_3 = s\alpha_t\psi. \end{cases} \quad (3.71)$$

Antes de continuar, deberemos estimar algunos resultados que nos ayudarán a deducir cotas para ciertos términos que veremos más adelante. Primero calcularemos los términos ψ_x , ψ_{xx} y ψ_t . Entonces para el primer término se tiene

$$\begin{aligned} \psi_x &= (e^{-s\alpha}q)_x \\ &= e^{-s\alpha}q_x + (-qse^{-s\alpha}\alpha_x). \end{aligned}$$

Utilizando la ecuación (3.59) obtenemos

$$\begin{aligned} \psi_x &= e^{-s\alpha}q_x + se^{-s\alpha}q\lambda\xi\eta_x \\ &= e^{-s\alpha}q_x + s\lambda\xi\eta_x\psi. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Calculemos el término ψ_{xx}

$$\psi_{xx} = (e^{-s\alpha}q_x + s\lambda\xi\eta_x\psi)_x. \quad (3.73)$$

Para ello debemos realizar la derivada de cada uno de los sumandos de (3.73) por separado, entonces

$$\begin{aligned} (e^{-s\alpha} q_x)_x &= e^{-s\alpha} q_{xx} + q_x (-se^{-s\alpha} \alpha_x) \\ &= e^{-s\alpha} q_{xx} + s\lambda \xi e^{-s\alpha} q_x \eta_x. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Ahora se tiene que

$$\begin{aligned} (s\lambda \xi \eta_x \psi)_x &= s\lambda \xi \eta_x \psi_x + s\lambda \xi_x \eta_x \psi + s\lambda \xi \eta_{xx} \psi \\ &= s\lambda \xi \eta_x \psi_x + s\lambda^2 \xi |\eta_x|^2 \psi + s\lambda \xi \eta_{xx} \psi, \end{aligned} \quad (3.75)$$

esto último por la ecuación (3.60). Sustituyendo las ecuaciones (3.74) y (3.75) en (3.73) tenemos

$$\begin{aligned} \psi_{xx} &= e^{-s\alpha} q_{xx} + s\lambda \xi e^{-s\alpha} q_x \eta_x + s\lambda \xi \eta_x \psi_x \\ &\quad + s\lambda \xi \eta_{xx} \psi + s\lambda^2 \xi |\eta_x|^2 \psi. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Para el termino ψ_t se sigue

$$\begin{aligned} \psi_t &= (e^{-s\alpha} q)_t \\ &= e^{-s\alpha} q_t - sqe^{-s\alpha} \alpha_t \\ &= e^{-s\alpha} q_t - s\alpha_t \psi. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Ahora vamos a estimar una cota superior para el término $|\alpha_t|$, entonces tenemos

$$\alpha_t = \left(\frac{e^{4\lambda \|\eta\|_\infty}}{t(T-t)} \right)_t - \left(\frac{e^{\lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta(x))}}{t(T-t)} \right)_t. \quad (3.78)$$

Desarrollaremos cada uno de los términos por separado utilizando las fórmulas clásicas de derivación. Tenemos para el primer término

$$\left(\frac{e^{4\lambda \|\eta\|_\infty}}{t(T-t)} \right)_t = \frac{-e^{4\lambda \|\eta\|_\infty} (T-2t)}{t^2 (T-t)^2} = -\frac{e^{4\lambda \|\eta\|_\infty} (T-2t)}{t^2 (T-t)^2}. \quad (3.79)$$

Para el segundo término se tiene

$$\left(\frac{e^{\lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta(x))}}{t(T-t)} \right)_t = \frac{-e^{\lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta(x))} (T-2t)}{t^2 (T-t)^2} = -\frac{e^{\lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta(x))} (T-2t)}{t^2 (T-t)^2}. \quad (3.80)$$

Sustituyendo (3.79) y (3.80) en (3.78) obtenemos

$$\begin{aligned} \alpha_t &= -\frac{e^{4\lambda \|\eta\|_\infty} (T-2t)}{t^2 (T-t)^2} + \frac{e^{\lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta(x))} (T-2t)}{t^2 (T-t)^2} \\ &= \left(e^{\lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta(x))} - e^{4\lambda \|\eta\|_\infty} \right) \frac{(T-2t)}{t^2 (T-t)^2}. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Tomemos $|\alpha_t|$, entonces podemos decir

$$\begin{aligned} |\alpha_t| &= \left| e^{\lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta(x))} - e^{4\lambda\|\eta\|_\infty} \right| \frac{|T - 2t|}{t^2(T - t)^2} \\ &= \frac{|e^{\lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta(x))}|}{t^2(T - t)^2} \left| 1 - \frac{e^{4\lambda\|\eta\|_\infty}}{e^{\lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta(x))}} \right| |T - 2t|. \end{aligned}$$

Como $\lambda > 0$ y $\eta(x) \geq 0$ en $[0, 1]$, entonces el término $e^{\lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta(x))} \geq 1$, y podemos decir que $e^{\lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta(x))} \leq e^{2\lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta(x))}$, y además $|T - 2t| \leq |T|$. Por lo tanto se produce la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} |\alpha_t| &\leq \frac{|e^{2\lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta(x))}|}{t^2(T - t)^2} \left| 1 - \frac{e^{4\lambda\|\eta\|_\infty}}{e^{\lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta(x))}} \right| |T| \\ &= \left| 1 - \frac{e^{4\lambda\|\eta\|_\infty}}{e^{\lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta(x))}} \right| T \xi^2 \end{aligned} \quad (3.82)$$

Ahora sea

$$\left| 1 - \frac{e^{4\lambda\|\eta\|_\infty}}{e^{\lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta(x))}} \right| = \left| 1 - e^{4\lambda\|\eta\|_\infty - \lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta(x))} \right| = \left| 1 - e^{\lambda(2\|\eta\|_\infty - \eta(x))} \right|.$$

Dado que $\eta(x) > 0$ por la Hipótesis 3.3.1, y como el intervalo $[0, 1]$ es compacto, entonces $\eta(x) \leq \|\eta(x)\|_\infty \forall x \in [0, 1]$. De ahí que

$$\left| 1 - e^{\lambda(2\|\eta\|_\infty - \eta(x))} \right| \leq \left| 1 - e^{\lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta(x))} \right| \leq \left| 1 - e^{\lambda(2\|\eta\|_\infty + \|\eta\|_\infty)} \right| = C$$

Sustituyendo este resultado en la desigualdad (3.82) obtenemos

$$|\alpha_t| \leq CT\xi^2. \quad (3.83)$$

Calcularemos ahora α_{tt} y daremos una cota por arriba para el valor absoluto de este término. Entonces de (3.81) se tiene

$$\begin{aligned} \alpha_{tt} &= \left(\left(e^{\lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta(x))} - e^{4\lambda\|\eta\|_\infty} \right) \frac{(T - 2t)}{t^2(T - t)^2} \right)_t \\ &= \left(e^{\lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta(x))} - e^{4\lambda\|\eta\|_\infty} \right) \left(\frac{-2t^2(T - t)^2 - 2t(T - t)(T - 2t)^2}{t^4(T - t)^4} \right) \\ &= \left(e^{\lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta(x))} - e^{4\lambda\|\eta\|_\infty} \right) \left(\frac{-2t(T - t) - 2(T - 2t)^2}{t^3(T - t)^3} \right), \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\alpha_{tt} = -2 \left(e^{\lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta(x))} - e^{4\lambda\|\eta\|_\infty} \right) \frac{T^2 - 3Tt + 3t^2}{t^3(T - t)^3}. \quad (3.84)$$

De (3.84), podemos estimar una cota por arriba para $|\alpha_t|$, entonces

$$\begin{aligned} |\alpha_{tt}| &= |-2| \left| \frac{e^{\lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta(x))} - e^{4\lambda\|\eta\|_\infty}}{t^3(T-t)^3} \right| \frac{|T^2 - 3Tt + 3t^2|}{|t^3(T-t)^3|} \\ &= |-2| \frac{|e^{\lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta(x))}|}{|t^3(T-t)^3|} \left| 1 - \frac{e^{4\lambda\|\eta\|_\infty}}{e^{\lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta(x))}} \right| |T^2 - 3Tt + 3t^2| \end{aligned}$$

Como $\lambda > 0$ y $\eta(x) \geq 0$ en $[0, 1]$, entonces el término $e^{\lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta(x))} \geq 1$, y podemos decir que $e^{\lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta(x))} \leq e^{3\lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta(x))}$, y además $|T - 3Tt + 3t^2| \leq |T^2|$. Por lo tanto se produce la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} |\alpha_{tt}| &\leq \frac{|e^{3\lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta(x))}|}{t^3(T-t)^3} \left| 1 - \frac{e^{4\lambda\|\eta\|_\infty}}{e^{\lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta(x))}} \right| |T^2| \\ &= \left| 1 - \frac{e^{4\lambda\|\eta\|_\infty}}{e^{\lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta(x))}} \right| T^2 \xi^3 \end{aligned}$$

Ahora sea

$$\left| 1 - \frac{e^{4\lambda\|\eta\|_\infty}}{e^{\lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta(x))}} \right| = \left| 1 - e^{4\lambda\|\eta\|_\infty - \lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta(x))} \right| = \left| 1 - e^{\lambda(2\|\eta\|_\infty - \eta(x))} \right|.$$

Dado que $\eta(x) > 0$ por la Hipótesis 3.3.1, y como el intervalo $[0, 1]$ es compacto, entonces $\eta(x) \leq \|\eta(x)\|_\infty \forall x \in [0, 1]$. De ahí que

$$\left| 1 - e^{\lambda(2\|\eta\|_\infty - \eta(x))} \right| \leq \left| 1 - e^{\lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta(x))} \right| \leq \left| 1 - e^{\lambda(2\|\eta\|_\infty + \|\eta\|_\infty)} \right| = C$$

Sustituyendo este resultado en la desigualdad (3.82) obtenemos

$$|\alpha_{tt}| \leq CT^2 \xi^3. \quad (3.85)$$

De igual manera estimaremos ξ_t , y daremos una cota por arriba para este término. Entonces por la ecuación (3.80) tenemos que

$$|\xi_t| = \left| \left(\frac{e^{\lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta(x))}}{t(T-t)} \right)_t \right| = \left| -\frac{e^{\lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta(x))}(T-2t)}{t^2(T-t)^2} \right|.$$

Como ya se ha dicho $e^{\lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta(x))} \leq e^{2\lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta(x))}$ y $|T - 2t| \leq |T|$, por lo tanto se sigue la siguiente desigualdad

$$|\xi_t| = \left| -\frac{e^{\lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta(x))}(T-2t)}{t^2(T-t)^2} \right| \leq \left| -\frac{e^{2\lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta(x))}}{t^2(T-t)^2} \right| |T| = \xi^2 T.$$

Dado que $\xi^2 T > 0$, y para $C > 0$, se tiene

$$|\xi_t| \leq CT \xi^2 \quad (3.86)$$

Finalmente de las ecuaciones (3.59), (3.60), $\|\eta_x\|_\infty \leq C$ podemos establecer

$$\alpha_x = -\lambda\xi\eta_x = -\xi_x \leq C\lambda\xi$$

Procedemos ahora a tomar la norma $L^2(Q)$ en ambos lados de la ecuación (3.70), y obtenemos la siguiente ecuación

$$\|A\psi\|_{L^2(Q)}^2 + \|B\psi\|_{L^2(Q)}^2 + 2 \sum_{i,j=1}^3 (A_i, B_j)_{L^2(Q)} = \|g_{s,\lambda}\|_{L^2(Q)}^2, \quad (3.87)$$

con $\|A\psi\|_{L^2(Q)}^2, \|B\psi\|_{L^2(Q)}^2 \geq 0$.

El lema que enunciamos a continuación es auxiliar para acotar la ecuación (3.87).

Lema 3.3.3 *Sea η una función que satisface la Hipótesis 3.3.1, entonces*

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i,j=1}^3 (A_i, B_j)_{L^2(Q)} \geq & C \int_0^T \int_0^1 s^3 \lambda^4 \xi^3 |\psi|^2 dx dt - C \int_0^T \int_{\mathcal{O}_0} s^3 \lambda^4 \xi^3 |\psi|^2 dx dt \\ & + C \int_0^T \int_0^1 s \lambda^2 \xi |\psi_x|^2 dx dt - C \int_0^T \int_{\mathcal{O}_0} s \lambda^2 \xi |\psi_x|^2 dx dt, \end{aligned} \quad (3.88)$$

donde A_i, B_j se definen en la ecuación (3.71).

DEMOSTRACIÓN. Dividiremos la prueba en varias partes.

1. Calcularemos primero los términos $(A_1, B_1)_{L^2(Q)}$ y $(A_2, B_1)_{L^2(Q)}$, entonces por (3.71)

$$(A_1, B_1)_{L^2(Q)} = - \int_0^T \int_0^1 2s^3 \lambda^4 \xi^3 |\eta_x|^4 |\psi|^2 dx dt, \quad (3.89)$$

$$\begin{aligned} (A_2, B_1)_{L^2(Q)} &= - \int_0^T \int_0^1 2s^3 \lambda^3 \xi^3 (\eta_x)^3 \psi \psi_x dx dt \\ &= - \int_0^T \int_0^1 s^3 \lambda^3 \xi^3 (\eta_x)^3 (|\psi|^2)_x dx dt. \end{aligned}$$

Integrando por partes y recordando que $\psi = e^{-s\alpha} q(x, t)$, $q = 0$ en $\Gamma \times (0, T)$ por el Lema 3.3.2, entonces

$$\begin{aligned} (A_2, B_1)_{L^2(Q)} &= \int_0^T \int_0^1 s^3 \lambda^3 \left(\xi^3 (\eta_x)^3 \right)_x |\psi|^2 dx dt. \\ &= \int_0^T \int_0^1 3s^3 \lambda^3 \xi^2 \xi_x (\eta_x)^3 |\psi|^2 dx dt + \int_0^T \int_0^1 3s^3 \lambda^3 \xi^3 |\eta_x|^2 \eta_{xx} |\psi|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Recordando la ecuación (3.60)

$$(A_2, B_1)_{L^2(Q)} = \int_0^T \int_0^1 3s^3 \lambda^4 \xi^3 |\eta_x|^4 |\psi|^2 dxdt + \int_0^T \int_0^1 3s^3 \lambda^3 \xi^3 |\eta_x|^2 \eta_{xx} |\psi|^2 dxdt. \quad (3.90)$$

Sumando las ecuaciones (3.89) y (3.90) se tiene

$$(A_1 + A_2, B_1)_{L^2(Q)} = \int_0^T \int_0^1 s^3 \lambda^4 \xi^3 |\eta_x|^4 |\psi|^2 dxdt + 3 \int_0^T \int_0^1 s^3 \lambda^3 \xi^3 |\eta_x|^2 \eta_{xx} |\psi|^2 dxdt.$$

Por la Hipótesis 3.3.1 sabemos, $|\eta_x| \geq \delta$ en $\mathcal{I} = (0, 1) \setminus \mathcal{O}_0$, por lo tanto podemos decir que existe una constante C_δ que depende de δ tal que

$$\begin{aligned} (A_1 + A_2, B_1)_{L^2(Q)} &\geq C_\delta \int_0^T \int_{\mathcal{I}} s^3 \lambda^4 |\psi|^2 dxdt + 3 \int_0^T \int_0^1 s^3 \lambda^3 \xi^3 |\eta_x|^2 \eta_{xx} |\psi|^2 dxdt \\ &\quad + C \int_0^T \int_{\mathcal{O}_0} s^3 \lambda^4 \xi^3 |\psi|^2 dxdt - C \int_0^T \int_{\mathcal{O}_0} s^3 \lambda^4 \xi^3 |\psi|^2 dxdt \\ &\geq C \int_0^T \int_0^1 s^3 \lambda^4 \xi^3 |\psi|^2 dxdt - C \int_0^T \int_{\mathcal{O}_0} s^3 \lambda^4 \xi^3 |\psi|^2 dxdt \\ &\quad + 3 \int_0^T \int_0^1 s^3 \lambda^3 \xi^3 |\eta_x|^3 \eta_{xx} |\psi|^2 dxdt, \end{aligned}$$

Por otro lado como $\eta \in C^4[0, 1]$

$$\left| 3 \int_0^T \int_0^1 s^3 \lambda^3 \xi^3 |\eta_x|^3 \eta_{xx} |\psi|^2 dxdt \right| \leq C \int_0^T \int_0^1 s^3 \lambda^3 \xi^3 |\psi|^2 dxdt.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} (A_1 + A_2, B_1)_{L^2(Q)} &\geq C \int_0^T \int_0^1 s^3 \lambda^4 \xi^3 |\psi|^2 dxdt - C \int_0^T \int_{\mathcal{O}_0} s^3 \lambda^4 \xi^3 |\psi|^2 dxdt \\ &\quad - C \int_0^T \int_0^1 s^3 \lambda^3 \xi |\psi|^2 dxdt. \end{aligned}$$

El término $\int_0^T \int_0^1 s^3 \lambda^4 \xi^3 |\psi|^2$ absorbe al término $\int_0^T \int_0^1 s^3 \lambda^3 \xi |\psi|^2 dxdt$, si $\lambda \geq C$

$$(A_1 + A_2, B_1)_{L^2(Q)} \geq C \int_0^T \int_0^1 s^3 \lambda^4 \xi^3 |\psi|^2 dxdt - C \int_0^T \int_{\mathcal{O}_0} s^3 \lambda^4 \xi^3 |\psi|^2 dxdt. \quad (3.91)$$

2. Calcularemos ahora los términos $(A_1, B_2)_{L^2(Q)}$ y $(A_2, B_2)_{L^2(Q)}$. De la ecuación (3.71) estimaremos primero $(A_1, B_2)_{L^2(Q)}$, así tenemos

$$(A_1, B_2)_{L^2(Q)} = -2 \int_0^T \int_0^1 s \lambda^2 \xi |\eta_x|^2 \psi \psi_{xx} dxdt.$$

Integramos por partes el término anterior y como $\psi = e^{-s\alpha}q(x, t)$, $q = 0$ en $\Gamma \times (0, T)$ se tiene

$$(A_1, B_2)_{L^2(Q)} = 2 \int_0^T \int_0^1 s\lambda^2 \left(|\eta_x|^2 \xi \psi \right)_x \psi_x \, dx dt.$$

Usando la regla de la cadena, y recordando la ecuación (3.60) se obtiene

$$\begin{aligned} (A_1, B_2)_{L^2(Q)} &= 2 \int_0^T \int_0^1 s\lambda^2 \xi |\eta_x|^2 |\psi_x|^2 \, dx dt + 4 \int_0^T \int_0^1 s\lambda^2 \xi \eta_x \eta_{xx} \psi \psi_x \, dx dt \\ &\quad + 2 \int_0^T \int_0^1 s\lambda^2 \xi_x |\eta_x|^2 \psi \psi_x \, dx dt \\ &= 2 \int_0^T \int_0^1 s\lambda^2 \xi |\eta_x|^2 |\psi_x|^2 \, dx dt + 4 \int_0^T \int_0^1 s\lambda^2 \xi \eta_x \eta_{xx} \psi \psi_x \, dx dt \\ &\quad + 2 \int_0^T \int_0^1 s\lambda^3 \xi (\eta_x)^3 \psi \psi_x \, dx dt. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Ahora analizaremos por separado algunos de los términos de la ecuación (3.92). Entonces diremos que

$$\begin{cases} \mathcal{G}_1 := 4 \int_0^T \int_0^1 s\lambda^2 \xi \eta_x \eta_{xx} \psi \psi_x \, dx dt, \\ \mathcal{G}_2 := 2 \int_0^T \int_0^1 s\lambda^3 \xi (\eta_x)^3 \psi \psi_x \, dx dt. \end{cases}$$

Por tanto, para \mathcal{G}_1 usamos que $\eta \in C^4[0, 1]$ tenemos

$$|\mathcal{G}_1| \leq C \int_0^T \int_0^1 s\lambda^2 \xi |\psi| |\psi_x| \, dx dt = C \left(s^{\frac{1}{2}} \lambda^2 \xi^{\frac{1}{2}} |\psi|, s^{\frac{1}{2}} \xi^{\frac{1}{2}} |\psi_x| \right)_{L^2(Q)}.$$

Utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la desigualdad de Young en la expresión anterior se tiene que

$$|\mathcal{G}_1| \leq C \left(\int_0^T \int_0^1 s\lambda^4 \xi |\psi|^2 \, dx dt + \int_0^T \int_0^1 s\xi |\psi_x|^2 \, dx dt \right). \quad (3.93)$$

De igual manera, para \mathcal{G}_2 , usamos que $\eta \in C^4[0, 1]$, entonces

$$|\mathcal{G}_2| \leq C \int_0^T \int_0^1 s\lambda^3 \xi |\psi| |\psi_x| \, dx dt = C \left(s\lambda^2 \xi |\psi|, \lambda |\psi_x| \right)_{L^2(Q)}.$$

Utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la desigualdad de Young en la expresión anterior deducimos

$$|\mathcal{G}_2| \leq C \left(\int_0^T \int_0^1 s^2 \lambda^4 \xi^2 |\psi|^2 \, dx dt + \int_0^T \int_0^1 \lambda^2 |\psi_x|^2 \, dx dt \right). \quad (3.94)$$

Sustituyendo los resultados de (3.93) y (3.94) en (3.92) se produce la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} (A_1, B_2)_{L^2(Q)} &\geq 2 \int_0^T \int_0^1 s\lambda^2 \xi |\eta_x|^2 |\psi_x|^2 \, dx dt - C \int_0^T \int_0^1 (s\lambda^4 \xi + s^2 \lambda^4 \xi^2) |\psi|^2 \, dx dt \\ &\quad - C \int_0^T \int_0^1 (s\xi + \lambda^2) |\psi_x|^2 \, dx dt. \end{aligned} \quad (3.95)$$

Ahora estimaremos $(A_2, B_2)_{L^2(Q)}$, entonces

$$\begin{aligned} (A_2, B_2)_{L^2(Q)} &= -2 \int_0^T \int_0^1 s \lambda \xi \eta_x \psi_x \psi_{xx} \, dx dt \\ &= - \int_0^T \int_0^1 s \lambda \xi \eta_x \left(|\psi_x|^2 \right)_x \, dx dt. \end{aligned}$$

Integramos por partes este resultado, por lo tanto

$$\begin{aligned} (A_2, B_2)_{L^2(Q)} &= - \int_0^T s \lambda \xi(1, t) \eta_x(1, t) |\psi_x(1, t)|^2 \, dt + \int_0^T s \lambda \xi(0, t) \eta_x(0, t) |\psi_x(0, t)|^2 \, dt \\ &\quad + \int_0^T \int_0^1 s \lambda (\xi \eta_x)_x |\psi_x|^2 \, dx dt \\ &= - \int_0^T s \lambda \xi(1, t) \eta_x(1, t) |\psi_x(1, t)|^2 \, dt + \int_0^T s \lambda \xi(0, t) \eta_x(0, t) |\psi_x(0, t)|^2 \, dt \\ &\quad + \int_0^T \int_0^1 s \lambda \xi \eta_{xx} |\psi_x|^2 \, dx dt + \int_0^T \int_0^1 s \lambda \xi_x \eta_x |\psi_x|^2 \, dx dt. \end{aligned}$$

Recordando la ecuación (3.60), se tiene

$$\begin{aligned} (A_2, B_2)_{L^2(Q)} &= - \int_0^T s \lambda \xi(1, t) \eta_x(1, t) |\psi_x(1, t)|^2 \, dt + \int_0^T s \lambda \xi(0, t) \eta_x(0, t) |\psi_x(0, t)|^2 \, dt \\ &\quad + \int_0^T \int_0^1 s \lambda \xi \eta_{xx} |\psi_x|^2 \, dx dt + \int_0^T \int_0^1 s \lambda^2 \xi |\eta_x|^2 |\psi_x|^2 \, dx dt. \end{aligned}$$

Por la Hipótesis 3.3.1, sabemos $\eta_x(0) > 0$, y además $\eta_x(1) < 0$, lo que implica

$$\begin{cases} - \int_0^T s \lambda \xi(1, t) \eta_x(1, t) |\psi_x(1, t)|^2 \, dt \geq 0, \\ \int_0^T s \lambda \xi(0, t) \eta_x(0, t) |\psi_x(0, t)|^2 \, dt \geq 0. \end{cases}$$

De ahí que podemos escribir la siguiente desigualdad

$$(A_2, B_2)_{L^2(Q)} \geq \int_0^T \int_0^1 s \lambda \xi \eta_{xx} |\psi_x|^2 \, dx dt + \int_0^T \int_0^1 s \lambda^2 \xi |\eta_x|^2 |\psi_x|^2 \, dx dt. \quad (3.96)$$

Usamos que $\eta \in C^4[0, 1]$ para primer término del lado derecho de la desigualdad (3.96), entonces

$$\left| \int_0^T \int_0^1 s \lambda \xi \eta_{xx} |\psi_x|^2 \, dx dt \right| \leq \int_0^T \int_0^1 s \lambda \xi |\eta_{xx}| |\psi_x|^2 \, dx dt \leq C \int_0^T \int_0^1 s \lambda \xi |\psi_x|^2 \, dx dt.$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (3.96) se tiene

$$(A_2, B_2)_{L^2(Q)} \geq -C \int_0^T \int_0^1 s \lambda \xi |\psi_x|^2 \, dx dt + \int_0^T \int_0^1 s \lambda^2 \xi |\eta_x|^2 |\psi_x|^2 \, dx dt. \quad (3.97)$$

Sumando las ecuaciones (3.95) y (3.97) se tiene que

$$\begin{aligned} (A_1 + A_2, B_2)_{L^2(Q)} &\geq 3 \int_0^T \int_0^1 s\lambda^2 \xi |\eta_x|^2 |\psi_x|^2 dxdt - C \int_0^T \int_0^1 (s\lambda^4 \xi + s^2 \lambda^4 \xi^2) |\psi|^2 dxdt \\ &\quad - C \int_0^T \int_0^1 (s\xi + \lambda^2 + s\lambda\xi) |\psi_x|^2 dxdt. \end{aligned}$$

Sabemos que $|\eta_x| \geq \delta$ en \mathcal{I} , por lo tanto podemos decir que existe una constante C_δ que depende de δ tal que

$$\begin{aligned} (A_1 + A_2, B_2)_{L^2(Q)} &\geq C_\delta \int_0^T \int_{\mathcal{I}} s\lambda^2 \xi |\psi_x|^2 dxdt - C \int_0^T \int_0^1 (s\lambda^4 \xi + s^2 \lambda^4 \xi^2) |\psi|^2 dxdt \\ &\quad - C \int_0^T \int_0^1 (s\xi + \lambda^2 + s\lambda\xi) |\psi_x|^2 dxdt \\ &\geq C_\delta \int_0^T \int_{\mathcal{I}} s\lambda^2 \xi |\psi_x|^2 dxdt + C_\delta \int_0^T \int_{\mathcal{O}_0} s\lambda^2 \xi |\psi_x|^2 dxdt \\ &\quad - C_\delta \int_0^T \int_{\mathcal{O}_0} s\lambda^2 \xi |\psi_x|^2 dxdt - C \int_0^T \int_0^1 (s\lambda^4 \xi + s^2 \lambda^4 \xi^2) |\psi|^2 dxdt \\ &\quad - C \int_0^T \int_0^1 (s\xi + \lambda^2 + s\lambda\xi) |\psi_x|^2 dxdt. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} (A_1 + A_2, B_2)_{L^2(Q)} &\geq C \int_0^T \int_0^1 s\lambda^2 \xi |\psi_x|^2 dxdt - C \int_0^T \int_{\mathcal{O}_0} s\lambda^2 \xi |\psi_x|^2 dxdt \\ &\quad - C \int_0^T \int_0^1 (s\lambda^4 \xi + s^2 \lambda^4 \xi^2) |\psi|^2 dxdt \\ &\quad - C \int_0^T \int_0^1 (s\xi + \lambda^2 + s\lambda\xi) |\psi_x|^2 dxdt. \end{aligned}$$

El término $C \int_0^T \int_0^1 s\lambda^2 \xi |\psi_x|^2 dxdt$ absorbe a $-C \int_0^T \int_0^1 (s\xi + \lambda^2 + s\lambda\xi) |\psi_x|^2 dxdt$ si $\lambda \geq C$, por lo tanto se tiene

$$\begin{aligned} (A_1 + A_2, B_2)_{L^2(Q)} &\geq C \int_0^T \int_0^1 s\lambda^2 \xi |\psi_x|^2 dxdt - C \int_0^T \int_{\mathcal{O}_0} s\lambda^2 \xi |\psi_x|^2 dxdt \\ &\quad - C \int_0^T \int_0^1 (s\lambda^4 \xi + s^2 \lambda^4 \xi^2) |\psi|^2 dxdt. \end{aligned} \tag{3.98}$$

3. Para los términos $(A_1, B_3)_{L^2(Q)}$ y $(A_2, B_3)_{L^2(Q)}$ se tiene por (3.71) que

$$(A_1, B_3)_{L^2(Q)} = - \int_0^T \int_0^1 2s^2 \lambda^2 \xi |\eta_x|^2 |\psi|^2 \alpha_t dxdt, \tag{3.99}$$

$$\begin{aligned}
(A_2, B_3)_{L^2(Q)} &= - \int_0^T \int_0^1 2s^2 \lambda \xi \eta_x \psi_x \psi \alpha_t \, dx dt \\
&= - \int_0^T \int_0^1 s^2 \lambda \xi \eta_x (|\psi|^2)_x \alpha_t \, dx dt.
\end{aligned} \tag{3.100}$$

Integramos por partes la ecuación (3.100). Como $\psi = e^{-s\alpha} q(x, t)$, $q = 0$ en $\Gamma \times (0, T)$ entonces se tiene que

$$(A_2, B_3)_{L^2(Q)} = \int_0^T \int_0^1 s^2 \lambda (\xi \eta_x)_x |\psi|^2 \alpha_t \, dx dt.$$

Utilizando la regla de la cadena, y por (3.60) obtenemos

$$\begin{aligned}
(A_2, B_3)_{L^2(Q)} &= \int_0^T \int_0^1 s^2 \lambda \xi_x \eta_x |\psi|^2 \alpha_t \, dx dt + \int_0^T \int_0^1 s^2 \lambda \xi \eta_{xx} |\psi|^2 \alpha_t \, dx dt \\
&= \int_0^T \int_0^1 s^2 \lambda^2 \xi |\eta_x|^2 |\psi|^2 \alpha_t \, dx dt + \int_0^T \int_0^1 s^2 \lambda \xi \eta_{xx} |\psi|^2 \alpha_t \, dx dt.
\end{aligned} \tag{3.101}$$

Sumando las ecuaciones (3.99) y (3.101) se tiene

$$(A_1 + A_2, B_3)_{L^2(Q)} = - \int_0^T \int_0^1 s^2 \lambda^2 \xi |\eta_x|^2 |\psi|^2 \alpha_t \, dx dt + \int_0^T \int_0^1 s^2 \lambda \xi \eta_{xx} |\psi|^2 \alpha_t \, dx dt. \tag{3.102}$$

Dado que

$$\left| - \int_0^T \int_0^1 s^2 \lambda^2 \xi |\eta_x|^2 |\psi|^2 \alpha_t \, dx dt \right| \leq \int_0^T \int_0^1 s^2 \lambda^2 \xi |\eta_x|^2 |\psi|^2 |\alpha_t| \, dx dt,$$

entonces, sustituyendo este resultado en la ecuación (3.102) obtenemos

$$(A_1 + A_2, B_3)_{L^2(Q)} \geq - \int_0^T \int_0^1 s^2 \lambda^2 \xi |\eta_x|^2 |\psi|^2 |\alpha_t| \, dx dt + \int_0^T \int_0^1 s^2 \lambda \xi \eta_{xx} |\psi|^2 \alpha_t \, dx dt.$$

Por la Hipótesis 3.3.1 sabemos $|\eta_x| \geq \delta$ en \mathcal{I} lo que implica que existe C_δ tal que $-|\eta_x| \geq -C_\delta$ en \mathcal{I} , por tanto

$$\begin{aligned}
(A_1 + A_2, B_3)_{L^2(Q)} &\geq -C_\delta \int_0^T \int_{\mathcal{I}} s^2 \lambda^2 \xi |\psi|^2 |\alpha_t| \, dx dt - C_\delta \int_0^T \int_{\mathcal{O}_0} s^2 \lambda^2 \xi |\psi|^2 |\alpha_t| \, dx dt \\
&\quad + C \int_0^T \int_{\mathcal{O}_0} s^2 \lambda^2 \xi |\psi|^2 |\alpha_t| \, dx dt + \int_0^T \int_0^1 s^2 \lambda \xi \eta_{xx} |\psi|^2 \alpha_t \, dx dt \\
&\geq -C \int_0^T \int_0^1 s^2 \lambda^2 \xi |\psi|^2 |\alpha_t| \, dx dt + C \int_0^T \int_{\mathcal{O}_0} s^2 \lambda^2 \xi |\psi|^2 |\alpha_t| \, dx dt \\
&\quad + \int_0^T \int_0^1 s^2 \lambda \xi \eta_{xx} |\psi|^2 \alpha_t \, dx dt.
\end{aligned}$$

Como el término $C \int_0^T \int_{\mathcal{O}_0} s^2 \lambda^2 \xi |\psi|^2 |\alpha_t| dx dt > 0$, se tiene

$$\begin{aligned} (A_1 + A_2, B_3)_{L^2(Q)} &\geq -C \int_0^T \int_0^1 s^2 \lambda^2 \xi |\psi|^2 |\alpha_t| dx dt - C \int_0^T \int_{\mathcal{O}_0} s^2 \lambda^2 \xi |\psi|^2 |\alpha_t| dx dt \\ &\quad + \int_0^T \int_0^1 s^2 \lambda \xi \eta_{xx} |\psi|^2 \alpha_t dx dt. \end{aligned} \quad (3.103)$$

Usando que $\eta \in C^4([0, 1])$ en la ecuación anterior, podemos decir que

$$\left| \int_0^T \int_0^1 s^2 \lambda \xi \eta_{xx} |\psi|^2 \alpha_t dx dt \right| \leq \int_0^T \int_0^1 s^2 \lambda \xi |\eta_{xx}| |\psi|^2 |\alpha_t| dx dt \leq C \int_0^T \int_0^1 s^2 \lambda \xi |\psi|^2 |\alpha_t| dx dt,$$

por lo que sustituyendo en (3.103), y usando (3.83) obtenemos

$$\begin{aligned} (A_1 + A_2, B_3)_{L^2(Q)} &\geq -C \int_0^T \int_0^1 s^2 \lambda^2 \xi |\psi|^2 |\alpha_t| dx dt - C \int_0^T \int_{\mathcal{O}_0} s^2 \lambda^2 \xi |\psi|^2 |\alpha_t| dx dt \\ &\quad - C \int_0^T \int_0^1 s^2 \lambda \xi |\psi|^2 |\alpha_t| dx dt \\ &\geq -CT \int_0^T \int_0^1 s^2 \lambda^2 \xi^3 |\psi|^2 dx dt - CT \int_0^T \int_{\mathcal{O}_0} s^2 \lambda^2 \xi^3 |\psi|^2 dx dt \\ &\quad - CT \int_0^T \int_0^1 s^2 \lambda \xi^3 |\psi|^2 dx dt, \end{aligned}$$

donde el término $-C \int_0^T \int_0^1 s^2 \lambda^2 \xi^3 |\psi|^2 dx dt$ absorbe a $-C \int_0^T \int_{\mathcal{O}_0} s^2 \lambda^2 \xi^3 |\psi|^2 dx dt$, si $\lambda \geq C$, y por lo tanto

$$(A_1 + A_2, B_3)_{L^2(Q)} \geq -C \int_0^T \int_0^1 s^2 \lambda^2 \xi^3 |\psi|^2 dx dt - C \int_0^T \int_{\mathcal{O}_0} s^2 \lambda^2 \xi^3 |\psi|^2 dx dt. \quad (3.104)$$

4. Calculando el término $(A_3, B_1)_{L^2(Q)}$ se tiene

$$\begin{aligned} (A_3, B_1)_{L^2(Q)} &= \int_0^T \int_0^1 s^2 \lambda^2 \xi^2 |\eta_x|^2 \psi \psi_t dx dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 s^2 \lambda^2 \xi^2 |\eta_x|^2 (|\psi|^2)_t dx dt. \end{aligned}$$

Integramos por partes este resultado para obtener

$$\begin{aligned} (A_3, B_1)_{L^2(Q)} &= \frac{1}{2} \int_0^1 s^2 \lambda^2 \xi^2 |\eta_x|^2 |\psi|^2 \Big|_{t=0}^{t=T} dx - \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 s^2 \lambda^2 |\eta_x|^2 (\xi^2)_t |\psi|^2 dx dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 s^2 \lambda^2 \xi^2 |\eta_x|^2 |\psi|^2 \Big|_{t=0}^{t=T} dx - \int_0^T \int_0^1 s^2 \lambda^2 \xi |\eta_x|^2 \xi_t |\psi|^2 dx dt. \end{aligned} \quad (3.105)$$

A continuación analizaremos el término $\frac{1}{2} \int_0^1 s^2 \lambda^2 \xi^2 |\eta_x|^2 |\psi|^2 \Big|_{t=0}^{t=T} dx$ de la ecuación (3.105). De ahí observamos que las variables dependientes de t son ξ y ψ , por ello nos enfocaremos en desarrollar el término $\xi^2 \psi^2$ por separado. Entonces de las ecuaciones (3.45) y (3.46) se tiene que

$$(\psi\xi)^2 = \left(qe^{-s\alpha} \left(\frac{e^{\lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta(x))}}{t(T-t)} \right) \right)^2 = \left(qe^{-s \left(\frac{e^{4\lambda\|\eta\|_\infty - e^{\lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta(x))}}}{t(T-t)} \right)} \left(\frac{e^{\lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta(x))}}{t(T-t)} \right) \right)^2.$$

Dado que $q \in C^4([0, 1])$, entonces $|q| \leq \|q\|_\infty$, y de la ecuación anterior se tiene la siguiente desigualdad

$$(\psi\xi)^2 \leq \left(\|q\|_\infty e^{-s \left(\frac{e^{4\lambda\|\eta\|_\infty - e^{\lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta(x))}}}{t(T-t)} \right)} \left(\frac{e^{\lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta(x))}}{t(T-t)} \right) \right)^2. \quad (3.106)$$

Además sabemos que $\eta(x) \leq \|\eta\|_\infty$, por lo tanto $\lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta(x)) \leq \lambda(2\|\eta\|_\infty + \|\eta\|_\infty) = 3\lambda\|\eta\|_\infty$, lo que implica

$$-e^{\lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta(x))} \geq -e^{3\lambda\|\eta\|_\infty}.$$

Sumando el término $e^{4\lambda\|\eta\|_\infty}$ y multiplicando por $s > 0$ en ambos lados de la desigualdad anterior tenemos que

$$s \left(e^{4\lambda\|\eta\|_\infty} - e^{\lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta(x))} \right) \geq s \left(e^{4\lambda\|\eta\|_\infty} - e^{3\lambda\|\eta\|_\infty} \right) > 0.$$

Fijaremos $\eta(x)$ y haremos la siguiente denotación temporalmente

$$\begin{cases} \ell_1 = s \left(e^{4\lambda\|\eta\|_\infty} - e^{\lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta(x))} \right), \\ \ell_2 = \|q\|_\infty e^{\lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta(x))}, \end{cases}$$

con $\ell_1, \ell_2 > 0$. Sustituyendo en la desigualdad (3.106) se tiene

$$(\psi\xi)^2 \leq \left(\frac{\ell_2 e^{-\frac{\ell_1}{t(T-t)}}}{t(T-t)} \right)^2. \quad (3.107)$$

Ahora tomaremos el límite cuando $t \rightarrow 0^+$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} (\psi\xi)^2 \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ell_2 e^{-\frac{\ell_1}{t(T-t)}}}{t(T-t)} \right)^2, \quad (3.108)$$

y desarrollaremos para el miembro derecho de la desigualdad (3.108), entonces

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ell_2 e^{-\frac{\ell_1}{t(T-t)}}}{t(T-t)} = \left(\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ell_2}{(T-t)} \right) \left(\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{\ell_1}{t(T-t)}}}{t} \right) = \frac{\ell_2}{T} \left(\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{t}}{e^{\frac{\ell_1}{t(T-t)}}} \right).$$

Aplicando la regla de l'Hôpital se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ell_2 e^{-\frac{\ell_1}{i(T-t)}}}{t(T-t)} &= \frac{\ell_2}{T} \left(\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \right)}{\frac{\partial}{\partial t} e^{\frac{\ell_1}{i(T-t)}}} \right) \\
&= \frac{\ell_2}{T} \left(\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(T-t)^2 e^{-\frac{\ell_1}{i(T-t)}}}{\ell_1(T-2t)} \right) \\
&= \frac{\ell_2}{\ell_1} \left(\lim_{t \rightarrow 0^+} e^{-\frac{\ell_1}{i(T-t)}} \right) \\
&= \frac{\ell_2}{\ell_1} \left(e^{-\frac{\ell_1}{T}} \left(\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \right) \right),
\end{aligned}$$

y dado que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} = \infty$, entonces, de la desigualdad (3.108) se tiene que para $T > 0$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} (\psi\xi)^2 = 0. \quad (3.109)$$

A partir de la desigualdad (3.107), tomaremos ahora el límite cuando $t \rightarrow T^-$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow T^-} (\psi\xi)^2 \leq \lim_{t \rightarrow T^-} \left(\frac{\ell_2 e^{-\frac{\ell_1}{i(T-t)}}}{t(T-t)} \right)^2. \quad (3.110)$$

Desarrollando el miembro derecho de la desigualdad (3.110) tenemos

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \frac{\ell_2 e^{-\frac{\ell_1}{i(T-t)}}}{t(T-t)} = \left(\lim_{t \rightarrow T^-} \frac{\ell_2}{t} \right) \left(\lim_{t \rightarrow T^-} \frac{e^{-\frac{\ell_1}{i(T-t)}}}{(T-t)} \right) = \frac{\ell_2}{T} \left(\lim_{t \rightarrow T^-} \frac{1}{e^{\frac{\ell_1}{i(T-t)}}} \right).$$

Aplicando la regla de l'Hôpital se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow T^-} \frac{\ell_2 e^{-\frac{\ell_1}{i(T-t)}}}{t(T-t)} &= \frac{\ell_2}{T} \left(\lim_{t \rightarrow T^-} \frac{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{(T-t)} \right)}{\frac{\partial}{\partial t} e^{\frac{\ell_1}{i(T-t)}}} \right) \\
&= \frac{\ell_2}{T} \left(\lim_{t \rightarrow T^-} \frac{t^2 e^{-\frac{\ell_1}{i(T-t)}}}{\ell_1(T-2t)} \right) \\
&= -\frac{\ell_2}{\ell_1} \left(\lim_{t \rightarrow T^-} e^{-\frac{\ell_1}{i(T-t)}} \right) \\
&= -\frac{\ell_2}{\ell_1} \left(e^{-\frac{\ell_1}{T}} \left(\lim_{t \rightarrow T^-} \frac{1}{(T-t)} \right) \right),
\end{aligned}$$

y dado que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{(T-t)} = \infty$, ya que $T-t > 0$ para valores de t que están justo a la izquierda de $T = t$, entonces, de la desigualdad (3.110) se obtiene que para $T > 0$

$$\lim_{t \rightarrow T^-} (\psi\xi)^2 = 0. \quad (3.111)$$

Por los resultados de las ecuaciones (3.109) y (3.111) se sigue

$$\frac{1}{2} \int_0^1 s^2 \lambda^2 \xi^2 |\eta_x|^2 |\psi|^2 \Big|_{t=0}^{t=T} dx = 0.$$

Sustituyendo este resultado en (3.105) y de la desigualdad (3.86) tenemos

$$\begin{aligned} (A_3, B_1)_{L^2(Q)} &= - \int_0^T \int_0^1 s^2 \lambda^2 \xi |\eta_x|^2 \xi_t |\psi|^2 dx dt \\ &\geq -CT \int_0^T \int_0^1 s^2 \lambda^2 \xi^3 |\eta_x|^2 |\psi|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Por la Hipótesis 3.3.1 sabemos $|\eta_x| \geq \delta$ en $\mathcal{I} \Rightarrow \exists C_\delta$ tal que $-|\eta_x| \geq -C_\delta$ en \mathcal{I} , por tanto

$$\begin{aligned} (A_3, B_1)_{L^2(Q)} &\geq -C \int_0^T \int_{\mathcal{I}} s^2 \lambda^2 \xi^3 |\psi|^2 dx dt - C \int_0^T \int_{\mathcal{O}_0} s^2 \lambda^2 \xi^3 |\psi|^2 dx dt \\ &\quad + C \int_0^T \int_{\mathcal{O}_0} s^2 \lambda^2 \xi^3 |\psi|^2 dx dt \\ &\geq -C \int_0^T \int_0^1 s^2 \lambda^2 \xi^3 |\psi|^2 dx dt + C \int_0^T \int_{\mathcal{O}_0} s^2 \lambda^2 \xi^3 |\psi|^2 dx dt. \end{aligned} \quad (3.112)$$

5. Para el término $(A_3, B_2)_{L^2(Q)}$ tenemos

$$(A_3, B_2)_{L^2(Q)} = \int_0^T \int_0^1 \psi_t \psi_{xx} dx dt, \quad (3.113)$$

Integraremos por partes este resultado, entonces

$$(A_3, B_2)_{L^2(Q)} = \int_0^T \psi_t \psi_x \Big|_{x=0}^{x=1} dt - \int_0^T \int_0^1 (\psi_t)_x \psi_x dx dt.$$

Integramos por partes el segundo término del miembro derecho de la ecuación anterior, entonces, dado que $\psi = e^{-s\alpha} q(x, t)$, $q = 0$ en $\Gamma \times (0, T)$, se tiene

$$(A_3, B_2)_{L^2(Q)} = \int_0^T \psi_t \psi_x \Big|_{x=0}^{x=1} dt + \int_0^T \int_0^1 (\psi_t)_{xx} \psi dx dt. \quad (3.114)$$

Independiente al resultado anterior, también podemos decir que

$$\begin{aligned} (A_3, B_2)_{L^2(Q)} &= \int_0^T \int_0^1 \psi_t \psi_{xx} dx dt \\ &= \int_0^1 \psi \psi_{xx} \Big|_{t=0}^{t=T} dx - \int_0^1 \int_0^T \psi (\psi_t)_{xx} dt dx. \end{aligned}$$

Recordando que $\psi = e^{-s\alpha}q$, y además $\alpha \uparrow +\infty$, conforme $t \rightarrow 0^+$, $t \rightarrow T^-$, se implica

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \psi_{xx}\psi = \lim_{t \rightarrow T^-} \psi_{xx}\psi = 0,$$

por lo tanto

$$(A_3, B_2)_{L^2(Q)} = - \int_0^1 \int_0^T \psi (\psi_t)_{xx} dt dx. \quad (3.115)$$

De las ecuaciones (3.114) y (3.115), se tiene

$$2 \int_0^T \int_0^1 (\psi_t)_{xx} \psi dx dt = - \int_0^T \psi_t \psi_x \Big|_{x=0}^{x=1} dt. \quad (3.116)$$

Luego por (3.115) y (3.116) se da la siguiente igualdad

$$-2(A_3, B_2)_{L^2(Q)} = 2 \int_0^T \int_0^1 (\psi_t)_{xx} \psi dx dt,$$

y sustituyendo en (3.116) obtenemos

$$-2(A_3, B_2)_{L^2(Q)} = - \int_0^T \psi_t \psi_x \Big|_{x=0}^{x=1} dt.$$

Luego de (3.113) se sigue

$$(A_3, B_2)_{L^2(Q)} = \int_0^T \int_0^1 \psi_t \psi_{xx} dx dt = \frac{1}{2} \int_0^T \psi_t \psi_x \Big|_{x=0}^{x=1} dt. \quad (3.117)$$

Del Lema 3.3.2, sabemos que $q \in C^4([0, 1] \times [0, T])$, entonces para $t \in (0, T)$ se tiene

$$q_t(x, t)|_{x=0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{q(0, t+h) - q(0, t)}{h}.$$

Puesto que $q = 0$ en $\Gamma \times (0, T)$, entonces

$$q_t(x, t)|_{x=0} = 0.$$

Luego $q_t(0, t) = 0$ en $(0, T)$, y por continuidad $q_t(0, t) = 0$ en $[0, T]$. De igual manera se tiene que

$$q_t(x, t)|_{x=1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{q(1, t+h) - q(1, t)}{h} = 0,$$

entonces $q_t(1, t) = 0$ en $[0, T]$. Por lo anterior y por la ecuación (3.77), se implica que

$$\psi_t(x, t)|_{x=0} = e^{-s\alpha(0,t)} (q_t(0, t)) - se^{-s\alpha(0,t)} q(0, t) (\alpha_t(0, t)) = 0,$$

y también

$$\psi_t(x, t)|_{x=1} = e^{-s\alpha(1,t)} (q_t(1, t)) - se^{-s\alpha(1,t)} q(1, t) (\alpha_t(1, t)) = 0.$$

Por lo que sustituyendo estos resultados en la ecuación (3.117) se llega a que $(A_3, B_2)_{L^2(Q)} = 0$.

6. Finalmente estimaremos el término $(A_3, B_3)_{L^2(Q)}$, es decir

$$\begin{aligned} (A_3, B_3)_{L^2(Q)} &= \int_0^1 \int_0^T s\alpha_t \psi_t \psi \, dx dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^T s\alpha_t (|\psi|^2)_t \, dx dt. \end{aligned}$$

Integramos por partes este resultado, entonces

$$(A_3, B_3)_{L^2(Q)} = \frac{1}{2} \int_0^1 s\alpha_t |\psi|^2 \Big|_{t=0}^{t=T} \, dx dt - \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^T s\alpha_{tt} |\psi|^2 \, dx dt.$$

Como $\psi = e^{-s\alpha} q$, y además $\alpha \uparrow +\infty$, conforme $t \rightarrow 0^+, t \rightarrow T^-$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \psi = \lim_{t \rightarrow T^-} \psi = 0,$$

de ahí que

$$(A_3, B_3)_{L^2(Q)} = -\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^T s\alpha_{tt} |\psi|^2 \, dx dt.$$

Por la desigualdad (3.85) se sigue

$$(A_3, B_3)_{L^2(Q)} \geq -C \int_0^T \int_0^1 s\xi^3 |\psi|^2 \, dx dt. \quad (3.118)$$

7. Ya que hemos estimado una cota para cada uno de los sumandos del término $2 \sum_{i,j=1}^3 (A_i, B_j)$, ahora juntaremos todo.

Sumamos entonces las ecuaciones (3.91), (3.98) y (3.104) tenemos

$$\begin{aligned} (A_1 + A_2, B_1 + B_2 + B_3)_{L^2(Q)} &\geq C \int_0^T \int_0^1 s^3 \lambda^4 \xi^3 |\psi|^2 \, dx dt - C \int_0^T \int_{\mathcal{O}_0} s^3 \lambda^4 \xi^3 |\psi|^2 \, dx dt \\ &\quad + C \int_0^T \int_0^1 s \lambda^2 \xi |\psi_x|^2 \, dx dt - C \int_0^T \int_{\mathcal{O}_0} s \lambda^2 \xi |\psi_x|^2 \, dx dt \\ &\quad - C \int_0^T \int_0^1 (s \lambda^4 \xi + s^2 \lambda^4 \xi^2) |\psi|^2 \, dx dt \\ &\quad - C \int_0^T \int_0^1 s^2 \lambda^2 \xi^3 |\psi|^2 \, dx dt - C \int_0^T \int_{\mathcal{O}_0} s^2 \lambda^2 \xi^3 |\psi|^2 \, dx dt. \end{aligned}$$

Donde $C \int_0^T \int_0^1 s^3 \lambda^4 \xi^3 |\psi|^2 \, dx dt$ absorbe a los términos $-C \int_0^T \int_0^1 (s \lambda^4 \xi + s^2 \lambda^4 \xi^2) |\psi|^2 \, dx dt$ y $-C \int_0^T \int_0^1 s^2 \lambda^2 \xi^3 |\psi|^2 \, dx dt$.

Además $-C \int_0^T \int_{\mathcal{O}_0} s^3 \lambda^4 \xi^3 |\psi|^2 dxdt$ absorbe a $-C \int_0^T \int_{\mathcal{O}_0} s^2 \lambda^2 \xi^3 |\psi|^2 dxdt$, entonces

$$\begin{aligned} (A_1 + A_2, B_1 + B_2 + B_3)_{L^2(Q)} &\geq C \int_0^T \int_0^1 s^3 \lambda^4 \xi^3 |\psi|^2 dxdt - C \int_0^T \int_{\mathcal{O}_0} s^3 \lambda^4 \xi^3 |\psi|^2 dxdt \\ &\quad + C \int_0^T \int_0^1 s \lambda^2 \xi |\psi_x|^2 dxdt - C \int_0^T \int_{\mathcal{O}_0} s \lambda^2 \xi |\psi_x|^2 dxdt. \end{aligned} \quad (3.119)$$

Sumando las ecuaciones (3.112) y (3.118) se tiene

$$\begin{aligned} (A_3, B_1 + B_3)_{L^2(Q)} &\geq -C \int_0^T \int_0^1 s^2 \lambda^2 \xi^3 |\psi|^2 dxdt + C \int_0^T \int_{\mathcal{O}_0} s^2 \lambda^2 \xi^3 |\psi|^2 dxdt \\ &\quad - C \int_0^T \int_0^1 s \xi^3 |\psi|^2 dxdt, \end{aligned}$$

donde el término $-C \int_0^T \int_0^1 s^2 \lambda^2 \xi^3 |\psi|^2 dxdt$ absorbe a $-C \int_0^T \int_0^1 s \xi^3 |\psi|^2 dxdt$, por lo tanto

$$(A_3, B_1 + B_3)_{L^2(Q)} \geq -C \int_0^T \int_0^1 s^2 \lambda^2 \xi^3 |\psi|^2 dxdt + C \int_0^T \int_{\mathcal{O}_0} s^2 \lambda^2 \xi^3 |\psi|^2 dxdt. \quad (3.120)$$

Finalmente sumamos (3.119) y (3.120), para estimar

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i,j=1}^3 (A_i, B_j)_{L^2(Q)} &\geq 2C \int_0^T \int_0^1 s^3 \lambda^4 \xi^3 |\psi|^2 dxdt - 2C \int_0^T \int_{\mathcal{O}_0} s^3 \lambda^4 \xi^3 |\psi|^2 dxdt \\ &\quad + 2C \int_0^T \int_0^1 s \lambda^2 \xi |\psi_x|^2 dxdt - 2C \int_0^T \int_{\mathcal{O}_0} s \lambda^2 \xi |\psi_x|^2 dxdt \\ &\quad - 2C \int_0^T \int_0^1 s^2 \lambda^2 \xi^3 |\psi|^2 dxdt + 2C \int_0^T \int_{\mathcal{O}_0} s^2 \lambda^2 \xi^3 |\psi|^2 dxdt. \end{aligned}$$

El término $2C \int_0^T \int_0^1 s^3 \lambda^4 \xi^3 |\psi|^2 dxdt$ absorbe a $-2C \int_0^T \int_0^1 s^2 \lambda^2 \xi^3 |\psi|^2 dxdt$.

De igual manera, $-2C \int_0^T \int_{\mathcal{O}_0} s^3 \lambda^4 \xi^3 |\psi|^2 dxdt$ absorbe a $2C \int_0^T \int_{\mathcal{O}_0} s^2 \lambda^2 \xi^3 |\psi|^2 dxdt$, por lo que

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i,j=1}^3 (A_i, B_j)_{L^2(Q)} &\geq C \int_0^T \int_0^1 s^3 \lambda^4 \xi^3 |\psi|^2 dxdt - C \int_0^T \int_{\mathcal{O}_0} s^3 \lambda^4 \xi^3 |\psi|^2 dxdt \\ &\quad + C \int_0^T \int_0^1 s \lambda^2 \xi |\psi_x|^2 dxdt - C \int_0^T \int_{\mathcal{O}_0} s \lambda^2 \xi |\psi_x|^2 dxdt, \end{aligned}$$

que es la cota que se deseaba estimar. \square

En el siguiente lema se acota superiormente la ecuación (3.87).

Lema 3.3.4 *Sea la ecuación (3.87). Bajo la Hipótesis 3.3.1, entonces*

$$\|g_{s,\lambda}\|_{L^2(Q)}^2 \leq C \int_0^T \int_0^1 g^2 dx dt + C \int_0^T \int_0^1 s^2 \lambda^4 \xi^2 |\psi|^2 dx dt, \quad (3.121)$$

DEMOSTRACIÓN. Por la ecuación (3.69) sabemos

$$\|g_{s,\lambda}\|_{L^2(Q)}^2 = \left\| g + s\lambda\eta_{xx}\xi\psi - s\lambda^2 |\eta_x|^2 \xi\psi \right\|_{L^2(Q)}^2,$$

donde haremos la siguiente notación temporal

$$g_1 = s\lambda\eta_{xx}\xi\psi, \quad g_2 = -s\lambda^2 |\eta_x|^2 \xi\psi,$$

entonces

$$\begin{aligned} \|g_{s,\lambda}\|_{L^2(Q)}^2 &= \|g + g_1 + g_2\|_{L^2(Q)}^2 \\ &= \|g\|_{L^2(Q)}^2 + \|g_1\|_{L^2(Q)}^2 + \|g_2\|_{L^2(Q)}^2 \\ &\quad + 2(g, g_1)_{L^2(Q)} + 2(g, g_2)_{L^2(Q)} + 2(g_1, g_2)_{L^2(Q)}. \end{aligned}$$

Aplicando las desigualdades de Cauchy-Schwarz y de Young, se deduce

$$\|g_{s,\lambda}\|_{L^2(Q)}^2 \leq 3 \|g\|_{L^2(Q)}^2 + 3 \|g_1\|_{L^2(Q)}^2 + 3 \|g_2\|_{L^2(Q)}^2.$$

Sustituyendo las variables g_1 y g_2 entonces

$$\begin{aligned} \|g_{s,\lambda}\|_{L^2(Q)}^2 &\leq 3 \int_0^T \int_0^1 g^2 dx dt + 3 \int_0^T \int_0^1 s^2 \lambda^2 \xi^2 |\eta_{xx}|^2 |\psi|^2 dx dt \\ &\quad + 3 \int_0^T \int_0^1 s^2 \lambda^4 \xi^2 |\eta_x|^4 |\psi|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Dado que $\eta \in C^4([0, 1])$, entonces

$$\begin{aligned} \|g_{s,\lambda}\|_{L^2(Q)}^2 &\leq C \int_0^T \int_0^1 g^2 dx dt + C \int_0^T \int_0^1 s^2 \lambda^2 \xi^2 |\psi|^2 dx dt \\ &\quad + C \int_0^T \int_0^1 s^2 \lambda^4 \xi^2 |\psi|^2 dx dt, \end{aligned}$$

donde el término $C \int_0^T \int_0^1 s^2 \lambda^4 \xi^2 |\psi|^2 dx dt$ absorbe a $C \int_0^T \int_0^1 s^2 \lambda^2 \xi^2 |\psi|^2 dx dt$, por lo que

$$\|g_{s,\lambda}\|_{L^2(Q)}^2 \leq C \int_0^T \int_0^1 g^2 dx dt + C \int_0^T \int_0^1 s^2 \lambda^4 \xi^2 |\psi|^2 dx dt.$$

Por lo tanto hemos estimado la cota deseada. \square

Ahora enunciamos el siguiente corolario, en cuya demostración se calcula la desigualdad de Carleman.

Corolario 3.3.5 *Sea la ecuación (3.87). De las desigualdades (3.88) y (3.121) que satisfacen la Hipotesis 3.3.1, se sigue la desigualdad de Carleman (3.47).*

DEMOSTRACIÓN. Por la ecuación (3.87), y las desigualdades (3.88), (3.121) podemos decir

$$\begin{aligned} & \|A\psi\|_{L^2(Q)}^2 + \|B\psi\|_{L^2(Q)}^2 + C \int_0^T \int_0^1 s\lambda^2\xi |\psi_x|^2 dxdt + C \int_0^T \int_0^1 s^3\lambda^4\xi^3 |\psi|^2 dxdt \\ & - C \int_0^T \int_{\mathcal{O}_0} s\lambda^2\xi |\psi_x|^2 dxdt - C \int_0^T \int_{\mathcal{O}_0} s^3\lambda^4\xi^3 |\psi|^2 dxdt \\ & \leq C \int_0^T \int_0^1 g^2 dxdt + C \int_0^T \int_0^1 s^2\lambda^4\xi^2 |\psi|^2 dxdt, \end{aligned}$$

de donde se sigue

$$\begin{aligned} & \|A\psi\|_{L^2(Q)}^2 + \|B\psi\|_{L^2(Q)}^2 + C \int_0^T \int_0^1 s\lambda^2\xi |\psi_x|^2 dxdt + C \int_0^T \int_0^1 s^3\lambda^4\xi^3 |\psi|^2 dxdt \\ & - C \int_0^T \int_0^1 s^2\lambda^4\xi^2 |\psi|^2 dxdt \\ & \leq C \int_0^T \int_0^1 g^2 dxdt + C \int_0^T \int_{\mathcal{O}_0} s\lambda^2\xi |\psi_x|^2 dxdt + C \int_0^T \int_{\mathcal{O}_0} s^3\lambda^4\xi^3 |\psi|^2 dxdt. \end{aligned}$$

El término $\int_0^T \int_0^1 s^3\lambda^4\xi^3 |\psi|^2 dxdt$ absorbe a $C \int_0^T \int_0^1 s^2\lambda^4\xi^2 |\psi|^2 dxdt$, por lo tanto

$$\begin{aligned} & \|A\psi\|_{L^2(Q)}^2 + \|B\psi\|_{L^2(Q)}^2 + C \int_0^T \int_0^1 s\lambda^2\xi |\psi_x|^2 dxdt + C \int_0^T \int_0^1 s^3\lambda^4\xi^3 |\psi|^2 dxdt \\ & \leq C \int_0^T \int_0^1 g^2 dxdt + C \int_0^T \int_{\mathcal{O}_0} s\lambda^2\xi |\psi_x|^2 dxdt + C \int_0^T \int_{\mathcal{O}_0} s^3\lambda^4\xi^3 |\psi|^2 dxdt, \end{aligned} \quad (3.122)$$

para todo $\lambda \geq C$.

Partiendo de la desigualdad (3.122) vamos a calcular la desigualdad de Carleman (3.47). Con este fin, acotaremos al término $\|B\psi\|_{L^2(Q)}^2$. Para ello de la ecuación (3.68) observamos que se implica la siguiente igualdad

$$\psi_{xx} = B\psi - s^2\lambda^2\xi^2 |\eta_x|^2 \psi - s\alpha_t \psi.$$

Multiplicamos ambos lados de esta ecuación por el término $s^{-\frac{1}{2}}\xi^{-\frac{1}{2}}$. Además nos percatamos de que $\xi^{-\frac{1}{2}}, \xi^{-1} < \infty$ cuando $t \rightarrow 0^+$ ó $t \rightarrow T^-$, es decir se mantiene siempre acotada. Entonces

$$s^{-\frac{1}{2}}\xi^{-\frac{1}{2}}\psi_{xx} = s^{-\frac{1}{2}}\xi^{-\frac{1}{2}}B\psi - s^{\frac{3}{2}}\lambda^2\xi^{\frac{3}{2}} |\eta_x|^2 \psi - s^{\frac{1}{2}}\xi^{-\frac{1}{2}}\alpha_t \psi.$$

Tomamos la norma $L^2(Q)$ al cuadrado en ambos lados de la igualdad anterior

$$\left\| s^{-\frac{1}{2}}\xi^{-\frac{1}{2}}\psi_{xx} \right\|_{L^2(Q)}^2 = \left\| s^{-\frac{1}{2}}\xi^{-\frac{1}{2}}B\psi - s^{\frac{3}{2}}\lambda^2\xi^{\frac{3}{2}} |\eta_x|^2 \psi - s^{\frac{1}{2}}\xi^{-\frac{1}{2}}\alpha_t \psi \right\|_{L^2(Q)}^2,$$

y hacemos la siguiente notación temporalmente

$$g_3 = s^{\frac{1}{2}}\xi^{-\frac{1}{2}}B\psi, \quad g_4 = -s^{\frac{3}{2}}\lambda^2\xi^{\frac{3}{2}}|\eta_x|^2\psi, \quad g_5 = -s^{\frac{1}{2}}\xi^{-\frac{1}{2}}\alpha_t\psi,$$

por lo que

$$\begin{aligned} \left\| s^{-\frac{1}{2}}\xi^{-\frac{1}{2}}\psi_{xx} \right\|_{L^2(Q)}^2 &= \|g_3 + g_4 + g_5\|_{L^2(Q)}^2 \\ &= \|g_3\|_{L^2(Q)}^2 + \|g_4\|_{L^2(Q)}^2 + \|g_5\|_{L^2(Q)}^2 \\ &\quad + 2(g_3, g_4)_{L^2(Q)} + 2(g_3, g_5)_{L^2(Q)} + 2(g_4, g_5)_{L^2(Q)}. \end{aligned}$$

Por la desigualdades de Cauchy-Schwarz y de Young se tiene que

$$\left\| s^{-\frac{1}{2}}\xi^{-\frac{1}{2}}\psi_{xx} \right\|_{L^2(Q)}^2 \leq 3 \|g_3\|_{L^2(Q)}^2 + 3 \|g_4\|_{L^2(Q)}^2 + 3 \|g_5\|_{L^2(Q)}^2.$$

Sustituimos g_3, g_4, g_5 , entonces

$$\begin{aligned} \left\| s^{-\frac{1}{2}}\xi^{-\frac{1}{2}}\psi_{xx} \right\|_{L^2(Q)}^2 &\leq 3 \int_0^T \int_0^1 s^{-1}\xi^{-1}|B\psi|^2 dx dt + 3 \int_0^T \int_0^1 s^3\lambda^4\xi^3|\eta_x|^4|\psi|^2 dx dt \\ &\quad + 3 \int_0^T \int_0^1 s\xi^{-1}|\alpha_t|^2|\psi|^2 dx dt. \end{aligned} \quad (3.123)$$

Analizamos cada sumando por separado. Sea $C > 0$, entonces para el primer término se tiene

$$3 \int_0^T \int_0^1 s^{-1}\xi^{-1}|B\psi|^2 dx dt \leq C \int_0^T \int_0^1 s^{-1}\xi^{-1}|B\psi|^2 dx dt = C \left\| s^{\frac{3}{2}}\xi^{-\frac{1}{2}}B\psi \right\|_{L^2(Q)}^2. \quad (3.124)$$

Para el segundo término, dado que $\eta \in C^4([0, 1])$, entonces

$$3 \int_0^T \int_0^1 s^3\lambda^4\xi^3|\eta_x|^4|\psi|^2 dx dt \leq C \int_0^T \int_0^1 s^3\lambda^4\xi^3|\psi|^2 dx dt = C \left\| s^{\frac{3}{2}}\lambda^2\xi^{\frac{3}{2}}\psi \right\|_{L^2(Q)}^2. \quad (3.125)$$

Para el tercer término se tiene

$$3 \int_0^T \int_0^1 s\xi^{-1}|\alpha_t|^2|\psi|^2 dx dt \leq C \int_0^T \int_0^1 s\xi^{-1}|\alpha_t|^2|\psi|^2 dx dt.$$

Usando (3.83) tenemos

$$C \int_0^T \int_0^1 s\xi^{-1}|\alpha_t|^2|\psi|^2 dx dt \leq C^2 T^2 \int_0^T \int_0^1 s\xi^3|\psi|^2 dx dt = C \left\| s^{\frac{1}{2}}\xi^{\frac{3}{2}}\psi \right\|_{L^2(Q)}^2. \quad (3.126)$$

Juntamos (3.124), (3.125) y (3.126), entonces sustituimos en (3.123) para obtener

$$\begin{aligned} \left\| s^{-\frac{1}{2}}\xi^{-\frac{1}{2}}\psi_{xx} \right\|_{L^2(Q)}^2 &\leq C \left\| s^{-\frac{1}{2}}\xi^{-\frac{1}{2}}B\psi \right\|_{L^2(Q)}^2 + C \left\| s^{\frac{3}{2}}\lambda^2\xi^{\frac{3}{2}}\psi \right\|_{L^2(Q)}^2 + C \left\| s^{\frac{1}{2}}\xi^{\frac{3}{2}}\psi \right\|_{L^2(Q)}^2 \\ &= C \left\| s^{-\frac{1}{2}}\xi^{-\frac{1}{2}}B\psi \right\|_{L^2(Q)}^2 + C \int_0^T \int_0^1 s^3\lambda^4\xi^3|\psi|^2 dx dt \\ &\quad + C \int_0^T \int_0^1 s\xi^3|\psi|^2 dx dt. \end{aligned}$$

El término $C \int_0^T \int_0^1 s^3 \lambda^4 \xi^3 |\psi|^2 dx dt$ absorbe a $C \int_0^T \int_0^1 s \xi^3 |\psi|^2 dx dt$, entonces

$$\int_0^T \int_0^1 s^{-1} \xi^{-1} |\psi_{xx}|^2 dx dt \leq C \left\| s^{-\frac{1}{2}} \xi^{-\frac{1}{2}} B \psi \right\|_{L^2(Q)}^2 + C \int_0^T \int_0^1 s^3 \lambda^4 \xi^3 |\psi|^2 dx dt. \quad (3.127)$$

Por el Lema 3.3.2 se tiene que, $s \geq CT^2 \implies s^{-1} \leq C^{-1}T^{-2}$, y si multiplicamos ambos lados de esta desigualdad por ξ^{-1} obtenemos

$$s^{-1} \xi^{-1} \leq C^{-1} T^{-2} \xi^{-1}.$$

Sustituimos ξ como en la ecuación (3.46)

$$s^{-1} \xi^{-1} \leq C^{-1} T^{-2} t(T-t) e^{-\lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta(x))} \leq C^{-1} T^{-2} t(T-t) e^{\lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta(x))},$$

y como $\eta(x) \leq \|\eta\|$, entonces $e^{\lambda(2\|\eta\|_\infty + \eta(x))} \leq e^{\lambda(2\|\eta\|_\infty + \|\eta\|_\infty)} = C$

$$s^{-1} \xi^{-1} \leq C^{-1} T^{-2} t(T-t) C. \quad (3.128)$$

Ahora analizamos la función $t(T-t)$ por separado. Tenemos que

$$(t(T-t))_t = T - 2t.$$

Si $T - 2t = 0 \implies t = \frac{T}{2}$, por lo que la función $t(T-t)$ alcanza su máximo valor en $t = \frac{T}{2}$, lo que implica, $\max(t(T-t)) = \frac{T}{2} (T - \frac{T}{2}) = \frac{T^2}{4}$. Sustituyendo en (3.128) tenemos

$$s^{-1} \xi^{-1} \leq C^{-1} T^{-2} \frac{T^2}{4} C^{-1} = C, \quad (3.129)$$

por lo que la desigualdad (3.127) queda de la siguiente forma

$$\int_0^T \int_0^1 s^{-1} \xi^{-1} |\psi_{xx}|^2 dx dt \leq C \|B\psi\|_{L^2(Q)}^2 + C \int_0^T \int_0^1 s^3 \lambda^4 \xi^3 |\psi|^2 dx dt,$$

que es la cota para el término $\|B\psi\|_{L^2(Q)}^2$ que se deseaba encontrar. Sustituyendo este resultado en (3.122) se tiene

$$\begin{aligned} & \|A\psi\|_{L^2(Q)}^2 + \int_0^T \int_0^1 s^{-1} \xi^{-1} |\psi_{xx}|^2 dx dt + C \int_0^T \int_0^1 s \lambda^2 \xi |\psi_x|^2 dx dt \\ & + C \int_0^T \int_0^1 s^3 \lambda^4 \xi^3 |\psi|^2 dx dt \leq C \int_0^T \int_0^1 g^2 + C \int_0^T \int_{\mathcal{O}_0} s \lambda^2 \xi |\psi_x|^2 dx dt \\ & + C \int_0^T \int_{\mathcal{O}_0} s^3 \lambda^4 \xi^3 |\psi|^2 dx dt. \end{aligned} \quad (3.130)$$

Ahora encontraremos una cota para el término $C \int_0^T \int_{\mathcal{O}_0} s \lambda^2 \xi |\psi_x|^2 dx dt$. Para ello lo multiplicamos por la función $\rho \in C_c^\infty(\mathcal{O})$, tal que $\rho \equiv 1$ en \mathcal{O}_0 , con $0 \leq \rho \leq 1$, y $\mathcal{O}_0 \subset\subset \mathcal{O} \subset (0, 1)$. Entonces

$$C \int_0^T \int_{\mathcal{O}_0} s \lambda^2 \xi |\psi_x|^2 \rho dx dt \leq C \int_0^T \int_{\mathcal{O}} s \lambda^2 \xi \psi_x \psi_x \rho dx dt.$$

Integramos por partes el miembro derecho de la desigualdad anterior. Dado que $\rho = 0$ en $\Gamma_{\mathcal{O}} \times (0, T)$, donde $\Gamma_{\mathcal{O}}$ denota los puntos de frontera del conjunto \mathcal{O} , se tiene que

$$\begin{aligned} C \int_0^T \int_{\mathcal{O}_0} s\lambda^2 \xi |\psi_x|^2 \rho dx dt &\leq -C \int_0^T \int_{\mathcal{O}} s\lambda^2 (\rho \xi \psi_x)_x \psi dx dt \\ &\leq -C \int_0^T \int_{\mathcal{O}} s\lambda^2 \xi \rho_x \psi_x \psi dx dt - C \int_0^T \int_{\mathcal{O}} s\lambda^2 \rho \xi_x \psi_x \psi dx dt \\ &\quad - C \int_0^T \int_{\mathcal{O}} s\lambda^2 \xi \rho \psi_{xx} \psi dx dt. \end{aligned}$$

Por la ecuación (3.60)

$$\begin{aligned} C \int_0^T \int_{\mathcal{O}_0} s\lambda^2 \xi |\psi_x|^2 \rho dx dt &\leq -C \int_0^T \int_{\mathcal{O}} s\lambda^2 \xi \rho_x \psi_x \psi dx dt - C \int_0^T \int_{\mathcal{O}} s\lambda^3 \xi \rho \eta_x \psi_x \psi dx dt \\ &\quad - C \int_0^T \int_{\mathcal{O}} s\lambda^2 \xi \rho \psi_{xx} \psi dx dt, \end{aligned} \quad (3.131)$$

donde haremos la siguiente notación temporal

$$\begin{cases} H_1 = -C \int_0^T \int_{\mathcal{O}} s\lambda^2 \xi \rho_x \psi_x \psi dx dt \\ H_2 = -C \int_0^T \int_{\mathcal{O}} s\lambda^3 \xi \rho \eta_x \psi_x \psi dx dt \\ H_3 = -C \int_0^T \int_{\mathcal{O}} s\lambda^2 \xi \rho \psi_{xx} \psi dx dt. \end{cases}$$

Integramos por partes H_1 . Dado que $\rho_x = 0$ en $\Gamma_{\mathcal{O}} \times (0, T)$, y por (3.46) se tiene

$$H_1 = C \int_0^T \int_{\mathcal{O}} s\lambda^3 \xi \eta_x \rho_x |\psi|^2 dx dt.$$

Luego, como $\eta \in C^4([0, 1])$ se implica

$$|H_1| \leq C \int_0^T \int_{\mathcal{O}} s\lambda^3 \xi |\eta_x| |\rho_x| |\psi|^2 dx dt \leq C \int_0^T \int_{\mathcal{O}} s\lambda^3 \xi |\rho_x| |\psi|^2 dx dt. \quad (3.132)$$

Integramos H_2 por partes. Dado que $\rho = 0$ en $\Gamma_{\mathcal{O}} \times (0, T)$, y por (3.60) se tiene

$$H_2 = C \int_0^T \int_{\mathcal{O}} s\lambda^4 \xi \rho |\eta_x|^2 |\psi|^2 dx dt.$$

Luego, como $\eta \in C^4([0, 1])$, se implica que

$$|H_2| = \left| C \int_0^T \int_{\mathcal{O}} s\lambda^4 \xi \rho |\eta_x|^2 |\psi|^2 dx dt \right| \leq C \int_0^T \int_{\mathcal{O}} s\lambda^4 \xi \rho |\psi|^2 dx dt. \quad (3.133)$$

Por las desigualdades (3.132) y (3.133), y puesto que $\rho \equiv 1 \in \mathcal{O}_0$ y $\mathcal{O}_0 \subset \subset \mathcal{O}$, se tiene

$$|H_1| + |H_2| \leq C \int_0^T \int_{\mathcal{O}} (s\lambda^3\xi + s\lambda^4\xi) |\psi|^2 dxdt. \quad (3.134)$$

Ahora acotemos por arriba a $|H_3|$, es decir

$$|H_3| = \left| -C \int_0^T \int_{\mathcal{O}} \lambda^2 \xi \rho \psi_{xx} \psi dxdt \right| \leq C \left| \left(s^{-\frac{1}{2}} \xi^{-\frac{1}{2}} \rho^{\frac{1}{2}} \psi_{xx}, s^{\frac{3}{2}} \lambda^2 \xi^{\frac{3}{2}} \rho^{\frac{1}{2}} \psi \right)_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))} \right|.$$

Aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la desigualdad de Young, entonces

$$|H_3| \leq \sigma C \int_0^T \int_{\mathcal{O}} s^{-1} \xi^{-1} \rho |\psi_{xx}|^2 dxdt + C_{\sigma} C \int_0^T \int_{\mathcal{O}} s^3 \lambda^4 \xi^3 \rho |\psi|^2 dxdt, \quad (3.135)$$

donde la constante C_{σ} depende de $\sigma > 0$. Sumando las desigualdades (3.134), (3.135) y sustituyendo en (3.136) se tiene

$$\begin{aligned} C \int_0^T \int_{\mathcal{O}_0} s \lambda^2 \xi |\psi_x|^2 \rho dxdt &\leq C \int_0^T \int_{\mathcal{O}} (s\lambda^3\xi + s\lambda^4\xi) |\psi|^2 dxdt \\ &\quad + \sigma C \int_0^T \int_{\mathcal{O}} s^{-1} \xi^{-1} \rho |\psi_{xx}|^2 dxdt \\ &\quad + C \int_0^T \int_{\mathcal{O}} s^3 \lambda^4 \xi^3 \rho |\psi|^2 dxdt. \end{aligned}$$

El término $C \int_0^T \int_{\mathcal{O}} s^3 \lambda^4 \xi^3 \rho |\psi|^2 dxdt$ absorbe al término $C \int_0^T \int_{\mathcal{O}} (s\lambda^3\xi + s\lambda^4\xi) |\psi|^2 dxdt$. Luego, elegimos $\sigma = \frac{1}{2C}$, y dado que $\rho \leq 1$ con $\mathcal{O} \subset (0, 1)$ tenemos

$$C \int_0^T \int_{\mathcal{O}_0} s \lambda^2 \xi |\psi_x|^2 \rho dxdt \leq \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 s^{-1} \xi^{-1} |\psi_{xx}|^2 dxdt + C \int_0^T \int_{\mathcal{O}} s^3 \lambda^4 \xi^3 |\psi|^2 dxdt. \quad (3.136)$$

Aplicando este resultado a la desigualdad (3.130) se tiene

$$\begin{aligned} \|A\psi\|_{L^2(Q)}^2 &+ \int_0^T \int_0^1 s^{-1} \xi^{-1} |\psi_{xx}|^2 dxdt + C \int_0^T \int_0^1 s \lambda^2 \xi |\psi_x|^2 dxdt \\ &+ C \int_0^T \int_0^1 s^3 \lambda^4 \xi^3 |\psi|^2 dxdt \leq C \int_0^T \int_0^1 g^2 dxdt + C \int_0^T \int_{\mathcal{O}} s^3 \lambda^4 \xi^3 |\psi|^2 dxdt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 s^{-1} \xi^{-1} |\psi_{xx}|^2 dxdt + C \int_0^T \int_{\mathcal{O}_0} s^3 \lambda^4 \xi^3 |\psi|^2 dxdt. \end{aligned}$$

El término $C \int_0^T \int_{\mathcal{O}} s^3 \lambda^4 \xi^3 |\psi|^2 dxdt$, absorbe a $C \int_0^T \int_{\mathcal{O}_0} s^3 \lambda^4 \xi^3 |\psi|^2 dxdt$, puesto que $\mathcal{O}_0 \subset \subset \mathcal{O}$. Además restamos en ambos miembros de la desigualdad el término $\frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 s^{-1} \xi^{-1} |\psi_{xx}|^2 dxdt$,

entonces obtenemos

$$\begin{aligned} & \|A\psi\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 s^{-1} \xi^{-1} |\psi_{xx}|^2 dxdt + C \int_0^T \int_0^1 s \lambda^2 \xi |\psi_x|^2 dxdt \\ & + C \int_0^T \int_0^1 s^3 \lambda^4 \xi^3 |\psi|^2 dxdt \leq C \left(\int_0^T \int_0^1 g^2 dxdt + \int_0^T \int_0^1 s^3 \lambda^4 \xi^3 |\psi|^2 dxdt \right). \end{aligned} \quad (3.137)$$

Ahora acotaremos por debajo el término $\|A\psi\|_{L^2(Q)}^2$. De la ecuación (3.67), se implica la siguiente igualdad

$$\psi_t = A\psi + 2s\lambda^2 \xi |\eta_x|^2 \psi + 2s\lambda \xi \eta_x \psi_x.$$

Multiplicamos ambos lados de la ecuación anterior por el término $s^{-\frac{1}{2}} \xi^{-\frac{1}{2}}$, entonces

$$s^{-\frac{1}{2}} \xi^{-\frac{1}{2}} \psi_t = s^{-\frac{1}{2}} \xi^{-\frac{1}{2}} A\psi + 2s^{\frac{1}{2}} \lambda^2 \xi^{\frac{1}{2}} |\eta_x|^2 \psi + 2s^{\frac{1}{2}} \lambda \xi^{\frac{1}{2}} \eta_x \psi_x.$$

Tomamos la norma al cuadrado en $L^2(Q)$ de ambos lados

$$\left\| s^{-\frac{1}{2}} \xi^{-\frac{1}{2}} \psi_t \right\|_{L^2(Q)}^2 = \left\| s^{-\frac{1}{2}} \xi^{-\frac{1}{2}} A\psi + 2s^{\frac{1}{2}} \lambda^2 \xi^{\frac{1}{2}} |\eta_x|^2 \psi + 2s^{\frac{1}{2}} \lambda \xi^{\frac{1}{2}} \eta_x \psi_x \right\|_{L^2(Q)}^2.$$

Como se ha aplicado antes, por ejemplo en la ecuación (3.123), por la desigualdad de Young se tiene que

$$\begin{aligned} \left\| s^{-\frac{1}{2}} \xi^{-\frac{1}{2}} \psi_t \right\|_{L^2(Q)}^2 & \leq 3 \int_0^T \int_0^1 s^{-1} \xi^{-1} |A\psi|^2 dxdt + 6 \int_0^T \int_0^1 s \lambda^4 \xi |\eta_x|^4 |\psi|^2 dxdt \\ & + \int_0^T \int_0^1 s \lambda^2 \xi |\eta_x|^2 |\psi_x|^2 dxdt. \end{aligned} \quad (3.138)$$

Analizamos cada término por separado. Para el primer sumando se tiene

$$3 \int_0^T \int_0^1 s^{-1} \xi^{-1} |A\psi|^2 dxdt \leq C \int_0^T \int_0^1 s^{-1} \xi^{-1} |A\psi|^2 dxdt = C \left\| s^{-\frac{1}{2}} \xi^{-\frac{1}{2}} A\psi \right\|_{L^2(Q)}^2.$$

Para el segundo término, dado que $\eta \in C^4([0, 1])$, entonces

$$6 \int_0^T \int_0^1 s \lambda^4 \xi |\eta_x|^4 |\psi|^2 dxdt \leq C \int_0^T \int_0^1 s \lambda^4 \xi |\psi|^2 dxdt = C \left\| s^{\frac{1}{2}} \lambda^2 \xi^{\frac{1}{2}} \psi \right\|_{L^2(Q)}^2.$$

De igual manera, para el tercer sumando tenemos

$$\int_0^T \int_0^1 s \lambda^2 \xi |\eta_x|^2 |\psi_x|^2 dxdt \leq \int_0^T \int_0^1 s \lambda^2 \xi |\psi_x|^2 dxdt = C \left\| s^{\frac{1}{2}} \lambda \xi^{\frac{1}{2}} \psi_x \right\|_{L^2(Q)}^2.$$

Juntando las tres desigualdades anteriores y sustituyendo en la desigualdad (3.138), obtenemos

$$\left\| s^{-\frac{1}{2}} \xi^{-\frac{1}{2}} \psi_t \right\|_{L^2(Q)}^2 \leq C \left\| s^{-\frac{1}{2}} \xi^{-\frac{1}{2}} A\psi \right\|_{L^2(Q)}^2 + C \left\| s^{\frac{1}{2}} \lambda^2 \xi^{\frac{1}{2}} \psi \right\|_{L^2(Q)}^2 + C \left\| s^{\frac{1}{2}} \lambda \xi^{\frac{1}{2}} \psi_x \right\|_{L^2(Q)}^2.$$

De ahí que

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^1 s^{-1} \xi^{-1} |\psi_t|^2 dx dt &\leq C \left\| s^{-\frac{1}{2}} \xi^{-\frac{1}{2}} A\psi \right\|_{L^2(Q)}^2 + C \int_0^T \int_0^1 s \lambda^4 \xi |\psi|^2 dx dt \\ &\quad + \int_0^T \int_0^1 s \lambda^2 \xi |\psi_x|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Por (3.129) sabemos que $s^{-1} \xi^{-1} \leq C$, por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^1 s^{-1} \xi^{-1} |\psi_t|^2 dx dt &\leq C \|A\psi\|_{L^2(Q)}^2 + C \int_0^T \int_0^1 s \lambda^4 \xi |\psi|^2 dx dt \\ &\quad + \int_0^T \int_0^1 s \lambda^2 \xi |\psi_x|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Sustituyendo la desigualdad anterior en (3.137), se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^1 s^{-1} \xi^{-1} |\psi_t|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 s^{-1} \xi^{-1} |\psi_{xx}|^2 dx dt + C \int_0^T \int_0^1 s \lambda^2 \xi |\psi_x|^2 dx dt \\ + C \int_0^T \int_0^1 s^3 \lambda^4 \xi^3 |\psi|^2 dx dt \leq C \left(\int_0^T \int_0^1 g^2 dx dt + \int_0^T \int_0^1 s^3 \lambda^4 \xi^3 |\psi|^2 dx dt \right). \end{aligned} \quad (3.139)$$

Acotaremos por debajo a los tres primeros sumandos de la desigualdad (3.139). Comenzamos encontrando una cota inferior para el término $\int_0^T \int_0^1 s^{-1} \xi^{-1} |\psi_t|^2 dx dt$. Para ello recordemos la ecuación (3.77), es decir

$$\psi_t = e^{-s\alpha} q_t - s\alpha_t \psi \implies e^{-s\alpha} q_t = \psi_t + s\alpha_t \psi.$$

Multiplicamos ambos miembros de la ecuación anterior por el término $s^{-\frac{1}{2}} \xi^{-\frac{1}{2}}$, entonces

$$s^{-\frac{1}{2}} \xi^{-\frac{1}{2}} e^{-s\alpha} q_t = s^{-\frac{1}{2}} \xi^{-\frac{1}{2}} \psi_t + s^{\frac{1}{2}} \xi^{-\frac{1}{2}} \alpha_t \psi,$$

y tomamos la norma en $L^2(Q)$ al cuadrado

$$\left\| s^{-\frac{1}{2}} \xi^{-\frac{1}{2}} e^{-s\alpha} q_t \right\|_{L^2(Q)}^2 = \left\| s^{-\frac{1}{2}} \xi^{-\frac{1}{2}} \psi_t + s^{\frac{1}{2}} \xi^{-\frac{1}{2}} \alpha_t \psi \right\|_{L^2(Q)}^2.$$

Aplicamos las desigualdades de Cauchy-Schwarz y de Young para obtener

$$\begin{aligned} \left\| s^{-\frac{1}{2}} \xi^{-\frac{1}{2}} e^{-s\alpha} q_t \right\|_{L^2(Q)}^2 &\leq 2 \left\| s^{-\frac{1}{2}} \xi^{-\frac{1}{2}} \psi_t \right\|_{L^2(Q)}^2 + 2 \left\| s^{\frac{1}{2}} \xi^{-\frac{1}{2}} \alpha_t \psi \right\|_{L^2(Q)}^2 \\ &= 2 \int_0^T \int_0^1 s^{-1} \xi^{-1} |\psi_t|^2 dx dt + 2 \int_0^T \int_0^1 s^{-1} \xi^{-1} |\alpha_t|^2 |\psi|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Por la desigualdad (3.83) se tiene

$$\int_0^T \int_0^1 s^{-1} \xi^{-1} |e^{-s\alpha}|^2 |q_t|^2 dx dt \leq C \int_0^T \int_0^1 s^{-1} \xi^{-1} |\psi_t|^2 dx dt + C \int_0^T \int_0^1 s^{-1} \xi^3 |\psi|^2 dx dt.$$

Por lo tanto, de la desigualdad (3.139) se sigue

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 s^{-1} \xi^{-1} |e^{-s\alpha}|^2 |q_t|^2 dx dt + C \int_0^T \int_0^1 s^{-1} \xi^{-1} |\psi_{xx}|^2 dx dt + C \int_0^T \int_0^1 s \lambda^2 \xi |\psi_x|^2 dx dt \\ & + C \int_0^T \int_0^1 s^3 \lambda^4 \xi^3 |\psi|^2 dx dt \leq C \left(\int_0^T \int_0^1 g^2 dx dt + \int_0^T \int_{\mathcal{O}} s^3 \lambda^4 \xi^3 |\psi|^2 dx dt \right). \end{aligned} \quad (3.140)$$

Acotamos el término $C \int_0^T \int_0^1 s \lambda^2 \xi |\psi_x|^2 dx dt$ de (3.140). Entonces por (3.72) sabemos

$$\psi_x = e^{-s\alpha} q_x + s \lambda \xi \eta_x \psi \implies e^{-s\alpha} q_x = \psi_x - s \lambda \xi \eta_x \psi.$$

Multiplicamos ambos miembros de la ecuación anterior por el término $s^{\frac{1}{2}} \lambda \xi^{\frac{1}{2}}$, entonces

$$s^{\frac{1}{2}} \lambda \xi^{\frac{1}{2}} e^{-s\alpha} q_x = s^{\frac{1}{2}} \lambda \xi^{\frac{1}{2}} \psi_x - s^{\frac{3}{2}} \lambda^2 \xi^{\frac{3}{2}} \eta_x \psi,$$

y tomamos la norma $L^2(Q)$ en toda la ecuación, por lo tanto

$$\left\| s^{\frac{1}{2}} \lambda \xi^{\frac{1}{2}} e^{-s\alpha} q_x \right\|_{L^2(Q)}^2 = \left\| s^{\frac{1}{2}} \lambda \xi^{\frac{1}{2}} \psi_x - s^{\frac{3}{2}} \lambda^2 \xi^{\frac{3}{2}} \eta_x \psi \right\|_{L^2(Q)}^2.$$

Aplicamos las desigualdades de Cauchy-Schwarz y de Young, entonces

$$\begin{aligned} \left\| s^{\frac{1}{2}} \lambda \xi^{\frac{1}{2}} e^{-s\alpha} q_x \right\|_{L^2(Q)}^2 & \leq 2 \left\| s^{\frac{1}{2}} \lambda \xi^{\frac{1}{2}} \psi_x \right\|_{L^2(Q)}^2 + 2 \left\| s^{\frac{3}{2}} \lambda^2 \xi^{\frac{3}{2}} \eta_x \psi \right\|_{L^2(Q)}^2 \\ & = 2 \int_0^T \int_0^1 s \lambda^2 \xi |\psi_x|^2 dx dt + 2 \int_0^T \int_0^1 s^3 \lambda^4 \xi^3 |\eta_x|^2 |\psi|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Dado que $\eta \in C^4([0, 1])$, se tiene que

$$\int_0^T \int_0^1 s \lambda^2 \xi |e^{-s\alpha}|^2 |q_x|^2 dx dt \leq C \int_0^T \int_0^1 s \lambda^2 \xi |\psi_x|^2 dx dt + C \int_0^T \int_0^1 s^3 \lambda^4 \xi^3 |\psi|^2 dx dt.$$

Entonces, por la desigualdad anterior, de (3.140) se sigue

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 s^{-1} \xi^{-1} |e^{-s\alpha}|^2 |q_t|^2 dx dt + C \int_0^T \int_0^1 s^{-1} \xi^{-1} |\psi_{xx}|^2 dx dt \\ & + \int_0^T \int_0^1 s \lambda^2 \xi |e^{-s\alpha}|^2 |q_x|^2 dx dt + C \int_0^T \int_0^1 s^3 \lambda^4 \xi^3 |\psi|^2 dx dt \\ & \leq C \left(\int_0^T \int_0^1 g^2 dx dt + \int_0^T \int_{\mathcal{O}} s^3 \lambda^4 \xi^3 |\psi|^2 dx dt \right). \end{aligned} \quad (3.141)$$

Por último encontraremos una cota para el término $C \int_0^T \int_0^1 s^{-1} \xi^{-1} |\psi_{xx}|^2 dx dt$. Entonces, de (3.76) se tiene que

$$\psi_{xx} = e^{-s\alpha} q_{xx} + s \lambda \xi \eta_x e^{-s\alpha} q_x + s \lambda \xi \eta_x \psi_x + s \lambda \xi \eta_{xx} \psi + s \lambda^2 \xi |\eta_x|^2 \psi,$$

y sustituimos la variable ψ_x en el término $s\lambda\xi\eta_x\psi_x$ de la ecuación anterior como en (3.72), entonces

$$\psi_{xx} = e^{-s\alpha}q_{xx} + 2s\lambda\xi\eta_x e^{-s\alpha}q_x + s^2\lambda^2\xi^2|\eta_x|^2\psi + s\lambda\xi\eta_{xx}\psi + s\lambda^2\xi|\eta_x|^2\psi,$$

lo que implica

$$e^{-s\alpha}q_{xx} = \psi_{xx} - 2s\lambda\xi\eta_x e^{-s\alpha}q_x - s^2\lambda^2\xi^2|\eta_x|^2\psi - s\lambda\xi\eta_{xx}\psi - s\lambda^2\xi|\eta_x|^2\psi.$$

Multiplicamos ambos lados de la ecuación anterior por el término $s^{-\frac{1}{2}}\xi^{-\frac{1}{2}}$

$$s^{-\frac{1}{2}}\xi^{-\frac{1}{2}}e^{-s\alpha}q_{xx} = s^{-\frac{1}{2}}\xi^{-\frac{1}{2}}\psi_{xx} - 2s^{\frac{1}{2}}\lambda\xi^{\frac{1}{2}}\eta_x e^{-s\alpha}q_x - s^{\frac{3}{2}}\lambda^2\xi^{\frac{3}{2}}|\eta_x|^2\psi - s^{\frac{1}{2}}\lambda\xi^{\frac{1}{2}}\eta_{xx}\psi - s^{\frac{1}{2}}\lambda^2\xi^{\frac{1}{2}}|\eta_x|^2\psi,$$

y tomamos la norma en $L^2(Q)$ al cuadrado en toda la ecuación anterior

$$\begin{aligned} \left\| s^{-\frac{1}{2}}\xi^{-\frac{1}{2}}e^{-s\alpha}q_{xx} \right\|_{L^2(Q)}^2 &= \left\| s^{-\frac{1}{2}}\xi^{-\frac{1}{2}}\psi_{xx} - 2s^{\frac{1}{2}}\lambda\xi^{\frac{1}{2}}\eta_x e^{-s\alpha}q_x - s^{\frac{3}{2}}\lambda^2\xi^{\frac{3}{2}}|\eta_x|^2\psi \right. \\ &\quad \left. - s^{\frac{1}{2}}\lambda\xi^{\frac{1}{2}}\eta_{xx}\psi - s^{\frac{1}{2}}\lambda^2\xi^{\frac{1}{2}}|\eta_x|^2\psi \right\|_{L^2(Q)}^2. \end{aligned}$$

Hacemos la siguiente notación temporal

$$\begin{cases} g_6 = s^{-\frac{1}{2}}\xi^{-\frac{1}{2}}\psi_{xx}, & g_7 = -2s^{\frac{1}{2}}\lambda\xi^{\frac{1}{2}}\eta_x e^{-s\alpha}q_x, & g_8 = -s^{\frac{3}{2}}\lambda^2\xi^{\frac{3}{2}}|\eta_x|^2\psi, \\ g_9 = -s^{\frac{1}{2}}\lambda\xi^{\frac{1}{2}}\eta_{xx}\psi, & g_{10} = -s^{\frac{1}{2}}\lambda^2\xi^{\frac{1}{2}}|\eta_x|^2\psi. \end{cases}$$

Entonces se tiene que

$$\left\| s^{-\frac{1}{2}}\xi^{-\frac{1}{2}}e^{-s\alpha}q_{xx} \right\|_{L^2(Q)}^2 = \|g_6 + g_7 + g_8 + g_9 + g_{10}\|_{L^2(Q)}^2.$$

Por la desigualdades de Cauchy-Schwarz y de Young se tiene que

$$\left\| s^{-\frac{1}{2}}\xi^{-\frac{1}{2}}e^{-s\alpha}q_{xx} \right\|_{L^2(Q)}^2 \leq 5 \|g_6\|_{L^2(Q)}^2 + 5 \|g_7\|_{L^2(Q)}^2 + 5 \|g_8\|_{L^2(Q)}^2 + 5 \|g_9\|_{L^2(Q)}^2 + 5 \|g_{10}\|_{L^2(Q)}^2$$

Dado que $\eta \in C^4([0, 1])$, entonces

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^1 s^{-1}\xi^{-1} |e^{-s\alpha}|^2 |q_{xx}|^2 dx dt &\leq C \int_0^T \int_0^1 s^{-1}\xi^{-1} |\psi_{xx}|^2 dx dt \\ &\quad + C \int_0^T \int_0^1 s\lambda^2\xi |e^{-s\alpha}|^2 |q_x|^2 dx dt \\ &\quad + C \int_0^T \int_0^1 s^3\lambda^4\xi^3 |\psi|^2 dx dt + C \int_0^T \int_0^1 s\lambda^2\xi |\psi|^2 dx dt \\ &\quad + C \int_0^T \int_0^1 s\lambda^4\xi |\psi|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Agrupamos términos semejantes para obtener

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^1 s^{-1} \xi^{-1} |e^{-s\alpha}|^2 |q_{xx}|^2 dx dt &\leq C \int_0^T \int_0^1 s^{-1} \xi^{-1} |\psi_{xx}|^2 dx dt \\ &+ C \int_0^T \int_0^1 s \lambda^2 \xi |e^{-s\alpha}|^2 |q_x|^2 dx dt \\ &+ C \int_0^T \int_0^1 (s^3 \lambda^4 \xi^3 + s \lambda^2 \xi + s \lambda^4 \xi) |\psi|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Hacemos el cambio de variable para ψ , g como en (3.58) para (3.141), y de desigualdad anterior se sigue

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^1 s^{-1} \xi^{-1} |e^{-s\alpha}|^2 (|q_t|^2 + |q_{xx}|^2) dx dt &+ \int_0^T \int_0^1 s \lambda^2 \xi |e^{-s\alpha}|^2 |q_x|^2 dx dt \\ + \int_0^T \int_0^1 s^3 \lambda^4 \xi^3 |e^{-s\alpha}|^2 |q|^2 dx dt &\leq C \left(\int_0^T \int_0^1 |e^{-s\alpha}|^2 |q_t + q_{xx}|^2 dx dt \right. \\ &\left. + \int_0^T \int_0^1 s^3 \lambda^4 \xi^3 |\psi|^2 dx dt \right). \end{aligned}$$

□

Conclusiones

En esta tesis se demuestra la controlabilidad a cero de la ecuación de calor en dimensión uno con condiciones de frontera tipo Dirichlet homogéneas a través del método de unicidad de Hilbert, el cual adapta el sistema (3.1) al sistema adjunto de minimización sin restricciones (3.2). Este método utiliza dos herramientas matemáticas principales. La primera es el funcional (3.6), que satisface el Lema 2.2.5, por lo que este funcional tiene un único mínimo. La segunda es la desigualdad de observabilidad (3.7). Estas dos herramientas demuestran que el problema de controlabilidad a cero es también un problema de optimización, y además, hemos probado a través de ellas, que si el sistema adjunto (3.2) es observable, entonces se implica la controlabilidad a cero para la ecuación de calor.

Por otra parte, hemos demostrado la desigualdad de observabilidad (3.2) a través de la desigualdad de Carleman (3.47) y usando el Teorema 1.2.13. De igual manera damos la prueba de la desigualdad de Carleman usando como herramientas principales la identidad de Carleman (3.70), y las estimaciones con peso mostradas en la Sección 3.3.3. Toda esta teoría, junto con los Teoremas 1.4.6 y 1.4.7 son el soporte para probar que la ecuación de calor es controlable a cero.

Adicionalmente, en el Capítulo 2 aplicamos el método de unicidad de Hilbert a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en dimensión finita para dar una introducción a las herramientas que se emplean en el control de ecuaciones diferenciales parciales. Esto también proporciona una analogía entre la teoría de control clásico y la teoría de control para ecuaciones diferenciales parciales. Concluimos entonces que plantear un control para un sistema de EDPs es más complejo, y viene dado en un sentido más débil, que para un sistema de EDOs.

En un trabajo futuro se plantea solucionar el problema de la controlabilidad a cero de la ecuación de calor en dimensión $-n$ y extenderla al caso estocástico para resolver problemas relacionados con nociones de economía y teoría de juegos, como los planteados por H. von Stackelberg en [AFCS15]. Estos problemas incluyen extender las herramientas abordadas en esta tesis a herramientas estocásticas, como la fórmula de Itô para la integral estocástica, teoremas de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales parciales estocásticas y estimaciones de Carleman estocásticas.

Bibliografía

- [ABHN11] Wolfgang Arendt, Charles J. K. Batty, Matthias Hieber, and Frank Neubrander. *Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems*, volume 96 of *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, second edition, 2011.
- [AF03] Robert A. Adams and John J. F. Fournier. *Sobolev spaces*, volume 140 of *Pure and Applied Mathematics (Amsterdam)*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, second edition, 2003.
- [AFCS15] F. D. Araruna, E. Fernández-Cara, and M. C. Santos. Stackelberg-Nash exact controllability for linear and semilinear parabolic equations. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 21(3):835–856, 2015.
- [Ben93] A. Bensoussan. An introduction to the Hilbert uniqueness method. In *Analysis and optimization of systems: state and frequency domain approaches for infinite-dimensional systems (Sophia-Antipolis, 1992)*, volume 185 of *Lect. Notes Control Inf. Sci.*, pages 184–198. Springer, Berlin, 1993.
- [Ber76] Sterling K. Berberian. *Introduction to Hilbert space*. Chelsea Publishing Co., New York, 1976. Reprinting of the 1961 original, With an addendum to the original.
- [Bre10] Haim Brezis. *Functional analysis, sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, 2010.
- [Bru66] Andrew Bruckner. Recent Publications and Presentations: Introductory Real Analysis. *Amer. Math. Monthly*, 73(6):682–683, 1966.
- [CGL94] C. Carthel, R. Glowinski, and J.-L. Lions. On exact and approximate boundary controllabilities for the heat equation: a numerical approach. *J. Optim. Theory Appl.*, 82(3):429–484, 1994.
- [Cho16] Mourad Choulli. *Applications of elliptic Carleman inequalities to Cauchy and inverse problems*. SpringerBriefs in Mathematics. Springer, [Cham]; BCAM Basque Center for Applied Mathematics, Bilbao, 2016. BCAM SpringerBriefs.
- [CL55] Earl A. Coddington and Norman Levinson. *Theory of ordinary differential equations*. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London, 1955.

- [Dav17] Claire David. Control of the Black-Scholes equation. *Comput. Math. Appl.*, 73(7):1566–1575, 2017.
- [DFCGBZ02] A. Doubova, E. Fernández-Cara, M. González-Burgos, and E. Zuazua. On the controllability of parabolic systems with a nonlinear term involving the state and the gradient. *SIAM J. Control Optim.*, 41(3):798–819, 2002.
- [DM99] Lokenath Debnath and Piotr Mikusiński. *Introduction to Hilbert spaces with applications*. Academic Press, Inc., San Diego, CA, second edition, 1999.
- [DOP02] Anna Doubova, A. Osses, and J.-P. Puel. Exact controllability to trajectories for semilinear heat equations with discontinuous diffusion coefficients. volume 8, pages 621–661. 2002. A tribute to J. L. Lions.
- [Eva10] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*. Graduate studies in mathematics ; v. 19. American Mathematical Society, 2010.
- [Fat66] H. O. Fattorini. Some remarks on complete controllability. *SIAM J. Control*, 4:686–694, 1966.
- [FCZ00] Enrique Fernández-Cara and Enrique Zuazua. The cost of approximate controllability for heat equations: the linear case. *Adv. Differential Equations*, 5(4-6):465–514, 2000.
- [FI94] A. V. Fursikov and O. Yu. Imanuvilov. On exact boundary zero-controllability of two-dimensional Navier-Stokes equations. volume 37, pages 67–76. 1994. Mathematical problems for Navier-Stokes equations (Centro, 1993).
- [FI96] A. V. Fursikov and O. Yu. Imanuvilov. *Controllability of evolution equations*, volume 34 of *Lecture Notes Series*. Seoul National University, Research Institute of Mathematics, Global Analysis Research Center, Seoul, 1996.
- [FM16] Genni Fragnelli and Dimitri Mugnai. Carleman estimates, observability inequalities and null controllability for interior degenerate nonsmooth parabolic equations. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 242(1146):v+84, 2016.
- [FR71] H. O. Fattorini and D. L. Russell. Exact controllability theorems for linear parabolic equations in one space dimension. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 43:272–292, 1971.
- [GY02] C. J. Goh and X. Q. Yang. *Duality in optimization and variational inequalities*, volume 2 of *Optimization Theory and Applications*. Taylor & Francis Group, London, 2002.
- [Hei19] Christopher Heil. *Introduction to real analysis*, volume 280 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, Cham, 2019.

- [Kai80] Thomas Kailath. *Linear systems*. Prentice-Hall Information and System Sciences Series. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1980.
- [Kal60a] R. E. Kalman. Contributions to the theory of optimal control. *Bol. Soc. Mat. Mexicana (2)*, 5:102–119, 1960.
- [Kal60b] R.E. Kalman. On the general theory of control systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 1(1):491–502, 1960. 1st International IFAC Congress on Automatic and Remote Control, Moscow, USSR, 1960.
- [KFA69] R. E. Kalman, P. L. Falb, and M. A. Arbib. *Topics in mathematical system theory*. McGraw-Hill Book Co., New York-Toronto, Ont.-London, 1969.
- [Kom89] V. Komornik. Exact controllability in short time for the wave equation. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 6(2):153–164, 1989.
- [Kub12] Carlos S. Kubrusly. *Spectral theory of operators on Hilbert spaces*. Birkhäuser/Springer, New York, 2012.
- [Kuo62] Benjamin C. Kuo. *Automatic control systems*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1962.
- [L09] Jean Lévine. *Analysis and control of nonlinear systems*. Mathematical Engineering. Springer-Verlag, Berlin, 2009. A flatness-based approach.
- [Lag91] John E. Lagnese. The Hilbert uniqueness method: a retrospective. In *Optimal control of partial differential equations (Irsee, 1990)*, volume 149 of *Lect. Notes Control Inf. Sci.*, pages 158–181. Springer, Berlin, 1991.
- [Ler19] Nicolas Lerner. *Carleman inequalities*, volume 353 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer, Cham, 2019. An introduction and more.
- [Lio88a] J.-L. Lions. *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués. Tome 1*, volume 8 of *Recherches en Mathématiques Appliquées [Research in Applied Mathematics]*. Masson, Paris, 1988. Contrôlabilité exacte. [Exact controllability], With appendices by E. Zuazua, C. Bardos, G. Lebeau and J. Rauch.
- [Lio88b] J.-L. Lions. Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems. *SIAM Rev.*, 30(1):1–68, 1988.
- [LW97] Weijiu Liu and Graham H. Williams. Exact internal controllability for the semilinear heat equation. *J. Math. Anal. Appl.*, 211(1):258–272, 1997.
- [LZ19] Qi Lü and Xu Zhang. A mini-course on stochastic control. In *Control and inverse problems for partial differential equations*, volume 22 of *Ser. Contemp. Appl. Math. CAM*, pages 171–254. Higher Ed. Press, Beijing, 2019.

- [Mal95] Paul Malliavin. *Integration and probability*, volume 157 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995. With the collaboration of Hélène Airault, Leslie Kay and Gérard Letac, Edited and translated from the French by Kay, With a foreword by Mark Pinsky.
- [Man85] Ralf Manthey. Weak convergence of solutions of the heat equation with Gaussian noise. *Math. Nachr.*, 123:157–168, 1985.
- [MW12] Carl Mueller and Zhixin Wu. Erratum: A connection between the stochastic heat equation and fractional Brownian motion and a simple proof of a result of Talagrand [mr2481666]. *Electron. Commun. Probab.*, 17:no. 8, 10, 2012.
- [MZ01] Sorin Micu and Enrique Zuazua. On the lack of null-controllability of the heat equation on the half-line. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 353(4):1635–1659, 2001.
- [MZ10] Arnaud M unch and Enrique Zuazua. Numerical approximation of null controls for the heat equation: ill-posedness and remedies. *Inverse Problems*, 26(8):085018, 39, 2010.
- [NS82] Arch W. Naylor and George R. Sell. *Linear operator theory in engineering and science*, volume 40 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York-Berlin, second edition, 1982.
- [OR76] J. T. Oden and J. N. Reddy. *An introduction to the mathematical theory of finite elements*. Pure and Applied Mathematics. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York-London-Sydney, 1976.
- [Ped00] Michael Pedersen. *Functional analysis in applied mathematics and engineering*. Studies in Advanced Mathematics. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2000.
- [Poz08] Alexander S. Poznyak. *Advanced mathematical tools for automatic control engineers. Vol. 1*. Elsevier B. V., Amsterdam, 2008. Deterministic techniques.
- [Pue19] Jean-Pierre Puel. Control of partial differential equations: theoretical aspects. In *Control and inverse problems for partial differential equations*, volume 22 of *Ser. Contemp. Appl. Math. CAM*, pages 1–46. Higher Ed. Press, Beijing, 2019.
- [Rin18] Filip Rindler. *Calculus of variations*. Universitext. Springer, Cham, 2018.
- [Roa82] G. F. Roach. *Green’s functions*. Cambridge University Press, Cambridge-New York, second edition, 1982.
- [Rob01] James C. Robinson. *Infinite-dimensional dynamical systems*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2001. An introduction to dissipative parabolic PDEs and the theory of global attractors.

- [Sec20] *Nonlinear analysis, geometry and applications*. Trends in Mathematics. Birkhäuser/Springer, Cham, [2020] ©2020.
- [Ser18] Simon Serovajsky. *Optimization and differentiation*. Monographs and Research Notes in Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 2018.
- [SY09] P. Sundar and Hong Yin. Existence and uniqueness of solutions to the backward 2D stochastic Navier-Stokes equations. *Stochastic Process. Appl.*, 119(4):1216–1234, 2009.
- [Tro10] Fredi Tröltzsch. *Optimal control of partial differential equations*, volume 112 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010. Theory, methods and applications, Translated from the 2005 German original by Jürgen Sprekels.
- [VH94] Tran Duc Van and Dinh Nho Hào. *Differential operators of infinite order with real arguments and their applications*. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1994.
- [You88] Nicholas Young. *An introduction to Hilbert space*. Cambridge Mathematical Textbooks. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [Zua97] Enrique Zuazua. Finite-dimensional null controllability for the semilinear heat equation. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 76(3):237–264, 1997.
- [Zua02] Enrique Zuazua. Controllability of partial differential equations and its semi-discrete approximations. volume 8, pages 469–513. 2002. Current developments in partial differential equations (Temuco, 1999).