



Centro de Investigación y de Estudios
Avanzados del Instituto Politécnico
Nacional

Unidad Zacatenco

Departamento de Control Automático

Observación e Identificación Paramétrica en Sistemas Fraccionarios

Tesis que presenta:

Lorenz Josue Oliva Gonzalez

Para obtener el Grado de

Maestro en Ciencias

En la especialidad de

Control Automático

Director de Tesis:

Dr. Rafael Martínez Guerra

Ciudad de México

Agosto, 2022

Agradecimientos

- *A mis padres -Marce y Josue- y hermanos -Monse y Jonatan- los cuales siempre me han apoyado, tolerado y motivado, en las mejores y peores situaciones.*
- *A mis dos grandes amigos Ruben y Eduardo, en algún momento de la vida mencionaron que siempre podría contar con ellos de lo cual no tengo duda alguna.*
- *Al Dr. Rafael Martínez Guerra por haber compartido su conocimiento conmigo, además, por su apoyo, paciencia y tolerancia a lo largo del desarrollo de este trabajo.*
- *Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por la beca que me fue otorgada*
- *A la vida y a Dios.*

Resumen

En esta tesis, se tratan los problemas de observación de estado e identificación paramétrica en sistemas fraccionarios. Así, para el problema de observación de estado se propone un observador proporcional integral fraccional el cual es de modelo libre, de orden reducido y robusto ante perturbaciones externas, además para cierto tipo de sistemas también puede ser robusto ante incertidumbres paramétricas. El análisis de convergencia del error de observación se realiza mediante el enfoque del acotamiento Mittag-Leffler -enfoque para el cual se da una prueba rigurosa-, mostrando que el error de observación es globalmente Mittag-Leffler acotado. Para mostrar el desempeño del observador fraccional propuesto se consideran como ejemplos numéricos dos sistemas caóticos donde las simulaciones muestran resultados satisfactorios. Por otro lado, se presenta un método de identificación paramétrica basado en la observación de estados, para esto se introduce una nueva propiedad referente a la identificabilidad algebraica fraccional la cual permite escribir los parámetros del sistema como una función de la salida, entrada y sus derivadas fraccionarias. Así, el problema de identificación se traduce en un problema de observación de estados implicando que solo baste con diseñar un observador proporcional integral fraccional como el que se propone en esta tesis para obtener un estimado de los parámetros del sistema. Este método permite realizar el proceso de identificación en línea, por lo que, se pueden estimar parámetros que sean variantes en el tiempo. Con el propósito de mostrar la precisión del método de identificación paramétrica que se propone se considera como ejemplo numérico un sistema fraccionario variante en el tiempo, obteniendo buenos resultados a través de simulación. Finalmente, se muestra que los problemas de observación de estados e identificación paramétrica en sistemas de orden entero se pueden resolver considerando la versión de orden entero del observador fraccional que se propone, bajo el mismo esquema de observación. Se considera como ejemplo numérico un sistema caótico cuya estructura permite llevar a cabo la observación de estados e identificación de forma simultánea, la simulación otorga resultados positivos.

Abstract

In this thesis, the problems of state observation and parametric identification in fractional systems are treated. Thus, for the state observation problem, a fractional proportional integral observer is proposed which is model free, reduced order and robust against external disturbances, and for certain types of systems it can also be robust against parametric uncertainties. The convergence analysis of the observation error is carried out using the Mittag-Leffler boundedness approach -approach for which a rigorous proof is given-, showing that the observation error is globally Mittag-Leffler bounded. In order to show the performance of the proposed fractional observer, two chaotic systems are considered as numerical examples where the simulations provide satisfactory results. On the other hand, a parametric identification method based on the state observation is presented, for this purpose a novel property concerning to the fractional algebraic identifiability is introduced, which allows to write the system parameters as a function of the output, input and their fractional derivatives. Thus, the identification problem is translated to a state observation problem implying that it is sufficient to design a fractional integral proportional observer as the one proposed in this thesis in order to obtain an estimate of the system parameters. This method provides an on-line identification process, so that time-varying parameters can be estimated. In order to verify the accuracy of the proposed parametric identification method, a time-varying fractional system is considered as a numerical example, obtaining good results by simulation. Finally, one shows that the problems of state observation and parametric identification in integer-order systems can be solved by considering the integer-order version of the proposed fractional observer, under the same observation scheme. A chaotic system is considered as a numerical example whose structure allows to carry out the state observation and identification simultaneously, the simulation yields positive results.

Índice general

Introducción	1
Antecedentes y Motivación	2
Objetivos	4
Estructura de la Tesis	6
1. Preliminares	9
1.1. Derivadas fraccionarias	9
1.2. Funciones tipo Mittag-Leffler	10
1.3. Análisis de estabilidad en sistemas de orden fraccionario	12
2. Diseño del observador PI fraccional	19
2.1. Observador PI fraccional	19
2.2. Ejemplos	25
2.2.1. Sistema caótico fraccional Genesio-Tesi	25
2.2.2. Sistema caótico fraccional Sundarapandian-Pehlivan	27
2.3. Simulaciones	29
2.4. Conclusión	35
3. Identificación paramétrica en sistemas fraccionarios	37
3.1. Identificación paramétrica	37
3.2. Ejemplo	40

3.2.1. Ejemplo académico	40
3.3. Simulación	43
3.4. Conclusión	49
4. Casos particulares	51
4.1. Observación de estados	52
4.2. Identificación paramétrica	56
4.3. Ejemplo	58
4.3.1. Oscilador Duffing	58
4.4. Simulación	61
4.5. Conclusión	66
Conclusión general	68
Trabajo futuro	70
A. Análisis de estabilidad del ejemplo académico	73

Índice de figuras

2.1. Atractor caótico sistema Genesio-Tesi	30
2.2. Observación de x_2 sin perturbaciones externas	31
2.3. Observación de x_2 con perturbaciones externas	32
2.4. Atractor caótico sistema Sundarapandian-Pehlivan	33
2.5. Observación de x_1 sin perturbaciones externas	34
2.6. Observación de x_1 con perturbaciones externas	35
3.1. Comportamiento del sistema fraccionario (3.8) no perturbado	43
3.2. Comportamiento del sistema fraccionario (3.8) perturbado	44
3.3. Estimación del parámetro a sin perturbaciones externas	45
3.4. Estimación del parámetro a con perturbaciones externas	46
3.5. Estimación del parámetro b sin perturbaciones externas	47
3.6. Estimación del parámetro b con perturbaciones externas	48
4.1. Atractor caótico del oscilador Duffing	62
4.2. Observación de x_2 sin perturbaciones externas	63
4.3. Observación de x_2 con perturbaciones externas	64
4.4. Observación de la variable auxiliar η_1 sin perturbaciones externas	65
4.5. Observación de la variable auxiliar η_1 con perturbaciones externas	66
A.1. Evolución del estado x_1 con diferentes ordenes de derivación	77

Índice de tablas

2.1. Comparación de IEC en diferentes instantes de tiempo (sin perturbaciones) estado η_2	31
2.2. Comparación de IEC en diferentes instantes de tiempo (con perturbaciones) estado η_2	32
2.3. Comparación de IEC en diferentes instantes de tiempo (sin perturbaciones) estado η_1	34
2.4. Comparación de IEC en diferentes instantes de tiempo (con perturbaciones) estado η_1	34
3.1. Comparación del error relativo en diferentes instantes de tiempo (sin perturbaciones) parámetro a	45
3.2. Comparación del error relativo en diferentes instantes de tiempo (con perturbaciones) parámetro a	46
3.3. Comparación del error relativo en diferentes instantes de tiempo (sin perturbaciones) parámetro b	47
3.4. Comparación del error relativo en diferentes instantes de tiempo (con perturbaciones) parámetro b	48
4.1. Comparación del IEC en diferentes instantes de tiempo (sin perturbaciones) estado η_2	63

4.2. Comparación del IEC en diferentes instantes de tiempo (con perturbaciones) estado η_2	63
4.3. Comparación del IEC en diferentes instantes de tiempo (sin perturbaciones) parámetro ξ	65
4.4. Comparación del IEC en diferentes instantes de tiempo (con perturbaciones) parámetro ξ	66

Introducción

Los sistemas de orden fraccionario actualmente han tomado gran importancia dentro del estudio de los sistemas dinámicos ya que estos exhiben un comportamiento que se acopla de mejor manera a los datos experimentales en comparación con los sistemas de orden entero, es decir, el modelo matemático de orden fraccional de un sistema físico presenta una evolución que se acopla más a la dinámica real en comparación con el modelo matemático de orden entero. Por ejemplo, algunos sistemas que se caracterizan con un modelo fraccional son: sistemas electromecánicos [1], sistemas visco-elásticos [2], sistemas biológicos [3], sistemas de difusión de calor en sólidos [4], propagación de ondas en medios porosos [5], etc. Por otro lado, bajo el enfoque de los sistemas fraccionarios se ha desarrollado una teoría que presenta diferentes líneas de estudio tales como: sistemas lineales [6], sistemas con retardos [7], control óptimo [8], estabilidad [9], sistemas caóticos [10], entre otros [11].

Dos de los problemas importantes dentro de la teoría del control son la observación de estados y la identificación paramétrica, recientemente estos problemas han ganado un gran interés de investigación dentro de los sistemas fraccionarios ya que la solución de estos problemas permiten el análisis y control de los mismos. Sin embargo dar solución a la observación de estado e identificación paramétrica en sistemas de orden fraccionario presentan un gran reto debido al análisis matemático requerido, si bien el cálculo fraccional generaliza y unifica al cálculo ordinario, los métodos de análisis de estabilidad para sistemas de orden entero no se pueden llevar de forma directa al ambiente fraccionario y

muchas veces es necesario realizar aproximaciones.

Actualmente, la mayoría de los observadores de estado para sistemas fraccionarios que se han propuesto se basan en una copia del sistema como el bien conocido observador de Luenberger y el filtro de Kalman, sin embargo, cuando no se cuenta con toda la información del sistema, dichos observadores pueden presentar un pobre desempeño. Por otro lado, los métodos de identificación paramétrica propuestos se basan en algoritmos iterativos con el objetivo de minimizar una función de costo, implicando así, que el proceso de identificación se realice fuera de línea, además, se utilizan aproximaciones de la integral fraccionaria ocasionando que se incremente el error en la estimación.

Así, en la presente tesis, se diseña un observador Proporcional Integral (PI) fraccional el cual es de modelo libre y de orden reducido, por tanto, no se requiere conocer la información completa del sistema y no se estiman estados que ya sean conocidos. El observador es robusto ante perturbaciones externas, además, para cierto tipo de sistemas fraccionarios también puede ser robusto ante incertidumbres paramétricas. Por otro lado, para llevar a cabo el análisis de convergencia del error de observación se utiliza un enfoque basado en el acotamiento Mittag-Leffler en esta tesis, se da una demostración rigurosa de este enfoque. El acotamiento Mittag-Leffler es una herramienta muy útil para el análisis de estabilidad en sistemas de orden fraccionario perturbados. También, se propone un método de identificación paramétrica el cual se basa en la observación de estados, por tanto, el observador PI fraccional puede ser utilizado para llevar a cabo el proceso de identificación. Adicionalmente, se muestra que la versión de orden entero del observador PI fraccional puede resolver los problemas de observación de estados e identificación paramétrica en sistemas de orden entero.

Antecedentes y Motivación

Para mostrar la contribución de la tesis, es necesario conocer de forma breve el estado del arte que se tiene sobre la observación de estados y la identificación paramétrica en sistemas

de orden fraccionario. Actualmente existen diferentes observadores que se han propuesto para llevar a cabo la estimación de estados en sistemas fraccionarios, por ejemplo: en los trabajos [12], [13] se introducen dos propiedades relacionadas con la observabilidad en sistemas fraccionarios, la primer propiedad se conoce como observabilidad algebraica fraccional (FAO¹) mientras que la segunda es llamada observabilidad algebraica fraccional inconmensurada (IFAO²), ambas propiedades son utilizadas para resolver el problema de sincronización de sistemas caóticos fraccionarios a través de un observador de estados de tipo proporcional. Siguiendo con el problema de sincronización del caos en [14] se propone un observador PI robusto ante incertidumbres acotadas. Ahora bien, considerando otro tipo de sistemas fraccionarios tales como orden variable y singulares se ha propuesto un observador adaptable [15] y un observador PI [16], respectivamente. También se tienen observadores que son basados en leyes de control, en [17] se diseña un observador basado en el control back-stepping adaptable para sistemas con entrada de saturación y en [18] se propone un observador basado en un control activo por eventos. Mientras que, en [19] se propone un observador de alta ganancia para sistemas con dinámicas no modeladas y ruido de medición. La mayoría de los observadores que se mencionaron anteriormente son basados en una copia del sistema, es decir, son observadores tipo Luenberger lo cual implica un completo conocimiento del sistema en adición algunos de los observador solo pueden ser diseñados para sistemas de orden fraccionario conmensurados³.

Por otro lado, los métodos de identificación paramétrica que han sido propuestos realizan la identificación fuera de línea, es decir, se excita el sistema con alguna entrada específica tomando una muestra de los datos de entrada y la correspondiente respuesta, para posteriormente utilizar algún método iterativo con el objetivo de minimizar una función de costo. Uno de los métodos más utilizados se basa en el uso de matrices

¹Por sus siglas en inglés Fractional Algebraic Observability property

²Por sus siglas en inglés Incommensurate Fractional Algebraic Observability property

³Un sistema fraccionario se denomina conmensurado si los órdenes de derivación son los mismos para cada estado, de otra forma el sistema se conoce como inconmensurado.

operacionales tales como funciones *block pulse* [20, 21, 22, 23], *Legendre wavelet* [24] y *Haar wavelet* [25] el motivo principal del uso de dichas matrices operacionales es que permiten una aproximación de la integral fraccionaria. Así mismo, se han propuesto un par de métodos basados en el conocido método de mínimos cuadrados con filtrado de variables y error de predicción [26]. Más aún, existen métodos de identificación paramétrica que utilizan algoritmos inteligentes entre los cuales se encuentran la evolución diferencial [27], optimización por enjambre de partículas [28] y redes neuronales [29].

Teniendo en cuenta lo mencionado anteriormente, en esta tesis se propone un observador PI fraccional, donde su construcción es basada en la propiedad IFAO, además el observador es robusto ante perturbaciones externas y para cierto tipo de sistemas también puede ser robusto ante incertidumbres paramétricas. Mientras que, el análisis de convergencia del error de observación se realiza utilizando el enfoque del acotamiento Mittag-Leffler en particular se demuestra que el error de observación es globalmente Mittag-Leffler acotado lo cual implica que el error de observación es uniformemente últimamente acotado.

Por otro lado, se introduce una nueva propiedad relacionada con la identificabilidad algebraica fraccional la cual permitirá traducir el problema de identificación paramétrica en un problema de observación de estado, de esta forma, se puede aplicar el observador fraccional que se propone en esta tesis para realizar la identificación paramétrica en línea de sistemas fraccionarios.

Finalmente, considerando como caso particular cuando el orden de derivación es entero, se muestra que la versión de orden entero del observador PI fraccional puede resolver los problemas de observación de estados e identificación paramétrica en sistemas de orden entero.

Objetivos

Diseñar un observador PI fraccional basado en la propiedad IFAO para la estimación de estados en sistemas de orden fraccionario. Además de introducir una propiedad

referida a la identificabilidad algebraica fraccional la cual permitirá llevar el problema de identificación paramétrica a un problema de observación de estados.

Para facilitar el cumplimiento del objetivo principal, este se divide en objetivos particulares. De tal forma que en la presente tesis los objetivos particulares son los siguientes:

1. Revisar y analizar el estado del arte referido al problema de observación de estados e identificación paramétrica en sistemas fraccionarios para identificar las principales ventajas y desventajas de las soluciones que han sido propuestas por diferentes autores.
2. Dar una demostración del acotamiento Mittag-Leffler para posteriormente utilizar este enfoque para análisis de convergencia del observador fraccional que se propone.
3. Utilizar la propiedad IFAO para realizar el diseño de un observador PI fraccional.
4. Demostrar la convergencia del error de observación utilizando el enfoque del acotamiento Mittag-Leffler.
5. Comparar el desempeño del observador propuesto con un observador de tipo proporcional considerando dos sistemas caóticos como ejemplos numéricos bajo la presencia y ausencia de perturbaciones externas.
6. Introducir una nueva propiedad relacionada con la identificación paramétrica en sistemas fraccionarios la cual permite llevar el problema de identificación a un problema de observación.
7. Realizar la identificación paramétrica de un sistema fraccional de tipo académico para verificar la efectividad del método que se propone.
8. Mostrar que la versión de orden entero del observador PI fraccional puede resolver los problemas de identificación paramétrica y observación de estados en sistemas de orden entero.

Estructura de la tesis

La tesis consta de cuatro capítulos, una conclusión general e ideas para un trabajo futuro, los capítulos se describen a continuación:

- **Capítulo 1. Preliminares.** Este capítulo proporciona las herramientas matemáticas necesarias para llevar a cabo el diseño y análisis de convergencia del observador PI fraccional que se propone. Dichas herramientas constan de una breve introducción a las derivadas fraccionarias seguido de las definiciones de un tipo de funciones especiales llamadas funciones Mittag-Leffler las cuales son de suma utilidad en la representación de las soluciones a ecuaciones diferenciales fraccionarias. Finalmente, se concluye este capítulo dando una demostración rigurosa del acotamiento Mittag-Leffler, además de enunciar un par de lemas necesarios para realizar el análisis de estabilidad en sistemas fraccionarios.
- **Capítulo 2. Diseño del observador PI fraccional.** Dentro de este capítulo se realiza el diseño del observador fraccional que se propone en la presente tesis así como el análisis de convergencia del error de observación donde se demuestra que el error de observación es globalmente Mittag-Leffler acotado, así mismo se diseñan observadores para dos sistemas fraccionarios caóticos el primero es un sistema Genesio-Tesi y el segundo es un sistema Sundarapandian-Pehlivan considerando la existencia y ausencia de perturbaciones externas. Por otro lado, con el propósito de evaluar el desempeño del observador fraccional propuesto se realiza la comparación con un observador proporcional teniendo como criterio de desempeño la integral del error cuadrático.
- **Capítulo 3. Identificación paramétrica en sistemas fraccionarios.** En este capítulo se introduce una nueva propiedad relacionada con la identificabilidad algebraica fraccional, esta propiedad permitirá llevar el problema de identificación paramétrica a un problema de observación de estados, así bastará con diseñar un

observador PI fraccional para resolver el problema de identificación en sistemas fraccionarios. Además, se realiza la identificación paramétrica de un ejemplo académico el cual es variante en el tiempo, para evaluar la precisión del método propuesto se utiliza el criterio del error relativo.

- **Capítulo 4. Casos particulares,** En el cuarto capítulo, se presenta el caso particular donde el orden de derivación es entero, es decir, se diseña un observador PI basado en una propiedad conocida como observabilidad algebraica, además se demuestra que el error de observación es globalmente uniformemente últimamente acotado. Mientras que utilizando la propiedad llamada identificabilidad algebraica se puede tratar el problema de identificación en sistemas de orden entero como un problema de observación de estados. Finalmente, para evaluar la efectividad del observador y el método de identificación paramétrica se realiza de forma simultánea la observación e identificación en un oscilador Duffing comparando su desempeño con un observador proporcional.

Durante la elaboración de esta tesis se redactó el siguiente artículo:

- Lorenz Josue Oliva-Gonzalez, Rafael Martínez-Guerra, Juan Pablo Flores-Flores. A fractional PI observer for incommensurate fractional order systems under parametric uncertainties. (**Sometido**).

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se da la demostración del acotamiento Mittag-Leffler, además se introducen algunas definiciones y lemas necesarios para realizar el diseño y análisis de convergencia del observador PI fraccional que será presentado en el siguiente capítulo.

1.1. Derivadas fraccionarias

La teoría del calculo fraccional generaliza y unifica las nociones del calculo ordinario considerando el operador derivada de orden arbitrario. En contraste con el calculo ordinario, el calculo fraccional tiene diferentes definiciones para el operador derivada, las definiciones más típicas son la de Grünwald-Letnikov, Riemman-Liouville y la definición de Caputo¹. En general las diferentes definiciones de la derivada fraccional no son equivalentes pero pueden coincidir por ejemplo la derivada fraccional de Caputo con la derivada fraccional de Riemman-Liouville si las primeras $n - 1$ condiciones iniciales son nulas [31]. Ahora bien, la derivada fraccional de Grünwald-Letnikov es equivalente a la de Riemman-Liouville si está se da en términos de diferencias finitas [32].

Por otro lado, la derivada fraccional de Caputo es preferida en el sentido ingenieril ya

¹Se puede consultar más información sobre las derivadas fraccionarias en [30, 31]

que esta presenta propiedades que coinciden con la derivada de orden entero las cuales son:

1. La derivada fraccional de Caputo de una constante es cero.
2. Aditividad del orden de derivación cuando se aplica el operador derivada consecutivamente.
3. El significado de las condiciones iniciales coinciden con las derivadas de orden entero, esto implica que las condiciones iniciales tiene una interpretación física bien definida.

En vista de lo mencionado anteriormente, en esta tesis se utiliza de derivada fraccional de Caputo la cual es definida como sigue:

Definición 1. La derivada fraccional izquierda de Caputo de orden α de una función $f(t) : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es definida como:

$${}_{t_0}^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_{t_0}^t \frac{d^n f(\tau)}{d\tau^n} (t - \tau)^{n-\alpha-1} d\tau \quad (1.1)$$

donde α se conoce como orden de derivación, $0 \leq n - 1 < \alpha < n$ con $n \in \mathbb{N}$, $t \geq t_0$ y $\Gamma(\cdot)$ es la función gamma.

La función gamma se define como sigue:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad (1.2)$$

Observación 1. En la presente tesis se considera $n = 1$ por lo que $0 < \alpha < 1$, además $t_0 = 0$. Mientras que, para simplificar la notación se omitirá la dependencia del tiempo en las variables y se representará el operador derivada fraccional de Caputo como D^α .

1.2. Funciones tipo Mittag-Leffler

Las funciones tipo Mittag-Leffler juegan un papel muy importante dentro de la teoría del calculo fraccional esto se debe a que estas funciones generalizan la función exponencial

la cual forma parte importante dentro del estudio de las ecuaciones diferenciales de orden entero. En particular, las funciones tipo Mittag-Leffler permiten encontrar y representar las soluciones de ecuaciones diferenciales fraccionarias.

Definición 2. Una función tipo Mittag-Leffler de dos parámetros es definida por la expansión en serie:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (1.3)$$

donde $\alpha > 0$ y $z, \beta \in \mathbb{C}$.

Definición 3. En vista de la ecuación (1.3), si $\beta = 1$, entonces se obtiene la función tipo Mittag-Leffler de un parámetro:

$$E_{\alpha,1}(z) = E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (1.4)$$

Observación 2. Cuando $\alpha = 1$ de la definición 3 se sigue

$$E_{1,1}(z) = E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z \quad (1.5)$$

Las funciones tipo Mittag-Leffler presentan varias propiedades y aplicaciones interesantes², en caso particular una propiedad que será de suma utilidad en esta tesis es la siguiente:

1. La función $E_{\alpha,\beta}(-s)$ es completamente monótona, para toda $s \geq 0$ con $\alpha > 0$, $\beta > 0$ si y sólo si $0 < \alpha \leq 1$ y $\beta \geq \alpha$.

²Algunas aplicaciones y propiedades interesantes de las funciones tipo Mittag-Leffler pueden ser revisadas en [33, 34, 35]

1.3. Análisis de estabilidad en sistemas de orden fraccionario

En la literatura existen diferentes métodos para probar estabilidad en sistemas fraccionarios³ donde la mayoría de ellos se basan en el uso de funciones cuadráticas tipo Lyapunov de forma similar a las pruebas de estabilidad en sistemas de orden entero. Por ejemplo, una de las pruebas de estabilidad para sistemas fraccionarios se conoce como estabilidad Mittag-Leffler [37] la cual nace como una extensión fraccional del método directo de Lyapunov [38], así, la estabilidad Mittag-Leffler proporciona condiciones suficientes para asegurar estabilidad asintótica en sistemas fraccionarios.

Por otro lado, el acotamiento Mittag-Leffler es otro método para probar estabilidad en sistemas fraccionarios, este también parte de la estabilidad en el sentido de Lyapunov, la ventaja principal que presenta el acotamiento Mittag-Leffler en comparación con la estabilidad Mittag-Leffler es que proporciona condiciones suficientes de estabilidad en sistemas fraccionarios perturbados. En el trabajo [39] se dan definiciones referentes al acotamiento Mittag-Leffler, sin embargo no se da una demostración para este método, Así, en esta tesis se da una demostración rigurosa para el acotamiento Mittag-Leffler.

En lo que sigue, considérese el sistema de orden fraccionario definido como:

$$D^\alpha x = f(t, x), \quad x(0) = x_0 \quad (1.6)$$

donde $0 < \alpha < 1$, $f : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua a pedazos en t y localmente Lipschitz en x sobre $[0, \infty) \times \Omega$. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio que contiene al origen y x_0 es la condición inicial.

³Por ejemplo se pueden revisar los trabajos [14, 16, 36]

Estabilidad Mittag-Leffler

Definición 4. Las trayectorias solución del sistema fraccionario (1.6) se dicen Mittag-Leffler estables si satisfacen la desigualdad:

$$\|x\| \leq [g(x_0) E_\alpha(-\vartheta t^\alpha)]^b \quad (1.7)$$

donde $0 < \alpha < 1$, $\vartheta > 0$, $b > 0$ son constantes, mientras que, $g(x) \geq 0$ es una función localmente Lipschitz en $x \in \mathbb{A} \subset \mathbb{R}^n$.

Teorema 1. Sea $x = 0$ un punto de equilibrio del sistema fraccionario (1.6) y $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^n$ un dominio que contiene al origen. Sea $V(t, x) : [0, \infty) \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable y localmente Lipschitz en x tal que:

$$\beta_1 \|x\|^a \leq V(t, x) \leq \beta_2 \|x\|^{ab} \quad (1.8)$$

$$D^\alpha V(t, x) \leq -\beta_3 \|x\|^{ab} \quad (1.9)$$

donde $t \geq 0$, $0 < \alpha < 1$, $a, b, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}^+$, entonces $x = 0$ es Mittag-Leffler estable. Si las condiciones (1.8) y (1.9) se mantienen para todo \mathbb{R}^n entonces $x = 0$ es globalmente Mittag-Leffler estable.

Demostración. (Para revisar la demostración se sigue ver [37]). □

Acotamiento Mittag-Leffler

Definición 5. Las trayectorias solución del sistema fraccionario (1.6) se dicen Mittag-Leffler acotadas si satisfacen:

$$\|x\| \leq [\bar{g}(x_0) E_\alpha(-\bar{\vartheta} t^\alpha) + \bar{\varphi}]^{\bar{b}} \quad (1.10)$$

donde $0 < \alpha < 1$, $\bar{\vartheta} > 0$, $\bar{b} > 0$, $\bar{\varphi} > 0$ son constantes, mientras que, $\bar{g}(x) \geq 0$ es una función localmente Lipschitz en $x \in \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$.

Teorema 2. *Sea $x = 0$ un punto de equilibrio del sistema fraccionario (1.6) y $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}^n$ un dominio que contiene al origen. Sea $V(t, x) : [0, \infty) \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable y localmente Lipschitz en x tal que:*

$$\gamma_1 \|x\|^{\bar{a}} \leq V(t, x) \leq \gamma_2 \|x\|^{\bar{a}\bar{b}} \quad (1.11)$$

$$D^\alpha V(t, x) \leq -\gamma_3 \|x\|^{\bar{a}\bar{b}} + \varpi \quad (1.12)$$

donde $t \geq 0$, $0 < \alpha < 1$, $\bar{a}, \bar{b}, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{R}^+$, $\varpi \in \mathbb{R}^+$ es el término que se refiere a las incertidumbres y perturbaciones, entonces las trayectorias solución del sistema fraccionario (1.6) son Mittag-Leffler acotadas. Mientras que, si $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ y las condiciones (1.11), (1.12) se mantienen entonces se dicen globalmente Mittag-Leffler acotadas.

Demostración. Dada la desigualdad (1.11) se puede escribir (1.12) como sigue:

$$D^\alpha V(t, x) \leq -\frac{\gamma_3}{\gamma_2} V(t, x) + \varpi = -\frac{\gamma_3}{\gamma_2} \left(V(t, x) - \frac{\gamma_2}{\gamma_3} \varpi \right) \quad (1.13)$$

Sea el cambio de variable

$$\bar{V}(t, x) = V(t, x) - \frac{\gamma_2}{\gamma_3} \varpi \quad (1.14)$$

De esta forma, $D^\alpha \bar{V}(t, x) = D^\alpha V(t, x)$, por lo que:

$$D^\alpha \bar{V}(t, x) \leq -\frac{\gamma_3}{\gamma_2} \bar{V}(t, x) \quad (1.15)$$

De esta forma, existe un función no negativa $m(t)$ tal que la desigualdad (1.15) se puede escribir como:

$$D^\alpha \bar{V}(t, x) + \frac{\gamma_3}{\gamma_2} \bar{V}(t, x) + m(t) = 0 \quad (1.16)$$

Teniendo en cuenta el teorema de existencia y unicidad de solución⁴ para ecuaciones diferenciales fraccionarias, se sigue que la solución de la ecuación diferencial fraccional (1.16) esta dada por:

$$\bar{V}(t, x) = \bar{V}_0 E_\alpha \left(-\frac{\gamma_3}{\gamma_2} t^\alpha \right) - \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} \left[-\frac{\gamma_3}{\gamma_2} (t - \tau)^\alpha \right] m(\tau) d\tau \quad (1.17)$$

⁴El teorema de existencia y unicidad de solución para ecuaciones diferenciales fraccionarias se puede consultar en [30]

donde $\bar{V}_0 = \bar{V}(0, x_0)$ es la condición inicial.

Dado que las funciones $(t - \tau)^{\alpha-1}$, $E_{\alpha, \alpha} \left[-\frac{\gamma_3}{\gamma_2} (t - \tau)^\alpha \right]$ y $m(\tau)$ son no negativas, se sigue que:

$$\bar{V}(t, x) \leq \bar{V}_0 E_\alpha \left(-\frac{\gamma_3}{\gamma_2} t^\alpha \right) \quad (1.18)$$

Teniendo en cuenta el cambio de variable (1.14) y la desigualdad (1.18) se obtiene la siguiente desigualdad:

$$V(t, x) - \frac{\gamma_2}{\gamma_3} \varpi \leq \left(V_0 - \frac{\gamma_2}{\gamma_3} \varpi \right) E_\alpha \left(-\frac{\gamma_3}{\gamma_2} t^\alpha \right) \quad (1.19)$$

Utilizando (1.11) se sigue:

$$\|x\| \leq \left[\frac{1}{\gamma_1} \left(\gamma_2 \|x_0\|^{\bar{a}\bar{b}} - \frac{\gamma_2}{\gamma_3} \varpi \right) E_\alpha \left(-\frac{\gamma_3}{\gamma_2} t^\alpha \right) + \frac{\gamma_2}{\gamma_1 \gamma_3} \varpi \right]^{1/\bar{a}} \quad (1.20)$$

Luego el sistema fraccionario (1.6) es Mittag-Leffler acotado. \square

Observación 3. *Es fácil ver que, el acotamiento Mittag-Leffler coincide con la estabilidad Mittag-Leffler cuando $\varpi = 0$.*

Observación 4. *Con la estabilidad Mittag-Leffler se asegura estabilidad asintótica del sistema (1.6), es decir $\|x\| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Mientras que el acotamiento Mittag-Leffler asegura que el sistema (1.6) se mantendrá uniformemente últimamente acotado, es decir $\|x\| \leq \bar{\varphi}^{\bar{b}}$ cuando $t \rightarrow \infty$.*

Observación 5. *Teniendo en cuenta la desigualdad (1.19) se puede obtener un estimado del dominio de atracción⁵. Cuando $t \rightarrow \infty$ se tiene $V(t, x) \leq \gamma_2 \varpi / \gamma_3 := c$, así el conjunto compacto definido como:*

$$\Psi := \{x \in \mathbb{E} \mid V(t, x) \leq c\} \quad (1.21)$$

toma el nombre de conjunto Mittag-Leffler atractivo. Si $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ entonces se conoce como conjunto globalmente Mittag-Leffler atractivo.

⁵La definición del dominio de atracción se puede revisar en [38]

Para concluir este capítulo se enuncian dos lemas los cuales en caso particular serán de utilidad para realizar el análisis de convergencia del observador fraccional que se propone en esta tesis.

Lema 1. *Sea $z \in \mathbb{C}^n$ un vector de funciones diferenciables entonces para todo $t \geq 0$ se cumple la desigualdad:*

$$D^\alpha (z^* P z) \leq z^* P D^\alpha z + D^\alpha z^* P z \quad (1.22)$$

donde $0 < \alpha \leq 1$, P es una matriz hermítica definida positiva, z^* denota el transpuesto conjugado de z .

Demostración. (Se sugiere ver el artículo [40] para revisar la prueba de este lema). \square

Observación 6. *Si $z \in \mathbb{R}^n$ entonces la matriz P es simétrica y definida positiva, mientras que $z^* = z^\top$, donde z^\top representa el transpuesto de z .*

Lema 2. *La matriz definida como:*

$$\begin{pmatrix} -\kappa_1 & -\kappa_2 \\ \kappa_3 & -\kappa_4 \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

es Hurwitz para toda $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4 \in \mathbb{R}^+$.

Demostración. Note que el polinomio característico de la matriz (1.23) esta dado por:

$$p(\xi) = \xi^2 + (\kappa_1 + \kappa_4) \xi + (\kappa_1 \kappa_4 + \kappa_2 \kappa_3) \quad (1.24)$$

De esta forma, los valores propios de (1.23) son:

$$\xi_{1,2} = \frac{-(\kappa_1 + \kappa_4) \pm \sqrt{(\kappa_1 + \kappa_4)^2 - 4(\kappa_1 \kappa_4 + \kappa_2 \kappa_3)}}{2} \quad (1.25)$$

Es fácil ver que si $(\kappa_1 + \kappa_4)^2 - 4(\kappa_1 \kappa_4 + \kappa_2 \kappa_3) < 0$ el resultado es trivial ya que $\text{Re}(\xi_{1,2}) < 0$, mientras que, si $(\kappa_1 + \kappa_4)^2 - 4(\kappa_1 \kappa_4 + \kappa_2 \kappa_3) > 0$ es necesario probar que $\xi_{1,2} < 0$, esto es:

$$\xi_{1,2} = \frac{-(\kappa_1 + \kappa_4) \pm \sqrt{(\kappa_1 + \kappa_4)^2 - 4(\kappa_1 \kappa_4 + \kappa_2 \kappa_3)}}{2} < 0 \quad (1.26)$$

Lo que implica que:

$$\pm \sqrt{(\kappa_1 + \kappa_4)^2 - 4(\kappa_1 \kappa_4 + \kappa_2 \kappa_3)} < (\kappa_1 + \kappa_4) \Rightarrow -(\kappa_1 \kappa_4 + \kappa_2 \kappa_3) < 0 \quad (1.27)$$

Como $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4 \in \mathbb{R}^+$ entonces $\xi_{1,2} < 0$, luego se concluye la demostración. \square

Capítulo 2

Diseño del observador PI fraccional

En este capítulo se aborda el diseño del observador PI fraccional. El observador fraccional que se propone se basa en la propiedad IFAO¹ [13] la cual fue introducida para resolver el problema de sincronización en sistemas caóticos fraccionarios incommensurados, esto a través de un observador de estados proporcional. Dicha propiedad permite representar una variable de estado como una función de la entrada y salida del sistema fraccionario en conjunto con sus derivadas fraccionarias. Para mostrar la efectividad del observador fraccional que se propone se consideran dos sistemas caóticos fraccionarios como ejemplos numéricos.

2.1. Observador PI fraccional

Se considera el sistema fraccionario definido como sigue:

$$\begin{aligned} D^\alpha x &= f(x, u) + \delta \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $u \in \mathbb{R}^q$ es la entrada del sistema, $y \in \mathbb{R}^m$ es la salida del sistema, $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función localmente Lipschitz en x y u ,

¹Esta propiedad es una generalización de la propiedad FAO

$h : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una función continua con $1 \leq p \leq n$ mientras que, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ es el conjunto de ordenes de derivación con $0 < \alpha_i < 1$, $i \in \{1, \dots, n\}$. El término δ contiene las perturbaciones externas que se consideran acotadas, es decir, existe una constante N tal que $\|\delta\| \leq N$ con $0 < N < \infty$.

Observación 7. Si $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n$ entonces el sistema fraccionario (2.1) se conoce como sistema fraccionario conmensurado de otra forma toma el nombre de inconmensurado.

En un sistema físico es muy complicado tener disponible la medición de todos los estados, esto sucede por varias situaciones que van desde el sensor que se requiera hasta que sea imposible obtener la medición del estado por las características físicas del sistema. Sin embargo, si se desea realizar control sobre el sistema muchas veces es necesario tener disponibles a los estados desconocidos o bien un estimado de los mismos. Esto motiva la siguiente cuestión ¿Es posible obtener un estimado de los estados desconocidos sólo con la medición de los estados conocidos y la entrada del sistema?, para responder esta pregunta se enuncia la propiedad IFAO.

Definición 6 (IFAO). Si una variable de estado x se puede representar como una función de la entrada y salida del sistema (sin considerar perturbaciones), en conjunto con sus derivadas fraccionarias, es decir:

$$x = \phi(y, D^{\alpha_1}y, D^{\alpha_1+\alpha_2}y, \dots, D^{\alpha_1+\dots+\alpha_n}y, u, D^{\alpha_1}u, D^{\alpha_1+\alpha_2}u, \dots, D^{\alpha_1+\dots+\alpha_n}u) \quad (2.2)$$

donde $\sum_{j=1}^n \alpha_j < 1$, $\phi(\cdot)$ es una función continua, entonces x satisface la propiedad de observabilidad algebraica fraccional inconmensurada.

Ahora, suponga que el sistema fraccionario (2.1) se puede separar en dos sistemas dinámicos de tal manera que se puede escribir como sigue:

$$\begin{aligned} D^{\bar{\alpha}}\bar{x} &= \bar{f}(\bar{x}, \bar{u}, \eta) + \bar{\delta} \\ D^{\hat{\alpha}}\eta &= \Phi(\cdot) \\ y &= h(\bar{x}) \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde \bar{x} representa a los estados conocidos del sistema, η son los estados desconocidos, $\bar{\alpha}$ es el conjunto de ordenes de derivación para \bar{x} , mientras que, $\hat{\alpha}$ es el conjunto de ordenes de derivación para η que satisfacen $0 < \bar{\alpha}_i, \hat{\alpha}_i < 1$ con $i \in \{1, \dots, n\}$. $\bar{\delta}$ y \bar{u} representan a las perturbaciones y entradas que afectan a los estados conocidos del sistema, respectivamente. La función $\Phi(\cdot)$ es desconocida.

Observación 8. *Una forma simple de elegir los ordenes de derivación para cada estado desconocido es igualándolo al orden de derivación que aparezca en la función $\phi(\cdot)$ dada por la propiedad IFAO de cada estado.*

Observación 9. *Nótese que la función $\Phi(\cdot)$ contiene información correspondiente a las perturbaciones externas de los estados desconocidos del sistema (2.1).*

Considere una dinámica desconocida de (2.3), esto es:

$$D^{\hat{\alpha}_i} \eta_i = \Phi_i(\cdot) \quad (2.4)$$

donde $\hat{\alpha}_i \subset \hat{\alpha}$ es el orden de derivación, $\eta_i \subset \eta$ es un estado desconocido del sistema fraccionario (2.1) y $\Phi_i(\cdot) \subset \Phi(\cdot)$ es una función desconocida con $i \in \{1, \dots, n\}$.

Para asegurar existencia y unicidad de solución de la ecuación diferencial fraccional (2.4) es necesario realizar una hipótesis referente a la función desconocida $\Phi_i(\cdot)$.

Hipótesis 1. *La función $\Phi_i(\cdot)$ es acotada, es decir, existe una constante M tal que $|\Phi_i(\cdot)| \leq M$ con $0 < M < \infty$.*

Es fácil ver que proponer un observador para (2.4) que requiera una copia del sistema sería imposible implementar ya que la función $\Phi_i(\cdot)$ es desconocida. Así, considere el siguiente sistema fraccionario:

$$\begin{aligned} D^{\hat{\alpha}_i} \hat{\eta}_i &= k_1 (\eta_i - \hat{\eta}_i) + k_2 \zeta_i \\ D^{\hat{\alpha}_i} \zeta_i &= k_3 (\eta_i - \hat{\eta}_i) - k_4 \zeta_i \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde $0 < \hat{\alpha}_i < 1$, $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, $k_3 > 0$ y $k_4 > 0$ son constantes, $\hat{\eta}_i$ es un estimado del estado desconocido η_i , mientras que, ζ_i es la parte integral fraccional de $\hat{\eta}_i$.

Con base en lo mencionado anteriormente y definiendo el error de observación como:

$$\tilde{\eta}_i := \eta_i - \hat{\eta}_i \quad (2.6)$$

Entonces se puede establecer el siguiente resultado.

Teorema 3. *Considere el sistema fraccionario (2.1) y suponga que se puede expresar en la forma (2.3). Además, si los estados desconocidos del sistema satisfacen la propiedad IFAO y la hipótesis 1 se cumple, entonces el sistema fraccionario (2.5) es un observador Proporcional Integral (PI) fraccional para la dinámica desconocida (2.4) cuyo error de observación es globalmente Mittag-Leffler acotado, es decir satisface:*

$$\|\varepsilon\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \frac{\lambda_{\max}(P) M}{\sqrt{\lambda_{\min}(Q)} \varrho - \varrho^2}$$

donde $\varepsilon = (\tilde{\eta}_i \ \zeta_i)^\top$, $0 < \varrho < \lambda_{\min}(Q)$ y P, Q son matrices simétricas definidas positivas, $\lambda_{\max(\min)}(X)$ representa el valor propio máximo(mínimo) de X .

Demostración. Tomando la derivada fraccional de orden $\hat{\alpha}_i$ del error de observación (2.6) se obtiene:

$$D^{\hat{\alpha}_i} \tilde{\eta}_i = D^{\hat{\alpha}_i} \eta_i - D^{\hat{\alpha}_i} \hat{\eta}_i \quad (2.7)$$

Sustituyendo (2.4) y (2.5) en (2.7) se sigue:

$$\begin{aligned} D^{\hat{\alpha}_i} \tilde{\eta}_i &= -k_1 \tilde{\eta}_i - k_2 \zeta_i + \Phi_i(\cdot) \\ D^{\hat{\alpha}_i} \zeta_i &= k_3 \tilde{\eta}_i - k_4 \zeta_i \end{aligned} \quad (2.8)$$

Así, el sistema fraccionario (2.8) se puede escribir en forma matricial:

$$D^{\hat{\alpha}_i} \varepsilon = K \varepsilon + \aleph \quad (2.9)$$

donde

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \tilde{\eta}_i \\ \zeta_i \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} -k_1 & -k_2 \\ k_3 & -k_4 \end{pmatrix} \quad \aleph = \begin{pmatrix} \Phi_i(\cdot) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Sea la función cuadrática

$$V(\varepsilon) = \varepsilon^\top P \varepsilon \quad (2.11)$$

donde $P \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ es una matriz simétrica definida positiva, es claro que $V(\varepsilon) = 0$ cuando $\varepsilon = 0$ mientras que si $\varepsilon \neq 0$ se tiene $V(\varepsilon) > 0$. Entonces en vista del Lema 1 y el sistema fraccionario (2.9) se sigue:

$$\begin{aligned} D^{\alpha_i} V(\varepsilon) &\leq \varepsilon^\top P D^{\alpha_i} \varepsilon + (D^{\alpha_i} \varepsilon)^\top P \varepsilon \\ &= \varepsilon^\top P (K \varepsilon + \aleph) + (\varepsilon^\top K^\top + \aleph^\top) P \varepsilon \\ &= \varepsilon^\top (P K + K^\top P) \varepsilon + 2 \varepsilon^\top P \aleph \end{aligned} \quad (2.12)$$

Dado que la matriz K es Hurwitz (ver Lema 2), entonces existe una matriz $Q \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ simétrica definida positiva tal que:

$$P K + K^\top P = -Q \quad (2.13)$$

De esta forma, la desigualdad diferencial fraccional (2.12) se puede escribir como sigue:

$$D^{\alpha_i} V(\varepsilon) \leq -\varepsilon^\top Q \varepsilon + 2 \varepsilon^\top P \aleph \quad (2.14)$$

Ahora bien, se puede encontrar una cota superior para (2.14). Por la desigualdad de Rayleigh-Ritz se tiene que:

$$\lambda_{\min}(Q) \|\varepsilon\|^2 \leq \varepsilon^\top Q \varepsilon \leq \lambda_{\max}(Q) \|\varepsilon\|^2 \quad (2.15)$$

Así, $-\varepsilon^\top Q \varepsilon \leq -\lambda_{\min}(Q) \|\varepsilon\|^2$. Mientras que, utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se sigue:

$$\begin{aligned} |2 \varepsilon^\top P \aleph| &\leq 2 \|\varepsilon\| \|P\| \|\aleph\| \\ &\leq 2 \lambda_{\max}(P) \|\varepsilon\| \|\aleph\| \end{aligned} \quad (2.16)$$

Dado que se satisface la hipótesis 1 entonces $\|\aleph\| = |\Phi_i(\cdot)| \leq M$ por tanto:

$$|2 \varepsilon^\top P \aleph| \leq 2 \omega \|\varepsilon\| \quad (2.17)$$

donde $\omega = \lambda_{\max}(P) M$. Así, se puede escribir:

$$\begin{aligned} D^{\dot{\alpha}_i} V(\varepsilon) &\leq -\lambda_{\min}(Q) \|\varepsilon\|^2 + 2\omega \|\varepsilon\| \\ &= -\lambda_{\min}(Q) \|\varepsilon\|^2 + 2\omega \|\varepsilon\| + \varrho \|\varepsilon\|^2 - \varrho \|\varepsilon\|^2 \\ &= -(\lambda_{\min}(Q) - \varrho) \|\varepsilon\|^2 - \varrho \|\varepsilon\|^2 + 2\omega \|\varepsilon\| \end{aligned} \quad (2.18)$$

donde $0 < \varrho < \lambda_{\min}(Q)$. Utilizando el hecho de que para dos constantes $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ se cumple $(d_1 - d_2)^2 \geq 0 \Rightarrow -d_1^2 + 2d_1 d_2 \leq d_2^2$, entonces se sigue:

$$D^{\dot{\alpha}_i} V(\varepsilon) \leq -\theta \|\varepsilon\|^2 + \mu \quad (2.19)$$

donde $\theta = \lambda_{\min}(Q) - \varrho$ y $\mu = \omega^2 / \varrho$.

Teniendo en cuenta que la función cuadrática (2.11) satisface la desigualdad de Rayleigh-Ritz y considerando el Teorema 2, se obtiene:

$$\|\varepsilon\| \leq \left[\frac{1}{\lambda_{\min}(P)} \left(\lambda_{\max}(P) \|\varepsilon_0\|^2 - \frac{\lambda_{\max}(P)}{\theta} \mu \right) E_{\dot{\alpha}_i} \left(-\frac{\theta}{\lambda_{\max}(P)} t^{\dot{\alpha}_i} \right) + \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P) \theta} \mu \right]^{1/2} \quad (2.20)$$

donde ε_0 es la condición inicial del sistema (2.9).

Por tanto el error de observación es globalmente Mittag-Leffler acotado, además cuando $t \rightarrow \infty$ se tiene que:

$$\|\varepsilon\| \leq \left(\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P) \theta} \mu \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \frac{\lambda_{\max}(P) M}{\sqrt{\lambda_{\min}(Q) \varrho - \varrho^2}} \quad (2.21)$$

Se concluye la demostración. \square

Observación 10. *El conjunto globalmente Mittag-Leffler atractivo está definido por (véase la observación 5):*

$$\Psi_0 = \left\{ \varepsilon \in \mathbb{R}^2 \mid V(\varepsilon) \leq \frac{\lambda_{\max}(P)^3 M^2}{\lambda_{\min}(Q) \varrho - \varrho^2} \right\} \quad (2.22)$$

Observación 11. *El observador que se propone es no inicializado, es decir, no importa que condiciones iniciales se den, el error de observación siempre se mantendrá acotado.*

Observación 12. *Dada la propiedad IFAO una variable de estado se puede expresar en términos de la salida y entrada del sistema y sus derivadas fraccionarias, comúnmente solo se cuenta con la medición de la salida y la entrada mientras que sus correspondientes derivadas fraccionarias son desconocidas, por lo tanto, de ser necesario se debe introducir una variable auxiliar para evitar el uso de estas señales desconocidas.*

Observación 13. *Nótese que a partir de (2.21) se puede obtener un criterio de selección para las ganancias del observador (2.5). Fijando $P = I$, entonces la ecuación (2.13) toma la forma:*

$$K + K^T = -Q \quad \Rightarrow \quad Q = \begin{pmatrix} 2k_1 & k_2 - k_3 \\ k_2 - k_3 & 2k_4 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Por lo que si $k_2 = k_3$ y $k_1 < k_4$ entonces:

$$\|\varepsilon\| \leq \frac{M}{\sqrt{2k_1\rho - \rho^2}} \quad (2.24)$$

donde $0 < \rho < 2k_1$. Eligiendo $\rho = k_1$ se obtiene:

$$\|\varepsilon\| \leq \frac{M}{k_1} \quad (2.25)$$

2.2. Ejemplos

Para mostrar el desempeño del observador propuesto se consideran como ejemplos dos sistemas caóticos fraccionarios, la principal razón de elegir un sistema caótico es que sus trayectorias siempre se mantienen acotadas [41]. Por lo tanto la Hipótesis 1 se satisface.

2.2.1. Sistema caótico fraccional Genesisio-Tesi

Considere el sistema caótico fraccional Genesisio-Tesi (G-T) [42]

$$\begin{aligned} D^{\alpha_1}x_1 &= x_2 + \delta_1 \\ D^{\alpha_2}x_2 &= x_3 + \delta_2 \\ D^{\alpha_3}x_3 &= -ax_1 - bx_2 - cx_3 + x_1^2 + \delta_3 \end{aligned} \quad (2.26)$$

donde $\alpha_{1,2,3}$ son los ordenes de derivación, a , b y c son los parámetros del sistema, y $\delta_{1,2,3}$ son perturbaciones externas acotadas.

Se considera que se tienen como salidas disponibles a los estados x_1 y x_3 , así:

$$y_1 = x_1 \quad y_2 = x_3 \quad (2.27)$$

mientras que, el estado x_2 se considera desconocido, por otro lado, cuando el sistema (2.26) no es perturbado, es decir, $\delta_{1,2,3} = 0$, note que x_2 satisface la propiedad IFAO, esto es:

$$x_2 = D^{\alpha_1} y_1 = \phi_2(D^{\alpha_1} y_1) \quad (2.28)$$

Entonces el sistema (2.26) se puede escribir en la forma (2.3), así:

$$\begin{aligned} D^{\bar{\alpha}_1} \bar{x}_1 &= \eta_2 + \bar{\delta}_1 \\ D^{\bar{\alpha}_2} \eta_2 &= \Phi_2(\cdot) \\ D^{\bar{\alpha}_3} \bar{x}_3 &= -a \bar{x}_1 - b \eta_2 - c \bar{x}_3 + \bar{x}_1^2 + \bar{\delta}_3 \\ y &= \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.29)$$

donde $\bar{\alpha}_1 = \alpha_1$, $\bar{\alpha}_2 = \alpha_1$, $\bar{\alpha}_3 = \alpha_3$, $\bar{x}_1 = x_1$, $\eta_2 = x_2$, $\bar{x}_3 = x_3$, $\bar{\delta}_1 = \delta_1$, $\bar{\delta}_3 = \delta_3$, mientras que, $y_1 = \bar{x}_1$, $y_2 = \bar{x}_2$.

De esta forma, se puede diseñar un observador PI fraccional para el estado η_2 .

Considere el observador PI fraccional:

$$\begin{aligned} D^{\hat{\alpha}_2} \hat{\eta}_2 &= k_{12}(\eta_2 - \hat{\eta}_2) + k_{22} \zeta_2 \\ D^{\hat{\alpha}_2} \zeta_2 &= k_{32}(\eta_2 - \hat{\eta}_2) - k_{42} \zeta_2 \end{aligned} \quad (2.30)$$

donde $k_{12}, k_{22}, k_{32}, k_{42} \in \mathbb{R}^+$, sustituyendo (2.28) en (2.30) se obtiene:

$$\begin{aligned} D^{\hat{\alpha}_2} \hat{\eta}_2 &= k_{12} D^{\hat{\alpha}_2} y_1 - k_{12} \hat{\eta}_2 + k_{22} \zeta_2 \\ D^{\hat{\alpha}_2} \zeta_2 &= k_{32} D^{\hat{\alpha}_2} y_1 - k_{32} \hat{\eta}_2 - k_{42} \zeta_2 \end{aligned} \quad (2.31)$$

Para quitar la dependencia de $D^{\hat{\alpha}_2} y_1$ en (2.31) se consideran los cambios de variable siguientes:

$$\sigma_2 = \hat{\eta}_2 - k_{12} y_1 \quad (2.32)$$

$$\rho_2 = \zeta_2 - k_{32} y_1 \quad (2.33)$$

Sustituyendo (2.32), (2.33) y sus derivadas fraccionarias de orden $\hat{\alpha}_2$ en (2.31) y realizando manipulaciones algebraicas, se obtiene:

$$D^{\hat{\alpha}_2} \sigma_2 = -k_{12} \sigma_2 + k_{22} \rho_2 + (k_{22} k_{32} - k_{12}^2) y_1 \quad (2.34)$$

$$D^{\hat{\alpha}_2} \rho_2 = -k_{32} \sigma_2 - k_{42} \rho_2 + (-k_{12} k_{32} - k_{32} k_{42}) y_1$$

Teniendo en cuenta que $\hat{\alpha}_2 = \alpha_1$ y como $\eta_2 = x_2$ esto implica que $\hat{\eta}_2 = \hat{x}_2$, entonces se obtiene el observador fraccional para el estado desconocido x_2 :

$$\begin{cases} D^{\alpha_1} \sigma_2 = -k_{12} \sigma_2 + k_{22} \rho_2 + (k_{22} k_{32} - k_{12}^2) y_1 \\ D^{\alpha_1} \rho_2 = -k_{32} \sigma_2 - k_{42} \rho_2 + (-k_{12} k_{32} - k_{32} k_{42}) y_1 \\ \hat{\eta}_2 = \sigma_2 + k_{12} y_1 \end{cases} \quad (2.35)$$

con las condiciones iniciales $\sigma_2(0) = \sigma_{20}$ y $\rho_2(0) = \rho_{20}$.

Observación 14. *Note que el estado x_2 también puede representarse como sigue:*

$$x_2 = -\frac{1}{b} D^{\alpha_3} y_2 - \frac{a}{b} y_1 - \frac{c}{b} y_2 + \frac{1}{b} y_1^2 = \phi_2(y_1, y_2, D^{\alpha_3} y_2) \quad (2.36)$$

por lo que a partir de (2.36) también se puede diseñar un observador PI fraccional para el estado x_2 .

2.2.2. Sistema caótico fraccional Sundarapandian-Pehlivan

Considere el sistema fraccionario Sundarapandian-Pehlivan (S-P) [43]

$$\begin{aligned} D^{\alpha_1} x_1 &= -x_1 + a x_2 + \delta_1 \\ D^{\alpha_2} x_2 &= -b x_1 - x_3 + \delta_2 \\ D^{\alpha_3} x_3 &= -x_1 + c x_3 + x_1 x_2^2 + \delta_3 \end{aligned} \quad (2.37)$$

donde $\alpha_{1,2,3}$ son los ordenes de derivación, a , b y c son los parámetros del sistema y lo términos $\delta_{1,2,3}$ representan las perturbaciones externas acotadas.

Considere que se tienen como salidas disponibles a los estados x_2 y x_3 , mientras que, x_1 es desconocido, así:

$$y_1 = x_2 \quad y_2 = x_3 \quad (2.38)$$

Es fácil ver que si el sistema fraccionario (2.37) no es perturbado, el estado desconocido x_1 satisface la propiedad IFAO, esto es:

$$x_1 = -\frac{1}{b} D^{\alpha_2} y_1 - \frac{1}{b} y_2 = \phi_1(y_2, D^{\alpha_2} y_1) \quad (2.39)$$

Luego el sistema fraccionario (2.37) se puede escribir en la forma (2.3):

$$\begin{aligned} D^{\hat{\alpha}_1} \eta_1 &= \Phi_1(\cdot) \\ D^{\bar{\alpha}_2} \bar{x}_2 &= -b \eta_1 - \bar{x}_3 + \bar{\delta}_2 \\ D^{\bar{\alpha}_3} \bar{x}_3 &= -\eta_1 + c \bar{x}_3 + \eta_1 \bar{x}_2^2 + \bar{\delta}_3 \\ y &= \begin{pmatrix} \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.40)$$

donde $\hat{\alpha}_1 = \alpha_2$, $\bar{\alpha}_2 = \alpha_2$, $\bar{\alpha}_3 = \alpha_3$, $\eta_1 = x_1$, $\bar{x}_2 = x_2$, $\bar{x}_3 = x_3$, $\bar{\delta}_2 = \delta_2$, $\bar{\delta}_3 = \delta_3$ y las salidas son $y_1 = \bar{x}_2$, $y_2 = \bar{x}_3$.

Realizando la misma metodología que en el ejemplo anterior se obtiene el observador PI fraccional para el estado x_1 :

$$\begin{cases} D^{\alpha_2} \sigma_1 = -k_{11} \sigma_1 + k_{21} \rho_1 + \left(\frac{k_{11}^2 - k_{21} k_{31}}{b} \right) y_1 - \frac{k_{11}}{b} y_2 \\ D^{\alpha_2} \rho_1 = -k_{31} \sigma_1 - k_{41} \rho_1 + \left(\frac{k_{11} k_{31} + k_{31} k_{41}}{b} \right) y_1 - \frac{k_{31}}{b} y_2 \\ \hat{\eta}_1 = \sigma_1 - \frac{k_{11}}{b} y_1 \end{cases} \quad (2.41)$$

donde $\hat{\eta}_1 = \hat{x}_1$, $k_{11}, k_{21}, k_{31}, k_{41} \in \mathbb{R}^+$ y con las condiciones iniciales $\sigma_1(0) = \sigma_{10}$ y $\rho_1(0) = \rho_{10}$.

Observación 15. *Note que el estado desconocido x_1 también se puede representar como sigue:*

$$x_1 = \frac{D^{\alpha_3} y_2}{y_1^2 - 1} - \frac{c y_2}{y_1^2 - 1} = \phi_1(y_1, y_2, D^{\alpha_3} y_2) \quad (2.42)$$

sin embargo x_1 pierde la propiedad IFAO en los puntos singulares, es decir, cuando $y_1 = \pm 1$, o bien, $x_2 = \pm 1$.

2.3. Simulaciones

Las simulaciones numéricas se realizan en la plataforma de MatLab/Simulink utilizando el método Dormand-Prince como integrador con un paso de 0.001.

Para evaluar la precisión del observador PI fraccional se considera como criterio de desempeño la integral del error cuadrático el cual se define como sigue:

$$IEC = \int_{t_0}^{t_1} (\varsigma \tilde{\eta})^2 d\tau \quad (2.43)$$

donde $\varsigma \in \mathbb{R}^+$ es un factor de escalamiento, $\tilde{\eta} = \eta - \hat{\eta}$ es el error de observación y t_0, t_1 definen un intervalo de tiempo donde se calcula el IEC. El integrador del IEC se reiniciará cuando el estado η cambie de signo.

Adicionalmente, se realiza la comparación entre un observador proporcional (como el que se propone en [13]) y el observador PI fraccional.

Sistema fraccionario G-T

Considerando el sistema G-T (2.26) si los ordenes de derivación son $\alpha_{1,2,3} = 0.985$ y los parámetros toman los valores $a = 4$, $b = 2.7$ y $c = 0.6$ este presenta un atractor caótico. En la figura 2.1 (a) se ilustra el atractor cuando el sistema no es perturbado, es decir $\delta_{1,2,3} = 0$. Mientras que, en la figura 2.1 (b) se puede observar el atractor cuando el sistema es perturbado con $\delta_{1,2,3} = 0.01 \sin(\pi t)$. Las condiciones iniciales para ambos casos son $x_{1_0} = 0.1$, $x_{2_0} = 2$, $x_{3_0} = -0.5$.

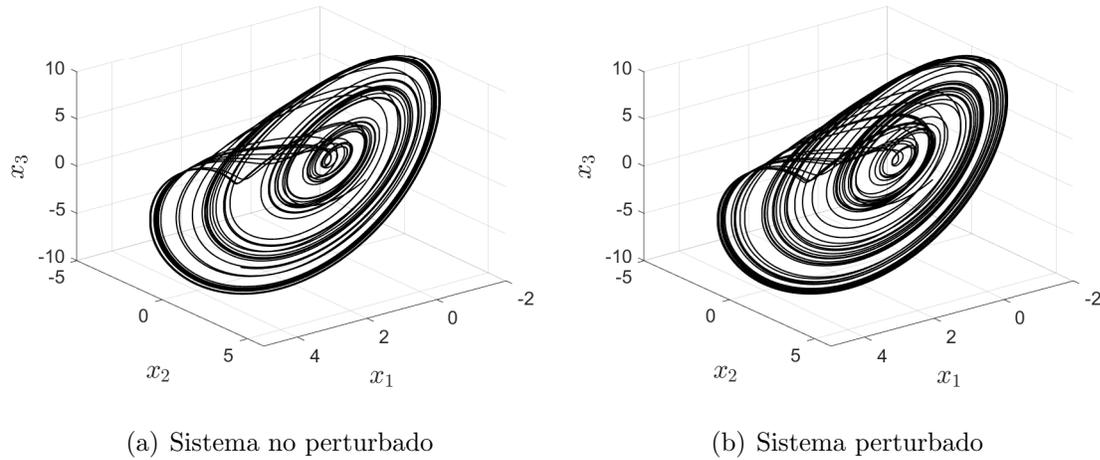


Figura 2.1: Atractor caótico sistema Genesisio-Tesi

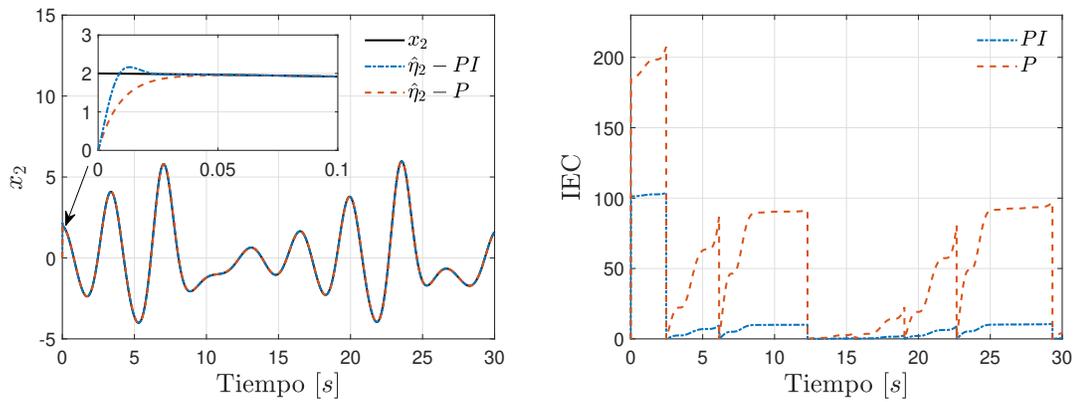
Para el observador (2.35) se fijan las ganancias con los valores $k_{12} = 100$, $k_{22} = k_{32} = k_{42} = 200$ (ver observación 13) y las condiciones iniciales $\sigma_{2_0} = -k_{12} x_{1_0}$, $\rho_{2_0} = -k_{32} x_{1_0}$. Mientras que, la ganancia del observador P se elige con el mismo valor que k_{12} y con la condición inicial σ_{2_0} .

En la figura 2.2 (a) se puede observar la trayectoria del estado desconocido y sus estimados, mientras que, en la figura 2.2 (b) se muestra el IEC que presenta cada observador sin la existencia de perturbaciones externas. Los resultados obtenidos muestran que el observador PI fraccional presenta un menor tiempo de convergencia asintótica en comparación con el observador P. Ahora bien, en la tabla 2.1 se dan los valores del IEC para ambos observadores en diferentes instantes de tiempo, es claro que el observador PI fraccional presenta menores valores de IEC que el observador P. Además, note que se presenta un menor valor de IEC donde la trayectoria del estado es más suave.

Por otro lado, cuando existen perturbaciones externas como era de esperarse los valores del IEC se incrementan (ver la tabla 2.2) ya que la cota de la perturbación asociada al estado desconocido afecta directamente a la cota ultima del error de observación, sin embargo, el observador PI fraccional presenta un mejor desempeño en comparación con el observador P, además de mantener el tiempo de convergencia asintótica. Estos resultados

Tabla 2.1: Comparación de IEC en diferentes instantes de tiempo (sin perturbaciones) estado η_2

	$t = 1.5$ seg	$t = 10$ seg	$t = 15$ seg	$t = 27$ seg
Observador PI fraccional	102.687	9.971	0.3	10.2262
Observador P	198.343	90.36	2.8	92.695



(a) Estado $\eta_2 = x_2$ y sus estimados $\hat{\eta}_2 - PI$ y (b) Comparación de IEC con factor de escalamiento $\zeta = 100$

Figura 2.2: Observación de x_2 sin perturbaciones externas

se dan en la figura 2.3.

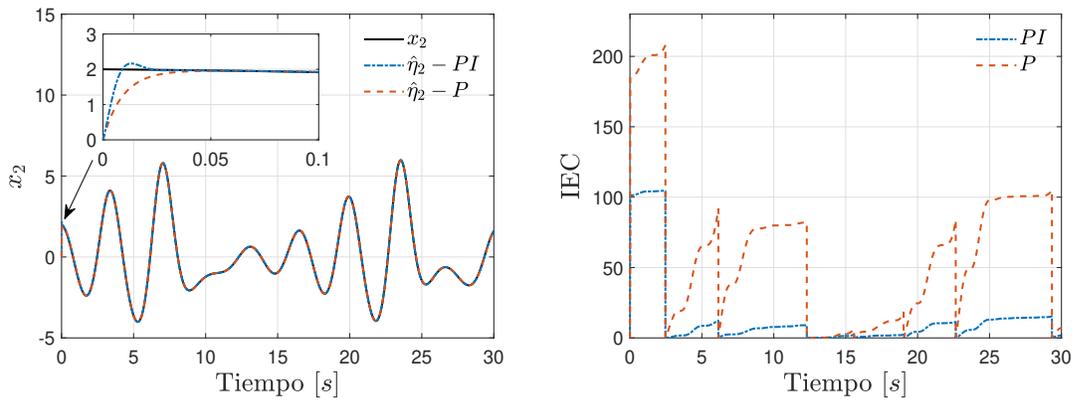
Observación 16. *Nótese que el menor valor del IEC se da entre los segundos 10 y 15 esto es de esperarse ya que la trayectoria es más suave como se menciona anteriormente, haciendo que la acción integral fraccional del observador PI fraccional tenga poco efecto.*

Sistema fraccionario S-P

Considerando el sistema S-P (2.37) si los ordenes de derivación toman los valores $\alpha_1 = 0.993$, $\alpha_2 = 0.997$, $\alpha_3 = 0.994$ y los parámetros son $a = 1$ y $b = c = 0.46$, este presenta un

Tabla 2.2: Comparación de IEC en diferentes instantes de tiempo (con perturbaciones) estado η_2

	$t = 1.5$ seg	$t = 10$ seg	$t = 15$ seg	$t = 27$ seg
Observador PI fraccional	104.073	7.772	1.35	14.237
Observador P	200.882	79.884	2.953	100.618



(a) Estado $\eta_2 = x_2$ y sus estimados $\hat{\eta}_2 - PI$ y (b) Comparación de IEC con factor de escalamiento $\zeta = 100$

Figura 2.3: Observación de x_2 con perturbaciones externas

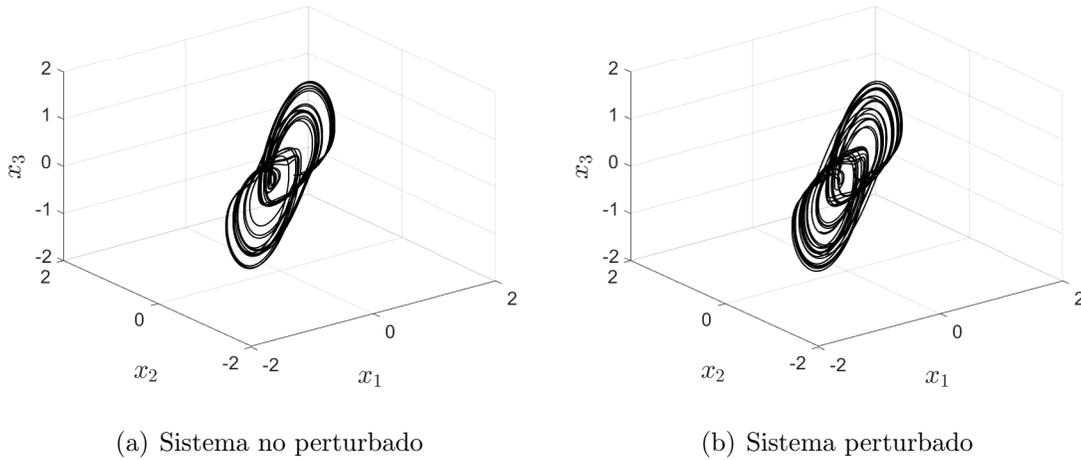


Figura 2.4: Atractor caótico sistema Sundarapandian-Pehlivan

atractor caótico. Cuando no existen perturbaciones externas la figura 2.4 (a) representa el atractor caótico, por otro lado, si existen perturbaciones el atractor se puede observar en la figura 2.4 (b). En este caso las perturbaciones son $\delta_{1,2,3} = 0.001 \sin(\pi t)$. Las condiciones iniciales son $x_{10} = 0.1$, $x_{20} = 0.5$ y $x_{30} = -0.1$.

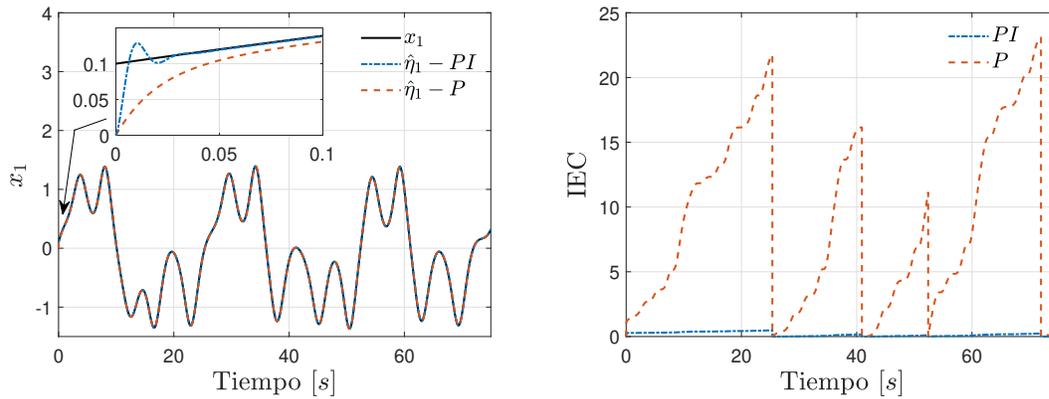
Las ganancias del observador PI fraccional (2.41) se fijan en $k_{11} = 50$, $k_{21} = k_{31} = 300$ y $k_{41} = 200$ (ver observación 13). Mientras que, las condiciones iniciales son $\sigma_{10} = \frac{k_{11}}{b} x_{20}$ y $\rho_{10} = \frac{k_{31}}{b} x_{20}$. Para el observador P la ganancia es igual a k_{11} con la condición inicial σ_{10} .

Cuando no existen perturbaciones externas como era de esperarse el observador PI fraccional presenta un mejor desempeño que el observador P, tanto en la convergencia asintótica como en el valor de IEC. Estos resultados se dan en la tabla 2.3 y la figura 2.5.

Por otro lado, cuando existen perturbaciones externas la trayectoria del estado x_1 cambia significativamente (véanse las figura 2.5 (a) y 2.6 (a)), incluso cuando la perturbación es casi insignificante. Sin embargo, el observador fraccional propuesto sigue presentando una mejor precisión comparado con el observador P. Adicionalmente, el valor del IEC se incrementa debido a la perturbación externa pero se sigue manteniendo el desempeño del observador PI fraccional, la figura 2.6 representa dichos resultados

Tabla 2.3: Comparación de IEC en diferentes instantes de tiempo (sin perturbaciones) estado η_1

	$t = 1.5$ seg	$t = 25$ seg	$t = 40$ seg	$t = 72$ seg
Observador PI fraccional	0.28	0.482	0.159	0.23
Observador P	1.571	21.76	15.948	23.12

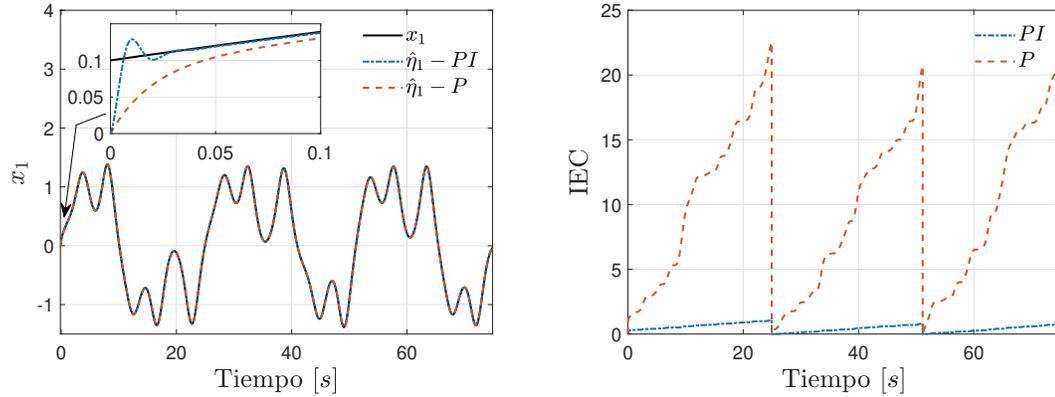


(a) Estado $\eta_1 = x_1$ y sus estimados $\hat{\eta}_1 - PI$ y (b) Comparación de IEC con factor de escalamiento $\zeta = 100$

Figura 2.5: Observación de x_1 sin perturbaciones externas

Tabla 2.4: Comparación de IEC en diferentes instantes de tiempo (con perturbaciones) estado η_1

	$t = 1.5$ seg	$t = 25$ seg	$t = 51$ seg	$t = 70$ seg
Observador PI fraccional	0.324	1.075	0.806	0.593
Observador P	1.701	22.546	20.726	16.323



(a) Estado $\eta_1 = x_1$ y sus estimados $\hat{\eta}_1 - PI$ y $\hat{\eta}_1 - P$ y (b) Comparación de IEC con factor de escalamiento $\zeta = 100$

Figura 2.6: Observación de x_1 con perturbaciones externas

2.4. Conclusión

En este capítulo se abordó el diseño del observador PI fraccional el cual se basa en la propiedad IFAO. El observador propuesto presenta ciertas propiedades interesantes las cuales se enuncian a continuación:

1. Es un observador fraccional de modelo libre.
2. Es un observador fraccional de orden reducido.
3. Es robusto ante perturbaciones externas.
4. Puede diseñarse para sistemas fraccionarios conmensurados e incommensurados.
5. Para cierto tipo de sistemas el observador PI fraccional también es robusto ante incertidumbres paramétricas, esto se da cuando la propiedad IFAO no depende de los parámetros del sistema (véase el ejemplo del sistema G-T).

Además, el observador PI fraccional presenta ciertas ventajas en comparación con otros observadores que se han propuesto, una de las más significativas es la elección de las

ganancias, la cual es simple ya que no se requiere algún algoritmo computacional. Por otro lado, el análisis de convergencia se realiza con el enfoque del acotamiento Mittag-Leffler donde se demuestra que el error de observación es globalmente Mittag-Leffler acotado lo que implica que el error de observación es últimamente acotado, además se da un estimado del dominio de atracción llamado conjunto Mittag-Leffler atractivo. Adicionalmente, las simulaciones se realizan considerando sistemas caóticos, donde se compara el desempeño observador PI fraccional con un observador P obteniendo resultados satisfactorios. Finalmente, se pueden diseñar observadores PI fraccionales para otro tipo de sistemas lo cuales satisfagan las condiciones del teorema 3.

Capítulo 3

Identificación paramétrica en sistemas fraccionarios

En este capítulo se aborda el problema de identificación paramétrica en sistemas fraccionarios. Se introduce una nueva propiedad la cual permite escribir los parámetros del sistema como una función de la salida, entrada y sus derivadas fraccionarias, de esta forma, el problema de identificación se puede llevar a un problema de observación de estados. Por lo tanto, basta con diseñar un observador fraccional para resolver el problema de identificación paramétrica en sistemas fraccionarios. Para mostrar la precisión de este método se considera un ejemplo de tipo académico teniendo al error relativo como criterio de desempeño.

3.1. Identificación paramétrica

Considere el sistema de orden fraccional siguiente:

$$\begin{aligned} D^\alpha x &= f(x, u, \xi) + \delta \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $u \in \mathbb{R}^q$ es la entrada del sistema, $y \in \mathbb{R}^m$ es la salida del sistema, $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función localmente Lipschitz en x , u y ξ , $h : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una función continua con $1 \leq p \leq n$, mientras que, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ es el conjunto de ordenes de derivación que satisface $0 < \alpha_i < 1$ con $i \in \{1, \dots, n\}$. El conjunto de parámetros se denota por $\xi \in \mathbb{R}^l$ (los elementos de ξ pueden ser variantes en el tiempo). El término δ contiene las perturbaciones externas que se consideran acotadas, es decir, existe una constante N tal que $\|\delta\| \leq N$ con $0 < N < \infty$.

Observación 17. *En esta tesis se consideran conocidos los ordenes de derivación.*

Ahora bien, el problema de identificación paramétrica consiste en obtener un estimado de los elementos de ξ , es decir, los parámetros del sistema, solo con la información que se encuentra disponible. Dicho esto, se enuncia la siguiente propiedad:

Definición 7 (IAF). *Un parámetro ξ satisface la propiedad de Identificabilidad Algebraica Fraccional (IAF), si este puede ser representado como una función de la entrada y salida del sistema (sin considerar perturbaciones) en conjunto con sus derivadas fraccionarias, es decir:*

$$\xi = \psi(y, D^{\alpha_1}y, \dots, D^{\alpha_1+\dots+\alpha_n}y, u, D^{\alpha_1}u, \dots, D^{\alpha_1+\dots+\alpha_n}u) \quad (3.2)$$

donde $\sum_{k=1}^n \alpha_k < 1$ y $\psi(\cdot)$ es una función continua.

Ejemplo 1. *Considere el sistema fraccionario definido por:*

$$\begin{aligned} D^{\alpha_1}x_1 &= \xi_1 x_1^2 + u_1 \\ D^{\alpha_2}x_2 &= -x_1 - x_2 \\ y_1 &= x_1 \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde ξ_1 es un parámetro el cual puede ser variante en el tiempo. Note que ξ_1 satisface la propiedad IAF, esto es:

$$\xi_1 = \frac{D^{\alpha_1}y_1 - u_1}{y_1^2} = \psi_1(y_1, D^{\alpha_1}y_1, u_1) \quad y_1 \neq 0 \quad (3.4)$$

De esta forma, considere una nueva variable la cual puede depender de los estados conocidos y de un solo parámetro o bien sólo del parámetro. Así, incluyendo el conjunto de variables auxiliares junto con el sistema (3.1) se puede considerar el siguiente sistema aumentado:

$$\begin{aligned} D^\alpha x &= f(x, u, \eta) + \delta \\ D^{\alpha^*} \eta &= \chi(\cdot) \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{3.5}$$

donde $\eta \in \mathbb{R}^l$ es el conjunto de variables auxiliares y α^* es el conjunto de ordenes de derivación correspondiente a las variables auxiliares que satisface $0 < \alpha_i^* < 1$ con $i \in \{1, \dots, l\}$. Mientras que, $\chi(\cdot)$ es una función desconocida.

Nótese que la variable auxiliar se puede considerar como un estado extra, así basta con observar este nuevo estado para obtener un estimado de los parámetros. Por tanto, el problema de identificación paramétrica se traduce en un problema de observación de estado.

Observación 18. *Si un parámetro ξ_i satisface la propiedad IAF entonces la variable auxiliar η_i satisface la propiedad IFAO con $i \in \{1, \dots, l\}$.*

Se considera una dinámica desconocida del sistema aumentado (3.5):

$$D^{\alpha_i^*} \eta_i = \chi_i(\cdot) \tag{3.6}$$

donde $\alpha_i^* \subset \alpha^*$ es el orden de derivación, $\eta_i \subset \eta$ es un estado extra de (3.5) y $\chi_i(\cdot) \subset \chi(\cdot)$ es una función desconocida con $i \in \{1, \dots, l\}$.

Para asegurar la existencia y unicidad de solución de la ecuación diferencial fraccional (3.6), es necesario realizar una hipótesis sobre la función $\chi_i(\cdot)$.

Hipótesis 2. *La función desconocida $\chi_i(\cdot)$ es acotada, es decir, existe una constante W tal que $|\chi_i(\cdot)| \leq W$ con $0 < W < \infty$.*

En vista de la observación 18 y la hipótesis 2, para obtener un estimado del estado desconocido η_i se puede considerar el observador PI fraccional que se propuso en el capítulo 2 el cual se define como sigue:

$$\begin{aligned} D^{\alpha_i^*} \hat{\eta}_i &= k_1(\eta_i - \hat{\eta}_i) + k_2 \zeta_i \\ D^{\alpha_i^*} \zeta_i &= k_3(\eta_i - \hat{\eta}_i) - k_4 \zeta_i \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde $0 < \alpha_i^* < 1$ es el orden de derivación, k_1, k_2, k_3 y k_4 son constantes positivas, $\hat{\eta}_i$ es un estimado de η_i , mientras que, ζ_i es la parte integral fraccional de $\hat{\eta}_i$.

Por tanto, si se obtiene un estimado del estado desconocido η_i entonces también se obtiene un estimado del parámetro ξ_i asociado a la variable auxiliar.

3.2. Ejemplo

Para comprobar la precisión del método de identificación paramétrica que se propone se considera un ejemplo académico el cual es un sistema variante en el tiempo.

3.2.1. Ejemplo académico

Considere el sistema fraccionario definido como:

$$\begin{aligned} D^{\alpha_1} x_1 &= -a x_1 + \sqrt{x_1} + \delta_1 \\ D^{\alpha_2} x_2 &= b x_1 - x_2 + x_1^3 + \delta_2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde $\alpha_{1,2}$ son los ordenes de derivación, a y b son los parámetros del sistema. $\delta_{1,2}$ son perturbaciones externas. En particular los ordenes de derivación son conocidos y el parámetro b es variante en el tiempo.

Por otro lado, en el apéndice A se da el análisis de estabilidad del sistema fraccionario (3.8) donde se muestra que este es globalmente Mittag-Leffler acotado por lo que la hipótesis 2 se satisface.

Ahora bien, considere que los estados x_1 y x_2 son conocidos, así:

$$y_1 = x_1 \quad y_2 = x_2 \quad (3.9)$$

Nótese que en ausencia de perturbaciones los parámetros a y b satisfacen la propiedad IAF, esto es:

$$a = \frac{-D^{\alpha_1}y_1 + \sqrt{y_1}}{y_1} = \psi_a(y_1, D^{\alpha_1}y_1) \quad y_1 \neq 0 \quad (3.10)$$

$$b = \frac{D^{\alpha_2}y_2 + y_2 - y_1^3}{y_1} = \psi_b(y_1, y_2, D^{\alpha_2}y_2) \quad y_1 \neq 0 \quad (3.11)$$

Sean las variables auxiliares $\eta_1 = a x_1$ y $\eta_2 = b x_1$, así el sistema fraccionario (3.8) se puede llevar a la forma aumentada (3.5):

$$\begin{aligned} D^{\alpha_1}x_1 &= -\eta_1 + \sqrt{x_1} + \delta_1 \\ D^{\alpha_2}x_2 &= \eta_2 - x_2 + x_1^3 + \delta_2 \\ D^{\alpha_1^*}\eta_1 &= \chi_1(\cdot) \\ D^{\alpha_2^*}\eta_2 &= \chi_2(\cdot) \\ y &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde $\alpha_1^* = \alpha_1$ y $\alpha_2^* = \alpha_2$. Luego las variables auxiliares satisfacen la propiedad IFAO (véase observación 18), esto es:

$$\eta_1 = -D^{\alpha_1^*}y_1 + \sqrt{y_1} \quad (3.13)$$

$$\eta_2 = D^{\alpha_2^*}y_2 + y_2 - y_1^3 \quad (3.14)$$

Por tanto, se pueden diseñar observadores PI fraccionales para η_1 y η_2 . Bajo el mismo procedimiento que en los ejemplos del capítulo 2 se obtienen los observadores para las variables desconocidas, esto es:

$$\begin{cases} D^{\alpha_1} \sigma_1 = -k_{11} \sigma_1 + k_{21} \rho_1 + (k_{11}^2 - k_{21} k_{31}) y_1 + k_{11} \sqrt{y_1} \\ D^{\alpha_1} \rho_1 = -k_{31} \sigma_1 - k_{41} \rho_1 + (k_{11} k_{31} + k_{31} k_{41}) y_1 + k_{31} \sqrt{y_1} \\ \hat{\eta}_1 = \sigma_1 - k_{11} y_1 \end{cases} \quad (3.15)$$

donde k_{11}, k_{21}, k_{31} y k_{41} son constantes positivas con las condiciones iniciales $\sigma_1(0) = \sigma_{1_0}$ y $\rho_1(0) = \rho_{1_0}$.

$$\begin{cases} D^{\alpha_2} \sigma_2 = -k_{12} \sigma_2 + k_{22} \rho_2 + (k_{12} + k_{22} k_{32} - k_{12}^2) y_2 - k_{12} y_1^3 \\ D^{\alpha_2} \rho_2 = -k_{32} \sigma_2 - k_{42} \rho_2 + (k_{32} - k_{12} k_{32} - k_{32} k_{42}) y_2 - k_{32} y_1^3 \\ \hat{\eta}_2 = \sigma_2 + k_{12} y_2 \end{cases} \quad (3.16)$$

donde k_{12}, k_{22}, k_{32} y k_{42} son constantes positivas con las condiciones iniciales $\sigma_2(0) = \sigma_{2_0}$ y $\rho_2(0) = \rho_{2_0}$.

Dado que $\eta_1 = a x_1 = a y_1$ y $\eta_2 = b x_1 = b y_1$ entonces $\hat{\eta}_1 = \hat{a} y_1$ y $\hat{\eta}_2 = \hat{b} y_1$, así:

$$\hat{a} = \frac{\sigma_1 - k_{11} y_1}{y_1} \quad \hat{b} = \frac{\sigma_2 + k_{12} y_2}{y_1} \quad y_1 \neq 0 \quad (3.17)$$

donde \hat{a} es un estimado del parámetro a y \hat{b} es un estimado del parámetro b .

Observación 19. *Nótese que a partir de los observadores (3.15), (3.16) y las relaciones (3.17) se puede obtener un estimado de los parámetros del sistema.*

Observación 20. *Teniendo en cuenta las relaciones (3.17), es fácil ver que pueden existir singularidades, para evitar este problema se puede utilizar una función característica la cual se define como sigue: Para alguna función $h(t)$ se tiene:*

$$\Upsilon = \begin{cases} 1 & \text{if } |h(t)| \leq v \\ 0 & \text{if } |h(t)| > v \end{cases} \quad (3.18)$$

donde $v > 0$ es una constante. Así, Υ se conoce como función característica, además la función definida como:

$$h^*(t) = \Upsilon [v - h(t)] + h(t) \quad (3.19)$$

toma el lugar de $h(t)$.

3.3. Simulación

Se considera el criterio del error relativo para evaluar la precisión del método de identificación paramétrica propuesto. El criterio del error relativo se define como:

$$e_r = \frac{|\xi - \hat{\xi}|}{|\xi|} \quad \xi \neq 0 \quad (3.20)$$

donde $\hat{\xi}$ es un estimado de ξ . Además, se compara el desempeño del método propuesto utilizando un observador P y el observador PI fraccional.

Ejemplo académico

Considere el sistema fraccionario (3.8), cuando los ordenes de derivación toman los valores $\alpha_{1,2} = 0.85$ y el valor de los parámetros a y b son:

$$a = 0.5 \quad b = 1.5 + \frac{4}{\pi} \left[\sin(0.1t) + \frac{1}{3} \sin(0.3t) \right] \quad (3.21)$$

Entonces, si no existen perturbaciones el sistema presenta el comportamiento que se muestra en la figura 3.1. Mientras que, si las perturbaciones toman el valor de $\delta_{1,2} = 0.01 \sin(\pi t)$ la evolución del sistema se ilustra en la figura 3.2. Con las condiciones iniciales $x_{1_0} = x_{2_0} = 1$.

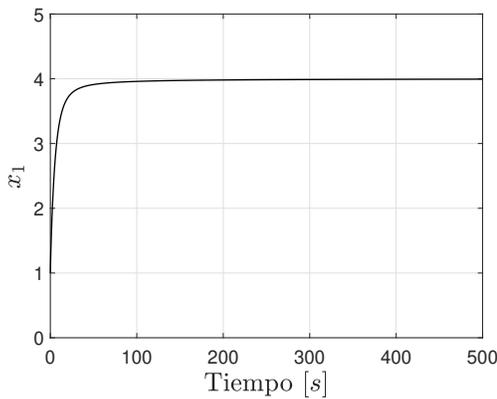
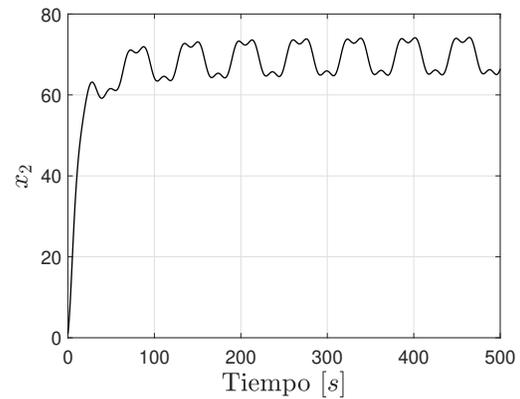
(a) Estado x_1 (b) Estado x_2

Figura 3.1: Comportamiento del sistema fraccionario (3.8) no perturbado

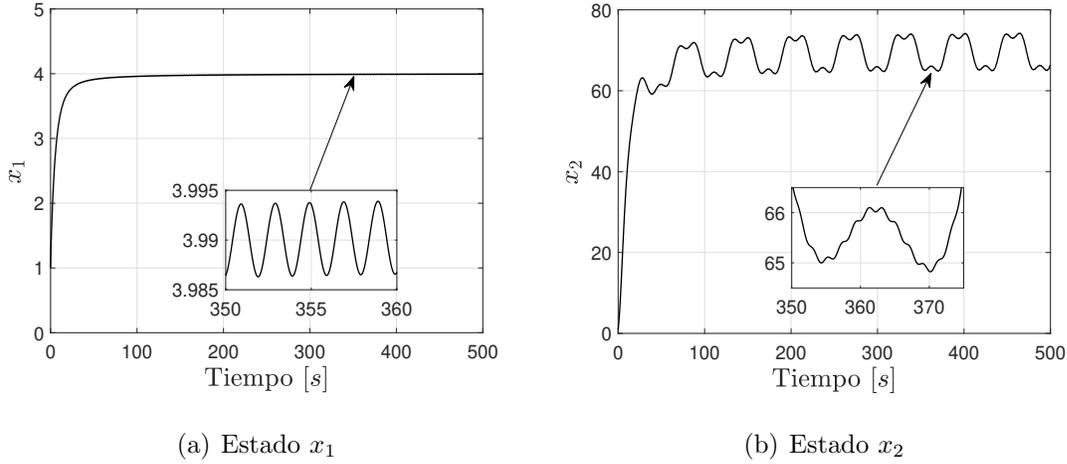


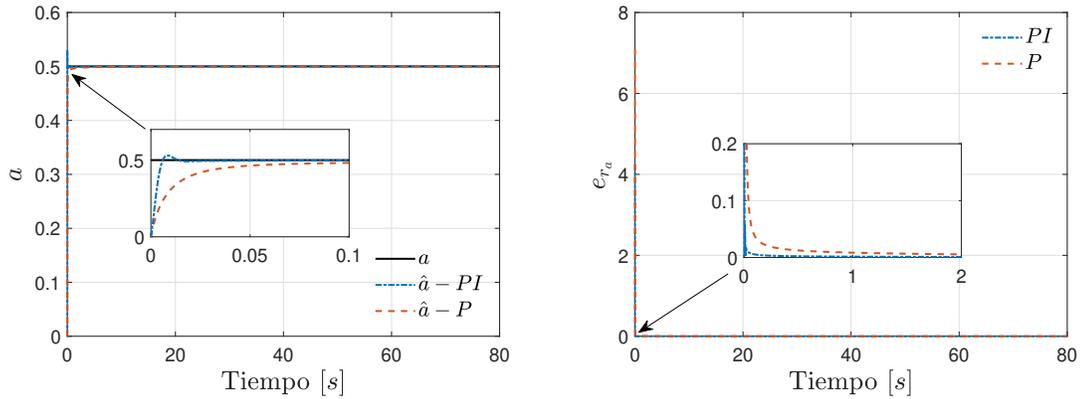
Figura 3.2: Comportamiento del sistema fraccionario (3.8) perturbado

Identificación del parámetro a

Para el observador PI fraccional (3.15) se seleccionan las ganancias tal que $k_{11} = 50$, $k_{21} = k_{31} = 150$ y $k_{41} = 100$ (véase la observación 13), con las condiciones iniciales $\sigma_{10} = k_{11} x_{10}$ y $\rho_{10} = k_{31} x_{10}$. Mientras que, la ganancia para el observador P se iguala a k_{11} con la condición inicial σ_{10} .

En la figura 3.3 (a) se puede observar la convergencia asintótica de \hat{a} al valor real del parámetro en ausencia de perturbaciones, como era de esperarse cuando se utiliza el observador PI fraccional el tiempo de convergencia es menor en comparación con el observador P. Por otro lado, a medida que se incrementa el tiempo de simulación el valor del error relativo disminuye esto se puede ver en la figura 3.3 (b) y en la tabla 3.1. De está forma en ausencia de perturbaciones los resultados muestran que el método de identificación propuesto presenta un buen desempeño.

Ahora bien, si existen perturbaciones externas, su efecto es notorio en la identificación del parámetro, sin embargo aún se obtiene un estimado aceptable (véase figura 3.4 (a)). Al igual que el caso en ausencia de perturbaciones cuando se utiliza el observador PI fraccional la identificación presenta un mejor desempeño que cuando se utiliza un observador P, esto

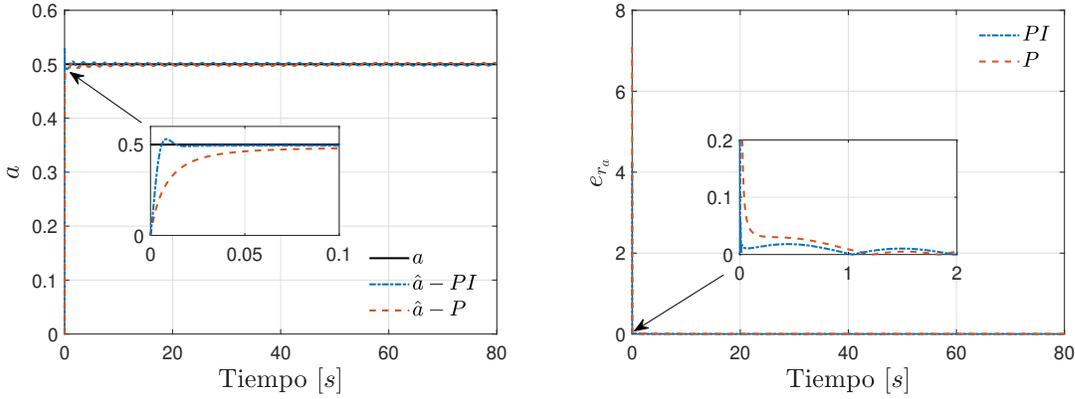


(a) Parámetro a y sus estimados $\hat{a} - PI$ y $\hat{a} - P$ (b) Comparación del error relativo

Figura 3.3: Estimación del parámetro a sin perturbaciones externas

Tabla 3.1: Comparación del error relativo en diferentes instantes de tiempo (sin perturbaciones) parámetro a

	$t = 20$ seg	$t = 40$ seg	$t = 60$ seg	$t = 80$ seg
Observador PI fraccional	8.345×10^{-5}	3.342×10^{-5}	2.090×10^{-5}	1.528×10^{-5}
Observador P	4.604×10^{-4}	1.841×10^{-4}	1.151×10^{-4}	8.413×10^{-5}



(a) Parámetro a y sus estimados $\hat{a} - PI$ y $\hat{a} - P$ (b) Comparación del error relativo

Figura 3.4: Estimación del parámetro a con perturbaciones externas

Tabla 3.2: Comparación del error relativo en diferentes instantes de tiempo (con perturbaciones) parámetro a

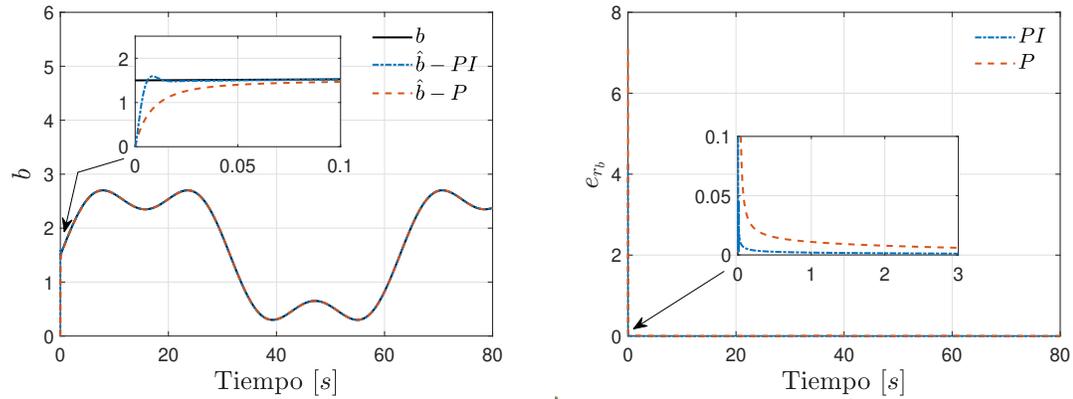
	$t = 20$ seg	$t = 40$ seg	$t = 60$ seg	$t = 80$ seg
Observador PI fraccional	3.356×10^{-5}	1.415×10^{-5}	2.613×10^{-5}	3.152×10^{-5}
Observador P	1.916×10^{-4}	7.201×10^{-5}	1.381×10^{-4}	1.678×10^{-4}

se puede comprobar en la figura 3.4 (b) y en la tabla 3.2.

Identificación del parámetro b

En este caso, las ganancias del observador (3.16) se fijan en $k_{12} = 50$, $k_{22} = k_{32} = 150$ y $k_{42} = 100$ (véase observación 13), con las condiciones iniciales $\sigma_{2_0} = -k_{12} x_{2_0}$ y $\rho_{2_0} = -k_{32} x_{2_0}$. Para el observador proporcional la ganancia se iguala a k_{12} y la condición inicial σ_{2_0} .

Note que el parámetro b es variante en el tiempo, en ausencia de perturbaciones los resultados muestran que utilizando el observador PI fraccional el proceso de identificación

(a) Parámetro b y sus estimados $\hat{b} - PI$ y $\hat{b} - P$

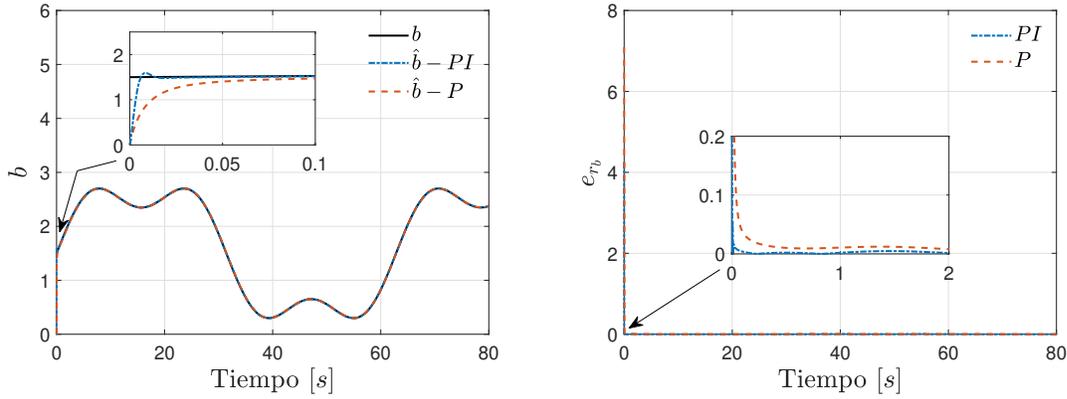
(b) Comparación del error relativo

Figura 3.5: Estimación del parámetro b sin perturbaciones externasTabla 3.3: Comparación del error relativo en diferentes instantes de tiempo (sin perturbaciones) parámetro b

	$t = 20$ seg	$t = 40$ seg	$t = 60$ seg	$t = 80$ seg
Observador PI fraccional	1.966×10^{-4}	3.282×10^{-4}	1.038×10^{-3}	8.091×10^{-5}
Observador P	1.08×10^{-3}	1.891×10^{-3}	5.696×10^{-3}	4.388×10^{-4}

presenta un mejor desempeño que con un observador P, esto se puede ver en la figura 3.5 y en la tabla 3.3.

Ahora bien, cuando existen perturbaciones externas en este caso particular su efecto es menos notorio en comparación con la identificación del parámetro a el cual es constante. En la figura 3.6 (a) se ilustra la precisión del proceso de identificación, de forma similar que en el caso de ausencia de perturbaciones cuando se utiliza un observador PI fraccional se obtiene un mejor desempeño que con el observador proporcional, por otro lado la evolución del error relativo se puede ver en la figura 3.6 (b), mientras que, el valor que toma el error relativo en diferentes instantes de tiempo se pueden observar en la tabla 3.4.



(a) Parámetro b y sus estimados $\hat{b} - PI$ y $\hat{b} - P$ (b) Comparación del error relativo

Figura 3.6: Estimación del parámetro b con perturbaciones externas

Tabla 3.4: Comparación del error relativo en diferentes instantes de tiempo (con perturbaciones) parámetro b

	$t = 20$ seg	$t = 40$ seg	$t = 60$ seg	$t = 80$ seg
Observador PI fraccional	2.076×10^{-4}	2.493×10^{-4}	1.068×10^{-3}	9.189×10^{-5}
Observador P	1.136×10^{-3}	1.475×10^{-3}	5.856×10^{-3}	4.944×10^{-4}

3.4. Conclusión

En este capítulo se trató el problema de identificación paramétrica en sistemas de orden fraccionario. Se introdujo una nueva propiedad que permite representar un parámetro del sistema como una función de la salida, entrada y sus derivadas fraccionarias, esto permite llevar el problema de identificación a un problema de observación de estados.

El método de identificación que se propone presenta dos características importantes:

1. El proceso de identificación paramétrica se realiza en línea.
2. Permite la identificación de parámetros variantes en el tiempo.

Por otro lado, el método de identificación propuesto no requiere aproximaciones de la integral fraccional y tampoco necesita un algoritmo de recurrencia como los métodos de identificación que se han propuesto anteriormente. Finalmente, los resultados obtenidos en la identificación del ejemplo académico muestran la efectividad de este método.

Capítulo 4

Casos particulares

En el capítulo 2 se diseñó un observador fraccional para sistemas de orden fraccionario los cuales pueden ser conmensurados o inconmensurados. El observador es proporcional integral fraccional y presenta ciertas propiedades que ya fueron discutidas anteriormente. Mientras que, para realizar el análisis de convergencia se utilizó el enfoque del acotamiento Mittag-Leffler. Por otro lado, en el capítulo 3 se trató el problema de identificación paramétrica en sistemas fraccionarios llevándolo a un problema de observación de estados, esto a través de una nueva propiedad referente a la identificabilidad algebraica fraccional. Así, en este capítulo se trata el problema de observación de estados y la identificación paramétrica para sistemas de orden entero. Mostrando que estos problemas se pueden resolver considerando la versión de orden entero del observador PI fraccional propuesto en esta tesis. Esto es posible ya que las propiedades IFAO e IAF tienen su versión en sistemas de orden entero la cuales se presentan en los trabajos [44, 45], estas propiedades tienen como base el álgebra diferencial.

4.1. Observación de estados

Considere el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u) + \delta \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{4.1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $u \in \mathbb{R}^q$ es la entrada, $y \in \mathbb{R}^m$ es la salida del sistema, $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función localmente Lipschitz en x y u , $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una función continua con $1 \leq p \leq n$. Mientras que, δ representa las perturbaciones externas las cuales se consideran acotadas, esto es, existe una constante N tal que $\|\delta\| \leq N$ con $0 < N < \infty$.

Ahora, el problema de observación de estados consiste en obtener un estimado de los estados que sean desconocidos solo con la información que se tenga disponible. Para resolver este problema se considera el siguiente método basado en la condición de observabilidad algebraica la cual se enuncia a continuación:

Definición 8. *Una variable de estado x satisface la condición de observabilidad algebraica si esta se puede representar como una función de la salida y entrada (sin considerar perturbaciones) en conjunto con sus derivadas, es decir:*

$$x = \phi(y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(n)}, u, \dot{u}, \ddot{u}, \dots, u^{(n)})\tag{4.2}$$

donde $\phi(\cdot)$ es una función continua.

Considere que el sistema (4.1) se puede separar en dos sistemas dinámicos, tal que:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= \bar{f}(\bar{x}, \bar{u}, \eta) + \bar{\delta} \\ \dot{\eta} &= \Phi(\cdot) \\ y &= h(\bar{x})\end{aligned}\tag{4.3}$$

donde $\bar{x} \in \mathbb{R}^{n-q}$ representan a los estados conocidos y $\eta \in \mathbb{R}^q$ a los estados desconocidos con $1 \leq q < n$, \bar{u} y $\bar{\delta}$ representan a las entradas y perturbaciones que afectan a los estados conocidos, respectivamente. La función $\Phi(\cdot)$ es desconocida.

Observación 21. *La función $\Phi(\cdot)$ contiene la información correspondiente a las perturbaciones externas que afectan a los estados desconocidos.*

Ahora, considere una dinámica desconocida de (4.3):

$$\dot{\eta}_i = \Phi_i(\cdot) \quad (4.4)$$

donde $\eta_i \in \eta$ y $\Phi_i \in \Phi$ con $i \in \{1, \dots, q\}$. Para asegurar existencia y unicidad de solución de la ecuación diferencial ordinaria (4.4) es necesario realizar una hipótesis acerca de la función desconocida $\Phi_i(\cdot)$.

Hipótesis 3. *La función desconocida $\Phi_i(\cdot)$ es acotada, es decir, existe una constante M_1 tal que $|\Phi_i(\cdot)| \leq M_1$ con $0 < M_1 < \infty$.*

Sea el sistema dinámico definido como:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\eta}}_i &= k_1 (\eta_i - \hat{\eta}_i) + k_2 \zeta_i \\ \dot{\zeta}_i &= k_3 (\eta_i - \hat{\eta}_i) - k_4 \zeta_i \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde k_1, k_2, k_3 y k_4 son constantes positivas, $\hat{\eta}_i$ es un estimado de η_i y ζ_i es la parte integral de $\hat{\eta}_i$.

Así, definiendo el error de observación como:

$$\tilde{\eta}_i := \eta_i - \hat{\eta}_i \quad (4.6)$$

Entonces, se puede establecer el siguiente teorema.

Teorema 4. *Considere que el sistema (4.1) se puede llevar a la forma (4.3), Si los estados desconocidos cumplen la condición de observabilidad algebraica y la hipótesis 3 se satisface entonces el sistema (4.5) es un observador proporcional integral (PI) para la dinámica desconocida (4.4) cuyo error de observación es globalmente uniformemente últimamente acotado con cota última:*

$$b_1 = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P_1)}{\lambda_{\min}(P_1)} \frac{2 M_1 \lambda_{\max}(P_1)}{\varrho_1}}$$

donde $0 < \varrho < \lambda_{\min}(Q_1)$, P_1 y Q_1 son matrices simétricas definidas positivas.

Demostración. En virtud de (4.6), el sistema (4.5) se puede escribir como sigue:

$$\dot{\tilde{\eta}}_i = k_1 \tilde{\eta}_i + k_2 \zeta_i \quad (4.7)$$

$$\dot{\zeta}_i = k_3 \tilde{\eta}_i - k_4 \zeta_i \quad (4.8)$$

Ahora bien, la ecuación dinámica del error de observación esta dada por:

$$\dot{\tilde{\eta}}_i = \dot{\eta}_i - \dot{\hat{\eta}}_i \quad (4.9)$$

Sustituyendo (4.4) y (4.7) en (4.9) se obtiene:

$$\dot{\tilde{\eta}}_i = \Phi_i(\cdot) - k_1 \tilde{\eta}_i - k_2 \zeta_i \quad (4.10)$$

De esta forma, la ecuaciones (4.8) y (4.10) se pueden representar en la siguiente forma matricial:

$$\dot{\varepsilon} = K \varepsilon + \aleph \quad (4.11)$$

donde

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \tilde{\eta}_i \\ \zeta_i \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} -k_1 & -k_2 \\ k_3 & -k_4 \end{pmatrix} \quad \aleph = \begin{pmatrix} \Phi_i \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Sea la función candidata de Lyapunov:

$$V(\varepsilon) = \varepsilon^\top P_1 \varepsilon \quad (4.13)$$

donde $0 < P_1^\top = P_1 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Note que $V(\varepsilon) > 0$ y $V(0) = 0$ por lo tanto la función (4.13) es valida.

Derivando $V(\varepsilon)$ a lo largo de las trayectorias del sistema (4.11) se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\varepsilon) &= \varepsilon^\top P_1 \dot{\varepsilon} + \dot{\varepsilon}^\top P_1 \varepsilon \\ &= \varepsilon^\top P_1 (K \varepsilon + \aleph) + (K \varepsilon + \aleph)^\top P_1 \varepsilon \\ &= \varepsilon^\top (P_1 K + K^\top P_1) \varepsilon + 2 \varepsilon^\top P_1 \aleph \end{aligned} \quad (4.14)$$

Puesto que la matriz K es Hurwitz (ver lema 2), entonces existe una matriz $Q_1 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ simétrica definida positiva tal que se satisface la ecuación:

$$P_1 K + K^\top P_1 = -Q_1 \quad (4.15)$$

Entonces (4.14) se puede escribir como:

$$\dot{V}(\varepsilon) = -\varepsilon^\top Q_1 \varepsilon + 2 \varepsilon^\top P_1 \aleph \quad (4.16)$$

Nótese que se puede obtener una cota superior para la ecuación diferencial (4.16). Así, dado que Q_1 satisface la desigualdad de Rayleigh-Ritz se tiene que:

$$\lambda_{\min}(Q_1) \|\varepsilon\|^2 \leq \varepsilon^\top Q_1 \varepsilon \leq \lambda_{\max}(Q_1) \|\varepsilon\|^2 \quad (4.17)$$

Por lo tanto $-\varepsilon^\top Q_1 \varepsilon \leq -\lambda_{\min}(Q_1) \|\varepsilon\|^2$. Mientras que, considerando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene que:

$$|2 \varepsilon^\top P_1 \aleph| \leq 2 \|\varepsilon\| \|P_1\| \|\aleph\| \leq 2 M_1 \lambda_{\max}(P_1) \|\varepsilon\| = \omega_1 \|\varepsilon\| \quad (4.18)$$

donde $\omega_1 = 2 M_1 \lambda_{\max}(P_1)$, de esta forma, se tiene que $\dot{V}(\varepsilon)$ se mantiene acotada por:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\varepsilon) &\leq -\lambda_{\min}(Q_1) \|\varepsilon\|^2 + \omega_1 \|\varepsilon\| \\ &= -\lambda_{\min}(Q_1) \|\varepsilon\|^2 + \omega_1 \|\varepsilon\| + \varrho_1 \|\varepsilon\|^2 - \varrho_1 \|\varepsilon\|^2 \\ &= -(\lambda_{\min}(Q_1) - \varrho_1) \|\varepsilon\|^2 - (\varrho_1 \|\varepsilon\| - \omega_1) \|\varepsilon\| \end{aligned} \quad (4.19)$$

Si, $0 < \varrho_1 < \lambda_{\min}(Q_1)$ y $\varrho_1 \|\varepsilon\| - \omega_1 \geq 0$, es decir:

$$\|\varepsilon\| \geq \frac{\omega_1}{\varrho_1} := \mu_1 \quad (4.20)$$

Entonces:

$$\dot{V}(\varepsilon) \leq -(\lambda_{\min}(Q_1) - \varrho_1) \|\varepsilon\|^2 \quad \forall \|\varepsilon\| \geq \mu_1 \quad (4.21)$$

Por lo tanto, las soluciones del sistema (4.11) son globalmente uniformemente últimamente acotadas, por otro lado, dado que la función de Lyapunov satisface la desigualdad de Rayleigh-Ritz:

$$\lambda_{\max}(P_1) \|\varepsilon\|^2 \leq V(\varepsilon) \leq \lambda_{\max}(P_1) \|\varepsilon\|^2 \quad (4.22)$$

Se tiene que $\alpha_1 = \lambda_{\min}(P_1) r^2$ y $\alpha_2 = \lambda_{\max}(P_1) r^2$, de esta forma, la cota ultima es:

$$b_1 = \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu_1)) = \sqrt{\frac{\alpha_2(\mu_1)}{\lambda_{\min}(P_1)}} = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P_1) \mu_1^2}{\lambda_{\min}(P_1)}} = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P_1)}{\lambda_{\min}(P_1)}} \frac{2 M_1 \lambda_{\max}(P_1)}{\varrho_1} \quad (4.23)$$

Luego el teorema queda demostrado. \square

Observación 22. *Para el caso con orden de derivación entero, la observación 11 se mantiene y la observación 12 se mantiene considerando la condición de observabilidad algebraica en lugar de la propiedad IFAO*

Observación 23. *Al igual que la observación 13, es posible obtener un criterio de elección para las ganancias del observador PI (4.5). Fijando $P_1 = I$, entonces la ecuación (4.15) toma la forma:*

$$K + K^\top = -Q_1 \quad \Rightarrow \quad Q_1 = \begin{pmatrix} 2k_1 & k_2 - k_3 \\ k_2 - k_3 & 2k_4 \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

Por lo que si $k_2 = k_3$ y $k_1 < k_4$ entonces:

$$\|\varepsilon\| \leq \frac{2M}{\varrho_1} \quad (4.25)$$

donde $0 < \varrho_1 < 2k_1$. Eligiendo $\varrho_1 = k_1$ se obtiene:

$$\|\varepsilon\| \leq \frac{2M}{k_1} \quad (4.26)$$

4.2. Identificación paramétrica

Se considera el sistema definido como:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, \xi) + \delta \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (4.27)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $u \in \mathbb{R}^q$ es la entrada del sistema, $y \in \mathbb{R}^m$ es la salida del sistema, $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función localmente Lipschitz en x , u y ξ , $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una función continua con $1 \leq p \leq n$. El conjunto de parámetros se representa por $\xi \in \mathbb{R}^l$ los cuales pueden ser variantes en el tiempo. Mientras que, δ representa las perturbaciones externas las cuales se consideran acotadas, esto es, existe una constante N tal que $\|\delta\| \leq N$ con $0 < N < \infty$.

El problema de identificación paramétrica consiste en obtener un estimado de los elementos de ξ solo con la información que se encuentra disponible. Así, considere la siguiente definición:

Definición 9. *Un parámetro ξ se dice algebraicamente identificable, si este es algebraico sobre $k \langle u, y \rangle$ ¹.*

Considere una nueva variable auxiliar la cual puede depender de los estados conocidos y de un parámetro o solo de un parámetro, de esta forma, incluyendo el sistema (4.27) junto con el conjunto de variables auxiliares se puede considerar el sistema aumentado siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, \eta) + \delta \\ \dot{\eta} &= \chi(\cdot) \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{4.28}$$

donde $\eta \in \mathbb{R}^l$ es el conjunto de variables auxiliares. La función $\chi(\cdot)$ es desconocida.

Note que las variables auxiliares se pueden considerar como estados extra por tanto basta con observar dichos estados para obtener un estimado de los parámetros asociados a cada variable auxiliar, así, el problema de identificación paramétrica se lleva a un problema de observación de estados.

Observación 24. *Si el parámetro ξ_i es algebraicamente identificable entonces su correspondiente variable auxiliar η_i satisface la condición de observabilidad algebraica, con $i \in \{1, \dots, l\}$.*

Considere una dinámica desconocida del sistema aumentado (4.28):

$$\dot{\eta}_i = \chi_i(\cdot) \tag{4.29}$$

donde $\eta_i \subset \eta$ y $\chi_i(\cdot) \subset \chi(\cdot)$ es una función desconocida con $i \in \{1, \dots, l\}$.

¹ $k \langle u, y \rangle$ denota al campo diferencial generado por k, u, y y sus cantidades diferenciales.

Nótese que es necesario realizar una hipótesis sobre la función desconocida $\chi_i(\cdot)$ para asegurar la existencia y unicidad de solución de la ecuación diferencial (4.29).

Hipótesis 4. *La función $\chi_i(\cdot)$ es acotada, es decir, existe una constante W_1 tal que $|\chi_i(\cdot)| \leq W_1$ con $0 < W_1 < \infty$.*

Teniendo en cuenta la observación 24 y la hipótesis 4 entonces se puede diseñar un observador PI como el definido por (4.5), para obtener un estimado de la variable η_i lo que implica que también se obtiene un estimado del parámetro ξ_i . Luego el problema de identificación paramétrica queda resuelto.

4.3. Ejemplo

Se considera como ejemplo numérico un sistema caótico con una estructura particular de tal manera que permita realizar la observación de estados y la identificación paramétrica de forma simultánea. Como se mencionó anteriormente la principal razón de tomar un sistema caótico es que este mantiene sus trayectorias acotadas en todo momento, por tanto, las hipótesis 3 y 4 se satisfacen.

4.3.1. Oscilador Duffing

Considere el oscilador Duffing:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \delta_1 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_1^3 - a x_2 + b \cos(ct) + \delta_2\end{aligned}\tag{4.30}$$

donde a, b y c son los parámetros del sistema, los términos $\delta_{1,2}$ representan las perturbaciones externas.

Observación de estados

Considere que se conoce el estado x_1 , mientras que el estado x_2 es desconocido, así:

$$y = x_1 \quad (4.31)$$

De esta forma, si el sistema (4.30) no es perturbado, el estado x_2 satisface la condición de observabilidad algebraica, es decir:

$$x_2 = \dot{y} = \phi_2(\dot{y}) \quad (4.32)$$

Nótese que el sistema (4.30) se puede llevar a la forma (4.3), esto es:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= \eta_2 + \bar{\delta}_1 \\ \dot{\eta}_2 &= \Phi_2(\cdot) \\ y &= \bar{x}_1 \end{aligned} \quad (4.33)$$

donde $\bar{x}_1 = x_1$, $\eta_2 = x_2$, $\bar{\delta}_1 = \delta_1$.

Sea el observador PI definido como:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\eta}}_2 &= k_{12}(\eta_2 - \hat{\eta}_2) + k_{22}\zeta_2 \\ \dot{\zeta}_2 &= k_{32}(\eta_2 - \hat{\eta}_2) - k_{42}\zeta_2 \end{aligned} \quad (4.34)$$

donde k_{12} , k_{22} , k_{32} y k_{42} son constantes positivas con las condiciones iniciales $\eta_2(0) = \eta_{20}$ y $\zeta_2(0) = \zeta_{20}$.

Sustituyendo (4.32) en (4.34), se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\eta}}_2 &= k_{12}\dot{y} - k_{12}\hat{\eta}_2 + k_{22}\zeta_2 \\ \dot{\zeta}_2 &= k_{32}\dot{y} - k_{32}\hat{\eta}_2 - k_{42}\zeta_2 \end{aligned} \quad (4.35)$$

Para quitar la dependencia de \dot{y} en (4.35) se considera los siguientes cambios de variables:

$$\sigma_2 = \hat{\eta}_2 - k_{12}y \quad (4.36)$$

$$\rho_2 = \zeta_2 - k_{32}y \quad (4.37)$$

Sustituyendo (4.36), (4.37) y sus derivadas en (4.35), además de realizar manipulaciones algebraicas, se obtiene el observador para el estado desconocido x_2 :

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_2 = -k_{12} \sigma_2 + k_{22} \rho_2 + (k_{22} k_{32} - k_{12}^2) y \\ \dot{\rho}_2 = -k_{32} \sigma_2 - k_{42} \rho_2 + (-k_{12} k_{32} - k_{32} k_{42}) y \\ \hat{\eta}_2 = \sigma_2 + k_{12} y \end{cases} \quad (4.38)$$

con las condiciones iniciales $\sigma_2(0) = \sigma_{2_0}$ y $\rho_2(0) = \rho_{2_0}$.

Identificación paramétrica

Nótese que a través del observador (4.38) se puede considerar como conocido al estado $\hat{\eta}_2 \approx x_2$, de esta forma, $y_2 = x_2$. Ahora bien, considere que se conoce previamente el valor del parámetro a , mientras que, los parámetros b y c son desconocidos.

Por otro lado, note que los parámetros desconocidos están acoplados por la función coseno, así, se pueden considerar como un solo parámetro el cual se define como $\xi := b \cos(ct)$. De esta forma, en ausencia de perturbaciones, el nuevo parámetro ξ es algebraicamente identificable, es decir:

$$\xi = \dot{y}_2 - y_1 + y_1^3 + a y_2 \quad (4.39)$$

donde $y_1 = x_1$.

Sea la variable auxiliar $\eta_1 = \xi$, así el sistema (4.30) se puede llevar a la forma aumentada (4.28), esto es:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \delta_1 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_1^3 - a x_2 + \eta_1 + \delta_2 \\ \dot{\eta}_1 &= \chi_1(\cdot) \\ y &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.40)$$

Dado que ξ satisface la identificabilidad algebraica entonces η_1 cumple la condición de observabilidad algebraica (véase observación 24), es decir:

$$\eta_1 = \dot{y}_2 - y_1 + y_1^3 + a y_2 = \phi_1(y_1, y_2, \dot{y}_2) \quad (4.41)$$

Por lo tanto, se puede diseñar un observador PI para la variable auxiliar η_1 , bajo la misma metodología que se utilizó para diseñar el observador de x_2 , luego, se obtiene el observador para η_1 :

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_1 = -k_{11} \sigma_1 + k_{21} \rho_1 + (k_{11} a + k_{21} k_{31} - k_{11}^2) y_2 - k_{11} y_1 + k_{11} y_1^3 \\ \dot{\rho}_1 = -k_{31} \sigma_1 - k_{41} \rho_1 + (k_{31} a - k_{11} k_{31} - k_{31} k_{41}) y_2 - k_{31} y_1 + k_{31} y_1^3 \\ \hat{\eta}_1 = \sigma_1 + k_{11} y_2 \end{cases} \quad (4.42)$$

donde k_{11}, k_{21}, k_{31} y k_{41} son constantes positivas, con las condiciones iniciales $\sigma_1(0) = \sigma_{10}$ y $\rho_1(0) = \rho_{10}$. Puesto que $\eta_1 = \xi$ entonces $\hat{\eta}_1 = \hat{\xi}$.

4.4. Simulación

Para evaluar la efectividad del observador PI se realiza la comparación con un observador proporcional, mientras que, el método de identificación también se compara utilizando el observador PI y un observador proporcional. En ambos casos se considera como criterio de desempeño la integral de error cuadrático el cual se define en (2.43).

Teniendo en cuenta el sistema (4.30), si los parámetros toman los valores $a = 0.15$, $b = 0.3$ y $c = 1$ y las perturbaciones son nulas, es decir, $\delta_{1,2} = 0$, entonces el sistema presenta un atractor caótico el cual se ilustra en la figura 4.1 (a). Por otro lado, cuando las perturbaciones toman el valor de $\delta_{1,2} = 0.001 \sin(\pi t)$, entonces la evolución del oscilador Duffing se muestra en la figura 4.1 (b). Con las condiciones iniciales $x_{10} = 0.21$ y $x_{20} = 0.13$.

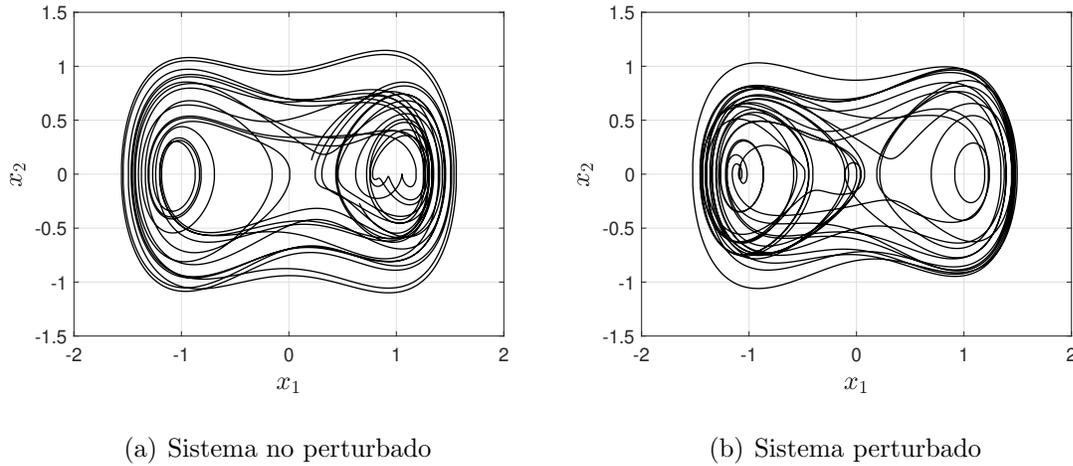


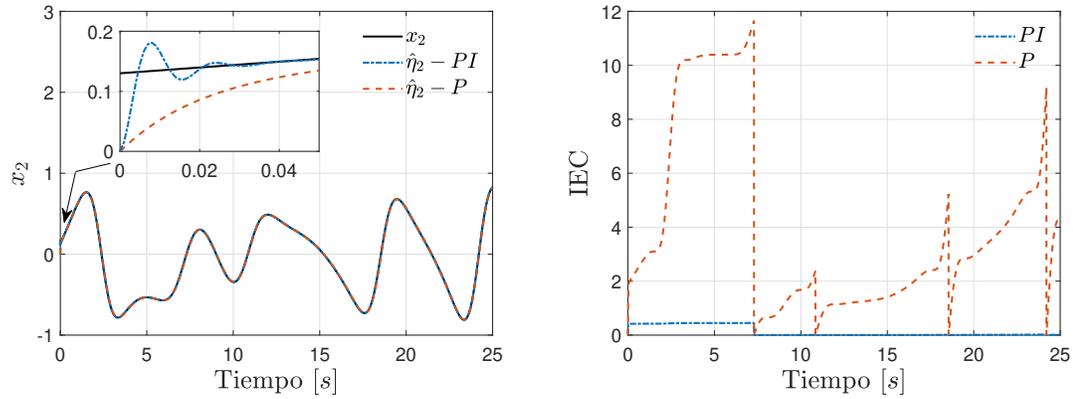
Figura 4.1: Atractor caótico del oscilador Duffing

Observación del estado x_2

Considerando el observador (4.38), las ganancias se fijan en $k_{12} = 50$, $k_{22} = k_{32} = 400$ y $k_{42} = 200$ (ver observación 23) con las condiciones iniciales $\sigma_{2_0} = -k_{12} x_{1_0}$ y $\rho_{2_0} = -k_{32} x_{1_0}$. Para el observador proporcional se fija su ganancia igual a k_{12} con la condición inicial σ_{2_0} .

En ausencia de perturbaciones externas, el observador PI exhibe un mejor desempeño que el observador P al igual que el caso fraccional, una de las ventajas más notorias que presenta el observador PI es el tiempo de convergencia asintótica, en el caso particular es menor a los 0.05 segundos, lo cual se ilustra en la figura 4.2 (a). También se puede comprobar en el valor que toma el IEC a lo largo del tiempo (véase figura 4.2 (b) y en la tabla 4.1).

Por otro lado, cuando existen perturbaciones el observador PI sigue presentando un mejor desempeño en comparación con el observador P, en este caso el efecto de las perturbaciones se ve reflejado en el valor del IEC, sin embargo al ser un sistema caótico este cambia drásticamente su evolución cuando existen perturbaciones (ver figura 4.1). Estos resultados se pueden ver en la figura 4.3 y en la tabla 4.2.



(a) Estado $\eta_2 = x_2$ y sus estimados $\hat{\eta}_2 - PI$ y $\hat{\eta}_2 - P$ y (b) Comparación de IEC con factor de escalamiento $\zeta = 100$

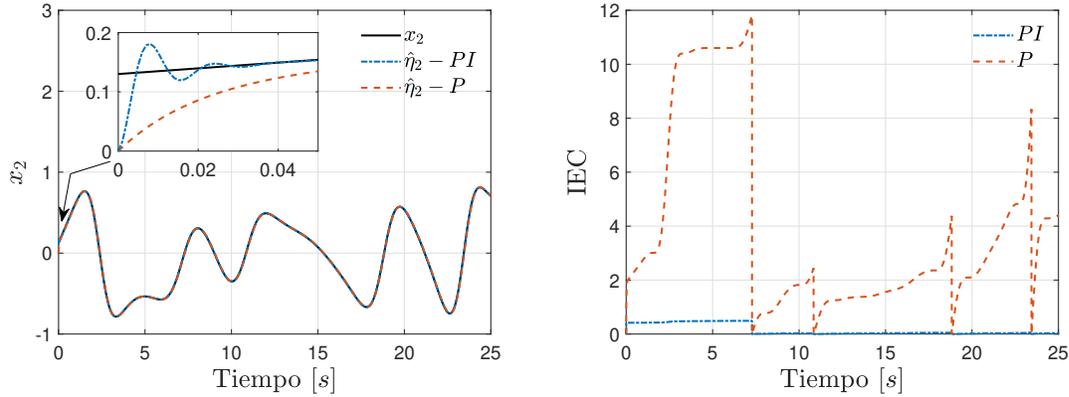
Figura 4.2: Observación de x_2 sin perturbaciones externas

Tabla 4.1: Comparación del IEC en diferentes instantes de tiempo (sin perturbaciones) estado η_2

	$t = 5$ seg	$t = 10$ seg	$t = 15$ seg	$t = 20$ seg
Observador PI	0.447	0.0056	0.0047	0.0097
Observador P	10.391	1.6743	1.412	2.959

Tabla 4.2: Comparación del IEC en diferentes instantes de tiempo (con perturbaciones) estado η_2

	$t = 5$ seg	$t = 10$ seg	$t = 15$ seg	$t = 20$ seg
Observador PI	0.483	0.025	0.032	0.015
Observador P	10.602	1.821	1.558	2.113



(a) Estado $\eta_2 = x_2$ y sus estimados $\hat{\eta}_2 - PI$ y $\hat{\eta}_2 - P$ y (b) Comparación de IEC con factor de escalamiento $\zeta = 100$

Figura 4.3: Observación de x_2 con perturbaciones externas

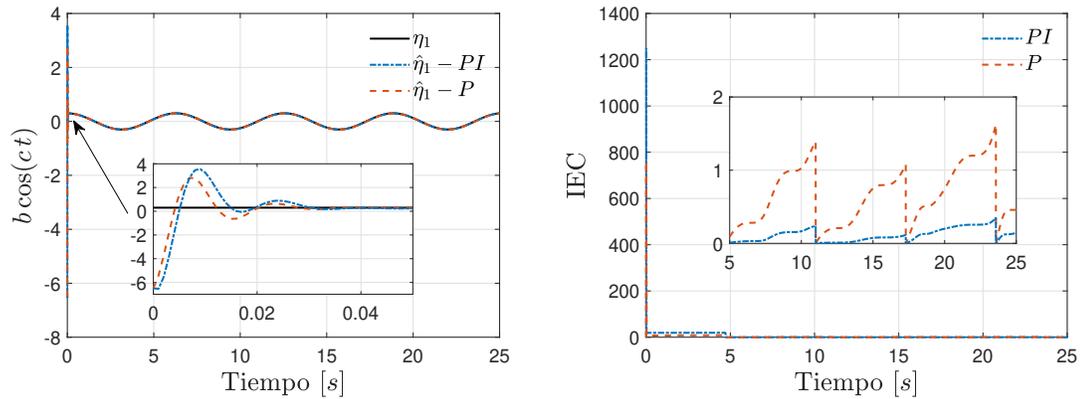
Identificación del término $b \cos(ct)$

Nótese que para realizar la identificación del término $b \cos(ct)$ es necesario contar con el estado x_2 el cual en principio es desconocido, sin embargo, dados los resultados de la observación del estado x_2 , se puede utilizar el estimado que otorga el observador PI para realizar dicha estimación.

Ahora bien, para el observador (4.42) se seleccionan las ganancias $k_{11} = 50$, $k_{21} = k_{31} = k_{41} = 100$ (véase observación 23), con las condiciones iniciales $\sigma_{10} = -k_{11} x_{20}$ y $\rho_{10} = -k_{31} x_{20}$. Mientras que, para el observador proporcional se selecciona la ganancia igual a k_{11} y la condición inicial σ_{10} .

En la figura 4.4 se muestran los resultados del proceso de identificación del parámetro ξ sin perturbaciones externas, note que aún cuando se está utilizando un estimado del estado x_2 se puede obtener un buen estimado de ξ , como era de esperarse se presentan mejores resultados utilizando un observador PI. Por otro lado, los valores que toma el IEC a lo largo del tiempo se pueden observar en la tabla 4.3.

Ahora bien, cuando existen perturbaciones externas los resultados se mantienen, es decir, se puede obtener un estimado del parámetro ξ , presentando un mejor desempeño

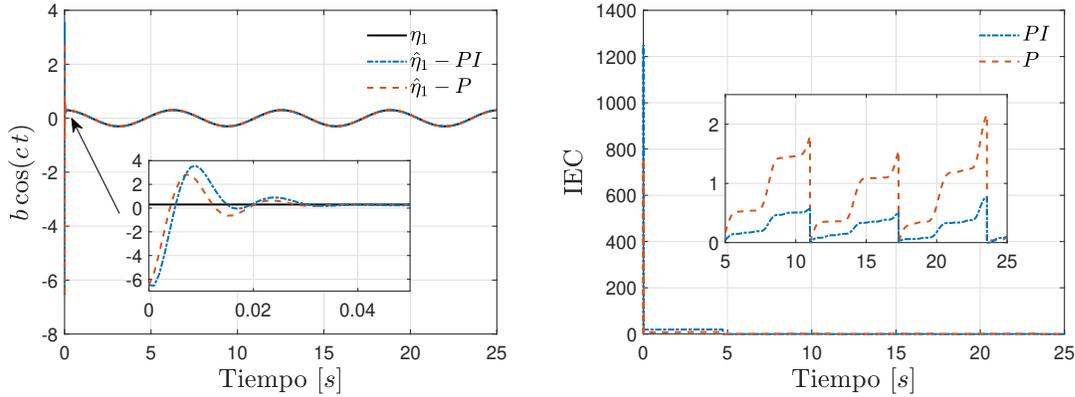


(a) Variable auxiliar $\eta_1 = \xi$ y sus estimados $\hat{\eta}_1 - PI$ y $\hat{\eta}_1 - P$ (b) Comparación de IEC con factor de escalamiento $\zeta = 100$

Figura 4.4: Observación de la variable auxiliar η_1 sin perturbaciones externas

Tabla 4.3: Comparación del IEC en diferentes instantes de tiempo (sin perturbaciones) parámetro ξ

	$t = 5$ seg	$t = 10$ seg	$t = 15$ seg	$t = 20$ seg
Observador PI	0.0083	0.165	0.0745	0.2
Observador P	0.091	1.027	0.752	0.755



(a) Variable auxiliar $\eta_1 = \xi$ y sus estimados $\hat{\eta}_1 - PI$ y $\hat{\eta}_1 - P$ (b) Comparación de IEC con factor de escalamiento $\zeta = 100$

Figura 4.5: Observación de la variable auxiliar η_1 con perturbaciones externas

Tabla 4.4: Comparación del IEC en diferentes instantes de tiempo (con perturbaciones) parámetro ξ

	$t = 5$ seg	$t = 10$ seg	$t = 15$ seg	$t = 20$ seg
Observador PI	0.045	0.507	0.336	0.18
Observador P	0.181	1.457	1.088	0.634

cuando el método de identificación utiliza el observador PI que el observador P. Por otro lado, el efecto de las perturbaciones es notorio en el valor del IEC. Esto se puede ver en la figura 4.5 y en la tabla 4.4.

4.5. Conclusión

En este capítulo se mostró que es posible resolver los problemas de observación de estados e identificación paramétrica en sistemas de orden entero, considerando la versión entera del observador PI fraccional que se propuso en el capítulo 2.

Las propiedades que presenta el observador PI fraccional se presentan de igual forma en

la versión con orden entero, lo mismo sucede con el método de identificación paramétrica propuesto.

Por otro lado los resultados de la simulación muestran que se puede realizar la observación de estados y la identificación paramétrica de forma simultánea siempre y cuando se satisfagan las condiciones pertinentes y la estructura del sistema lo permita, esto también se puede realizar con los sistemas fraccionarios.

Conclusión general

Los sistemas fraccionarios actualmente han ganado un gran interés de investigación ya que su evolución se acopla de mejor forma a la dinámica real de un sistema físico. El análisis y control de estos sistemas presentan un gran reto debido a las herramientas matemáticas necesarias, dicho esto, no es de sorprenderse que problemas tales como la observación de estados y la identificación paramétrica de igual forma presenten complicaciones al momento de analizarlos.

En esta tesis, como primer punto se da una demostración rigurosa del acotamiento Mittag-Leffler el cual es un método de análisis de estabilidad en sistemas fraccionarios. La principal ventaja de este enfoque es que permite analizar la estabilidad en sistemas fraccionarios perturbados.

Seguido de esto, se propuso un observador proporcional integral fraccional el cual es de modelo libre, es de orden reducido y es robusto ante perturbaciones externas. más aún, para cierto tipo de sistemas también puede ser robusto ante incertidumbres paramétricas, además, puede ser diseñado para sistemas conmensurados e inconmensurados. Para realizar el análisis de convergencia del error de observación se utilizó precisamente el enfoque del acotamiento Mittag-Leffler probando así, que el error de observación es globalmente Mittag-Leffler acotado lo cual implica que es uniformemente últimamente acotado. Además, el diseño de un observador PI fraccional es simple y no requiere utilizar algún algoritmo computacional para obtener las ganancias. Los resultados de las simulaciones numéricas muestran la efectividad del observador fraccional propuesto.

Por otro lado, se propuso un método de identificación paramétrica basado en la observación de estados, en particular se introdujo una nueva propiedad referente a la identificabilidad algebraica fraccional la cual permite representar a los parámetros del sistema como una función de la información que se encuentra disponible del sistema. Así, el problema identificación paramétrica se puede llevar a un problema de observación de estados, por lo tanto el observador PI fraccional puede ser utilizado para encontrar un estimado de los parámetros de un sistema fraccionario. El método de identificación paramétrica otorga un proceso de identificación en línea, es decir, se obtiene un estimado de los parámetros mientras que el sistema se encuentra en funcionamiento, esto permite estimar parámetros que son variantes en el tiempo. Para mostrar la precisión del método de identificación propuesto, se considero un sistema fraccionario variante en el tiempo, los resultados mostraron ser satisfactorios de acuerdo con el índice de desempeño utilizado (véanse las tablas 3.1, 3.2, 3.3 y 3.4).

Además, se demostró que la versión de orden entero del observador PI fraccional puede resolver los problemas de observación de estado e identificación paramétrica en sistemas de orden entero, bajo los esquemas que se explicaron en esta tesis.

Finalmente, el observador que se propuso, es muy versátil debido al esquema de observación que se explicó en este trabajo, esto es, el observador PI fraccional o su versión de orden entero pueden ser utilizados en el esquema de sincronización del caos, en las comunicaciones seguras y en la detección de fallas de sistemas fraccionarios o sistemas de orden entero, respectivamente, siempre que se satisfagan las condiciones pertinentes

Trabajo futuro

Al escribir esta tesis se encontraron diversas ideas para desarrollar:

1. Tratar el problema de la observación de estados en sistemas fraccionarios considerando la existencia de ruido de medición aditivo en la salida, bajo el esquema

- de observación presentado en esta tesis o bien considerando observadores que requieran una copia del sistema.
2. Realizar la estimación del orden de derivación en sistemas fraccionarios de forma simple, utilizando el método de identificación propuesto en conjunto con algún algoritmo que permita obtener un estimado de los ordenes de derivación.
 3. En vista del acotamiento Mittag-Leffler, se pueden desarrollar leyes de control o bien observadores de estado para sistemas fraccionarios bajo el concepto de los elipsoides atractivos.

Apéndice A

Análisis de estabilidad del ejemplo académico

En esta sección se demuestra que las trayectorias del ejemplo académico (3.8) son globalmente Mittag-Leffler acotadas, implicando así, que la hipótesis 2 se cumpla.

Considere el sistema fraccionario definido como sigue:

$$\begin{aligned} D^{\alpha_1} x_1 &= -a x_1 + \sqrt{x_1} \\ D^{\alpha_2} x_2 &= b x_1 - x_2 + x_1^3 \end{aligned} \tag{A.1}$$

donde $\alpha_{1,2} = 0.85$ y los parámetros son:

$$a = 0.5 \quad b = 1.5 + \frac{4}{\pi} \left[\sin(0.1 t) + \frac{1}{3} \sin(0.3 t) \right] \tag{A.2}$$

Nótese que el sistema (A.1) se puede escribir en la forma matricial:

$$D^\alpha x = A x + \Gamma \tag{A.3}$$

donde $\alpha = \alpha_{1,2}$ y

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \sqrt{x_1} \\ b x_1 + x_1^3 \end{pmatrix} \tag{A.4}$$

Sea la función cuadrática:

$$V(x) = x^\top P_0 x \quad (\text{A.5})$$

con $0 < P_0^\top = P_0 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Teniendo en cuenta el sistema fraccionario (A.3) y el lema 1 se sigue:

$$\begin{aligned} D^\alpha V(x) &\leq x^\top P_0 D^\alpha x + (D^\alpha x)^\top P_0 x \\ &= x^\top P_0 (Ax + \Gamma) + (x^\top A^\top + \Gamma^\top) P_0 x \\ &= x^\top (P_0 A + A^\top P_0)x + 2x^\top P_0 \Gamma \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Dado que la matriz A es Hurwitz entonces se satisface la ecuación:

$$P_0 A + A^\top P_0 = -\varkappa I \quad (\text{A.7})$$

donde \varkappa es una constante positiva y la matriz I es la matriz identidad de dimensión dos. De esta forma se tiene que:

$$D^\alpha V(x) \leq -\varkappa \|x\|^2 + 2x^\top P_0 \Gamma \quad (\text{A.8})$$

Por otro lado, utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se sigue:

$$|2x^\top P_0 \Gamma| \leq 2\nu \|x\| \quad (\text{A.9})$$

donde $\nu = \lambda_{\text{máx}}(P_0) \|\Gamma\|$. Por tanto (A.8) se puede escribir como:

$$\begin{aligned} D^\alpha V(x) &\leq -\varkappa \|x\|^2 + 2\nu \|x\| \\ &= -\varkappa \|x\|^2 + \|x\|^2 - \|x\|^2 + 2\nu \|x\| \\ &= -(\varkappa - 1) \|x\|^2 - \|x\|^2 + 2\nu \|x\| \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Utilizando el hecho de que:

$$-d_1^2 + 2d_1 d_2 \leq d_2^2$$

con $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$, entonces se tiene:

$$D^\alpha V(x) \leq -(\varkappa - 1) \|x\|^2 + \nu^2 \quad (\text{A.11})$$

Dado que la función cuadrática (A.5) satisface la desigualdad de Rayleigh-Ritz y considerando el teorema 2, entonces:

$$\|x\| \leq \left[\frac{1}{\lambda_{\min}(P_0)} \left(\lambda_{\max}(P_0) \|x_0\|^2 - \frac{\lambda_{\max}(P_0)}{\varkappa - 1} \nu^2 \right) E_\alpha \left(-\frac{\varkappa - 1}{\lambda_{\max}(P_0)} t^\alpha \right) + \frac{\lambda_{\max}(P_0)}{\lambda_{\min}(P_0) (\varkappa - 1)} \nu^2 \right]^{1/2} \quad (\text{A.12})$$

donde x_0 es la condición inicial del sistema (A.3). Por tanto las trayectorias del sistema (A.3) son globalmente Mittag-Leffler acotadas.

Por otro lado, si $\varkappa > 1$, entonces conforme $t \rightarrow \infty$ se obtiene:

$$\|x\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P_0)}{\lambda_{\min}(P_0)} \frac{\lambda_{\max}(P_0)}{\sqrt{\varkappa - 1}}} \|\Gamma\| \quad (\text{A.13})$$

Ahora, falta probar que Γ si tiene una cota superior, esto es:

$$\|\Gamma\| = \sqrt{x_1 + (b x_1 + x_1^3)^2} \leq \sqrt{x_1} + |b x_1 + x_1^3| \leq |\sqrt{x_1}| + |b x_1 + x_1^3| \quad (\text{A.14})$$

Utilizando la desigualdad del triangulo y la desigualdad de Cauchy-Schwarz se sigue:

$$\|\Gamma\| \leq |\sqrt{x_1}| + |b| |x_1| + |x_1^3| \quad (\text{A.15})$$

Nótese que el parámetro b presenta maximos globales en $\bar{b} = 2.70042$, entonces:

$$\|\Gamma\| \leq |\sqrt{x_1}| + \bar{b} |x_1| + |x_1^3| \quad (\text{A.16})$$

Por otro lado, es fácil ver que la dinámica del estado x_1 no depende de x_2 , por tanto es posible obtener la solución analítica de x_1 , sin embargo, encontrar la solución analítica de una ecuación diferencial fraccionaria cuando esta es no lineal no es simple, se han propuesto métodos de solución los cuales transforma la ecuación diferencial fraccional en una ecuación diferencial ordinaria¹, sin embargo se puede considerar el valor limite, es decir, cuando el orden de derivación es entero, entonces considere la ecuación diferencial de orden entero siguiente:

$$\dot{x}_1 = -a x_1 + \sqrt{x_1} \quad (\text{A.17})$$

¹Por ejemplo en los trabajos [46, 47] los autores proponen un método de transformación fraccional compleja

Cuya solución se puede obtener como sigue:

$$\frac{\dot{x}_1}{-a x_1 + \sqrt{x_1}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_0^t \frac{\dot{x}_1(\tau)}{-a x_1(\tau) + \sqrt{x_1(\tau)}} = \int_0^t d\tau$$

Sea el cambio de variable $z(\tau) = \sqrt{x_1(\tau)} \Rightarrow \dot{z}(\tau) = \dot{x}_1(\tau)/2\sqrt{x_1(\tau)}$, luego:

$$2 \int_0^t \frac{z(\tau) \dot{z}(\tau)}{-a z^2(\tau) + z(\tau)} = t \quad \Rightarrow \quad 2 \int_0^t \frac{\dot{z}(\tau)}{-a z(\tau) + 1} = t$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{2}{a} \int_0^t \frac{-a \dot{z}(\tau)}{-a z(\tau) + 1} = t \quad \Rightarrow \quad -\frac{2}{a} \ln[-a z(\tau) + 1] \Big|_0^t = t$$

$$\Rightarrow \quad \ln[-a z(t) + 1] - \ln[-a z(0) + 1] = -\frac{a}{2} t \quad \Rightarrow \quad \ln \left[\frac{-a z(t) + 1}{-a z(0) + 1} \right] = -\frac{a}{2} t$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-a z(t) + 1}{-a z(0) + 1} = e^{-\frac{a}{2} t} \quad \Rightarrow \quad -a z(t) + 1 = e^{-\frac{a}{2} t} [-a z(0) + 1]$$

$$\Rightarrow \quad z(t) = -\frac{1}{a} e^{-\frac{a}{2} t} [-a z(0) + 1] + \frac{1}{a} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x_1(t)} = -\frac{1}{a} e^{-\frac{a}{2} t} [-a \sqrt{x_{1_0}} + 1] + \frac{1}{a}$$

Por tanto, la trayectoria de x_1 cuando el orden de derivación es $\alpha_1 = 1$ se mantiene acotada, esto es:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = \frac{1}{a^2} \quad (\text{A.18})$$

En la figura A.1 se puede ver la trayectoria del estado x_1 con diferentes ordenes de derivación considerando como condición inicial $x_{1_0} = 1$.

De esta forma, Γ se mantiene acotada por:

$$\|\Gamma\| \leq \frac{1}{a} + \frac{\bar{b}}{a^2} + \frac{1}{a^6} \quad (\text{A.19})$$

Entonces, las trayectorias del sistema fraccionario (A.1) se mantienen globalmente Mittag-Leffler acotadas.

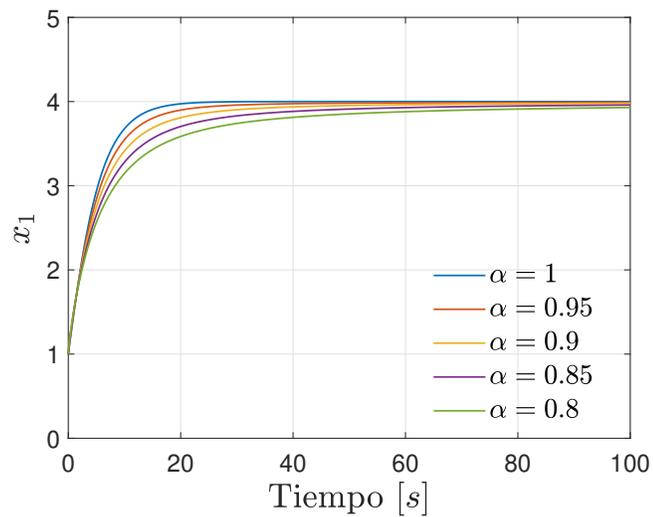


Figura A.1: Evolución del estado x_1 con diferentes ordenes de derivación

Bibliografía

- [1] M. Ichise, Y. Nagayanagi, and T. Kojima. An analog simulation of non-integer order transfer functions for analysis of electrode processes. *Journal of Electroanalytical Chemistry and Interfacial Electrochemistry*, 33(2):253–265, 1971.
- [2] S.B. Skaar, A.N. Michel, and R.K. Miller. Stability of viscoelastic control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33(4):348–357, 1988.
- [3] Richard L. Magin. Fractional calculus models of complex dynamics in biological tissues. *Computers Mathematics with Applications*, 59(5):1586–1593, 2010. Fractional Differentiation and Its Applications.
- [4] Mohamed Karim Bouafoura and Naceur Benhadj Braiek. Pid controller design for integer and fractional plants using piecewise orthogonal functions. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 15(5):1267–1278, 2010.
- [5] Yu Bai, Lamei Huo, Yan Zhang, Jiemin Liu, Huiqi Shao, Chuandong Wu, and Zhongbao Guo. A spatial fractional diffusion model for predicting the characteristics of vocs emission in porous dry building material. *Science of The Total Environment*, 704:135342, 2020.
- [6] Denis Matignon and Brigitte Novel. Observer-based controllers for fractional differential systems. volume 5, pages 4967 – 4972 vol.5, 01 1998.

- [7] Weihua Deng, Changpin Li, and Jinhu Lu. Stability analysis of linear fractional differential system with multiple time delays. *Nonlinear Dynamics*, 48:409–416, 01 2007.
- [8] Tricaud Christophe and YangQuan Chen. Time-optimal control of systems with fractional dynamics. *International Journal of Differential Equations*, 2010, 01 2010.
- [9] Denis Matignon. Stability results for fractional differential equations with applications to control processing. 2, 03 1997.
- [10] Iliia Grigorenko and Elena Grigorenko. Chaotic dynamics of the fractional lorenz system. *Physical review letters*, 91:034101, 07 2003.
- [11] Concepción Monje, YangQuan Chen, Blas Vinagre, Dingyu Xue, and Vicente Feliu. *Fractional Order Systems and Control - Fundamentals and Applications*. 01 2010.
- [12] Rafael Martínez-Martínez, Juan L. Mata-Machuca, Rafael Martínez-Guerra, Jorge A. León, and Guillermo Fernández-Anaya. Synchronization of nonlinear fractional order systems. *Applied Mathematics and Computation*, 218(7):3338–3347, 2011.
- [13] Rafael Martínez-Guerra, Claudia A. Pérez-Pinacho, Gian Carlo Gómez-Cortés, and Juan C. Cruz-Victoria. Synchronization of incommensurate fractional order system. *Applied Mathematics and Computation*, 262:260–266, 2015.
- [14] Ibrahima N Doye, Khaled Nabil Salama, and Taous-Meriem Laleg-Kirati. Robust fractional-order proportional-integral observer for synchronization of chaotic fractional-order systems. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 6(1):268–277, 2019.
- [15] S. Sepehr Tabatabaei. Generalized lyapunov stability and designing pseudo-state/order estimator for incommensurate variable order systems.

- Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 107:106127, 2022.
- [16] Fateme Pourdadashi, Masoud Shafiee, and Mohamed Darouach. Design of unknown input fractional order pi observer for fractional order singular systems with application to actuator fault diagnosis. *IET Control Theory Applications*, 13, 09 2019.
- [17] Dian Sheng, Yiheng Wei, Songsong Cheng, and Yong Wang. Observer-based adaptive backstepping control for fractional order systems with input saturation. *ISA Transactions*, 82:18–29, 2018. Fractional Order Signals, Systems, and Controls: Theory and Application.
- [18] Tian Feng, Yue-E Wang, Lili Liu, and Baowei Wu. Observer-based event-triggered control for uncertain fractional-order systems. *Journal of the Franklin Institute*, 357(14):9423–9441, 2020.
- [19] Rafael Martínez-Guerra, Juan Pablo Flores-Flores, and Arturo Govea-Vargas. A globally mittag-leffler bounded high-gain observer for systems with unknown dynamics and noisy measurements. *ISA Transactions*, 2021.
- [20] Yinggan Tang, Haifang Liu, Weiwei Wang, Qiusheng Lian, and Xinping Guan. Parameter identification of fractional order systems using block pulse functions. *Signal Processing*, 107:272–281, 2015. Special Issue on ad hoc microphone arrays and wireless acoustic sensor networks Special Issue on Fractional Signal Processing and Applications.
- [21] Yao Lu, Yinggan Tang, Xuguang Zhang, and Shuen Wang. Parameter identification of fractional order systems with nonzero initial conditions based on block pulse functions. *Measurement*, 158:107684, 2020.

- [22] Bo Zhang, Yinggan Tang, and Yao Lu. Identification of linear time-varying fractional order systems using block pulse functions based on repetitive principle. *ISA Transactions*, 2021.
- [23] Vineet Prasad and Utkal Mehta. Modeling and parametric identification of hammerstein systems with time delay and asymmetric dead-zones using fractional differential equations. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 167:108568, 2022.
- [24] Zishuo Wang, Chunyang Wang, Lianghua Ding, Zeng Wang, and Shuning Liang. Parameter identification of fractional-order time delay system based on legendre wavelet. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 163:108141, 2022.
- [25] Yuanlu Li, Xiao Meng, Bochao Zheng, and Yaqing Ding. Parameter identification of fractional order linear system based on haar wavelet operational matrix. *ISA Transactions*, 59:79–84, 2015.
- [26] Jean-François Duhé, Stéphane Victor, Pierre Melchior, Youssef Abdelmounen, and François Roubertie. Recursive system identification for coefficient estimation of continuous-time fractional order systems. *IFAC-PapersOnLine*, 54(7):114–119, 2021. 19th IFAC Symposium on System Identification SYSID 2021.
- [27] Yinggan Tang, Xiangyang Zhang, Changchun Hua, Lixiang Li, and Yixian Yang. Parameter identification of commensurate fractional-order chaotic system via differential evolution. *Physics Letters A*, 376(4):457–464, 2012.
- [28] Li-Guo Yuan and Qi-Gui Yang. Parameter identification and synchronization of fractional-order chaotic systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17(1):305–316, 2012.
- [29] Bo Wang, Jinping Liu, Madini O. Alassafi, Fawaz E. Alsaadi, Hadi Jahanshahi, and Stelios Bekiros. Intelligent parameter identification and prediction of variable time

- fractional derivative and application in a symmetric chaotic financial system. *Chaos, Solitons Fractals*, 154:111590, 2022.
- [30] Igor Podlubny. *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. Elsevier, 1998.
- [31] Anatoliĭ Kilbas. *Theory and applications of fractional differential equations*.
- [32] Rudolf Scherer, Shyam L. Kalla, Yifa Tang, and Jianfei Huang. The grünwald–letnikov method for fractional differential equations. *Computers Mathematics with Applications*, 62(3):902–917, 2011. Special Issue on Advances in Fractional Differential Equations II.
- [33] Rudolf Gorenflo, Anatoly A Kilbas, Francesco Mainardi, Sergei V Rogosin, et al. *Mittag-Leffler functions, related topics and applications*. Springer, 2020.
- [34] Hans J Haubold, Arak M Mathai, and Ram K Saxena. Mittag-leffler functions and their applications. *Journal of applied mathematics*, 2011, 2011.
- [35] Kenneth S. Miller and Stefan G. Samko. A note on the complete monotonicity of the generalized mittag-leffler function. *Real Analysis Exchange*, 23(2):753–755, 1997.
- [36] Zhiqiang Ma, Zheng H Zhu, and Guanghui Sun. Fractional-order sliding mode control for deployment of tethered spacecraft system. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, 233(13):4721–4734, 2019.
- [37] Yan Li, YangQuan Chen, and Igor Podlubny. Mittag–leffler stability of fractional order nonlinear dynamic systems. *Automatica*, 45(8):1965–1969, 2009.
- [38] Hassan K Khalil. Nonlinear systems third edition. *Prentice Hall*, 115, 2002.

- [39] Peng Wan and Jigui Jian. Global mittag-leffler boundedness for fractional-order complex-valued cohen–grossberg neural networks. *Neural Processing Letters*, 49(1):121–139, 2019.
- [40] Jigui Jian and Peng Wan. Lagrange α -exponential stability and β -exponential convergence for fractional-order complex-valued neural networks. *Neural Networks*, 91:1–10, 2017.
- [41] A. Fradkov. *Cybernetical Physics: From Control of Chaos to Quantum Control (Understanding Complex Systems)*. Springer, 1 edition, 2007.
- [42] R. Genesio and A. Tesi. Harmonic balance methods for the analysis of chaotic dynamics in nonlinear systems. *Automatica*, 28(3):531–548, 1992.
- [43] V. Sundarapandian and I. Pehlivan. Analysis, control, synchronization, and circuit design of a novel chaotic system. *Mathematical and Computer Modelling*, 55(7):1904–1915, 2012.
- [44] R. Martínez-Guerra, J.C. Cruz-Victoria, R. Gonzalez-Galan, and R. Aguilar-Lopez. A new reduced-order observer design for the synchronization of lorenz systems. *Chaos, Solitons Fractals*, 28(2):511–517, 2006.
- [45] Rafael Martínez-Guerra and Christopher Diego Cruz-Ancona. *Algorithms of estimation for nonlinear systems*. Springer, 2017.
- [46] Zheng-Biao Li and Ji-Huan He. Fractional complex transform for fractional differential equations. *Mathematical and Computational Applications*, 15(5):970–973, 2010.
- [47] Z.B. Li and Ji-Huan He. Application of the fractional complex transform to fractional differential equations. *Nonlinear Science Letters A*, 2:121–126, 01 2011.